Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel.

Gisèle Cirade

UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE I – Université de Provence
UFR MIM (Mathématiques informatique mécanique)

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE I

Discipline : **mathématiques appliquées**

Spécialité : **didactique des mathématiques**

École doctorale en mathématiques et informatique de Marseille

présentée et soutenue publiquement

par

Gisèle Cirade

le 29 septembre 2006

Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM

Les mathématiques comme problème professionnel

Directeur de thèse : Yves Chevallard

JURY

Michèle Artaud, IUFM d'Aix-Marseille (examinatrice)
Michèle Artigue, Université de Paris 7 (rapporteure)
Marianna Bosch, Université Ramon Llull, Barcelone (rapporteure)
Yves Chevallard, IUFM d'Aix-Marseille (directeur de thèse)
Anne Nouri, Université de Provence (présidente du jury)
André Pressiat, IUFM d'Orléans-Tours (examinateur)

Remerciements

Ayant enseigné pendant de nombreuses années dans le secondaire sans avoir eu aucune autre « formation » que le compagnonnage – tel était à l'époque le lot de tous les professeurs débutants –, j'ai travaillé sur un sujet de thèse qui ne pouvait manquer d'être passionnant car répondant à des questions *socialement* vives, mais qui s'est révélé pour moi parfois difficile et même douloureux à explorer parce qu'il renvoyait à des questions *personnellement* vives, anciennement ou présentement. Je voudrais ici remercier très chaleureusement Yves Chevallard qui, tout en dirigeant mon travail de main de maître, a su tenir compte des difficultés que j'ai rencontrées en raison de mon passé professionnel, ce qui, de fait, m'a aidée à les affronter. Là bien sûr ne s'arrêtent pas les remerciements que je lui adresse : j'ai beaucoup appris, à la fois des nombreuses séances de travail – toujours très riches – que nous avons eues ensemble et des différents travaux qu'il m'a suggéré d'effectuer. Ses compétences scientifiques indéniables et sa grande érudition, jointes à un engagement fort et une disponibilité à toute épreuve, ont permis à ce mémoire de s'élaborer au fil du temps.

Michèle Artigue et Marianna Bosch ont accepté d'être les rapporteures de ce travail : je les en remercie très vivement. Mes remerciements et ma gratitude vont aussi à Michèle Artaud, Anne Nouri et André Pressiat qui ont bien voulu accepter d'examiner ce travail en tant que membres du jury, ainsi qu'à Étienne Pardoux, directeur de l'École doctorale en mathématiques et informatique de Marseille, sans qui ces lignes n'auraient pu être écrites.

L'INRP et l'IUFM d'Aix-Marseille m'ont accordé durant quatre ans des décharges de service pour formation doctorale : qu'ils en soient remerciés. Cela m'a permis de dégager un peu de temps, de ce temps si précieux qui est un privilège du chercheur et sans lequel il serait difficile d'accomplir un tel travail.

Le soutien sans faille que m’a apporté Michèle Artaud tout au long de ces années m’a été d’un secours indispensable. Les nombreux échanges que nous avons eus sur des sujets divers – qu’ils relèvent de la didactique des mathématiques ou qu’ils soient relatifs à des problèmes institutionnels, par exemple – m’ont grandement aidée. Qu’elle en soit ici amicalement remerciée.

Je tiens aussi à remercier ceux de mes collègues de l’IUFM qui, d’une manière ou d’une autre et à des titres divers, m’ont aidée, tels Gérard Nin et Pierre Stambul qui ont toujours très obligeamment répondu aux questions que je leur posais. J’adresse des remerciements tout particuliers à Michel Jullien, Christian Reymonet, Odile Schneider et Jacques Tonnelle, tuteurs des PCL2 de mathématiques, pour avoir – année après année – mis à ma disposition tous les documents qu’ils étaient amenés à recueillir dans le cadre de la formation et que j’ai utilisés comme matériels pour ma thèse. Je citerai une deuxième fois Michel Jullien, qui a accepté de lire mon mémoire et de me faire part de ses observations.

La liste ne serait pas complète si je ne citais les parents et amis qui m’ont encouragée et aidée tout au long de ces années et, parmi eux, tout particulièrement, Danièle avec qui j’ai eu de nombreuses discussions enrichissantes et qui m’a en particulier apporté son concours à l’occasion de l’étude sur les angles alternes-internes, Edwige qui, avec sa bonne humeur habituelle et l’aide d’Anouk, m’a permis de rester plus sereine face aux problèmes ortho-typographiques, Dominique qui m’a été d’un secours inappréciable, tout particulièrement au moment de la mise en page et de l’impression, ainsi que mes parents qui ont accepté tous les deux de traquer – jusque dans les figures et les formules mathématiques – les coquilles présentes dans le mémoire.

Pour terminer, je voudrais remercier mon fils, Antoine, et mon compagnon, Arthur, qui ne savent que trop ce que veut dire absence *in præsentia*. Ils m’auront soutenue, chacun à sa façon mais en permanence et sans jamais rechigner, durant ces nombreuses années pendant lesquelles notre vie familiale a été quelque peu perturbée. Qu’ils en soient ici une fois encore remerciés !

Table des matières

Introduction

Devenir professeur de mathématiques

Le travail présenté ici s'inscrit dans un champ de recherche en développement relatif aux métiers de l'enseignement et à la formation à ces métiers [1]. Notre contribution est cependant intimement articulée à l'effort systématique développé durant de nombreuses années pour construire à l'IUFM d'Aix-Marseille une formation des professeurs de mathématiques répondant à certaines exigences que nous serons amenée à expliciter au long des différents chapitres composant ce mémoire. Du point de vue de ce qu'il est convenu d'appeler la méthodologie de la recherche, notre travail s'inscrit dans un domaine sans doute trop peu développé ou du moins trop méconnu encore aujourd'hui, qui est celui de la *clinique des formations*. Celle-ci, bien entendu, suppose des formations à observer, et un système de prise et de traitement de ces informations. Pour ce qui est de la formation, c'est donc celle des élèves professeurs de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille que nous avons observée cliniquement, sur les deux ans dont elle se compose. Depuis plusieurs années, nous avons pu être associée en tant que chercheuse à la vie de cette formation, avec un accès exceptionnel, quasiment libre, à l'ensemble de ses composantes et de ses archives [2]. Ce travail a été facilité par la pratique du responsable de la formation, que nous tenons à remercier spécialement, ainsi que son équipe, de mettre par écrit l'essentiel du travail accompli avec les élèves professeurs, tant en première qu'en deuxième année. Soulignons en particulier l'importance de cette mise en texte du savoir élaboré dans le cadre de ce qui est le cœur de la formation des

---

[1] En témoignent entre autres divers travaux dans le champ des mathématiques (par exemple Lenfant 2002, Kuzniak 2003) comme, dans un champ plus large, l'existence de la revue *European Journal of Teacher Education* (voir par exemple http://www.inrp.fr/vst/Periodiques/DetailPeriodique.php?revue=1019).

[2] Nous avons également pu procéder, chaque année, à des enquêtes par questionnaire ainsi qu'à des entretiens de groupe qui ont nourri notre réflexion même s'ils n'apparaissent pas formellement dans les développements ci-après.

professeurs stagiaires (c'est-à-dire des élèves professeurs de deuxième année), le séminaire dit *du mardi matin*, qui s'est déroulé chaque année, sauf exception, au long de vingt-quatre séances de trois heures, et dont on verra qu'il est l'un des « personnages » clés de la formation – et donc de nos propres analyses.

La clinique de cette formation était centrée sur une interrogation globale : quelles difficultés rencontre-t-on quand, étudiant en mathématiques, on décide d'aller vers le professorat de mathématiques ? De ce vaste programme, nous n'avons bien sûr réalisé qu'une petite part, mais qui nous a paru essentielle, fondatrice du métier et déterminante pour ses évolutions possibles. Comme l'expérience, la clinique suppose des outils. L'outillage « méthodologique » sera exposé au fil des chapitres. L'outillage théorique est celui qu'apporte la *théorie anthropologique du didactique* (TAD), sur laquelle nous renvoyons à une synthèse récente, due à Yves Chevallard [3]. On y verra comment les premiers travaux sur la théorie de la transposition didactique se sont développés, par un chemin *a priori* difficilement prévisible, d'abord en une théorie des *rapports personnels et institutionnels*, puis en une théorie des *praxéologies* – personnelles et institutionnelles –, dont nous ferons un usage discret mais crucial dans l'ensemble des développements qui suivent. Mentionnons encore une distinction peu élaborée, mais d'un emploi suggestif, celle du *métier* et de la *profession*. Bien qu'il demeure hanté par le leurre d'un certain amateurisme, l'exercice du rôle d'enseignant est aujourd'hui, dans nos sociétés, un véritable métier, avec ses règles, ses normes – si fluctuantes ou incertaines soient-elles parfois – et ses modes d'organisation, de formation et d'exercice. Mais ce métier n'est pas encore pleinement une profession (d'aucuns le taxent au reste de *semi-profession*), si, du moins, on évoque par ce mot un certain type d'organisation d'un métier et de prise en charge des problèmes qui l'assaillent. On verra comment cette esquisse de définition prendra chair au fur et à mesure de l'avancée du travail que nous présentons ici.

---

[3] Yves Chevallard, *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*, conférence plénière au 1er congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (Baeza, 27-30 octobre 2005). À paraître.

Chapitre 1

Que disent les maîtres de stage ?

1. Normes professorales

1.1. Lorsqu'ils entrent dans la profession enseignante, les élèves professeurs des IUFM doivent identifier et faire leur – en se donnant la compétence de les mettre en œuvre – les normes du métier. Parler de normes, tout court, est bien sûr trop rapide : le cœur du problème que nous faisons nôtre ici est en vérité la question de la *normativité* professionnelle, et de la normativité *professorale* en particulier [1]. Pour cette raison notamment, l'exploration du système de normes prévalant, d'une part, et l'exploration des conduites adaptatives de divers types (y compris par création de « contre-normes » personnelles) qu'adoptent les jeunes professeurs à l'endroit de ces normes établies, d'autre part, apparaissent *a priori* fortement solidaires. Il en résulte en particulier que, si l'on ne peut évidemment ignorer les normes qui, en un lieu et un temps déterminés, sont effectivement pratiquées par les acteurs de la profession, on ne peut pas davantage ignorer la dynamique normative, souvent profuse, qui travaille en tous lieux et en tous temps la pratique et la pensée des professionnels, fussent-ils débutants. Encore nous faudra-t-il distinguer, bien entendu, les normes saisies à travers les

[1] La *normativité* d'une personne ou d'un collectif désigne ici sa capacité à participer à la critique des normes existantes et à l'élaboration de normes alternatives. La normativité doit être bien distinguée de la *normalisation*, qui désigne l'imposition de normes (de règles) sans préciser le mode de participation de ceux à qui elles s'imposent au processus de définition et de mise en œuvre des normes en question. On doit distinguer également la notion dynamique de normativité de la notion statique de *normalité*, c'est-à-dire de conformité à des normes établies. Ces distinctions ont été en grande partie élaborées par Georges Canguilhem dans l'ensemble de son œuvre d'épistémologue des sciences biologiques et médicales, notamment dans *Le normal et le pathologique* (PUF, Paris, 1966). Nous n'entrerons pas plus avant dans cette généalogie, à propos de laquelle on pourra consulter par exemple Macherey (1993).

pratiques et les discours spontanés des normes évoquées ou invoquées par les acteurs du système scolaire.

1.2. Au moins autant que d'autres métiers, le métier de professeur apparaît d'emblée soumis à des normes dont le respect semble être une valeur en soi, en même temps qu'il crée ses propres normes à partir d'un matériau normatif prescrit par les autorités de tutelle et dont la profession s'empare pour lui imprimer sa marque propre. Tout professeur est ainsi tenu de corriger les travaux de ses élèves et de le faire dans un délai raisonnable. Qui s'affranchirait de cette norme traditionnelle ferait un grand pas vers sa mise au ban professionnelle ! Notons à ce propos la puissance d'imposition des normes reçues dans la profession : tel travail en soi fort pénible mais regardé comme essentiel à la définition du métier sera exécuté par chacun sans coup férir ; tandis que tel autre type de travail, de pénibilité bien moindre, et pertinent tout autant pour atteindre le but visé – la diffusion scolaire des connaissances –, sera peut-être boudé, voire refusé, même quand il participe d'une injonction claire et nette venue de l'autorité de tutelle. Certaines des normes prescrites par l'autorité de tutelle, qui ne sont en vérité que des normes *potentielles*, des normes « sur le papier », n'arriveront jamais à « prendre racine » dans les us et coutumes de la profession, soit parce qu'elles seront absolument refusées, soit parce qu'elles se trouveront vidées de leur substance par quelque modification *sui generis*. Ainsi, au plan du simple vocabulaire, déjà, les créations de la profession ne sont-elles pas rares : beaucoup de professeurs de mathématiques parlent par exemple d'activités *préparatoires*, expression qui n'apparaît *jamais* dans les programmes du collège aujourd'hui en vigueur, et dont l'usage qui en est fait par les professeurs ne manque pas de tirer les « activités » prescrites par les programmes vers la marge du travail scolaire (elles ne seraient alors, en effet, qu'une préparation à ce travail *stricto sensu*), alors qu'elles sont censées, officiellement, en être le cœur battant ! Certaines des normes ainsi installées peuvent se révéler antinomiques de la doctrine légale élaborée et diffusée par le ministère de l'Éducation nationale. Ainsi en va-t-il par exemple de l'attitude face aux classes de seconde selon le destin scolaire de leurs élèves. Alors que la doctrine officielle sur ce point est que la seconde est une classe « de détermination », les professeurs semblent n'avoir jamais vraiment cessé de moduler l'enseignement qu'ils y donnent en fonction des trajectoires jugées les plus probables des élèves à qui ils s'adressent – insistant par exemple, à l'instar de tel professeur conseiller pédagogique, sur le fait que, en telle seconde, il convient d'insister plus qu'on ne le ferait ailleurs sur « les statistiques », au motif que la classe concernée « a une forte orientation “sciences sanitaires et sociales [2]” ».

1.3. On doit évidemment s’interroger sur le domaine de validité de ce qu’on croira reconnaître comme une norme *de la profession*. La norme supposée règne-t-elle sur la profession tout entière ? Est-elle connue et reconnue de tous, ou, à l’opposé, varie-t-elle de professeur à professeur, voire, pour un même professeur, varie-t-elle en fonction du type de classes qu’il identifiera dans telle classe qui lui est allouée ? En d’autres termes, quelle est la réussite de telle ou telle norme possible ? Sans entrer ici plus avant dans cette question, notons seulement que, lorsqu’elle est complète, la *réussite normative* se paie d’une mise en transparence qui désarme le débat, et, potentiellement, le *progrès* des normes. C’est ainsi que, si la profession tout entière reconnaît la nécessité d’une *préparation* des séances de classe, norme qui apparaît même comme une des valeurs les mieux cotées du panthéon professoral, elle ignore entièrement le geste symétrique, qu’en telle ou telle institution on nomme par exemple *débriefing* : s’il y a un *avant* de la séance de cours, *il n’y a pas d’après*, et l’existence d’une analyse *a posteriori* reste aujourd’hui encore caractéristique des activités de recherche en didactique ou des activités de formation articulées à l’observation de classes.

1.4. Que sont les normes qui règlent et régulent l’action et la pensée des professeurs de mathématiques aujourd’hui ? Sans doute faut-il être à cet égard très prudent : même s’il existe des invariants « lourds », à forte inertie, il existe aussi des évolutions normatives variées, qui parfois se côtoient au sein d’un même établissement en s’ignorant les unes les autres. À l’orée de ce travail, il apparaît en conséquence non déraisonnable de parler d’abord d’un « maquis normatif », avec lequel le jeune professeur va devoir se familiariser en ne sachant pas toujours ce que recèlent ses entrelacs. C’est ce maquis normatif que nous allons explorer, de manière toujours partielle et parcellaire, afin d’identifier la suite un peu indéterminée des situations problématiques que le nouveau venu dans la profession devra affronter. Nous avancerons donc à pas comptés dans le maquis des normes professorales en empruntant d’abord quelques exemples à un corpus que nous retrouverons tout au long de ce chapitre, celui des rapports rédigés par les maîtres de stage sur l’activité des élèves professeurs de deuxième année de

---

[2] Ce professeur désigne ici vraisemblablement la série SMS (sciences médico-sociales), qui est l’une des séries technologiques. (Il existe par ailleurs, dans l’enseignement professionnel, un BEP « Carrières sanitaires et sociales ».)

l'IUFM de l'académie d'Aix-Marseille [3]. Ces rapports, notons-le ici, ont pour le chercheur le mérite de n'avoir pas été rédigés afin de faire connaître les normes de la profession : en aucune façon ils ne prennent pour destinataire le chercheur, qui d'ailleurs ne les a nullement sollicités, et qui se contente d'en analyser la structure et le contenu. La normativité qui s'y exprime, quand elle n'est pas implicite, voire non consciente, s'adresse à l'équipe de formation de l'IUFM – et au professeur stagiaire lui-même, bien entendu, dont il s'agit en principe de faire connaître les points forts et les points faibles. Dans ces rapports, ainsi, se dessinent en creux les normes de la profession *vues par le maître de stage*, tout particulièrement celles d'entre elles que l'élève professeur aura su reconnaître et mettre en œuvre de manière pertinente ou sur lesquelles, au contraire, il sera, au moins provisoirement, déclaré en échec. Que révèlent donc ces rapports ? Limitons-nous, ici, à quelques exemples introductifs. D'une manière générale, on voit un certain nombre de maîtres de stage souligner – à bon entendeur, salut ! – que « l'activité d'enseignement demande beaucoup d'exigences, de rigueur et d'investissement », affirmation en laquelle on peut entendre que le métier de professeur en est bien un, qu'il a ses normes propres, qu'il convient de respecter. À l'opposé de tout dilettantisme, cette « activité » exige, dit encore un maître de stage, beaucoup d'énergie, un grand dynamisme – sans quoi on ne saurait affronter avec quelque chance de succès certaines classes « difficiles ». Dans cette perspective, tel professeur stagiaire recevra l'admonestation suivante : « Dans ce type de classe, le dynamisme est très important. Les élèves doivent se sentir, à tout instant, concernés pour suivre le cours et ne pas bavarder ». Pour tel autre professeur stagiaire, semblable reproche n'est plus qu'un souvenir : « À ma première visite dans cette classe, Loïc avait les défauts de tous les débutants, à savoir : parlait très vite ; écrivait dans tous les coins du tableau ; manquait de dynamisme ». On voit – c'est là une règle de portée assez générale – que la norme évoquée ne procède pas seulement d'une exigence « éthique » proférée *in vacuo*, mais que, dans le contexte du corpus envisagé, elle apparaît surdéterminée, plus platement, par un besoin technique : sans dynamisme, une classe ne « tourne » pas ! Il s'agit là peut-être d'une norme opportuniste, énoncée à l'adresse de débutants dont on craint qu'ils mesurent mal le niveau d'engagement que requiert l'exercice du métier dans lequel on guide leurs premiers pas. Mais cette circonstance est précisément ce qui nous vaut une explicitation du moteur, prétendu indispensable, de la geste enseignante : un niveau supérieur d'énergie. Comme toujours, vraisemblablement, le pouvoir d'imposition

---

[3] Chaque élève professeur fait l'objet de deux rapports de la part de son maître de stage, le premier vers la fin du premier trimestre, le second vers la fin du deuxième trimestre.

de la norme dégagée ici n'est pas absolu. Et sans doute existe-t-il ici ou là des enseignants qui, tout en ne souscrivant pas, par leur pratique, à cette norme prétendue, obtiennent des résultats comparables à ceux de leurs collègues « normés », à l'étonnement de leurs pairs.

2. Normativités en acte : le cas de Sabrina

2.1. Pour saisir le travail normatif à l'œuvre dans les rapports des maîtres de stage, nous présenterons les résultats d'un examen juxtalinéaire de quelques-uns des rapports rédigés au cours de l'année 2003-2004. Les deux premiers concernent Sabrina, 23 ans, élève professeure agrégée ayant en responsabilité une classe de seconde. Le premier rapport du maître de stage commence ainsi :

> Sabrina intervient pour cette année de stage dans une classe de Seconde peu « indifférenciée » où se trouve une majorité d'élèves qui a choisi l'option Danse et par ce fait se trouve sur des rails conduisant essentiellement à une Première L. Autant dire que j'avais quelques soucis sur les réactions réciproques : une enseignante qui, très motivée, souhaite dispenser un enseignement de qualité, et des auditeurs davantage absorbés par la pratique de leur art, et gênés par des horaires et une discipline contraignants au Conservatoire. Sabrina a, semble-t-il, gommé les réticences *a priori* chez ces jeunes gens et jeunes filles qui demandaient à être rassurés sur les choses mathématiques. Elle a su en quelques heures arrondir les angles et faire que la classe tourne ; certes le terrain n'est pas partout meuble ni fécond, mais des mathématiques peuvent y germer et du moins y sont-elles semées consciencieusement dans le respect des programmes et leurs commentaires.

La norme ministérielle prétend faire de la seconde une classe « de détermination », à l'issue de laquelle un choix d'orientation sera effectué, par exemple vers une classe de première L (« littéraire »). Or le rapport examiné laisse déjà entrevoir deux éléments normatifs solidaires et, pour l'un au moins, incompatible avec cette norme « officielle ». Choisir en seconde l'enseignement de détermination *Arts* (qui comporte au choix sept spécialités dont la *Danse*), est une possibilité ; il s'agit même d'un choix recommandé à qui vise un bac L à profil artistique. Mais, en bonne doctrine, ce choix ne saurait être *imposé* : un élève peut légitimement viser un bac littéraire à profil artistique sans avoir, en seconde, choisi l'option *Arts*. Inversement, surtout, le fait qu'un élève *déclare* vouloir s'orienter vers un bac à profil artistique et affirme viser l'accès à une classe de première L n'entraîne pas pour autant qu'il puisse être dispensé des enseignements « ordinaires », communs à tous les élèves de seconde. Car, en particulier, cet élève pourrait, en cours d'année, changer son choix et décider, pour de fort bonnes raisons, de s'orienter vers – par exemple – une classe de première S, ce dont, en vertu du principe même qui gouverne les secondes « de détermination », il ne saurait alors être empêché au seul motif que l'enseignement de mathématiques (ou de sciences physiques, etc.) reçu dans la seconde suivie n'était pas « au niveau » – parce que cet enseignement aurait été subrepticement adapté à des élèves désireux de s'orienter vers une première L.

2.2. Si elle était avérée, une telle adaptation confinerait à la forfaiture ; car le principe est en effet que l'enseignement des mathématiques prodigué en seconde s'adresse à chacun, *indépendamment* des études ultérieures et même indépendamment de *l'intention* d'effectuer ultérieurement tel ou tel type d'études. L'élève, en effet, se forme en tant que citoyen avant de se former comme futur ingénieur, ou futur danseur, etc. Ce que le rapport du maître de stage laisse transparaître, donc, c'est cette quasi-norme selon laquelle il apparaît non illégitime que l'intérêt des élèves pour telle discipline enseignée dépende principalement de la place que cette discipline occupera dans leurs études ultérieures, voire dans la profession qu'ils envisagent d'embrasser. C'est évidemment oublier que l'École forme, non pas d'abord des futurs ingénieurs, des futurs danseurs, etc., mais des citoyens, qui ont *en tant que tels* à connaître des mathématiques, de la géographie, de la littérature, etc. Le fait que l'on se destine à une activité professionnelle dans laquelle la connaissance de telle ou telle matière soit regardée comme peu utile *ne justifie alors nullement* que l'on se détourne de cette matière : le citoyen ne se réduit pas à son activité professionnelle et ses besoins de connaissance et de culture ne sauraient se déterminer sur cette base-là, au reste fréquemment sous-estimée [4]. Sans que l'on puisse être catégorique à cet égard, le passage précédemment cité semble ainsi faire apparaître comme une norme légitime du comportement de l'élève – une norme contre les effets négatifs de laquelle le professeur doit lutter – le fait que celui-ci mesure son investissement dans l'étude d'une matière donnée à l'intérêt par lui reconnu de cette matière dans les études ou l'activité professionnelle qu'il envisage. Cela noté, il convient surtout d'ajouter que le travail normatif – qui, idéalement, pourrait viser à déconstruire une telle

[4] Le programme de mathématiques de la seconde technologique de la série « Techniques de la musique et de la danse » (classe qu'il convient de distinguer d'une seconde générale où une partie des élèves ont choisi l'option *Arts*, comme dans la classe de Sabrina) comporte ainsi, parmi les thèmes d'études au choix du professeur, certains sujets relevant des savoirs de la danse. Ainsi par exemple des propriétés de l'icosaèdre, qui permettent de « faire comprendre pourquoi [ce solide] été utilisé par Rudolph von Laban dans le langage chorégraphique de la danse moderne ». Rudolph von Laban (1879-1958), chorégraphe autrichien d'origine hongroise, a mis au point une notation (1928), la plus utilisée aujourd'hui, permettant en principe de noter toutes les danses. (Voir Norbert Verdier, « Danse avec les chiffres », *Tangente*, n° 42 ; et http://bedfordi.20m.com/polyhedra1.html.)

norme et à construire une norme alternative – n'emprunte pas ici la voie que l'on vient d'ébaucher, qui consisterait à donner une place centrale à la question de l'éducation citoyenne, objectif imposant alors à chacun une certaine *instruction*, celle que prévoient les programmes des différentes disciplines communes dans tout un ensemble de champs de connaissances, y compris les mathématiques. Par contraste, l'effort normatif s'adosse en effet ici à une norme professorale souvent moquée, mais dont on saisit mieux alors la valeur fonctionnelle dans un cadre de dépression normative : « le respect des programmes et [de] leurs commentaires ». C'est cette norme qui, ici, permet à Sabrina – selon son maître de stage – de maintenir le cap de l'étude, sans trop d'égards pour les particularismes éventuellement affichés par ses élèves et concrétisés dans leurs choix d'options.

2.3. Une autre norme apparaît en filigrane dans le rapport examiné, norme que, selon son maître de stage toujours, Sabrina méconnaît. Le rapport se poursuit en effet ainsi :

> Sabrina dans ses préparations bien dosées et rédigées paraît exigeante avec elle-même ; les documents personnels qu'elle utilise ne sont pas lus, on sent une réorganisation permanente en fonction de la réaction des élèves, et au fur et à mesure que s'étend son autorité sur la classe (il n'est pas commode d'être une « stagiaire » !) elle prend un peu plus de distance par rapport à ses belles préparations écrites mais statiques par nature.

L'opposition structurante se fait ici entre l'activité de Sabrina en relation avec ses propres exigences personnelles, qui sont saluées de manière quelque peu formelle par le maître de stage, et les exigences qu'appelle une bonne prise en compte des besoins des élèves et de ce qu'ils peuvent recevoir. En indiquant que, à observer l'évolution de Sabrina, ainsi qu'il l'a fait, « on sent une réorganisation permanente en fonction de la réaction des élèves », le maître de stage laisse entendre que la prise en compte de cette réaction n'était pas, au départ, véritablement réalisée. Corrélativement à cette attention plus grande portée aux élèves, le rapport note la prise de distance par rapport à des préparations certes impeccables, mais, si l'on peut dire, unilatérales. Ainsi se manifeste une norme qui semble être au cœur de la culture professionnelle enseignante d'aujourd'hui : les élèves constituent l'alpha et l'oméga du travail du professeur, le critère dernier, la pierre de touche essentielle, par rapport à quoi tout s'ordonne. Sans doute faut-il voir dans cette norme un effet de l'état historique d'un métier dans lequel, faute de critères « théoriques » reconnus et largement acceptés, le seul repère bien partagé est celui de l'engagement des élèves dans le travail proposé – sans parler encore de leur réussite –, à l'instar de ce qui se passerait en médecine si l'unique critère de l'intervention médicale était sa bonne acceptation par le patient, indépendamment de sa guérison ! Cette norme alumnocentrée [5] est en vérité insistante, quasiment ubiquitaire. C'est ainsi que, lorsque le maître de stage note ensuite dans son rapport que Sabrina « propose des travaux écrits régulièrement », ce qui est apparemment une exigence normée de la profession (sans qu'on sache, d'ailleurs, ce que « régulièrement » signifie au juste), le maître de stage se hâte de souligner que le travail de Sabrina est positif en cela que « les élèves ont compris en majorité la qualité qui est attendue et respectent les consignes ». Les élèves, toujours les élèves : les élèves sont, ici comme ailleurs, l'aune à laquelle se mesure la qualité de l'enseignement prodigué. De la même façon, mais en sens inverse, le maître de stage fait reproche à Sabrina de ce que les « exercices courants » dont elle nourrit le travail ordinaire de la classe sont, à ses yeux, donnés en trop grande quantité. Or ce reproche est motivé par le fait que « le temps est compté au niveau Seconde », ce qui rappelle à Sabrina qu'il convient de prendre en compte les élèves, non pas seulement comme élèves du cours de mathématiques, mais comme assujettis à *l'ensemble* des cours d'une classe de seconde. Quand il en vient à juger de la qualité de ce contenu *a priori* surabondant, le maître de stage ne se départit pas davantage de son critère de base : les problèmes proposés aux élèves, note-t-il, sont « classiques » et « intéressants », ce qui fait droit à une certaine qualité qu'ils possèderaient intrinsèquement ; mais, ajoute-t-il surtout, ces mêmes problèmes « provoquent des réactions de curiosité » de la part des élèves : les élèves ne sont jamais loin ! Et de distinguer entre une réaction de curiosité positive (« souvent »), mais quelquefois aussi « apparemment négative », jugeant ainsi finement le travail de l'enseignante *à travers l'attitude des élèves*. Il en va de même à propos de ce que le maître de stage nomme « les leçons de présentation des notions » : apparemment, celles-ci peuvent être louées dans la mesure où l'observation révèle que, pendant leur déroulement, « les élèves s'appliquent, sont attentifs et posent des questions assez spontanément ». Les élèves, leurs réactions, leurs curiosités, leurs étonnements : tel est le trésor qu'un professeur débutant doit apprendre à reconnaître et à gérer. Sabrina, à cet égard, progresse ; devant les questions des élèves, précise le maître de stage, elle « répond » (au lieu de fuir les questions, par exemple en les ignorant), et, mieux que cela, elle « apprend à gérer ses réponses » en se soumettant de mieux en mieux à une norme essentielle sur laquelle nous allons revenir, que le maître de stage évoque à travers la mention de « l'intérêt général », et selon laquelle c'est avec *la classe* qu'il faut dialoguer, plutôt qu'avec les élèves pris un à un de manière quasi indépendante – ce qui enrichit et complique l'exigence alumnocentrique dont nous avons vu la mise en avant dans ce qui précède.

[5] Le latin *alumnus* désigne le disciple, l'élève.

2.4. Le rapport final du maître de stage, quelques mois plus tard, témoigne tout au long de cette sensibilité au comportement de la *classe* comme totalité, plutôt qu'au comportement des individus qui la composent pris un à un. Sabrina, lit-on, « paraît à l'aise dans sa classe », ce qui, pour le rédacteur, a un motif évident : « elle peut être satisfaite du comportement des élèves ». La sensibilité aux élèves prend, au reste, des formes quelquefois insoupçonnées : c'est ainsi que le maître de stage donnera à sa jeune collègue un satisfecit pour avoir « conduit son cours très convenablement », sans s'être laissée déranger par le faible nombre de « demandes pour une première S » ! Conduire son cours très convenablement, c'est ici savoir faire des « choix appropriés » (sous-entendu : aux élèves, c'est-à-dire à la classe), « s'adapter aux besoins et aux possibilités des élèves », en ne s'enfermant pas dans une progression figée, mais « en la remaniant si besoin [est] ». Bien entendu, cette adaptation doit se faire – et s'est faite – « sans nuire au contenu » : l'authenticité mathématique n'est pas perdue de vue, mais elle est subordonnée à l'adéquation à la classe. À cet égard, on notera, à côté de la référence classique aux « possibilités » des élèves, la mention des « besoins » de ces mêmes élèves, référence moins classique, peut-être induite en partie par le contact – au moins à travers la stagiaire – avec la formation donnée à l'IUFM. Quoiqu'il en soit, la sensibilité aux élèves, la capacité à réagir, dans l'immédiateté d'une séance en classe comme par le truchement de la programmation à plus long terme de ses activités, apparaissent ici comme une capacité clé de la professionnalité enseignante. Le thème de la réactivité du professeur est une déclinaison subtile mais apparemment vitale, du moins pour le maître de stage que nous suivons ici, de la sensibilité à la classe. Sabrina, note-t-il encore, a semble-t-il appris à rendre ses préparations plus « synthétiques » : les guillemets sont du rapporteur lui-même, qui veut sans doute signifier par là que le texte préparé reste ouvert à des épisodes de classe peu prévisibles, engendrés par les réactions des élèves au cours même de la séance. Le manque de mots pour exprimer cette exigence apparaît encore dans la tentative du maître de stage pour justifier un tel parti pris de laconisme dans les préparations de cours : des préparations plus synthétiques, écrit-il en effet, cela devrait permettre à Sabrina d'ajouter « une touche plus locale à ses cours ». Et le rédacteur d'expliciter la norme qui inspire son propos : « ne pas tout prévoir d'office, mais se préparer à des réactions que seule une leçon vivante peut provoquer. » Nous sommes ici, il est vrai, tout près d'une apologie, qu'inspire parfois l'ivresse de la pratique nue, de la magie personnelle et des prouesses qu'elle permet parfois d'accomplir dans l'intimité d'une classe ; tout près, au fond, de l'éloge de la « sérendipité [6] ».

---

[6] Le mot de *sérendipité* a une histoire longue et compliquée à propos de laquelle on trouvera par exemple des

2.5. L'alinéa qui suit – l'antépénultième du rapport – met en relation, significativement, deux normes centrales, l'une ancienne, le respect du programme, l'autre moderne, l'adéquation aux capacités de réception des élèves :

> Sabrina a continué de proposer des travaux écrits régulièrement, en y intégrant des travaux préparatoires à l'abord de nouvelles notions où elle s'est toujours montrée rassurante. Dans ses lignes principales le « programme » sera bouclé, et toutes les notions importantes ont été au fur et à mesure mises en relief.

Souci des élèves, dans le respect du programme. L'avant-dernier paragraphe est bref mais reconduit subtilement cette dualité : « Son autorité, y indique le rapporteur, s'est installée dans des limites profitables et à la détente et aux divers travaux. » Ici, formellement, le souci de la personne de l'élève (« la détente ») vient avant même le souci de son instruction (« les divers travaux »). Si le rapporteur dit vrai, l'élève professeure est désormais entrée dans le secret du métier. La conclusion en découle : cette jeune stagiaire est un professeur à part entière, que l'on souhaiterait même voir poursuivre son activité dans l'établissement où elle a su si bien se faire admettre pendant cette année de stage.

3. Normativités en acte : le cas de Séverine

3.1. Dans son premier rapport, la maître de stage de Séverine décrit la situation de la stagiaire selon des variables convenues : niveau de classe (une seconde), nombre d'élèves (ils sont 34), réussite en mathématiques (« un niveau modeste »), attitude générale des élèves (« bavards », mais cela « dans toutes les disciplines »). On retrouve ici la référence aux élèves – nombre, engagement dans l'étude de la matière, comportement général. Comme souvent, les indications apportées le sont sans grand commentaire, comme si leur interprétation était univoque et bien partagée, ce qui peut être, en vérité, à l'origine d'interprétations indues, notamment chez un enseignant qui débute avec le type de classes considéré et qui sera alors poussé, par exemple, à adopter d'emblée une attitude peu tolérante et quelque peu répressive à

---

informations dans l'encyclopédie Wikipédia. S'inspirant ici du titre de l'un des articles mentionnés dans l'entrée *Sérendipité* de cette encyclopédie en ligne, on peut dire que la sérendipité est l'art d'exploiter l'imprévu, bien entendu de façon supposée « créative ». La prise en compte de ce qui advient dans une classe au cours d'une séance, eu égard à ce qu'il était prévu d'y faire, est évidemment une variable importante que le professeur doit apprendre à maîtriser. On s'éloigne cependant de la maîtrise souhaitable lorsque l'histoire de la classe tend à se réduire à la somme des réactions improvisées par le professeur face à des événements eux-mêmes imprévus.

l'endroit de prétendus bavardages qui ne sont peut-être que de simples murmures erratiques, ou à diminuer ses exigences dans la matière, en une tentative *a priori* pour s'adapter au niveau réputé « modeste » des élèves. On notera surtout, par contraste, que les mathématiques à enseigner dans une classe de seconde d'aujourd'hui, qui sont tout de même, vraisemblablement, un facteur de réussite ou d'échec et, souvent solidairement, de convivialité ou d'anomie dans les comportements généraux, ne sont ici pas même évoquées – la simple mention du fait qu'il s'agit d'une classe de seconde semblant suffire. On a là, sans doute, une norme fort ancienne de la profession : le silence à propos des contenus enseignés – silence que seules les perturbations imprimées par les projets de changement de programmes viennent de loin en loin troubler. Alors que, lorsqu'il se *prépare* à l'exercice de la profession, lorsque, au contact de ses formateurs à l'IUFM, l'élève professeur évoque la classe qu'il a en responsabilité, les mathématiques à y enseigner sont une donnée essentielle, dans la profondeur du métier cet essentiel s'implicite, à la façon d'une réalité sacrée dont l'exhibition, et même la simple mention, ne peuvent se faire qu'en de rares occasions quasi rituelles. Cette norme anciennement constituée, qui entre en conflit avec certains gestes professoraux récents – telle la fabrication d'un énoncé de devoir commun aux classes d'un même niveau, ce qui oblige tant soit peu à communiquer sur des contenus mathématiques – est sans doute stabilisée par tout un ensemble de facteurs. Par le fait, tout d'abord, que l'enseignant de mathématiques est regardé comme ce personnage supposé par définition capable d'enseigner des mathématiques, ce qui exclut par principe qu'on ait à entrer avec lui dans le détail des contenus mathématiques à enseigner, qui sont son affaire ; par le fait, ensuite, que la capacité à enseigner n'implique pas, pratiquement, la capacité à parler de ce qu'on enseigne en dehors des contextes stricts d'enseignement ; par le fait, enfin, que la légitimité à en parler est elle-même fortement dépendante du contexte d'interaction sociale dans lequel on pourrait être amené à le faire, et qu'en particulier cette légitimité peut se perdre entièrement lorsqu'on passe d'un contexte d'enseignement à un contexte hors enseignement, même s'il en est proche – il est en général mal venu d'aborder un collègue de sa discipline sur une question de mathématiques à propos de laquelle ce collègue ne vous a pas sollicité, ce qui est la règle générale.

3.2. Le paragraphe suivant du rapport d'étape nous fait entrer dans une nouvelle dimension de la profession enseignante, celle de *formateur* d'enseignants qu'assument les maîtres de stage ; le rapport précise [7] :

> L'organisation du travail entre Séverine et le PCP est la suivante :
>
> – une visite hebdomadaire dans la classe de Séverine ;
>
> – une heure de travail hebdomadaire au cours de laquelle sont abordés les points suivants : compte rendu de la dernière visite effectuée, préparations futures.
>
> – des réunions de travail spontanées selon les besoins ;
>
> – des visites effectuées dans la classe de Seconde du PCP.

Il faut souligner ici que la maître de stage est, en l'espèce, une ancienne élève de l'IUFM, où, avant Séverine, elle a elle-même reçue une formation dont la normativité marque sans doute en partie ses praxéologies professionnelles. La facilité qu'elle a ainsi à expliciter l'organisation du travail avec sa stagiaire est à cet égard un indice, et peut-être même un signe de connivence. Mais on voit, sur l'exemple de la norme du silence touchant les contenus mathématiques, que cette maître de stage n'en est pas moins assujettie aux normes courantes de la profession. C'est en particulier ce que vient confirmer le paragraphe suivant, qui met en avant ce que nous avons appelé la norme alumnocentrée :

> Séverine a, dès le début de l'année, mis en place des séances interactives :
>
> – les élèves sont sollicités ;
>
> – le professeur circule dans les rangs afin de contrôler, valider une réponse, expliquer une question.
>
> Lors de ses préparations, Séverine se réfère systématiquement au programme de Seconde dont elle a une bonne connaissance et au cours des séances de travail avec le PCP, un certain nombre de questions relatives à ce programme sont abordées.

D'abord, donc, les élèves ; ensuite, le programme : on retrouve là un motif déjà rencontré. Mais il y a un peu plus, du fait sans doute d'une certaine percolation normative [8] impulsée par la formation reçue à l'IUFM : il ne s'agit pas seulement de « respect des programmes », mais de « référence systématique » au programme de seconde, dont Séverine « a une bonne connaissance » et dont stagiaire et maître de stage débattent régulièrement entre elles. L'ancien et le nouveau se mêlent. Ainsi le paragraphe suivant mentionne-t-il une norme

---

[7] Les maîtres de stage sont appelés officiellement des « professeurs conseillers pédagogiques » (PCP).

[8] Ce qui « percole », ici, ce sont des normes (ou des quasi-normes). Sur la notion de percolation, voir Yves Chevallard, « Didactique et formation des enseignants », *in* B. David (éd.), *Impulsions 4*, INRP, Lyon, 2005, p. 215-231.

rituellement invoquée, issue semble-t-il des pratiques d'inspection (les inspecteurs lui accordent une attention systématique dans leurs rapports) mais qui s'est imposée de manière peut-être un peu suiviste dans le système normatif de la profession : la (bonne) « gestion du tableau ». L'alliage normatif devient plus subtil encore lorsque le rapport mentionne, après la gestion du tableau, le fait que « le professeur stagiaire prévoit la progression et le contenu de l'ensemble des séances ». L'affirmation normative, ici, est en effet ambiguë, l'exigence de programmation évoquée étant assez inégalement intégrée et respectée au sein de la profession, ou ne l'étant que dans des formes relativement grossières, dans la mesure notamment où une telle programmation n'est qu'un outil pour le professeur, et où son contenu ne sera, sauf exception, communiqué ni aux élèves, ni aux parents, ni à l'administration. Ici, pourtant, cette norme incertaine est poussée en avant par les besoins du travail du stagiaire avec sa maître de stage, laquelle se félicite que cette heureuse pratique de la stagiaire permette « lors des séances de travail avec le PCP de discuter et éventuellement de remanier les préparations ». L'évolution qui se marque ainsi reste toutefois elle-même ambiguë : la pratique d'une fine planification de l'enseignement à donner ne serait-elle pas justifiée *seulement* par le travail spécifique à accomplir avec le maître de stage ? Trouve-t-elle de vrais motifs dans la pratique professorale *stricto sensu* ? La question mérite d'être posée ; mais, en cette étape de l'évolution normative en matière de programmation de l'étude, elle ne semble pas pouvoir obtenir de réponse quelque peu générale.

3.3. Le premier rapport sur l'activité de Séverine se conclut sur la question de « la gestion de la classe », aspect sur lequel Séverine éprouve des difficultés notables. Dans le système normatif installé dans la profession, l'usage de l'expression « gestion de (la) classe » est, de manière généralement non consciente, semble-t-il, restrictif. Alors que, en bonne langue, elle renvoie à l'ensemble des gestes nécessaires à la vie et au travail d'une division d'élèves, ce qui inclut par exemple la programmation de l'étude sur l'année, elle ne réfère guère, dans la langue professorale courante, qu'à l'activité du professeur lors des *séances en classe* et, plus précisément encore, qu'à cette part de son activité qui vise, au cours de ces séances, à impulser, à contrôler, à réguler l'activité des élèves, saisis à la fois comme individus et comme membres d'une totalité – la classe, ou plutôt le « groupe-classe ». Qu'en est-il alors des normes de la gestion des séances de classe ? La maître de stage écrit :

> Ce qui doit encore être amélioré concerne essentiellement la gestion de la classe. Le professeur stagiaire doit encore acquérir des gestes professionnels qui lui permettent de rassembler les élèves autour du contenu mathématique tout au long de la séance. Les consignes données, les questions

posées, les réponses fournies doivent être entendues par tous les élèves. La gestion de l'hétérogénéité des élèves surtout au cours des séances d'exercices doit aussi être améliorée de manière à solliciter davantage tous les élèves en fonction de leur niveau.

Notons d'abord que l'activité du professeur est décrite en termes de *gestes professionnels*, expression relativement récente, qui, si elle s'est beaucoup diffusée dans certaines parties de la noosphère du système éducatif, n'a encore pénétré que peu le langage ordinaire des professeurs [9]. Sans doute, au reste, doit-on voir en son usage, ici, un effet lié à la percolation des contenus de la formation reçue par la maître de stage à l'IUFM. Ce que l'acquisition de gestes professionnels idoines doit permettre à Séverine, c'est d'abord de « rassembler les élèves autour du contenu mathématique tout au long de la séance », de rassembler *tous* les élèves, quel que soit leur « niveau », et cela tant à propos des consignes qu'elle leur communique et des questions qu'elle leur adresse que des réponses qu'elle leur apporte. Emblématiquement, la question des élèves resurgit, en même temps que celle des mathématiques : les élèves, les mathématiques. Les mathématiques, *pour* et *avec* tous les élèves : telle est ici l'exigence cardinale.

3.4. Le second rapport, qui est aussi le rapport final, se coule dans le même schéma de présentation. La classe est toujours une seconde de 34 élèves ayant un niveau « modeste » en mathématiques et portant « un intérêt limité à cette matière » comme aux autres, attitude associée à une « ambiance de travail » réputée désagréable « par la plupart des professeurs » de la classe. L'organisation du travail de la stagiaire et de la maître de stage s'est maintenue, mais en évoluant sur un point significatif, d'une manière qui *a priori* peut surprendre : les visites effectuées par la maître de stage dans la classe de Séverine se sont « espacées », lit-on, tandis que les visites effectuées par Séverine dans la classe de seconde de la maître de stage se sont « intensifiées ». Quand on ajoute à cela (de manière quelque peu conjecturale, il est vrai) que les visites de la stagiaire chez sa maître de stage n'ont dû donner lieu qu'à des commentaires sommaires – ce qui semble être une norme actuelle de ce type de travail de formation –, et non à une analyse *a posteriori* en bonne et due forme, on est enclin à penser que la relation formative dérive ici, comme sans doute en de nombreux cas, vers

[9] Par *noosphère* – la sphère « où l'on pense » –, on désigne l'ensemble des institutions qui entourent le système éducatif sans en faire partie *stricto sensu* et qui se vouent à « réfléchir » sur lui, à critiquer, suggérer, impulser, entraver les changements qui l'affectent ou pourraient l'affecter. D'une manière générale, la noosphère d'une institution donnée est indispensable à la vie de l'institution.

l’apprentissage *par compagnonnage*, avec pour principal outil *l’ostension* [10] pure... La stagiaire regarde, en vue de reproduire, ce qui est supposé n’appeler aucune analyse particulière, que ce soit dans une visée méliorative ou même dans un registre purement laudatif ! On retrouve ici un fait déjà noté : l’empreinte maintenue, sur des normes par ailleurs en évolution, du déficit de savoirs théoriques, et déjà de langages de description, de commentaire et d’analyse, qui permettraient seuls de ramener à leur juste fonction – celle d’un matériel à analyser, à évaluer et à exploiter dans un travail de développement propre à la stagiaire – les observations pratiquées dans la classe de la maître de stage. Soulignons encore que seule la classe de seconde de la maître de stage fait l’objet des visites de la stagiaire, comme si, faute d’un cadre théorique sous lequel subsumer l’activité observée, on devait s’en tenir à une classe empiriquement la plus proche possible de celle sur laquelle cette activité est aujourd’hui promise à être reproduite presque *ne varietur*. La normativité professorale subit ici les limitations de l’état historique de sous-développement du métier de professeur.

3.5. Sous les contraintes précédentes, le système de normes qui transparaît dans le rapport confirme pourtant une évolution sensible, qui ne touche encore sans doute qu’une petite partie des professeurs. La maître de stage note ainsi que le travail de la stagiaire comporte un « questionnement permanent à propos du programme », l’attention se portant d’abord sur les compétences exigibles ainsi que sur les notions et les résultats qui les sous-tendent, tout cela étant situé par rapport aux tenants et aboutissants de l’enseignement à prodiguer – acquis antérieurs, résultats à démontrer ou à admettre, etc. Tout ce passage du rapport est en fait construit avec des matériaux nouveaux et peu diffusés : c’est ainsi que les activités proposées par Séverine, dont il est indiqué positivement qu’elles « sollicitent les élèves », sont présentées d’abord comme résultant d’une « volonté de légitimer les notions étudiées ». Le rapport note de même que les corrections de devoirs sont « réalisées avec beaucoup de sérieux », que le programme de seconde est « rigoureusement respecté » – ce qui, on l’a suggéré, ne renvoie que partiellement à des normes traditionnelles –, mais aussi que les préparations, les activités d’étude et de recherche, les fiches d’exercices, etc., sont

---

[10] La formation par ostension (ou par monstration) est, à l’instar de l’enseignement par ostension ou par monstration, imprégnée par l’idée, qui relève d’une théorie didactique spontanée, que pour enseigner, il suffit de *montrer* ce qu’il convient de faire. De nombreux travaux de didactique montrent, eux, que les pratiques didactiques fondées sur ce principe ont une effectivité des plus limitées : voir par exemple René Berthelot et Marie-Hélène Salin, « L’enseignement de la géométrie à l'école primaire », *Grand N*, 1993-1994, n° 53, p. 39-56.

« rédigées », et, qui plus est, « informatisées ». Autant de louanges adressées à la capacité de Séverine à faire vivre des normes récemment importées, qu'elle soutient de sa normativité propre. Mais au-delà du tribut payé à une certaine modernité normative, le rapport revient à des normes dont la légitimité semble beaucoup plus assurée, celles qui gouvernent « la gestion du groupe-classe ». À cet égard, il apparaît que Séverine n'a pas suffisamment maîtrisé encore certains gestes professoraux, ceux notamment qui permettent de « rassembler, tout au long d'une séance, la classe autour du contenu mathématique et des activités prévues par le professeur », exigence qui est bel et bien au cœur de l'exercice du métier tel que la maître de stage l'invoque. La modernité normative, toutefois, n'est pas désarmée. Si Séverine n'a pas progressé autant qu'il eût été bon, c'est que la classe a longtemps été abandonnée à elle-même avant qu'une « prise de conscience » ne se fasse, quelque peu tardivement, et que l'équipe pédagogique décide d'une réaction collective. Cette réaction, nous dit-on, a consisté à « établir des règles plus strictes », ce qui n'est pas en soi grandement innovateur, mais cela dans une perspective très actuelle, du moins par son caractère explicite, celle de permettre « aux élèves de travailler dans de meilleurs conditions ». Cette problématique alumnocentrée de la discipline de vie d'une classe a permis à Séverine, ajoute le rapport, d'ouvrir une nouvelle étape dans sa maîtrise progressive du métier, manifestant ainsi sa capacité à assumer « une remise en question permanente », exigence normative qui, à suivre la conclusion du rapport, pourrait être emblématique de l'état actuel de la profession.

4. Normativités en acte : le cas de Sidney

4.1. Le premier rapport du maître de stage de Sidney est découpé en quatre parties, augmentées d'une conclusion. La première partie décrit les « conditions du stage » : Sidney a la responsabilité de l'enseignement des mathématiques dans une classe de 4^{e} (où son maître de stage lui a rendu visite) ; mais il assume aussi une heure hebdomadaire en 5^{e}, dans le cadre d'itinéraires de découvertes (IDD), et une autre heure, toujours en 5^{e}, dite d'ATPE – ce qui désigne en principe l'« Accompagnement du travail personnel de l'élève [11] ». Pour décrire la

[11] L'*accompagnement du travail personnel de l'élève* (ATPE) est un dispositif mis en place en classe de sixième à la rentrée 2001, une circulaire du 8 juin 2001 indiquant que « chaque collège intégrera dans son projet un dispositif d'accompagnement du travail personnel ». Il est renforcé à la rentrée 2002, toujours en classe de sixième, une circulaire du 10 avril 2002 mentionnant qu'il faut veiller à ce que « tous les établissements intègrent dans leur projet un dispositif d'accompagnement du travail personnel ». Pour les classes de cinquième, cette

classe de 4^{e}, les descripteurs usuels sont convoqués : 26 élèves, très hétérogène, avec des problèmes de comportement de la part de certains élèves. La norme naissante concernant la relation de formation entre maître de stage et stagiaire est semblablement évoquée, à travers une formulation qui paraît d'abord curieuse : « Sidney a visité des classes de 3^{e} et 5^{e} avec son PCP et d'autres classes avec d'autres collègues de mathématiques du collège ». Une lecture de la première partie de la phrase citée qui anticiperait sur l'évolution de la norme de formation pourrait conduire à croire que le maître de stage et le stagiaire sont allés *ensemble* visiter des classes (de 3^{e} et de 5^{e}), en se situant tous deux comme observateurs d'un tiers professeur ; la seconde partie de la phrase ramène à la réalité présente : dans les classes de 3^{e} et de 5^{e}, le professeur qui officiait était bien entendu le PCP lui-même ! Cela noté, la norme émergente en matière de relation entre stagiaire et maître de stage semble, globalement, reconnue et respectée, le rapport précisant par exemple : « Une heure hebdomadaire est consacrée à un échange entre Sidney et son PCP, pour évoquer la totalité des problèmes rencontrés. »

4.2. À l'instar de la référence aux classes que Sydney a visités « avec son PCP », la mention d'un travail fait sur « la totalité des problèmes rencontrés » suggère l'amorce d'une excentration du maître de stage par rapport à une problématique spontanément mobilisée par plus d'un maître de stage – celle de la transmission au stagiaire d'une partie au moins du trésor pédagogique accumulé par le maître de stage au long de ses années de professorat –, pour aller vers une problématique d'aide à l'observation, à l'analyse, à l'évaluation des problèmes et des solutions rencontrés et au développement de solutions propres au stagiaire – en rupture, donc, avec le paradigme de la reprise *ne varietur* des solutions élaborées pour son propre compte par le maître de stage. Ce « modernisme » formatif semble aller de pair, au reste, avec un certain modernisme professoral, dont témoigne la mention, en ouverture de la partie du rapport consacrée au « déroulement du stage », du fait que Sidney « s'est parfaitement intégré à l'équipe des professeurs du collège, participant activement aux réunions des professeurs de mathématiques et aux travaux de l'équipe éducative » de la classe dont il a la responsabilité en mathématiques. On a là, sans doute, en effet, un écho d'une

---

même circulaire ajoute que « les collèges peuvent prolonger en cinquième l'aide aux élèves et l'accompagnement de leur travail personnel », tout en précisant que, dans ce cas, les modalités d'application d'un tel dispositif sont laissées à l'initiative de l'établissement : « en sixième, l'aide aux élèves et l'accompagnement de leur travail personnel sont désormais inclus dans le service des professeurs, comme ils peuvent l'être également en classe de cinquième ».

pratique du métier moins solitaire, moins centrée sur la personne du professeur, moins idionome aussi [12]. Ce constat doit évidemment être tempéré : le rapport, ainsi, n'aborde l'activité de Sidney que dans la classe de 4e, et il semble bien que le maître de stage n'ait pas même songé à aller observer son action dans le cadre des IDD ou de l'ATPE, dispositifs de formation sans doute encore peu et mal intégrés dans le système des gestes les mieux partagés dans la profession. Le déroulement du stage fait l'objet d'un autre paragraphe qui situe Sidney dans son rapport de travail avec son PCP. Là encore, la formulation adoptée par le maître de stage peut donner lieu – idéalement – à deux lectures non incompatibles : « Un premier entretien avec le PCP a permis dès le début de l'année de déterminer le rythme de travail sur l'année… » Sans doute s'agit-il du rythme de travail du professeur stagiaire avec sa classe de 4e ; mais on peut entendre aussi, comme un contrepoint discret, qu'il s'agit de régler du même coup le rythme de travail de Sidney *avec son maître de stage*, et donc d'articuler travail de formation et travail d'enseignement. La fin du paragraphe conforte, nous semble-t-il, cette fragile herméneutique : Sidney, note son maître de stage, « a, depuis, su respecter les objectifs fixés en commun », ce qui a pour corrélat que « l'évolution du programme se déroule très convenablement ». S'énonce ici de manière presque audible le principe d'une articulation quasi organique entre travail de formation et travail enseignant.

4.3. La description du déroulement du stage mentionne « l'organisation générale du travail des élèves » et fait apparaître entre parenthèses une liste (non limitative) de quatre termes venus se loger sous la plume du rapporteur : « cours, devoir à la maison, contrôle, tenue du classeur ». L'usage du singulier marque bien le caractère générique, insistant, de ces mentions : dans l'organisation du travail qu'il met en place, le professeur, semble-t-on nous dire, doit avoir pour principaux repères *le* cours, *le* devoir à la maison, *le* contrôle, *la* tenue du classeur. La partie du rapport consacrée aux « difficultés rencontrées » détaillera un peu plus ce que le rapporteur range sous la rubrique du « cours », en indiquant que Sidney doit encore améliorer sa façon de « gérer la séance en variant les activités proposées ». Si, en effet, on entend par cours le contenu d'une séance, la description apportée par le maître de stage propose là encore une liste (ouverte) de composants possibles : « activités orales, synthèses,

---

[12] L'adjectif *idionome* (du grec *idios*, « particulier », *nomos*, « loi ») qualifie quiconque (tel le père dans la famille ou le professeur dans la classe) prétend définir lui-même les lois qu'il entend faire observer en telle institution, sans se soucier de savoir si d'autres lois n'y prévalent pas déjà, et sans se préoccuper ni de la licéité ni de la légitimité des lois « personnelles » qu'il aura ainsi bricolées. L'idionomie en ce sens s'oppose à la *synnomie*, qui désigne la recherche d'une définition partagée de lois ou de règles communes.

corrections d’exercices, passages au tableau... » Le pluriel qui apparaît ici renvoie sans doute à une catégorisation pratique, pragmatique, volontiers hétéroclite, mettant sur un même plan le passage au tableau d’élèves, dont l’effet officiel s’épuise dans sa réalisation même, et les synthèses, qui engagent la classe et son avenir. La distinction se fait ainsi entre certains gestes définitoires, sans lesquels l’enseignement n’existerait pas complètement, et la manière d’accomplir ces gestes, non moins essentielle sans doute, mais plus bigarrée, davantage informelle, plus intérieure à la vie de la classe. Le premier point de vue pourrait en quelque sorte être celui d’un observateur extérieur, par exemple celui de parents d’élèves. Y a-t-il dans cette classe un « cours » qui mérite ce nom ? Des devoirs à la maison sont-ils proposés ? Des contrôles ont-ils lieu ? La tenue des classeurs est-elle vérifiée ? À ces points saillants de l’activité du professeur, visibles de tous, succède la référence à – si l’on peut dire – certaines anfractuosités de son action, éléments du métier que l’on discute et apprécie entre gens du métier (existence et qualité des activités orales dans la classe, etc.). Le métier d’enseignant n’est plus ici un monolithe opaque : il a une face visible, exotérique, publique, et un intérieur, plus ésotérique, qui appartient davantage à une certaine intimité professionnelle.

4.4. Dans la liste des « difficultés rencontrées », le rapport mentionne le fait d’une classe « assez bruyante », la pierre de touche de ce jugement étant qu’il est partagé par les autres professeurs de la classe, ce qui semble épuiser, traditionnellement, les possibilités de mettre un tel jugement à l’épreuve. Là encore le problème est posé comme si existait « la classe », entité posée en quelque sorte indépendamment des disciplines étudiées, en ignorant qu’il y a la classe de mathématiques, la classe d’arts plastiques, la classe de technologie, etc., et que les systèmes didactiques ainsi déterminés ne sont pas nécessairement comparables, même sous l’angle du « comportement général ». On notera, à cet égard, que les difficultés rencontrées sont énoncées en allant du plus générique au plus spécifique : tout d’abord, Sidney rencontre des difficultés pour « gérer l’attitude générale des élèves » dont deux ou trois « posent des problèmes de comportement assez aigus » ; ensuite, on l’a vu, il peine à varier adéquatement les activités proposées au cours d’une séance ; enfin, il y a les mathématiques… De ce point de vue, Sidney cerne mal, nous dit-on, le « contenu mathématique exigible », sans doute parce qu’il situe insuffisamment les contenus de 4^{e} par rapport à ceux de 5^{e}, avec une tendance à avoir des exigences supérieures aux attentes réputées normales à ce niveau des études secondaires. Plus généralement, il semble bien que les mathématiques à enseigner soient encore pour lui un objet un peu flou, avec lequel il entretient des rapports approximatifs, y compris au plan du vocabulaire et des notations, à la façon d’un éléphanteau enthousiaste et maladroit dans un magasin de porcelaines maintes fois recollées. En creux, une norme professorale s'affirme là, que l'on retrouvera fréquemment : une certaine méticulosité dans le commerce avec les contenus mathématiques à enseigner, comme d'ailleurs avec les situations de classe à gérer, est requise du professeur chevronné, vertu dont le contenu précis reste en partie non analysé – ce qui signe, à nos yeux, un certain retard historique de développement du métier.

4.5. La partie consacrée aux « solutions et corrections apportées » reprend la tripartition précédente, du plus générique au plus spécifique. Le rapport aborde donc la question de l'ambiance de la classe. Il est frappant de constater que les solutions envisagées semblent, par l'effet d'un mimétisme spontané, se situer au même niveau de généricité que celui auquel on situe les problèmes à résoudre. C'est ainsi que, pour calmer la classe, nous dit le rapporteur, Sidney a manifesté une plus grande vigilance pour obtenir que lui comme les élèves s'expriment dans le silence. De même a-t-il imposé une « meilleure répartition des élèves dans la classe » et a-t-il tenté de faire prévaloir « une meilleure appréhension de la hiérarchie des sanctions ». Rien de plus spécifique – touchant par exemple aux types d'activités mathématiques et au choix de leur contenu – n'est explicitement mentionné, en dépit de l'évidence pratique d'une causalité liant en ce domaine choix spécifiques et choix génériques. On a là, sans doute, une norme « culturelle » qui limite sévèrement la capacité tant à analyser les problèmes qu'à leur trouver des solutions dépassant l'adaptation purement empirique aux conditions et contraintes immédiates de l'acte d'enseignement. Le second niveau d'examen concerne la gestion de l'heure de classe, et mêle temps d'horloge et temps didactique. La norme de pluralité des types d'activités au cours d'une même séance est à nouveau mise en avant : à cet égard, Sidney a progressé, évitant désormais les « séances à activité unique ». Une autre norme qui s'affirme comme essentielle est celle de la recherche du bon *tempo* : ne pas prolonger indûment les corrections d'exercices, avoir en tête qu'il faut savoir terminer une activité, et que tout cela doit se faire dans une interaction avec les élèves manifestée par des sollicitations orales de la part du professeur, qui doit savoir reprendre les contenus de réponse ainsi obtenus pour les intégrer au travail de la classe. La planification du travail péchait encore par l'importance des « rappels de 5^{e} » – qui se substituaient, en début d'année, à ce qui aurait dû être le « cours nouveau de 4^{e} ». À l'aune de cette norme, Sidney a progressé aussi : « la part réservé aux “rappels” est devenue adéquate ». Reste le troisième niveau, celui de plus grande spécificité : parce qu'il aurait mieux préparé ses cours – norme classique, mais exigence que certains stagiaires ne reconnaissent pas d'emblée –, Sidney, indique son maître de stage, use désormais d'une « écriture et [d'un] parler mathématiques » plus rigoureux. Une autre exigence, sans doute liée à la précédente, se fait jour *a posteriori* : au début, nous dit-on, Sidney proposait des exercices à densité mathématique excessive, fruit sans doute d'une élaboration hâtive, sans vigilance didactique suffisante ; désormais, « les exercices proposés sont plus progressifs » et n'amalgament plus des « savoir-faire essentiels » avec des difficultés adventices inessentielles. Relevons, *in fine*, deux notations relatives au travail de formation. Certains des progrès de Sidney ont été acquis « après discussion et exemples » : discuter et illustrer cette discussion d'exemples semble être l'outillage de base, dans l'état actuel de développement de la profession, du formateur de proximité. Quant au stagiaire lui-même, on le félicite de ce qu'il « n'hésite pas à solliciter son PCP et les autres collègues pour évoluer dans sa pratique ». Par delà la satisfaction de voir ainsi reconnue la valeur de l'apport potentiel des « aînés », on peut conjecturer que la norme fort ancienne du professeur solitaire qui ne compte que sur lui-même tend à bouger un peu : la pratique du stagiaire se nourrit *aussi* des réponses que lui apportent ses collègues plus aguerris. La pratique, non la pensée ; le faire, non la pensée du faire – qui semble en effet devoir rester durablement hors des jeux de l'échange entre professeurs.

4.6. Le deuxième rapport reprend plus brièvement les points évoqués dans le rapport d'étape. Certains aspects y apparaissent plus clairement : ainsi, y lit-on, les visites en 5^{e} et 3^{e} ont été faites « dans les classes du maître de stage ». L'heure hebdomadaire de travail dont se prévalait le premier rapport cède la place maintenant, « chaque fois que nécessaire », à des « rencontres de travail […] planifiées pour aborder des questions telles que la préparation de cours, l'évaluation… » Y a-t-il eu évolution des modalités d'organisation du travail entre stagiaire et maître de stage ? Comme il est apparu déjà à propos de Séverine, ce qui pouvait sembler novateur dans la relation de formation tend à être emporté par le temps qui passe : la relation de formation ressemble davantage à celle que permet un compagnonnage avisé mais fondé sur l'occasion qui s'offre ou se dérobe plutôt que sur un travail systématiquement organisé. Les commentaires relatifs au « déroulement du stage » font aussi rencontrer – furtivement – une autre norme, de facture relativement récente, puisqu'elle est liée à l'institution des épreuves communes. Sidney, précise le rapporteur, « a également participé, à sa demande et avec son maître de stage, à la correction du brevet blanc organisé par l'établissement ». On pourrait imaginer, par contraste et pour mieux saisir de quoi il retourne ici, un fonctionnement dans lequel il y aurait, par principe, disjonction entre équipes d'enseignement et équipes d'examen blanc, les professeurs de mathématiques de l'établissement enseignant en 3e étant de ce fait exclus de la conception et de la fabrication de l'épreuve de mathématiques du brevet blanc. Or il semble bien que la norme aujourd'hui dominante soit, à l'inverse, que l'équipe d'examen se compose *uniquement* des professeurs enseignants dans les classes concernées ! De là que le rapporteur ait été sollicité pour l'organisation et la correction du brevet blanc, et que, en tant que maître de stage, il prenne soin de préciser que c'est *à la demande du stagiaire* que celui-ci a été admis à participer à cette correction… Que ce souhait et sa réalisation soient mentionnés dans le rapport témoigne certainement du fait que le maître de stage ne voit là rien que de positif, bien que cela constitue une anomalie de fonctionnement par rapport aux normes établies dans la culture professorale actuelle. C'est ici le lieu de souligner une norme quasi implicite dans tout ce qui précède, mais qui n'en soutient pas moins tout le système des rapports entre stagiaires et maîtres de stage. Le maître de stage de Sidney n'a pas, cette année-là, de classe de 4e : ce qu'il a de plus approchant, si l'on peut dire, c'est une classe de 5e et une classe de 3e. Or, dans le système des normes établies, la légitimité d'un professeur à s'exprimer sur l'enseignement à un niveau de classe donné est strictement liée au fait qu'il enseigne lui-même, *hic et nunc*, dans une classe de ce niveau. D'où le fait que des professeurs rechignent à assumer des fonctions de maître de stage vis-à-vis d'un stagiaire enseignant dans une classe d'un niveau auquel eux-mêmes n'enseignent pas *cette année-là*. D'où le fait, aussi, que pour compenser l'anomalie présente dans la situation que vivent Sidney et son maître de stage, le stagiaire aille observer des classes de 4e attribuées à d'autres professeurs de mathématiques du collège. Dans une formation que taraude la problématique du compagnonnage, la légitimité que donne au maître sa pratique est très volatile : elle se perd ou diminue fortement lorsque cette pratique s'interrompt. Avoir eu une classe du niveau voulu l'année d'avant est certes mieux que de n'avoir plus enseigné à ce niveau depuis deux ans ; mais cela ne se compare pas avec le fait d'y enseigner ici et maintenant ! L'idée que des savoirs sur l'enseignement puissent exister et être mobilisés autrement qu'en première personne reste durablement absente de la culture des professeurs [13]. Ce second rapport pointe, pour l'essentiel, les normes déjà rencontrées dans le rapport d'étape. Au regard de certaines exigences (variété des activités proposées au cours

[13] Pour cette raison, ce n'est qu'au prix d'une rhétorique indéfiniment ressassée que les inspecteurs (IA-IPR) tentent de reconquérir la légitimité qu'ils détenaient comme professeurs et qu'ils ont perdue en se coupant de la pratique professorale *stricto sensu* : leur discours apologétique, quelque peu obsidional, revient encore et encore sur la « connaissance du terrain » dont ils s'attribuent le privilège sans jamais expliciter les formes différentielles de connaissance dudit « terrain » qui seraient celles du professeur et de l'inspecteur.

d'une séance, sollicitation orale des élèves, gestion du comportement de la classe), Sidney a progressé. Il est un peu à la traîne s'agissant de la qualité de ses formulations orales, qui demeurent peu précises. Une norme, en particulier, se rappelle à notre bon souvenir – l'exigence d'alumnocentration. Ainsi Sidney perçoit-il mieux la distinction entre ce qui est exigible et ce qui peut être proposé aux élèves. De même, il maîtrise mieux, pour avoir porté à ce problème « une attention particulière », le bon calibrage des évaluations. Tout indique qu'il devrait venir à bout du programme dans les délais impartis. Tout va donc pour le mieux.

5. Normativités en acte : le cas de Ruddy

5.1. Le rapport d'étape que sa maître de stage consacre à Ruddy commence, classiquement, par mentionner les classes avec lesquelles il a commerce dans sa formation. Mais, curieusement, elle mentionne d'abord sa propre classe, une 4e, dans laquelle Ruddy lui rend visite, avant de préciser qu'elle-même va visiter Ruddy dans sa classe, dont elle ne dit rien de plus… En fait, la classe de Ruddy est aussi, bien sûr, une classe de 4e. La norme, ici, nous est pour l'essentiel familière : aux visites s'ajoute « au moins une heure par semaine » d'entretien, tandis que la visite d'autres niveaux de classe que la 4e ne semble pas être envisagée. Le paragraphe suivant du rapport fait défiler les exigences normées [14].

> J'ai pu constater que Ruddy respecte le programme, rédige ses préparations. Les devoirs de maison sont nombreux, bien calibrés et bien diversifiés. Ces devoirs ainsi que les contrôles sont annotés de façon constructive.

Bien d'autres points sont mentionnés dans ce premier rapport : ils forment un inventaire hétéroclite qui va des aspects les mieux maîtrisés par Ruddy aux aspects sur lesquels des progrès sensibles sont attendus de lui. Ruddy a progressé d'abord sur « le choix du type d'exercices qui doivent être donnés en contrôle ». Ici apparaît explicitement cette idée qu'il y aurait une catégorie – un type – d'« exercices de contrôle », dont rien d'autre ne nous est dit. Une fois encore, nous devons constater l'existence d'une norme, sans pouvoir en préciser le contenu opérationnel : il y a par exemple des « exercices » à ne pas donner en contrôle, mais

[14] On notera l'expression « devoir *de* maison », qui désigne ici ce qu'on appelle usuellement un « devoir à la maison », c'est-à-dire un devoir *fait* à la maison. Le parler ordinaire des élèves et des professeurs réduisant fréquemment cette appellation à celle de « devoir maison », expression fautive au regard d'un usage familier bien connu (« tarte maison », « discours maison », etc.), le néologisme rencontré ici a, pendant plusieurs années, été diffusé dans l'académie, non sans succès semble-t-il, par un inspecteur pédagogique régional.

nous ne savons pas lesquels. Ruddy a aussi progressé dans son rapport au groupe-classe, notamment en ce qui concerne ses déambulations dans la salle de classe, et aussi dans sa capacité à « s'adresser à la classe et non à un élève en particulier quand celui-ci pose une question ». On retrouve ainsi une norme à la vérité consubstantielle au métier : le professeur « fait la classe », c'est-à-dire s'adresse au groupe-classe comme tel, et non à la succession des individus qui le composent, cette exigence étant l'un des principaux obstacles que les débutants doivent franchir pour entrer dans le métier.

5.2. D'autres points sont énumérés par la maître de stage, qui mêlent normes classiques et normes plus récemment instituées. De la première catégorie relève sans doute la « tenue du cahier de textes » (que, semble-t-il, Ruddy néglige), ou la « gestion du tableau », et notamment l'exigence de « rigueur » dans « la rédaction des solutions d'exercices au tableau ». On voit en tout cela l'effort attendu d'un jeune professeur peu porté sur le soin du détail pour reconnaître, assumer et mettre en œuvre de manière effective certaines normes emblématiques du métier, au moins au regard d'une partie des professeurs [15]. La question de l'autorité – comment éviter les bavardages, etc. –, qui est l'un des points sur lesquels Ruddy doit sensiblement progresser, relève également de la catégories des normes classiques : la plupart des professeurs, sans doute, seraient d'accord avec la maître de stage sur le fait qu'il est des climats plus ou moins favorables « au travail et à l'apprentissage », même si, comme souvent, ce qu'est un tel climat ne fait pas l'objet d'une définition explicite et bien partagée ! D'autres points signalés par la maître de stage renvoient à des normes plus récemment constituées et parfois encore contestées. Ainsi en va-t-il de l'affirmation que « la synthèse, dans la partie cours, doit être précédée d'un bilan de ce qui vient d'être fait, élaboré, de préférence, par les élèves » – même si la double mention de la « synthèse » et de la « partie cours » témoigne d'une sédimentation historique qui amalgame l'ancien et le nouveau [16].

---

[15] La tenue du cahier de textes est une exigence qui, depuis des années, est entrée dans un processus de perte de sens – on ne connaît plus les *fonctions* du cahier de textes, telles que les précisait une circulaire de 3 mai 1961 (RLR 550-1 b) qui n'a, depuis, été suivie d'aucun autre texte officiel sur ce sujet. L'exigence d'une « bonne » gestion du tableau semble, en revanche, toujours très vivace.

[16] Le mot de synthèse, qui s'est introduit officiellement dans les programmes de lycée dès le début des années 1980 pour désigner « le cours proprement dit », n'a toujours pas supplanté dans cet usage le vocable traditionnel, très polysémique, de *cours*.

5.3. Une autre attente de la maître de stage paraît renvoyer à une norme élaborée dans l'espace intermédiaire entre les pratiques de classe *stricto sensu* et les injonctions officielles au niveau national : faire en sorte qu'une activité et la synthèse qui lui correspond tiennent ensemble dans une même séance – exigence qui semble apparaître dans certaines formations d'IUFM. Il s'agit là sans doute d'un cas particulier notable d'une attitude normative plus large consistant à compacter les unités didactiques en des durées réduites, selon l'idéal d'un temps segmentaire avançant par petits paquets successifs de savoir, et non, par exemple, selon des cheminements en parallèle sur des thèmes d'étude distincts et des périodes de temps plus longues. La formulation adoptée laisse affleurer une « vérité » plus subtile encore : s'il s'agit bien de « gérer le rythme et le temps » de façon à obtenir le résultat indiqué, la maître de stage glisse que l'on y parvient « par une réflexion un peu plus approfondie dans la préparation ». La préparation apparaît ainsi comme un facteur essentiel de la réussite de l'enseignement donné – ce qui signifie en particulier que, contrairement à une croyance qui travaille la profession, il n'est pas exact de penser que l'enseignement serait « un art simple et tout d'exécution », comme l'aurait dit Napoléon à propos de la guerre. La maître de stage conclut ce premier rapport en se disant persuadée que Ruddy deviendra rapidement autonome. En réalité, les relations entre Ruddy et sa maître de stage ne sont pas au mieux : concluant son rapport final, celle-ci avouera sans détour regretter que Ruddy n'ait pas su prendre en compte ses remarques et ne lui ait pas communiqué ses préparations – ne serait-ce que « pour éviter certaines erreurs et [pour] avoir une réflexion plus approfondie face à ses élèves ». Ruddy, donc, se croit capable d'autonomie alors même qu'il aurait le plus grand besoin de conseils avisés. On voit là apparaître une analyse qui, semble-t-il, ne peut à l'heure actuelle que rester confinée au cas de stagiaires : on voit mal un professeur en exercice reconnaître que, par delà son autonomie obligée, il aurait besoin de conseils précis sur le quotidien de son travail ! La norme, profondément intériorisée par beaucoup de professeurs, est que chacun doit trouver en lui-même les ressources qui lui permettront d'affronter les difficultés surgissant jour après jour ; et c'est de cette norme même que la maître de stage s'autorise subrepticement pour penser que, dès lors qu'il « a le souci de bien faire », Ruddy saura devenir très vite autonome.

5.4. Le second rapport reprend, avec des modifications et des nuances, le texte du premier rapport. À nouveau, la maître de stage y indique d'abord que Ruddy vient assister à des séances qu'elle fait dans sa classe de 4^{e}, et ensuite qu'elle-même va observer Ruddy dans sa propre classe de 4^{e}. Semblablement, elle redit que Ruddy assume certains des gestes classiques et respecte certaines des valeurs du métier – à propos des préparations, des DM, des contrôles, etc. Les progrès signalés ici sont les mêmes exactement que ceux déjà soulignés dans le rapport d'étape – à ceci près que la « tenue du cahier de textes » (devenue ici « tenue *à jour* du cahier de textes ») est classée désormais parmi les points sur lesquels un progrès effectif est constaté. Pourtant, la PCP de Ruddy manifeste une amertume réelle. Ruddy, note-t-elle, n'a observé que bien distraitement les séances où elle l'accueillait dans sa classe de 4^{e} – et il a même quelquefois utilisé ce temps pour préparer ses propres cours ! Aussi il n'a pas appris autant qu'elle aurait pu l'espérer : Ruddy ne sait toujours pas quand faire l'appel ou remplir le cahier de textes, par exemple ; de même, il continue à remplir le tableau de formulations mal écrites dans la forme et sans rigueur quant au fond, tout cela après avoir insuffisamment préparé ses séances et n'avoir pas suffisamment réfléchi en amont à un bon calibrage et une bonne articulation des différents temps qui les composent. Le verdict paraît sans appel ! Ruddy est un réfractaire brouillon, qui croit davantage en lui que dans le métier qu'il prétend embrasser.

6. Devenir professeur : la formation au métier dans l'établissement

6.1. Abandonnant ici les vignettes monographiques précédentes, nous tenterons maintenant une synthèse des normativités qui s'expriment, émergent ou affleurent dans les rapports des maîtres de stage. Qu'attendent donc ces professeurs des stagiaires sur lesquels il leur échoit de veiller au cours de leurs premiers mois d'enseignement ? Commençons par une norme relativement nouvelle, mais que le stagiaire va éprouver dès son arrivée dans l'établissement, le jour de la prérentrée [17] : on attend de lui, d'une manière toujours un peu sibylline, au demeurant variable d'un établissement à un autre, qu'il s'intègre dans les équipes de professeurs de l'établissement et en particulier dans l'équipe des professeurs de mathématiques par le biais des réunions qu'elle tient et des activités qu'elle impulse. Cette intégration – c'est là sans doute une pierre d'achoppement pour le néophyte – n'est pas seulement humaine, en accord avec les formes de sociabilité et de convivialité en vigueur

[17] Cette journée, créée en 1970, marque une rupture avec un temps où le professeur dans sa gloire n'avait d'yeux que pour sa classe. Lorsque l'inspecteur général René Haby (1919-2003), futur ministre de l'Éducation nationale (1974-1978), lui en suggère la création, le président de la République Georges Pompidou (1911-1974) lui répond : « Moi, Monsieur l'inspecteur général, le jour de la rentrée, j'arrivais à huit heures au lycée, et je disais à mes élèves de khâgne alignés dans la cour : "Allez, messieurs." Cela suffisait. » (Cité *in* Claude Lelièvre et Christian Nique, *L'école des présidents*, Odile Jacob, Paris, 1995, p. 135.)

dans la communauté éducative où il entre. Il découvrira assez vite que l'engagement attendu de lui, même s'il est incomplètement défini, porte aussi sur le sort fait, dans l'établissement, à la matière qu'il enseigne. Ainsi sera-t-il sollicité dans certains cas pour participer à des épreuves communes touchant les classes du même niveau d'études que celle dont il a la responsabilité – avec de plus, en nombre de cas, l'obligation non officielle mais très réelle d'adopter une « progression commune » élaborée par nécessité sans qu'il ait eu voix au chapitre. À cela s'ajoutent parfois des événements erratiques mais non moins absorbants, comme la participation à des rallyes mathématiques et autres activités adventices. Cette participation du professeur à des activités collégiales est pourtant soumise à des règles non écrites qui procèdent de normativités anciennes toujours vivaces. Ainsi un professeur ne sera-t-il qu'exceptionnellement appelé à prendre part à une activité concernant un niveau de classe dans lequel il n'enseigne pas cette année-là. La norme centrale en la matière, c'est qu'un professeur s'occupe de ses classes – pour ce qui est du moins de la matière qu'il enseigne –, et de cela seulement, ou presque [18]. Dans sa classe, en revanche, le professeur dispose de ce que la tradition nomme sa « liberté pédagogique », dont la seule borne est le respect des objectifs de formation assignés [19]. À cette « liberté » correspond une norme classique du métier : l'exigence pour chacun de trouver d'abord *en soi* – plutôt que dans les divers environnements qu'offre éventuellement la communauté éducative d'établissement –, les ressources professionnelles, et en particulier mathématiques dans le cas considéré, mais aussi les ressources psychologiques, voire physiologiques, nécessaires pour honorer la liberté et la responsabilité ainsi conférées au professeur dans la conduite de ses classes.

6.2. « La classe » est la grande affaire des professeurs. À travers nombre de témoignages, elle apparaît comme un système quasi isolé. L'évolution récente a peu changé les choses sur ce point, même si en certains cas l'impression s'impose fugitivement d'une institution qui perd de sa force au sein de l'établissement, tout en en demeurant officiellement la cellule de

[18] Les contre-exemples ne sont pas légion : ainsi la figure du professeur principal, créée en 1960, peine-t-elle aujourd'hui encore à trouver sa juste place dans une culture professionnelle parfois durement égalitaire, qui ne tolère guère le rôle de *primus inter pares*.

[19] Les programmes des différentes classes du collège comportent tous la déclaration suivante, qui n'est pas seulement incantatoire : « Il est rappelé que le professeur a toute liberté dans l'organisation de son enseignement, à condition que soient atteints les objectifs visés par le programme. »

base [20]. Ce système quasi isolé est défini de l'extérieur par un très petit nombre de variables : outre le niveau de la classe dans le cursus des études secondaires, on se limitera à préciser le nombre d'élèves, le climat de la classe et l'attitude générale des élèves, enfin le « niveau » de la classe dans la discipline concernée. Tout cela porte la trace de ce qu'on pourrait nommer *l'interdit pédagogique* : aller plus loin dans l'intimité de la classe serait, pour qui se situe en *outsider*, franchir illégitimement la frontière qui protège la liberté de l'enseignant concerné, tandis que, pour ce qui est de celui-ci, parler de sa classe à qui n'en est pas serait révéler une intimité dont lui seul a à connaître. Ces codes traditionnels sont sans doute en évolution, mais en évolution lente. Toutefois, le type de situations observé ici modifie partiellement certaines des clauses que nous venons d'évoquer. Dans une relation de formateur à formé, une autre logique prévaut – par places. Le regard du professeur expérimenté saisit ainsi bien vite, dans la pratique balbutiante du débutant, certains écarts à une norme sanctifiée et sans doute définitoire du métier : le fait pour le professeur de se centrer sur les élèves, ou plutôt *sur le groupe d'élèves* qui constitue sa classe, pour y rapporter toutes les décisions, toutes les indécisions aussi, qui sont et seront les siennes. On a noté à cet égard que l'importance du repérage empirique sur le comportement des élèves est d'autant plus grande que n'existe dans le métier aucun repérage théorique reconnu et bien partagé [21]. Conjuguée avec la clause d'intimité pédagogique, cette absence de repérage autre que celui fourni par l'observation continue des élèves a une conséquence qui, dans le cadre d'une relation de formation, ou plus exactement de ce qu'en donnent à voir les rapports écrits examinés, apparaît quelque peu paradoxale : le silence presque total sur les contenus mathématiques concrets qui font le quotidien de la vie de la classe du stagiaire. Là encore, vraisemblablement, on ne regarde guère les contenus qu'à travers les élèves et leurs engagements ou leurs désengagements didactiques : c'est ainsi que l'on jugera sans doute le bon calibrage ou la pertinence mathématique (voire culturelle) des travaux et activités proposés à la classe, dont le professeur est pourtant tenu pour le garant ultime, en particulier sous l'angle de ce qu'on peut

[20] Il arrive que l'observateur extérieur puisse avoir l'impression que les activités en classe sont des activités par défaut, en attendant ces activités extraordinaires, encadrées mais hors classe, et souvent « sans cartable » (voyage à l'étranger, classe de neige, journée téléthon, etc.), auxquelles leurs mérites éducatifs supposés semblent donner une priorité sur l'ordinaire des classes.

[21] De rares professeurs tentent de se repérer à l'aide de préceptes pédagogiques ou didactiques issus du monde de la recherche ou, plus généralement, de la noosphère du système éducatif. Au sein d'un monde professoral globalement rétif, ils s'en font alors les utilisateurs parfois zélés, sans pour autant que les outils qu'ils mobilisent ainsi à titre personnel deviennent une norme de la profession.

nommer *l'orthodoxie mathématique*. Le professeur enseigne des mathématiques mais n'a pas à les commenter : supposé capable de les enseigner, il n'est pas requis d'être capable d'en parler. Seules les périodes de changement de programmes annoncé suscitent des commentaires sur les contenus, échangés parfois à la criée. Mais on est alors fort loin de l'intimité de la classe et de l'enseignement que donnent, dans une certaine solitude mathématique, ceux qui, lorsqu'une certaine effervescence gagne les salles de professeurs, situent alors leurs commentaires dubitatifs ou emportés à des niveaux fort différents de ceux auxquels la gestion ordinaire des classes les contraint [22].

6.3. La relation de formateur à formé à laquelle sont assujettis les maîtres de stage affecte le fonctionnement ordinaire des normativités professorales. Il s'agit là, en effet, d'une dimension nouvelle de la professionnalité enseignante, dont nous pouvons saisir les normes *in statu nascendi*. Ces normes, encore fragiles sans doute pour beaucoup d'entre elles, et incomplètement développées, semblent prises entre un ancien toujours vigoureux et un nouveau qui se cherche et hésite. La base en est certainement l'idée de *« conseil pédagogique »*, pour reprendre une expression traditionnelle, peu analysée, mais qui contribue à donner leur nom officiel – celui de « professeurs conseillers pédagogiques » – aux maîtres de stage. Entre pairs, de tels conseils n'ont en principe pas cours : ils risqueraient de violer et la règle de liberté pédagogique et le principe selon lequel, parité oblige, un professeur en vaut un autre, en sorte qu'aucun échange significatif de savoirs professionnels ne saurait être pleinement légitime entre eux. Il faut qu'une asymétrie s'installe pour qu'un conseil puisse être formulé, transmis, éventuellement reçu. Ainsi en va-t-il s'agissant de la relation – ancienne en dépit d'évolutions plus récentes – entre inspecteur et professeur. Ainsi devrait-il en aller s'agissant de la relation entre maître de stage et stagiaire. Mais alors qu'un inspecteur s'autorise à mentionner, dans un rapport écrit sur un professeur, louanges et critiques touchant la vie mathématique impulsée par celui-ci dans la classe où il lui aura rendu visite, les maîtres de stage, en général, s'en abstiennent – alors même que les stagiaires, on le verra, rencontrent à cet égards de fréquents obstacles. La relation du maître de stage au stagiaire diffère sur un point encore de la relation de l'inspecteur au professeur : la légitimité d'un PCP à assumer ce rôle auprès d'un professeur débutant est adossée à une condition qui apparaît de manière

---

[22] Le quotidien du professeur, c'est par exemple de préparer l'enseignement qu'il donnera en seconde sur le *thème* des triangles isométriques, non de disputer sur le *domaine* de la géométrie du plan, ce qu'il ne fera le cas échéant qu'en des contextes autres de sa vie professionnelle – par exemple lors d'un stage de formation continue.

entêtée comme presque *sine qua non* : le conseiller pédagogique doit avoir la responsabilité d'une classe de *même niveau*. Faute d'une théorie adéquate de l'enseignement des mathématiques, telle est en effet l'unique et l'ultime pierre de touche du savoir qu'il transmettra au stagiaire sous la forme de « conseils ». Une telle condition permet alors au professeur de vivre une dimension de sa professionnalité que le postulat de parité évoqué plus haut lui refuse : faire connaître à son jeune « protégé » le trésor pédagogique qu'il aura pu accumuler au fil des années. La « pression à transmettre » ce qu'on porte en soi après des années de pratique – qu'attestent nombre de demandes de recrutement comme formateurs à l'IUFM – pourrait ainsi trouver à se satisfaire dans le cadre de la relation entre maître de stage et stagiaire. Mais elle vient buter sur l'existence d'un rival froid, impavide, apparemment castrateur : l'IUFM et la formation que cette institution délivre effectivement à celui dont on découvre alors qu'il n'est pas complètement le « protégé » de son maître de stage. Les circonstances hostiles ne manquent donc pas à l'établissement et à la perpétuation d'une relation de formation ayant une pleine légitimité et une spécificité assumée et reconnue. Pour cela, la relation du maître de stage au stagiaire semble fréquemment devoir glisser, au fil du temps, vers une relation de compagnonnage, un rapport de maître à compagnon qui, à l'issue de l'année de stage dans l'établissement, se sera transmué, sans peut-être que les acteurs concernés en aient une véritable conscience, en une relation entre pairs.

7. Devenir professeur : face au(x) programme(s)

7.1. La question des programmes semble, au point de départ, toute simple. Il n'en est rien. La norme, sur ce point, est composite, et en évolution. Dans la culture professorale telle qu'elle se donne à entendre, le *« respect »* des programmes s'affiche comme une exigence essentielle, liée à l'angoisse de ne pas *« finir »* le programme et au désagrément de se rendre compte, après quelques mois de classe, que, décidément, on ne le « finira » pas ! Ce qu'est ce « programme » qu'il faudrait respecter et qu'il faudrait finir n'est cependant pas tout à fait clair. Son évocation souffre d'ailleurs d'une anomalie étrange : il ne s'agit pas tant, entend-on, de respecter *le* programme que de respecter *les programmes* – et cela même quand le locuteur « natif » se réfère à un programme bien déterminé, celui qui vaut pour sa classe de seconde ou de troisième par exemple [23]. Le programme auquel on se réfère, que l'on mentionne, que l'on vitupère, ressemble parfois à une entité semi-légendaire que l'on ne connaît que par des on-dit. Le stagiaire à qui s'impose l'exigence – présentée comme allant de soi dans sa formation à l'IUFM – de se reporter à chaque instant au texte précis du programme et du document d'accompagnement qui lui est associé pourra découvrir avec un peu d'étonnement que, derrière l'évocation « des programmes », se cache quelquefois, peut-être plus fréquemment qu'il n'est porté à le croire, une méconnaissance du texte du programme que, d'ailleurs, dans la profession telle qu'elle s'offre à son regard, on n'a pas toujours à portée de la main et qu'on regarde souvent comme une simple *check-list*, contraignante, certes, mais inutile pour concevoir et réaliser l'enseignement attendu. Par contraste avec cette norme ancienne, qui semble être aujourd'hui encore largement dominante – le programme comme carcan dont il faut supporter la tyrannie, et non comme outil didactique au service des professeurs et des classes –, le professeur stagiaire rencontre une norme encore minoritaire qu'illustrent quelques rares maîtres de stage et dont la présence résulte sans doute en partie de la percolation normative impulsée par la formation donnée à l'IUFM. Selon cette norme, il ne faut pas seulement « respecter » le programme [24], mais *se référer systématiquement à lui*, le connaître par une fréquentation prolongée, répétée, et par un questionnement permanent portant en particulier, au collège, sur les « compétences exigibles » (ou, en seconde, sur les « capacités attendues ») ainsi que sur les notions et résultats qui les sous-tendent, le tout étant situé par rapport aux tenants et aboutissants de l'enseignement à prodiguer – acquis antérieurs, résultats à démontrer ou à admettre, emplois principaux de ces résultats, etc. On conçoit que, au confluent de ces deux orientations normatives, le stagiaire ressente un certain trouble devant des messages subtilement divergents, et fondamentalement incompatibles, que les institutions qui assurent son entrée dans le métier lui envoient de façon tantôt explicite, tantôt subliminale.

7.2. La norme émergente est rendue fragile par le fait que, ayant entendu les injonctions du programme, le professeur doit agir pour élaborer un enseignement que le programme est impuissant à créer par lui-même. Or la tradition porte ici à privilégier un mode de pensée qui

---

[23] Dans le corpus examiné, sur les 56 maîtres de stage qui évoquent le programme de la classe dont leur stagiaire a la responsabilité, seuls 23 d'entre eux le font correctement – en utilisant le singulier. Les autres font référence aux *programmes*, aux *programmes officiels* ou encore au *BO*.

[24] Le mot de « respect » est ici ambigu : il désigne certes une attention à l'endroit de ce que l'on respecte, mais aussi une réserve caractéristique. Respecter, c'est demeurer extérieur, en quelque façon, à ce que l'on respecte.

ferait du programme un ensemble d'obstacles imposés à la liberté pédagogique du professeur plutôt qu'un ensemble de points d'appui et de matériaux favorisant l'élaboration de l'enseignement à donner. La tension entre ces deux visions du rôle du programme est plus sensible encore lorsque le professeur croit devoir proposer un enseignement qui tienne compte de certains caractères de la classe concrète dont il a la responsabilité, comme il peut en aller à propos d'une classe dans laquelle une proportion importante d'élèves aurait déclaré un choix d'orientation déterminé. En ces cas, en effet, le programme peut être plus encore regardé comme un système d'injonctions dont, subrepticement ou plus ouvertement, on entend s'affranchir – ce qui, bien évidemment, conforte la norme dominante ancienne. Mais on peut aussi regarder le programme et les documents qui l'accompagnent comme un lieu de ressources, y compris pour nourrir un enseignement tenant compte de certaines spécificités de la classe à laquelle cet enseignement est adressé. On voit ainsi que la surprise du stagiaire devant des points de vue divergents sur le rôle du programme peut se prolonger dans ce qui est au cœur de son activité : la construction de son enseignement. Cette opération essentielle apparaît d'emblée dans une opacité typique de ce qu'impose à un regard extérieur le postulat de la liberté pédagogique. Que peut savoir d'elle, en effet, le stagiaire qui découvre le métier ? Une norme au moins semble s'imposer nettement en la matière : il lui faut « prévoir une progression », c'est-à-dire une programmation de son enseignement sur l'année ou, du moins, sur une partie substantielle du temps alloué. Mais il s'agit là déjà d'un geste professionnel « privé », que, traditionnellement du moins, chacun accomplit pour soi, et dont il n'est pas usuel de parler sinon pour le mentionner comme un fait qu'on ne saurait questionner plus avant entre collègues – chacun a sa progression, dont il peut être satisfait ou moins satisfait, etc. S'il existe bien une norme reconnue qui impose à chacun de se référer à une programmation supposée de son enseignement, il n'existe pas de norme en ce qui concerne la manière de *construire* cette programmation : la technique commune dont le néophyte pourrait espérer disposer s'efface ainsi derrière le paravent de la liberté pédagogique du professeur et le mystère corrélatif de son activité professionnelle *privée*. Chacun devra inventer ou réinventer sa manière de faire, dans l'ignorance ou la méconnaissance de la manière de faire des autres. Cette situation dominante et ancienne, qui tend à faire de chaque enseignant une île vivant en quasi-autarcie, ne comptant que sur son initiative propre, est menacée aujourd'hui par une norme émergente déjà signalée, liée à la pratique d'épreuves communes aux classes d'un même niveau d'étude, ce qui tend à aller de pair avec l'adoption d'une même progression par les professeurs de ces classes. Bien que l'on ne dispose que de peu d'informations sur ce point, on peut penser que l'élaboration d'une telle progression commune se fait par confrontation des progressions personnelles élaborées préalablement par certains des professeurs concernés, pour en faire sortir une progression que chacun validera, plutôt que par l'élaboration *ab initio* d'une progression originale, type de tâches pour lequel aucune technique bien partagée ne semble exister véritablement.

7.3. Une ébauche de programmation étant acquise, le professeur stagiaire doit encore « préparer ses cours ». Cette exigence apparaît sans doute, à qui est familier du métier, comme une évidence qui fait norme. Or, en un certain nombre de cas – plus fréquent sans doute qu'on n'ose le penser –, le maître de stage est le témoin d'une attitude du stagiaire qu'un observateur peu averti pourrait taxer de négligence ou de dilettantisme. Il semble pourtant que là ne soit pas véritablement la racine du mal, comme l'attestent les nombreux cas de professeurs stagiaires « angoissés », obsédés par le souci de leur classe. Mais on doit alors constater que l'inquiétude parfois excessive et la volonté affichée de bien faire que l'on observe chez nombre d'entre eux ne se concrétisent pas toujours en des gestes de préparation répondant aux attentes des maîtres de stage. Pourquoi cela ? Il semble que l'anomalie constatée soit ici l'effet, tout d'abord, d'un mythe fondateur du métier auquel ces nouveaux initiés adhèrent sans avoir le recul et la sagesse qu'apporte l'expérience enseignante vécue. Les mathématiques à enseigner – tel est le mythe et le fantasme – n'appelleraient pas de leur part un soin particulier parce qu'ils les domineraient grâce à leurs études et, tout spécialement, grâce à la formation durement acquise pour devenir lauréat d'un concours de recrutement. Tout se passe comme si le professeur stagiaire se disait : « Si je dois enseigner l'addition des fractions, le problème n'est pas mathématique pour moi, je sais additionner deux fractions, par exemple 2/3 et 5/7 ; le problème est "dans" les élèves, dans ma manière d'avoir commerce avec eux, de leur "faire comprendre" l'addition des fractions, etc. » À cette lecture simplificatrice de la situation (le problème n'est pas d'abord celui du rapport du professeur à l'objet mathématique, mais celui de l'idonéité de son rapport au rapport naissant de l'élève à cet objet), il s'ajoute alors un second facteur : que peut-on faire de plus pour « préparer ses cours » quand on a rédigé des documents pour les élèves, qu'on les a corrigés, mis en forme, amendés, adornés de différentes façons ? Bref, quand on a tenté d'élaborer un enseignement qu'on espère « impeccable » ? En ce point de sa trajectoire, le professeur débutant doit encore découvrir que, derrière le mythe fondateur, se cachent des exigences opérationnelles, concrètes, à forts effets de réel, qui appellent une préparation attentive touchant les contenus à enseigner afin que ceux-ci viennent s'inscrire effectivement dans le *topos* [25] des élèves au lieu de demeurer, de fleurir et de prospérer dans le *topos* toujours trop surchargé du professeur.

8. Devenir professeur : premiers pas dans la classe

8.1. Le professeur stagiaire découvre bientôt que la préparation des séances en classe appelle de sa part une certaine « méticulosité » tant dans le maniement des contenus mathématiques à enseigner que dans la gestion des situations de classe. À nouveau, la sagacité du débutant est mise à rude épreuve : l'art de faire front à ces exigences multiples semble être un art « tout d'exécution » qui ne fait qu'exceptionnellement l'objet de commentaires et, plus rarement encore, d'injonctions. L'un des premiers points sans doute sur lesquels le professeur stagiaire peut recevoir des « conseils » de son maître de stage concerne le choix des contenus de travail en fonction de la catégorie de travaux qu'il s'agit d'alimenter – « cours », « devoirs à la maison », « contrôles », etc. Ainsi découvrira-t-il par exemple qu'il est des « exercices » à ne pas donner en contrôle, et qui pourtant pourront fournir matière à un travail adéquat en telle ou telle étape de la vie de la classe. Du même coup, il découvre – s'il n'en avait pas déjà la conscience vigilante – que le travail à proposer n'est nullement homogène et que, pour satisfaire l'exigence de bonne adéquation des contenus choisis, il lui faut distinguer clairement entre des cadres de travail différant « qualitativement » entre eux, qui structurent et dynamisent la vie de la classe, sans cesser de viser un bon calibrage « quantitatif », pour le public d'élèves concerné, des contenus proposés. L'affaire est complexe !

8.2. La distinction de différents cadres de travail fournit les piliers de l'organisation de l'étude qu'il s'agit alors de faire fonctionner. Le problème est crucial, consubstantiel au métier même, et la solution apportée emblématique du mode d'engagement dans la profession et dans le système des forces qui la maintiennent en l'état ou la font évoluer. Ici, le conflit normatif –

[25] Le mot grec *topos*, lieu, entre dans la formation de mots bien connus, tels que topographie, topologie, sans parler de la théorie des *topos* (ou des *topoï*). En théorie anthropologique du didactique, le *topos* d'un sujet dans une institution est l'ensemble des types de tâches institutionnels dans l'accomplissement desquels ce sujet intervient avec une certaine autonomie, même si la tâche considérée est accomplie dans le cadre d'une activité coopérative, où le sujet interagit avec d'autres sujets. Un enseignement peut laisser aux élèves un *topos* plus ou moins grand, où l'élève n'agit pas qu'en réaction à une injonction du professeur, mais où il doit décider et agir par lui-même, fut-ce dans le cadre de micro-séquences d'activité dont il se sent responsable. En ce sens, le *topos* de l'élève, c'est ce dont le professeur fait dévolution aux élèves.

plutôt que la paix – est, si l'on peut dire, la règle. Dans les classes semble prévaloir une norme hybride, fruit d'un passé mal dépassé et d'un présent incomplètement assumé. Si, au collège notamment, on n'en est plus à l'ancienne structuration binaire du « cours » et des « exercices », le vocabulaire de cette antique manière de faire la classe continue de travailler sourdement le système éducatif. Là où les textes officiels parlent, depuis au moins deux décennies, d'une structuration fondée sur des « activités » (qui n'existaient pas sous cette forme dans l'ancien paradigme), produisant des matériaux mathématiques qui font alors l'objet d'une mise en forme appelée « synthèse », la *doxa* professorale continue imperturbablement à évoquer le « cours » et les « exercices », à ceci près que certains spécimens de la catégorie totalisante des « exercices » sont désormais proposés « avant le cours », à titre d'activités « préparatoires ». En ce point, le conflit normatif est *a priori* incontournable étant donné la formation dispensée à l'IUFM, laquelle préconise de façon peu ambiguë le remplacement du schéma binaire traditionnel par un schéma *ternaire*, organisant l'activité de la classe autour des trois dispositifs didactiques que sont les AER – activités d'étude et de recherche [26] –, les synthèses, les exercices & problèmes – le terme d'exercice étant pris ici dans son sens vrai [27]. Quelle qu'elle soit, la mise en fonctionnement de l'organisation de l'étude prévue soulève plusieurs difficultés, dont la première vertu est de faire découvrir au professeur stagiaire les normes en vigueur ou en débat dans la profession. Le tri dans les contenus de travail à proposer constitue ainsi une difficulté souvent révélatrice. Plus d'un stagiaire sans doute est d'abord porté à croire en une didactique de l'ostension, où le professeur présente de façon liminaire des « éléments de cours », dont la maîtrise s'acquiert

[26] Nous reviendrons sur l'organisation ternaire de l'étude et, tout particulièrement, sur la notion d'AER, dans le chapitre 5 de ce mémoire.

[27] Dans une note publiée au *Bulletin officiel de l'Éducation nationale* du 1er janvier 2004 et adressée « aux candidats à compter de la session de 2005 » au CAPES externe de mathématiques, l'usage extensif du mot « exercice » fait, à propos de « l'épreuve sur dossier » du concours, l'objet de ce commentaire : « Cette épreuve est axée sur l'étude pratique, à travers un choix d'exercices, d'un sujet mathématique. Le terme "exercice" est à prendre au sens large ; il peut s'agir d'applications directes du cours, d'exemples ou de contre-exemples venant éclairer une méthode, de situations plus globales ou plus complexes utilisant éventuellement des notions prises dans d'autres disciplines. » Appeler uniformément « exercices » ce qui a, dans le processus visé, pour une classe d'élèves ou pour un candidat au CAPES peut-être, le statut de *problèmes*, c'est évidemment se situer « du côté des vainqueurs », c'est-à-dire de ceux – professeurs ou membres du jury – pour qui les tâches mathématico-didactiques proposées aux élèves (et, ici, aux candidats au CAPES) ont cessé d'être problématiques, et ont au mieux le statut de « simples » exercices, ce que ces problèmes sont censés devenir peut-être pour les lauréats du concours.

ensuite par des exercices répétés – un peu comme si, pour apprendre à descendre une piste noire, le skieur débutant ne pouvait faire autre chose que… descendre encore et encore des pistes noires [28] ! L'idée de progressivité d'un apprentissage reste ainsi généralement à découvrir comme réalité en acte de la vie d'une classe. Corrélativement, le débutant découvrira aussi que, si la didactique de l'ostension est propice à la floraison de multiples difficultés mathématiques, le travail de progression dans la maîtrise d'un savoir-faire suppose au contraire un élagage préalable *et* un plan d'enrichissement progressif de la pratique mathématique de la classe. Dans le même mouvement, le débutant pourra accéder à une plus juste appréciation de ce que nombre de professeurs nomment les « possibilités des élèves », et même, allant au-delà de cette norme à vrai dire largement figée, prendre conscience de l'existence des *besoins didactiques* des élèves, engendrés par le processus d'étude que le professeur entend piloter.

8.3. La variété des types d'activités d'une classe ne doit pas demeurer dans l'abstrait : elle doit s'incarner, ou tendre à s'incarner, en chacune des séances de classe dont aucune ne doit être à « activité unique », même si le professeur stagiaire n'a pas à suivre les plus rigoristes de ses collègues qui, prétendant atteindre la formule parfaite, poussent en avant une composition de séance supposée idéale comportant par exemple, répétitivement, une activité de recherche, un temps de synthèse, une période d'exercices ou de correction d'exercices. La norme qui s'impose en la matière énonce surtout que la conduite d'une classe exige des temps différents, dont aucun ne doit se prolonger indûment, qu'il s'agisse d'une correction d'exercices, d'une activité de recherche, d'une synthèse ou de la préparation d'un travail hors classe. L'idéal d'un temps segmentaire, qui découpe la séance en trois ou quatre – voire cinq – segments relativement brefs, et que le professeur fait avancer selon un *tempo* dont il doit toujours rester maître, semble aujourd'hui une norme en puissance, qui inspire nombre de professeurs. Elle entre en tension avec une norme plus complexe, non incompatible avec elle, mais qui insère le temps court de la séance dans des durées plus longues, relatives éventuellement à l'étude

[28] Cette didactique du déni d'apprentissage – on n'y fait que s'entraîner à faire des choses qu'il n'y a pas, à proprement parler, à apprendre à faire – s'insinue parfois dans les préparations aux concours de recrutement. Dans un tel schéma, pour faire correctement le jour venu un exposé oral devant le jury, le candidat est invité dès le premier jour à… faire des exposés oraux, sans qu'on lui indique nettement qu'il y aurait quelque chose de spécifique à *apprendre*, qui exigerait plus que le réglage par frottement empirique de gestes « simples », non susceptibles d'un travail réflexif adéquat.

simultanée de thèmes mathématiques largement disjoints [29]. Le conflit normatif est ici corrélatif de ce qui apparaît comme un point faible de la normativité professorale actuelle, la gestion de la mémoire de la classe (et de ses membres), qui, tant du côté du professeur que du côté de l'élève, semble demeurer largement du ressort de « normes » privées.

8.4. Lorsque le professeur stagiaire se trouve dans la salle de classe avec les élèves dont la formation mathématique lui est confiée, d'autres exigences qu'il n'avait pas jusque-là éprouvées concrètement vont se révéler à lui, de manière parfois violente. D'une façon générale, parmi les types de tâches que le professeur doit accomplir, le débutant peut être porté à ne voir que ces tâches qu'il peut regarder comme non coopératives, « jeux contre la nature » dont le bon accomplissement lui apparaît largement indépendant de l'intervention des élèves. Ainsi en va-t-il notamment des tâches qui s'accomplissent en amont de la séance de classe : programmation de l'étude, découpage de la séance et élaboration des contenus d'activités, etc. La réalisation dans la classe, avec les élèves, de ce qui a été ainsi élaboré hors de leur présence, fera alors découvrir au néophyte que, dans une mesure souvent bien supérieure à ce qu'il suppose, les « jeux » professoraux sont très largement coopératifs ! Cela n'empêche pas que, à plusieurs égards, l'organisation de l'étude dans les classes d'aujourd'hui soit l'héritière d'un temps où la coopération entre professeur et élèves était des plus réduites, comme il en va encore lorsque le professeur se borne à prononcer un « cours magistral » – dont la construction est en effet, très largement, un jeu contre la nature (mathématique) –, les élèves (ou les étudiants) ayant alors à étudier ce cours et « d'après » ce cours, ce qu'ils doivent faire en indépendance didactique par rapport au professeur, avec lequel ils n'ont ainsi commerce que par le truchement de son cours, qui le « représente » (en un sens quasiment diplomatique du terme) auprès d'eux [30]. Un vestige de cet effort ancien pour organiser socialement l'étude d'une manière faiblement coopérative – dont l'idéal serait

---

[29] C'est un tel choix qui est préconisé dans la formation donnée. On lit ainsi, dans la notion *Le temps de l'étude*, la remarque suivante : « Pour [élaborer un calendrier de l'étude], on doit décider si l'on procède par enseignement d'un bloc après l'autre, ou – ce qu'on peut recommander – si l'on opte pour l'étude en parallèle de *deux blocs* appartenant à deux secteurs différents (voire à deux domaines différents), avec toutefois un *décalage* temporel entre les deux (en gros, il convient d'avoir dépassé les principales difficultés du premier pour lancer l'étude du second) ».

[30] Il a existé au XIX[e] siècle en certaines institutions, et il existe encore sous des noms divers, des *répétiteurs* dont la fonction consiste à expliquer aux étudiants ce que le professeur avait présenté dans son cours : tel était par exemple le rôle des assistants de faculté il y a de cela quelques décennies.

que, et le professeur, et les élèves n'aient à « jouer » que contre la nature mathématique – se trouve aujourd'hui encore dans une norme plus inspectorale que professorale, celle de la « bonne gestion du tableau », expression qui désigne non seulement des aspects formels (la « mise en page » sur le tableau, la qualité de l'écriture et des figures, etc.), mais aussi le contenu mathématique même consigné par écrit au tableau. Là s'arrête – ou s'atténue fortement –, traditionnellement, la responsabilité didactique du professeur ; au delà lui succède celle de l'élève, responsable de la qualité de ce qu'on ne nomme pas « la bonne gestion du cahier », dont il est pourtant comptable. Cette norme ancienne, qui ne donne à la tenue de ses cahiers par l'élève que le sens d'une ascèse personnelle, et non d'une participation à un effort *collectif* pour apprendre, est à la racine d'un conflit normatif avec une part de la formation donnée à l'IUFM, dans laquelle le professeur est en partie tenu pour comptable de la qualité des traces écrites en tant qu'outil de travail de l'élève et de la classe [31]. Ce déplacement de la frontière des responsabilités didactiques correspond à une évolution sans doute à peine amorcée aujourd'hui, qui accroît clairement le champ de responsabilité de l'enseignant en matière de conditions d'étude et d'apprentissage des élèves, mais qui, d'une façon qui peut paraître *a priori* paradoxale, accroît aussi, au double plan qualitatif et quantitatif, les responsabilités didactiques des élèves eux-mêmes, non seulement à l'endroit de leurs propres apprentissages, mais aussi vis-à-vis des conditions de travail de la classe toute entière, chaque élève apportant ainsi son écot (ou au contraire mettant des obstacles) à l'avancée de la classe dans le processus d'étude.

8.5. Ainsi retrouve-t-on la classe par delà chacun des élèves qui la composent. Il y a là une découverte que tout débutant doit accomplir, même dans un cadre moins fortement coopératif que celui que l'on vient d'évoquer. La norme, ici, est sans appel : ne dialoguer qu'avec le tableau, et même se risquer à dialoguer avec quelques élèves pris un à un, ne suffit pas quand il s'agit, selon l'expression traditionnelle, de « faire la classe ». Pour cela, le professeur doit s'adresser non à tel ou tel individu, mais au groupe-classe (selon la terminologie « moderne »). Constamment, il doit s'efforcer de rassembler le troupeau de ses élèves, au

[31] Chaque professeur stagiaire doit en effet rassembler en un corpus présenté par ses soins l'ensemble des traces écrites de l'activité de sa classe lors des quelques séances qui précèdent et qui suivent la séance où il a fait l'objet d'une visite *in situ* dans un but de formation et/ou de validation. En pratique, ce document appelé traditionnellement « corpus B », réunit les traces écrites de deux élèves choisis par le professeur stagiaire au sein de sa classe. Le corpus B participe de la prise d'information sur l'activité du professeur stagiaire et joue un rôle éminent dans le jugement qui sera porté sur lui en fin d'année.

double plan humain *et mathématique*, en ramenant vers l'action en cours ceux qui pourraient s'égarer ou flâner à quelque distance de là. Cette exigence pesant sur le professeur de rassembler la classe tout au long de la séance autour du contenu mathématique étudié suppose de sa part un engagement constant, au sein même de l'espace de la classe, dont il doit ne laisser aucune partie inactive, mais qu'au contraire il doit constamment surveiller, solliciter, relancer, dynamiser. Il y a loin alors du professeur faisant son « cours au tableau » au professeur engagé dans une espèce de corps à corps didactique avec la classe. Cette nécessité contemporaine tend à faire norme. Elle oblige le professeur à une forte réactivité, qui lui permette d'intervenir dans des épisodes qui ne sont qu'en partie prévisibles et auxquels il doit se préparer pourtant au lieu d'agir à l'instar d'un robot préprogrammé. La classe se pliera-t-elle à cet engagement didactique qui lui est réclamé, ou, à l'opposé, entrera-t-elle dans une culture de l'anomie didactique, qui est une autre manière, éprouvante pour le professeur, d'attester que la coopération entre élèves et professeur est bien de mise, et qu'on ne saurait faire la classe tout seul ? En ce point, un problème normatif se pose, qui reste mal posé par la culture professorale traditionnelle. Celle-ci, en effet, tend à dissocier deux plans de l'agir professoral, qu'un même mot, celui de *discipline*, devrait pourtant articuler. Il y a la discipline mathématique, qui appelle normativement tout ce que l'on vient d'énumérer ; et il y aurait « la » discipline, tout court, indépendante du contenu étudié et des formes de l'étude, touchant aux règles générales de la civilité, qu'il échoit au professeur de restaurer lorsque sa dégradation empêche l'entrée des élèves dans la discipline mathématique. Telle est du moins encore la *doxa* actuelle en la matière. Ses rejetons sont connus : le professeur aurait – ou n'aurait pas – d'*autorité* sur les élèves, ressort mystérieux que, faute de le rattacher à l'idonéité de l'enseignement proposé, on rattache ordinairement à la personnalité supposée de l'enseignant. La classe elle-même aurait une personnalité qui transcenderait les différents enseignements donnés : il y aurait l'attitude et le climat de « la classe » – plutôt que de la classe de *mathématiques* –, entité supposée préalable aux enseignements disciplinaires dans leur diversité, et réputée évoluer sous l'influence de facteurs souvent énigmatiques dès lors qu'on ne les recherche pas dans les propriétés des enseignements auxquels « la classe » est assujettie. Par rapport à la formation que reçoivent les stagiaires, le chantier normatif paraît immense !

9. Autorité du professeur et règles de vie de la classe

9.1. Un certain nombre d'aspects importants de la vie d'une classe n'apparaissent, dans les rapports des maîtres de stage, que de manière erratique mais lancinante, comme si leur mise en lumière posait problème. Ainsi en va-t-il de la question dite de l'*autorité* du professeur, que mentionnent plus d'un tiers des maîtres de stage. Une stagiaire dont nous avons déjà parlé – il s'agit de Sabrina – voit ainsi son autorité s'étendre, selon son maître de stage, en même temps qu'elle apprend à l'exercer de manière « bienveillante », en la maintenant « dans des limites profitables et à la détente et à divers travaux ». Le portrait de l'autorité du professeur est ici tout de mesure. La situation est un peu différente dans le cas de Sidney, car la classe dont il a la responsabilité se révèle « assez bruyante », « parfois pénible ». Dans ce contexte, le professeur stagiaire est appelé à faire preuve d'une « autorité plus ciblée ». Ruddy, quant à lui, travaille sur la question de l'autorité avec son maître de stage, avec pour objectif d'« éviter les bavardages, le bruit », afin que le « climat » de la classe soit « plus favorable au travail et à l'apprentissage ». Une autre stagiaire, Vanessa, a avec l'autorité un problème un peu différent : ayant établi des règles fermes de vie et de travail, elle a tendance à s'y référer très souvent, ce qui est un symptôme d'un certain malaise, en sorte que le maître de stage a fixé avec elle un objectif de formation visant à dépasser ce qu'on peut appeler un état de sous-autorité surmanifestée : « pouvoir obtenir à tout moment le silence total, savoir accentuer et faire ressentir aux élèves les "moments" didactiques forts par la parole et la gestuelle, ne pas parasiter ces mêmes "moments" par des interventions trop répétées concernant les règles de discipline suscitées, ce qui a pour effet d'effriter leur solennité et de casser le rythme de la séquence. » Le progrès, en l'espèce, tiendra dans le fait d'intervenir « beaucoup moins mais à des moments plus appropriés », en distinguant les interventions « urgentes » de celles qui peuvent attendre la fin de la séance. Mais souvent, trop souvent, le manque d'autorité apparaît de manière beaucoup plus claire. Une autre stagiaire, Jessica, s'efforce, note sa maître de stage, de « montrer une certaine autorité ». Pourtant, ajoute-t-elle, « il y a encore des progrès à faire, car [Jessica] ne tient pas toute l'heure ». Le constat est prolongé en une analyse étiologique par une maître de stage apparemment très en verve : « Son problème est dû à une personnalité qui ne s'est jamais imposée, qui a du mal à se poser en responsable, en chef. Son éducation stricte à la campagne l'a, je pense, empêchée de faire connaissance avec la jungle des adolescents des villes. » L'autorité, de toute façon, est soumise à un régime de pénurie : en règle générale, on n'a pas assez d'autorité. Il arrive qu'on en ait suffisamment pour obtenir tel ou tel résultat, comme ce stagiaire, Henry, qui, écrit son maître de stage, « a su faire preuve de suffisamment d'autorité pour juguler l'agitation parfois excessive de ses élèves ». Mais l'usage de certaines marques d'autorité doit rester rare et maîtrisé : ainsi du fait de hausser le ton, voire de crier, ce que, indique le maître de stage, Henry ne fait que « de façon exceptionnelle pour ne mettre fin autoritairement qu'à certains conflits particulièrement stériles ». L'autorité apparente est parfois trompeuse. Derrière le semblant de louange formulé par le maître de stage se cache un constat moins limpide : Henry peine à « contrôler l'activité de chacun de ses élèves » lors du travail en groupe et, si « certains élèves semblent étudier, d'autres font semblant, d'autres [encore] s'amusent ».

9.2. Selon une autre métaphore, l'autorité n'est pas comme une matière qu'on aurait en quantité suffisante ou insuffisante, mais comme un attribut personnel, qu'on parviendrait ou non à « imposer » à autrui. D'un stagiaire, Joan, sa maître de stage dira par exemple qu'il « a su imposer son autorité à l'ensemble de la classe ». L'expression de cette autorité apparaît en même temps incertaine, fragile. La maître de stage d'une autre stagiaire, Hermine, dira ainsi que cette dernière redoutait les visites de sa maître de stage, « craignant de voir son autorité menacée », alors même que la maître de stage lui reconnaît « une autorité naturelle », qui se révèle notamment en cela qu'elle « s'adresse à la classe avec clarté et assurance ». Dans le même temps, la maître de stage note ce qu'elle présente comme le *credo* de la stagiaire et qui révèle davantage de naïveté et de rigidité que d'autorité véritable : « Les injonctions du professeur étaient révélatrices de sa conception initiale : "en classe écoutez le professeur, taisez-vous ; et pour réussir les exercices il suffit d'appliquer les propriétés et les définitions". » Autorité bien ambiguë ! Dans le bilan final, la maître de stage s'exprimera à cet égard sans ambages, en notant que la stagiaire « possédait déjà des qualités d'autorité, de clarté et d'assurance qui lui permettaient d'effectuer sans problème une passation magistrale des savoirs », mais qu'elle a fait de « nets progrès » en cela notamment qu'elle a « réussi à placer l'activité de l'élève au premier plan ». Les cas de figure sont nombreux. Tel stagiaire, Arnaud, est présenté comme possédant une autorité « très ferme », mais n'excluant ni la « bienveillance », ni la « confiance ». Un autre stagiaire, Kévin, dispose d'une autorité « tranquille, mais ferme », qui « lui permettra sûrement de s'adapter » à des classes plus difficiles que celle de son stage en responsabilité. Inversement, tel stagiaire, Nathan, « n'a pas réussi pour l'instant à imposer une certaine autorité » : il a donc encore « besoin de prendre assurance et autorité ». Dans le cas d'un autre stagiaire, Arthur, on apprend que ce n'est pas tant le manque d'autorité qui est mis en cause qu'une mauvaise organisation de ses cours. Une stagiaire, Laurie, doit, à l'inverse, « poser des gestes d'autorité en relation avec le règlement intérieur ». Une autre stagiaire encore, Véronique, n'a pas trouvé « tout de suite l'attitude à avoir pour installer son autorité », d'autant plus qu'elle devait faire face à des élèves dont l'un au moins affectait de s'opposer à « tout ce qui peut représenter l'autorité ».

9.3. Attribut quelque peu insaisissable de la personne, l'autorité se manifeste en pratique par l'instauration de *règles de vie et de travail* – exigence à propos de laquelle les maîtres de stage ne restent pas muets. C'est ainsi que Séverine, dont les élèves sont « assez bavards », reçoit le conseil de mettre en place « dès le début de l'année » – la consigne vaut pour les années à venir, bien sûr – « des règles plus strictes permettant aux élèves de travailler dans de meilleures conditions ». Le cas de Vanessa, déjà évoqué, permet de mieux situer le bon usage des règles posées – que Vanessa a tendance à rappeler trop fréquemment, de façon sans doute trop rigide. Le maître de stage y voit un cas de figure encore inadéquat, faute, écrit-il, d'« un peu de complicité entre le professeur et ses élèves, comme si la situation de confiance réciproque, élément indispensable à la réussite de l'acte pédagogique, tardait à se mettre en place ». Le travail amorcé par Vanessa doit être poursuivi, estime ce maître de stage, qui note que « toutes les mesures ont été consignées journalièrement dans le carnet de classe de Vanessa afin d'en étudier les effets *a posteriori* ». L'autorité, on le voit, se gagne par un travail méticuleux, persévérant, de construction d'une discipline partagée. Mais le bon usage peut appeler aussi bien, selon la classe à laquelle on doit s'affronter, une attitude moins bonasse ! C'est ainsi que Sabine, face à une classe de seconde « difficile à tenir et d'un niveau faible », reçoit le conseil de « s'imposer avec force », en plaçant « des repères précis et incontournables », qu'il faut faire respecter en n'autorisant « aucun débordement ». Dans ce combat pour l'imposition de règles efficaces, Sabine doit d'abord combattre « sa peur de mécontenter les élèves », en assumant par exemple d'imposer une aide individualisée « à ceux qui en ont besoin », alors que, en sens inverse, elle a commencé par renoncer à imposer à la classe un devoir à la maison par semaine. Il est vrai que, à l'instar de Jessica, mentionnée plus haut, nombre de stagiaires sont surpris par des attitudes d'élèves « constamment provocatrices », qui les mettent aux prises avec un « non-respect des règles citoyennes courant à ce niveau », et auquel la maître de stage citée associe le « refus de l'effort personnel ». À l'inverse, on découvre que l'autorité tranquille va de pair avec une bonne adéquation des contenus d'activités proposés à la classe. C'est ainsi qu'une stagiaire dont la maître de stage indique qu'elle « exige le silence » et, plus généralement, « le respect de bonnes règles de conduite » est arrivée à un *modus vivendi* de qualité qui, significativement, nous est décrit ainsi par sa maître de stage : « les élèves sont habitués à participer et le font avec beaucoup de bonne volonté car ils respectent Corinne, qui leur propose des activités intéressantes… » Discipline de vie et discipline mathématique vont de pair : « Corinne fait vivre dans la classe une curiosité mathématique. Les élèves posent beaucoup de questions et sont très actifs. » Un autre stagiaire, Théo, a une classe difficile. En difficulté face à elle, il a progressé, et doit progresser encore ; mais il a d'ores et déjà appris une chose : « une séance construite avec des objectifs didactiques précis lui permet une plus grande assurance, et l'aide à mieux gérer jusqu'aux problèmes "de discipline". » Par delà l'adéquation de leurs contenus, le bon cadrage des activités est une variable sensible. Nathan, qui, après plusieurs mois, est loin d'être parvenu à résoudre les problèmes de vie de la classe, est invité par son maître de stage à persévérer dans son effort pour « établir des règles en classe, comme il l'a fait d'ailleurs, et bien fait, pour le travail à la maison des élèves » – ce qui lui permettra « d'intéresser une majorité d'entre eux » et de « se faire écouter ». Bien entendu, ajoute un autre maître de stage, il faut « savoir faire la part des choses » et, en l'espèce, « ne pas exiger le silence total ni une écoute maximale dès les premières minutes du cours ». L'expérience montre en effet que l'écoute et le silence se font « presque naturellement » au bout de quelques instants, dès lors que le professeur instaure des « échanges structurés et bienveillants », lesquels sont « de nature à mettre les élèves en confiance ».

9.4. Lorsque, néanmoins, la recherche d'un *modus vivendi* est troublée par certains élèves, le problème de la sanction surgit. Deux idées émergent des rapports des maîtres de stage. Tout d'abord, en certains cas, « il ne faut pas hésiter à sanctionner ». Ainsi la maître de stage de Charlotte écrit-elle franchement : « Je suggère que les élèves n'ayant pas fait le travail s'en excusent dès le début du cours. S'ils ne s'excusent pas, ils doivent être sanctionnés. » Tel autre stagiaire, Matt, est incité par son maître de stage à ne pas « hésiter à rappeler les règles, voire à sanctionner les élèves ». Le maître de stage de Max lui reproche nettement « trop de mansuétude » et « trop d'hésitations à sanctionner des élèves difficiles ». Pour une stagiaire, Véronique, il s'est révélé « très difficile de sanctionner ». Animé par le « désir de ne pas sanctionner systématiquement », Max, on l'a vu, a pu faire preuve de trop de complaisance. Mais la frontière est d'un tracé malaisé. Car, en même temps, la profession semble regarder comme une erreur, et peut-être même comme une faute, un maniement trop lourd de la sanction. On a vu plus haut la référence à « une meilleure appréhension de la hiérarchie des sanctions ». Confrontée à des bavardages incessants lors d'une séance de fin de semaine de 16 h à 17 h, Charlotte, précise sa maître de stage, « a su trouver une solution sans sanction lourde ». Le maître de stage d'Henry l'incite à « user de façon juste des sanctions disciplinaires prévues par le règlement intérieur du collège ». Véronique, dont nous avons vu la difficulté à sanctionner, a changé au fil du temps : désormais, elle « sanctionne quand cela est nécessaire », point délicat sur lequel un autre stagiaire, John, a dûment travaillé avec son maître de stage. Il y a en tout cela un double apprentissage progressif qui reste très généralement à faire : assumer de sanctionner, mesurer l'idonéité de la sanction à prononcer. Corinne, dont nous avons vu qu'elle était parvenue à un bon équilibre de vie et de travail de la classe, n'avait pourtant pas si bien commencé : au début, rapporte sa maître de stage, elle « hésitait un peu à donner des punitions », « mais elle a vite su que c'était nécessaire et n'a pas hésité ensuite à sévir ». Telle est, de façon abrégée, l'histoire de maint stagiaire : passer d'un état de non-conscience du problème à une assomption ferme, mais sereine, de la nécessité de la règle et de l'incontournable obligation de sanctionner les infractions à la règle.

10. Bruissements mathématiques

10.1. La référence aux mathématiques n'est pas totalement absente des rapports des maîtres de stage. Elle n'est pas non plus le premier axe des narrations ou des analyses apportées par les maîtres de stage. Pourtant, un examen plus attentif du corpus étudié révèle un bruissement constant du « souci mathématique », exprimé à travers des principes didactiques plutôt qu'illustré sur un matériel mathématique déterminé – même si un tel matériel apparaît, çà et là, pour appuyer tel ou tel développement. On a vu déjà le principe selon lequel le professeur doit s'efforcer de rassembler la classe autour du contenu mathématique et des activités qu'il détermine. On a noté aussi la mention du « niveau », plusieurs fois déclaré « modeste », de telle classe en mathématiques, ainsi que de l'intérêt, présenté souvent comme « limité », que les élèves portent à cette matière. L'évocation du rapport aux mathématiques des classes n'est cependant pas à sens unique : tel maître de stage souligne ainsi que certains élèves viennent spontanément à une séance de soutien en mathématiques « pour le plaisir ». Certains professeurs ont inscrit leur classe à un rallye mathématique ou à une sortie à thème mathématique. Généralement, la mission du professeur l'amène à se tenir dans un entredeux : d'abord, « rassurer » les élèves « sur les choses mathématiques » ; ensuite, instaurer un « dialogue mathématique ». Un tel dialogue suppose une langue idéale que les rapports des maîtres de stage s'attachent à décrire comme empreinte de précision, de rigueur, de correction, par contraste avec ce qui semble foisonner chez certains débutants : erreurs et imprécisions, manque de rigueur dans l'emploi du vocabulaire mathématique à l'oral – les formulations écrites semblant davantage exemptes de critiques. D'une manière générale, la correction, la précision, la rigueur « mathématique » constituent un critère sensible du jugement que le maître de stage porte sur l'activité professorale du stagiaire. L'un d'eux note ainsi que le stagiaire est « très attaché à la rigueur mathématique », un autre qu'il « a fait de réels efforts pour améliorer la précision de son vocabulaire », tandis qu'un autre encore, soulignant les progrès réalisés, note tout de même que « des progrès sont attendus et tout à fait possibles dans la clarté de l'expression et la précision du vocabulaire ». D'un autre enfin, le maître de stage écrira : « son attachement à la rigueur mathématique n'a pas changé, aussi bien en ce qui concerne le contenu que la rédaction ». Bien entendu, comme sur d'autres aspects de cette exigence normative posée, le *contenu* précis de la « rigueur », de la « précision », de la « correction » est largement passé sous silence dans les rapports examinés. Toujours est-il que semble prévaloir l'idée d'une orthodoxie de l'expression mathématique, que les professeurs stagiaires sont appelés à identifier et à faire leur.

10.2. Les rapports sont riches de considérations sur le commerce que les stagiaires entretiennent – ou devraient entretenir – avec les mathématiques. Ainsi plusieurs maîtres de stage observent-ils que leurs stagiaires ont une vision trop « atomisée » des mathématiques, qu'ils perçoivent d'une manière insuffisamment globale, parce qu'ils tendent à occulter les liens de solidarité entre les notions et résultats enseignés, qu'ils ont par contraste tendance à traiter comme des éléments isolés. Tel maître de stage, qui reproche ainsi à son stagiaire de « traiter le programme en entités cloisonnées et indépendantes », souligne qu'il gagnera par exemple à « relier la proportionnalité avec la fonction linéaire, la factorisation aux équations produits ». Au lieu de tenter d'obtenir des élèves une maîtrise d'éléments mathématiques isolés, les stagiaires doivent, comme le souligne un autre maître de stage, « envisager un réinvestissement des compétences étalé sur une progression plus globale ». C'est ainsi, ajoute le même rapporteur, que le théorème de Pythagore sera réutilisé en géométrie dans l'espace (à propos des cônes et des pyramides) et encore dans le calcul du cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle. Par ailleurs, indique un autre PCP, la capacité du stagiaire à prendre une perspective plus large sur le corpus mathématique à enseigner permet un dialogue plus substantiel entre stagiaire et maître de stage, notamment lors de la préparation de l'enseignement à donner – alors que, semble-t-on suggérer, ce dialogue devient impossible lorsque l'émiettement du contenu mathématique prévaut. La propension du stagiaire à adopter une vision plus globale du corpus mathématique à enseigner semble dépendre *a priori*, dans une certaine mesure, de sa maîtrise des contenus mathématiques ainsi que de son engagement dans la préparation des séances avec les élèves. D’une manière générale, les maîtres de stage sont peu critiques à l’endroit de la culture mathématique de leur stagiaire : à peine trouve-t-on un maître de stage qui, tout en affirmant que sa stagiaire « a une maîtrise tout à fait satisfaisante des diverses connaissances à enseigner » la loue de ne pas hésiter à « poser des questions lorsqu’un point lui pose problème ». Ce tabou inentamé de la « solidité » des connaissances mathématiques dont seraient porteurs les lauréats des concours de recrutement ne cèdent un peu que devant l’exigence du travail spécifiquement professoral de préparation des cours : alors que beaucoup de stagiaires s’investissent sérieusement dans ce travail, quelques-uns d’entre eux suscitent des critiques – pour une réflexion insuffisamment adéquate ou un manque d’investissement personnel pour concevoir et conduire des activités « porteuses et adaptées à la classe ». D’une façon sans doute un peu plus révélatrice, les maîtres de stage s’autorisent un point de vue critique plus net dès lors qu’ils examinent, non les connaissances mathématiques *stricto sensu* de leur stagiaire, mais le contexte de la mise en jeu de ces connaissances. L’un d’eux regrette ainsi que « les prolongements des mathématiques vers d’autres sciences ou domaines faisant partie ou non du programme de la classe [soient] hélas peu abordés ». Le ressort de cette critique n’est, bien entendu, pas à chercher du côté de la connaissance, mais bien du côté de « l’intérêt des élèves ». Un maître de stage, qui regrette que ne soit pas proposée, à propos d’un problème issu des sciences physiques, « une analyse des difficultés non mathématiques soulevées par un tel problème », précise ainsi qu’une telle analyse permettrait à chaque élève de se lancer sereinement dans la recherche. Un autre maître de stage, qui incite son stagiaire « à présenter toute notion dans un contexte plus général, mathématique, historique, physique ou économique (par exemple) », indique, péremptoire, ce qui justifie à ses yeux une telle « habitude » de la part d’un professeur : « cela motive davantage les élèves, quel que soit leur niveau ». Un maître de stage constate qu’il reste à son stagiaire à donner « vie et chair » à son enseignement, et cela, quand c’est possible, « en usant de quelques arguments culturels extra-mathématiques (historiques, anecdotiques, étymologiques) ». La raison invoquée retrouve un argument déjà rencontré : « les élèves apprécient tout ce qui sort les maths de leur “tour d’ivoire” » et de leur « apparente perfection ». D’une façon plus générale, on invoque aussi le souci de faire apparaître les raisons d’être des notions enseignées, en se référant à l’histoire et au « monde réel » comme contextes de l’activité mathématique. On ignore si ces suggestions seraient maintenues s’il était reconnu qu’un tel questionnement, de telles références rebutent les élèves plus qu’ils ne les motivent ! Apparemment, il s’agit là de conseils inspirés d’un certain opportunisme pédagogique plus que d'une exigence épistémologique indépendante de l'attitude des élèves à son endroit.

10.3. Dans la ligne précédente, les considérations des maîtres de stage touchent aussi à l'utilisation des TICE et des calculatrices, thème qui, lui aussi, leur apparaît sans doute spécifique de l'activité qui est la leur, et qu'ils situent dans un entredeux, entre pur savoir mathématique et souci de l'élève. Il semble, à examiner les rapports, que l'approbation généralement formulée à l'égard des stagiaires mobilisant ou tentant de mobiliser les TICE reste un peu « théorique », comme si les maîtres de stage envisageaient avec faveur une évolution dans laquelle, pourtant, ils ne précèderaient pas sensiblement leur stagiaire. Aussi les descriptions se font, ici, plus naïvement concrètes, comme s'il fallait rendre compte de pratiques non familières. Un maître de stage décrit ainsi le stagiaire projetant sur le tableau une figure construite à l'aide de Géoplan et « la codant manuellement à la craie au fur et à mesure de l'avancement de la démonstration ». Un autre rapport prend soin de dire que la stagiaire travaille « dans une salle de mathématiques équipée d'un ordinateur relié à un grand téléviseur » – situation que l'on prend la peine de décrire explicitement alors bien sûr qu'on ne précise pas qu'il y a un tableau noir. Tout ici semble encore, en cette année 2003-2004, de l'ordre du nouveau, sinon de l'inédit ! Les élèves, bien entendu, sont au diapason : le nouveau les passionne et lorsqu'un stagiaire propose à sa classe un travail sur Géoplan (portant sur un parallélogramme « amovible »), les élèves « adorent ». Un maître de stage indique que le stagiaire « projette prochainement de faire fonctionner une machine avec tablette de rétroprojection pour simuler une expérience aléatoire » et ceci en classe entière ; et de conclure en prenant à nouveau les élèves pour pierre de touche : « tout ceci tend à diversifier agréablement l'offre mathématique faite aux élèves ». La distance qui s'affiche ici avec l'usage d'un tableur ou d'un logiciel de géométrie dynamique est manifestement moindre en ce qui concerne l'emploi d'une calculatrice. En ce cas, les maîtres de stage semblent retrouver leur position de familiarité maîtrisée avec un outil dont ils peuvent alors apprécier de manière plus experte la croissante ou l'insuffisante maîtrise chez leur stagiaire. De façon typique, un maître de stage écrit à ce propos : « La place de la calculatrice est maintenant mieux aménagée : son rôle, son utilisation sont mieux définis, les consignes du professeur sont plus précises ; l'élève sait à quel moment il peut utiliser sa machine, pour calculer directement, ou au contraire pour vérifier son résultat : il est indispensable d'amener l'élève à la maîtrise de cet outil : les différentes possibilités de son utilisation (tester un développement en calcul littéral par exemple) peuvent être approfondies. » Globalement, pourtant, le regard porté sur cette dimension de l'activité professorale s'exprime de manière encore retenue. Ainsi de ce maître de stage qui note que son stagiaire « n'oublie pas d'utiliser les matériels mis à disposition dans le collège » – vidéoprojecteur et salle d'informatique –, et qui conclut d'une façon un brin lyrique : « ceci montre une volonté de faire des mathématiques vivantes ».

10.4. Les maîtres de stage reprennent une autorité assumée dès lors qu'est concernée la mise en relation des élèves et des mathématiques à enseigner. Ainsi reprochera-t-on à un stagiaire d'avoir « mal cerné » le contenu mathématique *exigible*, et d'avoir du coup imposé des exigences mathématiques bien au-dessus de cet exigible. C'est là, de fait, une des difficultés sur lesquelles achoppent les débutants : le fait de proposer des travaux – des « exercices », comme dit le jargon professoral – trop difficiles, ce qui a pour conséquence presque automatique un enseignement où « les savoir-faire essentiels [ne sont] pas assez mis en évidence ». Le caractère spécifique de certaines difficultés mathématiques est, dans ce contexte, volontiers souligné. Ainsi en va-t-il à propos de la mauvaise prise en compte par telle stagiaire de « la difficulté qu'éprouvent les élèves à manipuler les objets algébriques ». D'une façon générale, le premier « jet » du débutant apparaît trop complexe, trop peu lisible, faisant fond sur une abstraction que les élèves ne maîtrisent pas – en matière de calcul littéral comme en fait de raisonnement géométrique, par exemple. Pour aller vers une meilleure adéquation, il convient non seulement de se pencher sur le contenu enseigné aux élèves dans l'année précédente, mais aussi sur les connaissances mathématiques que la majorité d'entre eux possèdent réellement à leur arrivée dans la classe où l'on enseigne. Il s'agit là d'une condition essentielle si l'on veut atteindre l'état que les rapports des maîtres de stage dépeignent comme le critère premier de la réussite du professeur de mathématiques dans sa mission : faire que la classe, et chacun des élèves qui la composent, « fasse des mathématiques » – en fasse « réellement ». Lorsque le professeur parcourt sa classe alors que les élèves se livrent au travail qu'il leur a assigné, c'est cela qu'il doit d'abord vérifier : que tous font bien des mathématiques. L'activité personnelle de l'élève, contemporaine d'une autonomie mathématique plus grande de la classe, est en même temps la condition pour que s'instaure « un dialogue mathématique », se traduisant par une discussion mathématique « vivante ». C'est à ce prix que l'on obtient des résultats d'une qualité qui pourra même surprendre le maître de stage. Une PCP écrit ainsi :

> À ma dernière visite, [la professeure stagiaire] fit des exercices sur les pourcentages, la mise en équation et la résolution de ces dernières. Les exercices étaient très bien choisis, permettant un débat sur la résolution par des choix différents d'inconnue. Des élèves, d'habitude inactifs et un peu rebelles

aux mathématiques participaient à mon grand étonnement à la résolution et à la rédaction des exercices. Dans la classe les élèves travaillaient seuls ou par deux, cela faisait un peu de bruit, mais tous parlaient de maths.

Pour arriver à un semblable résultat, la mise en débat des idées et des gestes est un impératif. Lorsque celui-ci est heureusement satisfait, le paysage s'ordonne selon des lignes harmonieuses, ce dont un maître de stage témoigne en ces termes : « La validation d'un savoir devient l'objet d'un consensus argumenté, les démonstrations mathématiques reprenant ainsi leur place naturelle. » En sens inverse, l'occultation par le professeur de ce qui peut surgir dans le travail de la classe a en général des effets ambigus. Ce même maître de stage regrettera ainsi que « l'éventuelle non-linéarité qui apparaissait dans le graphique restitué au tableau [n'ait] pas été l'objet d'un débat ». À la racine de cette réprobation discrète, on trouve un quasi-postulat, à savoir que le professeur doit conduire la classe « en cherchant constamment à attiser la curiosité mathématique de ses élèves », ce qui suppose à la fois de laisser « une place importante au travail de recherche individuel » et de faire sa place à un travail collectif de « réflexion mathématique », par exemple sur « la pertinence d'une explication » ou sur « la généralisation d'une solution ». Cette curiosité mathématique que le professeur doit « faire vivre dans la classe » suppose sans doute qu'il manifeste lui-même une authentique curiosité mathématique. Mais elle suppose plus encore de donner une place réelle aux élèves, afin qu'ils puissent « prendre [le] problème mathématique [proposé] réellement à leur compte » – ce que ne permet guère, par exemple, le recours, préférentiel chez certains stagiaires, au « cours dialogué ». Tout cela, bien sûr, ne va nullement de soi : il est plus facile d'évoquer des « activités enrichissantes », « judicieusement choisies », que d'en concevoir et d'en réaliser de façon véritablement réussie, même si c'est bien là l'objectif que doit constamment viser le jeune professeur, en s'appuyant sur les « initiatives mathématiques » de ses élèves. Le tableau ci-après, que brosse un maître de stage, fournit, de cette ambition et de cette difficulté, une bonne illustration :

L'organisation didactique est donc un domaine pris très au sérieux par la stagiaire. La marge de progression réside en l'émergence d'une curiosité mathématique plus soutenue au sein de la classe, le « petit plus » du professeur... Cette capacité à entraîner les élèves dans une démarche de questionnements induits, de conjectures élaborées, sera affinée quand cette « aisance pédagogique » dans la classe que j'ai citée plus haut sera définitivement acquise. Elle se fera par le biais d'un débat plus concerté avec le professeur, de questions-réponses animées, de petites énigmes qui apparaissent soudainement et seront inscrites sur un coin du tableau, de digressions contrôlées... Nous avons souvent évoqué l'idée qu'il fallait pouvoir quitter « à raison » la trame didactique d'une séquence afin d'y revenir en lui donnant plus de poids. Il est vrai cependant que c'est l'expérience et l'habitude avant tout qui formeront le corps et l'opiniâtreté *(sic)* de telles digressions !

10.5. Les visites que les maîtres de stage rendent à leur stagiaire en classe les mettent régulièrement devant des pratiques mathématiques dont leurs rapports se font parfois l'écho de manière davantage détaillée. On observera par exemple que tel petit travail mathématique consomme trop de temps : ainsi de la manipulation de données, leur rangement dans un tableau, en statistique. Généralement, pourtant, les rapports se bornent à décrire le contenu mathématique sans guère le commenter, comme il en va dans le passage suivant :

On commence par une activité sur les valeurs exactes et les valeurs approchées où l'on remplit un tableau pour les nombres $\frac{2000}{7}$, $\frac{\pi}{58}$, $2 - 5\sqrt{6}$, ensuite on compare $A = 5\sqrt{2} + 7$ et $B = \frac{1}{5\sqrt{2} - 7}$, enfin un travail est proposé pour montrer les limites de la calculatrice en cherchant à comparer $\sqrt{2}$ et $\frac{911664}{665857}$. La séance s'est bien déroulée.

Le même rapporteur, à propos d'une autre visite, écrira : « Il n'y a rien à reprocher au contenu, mais la forme n'a pas laissé assez de place à l'appropriation des notions par les élèves. » On retrouve ici la loi que nous avions vu s'exercer plus haut : on ne touche pas – ou quasiment pas – au contenu, mais à sa mise en jeu didactique. C'est ainsi que, ayant assisté à une séance de révisions sur les équations, un PCP formule plusieurs reproches à l'endroit du stagiaire, par exemple du point de vue du manque de précision et de rigueur dans l'expression ; mais les exigences « mathématiques » correspondantes renvoient ici moins aux mathématiques elles-mêmes qu'à une certaine idée de ce qui est didactiquement approprié aux élèves – tel le fait d'éviter tout langage relâché, ce qui pourrait induire les élèves en tentation. Ainsi en va-t-il dans le passage suivant :

II convient aussi d'être précis et rigoureux dans la manière de s'exprimer car l'ambiguïté des propos entraîne une compréhension incomplète voire erronée (bien parler « des termes en x » et non pas « des x », bien dire « on retranche $6x$ dans les deux membres » et non pas « on fait $-6x$ »…).

En sens inverse, et selon une attitude déjà croquée plus haut, on verra telle maître de stage s'enchanter de l'initiative du stagiaire mobilisant des moyens « modernes » de travail – ce que montre le passage suivant de son rapport :

Le professeur propose un diaporama avec vidéoprojecteur sur le problème : « Pour quelles valeurs de x a-t-on $1{,}567 - (58{,}019 - x) = 10{,}55$? » Le diaporama proposé par Charles montre un travail personnel intéressant et très recherché. Les élèves répondent très bien au problème posé (comment écrire autrement – (58,019 – *x*)) et font émerger la propriété de suppression des parenthèses.

10.6. L'autorité du PCP trouve à s'exercer de manière plus autonome dans un autre domaine de formation encore qui, semble-t-on penser, n'appartient qu'à lui : celui de la programmation de l'étude au long de l'année. À cet égard, il semble que le savoir-faire soit d'autant plus la chose de la profession que celle-ci regarde un tel savoir-faire comme fruit de l'expérience pratique de l'enseignement plutôt que comme susceptible d'une connaissance *a priori* que les stagiaires pourraient apporter avec eux. Aussi la planification de l'étude se fait fréquemment à deux, le stagiaire se soumettant alors souvent au point de vue du maître de stage, et même au point de vue élaboré par un ensemble de professeurs qui lui imposent *de facto* leur « progression commune ». Ainsi un maître de stage note-t-il significativement dans son rapport :

Pour le premier trimestre nous avions prévu les chapitres suivants :

– Les nombres

– Triangles isométriques et triangles semblables

– Fonctions : première approche et premières définitions ; variations

– Statistique descriptive

Le même maître de stage notera d'ailleurs que le stagiaire a suivi cette progression mais qu'une interruption des cours due aux intempéries ne lui a pas permis de la réaliser parfaitement. De la même façon, une maître de stage notera la volonté émancipatrice de sa stagiaire du point de vue que nous évoquons ici : « Nous avons également envisagé des possibilités de progression annuelle et Ariane a tenu à élaborer sa propre progression, menant de front numérique/gestion des données et géométrie ». Au vrai, le professeur maître de stage, et à travers lui toute la profession, tient les deux extrémités que sont d'un côté la programmation en grands « chapitres » successifs ou simultanés, la vision globale des mathématiques à enseigner inscrites dans le temps de l'année scolaire, et d'un autre côté la vision du détail, de ce détail où, semble-t-il, se joue la qualité même de professeur – et, en grande partie aussi, la qualité de l'enseignement qu'il peut donner. Un maître de stage indique ainsi que le travail avec sa stagiaire a porté sur de nombreux points de la pratique mathématique en classe, qu'il énumère en ces termes :

– Comment exécuter et exploiter un calcul, une figure ;

– Comment mettre en œuvre les connaissances et les méthodes pour la résolution de problèmes simples ;

> – Comment rédiger clairement et rigoureusement les exercices et les devoirs ;
>
> – Comment montrer aux élèves qu'un raisonnement en mathématiques doit comprendre des enchaînements logiques et ne doit pas être uniquement une suite de lignes et de calculs sans liens entre eux.

Dans certains cas, cette orthodoxie supposée est adoptée par toute une équipe de professeurs, celle du collège ; le stagiaire ne peut alors manquer de s'y soumettre. Ainsi de ce jeune enseignant que décrit le passage suivant :

> En géométrie, Arnaud, comme l'ensemble de l'équipe de Maths du collège, demande aux élèves une structure récurrente des réponses : « je sais que » « or si ... alors » « donc » qui semble les aider dans leur apprentissage de la démonstration.

À nouveau éclate cette évidence : l'orthodoxie « mathématique » se prévaut d'un fondement « pédagogique ». De ce point de vue, les orthodoxies professorales, on l'a évoqué, intègrent souvent le principe selon lequel ce qui est distinguable doit être distingué : ainsi des « conjectures » et des « résultats démontrés », ou encore des valeurs approchées et des valeurs exacte. Tel maître de stage conseillera à son stagiaire de « […] bien s'assurer que les élèves distinguent clairement une définition, une propriété, une conséquence ». Semblablement, une stagiaire reçoit le conseil d'« appuyer son propos par la visualisation des hypothèses et résultats obtenus, sur une figure claire et précise, le plus souvent possible tout au long de la séquence ». Le poids du pédagogique sur le mathématique est ici net, au point même d'entamer parfois l'authenticité des mathématiques.

10.7. Malgré cet assujettissement apparent du mathématique au pédagogique, le mathématique demeure l'alpha et l'oméga, le fondement et l'horizon de l'activité du professeur. Négativement, par exemple, un maître de stage dira de sa stagiaire que son manque de présence « empêche [encore] le cours d'être mathématiquement vivant ». Un autre stagiaire sera, de même, tancé pour un « contenu mathématique trop maigre » dans les activités proposées et, en conséquence, « un caractère formel des notions qui sont censées en émerger ». La « mathématisation » de la vie de la classe passe par exemple, note un autre maître de stage, par un usage « abondant » des termes techniques, et par leur réemploi systématique par les élèves – à charge pour le professeur de veiller attentivement à ce qu'il en soit ainsi. Plus généralement, on l'a vu, la réussite du professeur se mesurera à sa capacité à promouvoir une vie mathématique authentique parmi ses élèves, tant au plan des attitudes que des pratiques.

Épilogue

Lorsque, quelques semaines après avoir été reçu au CAPES ou à l’agrégation de mathématiques, l’élève professeur stagiaire effectue sa prérentrée puis prend en main sa classe, il vient buter sur un « mur normatif » dont, en nombre de cas, il ne soupçonnait pas l’épaisseur, alors pourtant qu’il croyait avoir quelques « idées » sur le métier où il entre. Il découvrira ainsi, peu à peu, tout à la fois la loi d’airain à laquelle il doit désormais se plier, et les incertitudes *de cette loi, qui sont une invitation à exercer, par delà une normalisation plus ou moins facilement assumée, sa propre puissance normative. Car la construction du mur normatif qu’oppose le métier tel qu’il est n’est en vérité jamais achevée, alors même que certaines de ses parties se dégradent au point parfois de n’être plus que ruines. La situation est essentiellement ambiguë. Entrer dans le métier, c’est se soumettre à certaines règles définitoires, consubstantielles au métier. Pourtant ces règles ne sont pas elles-mêmes définies de façon univoque, au point parfois de sembler insaisissables et, quand on les découvre, inattendues. Ainsi en va-t-il tout particulièrement à propos des contenus mathématiques à enseigner dont, d’abord, on ne parle guère entre gens de métier, pour cette raison que chacun est censé les bien connaître. Alors que, du fait de sa réussite au concours de recrutement, l’élève professeur stagiaire pouvait croire avoir laissé derrière lui les « mathématiques comme problème », source de joies et de souffrances vécues comme étudiant puis préparationnaire, il va découvrir plus ou moins vite que, dans des contextes et des modalités renouvelés, les mathématiques seront indéfiniment un problème, sinon le problème du métier qu’il embrasse. C’est cette découverte et cette aventure que nous suivrons dans les chapitres à venir, en commençant par un retour en arrière sur la préparation au concours, qui constitue, plus que d’aucuns ne le croient, une part substantielle de la préparation* au métier.

Chapitre 2

Face à l’univers mathématique du CAPES

1. Un dispositif de formation original

1.1. Aussi bien en première qu’en deuxième année, la formation des élèves professeurs de mathématiques à l’IUFM d’Aix-Marseille intègre un dispositif dit des « questions de la semaine ». Chaque semaine ouvrable, à l’occasion d’une séance de travail où toute la promotion est en principe réunie, les élèves professeurs, qu’ils préparent le CAPES en première année ou qu’ils soient professeurs stagiaires en deuxième année, sont invités à consigner par écrit, individuellement, une difficulté qu’ils ont rencontrée et les interrogations que celle-ci soulève pour eux. Pour ce qui est de la première année, par exemple, la consigne qui leur est donnée est libellée ainsi : « Formulez brièvement une difficulté à laquelle vous vous êtes heurté, ou une question que vous vous êtes posée (dans le cadre de la préparation…) ». Le « contrat » autour de ce dispositif peut être décrit de la façon suivante. Tout d’abord, les difficultés évoquées par écrit peuvent être d’un ordre quelconque, pourvu qu’elles apparaissent à l’auteur de la question comme liées à la formation qu’il reçoit et qu’il s’efforce d’acquérir. Ensuite, les questions posées sont regardées, non comme des difficultés personnelles singulières, mais comme des difficultés *liées à la profession*, et plus précisément à l’entrée dans la profession, préparation au concours de recrutement incluse. Enfin, les éléments de réponse écrits qui seront apportés [1] ne constituent pas tant une réponse à l’*auteur* de la question qu’une réponse à la *question* posée. Plus précisément, ils constituent un apport de *matériaux* en vue de permettre à chacun de construire une réponse qu’il mettra en œuvre

[1] En première année, les questions sont rédigées et les « matériaux pour une réponse » présentés (avec un délai d’au moins une semaine) dans le cadre d’une séance de deux heures hebdomadaires composant un module de formation intitulé « Outils d’étude en mathématiques » (OEM). Il en va de même en deuxième année, dans le cadre du séminaire hebdomadaire de didactique des mathématiques.

personnellement, et provisoirement – en attendant d'autres « matériaux » éventuels qui le conduiront peut-être à déconstruire et à reconstruire la réponse « établie ». Un tel contrat, soulignons-le, constitue, dans le paysage éducatif courant, une singularité : sa réception ne va pas de soi, ni pour les promotions successives qui doivent s'y former et éprouvent quelque mal à s'y conformer, ni même pour certains formateurs. Pour les premiers, le renoncement conceptuel et narcissique au modèle courant du « Je pose une question. On me donne une réponse » en faveur du paradigme « Je soulève un problème. Nous tentons de le résoudre » ne se fait que par craquements réitérés. Pour les seconds, un autre apprentissage doit être fait, qui n'est pas toujours serein, car, outre qu'il faut renoncer au modèle scolaire de « L'élève me pose une question. Je réponds dans l'instant, car je sais », ce qui peut être vécu comme une agression identitaire, il faut aussi et surtout, premièrement, accepter des questions qui, du point de vue de l'orthodoxie professorale courante, semblent n'être faites que d'à-peu-près et d'aveux de méconnaissance peu dignes d'être considérés par le professeur (ici, le formateur) ; et, deuxièmement, rechercher et réunir des matériaux de réponse à une question que, soit on ne s'est jamais posée, soit on ne se serait jamais posée dans les termes utilisés par l'auteur de la question. Il y a là une perturbation de la *doxa* professorale qui, sans être tout à fait de l'hétérodoxie – sauf exception –, éloigne les uns et les autres des voies balisées que l'organisation usuelle d'une formation tend à imposer.

1.2. Pour illustrer le fonctionnement du dispositif des questions de la semaine, on considère ici, en premier lieu, un florilège de questions de première année prélevées dans le corpus de l'année 2000-2001. Une première catégorie de questions porte sur la connaissance de l'univers du CAPES de mathématiques, que des étudiants frais émoulus de leurs études de licence (ou de maîtrise) découvrent. Dans cette perspective exploratoire, on se demandera par exemple si l'on peut « mettre l'oral de côté jusqu'à ce qu'on ait passé l'écrit » – c'est-à-dire différer la préparation des épreuves orales d'admission et se concentrer sur la préparation des épreuves écrites d'admissibilité [2]. On demandera encore où trouver « les annales des sujets de CAPES ». On s'inquiétera de savoir si « la géométrie élémentaire est explicitement au programme du CAPES ». On s'inquiétera de ce à quoi on a droit à « l'oral 1 » (première épreuve orale d'admission, ou épreuve d'exposé sur un thème donné), en se demandant si on

[2] Le CAPES de mathématiques comporte quatre épreuves : deux épreuves écrites d'admissibilité qui ont lieu dans la première quinzaine de mars, et deux épreuves orales d'admission qui s'étalent de la fin juin à la fin juillet.

doit y « venir avec les programmes du secondaire » ou si les examinateurs les fournissent. D'une façon générale, les épreuves orales suscitent des questionnements récurrents. Faut-il, pour l'oral 1, apprendre par cœur des « squelettes d'exposés » ou faut-il se rendre capable de rebâtir entièrement l'exposé dans les deux heures qui précèdent le passage devant le jury [3] ? Une fois cela fait, doit-on écrire le plan de l'exposé au tableau, et doit-on l'y laisser ? Que doivent contenir les notes que l'on remet au jury, que ce soit pour l'oral 1 ou pour l'oral 2 ? La question est posée en décembre ; en avril, alors que les épreuves écrites sont passées, on se demande tout à coup si, à l'oral 1, peut surgir « un sujet qui n'a pas été préparé dans l'année », ou si, au contraire, les sujets proposés par le jury sont « forcément dans la liste que l'on a ». On s'inquiète aussi de savoir si un sujet donné peut être compris de plusieurs façons par le candidat, et cela d'une manière acceptable par le jury. On s'interroge encore sur la signification de la mention d'« exemples » dans le libellé des sujets de l'oral 1 : ces exemples que doit proposer le candidat doivent-ils être simplement illustratifs ou être développés « vraiment » ? En juin, on se demandera si, toujours à l'oral 1, il convient de privilégier « une leçon très pédagogique avec beaucoup d'exemples pour faciliter la compréhension » ou, dans un style plus classique à l'université, « une leçon riche en résultats, en théorèmes et en démonstrations ».

1.3. Au fil des semaines, et nonobstant l'interruption de la préparation qui correspond au temps des épreuves écrites, les questions formulées entrent dans la matière mathématique elle-même. S'agissant des épreuves orales, des questions sont posées sur la signification à donner au libellé de sujets proposés lors du concours de l'année précédente. En 2000, ainsi, le sujet n° 62 de l'oral 2 portait sur les « formes usuelles du raisonnement » – raisonnement par condition nécessaire, par condition suffisante, par contraposition, par équivalence, par l'absurde, par disjonction des cas. L'auteur de la question se demande s'il faut y inclure aussi le raisonnement par récurrence ou s'il convient au contraire de se limiter aux cas explicitement énumérés dans le libellé du sujet. La récurrence fait en réalité l'objet d'un autre sujet : dès novembre, au reste, un préparationnaire s'inquiétait de dénicher un « bouquin » où « trouver toutes les variantes de la récurrence » ! De façon erratique, des soucis plus larges

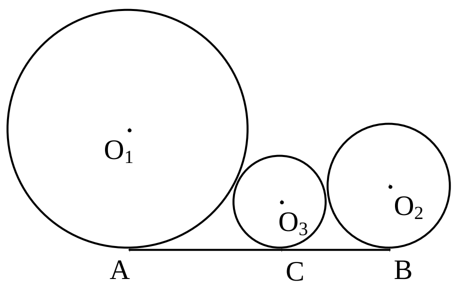
[3] Ce que les étudiants, et souvent les formateurs, désignent familièrement sous le nom d'oral 1 et d'oral 2 sont les deux épreuves orales d'admission. La première (« oral 1 ») est appelée officiellement *épreuve d'exposé* tandis que la seconde (« oral 2 ») porte l'étiquette officielle d'*épreuve sur dossier*. Dans les deux cas, le candidat dispose, avant de passer devant le jury qui l'examinera, de deux heures de préparation après avoir pris connaissance du sujet qu'il traitera.

peuvent s’exprimer, tel le souhait de disposer de « références historiques sur les différents grands mathématiciens » ou de décider de la calculatrice qu’on utilisera en vue des épreuves écrites. Au-delà, ce que les questions reçues laissent deviner, ce sont des incertitudes liées à une double méconnaissance, mathématique d’une part, institutionnelle de l’autre. En avril, on se demande par exemple si, dans les exposés de géométrie dans le cadre de l’oral 1, il est « préférable d’utiliser la géométrie vectorielle ou la géométrie euclidienne ». La découverte de mathématiques jusque-là peu fréquentées, voire entièrement inconnues, a un écho dans les questionnements explicités. En février, à propos des espaces et des fonctions affines, un élève professeur confesse : « Je ne comprends pas la signification de $f(\Sigma\lambda_i \mathrm{A}_i) = \Sigma\lambda_i f(\mathrm{A}_i)$: comment traduire une somme de points ? Doit-on considérer des vecteurs pour montrer cette égalité ? » En février toujours, un autre indique : « Je ne sais pas bien faire la différence entre les similitudes et les isométries. Comment faire pour classer les différentes transformations affines (du plan ou de l’espace) ? » Inquiétudes tardives. D’une manière très large, la difficulté première est d’affronter des domaines mathématiques inconnus, ou mal connus parce que souvent parcourus hâtivement, ou sur lesquels on n’est plus revenu depuis une prime rencontre réalisée au collège ou au lycée. Ainsi se demande-t-on « quelle est la définition exacte d’un polygone régulier *convexe* ». Allant plus loin dans l’exploration des mystères de la géométrie du collège, un autre élève professeur s’interroge en ces termes : « Comment démontrer clairement qu’une isométrie conservant un polygone régulier transforme un sommet en un sommet ? D’ailleurs, quelle est vraiment la *définition* d’un sommet ? » La première année d’IUFM apparaît ainsi comme un temps de formation permettant d’éclairer un certain nombre de points aveugles d’une vision construite au fil de la scolarité secondaire puis supérieure sans grand souci de mise en ordre. Un autre élève professeur se demandera ce que sont « les différentes méthodes pour aborder un problème du type : “Quelles sont les transformations qui conservent telle ou telle figure/configuration ?” » Et d’ajouter : « Sur un CAPES blanc, on a utilisé la stabilité de l’isobarycentre (c’était un carré dans $\mathbb{R}^2$). Y a-t-il d’autres façons d’aborder le problème ? » On revient ainsi à des questions non inconnues, mais plus ou moins fortement méconnues. Ainsi en va-t-il avec la définition de la notion de limite, à propos de laquelle cette question est soulevée :

> Je n’ai pas compris pourquoi selon la définition que l’on prend d’une limite d’une fonction en un point, cela pose problème pour déterminer la continuité. Si on parle de limite en a, doit-on considérer la limite quand $x \to a$ et $x \neq a$ (et a appartient à l’intervalle sur lequel on travaille) ou la limite quand $x \to a$ (et a n’appartient pas à l’intervalle considéré) ?

La question est un serpent de mer. Un autre élève professeur s'en fait l'écho dans ces termes : « Quelle définition de la continuité pensez-vous qu'il soit le plus judicieux de prendre ? Celle incluant ou celle excluant le point où on l'étudie ? » Un autre encore la rencontre à propos d'un énoncé qui, manifestement, avait pour objet d'aider à régler le problème, mais que l'auteur de la question n'arrive pas à démontrer : I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathrm{I}} \setminus \mathrm{I}$, si f est une application de I dans $\mathbb{R}$, alors « f admet une limite réelle en a si, et seulement si, il existe une unique fonction g prolongeant f à $\mathrm{I} \cup \{ a \}$ et continue en a. ». Le carrousel des questions que soulève l'exploration mathématique impulsée par la préparation au CAPES est potentiellement sans fin. On retrouve ainsi des interrogations naïves : une fonction monotone peut-elle ne pas être continue par morceaux ? Si $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, est-il vrai que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$? On se demande aussi sous quelles conditions une somme de fonctions bijectives est encore bijective et on suppute qu'il suffirait pour cela que les fonctions « aient le même sens de variation ». On s'interroge encore sur le fait de savoir si, le graphe d'une fonction continue admettant un centre de symétrie en x_0, il en résulte que x_0 est un point d'inflexion ; et, déjà, s'il découle de la symétrie supposée que la fonction est deux fois dérivable en x_0 (l'inflexion de la courbe étant regardée comme équivalente à l'égalité $f''(x_0) = 0$). On tombe en arrêt devant une suite définie par une relation récurrente linéaire *d'ordre 2* (en l'espèce $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 2n+1$, avec $u_0 = 1$, $u_1 = 4$), en se demandant s'il existe une « méthode générale dans une telle situation ». On revient avec un intérêt non dissimulé sur la règle de l'Hôpital, tout en étant circonspect sur sa mise en œuvre : vaut-elle seulement pour la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou est-elle utile dans tous les cas de forme indéterminée ?

1.4. Les difficultés mathématiques affrontées ou simplement croisées dans les différentes parties de la préparation fourmillent. Et les élèves professeurs les font jaillir comme le promeneur fait s'envoler les sauterelles en marchant dans la campagne au début de l'été. L'un a entendu un formateur évoquer la « fonction de Weierstrass » dont il a retenu qu'elle était continue en tout point mais nulle part dérivable ; il voudrait avoir « plus de renseignements » sur cette fonction qui lui semble, écrit-il, « très particulière ». Un autre a découvert récemment, grâce à la première composition écrite du CAPES (qu'il vient de passer), que l'hypothèse – classique – de continuité généralement adoptée pour résoudre l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x)f(y)$, peut être remplacée par telle autre condition [4] ; il se demande s'il y aurait quelque chose d'analogue s'agissant de l'équation fonctionnelle définissant la fonction logarithme. Plusieurs questions attestent de difficultés mathématiques jamais identifiées ou sur lesquelles on ne s'est jamais penché jusque-là. Si f est dérivable sur le segment $[a, b]$, demande-t-on ainsi, se peut-il que $f'([a, b])$ soit non bornée ? Quelle est la différence entre la notion de partition (en théorie des ensembles) et la notion de système complet d'événements (en théorie des probabilités) ? L'auteur de la question se risque à cette proposition : « Il me semblait que dans un système complet [d'événements], chaque ensemble est non vide, alors que dans la partition, on pouvait avoir des ensembles vides. » On s'interroge sur des questions dont on voit bien que les formateurs les supposent connues alors que, de fait, nombre de préparationnaires n'en ont jamais été familiers. L'un d'eux se demande ainsi comment démontrer les égalités combinatoires $\sum_{p \text{ pair}}^{p\leq n} C_n^p = \sum_{p \text{ impair}}^{p\leq n} C_n^p = 2^{n-1}$. Un autre est tombé en arrêt devant l'égalité $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h^2)}{h^2} = \lim_{k \to 0^+} \frac{f(k)}{k}$; il se demande si la chose peut être établie par changement de variable. Parfois, et de plus en plus à mesure qu'approchent les épreuves orales, l'effort de préparation fait apparaître des difficultés normalement proposées aux élèves du secondaire. Un exercice de première S a ainsi arrêté la progression de l'un des préparationnaires : résoudre l'équation $4\sin^2 x + 2(1 - \sqrt{3})\cos x - 4 + \sqrt{3} = 0$. Une fois que l'on a remplacé $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, puis $\cos x$ par X, obtenu pour valeur du discriminant $\Delta = 16 + 8\sqrt{3} > 0$, tiré les deux solutions réelles $X_1 = \frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4}$ et $X_2 = \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4}$, que peut-on encore faire ? Même surprise désagréable chez un autre élève professeur à qui un élève de seconde a demandé de l'aider à résoudre un « exercice » consistant à calculer R_3 en fonction de R_1, R_2 et AB dans la figure suivante :



[4] Lors du concours 2001 du CAPES de mathématiques, la première composition proposait, dans la partie I, de démontrer que, si une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$, non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, solution de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)\,f(y)$, est *majorée sur un intervalle de longueur strictement positive*, alors il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \geq 0$.

Le problème semble intraitable ! L'auteur de la question s'interroge : « Je n'ai pas trouvé la solution. Est-il résoluble ? Si oui, quelle est-elle ? Est-elle explicable à un élève de niveau seconde ? » Si l'univers mathématique du secondaire peut ainsi surprendre les capacités des préparationnaires, il en va à plus forte raison de même avec l'univers mathématique du CAPES. L'évolution du curriculum mathématique à l'université est ici un des facteurs de désajustement : le programme du CAPES se réfère à un curriculum devenu classique après la réforme des mathématiques modernes, alors que le curriculum universitaire réel a dérivé à partir de là, sous l'influence de facteurs multiples, dont sans doute l'évolution même des connaissances mathématiques des entrants, ex-élèves de lycée. De là des plaintes renouvelées de la part d'élèves professeurs qui découvrent, un peu déconfis, des pans entiers de mathématiques demeurés pour eux totalement inconnus. Ainsi en va-t-il dans la formulation suivante :

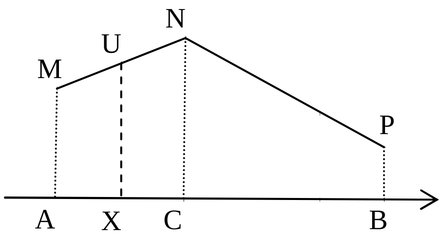
> On a abordé en cours les applications affines, les isométries et bientôt les similitudes. Mais les non-redoublants, comme moi, ont du mal à suivre. En effet, nous n'avons jamais vu ces notions auparavant. Et en TD, elles n'ont été abordées qu'au niveau des redoublants. Les méthodes n'ont pas été expliquées. On nous a dit d'aller voir dans les livres, qu'étant de futurs professeurs on devait se débrouiller seul. Mais les méthodes, « les recettes de cuisine » ne sont pas expliquées dans les livres.

1.5. La redécouverte de questions d'apparence familière réserve aussi bien des surprises. Ainsi avec la primitivation des fonctions continues, à propos de laquelle la préparation de l'épreuve orale d'exposé suscite d'abord cette question – nous sommes en mai 2001 :

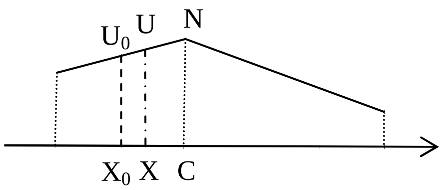
> J'ai rencontré lors de mes révisions d'oral 1 l'exercice suivant, auquel j'ai eu du mal à répondre : « Soit *f* une fonction continue et affine par morceaux sur [a, b]. Montrer que la notion d'aire des polygones permet de définir une fonction F dérivable sur [a, b] telle que F' = *f*. » Pouvez-vous m'aider ?

Le formateur en charge du « forum des questions », dispositif intégré au module de formation OEM et où sont, chaque semaine, travaillées quelques-unes des questions soulevées, apporte des éléments de réponse qui permettent de résoudre le problème évoqué, tout en ouvrant une voie de généralisation. On reproduit ci-après sans commentaire l'intégralité de ces « matériaux pour une réponse ».

1. En remplaçant f par $f+k$, avec $k \geq - \min_{x \in [a,\, b]} f$, on se ramène d'abord au cas où l'on a $f \geq 0$. Considérons alors le cas représenté ci-après.



En usant de notations évidentes, posons, pour tout $x \in [a, b]$, $F(x)$ = aire du polygone AMUX. Soit $x_0 \in [a, c[$ et $x \in [a, c]$ (voir la figure ci-après).

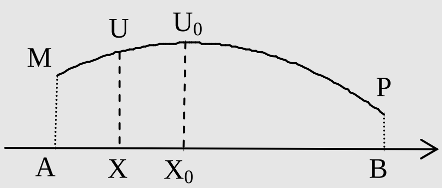


On a : $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{1}{|x-x_0|}$ aire $X_0U_0UX = \dfrac{1}{|x-x_0|}\left(\dfrac{X_0U_0+XU}{2}|x-x_0|\right) = \dfrac{1}{2}(X_0U_0+XU) = \dfrac{1}{2}(f(x_0)+f(x))$.

Quand x tend vers x_0 dans $[a, c]$, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$, puisque f est continue en x_0. Par suite, le rapport $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$, tend vers $\dfrac{1}{2}(f(x_0)+f(x_0))$, soit $f(x_0)$.

2. La démonstration précédente reste valable, *mutatis mutandis*, pour $x_0 \in]c, b]$ (avec $x \in [c, b]$) et pour $x_0 = c$ (où l'on doit distinguer les cas $x \in [a, c[$ et $x \in]c, b]$). Elle peut recevoir la généralisation suivante (qui se démontre de même) :

Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que toute région curviligne du plan de la forme XUU_0X_0 (voir ci-après) est *quarrable* (*i.e.* a une aire).



Alors l'application $x \mapsto F(x)$ = aire AMUX est une primitive de f sur $[a, b]$.

La question abordée va avoir une suite. Lors d'une séance ultérieure, un autre élève professeur soulève en effet cette question :

> Comment montre-t-on que toute fonction continue admet une primitive (sans utiliser la théorie de Riemann). (Lors de la leçon 88 d'oral 1, on donne ce résultat en théorème, au début de la leçon.)

Cette fois, le problème affronté est plus complexe : il suppose précisément ce que l'on peut appeler, faute de mieux, une élaboration mathématique *intermédiaire*, qui ne se réduise pas à l'assertion dogmatique d'un énoncé mathématique idoine, même réputé démontrable, mais qui ne reprenne pas non plus le développement *ab ovo* d'une des variantes classiques de la théorie élémentaire de l'intégration. Dans ses « matériaux pour une réponse », le formateur précise d'abord le libellé du sujet 88 de l'épreuve d'exposé :

> Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Applications.

Il rappelle ensuite ce que le programme complémentaire du CAPES indique sous le titre « Intégration sur un intervalle compact ». L'examen du passage correspondant du programme l'amène alors à citer rapidement l'élaboration intermédiaire qu'il va ensuite situer dans un cadre d'ensemble, dont certains éléments sont en réalité jusque-là inconnus des élèves professeurs auxquels ce développement est adressé. Il écrit ainsi :

> On notera que la seule « théorie de l'intégration » sur un compact [*a*, *b*] dont la connaissance soit formellement requise d'un candidat au CAPES concerne les seules fonctions *continues par morceaux*, qui ont un nombre fini de discontinuités (toutes de 1re espèce), et non toutes les fonctions *intégrables au sens de Riemann*, dont on montre que ce sont les fonctions bornées ayant un ensemble de discontinuités de *mesure nulle* (théorème de Lebesgue-Vitali), en sorte que, par exemple, une fonction strictement croissante ayant un ensemble *infini dénombrable* de discontinuités (…) sur un compact [*a*, *b*] est intégrable au sens de Riemann. On trouvera un exposé simple, conforme aux exigences du programme complémentaire du CAPES, par exemple dans l'ouvrage d'Élie Azoulay et Jean Avignant, *Mathématiques DEUG A 1*, McGraw-Hill, 1991, chapitre 15.

S'appuyant alors sur les éléments de réponse apportés à la question de la primitivation des fonctions continues et affines par morceaux, le répondant expose une élaboration intermédiaire fondée sur le fait suivant : si une fonction *f* est continue sur un segment [*a*, *b*], alors toute région curviligne du plan de la forme XUU_0X_0 (revoir la figure ci-dessus) possède une aire, ou, pour le dire en termes plus savants, est *quarrable*. Moyennant ce qui est à la fois une définition en attente de justification et un théorème en attente de démonstration, il montre ensuite que l'on peut dès lors établir que toute fonction continue sur un intervalle ouvert non vide y possède une primitive. On a là un type d'exposé qui n'a pas que le mérite de s'articuler aux éléments de réponse donnés à la première question sur la primitivation, mais qui fournit un cadre *a priori* non déraisonnable d'un enseignement intermédiaire possible de l'intégration des fonctions continues. Soulignant que l'on ne dispose pas véritablement d'une théorie de la quarrabilité [5], il s'oriente alors vers un deuxième exposé, affranchi d'une telle théorie. Pour cela, il rappelle trois énoncés, notés respectivement θ_0, θ_{11}, θ_{12}, que l'on a reproduit ci-après :

θ_0. Soit a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $x_0 \in [a, b]$. Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions numériques dérivables sur $[a, b]$ telle que la suite numérique $(F_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que la suite des fonctions dérivées $(F_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction F dérivable sur $[a, b]$ telle que $F' = f$.
θ_{11}. Soit a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions *continues et affines par morceaux* qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
θ_{12} (Weierstrass, 1885). Soit a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions *polynomiales* qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Le résultat demandé est une conséquence facile de θ_0 et θ_{11} ou, aussi bien, de θ_0 et θ_{12}. Le formateurs écrit à cet égard ici : « Il suffit en effet de prendre, pour chaque f_n, $n \in \mathbb{N}$, *la* primitive F_n qui (par exemple) s'annule en $x_0 = a$: il résulte alors de θ_0 que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction F telle que $F' = f$. » Après avoir donné des indications bibliographiques concernant les démonstrations de θ_0, θ_{11} et θ_{12}, après avoir noté aussi qu'il existe « un autre schéma de démonstration, plus subtil en ce qu'il ne fait pas usage de la convergence uniforme », et pour lequel il fournit une référence bibliographique, le formateur se tourne, du strict point de vue mathématique toujours, vers la situation plus concrète du candidat à l'oral 1 du CAPES. Le développement correspondant est reproduit ci-après dans son intégralité et sans commentaire.

8. Lors de l'entretien avec le jury, il est évidemment hors de question de démontrer *in extenso* les résultats θ_0 et θ_{11} ou θ_{12} : il convient en revanche d'expliciter, comme on l'a fait ci-dessus, le *schéma déductif* conduisant au résultat visé – l'existence d'une primitive pour toute fonction numérique continue sur $[a, b]$. Dans cette perspective, on peut aussi choisir de présenter un schéma déductif plus classique, fondé sur… *l'intégrale* d'une fonction continue sur un segment. Pour cela, il suffira de rappeler que, quelle que soit la « théorie de l'intégration » considérée, on arrive à démontrer l'existence, pour toute fonction numérique f continue sur un compact $[a, b]$, d'une application $\Im$ de $[a, b]^2$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant les deux axiomes ci-après :

Pour tous $(u, v) \in [a, b]^2$ tels que $a \le u \le v \le b$, on a :

I_1. $\Im_a^v = \Im_a^u + \Im_u^v$;

[5] Sur cette notion, voir Deheuvels (1986), chapitre 1.

I_2. $(v-u)\min\limits_{[u,v]} f \leq \mathfrak{I}_u^v \leq (v-u)\max\limits_{[u,v]} f$.

Posons alors $F(x) = \mathfrak{I}_a^x$ pour $x \in [a, b]$; en supposant que $a \leq x_0 < x \leq b$, on a :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x-x_0} = \frac{\mathfrak{I}_a^x - \mathfrak{I}_a^{x_0}}{x-x_0} = \frac{\mathfrak{I}_{x_0}^x}{x-x_0}.$$

Comme on a aussi $(x-x_0)\min\limits_{[x_0,x]} f \leq \mathfrak{I}_{x_0}^x \leq (x-x_0)\max\limits_{[x_0,x]} f$, il vient finalement

$$\min_{[x_0,x]} f \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x-x_0} \leq \max_{[x_0,x]} f.$$

Quand x tend vers x_0 suivant $]x_0, b]$, $\min\limits_{[x_0,x]} f$ et $\max\limits_{[x_0,x]} f$ tendent tous deux vers $f(x_0)$: on a donc $F'_+(x_0) = f(x_0)$. On montre semblablement que $F'_-(x_0) = f(x_0)$.

9. En vue de s'entraîner à anticiper les réactions du jury, on s'imposera de *chercher* – pour la prochaine séance – des réponses aux deux questions suivantes :

Q_1. « Comment démontreriez-vous que “quand x tend vers x_0 suivant $]x_0, b]$, $\min\limits_{[x_0,x]} f$ et $\max\limits_{[x_0,x]} f$ tendent tous deux vers $f(x_0)$” » ?

Q_2. « À votre avis, vos axiomes I_1 et I_2 caractérisent-ils l'intégrale ? En d'autres termes, si l'application $\mathfrak{I}$ vérifie ces axiomes, a-t-on nécessairement, quelle que soit la fonction f continue sur $[a, b]$, $\mathfrak{I}_u^v = \int_u^v f(t)dt$, pour u et v dans $[a, b]$? »

2. Doctes ignorances

2.1. Les questions sur lesquelles, dans le cadre du forum des questions, les préparationnaires sollicitent les formateurs, sont légion. En mai 2001, deux questions, apparemment de simple mise au point mathématique, vont entraîner le forum dans un long travail sur le problème de la définition des branches infinies et des asymptotes. Tout d'abord, une demande simple : « J'aimerais avoir des définitions de “branche infinie”, “branche parabolique”, autrement que par des schémas ». Ensuite, une question plus incisive, et orientée explicitement vers les exigences supposées du jury du concours :

> Il me semble que tout le monde n'est pas d'accord sur ce qu'est une asymptote. Pourriez-vous m'éclairer ? Quelle définition doit-on donner dans les oraux 1 ? « C_f et C_g sont asymptotes si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-g(x) = 0$ » (définition 1) ou « pour tout M donné d'abscisse x, il existe un point N tel que $\lim\limits_{x\to\infty} MN = 0$ » (définition 2).

Le répondant travaille d'abord sur la notion de branche infinie, en reprenant la question en détail, et passe ensuite à la notion de droite asymptote. Lors d'une séance ultérieure, il résumera ce travail par le long développement que nous reproduisons ici à titre d'illustration du style de travail accompli dans ce cadre de formation.

1. On peut retenir la définition suivante :

Soit une application $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et soit un espace affine réel $\mathcal{E}$ de dimension 2 muni du repère orthonormal (O, I, J). On définit un arc paramétré (Γ, I) de $\mathcal{E}$ par : $\Gamma : t \mapsto \mathrm{M}(t) = \mathrm{O} + x(t)\,\overrightarrow{\mathrm{OI}} + y(t)\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$. Si $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ est une borne de I, on dit alors que l'arc paramétré (Γ, I) *admet une branche infinie* lorsque t tend vers t_0 suivant I si $\lim\limits_{t \to t_0,\, t \in \mathrm{I}} \|\overrightarrow{\mathrm{AM}(t)}\| = +\infty$, où A est un point quelconque de $\mathcal{E}$ (le choix de A est indifférent), soit encore si $\lim\limits_{t \to t_0,\, t \in \mathrm{I}} \|\gamma(t)\| = +\infty$.

2. Lorsqu'on a affaire à un arc de courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$, avec $x \in \mathrm{I}$, on a $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, f(t))$, où $t \in \mathrm{I}$, et donc $\|\gamma(t)\| = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)} = \sqrt{t^2+f^2(t)}$, de sorte que (Γ, I) admet une branche infinie lorsque t tend vers t_0 suivant I si et seulement si

– soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t \to t_0,\, t \in \mathrm{I}} f(t) = \pm\infty$;

– soit $t_0 = \pm\infty$.

3. On a le théorème suivant :

On suppose γ de classe C^0 au moins. Soit A un point de $\mathcal{E}$. Si, lorsque t tend vers t_0 suivant I, l'arc paramétré (Γ, I) admet une branche infinie et si la droite affine AM(t) admet une limite ℓ_{A}, alors la direction δ de ℓ_{A} est indépendante de A : on dit que δ est *la direction asymptotique* de la branche infinie.

4. Dans le cas d'une équation cartésienne et d'une branche infinie lorsque t tend vers t_0 suivant I

– si $t_0 \in \mathbb{R}$, la branche infinie admet $\delta = \mathbb{R}\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ pour direction asymptotique ;

– si $t_0 = \pm\infty$, et si f admet une limite dans $\mathbb{R}$ en t_0, la branche infinie admet $\delta = \mathbb{R}\,\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ pour direction asymptotique ;

– si $t_0 = \pm\infty$, si f tend vers $\pm\infty$ en t_0, alors si $\dfrac{f(t)}{t}$ admet la limite $a \in \mathbb{R}$ en t_0, la branche infinie admet la direction asymptotique $\mathbb{R}(\overrightarrow{\mathrm{OI}} + a\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}})$; et réciproquement ;

– si $t_0 = \pm\infty$, si f tend vers $\pm\infty$ en t_0, mais où, cette fois, alors si $\dfrac{f(t)}{t}$ a pour limite $\pm\infty$ en t_0, la branche infinie admet donc la direction asymptotique $\mathbb{R}\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$; et réciproquement.

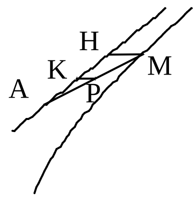
5. On pose la définition suivante :

Soit ℓ une droite affine de $\mathcal{E}$. Si, lorsque t tend vers t_0 suivant I, l'arc paramétré (Γ, I) admet une branche infinie et si la parallèle à ℓ passant par $\mathrm{M}(t)$ admet pour limite ℓ, on dit que la droite ℓ est *asymptote à la branche infinie*.

Le principal résultat est le suivant :

On suppose γ de classe C^0 au moins. Soit ℓ une droite affine de $\mathcal{E}$. Si, lorsque t tend vers t_0 suivant I, l'arc paramétré (Γ, I) admet une branche infinie ayant pour asymptote la droite affine ℓ, cette branche infinie admet la direction de ℓ pour direction asymptotique.

Soit A un point de ℓ : il faut montrer que la droite $(\mathrm{AM}(t))$ tend vers ℓ quand t tend vers t_0 suivant I.



Soit K un autre point de ℓ et soit δ une direction de droites distincte de celle de ℓ. La droite de direction δ passant par M coupe ℓ en H, et, par suite, la parallèle à HM passant par K coupe AM en K. Comme la parallèle à ℓ passant par M tend vers ℓ, HM tend vers 0. Par ailleurs, comme $\mathrm{AM} \leq \mathrm{AH} + \mathrm{HM}$ et que AM tend vers l'infini, AH tend vers l'infini. Il en résulte que, puisque $\mathrm{KP} = \mathrm{HM}\,\dfrac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AH}}$, KP tend vers 0, autrement dit (AM) tend vers la droite ℓ, dont la direction est ainsi la direction asymptotique de la branche infinie.

6. Pour une équation cartésienne et une branche infinie lorsque t tend vers t_0 suivant I, on a alors les résultats suivants.

① Si $t_0 \in \mathbb{R}$, on a vu que la direction asymptotique est $\delta = \mathbb{R}\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$. La droite ℓ d'équation $x = t_0$ est asymptote à la branche infinie correspondante, puisque la parallèle à ℓ passant par $\mathrm{M}(t)$, d'équation $x = t$, tend vers ℓ quand t tend vers t_0 suivant I.

② Si $t_0 = \pm\infty$, et si f admet une limite $\lambda \in \mathbb{R}$ en t_0, on a vu que la direction asymptotique est $\delta = \mathbb{R}\,\overrightarrow{\mathrm{OI}}$. La droite ℓ d'équation $y = \lambda$ est asymptote à la branche infinie correspondante, puisque la parallèle à ℓ passant par $\mathrm{M}(t)$, d'équation $y = f(t)$, tend vers ℓ quand t tend vers t_0 suivant I.

③ Si $t_0 = \pm\infty$, et si f tend vers $\pm\infty$ en t_0, $\dfrac{f(t)}{t}$ admettant la limite $a \in \mathbb{R}$ en t_0, on a vu que la direction asymptotique est celle de la droite d'équation $y = ax$. La droite passant par $\mathrm{M}(t)$ et de direction asymptotique a donc pour équation

$y = ax + (f(t) - at)$.

Cette droite admet une position limite si et seulement si son intersection avec (par exemple) la droite $x = 0$ a une limite dans ℝ : il en est ainsi si et seulement si $\lim\limits_{t\to\pm\infty}(f(t)-at)$ existe dans ℝ. L'asymptote est alors la droite ℓ d'équation $y = ax+b$, où $b = \lim\limits_{t\to\pm\infty}(f(t)-at)$.

④ Si $t_0 = \pm\infty$, et si f tend vers $\pm\infty$ en t_0, $\frac{f(t)}{t}$ ayant pour limite $\pm\infty$ en t_0, on a vu que la branche infinie admet la direction asymptotique $\mathbb{R}\overrightarrow{OJ}$. La droite passant par M(t) et de direction asymptotique a pour équation $x = t$: elle n'a pas de limite quand t tend vers $t_0 = \pm\infty$. Par suite, il n'existe pas d'asymptote. On dit que le graphe de f présente une *branche parabolique* : c'est le cas en particulier de la parabole d'équation $y = f(x) = x^2$.

2.2. À ce stade, le formateur pense certainement qu'il en a fini avec une question qui a absorbé déjà beaucoup de temps. Un indice formel en est l'absence de la mention *À suivre…*, qui apparaît chaque fois que les matériaux apportés lui paraissent *a priori* devoir être complétés. Or l'affaire va avoir un rebondissement. Ce qui, dans la seconde question reproduite plus haut, est nommé « définition 2 » de la notion d'asymptote, et en laquelle il a cru sans doute voir une simple élaboration d'étudiant comme on en a vu déjà quelques-unes, apparaît en réalité dans un ouvrage qui a la faveur de nombre de préparationnaires – l'une de ses collègues l'en informe, en même temps qu'elle lui révèle que les élèves professeurs demandeurs ne tiennent nullement la question pour réglée ! Il va donc, une troisième et dernière fois, consacrer une partie du temps du forum des questions à ce qui est devenu une petite affaire. À nouveau, on reproduit sans commentaires les « matériaux pour une réponse » que les circonstances autant que le sujet étudié lui ont inspirés.

1. La « définition 2 » apparaît dans l'ouvrage de Thierry Lambre, *L'épreuve sur dossier à l'oral du* CAPES*. II. Analyse* (Ellipses, 1998), p. 246, comme une tentative pour généraliser une définition possible de la notion de *droite* asymptote :

« Que devient l'énoncé 9.4 si on remplace la droite Δ par une courbe C_g d'équation $y = g(x)$? Soient C_f et C_g les courbes d'équation $y = f(x)$ et $y = g(x)$. Désignons par M_x et N_x les points de ces deux courbes de coordonnées $(x, f(x))$ et $(x, g(x))$. Une première difficulté apparaît puisque la distance $d(M_x, C_g)$ peut être singulièrement délicate à calculer ; la définition de cette distance est $d(M_x, C_g) = \inf \{d(M_x, N), N \in C_g\}$; c'est une propriété très spécifique des droites qui nous a permis de calculer aisément la distance d'un point à une droite […]. Il n'y a pas ici d'astuce géométrique de ce type pour calculer la distance d'un point à une courbe quelconque et nous sommes contraint de garder la définition très peu maniable qu'on vient de rappeler.

Ensuite il est facile de vérifier que si $\lim_{x\to+\infty} (f(x)–g(x)) = 0$, alors les courbes C_f et C_g sont asymptotes l'une de l'autre au voisinage de l'infini. Mais la réciproque est fausse : il peut arriver qu'on ait $\lim_{x\to+\infty} d(M_x, C_g) = 0$ sans que $\lim_{x\to+\infty} (f(x)–g(x)) = 0$. Voici un exemple. »

Après avoir donné l'exemple des courbes d'équation $y = f(x) = x^2+1$ et $y = g(x) = x^2$, l'auteur cité conclut en ces termes :

« Les notions de courbe asymptote et de fonction asymptote sont distinctes. Ces deux notions coïncident lorsque l'une des courbes est une droite. Il est commode de se souvenir que les fonctions $f(x) = x^2+1$ et $y = g(x) = x^2$ ne sont pas asymptotes en $+\infty$ […] alors qu'on peut montrer géométriquement que les courbes représentatives de ces deux fonctions sont asymptotes (puisque la distance entre ces deux courbes tend vers 0 lorsqu'on s'éloigne de l'origine du repère le long des branches infinies de ces courbes). »

2. Sans s'arrêter sur le charabia de la dernière phrase (c'est $d(M_x, C_g)$ qui tend vers 0 quand x tend vers l'infini ; la distance des deux courbes, elle, est nulle), on doit noter que la définition proposée de manière un peu subreptice, mais certaine, dans ce qui précède, et qui conduit au distinguo entre « fonctions asymptotes » et « courbes asymptotes », met en avant un type de situations dont l'intérêt n'est pas évident, dans la mesure où son extension même le rend peu opérationnel. Pour le voir on considère l'exemple suivant.

① Posons $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2\,\dfrac{2+\cos^2(e^x)}{3}$. On a $\dfrac{2}{3}x^2 \le g(x) \le x^2$ et donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Par ailleurs il vient $f(x)–g(x) = x^2 – x^2\,\dfrac{2+\cos^2(e^x)}{3} = x^2\,\dfrac{1–\cos^2(e^x)}{3}$. Par suite, $f(x)–g(x)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers l'infini : la courbe C_g n'est donc pas asymptote à C_f au sens de la définition 1.

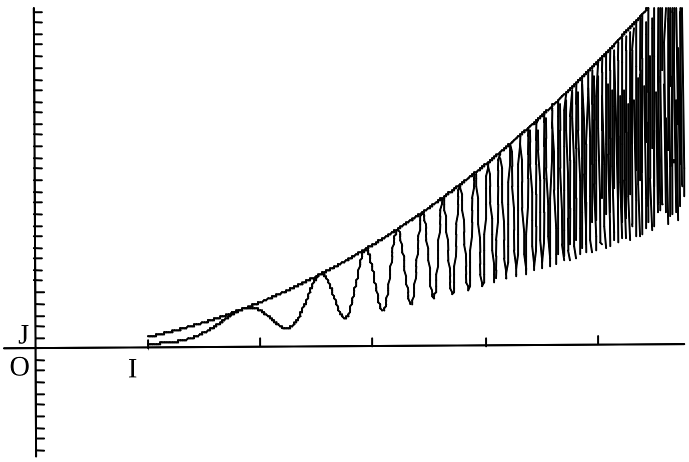
② Pour tout $x \ge 2$ il existe un entier unique n_x tel que $\ln(n_x\pi) \le x < \ln(n_x^{\bullet}\pi)$, où $n_x^{\bullet}$ est le successeur de n_x. Posons $x^* = \ln(n_x\pi)$; on a successivement

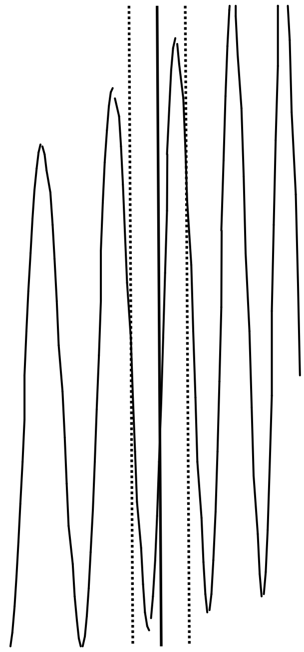
$$x – x^* = x – \ln(n_x\pi) < \ln(n_x^{\bullet}\pi) – \ln(n_x\pi) = \ln\left(1 + \frac{1}{n_x}\right)$$

et
$$x^2 – x^{*2} = (x – x^*)(x + x^*) < \ln\left(1 + \frac{1}{n_x}\right)(2\ln(n_x^{\bullet}\pi)).$$

Soit N_x le point de coordonnées $(x^*, g(x^*))$; on a : $g(x^*) = x^{*2}\,\dfrac{2 + \cos^2(e^{x^*})}{3} = x^{*2}\,\dfrac{2 + \cos^2(n_x\pi)}{3} = x^{*2} = f(x^*)$. Par suite, il vient : $d(M_x, C_g) \le d(M_x, N_x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n_x}\right)(1 + 2\ln(n_x^{\bullet}\pi)) \sim 2\,\dfrac{\ln n_x^{\bullet}}{n_x^{\bullet}}$. Comme $n_x^{\bullet}$ tend vers l'infini avec x, $d(M_x, C_g)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini : la courbe C_g est donc « asymptote » à la courbe C_f selon la définition 2.

③ Pourtant, pour tout $x = \ln\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$, où $n \in \mathbb{N}$, on a $g(x) = \dfrac{2}{3}x^2$: la distance entre les points de C_g et de C_f d'abscisse x, égale à $\dfrac{x^2}{3}$, est ainsi « aussi grande que l'on veut » dans un voisinage de $+\infty$. C'est ce qu'illustre le graphique ci-dessous à gauche. Lorsque C_g est « asymptote » à C_f au sens de la définition 2, pour $\varepsilon > 0$ et pour tout x assez grand pour que l'on ait $d(M_x, C_g) < \frac{\varepsilon}{2}$, on sait qu'il existe un point N $(x^{\heartsuit}, g(x^{\heartsuit}))$ tel que $d(M_x, N) < \varepsilon$. Mais on ne sait pas quel est ce point parmi tous les points de C_g *a priori* possibles, soit les points N $(x^{\heartsuit}, g(x^{\heartsuit}))$ dont l'abscisse vérifie $x - \varepsilon < x^{\heartsuit} < x + \varepsilon$ (voir la figure [ci-après], relative à la fonction g examinée ci-dessus). Le renseignement est *a priori* bien peu informatif !





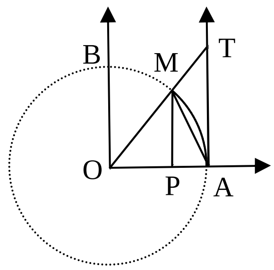
2.3. On peut penser qu'il y a là une question un peu fine, à la limite de ce qu'un professeur doit maîtriser, sinon connaître. Un autre élève professeur, se demande encore, toujours en mai 2001 : « Comment montrer de "manière élémentaire" que la dérivée de sinus est cosinus. » Le répondant commence par cet exorde peu engageant :

Il n'est pas possible, au lycée, de démontrer que la fonction sinus a pour dérivée la fonction cosinus, pour cette raison que ces fonctions n'y sont pas rigoureusement définies (les réels eux-mêmes ne l'étant pas, d'ailleurs…).

Il signale que plusieurs façons de définir les fonctions trigonométriques se proposent, dont celle que pousse en avant l'un des sujets de l'oral 1, qui conduit à les définir à partir de l'application $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. Pour apporter quelques matériaux en réponse à la question posée, toutefois, le formateur présente alors la « démonstration » jadis traditionnelle dans l'enseignement du lycée, en mettant en avant aussi bien son armature logico-mathématique que ses lacunes.

Il existe une « démonstration » élémentaire, présentée autrefois au lycée, dont on donne ci-après le schéma.

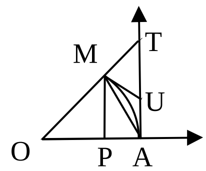
① On suppose qu'on sait mesurer les arcs de cercle. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1 (voir la figure) : on note $\frac{\pi}{2}$ la longueur d'un quart de cercle.



On suppose que l'application $x \mapsto$ M, où M est le point de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ tel que $\ell(\overset{\frown}{\mathrm{AM}}) = x$, est bien définie et bijective sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose : $\sin x = \mathrm{MP}$, $\cos x = \mathrm{OP}$, $\tan x = \mathrm{AT}$.

② On « établit » alors la double inégalité $\sin x \leq x \leq \tan x$ qui exprime le fait que $\mathrm{MP} \leq \ell(\overset{\frown}{\mathrm{AM}}) \leq \mathrm{AT}$. La première inégalité ne fait guère problème : par définition $\ell(\overset{\frown}{\mathrm{AM}})$ est en effet la borne supérieure des longueurs des lignes brisées de $\mathrm{AI_1I_2 \ldots I_nM}$ dont les sommets I_k appartiennent à $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$. Ce qui est problématique, en revanche, c'est la seconde inégalité $\ell(\overset{\frown}{\mathrm{AM}}) \leq \mathrm{AT}$, qui est traditionnellement admise, elle aussi.

③ Soit U le point où la tangente en M à $\mathcal{C}$ coupe (AT).



Comme UM < UT dans le triangle rectangle TMU, on a AU + UM < AT. Si l'on sait montrer – ce qui se fait à l'aide de l'inégalité triangulaire – que l'on a toujours $\mathrm{AI_1} + \mathrm{I_1I_2} + \ldots + \mathrm{I}_{n-1}\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_n\mathrm{M} < \mathrm{AU} + \mathrm{UM}$, on en tire que $\ell(\overset{\frown}{\mathrm{AM}}) \leq \mathrm{AU} + \mathrm{UM} < \mathrm{AT}$.

④ La double inégalité ainsi « établie » s'écrit alors $1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$ ou $1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$, soit enfin : $0 \leq 1 - \frac{\sin x}{x} \leq 1 - \cos x$.

⑤ On suppose que l'on a établi que $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ en sorte qu'on a $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$. Il vient ainsi $0 \leq 1 - \frac{\sin x}{x} \leq \frac{x^2}{2}$ et on peut conclure que $\lim\limits_{x \to 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

⑥ On suppose que $0 \leq x_0$, $x_0+h < \frac{\pi}{2}$, avec $h > 0$. Il vient :

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right).$$

L'inégalité $1-\cos x \leq \frac{x^2}{2}$ montre que $\cos x$ tend vers 1 quand x tend vers 0_+. On sait que $\sin x$ tend vers 0 quand x tend vers 0 ; si on sait que $\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right) = \cos x_0 \cos\frac{h}{2} - \sin x_0 \sin\frac{h}{2}$, on peut conclure que $\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$ tend vers $\cos x_0$ quand h tend vers 0_+, CQFD.

⑦ Ce qui précède se laisse adapter aisément dans le cas $h < 0$, ce qui achève la démonstration esquissée. Quant aux formules trigonométriques utilisées, elles sont établies, indépendamment, dans le cours de trigonométrie.

2.4. Aux deux exemples précédents, ajoutons en un troisième, qui nous conduira à une première réflexion-bilan :

Le jury peut-il demander une démonstration du « théorème de la borne supérieure » ? Si oui, comment le démontrer ? (La « théorie des coupures » de Dedekind me paraît un peu compliquée.)

À nouveau, le formateur sollicité se trouve devant une question « océanique ». Il rappelle qu'il existe plusieurs manières de construire le corps de réels, et renvoie à une bibliographie choisie. Puis, ainsi qu'on l'a vu le faire plusieurs fois, il propose un développement « intermédiaire » que, là encore, nous reproduisons *in extenso*.

2. Comme toujours, « démontrer » telle propriété n'a guère de sens : tout dépend de la théorie dans laquelle on se place. On ne peut donc, là encore, que préciser un *schéma déductif* qui montre comme on peut organiser la matière mathématique considérée.

3. En l'espèce, une manière simple de faire consiste à supposer que, *dans le corps ordonné des « réels »* $\Re$ *que l'on a construit*, on a démontré que *tout nombre x possède un unique développement décimal propre*. Un tel développement, rappelons-le, ne saurait être formé de 9 à partir d'un certain rang ; car, dans un tel cas, on aurait par exemple :

$$x = 0{,}72\ldots5999\ldots = 0{,}72\ldots5 + 10^{-n}\cdot0{,}999\ldots = 0{,}72\ldots5 + 10^{-n}\cdot\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\ldots\right)$$

$$= 0{,}72\ldots5 + 10^{-n}\cdot\frac{9}{10}\cdot\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots\right) = 0{,}72\ldots5 + 10^{-n}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 0{,}72\ldots5 + 10^{-n}$$

$$= 0{,}72\ldots6.$$

Le développement propre de $x = 0{,}72\ldots5999\ldots$ est donc $0{,}72\ldots6$: x est en fait un nombre *décimal*.

4. On suppose en outre qu'on a démontré que *tout développement décimal, propre ou impropre, est celui d'un « réel »* $x \in \Re$.

5. Soit alors $E \subset \Re$ un ensemble de « réels », non vide et majoré. Montrons qu'il existe un « réel » qui est une *borne supérieure* de E (il y a en fait unicité et on devrait donc parler de *la* borne supérieure : mais la chose se prouve de manière tout à fait indépendante).

① Soit $m \in \mathbb{Z}$ le plus grand entier tel que $E_m = E \cap [m, m+1[\neq \varnothing$. Les ensembles E et E_m ont les mêmes bornes supérieures. Il revient alors au même de montrer que $E_\heartsuit = E_m - m$ ($\subset [0, 1[$) possède une borne supérieure dans $\Re$.

② Identifiant chaque nombre $x \in [0, 1[$ à son développement décimal propre $0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$, on construit alors par récurrence une suite d'ensembles $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

– $F_0 = E_\heartsuit$;

– pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_{n+1} est l'ensemble des éléments de F_n dont la n+1-ième décimale, a_{n+1} ($\in [0, 9]$), est maximale.

③ On a : $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous les éléments de F_n ont les mêmes n premières décimales $a_1, \ldots, a_n$ (en sorte qu'ils s'écrivent tous $0,a_1\ldots a_n\ldots$). On définit ainsi une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[0, 9]\cap\mathbb{N}$. Notons qu'il peut se faire que tous les a_n soient égaux à 9 à partir d'un certain rang : il en est ainsi par exemple si on a $E_\heartsuit = \{0,9, 0,99, 0,999, 0,9999, 0,99999, \ldots\}$, auquel cas il vient alors $0,a_1\ldots a_n\ldots = 0,9\ldots9\ldots = 1$.

④ Montrons que, plus généralement, le nombre $x_\heartsuit$ dont le développement décimal propre ou impropre est $0,a_1\ldots a_n\ldots$ est une borne supérieure de $E_\heartsuit$.

– Notons d'abord que l'on a soit $\bigcap_{n\geq 0} F_n = \varnothing$ (comme dans l'exemple précédent), soit $\bigcap_{n\geq 0} F_n = \{x_\heartsuit\}$. Pour tout $x \in E_\heartsuit \backslash \{x_\heartsuit\}$, il existe donc un premier entier n tel que $x \notin F_n$, en sorte que $x < 0,a_1\ldots a_n$ et donc $x < x_\heartsuit$. Ainsi $x_\heartsuit$ est un majorant de $E_\heartsuit \backslash \{x_\heartsuit\}$ et donc de $E_\heartsuit$.

– Soit un entier $n \in \mathbb{N}$; supposons que $x_\heartsuit \notin E_\heartsuit$ et montrons qu'il existe alors un nombre $x \in E_\heartsuit$ tel que $x_\heartsuit - 10^{-n} < x < x_\heartsuit$. Soit en effet $x \in F_{n-1} \backslash F_n$: on a $x = 0,a_1\ldots a_{n-1}b_n\ldots$, avec $b_n < a_n$. Comme $x_\heartsuit \notin E_\heartsuit$ on a $x < x_\heartsuit$. Par ailleurs on a :

$$x_\heartsuit - x = 0,a_1\ldots a_{n-1}a_n\ldots - 0,a_1\ldots a_{n-1}b_n\ldots = 10^{-(n-1)}(0,a_na_{n+1}\ldots - 0,b_nb_{n+1}\ldots)$$
$$< 10^{-(n-1)}(0,a_na_{n+1}\ldots - 0,a_n) = 10^{-(n-1)}\cdot 0,0a_{n+1}\ldots = 10^{-n}\cdot 0,a_{n+1}\ldots \leq 10^{-n}.$$

6. Sur la construction des réels par les suites décimales illimitées, et sur la démonstration précédente de l'existence d'une borne supérieure, on pourra se reporter à l'ouvrage cité de Marc Rogalski.

2.5. L'ouvrage de Marc Rogalski mentionné dans le développement précédent est paru chez Ellipses en 2001 et a pour titre *Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie*. Sans entrer ici plus avant dans son contenu, il constitue un autre symptôme de ce dont témoigne le système des « questions de la semaine » tel qu'on l'a illustré jusqu'ici. En utilisant métaphoriquement l'une des notions sur lesquelles on a vu les préparationnaires s'interroger, on peut dire que l'univers mathématique du CAPES constitue une borne supérieure des connaissances acquises et maîtrisées par les futurs professeurs se préparant au CAPES. Mais il y a en cela un problème vif, que l'on s'emploiera à souligner maintenant. Du point de vue de leurs formateurs, il va de soi qu'un professeur doit avoir une vision claire d'un certain nombre d'éléments mathématiques fondamentaux. Ainsi de la notion de limite, bien sûr ; ainsi aussi de la théorie des nombres réels, et encore de la théorie des fonctions trigonométriques, ou de la notion de sommet d'un polygone ; ainsi de la notion de primitive, ou d'asymptote, etc. Il semble donc normal du point de vue des formateurs de répondre à des questions relatives à ces thèmes mathématiques et à beaucoup d'autres encore. Il semble normal aussi que ces réponses s'organisent en tenant compte de trois faisceaux d'exigences. Tout d'abord, un professeur doit pouvoir situer par rapport à l'univers mathématique « savant », ne serait-ce qu'à gros traits, les questions mathématiques qu'il rencontre et qu'il rencontrera. Ensuite, un élève professeur préparant le CAPES de mathématiques doit pouvoir situer de manière assez précise les questions qu'il rencontre dans un univers mathématique « intermédiaire », pour lequel le programme complémentaire du CAPES dessine une borne supérieure [6]. Enfin, l'élève professeur de deuxième année, et le professeur qu'il est promis à devenir, devra être capable d'élaborations mathématiques à la fois fidèles à la filiation qui va du niveau savant au niveau intermédiaire, et suffisamment adaptées à des conditions éventuellement très spécifiques de mises en jeu dans telle classe du secondaire. Or, ce qui apparaît auxdits formateurs comme une quasi-nécessité demeure pour la plupart des préparationnaires, dans le meilleur des cas, une reconnaissance de certaines difficultés mathématiques, sans qu'on atteigne, voire que l'on vise, une maîtrise effective de ce que les formateurs regardent pourtant sans doute comme les connaissances indispensables à l'exercice bien maîtrisé du métier de professeur.

2.6. Nous nous risquerons ici à expliciter une description de ce qui pourrait être le système générateur du type de situations que l'on vient d'évoquer. Dans l'année de préparation au CAPES, comme dans l'année qui suivra sa réussite au CAPES (ou à l'agrégation), un élève

---

[6] Le programme du CAPES est fait d'un titre A qui réunit tous les programmes du secondaire et d'un titre B dont le contenu, faiblement évolutif, correspond *grosso modo* au programme traditionnel des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques. C'est ce titre B qui est appelé classiquement programme complémentaire.

professeur est amené à prendre une foule de décisions, portant généralement sur des détails du système praxéologique qu'il doit s'efforcer de construire. En deuxième année, par exemple [7], un professeur enseignant en 4e se demandera si, dans l'initiation au calcul algébrique qu'il doit réaliser, il interprétera l'expression $-4x$ comme signifiant $(-4)x$ ou $-(4x)$. En géométrie, il se demandera si, à propos du théorème de Pythagore, il doit parler aux élèves de contraposée, et exiger d'eux qu'ils emploient ce mot. En matière numérique, il tombera en arrêt sur une incertitude qu'il n'avait pas anticipée : peut-on, et doit-on, parler de *numérateur* et de *dénominateur* de la fraction $\frac{\sqrt{2}}{2}$, par exemple ? Ou, pour le dire autrement, une telle fraction est-elle autorisée à avoir un numérateur et un dénominateur, ou est-ce réservé aux rapports d'entiers ? Arrêtons là une liste presque indéfinie de décisions au jour le jour que le jeune professeur devra assumer. En première année, le flux des décisions est sans doute moins nourri ; mais, même s'il est sensiblement plus important dans la cadre de la préparation aux épreuves orales d'admission, où il prend parfois des formes très explicites, il n'est pas absent de la préparation aux épreuves écrites d'admissibilité, comme nous aurons l'occasion de le voir. Or, en ces deux années de formation au métier, un invariant apparaît, que nous examinerons d'abord dans le cas de la première année (mais qui a sa contrepartie en deuxième année). Devant toute interrogation qui peut surgir, la tendance des préparationnaires est de se référer à un point de vue *supposé*, celui du jury du CAPES, qui apparaît comme l'instance suprême, et unique, de véridiction, même s'il n'est ni simple ni facile d'accéder à ses « verdicts » – ce qui entraîne nombre de candidats à accorder un crédit quasi absolu aux commentaires des formateurs membres du jury du CAPES ou qui l'ont été récemment. S'adresser à un autre formateur – dans le cadre du forum des questions par exemple – ne va donc pas de soi ! Le faire ne peut être vu que comme un substitut, voire un pis-aller, dont la pertinence n'est nullement automatique. Car ce qu'il convient de déterminer, c'est ce que « pense » et ce que « veut » le jury, du moins cette parcelle du jury, correcteurs des épreuves écrites ou examinateurs des épreuves orales, qui traitera de votre cas. Tel est l'unique *milieu* auquel on puisse confronter ses interrogations et ses incertitudes [8]. L'affaire est évidemment

[7] Les questions prises pour exemple ont été formulées par des élèves professeurs de 2e année.

[8] Un *milieu* (« adidactique ») est un système qu'on peut regarder comme dénué d'intention (« didactique ») dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite (il faut alors interpréter son comportement de « réponse »), à telle question déterminée : il se comporte à cet égard comme un fragment de « nature ». En théorie anthropologique du didactique, la notion de milieu fait couple avec la notion de média : on nomme *média* tout système de mise en représentation du monde à l'adresse d'un certain public (le cours du professeur de

surcompliquée du fait que le jury constitue un milieu qui peut parler comme un média, c'est-à-dire avec une certaine intention, ainsi qu'il le fait dans les rapports publiés année après année, et dont les avis n'expriment pas pour autant à coup sûr, du point de vue du préparationnaire générique, ce sur quoi le jury l'attend véritablement ! Le message émis par le jury-média tend à oblitérer ou à brouiller le point de vue seul pertinent, celui du jury-milieu. Cette attitude n'est bien sûr que le prolongement d'une situation anciennement rencontrée et longuement fréquentée, où l'étudiant a eu pour milieu essentiel le point de vue de ses professeurs, avec pour contrepartie négative une « éducation aux milieux » souvent indigente (y compris, en mathématiques, s'agissant de ce système de milieux que constitue le recours à la démonstration). Le professeur en formation ne construira donc pas le système praxéologique des milieux qui lui serait nécessaire pour devenir autonome en matière de décision mathématique et, plus encore, didactique. De fait, dès lors que l'instance véridictionnelle constituée par le jury du CAPES aura été effacée par la réussite au concours, l'élève professeur de deuxième année – et, au-delà, le jeune professeur – devra prendre des décisions alors même que les critères de décision n'ont pas été élaborés, parce que des milieux adéquats ne se sont pas construits – en mathématiques et, plus encore, en matière didactique.

2.7. À une hétéronomie vécue comme un long temps de soumission – les élèves professeurs parlent facilement d'« infantilisation » – succèdera généralement, non un état d'autonomie, mais un état d'*idionomie*, qui demeure le lot de la profession aujourd'hui, c'est-à-dire un état dans lequel le sujet en vient à se regarder comme l'unique source de la loi, qu'il proclame et entend appliquer. Au temps des études et de l'hétéronomie épistémologique succède le temps de l'enseignement, qui est le temps d'une idionomie indéfiniment recommencée. Un paradoxe peut intriguer. Avant le concours, tout se passe comme si le préparationnaire déléguait sa responsabilité du rapport au vrai à une instance supérieure, parfois contestée, mais richement

mathématiques, le prêche d'un clerc, le journal d'un présentateur de télévision relèvent en ce sens du système des médias au sens large). Par contraste, pour nombre de questions que l'on entend leur poser, les médias sont en général mus par une intention (par exemple « d'informer ») à l'endroit du questionneur. Bien entendu, un média peut fort bien, à propos de telle question, être regardé comme un milieu, et être utilisé comme tel. Le caractère de milieu ou de média n'est nullement intrinsèque : il dépend de la question que l'on pose au système et de la manière de la lui poser. C'est ainsi que les rapports des maîtres de stage analysés dans le chapitre 1 de ce mémoire constituent dans une large mesure un milieu par rapport à la question « Que sont les normes de la profession de professeur de mathématiques ? ».

pourvue de légitimité et détentrice du pouvoir d'imposition – le jury du CAPES. Après le concours, une telle instance s'abolit ; les corps d'inspection, qui pourraient en tenir lieu, n'en sont qu'une pâle et lointaine figure. La responsabilité de la décision incombe aux professeurs, mais l'assomption de cette responsabilité suppose un système de milieux qui, en fait, n'existe pas parce qu'il n'a jamais été élaboré. Entre l'irresponsabilité étudiante et l'idionomie professorale, la continuité est certaine : la décision professorale n'a pas à s'objectiver dans un rapport approprié à des milieux quels qu'ils soient, mais procède d'une subjectivation radicale qui se substitue alors aux formes dépassées de l'irresponsabilité étudiante. Ainsi ne devient-on « responsable » qu'en assumant une nouvelle forme d'irresponsabilité. Le professeur énonce ses propres verdicts, qu'il ne tient que de lui, et n'a pas à en rendre compte ni, *a fortiori*, à en rendre raison. C'est la genèse silencieuse et discrète, voire secrète, de cette *non-accountability*, comme diraient les auteurs de langue anglaise [9], que l'on s'efforcera de traquer dans ce qui suit.

3. « La logique et les ensembles »

3.1. *Sapere aude* : oser savoir [10]. Le programme complémentaire du CAPES est scindé en quatre volets, inégalement développés, intitulés respectivement « Notions sur la logique et les ensembles », « Algèbre et géométrie », « Analyse et géométrie différentielle », « Probabilités et statistiques ». Dans la suite de ce chapitre, nous parcourrons l'ensemble des questions des élèves professeurs de première année [11] en les ventilant en fonction de celui de ces quatre domaines qui apparaît le plus nettement dans la question considérée. Bien entendu, ce découpage, plus familier au lecteur mathématicien, laisse de côté un certain nombre de questions de nature moins spécifique et que nous n'examinerons pas ici. Nous commencerons

[9] L'expression anglaise *to be accountable to somebody for something* signifie être responsable de quelque chose ou répondre de quelque chose devant quelqu'un.

[10] La formule, empruntée à Horace par Gassendi, a été popularisée par Kant dans son opuscule *Qu'est-ce que les lumières* (1784), où il écrit : « Qu'est-ce que les Lumières ? La sortie de l'homme de sa minorité dont il est lui-même responsable. Minorité, c'est-à-dire incapacité de se servir de son entendement (pouvoir de penser) sans la direction d'autrui, minorité dont il est lui-même responsable (faute) puisque la cause en réside non dans un défaut de l'entendement mais dans un manque de décision et de courage de s'en servir sans la direction d'autrui. Sapere aude ! (Ose penser) Aie le courage de te servir de ton propre entendement. Voilà la devise des Lumières. »

[11] Il s'agit de l'ensemble des questions formulées de la rentrée 1998 au printemps 2005.

ici par le premier domaine identifié par le programme complémentaire du CAPES [12], domaine qui s'y trouve scindé lui-même en trois secteurs dont nous reproduisons ici le libellé :

I. Généralités sur le langage et le raisonnement mathématiques. Éléments de logique.

II. Ensembles, relations, applications.

III. Rudiments de cardinalité.

Que disent les préparationnaires à propos de ce fragment d'univers mathématique qui eut autrefois – du temps des « mathématiques modernes » – une importance si considérable ? Ce qui frappe d'abord – on verra plus loin le contraste avec les questions relatives aux probabilités et à la statistique, par exemple –, c'est, sur sept années successives de préparation, la quasi-absence de questions portant sur les formulations du programme, comme si celui-ci était à cet égard transparent tant dans son libellé que dans ses implications sur le contenu et la structure du concours, et cela même quand il désigne des objets mathématiques reconnus par les préparationnaires comme en partie opaques. Cette absence d'interrogations sur le programme, et sur les attentes qui pourraient en résulter vis-à-vis des candidats, est sans doute corrélée avec une autre absence, celle de toute question sollicitant des références bibliographiques, qu'il s'agisse d'ouvrages publiés, de documents non commerciaux ou de sites Internet. Alors que, nous le verrons, la topologie, par exemple, est vue comme une réalité existant en elle-même et sur laquelle on peut se renseigner, même s'il s'agit en fin de compte d'identifier ce que le jury attend des candidats à son propos, ici tout semble se passer comme si l'objet « Logique et théorie des ensembles » ne se voyait pas reconnue une existence hors du concours, ou même hors de la préparation concrète à laquelle les étudiants concernés ont accès [13] ! Le coefficient d'existence culturelle de cette partie du programme semble ainsi extrêmement faible, comme si elle ne renvoyait à rien ou presque en dehors des demandes qu'elle formule, comme s'il s'agissait d'une pure création institutionnelle, sans écho identifiable dans la culture hors de ce contexte ; comme s'il n'y avait que là que se trouvent rassemblés les items composant cette partie du programme.

3.2. Le paradoxe, bien sûr, est que cette partie culturellement invisible du programme se rappelle aux préparationnaires par l'opacité, pour eux, de plusieurs éléments de contenu. Cette

---

[12] Voir par exemple http://www.capes.math.jussieu.fr/.

[13] De façon significative, l'unique question relative à cette partie du programme, posée en 2004-2005, est la suivante : « Un cours d'OEM a été consacré aux rudiments de cardinalité. Or, dans le dernier BO portant sur le programme officiel du CAPES, ce chapitre a été supprimé. Qu'en est-il ? »

opacité les saisit d'autant plus que les concepts auxquels elle s'attache sont, de manière vécue jusque-là peut-être comme évidente, toujours présents, constamment rencontrés dans la pratique mathématique la plus ordinaire. Les questions s'arrêtent ainsi, d'abord, sur des notions dont on peut savoir qu'elles leur sont relativement peu familières. Ainsi de cet élève professeur qui indique : « J'ai eu des difficultés à résoudre des problèmes faisant appel aux classes d'équivalence et aux surjections canoniques. » La formation universitaire, on le sait, est aujourd'hui parcimonieuse sur les questions de structure : le passage d'un ensemble E muni d'une relation d'équivalence ~ à l'ensemble quotient E/~, la surjection canonique de E sur E/~ (qui associe à un élément de E sa classe d'équivalence), autant d'entités avec lesquelles les étudiants d'université n'ont eu qu'un commerce limité ! D'autres préparationnaires, plus avares de mots, ne disent pas autre chose : « Difficulté à démontrer la surjectivité », « Difficultés sur les notions : ensemble quotient… ». Le même manque de familiarité engendre des demandes où la distinction entre objets mathématiques et objets paramathématiques est ignorée : un préparationnaire, sans doute soucieux de ne rien laisser au hasard, demande ainsi de manière insistante une présentation de la notion de « canonicité » ! Sous la pression d'une inquiétude semblable, on va interroger tout un ensemble de notions avec lesquelles, jusqu'alors, on pensait pouvoir vivre en paix. « Qu'est-ce qu'une équation ? », demande-t-on ainsi. Et encore : « Quelle est la différence conceptuelle entre constante, paramètre et variable ? » Les choses apparemment les plus sûres se brouillent. « Y a-t-il, demande-t-on, une différence entre le raisonnement par condition nécessaire et suffisante et le raisonnement par équivalence ? » Des distinctions bien connues vacillent : on se demande s'il y a une différence, et laquelle, « entre condition suffisante et [condition] nécessaire », en précisant que la chose est URGENTE. On subodore parfois, sur ce même modèle, des différences subtiles qu'on pense sans doute n'avoir jamais rencontrées jusque-là : « Quelle est précisément la différence, interroge-t-on ainsi, entre raisonnement par l'absurde et par contraposée ? » Les mots les plus courants, et tout un folklore mathématique que l'on avait absorbé sans autre forme de procès, tout à coup font problème. Quelles sont les « nuances », demande un préparationnaire, entre proposition, lemme et théorème ? La question est récurrente.

3.3. La contextualisation du propos ne doit pas être oubliée : ces curiosités ne sont pas l'expression d'un pur désir de connaissance ; elles manifestent une volonté de connaître ce que le jury attend. Si on l'oubliait, on risquerait de ne pas comprendre la formulation de ce préparationnaire qui avoue : « Je fais difficilement la différence entre "théorème", “proposition”, etc. (surtout en oral 1). » Ou de cet autre, qui écrit de même : « À l’oral 1, on a du mal à distinguer pour l’exposé la différence entre propriété, proposition, théorème… » Un autre encore, une autre année, laisse pointer un intérêt un peu plus large en demandant : « Dans les exposés de la première épreuve orale (et d’une manière générale), quelle différence y a-t-il entre un théorème et une proposition ? (Et secondairement entre un théorème et un lemme ?) ». L’oscillation est permanente entre retour vers un passé qu’on pouvait croire dépassé et découpage souvent maladroit d’un réel nouvellement rencontré. L’un des questionnants s’étonne en ces termes : « Une difficulté que j’ai eue. Dans $\mathbb{N}$, toute partie non vide admet un plus petit élément, difficile de trouver la démonstration. » Un autre se demande s’il est possible de démontrer les axiomes de Peano... Pour un autre encore, le trouble est plus profond : « Problème avec l’axiomatisation. Comment peut-on créer des mots qui définissent des propriétés mathématiques à partir de trois ou quatre axiomes sachant que ces axiomes utilisent eux-mêmes des mots (problème du dictionnaire) ? » On atteint ici une limite, celle du refus d’un nouveau que l’on se hâte de disqualifier comme étant *a priori* impossible !

3.4. La préparation au CAPES est un temps de redécouverte, travaillé par une obsession : et si ce que je crois n’était pas conforme aux attentes du jury ? Tout à coup, tout devient suspect. On se demande par exemple comment noter un couple d’éléments – avec quel séparateur (virgule ou point-virgule ?). Ou, semblablement, comment noter un ensemble formé des trois éléments 0, 1, 2. Ou comment noter encore l’intervalle fermé dont les extrémités sont *a* et *b*. Ou s’il faut écrire $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ou $(O\,;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. D’autres butent sur la notation de l’ensemble des nombres réels positifs : faut-il écrire $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}_+$? L’ensemble $\mathbb{R}$ privé de 0 sera noté $\mathbb{R}^*$; mais comment noter l’ensemble des réels strictement positifs quand on a appris, comme certains l’ont fait, que, d’une façon générale, la notation A^* désigne le groupe des éléments inversibles d’un anneau A, puisque $\mathbb{R}_+$ *n’est pas* un anneau ? La différence, pour l’auteur de la question, a dû se creuser, semble-t-il penser, entre ses années d’étude (où, croit-il se souvenir, la notation $\mathbb{Z}^*$ désignait, non pas $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, mais l’ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}$, soit $\{ -1, 1 \}$), et le temps qu’il vit en cette veille du CAPES. « Quelle est la notation aujourd’hui ? », interroge en écho un autre préparationnaire. Tout à coup, on s’inquiète du bon usage, d’abord au CAPES, ensuite dans l’enseignement que l’on aura à donner en cas de réussite au concours – un préparationnaire se demande par exemple si « on a le droit » d’utiliser les « quantificatifs » *(sic)* au lycée et au collège.

3.5. Au-delà des notations, les problèmes d'usage fourmillent. La question des raisonnements par récurrence en est un exemple insistant. Dans les épreuves écrites, a cru comprendre un préparationnaire, « il faut bien justifier les assertions que l'on utilise ». Mais doit-on expliciter des raisonnements par récurrence qui, jusqu'alors, paraissaient « immédiats » ? Y a-t-il un juste milieu entre l'affirmation que tel résultat s'obtient par une récurrence, voire par une récurrence « immédiate », et l'explicitation quasi-obsessionnelle d'un schéma de raisonnement canonique ? Dans le dernier sujet de CAPES blanc, se confie un futur candidat, « il y avait beaucoup de récurrences à faire ». Et d'interroger : « Est-ce que résoudre la question en répondant "par récurrence, on montrerait que…", sans détailler les étapes, suffit ? (Si la récurrence n'est pas difficile, est-on obligé de la faire ? Et si on ne la fait pas, est-ce qu'on aura le maximum des points ?) » Le souci rhétorique est d'abord, on le voit, opportuniste : il n'y a pas une norme intrinsèque à l'écriture mathématique, il y a simplement la norme prêtée au jury du CAPES, à laquelle on veut bien se soumettre mais qu'on doit d'abord identifier par une quête inlassable. « À l'écrit, demande-t-on ainsi, s'il y a une succession de récurrences, sommes-nous obligés de rédiger chacune d'elles ou peut-on écrire : "par récurrence immédiate, on a…" » Autre question : « Quand est-ce que l'on sait qu'une démonstration par récurrence est évidente, et donc que l'on n'a pas à la rédiger ? » Plus circonspect, un autre élève professeur écrit : « Quelles étapes doit-on mettre pour effectuer correctement un raisonnement par récurrence ? » Enfin, il y a aussi les récurrences « spéciales » : « Comment faire une récurrence décroissante ? », demande l'un ; « Comment rédiger une récurrence finie ? », lui fait écho un autre.

3.6. L'affaire de la récurrence est, jusqu'à un certain point, emblématique : sans doute sait-on faire, mais est-ce bien ainsi qu'*ils* veulent que nous fassions ? Il s'agit moins de questionner l'univers mathématique que l'univers des usages mathématiques qui prévalent au sein du jury de CAPES. Est-ce que je sais ce qu'il faut savoir ? Est-ce que je fais ce qu'il faut faire ? Un préparationnaire s'interroge crûment en ces termes : « Lors d'un écrit, lorsqu'on répond "rapidement" à une question (par ex. : "Par récurrence on démontre aisément que…") lorsque celle-ci est facile (de l'avis du rédacteur *a priori*), a-t-on la totalité des points ou le seul avantage est-il le gain de temps ? » Ces questions, explicites ici, sont sans doute toujours présentes. Même l'exploration d'un fragment nouveau de l'univers mathématique relève moins d'un pur désir de connaissance que d'une sourde volonté de reconnaître ce que, à ce propos, autrui sait et attend que l'on sache. À propos de récurrence encore, on prend conscience ainsi que l'on peut encore découvrir des aspects jusqu'ici inconnus de la chose, ce qu’on ne soupçonnait guère. Et on interroge : « Quelles sont les différences entre récurrence simple, récurrence cumulée et récurrence forte ? » Plus prudemment, un préparationnaire avoue : « Je n’ai pas bien compris la différence entre les notions de récurrence cumulée et de récurrence simple. » Ici, un nouveau problème surgit : sur certaines questions, il ne suffit pas de chercher à connaître ce que le jury connaît et attend, il faut aussi – et d’abord – s’informer sur ce qu’il en est, en quelque sorte objectivement, du sujet mathématique en question. Comme on l’a vu au début de ce chapitre, tel autre préparationnaire cherche à se libérer de ce côté-là par cette question : « Dans quel bouquin trouver toutes les variantes de la récurrence ? » Fugitivement objectivé, le savoir mathématique n’est pourtant pas regardé comme problématique : les médiations usuelles – livres, polycopiés, résumés de cours – sont supposées suffire à le rendre accessible. La problématicité est du côté du jury : si j’échoue, c’est que le jury m’aura fait échouer plutôt qu’à cause du contenu sur lequel j’aurais été examiné. À la non-problématicité du savoir à enseigner répond ainsi, par l’effet d’une subjectivation qui est la règle plutôt que l’exception, la mise en avant de la problématicité si difficilement saisissable des attentes du jury, source de toute problématicité méritant d’être questionnée.

3.7. La partie du programme examinée ici comporte pourtant nombre d’aspects mal connus, voire inconnus, des préparationnaires, et qui suscitent un certain nombre de questions. Mais ce questionnement reste, sauf exception, soumis aux deux grandes forces identifiées jusqu’ici. D’un côté s’affirme la tentation de refuser le nouveau, qu’on se prend à regarder comme un « réel impossible ». À propos de la définition axiomatique de $\mathbb{N}$, ainsi, un élève professeur écrit :

> … on a établi une liste d’équivalences de propriétés de $\mathbb{N}$, si l’une est vraie, elles le sont donc toutes. Mais on n’a pas montré que l’une d’entre elles était vraie. Il me semble justement qu’on en prend une comme axiome car on ne peut le démontrer seulement à partir des propriétés de l’ensemble $\mathbb{N} = \{ 0, 1, … \}$. (Ça se ramène à la question : quelle est la définition de $\mathbb{N}$ prise ?)

La tension et la tentation générale de réputer impossible la réalité mathématique ainsi nouvellement rencontrée se nourrit, certes, d’aspects spécifiques de cette réalité, comme s’il y avait toujours quelque chose à redire en matière d’ontologie mathématique. D’un autre côté, le doute ontologique apparaît lié au processus de subjectivation déjà plusieurs fois souligné, qui fait du jury la source d’une loi difficilement déchiffrable, selon laquelle pourtant on s’apprête à être jugé. Un candidat malheureux, et qui répète la préparation, se confie en ces termes :

L'année dernière lors de la deuxième épreuve orale, le jury m'a demandé si l'on pouvait définir une fonction à partir de sa représentation graphique (plus précisément, j'avais donné des allures de courbes représentatives de fonctions assez quelconques dans un exercice et je proposais des résultats sur les fonctions en question). J'ai répondu que oui ; une application de E dans F est un sous-ensemble de $E \times F$. Apparemment, ce n'était pas la bonne réponse mais je ne sais toujours pas pourquoi…

Le répondant doit ici se faufiler entre l'objectivité mathématique et la subjectivité prêtée au jury : la porte est étroite. Une réponse à la question posée peut se décliner en quatre points, écrit-il. On reproduit ci-après son propos.

① On appelle *relation binaire* sur l'ensemble produit $E \times F$ toute partie ρ de $E \times F$: $\rho \subset E \times F$. On note par définition, pour $(x, y) \in E \times F$: $x\rho y \Leftrightarrow (x, y) \in \rho$. On appelle *domaine* et *image* de ρ les ensembles $\mathrm{Dom}(\rho) = \{x \in E \,/\, \exists y\ (y \in F \wedge x\rho y)\}$ et $\mathrm{Im}(\rho) = \{y \in F \,/\, \exists x\ (x \in E \wedge x\rho y)\}$. Si $x\rho y$, on dit que y est une *image* de x et que x un *antécédent* de y : Im(ρ) est l'ensemble des images des éléments de E, et Dom(ρ) est l'ensemble des antécédents des éléments de F.

② On appelle *fonction* de E dans F tout triplet $f = (E, F, \rho)$, où ρ est une relation binaire sur $E \times F$ qui est *fonctionnelle*, c'est-à-dire telle que tout élément de E possède au plus une image par ρ.

❶ La relation binaire fonctionnelle ρ est appelé le *graphe* de la fonction f.

❷ Les ensembles Dom(ρ) et Im(ρ) sont encore appelés *domaine de définition* et *ensemble des valeurs* de la fonction f et notés Dom(f) et Im(f).

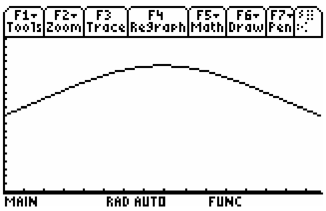
❸ Si $x \in \mathrm{Dom}(f)$ on désigne par $f(x)$ l'unique $y \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $x\rho y$.

③ On appelle *application* de E dans F toute fonction f de E dans F telle que $\mathrm{Dom}(f) = E$.

2. Cela étant, s'il est (presque) vrai qu'une « application de E dans F est un sous-ensemble de $E \times F$ », il ne faut pas confondre, par exemple, l'ensemble des couples de réels

$$\left\{(x, \mathrm{e}^{\sin x \cos x}) \,/\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

qui est *le graphe* de l'application $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x \cos x}$ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans [0, 2], et *une représentation graphique* de f, qui est un tracé *matériel*, traditionnellement *graphique*, ou, aujourd'hui, *électronique*, et qui peut être aussi une version graphique d'un tracé électronique, comme ci-après :



C’est cela sans doute que le jury a voulu sanctionner : une représentation graphique est un modèle « sensible » d’une « idéalité » mathématique qui est utile dans l’étude de cette idéalité. Mais on ne doit évidemment jamais les confondre.

L’effort de formation, on le voit nettement ici, ne porte pas seulement sur le rapport aux mathématiques, mais aussi sur le rapport d’autrui aux mathématiques, et sur la manière dont ce rapport peut être étayé par un certain rapport – à déchiffrer – aux mathématiques. Le formateur intervient pour rompre l’illusion de la subjectivité insondable du jury, en s’efforçant de restituer une place possible, dans le paysage mathématique objectif, à l’expression de cette subjectivité telle que le candidat a cru la reconnaître. Inversement, l’idée que l’objectivité mathématique face à laquelle la préparation met l’élève professeur puisse se transmuer en une attente subjective du jury peut parfois donner le vertige : est-ce que, ça, *ils* peuvent nous le demander ? Confrontés par l’enseignement reçu aux rudiments de la théorie naïve des ensembles, un préparationnaire paraît se sentir cerné, et interroge : « Existe-t-il une théorie mathématique qui ne fait intervenir aucun ingrédient de la théorie des ensembles ? » Un autre, qui a découvert par ses propres moyens ce territoire nouveau, apparemment peu sûr, fait part de ses interrogations :

Extrait de *Algèbre 1*, Jean-Marie Monier, Dunod : « Nous nous contenterons d’une notion naïve (intuitive) des ensembles, sans aborder la notion de relation “collectivisante” ». Quelle est la « vraie » définition d’un ensemble ?

Le répondant réagit dans les termes ci-après.

1. Le programme de ce module de formation comprend en particulier des développements sur les *ensembles* : on verra à ce propos quelle réponse peut recevoir la question posée sur la « vraie » définition de la notion d’ensemble.

2. Pour apprécier d’ores et déjà les difficultés que comporte une telle « définition », on peut s’arrêter un instant sur la notion de relation collectivisante.

① Une propriété $P(x)$ relative aux ensembles x (« ensemble » étant pris ici au sens usuel du terme) est dite *collectivisante* s’il existe un ensemble E tel que l’on ait : $P(x)$ vrai $\Leftrightarrow x \in E$. En d’autres termes, les ensembles x possédant la propriété P forment un ensemble, que l’on peut (provisoirement) noter

$$\{ x / P(x) \}.$$

② Cette définition peut sembler brasser du vide, car on peut penser qu’on n’a qu’à appeler ensemble le « collectif » des x possédant la propriété P. Il n’en est rien, comme le montre le *paradoxe de Bertrand Russell* (1877-1970), que le logicien britannique rendit public en 1903.

❶ Prenons pour P la propriété $x \notin x$. Supposons alors que cette propriété soit « collectivisante », c'est-à-dire qu'il existe un ensemble $E = \{ x / x \notin x \}$. On rencontre alors la contradiction suivante. Si l'on suppose que $E \in E$, alors, d'après la définition même de E, on a $E \notin E$. On a ainsi démontré l'implication suivante : $E \in E \Rightarrow E \notin E$. Jusque-là, rien de grave : si, d'une manière générale, l'implication $A \Rightarrow \neg A$ est vraie, c'est que l'énoncé A est faux, c'est-à-dire que l'énoncé $\neg A$ est vrai, ce qui correspond au fait, déjà rencontré lors de la séance 3, que la proposition $(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$ est une *tautologie*.

❷ Examinons maintenant l'énoncé $E \notin E$ qui, d'après ce qui précède, serait vrai. Si E n'est pas un élément de E, c'est que E ne satisfait pas la propriété $x \notin x$, et donc que l'on a $E \in E$. On a démontré ainsi l'implication : $E \notin E \Rightarrow E \in E$. Telle est la contradiction à laquelle on arrive !

③ Pour écarter ce type de difficultés, on ne permet de considérer un ensemble de la forme $\{ x / P(x) \}$ que lorsqu'on considère les ensembles x qui sont des éléments d'un ensemble connu U :

$$\{ x \in U / P(x) \}.$$

C'est là ce que, dans le cadre d'une théorie axiomatique des ensembles, on appellera l'axiome de *compréhension* (ou de *sélection*).

L'épisode est, à certains égards, exemplaire. Il montre un univers mathématique raréfié où, vraisemblablement, formés et formateurs s'avancent à pas mesurés, en se demandant jusqu'où ils peuvent aller sans aller trop loin. On ressent ici la double pression peut-être contradictoire de la connaissance objective et des attentes subjectives supposées. L'exploration du paysage mathématique du CAPES rencontre ses limites. Ainsi en va-t-il, par exemple, avec certains éléments dont on ne sait trop s'il s'agit de connaître leur rôle mathématique exact ou de reconnaître leur place dans une certaine culture mathématique « grand public ». « Qu'est-ce que l'axiome du choix ? » demande un élève professeur de 2004-2005 faisant ainsi écho à l'un de ses prédécesseurs de 2000-2001. En 2003-2004, la question est plus précise : « Axiome du choix ? Quel en est l'énoncé exact et quelles sont ses applications ? » La formulation montre un pragmatisme sans afféterie, comme si le sujet évoqué était tout à fait ordinaire – à l'instar par exemple de cette question relative à l'algèbre élémentaire des ensembles : « Est-il équivalent de dire que $f^{-1}(x) \in A$ et que $x \in f(A)$? » Mais cette apparente sérénité ne doit pas masquer la mise en doute de toute une culture mathématique que l'approche du CAPES vient perturber et rendre incertaine. À propos de récurrence encore, tel préparationnaire se confie en ces termes :

J'ai étudié en informatique un type de démonstration appelé l'induction, divisé en deux parties : l'induction structurelle qui correspond à la récurrence et l'induction nœthérienne. Cette dernière correspond-elle à un type de démonstration (mathématique) connu d'un étudiant « classique » de notre niveau ?

3.8. D'autres thèmes du programme ont un statut différent : loin d'apparaître comme des étoiles lointaines dont le scintillement reste énigmatique, tel l'axiome du choix, ils sont à la fois regardés comme culturellement bien connus mais comme mathématiquement mal maîtrisés. C'est ainsi qu'un préparationnaire écrit :

En algèbre, les exercices qui concernent les relations d'ordre et la cardinalité, je les ai abordés uniquement en 1re année de DEUG, et seulement comme exercices d'application directe de la définition.

Les questions relatives au dénombrement sont typiques de ce cas de figure – bonne familiarité culturelle, faible maîtrise mathématique. Un élève professeur écrit ainsi : « Je ne retrouve pas le raisonnement "intuitif" pour retrouver la formule : $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. » Un autre interroge : « Comment démontrer mathématiquement que C_n^p est un entier autrement qu'en le considérant comme un dénombrement ? » En ce cas, le formateur tente manifestement de s'appuyer sur la question soulevée pour impulser un petit travail « de rattrapage » à propos des coefficients binomiaux et du dénombrement.

1. Le coefficient binomial C_n^p peut être défini comme le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n, c'est-à-dire comme le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments : ainsi que la question examinée le rappelle, ce nombre est donc un *entier*. Si l'on démontre alors que l'on a $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, on en déduit que le nombre $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ est entier…

2. Plus précisément, on a : $\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+(n-p))}{(n-p)!}$. Posons $n - p = r$; on déduit de ce qui précède que le nombre $\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+r)}{r!}$ est entier. Comme p est quelconque dans $\mathbb{N}$, on peut en conclure que *le produit de r entiers successifs est divisible par r*!. On a ainsi par exemple :

$$\frac{3002\times3003\times3004\times3005\times3006\times3007\times3008\times3009}{8!} = \frac{665783225406436983502745088 0}{40320}$$
$$= 16512480788850123598778 4.$$

3. La propriété précédente est clairement *équivalente* au fait que les coefficients binomiaux sont entiers. Supposons maintenant qu'on définisse les coefficients binomiaux directement par l'égalité $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ en posant en outre $C_n^p = 0$ lorsque $p > n$ ou $p < 0$. On peut alors établir l'égalité classique $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$, laquelle permet de démontrer, par récurrence sur n, que C_n^p est entier : si C_{n-1}^p est entier

quel que soit $p \in \mathbb{Z}$, alors C_n^p est entier quel que soit $p \in \mathbb{Z}$; comme $C_0^p = 0$ ou 1 quel que soit $p \in \mathbb{Z}$, C_n^p est entier pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$. C'est là un fait que l'on retrouve par le moyen du *triangle de Pascal*, ci-après […].

4. Le résultat considéré permet de démontrer d'autres faits de divisibilité, par exemple celui-ci : *si p est premier, alors* C_p^k *est divisible par p* (pour $k = 1, 2, \ldots, p - 1$). En effet, puisque $k!$ divise $p(p - 1) \ldots (p - (k - 1))$ et que $k!$ est premier avec p, on peut conclure que $k!$ divise $(p - 1) \ldots (p - (k - 1))$. Par suite, l'égalité $C_p^k = \frac{p(p-1) \ldots (p-k+1)}{k!} = p\,\frac{(p-1) \ldots (p-k+1)}{k!}$ montre que C_p^k est divisible par p.

5. Considérons le polynôme $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Il vient : $P^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{n} k(k-1) \ldots (k-r+1)a_k z^{k-r}$. En faisant $z = 0$, on obtient : $P^{(r)}(0) = r(r-1) \ldots (r-r+1)a_r = r!a_r$. On a donc : $P(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} z^k$. Prenons alors $P(z) = (1 + z)^n$. On a ici $P^{(r)}(z) = n(n-1) \ldots (n-r+1)(1+z)^{n-r}$ et il vient donc $\frac{P^{(r)}(0)}{r!} = \frac{n(n-1) \ldots (n-r+1)}{r!} = C_n^r$, en sorte que l'on a : $(1 + z)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k$. (On notera que, en multipliant cette égalité par y^n et en posant $yz = x$, on obtient la formule du binôme de Newton, $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$.) Comme il est facile de démontrer par récurrence que les nombres a_k tels que $(1 + z)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ sont entiers, on retrouve autrement que les coefficients binomiaux sont entiers.

D'autres questions élémentaires sont proposées. Un élève professeur demande ainsi à être informé des liens existant entre le triangle de Pascal et les « nombres combinatoires ». Comme on l'a souligné, rien n'est sûr, tout peut faire l'objet d'une investigation inquiète. Ici, parmi les énigmes que l'auteur de la question souhaite voir résolues, il y a ce problème de priorité : le nombre combinatoire C_n^k a-t-il d'abord été défini par l'expression $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ou comme coefficient apparaissant dans le triangle de Pascal ? L'inquiétude peut tout pénétrer. Un autre élève professeur demande qu'on lui rappelle le *nom* de la « formule »

$$(a - b)^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (-1)^{n-1-k} a^k b^{n-1-k},$$

confondant sans doute cette égalité [14] avec l'expression factorisée de $a^n - b^n$. Une telle confusion témoigne d'une absence de familiarité avec un domaine dans lequel, corrélativement, on n'est guère capable de distinguer entre des questions réputées classiques, qui relèvent pleinement de ce qu'on peut nommer la *zone d'étude normale* (ZEN), et des questions relevant de la zone d'étude *proche* – la ZEP –, à faible distance de la ZEN, sans parler de questions relevant plus nettement de la zone d'étude *lointaine*, la ZEL. Cette tripartition floue (ZEN, ZEP, ZEL) est bien illustrée par un certain nombre de questions. Un préparationnaire demande ainsi comment on peut montrer qu'on a les égalités

$$\sum_{p \text{ pair}}^{p\leq n} C_n^p = \sum_{p \text{ impair}}^{p\leq n} C_n^p = 2^{n-1}.$$

La question est on ne peut plus classique et son traitement ne requiert que des outils élémentaires [15]. Un autre élève professeur demande comment on dénombre « le nombre d'applications croissantes d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments, $n \geq p$ ». La question souffre d'une petite ambiguïté : s'agit-il des applications strictement croissantes ? S'il en est ainsi, le problème est quasiment trivial : une telle application s'identifie de manière naturelle à son image, qui est une partie à p éléments d'un ensemble à n éléments, en sorte qu'il y a C_n^p telles applications. Si l'on recherche le nombre d'applications croissantes au sens large, le problème est à peine moins classique : une telle application s'identifie à une « combinaison avec répétition » et on montre classiquement [16] que ce nombre

[14] L'égalité $(a-b)^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k(-1)^{n-1-k}a^kb^{n-1-k}$ se réduit à l'égalité $(a-b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k(-1)^{n-1-k}a^kb^{n-1-k}$, laquelle est un cas particulier de la *formule du binôme* (« de Newton ») valable dans tout anneau commutatif : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^kb^{n-k}$.

[15] D'après le « binôme de Newton », on a : $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{p \text{ pair}}^{p\leq n} C_n^p + \sum_{p \text{ impair}}^{p\leq n} C_n^p$. Dans le cas où n est impair, il suffit pour conclure d'observer qu'il y a un même nombre (égal à $\frac{n+1}{2}$) de coefficients binomiaux de paramètre p pair et de coefficients binomiaux de paramètre p impair, ces coefficients étant en outre égaux deux à deux ($C_n^p = C_n^{n-p}$). Dans le cas où n est pair, on se ramène au cas précédent en utilisant l'égalité $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

[16] L'ensemble des applications croissantes de $\{ 1, 2, \ldots, p \}$ dans $\{ 1, 2, \ldots, n \}$, c'est-à-dire des suites finis $y_1, y_2, \ldots, y_p$ telles que $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_p$ est mis en bijection avec l'ensemble des applications *strictement* croissantes de $\{ 1, 2, \ldots, p \}$ dans $\{ 1, 2, \ldots, n, \ldots, n+p-1 \}$ par la transformation $(y_1, y_2, \ldots, y_p) \mapsto (y_1, y_2+1, \ldots, y_p+p-1)$.

est égal à C_{n+p-1}^{p}. La situation change avec cette troisième question : « Soit R_n le nombre de relations d'équivalence dans un ensemble à n éléments. Pourquoi a-t-on $R_{n+1} = C_{n+1}^{n} R_n$? » La formulation est clairement erronée – elle résulte certainement d'une mémorisation approximative d'une rencontre mathématique mal maîtrisée. On a en effet $C_{n+1}^{n} = C_{n+1}^{1} = n + 1$ et, par une « récurrence immédiate », on aurait donc – puisqu'il est clair que $R_1 = 1$ – la formule générale $R_n = n!$ alors même que, pour $n = 3$, les relations d'équivalence [17] sont au nombre de 5 quand on devrait en attendre 3! = 6. Ici, en fait, on touche à un niveau de plus grande complexité mathématique dans le développement de la théorie combinatoire : même si cela n'est qu'indicatif, dans son ouvrage classique en deux tomes [18], Louis Comtet n'en parle ainsi vraiment qu'à la page 45 du tome second, dans le chapitre V consacré aux *nombres de Stirling*, où il écrit :

> Le nombre $\varpi(n)$ de *toutes* les partitions de l'ensemble N, $|N| = n$, souvent appelé *nombre de Bell* ou *nombre exponentiel* (…), vaut évidemment d'après la Déf. A, p. 38 : $\varpi(n) = \sum_{1\leq k\leq n} S(n, k)$, $n \geq 1$. C'est donc aussi le nombre total de *relations d'équivalence*.

Le nombre de Stirling de deuxième espèce $S(n, k)$ est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k sous-ensembles non vides. On ne connaît pas de formule sommatoire pour les $S(n, k)$, qui vérifient trivialement $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ et la relation de récurrence $S(n + 1, k) = S(n, k - 1) + kS(n, k)$. Les nombres de Bell [19], eux, satisfont la relation de récurrence $\varpi(n + 1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \varpi(k)$, ce qui permet de les calculer [20]. On a ainsi $\varpi(2) = C_1^0\varpi(0) + C_1^1\varpi(1) = 1 + 1 = 2$, $\varpi(3) = C_2^0\varpi(0) + C_2^1\varpi(1) + C_2^2\varpi(2) = 1 + 2 + 2 = 5$, etc. Dans ce cas, on rencontre un

---

[17] On est ramené à dénombrer les partitions d'un ensemble à n éléments. Dans le cas où $E = \{a, b, c\}$, on a 5 possibilités : $E = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\} = \{a\} \cup \{b, c\} = \{b\} \cup \{a, c\} = \{c\} \cup \{a, b\} = \{a, b, c\}$.

[18] *Analyse combinatoire*, PUF, Paris, 1970.

[19] Du nom du mathématicien américain d'origine écossaise Eric Temple Bell (1883-1960), auteur du célèbre ouvrage *Men of Mathematics* (1937), en traduction française *Les grands mathématiciens* (Payot, Paris, 1950).

[20] Si E est un ensemble à $n + 1$ éléments et si $a \in E$, une partition de E telle que la classe d'équivalence contenant a ait k éléments (où $k = 1, \ldots, n+1$) est donnée par le choix d'une partie F à $k-1$ éléments de $E\backslash\{a\}$ et celui d'une *partition* de l'ensemble à $n+1-k$ éléments $E\backslash F\cup\{a\}$: il y en a donc $C_n^{k-1}\,\varpi(n+1-k)$. Comme l'ensemble de toutes les partitions de E est la réunion disjointe des ensembles correspondants de partitions pour $k = 1, \ldots, n+1$, on a : $\varpi(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1}\,\varpi(n+1-k) = \sum_{\ell=0}^{n} C_n^{\ell}\,\varpi(n-\ell) = \sum_{k=0}^{n} C_n^{k}\,\varpi(k)$.

phénomène typique, lié sans doute (nous n'en avons pas de preuve précise en ce cas spécifique) à une pratique répandue de formation et d'auto-formation consistant à encourager, contre une diététique mathématique contrôlée, une certaine gloutonnerie [21] qui ne permet pas au préparationnaire d'identifier clairement les problèmes étudiés ni, à plus forte raison, de les situer dans un contexte mathématique adéquat. Un quatrième exemple fournira un exemple de cette facilité à créer une semblable déconcertation cognitive. Un élève professeur écrit : « Le problème que j'ai eu a été de trouver le nombre d'éléments dans $E\backslash\mathbb{Z}_p{\cdot}\mathrm{e}$, où E est un espace vectoriel de dimension n sur $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec p premier. » La formulation est ici ambiguë : en notant ici, comme l'auteur de la question, $\mathbb{Z}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, la notation $E\backslash\mathbb{Z}_p{\cdot}\mathrm{e}$ désigne-t-elle l'ensemble E privé des éléments de la droite vectorielle $\mathbb{Z}_p{\cdot}\mathrm{e}$ (où on suppose $\mathrm{e} \in E\backslash\{0\}$), ou bien désigne-t-elle l'espace vectoriel quotient de E par le sous-espace vectoriel $\mathbb{Z}_p{\cdot}\mathrm{e}$? Dans le premier cas, la réponse est triviale : E a p^n éléments et $\mathbb{Z}_p{\cdot}\mathrm{e}$ en a p, si bien que l'ensemble examiné en a $p^n - p$: seule la non-familiarité du contexte mathématique pourrait expliquer en ce cas la difficulté de cet étudiant. Mais le second cas n'est qu'à peine plus compliqué : en se situant dans une base $(\mathrm{e}, \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{n-1})$ de E, on voit que deux vecteurs de E de coordonnées $(x, x_1, \ldots, x_{n-1})$ et $(y, y_1, \ldots, y_{n-1})$ ont même image dans la surjection canonique de E sur son quotient par $\mathbb{Z}_p{\cdot}\mathrm{e}$ si, et seulement si, $x_1 = y_1, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1}$, en sorte que l'ensemble examiné a le cardinal de $\mathbb{Z}_p^{n-1}$, soit p^{n-1}. Le contexte mathématique de travail est ici un facteur essentiel de la réussite du travail à réaliser.

3.9. La combinatoire, peut-on penser, est chichement traitée dans les études supérieures de mathématiques suivies par les étudiants qui font part de leurs difficultés. Mais il semble que les questions de cardinalité des ensembles infinis soient laissées plus encore en déshérence dans l'enseignement supérieur courant. La notation $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ désignant l'ensemble des parties de l'ensemble E, un préparationnaire de 2000-2001 s'étonne ainsi : « Pourquoi n'existe-t-il aucune application injective de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ dans E ? » Un des ses lointains successeurs – en 2003-2004 – sollicitera de même l'aide de ses formateurs pour montrer qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$. Il y a là un ensemble de faits mathématiques devant lesquels ces futurs professeurs semblent on ne peut plus novices. Un autre élève professeur s'interroge ainsi : « Dans la théorie de $\mathbb{N}$ est équipotent à E infini *(sic)*, quand on commence avec un plus

[21] Cette propension au surnourrissage est bien illustrée par certaines listes pléthoriques d'« exercices » débités au kilomètre, proposés en vrac aux préparationnaires, comme on peut en voir aujourd'hui sur divers sites Internet d'équipes de préparation au CAPES.

petit élément ça va, mais comment se passe le choix à l'infini ? » Cet étudiant pensait sans doute « maîtriser » la notion de suite : la perturbation apportée par un questionnement mathématique neuf la montre fragile. Le fait de s'affronter à des questions inédites, dont la difficulté est mal mesurée, trouble plus encore une culture qui, jusqu'alors, n'avait été mise à l'épreuve que dans des types de situations en nombre réduit et bien répertoriés. L'enseignement donné dans le cadre de la préparation a ainsi fait rencontrer à ces candidats au professorat une démonstration de la non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$, laquelle procède par l'absurde. Un élève professeur croit apercevoir une simplification notable du travail mathématique présenté :

> À propos de la dénombrabilité de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ et on nomme $(a_n)_\mathbb{N}$ la suite des éléments de $\mathbb{R}$. Ne peut-on pas introduire la suite $(b_n)_\mathbb{N}$ qui est la suite $(a_n)_\mathbb{N}$ ordonnée (croissante par exemple) ? $\exists n_0 \ / \ b_{n_0} \neq b_{n_1}$ car sinon $(b_n)_\mathbb{N}$ serait constante et $\mathbb{R}$ serait réduit à un seul élément. On a donc $b_{n_0} < b_{n_1}$. On considère $c = \dfrac{b_{n_1} - b_{n_0}}{2}$ *(sic)*, $c \in \mathbb{R}$ (si on admet que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1) et $b_{n_0} < c < b_{n_1}$ et il n'existe pas $N \ / \ c = b_N$ puisque $(b_n)_\mathbb{N}$ est monotone.

Cette fois, la réponse du formateur est un peu plus sèche.

1. Il n'est pas possible de passer de la suite (a_n) à la suite (b_n) : on ne peut en effet faire *démarrer* la suite (b_n) croissante *par rapport à l'ordre usuel* de $\mathbb{R}$ puisque $\mathbb{R}$ *n'a pas de plus petit élément* pour cet ordre. Supposons tout de même que nous ayons défini b_n ; on devrait appeler b_{n+1} le plus petit des éléments de $\mathbb{R}$ non encore énuméré, et on se retrouverait alors devant le même problème : l'ensemble ordonné $\mathbb{R}\backslash\{ b_0, b_1, \ldots, b_n \}$ n'a pas de premier élément.
2. Il découle de l'axiome du *bon ordre* (ou de Zermelo) que $\mathbb{R}$ peut être *bien ordonné*, c'est-à-dire peut être muni d'un ordre $\prec$ pour lequel *toute partie non vide A de* $\mathbb{R}$ *possède un plus petit élément*. Mais on ne peut plus dire alors que, pour cet ordre $\prec$, on ait $a \prec \dfrac{a+b}{2} \prec b\ldots$

Ces questions, pourtant, sont de vraies questions, qui parfois atteignent aux limites de l'univers mathématique connaissable à ce niveau. Ainsi en va-t-il de l'interrogation suivante, qui renvoie – très vraisemblablement sans que l'auteur en soit conscient – à un problème classique de fondement de la théorie des ensembles :

> Une relation binaire est définie par la donnée d'un triplet (E, F, G). E ensemble de départ, F ensemble d'arrivée et G $\subset$ E$\times$F graphe. S'il existe une bijection de E dans F, E et F sont équipotents. La relation d'équipotence est une relation d'équivalence. Quel est son ensemble de départ, ensemble d'arrivée ?

On notera en passant un mécanisme essentiel du travail réalisé dans le cadre de formation évoqué ici : l'enseignement prodigué a fait rencontrer aux préparationnaires, d'un côté, la définition ensembliste de la notion de relation binaire, d'un autre côté, la notion d'ensembles équipotents ; le travail effectué par le préparationnaire de mise en relation « scolaire » de ces deux items produit une question nullement anodine, liée aux paradoxes de la théorie naïve des ensembles [22].

3.10. L'activité inquisitrice des préparationnaires met en évidence bien d'autres difficultés qui, pour être en dernière instance rapportées par eux à l'attente du jury, n'en ont pas moins un caractère objectif du point de vue mathématique. Parmi les écueils rencontrés, beaucoup ne touchent pas au plus profond de l'édifice mathématique, certes. Toute une catégorie de questions, ainsi, a trait à des notions que les élèves professeurs découvrent à l'occasion de leur préparation aux épreuves orales et dont ils ne connaissent que l'exposé qu'en proposent les manuels de collège ou de lycée. Tel est le cas par exemple de la notion d'*arbre*, à laquelle les nouveaux programmes des classes de lycée font une place remarquée, sans pour autant que cette notion y apparaisse adéquatement mathématisée. Un élève professeur en sollicite une définition, en signalant que c'est là une chose « impossible à trouver dans les livres ». L'un des sujets de la première épreuve orale d'admission, en particulier, suscite à cet égard de nombreuses interrogations que la question suivante explicite non sans vigueur :

> Dans le sujet 01 d'oral 1 de probabilités dont l'intitulé est « Utilisation d'arbres, de tableaux, de diagrammes pour des exemples simples de dénombrement. Dénombrement des arrangements et des permutations », que doit-on faire dans une première partie ? Donner des exemples qui ont un lien avec arrangements/permutations (et dans ce cas pouvez-vous en donner avec des tableaux ou diagrammes ?) ou d'autres exemples divers (et dans ce cas je trouve l'exposé / le sujet un peu « décousu » : quel est le thème du sujet ?). Faut-il définir ce qu'est un arbre, un diagramme et un tableau ? Et d'ailleurs que signifient ces termes ?

Ainsi, et comme on peut aisément l'imaginer, le chantier sur lequel doivent œuvrer préparationnaires et préparateurs est immense, et présente un relief extrêmement varié, où les parties cachées abondent.

---

[22] Voir l'article MATHEMATIQUES (FONDEMENTS DES), dû à Jean-Toussaint Desanti, dans le *Dictionnaire des mathématiques, fondements, probabilités, applications*, Encyclopædia Universalis et Albin Michel, Paris, 1998, notamment p. 389-396.

4. Mathématiques en souffrance

4.1. Si l'on tente d'associer chacune des questions recueillies à l'une des parties du programme complémentaire du CAPES, on obtient le décompte suivant [23] : la première partie, *Notions sur la logique et les ensembles*, fait l'objet de 94 questions ; la deuxième partie, *Algèbre et géométrie*, de 747 questions ; la troisième partie, *Analyse et géométrie différentielle*, est concernée par 542 questions ; enfin, la partie *Probabilités et statistiques* ne suscite que 67 questions. À l'intérieur de ces grandes divisions, les sous-divisions recueillent elles-mêmes un certain nombre de questions, selon des répartitions sur lesquelles nous allons revenir. Mais il est intéressant de s'arrêter d'abord sur une catégorie particulière de questions, celles qui concernent la partie elle-même, sans être plus précisément assignables à l'une de ses sous-parties. La partie *Algèbre et géométrie*, ainsi, est subdivisée en cinq titres :

> I. Nombres et structures ; II. Polynômes et fractions rationnelles ; III. Algèbre linéaire ; IV. Espaces euclidiens, espaces hermitiens ; V. Géométrie affine et euclidienne.

Sur les 747 questions recensées, 19 concernent davantage la partie elle-même plutôt qu'une de ses sous-parties. Ainsi en va-t-il de la question suivante : « Algèbre *et* géométrie. Qu'est-ce qui permet de les associer et/ou de les dissocier ? » Ainsi en va-t-il encore de cette question inquiète et naïve à la fois : « Est-ce que la géométrie élémentaire est explicitement au programme du CAPES ? » D'autres questions entrant dans la même catégorie se contentent d'indiquer une difficulté vécue subjectivement à propos de la partie du programme évoquée. Un préparationnaire indique ainsi sa « difficulté à faire les exercices demandés tout en comblant les "oublis" des classes antérieures (géométrie, algèbre) » en précisant qu'il n'a « pas le temps de revoir certaines notions oubliées – pour certaines – car faites il y a plusieurs années. » Un autre avouera simplement : « J'ai des difficultés avec les prérequis pour les exercices d'algèbre abordés en cours. »

4.2. Il est intéressant d'examiner l'indicateur que constitue le nombre de questions « globales » relatives à une partie du programme. Pour la première partie, *Notions sur la logique et les ensembles*, ces questions représentent 7,5 % des questions proposées ; pour *Algèbre et géométrie*, elles ne représentent que 2,5 % ; pour la partie *Analyse et géométrie*

[23] Quelques rares questions ont été associées à plusieurs items du programme ; en sens inverse, quelques questions, en petit nombre, n'ont pas été classées. D'une manière plus générale, le tri que nous effectué entre les diverses catégories de questions ne saurait être qu'un peu approximatif.

différentielle, ce taux remonte à 5,5 %, tandis qu'il atteint un maximum sur la partie *Probabilités et statistiques* : 52 % ! Cette dernière partie fait donc l'objet d'un abord plus « globaliste » que les autres parties : avant de s'interroger sur tel détail, on s'inquiète du *tout*. Une préparationnaire écrit ainsi : « Une difficulté que je rencontre est l'absence de cours de probabilités pour la préparation à l'écrit : je n'en ai fait ni en DEUG, ni en licence, et je me sens un peu perdue dans cette matière. » Un autre s'inquiète en ces termes : « Pourrait-on avoir un résumé de cours sur les statistiques : tests et estimations, comparaison de moyennes, régression, etc. ? Je n'ai jamais abordé ces notions lors de ma scolarité. » De façon plus développée, mais non moins civile, un autre encore écrit :

> [Ceci] n'est pas vraiment une question mais plutôt un souhait. Pour les probabilités et les statistiques, je voudrais savoir si l'on va avoir de vrais cours (ou tout au moins de sérieux rappels de cours) car c'est un domaine assez complexe, relativement nouveau dans les programmes, qui nécessite des définitions précises et des explications claires.

D'autres se font plus discrets et présentent leurs requêtes presque subrepticement. « Serait-ce possible d'avoir un petit topo sur les Statistiques ? », demande l'un, tandis qu'un autre s'enquiert en ces termes : « Les statistiques (intervalle de confiance…) sont-elles déjà tombées à l'écrit ? Est-ce au programme depuis longtemps ? » À l'instar de ce préparationnaire, bien d'autres font référence à la pierre de touche que constituent les épreuves, écrites ou orales, du CAPES. Mais il est clair qu'on s'interroge, ici, sur l'abord de tout un domaine qu'il faut d'abord situer, cartographier en quelque sorte, afin de pouvoir y situer le détail sur lequel, éventuellement, on sera jugé. Le problème est d'abord *dans les mathématiques*, et l'on s'efforce de savoir quelle juste extension il convient de donner à ces mathématiques-là. Essayant de borner le champ à parcourir, un élève professeur écrit : « Étant donné que je n'ai pas fait de statistiques (ou très peu), quels documents au niveau CAPES (oral) peut-on trouver afin de préparer ces leçons ? Faut-il en savoir plus que le niveau demandé aux terminales (ES en particulier) ? » Ce souci d'une appréhension d'ensemble – fût-ce pour réduire cet ensemble le plus possible ! –, est évident. Un élève professeur avouera par exemple : « J'ai du mal à faire le lien entre probabilités et statistiques. » On retrouve ce souci dans toutes les parties ou sous-parties du programme peu familières au public concerné. Dans la partie *Algèbre et géométrie*, le taux de questions « globales », la plupart du temps très faible, est ainsi plus élevé s'agissant de la section *Nombres et structures*, où il monte à 5,5 % ; cette section du programme apparaît ainsi comme rassemblant des mathématiques que les préparationnaires, jusqu'ici, semblent n'avoir pas eu à considérer comme un tout structuré.

4.3. Il en va plus encore ainsi à propos d'une autre sous-partie que le programme intitule *Géométrie affine et euclidienne* et où, *a priori*, se trouvent simplement rassemblés des thèmes d'étude que les élèves professeurs ont rencontrés au cours de leur scolarité (ce qui distingue cette situation de celle concernant les probabilités et la statistique) : calcul barycentrique, configurations dans le plan ou dans l'espace, coniques, transformations, usage des complexes en géométrie. Pourtant, les questions générales foisonnent ! Tout se passe comme si, par delà les souvenirs morcelés du travail accompli au secondaire, le besoin s'imposait d'un travail de synthèse et de remembrement, qui permette une organisation renouvelée de connaissances éparses et inégalement disponibles. Les questions demandent ainsi des « rappels de cours », des « résumés de cours », des références d'ouvrages de géométrie, à propos des espaces affines notamment, mais aussi à propos des isométries par exemple. Ainsi en va-t-il au long de quelque trente questions (sur 377, ce qui correspond à un taux de près de 8 %), auxquelles il faut rajouter plusieurs questionnements de type « généraliste », qui renvoient au domaine tout entier, plutôt qu'à certains de ses constituants. Des questions portent par exemple sur l'évidence graphique dans le plan. « Pourquoi toutes les propriétés de la géométrie élémentaire sont-elles évidentes ? », s'interroge ainsi un préparationnaire. Un autre s'enquiert en ces termes : « Une construction (un dessin) peut-elle (ou peut-il) être considérée comme une justification pour une question de géométrie simple ? » Un autre questionnement encore porte sur les « diverses géométries » : on s'interroge sur les liens entre « espace affine, espace euclidien et espace vectoriel » ; on avoue rencontrer « un gros problème avec le lien entre géométrie élémentaire et géométrie affine », et cela « notamment pour l'oral 1 ». La fraîcheur des commencements est perceptible, comme dans cette question : « Quand doit-on se placer dans le plan de la géométrie euclidienne élémentaire ou dans le plan affine euclidien ? » Bien entendu, ces interrogations globalistes sur la matière sont fréquemment contextualisées par rapport au concours. « En oral de géométrie, demande-t-on ainsi, quand doit-on se placer dans le plan affine ou dans le plan de la géométrie euclidienne ? » Les questions se font écho d'une année sur l'autre. La précédente est de 2004-2005 ; la suivante, plus circonstanciée, date de l'année 1999-2000 : « En oral 1 de géométrie, est-il préférable de se placer dans l'espace de la géométrie euclidienne élémentaire ou dans l'espace affine euclidien ? Les démonstrations sont plus faciles (il me semble) dans le second cas, mais pour un élève, elles "tombent du ciel". »

4.4. D'une façon générale, la mathématisation « moderne » de la géométrie élémentaire vue au collège et au lycée laisse perplexe et suscite des interrogations multipliées, d'autant que s'introduisent aussi des références à des géométries jamais encore rencontrées. Au « Qu'est-ce que la vieille géométrie ? » de tel préparationnaire répond ainsi cette requête d'un autre élève professeur : « Quelles sont les différences entre la géométrie élémentaire euclidienne et la géométrie hyperbolique ? » Un autre encore constate : « À propos de l'axiome d'Euclide : en le niant, on a vu qu'il y avait une infinité de droites passant par un point, parallèles à une droite donnée. Pourquoi n'aurait-on pas : "Il n'existe *aucune* droite…" ? » La question de l'axiomatisation, sans doute furtivement rencontrée, suscite bien des inquiétudes. Un élève professeur demande, non sans candeur, une « liste des axiomes essentiels en géométrie euclidienne ». Cette quête des « principaux axiomes » *(sic)* devient presque obsédante, d'autant qu'on s'interroge, bien sûr, sur les exigences du jury à cet égard – faut-il connaître ces axiomes et peut-on alors s'y référer sans crainte ? L'accumulation a valeur de symptôme : par-delà les déficits que les préparationnaires reconnaissent en eux-mêmes, elle révèle un déficit sans doute beaucoup plus rédhibitoire, qui affecte la tradition mathématique du CAPES telle qu'elle s'est figée dans les décennies d'après la réforme des mathématiques modernes. La géométrie y est en effet d'emblée abordée à partir des notions solidaires d'espace vectoriel et d'espace affine, à la manière dont Jean Dieudonné la présentait dans son livre de 1964, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, alors que le point de vue développé par Gustave Choquet dans son ouvrage *L'enseignement de la géométrie*, paru la même année chez le même éditeur [24], reste implicite et ne fait l'objet que de brèves évocations (comme en témoignent certaines des questions évoquées plus haut), en sorte que l'articulation entre le point de vue dit de la « géométrie élémentaire », familier depuis le collège, et celui des espaces affines euclidiens, souvent découvert l'année même du CAPES, reste en déshérence. Comment alors, à partir des pratiques déductives installées au collège en géométrie, expliciter une axiomatique qui « colle à ces pratiques », quand bien même elle semblerait par endroits s'en éloigner parce qu'elle donne droit de cité à ce qui y restait implicite, voire refoulé ? Comment, ensuite, faire apparaître l'espace de la géométrie élémentaire axiomatisée comme suffisamment riche de propriétés pour être constitué en un espace affine euclidien ? Comment, enfin, s'assurer que cette dernière structure « capture » toute la richesse de l'espace de la géométrie élémentaire traditionnellement enseignée au secondaire ? Autant de grandes questions sur lesquelles la préparation semble muette, ou quasiment. De là cette floraison de questions, à la fois maladroites et avisées, qui se renouvellent au fil des années, telles les suivantes.

---

[24] Hermann, Paris.

> Dans les exposés oraux, que sous-entend-on au juste quand on parle de « plan ou espace de la géométrie *élémentaire* » ?
>
> Quels sont les axiomes de Hilbert et d'Euclide ? En fait, c'est pour savoir dans quel cadre on doit se placer en géométrie suivant les leçons : plan de la géométrie élémentaire euclidienne ? ou plan affine euclidien ?

La question de l'axiomatisation constitue, apparemment, un point de déconcertation pour les préparationnaires. Tout d'abord, bien sûr, les questions fleurissent autour du contenu d'une axiomatique possible de la géométrie (du plan ou de l'espace, la chose reste floue). Prudemment, un préparationnaire demande : « Devons-nous connaître les axiomes de la géométrie euclidienne ? » Dans la même veine, mais peut-être plus délicatement, un autre interroge : « Pensez-vous qu'il soit utile de connaître les axiomes de la géométrie axiomatique ? » Plus décidé, un troisième s'enquiert en ces termes : « Quels sont précisément les axiomes de la géométrie plane euclidienne ? Et les définitions de base (droites…) ? » Plus ambitieux, et peut-être plus assuré, un autre élève professeur écrit : « Pourrais-je avoir les références d'un livre qui traite des axiomes de géométrie élémentaire ? » La question de l'axiomatisation n'est pourtant pas véritablement clarifiée à ce stade : on demande, on l'a vu [25], une « liste des axiomes *essentiels* en géométrie euclidienne » ou on requiert de « définir les *principaux* axiomes de la géométrie élémentaire (Hilbert) », ce qui traduit une réception bien incomplète du concept d'axiomatique ! Un élève professeur, mû sans doute par le souci de ne rien laisser au hasard, s'interroge même dans les termes suivants : « Faut-il connaître, savoir lister, savoir *démontrer*, les différents axiomes de la géométrie élémentaire dans le cadre, par exemple, de l'oral 1 de géométrie ? » Une telle nouveauté dans l'univers mathématique fréquenté est de nature à susciter des inquiétudes. Un questionnant demande ainsi : « En oral 1, géométrie, si je construis ma leçon sur la base des principes de Hilbert, le jury ne peut-il pas me poser quand même des questions sur le programme complémentaire ? » La perturbation cognitive n'est pas que périphérique et ouvre la voie à une interrogation sur la nature des objets même les plus familiers. L'interrogation se fait parfois ontologique : « Qu'est-ce qu'un plan ? », demande ainsi un autre élève professeur. Plusieurs s'interrogent de même sur la « définition de l'orthogonalité dans le plan (en géométrie élémentaire) », et l'on se demande en particulier comment définir « deux droites orthogonales dans le plan sans utiliser le produit scalaire ». Dans l'espace, c'est « la différence entre "perpendiculaire" et "orthogonal" » que l'on veut clarifier. Semblablement, la découverte de la diversité et de la

[25] Dans les citations qui suivent, c'est nous qui soulignons.

complexité de la notion d'angle engendre une profusion de questions. Cette notion si anciennement familière semble, en effet, se dérober, et l'on questionne à qui mieux mieux. « Quelle est la définition d'un angle ? » (la question se répète au fil des années). Plus ferme : « Qu'est-ce qu'un angle (précisément et à tous les niveaux) ? » Plus sobre : « Les angles. » Inquisiteur : « Qu'est-ce qu'un angle ? » Là encore, on se fait écho d'une année à l'autre. D'aucuns essaient de reprendre les choses systématiquement – plutôt que calmement. Un élève professeur note ainsi : « Difficulté pour maîtriser les différences entre angle géométrique, angle orienté, mesure d'angle, triangle direct. » Un autre s'enquiert : « Où trouver des informations claires sur les angles ? Du point de vue collège et lycée ? Du point de vue enseignement supérieur ? » L'interrogation montre parfois une certaine impatience [26] : « Pourriez-vous nous éclairer sur la notion *intuitive* d'angles (et de leur(s) mesure(s)) d'une part, sur une définition "rigoureuse" de ces notions d'autre part ? » Plus posément, de manière plus systématique aussi, un élève professeur écrit : « Sur la notion d'angle : quelle définition d'un angle pour un collégien ? Un lycéen ? Un candidat au CAPES ? Quelle est l'évolution de cette notion pour les élèves en fonction des classes et des filières ? Que peut-on attendre d'un candidat au CAPES sur les orbites de l'action du groupe orthogonal sur l'ensemble formé par le produit cartésien des droites vectorielles dans un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure ou égale à 2 ? »

4.5. La liste des difficultés signalées pourrait être beaucoup allongée : on s'interroge ainsi sur les angles orientés, sur le nombre π, sur les aires et les volumes, etc. Il se joue ici un drame cognitif dans lequel un univers à la fois ancien et quiet est ressaisi et chamboulé pour être réorganisé selon un schéma directeur qui, semble-t-il, manque d'évidence. Une préparationnaire s'épanche en ces termes : « J'ai quelques difficultés en géométrie, et je ne pense pas être la seule, à jongler entre la géométrie élémentaire, la géométrie euclidienne, les espaces affines... » Elle signale particulièrement la difficulté à mettre en cohérence le point de vue selon lequel tel objet est traité comme « primitif » (par exemple, la notion de droite dans une théorie axiomatique du plan) et un abord dans lequel cet objet est censé être défini « avec tel ou tel outil ». Il y a là une souffrance intellectuelle d'autant plus vive que, vraisemblablement, elle n'était pas attendue. Ce qu'un autre élève professeur formule en ces termes :

[26] Ici, c'est l'auteur de la question qui souligne.

> En algèbre-géométrie, ce qui serait *TRÈS BIEN* : avoir un document qui permette de comprendre comment se « font les choses » autour de deux thèmes : espaces préhilbertiens, euclidiens, formes quadratiques… ; géométrie (vectorielle) euclidienne, géométrie affine euclidienne. Pour résumer : les notions essentielles qui permettent de construire les structures, l'articulation logique des raisonnements. (Car ça prend énormément de temps par soi-même…) *Bref*, avoir une vision globale et cohérente de la façon dont s'articulent entre elles toutes ces notions.

Tout du long, on l'aura noté, paraît prévaloir une position un peu excentrée par rapport aux mystères des mathématiques auxquels on se heurte ici : ces mystères semblent en effet n'exister que *parce que l'information adéquate manque*. Les mathématiques ne sont pas en soi problématiques, semble-t-on dire. C'est la diffusion inappropriée des bonnes solutions aux problèmes rencontrés – et notamment, ici, à des problèmes de définition – qui est la cause principale du mal. Aussi d'assez nombreuses questions soulèvent le problème des sources imprimées (ou, désormais, électroniques) d'une information juste, pertinente, adéquate. Un élève professeur interroge ainsi : « Sur quel(s) livre(s) trouve-t-on les informations pour l'oral 1 de géométrie ? » Un autre a des exigences plus précises : « Pouvez-vous nous conseiller un livre de géométrie, pour préparer les leçons d'oral 1 et l'écrit, disponible à la médiathèque ? » La plupart pourtant demandent, on l'a vu, cette forme typiquement scolaire (ou plutôt universitaire) de support médiatique que sont le « cours » ou le « résumé de cours » que l'on désigne parfois par le nom euphémisé de « rappels » (ce mot étant appliqué y compris à une matière mathématique jusqu'alors non rencontrée). Un préparationnaire demande ainsi : « Pourrait-on avoir des rappels de cours en géométrie et surtout en algèbre, et espaces affines ? » Les préparateurs semblent être à cet égard regardés comme quelque peu inattentifs aux besoins des préparationnaires. Un élève professeur écrit ainsi : « On nous a parlé d'un "résumé" de cours de géométrie. Quand allons-nous l'obtenir ? » D'autres se contentent de réclamer ce qui leur semble dû : « Est-ce qu'on pourrait avoir un résumé de cours en géométrie, lorsqu'on ne fait pas de cours sur un chapitre, par exemple en géométrie affine ? » D'autres se révoltent un tant soit peu. « Pourquoi, demande une préparationnaire, on n'a pas de cours de géométrie ? Quand on n'en a plus fait depuis la terminale, c'est vraiment dur de le bosser seule ! » Un autre préparationnaire s'enflamme : « Un *résumé* de cours en algèbre-géométrie sur les parties non vues en DEUG (espaces affines, isométries, …) ferait beaucoup de bien à ceux qui n'ont pas déjà fait la préparation au CAPES. C'est ÉGALITAIRE. *Merci* d'avance ! »

4.6. La demande de cours et autres résumés écrits est, en réalité, presque indéfiniment résurgente. Tout se passe comme si la mise à disposition de tels écrits épuisait la capacité des préparateurs à aider les préparationnaires, qui devraient dès lors ne plus compter que sur leur « travail personnel », loin des formateurs. Il est ainsi frappant de constater que, alors que les préparationnaires peuvent mettre beaucoup d'énergie, voire une certaine dose d'âcreté dans leurs requêtes – celles visant, par exemple, à obtenir tel ou tel résumé de cours –, ils apparaissent peu enclins à demander des interactions de travail sur les documents écrits mis à leur disposition. Sans doute assimilent-ils les types usuels d'interactions avec les préparateurs – cours en amphithéâtre, séances de travail dirigé, etc. – à de simples moyens de se faire communiquer une matière sur laquelle ils devront ensuite travailler seuls. L'apprentissage est une affaire personnelle, même si le matériau à œuvrer s'obtient préférentiellement par le truchement des séances de cours ou de travaux dirigés. Un préparationnaire, à qui des reproches ont sans doute été faits, s'explique par écrit, à l'occasion des « questions de la semaine » :

> Certains professeurs sont mécontents de voir que les élèves ne vont pas régulièrement au cours : c'est mon cas ! ! ! Mais je tiens à préciser que parmi certains de ces élèves, *dont moi*, il y en a qui récupèrent les TD afin de traiter les exercices qu'ils n'ont pas su traiter. Enfin, je travaille, contrairement à d'autres qui viennent régulièrement au cours et ne font rien ! ! ! !

L'idée de travailler sous la direction d'un formateur – d'un « coach », dirait-on en d'autres domaines – telle ou telle question sur laquelle un cours leur a été donné ou un document écrit communiqué semble ne pas spontanément émerger. « Pourrait-on avoir des exercices d'oraux sur les statistiques ? » demande par exemple un élève professeur. Un autre écrit : « Pourrait-on avoir des corrigés des planches de TD en probas ainsi que des résumés de cours ? » Telle est l'antienne. Les demandes de « planches » et de corrigés fleurissent. Quand un préparationnaire demande si l'on pourrait « prévoir une séance d'arithmétique », il s'agit moins sans doute d'une séance de travail sur la matière qu'une séance où se communique la matière à travailler ensuite personnellement, comme le rappelle en passant tel élève professeur lorsqu'il note : « Certains problèmes de continuité et dérivabilité me posent encore des problèmes de “bonne” rédaction. En particulier : analyse, planche I, exercice 1, 5 (et 6). MAIS c'est plutôt du TRAVAIL personnel à faire ! » Il n'en reste pas moins, bien sûr, que la voie du travail personnel, dans laquelle certains ne s'engagent qu'à grand-peine, est semée d'embûches… C'est alors que, parfois, on voudrait revenir à la voie de la formation dirigée, dont l'efficace semblait épuisée. Un élève professeur avouera ainsi : « En algèbre, je n'ai jamais vu les anneaux et tout ce qui s'y rapporte. À part apprendre les définitions, je ne sais pas comment travailler le sujet (on ne l'a pas encore commencé en TD). » Plus explicitement, d'autres demandent sans ambages : « Serait-il possible d'avoir quelques séances de TD d'algèbre en complément des corrections de planches, de manière à “faire le point” sur ces corrections, et à résoudre certains problèmes éventuels, certaines difficultés qui pourraient apparaître à la lecture de ces corrections ? » Le travail d'euphémisation est ici remarquable : il ne s'agirait que de « faire le point ». L'aide réclamée est ainsi, ostensiblement, celle d'un simple « traitement didactique d'appoint », lorsque le « travail personnel » n'y suffit pas.

4.7. D'une manière plus large, il est frappant de constater que, à l'inverse, existent des domaines, secteurs ou thèmes du programme complémentaire du CAPES sur lesquels les questions – de quelque nature qu'elles soient – sont peu nombreuses, voire quasi absentes. L'observation faite plus haut peut conduire à une interprétation *a priori* d'une telle rareté que l'on peut énoncer ainsi : ces domaines non questionnés ne correspondraient pas tant à des parties des mathématiques sur lesquelles les préparationnaires n'auraient pas à travailler (de *leur* point de vue) qu'à des parties sur lesquelles ils estiment disposer de suffisamment de documents – de « médias » – pour ne pas avoir à s'enquérir davantage auprès des préparateurs. Cette interprétation a le mérite de rappeler ce que divers indices révèlent : une question posée est souvent entendue par son auteur comme une question *d'information*, non comme une question appelant un certain *travail ensemble*. Lorsque, par exemple, un questionnant demande ce que sont les règles de Bioche, ou comment on peut les démontrer, il attend qu'on lui *communique* le contenu de ces règles ou celui de leur démonstration, non qu'on le fasse *travailler* sur l'emploi de ces règles ou sur leur démonstration. Sans doute y a-t-il là un des plus forts et plus insidieux malentendus entre les préparationnaires et les préparateurs ! À cet égard, si sobre soit-elle du point de vue du travail « en temps réel » qu'elle exige, la réponse ci-après, apportée par un préparateur à une question touchant – sans les nommer – ces « règles », ne peut, dans cette perspective, que décevoir qui attendrait une « simple information ».

Changement de variable ?

En travaillant sur la planche sur les primitives, certains changements de variable semblent évidents, mais d'autres semblent introuvables. Exemples : pour $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}$, il faut poser $t = \sin x$; pour $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin x}$, il faut poser $t = \tan \frac{x}{2}$. Existe-t-il des combines pour les trouver ?

Matériaux pour une réponse

1. Il n'y a pas, en l'espèce, de « combines ». Mais il y a des techniques à connaître – des techniques qui ont une technologie, bien sûr. À preuve l'extrait suivant d'un ouvrage ancien sur le sujet (J. Rivaud, *Exercices d'analyse*, tome 1, 1963, p. 148) :

On sait que toute fraction rationnelle en $\sin x$, $\cos x$ et $\operatorname{tg} x$, soit $F(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)$, peut être transformée en une fraction rationnelle d'une variable t en posant $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Cependant, avant d'avoir recours à cette transformation, qui a l'inconvénient d'élever les degrés et de conduire souvent à des calculs compliqués, il convient d'examiner la possibilité d'adopter comme nouvelle variable l'une des trois fonctions trigonométriques : $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. On y parviendra facilement en utilisant la règle suivante :

Règle. – Si l'élément différentiel $F(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)\,dx$ est conservé dans l'une des transformations linéaires effectuées sur x, et conservant l'une des fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, le choix de cette fonction comme nouvelle variable conserve le caractère rationnel de l'expression à intégrer.

En résumé si $F\,dx$ est conservé par le changement de x en $\pi - x$, $-x$, $\pi + x$, on prend respectivement pour variable $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

2. La seule des trois transformations précédentes qui laisse invariant l'élément différentiel $\frac{dx}{\cos^3 x}$ est $x \mapsto \pi - x$: $\frac{d(\pi - x)}{\cos^3(\pi - x)} = \frac{-\,dx}{-\cos^3 x} = \frac{dx}{\cos^3 x}$. En posant $t = \sin x$, il vient : $dt = \cos x\,dx$ et on a : $\frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\cos x\,dx}{\cos^4 x} = \frac{dt}{(1 - t^2)^2}$.

3. On arrive là à devoir calculer la primitive d'une fraction rationnelle. Il est intéressant de citer encore l'auteur déjà exploité :

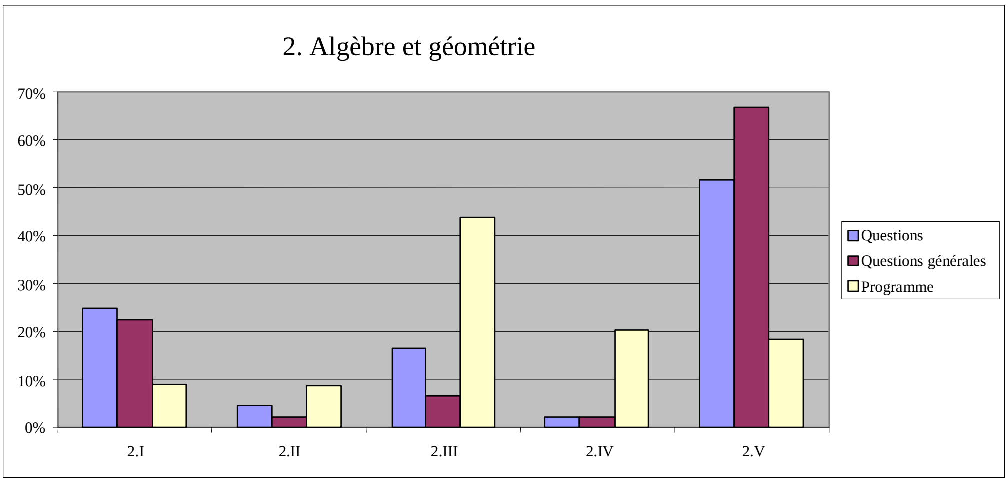
On décompose la fraction en éléments simples sur le corps des réels (éléments de première et de seconde espèce) et l'on intègre chacun des termes obtenus. Nous ne précisons pas davantage car la méthode est étudiée dans tous les cours.

Dans le cas précédent, on a ainsi $\frac{1}{(1 - t^2)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1 + t)^2} + \frac{1}{1 + t} + \frac{1}{(1 - t)^2} + \frac{1}{1 - t}\right)$ et $\frac{1}{(1 - t^2)^2}$ admet pour primitive $\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{1 + t} + \ln(1 + t) + \frac{1}{1 - t} - \ln(1 - t)\right)$ soit $\frac{1}{4}\left(\frac{2t}{1 - t^2} + \ln\frac{1 + t}{1 - t}\right)$ ou $\frac{1}{2}\frac{t}{1 - t^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{1 + t}{1 - t}$, ce qui donne : $\int\frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{4}\ln\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C^{te}$.

4. Aucune des trois transformations indiquées plus haut ne laisse invariant l'élément différentiel $\frac{dx}{1 + \sin x}$. Il reste donc à faire le changement $t = \tan\frac{x}{2}$. On a $dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}(1 + t^2)dx$ et il vient donc : $\frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{dx}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} = \frac{2\,dt}{(1 + t)^2}$. La fraction rationnelle $\frac{2}{(1 + t)^2}$ admet pour primitive $\frac{-2}{1 + t}$; on a donc : $\int\frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{-2}{1 + \tan\frac{x}{2}} + C^{te}$.

5. La technique rappelée dans ce qui précède est aujourd'hui fréquemment désignée sous le nom de « règle(s) de Bioche ». Charles Marie Paul Bioche (1859-1949) était professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

En vérité, l'examen du corpus des questions montre que la rareté s'installe selon d'autres lois. Considérons ainsi la deuxième partie du programme complémentaire du CAPES, *Algèbre et géométrie*. Elle fait l'objet, on l'a dit, de 747 questions, dont 19 questions « générales ». Dans ce tableau, c'est la cinquième et dernière sous-partie, consacrée à la *Géométrie affine et euclidienne*, qui, avec 377 questions (dont 30 « générales »), se taille la part du lion : on n'en sera pas étonné. À titre indicatif, précisons que le libellé de cette partie du programme comporte 363 mots. Viennent ensuite, par ordre décroissant, la sous-partie I, *Nombres et structures*, présentée en 174 mots, qui recueille 181 questions (dont 10 « générales »), suivie de la sous-partie III, *Algèbre linéaire*, présentée en 869 mots, avec 120 questions, dont seulement 3 « générales ». Les sous-parties II et IV recueillent, elles, sensiblement moins de questions. La sous-partie II, *Polynômes et fractions rationnelles*, à laquelle le programme consacre tout de même 171 mots, c'est-à-dire un traitement du même ordre que celui de la sous-partie I, *Nombres et structures*, ne recueille que 34 questions. Le graphique suivant présente de façon synthétique les proportions du nombre de questions, de questions générales et de mots dans chacune des cinq sous-parties d'*Algèbre et géométrie*.



La faiblesse du nombre de questions relatives aux polynômes et fractions rationnelles ne surprend guère ; car, en France du moins, cette sous-partie ne reçoit pas une grande attention dans la tradition des études mathématiques supérieures, et notamment dans la préparation au CAPES. En 1998-1999, un préparationnaire demande : « Si on a un polynôme P et un polynôme Q et qu'on pose $F = \frac{P}{Q}$, qu'appelle-t-on pôle de F ? » En 2003-2004, un lointain successeur écrit : « Dans le programme, il existe une partie nommée "Fractions rationnelles : pôles, zéros". Je n'en ai jamais entendu parler. Pourriez-vous m'indiquer une bibliographie ? » La minoration objective de ce secteur des mathématiques suffirait à expliquer le faible effectif de questions suscitées – même si, de tel ou tel point de vue, on peut regretter l'un et l'autre phénomènes. Mais les choses changent avec la sous-partie IV, *Espaces euclidiens, espaces hermitiens*. Celle-ci est présentée dans le programme en 399 mots : elle reçoit donc un développement qui dépasse sensiblement le double du développement accordé à la sous-partie II. Or, alors que cette dernière recevait 34 questions, la sous-partie IV n'en recueille plus que 16, dont une seule « générale », et dont le contenu ne nous étonnera pas : « Pourrait-on avoir des planches d'exercices pour réviser efficacement certains chapitres de géométrie (espaces préhilbertiens, hermitiens, coniques) qu'on n'aura visiblement pas le temps d'aborder en TD ? » Cette sous-partie est divisée elle-même en cinq sections, qui recueillent respectivement 3, 2, 1, 0 et 9 questions – et cela, rappelons-le, au long de *sept* années de préparation ! Concernant la première section, *Espaces euclidiens*, un préparationnaire de l'année 1999-2000 évoque un endomorphisme orthogonal f d'un espace de dimension 3 dont la dimension de l'image est nulle ; il demande ingénument : « y a-t-il une méthode générale pour déterminer explicitement f ? » En 2000-2001, un autre préparationnaire interroge : « Une application linéaire qui conserve la norme conserve-t-elle le produit scalaire ? » En 2003-2004, enfin, un élève professeur paraît tout aussi démuni devant – déjà – la « rhétorique » du secteur mathématique en question, écrivant : « Pour le CAPES, le mot "euclidien" signifie-t-il "espace préhilbertien réel de dimension finie" ou seulement "espace préhilbertien réel", sans indication sur la dimension ? » Au-delà de la contextualisation déjà soulignée – « pour le CAPES » –, on notera ici une attitude qui apparaît encore extérieure à l'objet même qu'il s'agit d'apprendre à connaître. Cet objet restera largement méconnu, peut-on penser, du moins si l'on se fie aux rares questions soulevées : la deuxième question est ainsi, si l'on peut dire, une « question de cours », un « standard », tandis que la première question sera aisément qualifiée, dans le jargon des mathématiciens, d'on ne peut plus « triviale », et révèle en vérité une maîtrise insuffisante des premières notions de l'algèbre linéaire ! La deuxième section s'intitule *Géométrie vectorielle euclidienne*. Sous cet intitulé ne se rangent que deux questions, formulées la même année, lors de la *même* séance ! Ce sont l'une et l'autre des demandes d'éclaircissements à propos de l'expression matricielle, dans une certaine base, de certaines rotations. La section III, *Espaces* *hermitiens*, recueille une seule question (en 2004-2005). On y retrouve la même absence de familiarité avec l'objet à étudier : le préparationnaire demande en effet comment on *démontre* que, dans un espace hermitien E, on a $E^{\perp} = \{ 0 \}$. On a dit déjà que la section 4, *Calcul matriciel et normes euclidiennes*, ne suscite *aucune* question en sept années de préparation. L'ultime section, la section 5, intitulée *Réduction des endomorphismes symétriques et des endomorphismes hermitiens*, apparaît donc comme une rarissime exception : 9 questions, dont une en 1998-1999, 5 en 1999-2000, une en 2000-2001, une en 2001-2002, une en 2002-2003. Les cinq questions de 1999-2000 sont posées, pour deux d'entre elles, lors de la séance 7 et, pour les trois autres, successivement au cours des séances 8, 9 et 10. Toutes proviennent de préparationnaires affectés à un même groupe de formation, qui ont suivi les mêmes enseignements donnés par le même formateur. Ces questions, qui semblent ainsi témoigner d'un « pic d'activité » sur le thème en question, ont en fait un contenu qui, sans surprise, révèle simplement une première prise de contact encore peu maîtrisée avec le thème mathématique étudié. Hormis un préparationnaire qui est allé chercher des applications des formes quadratiques en analyse et se plaint de ne trouver que l'« étude d'extrémums pour des fonctions à plusieurs variables », les autres se font l'écho des difficultés qu'ils rencontrent à pénétrer une matière apparemment neuve pour eux.

4.8. Le corpus des questions a été appréhendé ici dans quelques-unes de ses grandes masses [27]. Des explorations complémentaires portant sur d'autres parties font émerger le constat d'une indéniable souffrance mathématique. Ainsi qu'on l'a montré, un grand nombre de connaissances fondamentales indispensables à un rapport maîtrisé à l'univers mathématique du CAPES manquent ou, du moins, sont si incertaines, si problématiques, qu'on n'imagine pas qu'un rapport serein puisse exister à leur propos chez le préparationnaire moyen. L'expérience vécue de l'année de préparation au CAPES ou à l'agrégation a pu être autrefois, pour nombre de futurs lauréats, un temps de travail apportant de fait un certain bien-être, un réel confort mathématique, en cela qu'il donnait l'occasion de rassembler, de compléter, de réorganiser des connaissances en très grande partie disponibles mais dont une vision synthétique n'avait pas jusque-là été construite. Une telle satisfaction, tout à la fois psychologique et mathématique, semble n'avoir pas survécu à l'évolution des dernières

[27] On a volontairement laissé de côté deux cas très opposés, celui de l'analyse, naguère le domaine mathématique le plus familier aux étudiants issus de l'Université française, et celui des probabilités et de la statistique, qui relève du cas de figure diamétralement opposé.

décennies, même si, bien entendu, pour certains lauréats, la préparation au CAPES demeure l'occasion jamais encore rencontrée d'éprouver le plaisir propre à la mise au net de ses connaissances. Trop de thèmes et de sujets figurant dans le programme complémentaire du CAPES, voire déjà contenus dans les programmes de l'enseignement secondaire, ne renvoient en effet à rien, quasiment, dans le vécu mathématique moyen des générations actuelles. À cet égard, le tableau déjà brossé pourrait être très facilement augmenté. Ainsi, un très petit nombre de questions viennent-elles s'enquérir de ce qu'est la programmation linéaire, sujet présent pourtant dans les programmes de l'enseignement secondaire depuis bien longtemps, mais en série ES [28]. On peut mentionner encore la question des rudiments de la théorie des graphes, introduits depuis l'année 2002-2003 en terminale ES. S'agissant du programme complémentaire, à nouveau, on n'a que l'embarras du choix : mentionnons, sans plus de commentaires, la question du conditionnement d'une matrice, par exemple : dans ce dernier cas, aucune question n'est posée en sept ans. Une enquête rapide montre que la raison n'en est pas dans le fait qu'un (résumé de) cours aurait été proposé aux préparationnaires : cette question est en vérité l'un des quelques points sur lesquels les préparateurs concernés ont décidé de renoncer presque complètement [29]. On doit ainsi constater une inadéquation relativement forte entre l'expérience et la culture mathématiques des préparationnaires et les exigences du programme du CAPES, même filtrées par les préparateurs. Cette situation doit être reliée à un fait structurel, qui ne met en cause intrinsèquement, et en tout cas séparément, ni le programme du CAPES, ni la formation acquise à l'Université, ni les préparationnaires eux-mêmes. Le programme du CAPES (et plus encore sans doute le programme de l'agrégation) renvoie à un univers mathématique vaste, divers, dense, dont la bonne connaissance est en soi d'une extrême difficulté : il est à peine besoin de dire, par exemple, que bien peu de formateurs, bien peu de membres du jury même en ont une maîtrise réelle dans toutes ses parties ! Pour que l'épreuve initiatique consistant à devenir un familier lucide

[28] La programmation linéaire a figuré un temps au programme du cycle terminal de la série L, ce qui n'est plus le cas actuellement.

[29] Un préparateur justifie ce renoncement dans les termes suivants : « Pour la notion de conditionnement, je ne la traite pas car je considère qu'il s'agit là d'une notion relativement spécialisée d'analyse numérique matricielle (dont l'utilité est réelle lorsque l'on se préoccupe de calculer explicitement les solutions de « grands » – plusieurs centaines de lignes – systèmes linéaires) et je ne vois pas très bien (à part donner une définition de plus) ce que cette notion vient faire auprès d'étudiants qui sont par ailleurs très peu formés en analyse numérique. » Un autre préparateur, quant à lui, semble ignorer totalement la question. Cette situation peut, bien sûr, varier selon les centres de préparation.

et efficace de l'univers mathématique en question ait quelque chance d'aboutir, des conditions étaient autrefois réunies qui semblent aujourd'hui n'être plus satisfaites. La condition de base est sans doute celle-ci : il y a quelques décennies, le programme du CAPES ne faisait que valider la culture mathématique culturellement dominante dans l'Université française (en excluant toutefois les grands développements alors les plus récents en mathématiques, tels l'algèbre commutative ou la topologie algébrique). Ou, pour le dire autrement, l'essentiel des mathématiques du concours était alors très vivant dans les mathématiques communément enseignées à l'Université. Lorsqu'un étudiant se mettait à préparer le CAPES, alors, il ne découvrait pas pour la première fois la construction des nombres réels, ou l'axiomatique de Peano des entiers naturels, pas plus qu'il ne découvrait, en règle générale, le calcul propositionnel et les tables de vérité – qui furent, au reste, pendant quelques années, enseignées au lycée. Le « petit monde » du CAPES faisait écho à un « plus grand monde », non bien sûr celui de la recherche mathématique proprement dite, mais celui qui était né de la refonte post-bourbakiste d'un corpus mathématique large, solide, à visée de complétude, dont témoigne à l'époque une production éditoriale sans équivalent aujourd'hui [30]. On sait par exemple combien la question des angles fut, autour de 1970, objet de travaux mathématiques « intermédiaires », qui conduisirent notamment à la distinction entre « grand cosinus » et « petit cosinus » [31]. Préparer le CAPES et *a fortiori* l'agrégation pouvait alors donner le sentiment de participer d'un ordre culturel large, dominant, auquel on avait été longuement préparé dès l'enseignement secondaire, et plus encore à partir de la première année d'Université. Sur ces bases-là, l'année de préparation pouvait apparaître comme une pause vouée à une mise en cohérence, une prise de recul, un approfondissement de sa connaissance d'un univers déjà largement exploré et, dans certaines de ses parties, tout à fait familier. Or il

---

[30] Citons par exemple le *Cours de mathématiques* de Lucien Chambadal et Jean-Louis Ovaert (Gauthier-Villars, tome I, 1966), ou celui de Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès, qui paraîtra chez Dunod à partir de 1977. Ce dernier traité est disponible aujourd'hui encore ; mais il témoigne d'un temps passé plus qu'il ne nourrit les nouvelles générations de professeurs, auxquelles il reste largement fermé.

[31] On distingue alors soigneusement entre les fonctions *angulaires* (notées Cos, Sin, etc.), applications du groupe des angles $\mathbf{A}$ dans $\mathbb{R}$, et les fonctions *circulaires* (notées cos, sin, etc.), applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: sur ce sujet, voir par exemple le *Dictionnaire des mathématiques* de Lucien Chambadal paru en 1978 chez Hachette, aux entrées *angulaires (fonctions)* et *circulaires (fonctions)*. Entre fonctions angulaires et fonctions circulaires, il y a toute la distance que crée le problème de la *mesure des angles*, sujet alors chaudement discuté, comme le montre l'ouvrage *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* de Jean Dieudonné (troisième édition corrigée et augmentée, Hermann, Paris, 1968).

n’en va plus de même aujourd’hui, où nombre de « standards » de cet ancien monde mathématique ont cessé d’être abondamment fréquentés dans les études universitaires usuelles, alors même qu’ils demeurent présents dans le programme du CAPES, qui ne s’est rénové, pour l’essentiel, que par la place qu’on veut bien y donner, depuis quelques années, à l’emploi des calculatrices – sans d’ailleurs que la culture en matière d’algorithmique et d’analyse numérique soit au diapason du nouvel outillage technologique de la classe de mathématique [32].

4.9. Le sentiment d’incomplétude, voire d’incapacité à se mettre en phase avec ce que le programme enjoint en principe aux préparationnaires de connaître, ce sentiment constitue sans doute un traumatisme qui excède la simple situation de quiconque se présente à un examen ou un concours – celle où, simplement, on craint de ne pas être complètement « à la hauteur », parce que l’on ne se sent pas tout à fait prêt. Donnons ici une ultime illustration de la situation à laquelle se trouvent confrontés tant de préparationnaires au cours de l’année qui décidera de leur destin professionnel. La partie III du programme complémentaire, *Algèbre linéaire*, comporte, dans sa section 2 intitulée *Espaces vectoriels de dimension finie*, l’alinéa suivant : « c) formes linéaires et hyperplans, équation d’un hyperplan ». L’auteure se souvient que, jeune professeure agrégée en charge de l’enseignement des mathématiques dans une terminale scientifique de lycée (appelée alors terminale C), elle n’hésitait pas à définir la notion d’hyperplan en dimension n pour utiliser ensuite cette notion en dimension 2 (où un hyperplan est une droite) et en dimension 3 (un hyperplan est alors un plan). Or, depuis, le climat mathématique a fortement changé. Un préparationnaire de 2000-2001 écrit par exemple ceci, où la gêne terminologique témoigne d’une ignorance sans doute presque totale sur le sujet évoqué :

> Je n’ai abordé qu’une fois l’hyperplan durant ma scolarité et encore je n’ai eu que la définition. Dans la plupart des livres de maths, on ne trouve rien sur l’hyperplan. Pourrions-nous avoir un récapitulatif sur l’hyperplan ? Et aussi un récapitulatif sur ce que l’on doit savoir en ce qui concerne les groupes symétriques, les corps…

En 2004-2005, un préparationnaire lui fait écho :

[32] Significativement, dans le programme complémentaire du CAPES, les thèmes à propos desquels il convient, selon les instructions officielles, d’insister sur « les problèmes et les méthodes numériques et les aspects algorithmiques et informatiques » sont simplement repérés par le signe §.

> Les hyperplans restent un domaine dans lequel on est peu familier. Pourriez-vous m'aider à dégager les résultats « pratiques » et « utiles » que l'on pourrait être amené à utiliser ?

La question est régulièrement posée. En 1998-1999 : « Hésitations sur les hyperplans. » En 2003-2004 encore : « Difficulté de compréhension des hyperplans : définition, application. » En 2003-2004 toujours, plus laconique : « Problème avec les hyperplans. » L'économie de mots pourrait bien être ici indicative du fait que l'objet est si peu connu qu'on craint même d'en parler, ce qui risquerait d'exposer un peu plus son ignorance, comme en témoigne *a contrario* la question bavarde posée en 2000-2001. Mais ces expériences déconcertantes, on va le voir maintenant, ne sont pas l'apanage de la préparation au concours : elles se renouvelleront une fois le concours réussi.

Épilogue

L'année de préparation au CAPES de mathématiques pourrait être un temps de reprise, d'approfondissement, de mise en cohérence, de synthèse de ses connaissances relatives à l'ensemble du corpus mathématique dont le futur candidat devra montrer sa maîtrise au concours. Ce temps fécond et serein à la fois semble aujourd'hui l'exception plutôt que la règle. La rencontre et, très vite, la confrontation avec la grande diversité de l'univers mathématique du CAPES peut facilement déconcerter, désorienter, désarçonner, voire démoraliser. L'exploration d'un corpus qui fut autrefois classique révèle aujourd'hui au préparationnaire de nombreuses parties parfois totalement inconnues, souvent très largement méconnues, sur lesquelles il n'est plus question de parfaire ses connaissances, mais qu'il faut tout bonnement commencer à apprendre ! Même sur les parties qui semblent de prime abord familières, le travail impulsé par les formateurs, à l'instar des ouvrages que l'on peut compulser ou étudier, fait vite comprendre qu'il s'agit maintenant d'élaborer à des objets anciens un rapport nouveau. Or, à cette situation d'incertitude – et d'inconfort corrélatif –, il n'est pas facile de trouver un bon remède. La vertu scolaire d'obtempération – dites-moi ce que je dois savoir, je m'efforcerai de l'apprendre – se révèle bien vite insuffisante. Car la nature du « bon rapport » qu'il faudrait établir au corpus mathématique désigné par l'institution du CAPES se dérobe trop souvent à la curiosité inquiète des préparationnaires. Interrogée à travers ses acteurs et ses agents, l'institution tantôt ne répond pas, tantôt fournit des réponses partielles souvent peu cohérentes entre elles. Quand elle semble parler franchement et de façon univoque, ce qui est rare mais advient quelquefois, l'évocation *qu'elle fait du « bon rapport » qu'elle attend apparaît souvent « incroyable » au candidat et le laisse incrédule : il faudrait savoir ça ! Tout ça ? Si l'institution n'est pas anomique, du moins est-elle polynomique, et ne laisse-t-elle guère émerger en son sein une instance régulatrice permettant de dégager des points de vue qui seraient très largement majoritaires et bien acceptés. Cet état de choses a plusieurs ordres de conséquences, que révèle l'analyse des questions rédigées au fil des années par les préparationnaires. Dans un premier temps logique (sinon chronologique), on recherche à toute force le* nomos *caché, qui doit bien se trouver quelque part. On croit l'approcher en se rapprochant de ces formateurs – membres ou anciens membres du jury du CAPES notamment – qui semblent eux-mêmes les plus proches de l'autorité imaginaire dont on suppute l'existence. On tente parfois ainsi de se donner aux objets mathématiques un rapport idoine, au moins compatible avec ce qu'on croit être « l'attente du jury », et compatible aussi avec les efforts qu'on se croit capable de produire. La croyance première en l'existence d'un* nomos *indiscutable conduit ainsi à soumettre – de façon mi-imaginaire, mi-réelle – son propre rapport aux mathématiques au rapport supposé d'une instance tutélaire – l'institution du CAPES – et donc à avoir, tendanciellement, non un rapport « direct » aux mathématiques, mais un* rapport au rapport *aux mathématiques de cette instance tutélaire, c'est-à-dire, en fin de compte, un rapport soumis à des contraintes elles-mêmes extra-mathématiques, ce qu'on pourrait appeler un rapport « aliéné », jamais complètement assumé à titre proprement personnel. Dans une seconde étape, devant la défaillance constatée de ce* nomos *d'abord supposé, la tentation est d'inventer son propre* nomos, *de fuir dans l'idionomie, au risque de heurter la loi peut-être tout aussi singulière de membres du jury du CAPES ! Cette tentation, on le verra, prépare clandestinement à l'idionomie qui imprègne aujourd'hui encore le métier de professeur. Mais devenu professeur stagiaire, l'ancien candidat risque de tomber de haut en découvrant que l'univers professionnel où il entre, pour être d'une lisibilité réduite, n'en est pas moins lourdement normé. Dans cette situation, l'idionomie imaginaire développée lors de la préparation au concours va se heurter à des instances bien réelles : la profession, ses normes, sa normativité, sans doute ; mais d'abord, plus concrètement, plus immédiatement, la classe que le jeune professeur aura en responsabilité – laquelle s'en laissera rarement imposer –, et le programme d'enseignement même qu'il aura à y mettre en œuvre.*

Chapitre 3

Face aux mathématiques à enseigner

1. Le dispositif des questions de la semaine

1.1. Plus encore qu'en première année, où seule une assez mince partie de la préparation est alimentée par les questions posées par les élèves professeurs, en deuxième année la formation repose fortement sur la dynamique des questions et du travail pour élaborer des réponses, notamment à travers le séminaire du mardi matin, où les questions sont recueillies et où des « matériaux pour une réponse » sont apportés. Pour donner une idée de la contribution des élèves professeurs à ce travail collectif de formation, nous examinerons d'abord l'ensemble des questions formulées par écrit, semaine après semaine, par une élève professeure, choisie parmi les 45 professeurs stagiaires composant la promotion 2004-2005. La première question est posée par celle que nous appellerons Margot le mardi 7 septembre 2004 ; la dernière sera rédigée le mardi 26 avril 2005. Margot a en responsabilité une classe de seconde. Sa première question est la suivante :

> 1. Mon premier chapitre est une activité numérique avec les ensembles de nombres, l'arithmétique, les nombres premiers, l'écriture scientifique et la notion d'ordre de grandeur. Est-ce que je dois faire une AER pour chaque sous-partie ou est-ce qu'une activité sur les ensembles de nombres et une sur l'arithmétique suffisent ?

Cette question sera commentée lors de la séance suivante du séminaire du mardi matin, en même temps que d'autres questions relatives à la notion d'activité d'étude et de recherche (AER) [1]. Elle sera à nouveau brièvement considérée au cours de la séance 3, le mardi d'après. Bien entendu, un certain nombre d'objets mathématiques y affleurent, et la construction d'une

---

[1] On notera en passant la richesse pléthorique de ce « premier chapitre » que Margot envisage : on voit apparaître ici un défaut typique des débutants.

ou plusieurs AER idoines révèlerait l'utilité d'avoir sur ces notions une culture mathématique approfondie. Mais, en ce début d'année, cet aspect des choses reste encore à l'arrière-plan.

1.2. Lors de la séance 2, Margot propose une nouvelle question :

> 2. Comment faire pour justifier les propriétés et théorèmes du chapitre d'arithmétique du programme de 2^{de} (nombres premiers, etc.), autrement que par des exemples ? N'est-ce pas gênant de ne rien démontrer alors que, dans le chapitre « Géométrie du plan », on demande aux élèves de faire des démonstrations ?

Cette question a trait à un phénomène que la formation mathématique de Margot ne la portait sans doute pas à anticiper : selon le domaine des mathématiques que l'on enseigne, l'exigence démonstrative semble plus ou moins prégnante, un peu comme si la règle du jeu changeait selon le thème traité ! Cette lecture des choses a, en fait, quelque crédibilité. C'est ainsi que le document d'accompagnement du programme de seconde insiste sur l'exigence d'être au clair quant au caractère admis ou démontré d'un résultat, et cela notamment… en géométrie :

> Il faut souligner ici l'effort important entrepris au collège pour différencier le résultat *observé* du résultat *démontré* et pour annoncer clairement le statut des divers énoncés : définition, résultat ou théorème admis sur conjecture, résultat ou théorème établi, etc. […]. Il importe de garder cet esprit dans le travail conduit en 2^{de}, en particulier dans ce paragraphe de géométrie.

Or cette insistance semble s'alléger beaucoup quand on en vient à la question des nombres premiers, à propos de laquelle le document d'accompagnement du programme de 2^{de} indique :

> Il s'agit simplement de se familiariser avec la décomposition en facteurs premiers et il est demandé de se limiter à des exemples simples ; aucun théorème général d'existence ou d'unicité n'est exigé : on pourra l'évoquer sur des petits nombres et justifier ainsi la convention excluant [l'entier] 1 de l'ensemble des nombres premiers.

Ici, certains emblèmes de l'activité mathématique classique semblent quelque peu gommés : non seulement il ne serait plus nécessaire de dire que tel théorème est admis lorsqu'il n'est pas dûment démontré, mais encore il ne serait pas demandé que le théorème en question soit formulé dans sa généralité – il pourra être seulement *évoqué*, et sur des petits nombres ! On comprend l'étonnement de Margot devant ce qui peut lui apparaître comme un brusque changement de paradigme : alors en effet que la règle du jeu, confirmée et renforcée par l'année de préparation au CAPES, a toujours été d'énoncer des théorèmes et de les démontrer, le sentiment peut naître ici que l'activité demandée est « infra-mathématique », ce qu'un néophyte peut en outre être tenté d'expliquer de façon simpliste en invoquant par exemple la « faiblesse des élèves » ou, simplement, une évolution démathématisante de l'enseignement des mathématiques au secondaire. Bien entendu, la véritable raison de la situation observée a de fortes chances de n'être pas correctement perçue : elle tient d'abord à ce que la dialectique de l'expérimentation (ou de l'observation) et de la démonstration est à peu près entièrement étrangère aux professeurs stagiaires en début de formation de deuxième année [2]. Ce ratage de la fonction épistémologique du travail demandé sur les nombres premiers ainsi que sur d'autres parties du programme de mathématiques peut alors conduire nombre de jeunes professeurs – sans parler des anciens – à conclure hâtivement que, « aujourd'hui », on ne fait plus de démonstrations, alors que, en vérité, on demande seulement que les démonstrations soient précédées d'un travail expérimental conduisant à ce qui aura alors le statut de conjectures vraisemblables, qui motiveront la recherche d'une démonstration.

1.3. Lors de la troisième séance, Margot met par écrit deux questions que l'on reproduit ci-après :

> 3. a) Quelle calculatrice suggère-t-on à un élève qui se destine à une ES ? Il faut qu'elle soit scientifique, qu'elle possède du calcul statistique et matriciel. Une TI 82 suffit-elle ?
>
> 3. b) La majorité des élèves de ma classe effectuent leurs exercices mais une partie non. Que faire ? Punir ?

Ces questions ne feront pas l'objet, du moins dans le séminaire du mardi matin, de réponses spécifiques. Il en sera tout autrement de la question que Margot formule de manière détaillée lors de la quatrième séance, à propos d'un épisode problématique survenu dans la classe de seconde dont elle a la responsabilité :

> 4. En DM j'ai proposé aux élèves l'exercice suivant :
>
> 1. Simplifier $A = \dfrac{a}{a-b} + \dfrac{b}{a+b} + \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
>
> 2. Trouver a et b tels que $A = \dfrac{1}{2}$.
>
> Un élève écrit :
>
> 1. $A = \dfrac{2a}{a-b}$
>
> 2. $A = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2a}{a-b}$ donc $2a = 1$ et $a - b = 2$
>
> donc $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{3}{2}$

[2] Il semble qu'elle le soit aussi, plus généralement, pour nombre de professeurs en exercice.

et je vérifie $\frac{2a}{a-b} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$.

Je lui dis que les valeurs de a et b sont justes, qu'il ne s'agit que d'un exemple de couple solution et je rajoute que son raisonnement est faux : on n'a pas le droit de dire que, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *alors* $a = c$ et $b = d$. Il me répond : *Si ! On a le droit…* « Lorsqu'une des deux fractions ne contient pas d'inconnue et que l'on veut déterminer les inconnues présentes dans l'autre fraction, on peut faire comme ça ! » Que répondre ? Cette « méthode » permet en effet de déterminer un couple solution. Aurais-je dû mieux formuler ma question ? Comment contrer ce type de raisonnement dans le fond comme dans la forme ?

Soulignons à nouveau que, pour le formateur en charge du séminaire, il ne s'agit nullement de répondre *à Margot* (ce qui est le point de vue spontané de ces jeunes professeurs, très imprégnés de « moi-isme »), mais de répondre *à la question* qu'elle apporte du terrain et que les participants au séminaire doivent apprendre à regarder comme une question *de la profession*. Les « matériaux pour une réponse » proposés en ce cas sont longuement développés. Dans une première partie (points 1, 2, 3), la réponse précise la solution du problème mathématique proposé (il s'agit là de ce qu'on nommera plus loin des mathématiques pour l'enseignant) en même temps que cette analyse mathématiques (point 2) se trouve enchâssée dans une analyse didactique qui la motive (mais qu'elle commande).

1. L'interrogation sur la manière de « contrer » le raisonnement de l'élève est symptomatique d'une double difficulté : la première se situe à l'étape de la *conception* (et de la programmation) du travail proposé aux élèves ; le second, lors de la *« correction » collective* de ce travail.

2. L'expression proposée, soit $A = f(a, b) = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$, est homogène de degré 0, c'est-à-dire que l'on a, pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, $f(ka, kb) = f(a, b)$. Si donc un certain couple (a_0, b_0) vérifie $f(a, b) = \frac{1}{2}$, il en ira de même d'une *infinité* de couples (a, b), à savoir les couples (ka_0, kb_0) pour $k \in \mathbb{R}^*$. En d'autres termes, une analyse *a priori* très simple – essentiellement mathématique – permettait de prévoir que la question de l'existence d'une infinité de solutions surgirait, quelles que soient les formes de sa manifestation.

3. Les choses étant ce qu'elles sont, deux choix s'offrent au professeur. Premier choix : il *ne souhaite pas faire rencontrer* aux élèves une situation marquée par l'existence d'une *infinité* de solutions. Il doit alors proposer la résolution d'un *autre type* de systèmes d'équations, qui ait une solution unique.

① On aurait pu avoir par exemple ceci :

Résoudre le système : $\frac{x-3}{y+2} = \frac{1}{3}$; $\frac{x+3}{y-4} = 1$.

② Utilisons le résultat suivant (qu'on ne démontrera pas ici) :

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ et, plus généralement, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d}$ (sous réserve bien sûr que tous ces quotients soient définis).

Comme on a $\frac{3x-9}{y+2} = \frac{x+3}{y-4} = 1$, il vient $\frac{3x-9}{y+2} = \frac{x+3}{y-4} = \frac{(3x-9)-(x+3)}{(y+2)-(y-4)} = \frac{2x-12}{6} = \frac{x}{3} - 2$ et donc $\frac{x}{3} - 2 = 1$, soit $x = 9$. On a alors $y - 4 = x + 3 = 12$, soit $y = 16$. Le couple (9, 16) est l'unique couple solution.

La réponse examine alors la seconde possibilité évoquée : faire rencontrer aux élèves un cas où existe une infinité de solutions. Mais, souligne l'auteur de la réponse, le professeur devra assumer en ce cas, en toute lucidité, ce fait qu'il engage la classe dans une longue séquence de travail mathématique. À cette longueur annoncée, fait écho la longueur du développement que le responsable du séminaire donne alors à l'analyse correspondante.

4. La deuxième possibilité qui s'offre au professeur est d'assumer de faire rencontrer aux élèves la résolution d'un système ayant une *infinité* de solutions, mais en acceptant alors les principales *conséquences didactiques* de cette (première) rencontre – notamment le fait que la classe devra travailler *beaucoup plus* sur le travail des élèves. Examinons rapidement ce que pourrait être un tel travail.

① Le résultat de la première question de l'étude mathématique proposée dans le DM conduit à résoudre l'équation $\frac{2a}{a-b} = \frac{1}{2}$. D'une façon encore implicite, la classe se trouve confrontée ici au problème du choix de la *technique* à mettre en œuvre à propos de cette *tâche* dont le *type* peut être formulé ainsi :

T. Résoudre l'équation

$$\frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{u}{v} \qquad (\heartsuit)$$

où *a*, *b*, *c*, *d*, *u*, *v* sont des nombres déterminés, avec *c* et *d* non tous deux nuls et *v* non nul.

En réalité, dans le cas particulier examiné, la classe se trouve devant une tâche du sous-type suivant :

$T^\flat$. Résoudre l'équation

$$\frac{ax}{cx+dy} = \frac{u}{v} \qquad (\heartsuit^\flat)$$

où *a*, *c*, *d*, *u*, *v* sont des nombres déterminés, avec *c* et *d* non tous deux nuls et *v* non nul.

② Le type de tâches $T^\flat$ est sans doute davantage de nature à solliciter l'usage de la technique que l'élève « incriminé » met en œuvre, et qui, dans le cas plus général de *T*, peut s'expliciter ainsi :

$\tau_\spadesuit$. Pour résoudre l'équation

$$\frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{u}{v} \qquad (\heartsuit)$$

où a, b, c, d, u, v sont des nombres déterminés, avec c et d non tous deux nuls et v non nul, on résout le système

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \qquad (\spadesuit).$$

③ Il est clair que, si (x_0, y_0) est une solution de $(\spadesuit)$, alors (x_0, y_0) est une solution de $(\heartsuit)$ – le seul problème pourrait surgir du fait que l'on aurait $cx_0 + dy_0 = 0$, mais cela n'est pas possible puisque, par hypothèse, $cx_0 + dy_0 = v$ avec $v \neq 0$. Insistons sur ce point : la technique mobilisée par l'élève *donne effectivement une solution de l'équation étudiée*.

④ Mais la réciproque est-elle vraie ? Le système $(\spadesuit)$ a-t-il exactement les mêmes solutions que le système $(\heartsuit)$? Sous l'impulsion du professeur, la question suivante doit être énoncée et examinée par la classe :

$Q^1_\spadesuit$. Lorsque le système $(\spadesuit)$ a une solution unique, le système $(\heartsuit)$ n'a-t-il que cette solution ou bien en existe-t-il d'autres ?

La question $Q^1_\spadesuit$ a une réponse facile : si (x_0, y_0) est une solution de $(\spadesuit)$, alors, pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, (kx_0, ky_0) est aussi une solution de $(\heartsuit)$. C'est ainsi que l'égalité $\frac{2a}{a-b} = \frac{1}{2}$, vérifiée pour $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{3}{2}$, est également vraie lorsque $a = 1$ et $b = -3$, ou lorsque $a = -2$ et $b = 6$, etc. Cette simple observation suffit à montrer que, quand bien même la technique $\tau_\spadesuit$ permet d'obtenir *une* solution de $(\heartsuit)$, elle ignore une *infinité* de solutions de $(\heartsuit)$!

⑤ Bien entendu, la conclusion précédente devrait conduire à cette autre question :

$Q^2_\spadesuit$. Les solutions du système $(\heartsuit)$ sont-elles toutes de la forme (kx_0, ky_0), où (x_0, y_0) est solution du système $(\spadesuit)$, ou bien y en a-t-il d'autres ?

On passera toutefois rapidement, ici, sur la suite de l'activité d'étude et de recherche qu'appelle $Q^2_\spadesuit$, question à laquelle devrait s'ajouter aussi la question suivante :

$Q^3_\spadesuit$. Si le système $(\spadesuit)$ n'a pas de solution, le système $(\heartsuit)$ peut-il tout de même en avoir ?

⑥ L'étude de ces questions pourrait conduire à établir (ou à rappeler) deux résultats technologiques essentiels :

θ_1. Les nombres X, Y, où $Y \neq 0$, vérifient l'égalité

$$\frac{X}{Y} = \frac{u}{v}$$

(où u, v sont des nombres déterminés, avec $v \neq 0$) si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\begin{cases} X = ku \\ Y = kv \end{cases}.$$

θ_2. Le système d'équations

$$\begin{cases} ax + by = U \\ cx + dy = V \end{cases}$$

(où a, b, c, d, U, V sont des nombres déterminés) possède une solution et une seule si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.

Ces éléments technologiques permettent en effet de produire et de justifier la technique suivante :

$\tau_{\clubsuit}$. Pour résoudre l'équation

$$\frac{ax + by}{cx + dy} = \frac{u}{v} \qquad (\heartsuit)$$

où a, b, c, d, u, v sont des nombres déterminés, avec c et d non tous deux nuls et v non nul, on résout le système

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \quad (\spadesuit).$$

Si celui-ci a une solution unique (x_0, y_0), toutes les solutions de l'équation $(\heartsuit)$ sont de la forme (kx_0, ky_0), où $k \in \mathbb{R}^*$.

⑦ Dans le cas proposé dans le DM, on trouve ainsi que l'équation (en a et b) $\frac{2a}{a - b} = \frac{1}{2}$ a pour solution « particulière » le couple $\left(\frac{1}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$ et, pour « solution générale », les couples de la forme $\left(\frac{k}{2} ; -\frac{3k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}^*$.

La « leçon » de cette petite aventure de formation devrait être claire : on ne saurait prétendre élaborer le scénario du travail avec une classe si l'on ne procède pas à une étude *mathématique* suffisamment large et suffisamment approfondie. La fin de la réponse répète autrement cette même leçon.

5. La dynamique d'une étude n'est jamais complètement déterminée *a priori*. Le professeur, dirigeant l'étude, peut ainsi vouloir limiter son développement à la simple observation que, si la technique $\tau_{\spadesuit}$ fournit une solution, elle n'en fournit en elle-même qu'*une*, et souhaiter lancer alors l'étude vers la recherche d'une technique *alternative*, qui en même temps éclaire, si possible, le phénomène évoqué plus haut – toute solution de $(\heartsuit)$ est de la forme (kx_0, ky_0), où $k \in \mathbb{R}^*$ et où (x_0, y_0) est une solution particulière de l'équation $(\heartsuit)$.

① En s'appuyant sur les réponses $R^{\lozenge}$ d'autres élèves, il sera sans doute possible de mettre en évidence la technique suivante :

$\tau_{\heartsuit}$. Pour résoudre l'équation

$$\frac{ax + by}{cx + dy} = \frac{u}{v} \qquad (\heartsuit)$$

où a, b, c, d, u, v sont des nombres déterminés, avec c et d non tous deux nuls et v non nul, on recherche les solutions (x, y) de l'équation à *deux* inconnues

$$v(ax + by) - u(cx + dy) = 0$$

vérifiant $cx + dy \neq 0$.

② Cette technique renvoie donc à la résolution d'*une* équation à *deux* inconnues, de la forme $(va - uc)x + (vb - ud)y = 0$. Dans le cas de l'équation $\frac{2a}{a - b} = \frac{1}{2}$ du DM, il vient ainsi $3a + b = 0$, ce qui donne $b = - 3a$, etc.

③ Sur la forme $3a + b = 0$, il apparaît clairement que si (a_0, b_0) est un couple solution, alors tout couple (ka_0, kb_0), où $k \in \mathbb{R}^*$, est solution. Une *« interprétation » géométrique* éclaire la chose : l'équation $(va - uc)x + (vb - ud)y = 0$ est, *sauf exception*, celle d'une droite d'équation réduite $y = -\frac{va - uc}{vb - ud}x$, c'est-à-dire d'une droite *passant par l'origine*, les couples (x, y) solutions étant les coordonnées des points de cette droite, *à l'exception de l'origine du repère*.

④ Bien entendu, on devra aussi explorer les cas exceptionnels. En outre, et d'une manière plus générale, l'étude devra procéder, non sur des formes littérales (ainsi qu'on l'a fait ici), mais à partir de *spécimens numériques*. Ainsi l'étude de l'équation

$$\frac{2x + y}{3x + 2y} = \frac{1}{2}$$

qui conduit à l'équation $x = 0$, et a donc pour solution tous les couples $(0, y)$, où $y \in \mathbb{R}^*$, peut-elle permettre d'identifier le cas où s'annule le coefficient de y dans l'équation $(va - uc)x + (vb - ud)y = 0$, etc.

⑤ Mais cette équation même ne devra éventuellement être proposée par le professeur qu'après que la classe aurait cherché *sans succès* un spécimen adéquat répondant à la condition envisagée – de la même façon que les questions $Q^j_♠$ évoquées plus haut devraient, sauf exception, naître de la dynamique de l'étude pilotée par le professeur, et non être introduites *ex abrupto* par celui-ci…

Ainsi qu'il est fréquent, aspects mathématiques et aspects proprement didactiques s'interpénètrent d'une manière difficilement dissociable. Mais il est clair aussi que, chez Margot, l'analyse de la tâche mathématique proposée aux élèves est insuffisante, comme l'est également la maîtrise du *type* de tâches dont elle relève. Comme souvent en pareil cas, c'est-à-dire lorsque l'analyse mathématique est insuffisamment approfondie pour pouvoir nourrir et contrôler la décision didactique, on voit Margot passer au registre des raisons « pédagogiques ». Dans sa pratique naissante de professeur de mathématiques, il n'y a pas de place pour l'idée que l'intervention d'un élève puisse être à l'origine d'une découverte mathématique authentique, non seulement du point de vue des élèves, mais aussi du point de vue du professeur. Or, quelque hétérodoxe qu'elle soit, la « méthode » proclamée par l'élève (qu'il n'a vraisemblablement pas inventée) est valide, ce que Margot reconnaît. Mais sa culture didactico-mathématique, qui fait barrage, comporte ce dogme que la proposition de l'élève doit, pour son hétérodoxie, être rejetée « dans le fond comme dans la forme », ce que Margot regrette simplement de ne pas savoir faire encore.

1.4. Lors de la cinquième séance du séminaire, Margot renoue avec ses doutes quant à l'extension à donner à la pratique de la démonstration :

> 5. Peut-on demander aux élèves d'effectuer des démonstrations pour justifier, par exemple, les règles d'ordre ?

Le souci est louable. Notons en passant qu'une remarque du document d'accompagnement du programme du cycle central du collège répond pleinement, si nous la comprenons bien, à l'interrogation de Margot. Sous le titre « Raisonnement et démonstration en géométrie », on y lit en effet :

> Ce paragraphe ne concerne que la géométrie, bien que la démonstration s'applique à d'autres domaines. On peut citer, à titre d'exemple, l'examen de la compatibilité entre l'ordre et la multiplication, qui oblige à procéder par disjonction des cas, ou l'utilisation de contre-exemples en calcul littéral.

Lors de la sixième séance du séminaire du mardi matin, Margot rédige une question qui se réfère moins aux mathématiques qu'à la gestion de la classe :

> 6. Lorsque je propose un exercice, certains de mes élèves trouvent plus rapidement que d'autres et se mettent à bavarder. Comment capter cette énergie ? Lorsque je donne plusieurs exercices, l'attention des élèves sur la correction est moindre – ils cherchent les autres exercices.

La semaine d'après, elle revient cependant à son sujet de prédilection – la « démonstration », et le « raisonnement » :

> 7. Je commence un chapitre sur les configurations du plan essentiellement basé sur des révisions du collège et dont le but est d'apprendre à effectuer des démonstrations. Comment « schématiser » une démonstration géométrique ? Comment peut-on expliquer un raisonnement ? Peut-on parler de logique ?

Pas plus que les deux précédentes, cette question, qui ouvrirait tout un domaine du travail de formation, ne fait l'objet d'une réponse formelle dans le séminaire. La huitième question aura un autre sort. À nouveau, on ne s'en étonnera pas, elle renvoie en filigrane au souci démonstratif :

> 8. Sur le chapitre de généralités sur les fonctions, quelles techniques les élèves doivent-ils connaître au sujet de la variation des fonctions ? Mon livre ne fait utiliser que la lecture graphique. La méthode « algébrique » (montrer que, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$, etc.) est-elle encore au programme de 2^{de} ?

Margot, on l'aura peut-être observé, a tendance à prendre les choses, sinon de haut, du moins d'un peu loin : elle prétend ne faire qu'une bouchée d'un ensemble substantiel (ensembles de nombres, arithmétique, nombres premiers, écriture scientifique, notion d'ordre) ; elle s'aventure avec assurance sur un terrain qu'elle a peu étudié, au point d'y éprouver de sérieux déboires (c'est l'épisode de la question 4, plus haut) ; elle tient implicitement pour quasiment rien le travail sur la démonstration effectué au collège (comme le suggère la question 7) ; etc. Pour sa question de la 8e séance, sa méconnaissance du programme de la classe où elle a mission d'enseigner lui vaut une volée de bois vert, ainsi qu'on le découvrira à suivre les éléments de réponse apportés lors de la neuvième séance du séminaire, le 16 novembre 2004.

❶ L'interprétation du programme qui transparaît dans la question posée (et peut-être dans le manuel de la classe concernée) *n'est pas correcte*. Un commentaire du programme de 2de précise en effet :

On soulignera le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre, tandis qu'une fonction décroissante renverse l'ordre ; une définition formelle est ici attendue.

❷ « Une définition formelle est ici attendue » : cette injonction dénuée d'ambiguïté appelle une définition telle la suivante :

On dit que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I si, pour tous $x_1, x_2 \in$ I tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$.

Il serait donc fautif – et coupable – de répandre le bruit que la définition « algébrique » ne serait plus au programme de 2de.

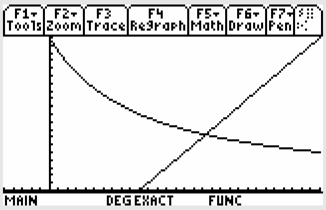
❸ Ce qui est vrai en revanche – mais il ne devrait plus être nécessaire de le répéter ! –, c'est qu'il ne saurait être question, pour le professeur, d'introduire *ex abrupto* la définition précédente. Il convient d'abord de faire *rencontrer à la classe le phénomène de la croissance* comme *explicatif* de certains autres phénomènes regardés comme *à expliquer*. Cette rencontre se fera de préférence de manière *graphique*, exactement comme il en allait dans l'exemple travaillé lors de la séance 7 du Séminaire, dont on a reproduit ci-après les traces écrites figurant dans les notes de ladite séance (notes auxquelles on se reportera pour une information plus complète) :

❶ … Supposons ainsi que nous calculions en prenant pour valeur approchée de $\sqrt{3}$ le décimal 1,7. Il vient : $\sqrt{3} - 1 \approx 0,7$; $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1} \approx \dfrac{2}{2,7} = 0,74074\ldots$ On voit que la seconde valeur est bien meilleure : l'erreur est, dans le premier cas, presque 3,7 fois plus importante que dans le second cas.

❷ L'explication est facile dès qu'on dispose de la notion de *fonction*. Posons

$$f(x) = x - 1 \text{ et } g(x) = \frac{2}{x+1}.$$

On voit que la première valeur approchée de A n'est autre que $f(1,7)$, tandis que la seconde est $g(1,7)$. Or f croît et g décroît dans un intervalle contenant $\sqrt{3}$ et 1,7, ce que confirment les représentations graphiques de f et g ci-après.



Comme $1{,}7 < \sqrt{3}$, on pouvait ainsi *prévoir* que l'on aurait (ainsi qu'on l'a constaté)

$$0{,}7 = f(1{,}7) < f(\sqrt{3}) = A = g(\sqrt{3}) < g(1{,}7) < 0{,}741.$$

❹ Ce n'est qu'après qu'on aura ainsi rencontré *graphiquement* une telle *raison d'être* de la notion de fonction croissante (ou décroissante) qu'on posera le problème de formuler *analytiquement* le phénomène de croissance (et de décroissance) : comment exprimer – « avec des x et des y » – le fait que, par exemple, la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ est représentée par une courbe qui « descend » ?… Ce que dit le programme, c'est que ce problème devra être posé – et résolu !

1.5. On a reproduit ci-après, d'un tenant, les questions soulevées par Margot de la séance 9 à la séance 21.

9. Pour le rapport de SPA [3], doit-on simplement donner le rapport brut de la séance observée ? Ou doit-on rajouter des éléments annexes (progression de la classe, enchaînement des séances suivantes, etc.) ?

10. Pas de question cette semaine.

11. Un élève passe au tableau pour résoudre un exercice de géométrie. Il rédige sa solution, elle est juste, mais il y a plus rapide comme raisonnement. Un élève le fait remarquer oralement. Faut-il que cet autre raisonnement soit apparent au tableau ? Que les élèves en prennent note ?

12. Comment aider les élèves à mieux voir dans l'espace, surtout pour la notion de plan et la recherche de sections planes ?

13. a) Quels sont les différents critères que l'on doit considérer dans la gestion de la classe ?

b) Que doit-on mettre dans l'analyse de la théorie ?

14. Dans le chapitre *Repérage dans le plan,* il est conseillé d'effectuer des repérages dans un tableur. Comment créer une AER pour le repérage dans un tableur ? Quel peut être son intérêt mathématique ?

15. a) Fréquemment des élèves de ma classe égarent leur livre. Le temps qu'ils le retrouvent, je leur donne quelques photocopies du livre pour qu'ils puissent faire les exercices. Mais une telle technique ne pousse pas les élèves à plus de précaution envers leur livre et n'accélère pas la recherche du livre ou la démarche au CDI pour en acquérir un autre (souvent en le payant). Que faire pour motiver le bon

[3] Chaque élève professeur effectue un *stage de pratique accompagnée* (SPA), en collège pour les élèves professeurs effectuant leur stage en responsabilité en lycée, et inversement.

entretien du livre et son importance ? Les photocopies peuvent pallier un moment l'absence du livre mais ne peuvent pas le remplacer.

b) Je me suis aperçue qu'un élève ne note pas la correction des exercices ou des activités lorsqu'il ne comprend pas ses erreurs. Il pose parfois des questions pour plus d'explications, mais ce n'est pas toujours le cas. Je lui ai expliqué qu'il faut noter les corrections des exercices pour pouvoir les refaire et me montrer en AI ou à la fin des cours les endroits incompris. Je comprends son raisonnement et sa démarche intellectuelle. Je lui demande souvent s'il a compris. Mais comment le motiver à corriger ses erreurs par lui-même en écoutant la correction collective et en posant plus de questions ?

16. Au sujet des coordonnées d'un vecteur, la donnée en ligne $\vec{u}\ (a\ ;\ b)$ et la donnée en colonne $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ apparaissent dans divers documents. Quelle est la « bonne » écriture ?

17. Quelles sont les démonstrations de théorèmes exigibles au programme de 2de ?

18. La notion d'équation de droite n'est plus au programme de 3^{e}. Mon PCP m'a dit que, en 2de, il faut parler d'équation réduite et d'équation cartésienne d'une droite. L'équation cartésienne d'une droite, utile pour la résolution de systèmes, n'est plus au programme. Peut-on quand même introduire la définition d'équation cartésienne d'une droite même si elle n'est plus au programme du secondaire ?

19. Le scénario que l'on doit produire dans le mémoire de TER peut-il ou doit-il tenir compte de la réaction des élèves ?

20. Des grèves s'annoncent et la fin de l'année approche. Comment gérer la progression et le contenu des séances lorsque la quantité des élèves présents varie ?

21. Au sujet des fonctions de référence en 2de, les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont étudiées. Pourquoi les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^3$ ne sont plus considérées comme fonctions de référence alors qu'elles interviennent à de nombreux moments ?

Hormis en ce qui concerne la dixième séance (le 23 novembre), Margot a posé une question chaque semaine au moins [4]. Quelques-unes de ces questions – la 9^{e}, les 13es et la 19^{e} – se réfèrent aux travaux demandés aux élèves professeurs, et nous ne les commenterons pas davantage ici. D'autres questions ont davantage trait, soit à l'organisation didactique, soit, plus précisément, à la gestion de la classe. Ainsi en va-t-il des questions 11, 15 et 20. Les autres questions (12, 14, 16, 17, 18, 21) se réfèrent à des contenus mathématiques. Ce qui est apparent, ici comme dans les questions précédemment examinées, c'est que Margot a une

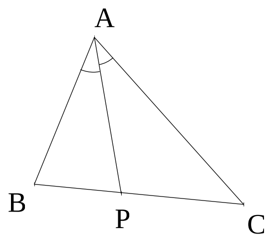
---

[4] Il existe un décalage entre la numérotation des questions et celle des séances du séminaire : le mardi 7 décembre, le séminaire n'a pu se tenir mais les élèves professeurs ont pu tout de même formuler des questions. À partir de la séance 12, tenue le mardi 14 décembre, donc, les questions rédigées lors de la séance n sont les (n+1)-ièmes de l'année : les 13es questions ont ainsi été posées lors de la séance 12, etc.

attitude distante et, en vérité, quelque peu conservatrice vis-à-vis des contenus à enseigner. Ainsi, dans la question 21, elle proteste contre le fait que les fonctions racine carrée, valeur absolue et cube « ne sont plus considérées comme fonctions de référence ». Ce côté « vieux briscard » est apparent encore, explicitement, dans la question 18 où, bien que prévenue, Margot semble vouloir faire accréditer la suggestion de son PCP de traiter et la notion d'équation réduite, et la notion d'équation cartésienne d'une droite, cette dernière, quoique hors programme, étant jugée « utile pour la résolution de systèmes ». Le même climat de contestation de ce qu'il y a de neuf dans le programme de seconde entré en vigueur en septembre 2000 apparaît encore dans la question 14, à propos du repérage dans le plan, thème qui, dans ce programme, prend une place et des formes inaccoutumées, bien propres à décontenancer les professeurs les plus attachés à l'ordre ancien. Or, d'une manière un peu oblique et indirecte – à travers la référence à une AER envisageable – Margot fait chorus, en glissant *in fine* une remarque dubitative sur « l'intérêt mathématique » d'un travail sur le thème d'études mis ainsi en cause ! La question 12, quant à elle, marque une autre forme d'évitement : s'il est vrai que le professeur doit aider les élèves à comprendre et à apprendre, on voit ici que le point de difficulté objectif, celui des configurations de l'espace, est rapporté à la fragile subjectivité des élèves : selon un mécanisme constant, la problématicité du savoir mathématique tend à être niée, tandis qu'est mise en avant la difficulté des élèves à s'en rendre maîtres. La question 16, relative à la notation des coordonnées d'un vecteur, est certes justifiée ; mais il est possible qu'il faille aussi y voir, au-delà du souci légitime de ne pas méconnaître les usages prévalant au lycée, un signe qui renvoie à la situation de professeur débutant, jusque-là sujet de l'enseignement supérieur, et qui doit maintenant s'assujettir, bon gré mal gré, à l'enseignement secondaire. La question 17, enfin, reprend le thème obsédant du démontrable – admis ou démontré – et de ce que on n'envisage pas même de démontrer. La « crise » ouverte très tôt, dès la deuxième semaine de l'année, n'a pas encore trouvé sa solution…

1.6. La question 22 est la suivante :

> 22. Soit ABC un triangle quelconque.
>
> Notons P le point d'intersection de la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ avec [BC].
>
> Comment prouver que $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$?



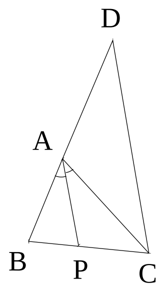
Cette fois, Margot aura droit à une réponse en bonne et due forme dans le cadre du séminaire du mardi matin – à l'occasion de la séance du 5 avril 2005. Le contraste est vif entre le souci un peu obsessionnel de savoir ce qu'il faut démontrer, que Margot n'a cessé d'exprimer (et, sans doute, de ruminer), et le traitement qui est apporté à sa demande, tout entier articulé à l'idée de production d'une démonstration, et cela par le biais de la notion – introduite dans le séminaire dès la séance 2 – de question cruciale. Alors que la formation touche à sa fin, le décalage mérite d'être souligné : Margot cherche partout une démonstration et, en dernier ressort, s'adresse au responsable du séminaire. Celui-ci répond simplement qu'une démonstration, ou plutôt une déduction, est à portée de main dès lors qu'on veut bien faire un usage cohérent et persévérant de la notion de question cruciale – que Margot, à l'instar d'un certain nombre de ses camarades de promotion, a pu ignorer jusque-là en la tenant pour inutile. La réponse est la suivante [5] :

1. Comment déduire l'égalité indiquée dans la TGD ? Ou plutôt : comment découvrir une déduction de cette égalité dans la TGD ? Telle est la véritable question à examiner.

2. L'idée de *question cruciale* est ici la notion clé. Comment établir l'égalité de deux rapports de longueurs ?

① Une réponse possible est la suivante : en faisant apparaître ces rapports de longueurs comme les rapports dont parle le théorème de Thalès.

② Ici, le rapport $\frac{PB}{PC}$ se prête à une telle opération ; mais il n'en va pas de même du rapport $\frac{AB}{AC}$. Comment faire apparaître ce rapport sous une forme idoine ? Soit *d* la parallèle à (AP) passant par C : *d* coupe (AB) en D.



On est sûr – d'après le théorème de Thalès – que l'on a $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AD}$. Il reste alors à établir que AD = AC.

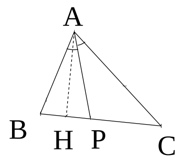
③ Comment faire cela ? En montrant que le triangle ACD est isocèle en A, et donc en montrant l'égalité d'angles $\widehat{ACD} = \widehat{ADC}$. Comment montrer cette égalité d'angles ? La réponse vient rapidement : le parallélisme de (AP) et (CD) permet de conclure que $\widehat{ACD} = \widehat{PAC}$ et que $\widehat{ADC} = \widehat{BAP}$. Comme, par hypothèse, on a $\widehat{BAP} = \widehat{PAC}$, l'affaire est faite !

[5] Le sigle TGD employé dans la réponse ci-après désigne la *théorie géométrique disponible*, celle dans laquelle on se propose de démontrer la propriété considérée.

3. Une autre réponse classique à la question « Comment établir l'égalité de deux rapports de longueurs ? » fait intervenir les aires : on cherche à interpréter les rapports de *longueurs* comme des rapports d'*aires*.

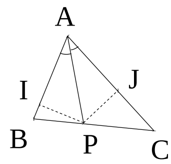
① Le rapport $\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PC}}$ s'interprète immédiatement comme le rapport des aires des triangles ABP et PAC, comme le suggère le figure ci-contre : on a en effet

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{PB} \times \mathrm{AH}}{\mathrm{PC} \times \mathrm{AH}} = \frac{\mathcal{A}(\mathrm{ABP})}{\mathcal{A}(\mathrm{PAC})}.$$



② Comment interpréter le rapport $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$? Introduisons les projetés orthogonaux I et J et P sur (AB) et (AC). On a

$$\mathcal{A}(\mathrm{ABP}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{AB} \times \mathrm{PI},\ \mathcal{A}(\mathrm{PAC}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{AC} \times \mathrm{PJ}$$



en sorte que $\frac{\mathcal{A}(\mathrm{ABP})}{\mathcal{A}(\mathrm{PAC})} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} \times \frac{\mathrm{PI}}{\mathrm{PJ}}$; et l'affaire est faite en observant alors que, P étant sur la bissectrice de $\widehat{\mathrm{BAC}}$, on a PI = PJ.

Lors de cette 23$^{\mathrm{e}}$ séance, Margot ne formulera pas de question. Lors de la 24$^{\mathrm{e}}$ et dernière séance du séminaire, elle soulève encore une question – bien de circonstance : comment élaborer un devoir « commun » en fin d'année ? Mais celle-ci n'aura pas d'écho : la formation s'arrête là.

2. Mathématiques à enseigner, mathématiques pour l'enseignant

2.1. L'examen des questions formulées par Margot montre ce que montrerait l'ensemble des questions de n'importe quel stagiaire, ou presque : dans les mathématiques à enseigner, certains points restent obscurs pour nombre de lauréats du CAPES ou de l'agrégation. Ces connaissances mathématiques dont les questions soulevées viennent régulièrement montrer la non-disponibilité constituent ce qu'on appellera « les mathématiques *pour l'enseignant* », c'est-à-dire ces mathématiques qu'un professeur doit connaître pour s'engager dans l'enseignement de ce que le programme prescrit – « les mathématiques *à enseigner* » –, mais non pas encore pour concevoir et réaliser un tel enseignement. On verra plus loin que ces « mathématiques *pour l'enseignement* » commencent à peu près lorsque, dans le vocabulaire de la formation donnée aux élèves professeurs, ceux-ci commencent à s'interroger sur les *raisons d'être* de telle notion, de telle théorie, de tel théorème. Dans ce qui suit, nous examinerons d'abord les principaux points d'achoppement signalés par les élèves professeurs au fil des semaines. Le jour même de la rentrée, c'est-à-dire avant la première séance du séminaire du mardi matin, les professeurs stagiaires sont invités à formuler par écrit une ou plusieurs questions, alors qu'ils n'ont pas encore rencontré leurs élèves. Généralement, leurs soucis premiers ne concernent pas tel ou tel point des mathématiques à enseigner. De fait, une question et une seule, parmi les 28 formulées ce jour-là, a eu trait à une difficulté mathématique, ou plutôt didactico-mathématique : « Comment, demande en effet un élève professeur, introduire la notion d'angles alternes-internes ? » Nous verrons le destin qu'aura cette interrogation au cours du séminaire. Lors de la première séance, 72 questions seront posées, dont quelques-unes seulement ont à voir avec les mathématiques à enseigner. Plusieurs témoignent d'une interrogation à propos de certains contenus d'enseignement ou du traitement adéquat de ces contenus. On y retrouve bien sûr la première question de Margot, dans laquelle elle envisage un premier chapitre surabondant. On rencontre aussi, émanant d'un des ses camarades de promotion responsable d'une 4e, ce qui sera, on le sait, un souci récurrent pour Margot, celui de la justification des résultats à utiliser [6] :

> Dans quelle mesure devons-nous justifier les résultats importants ? Doit-il s'agir d'une connaissance mathématique solide ou bien les exemples vus en activité permettent-ils d'établir ces résultats en généralisant ? (Je pense précisément à la multiplication des relatifs.) (2004-2005, 4e, semaine 1)

Une autre professeure, chargée, elle, d'une classe de seconde, fait écho à ce souci en écrivant :

> Dans le chapitre « Triangles isométriques, triangles semblables », doit-on démontrer les cas d'isométrie et les cas de similitude ? (2004-2005, 2de, semaine 1)

Un professeur stagiaire s'interroge autrement, en manifestant un engagement personnel fort et, à vrai dire, d'une intensité rare, quant au point de vue à adopter, en 4e, en matière de géométrie dans l'espace :

> Je commence par la géométrie dans l'espace. Je suis écartelé entre 1) aborder (par des exemples lumineux) la notion générale de cône pour souligner les points communs entre cône et pyramide, et 2), traiter les objets « bornés » de manière nettement différenciée dès l'abord. J'opte pour la première solution, mais je me sens mal à l'aise vis-à-vis du programme *stricto sensu*. (2004-2005, 4e, semaine 1)

Alors que, dans les questions relatives au problème de la démonstration, ce qui était en cause, derrière une décision didactique évoquée, touchait aux mathématiques pour l'enseignant

---

[6] D'une manière générale, nous ferons désormais suivre les questions présentées de l'information codée suivante : année de la formation, classe en responsabilité, numéro de la semaine dans l'année.

(comment démontrer les résultats concernant la multiplication des nombres relatifs, comment démontrer les cas d'isométrie, les cas de similitude), nous touchons ici aux mathématiques pour l'enseignement : y a-t-il des connaissances mathématiques qui permettraient d'éclairer l'alternative invoquée à propos de l'enseignement de la géométrie dans l'espace en 4^{e} ? L'examen des notes du séminaire de l'année indique que la question sera laissée – dans ce cadre – sans réponse. Une dernière question nous ramène aux mathématiques pour l'enseignant, entendues en un sens large. Un professeur stagiaire écrit en l'espèce :

> Dans le document d'accompagnement du programme de 4^{e}, toute une partie est sur les ordinateurs dont une partie sur le *calcul formel*. Qu'y a-t-il comme logiciel que l'on puisse utiliser afin de traiter cette partie avec nos élèves ? (2004-2005, 4^{e}, semaine 1)

Ici, la référence à un logiciel paraît ambivalente. Ce logiciel espéré semble en effet être l'outil permettant au professeur, tout à la fois, de se mettre au courant de certains contenus d'enseignement qu'il ignore et de ne pas soulever plus avant la question de ses besoins mathématiques en la matière – qui seraient idéalement résolus par le logiciel. Manière de reconnaître le problème et, d'un même mouvement, de le déclarer résolu !

2.2. L'interrogation sur ce qu'il faut démontrer et sur ce qu'on peut admettre n'est pas présente seulement à travers la question de Margot ; un autre élève professeur demande sans détour : « Doit-on démontrer toutes les propriétés du cours ou peut-on en admettre certaines ? » L'interrogation porte d'abord sur les mathématiques à enseigner, même si, chaque fois que l'on donne à cette question une réponse positive, on se trouve renvoyé au niveau des mathématiques pour l'enseignant – car comment, alors, démontrer ceci ou cela ? Ce niveau est également représenté par les questions portant sur le vocabulaire et les notations à employer : les mathématiques pour l'enseignant ne sont pas *a priori* tout à fait identiques aux mathématiques pour l'étudiant, qu'il s'agit maintenant de dépasser rapidement. Ainsi en va-t-il avec les deux questions suivantes, formulées par la même personne :

> 1. Peut-on utiliser des abréviations ou des notations mathématiques dans les démonstrations, par exemple I = m[AB] pour « I est le milieu du segment [AB] », M = [AB]$\cap$(MO) pour « M est le point d'intersection du segment [AB] et de la droite (MO) » ? (2004-2005, 2de, semaine 2)
>
> 2. Mon PCP m'a dit qu'on ne parlait plus d'« hypothèses » mais de « données de l'énoncé ». Qu'en est-il ? (2004-2005, 2de, semaine 2)

La seconde de ces questions appelle une remarque sur le problème de la genèse des mathématiques pour l'enseignant : on a là en effet un cas typique où la profession engendre, de manière quasi spontanée, un « savoir épimathématique » qui, on le voit, reflue presque immédiatement sur les entrants dans la profession : appeler hypothèse ce qu'on appelle traditionnellement ainsi en mathématiques serait un abus de langage, d'autant plus malheureux que les physiciens – entendez les professeurs de sciences physiques – usent du mot d'hypothèse dans un sens différent, situation qui mettrait les élèves dans l'embarras. Dans l'immédiat, la question qui se fait l'écho de cette analyse ne recevra pas de réponse dans le séminaire. Posée le mardi 14 septembre 2004, elle n'y refera surface que beaucoup plus tard, lors de la 16e séance, le mardi 25 janvier 2005, couplée avec une autre question formulée peu de temps auparavant :

1. Mon PCP m'a dit qu'on ne parlait plus d'« hypothèses » mais de « données de l'énoncé ». Qu'en est-il ? (2004-2005, 2de, semaine 2)

2. Vous avez énoncé rapidement à l'oral récemment la terminologie *hypothèses* / *données*. Pouvez-vous y revenir ? Merci. (2004-2005, 4e, semaine 14)

La seconde de ces questions atteste que le commentaire oral dû au responsable du séminaire a rencontré la culture professorale établie, aux injonctions de laquelle les jeunes professeurs semblent souvent très empressés de répondre. Ce formateur décide alors de faire pièce à ce qu'il regarde comme une élaboration demi-savante qui, motivée par un désir apparent de paix entre les disciplines (dont, en passant, elle renforce le quant-à-soi), n'en est pas moins contestable au plan épistémologique. Dans la première partie de la très longue réponse apportée, le formateur examine d'abord le lexique utilisé dans les textes officiels.

1. Le mot de « données » au sens évoqué n'apparaît dans l'ensemble des programmes du collège que dans une citation (du CNP, le conseil national des programmes) figurant dans le document d'accompagnement du programme de 6e :

« La convergence du français et des mathématiques devient déterminante lorsqu'il s'agit de comprendre un énoncé ou de poser en termes mathématiques un problème de la vie courante, en explicitant toutes les données »

2. En revanche, le mot « hypothèse » y apparaît central.

① Voici une première citation, qui suit de près la citation précédente :

Dans une géométrie d'observation, les figures ne sont pas porteuses d'informations clairement annoncées et les observations résultent de la perception visuelle. Dans une géométrie déductive, c'est à partir d'informations explicitées (les hypothèses) et des propriétés apprises qu'il s'agit de prouver des conséquences qui n'étaient pas annoncées au départ. En classe de 6e, des activités géométriques appropriées peuvent préparer le raisonnement déductif, notamment en amenant les élèves à prendre en compte les mêmes informations sous diverses formes.

② Le document d'accompagnement du programme du cycle central indique de même :

En classe de 4e, on demande de façon plus systématique de repérer et de mettre en œuvre les théorèmes appropriés. Le recours, si besoin est, à plusieurs pas de démonstration amène à comprendre le changement de statut d'une assertion au fil d'une démonstration : un résultat intermédiaire est une conclusion dans un pas de démonstration et une hypothèse dans un pas ultérieur.

③ À propos des problèmes de construction, le même document précise ceci :

… l'examen d'une figure géométrique peut conduire à un inventaire (non nécessairement exhaustif) de ses propriétés, puis à un choix de certaines d'entre elles en vue d'une construction. Ces propriétés retenues jouent alors le rôle d'hypothèses, les autres de conclusions. Une telle démarche contribue à la compréhension du statut d'un énoncé dans une démonstration.

Une seconde partie de la réponse élargit alors l'enquête au plus culturel et historique.

3. L'emploi de « données » en lieu et place du vocable plus traditionnel d'*hypothèses* est sans doute mû, chez certains professeurs, par le souci d'user d'un terme plus familier aux élèves, avec l'avantage supplémentaire qu'un verbe associé est disponible : les données d'un problème sont constituées de… ce qui est *donné* par l'énoncé. Dans le cas d'*hypothèse*, on doit parler de ce qui est « posé » ou plutôt *supposé*, c'est-à-dire de ce qui est… « mis, placé en dessous », ce qui traduit le mot d'origine grecque « hypothèse » (le latin « *supponere*, précise le *Dictionnaire historique de la langue française*, est formé de *sub* marquant la position inférieure (…) et de *ponere* "poser, placer" », et démarque ainsi le grec *hupothesis*.)

① Les deux mots peuvent, dans une certaine mesure, être regardés comme interchangeables, même si l'on peut y voir une minuscule différence. Une fois qu'une hypothèse a été formulée, le contenu de cette hypothèse fait partie des « données » du problème à étudier. Ce que l'on regarde comme donné dans le problème à résoudre n'est en général que supposé par rapport à un horizon plus large : le « donné » n'est souvent qu'un « prêté » ! Que l'on songe ici à la technique du raisonnement par l'absurde, où l'on fait une hypothèse pour pouvoir la rejeter…

② L'emploi de la notion d'hypothèse est central depuis l'antiquité grecque. Sur ce sujet, on citera un peu longuement un passage de l'introduction – due à Maurice Caveing – de l'édition des *Éléments* d'Euclide parue aux PUF (1990, p. 141-142) :

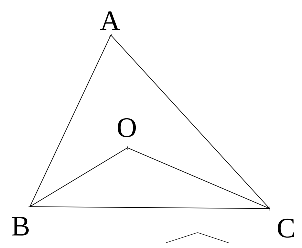
Le rôle des hypothèses dans le raisonnement mathématique a été perçu très tôt. Nous avons déjà fait allusion à cette possibilité qu'offre une chaîne démonstrative, dont les éléments sont des théorèmes, d'y introduire à tout moment une hypothèse à partir de laquelle les théorèmes déjà démontrés permettent d'obtenir une déduction de ses conséquences. De fait, l'hypothèse se rencontre partout, depuis le corps des principes de la science, où sa forme la plus apparente est – nous le savons – le postulat, jusqu'au cas de figure ou aux données particulières d'un problème, en passant par l'énoncé même de certains théorèmes. Il est de plus toujours possible dans la recherche d'examiner, dans le cas des thèses démontrées du système, les conséquences d'une hypothèse quelconque et de construire ainsi des fragments de déduction à valeur exploratoire. Cette démarche de la pensée, bien connue depuis l'expansion moderne de la méthode expérimentale, n'est pas moins pertinente en mathématiques. Enfin, il est possible de remplacer une proposition par une autre en prouvant leur équivalence, c'est-à-dire en déduisant l'une de l'autre prise pour hypothèse et réciproquement.

On en arrive alors au cœur de la réponse. L'auteur s'efforce de restituer une profondeur de champ qui, pour avoir disparu largement de la culture des professeurs de mathématiques, n'en gagne pas moins à être retrouvée, notamment parce qu'elle permet de renouer les liens entre deux usages tenus à tort pour indépendants (sinon pour antinomiques) de la notion d'hypothèse.

4. On saisit, à travers la description précédente, la souplesse d'emploi du mot ! En mathématiques comme dans les sciences expérimentales, le mot *hypothèse* désigne une propriété p « prêtée » à un « objet » (à un système). Le « travail » à partir de cette hypothèse comporte deux étapes.

① La première étape consiste simplement à *déduire* de cette propriété hypothétique p un certain nombre de conséquences q. C'est à cela que s'arrête en général le travail *mathématique* au collège. En cette première étape, le travail à accomplir – passer de p à q –, tout se passe en effet comme si le contenu de la proposition p était un *donné*. Mais il s'agit d'un point de vue particulier, incomplet, sur le travail global dans lequel ce travail partiel prend place.

❶ Considérons l'hypothèse suivante : on suppose que, dans un certain triangle ABC, les bissectrices intérieures se coupent en O à l'intérieur du triangle et qu'on a $\widehat{\text{BOC}} = 123°$. Que peut-on dire alors de l'angle en A du triangle ABC ?



❷ On peut en fait *déduire de l'hypothèse* faite sur $\widehat{\text{BOC}}$ que l'angle $\widehat{\text{A}} = \widehat{\text{BAC}}$ vaut alors 66° : des considérations élémentaires montrent en effet qu'on a $\frac{1}{2}\widehat{\text{B}} + \frac{1}{2}\widehat{\text{C}} = 180° - 123° = 57°$ et donc que $\widehat{\text{A}} = 180° - (\widehat{\text{B}} + \widehat{\text{C}}) = 180° - 2 \times 57° = 66°$.

❸ Plus généralement, si l'on a $\widehat{\text{BOC}} = x°$, et si $\widehat{\text{A}} = y°$, il vient : $y = 180 - 2 \times (180 - x) = 2x - 180 = 2(x - 90)$. On retrouve ici que, si $x = 123$, on a $y = 66$. Mais on voit plus généralement que l'hypothèse selon laquelle on aurait dans un triangle ABC un angle $\widehat{\text{BOC}}$ *droit* ou (à plus forte raison) *aigu* ne saurait se vérifier et devrait être rejetée !

❹ Ainsi, l'hypothèse que $\widehat{\mathrm{BOC}}$ = 123º peut être regardée comme une donnée de fait, tandis que l'hypothèse que l'on aurait $\widehat{\mathrm{BOC}}$ = 83º (par exemple) ne le peut pas…

② La deuxième étape du travail à partir d'une hypothèse est, certes, trop souvent absente de la classe de mathématiques. Le *Larousse du bac* déjà mentionné la schématise ainsi :

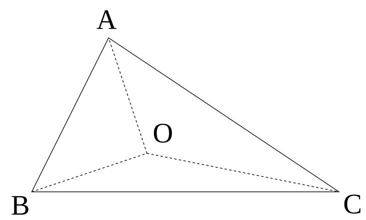
Selon Claude Bernard (1813-1878), le savant commence par constater un fait ; puis il en tire une hypothèse générale, dont il déduit des conséquences logiques ; il fait alors une expérience pour vérifier que ces conséquences se produisent.

❶ On illustrera ce schéma par un exemple simple, celui de l'étude de la somme des angles d'un triangle (que l'on conduit en 5e). Considérons pour cela les deux propriétés suivantes relatives à ces objets (ou systèmes) géométriques que sont les triangles :

θ_1. La somme des angles d'un triangle est la même pour tout triangle.

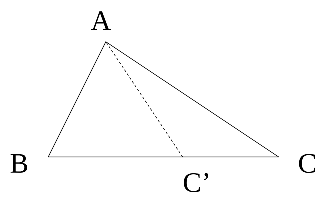
θ_2. La somme des angles de tout triangle est un angle plat.

À l'évidence, l'assertion θ_2 implique l'assertion θ_1. Inversement, il est facile de *déduire* θ_2 de θ_1. Supposons en effet que la somme des angles de *tout* triangle soit de *a* degrés. Soit alors un triangle ABC et soit O un point intérieur à ABC.

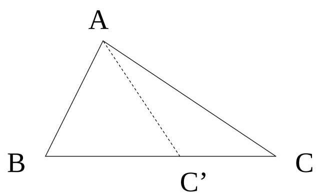


La somme des angles des triangles AOB, BOC, COA vaut 3*a* degrés. Par ailleurs cette somme vaut celle des angles de ABC, soit *a* degrés, augmentée des angles $\widehat{\mathrm{AOB}}$, $\widehat{\mathrm{BOC}}$, $\widehat{\mathrm{COA}}$, dont la somme est de 360 degrés. On a donc 3*a* = *a* + 360, soit *a* = 180.

❷ On peut établir ce résultat plus simplement encore. Soit C' un point de]BC[.La somme des angles des triangles AC'B et AC'B, soit 2*a* degrés, est égale à la somme des angles du triangle ABC, soit *a* degrés, augmentée des angles $\widehat{\mathrm{AC'B}}$ et $\widehat{\mathrm{AC'C}}$, soit 180 degrés. On a ainsi 2*a* = *a*+180, et donc *a* = 180.



❸ On peut alors *soumettre à l'expérience* l'assertion θ_1 en réalisant l'expérience graphique suivante :



on choisit un point C’ sur]BC[; on vérifie que, lorsqu’on passe de C à C’, la diminution de α degrés de l’angle $\widehat{\text{BAC}}$, qui devient $\widehat{\text{BAC'}}$, est égale à l’augmentation de β degrés de l’angle $\widehat{\text{ACB}}$, qui devient $\widehat{\text{AC'B}}$.

❹ Dans ce qui précède, donc, on considère l’*hypothèse* selon laquelle, dans un triangle, la somme des angles est un angle plat ; on en *déduit*, à titre de cas particulier, que la somme des angles d’un triangle est *la même* pour tout triangle ; on vérifie par l’expérience cette conséquence logique de l’hypothèse étudiée. Bien entendu, si le fait que l’expérience conduise à rejeter telle conséquence q de l’hypothèse p impose de rejeter p, en revanche la « vérification » expérimentale de q n’assure pas *a priori* que p soit vraie. Le cas rappelé ci-dessus est typique de situations où, en fait, on a l’équivalence $p \Leftrightarrow q$: l’énoncé q est simplement une « re-formulation » de p, qu’il est par exemple *plus facile* de soumettre à une vérification expérimentale.

La dernière partie de la réponse livre la conclusion qui rétablit le concept d’hypothèse dans ses droits, y compris dans la classe de mathématiques.

5. Le vocable *hypothèse* est sans doute un meilleur outil du travail mathématique, en classe comme ailleurs.

① Les hypothèses, ingrédient constant du travail mathématique, ne sauraient en tout contexte entrer dans la catégorie des « données ». En outre, dire que telle propriété est « donnée » risque de conduire à oublier son *statut* fréquemment « hypothétique », dès lors qu’elle n’est pas un théorème mais une (simple) supposition.

② Notons que, lorsqu’on construit un *modèle mathématique* d’un certain système, on assigne à ce système des propriétés – énoncées par les *axiomes* du modèle – qui ont en général un caractère hypothétique. Les conséquences de ces axiomes valent alors pour le système si celui-ci satisfait lesdites hypothèses ; sinon, il n’est pas possible de conclure sans une étude nouvelle. Ce qui est une *donnée* s’agissant du *modèle* n’est ainsi qu’une hypothèse s’agissant du *système* modélisé. Du point de vue de la vigilance épistémologique, il est judicieux de regarder tout donné, et toute « donnée », comme une hypothèse…

2.3. Le message de ce long développement est sans doute en grande partie celui-ci : pour l’enseignant, se constituer une culture mathématique (et, plus largement, une culture scientifique) exige d’intégrer des apports que l’on ne trouve pas spontanément dans l’exercice « sec » du métier. Il faut sortir des contraintes spécifiques à l’École, à sa pédagogie, aux disciplines qui y sont établies, pour prendre appui sur des conditions et contraintes de niveau supérieur : ce qui apparaît différent dans le petit monde des enseignements scolaires – les hypothèses des mathématiciens et les hypothèses des physiciens – retrouve son unité quand on resitue l’activité mathématique dans la globalité du fonctionnement social des savoirs et de la création de savoir. Mais d’autres questions posées lors de la deuxième séance du séminaire se situent plus près des mathématiques à enseigner, même si les réponses qu’il conviendrait de leur apporter supposent que l’on passe au niveau des mathématiques pour l’enseignant, voire des mathématiques pour l’enseignement. « Comment donner du sens, interroge ainsi un professeur stagiaire en charge d’une seconde, aux nombres et aux intervalles afin de préparer les élèves aux fonctions, aux ensembles, etc. ? » La question est motivée par le besoin le plus prosaïque qui soit : « traiter » en classe certains items figurant dans le programme. Elle renverrait évidemment à beaucoup plus : y pointent déjà l’idée de raison d’être d’une notion mathématique ainsi qu’un questionnement sur la manière d’organiser la rencontre des élèves avec ces raisons d’être. En d’autres cas, pourtant, les mathématiques à enseigner semblent énigmatiques pour l’élève professeur. Nous avons vu Margot, ainsi, envisager un programme de travail pour sa classe mêlant sans façon des thèmes d’étude multiples et divers ; dans la même veine, un de ses camarades de promotion témoigne plus nettement encore d’une confusion entre plusieurs de ces thèmes lorsqu’il écrit :

> Comment faire des liens entre divers types de tâches ? Par exemple entre nombres premiers et ordre de grandeur en utilisant l’écriture scientifique ? (2004-2005, 2^{de}, semaine 2)

L’auteur de la question est un jeune agrégé qui soutiendra une thèse d’Université en mathématiques au cours même de l’année de formation : sa culture mathématique est donc, en principe, substantielle. Mais, à l’évidence, la culture mathématique pour l’enseignant et plus encore pour l’enseignement, qui devrait faire la spécificité de la profession, lui est encore largement étrangère ! La confusion à laquelle il succombe est, il est vrai, poussée en avant par le texte même du programme – reproduit ci-après –, lequel rapproche, en les distinguant de manière insuffisamment explicite, des thèmes d’étude entre lesquels un lecteur mal préparé peut, à cause de leur proximité textuelle, imaginer des liens plus importants qu’ils ne le sont en réalité.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Nature et écriture des nombres. Notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Représentation des nombres dans une calculatrice. Nombres premiers.	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. Interpréter un résultat donné par une calculatrice. Organiser un calcul à la main ou à la machine. Décomposer un entier en produit de nombres premiers.	On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite. On travaillera sur les ordres de grandeur. On donnera un ou deux exemples de limites d'utilisation d'une calculatrice. On fera quelques manipulations de nombres en écriture scientifique. On se limitera à des exemples (du type 56×67) pour lesquels la connaissance des tables de multiplication suffit.

On aura noté, en effet, que la rubrique des contenus énonce presque d'un même mouvement les deux thèmes de « la représentation des nombres dans une calculatrice » et des « nombres premiers », rapprochement formel à quoi correspond, dans la rubrique des capacités attendues, le rapprochement, d'une part, de types de tâches relatifs au bon usage de la calculatrice, d'autre part, d'un type de tâches des plus classiques, la décomposition d'un entier en produit de nombres premiers. Quant à la rubrique des commentaires, elle enchaîne des considérations sur les notions et types de tâches ainsi rapprochés, entre lesquels l'auteur de la question cherche en conséquence à établir des liens qu'il doit postuler faute de les percevoir nettement – d'où sa question. On voit ainsi combien peut être incertain l'abord d'éléments mathématiques à enseigner dès lors que, en eux-mêmes tout classiques sans doute, ces éléments occupent une place minorée, voire introuvable, dans la culture mathématique de qui est fraîchement issu des études universitaires. On retrouvera encore et encore ce sentiment de fragilité des nouveaux venus dans la profession face aux mathématiques qui en sont le pain quotidien.

2.4. La troisième séance du séminaire du mardi matin apporte d'abord son lot de questions sur le problème de la démonstration.

1. Quelles démonstrations faut-il mettre dans une leçon ? Faut-il démontrer tous les résultats notés dans la leçon ou traiter seulement ceux qui fournissent des méthodes qui pourront être réinvesties dans la suite ? (2004-2005, 2de, semaine 3)

2. Dans un chapitre donné, il paraît illusoire de démontrer toutes les propriétés. Est-il envisageable de ne démontrer aucune des propriétés d'un chapitre ? (2004-2005, 4e, semaine 3)

Si la première question est mue par des raisons didactiques évidentes, la seconde explore de manière étonnante l'univers des possibles, en faisant droit à un cas de figure dont on peut penser qu'il exprime surtout la déstabilisation éprouvée par l'auteur de la question face à un enseignement des mathématiques qu'il a pu percevoir comme fortement démathématisé. Bien entendu, il faut voir aussi, en ces deux questions, l'effet partiel de la pression temporelle sur les activités de la classe, qui pousse le professeur à élaguer la matière à étudier. Mais la perturbation qu'on vient d'évoquer est trop fréquente pour n'être pas une donnée de base dans l'attitude de ces professeurs débutants face aux situations professionnelles rencontrées. De cela témoigne encore la question suivante, *a priori* toute mathématique :

> Dans certains livres de 2de, il est demandé, pour un nombre donné, de « dire quel est le plus petit ensemble auquel il appartient ». Peut-on vraiment dire que $\mathbb{N}$ est plus petit que $\mathbb{Z}$? Faut-il préciser que $\mathbb{N}$ est plus petit que $\mathbb{Z}$ au sens de l'inclusion ? (2004-2005, 2de, semaine 3)

Ce que cette interrogation porte en elle d'implicite est sans doute que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont des ensembles *équipotents*. Comme on l'a déjà observé ailleurs, un assujettissement mathématique allogène parfaitement légitime – en l'espèce à la théorie de la cardinalité – est aussi convoqué pour, en quelque façon, différer symboliquement l'adhésion franche à la culture de la profession dans laquelle on va entrer. La primo-contestation de l'ordre dans lequel on s'apprête à s'immerger inspire ainsi, au moins pour partie, d'autres questions parcourues de murmures protestataires, comme il en va de la suivante, portant sur un thème mathématique qui a déjà fait parler de lui [7] :

> Le prochain chapitre que je vais être amené à faire est l'ordre dans $\mathbb{R}$; il va falloir que j'introduise la notion d'intervalle. Dans les programmes, il n'y a pas les notions d'intersection et de réunion d'intervalles. Faut-il tout de même en parler par exemple en TD ? (2004-2005, 2de, semaine 3)

Certaines questions, par ailleurs, se situent manifestement au plan des mathématiques pour l'enseignant : en ce cas, il n'y a pas contestation de l'ordre mathématique scolaire que l'on découvre, mais acceptation active, à visée éventuellement méliorative. Ainsi en va-t-il avec la question suivante :

> Existe-t-il une autre raison que l'unicité de la décomposition en facteurs premiers pour justifier le fait d'écarter 1 de la liste des nombres premiers ? (2004-2005, 2de, semaine 3)

---

[7] L'auteur de la question est mal informé : le document d'accompagnement du programme de seconde précise que l'ensemble de définition d'une fonction « sera toujours un intervalle ou la réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ ». Par

En ce cas, au reste, un commentaire oral fait par l'auteur de la question au responsable du séminaire confirme qu'il s'agit d'une interrogation engendrée par la vie mathématique de la classe de seconde concernée – dont certains élèves ont pu ou pourraient s'enquérir des raisons de bannir l'unité de l'ensemble des nombres premiers. Mais il est aussi des questions qui concernent tout bonnement les mathématiques à enseigner. La question peut être directe, dénuée de tout enrobement visant à diminuer la responsabilité du jeune professeur qui la formule, comme il en va avec cette question :

> Dans le programme de 4e, quel est le sens du paragraphe suivant ? « La recherche de l'aire latérale d'un cône de révolution peut être une activité de mise en œuvre de la proportionnalité. On pourra, à l'aide des formules d'aires ou de volumes, étudier les variations d'une grandeur en fonction d'une autre. » (2004-2005, 4e, semaine 3)

Dans ce cas, une longue réponse est apportée dès la séance suivante du séminaire. Selon une organisation classique, la réponse commence d'abord par interroger les textes officiels.

1. Sur le thème *Pyramide et cône de révolution*, le programme de 4e comporte les indications ci-après :

Contenus

Pyramide et cône de révolution

Compétences exigibles

Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution à l'aide de la formule $V = \frac{Bh}{3}$.

Commentaires

L'objectif est toujours d'apprendre à voir dans l'espace et de calculer des longueurs, des aires et des volumes, ce qui implique un large usage des représentations en perspective et la fabrication de patrons. Ces travaux permettront de consolider les images mentales relatives à des situations de parallélisme et d'orthogonalité.

La recherche de l'aire latérale d'un cône de révolution peut être une activité de mise en œuvre de la proportionnalité. On pourra, à l'aide des formules d'aires ou de volumes, étudier les variations d'une grandeur en fonction d'une autre.

2. Le document d'accompagnement du programme du cycle central indique par ailleurs :

En géométrie dans l'espace, les solides permettant une construction à partir de patrons sont introduits avant la sphère. En classe de 4e, on propose ainsi l'étude des pyramides et cônes de révolution, dont le développement sous forme de patron correspond à une mise en œuvre poussée de la proportionnalité (ce n'est donc pas une compétence exigible).

---

ailleurs, ce même document précise que « les symboles $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$, $\varnothing$ et $\{\ldots\}$ seront employés à bon escient et sans excès »…

3. On notera d'abord une distinction importante.

① À la fin de la 4e, les élèves doivent – selon le programme – être capables de calculer le volume d'un cône de révolution dont on connaît (parce qu'elles sont données, ou parce qu'on les a calculées à l'aide d'autres données) l'aire de la base B et la hauteur h. Le *thème* « Pyramide et cône de révolution » participe en cela du *secteur* « Grandeurs et mesures », dans lequel le *Tableau synoptique pour le collège* range, parmi d'autres choses, ceci :

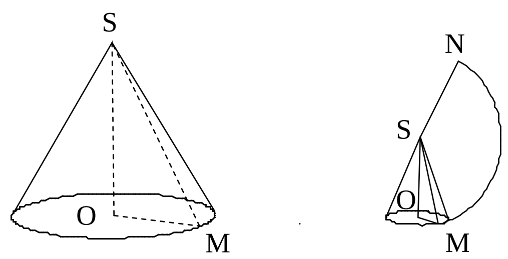
Volume d'une pyramide, volume et aire latérale d'un cône de révolution.

② En dépit de l'indication précédente, la connaissance et la mise en œuvre d'une formule donnant (en fonction de certains paramètres) *l'aire latérale* d'un cône de révolution *n'est pas exigible*. En revanche, ainsi que le précise le commentaire cité plus haut, il est *possible* d'étudier la question de l'aire latérale d'un cône de révolution en tant que problème relevant du *thème* « Applications de la proportionnalité » – thème qui, lui-même, appartient au *secteur* « Fonctions numériques ».

La partie suivante de la réponse modélise mathématiquement la situation évoquée, en introduisant, de façon certes classique mais peut-être peu connue des élèves professeurs, l'angle d'ouverture du cône et l'angle de développement.

4. Quels contenus mathématiques peut *créer* l'étude de l'aire latérale du cône de révolution ?

① La classe devra se rendre capable de décrire, autant que nécessaire, le cône de révolution considéré (voir la figure ci-dessous) : *sommet* S, *base* $\mathcal{D}$(O, R) où R = OM, *hauteur* h = SO, *apothème* a = SM, *angle d'ouverture* $\varphi = 2\widehat{\mathrm{OSM}}$.



② L'étude à mener va exploiter le fait qu'un cône est une *surface développable* (ce qu'on ne saurait bien sûr *démontrer*, et qu'on se contentera donc de *vérifier expérimentalement*), le *développement* du cône étant un *secteur circulaire* $\overset{\frown}{\mathrm{MSN}}$ dont l'angle au sommet $\alpha = \widehat{\mathrm{MSN}}$ est appelé l'*angle de développement* du cône.

③ Les relations essentielles entre ces paramètres sont les suivantes (A est l'aire latérale du cône) :

$$\begin{cases} R^2 + h^2 = a^2 \\ \sin\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{R}{a} \\ A = \pi R a = \dfrac{\alpha}{360}\pi a^2. \end{cases}$$

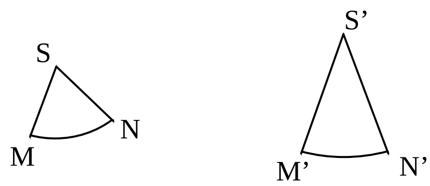
De la dernière égalité on tire les relations :

$$\begin{cases} \alpha = 360\,\dfrac{R}{a} = 360 \sin\dfrac{\varphi}{2} \\ \sin\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\alpha}{360} \end{cases}$$

On a $\alpha = 180$, par exemple, c'est-à-dire que le développement du cône est un demi-disque, si et seulement si $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}$, soit $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

5. On aura noté qu'on a fait usage, ci-dessus, du *sinus* d'un angle, outil qui ne deviendra disponible, formellement, qu'en 3^e^. Il convient ainsi, plus généralement, d'esquisser le scénario d'une étude de l'aire latérale du cône de révolution réalisable en classe de 4^e^. C'est à partir de la considération d'un tel scénario (pour lequel on donne ci-après quelques éléments) et de sa « faisabilité » relative que, en pratique, on décidera d'étudier ou non la question examinée ici.

① Soit un cône de révolution de rayon de base R et d'apothème a, et soit $\alpha = \widehat{MSN}$ l'angle de développement correspondant : on a $A = \frac{\alpha}{360}\pi a^2$. Soit un nombre $k > 0$; on note α' l'angle de développement d'un cône de révolution de *même* rayon de base R et d'apothème $a' = ka$.

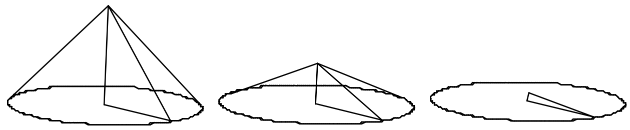


Comme les arcs $\overset{\frown}{MN}$ et $\overset{\frown}{M'N'}$ ont même longueur, on a $\frac{\alpha}{360}(2\pi a) = \frac{\alpha'}{360}(2\pi a')$, soit encore : $\frac{\alpha}{360}\pi a = \frac{\alpha'}{360}\pi a'$. Il vient donc : $A' = \frac{\alpha'}{360}\pi a'^2 = \frac{\alpha}{360}\pi a a' = k\frac{\alpha}{360}\pi a^2 = kA$. Ainsi, pour R fixé, A est proportionnel à a : $A \propto a$.

② Fixons maintenant a, et multiplions R par $k > 0$; cette fois l'angle de développement α est multiplié par k, et il en est donc de même de l'aire du secteur angulaire : $A' = kA$. Pour a fixé, l'aire latérale est donc proportionnelle à R : $A \propto R$.

③ Soit ℓ l'aire latérale d'un cône de révolution de rayon de base 1 et d'apothème 1. L'aire latérale d'un cône de révolution de rayon de base 1 et d'apothème a vaut alors ℓa. L'aire latérale d'un cône de révolution de rayon de base R et d'apothème a vaut ensuite $R(\ell a)$. On a donc : $A = \ell R a$.

④ Il reste à établir que $\ell = \pi$. On pourra se contenter d'observer que, lorsque la hauteur h se rapproche de 0, l'apothème a se rapproche de R, le cône s'aplatissant jusqu'à ne plus se distinguer du disque de rayon R, en sorte que l'aire latérale ℓRa du cône se rapproche de l'aire du disque, πR^2 :



Vient alors le moment essentiel, où l'interrogation du professeur stagiaire qui a motivé ce travail pourra enfin être clarifiée. En vérité, le développement proposé en reste essentiellement à des mathématiques pour l'enseignant. Le responsable du séminaire a sans doute pensé qu'il était bien trop tôt pour aller plus avant dans l'élaboration d'un scénario didactique. La conclusion de sa réponse se contente donc de souligner que ce qui précède s'inscrit, au moins dans le principe, en continuité avec l'enseignement prodigué en 5e déjà.

6. Ce qui précède repose sur deux relations de proportionnalité : celle existant entre *l'angle* θ d'un secteur circulaire et la *longueur de l'arc de cercle* que ce secteur intercepte, d'une part, celle existant entre le même angle θ et l'*aire du secteur* considéré, d'autre part. Ces deux résultats, dont l'étude serait une autre affaire, ont été en principe rencontrés *en 5e*, lors de l'étude de la proportionnalité, ainsi que le suggère le passage suivant du programme de cette classe :

… on pourra envisager des variations :
– de l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme, de celle d'un disque,
– de la longueur d'un arc de cercle, de l'aire d'un secteur circulaire,
– du volume ou de l'aire latérale d'un cylindre ou d'un prisme droit,
en fonction d'une variable de la formule, toute autre variable étant fixée.

L'ensemble des développements précédents apporte, à une question sur les mathématiques *à enseigner*, une réponse en termes de mathématiques *pour l'enseignant* – ce qui peut, au demeurant, susciter des malentendus, certains professeurs stagiaires croyant (ou feignant de croire) qu'il s'agirait là d'un exposé destiné, non pas à eux, mais à leurs propres élèves, exposé qu'ils jugent alors, en tant que tel, bien mal calibré ! Dans la même semaine, une autre question illustre un cas de figure voisin, où les mathématiques à enseigner – il s'agit de la notion d'ordre de grandeur – n'ont certes pas l'opacité de la question précédemment évoquée, mais ont, tant dans la culture mathématique scolaire où les professeurs stagiaires doivent entrer que dans la culture universitaire moyenne dont ils procèdent, une présence floue. À nouveau, le stagiaire assume une ignorance qui, en vérité, transcende l'individu et affecte toute une culture, par une forme de rodomontade subrepticement contestataire :

La notion d'ordre de grandeur, en 2de, me pose problème. Doit-on la limiter aux puissances de 10 ou la pousser vers une comparaison rigoureuse de nombres ? (2004-2005, 2de, semaine 3)

D'autres questions manifestent semblablement des lacunes que révèlent les mathématiques à enseigner mais qu'il faut situer d'abord au plan des mathématiques pour l'enseignant, et cela, non pas au niveau individuel de tel ou tel professeur stagiaire, mais au niveau collectif de la profession. Ainsi en va-t-il, en particulier, avec les deux questions suivantes :

1. J'ai fait une AER sur le théorème de Pythagore (en résumé : démonstration par les aires du théorème de Pythagore). J'ai rencontré plusieurs difficultés surtout avec la notion d'aire. Il me semble que l'activité est restée floue pour la classe. Dois-je y revenir ? (2004-2005, 4^{e}, semaine 3)

2. J'envisage de faire avec ma classe l'étude du thème « Développement décimal illimité périodique ». Quelles sont les raisons d'être ? (2004-2005, 2de, semaine 3)

La première question rabat le problème évoqué sur les élèves, alors que, objectivement, la manipulation de la notion d'aire est, dans la culture actuelle de la profession, mal fondée : comme la notion d'ordre de grandeur, elle reste nimbée de flou. La seconde question propose un cas de figure un peu différent ; les professeurs stagiaires ayant en responsabilité une classe de seconde ont reçu du responsable de la formation le conseil de différer jusqu'à la dernière partie de l'année le traitement de ce que le programme de seconde appelle limitativement « thèmes d'étude », afin de réserver pour les parties strictement obligatoires du programme une durée de travail convenable. L'idée de programmer l'étude du thème indiqué ici – ou de tout autre – semble ainsi, plus généralement, l'expression d'une réactivité quelque peu anarchique devant la diversité et la multiplicité de ce que le programme enjoint ou propose d'étudier. En outre, la mention des raisons d'être, qui propulse la question vers le ciel des mathématiques pour l'enseignement (à l'inverse de ce qui se passait dans la question précédente), semble dissimuler un embarras devant les mathématiques à enseigner, dont, en l'espèce, la réintroduction dans le curriculum secondaire est récente et ne peut être regardée comme appartenant à la culture mathématique moyenne des professeurs anciens ou nouveaux.

2.5. La quatrième semaine n'apporte véritablement que deux questions qui touchent aux mathématiques à enseigner. L'une d'elles a été présentée : elle concerne la résolution d'une équation de la forme $f\left(\frac{x}{y}\right) = \lambda$. Une autre question relève des mathématiques à enseigner davantage que des mathématiques pour l'enseignant ; nous la mentionnons donc pour mémoire :

> Dans les programmes, il est indiqué qu'aucune étude particulière de la valeur absolue n'est demandée et que cette notation sera présentée essentiellement pour exprimer la distance entre deux nombres. Aussi faut-il donner aux élèves des exercices du style $|x - 3| = 5$ ou $2 \leq |x - 3| \leq 3$? (2004-2005, 2de, semaine 4)

La cinquième semaine sera sensiblement plus riche en questions à teneur mathématique. On se souvient que Margot avait soulevé, ce mardi-là, le problème de la démonstration des « règles d'ordre » en matière de calcul sur les nombres. Le problème de la justification est toujours aussi sensible ; un autre élève professeur se trouve confronté à un cas auquel, sans doute, il ne s'attendait pas, celui de l'emploi de la calculatrice dans le travail mathématique :

> Après avoir montré aux élèves la touche de la calculatrice qui rend une fraction directement irréductible, ou qui donne l'écriture scientifique d'un nombre, peut-on accepter des résultats sans justification (une fraction directement simplifiée, sans que la simplification soit apparente) ou, au contraire, ne faut-il justement plus les accepter ? (2004-2005, 2de, semaine 5)

On voit ainsi la rencontre d'un néo-professionnel avec ce qui est véritablement l'un des problèmes actuels de la profession – problème crucial, sur lequel nous reviendrons. D'une manière générale, la rencontre avec les mathématiques à enseigner fourmille de problèmes ! Un élève professeur ayant en responsabilité une classe de seconde y découvre une notion qui prend dans le programme de cette classe un relief que, sans aucun doute, il ne soupçonnait pas ; sa question, un peu sèche, témoigne d'une réelle incertitude :

> Comment introduire la notion de repère et comparer les différents repères ? (2004-2005, 2de, semaine 5)

Les comptes rendus des séances du séminaire de 2004-2005 ne laissent pourtant apparaître aucun traitement de la question du repérage et des repères. Comme on le découvrira ci-après, dans le séminaire de l'année précédente une question analogue mais plus développée avait fait l'objet d'une longue réponse (dont certains des matériaux avaient, au demeurant, été présentés dans les séminaires des années précédentes). Ce fait permet de penser que, dans l'esprit du responsable du séminaire, la question est d'importance ; mais cela conduit aussi à penser que, pour ce qui est de l'année 2004-2005, la question vient trop tôt pour être prise en compte véritablement. Ce n'est donc pas que le besoin ne soit pas reconnu, mais que sa satisfaction apparaisse trop précoce et donc incertaine, puisqu'il s'agit toujours, autant qu'il se peut, de répondre à un besoin de *l'ensemble* de l'assistance (et, au-delà, de la profession), et pas uniquement de l'auteur de la question. Le contenu travaillé dans le séminaire dépend donc de la dynamique du travail : en 2004-2005, en fait, le thème du repérage et des repères sera ainsi indéfiniment laissé de côté. Il en était allé différemment, on l'a dit, l'année précédente. En 2003-2004, la réponse apportée commence classiquement par l'examen des textes officiels.

Repérages…

Pour le thème « Repérage dans le plan », je ne comprends pas les commentaires suivants du programme : « On pourra réfléchir aux avantages des divers types de repérage » ; « On évoquera, en comparant les repérages sur la droite, dans le plan (voire sur la sphère ou dans l'espace), la notion de dimension ». Quels sont ces divers types de repérage ? Quelle est cette notion de dimension ? Par ailleurs, doit-on se contenter de repères orthogonaux ?

Matériaux pour une réponse

1. Le programme de 2de présente dans les termes suivants le secteur du *repérage* dans le plan, qu'on ne peut dissocier du thème des *vecteurs* :

Contenus

Repérage dans le plan.

Capacités attendues

Repérer des points d'un plan, des cases d'un réseau carré ou rectangulaire ; interpréter les cartes et les plans.

Commentaires

On pourra réfléchir aux avantages des divers types de repérage. On évoquera, en comparant les repérages sur la droite, dans le plan (voire sur la sphère ou dans l'espace), la notion de dimension.

On n'utilisera le calcul vectoriel que pour faciliter le repérage des points, justifier le calcul de coordonnées et caractériser des alignements.

2. Le document d'accompagnement inclut, quant à lui, le développement ci-après :

Repères et vecteurs

Le programme met nettement l'accent sur la notion de repérage : on a voulu assurer à l'ensemble des élèves, quelle que soit leur orientation ultérieure, la maîtrise indispensable en ce domaine qu'exigent aussi bien l'interprétation de plans et de cartes que l'utilisation de tableurs ou la compréhension des représentations graphiques.

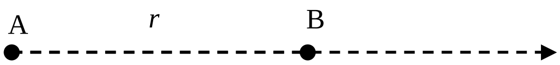
La place du calcul vectoriel est réduite ; celui-ci est maintenu par souci de cohérence avec les choix faits dans le programme de collège, pour permettre d'entretenir les acquis (les vecteurs y sont introduits à partir des translations et ensuite définis en termes de direction, sens et longueur) et fournir l'indispensable pour résoudre les problèmes de repérage ; le choix a été fait de réserver à la classe de 1re le développement de la géométrie vectorielle pour tous les élèves dont le cursus l'exigera.

On définira la multiplication d'un vecteur par un réel indépendamment du repérage ; la définition étant acquise, ainsi que ses propriétés et sa traduction en termes de colinéarité de vecteurs ou d'alignement de points, on l'appliquera dans le seul cadre de la géométrie analytique.

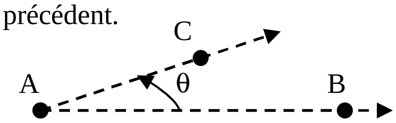
La partie suivante explicite quelques systèmes classiques de repérage que les élèves professeurs connaissent très vraisemblablement, mais dont le rappel souligne que les mathématiques pour l'enseignant se constituent à partir de connaissances mathématiques souvent déjà disponibles et qu'il faut simplement apprendre à mobiliser de manière adéquate dans l'abord d'une question d'enseignement.

3. Il est clair que la notion « générale » de *repérage* se voit allouée une place importante dans le programme de 2^{de} : de fait, il s'agit là d'une notion qui permet de *repenser* tout un ensemble de « gestes » géométriques plus traditionnels, qu'on peut regarder comme des *techniques de repérage*.

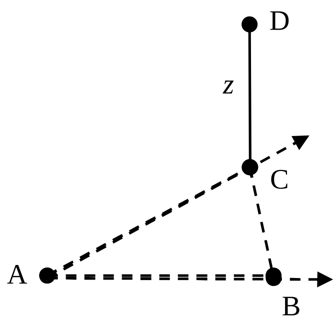
① Ainsi, déterminer la distance r de deux points A et B dans un espace plan, c'est (par exemple) repérer le point B par rapport au système de *coordonnées polaires* dont le pôle est A, et dont l'axe est la droite (AB) orientée de A vers B.



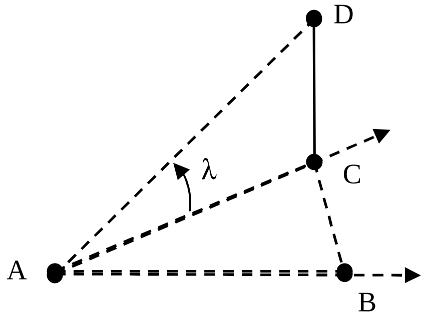
② Déterminer un angle $\widehat{BAC}$, c'est repérer la seconde coordonnée du point C dans le système de *coordonnées polaires* identique au précédent.



③ De même encore, repérer la hauteur d'un point D c'est repérer D (par exemple) dans le système de *coordonnées cylindriques* issu du système de coordonnées polaires indiqué plus haut.



④ Dans le cas précédent, la détermination de l'angle $\widehat{CAD}$ permettrait le repérage de D dans le système de *coordonnées sphériques* associé au système de coordonnées polaires indiqué.



La partie suivante revient aux textes officiels pour souligner la priorité dans l'ensemble des classes secondaires de la question générique du repérage par rapport à la question des modes de repérage et des différents systèmes de coordonnées.

4. Soulignons que la question du repérage *précède* donc celles des systèmes de coordonnées (non nécessairement cartésiens) et des repères (non nécessairement orthogonaux !). En particulier, *elle précède la question des vecteurs*. De fait, c'est *dès les programmes du collège* que la question du repérage organise tout un *secteur* d'études intitulé précisément *Repérage, distances et angles* :

Classe de 6^e^

Abscisses positives sur une droite graduée.

Repérage par les entiers relatifs, sur une droite graduée (abscisse) et dans le plan (coordonnées).

Classe de 5^e^

Repérage sur une droite graduée, distance de deux points. Repérage dans le plan (coordonnées).

Inégalité triangulaire.

Classe de 4^e^

Relation de proportionnalité : représentation graphique.

Théorème de Pythagore et sa réciproque.

Distance d'un point à une droite. Tangente à un cercle.

Cosinus d'un angle aigu.

Classe de 3^e^

Représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine.

Coordonnées du milieu d'un segment.

Coordonnées d'un vecteur.

Distance de deux points.

Trigonométrie dans le triangle rectangle.

C'est à partir des considérations précédentes qu'est avancée une autre assertion importante : les vecteurs, historiquement comme scolairement, « sont d'abord un outil de repérage ». Comme souvent, il s'agit là de repenser un certain nombre de problématiques et d'objets qui sont au cœur du travail mathématique au secondaire, telle ici la notion de construction géométrique.

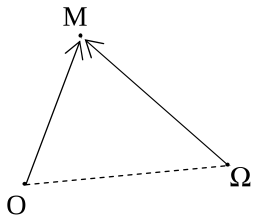
5. Cette logique des programmes suit en fait, *grosso modo*, l'ordre historique : les vecteurs, qui apparaissent tardivement dans l'histoire des mathématiques et dans l'histoire de leur enseignement, *sont d'abord un outil de repérage*.

① Les manuels d'il y a un demi-siècle appelaient d'ailleurs *repère d'un point* M par rapport à une origine O le vecteur $\overrightarrow{OM}$, en soulignant la bijection entre points du plan et vecteurs. On établissait alors le théorème fondamental suivant :

« Un vecteur [= bipoint] est égal au repère de son extrémité diminué du repère de son origine »

En d'autres termes, on disposait dès lors de l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, qui s'écrit encore $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ (« relation de Chasles »).

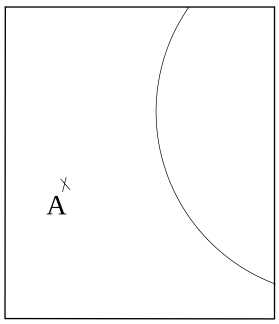
② La *technologie des vecteurs* permettait (et permet !) la création de *techniques* d'une puissance redoutable. Soit ainsi un repère cartésien d'origine O (où se trouve un certain observateur).



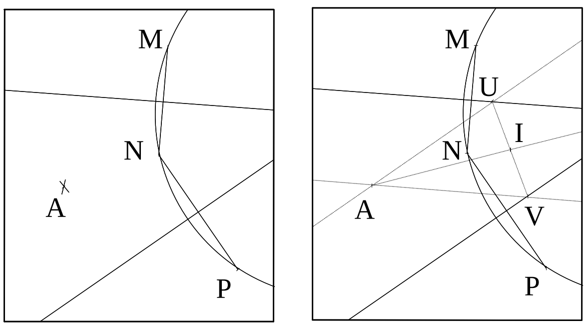
On a repéré un point M par ses coordonnées (x, y). On veut connaître les coordonnées de M par rapport à un autre observateur, situé en Ω. Pour cela, on détermine le « repère de M » par rapport à Ω : $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O\Omega}$. Si Ω a pour coordonnées (ξ, ζ), les coordonnées de M par rapport à Ω sont donc (x–ξ, y–ζ).

③ La technologie vectorielle ne constitue pas, bien entendu, le seul outil de repérage à utiliser. À titre d'illustration, considérons le problème suivant :

Sur une feuille de papier, on a marqué un point A et un arc de cercle γ dont le centre O tombe hors de la feuille ; on veut déterminer graphiquement la distance de A à O.



❶ On marque trois points M, N, P sur l'arc de cercle, et on trace les médiatrices d_1 et d_2 de [MN] et [NP], qui se coupent (hors de la feuille) en O.



❷ On est alors ramené à un problème plus classique : le parallélogramme de sommet A appuyé sur les médiatrices d_1 et d_2 a pour diagonale [AO], et on peut alors construire la demi-diagonale [AI], qui fournit la solution (voir ci-dessus).

❸ La construction proposée conduit en fait à repérer le point O à partir de A en repérant sa *direction*, soit la demi-droite [AO), puis en déterminant la *distance* AO. Si l'on choisit une demi-droite [A*x*) d'origine A, et si l'on repère la demi-droite [AO) par l'angle $\widehat{xAO}$, le point O est repéré par deux nombres, la mesure en radian $\theta \in [0, 2\pi[$ de l'angle $\widehat{xAO}$, et la distance ρ = AO.

La dernière partie apporte réponse à une interrogation sur la notion de dimension, présente dans le programme de seconde, en même temps qu'elle revient aux vecteurs, regardés comme outil de repérage, en explicitant leur rôle sur un exemple emblématique [8].

6. La notion de *dimension* dont parle le programme doit être entendue de manière *naïve*. Une droite est ainsi de dimension 1 : un point de cette droite est en effet repéré à l'aide *d'une seule* coordonnée. Un plan (ou une « surface », telle une sphère) est de dimension 2 : un point y est repéré à l'aide de *deux* coordonnées. Un point de l'espace est repéré, de même, par *trois* coordonnées.

① La notion de dimension est illustrée par quelques manuels. Dans l'un d'eux (collection *Déclic*, chez Hachette), on trouve ainsi une activité intitulée précisément *La notion de dimension*, qui présente cette notion à propos d'exemples usuels : la dimension 1 est illustrée d'abord par le déplacement en RER, ensuite par le mouvement d'un point sur un cercle ; la dimension 2 est illustrée par les coordonnées géographiques (latitude, longitude) ; la dimension 3 est illustrée d'abord par le repérage d'un appartement dans un immeuble (les trois nombres supposés nécessaires sont l'étage, le côté – pair ou impair – et le numéro de l'appartement), ensuite par la position d'un avion en vol. Trois questions simples sont alors proposées : sur la position d'un point sur un cercle, sur les coordonnées de villes apparaissant sur une carte, sur la position d'un avion.

② Ce type d'explicitation doit évidemment être clairement présent dans l'enseignement donné, ne serait-ce que pour mettre en place les savoir-faire qu'exige le programme en matière de repérage :

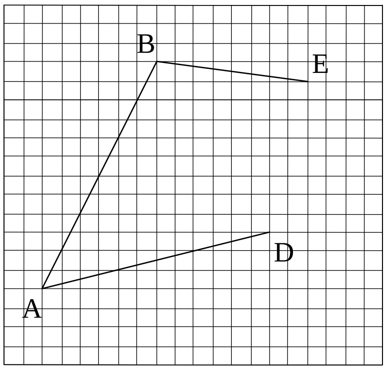
Repérer des points d'un plan, des cases d'un réseau carré ou rectangulaire ; interpréter les cartes et les plans.

Mais on n'oubliera pas, inversement, que ce point de vue premier – et fondateur – doit s'articuler aussi avec l'arsenal traditionnel à ce niveau en matière de repérage, et notamment avec l'usage du *calcul vectoriel*.

[8] Le manuel de la collection *Déclic* cité ci-après est celui de Misset *et al.* (2000).

③ À titre d'illustration de cette articulation, on examine un problème élémentaire.

En repérant convenablement le point C où se coupent les demi-droites [AD) et [BE) sur le quadrillage ci-dessous, déterminer si ce point est un nœud du quadrillage. À quelle distance se situe-t-il du bord droit du quadrillage ?



❶ Soit k et ℓ tel que $\overrightarrow{AC} = k\ \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC} = \ell\ \overrightarrow{BE}$. On a par ailleurs $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \ell\ \overrightarrow{BE}$. Par rapport au repère d'origine A du quadrillage, les coordonnées (x, y) de $\overrightarrow{AC}$ s'écrivent donc, d'une part $x = 12k$, $y = 3k$, d'autre part $x = 6 + 8\ell$, $y = 12 - \ell$. On a ainsi le système $\begin{cases} 12k - 8\ell = 6 \\ 3k + \ell = 12 \end{cases}$.

❷ La résolution de ce système fournit $k = \frac{102}{36} = \frac{17}{6}$ et $\ell = \frac{7}{2}$. Les coordonnées de C sont donc $x = 12k = 34$ et $y = 3k = \frac{17}{2} = 8{,}5$. (On vérifie les valeurs trouvées à l'aide des expressions en ℓ : $x = 6 + 8\ell = 6 + 8 \times \frac{7}{2} = 6 + 28 = 34$; $y = 12 - \ell = 12 - \frac{7}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5$.)

❸ Le point C n'est donc pas un point du quadrillage. La verticale de A étant à 18 unités du bord du quadrillage, le point C est à 34 – 18 unités, soit 26 unités, du bord droit du quadrillage.

2.6. Il n'est pas cependant que des questions mathématiquement nouvelles ou renouvelées pour arrêter de jeunes professeurs. En certains cas, le travail de terrain fait rencontrer des pratiques qui surprennent. La question ci-après traduit bien ce sentiment récurrent d'inquiétante étrangeté.

> J'ai bien entendu le souci de respecter les textes officiels mais mon PCP m'a conseillé de faire de la géométrie dans l'espace, du moins de la commencer, dans le chapitre « Configurations du plan », en particulier de faire un patron (passage du plan à l'espace). J'ai suivi ses recommandations. Quel est votre avis à ce sujet ? (2004-2005, 2de, semaine 5)

Dans un tel cas, l'articulation du souci didactique avec la matière à enseigner semble clairement à l'origine de cette perturbation dans l'organisation mathématique. Dans la question suivante, la rencontre avec des situations engendrées par un découpage à visée didactique des contenus à enseigner, soulève une interrogation à propos de laquelle on ne songe pas apparemment à revenir à ses connaissances mathématiques fondamentales.

> Dans certains livres de 4e, à propos de la division des nombres relatifs, on peut voir des fractions avec un numérateur ou un dénominateur non entier – par exemple $\frac{-28}{0,7}$ ou $\frac{1,3}{2}$. Que penser de ces écritures ?
>
> (2004-2005, 4e, semaine 5)

La question est classique, les comptes rendus des séminaires des années précédentes l'attestent. Sans doute, en ce cas, le responsable du séminaire a-t-il pensé que la question pouvait être travaillée sans plus attendre.

1. Les programmes et les documents qui les accompagnent parlent d'*écriture fractionnaire* (ou, moins souvent, de *forme* fractionnaire), d'une part, de *fractions*, d'autre part.

① Ce dernier vocable semble bien renvoyer au cas des fractions *d'entiers*, au moins dans certains contextes, comme dans l'expression « fraction irréductible ». Mais l'emploi du mot peut renvoyer aussi à des écritures fractionnaires qui, clairement, *ne sont pas* des fractions d'entiers ! C'est ainsi qu'on lit dans le document d'accompagnement du programme de 3e :

> Autrefois, les machines ne permettaient que du calcul approché dans certains cas (fractions non décimales, radicaux par exemple), mais aujourd'hui, les logiciels de calcul formel sont accessibles désormais aux collégiens dans certaines calculatrices de poche.

② Lorsque les textes officiels désirent parler plus précisément de fractions d'entiers, c'est l'expression de *quotient d'entiers* qui est employée, comme dans l'extrait du programme de 3e ci-après :

> On s'intéressera particulièrement au problème suivant : étant donné deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport $\frac{CA}{CB}$ a une valeur donnée sous forme de quotient d'entiers.

③ Semblablement, le document d'accompagnement du programme de 3e comporte l'observation suivante :

> Dès la classe de 6e, les élèves ont été amenés à travailler sur des nombres en écriture fractionnaire et en particulier sur des quotients d'entiers. Ils ont ainsi utilisé des nombres (rationnels) exprimés sous diverses formes : forme fractionnaire (réduite ou non) ou forme décimale (limitée ou non) ; ils ont pu constater que certains d'entre eux sont des entiers, d'autres des décimaux non entiers et d'autres encore ni des entiers ni des décimaux.

2. La restriction suggérée dans la question posée – parler de numérateur et de dénominateur uniquement pour les fractions d'entiers – n'est donc pas en accord avec les textes officiels.

① Les écritures fractionnaires $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{2{,}7}{\sqrt{3}}$, $\frac{2{,}7}{1{,}8}$ sont ainsi des fractions, mais seule la fraction $\frac{2}{3}$ est un quotient *d'entiers* (ou une *fraction* d'entiers, même si les textes officiels n'emploient pas cette expression). On a par exemple : $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2{,}7}{1{,}8} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

② D'une manière générale, étant donné un anneau $\mathcal{A}$ unitaire, commutatif et intègre, on appelle *corps des fractions* ou *corps des quotients* de $\mathcal{A}$, le plus petit corps $\mathcal{K}$ contenant $\mathcal{A}$: formellement, il est constitué des fractions ou quotients $\frac{a}{b}$ d'éléments *a*, *b* de $\mathcal{A}$, avec $b \neq 0$: *a* est alors le *numérateur* et *b* le *dénominateur* de la fraction $\frac{a}{b}$.

③ La *fraction* $\frac{a}{b}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ est une *écriture*. En particulier, de la même façon qu'un vecteur n'a pas d'origine ni d'extrémité, un *nombre* rationnel n'a pas de numérateur ou de dénominateur. Cela justifie que les textes privilégient l'expression d'*écriture* (ou de forme) fractionnaire, plutôt que celle de fraction.

④ Le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{Z}$ est évidemment l'anneau $\mathbb{Q}$ des fractions (d'entiers relatifs). Mais si $\mathcal{A} \supset \mathbb{Z}$ est un sous-anneau quelconque de $\mathbb{Q}$, il en va de même : son corps des fractions est aussi le corps $\mathbb{Q}$: ainsi par exemple le corps des quotients de l'anneau $\mathcal{A} = \mathbb{D}$ des nombres *décimaux* n'est-il rien d'autre que $\mathbb{Q}$. En d'autres termes, on n'enrichit pas le système des nombres disponibles en passant des fractions d'*entiers* aux fractions de *décimaux*. Les raisons de considérer des écritures comme $\frac{-28}{0{,}7}$ ou $\frac{1{,}3}{2}$ doivent donc être recherchées ailleurs…

La référence aux raisons d'être qui clôt le développement précédent souligne discrètement que la question proposée, à l'instar de beaucoup d'autres questions formulées par ces jeunes professeurs, s'inquiète surtout, à vrai dire, de la licéité d'une certaine pratique – consistant ici à écrire des fractions dont les termes sont éventuellement non entiers, ou plutôt à regarder comme une fraction, et donc comme ayant un numérateur et un dénominateur, une écriture dont on avait jusque-là méconnu la prétendue difficulté. Pour le responsable du séminaire, la question n'est certes pas neuve ; au cours des années précédentes, nombre de questions ont en effet été formulées autour de ce « problème » de la profession, dont celles-ci.

1. Doit-on parler de la « fraction » $\frac{2}{3}$ ou de « l'écriture fractionnaire » $\frac{2}{3}$ en classe de 4^e ? Il me semble que l'on parle de fraction lorsque numérateur et dénominateur sont des entiers (non nul pour le dénominateur), et le terme « écriture fractionnaire » est réservé aux quotients de décimaux (non nuls).

Cette distinction ne semble pas aussi nette dans les programmes ni chez les collègues. Qu'en est-il exactement ? (2001-2002, 4^{e}, semaine 7)

2. Quelle est la différence entre un quotient et une fraction ? L'expression $\frac{5x-3}{2}$ est-elle appelée quotient ou fraction ? Qu'appelle-t-on fractions de grandeurs ? (2002-2003, 4^{e}, semaine 5)

3. Quelle est la différence entre fractions et écritures fractionnaires ? On m'a dit que les fractions désignaient exclusivement les quotients de nombres entiers, tandis que l'écriture fractionnaire correspond au quotient de deux nombres quelconques. Certains dictionnaires confirment cette distinction mais les fractions rationnelles ne se limitent pas aux entiers et on définit également le corps des fractions d'un anneau intègre quelconque. Qu'en est-il précisément ? (2002-2003, 4^{e}, semaine 9)

4. Je suis en train de préparer la séquence « Opérations (+, –, ×, ÷) sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire ». Ma question est la suivante : quelle est la différence entre nombre en écriture fractionnaire et fraction ? J'y ai déjà réfléchi, seul et avec mon maître de stage, j'ai déjà quelques éléments de réponse, mais j'aurais aimé avoir votre avis sur le sujet. (2004-2005, 4^{e}, semaine 6)

5. Quelles sont les différences entre écritures fractionnaires et fractions ? Le nombre $\frac{6,3}{2,4}$ est-il une fraction ? Si oui, comment justifier une écriture sous forme de fraction irréductible ? ($\frac{6,3}{2,4} = \frac{63}{24} = \frac{21}{8} = \frac{2,1}{0,8}$) Et pour amener la définition d'un nombre rationnel ? (2004-2005, 2de, semaine 8)

6. Pour mettre sous forme réduite une écriture fractionnaire du type $\frac{228}{136,8}$, quelques élèves ont utilisé la notion de PGCD dans l'anneau des décimaux $\mathbb{D}$. Cette généralisation, clairement inconsciente de la part des élèves, fournit cependant une méthode de réduction des écritures fractionnaires. Faudrait-il « censurer » cette technique pour lui préférer la voie classique consistant à se ramener dans $\mathbb{Q}$? Peut-on l'accepter sans entrer précisément sur les détails de la divisibilité dans $\mathbb{D}$? (2004-2005, 2de, semaine 14)

Deux observations au moins peuvent être faites. Tout d'abord, derrière l'apparent souci mathématique, se cache très vraisemblablement une pulsion « didactique » – distinguer *tout* ce qui est distinguable, différencier *tout* ce qui est différent, pour en permettre un apprentissage supposé délivré de confusions regardées comme délétères. En même temps, pour que cette manière de penser les choses soit possible, deux conditions sont nécessaires : avoir oublié – collectivement – les mathématiques pourtant fraîchement apprises à l'Université ; avoir oublié – s'agissant cette fois de la profession, et pas seulement des entrants dans la profession – des formes langagières autrefois communes, par exemple pour désigner ce type de tâches naguère familier consistant à « chasser le radical du *dénominateur* », qui attestent que l'expression $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$, par exemple, a bien droit à avoir un dénominateur. Mais une autre condition encore est nécessaire, qui attente fondamentalement à la signification des mathématiques à enseigner : la propension à privilégier le structurel sur le fonctionnel, à dire « de quoi c'est fait » plutôt que « à quoi ça sert », tendance lourde à réduire la classe de mathématiques à un parcours « zoologique », quasiment muséographique, à ignorer – contre l'enseignement reçu à l'IUFM – la question des *raisons d'être* des entités mathématiques étudiées. En quelques cas, on tente d'échapper à l'exigence exprimée par les formateurs de placer les raisons d'être au poste de commande de l'enseignement à donner. C'est ce que montre ici une autre question posée lors de la 5e séance du séminaire [9] :

> Quand le thème ou le type de tâches à étudier est surtout une reprise (comme l'est en 4e l'addition des nombres en écriture fractionnaire : l'addition a été vue en 5e lorsque les fractions ont le même dénominateur ou des dénominateurs multiple l'un de l'autre), peut-on juste amener la raison d'être du type de tâches par « Vous connaissez ça, on va faire un peu plus… » ? Ou doit-on repartir d'une tâche ✓ ? (2004-2005, 4e, semaine 5)

Par contraste, lorsqu'on s'efforce de rechercher les raisons d'être d'une notion, d'une théorie, d'une notation, etc., raisons d'être qui devraient idéalement figurer au cœur d'une culture mathématique vivante, on ne sait où regarder, comme le souligne la question suivante :

> Quand je prépare une séquence, je regarde, comme vous nous l'avez conseillé, la raison d'être du thème de la séquence. Le problème que je rencontre est que je ne sais pas vraiment dans quelle direction chercher. Faut-il regarder au niveau historique ? Au niveau des programmes ? Au niveau de la connaissance théorique des élèves ? Ailleurs ? (2004-2005, 4e, semaine 5)

Les comptes rendus des séances font apparaître que cette question ne recevra pas de réponse formelle – sans doute parce que le travail sur cet aspect essentiel de l'enseignement à donner, ubiquitaire, se prête mal à une totalisation rapide.

---

[9] La « tâche ✓ » est une tâche en général seulement évoquée, que doivent accomplir les acteurs d'une certaine situation du monde narrée par l'énoncé, tâche dont l'accomplissement par une certaine technique fait surgir une tâche *t* supposée problématique pour les acteurs de la situation. C'est alors *à la classe* qu'il revient de résoudre le problème soulevé par *t*. Ainsi en va-t-il par exemple avec l'énoncé suivant : « Un imprimeur doit transporter 250 exemplaires d'un certain livre en utilisant pour cela des caisses dont chacune ne contient que 17 exemplaires dudit ouvrage (tâche ✓). Il veut déterminer combien il lui faudra prévoir de caisses (tâche *t*). » Nous revenons sur ce point dans le chapitre 5 de ce mémoire.

3. Mathématiques pour l'enseignement : un exemple

3.1. La question, étudiée en classe de 5^{e}, des *angles alternes-internes*, est un bon analyseur de la gamme complète des difficultés que peut rencontrer quiconque s'efforce de devenir professeur de mathématiques. Le programme de 5^{e} comporte le passage suivant.

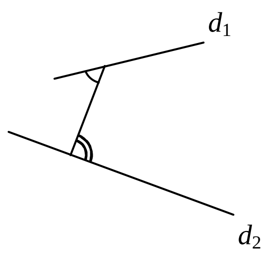
Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Caractérisation angulaire du parallélisme	Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante.	
	Connaître et utiliser les expressions : angles adjacents, angles complémentaires, angles supplémentaires.	On pourra utiliser également le vocabulaire suivant : angles opposés par le sommet, alternes-internes, correspondants.

Notons d'abord que la notion d'angles alternes-internes figure parmi les quelques notions qui *pourront* être utilisées, sans que le programme fasse obligation de les introduire. Il semble pourtant que la norme prévalente soit ici d'en faire usage. Or, on se trouve là, typiquement, devant des mathématiques à enseigner que le jeune professionnel va découvrir au moment de les enseigner, ou du moins sur lesquels il n'a pas eu l'occasion d'une réflexion appropriée. Soulignons-le encore une fois : en bien des cas, la matière à enseigner n'est rencontrée ainsi qu'en situation de devoir l'enseigner. L'enseignement, ici, se fait, si l'on peut dire, « à flux tendus », avec des stocks mathématiques au plus bas, et, parfois, réduits à rien. Comme le suggèrent les inventaires réalisés jusqu'ici, cette situation est en réalité fréquente. Quelle est alors l'une des toutes premières interrogations sur laquelle achoppe le professionnel débutant ? Le dispositif des questions de la semaine le révèle : comme le montrent les questions ci-après, il lui revient d'abord de clarifier ce qu'on appellera, dans la classe, des angles alternes-internes !

1. Quelle définition donner des angles alternes internes ? (Il y a deux possibilités : le cas où les droites sont parallèles et le cas plus général.) (2000-2001, 5^{e}, semaine 7)

2. Peut-on parler d'angles alternes-internes et d'angles correspondants lorsque les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles ? (2002-2003, 2^{de}, semaine 3)

3. Même si d_1 et d_2 ne sont pas parallèles, peut-on dire que les angles marqués sur la figure ci-contre sont alternes-internes ? (2002-2003, 2^{e}, semaine 17)



4. Parle-t-on d'angles alternes-internes lorsque les droites qui les définissent ne sont pas parallèles ? Même question pour les angles correspondants. (2003-2004, 2^{de}, semaine 9)

5. Comment définir deux angles alternes-internes, en 5^{e}, dans le cas de deux droites non parallèles coupées par une sécante (cas général) ? Est-ce nécessaire ? Un schéma clair ne suffit-il pas ? (2004-2005, 5^{e}, semaine 12)

Où est donc le problème ? Pour le voir, examinons la réponse répétée au cours des années par le responsable du séminaire (on reproduit ici la réponse pour l'année 2000-2001).

1. Il est vrai que la rubrique *Compétences exigibles* indique :

« Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante.

Connaître et utiliser les expressions : angles adjacents, angles complémentaires, angles supplémentaires. »

Par ailleurs, la rubrique *Commentaires* précise :

« On pourra utiliser également le vocabulaire suivant : angles opposés par le sommet, alternes-internes, correspondants. »

On peut donc être tenté de penser que les notions d'angles alternes-internes et d'angles correspondants sont limitées par le programme au cas de deux droites *parallèles* coupées par une sécante.

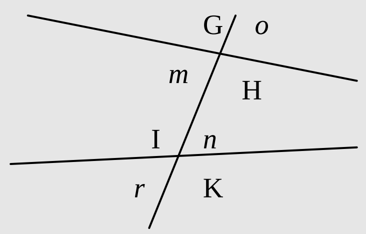
2. Ce serait là une conclusion maladroite au plan technique et *contraire à toute la tradition* d'emploi de ce vocabulaire en géométrie élémentaire. Ainsi, un manuel de géométrie du niveau collège conforme au programme de l'enseignement court du 18 avril 1947 indique-t-il par exemple ce qui suit :

Lorsque deux droites sont coupées par une sécante, elles forment huit angles ; les quatre angles compris entre les droites se nomment **internes** ou **intérieurs** ; les quatre autres se nomment **externes** ou **extérieurs**.

On appelle angles alternes-internes deux angles situés de part et d'autre de la sécante, à l'intérieur des droites et non adjacents.

Exemple : les angles *m* et *n*, ainsi que H et I.

On appelle angles correspondants deux angles situés du même côté de la sécante, l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur des droites et non adjacents.



Exemple : les angles *n* et *o*, ainsi que K et H, I et G, *r* et *m*.

On appelle angles intérieurs d'un même côté, deux angles situés à l'intérieur des droites et d'un même côté de la sécante.

Exemple : Les angles *m* et I, *n* et H.

Cette définition est la bonne, tout simplement ! Si on la connaît, le texte du programme devient dénué d'ambiguïté…

En 2001-2002, c'est l'une des élèves professeurs qui, spontanément, lève le lièvre en écrivant :

> Le thème de la « caractérisation angulaire du parallélogramme » se situe dans le secteur « Transformation de figures par symétrie centrale. Parallélogramme ». Pourtant on voit que « seules les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante » figurent dans les compétences exigibles. Il n'y a donc pas caractérisation. De plus, des notions qui n'ont aucun rapport avec la symétrie centrale (angles adjacents, supplémentaires, complémentaires) sont exigibles alors que d'autres (angles opposés par le sommet, alternes-internes) qui mériteraient d'y figurer n'ont leur place que dans les commentaires. (2001-2002, 5e, semaine 8)

L'argument, semble-t-il, devrait aller de soi. Pourtant, le système résiste. Alors que, comme le rappelle la réponse du formateur, la définition « générale » traditionnelle, où l'on considère deux droites distinctes d_1 et d_2 et une sécante commune d, ne suppose pas que d_1 et d_2 sont parallèles, nombre de manuels, peut-être induits en erreur par le texte du programme (« connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante »), ne définissent la notion d'angles alternes-internes *que* lorsque les droites distinctes d_1 et d_2 sont *parallèles*, ce que feront à leur suite nombre de professeurs. À titre d'exemple, suivons ici différentes éditions du manuel Transmath pour la classe de 5e publié chez Nathan. L'édition de 1989 tente à l'évidence de coller le plus possible au texte du programme alors en vigueur [10]. Sous la rubrique « Ce qu'il faut savoir », on trouve, à la page 48, trois points : le premier point est relatif à deux droites sécantes en un point O, que le manuel présente comme une « figure clé » ; le point 2 est une autre figure clé, à savoir « deux parallèles et une sécante » ; le texte correspondant énonce que les angles alternes-internes y sont égaux (de même que les angles correspondants). Vient alors le point 3, intitulé « Utiliser des angles pour reconnaître des parallèles » : c'est là que le problème attendu devrait se poser. La page du livre est divisée en deux colonnes : dans la colonne de droite figure le cas où il y a égalité des angles correspondants ; dans la colonne de gauche se trouve le cas où il y a égalité des angles alternes-internes. Comment les auteurs se tirent-ils de la difficulté qui les guette ? Par une subtilité de langage ! Les angles dont l'égalité entraîne le parallélisme ne sont pas appelés angles alternes-internes ou angles correspondants mais, respectivement, angles « *en position* d'alternes-internes » et angles « *en position* de correspondants ». Bien entendu, aucune définition n'est, à proprement parler, donnée, ni pour les angles alternes-internes (lorsque les deux droites sont parallèles) ni pour les angles *en position* d'alternes-internes (quand elles ne

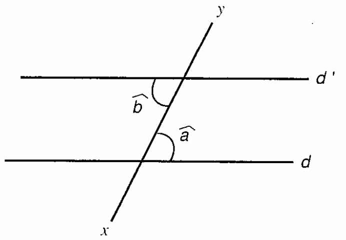
[10] Malaval (1989).

le sont pas). En outre, ces « définitions » se « lisent » sur les figures proposées, à ceci près toutefois que, dans toutes ces figures, les droites que nous avons appelées d_1 et d_2 sont… parallèles !

Utiliser des angles pour reconnaître des parallèles

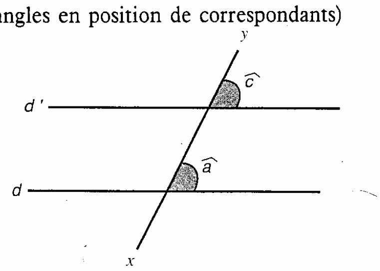
(xy) est une sécante aux droites d et d'.

Lorsque l'on sait que $\widehat{a} = \widehat{b}$
(angles en position d'alternes-internes)



alors on peut affirmer que les droites d et d' sont **parallèles.**

Lorsque l'on sait que $\widehat{a} = \widehat{c}$
(angles en position de correspondants)



alors on peut affirmer que les droites d et d' sont **parallèles.**

À aucun moment le lecteur n'est confronté à une situation graphique semblable à celle figurant dans le manuel cité par le formateur dans la réponse reproduite plus haut. En réalité, ce qui se rapproche le plus d'une définition figure, non dans la rubrique « Ce qu'il faut savoir » (qu'on pourrait, *a priori*, assimiler à ce que les programmes appellent la *synthèse*), mais dans une rubrique qui vient *avant*, celles des « Activités », où, cependant, rien n'apparaît au-delà de ce que nous avons noté jusqu'ici. L'édition du manuel Transmath [11] de 5e qui paraît en 1995 ne change rien à la rhétorique précédente : le schéma général de deux droites d_1 et d_2 non nécessairement parallèles et d'une sécante commune n'y apparaît pas, et le distinguo entre angles alternes-internes et angles *en position* d'alternes-internes est encore requis pour contourner la difficulté examinée. Sautons six années encore. En 2001, le manuel Transmath [12] montre un changement significatif, bien qu'un peu subreptice : la rubrique « Ce qu'il faut savoir » s'appelle désormais « Les savoirs ». Elle comporte notamment un point 4 intitulé « Deux parallèles et une sécante » : rien jusque-là semble n'avoir changé. Mais sous ce titre immobile, un petit schéma innove : il montre deux droites distinctes, clairement *non parallèles*, coupées par une sécante commune, tandis qu'un commentaire indique : « sur cette figure les angles $\widehat{a}$ et $\widehat{a}$*'* sont dits alternes-internes, $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ sont dits correspondants ». Pour le reste, rien ne sera changé, ni en ce qui concerne les propriétés de ces angles lorsque les droites

[11] Malaval *et al.* (1995), notamment p. 170.

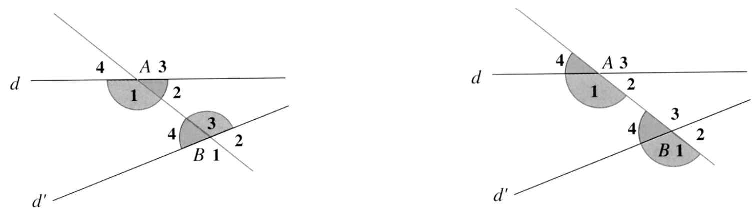
[12] Malaval *et al.* (2001), notamment p. 187.

sont parallèles, ni pour ce qui est de reconnaître le parallélisme de deux droites lorsque les angles anciennement dits « en position d'alternes-internes » qu'elles forment avec une sécante commune sont égaux.

3.2. Cette évolution est en réalité assez exemplaire d'une difficulté charriée par le programme et reconduite dans les manuels. Ce n'est en fait qu'au cours des dernières années que l'on voit peu à peu les manuels s'affranchir de ce qui apparaît rétrospectivement comme un mystérieux oukase : dans les éditions 2001 de divers manuels, le passage à la définition « générale » est désormais largement majoritaire. On a reproduit ci-après, à titre d'illustration, un extrait, intitulé « Angles définis par deux droites *d* et *d'* et une sécante (AB) », d'un manuel de 5^{e} paru chez Bordas [13] en 2001.

Les angles $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_3$, $\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_4$ sont alternes-internes par rapport aux droites d et d' et à la sécante (AB).

Les angles $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_1$, $\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_2$, $\widehat{A}_3$ et $\widehat{B}_3$, $\widehat{A}_4$ et $\widehat{B}_4$, sont correspondants par rapport aux droites d et d' et à la sécante (AB).

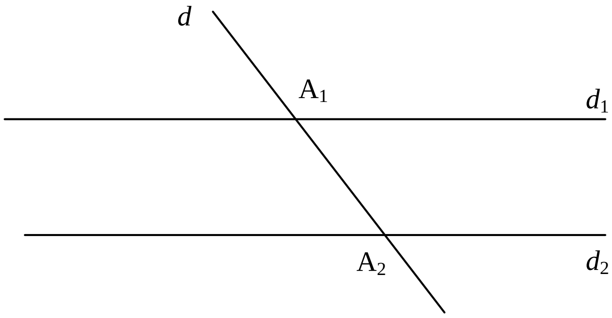


À parcourir ces manuels, l'impression prévaut qu'un basculement a eu lieu : un interdit a sauté. Désormais, on ose comme jamais représenter la situation paradigmatique de deux droites *non parallèles* coupées par une sécante commune, même si, dans le dessin proposé, les deux droites non parallèles ne se coupent pas dans le cadre de la page ! Un seul des manuels que nous avons examinés n'ose pas franchir le Rubicon : il s'agit du manuel de 5^{e} de la collection Triangle publié par Hatier [14] en 2001 ; mais, sans doute parce que, autour de lui, les choses changent, le parti pris de ne pas changer est explicité par les auteurs, du moins dans la version pour le professeur, où le titre « Angles alternes-internes et angles correspondants » se trouve muni d'un appel de note qui renvoie à la déclaration suivante, imprimée en tout petits caractères : « Nous avons choisi de définir ces mots uniquement dans le cas de droites parallèles. » On peut évidemment s'interroger sur l'épisode « pathologique » qui aura ainsi affecté pendant d'assez nombreuses années la classe de 5^{e}. Quelle pourrait en être l'étiologie ?

[13] Serra (2001), p. 186.

[14] Chapiron *et al.* (2001), p. 172.

Il semble que l'origine de la difficulté se trouve, presque paradoxalement, dans les valeurs promues par la réforme des mathématiques modernes, autour de 1968. Si l'on suppose deux droites d_1 et d_2 parallèles, il est facile de préciser « rigoureusement » ce que l'on entend par *bande* déterminée par ces droites : intersection du demi-plan de bord d_1 contenant d_2 et du demi-plan de bord d_2 contenant d_1. Si l'on considère maintenant une droite d coupant d_1 et d_2 en A_1 et A_2, on nommera *externes* les angles ayant pour sommet l'un des points d'intersection A_1 et A_2 et dont les secteurs angulaires correspondants ont une intersection vide avec la bande ouverte : les autres angles de sommet A_1 ou A_2 seront dits *internes*.



Certes, cette définition reste un peu maladroite (on en verra un peu plus loin une autre, plus habile), mais elle correspond bien à l'appréhension visuelle de la situation graphique. Le problème surgit lorsque les deux droites d_1 et d_2 sont sécantes : car il n'existe plus rien, alors, qui soit équivalent à la notion de bande déterminée par deux droites parallèles [15]. Le caractère interne est défini alors, non par la donnée de d_1 et d_2 *seulement*, mais par celle de d_1 et d_2 *et* de la sécante commune d, laquelle va « choisir » l'un des quatre secteurs angulaires déterminés par les deux droites sécantes d_1 et d_2. La situation se complique, et c'est sans doute là l'origine de la difficulté telle que les auteurs de la réforme des mathématiques modernes se voient contraints d'affronter [16]. Que font alors les auteurs devant cet obstacle ? Le manuel Brédif de 4^e, paru chez Hachette [17] en 1968, est déjà quasiment post-moderne. Il ne donne guère à voir que le schéma de deux *parallèles* coupées par une sécante. Hormis dans un cas, celui de l'étude de la réciproque du théorème selon lequel « deux angles alternes-internes (ou alternes-externes) sont égaux », où, considérant des angles supposés *a priori* égaux sans pour autant que les droites soient supposées parallèles – c'est ce qu'il s'agit précisément de

---

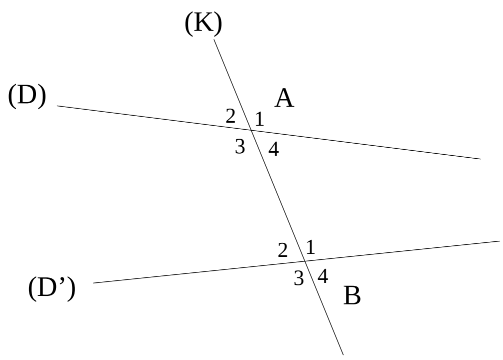
[15] Même si certains auteurs de manuels n'hésitent pas à « généraliser » la notion de bande au cas de deux droites sécantes ! Voir par exemple Malaval *et al.* (2001), p. 184.

[16] Dans le curriculum dit classique – antérieur à la réforme –, on le sait, l'abord des questions d'angles du plan se fait sans façon à l'aide des représentations graphiques sur une feuille de papier. Le problème est résolu sitôt qu'on porte son regard sur la figure proposée.

[17] Wattiaux *et al.* (1968), p. 224-227.

démontrer –, les auteurs écrivent : « On suppose que les angles $\widehat{x'Az'}$ et $\widehat{yBz}$, dits alternes-internes, sont égaux ». On trouve donc très tôt, dans le curriculum français, la gêne qui portera certains à parler d'angles *en position* d'alternes-internes. Que font alors les auteurs qui prennent le parti, non pas d'éviter la difficulté, mais de l'affronter sans détour ? Le manuel de 4^{e} de la collection Cossart et Théron paru chez Bordas [18] en 1969, donne la réponse.

> **Définitions**
>
> Soient deux droites (D) et (D') quelconques et une troisième droite (K) coupant (D) en A et (D') en B. La droite (K) est appelée **sécante** pour les droites (D) et (D'). (D) et (K) déterminent quatre angles de sommet A, (D') et (K) quatre angles de sommets B (Fig. 107). Nous allons nommer **les couples d'angles comprenant un angle de sommet A et un angle de sommet B.**
>
> **Par rapport à la droite (K)**, un angle de sommet A et un angle de sommet B peuvent être dans le même des demi-plans déterminés par la droite (K), ils sont alors dits **« d'un même côté de la sécante »** ; ils peuvent être dans des demi-plans différents, ils sont alors dits **« alternes »**.



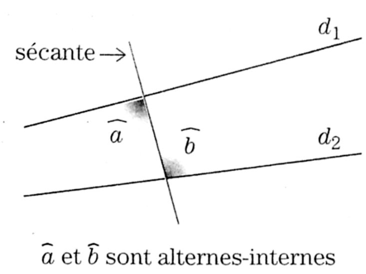
> **Par rapport aux droites (D) et (D')**, un angle de sommet A, ou un angle de sommet B est dit **interne** ou **intérieur** si l'un de ses côtés comprend le segment AB ; il est dit **externe** ou **extérieur** dans le cas contraire.
>
> Un angle de sommet A, et un angle de sommet B étant choisis, on donne à ce couple d'angles un nom qui résulte des définitions précédentes, ainsi que l'indique la figure 107 [figure ci-dessus] ; ajoutons que deux angles situés d'un même côté de la sécante, dont l'un est interne et l'autre externe, s'appellent **correspondants**.

Trois faits au moins méritent d'être soulignés. Tout d'abord, le texte distingue bien les droites (D) et (D'), supposées « quelconques », et la sécante (K). Cette distinction est indispensable lorsqu'on veut inclure le cas où (D) et (D') seraient elles-mêmes sécantes : on a alors affaire à trois droites qui se coupent deux à deux, et, en conséquence, à $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$ configurations formées de deux droites (en l'espèce sécantes) et d'une sécante à ces deux droites. Ensuite, on notera que la sécante étant choisie (ou donnée), ce qu'il est facile de définir (parmi les 8 angles déterminés par cette sécante), c'est la relation d'*alternance* : deux angles (parmi ces 8) sont *alternes* si les secteurs angulaires correspondants sont situés de part et d'autre de la

[18] Théron *et al.* (1969), p. 297.

sécante (K). Enfin, il convient surtout de souligner que, par contraste, la définition du caractère *interne* d'un angle (il ne s'agit plus ici d'une relation binaire entre angles mais d'une propriété de l'angle lui-même) apparaît plus délicate. Les auteurs lui donnent une solution habile, voire élégante, mais qui, pour le débutant, peut apparaître d'abord quelque peu artificielle : un angle (parmi les 8 considérés) est interne si l'une des deux demi-droites qui lui servent de côtés contient le segment [AB]. Tel est le prix à payer, en termes de sophistication mathématique, pour obtenir une définition claire et simple de la notion d'angles internes (et, par négation, d'angles externes) [19]. On peut penser que, à la faveur d'une évolution démathématisante qui tend à promouvoir une vision naturaliste des phénomènes géométriques, ce prix à payer est apparu trop élevé, en sorte que, l'innocence primitive qui prévalait encore avant la réforme des mathématiques modernes ayant été perdue, il est apparu impossible tout à la fois de ne pas donner de définition et de donner une définition convenable. Faute d'un *definiens* acceptable, le *definiendum* lui-même a donc été occulté, contre la logique même du travail mathématique [20].

3.3. L'évolution récente tend à éradiquer, ou du moins à recouvrir, la pathologie qui a affecté le curriculum mathématique pendant d'assez longues années. Ainsi qu'on l'a dit, en effet, les manuels osent de plus en plus présenter la situation « générale », formée par deux droites non nécessairement parallèles, et une sécante à ces deux droites. Le trauma des mathématiques modernes semble, au moins en partie, dépassé, comme l'atteste la figure ci-contre extraite du manuel de la collection Décimale (Belin) [21] publié en 2001. On voit en effet ici



[19] Il faut souligner ici le caractère *fonctionnel* d'une telle définition, qui permet, par exemple, de démontrer que, par la symétrie de centre le milieu de [AB], l'image d'un angle interne de sommet A est un angle interne de sommet B.

[20] *L'Atlas des mathématiques* indique (Reinhardt & Soeder 1997, p. 21) : « Pour préciser les *définitions explicites*, […] on introduit les notions de *definiendum*, le concept à définir, et de *definiens*, le ou les concept(s) permettant de l'expliquer. On écrit : Definiendum : = Definiens ou Definiendum : ⇔ Definiens suivant que le definiens est un mot ou une proposition. L'écriture est alors simplifiée, le definiendum pouvant […] toujours être remplacé par le definiens lorsque le besoin s'en fait sentir. » Les mêmes auteurs ajoutent : « Un certain nombre de concepts, en particulier les concepts de base Nombre, Point, Droite, Intervalle, Aire d'une surface, etc., ne sont pas définis de manière explicite, mais de manière *implicite*, grâce aux relations réciproques pouvant être formulées dans un système axiomatique approprié. »

[21] Pène & Despresle (2001), p. 154.

que « la » sécante est désignée explicitement, tandis que la relation unissant deux angles alternes-internes se montre graphiquement, dans une évidence ostensive vécue apparemment sans complexe. Le programme pour la classe de 5e qui entrera en vigueur en septembre 2006 montre d'ailleurs une évolution de même sens. Il comporte, traditionnellement, un thème d'études intitulé « Caractérisation angulaire du parallélisme » : la formulation ne change pas. En revanche, la rubrique des « Compétences » (intitulée jusque-là « Compétences exigibles ») subit un changement qui mérite d'être noté. Alors qu'on y indiquait l'exigence de « connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante », le toilettage proposé dans le programme nouveau amène un ajout qui, sur le point que nous considérons, change considérablement les choses : il s'agit toujours de « connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante », mais il s'agit aussi de connaître et d'utiliser les *réciproques* de ces propriétés :

> Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante et leurs réciproques.

Une seconde modification est également significative. Jusqu'alors, la rubrique des compétences exigibles incluait un second point : « Connaître et utiliser les expressions : angles adjacents, angles complémentaires, angles supplémentaires. » Or cet alinéa disparaît et son contenu migre vers la troisième colonne du programme (dont le titre n'est plus « Commentaires », mais « Exemples d'activités, commentaires »). La distinction faite jusqu'à présent entre, d'une part, les expressions d'angles adjacents, d'angles complémentaires et d'angles supplémentaires (mentionnées sous la rubrique des compétences exigibles) et, d'autre part, celles d'angles opposés par le sommet, d'angles alternes-internes et d'angles correspondants (mentionnées parmi les « Commentaires » comme *pouvant* être utilisées), cette distinction s'efface, toutes ces expressions devenant également utilisables :

> À cette occasion, le vocabulaire suivant est également utilisé : angles opposés par le sommet, angles alternes-internes, angles correspondants, angles adjacents, angles complémentaires, angles supplémentaires.

Ce même programme évoque alors explicitement un autre point capital, sur lequel nous nous arrêterons maintenant, celui de la démonstration des propriétés et de leurs réciproques. On y lit en effet :

> Les propriétés sont formulées et utilisées dans les deux sens (direct et réciproque), mais certaines réciproques peuvent être admises sans démonstration.

On voit là, à nouveau, l'insistance sur les propriétés réciproques, insistance qui semble corriger la formulation retenue à propos des compétences visées, qui ne se sauve de l'erreur devenue traditionnelle qu'*in extremis* – par la mention des réciproques. En même temps, le passage que nous venons de citer est profondément ambigu [22] : souligner que l'on pourra admettre « certaines réciproques », c'est autoriser, un peu obscurément sans doute, mais réellement, à reconduire la situation antérieure, en laissant les auteurs de manuels et les professeurs libres de s'épargner la confrontation avec le cas de figure où les deux droites coupées par une sécante commune ne pourraient pas être regardées d'emblée comme parallèles [23]. En règle générale, l'obligation de produire des démonstrations des principaux résultats étudiés prévaut, avec toutefois une restriction commune que le document d'accompagnement des programmes du cycle central en vigueur jusqu'à la rentrée 2006 précise dans les termes suivants :

> Pour tout le cycle central, il est de la responsabilité du professeur, en fonction de ses élèves, de décider de l'opportunité de démontrer certains résultats du cours (leur statut, admis sur conjecture ou établi, doit cependant être clair) et d'organiser des étapes de recherche et de rédaction.

3.4. Après le problème de la définition, le professeur doit donc affronter celui de la *démonstration*, au plan mathématique déjà. Les questions des professeurs stagiaires ne sont pas, sur ce point, très nourries, le problème de la démonstration n'y étant évoqué qu'en passant, dans un cadre plus large :

> En ce qui concerne la somme des angles d'un triangle, la démonstration est accessible en 5^e^ (par utilisation de la symétrie). Cependant, dans la programmation établie par l'ensemble des professeurs, le chapitre sur les angles (alternes, internes, etc.) et la caractérisation du parallélisme n'arrivent que beaucoup plus tard. Que faire ? Ignorer la programmation et déplacer ce chapitre ? Ne pas faire la démonstration ? (2003-2004, 5^e^, semaine 7)

La chose résulte peut-être de la tendance du responsable du séminaire à ne répondre qu'avec parcimonie aux demandes relatives à des démonstrations, attitude dont le mobile semble être, en l'espèce, l'idée que les professeurs de mathématiques, même débutants, doivent pouvoir

---

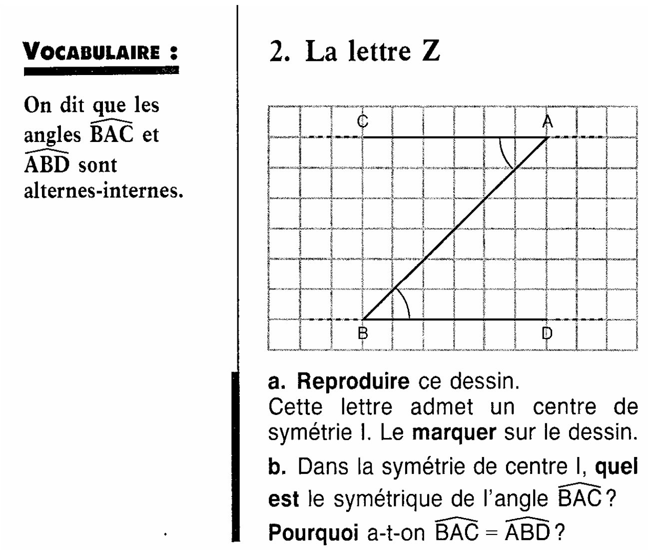
[22] On peut se demander pourquoi les auteurs du toilettage du programme n'ont pas osé franchir le Rubicon en adoptant par exemple la formulation suivante : « Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux droites *d* et *d'* et une sécante coupant *d* et *d'* en deux points distincts : cas où les droites sont parallèles ; réciproques. »

[23] On a vu plus haut un exemple, avec le manuel Brédif de 1968, où c'est l'obligation de démontrer la réciproque qui contraint les auteurs à évoquer en passant la situation générale.

répondre par eux-mêmes à de telles questions, sauf en quelques cas rares. Dans le cas d'espèce, il est vrai de plus que, ainsi que la question précédente l'insinue, la démonstration de la propriété directe (si les droites sont parallèles, alors les angles alternes-internes sont égaux) se déduit des propriétés de la symétrie centrale, propriétés supposées établies par ailleurs, antérieurement, dans cette même classe de 5^{e}. Plus précisément, au flou relatif de la question examinée, le programme propose un enchaînement déductif clair, mentionné parmi les commentaires de l'étude de la « somme des angles d'un triangle », lesquels indiquent en effet :

> La symétrie centrale ou la caractérisation angulaire du parallélisme qui en découle permettent de démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés.

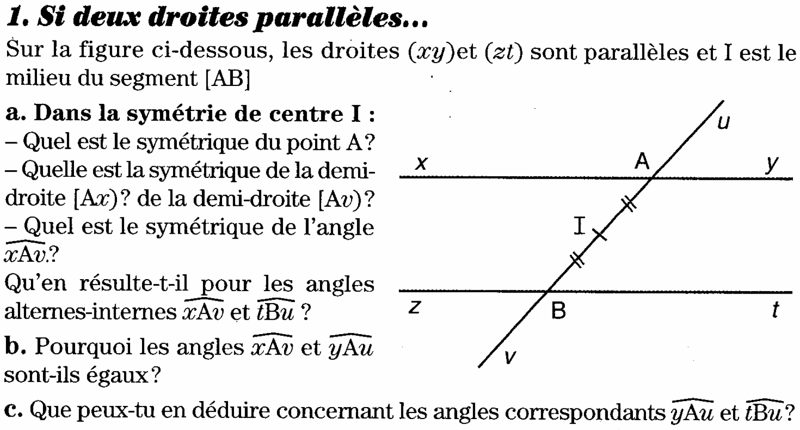
Les professeurs sont ainsi clairement invités à déduire la caractérisation angulaire du parallélisme des propriétés de la symétrie centrale. Qu'en est-il, traditionnellement ? Dans tous les manuels que nous avons examinés, une démonstration de la propriété directe est proposée. Seuls les manuels anciens, comme le Brédif ou le Cossart et Théron, proposent une démonstration en bonne et due forme ; les manuels publiés depuis une vingtaine d'années, par contraste, enchâssent le « principe démonstratif » – il consiste à déduire l'égalité des angles alternes-internes de propriétés supposées connues de la symétrie centrale, dans le cadre d'une activité d'étude d'un cas plus ou moins général, la recherche de la déduction étant en outre prise en charge de manière plus ou moins étroite par le texte proposé : l'exemple ci-après [24] représente sans doute une bonne illustration de ces stratégies « moyennes » :



---

[24] Malaval *et al.* (1989), p. 42.

Des deux exemples qui suivent, le premier [25] illustre un style plus proche de la rhétorique usuelle des mathématiques.



1. Si deux droites parallèles...

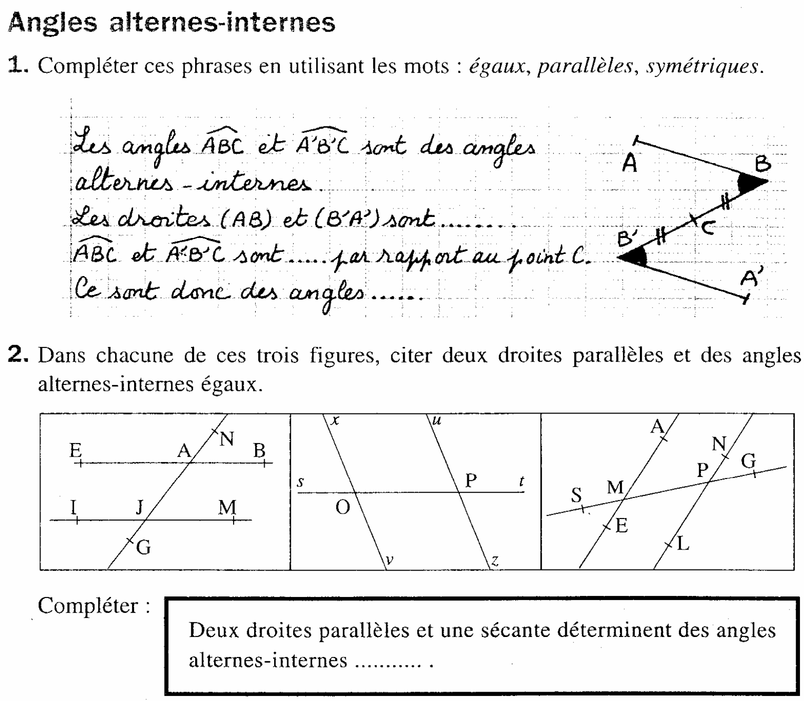
Sur la figure ci-dessous, les droites (xy)et (zt) sont parallèles et I est le milieu du segment [AB]

a. Dans la symétrie de centre I :
– Quel est le symétrique du point A ?
– Quelle est la symétrique de la demi-droite [Ax) ? de la demi-droite [Av) ?
– Quel est le symétrique de l'angle $\widehat{xAv}$?
Qu'en résulte-t-il pour les angles alternes-internes $\widehat{xAv}$ et $\widehat{tBu}$?

b. Pourquoi les angles $\widehat{xAv}$ et $\widehat{yAu}$ sont-ils égaux ?

c. Que peux-tu en déduire concernant les angles correspondants $\widehat{yAu}$ et $\widehat{tBu}$?

Le second [26] (ci-après) fournit en revanche un exemple du style « pédagogique » caricatural usité par certains manuels.



Angles alternes-internes

1. Compléter ces phrases en utilisant les mots : *égaux*, *parallèles*, *symétriques*.

Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'B'C}$ sont des angles alternes-internes.
Les droites (AB) et (B'A') sont ....
$\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'B'C}$ sont ..... par rapport au point C.
Ce sont donc des angles .....

2. Dans chacune de ces trois figures, citer deux droites parallèles et des angles alternes-internes égaux.

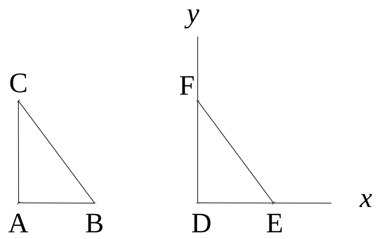
Compléter : Deux droites parallèles et une sécante déterminent des angles alternes-internes ....

La situation est différente s'agissant de démontrer la réciproque – le fait que, si les angles alternes-internes sont égaux, alors les droites sont parallèles. Traditionnellement, en nombre de cas (théorème de Pythagore, théorème de Thalès, etc.), la démonstration de la réciproque d'une propriété fait appel à la propriété directe elle-même ; mais cela appelle en pratique, pour être efficace et rapide, l'emploi d'outils devenus, depuis la réforme des mathématiques

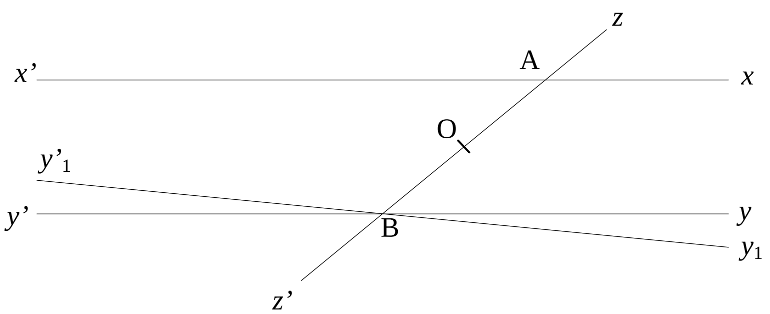
[25] Pène *et al.* (1995), p. 159.

[26] Lanoëlle *et al.* (1997), p. 171.

modernes, indisponibles au collège, à savoir les « cas d’égalité » des triangles, réintroduits en classe de seconde – sous le nom de cas d’*isométrie* – par le programme entré en vigueur en septembre 2000. Donnons de ce schéma démonstratif classique un exemple des plus simples.

> Soit à démontrer qu’un triangle ABC, dont les côtés ont pour mesure, par rapport à une certaine unité, AB = 3, AC = 4, BC = 5, est un triangle rectangle en A.
>
> 
>
>
> Considérons pour cela un angle droit $\widehat{xDy}$ et prenons sur la demi-droite [Dx) le point E tel que DE = 3, sur la demi-droite [Dy) le point F tel que DF = 4. D’après le théorème de Pythagore, on a EF = 5. D’après le troisième cas d’égalité des triangles, le triangle DEF est égal (isométrique) au triangle ABC, et on peut donc conclure que $\widehat{A} = \widehat{D}$ et donc que l’angle en $\widehat{A}$ est droit.

Ici pourtant, ce n’est pas l’indisponibilité des cas d’égalités (c’est-à-dire des conditions classiques d’isométrie de deux triangles) qui vient faire problème. La démonstration traditionnelle (voir la figure ci-après) consiste à utiliser la propriété directe en considérant la parallèle en B à la droite ($x’x$) : d’après la propriété directe, les angles alternes sont égaux, d’où l’on peut déduire que la droite ($y’_1y_1$) est identique à la droite ($y’y$) qui est donc parallèle à ($x’x$), ce qu’il fallait démontrer. Le problème se trouve dans la déduction évoquée qui, pour apparaître intuitive, ne se laisse pas mettre en forme si aisément, comme on le voit dans la démonstration proposée dans le manuel Brédif de 1968, à laquelle nous avons fait référence.

> Soit deux droites $x’x$ et $y’y$ coupées, respectivement, en A et B par une droite $z’z$, et telles que les demi-droites A$x’$ et B$y’$ sont dans un même demi-plan de frontière $z’z$ (fig. 202 [ci-dessous]).
>
> 
>
>
> On suppose que les angles $\widehat{x’Az’}$ et $\widehat{yBz}$, dits alternes-internes, sont égaux.
>
> Soit O le milieu de AB. La symétrie pour O associe à $x’x$ la parallèle $y’_1y$ passant par B.
>
> Le théorème précédent nous permet d’écrire :
>
> $$\widehat{x’Az’} = \widehat{y_1Bz}.$$

On sait : $\widehat{x'Az'} = \widehat{yBz}$.

On déduit : $\widehat{yBz} = \widehat{y_1Bz}$.

Ces deux angles sont dans le même demi-plan de frontière $z'z$, qui ne contient pas Ax' ; ils ont même sommet, B, et un côté commun, Bz.

Ils coïncident donc et : $y'y = y'_1y_1$.

On conclut :

Si deux droites déterminent avec une sécante des angles alternes-internes égaux, ces droites sont parallèles.

On conclurait de même si les angles étaient alternes-externes.

D'autres auteurs, tels ceux du manuel de la collection Cossart et Théron paru en 1969, organisent autrement leur système déductif. Mais, dans tous les cas, surgissent des problèmes de position dans le plan qui ne peuvent guère être résolus que par des considérations relevant de la *géométrie de l'ordre* [27]. À cet égard, le minimum, bien attesté dans les ouvrages anciens, de ce qu'il faut supposer, est constitué par le résultat suivant : si des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BAD}$ sont égaux, et si C et D sont situés du même côté par rapport à la droite (AB), alors la demi-droite [AC) est confondue avec la demi-droite [AD). Pourtant, même ramenée à ce noyau démonstratif, il semble que l'attention explicite aux questions de géométrie de l'ordre qui est ici requise ne puisse être obtenue dans l'enseignement actuel des mathématiques au collège. Il y aurait donc, en quelque sorte, s'agissant de la réciproque examinée, une création démonstrative à faire et à partager.

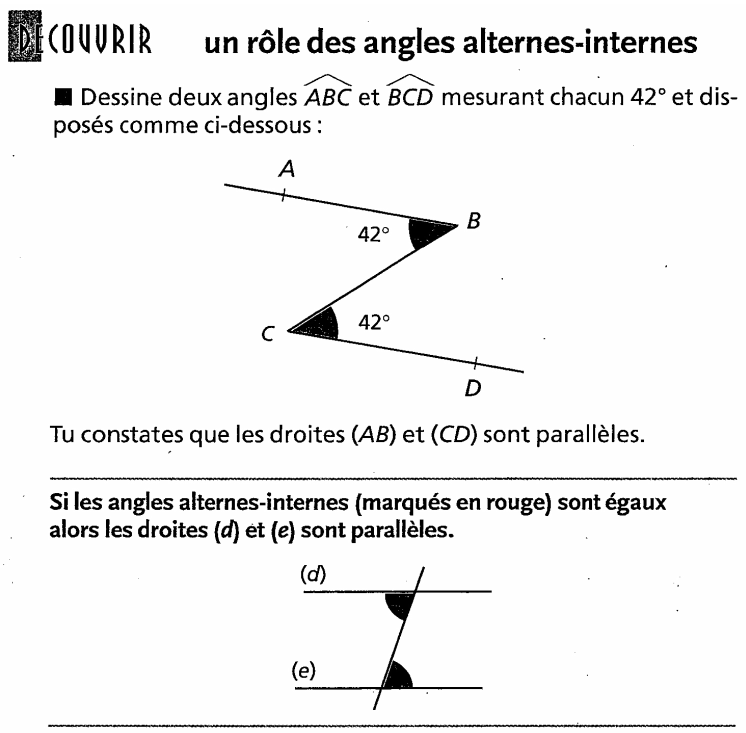
3.5. L'examen des manuels ne montre aucunement l'effort d'invention mathématique qui serait ici nécessaire. La plupart d'entre eux, en effet, se contentent de proposer à l'élève d'effectuer une « observation », c'est-à-dire l'ébauche d'une expérimentation graphique. Ainsi en va-t-il dans cet extrait d'un manuel de 5^e^ publié chez Delagrave [28] en 1997, où l'enseignement des mathématiques semble être au plus mal [29].

---

[27] L'expression *order geometry* est due, semble-t-il, à Emil Artin (1898-1962). Un résultat typique en la matière est le fameux « axiome de Pasch » que l'on peut énoncer familièrement ainsi : lorsqu'une droite entre dans un triangle, elle en ressort.

[28] Corrieu *et al.* (1997), p. 167.

[29] Tout se passe ici comme s'il s'agissait moins d'apporter *objectivement* la preuve – qui s'imposerait à tous et à chacun – du parallélisme des droites (AB) et (CD), que de permettre à l'élève de se convaincre, *subjectivement*, de ce parallélisme. Rien n'empêche, en principe, que ce qui suffira à convaincre l'un ne convainque nullement tel autre. Et le fait même que les deux soient convaincus n'équivaut pas *ipso facto* à la production d'une preuve



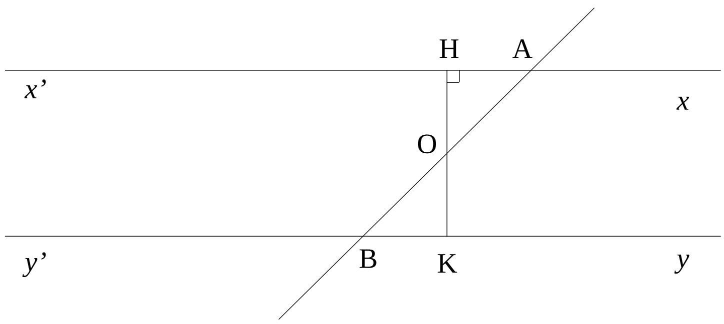
DÉCOUVRIR un rôle des angles alternes-internes

■ Dessine deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ mesurant chacun 42° et disposés comme ci-dessous :

Tu constates que les droites (*AB*) et (*CD*) sont parallèles.

Si les angles alternes-internes (marqués en rouge) sont égaux alors les droites (*d*) et (*e*) sont parallèles.

Rares sont les manuels qui, sous une forme ou une autre, proposent une vraie démonstration. Pour démontrer que les droites (*x'x*) et (*y'y*) sont parallèles, il suffit de démontrer qu'une perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Considérons ainsi la perpendiculaire à (*x'x*) passant par le milieu O du segment [AB].

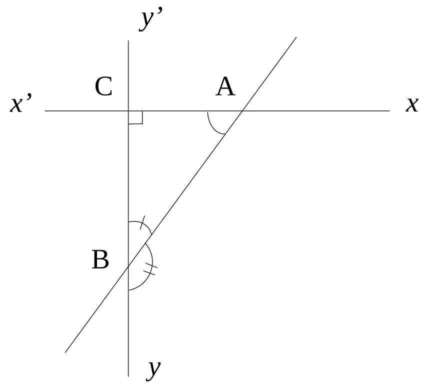


Le premier point à établir est en principe que cette perpendiculaire coupe (*y'y*), en un point K. On pouvait autrefois le démontrer en utilisant la propriété selon laquelle, dans un triangle rectangle, les angles autres que l'angle droit sont aigus.

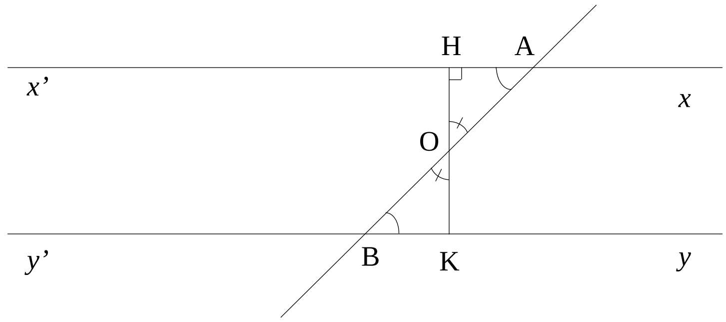
---

objectivement partageable ! À un *ethos* de la conviction subjective s'oppose ainsi l'éthique de l'intelligibilité collectivement construite et sanctionnée, « objective ». La première attitude est, linguistiquement, portée par l'usage du « je », et donc par l'usage du « tu » prononcé par qui interpelle l'élève sur sa conviction. Selon une formulation des plus classiques, mais qui n'est plus aujourd'hui utilisée systématiquement – tout du moins dans les manuels de collège –, la seconde attitude s'exprime en revanche par le « on » : on ne dira pas « *je* constate », mais « *on* constate » et, de façon plus concise encore et d'autant plus significative, « on a ».

Pour qu'elle ne la coupe pas, il faudrait que $(y'y)$ soit perpendiculaire à $(x'x)$; ces droites se coupant en un point C, le triangle ABC serait rectangle en C, l'angle (interne) $\widehat{x'AB} = \widehat{CAB}$ serait aigu tandis que l'angle $\widehat{ABy}$ serait obtus (comme complément de l'angle aigu $\widehat{CBA}$), en sorte que, en ce cas, les angles alternes-internes $\widehat{x'AB}$ et $\widehat{ABy}$ ne sauraient être égaux.



Cela étant acquis (ou admis), on pouvait poursuivre ainsi.



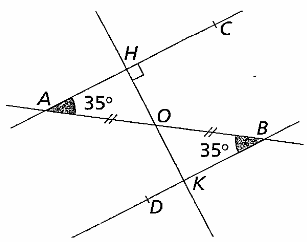
Les triangles OHA et OKB ont un côté égal (OA = OB) adjacent à deux angles égaux ($\widehat{HOA} = \widehat{KOB}$ comme angles opposés par le sommet et $\widehat{HAO} = \widehat{KBO}$ par hypothèse). Ces triangles sont donc « égaux ». On en conclut que $\hat{K} = \hat{H}$ et donc que la droite (HK) est perpendiculaire à $(y'y)$, ce qu'il fallait démontrer. La démonstration précédente se retrouve, à un ou deux détails près, dans certains manuels, tel celui paru chez Bordas [30] en 2001, dont nous reproduisons ci-après l'une des « activités ».

Deux angles égaux

1. ***a)*** Tracer une droite (*AB*).
b) Tracer deux angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABD}$ égaux à 35° et situés de part et d'autre de la droite (*AB*) (angles alternes-internes par rapport aux droites (*AC*), (*BD*) et à la sécante (*AB*)).

2. Quelle propriété semblent avoir les droites (*AC*) et (*BD*) ?

3. On va prouver que les droites (*AC*) et (*BD*) sont parallèles. Pour cela :
a) Compléter la figure comme ci-contre :
– *O* est le milieu du segment [*AB*] ;
– la droite (*HK*) est la perpendiculaire à la droite (*AC*) qui passe par le point *O*.
b) Calculer les angles $\widehat{HOA}$, $\widehat{BOK}$, puis $\widehat{OKB}$.



4. Que peut-on en conclure pour les droites (*HK*) et (*BD*) ? pour les droites (*AC*) et (*BD*) ?

[30] Serra (2001), p. 185.

On aura observé que, ainsi qu'on l'a souligné plus haut, il resterait à démontrer, en toute rigueur, que la perpendiculaire issue de O à la droite (AC) coupe bien la droite (BD). Mais on observera surtout que, faute de disposer des cas d'isométrie, les auteurs doivent recourir à une autre propriété : la somme des angles d'un triangle est de 180º. Cette propriété se déduit aisément, par des considérations que l'on trouve déjà dans les *Éléments* d'Euclide [31], de la propriété directe des angles alternes-internes. Toutefois le parti des auteurs du manuel examiné ici est légèrement différent : dans une activité préalable (« Activité 2 »), ils établissent, à partir des propriétés de la symétrie centrale, la propriété de la somme des angles d'un triangle ; cela fait, ils réunissent dans une même activité (« Activité 3 ») la démonstration de la propriété directe puis celle, reproduite plus haut, de la propriété réciproque. L'idée de faire intervenir la propriété de la somme des angles d'un triangle est exploitée par d'autres auteurs, qui proposent des variantes de la démonstration précédente. Ainsi, dans un manuel paru chez Hatier [32] en 1995 (et qui relève donc du programme antérieur à celui encore en vigueur en 2005-2006 en 5^{e}), les auteurs proposent la démonstration reproduite ci-après.

1. Avec deux angles alternes-internes égaux

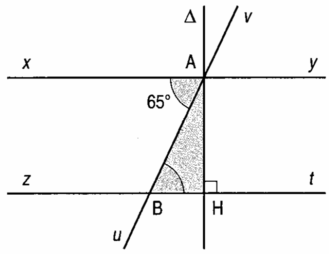
■ **Cas particulier**

Reproduire la figure ci-contre sachant que :

$\widehat{xAu} = \widehat{tBv} = 65°$; AB = 5 cm ;

Δ passe par A et est perpendiculaire à la droite *zt*.

Calculer l'angle $\widehat{\mathrm{HAB}}$, *puis l'angle* $\widehat{\mathrm{HA}x}$.
Que dire des droites xy et zt ?



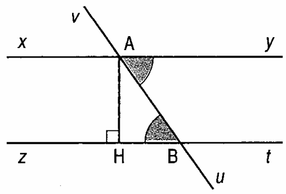
INFOS

Au début, on ne sait pas si les droites sont parallèles mais on utilise le même vocabulaire.

■ **Cas général**

Sur la figure ci-contre les angles aigus alternes-internes $\widehat{yAu}$ et $\widehat{zBv}$ sont égaux.

Prouver que les droites xy et zt sont parallèles.



Contrairement au cas précédent, où il fallait tout d'abord établir l'existence du point K, l'existence du point H, projeté orthogonal de A sur la droite (*zt*), est assurée. Il reste cependant à examiner le cas particulier où H = B, car on ne peut plus, dans ce cas, considérer le triangle ABH ; cependant, il est alors facile de vérifier que la droite (AH) = (AB) est perpendiculaire aux deux droites (*xy*) et (*zt*), et donc que celles-ci sont parallèles. Bien

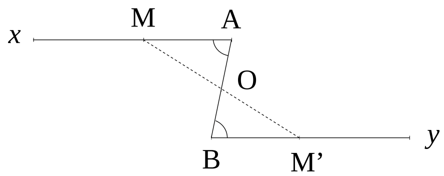
---

[31] Livre I, Proposition 32 : voir par exemple http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI32.html.

[32] Curel *et al.* (1995), p. 176.

évidemment, les points A et B sont supposés distincts, et cela nous donne l'occasion de noter que la proposition réciproque devrait, en vérité, être énoncée ainsi [33] : étant donné deux droites *d* et *d'* et une droite δ sécante à *d* et *d' en deux points distincts* A et B (c'est-à-dire ne passant pas par le point d'intersection éventuel, Ω, de *d* et *d'*), alors, si des angles alternes-internes formés par *d*, *d'* et la sécante commune δ sont égaux, les droites *d* et *d'* sont parallèles.

3.6. Dans le cas du manuel publié chez Hatier en 1995, la justification de la propriété relative à la somme des angles d'un triangle fait appel à un chemin déductif long : elle s'y établit, en effet, en décomposant un triangle en deux triangles rectangles et en usant d'un résultat obtenu un peu antérieurement dans le manuel : le fait que les angles non droits d'un triangle rectangle sont complémentaires. Cette dernière propriété est elle-même établie en invoquant un « résultat » vu en 6^e : un triangle ABC rectangle en A étant donné, si l'on considère le rectangle ABDC, alors « les triangles rectangles BAC et CDB sont superposables ». À rebours de ces chemins déductifs longs, on peut, à l'instar d'autres manuels, préférer travailler uniquement à partir des propriétés de la symétrie centrale (sans se soucier, au demeurant, de la manière de les établir). Considérons un segment [AB], avec A ≠ B, une demi-droite [A*x*) et une demi-droite [B*y*) telles que : 1) [A*x*) et [B*y*) sont situées de part et d'autre de la droite (AB) ; 2) $\widehat{\mathrm{BA}x} = \widehat{\mathrm{AB}y}$. Soit alors O le milieu de [AB] et M un point de la demi-droite [A*x*). Notons M' le symétrique de M par rapport à O. Les points M et M' sont situés de part et d'autre de la droite (AB), en sorte que M' se trouve dans le demi-plan de frontière (AB) qui contient [B*y*).



D'après les propriétés de la symétrie centrale et l'hypothèse d'égalité des angles $\widehat{\mathrm{BA}x}$ et $\widehat{\mathrm{AB}y}$, on a $\widehat{\mathrm{OBM'}} = \widehat{\mathrm{OAM}} = \widehat{\mathrm{OB}y}$. L'égalité $\widehat{\mathrm{OBM'}} = \widehat{\mathrm{OB}y}$ à laquelle on aboutit permet de conclure que [BM') = [B*y*). Comme B est le symétrique de A par rapport à O, il en résulte que (BM') est parallèle à (AM), et donc que (B*y*) est parallèle à (A*x*), ce qu'il fallait démontrer. On

[33] Si la condition explicitement imposée ici cessait d'être réalisée, la possibilité de parler d'angles alternes-internes formés par le couple de droites (*d*, *d'*) et la sécante δ cesserait d'exister.

notera que cette démonstration repose sur la considération de demi-droites, et non pas de droites. Dans le cas où l'on utilise des propriétés de la symétrie centrale, la propriété clé, à cet égard, est la suivante : lorsque deux points M et M' sont symétriques par rapport à un point O, alors M et M' sont situés de part et d'autre de toute droite δ passant par O et distincte de (MM'). La considération de demi-droites n'est pas véritablement exploitée dans les manuels récents. Pour le contraste, on a reproduit d'abord, ci-après, un extrait d'un manuel publié en 1987 chez Magnard : on notera la mention « Assez difficile » portée dans la marge, à l'attention du professeur [34].

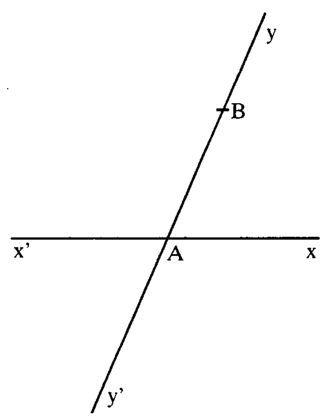
5. RÉCIPROQUE

Assez difficile.

Reproduis la figure ci-contre sur ton cahier. Mesure $\widehat{yAx}$.

On veut tracer une demi-droite [Bt) telle que $\widehat{y'Bt} = \widehat{yAx}$.
Il y en a deux : $[Bt_1)$ et $[Bt_2)$.

a) Trace en rouge la demi-droite $[Bt_1)$ située dans le demi-plan limité par (y'y), qui contient [Ax).
Dans quelle symétrie [Ax) et $[Bt_1)$ se correspondent-elles ?



$[Bt_1)$ symétrique de [Ax) par rapport à la médiatrice de [AB].

$[Bt_2)$ et [Ax) sont parallèles et de sens contraires.

b) Trace en vert la demi-droite $[Bt_2)$ située dans le demi-plan limité par (y'y) qui ne contient pas [Ax).
Que remarques-tu concernant les positions de $[Bt_2)$ et de [Ax) ?

c) Trace la droite (t't) parallèle à (x'x) passant par B (t' dans le même demi-plan limité par (y'y) que x').

Que peux-tu dire des angles $\widehat{t'By'}$ et $\widehat{yAx}$? Déduis-en que $[Bt_2)$ est parallèle à (x'x).

d) Dans le même demi-plan limité par (y'y) que [Ax), trace en bleu la demi-droite [Bu) telle que : $\widehat{yBu} = \widehat{yAx}$.

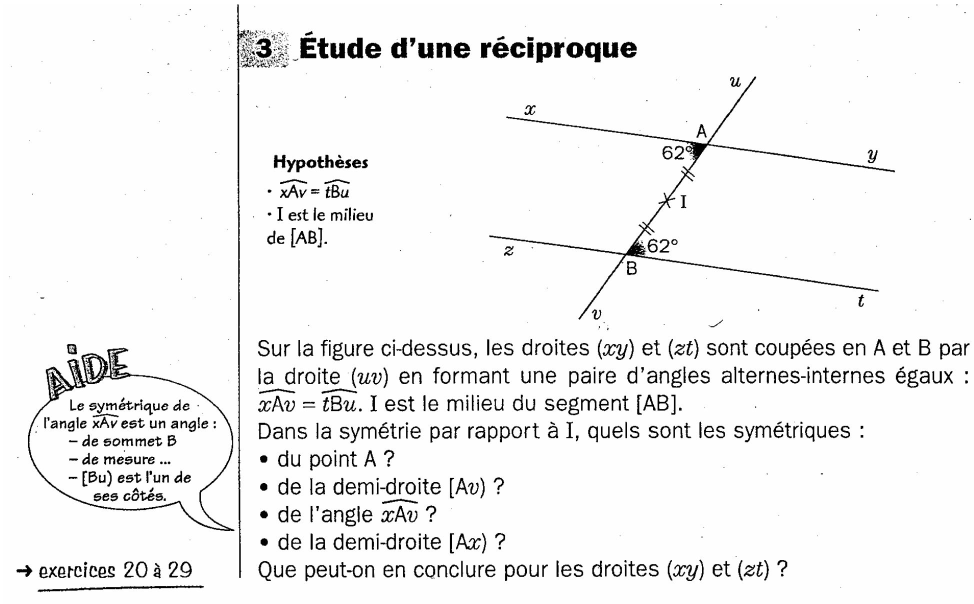
[Bu) est parallèle à [Ax').

Que remarques-tu ?

---

[34] Jullien *et al.* (1987), p. 72. La deuxième mention portée dans la marge (dans l'édition destinée aux professeurs) fait référence à une symétrie axiale, transformation qui, en réalité, ne joue aucun rôle dans la démonstration du résultat.

Les auteurs de manuels plus récents, soit ne font pas appel à la notion de demi-droite, soit le font d'une manière assez formelle pour que le rôle clé que pourrait jouer cette notion n'apparaisse pas clairement. Ainsi en va-t-il dans le passage suivant du manuel publié chez Belin [35] en 2001.



3 Étude d'une réciproque

Hypothèses
- $\widehat{xAv} = \widehat{tBu}$
- I est le milieu de [AB].

Sur la figure ci-dessus, les droites (xy) et (zt) sont coupées en A et B par la droite (uv) en formant une paire d'angles alternes-internes égaux : $\widehat{xAv} = \widehat{tBu}$. I est le milieu du segment [AB].
Dans la symétrie par rapport à I, quels sont les symétriques :
- du point A ?
- de la demi-droite [Av) ?
- de l'angle $\widehat{xAv}$?
- de la demi-droite [Ax) ?

Que peut-on en conclure pour les droites (xy) et (zt) ?

AIDE
Le symétrique de l'angle $\widehat{xAv}$ est un angle :
– de sommet B
– de mesure ...
– [Bu) est l'un de ses côtés.

→ exercices 20 à 29

L'aide proposée dans la marge est significative. Car ce qu'elle omet de dire, c'est que, si [B*u*) est bien l'un des côtés du symétrique de l'angle $\widehat{xAv}$, l'autre côté se trouve dans le demi-plan déterminé par la droite (AB) qui ne contient pas la demi-droite [A*x*) : faute de cette précision, la démonstration présente un implicite rédhibitoire. En fin de compte, c'est moins peut-être la notion de demi-droite que les questions attachées au régionnement du plan par une droite qui introduisent ici un point faible dans l'organisation déductive proposée.

3.7. Les analyses qui précèdent montrent que, tant en ce qui concerne la définition des angles alternes-internes que la démonstration des propriétés directe et réciproque qui lui sont classiquement associées, les professeurs débutants se trouvent affrontés à des difficultés qu'il reviendrait en principe *à la profession* de tenter de régler, et sur lesquelles, en attendant, ils font ce qu'ils peuvent. En vérité, la profession se heurte ici à un obstacle considérable, dont la racine peut être trouvée dans la croyance si longtemps répandue dans la culture mathématique commune selon laquelle les propriétés du monde seraient susceptibles d'être déduites *a priori*,

[35] Pène & Depresle (2001), p. 153.

sans recours à l'expérience, ou que, du moins [36], cela serait vrai pour les propriétés de l'espace physique. Ce que Bertrand Russell (1872-1970), dans son ouvrage *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897), exprimera en ces termes :

> Geometry, throughout the 17th and 18th centuries, remained, in the war against empiricism, an impregnable fortress of the idealists. Those who held – as was generally held on the continent – that certain knowledge, independent of experience, was possible about the real world, had only to point to Geometry: none but a madman, they said, would throw doubt on its validity, and none but a fool would deny its objective reference.

De cette croyance pluriséculaire, que le surgissement des géométries non euclidiennes, au XIX[e] siècle, ne réussira à ébranler que bien lentement, il reste dans la culture de la géométrie élémentaire un vestige essentiel, que l'on peut décrire sommairement ainsi : le travail mathématique en géométrie consisterait à organiser en un ensemble déductif *d'un seul tenant* toutes les propriétés rencontrées au fil de l'étude. Dans cette organisation déductive *d'ensemble*, la manière d'arriver à une propriété donnée est alors regardée comme étant *la* démonstration de cette propriété, la notion de démonstration – plutôt que celle de déduction – constituant dès lors la valeur suprême de l'activité mathématique ainsi conçue. Dans ce cadre, un élève professeur préparant le CAPES de mathématiques demandera par exemple comment

---

[36] En fait, l'attitude ultrarationaliste et anti-empiriste fut dominante dans la science grecque antique. Dans une étude intitulée « Observation et recherche » (*in* Jacques Brunschwig et Geoffrey Lloyd (eds), *Le savoir grec*, Flammarion, Paris, 1996, p. 250-275), Lloyd écrit ainsi par exemple (*loc. cit.*, p. 254) : « … les critères qui servaient à juger les théories physiques présocratiques sont la simplicité, ou l'économie, ou bien la force des raisonnements mis en œuvre pour les justifier, et non la richesse des donnés qu'elles contiennent. Dans l'ensemble, les philosophes présocratiques ne cherchèrent guère à *accroître* les données que leur fournissait la recherche empirique ; et en règle générale, ils n'essayèrent pas de recourir à l'expérience pour *trancher entre* les interprétations concurrentes de ces mêmes données, connues ou supposées. » Le même auteur conclut : « La nécessité de procéder à des observations et de pratiquer la recherche peut sembler relever à l'évidence du travail de quiconque s'est sérieusement livré à une enquête dans la science de la nature. Pourtant, l'histoire des notions, comme de la pratique, de l'observation et de la recherche dans l'Antiquité grecque montre que toutes deux ne se développèrent pas du jour au lendemain : elles posèrent des difficultés d'ordre pratique et conceptuel, et elles furent toujours controversées. La première difficulté réside dans les doutes exprimés sur la fiabilité de la sensation, et ensuite dans la préférence marquée des grands philosophes, à partir de Parménide, pour la raison et le raisonnement comme guides sûrs pour atteindre à la vérité. Toutefois, même chez ceux qui n'adoptèrent pas de positions ultrarationalistes, le simple fait de reconnaître que la perception a quelque valeur ne suffit pas en lui-même à stimuler la recherche délibérée. Celle-ci devait toujours être motivée soit par un problème théorique particulier qui exigeait une solution, soit par un cadre général d'explication qui dictait l'examen détaillé de divers phénomènes… »

on démontre tel ou tel théorème – comment on démontre la réciproque du théorème de la propriété des angles alternes-internes, etc. –, c'est-à-dire quelle est *la* démonstration de ce théorème. Bien entendu, cette conception absolutiste, représentée à l'aurore de l'histoire des mathématiques par les *Éléments* d'Euclide, a dû supporter divers outrages. À la fin du XIX^e siècle, comme on le sait, Hilbert et ses collaborateurs se sont employés à combler les lacunes, longtemps inaperçues, de l'édifice euclidien, qui rendaient un certain nombre de démonstrations défectueuses [37]. Surtout, dans les transpositions scolaires du système hypothético-déductif euclidien, il arrivait régulièrement que telle ou telle propriété doive être « admise », c'est-à-dire tenue pour un théorème de ce système alors même qu'on renonçait à lui donner « sa » démonstration. Qu'on accepte qu'un théorème soit admis reposait bien sûr, pour les élèves (sinon toujours pour le professeur), sur l'hypothèse métamathématique que toute propriété de l'espace effectivement rencontrée pourrait se déduire dans le système hypothético-déductif de la géométrie, système auquel s'identifiait, dans telle ou telle de ses transpositions, « la géométrie » elle-même. En vérité, la description précédente, faite au passé, constitue encore le paradigme de la connaissance géométrique scolaire.

3.8. Par contraste, on évoquera sommairement un autre paradigme, sur lequel la formation donnée aux élèves professeurs de l'IUFM d'Aix-Marseille prend appui. La géométrie y est d'abord définie comme la science de l'espace sensible (et donc, au fond, comme une partie de la physique). À ce titre, les propriétés géométriques ne sauraient avoir pour preuve ultime qu'une preuve de type *expérimental*. Cela noté, bien entendu, le travail mathématique sur ces propriétés consiste notamment en une activité de création d'*organisations déductives locales*. Étant donné une propriété, établie ou supposée, θ, on cherche à montrer que θ se laisse déduire de certaines propriétés, établies ou supposées, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$; ce qu'on notera ainsi : $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \vdash \theta$. On peut, au reste, ne rien supposer quant à la vérité de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \theta$; mais si la déduction évoquée a bien lieu, alors on peut en conclure que, si $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ sont des propriétés vraies dans l'espace que nous étudions, il en est de même de θ. Une grande partie de l'activité mathématique va ainsi être consacrée à établir des relations du type $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \vdash \theta$, sans pour autant que, à ce stade, on s'inquiète de savoir s'il existerait un ensemble de propriétés de l'espace, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, telles qu'une proposition θ soit vraie dans l'espace si

---

[37] *Grundlagen der Geometrie*, 1899. Voir la traduction française de Paul Rossier, parue en 1971 chez Dunod, Paris.

et seulement si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \vdash \theta$. Bien entendu, pour adopter une telle position épistémologique, il faut avoir renoncé à la croyance selon laquelle la connaissance du monde pourrait se déduire *a priori* de quelques principes ou axiomes, pour adopter l'idée « moderne » d'une connaissance expérimentale du monde dont les productions peuvent être organisées, confirmées, anticipées par un travail « théorique » de type hypothético-déductif. Or un tel changement de paradigme semble, aujourd'hui encore, bloqué, alors même que, pour des raisons certes plus pédagogiques qu'épistémologiques, Gustave Choquet, dans son livre publié en 1964, *L'enseignement de la géométrie* (Paris, Hermann), écrivait ceci :

> Le problème [de l'enseignement de la géométrie] est moins simple aux âges intermédiaires, disons entre 13 et 16 ans. L'enfant commence à comprendre ce qu'est une démonstration ; chez certains s'éveille une véritable soif de logique, indiquant que le temps est venu d'aborder sérieusement le raisonnement déductif. On va donc faire établir par l'enfant des morceaux de raisonnement déductif, en prenant soin de lui faire toujours préciser ses prémisses.

On voit ici s'opposer, à la notion de *démonstration*, les notions de *travail déductif* et de « morceaux de raisonnement déductif », que les programmes retiendront à travers l'expression d'*îlots déductifs* (expression qui apparaît encore dans le document d'accompagnement du programme de 6^{e} resté en vigueur jusqu'en 2004-2005). En même temps, en 1964, Choquet poursuit son propos dans des termes entièrement compatibles avec l'ancien paradigme, puisqu'il écrit : « Il est donc indispensable que le maître de ces enfants dispose d'une axiomatique sous-jacente complète. » À cet égard, il se contente de vouloir qu'une telle axiomatique soit « simple » (c'est-à-dire, en particulier, ne comporte pas de trop nombreux axiomes) et que les axiomes qui la composent, tout en étant « intuitifs » (c'est-à-dire énonçant des propriétés de l'espace aisées à vérifier expérimentalement), soient « forts » (c'est-à-dire permettent de déduire, par des chemins déductifs courts, des propriétés dont la vérification expérimentale ne va pas forcément de soi). Or l'insistance sur la connaissance d'*une* axiomatique par les professeurs – dans un livre où Choquet lui-même propose, de façon motivée, une *pluralité* d'axiomatiques ! – ne laisse pas de poser problème. Tout d'abord, elle reconduit subrepticement l'idée immémoriale d'une organisation hypothético-déductive *unique* à des variantes près, qui donnerait à chaque propriété examinée *sa* démonstration – pas forcément unique, certes, mais très fortement contrainte –, ce qui, nous semble-t-il, constitue un obstacle sérieux à l'idée et à la pratique de jeux déductifs locaux. Afin d'éclairer cette dernière remarque, on a reproduit ci-après un passage des notes du séminaire 2003-2004 des PCL2 de mathématiques dans lequel on voit comment le travail expérimental visant à mettre à l'épreuve la conjecture selon laquelle la somme des angles d'un triangle est égale à 180º peut être allégé grâce à un petit travail déductif judicieusement utilisé [38].

Mais on peut aller plus loin en réalisant une *déduction partielle* qui permette d'alléger la propriété soumise à l'expérience.

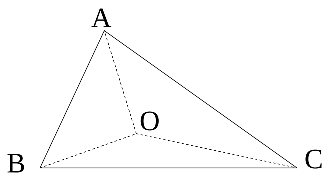
① On peut pour cela dissocier deux propriétés :

θ_1. La somme des angles d'un triangle est la même pour tout triangle.

θ_2. La somme des angles de tout triangle est un angle plat.

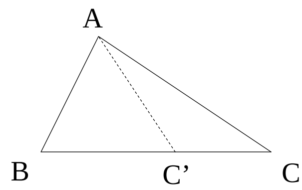
À l'évidence, l'assertion θ_2 implique l'assertion θ_1.

② Inversement, il est facile de *déduire* θ_2 de θ_1. Supposons en effet que la somme des angles de *tout* triangle soit de a degrés. Soit alors un triangle ABC et soit O un point intérieur à ABC.



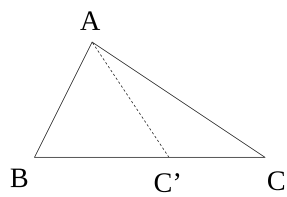
La somme des angles des triangles AOB, BOC, COA vaut 3a degrés. Par ailleurs cette somme vaut celle des angles de ABC, soit a degrés, augmentée des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$, dont la somme est de 360 degrés. On a donc $3a = a + 360$, soit $a = 180$.

③ On peut établir ce résultat plus simplement encore. Soit C' un point de]BC[.



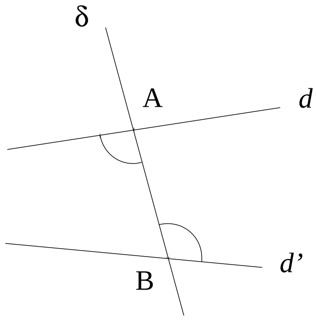
La somme des angles des triangles AC'B et AC'C, soit 2a degrés, est égale à la somme des angles du triangle ABC, soit a degrés, augmentée des angles $\widehat{AC'B}$ et $\widehat{AC'C}$, soit 180 degrés. On a ainsi $2a = a+180$, et donc $a = 180$.

④ On peut alors *soumettre à l'expérience* l'assertion θ_1 en réalisant l'expérience graphique suivante : on choisit un point C' sur]BC[; on vérifie que, lorsqu'on passe de C à C', la diminution de α degrés de l'angle $\widehat{BAC}$, qui devient $\widehat{BAC'}$, est égale à l'augmentation de β degrés de l'angle $\widehat{ACB}$, qui devient $\widehat{AC'B}$.

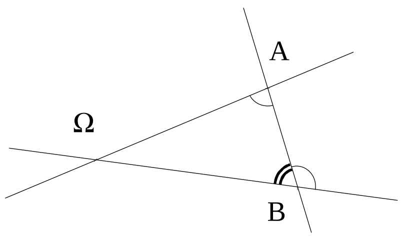


[38] Le matériel mathématique qui apparaît ci-après sera réutilisé en 2004-2005 dans une réponse apportée à des questions concernant la distinction entre hypothèses et données : voir, *supra*, § 2.2.

À la lourde cavalerie de la démonstration, il est ainsi loisible de préférer l'archerie légère du travail déductif « libre » (plutôt que surcontraint), dont la visée est plus ouverte et la portée plus large. À titre d'illustration, reprenons ici une dernière fois le problème de la propriété réciproque des angles alternes-internes. Supposons donc deux droites *d* et *d'* et une sécante δ coupant *d* en A et *d'* en B, avec A ≠ B. On suppose en outre que les angles alternes-internes formés par le couple (*d*, *d'*) et la sécante δ sont égaux.



Comment en déduire que, alors, *d* et *d'* sont parallèles ? Un raisonnement par l'absurde, ou plus précisément par contraposition, montre qu'il suffit d'établir que, si les droites *d* et *d'* se coupaient en un point Ω, alors les angles alternes-internes ne pourraient pas être égaux.



En ce cas, en effet, l'angle $\widehat{\Omega AB}$ (par exemple), ne serait pas supplémentaire de l'angle $\widehat{AB\Omega}$ (puisque, d'après le théorème sur la somme des angles d'un triangle, l'angle $\widehat{\Omega AB}$ est supplémentaire de la *somme* des angles $\widehat{AB\Omega}$ et $\widehat{A\Omega B}$) ; il ne pourrait donc pas être égal à l'angle alterne-interne de sommet $\widehat{B}$, ce qui achève la « démonstration » demandée, et prouve plus exactement que la réciproque de la propriété des angles alternes-internes se laisse déduire de la propriété sur la somme des angles d'un triangle. On voit ici clairement, en négatif, le lien existant, dans les manuels en usage, entre l'absence de cette démonstration et l'absence d'une définition des angles alternes-internes qui subsume le cas de droites *d* et *d'* non parallèles : rude solidarité des manques ! Plus généralement, on peut avancer que la soumission à une organisation déductive *a priori*, que porte en lui le paradigme démonstratif ancien, constitue un obstacle à l'imagination déductive qui, dans le travail concret de la classe, réduit fortement les occasions d'apprentissage en la matière. Au chemin unique que propose la voie démonstrative, le travail déductif libre substitue des cheminements divers, inattendus, qui multiplient les occasions de déduire et donc d'apprendre à déduire, en allégeant la lourde obligation traditionnelle de parvenir à tel résultat déterminé par tel chemin tracé à l'avance, qu'il s'agirait seulement de retrouver.

4. Quelles mathématiques ?

4.1. Le problème des savoirs et des connaissances mathématiques que la profession gagnerait à se rendre disponibles est au cœur de l'exercice du métier. La distinction que nous avons pointée entre mathématiques *à enseigner* et mathématiques *pour l'enseignant* constitue un point de départ pour aborder ce problème. Les mathématiques pour l'enseignant sont constituées de toutes ces connaissances – techniques, technologiques, théoriques – sans lesquelles, déjà, le professeur de mathématiques a du mal à saisir les tâches didactiques qu'il lui échoit d'accomplir. Plus largement, on peut désigner, sous l'appellation de mathématiques pour l'enseignant, toutes les mathématiques que celui-ci peut trouver avantage à mobiliser pour outiller sa pensée et son action. Pourtant, la distinction ainsi ébauchée apparaît rapidement insuffisante : c'est cette insuffisance qui motive l'introduction d'une notion plus spécifique, celle de mathématiques *pour l'enseignement*. L'observation et l'analyse de la formation des professeurs – notamment à travers le dispositif des questions de la semaine – montrent en effet que les difficultés naissent, pour le professeur, lorsqu'il se met en quelque sorte *au chevet* de la classe, c'est-à-dire au plus près des mathématiques à enseigner. En nombre de cas, la difficulté rencontrée en un tel contexte semble d'abord renvoyer à des mathématiques « savantes » qui, sans doute, peuvent être regardées comme participant des mathématiques pour l'enseignant. Mais, en nombre de cas aussi, ces mathématiques savantes se présentent dans une forme qui les rend impropres, si l'on peut dire, à la consommation professionnelle par le professeur – par le professeur en tant que professeur, et non pas seulement en tant qu'esprit curieux de mathématiques. D'où la nécessité de ce que nous avons appelé, dans le chapitre 2 de ce mémoire, des *élaborations mathématiques intermédiaires*, dont une part essentielle des matériaux vient des mathématiques savantes, mais dont une partie doit être en quelque sorte créée « sur le terrain », au chevet des mathématiques à enseigner et de leur enseignement. On est alors devant un problème de transposition institutionnelle des savoirs mathématiques ; et, là comme ailleurs, on doit constater combien le manque d'un travail transpositif approprié, au sein de la noosphère de l'enseignement des mathématiques, fait problème ! C'est ce jeu entre mathématiques à enseigner, mathématiques pour l'enseignant et mathématiques pour l'enseignement que nous allons tenter d'illustrer et d'analyser dans ce qui suit.

4.2. Nous partirons d'une question régulièrement soulevée par les élèves professeurs de deuxième année ayant en responsabilité une classe de seconde, question qui concerne le passage du programme que nous reproduisons ci-après.

> La définition de $\sin x$ et $\cos x$ pour un réel x quelconque se fera en « enroulant $\mathbb{R}$ » sur le cercle trigonométrique. On fera le lien avec les sinus et cosinus de 30º, 45º et 60º.

Ce commentaire du programme fait lui-même l'objet d'une glose dans le document qui accompagne le programme, où on lit notamment ceci.

> La notion d'angle orienté est introduite en géométrie […] ; la notion de cercle trigonométrique sera introduite ici. Un logiciel de géométrie dynamique sera alors particulièrement utile pour bien montrer comment l'ensemble des nombres réels *s'enroule* sur le cercle et comment varient les projections de l'extrémité d'un arc AM en fonction de la longueur de cet arc.

Ce passage ne peut guère être lu par un élève professeur aujourd'hui, qui ne dispose en général ni des connaissances mathématiques savantes, ni des « connaissances mathématiques pour l'enseignant » nécessaires pour voir clairement ce dont il s'agit. Il en allait autrement au temps de la réforme des mathématiques modernes. Celle-ci avait apporté dans la noosphère des connaissances mathématiques pour l'enseignement dont certaines étaient devenues du même coup des mathématiques *à enseigner*. Ainsi en allait-il notamment avec la distinction entre « grand sinus » et « grand cosinus » d'un côté, du « petit sinus » et du « petit cosinus » de l'autre : les premiers étaient des applications du groupe des angles dans $[-1, 1]$ (on a, par exemple, $\text{Sin } 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\text{Cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$), les seconds étant des applications de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$, avec, par exemple $\sin 30 = \text{Sin } (30 \text{ rad}) = -0{,}988\ldots$, $\cos 45 = \text{Cos } (45 \text{ rad}) = 0{,}525...$ Or, plus de trente ans après la réforme des mathématiques modernes, tout cela est devenu à peu près illisible pour de jeunes professeurs. Cette illisibilité se manifeste par des questions qui, notons-le en passant, apparaissent assez tardivement dans l'année, sans doute à cause d'une programmation de l'enseignement en classe de seconde qui ne donne pas en général une priorité à l'abord des fonctions sinus et cosinus. En 2001-2002, lors de la 17e semaine, de façon un rien mystérieuse, une élève professeure indique ceci : « J'ai compris comment on enroulait $\mathbb{R}$ sur le cercle, mais je ne vois pas comment s'en servir pour définir cos *x* et sin *x*. Pourriez-vous m'éclairer ? Merci. » Lors de la semaine 18, un autre élève professeur demande « comment motiver l'enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique ». Cette dernière question semble avoir décidé le responsable du séminaire à apporter des éléments de réponse – nous allons y venir –, en se référant en outre à une question posée dès la semaine 14 : « Le fait d'enrouler la droite réelle sur le cercle unité est une expérience. Il n'existe pas de transformation correspondant à cette expérience. Comment donc légitimer les résultats obtenus ? » Ce qui est frappant en tout cela, c'est que le questionnement suscité par le projet d'enseigner ne permet pas, à lui seul, de *cerner la véritable difficulté* : on patauge. En 2003-2004, semblablement, une question formulée lors de la 15e semaine indique : « Je ne sais pas trop comment motiver l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique sans que cela ne me paraisse trop artificiel et imposé. » Ce qui fait problème, donc, c'est qu'on ne voit pas clairement pourquoi on enroulerait la droite réelle sur le cercle trigonométrique, bien qu'on déclare que l'on voit parfaitement comment on réalise cet enroulement (qui, pour l'auteur de la question de la semaine 14 en 2001-2002, est une « expérience »). Lors de la semaine 20 de l'année 2003-2004, une autre question est posée. Cette fois, comme on le verra, la dérive « pédagogiste » est plus nette encore : l'élève professeur s'y dit confronté aux contraintes d'une réalisation informatique qu'il projette mais qui, craint-il, serait terriblement mangeuse de temps, et s'interroge donc sur le bon usage des différents dispositifs d'étude disponibles.

> Je souhaite faire l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique en salle d'informatique avec mes élèves sur Géoplan, mais aussi faire tracer (par le logiciel) les courbes sinus et cosinus en déplaçant un point sur la droite des réels. Mon problème est que je pense que c'est trop long pour une heure (de 14 h à 15 h, le lundi – y passer deux heures m'obligerait à attendre une semaine entre les deux séances). Puis-je leur introduire l'enroulement de la droite des réels avant en classe, afin de le comprendre mieux et plus vite sur Géoplan ? (2003-2004, 2de, semaine 20)

On a là une conduite typique d'invocation de difficultés secondes, d'allégation d'obstacles qui apparaissent comme autant d'écrans masquant le cœur du problème. La difficulté évoquée serait-elle levée si, d'un coup de baguette magique, cet élève professeur se voyait accorder une séance exceptionnelle de deux heures – par exemple de 14 h à 16 h, un lundi ?... Un autre élève professeur, toujours en 2003-2004, lors de la 22e semaine, met sincèrement en avant une autre difficulté, qui ne tient pas, elle, à des problèmes d'horaires, mais à la faisabilité logicielle de l'opération demandée par le programme :

> Selon le document d'accompagnement du programme de 2de, l'enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique peut être visualisé à l'aide de logiciels de géométrie dynamique. Je n'arrive pas à comprendre comment on peut faire apparaître cet enroulement où l'on passe d'une droite qui se courbe pour s'enrouler sur un cercle. Est-ce vraiment réalisable sur un logiciel ? Lequel est le plus efficace ? (2003-2004, 2de, semaine 22)

Lors de la 24e semaine de la même année, c'est-à-dire de la dernière semaine de formation de l'année, une autre question éliminera tous les problèmes liés à l'usage d'un logiciel. Mais son auteur y invoque ce qu'il faut tout de même regarder, ici, comme une difficulté-écran – comment expliquer la chose aux élèves si l'on ne dispose que du tableau pour cela ?

> Le programme officiel de 2de préconise l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour expliquer l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique. Mais comment expliquer cela au tableau, quand on ne peut pas faire autrement ? (2003-2004, 2de, semaine 24)

En 2004-2005, à la 21e semaine, une question plus directe est posée, qui situe quand même la difficulté dans l'« explication » à donner aux élèves :

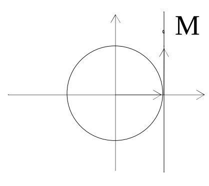
> Pour la trigonométrie, les commentaires du programme indiquent qu'il faut l'expliquer par un enroulement de ℝ sur un cercle. Comment expliquer ce phénomène ? (2004-2005, 2de, semaine 21)

Que l'on prenne pour écran qui masque le cœur du problème l'usage officiellement requis d'un logiciel ou, alibi toujours disponible, l'explication à donner aux élèves, la rhétorique ne varie guère. En 2001-2002, par exemple, une question de la 18e semaine fait valoir cette difficulté : « comment motiver l'enroulement de ℝ sur le cercle trigonométrique ? » En 2000-2001, c'est-à-dire la première année où s'applique le nouveau programme de seconde, une question formulée lors de la 23e semaine prend les choses avec davantage de recul, sans pour autant rompre avec la rhétorique allusive ordinairement mise en œuvre, qui multiplie les références aux « symptômes » d'un mal que, en même temps, elle occulte.

> En seconde, les angles orientés sont définis par « enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique », soit par un procédé assez éloigné de la géométrie plane habituelle de 2de. Comment faire le lien avec les angles géométriques ? Quels angles utiliser dans les rotations ? (2000-2001, 2de, semaine 23)

Quelle est la réalité de la difficulté ? Une autre question, posée en 2000-2001 lors de la 15e semaine, nous mettra sur la piste :

> Que doit-on attendre des élèves [à propos des fonctions sinus et cosinus] ? Seulement ceci : placer le point *m* du cercle trigonométrique qui correspond au point M d'abscisse *x* et en déduire cos *m* et sin *m* ? (2000-2001, 2de, semaine 15)



La confusion commise par l'auteur de la question est révélatrice – de même que, à l'examiner sans être dupe de son apparente naïveté, l'était la question, reproduite plus haut, mentionnant l'incompréhension de son auteur devant « cet enroulement où l'on passe d'une droite qui se courbe pour s'enrouler sur un cercle ».

4.3. De quelles connaissances ces élèves professeurs ont-ils besoin pour identifier le problème qui les arrête sans qu'ils soient capables de le formuler véritablement ? On se réfèrera maintenant à l'intervention de l'animateur du séminaire sur cette question. Lors de l'année 2000-2001, qui inaugurait le nouveau programme de seconde, on ne trouve, dans les notes écrites du séminaire, aucun développement significatif à ce propos : les deux questions mentionnées ci-dessus, l'une de la 15^e^ semaine, l'autre de la 23^e^ (c'est-à-dire de la pénultième séance), n'ont pas enclenché ce que le responsable du séminaire appellerait une « dynamique », c'est-à-dire un travail, sur la question de l'enroulement. La première question, si elle apparaît révélatrice d'une incompréhension, apparaît en effet isolée et singulière ; la question de la 23^e^ semaine est sans doute trop large et trop tardive pour motiver un travail qui apparaît lui-même, *a priori*, nécessairement étendu. Une autre situation va prévaloir en 2001-2002 : cette fois, le responsable du séminaire se trouve face à une suite de quatre questions qui s'étagent entre la 14^e^ et la 18^e^ séance, et que nous reprenons ci-après pour mémoire.

1. Le fait d'enrouler la droite réelle sur le cercle unité est une expérience. Il n'existe pas de transformation correspondant à cette expérience. Comment donc légitimer les résultats obtenus ? (2000-2001, 2^de^, semaine 14)

2. Doit-on parler en classe de 2^de^ de mesure principale ? (2000-2001, 2^de^, semaine 15)

3. Dans le domaine *Calcul et fonctions*, à propos des fonctions de référence, et plus précisément à propos des fonctions sinus et cosinus, le programme précise : « La définition de sin x et cos x pour un réel x quelconque se fera en “ enroulant $\mathbb{R}$ ” sur le cercle trigonométrique ». J'ai compris comment on enroulait $\mathbb{R}$ sur le cercle, mais je ne vois pas comment s'en servir pour définir cos x et sin x. Pourriez-vous m'éclairer ? Merci. (2000-2001, 2^de^, semaine 17)

4. À l'occasion de l'étude du thème « Fonctions de référence » j'ai fait le choix de ne pas traiter dans cette partie les fonctions sinus et cosinus mais de les traiter dans une partie distincte. Est-ce un choix judicieux ? De plus, comment motiver l'enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique ? Et qu'apporte la notion de radian ? (2000-2001, 2^de^, semaine 18)

Cette circonstance n'a sans doute pas joué de façon totalement isolée. À parcourir les notes de l'année 2001-2002, on s'aperçoit que la dynamique complexe du séminaire a, cette année-là, donné une place un peu inhabituelle aux questions de trigonométrie. Dès la séance 3, ainsi, quoique de manière tout à fait oblique, la trigonométrie est mentionnée dans une explicitation concernant les comptes rendus demandés aux participants [39]. Pour faire sentir que ces comptes rendus ne sauraient se réduire à « une sèche table des matières », le responsable du séminaire écrit ceci :

> À titre de suggestion sur laquelle méditer, on a reproduit ci-après la table des matières relative à un chapitre d'un manuel de trigonométrie d'autrefois (Georges Durand, *Pour comprendre la trigonométrie*, Doin, Paris, 1947) : on s'interrogera sur l'information supplémentaire minimale qui, pour le lecteur d'aujourd'hui au moins, rendrait plus tangibles les réalités qui y sont évoquées.
>
> CINQUIÈME LEÇON : **Cotangente, Sécante et Cosécante**
>
> 59. Définition de la cotangente. – 60, 61. Sa représentation. – 62. Ses variations. – 63. Son utilité. – Règle et formules générales. – 65 à 67. Application. – 68. Tangente et cotangente. – 69. Rôle de la cotangente. – 70. Remarque. – 71. La sécante. – 72, 73. La cosécante. – 73 *bis*. Le grade, unité d'angle.

Paradoxalement, cette première rencontre avec la trigonométrie est là pour désorienter les élèves professeurs, afin de leur faire comprendre que des explicitations sont, en règle générale, nécessaires, même sur des matières que l'on *croit* connaître. Une deuxième référence dans le séminaire aux choses de la trigonométrie va apparaître lors de la 6e séance, dans la réponse apportée à la question suivante.

> J'ai une classe de 2de en responsabilité. Parmi mes élèves, un bon quart est constitué de redoublants, qui sont loin d'être mauvais. Le problème, c'est qu'ils se plaignent de s'ennuyer quand on corrige les exercices (ici, c'était des exercices sur les intersections et les réunions d'intervalles) alors que d'autres, parmi les non-redoublants, ont des problèmes pour les faire. Que dois-je faire ? Suis-je supposée leur donner un exercice à faire, plus dur, pour les occuper – surtout quand un de ces redoublants me « demande » si on ne pourrait pas plutôt faire le cercle trigonométrique alors que la plupart des élèves ne savent même pas ce que c'est ? (2001-2002, 2de, semaine 5)

Dans un développement relativement substantiel, le responsable du séminaire souligne en particulier que « l'occasion de l'épisode rapporté dans la question mérite elle-même une réflexion », et écrit à ce propos :

[39] Chaque semaine, des participants au séminaire sont chargés de rédiger des *comptes rendus de séance* qui constitue une forme de cahier de textes consultable par chacun (en plus des notes rédigées par le responsable du séminaire). Ce dispositif n'a pas été reconduit en 2005-2006.

> … tout se passe comme si ces élèves avaient en tête leur « menu idéal » de formation – lequel, en l'espèce, inclut le « cercle trigonométrique », mais exclut ou marginalise l'algèbre ensembliste des intervalles de ℝ.

Il ajoute alors ceci, qui est de nature à attirer l'attention du séminaire (et donc de lui-même), sur la question dite du cercle trigonométrique :

> … s'il n'est nullement surprenant que des redoublants voient le « cercle trigonométrique » comme un thème saillant du programme de 2^de^, sur lequel ils souhaitent d'autant plus revenir qu'ils ont moins cherché à en pénétrer le sens (à l'instar de ces élèves qui réclamaient indéfiniment du professeur d'anglais qu'il leur explique *since*, *for* et *ago*…), il n'est pas davantage surprenant qu'ils regardent le sujet des réunions et intersections d'intervalles comme mineur, et à dépasser sans délai !

À cette reconnaissance de fait, le même formateur apposera fermement une conclusion conforme à l'ensemble des éléments de sa réponse, et tout à fait dénué d'ambiguïté :

> Bien entendu, le professeur ne saurait se soumettre à une telle injonction sans renoncer *ipso facto* à honorer les responsabilités qui sont les siennes dans le traitement du programme.

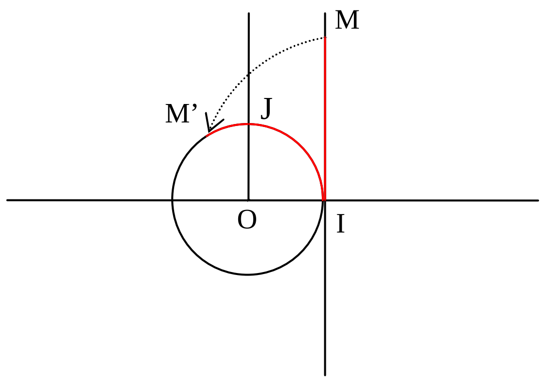
Il faut ensuite sauter à la 15e séance du séminaire pour trouver de nouveaux apports à la question de la trigonométrie. Le travail engagé concerne les systèmes de nombres utiles au collège puis au lycée. Après des développements divers relatifs aux corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\pi)$, les notes de la séance indiquent que le corps $\mathbb{Q}$ ne saurait suffire dès lors que l'on parle de racine carrée, et qu'il faut alors, « en théorie », passer au corps $\mathcal{C}$ des nombres constructibles, « soit le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par $\sqrt{}$ ». C'est alors que survient le développement suivant, à la fois concis et dense.

> ❸ Mais cela ne suffit pas : un nouvel enrichissement numérique doit en théorie être envisagé. Il est lié à l'introduction – en 6e – du *rapporteur* gradué en *degrés* (et, par suite, à la considération d'angles mesurés en degrés par un entier ou un décimal), puis à la définition de ces « rapports trigonométriques » que sont le *cosinus* (en 4e), le *sinus* et la *tangente* (en 3e) d'un angle *aigu* : le problème est en effet que certains angles ne sont pas constructibles à la règle et au compas, et donc que les rapports trigonométriques correspondants *ne sont pas* des réels constructibles. On démontre ainsi, classiquement, que, par exemple, il en est ainsi de l'angle de 20º, et donc aussi des angles de 1º, 2º, 4º, 5º (alors que l'angle de 3º est, lui, constructible).

❹ Pour être tout à fait à l'aise, il conviendrait de se placer dans le corps $\mathcal{A}$ des réels *algébriques* : les angles usuellement manipulés au collège sont des multiples rationnels de π radians (on a par exemple $20° = \frac{1}{9}\pi$ rad, $37° = \frac{37}{180}\pi$ rad, etc.). Or, pour k, $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur des fonctions trigonométriques sur un réel de la forme $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ ($\in \mathbb{Q}[\pi]$) est toujours algébrique : l'identité $Re[(\cos\theta + i \sin\theta)^n] = 1$, où *Re* désigne la partie réelle d'un nombre complexe, se récrit en effet sous la forme $P(\cos\theta) = 0$, où P est un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$, en sorte que $\cos\theta$ est un nombre algébrique, ce qui entraîne qu'il en est de même de $\sin\theta$ et, chaque fois qu'elle est définie, de $\tan\theta$.

Il y a là, pour la première fois, un développement tout à fait inédit pour ces élèves professeurs, qui pourrait leur laisser penser que la science utile à leur activité professionnelle reste à identifier avec davantage de précision ! La question de la trigonométrie va resurgir lors de la séance 18, mais cette fois dans un cadre tout concret [40]. C'est à la 19e séance du séminaire que son responsable va répondre aux quatre questions rappelées plus haut. Une première partie de cette réponse consiste à réfuter l'affirmation selon laquelle l'enroulement ne correspond à aucune transformation mathématique, puis à indiquer comment cet enroulement permet de définir les fonctions sinus et cosinus, avant de développer rapidement les principaux résultats qui en découlent.

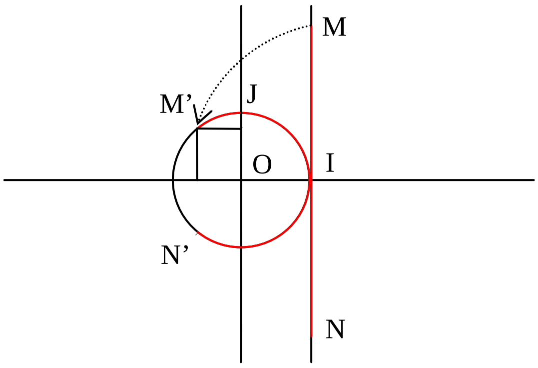
② L'enroulement évoqué peut être « matérialisé » par celui de la (demi-)droite (IM) comme le montre la figure ci-après : M vient en M' tel que longueur de $\overset{\frown}{IM'}$ = IM.



[40] À propos de la détermination du rayon de la Terre attribuée à Hipparque (vers −150), les notes du séminaire indiquent que Hipparque, qui « avait déterminé les sinus avec une grande précision (5 décimales exactes) », peut être regardé « comme le fondateur de la trigonométrie ».

❶ Soit t l'abscisse de M dans le repère (I, $\overrightarrow{OJ}$). Soit θ la mesure en radian de $\widehat{IOM'}$; on a : longueur de $\overset{\frown}{IM'}$ $= \theta \times 1 = t$. Le point M' a donc pour coordonnées : $x_M = \cos\theta = \cos t$, $y_M = \sin\theta = \sin t$. Dans le plan complexe, la transformation qui fait passer de M à M' s'écrit donc : $1 + \mathrm{i}t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

❷ Le programme privilégie l'enroulement de $[0, 2\pi[$ ou encore de $[-\pi, \pi[$ (ci-contre).



En conséquence, il n'apparaît pas utile de parler de mesure *principale* : que l'on choisisse de mesurer les angles avec les réels de l'intervalle $[-\pi, \pi[$ ou de l'intervalle $[0, 2\pi[$, chaque angle aura *une* mesure, et non une infinité (même si les fonctions cosinus et sinus, définies sur $\mathbb{R}$, prennent une infinité de fois chacune de leurs valeurs).

③ Si l'on admet comme « évident » l'enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle de rayon 1, ce qui est le point de vue du programme de 2^de^, on peut alors *définir* les fonctions sinus et cosinus par $\begin{cases} \cos t = x_M \\ \sin t = y_M \end{cases}$.

❶ Pour $t = 0$ on a M = I et donc $\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \sin 0 = 0 \end{cases}$.

❷ Le cercle trigonométrique étant de longueur 2π, pour $t = 2\pi$ on a de même M = I et donc $\begin{cases} \cos 2\pi = 1 \\ \sin 2\pi = 0 \end{cases}$. Plus généralement, on aura $\begin{cases} \cos 2k\pi = 1 \\ \sin 2k\pi = 0 \end{cases}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

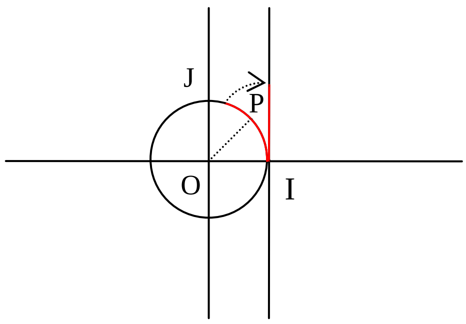
❸ On a de même

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0 \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 \end{cases}$$

ainsi que $\begin{cases} \cos(\pi + 2k\pi) = -1 \\ \sin(\pi + 2k\pi) = 0 \end{cases}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

❹ Les résultats précédents restent vrais pour $k \in \mathbb{Z}$. On a de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ et donc $-1 \leq \cos t, \sin t \leq 1$. Pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$ et, pour $t \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$, etc.

❺ Soit P le point du cercle trigonométrique tel que $\widehat{IOP} = 45°$. Quel est le point M de $[0, 2\pi[$ qui, par enroulement, va se superposer à P (voir ci-après) ?



La longueur de l'arc $\overset{\frown}{IP}$ est égale à la moitié de celle du quart de cercle, soit $\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}$; il est clair que $\cos\dfrac{\pi}{4} = x_P = y_P = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, valeurs qui vérifient bien l'égalité $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

❻ Les points Q et R tels que $\widehat{IOQ} = 30°$ et $\widehat{IOR} = 60°$ correspondent de même, respectivement, aux points M de paramètre $t_{30} = \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ et $t_{60} = \frac{2}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$. Le triangle OIR étant équilatéral, l'abscisse de R est $\frac{1}{2}$ et on a donc : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Par suite, on a : $\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. En considérant de même le triangle OJQ, on obtient :

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

❼ On établit un certain nombre d'identités à l'aide de transformations élémentaires.

• La symétrie d'axe (OP) échange les abscisses et les ordonnées des points de l'arc $\overset{\frown}{IO}$. On a ainsi, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \end{cases}.$$

• En considérant la symétrie d'axe (OJ), on établit de même qu'on a, pour $t \in [0, \pi]$, $\begin{cases} \cos(\pi - t) = -\cos t \\ \sin(\pi - t) = \sin t \end{cases}$.

• La symétrie d'axe (OI) conduit semblablement à conclure que, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, on a $\begin{cases} \cos(-t) = \cos t \\ \sin(-t) = -\sin t \end{cases}$.

• La symétrie de centre O permet d'écrire que, pour $t \in [0, \pi]$, on a $\begin{cases} \cos(t + \pi) = -\cos t \\ \sin(t + \pi) = -\sin t \end{cases}$.

• On peut étendre ces égalités à $\mathbb{R}$ tout entier. Si, par exemple, $t = t_0 + 2k\pi$, où $\in \mathbb{Z}$, avec $t_0 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. On a $t_0 - \pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{2} - (t_0 - \pi)\right) = \sin(t_0 - \pi) = -\sin t_0$. En observant que $\frac{\pi}{2} - (t_0 - \pi) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t_0\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - t_0 + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - (t_0 - \pi)\right) = -(-\sin t_0) = \sin t_0$. Il en découle aussitôt que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$.

4.4. Le développement précédent ne délivre pas le scénario d'un enseignement ; mais il brosse rapidement l'essentiel des mathématiques pour l'enseignement utiles au professeur. La réponse n'est pas terminée pour autant. Le responsable du séminaire la poursuit en ajoutant trois développements de nature assez distincte. Le premier, fort succinct, et qui relève, certes, des mathématiques pour l'enseignant, fait référence à une propriété fondamentale dont l'examen ne sera pas poursuivi dans ce contexte de formation [41].

④ Il n'est pas possible de justifier au lycée l'existence d'un « enroulement » de la droite réelle sur le cercle trigonométrique, qui découle des propriétés topologiques de $\mathbb{R}$: il existe d'ailleurs des sous-corps $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}$ assez « riches » pour servir de corps de base à la géométrie « élémentaire » et tels pourtant qu'on ne puisse pas « enrouler » la droite numérique $\mathcal{K}$ sur le cercle trigonométrique $T_{\mathcal{K}} = \{ (x, y) \in \mathcal{K} / x^2 + y^2 = 1 \}$.

Le second relève lui aussi des mathématiques pour l'enseignant, dont la fonction est d'éclairer les mathématiques pour l'enseignement que le responsable du séminaire présentera ensuite. Il s'agit d'une construction qui fut classique dans la période de la réforme des mathématiques modernes, et dont nous avons évoqué certaines des conclusions. Nous la reproduisons ici *in extenso*.

⑤ La question se pose, en revanche, de motiver la construction esquissée ci-dessus. Pour cela, un certain nombre de points doivent être précisés, dont la distinction entre *angles* et *mesure* des angles : on commence donc par la notion d'angle.

❶ Dans la construction « moderne » de la géométrie du plan, on en est venu à définir l'angle des demi-droites Δ_1 et Δ_2 d'origine O (ou l'angle « que fait Δ_2 avec Δ_1 ») comme l'unique *rotation* r de centre O qui transforme Δ_1 en Δ_2 : $r(\Delta_1) = \Delta_2$. Plus exactement, les rotations de centre O formant un groupe commutatif $SO(\mathbb{R}^2)$, on introduit de manière formelle un *groupe additif* $\mathcal{A}$, dit *groupe des angles*, isomorphe au groupe $SO(\mathbb{R}^2)$.

❷ On peut concrétiser le groupe $\mathcal{A}$ en prenant pour ensemble sous-jacent l'ensemble quotient de l'ensemble des angles de demi-droites par la relation d'équivalence définie par

$$(\Delta_1, \Delta_2) \sim (\Delta_1', \Delta_2') \Leftrightarrow \text{il existe } \rho \in SO(\mathbb{R}^2) \text{ tel que } \Delta_1' = \rho(\Delta_1) \text{ et } \Delta_2' = \rho(\Delta_2).$$

Cette définition est compatible avec la précédente. Si, en effet, $r \in SO(\mathbb{R}^2)$ est telle que $\Delta_2 = r(\Delta_1)$ et si on a $(\Delta_1, \Delta_2) \sim (\Delta_1', \Delta_2')$ avec $\rho \in SO(\mathbb{R}^2)$ tel que $\Delta_1' = \rho(\Delta_1)$ et $\Delta_2' = \rho(\Delta_2)$, on a aussi $r(\Delta_1') = r(\rho(\Delta_1)) = \rho(r(\Delta_1)) = \rho(\Delta_2) = \Delta_2'$. On peut noter $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ l'angle du couple (Δ_1, Δ_2) ; on dit que c'est

[41] Pour éclairer le passage ci-après, on pourra consulter l'annexe 1 de l'ouvrage de Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (troisième édition corrigée et augmentée, Hermann, Paris, 1968).

l'angle de la rotation r qui transforme Δ_1, Δ_2. Pour toute rotation ρ, on a ainsi : $\widehat{(\rho(\Delta_1), \rho(\Delta_2))} = \widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$.

❸ Montrons maintenant que toute *isométrie* f qui laisse (0, 0) fixe est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

• Soit M(x, y) un point de $\mathbb{R}^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note N le point de coordonnées (λx, λy) ; on doit montrer que N' = λM', où N' = f(N) et M' = f(M). Supposons $\lambda > 0$; on a ON = OM + MN. Comme f est une isométrie, on a ON' = ON, OM' = OM, M'N' = MN en sorte qu'on a aussi ON' = OM' + M'N' : cette égalité indique que O, M', N' sont alignés, avec M' entre O et N'. On a en outre ON' = ON = λOM = λOM', et donc N' = λM'. Le cas $\lambda < 0$ se traite de manière analogue.

• Soit maintenant M et N deux points de $\mathbb{R}^2$. La technique déjà mise en œuvre permet de montrer que le milieu de [MN] est transformé par toute isométrie en le milieu de [M'N'], où N' = f(N) et M' = f(M). On a donc $f\left(\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}}{2}\right) = \frac{\mathrm{M'}+\mathrm{N'}}{2}$. Il vient ainsi : $f(\mathrm{M}+\mathrm{N}) = f\left(2\,\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}}{2}\right) = 2f\left(\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}}{2}\right) = 2\frac{\mathrm{M'}+\mathrm{N'}}{2} = \mathrm{M'} + \mathrm{N'}$. L'application f est donc bien linéaire.

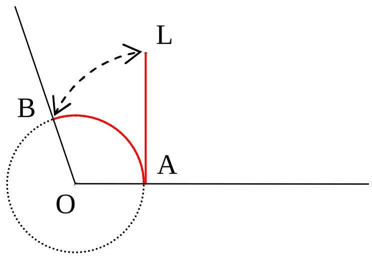
❹ Soit une rotation r et soit I' = (a, b) l'image de I par r. Soit par ailleurs φ la rotation de centre O qui transforme I en J ; la rotation φ^2 est la symétrie de centre O. Comme on a r(I) = I' = aI + bJ il vient r(J) = r(φ(I)) = φ(r(I)) = φ(aI + bJ). La rotation φ étant linéaire, il vient : r(J) = $a\varphi$(I) + $b\varphi$(J) = aJ – bI = – bI + aI. La matrice de r est donc $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

❺ On peut si l'on veut – c'est ce qu'on fait traditionnellement, et c'est ce que l'on fait au collège aujourd'hui encore – introduire le cosinus et le sinus d'un *angle*. Mais les applications $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} \mapsto \mathrm{Cos}\,\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ et $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} \mapsto \mathrm{Sin}\,\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ sont alors des applications, non de $\mathbb{R}$ dans [–1, 1], mais du *groupe des angles* $\mathcal{A}$ dans [–1, 1]. On doit donc les distinguer des applications $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin t$ de $\mathbb{R}$ dans [–1, 1] dont la définition a été rappelée plus haut. Cette distinction était marquée autrefois par le fait d'adopter les notations Cos et Sin pour les fonctions *d'un angle*, et cos et sin pour les fonctions *d'un réel* (les élèves parlaient du « grand cosinus » et du « petit cosinus », etc.). La matrice d'une rotation d'angle $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ se note alors :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} & -\,\mathrm{Sin}\,\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} \\ \mathrm{Sin}\,\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} & \mathrm{Cos}\,\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} \end{bmatrix}.$$

Le troisième développement va alors enrichir l'apport en mathématiques pour l'enseignement en traitant d'une question élémentaire, abordée ici de la façon la plus concrète et détaillée, sans doute parce qu'elle apparaît comme très étrangère à la culture moyenne des élèves professeurs.

⑥ Pour mesurer un angle, l'idée de base est de mesurer la longueur de l'arc qu'il intercepte sur un cercle de rayon R centré en son sommet.



❶ Bien entendu, admettre que l'opération est possible, c'est essentiellement admettre qu'on peut enrouler la droite réelle sur un cercle…

❷ La mesure obtenue est *a priori* non définie, puisqu'elle dépend de la mesure R du rayon $R\ell$, où ℓ est l'unité de longueur choisie dans le plan (centimètre, etc.). Pour cette raison, on choisit une unité de mesure de la longueur des arcs, u, qui soit proportionnelle à R, ce qu'on peut écrire $u = \frac{\pi R}{a}\ell$, le nombre a étant tel que la longueur du demi-cercle vaut $a\,u$.

• Si l'on prend pour unité u la longueur d'un arc égal à la n-ième partie du demi-cercle, on a $u = \frac{\pi R}{n}\ell$ et donc $a = n$. L'angle d'un couple de demi-droites interceptant un arc de longueur u est dit d'un *degré* si $n = 180$, d'un *grade* si $n = 200$, etc. Ainsi, pour $n = 180$, un couple de droites (Δ_1, Δ_2) interceptant un arc dont la longueur vaut les $\frac{3}{8}$ de la longueur du cercle, soit un arc de longueur $\frac{3}{8} \times 360\,u = 135\,u$, est alors l'angle de 135 degrés, noté 135º : $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = 135^\circ$.

• Si l'on prend pour unité u la longueur du cercle, c'est-à-dire si $a = \frac{1}{2}$, on a $u = 2\pi R\ell$. L'angle correspondant est dit alors d'un *tour*. Ainsi un couple de droites (Δ_1, Δ_2) interceptant un arc dont la longueur vaut les $\frac{3}{8}$ de la longueur du cercle, soit un arc de longueur $\frac{3}{8}\,u = 0{,}375\,u$, est l'angle de 0,375 tour (ou de trois huitièmes de tour).

• Si l'on prend pour unité u la longueur d'un arc ayant même longueur que le rayon R du cercle, on a $u = R\ell$ et donc $a = \pi$. L'angle correspondant est dit alors d'un *radian* (du latin *radius*, rayon). Ainsi un couple de droites (Δ_1, Δ_2) interceptant un arc dont la longueur vaut les $\frac{3}{8}$ de la longueur du cercle, soit un arc de longueur $\frac{3}{8}(2\pi\,u) = 0{,}75\pi\,u$, est l'angle de $0{,}75\pi$ radians, ou $\frac{3\pi}{4}$ radians (noté $0{,}75\pi$ rad) : $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \frac{3\pi}{4}$ rad. On a ainsi : $\frac{3\pi}{4}$ rad $= 135^\circ$.

• On évitera de parler de l'angle « de π », manière de dire qui n'a pas plus de sens que de parler de l'angle « de 3 ». On prendra soin de parler de l'angle *de π radians*, de l'angle *de* 3 *degrés*, voire – pourquoi pas ? – de l'angle de π degrés ou de l'angle de 3 radians.

❸ Les conversions de mesures peuvent se faire par un calcul qui rend inutile tout tableau de proportionnalité, à partir des égalités de base 180º = π rad, 1 tour = 2π rad, etc. On a ainsi par exemple : $\frac{3\pi}{4}$ rad = $\frac{3}{4}$ (π rad) = $\frac{3}{4} \times 180^{\circ} = 135^{\circ}$. Inversement, on a : $135^{\circ} = \frac{135}{180} \times 180^{\circ} = \frac{135}{180} \times \pi$ rad = $\frac{3}{4} \times \pi$ rad = $\frac{3\pi}{4}$ rad. De même, on obtient : $\frac{3\pi}{4}$ rad = $\frac{3}{8}$ (2π rad) = $\frac{3}{8}$ tour = 0,375 tour.

⑦ En vertu de ce qui précède on a par exemple : $\mathrm{Cos}(135^{\circ}) = \mathrm{Cos}\left(\frac{3\pi}{4}\text{ rad}\right) = \mathrm{Cos}(0{,}375\text{ tour}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mais une expression comme cos 135 ou cos $\frac{3\pi}{4}$ est dénuée de sens tant que l'on n'a pas définie une application, notée cos (« petit cosinus »), de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4.5. Ce qui précède est l'essentiel du viatique que le séminaire apportera aux élèves professeurs de l'année 2001-2002 sur la question de l'enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique – comme, plus généralement, sur la question de la mesure des angles et de la définition des fonctions trigonométriques. On notera en passant que la question relative à l'usage du logiciel a été – volontairement ou involontairement ? – oubliée, sans doute parce qu'elle n'apparaissait pas prioritaire pour démêler le problème d'enseignement posé par les participants au séminaire [42]. On notera surtout que le traitement mathématique éventuellement donné, dans les enseignements situés en amont de la deuxième année d'IUFM [43], aux questions envisagées ici apparaît en général insuffisamment apprêté : c'est là un hiatus handicapant dans la préparation des futurs professeurs. C'est ainsi que, de 1995 à 2000, a figuré dans la liste des sujets de la première épreuve orale d'admission au CAPES externe de mathématiques un sujet dont le libellé était le suivant :

---

[42] Cet « oubli » sera réparé en 2005-2006 – voir le fichier « Enroulement » à l'adresse : http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/data/pcl2/2005-2006/Enroulement.g2w.

On trouve également des préparations logicielles correspondant à l'indication du programme sur divers sites Internet, par exemple aux adresses suivantes :

• http://yallouz.arie.free.fr/flash/trigo.php ;

• http://www.ac-nancy-metz.fr/pres-etab/Lapicque/Geoplan/Sec_trigo_003.htm ;

• http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/utiordi1.html.

[43] Voir ainsi Christian Houzel, *Analyse mathématique* (Belin, Paris, 1996), p. 183-195.

Étude de l'application qui, à tout nombre réel x, associe $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Application à une définition des fonctions trigonométriques.

On sait que, en substance, la démarche suggérée conduit à définir d'abord la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ comme fonction inverse de l'application $x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Puis, la fonction tangente ayant été prolongée à $\mathbb{R}$ par π-périodicité, on définit le cosinus et le sinus d'un élément x de $\mathbb{R}$ par les expressions classiques en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$. Dès lors, bien entendu, on dispose de l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$, qui mathématise l'enroulement sur le cercle trigonométrique de la droite d'équation $x = 1$. Le cheminement ainsi proposé apparaît très alambiqué ! Le sujet évoqué ici fait, dans certains ouvrages de préparation au CAPES, l'objet d'un traitement détaillé qui, en général, apparaît davantage soucieux du détail mathématique de l'exposé que des raisons d'être de la question proposée. C'est ainsi que tel auteur, qui consacre quelque onze pages pleines au traitement du sujet, ouvre son exposé par cette observation [44] : « Cette leçon est l'occasion d'utiliser beaucoup d'outils de l'analyse élémentaire. » Selon un patron classique, la signification des connaissances à faire surgir dans l'exposé découle alors moins du projet professionnel des candidats que d'une volonté de contrôle de leur familiarité avec un univers mathématique dont il semble secondaire de rechercher la bonne adéquation au métier de professeur. On ne s'étonnera pas alors que, dans une section de « remarques et compléments », l'auteur mentionné prenne soin de souligner la « maladresse entendue dans certains exposés » qui consiste à dire : « On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ ». Et l'auteur de souligner [45] :

> La cohérence de la leçon veut que le nombre π soit défini à cette occasion, sans référence à une autre définition : sinon il faudrait préciser laquelle, et faire le lien avec la limite précédente (autant dire que l'on ne serait pas au bout de ses peines !).

Il n'est pas certain que la « cohérence » invoquée ici soit criante pour le futur professeur ! Encore faudrait-il qu'il situe le travail accompli autour de l'application $x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ comme une solution possible à un problème dont la formulation apparaît ici très incomplète. Il serait à

[44] Bernard Balaguer, *La leçon d'analyse au CAPES de mathématiques* (Ellipses, Paris, 1999), p. 272.

[45] *Op. cit.*, p. 281.

cet égard éclairant de comparer l'abord du problème de la mesure des angles – qui, ici, reste dissimulé[46] et qui, surtout, ne fait pas référence au problème (central pour le professeur praticien, sinon peut-être pour ce professeur *in partibus* qu'est un candidat au CAPES) de l'enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique – avec des exposés plus anciens, où la question de l'enroulement était au cœur de l'étude du problème. C'est ainsi que, dans un ouvrage déjà cité[47], Gustave Choquet dégage les propriétés *a priori* que devrait posséder l'application φ de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique $\mathbf{T}$ puis précise que, dans l'enseignement élémentaire de la géométrie, on admettra qu'une telle représentation φ existe et que toutes les autres sont de la forme $t \mapsto \varphi(kt)$, où k est un réel non nul. Car, écrit-il, « il n'existe aucune démonstration élémentaire de ce fait », si bien que « l'honnêteté exige (…) qu'on l'énonce explicitement sans prétendre le démontrer… » En admettant donc que φ existe, on peut alors conduire une étude des propriétés de φ, définir la notion de mesure principale, le changement d'unité de mesure, etc. En réalité, ce programme de travail sera accompli en 2005-2006. Pour répondre à une demande insistante de quelques stagiaires, le responsable du séminaire prend alors la décision un peu risquée d'entraîner la promotion dans cette petite aventure mathématique, qui se réalisera en deux temps. Le premier temps a lieu lors de la séance 17, le 31 janvier 2006. Sous le titre « Mesure des angles, *suite* », l'exposé, ce jour-là, commence par un rappel.

a) On poursuit ici l'étude de la « mesure des angles », en commençant par un bref rappel.

1) On a vu que l'enroulement d'une $\mathcal{K}$-ficelle autour d'un $\mathcal{K}^2$-carré (figure ci-dessous, à gauche) ne

[46] Ce qui n'est pas le cas dans l'ouvrage de Christian Houzel cité plus haut.

[47] L'enseignement de la géométrie, p. 121-126.

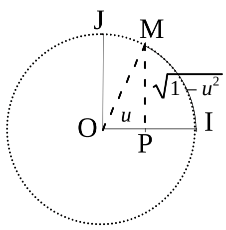
pose pas de problème, quel que soit le sous-corps $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}$: l'application correspondante est bien définie sur $\mathcal{K}$ et est *surjective*, c'est-à-dire qu'elle permet de mesurer tout « arc » du carré.

2) En revanche, si l'on remplace le carré par un cercle (figure de la page précédente, à droite), on a vu aussi que l'arc de cercle $\overset{\frown}{\mathrm{IJ}}$ n'est pas mesurable dès lors que $\pi \notin \mathcal{K}$ – ce qui est le cas lorsque $\mathcal{K}$ est un sous-corps du corps des nombres algébriques, et donc en particulier si $\mathcal{K} = \mathcal{C}$.

3) On notera que les points I (1 ; 0) et J (0 ; 1) sont bien des points de $\prod$, quel que soit $\mathcal{K}$. L'application $\gamma : u \mapsto \mathrm{M}(u, \sqrt{1-u^2})$ de [0 ; 1] dans le $\mathcal{K}^2$-arc de cercle $\overset{\frown}{\mathrm{IJ}}$ permet de se demander si celui-ci est $\mathcal{K}$-rectifiable, c'est-à-dire si l'ensemble des nombres

$$\ell_{(u_i)} = \mathrm{IM}_1 + \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 + \ldots + \mathrm{M}_{n-1}\mathrm{J}$$

où $\mathrm{M}_i = \gamma(u_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $0 < u_1 < \ldots < u_n < 1$, admet une borne supérieure dans $\mathcal{K}$.



Or on sait que $\sup \ell_{(u_i)} = \dfrac{\pi}{2}$, en sorte que si l'on travaille avec un corps $\mathcal{K}$ de nombres algébriques, l'arc considéré *n'est pas rectifiable* : on retrouve que la $\mathcal{K}$-ficelle ne peut être enroulée correctement autour du $\mathcal{K}^2$-cercle trigonométrique.

Le travail se poursuit alors par un ensemble structuré de développements. Dans une première partie, après quelques préliminaires simples, le phénomène de l'enroulement fait l'objet d'une modélisation mathématique.

b) On va maintenant étudier, en plusieurs étapes, le problème de l'enroulement de la $\mathbb{R}$-ficelle autour du $\mathbb{R}^2$-cercle trigonométrique, que l'on identifie à l'ensemble des nombres complexes de module unité, $\mathbf{U} = \{ x + \mathrm{i}y \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 = 1 \}$.

1) Rappelons que, muni de la multiplication des complexes, $\mathbf{U}$ est un groupe commutatif : on a en effet

$$(x + \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y')^{-1} = (x + \mathrm{i}y)(x' - \mathrm{i}y') = xx' + yy' + \mathrm{i}(-xy' + yx')$$

avec $$(xx' + yy')^2 + (-xy' + yx')^2 = x^2(x'^2 + y'^2) + y^2(y'^2 + x'^2) = x^2 + y^2 = 1.$$

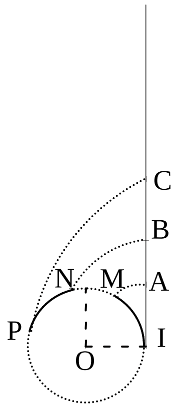
2) On étudie alors les applications φ, s'il en existe, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{U}$ qui « enroulent $\mathbb{R}$ sur $\mathbf{U}$ ». Étant donné une telle application φ, *une* « mesure » de l'angle $\alpha \in \mathcal{A}$ sera alors le réel t tel que : $\varphi(t) = \mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{i}\,\mathrm{Sin}\,\alpha \in \mathbf{U}$.

• Que doit vérifier φ pour qu'on puisse parler d'enroulement de $\mathbb{R}$ sur $\mathbf{U}$? Il faut bien sûr que φ soit défini sur $\mathbb{R}$, « sans trous » : φ doit donc être une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{U}$.

• Une autre condition a été mise en avant par ce qu'on a vu jusqu'ici : il faut que tout point de **U** soit atteint par φ. En d'autres termes, φ doit être *surjectif*.

• L'enroulement peut, physiquement, être caractérisé ainsi : si A, B, C sont des points de la « ficelle » tels que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IA}$, et M, N, P sont les points du cercle que recouvrent A, B, C respectivement lors de l'enroulement, on doit avoir (avec des notations évidentes)

$$\widehat{(\Delta_I, \Delta_M)} = \widehat{(\Delta_N, \Delta_P)} \text{ ou } \widehat{IOM} = \widehat{NOP}.$$



On doit donc avoir l'implication

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IA} \Rightarrow \widehat{IOM} = \widehat{NOP}.$$

Supposons maintenant que les points A, B, C vérifient $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$; cette égalité est équivalente à : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. La condition nécessaire précédente peut donc être reformulée ainsi :

$$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} \Rightarrow \widehat{(\Delta_I, \Delta_P)} = \widehat{(\Delta_I, \Delta_M)} + \widehat{(\Delta_I, \Delta_N)}.$$

Si l'on note t et t' les abscisses de A et B sur la ficelle munie du repère (I, $\overrightarrow{IJ}$), l'abscisse t_C de C vérifie $t_C = t + t'$; l'implication ci-dessus s'écrit alors

$$t_C = t + t' \Rightarrow \varphi(t_C) = \varphi(t)\varphi(t')$$

soit encore $\varphi(t + t') = \varphi(t)\varphi(t')$ pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$. En d'autres termes, φ doit être un *homomorphisme* du groupe additif de $\mathbb{R}$ dans le groupe multiplicatif **U**.

• Une troisième condition *a priori* nécessaire est que l'application φ soit *continue*, c'est-à-dire que si (t_n) tend vers t dans $\mathbb{R}$, alors $(\varphi(t_n))$ tend vers $\varphi(t)$ dans **U** : il s'agit là d'une condition théorique, qui évite les solutions mathématiques « tératologiques ».

La suite du travail au cours de cette séance suppose alors l'existence d'une application φ satisfaisant aux conditions dégagées par le travail de modélisation préalable. Dans une première étape, les propriétés de cette application φ hypothétique sont explicitées.

c) Le problème posé est alors celui de l'existence d'une application φ et de son unicité éventuelle. On se place ici dans l'hypothèse de l'existence d'une telle application φ. Dans ce cas, on peut noter tout de suite que, alors, toutes les applications de la forme $t \mapsto \varphi(kt)$, où k est un réel non nul, *conviennent aussi*. On verra qu'en fait ce sont les seules.

1) Le noyau $\varphi^{-1}(1)$ d'une telle application est un sous-groupe additif fermé de $\mathbb{R}$ différent de $\mathbb{R}$ puisque, φ étant supposé surjectif, il existe t ($\neq 0$) tel que $\varphi(t) = -1$. Comme on a alors $\varphi(2t) = \varphi(t)^2 = 1$, $\varphi^{-1}(1)$ est un sous-groupe *discret* de $\mathbb{R}$ distinct de $\{ 0 \}$: il est donc de la forme $\{ n(2\ell) \,/\, n \in \mathbb{Z} \}$, avec $\ell > 0$. On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$: $\varphi(t + 2n\ell) = \varphi(t)\varphi(2n\ell) = \varphi(t)$.

• On a de plus : $\varphi(\ell)^2 = \varphi(2\ell) = 1$ et donc $\varphi(\ell) = -1$. Par suite, $\varphi(\ell/2)^2 = \varphi(\ell) = -1$; on a donc $\varphi(\ell/2) = \mathrm{i}$ ou $-\mathrm{i}$: on dira que φ est positive si $\varphi(\ell/2) = \mathrm{i}$, négative si $\varphi(\ell/2) = -\mathrm{i}$.

• Soit $\chi : \mathcal{A} \to \mathbf{U}$ l'isomorphisme permettant d'identifier le groupe additif des angles $\mathcal{A}$ au groupe multiplicatif $\mathbf{U}$; posons $\psi = \chi^{-1}\circ\varphi$. Dans tout ce qui suit, on appelle « mesure » une telle application ψ. On a : pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$: $\psi(t + 2n\ell) = \psi(t) + \psi(2n\ell) = \psi(t)$; $\psi(\ell) = \varpi$; $\psi(\ell/2) = \delta$ ou $-\delta$.

• Soit ψ une mesure de période 2ℓ. Pour tout réel $m > 0$, il existe une mesure ξ de période $2m$, à savoir

$$t \mapsto \xi(t) = \psi\left(\frac{\ell}{m}\, t\right).$$

Si l'on admet que, pour $\ell > 0$ donné, il existe une *unique* mesure ψ de période 2ℓ, on dira que la mesure ψ est faite en *degrés* si $\ell = 180$, en *grades* si $\ell = 200$, en *radians* si $\ell = \pi$ (mais on se souviendra que le nombre π n'a pas encore été défini à ce stade de l'étude !).

• Soit la mesure ψ de période 2ℓ ; étant donné $\alpha \in \mathcal{A}$, puisque $\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ est surjectif, il existe t tel que $\psi(t) = \alpha$. L'équation $\psi(x) = \alpha$ a pour ensemble de solutions $S = \{ t + 2n\ell \,/\, n \in \mathbb{Z} \}$: chacun des réels $t + 2n\ell$ est appelé une mesure de α ; celui d'entre eux qui appartient à $[0 ; 2\ell[$ est appelé la mesure *principale* (par ψ).

• À partir du moment on l'on dispose d'une mesure des angles ψ (de période 2ℓ), on peut diviser un angle α quelconque par n'importe quel entier naturel n (alors que si l'on travaille dans le plan Π associé au corps $\mathcal{C}$ des nombres constructibles, la trisection d'un angle n'est pas toujours possible par exemple). En effet, puisque $\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ est surjectif, il existe t tel que $\psi(t) = \alpha$; on a alors, en posant $\beta = \psi(t/n)$, $n\beta = n\psi(t/n) = \psi(t) = \alpha$.

Le cœur de l'étude va consister alors à expliciter le développement en série entière de la fonction φ hypothétique, ou plutôt à introduire une fonction φ_1, par son développement en série entière, dont on va montrer qu'elle possède les propriétés attendues de φ, à une exception près, qui ne sera traitée que lors de la séance suivante.

2) Pour avancer dans l'étude des homomorphismes continus $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbf{U}$, considérons l'application Φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)\mathrm{d}u$.

• La continuité de φ implique que Φ est dérivable et que $\Phi' = \varphi$. Il en résulte que Φ n'est pas constante et en particulier qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(t_0) \neq 0$.

• Soit $t, t' \in \mathbb{R}$. On a : $\Phi(t + t') = \int_0^{t+t'} \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_0^{t} \varphi(u)\mathrm{d}u + \int_t^{t+t'} \varphi(u)\mathrm{d}u = \Phi(t) + \int_0^{t'} \varphi(v + t)\mathrm{d}v = \Phi(t) + \int_0^{t'} \varphi(v)\varphi(t)\mathrm{d}v = \Phi(t) + \varphi(t)\Phi(t')$. Prenons $t' = t_0$; il vient, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(t) = \frac{\Phi(t + t_0) - \Phi(t)}{\Phi(t_0)}.$$

Cette expression montre que φ est dérivable (puisque Φ l'est) et que l'on a

$$\varphi'(t) = \frac{\varphi(t + t_0) - \varphi(t)}{\Phi(t_0)} = \frac{\varphi(t)\varphi(t_0) - \varphi(t)}{\Phi(t_0)} = \frac{\varphi(t_0) - 1}{\Phi(t_0)}\varphi(t) = \lambda\varphi(t)$$

où $\lambda = \dfrac{\varphi(t_0) - 1}{\Phi(t_0)}$ $(\in \mathbb{C})$.

• En dérivant l'égalité $\varphi\overline{\varphi} = 1$, on obtient $\varphi'\overline{\varphi} + \varphi\overline{\varphi}' = 0$, soit $\varphi'\overline{\varphi} + \overline{\varphi'\overline{\varphi}} = 0$ ou encore $2\mathrm{Re}(\varphi'\overline{\varphi}) = 0$. Comme $\varphi'\overline{\varphi} = \lambda\varphi\overline{\varphi} = \lambda$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = k\mathrm{i}$. On a ainsi $\varphi' = k\mathrm{i}\varphi$. Posons $c = \mathrm{Re}(\varphi)$, $s = \mathrm{Im}(\varphi)$, en sorte que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = c(t) + \mathrm{i}s(t)$. L'égalité $\varphi' = k\mathrm{i}\varphi$ s'écrit donc $c' + \mathrm{i}s' = k\mathrm{i}(c + \mathrm{i}s) = k(-s + \mathrm{i}c)$ et par suite équivaut au système différentiel

$$\begin{cases} c' = -ks \\ s' = kc \end{cases}$$

avec $c(0) = 1$ et $s(0) = 0$.

3) Si $\varphi = c + \mathrm{i}s$, existe, c et s vérifient nécessairement le système précédent.

• Prenons $k = 1$. On a alors $c^{(2n)} = (-1)^n c$, $c^{(2n+1)} = (-1)^{n+1}s$, et, de même, $s^{(2n)} = (-1)^n s$, $s^{(2n+1)} = (-1)^n c$. Il en résulte que les séries de Taylor de c et s, s'écrivent respectivement

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$$

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$$

• Les séries entières précédentes ont un rayon de convergence *infini*. Sans utiliser de résultat plus avancé, on peut ici *poser*

$$c_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} \text{ et } s_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}$$

ce qui conduit à poser

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} + \mathrm{i}\,\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(\mathrm{i}t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!}.$$

En vertu de théorèmes classiques, on a bien : $\varphi_1'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}\,\frac{(\mathrm{i}t)^{n-1}}{(n-1)!} = \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!} = \mathrm{i}\varphi(t)$.

• Vérifions que φ_1 est bien un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbf{U}, \times)$. On a :

$$\varphi_1(t)\varphi_1(t') = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}t')^n}{n!}.$$

Avec des notations évidentes, le terme de rang n de la série produit s'écrit :

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} = \sum_{p=0}^{n}\frac{(\mathrm{i}t)^p}{p!}\frac{(\mathrm{i}t')^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{\mathrm{i}^n}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} t^p\, t'^{n-p} = \frac{(\mathrm{i}(t+t'))^n}{n!}.$$

On a donc : $\varphi_1(t)\varphi_1(t') = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}(t+t'))^n}{n!} = \varphi_1(t+t')$. Il résulte de là que, en particulier, on a $\varphi_1(t)\varphi_1(-t) = \varphi_1(0) = 1$, soit $\frac{1}{\varphi_1(t)} = \varphi_1(-t)$. Il vient en conséquence $\overline{\varphi_1(t)} = \varphi_1(-t) = \frac{1}{\varphi_1(t)}$, en sorte que $|\varphi_1(t)|^2 = \varphi_1(t)\overline{\varphi_1(t)} = 1$. L'application φ_1 est bien un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbf{U}, \times)$.

• Soit φ une application satisfaisant au « portrait robot » tracé plus haut ; on sait que φ est dérivable et qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi' = k\mathrm{i}\varphi$. Posons alors $\zeta(t) = \varphi(t)\varphi_1(-kt)$; ζ est dérivable et l'on a : $\zeta'(t) = \varphi'(t)\varphi_1(-kt) - k\mathrm{i}\varphi(t)\varphi_1(-kt) = 0$. Par suite, ζ est constante sur $\mathbb{R}$; comme $\zeta(0) = \varphi(0)\varphi_1(0) = 1$, on a donc $\varphi(t)\varphi_1(-kt) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc

$$\varphi(t) = \frac{1}{\varphi_1(-kt)} = \varphi_1(kt), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Les seules applications φ possibles sont donc les applications $t \mapsto \varphi_1(kt)$, où $k \in \mathbb{R}$, à condition bien sûr que φ_1 convienne – *ce que l'on examinera la prochaine fois*.

La suite annoncée apparaît dans les notes de la séance 18, le mardi 7 février 2006, sous le titre « Mesure des angles, encore ! ». Le travail nécessaire est plus bref. Il se concentre autour des propriétés de la fonction φ_1 définie dans les développements que nous venons de reproduire.

a) Lors de la séance dernière, on avait recherché les fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{U}$ ayant les propriétés suivantes :

(1) φ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier : c'est donc une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{U}$;

(2) φ est un *homomorphisme* du groupe additif de $\mathbb{R}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{U}$: on a $\varphi(t + t') = \varphi(t)\varphi(t')$ pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$.

(3) φ est une application *continue* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{U}$;

(4) φ est une *surjection* de $\mathbb{R}$ sur $\mathbf{U}$: tout point de $\mathbf{U}$ est atteint par φ.

b) Cette recherche avait abouti à définir l'application φ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!}.$$

On avait établi que φ_1 satisfait aux trois premières conditions ci-dessus. En outre, on avait vu que, en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$c_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} \text{ et } s_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

on a : $\varphi_1 = c_1 + \mathrm{i}s_1$.

c) La démonstration de la surjectivité de φ_1 se fait en plusieurs étapes.

1) On a vu que $c_1(0) = 1$ et $s_1(0) = 0$, et que $c_1' = -s_1$ et $s_1' = c_1$. On établit d'abord qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $c_1(t) = 0$. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi ; c_1 étant continue, puisque $c_1(0) = 1$, on aurait $c_1(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc $s_1'(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'application s_1 serait donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$; comme $s_1(0) = 0$, on aurait alors $s_1(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si $0 < t < u$, on a par ailleurs :

$$s_1(t)(u - t) < \int_t^u s_1(x)\mathrm{d}x = c_1(t) - c_1(u).$$

Comme $|c_1| \leq 1$, il vient $s_1(t)(u - t) < 2$, ce qui, si $s_1(t) > 0$, est impossible dès que u est assez grand. Par suite, on doit rejeter l'hypothèse évoquée. En d'autres termes, il existe des réels $t > 0$ tels que $c_1(t) = 0$. L'application c_1 étant continue, l'ensemble de ces réels est fermé. Soit alors t_0 le plus petit de ces nombres ; on pose traditionnellement $\pi = 2t_0$; on a donc $c_1(\pi/2) = 0$, en sorte que $s_1(\pi/2) = \pm 1$. Comme $s_1' = c_1 > 0$ sur $[0 ; \pi/2[$ et $s_1(0) = 0$, on a $s_1(\pi/2) = 1$. On a donc $\varphi_1(\pi/2) = \mathrm{i}$ et, par suite, $\varphi_1(\pi) = \varphi_1(\pi/2)^2 = -1$ et $\varphi_1(2\pi) = 1$. On a donc $\varphi_1(t + 2k\pi) = \varphi_1(t)$; en conséquence, c_1 et s_1 admette également la période 2π.

2) Montrons maintenant que, pour tout $t \in\ ]0 ; 2\pi[$, on a $\varphi_1(t) \neq 1$. Pour $t \in\ ]0 ; \pi/2[$, posons $\varphi_1(t) = x + \mathrm{i}y$: on a $0 < x, y < 1$. Il vient :

$$\varphi_1(4t) = (x + \mathrm{i}y)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4\mathrm{i}xy(x^2 - y^2).$$

Si $\varphi_1(4t)$ est réel, alors $x^2 - y^2 = 0$; comme $x^2 + y^2 = 1$, on a $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$, en sorte que $\varphi_1(4t) = \frac{1}{4} - 6\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -1$. Par suite, $\varphi_1(4t) \neq 1$ quel que soit $t \in\ ]0 ; \pi/2[$, CQFD.

3) On peut alors établir que $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbf{U}$ est bien une surjection. Plus précisément, on va montrer ceci : pour tout $z \in \mathbf{U}$, il existe un unique $t \in [0 ; 2\pi[$ tel que $\varphi_1(t) = z$. L'unicité résulte de l'observation que, si $0 \leq t < u < 2\pi$, alors $\varphi_1(u)\varphi_1(t)^{-1} = \varphi_1(u - t) \neq 1$, d'après le résultat précédent. Soit alors $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, avec $x_1^2 + y_1^2 = 1$ et $x_1 \geq 0$, $y_1 \geq 0$; Comme c_1 décroît de 1 à 0 sur $[0 ; \pi/2]$, il existe $t_1 \in [0 ; \pi/2]$ tel que $c_1(t_1) = x_1$. Comme $c_1^2 + s_1^2 = 1$ et $s_1 \geq 0$ sur $[0 ; \pi/2]$, il vient $s_1(t_1) = y_1$. Ainsi $\varphi_1(t_1) = z_1$. Soit alors

$z = x + iy \in \mathbf{U}$. Si $x < 0$ et $y \geq 0$, posons $z_1 = -iz = y + i(-x)$; soit t_1 tel que $\varphi_1(t_1) = z_1$: on a alors $\varphi_1(t_1 + \pi/2) = \varphi_1(t_1)\varphi_1(\pi/2) = iz_1 = z$. Si $x < 0$ et $y < 0$, posons $z_1 = -z$; il existe t_1 tel que $\varphi_1(t_1) = z_1$ et on a alors $\varphi_1(t_1 + \pi) = \varphi_1(t_1)\varphi_1(\pi) = -\varphi_1(t_1) = -z_1 = z$. Si $x \geq 0$ et $y < 0$, posons $z_1 = iz$; il existe t_1 tel que $\varphi_1(t_1) = z_1$ et on a alors $\varphi_1(t_1 + 3\pi/2) = \varphi_1(t_1)\varphi_1(\pi/2)\varphi_1(\pi) = -i\varphi_1(t_1) = -iz_1 = z$, CQFD

4) Rappelons enfin que toutes les applications φ convenables sont alors les applications $t \mapsto \varphi_1(kt)$, où $k \in \mathbb{R}$.

Ce parcours mathématique constitue sans doute la limite supérieure de ce qu'il apparaît légitime aujourd'hui de travailler du point de vue mathématique avec des professeurs stagiaires : ces mathématiques pour l'enseignant apparaissent, à certains du moins, comme beaucoup trop éloignées des mathématiques à enseigner, et même des mathématiques pour l'enseignement. Ainsi en est-il de cet élève professeur qui, à l'occasion du questionnaire de fin d'année, à la question « Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous a paru plutôt *négatif* », apporte cette réponse :

> Certaines séances [du séminaire du mardi matin] trop centrées sur des questions purement mathématiques auraient pu faire place à des heures de travail sur la préparation d'un guide d'AER ou sur l'étude d'un thème pour mettre en pratique les apports de la formation et avoir un retour plus important sur les travaux proposés.

4.6. La distinction de ce qui serait des mathématiques pour l'enseignant sans être des mathématiques pour l'enseignement est éclairée par l'exemple précédent. Mais on soulignera maintenant surtout que, lorsqu'on est loin de la classe, et non à son chevet, on peut être porté à regarder comme des mathématiques *pour l'enseignement* des organisations mathématiques qui ne fonctionnent pas comme telles, et cela parce que l'apprêt de ces mathématiques est insuffisant, ou, du moins, est révélé tel quand on les met face aux mathématiques à enseigner correspondantes et aux exigences de leur enseignement. Les notes du séminaire de l'année 2001-2002 contiennent à cet égard, sur le sujet de la trigonométrie, d'autres « révélations ». Lors de la 21^e^ séance, deux élèves professeurs qui préparent leur mémoire professionnel et qui, dans ce cadre, ont été amenés à travailler sur l'enseignement dans une classe de première STL (sciences et technologies de laboratoire) soulèvent la question suivante :

> Peut-on introduire la forme trigonométrique d'un nombre complexe (en 1^re^ STL) sans passer par les coordonnées polaires ? (2001-2002, 4^e^ & 5^e^, semaine 21)

La question peut surprendre, et elle surprendrait certainement ceux qui, au cours des années précédentes, se sont efforcés de faire l'éducation mathématique des deux jeunes professeurs stagiaires. En réalité, le questionnement soulevé est moins surprenant qu'il n'y paraît. Le fait que, par exemple, il existe des manières de faire inconnues des ouvrages que les auteurs de la question ont pu consulter ne saurait être réfuté facilement : il est plus aisé de prouver qu'une chose existe – en l'exhibant – que de prouver qu'elle n'existe pas ! La question soulevée engendre cependant bien des interrogations. Est-elle liée de façon spécifique – et alors comment ? – aux programmes et aux usages de l'enseignement des mathématiques dans la série STL ? Ou bien, procède-t-elle – de façon beaucoup plus générique – du paralogisme consistant à s'imaginer qu'on doit « passer par les coordonnées polaires » parce que des manuels ajoutent à titre de commentaires que les réels ρ et θ associés à un complexe z sont classiquement appelés les coordonnées polaires de l'image de z ? Faute d'une enquête plus approfondie, il est difficile de trancher. Il est aussi difficile de répondre. Or c'est pourtant ce que va faire le responsable du séminaire. Comme on le verra dans l'extrait ci-après, il saisit manifestement l'occasion pour pousser en avant une réflexion qui lui paraît sans doute indigente – à propos du *repérage* dans le plan [48]. Il souligne d'abord que le repérage par coordonnées polaires peut être regardé, « topographiquement », comme naturel – en dépit de l'hégémonie scolaire des coordonnées cartésiennes. Il notera en outre, en fin de réponse, que leur emploi est des plus appropriés pour mathématiser une rotation ou une similitude directe. Il glisse au passage l'expression de l'algorithme de calcul qui permet de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires par un calcul « en ligne » (et non par une formule toute faite, apprise par cœur).

① Soit un point M d'un plan « topographique » où un observateur occupe une certaine position O. Pour repérer M, il est certainement plus usuel, culturellement, de désigner la « direction » du point M à partir de l'endroit O où l'on se trouve, c'est-à-dire de préciser une certaine demi-droite, par exemple en donnant la mesure de son angle $\theta \in\ ]-\pi, \pi]$ par rapport à une demi-droite fixe d'origine O. Le repérage d'un point par ses *coordonnées polaires* est donc un fait banal, « naturel » pour l'observateur.

② Pour tout z non nul, il évidemment possible de passer de la forme $z = x + \mathrm{i}y$ à la forme $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ sans donner une « interprétation géométrique » du couple (ρ, θ) : il suffit d'observer que si on écrit

$$z = x + \mathrm{i}y = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathrm{i}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

[48] Sur ce sujet dont nous avons parlé plus haut, voir aussi Floriane Wozniak, *Les mathématiques du repérage dans la scolarité obligatoire* (DEA de l'Université Claude Bernard Lyon 1, 2000).

le point de coordonnées $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ appartient au cercle trigonométrique, et qu'il existe donc $\theta \in\ ]-\pi, \pi]$ tel que $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en sorte que l'on a $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ où $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

③ La forme algébrique $z = x + iy$ est bien adaptée à l'addition des points du plan complexe ; la forme trigonométrique est utile lorsqu'on passe à la multiplication, puisqu'on a alors : $\rho_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) \times \rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$. Elle permet en particulier la modélisation complexe des *similitudes directes* du plan, et en particulier des *rotations*. Quels que soient les usages que l'on a en vue, il convient de faire apparaître ces types d'emplois. À cet égard, l'emploi « topographique » indiqué plus haut constitue un point d'appui à forte valeur heuristique : si un point M a pour coordonnées polaires ρ et θ, le point P situé sur une demi-droite faisant un angle de α radian avec [OM) à une distance trois fois plus grande de O a pour coordonnées 3ρ et $\theta + \alpha$, ce qui donne immédiatement l'expression d'une similitude de rapport 3 et d'angle α dans ce système de coordonnées.

Sans doute le responsable du séminaire n'a-t-il aucune garantie sur la pertinence de sa réponse à l'égard du travail engagé par les professeurs stagiaires auteurs de la question. Mais il a pris appui sur une interrogation ayant une valeur propre pour, si l'on peut dire, « faire bouger » des connaissances mathématiques certes en principe disponibles, mais dont on peut supputer que leur non-confrontation aux problèmes de l'enseignement les a laissées dans un état largement impropre à l'utilisation par un professeur. Plus généralement, la question ainsi « travaillée » renvoie à la notion *fonctionnelle* de mathématiques pour l'enseignement : il ne s'agit pas « simplement » de savoir des mathématiques ; encore faut-il savoir en user de façon appropriée comme *outil didactique* dans la conception et la réalisation d'un enseignement. Sur un certain nombre de thèmes mathématiques à enseigner, de fait, le manque le plus criant se situe au plan des mathématiques *pour l'enseignement*, c'est-à-dire des mathématiques comme outil didactique en vue de mettre en place dans la classe les organisations mathématiques désignées à enseigner : c'est de ce niveau « intermédiaire » qu'il convient généralement de partir, en se demandant, à propos de tel ou tel contenu mathématique à enseigner, quels sont les outils didactiques, et en particulier les outils didactiques de nature mathématique, que, sous les contraintes de l'enseignement visé, l'enseignant pourrait mobiliser de façon optimale.

Épilogue

Pour les lauréats des concours de recrutement, l'entrée dans le métier s'accompagne de ce qui devrait être pour beaucoup une découverte, quand celle-ci n'est pas refoulée : les mathématiques à enseigner se révèlent, de façon souvent inattendue, problématiques. *Cela n'est sans doute pas évident* a priori *pour nombre de professeurs stagiaires, qui peuvent être portés à penser que, sauf peut-être pour quelques questions spéciales étudiées dans les grandes classes du lycée, ils disposent de suffisamment de connaissances et, si l'on peut dire, de puissance mathématique pour n'avoir pas à craindre de n'être pas à la hauteur à cet égard. Malgré cela, les difficultés foisonnent autour des contenus à enseigner. Un premier type de difficultés concerne certains contenus mathématiques particuliers à l'enseignement secondaire, qu'on peut mal connaître mais dont on peut aussi se rendre maître assez rapidement. Sur ce type de difficultés, la profession, avec sa tradition écrite (les manuels notamment) et sa tradition orale (les contacts avec les « collègues »), pourra assumer la fonction que doit assumer toute profession : pourvoir aux besoins de connaissances et de culture professionnelles de ses membres. Mais en nombre de cas, cette fonction essentielle n'est pas assumée, ou l'est mal. Le professeur stagiaire, d'abord peu farouche, ne voit pas le danger qui guette : il s'avance trop souvent sans mesurer ce que le curriculum réel qu'il doit faire vivre contient de chausse-trapes. C'est alors que, pris en défaut, incertain sur le parti à choisir, il découvrira peut-être que, sur nombre de points, il ne saurait guère attendre de secours de la profession telle qu'elle est. L'expérience déjà vécue lors de la préparation au concours se répète : ni la profession, ni l'institution de tutelle (le ministère, ses acteurs et ses agents) ne répondent de façon audible et univoque. L'analyse de la formation donnée à l'IUFM permet d'éclairer ce phénomène. Pour beaucoup de professeurs stagiaires (et plus généralement de membres de la profession), les difficultés constatées ne tiennent pas tant aux mathématiques qu'aux circonstances : les mathématiques ne seraient pas* en elles-mêmes *problématiques. Le ressort de la difficulté est alors versé tantôt du côté des élèves, dont les erreurs et les échecs appelleraient, à titre de remèdes pédagogiques, des « explications » mathématiques qu'on ne sait où trouver, tantôt du côté des programmes, dont les opacités, les ellipses, les incohérences apparentes ou réelles et les demandes mal justifiées ou mal expliquées nécessitent une clé de lecture qui se dérobe et qu'on finira par ne plus chercher. Il faudra beaucoup de temps et de travail, en formation, pour faire apparaître qu'il y a là, sauf exception, autant de faux-fuyants, qui ont surtout pour mérite, si l'on peut dire, d'organiser l'évitement de ce qui est au cœur de la difficulté, la problématicité* mathématique. *Cette* *dernière, il est vrai, ne s'épingle pas si facilement. Partant des mathématiques* à enseigner*, et ne serait-ce que pour préciser ces mathématiques-là, dont l'indexation par les programmes ou les manuels est parfois sibylline, il convient d'ouvrir largement l'espace de ce qu'on a nommé les mathématiques* pour l'enseignant*, vaste domaine dont rien de ce qui est mathématique n'est* a priori *exclu. En cela, l'univers mathématique du professeur touche au monde des mathématiques savantes, tel que les enseignements universitaires s'en font l'écho. Mais à en rester là, on devra constater en règle générale l'inadéquation de ces matériaux mathématiques* « bruts » *vis-à-vis des problèmes d'interprétation, de compréhension et d'enseignement* stricto sensu *des contenus à enseigner. La solution de ces problèmes appelle, au plan mathématique, des élaborations transpositives intermédiaires dont la nature et l'ampleur ne peuvent jamais être fixées à l'avance et qui constituent ensemble un monde mathématique toujours en chantier, le monde des mathématiques* pour l'enseignement*, dont la profession est en principe co-gestionnaire avec d'autres parties de la noosphère de l'enseignement des mathématiques. Or c'est là que les faiblesses s'accumulent et c'est ce grand problème de la profession que l'on continuera d'examiner au chapitre suivant à propos d'une part essentielle des mathématiques scolaires.*

Chapitre 4

Le casse-tête des nombres

1. Les décimaux comme symptôme

1.1. La question des nombres, ou plutôt des *systèmes* de nombres ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, etc.), cristallise en elle un ensemble de difficultés que, vraisemblablement, les lauréats des concours de recrutement entrant en deuxième année d'IUFM n'anticipent guère. Sans doute y a-t-il là, en grande partie, un fait d'époque, écho d'une formation mathématique dans laquelle le souci de la construction des systèmes de nombres n'affleure plus guère, alors que, par contraste, la question occupait le devant de la scène à l'époque des « mathématiques modernes ». Longtemps, la formation supérieure en mathématiques fait rencontrer la « construction » de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$, puis de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$, par « symétrisation » [1], ensuite de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$,

[1] Le procédé de symétrisation peut être présenté ainsi. Soit E un ensemble muni d'une loi associative et commutative, notée multiplicativement, possédant un élément unité, et vis-à-vis de laquelle tous les éléments sont réguliers. Sur l'ensemble $E \times E$, on définit alors une relation d'équivalence ~ telle que $(x, s) \sim (y, t)$ si $x{\cdot}t = y{\cdot}s$; le monoïde quotient $E \times E / \sim$ est alors un groupe commutatif qu'on appelle le *groupe des fractions* de E. L'application de E dans $E \times E / \sim$ qui à x associe la classe de (x, e), où e est l'élément unité de E, est un plongement de E dans son groupe des fractions. Si l'on identifie E à son image par ce plongement, le groupe des fractions de E apparaît comme engendré par E et jouit en outre de la propriété universelle suivante : tout morphisme de E dans un groupe commutatif G se prolonge d'une manière unique en un morphisme du groupe des fractions de E dans G. Lorsque le monoïde E est noté additivement, le groupe construit par symétrisation est appelé groupe des *différences* de E : ainsi passe-t-on, notamment, du monoïde $(\mathbb{N}, +)$ à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs muni de son addition, où la soustraction devient possible. Il reste alors à définir sur $\mathbb{Z}$ une multiplication et une relation d'ordre prolongeant celles de $\mathbb{N}$, ce qui peut se faire d'une unique façon. Le cas multiplicatif correspond très classiquement au passage de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$, selon une procédure en deux étapes : symétrisation de la loi multiplicative de $\mathbb{Z}^*$, puis prolongement (unique) de l'addition et de la relation d'ordre. Plus généralement, ce procédé permet de passer d'un anneau commutatif unifère (unitaire) et intègre à son corps des fractions.

enfin, de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$, par différents procédés [2]. Or cet accent mis sur la construction des systèmes de nombres, qui atteint son apogée dans les années 1970, va ensuite être levé progressivement, au point que nombre de candidats au CAPES de mathématiques semblent aujourd'hui découvrir ces constructions à l'occasion de la préparation au CAPES, concours dont la liste des sujets de l'épreuve dite « d'exposé » (première épreuve orale d'admission) comporte traditionnellement la « construction du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels » ainsi que la « construction du corps $\mathbb{C}$ des complexes » [3].

1.2. Avant d'examiner concrètement les difficultés signalées par les élèves professeurs, il convient de s'arrêter un instant sur la question de l'anneau $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. Hier comme aujourd'hui, en effet, ce système de nombres, si important, traditionnellement, dans l'enseignement scolaire des mathématiques [4], notamment à l'école primaire, semble tout à fait marginalisé dans la construction d'inspiration savante des structures numériques. Le parti pris traditionnel, que le point de vue moderne n'a guère entamé [5], consiste à regarder les décimaux comme des cas particuliers de rationnels, dont on fait donc état après avoir construit le corps $\mathbb{Q}$, construction pour laquelle les décimaux n'apporteraient rien s'ils avaient été construits avant, puisque le corps des fractions des décimaux n'est rien d'autre que le corps des fractions des entiers, à savoir $\mathbb{Q}$ lui-même. Même à l'acmé des mathématiques modernes, les meilleurs auteurs traitent l'anneau $\mathbb{D}$ avec une certaine distance. En 1964, ainsi, dans un ouvrage intitulé *Les notions de mathématiques de base dans l'enseignement du second degré*, Jacqueline Lelong-Ferrand, qui, dans le chapitre V, « Extensions algébriques successives de la notion de nombre », a consacré quelque quinze pages à la construction de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Q}$, ne consacre que

---

[2] Sur la construction du corps ordonné $\mathbb{R}$, voir l'article de Jean Dhombres, intitulé RÉELS (NOMBRES), dans le *Dictionnaire des mathématiques, fondements, probabilités, applications*, Encyclopædia Universalis et Albin Michel, Paris, 1998, p. 552-557. On peut construire le corps des complexes $\mathbb{C}$ en munissant $\mathbb{R}^2$ des deux lois définies par $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$; ou bien en considérant l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, muni de l'addition et de la multiplication des matrices ; ou encore en le définissant comme le quotient de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ par l'idéal engendré par $X^2 + 1$.

[3] En revanche, la construction du corps $\mathbb{R}$ des *réels* n'apparaît pas dans les sujets proposés.

[4] Voir Yves Chevallard et Michel Jullien, *Sur l'enseignement des fractions au collège. Ingénierie, recherche, société* (Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, 1989), p. 121-123.

[5] C'est ce point de vue qu'adopte par exemple Daniel Perrin dans son récent ouvrage, *Mathématiques d'école* (Cassini, Paris, 2005).

quelques lignes, dans le chapitre VI intitulé « Approximations décimales. Nombres réels », à l'anneau des nombres décimaux, au moment où elle va s'employer à étudier de façon extensive les approximations décimales de nombres réels. Ce projet, bien entendu, suppose que l'on dise quelques mots des nombres décimaux eux-mêmes, ce que l'auteure entreprend de faire dans les termes suivants :

> Avant de parler de développements décimaux illimités, il nous faut rappeler brièvement ce qu'est un *nombre décimal* : cette notion, connue en principe depuis l'école primaire, a besoin d'être précisée auprès des élèves ; et il est bon de justifier les opérations effectuées sur les nombres décimaux.

Les décimaux sont alors définis comme des nombres rationnels particuliers, à la façon classique. Avant de se lancer dans les notions de valeur approchée, de développement décimal, de développement décimal illimité, de nombre réel, l'auteure que nous suivons ici consacre alors ces quelques lignes à l'anneau des décimaux, auquel toutefois elle n'attribue pas de notation propre :

> Les nombres décimaux constituent un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ; et il est facile de voir que la somme et le produit de deux nombres décimaux sont des nombres décimaux : en langage algébrique, on peut dire que l'ensemble des nombres décimaux est *stable* vis-à-vis des opérations d'addition et de multiplication.
>
> D'autre part, nous pouvons considérer des fractions décimales dont le numérateur *a* est un entier relatif quelconque : les nombres décimaux correspondants seront dit *relatifs.* On voit alors facilement que les nombres décimaux relatifs constituent un *anneau* (sous-anneau de l'anneau $\mathbb{Q}$). Mais le quotient de deux nombres décimaux n'est pas toujours un nombre décimal : les nombres décimaux ne constituent donc pas un corps.

Semblablement, dans un *Cours de mathématiques* paru en 1966, Lucien Chambadal et Jean-Louis Ovaert introduisent les nombres décimaux dans le cadre d'une section intitulée « Développement de base *p* des nombres réels ». Le point de vue est généralisant, puisque la section commence par la définition ci-après, où les décimaux n'apparaissent qu'à titre de cas particulier.

> DÉFINITION 1. – **Nombres rationnels *p*-adiques.** – On dit qu'un nombre rationnel *r* est *p*-adique s'il existe un entier naturel *m* tel que le nombre $p^m \cdot r$ soit un entier rationnel.
>
> **Cas particuliers**. – Les nombres rationnels *p*-adiques s'appellent encore :
>
> – nombres *dyadiques* lorsque $p = 2$;
>
> – nombres *triadiques* lorsque $p = 3$;
>
> – nombres *décimaux* lorsque $p = 10$.

Dans ce contexte volontairement théorique, l'anneau des décimaux est évoqué dès la première proposition, à travers la notion plus générale d'anneau des rationnels p-adiques, comme on le verra ci-après :

PROPOSITION 1. – Propriétés des nombres rationnels p-adiques.

1. L'ensemble des nombres rationnels p-adiques est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ qui contient $\mathbb{Z}$. C'est le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ engendré par les nombres 1 et $\frac{1}{p}$. On le note $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$.

2. Tout nombre rationnel p-adique positif r s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $r = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_m \cdot p^m$, où l'ensemble des entiers rationnels m tels que d_m soit non nul est fini, et où pour tout entier rationnel m, $0 \leq d_m \leq p-1$.

La suite de la section définit la notion de valeur approchée par défaut à $1/p^n$ près d'un nombre réel, avant de proposer le théorème fondamental, relatif au développement d'un nombre réel en base p. Là encore, on constate deux faits, co-présents sinon absolument solidaires : les décimaux sont pensés comme des rationnels particuliers ; ils apparaissent utiles pour fournir des valeurs approchées de nombres non décimaux. On voit au passage le problème d'enseignement qui en résultera : comment penser, dans les premières années de l'enseignement scolaire, les nombres décimaux, alors que les nombres rationnels ne sont pas encore disponibles ? À nouveau, on constate ainsi un désajustement entre une certaine culture mathématique noosphérienne [6] et les besoins de la profession en mathématiques pour l'enseignement. Soulignons ici un point majeur de désajustement. Dans le paradigme des mathématiques modernes, la considération d'un système de nombres nouveau suppose ce qu'on nomme alors la « construction » de ce système de nombres. Or le critère qu'il y a bien une construction mathématiquement légitime et licite est celui-ci : étant donné un système de nombres déjà disponible, $\mathcal{N}$, pour en construire une extension $\tilde{\mathcal{N}}$, il convient d'abord de disposer d'un ensemble $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{N}$ (en général, grâce à l'identification de $\mathcal{N}$ à son image par un plongement dans $\mathcal{M}$), tel que l'on ait $\tilde{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{M}$. La toute première étape qui rend possible la construction de $\tilde{\mathcal{N}}$ est ainsi la définition de $\mathcal{M}$. Ainsi en va-t-il avec le procédé de symétrisation rappelé plus haut. L'article consacré à la notion de nombre complexe par Lucien Chambadal dans son *Dictionnaire de mathématiques* paru en 1978 fournit une bonne

[6] L'ouvrage de Jacqueline Lelong-Ferrand que nous avons cité est ainsi « le développement d'un cours donné à la Faculté des Sciences de Paris en 1962-1963 », cours qui s'adressait aux « étudiants se destinant à l'enseignement des mathématiques dans le second degré ».

illustration à la fois du besoin d'une extension et de la condition imposée, de manière apparemment impérative, à la fabrication de cette extension :

> L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans le corps des nombres réels. On a donc été conduit à construire un corps commutatif $\mathbb{C}$ et un élément i de $\mathbb{C}$ tels que le corps $\mathbb{C}$ contienne $\mathbb{R}$ comme sous-corps, et que l'élément i vérifie la relation
>
> $$i^2 + 1 = 0.$$
>
> Pour ce faire, on définit une multiplication sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ en posant
>
> $$(x, y)\,(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$
>
> L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est alors muni d'une structure d'algèbre sur $\mathbb{R}$, associative, commutative et unifère ; l'élément unité est l'élément (1, 0). Cette algèbre est un corps, contenant $\mathbb{R}$ comme sous-corps. L'élément (1, 0) est identifié à 1, et l'élément (0, 1) est noté i.

Ce qui n'apparaît pas acceptable, alors, c'est de supposer un élément i, qui ne saurait être un nombre réel (donc déjà « connu »), tel que $i^2 = -1$, et de calculer alors dans un ensemble de « nombres » contenant, outre les réels, des éléments de la forme $a + b$i, avec a et b réels. À cet égard, deux problèmes surgissent. Tout d'abord, du point de vue d'une conscience ordinaire, un problème ontologique : que serait ce « i » surgi de nulle part et dont le carré serait égal à -1 ? Le problème n'existe pas cependant pour une conscience mathématique informée : le « nombre » i peut *a priori* être n'importe quoi qui ne soit pas un élément du corps des réels. La construction invoquée dans l'article précédent répond en réalité au second problème annoncé : celui du caractère non contradictoire de la supposition que les besoins du travail mathématique nous conduisent à formuler. Supposer qu'on puisse disposer d'un système de nombres contenant les réels et contenant aussi un nombre i tel que $i^2 = -1$ n'est pas en soi contradictoire : c'est cela que nous dit la « construction » du corps des complexes, construction qui est d'abord une démonstration de non-contradiction (ou de consistance). C'est dans ce paradigme moderne que se situe, de même, Jacqueline Lelong-Ferrand, dans un développement rarement présenté, concernant l'introduction de la notion de *racine carrée,* que nous reproduisons ci-après un peu longuement.

> PROBLÈME D'EXTENSION ALGÉBRIQUE. Supposons donnés un anneau commutatif A et un élément k de A, autre que zéro. Nous cherchons à déterminer un anneau A_k et un isomorphisme de A avec une partie de A_k tels que l'élément correspondant de k admette au moins une racine carrée dans A_k ; et nous cherchons aussi à déterminer A_k de façon qu'il soit le plus petit possible.
>
> PRINCIPE DE LA CONSTRUCTION. Identifions les éléments de A avec les éléments correspondants de A_k, et désignons par ω une racine carrée de k. Alors A_k doit contenir tous les éléments de la forme $a + b\omega$, où a, b désignent des éléments quelconques de A ; et on devra avoir :

$$(1) \qquad \begin{aligned} &(a + b\,\omega) + (c + d\,\omega) = a + c + (b + d)\,\omega \\ &(a + b\,\omega) \times (c + d\,\omega) = a\,c + b\,d\,k + (a\,d + b\,c)\,\omega \end{aligned}$$

en tenant compte de $\omega^2 = k$.

Nous verrons que les opérations définies par les formules (1) déterminent une structure d'anneau sur l'ensemble des éléments complexes $a + b\,\omega$; et cet anneau sera le plus petit de tous ceux qui contiennent à la fois A et ω.

✦ DÉFINITION AXIOMATIQUE. A désignant un anneau commutatif, et k un élément fixé de A, nous définissons deux opérations sur l'ensemble produit A × A en posant :

$$(2) \qquad \begin{aligned} &(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \\ &(a, b) \times (c, d) = (a\,c + b\,d\,k, a\,d + b\,c) \end{aligned}$$

les formules (2) étant la traduction axiomatique des conditions (1).

✦ LEMME 1. *L'ensemble* A × A, *muni des opérations d'addition et de multiplication définies par* (2), *constitue un anneau commutatif* A_k *; et l'application* $a \to (a, 0)$ *détermine un isomorphisme de* A *avec une partie de* A_k.

[…]

✦ LEMME 2. *Si* A *admet un élément unité désigné par* 1, *alors* A_k *admet pour unité l'élément correspondant* (1, 0) ; et l'élément (k, 0) *correspondant à* k *admet pour racines carrées les deux éléments* (0, 1) *et* (0, –1).

[…]

✦ LEMME 3. *Si* A *est un corps, et si, de plus, il n'existe aucun élément de* A *dont le carré soit égal à* k, *alors* A_k *est un corps*.

L'exigence structurelle de proposer en premier lieu un cadre ensembliste, généralement obtenu par un produit cartésien d'ensembles supposés donnés, suivi éventuellement d'un passage au quotient par une relation d'équivalence, qui continue d'être proposée aux étudiants en mathématiques, laisse désarmée une profession qui doit construire $\mathbb{D}$ à partir de $\mathbb{N}$ sans disposer au préalable d'un ensemble plus large et qui, de même, construira le quotient $\dfrac{b}{a}$ comme un nombre nouveau dont la seule « définition » sera que son produit par b est égal à a. Cette suite d'extensions du système des nombres supposé disponible procède d'un point de vue *réaliste*, lié notamment aux besoins de nombres pour mesurer : *le besoin*, si l'on peut dire, *est la preuve de l'existence !* Le fait qu'on puisse couper un segment de longueur 10 cm en 3 segments de même longueur est une preuve de l'existence d'un nombre qui, multiplié par 3, donne 10. L'anneau des décimaux pourrait être construit par l'introduction d'un nombre ω tel que $10\,\omega = 1$, ce qui conduirait à écrire, au moins au niveau supérieur, dans les mathématiques pour l'enseignant, non dans les mathématiques à enseigner, que $\mathbb{D} = \mathbb{Z}[\omega]$. Si, dans cette construction, on souhaitait disposer d'un ensemble « préalable », qui ne soit pas $\mathbb{Q}$

et dans lequel on puisse définir ω, il faudrait prendre le quotient de l'anneau des polynômes $\mathbb{Z}[X]$ par l'idéal principal engendré par le polynôme $10\,X - 1$, ω étant alors identifié à la classe d'équivalence contenant le polynôme X. Cette « construction » est évidemment trop complexe pour permettre de définir les décimaux dans l'enseignement scolaire, et la solution classique (et moderne) consistant à définir les décimaux comme des rationnels particuliers apparaît ainsi, rétrospectivement, comme sans doute la plus économique. Le problème toutefois est que même cet investissement-là n'est pas à l'ordre du jour du curriculum mathématique actuel : au statut « ancillaire » des décimaux, traditionnel depuis Stévin [7], et que valide à sa façon le CAPES de mathématiques [8], s'ajoute ici une lacune mathématique et épistémologique, dont l'effet le plus sûr est de produire un refoulement du problème des décimaux, ce qui conduira à attribuer *aux élèves* l'origine des difficultés que l'enseignement et l'utilisation de ces nombres feront éventuellement surgir dans la classe.

2. Les nombres et leurs écritures

2.1. L'observation des questions soulevées par les élèves professeurs montre que, en deuxième année, leur rencontre avec les problèmes liés au système des nombres utilisé ne concerne pas, mathématiquement du moins, les décimaux, mais d'abord les « fractions ». On

---

[7] C'est en 1585 que Simon Stevin (1548-1620) publie *De Thiende*, « le dixième », qu'il traduit en français la même année sous le titre *La Disme*, opuscule dans lequel il fait connaître au monde occidental *les nombres décimaux et leurs usages*. Le système décimal avait été introduit en Europe en 1202 dans le célèbre *Liber abaci* de Léonard de Pise – Fibonacci –, mais uniquement dans le cas des entiers. La *Disme*, prétend Stevin, est un ouvrage qui fera la vie meilleure à une foule de gens parce qu'il permet de se passer des fractions (les « nombres rompus »), si redoutables lorsqu'il s'agit de calculer.

[8] Dans l'unique exposé mentionnant les décimaux, intitulé « Nombres décimaux. Applications », l'anneau $\mathbb{D}$, qui n'est même pas nommé, n'a ni à être construit (comme doivent l'être $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$), ni à être étudié en tant qu'anneau (comme doit l'être $\mathbb{Z}$). Précisons que, dans la liste des sujets de l'épreuve d'exposé du CAPES 2005, il y avait quatre sujets sur les systèmes de nombres, que l'on rappelle ici :

13. L'anneau $\mathbb{Z}$; sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$. Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont principaux. Égalité de Bézout. Résolution dans $\mathbb{Z}$ d'une équation de la forme $ax + by = c$.

14. Nombres décimaux. Applications.

15. Construction du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels.

16. Introduction et construction du corps $\mathbb{C}$ des complexes. Propriétés.

ne rencontre ainsi qu'une fois, dans le vaste corpus des questions examinées [9], une interrogation généralisante, soulevée par un professeur stagiaire de la promotion 2005-2006 :

> En mathématiques, qu'est-ce qu'un *nombre* (nombres relatifs, réels, etc.) ? (2005-2006, 2de, semaine 13)

Le gros morceau, en effet, est constitué d'abord par l'enseignement des fractions et, d'une façon difficilement dissociable, de « l'écriture fractionnaire » des « nombres », comme le montraient plusieurs des questions déjà citées. La problématicité surgit en effet, apparemment, dans la notion d'écriture fractionnaire, qui semble apparaître à la fois non familière et (donc) inutile. C'est ainsi que, en 2005-2006, alors que le sujet a été encore peu travaillé, un professeur stagiaire pose la question suivante :

> Quel est l'intérêt d'appeler les nombres rationnels « nombres en écriture fractionnaire » au collège ? (2005-2006, 4e, semaine 10)

D'emblée, cette interrogation montre une confusion, source indéfinie de difficultés, entre le nombre et son *écriture* (ou plutôt *ses* écritures possibles). Bien entendu, l'écriture fractionnaire est d'abord motivée par la rencontre avec le besoin de nombres rationnels qui se trouvent être non décimaux : si l'on peut *aussi* écrire l'entier 2 sous la forme fractionnaire $\frac{6}{3}$, on ne peut écrire *a priori* le rationnel non décimal $\frac{5}{3}$ *que* sous cette forme – on découvrira *ensuite* qu'on peut aussi l'écrire $\frac{10}{6}$, ou $\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$, ou $\frac{1,5}{0,9}$, etc. Mais dans tous les cas envisagés, au collège notamment, deux ordres de fait doivent être dégagés. Le premier tient à ce que, pour un type d'entités mathématiques donné, par exemple pour ce qui est des nombres rationnels, on dispose d'une écriture que l'on peut qualifier de *canonique,* telle que chacune des entités du type considéré s'y écrive d'une façon *unique* – ou, pour le dire autrement, y reçoive un *nom* unique : « $\frac{5}{3}$ » est ainsi le nom canonique d'un nombre rationnel qui peut être désigné par bien d'autres écritures : $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = 1 + \frac{2}{3} = \ldots$ Ce premier ordre de fait est largement souligné dans le séminaire proposé aux professeurs stagiaires : le formateur insiste sur l'exigence d'apprendre à regarder comme répondant à un *même besoin du travail mathématique* – disposer d'un nom canonique permettant l'identification formelle des entités manipulées – les

[9] Constitué des questions rédigées de septembre 2000 à février 2006 par les professeurs stagiaires des six

opérations sur les entiers (qui permettront par exemple de trouver le nom canonique, 15, du nombre dont une écriture est $2 \times 4 + 7$), les opérations sur les rationnels et la simplification des fractions d'entiers (qui permettent par exemple d'obtenir le nom canonique, $\frac{7}{12}$, du nombre dont une écriture est $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} - 1$), les calculs « sur les radicaux » (qui permettent par exemple de déterminer le nom canonique, $1 + \sqrt{3}$, du nombre dont une écriture est $\frac{2}{\sqrt{3} - 1}$), les calculs sur les expressions algébriques (qui permettent de reconnaître le nom canonique $2x^2 + x - 1$ du polynôme dont une écriture est $(2x - 1)(x + 1)$), les calculs vectoriels (qui permettent par exemple de savoir que $(3\vec{i} + \vec{j}) - (\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$), les calculs dans le corps des complexes (qui permettront de déterminer le nom canonique, 2i, du nombre complexe dont une écriture est $(1 + i)^2$), etc. De cela témoigne par exemple, le développement que nous reproduisons ci-après et qui figure dans les notes du séminaire de l'année 2004-2005.

• Pourquoi donc ne pas laisser une fraction non simplifiée, ou ne pas abandonner sans plus de façon une expression avec un radical au dénominateur, ou laisser une expression algébrique « en désordre », etc. ?

① La raison d'être première de la réduction des fractions et autres gestes de semblable nature tient dans l'effort pour apporter une réponse uniforme à la question suivante :

Comment reconnaître si *deux objets* mathématiques d'un certain type, désignés d'une certaine façon, *sont ou ne sont pas le même objet ?*

Par exemple comment savoir si l'on a ou non $7 \times 5 - 8 = 3^3$? Ou si $\frac{60}{84} = \frac{380}{532}$? Ou, encore, si

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = n^3 \text{ ?}$$

② La *solution canonique* consiste…

– à créer un *système d'écriture* des objets du type considéré dans lequel chacun d'eux ait *une écriture et une seule,*

– à « calculer » l'écriture canonique de chacun des objets à comparer :

$$7\times5-8 = 35-8 = 27, \frac{60}{84} = \frac{4\times15}{4\times21} = \frac{3\times5}{3\times7} = \frac{5}{7} \text{ etc.}$$

– à décider alors, *d'un simple coup d'œil* sur leurs écritures canoniques, si les deux objets sont identiques ou non : on a ainsi $7 \times 5 - 8 = 27$ et $3^3 = 27$ et donc $7 \times 5 - 8 = 3^3$, et aussi

$$\frac{60}{84} = \frac{5}{7} \text{ et } \frac{380}{532} = \frac{190}{266} = \frac{5\times19}{19\times7} = \frac{5}{7}$$

dernières promotions, ce corpus contient quelque 7000 questions.

et donc $\frac{60}{84} = \frac{380}{532}$, etc.

③ En vérité, la raison d'être de *tous* les « calculs » (sur les entiers, les fractions, les polynômes, les vecteurs, etc.) étudiés *de l'école primaire à l'université*, est de permettre d'identifier un objet mathématique donné *par simple examen formel*. Oublier cette raison d'être, c'est rater le sens d'une partie essentielle – tous les « calculs » ! – des mathématiques enseignées : c'est donc priver les élèves d'une clé essentielle *pour comprendre « ce qu'on fait en maths » depuis l'école primaire !*

④ La réponse précédente est générale : tout objet doit être laissé dans un état qui permette de le comparer rapidement à un autre objet du même type. On notera que, s'il ne s'agissait que de comparer deux objets donnés, on peut opérer autrement.

❶ Quand, par exemple, on ne sait pas simplifier les quotients d'entiers, et s'assurer qu'on est bien parvenu à la forme réduite, on ne peut guère que comparer deux à deux de tels quotients. Plus généralement, pour tous couples de fractions, on peut procéder par la technique des « produits en croix » : si l'on se demande par exemple si les fractions

$$\frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4} \text{ et } \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}$$

sont égales, on peut, si l'on est « savant » avoir pris soin « au cas où » de les récrire l'une et l'autre sous forme canonique :

$$\frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4} = \ldots = -(1+\sqrt{2})\ ;\ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3} = \ldots = -(1+\sqrt{2})$$

L'identité formelle permet de conclure… Mais on peut aussi vérifier directement si ces fractions sont égales ou non en calculant les produits en croix

$$(\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}-3) = \ldots = 10-7\sqrt{2}\ ;\ (3\sqrt{2}-4)(\sqrt{2}-1) = \ldots = 10-7\sqrt{2}.$$

❸ Quand on sait « un peu simplifier » sans pouvoir s'assurer que l'on est arrivé à la forme réduite (ce qu'on ne saura faire, en principe, qu'en 3^{e}), on peut enrichir la technique des produits en croix en commençant par effectuer les simplifications qui viennent aisément. Pour comparer $\frac{60}{84}$ et $\frac{380}{532}$ par exemple, on peut d'abord observer que $\frac{60}{84} = \frac{15}{21}$ et que $\frac{380}{532} = \frac{190}{266} = \frac{95}{133}$, avant de comparer les produits 15×133 et 21×95. Le recours à des techniques à la fois « locales » et « hybrides », bref le recours au « bricolage technique » *n'est nullement interdit* – il exerce l'œil à voir les formes et à en tirer partie. C'est ainsi qu'avec un peu d'habitude et un brin d'audace, il était possible d'obtenir ceci (en multipliant par $\sqrt{2}$ d'abord puis en divisant par –2, ce qui revient à… diviser par $-\sqrt{2}$) :

$$\frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-2)}{\sqrt{2}(3\sqrt{2}-4)} = \frac{2-2\sqrt{2}}{6-4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}.$$

2.2. Le second ordre de fait qui coexiste avec le premier (relatif à la notion d'écriture canonique d'un type d'entité mathématique) est non seulement que, dans le travail mathématique, une entité apparaît généralement sous une forme non canonique, ce qui appelle sa mise sous forme canonique à des fins d'identification formelle, mais que, quelle que soit l'écriture que reçoit à un moment donné du travail une certaine entité, il convient, *en fonction du projet mathématique poursuivi*, de la réécrire dans une forme en général non canonique mais appropriée pour *montrer* certaines propriétés de l'entité, moyennant un raisonnement en général simple sur la *forme* de l'écriture. C'est ainsi par exemple que le polynôme $2x^2 + x - 1$ ne révèle par immédiatement qu'il s'annule lorsque $x = -1$; du moins faut-il effectuer sur cette forme un travail supérieur à celui qu'on effectuera pour parvenir à la même conclusion sur la forme factorisée $(2x - 1)(x + 1)$, travail lui-même supérieur à celui que requiert la forme plus complexe $2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - (-1)\right)$. L'expression du nombre complexe 2i sous la forme $(1 + \mathrm{i})^2$ permettra de même de voir que les racines carrées de 2i sont $1 + \mathrm{i}$ et $-(1 + \mathrm{i}) = -1 - \mathrm{i}$. Le développement ci-après, qui, dans le séminaire 2004-2005, précède et introduit celui que nous avons reproduit plus haut, explicite fortement ce point de vue.

① Pourquoi par exemple pousse-t-on, dans la culture mathématique commune, à ne pas laisser l'expression numérique

$$A = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$$

en l'état, mais à la mettre sous la forme « simplifiée »

$$A = \sqrt{3} - 1 \ ?$$

Une réponse fréquemment donnée est que cela faciliterait le calcul de valeurs approchées de *A*. Cette réponse a perdu de sa pertinence aujourd'hui : la calculatrice affiche immédiatement un nombre de décimales dont le calcul, autrefois, n'était souvent pas même envisagé, au moins au secondaire. Ainsi obtient-on 0,73205080756887729352744634150587… pour l'une et l'autre expressions !

❶ Il y a plus : il *n'est pas vrai* que la forme que nous appellerons *canonique* de *A* soit la plus adéquate quand on veut déterminer des valeurs décimales approchées de *A*. Supposons ainsi que nous calculions en prenant pour valeur approchée de $\sqrt{3}$ le décimal 1,7. Il vient :

$$\sqrt{3} - 1 \approx 0{,}7 \ ; \ \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \approx \frac{2}{2{,}7} = 0{,}74074\ldots$$

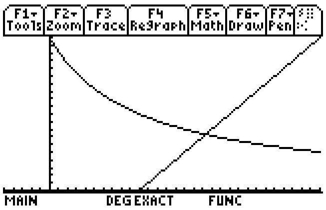
On voit que la seconde valeur est bien meilleure : l'erreur est, dans le premier cas, presque 3,7 fois plus importante que dans le second cas.

❷ L'explication est facile dès qu'on dispose de la notion de *fonction*. Posons

$$f(x) = x - 1 \text{ et } g(x) = \frac{2}{x + 1}.$$

On voit que la première valeur approchée de A n'est autre que $f(1{,}7)$, tandis que la seconde est $g(1{,}7)$.

Or f croît et g décroît dans un intervalle contenant $\sqrt{3}$ et 1,7, ce que confirment les représentations graphiques de f et g ci-dessous.



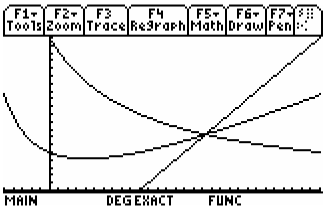
Comme $1{,}7 < \sqrt{3}$, on pouvait ainsi *prévoir* que l'on aurait (ainsi qu'on l'a constaté)

$$0{,}7 = f(1{,}7) < f(\sqrt{3}) = A = g(\sqrt{3}) < g(1{,}7) < 0{,}741.$$

Surtout, on peut penser à fabriquer une autre fonction, f_1, telle que $f_1(\sqrt{3}) = A$, et qui, pour $x = 1{,}7$, donne une valeur plus proche de A que $f(1{,}7)$ et $g(1{,}7)$. Posons en effet

$$f_1 = \frac{f+g}{2}.$$

La représentation graphique de f_1 montre que cette fonction est croissante dans un intervalle contenant 1,7 et $\sqrt{3}$ (ce qu'on admettra provisoirement).



Ces courbes montrent aussi que, lorsqu'on prend 1,7 pour valeur approchée de $\sqrt{3}$, l'expression

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}+1}$$

est « meilleure » pour calculer la valeur de A que l'expression $\sqrt{3} - 1$. On a de fait :

$$f_1(1{,}7) = \frac{1{,}7-1}{2} + \frac{1}{1{,}7+1} = 0{,}35 + \frac{1}{2{,}7} = 0{,}720\ldots$$

❸ Ce qui précède fournit l'encadrement : $f_1(1{,}7) < A < g(1{,}7)$. On a :

$$f_1(x) = \frac{x-1}{2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}\frac{x^2+1}{x+1}.$$

Posons $f_2 = \dfrac{f_1+g}{2}$. On obtient ici $f_2(1{,}7) = 0{,}175 + \dfrac{1}{5{,}4} + \dfrac{1}{2{,}7} = 0{,}175 + \dfrac{1}{1{,}8} > 0{,}73\ldots$

On a $f_2(x) = \dfrac{1}{4}\dfrac{x^2+5}{x+1}$; on peut établir que l'on a :

$$\frac{f_2(x') - f_2(x)}{x'-x} = \frac{(x'+1)(x+1)}{4}\,[(x'-x)(x+1) + x^2 + 2x - 5].$$

Comme, pour $x > 1{,}5$, on a $x^2 + 2x - 5 > 0{,}25$, on peut conclure que f_2 est croissante pour $x > 1{,}5$, et on peut donc prendre pour valeur approchée de A

$$g_1(x) = \frac{1}{2} f_2(1{,}7) + \frac{1}{2} g(1{,}7) = 0{,}0875 + \frac{1}{10{,}8} + \frac{1}{5{,}4} + \frac{1}{2{,}7} = 0{,}0875 + \frac{7}{10{,}8} = 0{,}736\ldots$$

On a ici $g_1(x) = \frac{1}{8}\frac{x^2 + 13}{x + 1}$; un calcul analogue au précédent montre que g_1 décroît dans un intervalle contenant 1,7 et $\sqrt{3}$, en sorte qu'on peut conclure que $0{,}73 < A < 0{,}736$. On voit en passant qu'il est inepte de prétendre que la précision de la valeur calculée « ne saurait être meilleure que celle des valeurs à partir desquelles on calcule » : tout dépend du procédé de calcul !

3. Quotients et rationnels

3.1. On s'arrête ici sur le premier type de besoins numériques qui, ne pouvant être satisfait par les décimaux, engendre le recours à l'écriture fractionnaire : le besoin de rationnels non décimaux. La question est, aujourd'hui, fort peu claire chez les professeurs, en dépit de la problématique qui s'exprime nettement dans les programmes du collège, anciens et rénovés. Pour la *doxa* professorale, semble-t-il, ce qu'on va noter *a priori* $\frac{4}{3}$ désignerait le « quotient » de 4 par 3. Mais qu'entend-on par quotient ? La naturalisation de l'opération de *division* pratiquée avec les entiers puis avec certains décimaux conduit sans doute à supposer que cette opération est toujours possible, ou du moins *à faire comme s'il en était ainsi*. De là le postulat implicite que l'on opèrerait dans un *corps* de nombres : la fraction $\frac{4{,}2}{3}$ désignerait, dans cette vision naturalisante des choses, un nombre dont l'identité serait révélée *en effectuant la division* de 4,2 par 3, opération que, à la manière française, on « pose » ainsi :

$$\begin{array}{r|l} 4{,}2 & 3 \\ \cline{2-2} 1\;2 & 1{,}4 \\ 0 & \end{array}$$

Dans ce cas, l'écriture fractionnaire $\frac{4{,}2}{3}$ apparaît comme une manière (provisoire) de désigner le nombre (décimal) 1,4. Qu'en est-il alors de $\frac{4}{3}$? Il est intéressant de noter qu'on trouve très rarement dans l'enseignement prodigué au collège, en 6^e ou en 5^e, la preuve que ce quotient, s'il existe, *n'est pas* un nombre décimal. Il est pourtant facile de montrer que si, par exemple, on prenait pour quotient $q = 1{,}33$, on aurait $3 \times q = 3{,}99 \neq 4$; et, plus généralement (mais de façon plus « abstraite »), que si l'on prenait un décimal q dont la dernière décimale non nulle soit l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le produit $3 \times q$ aurait pour dernière décimale, selon le cas, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, mais jamais 0, ce qui montre qu'on n'obtient jamais l'égalité $3 \times q = 4$. L'idée semble donc prévaloir que la notation fractionnaire $\frac{a}{b}$ est un artifice utile qui, toutefois, reste un artifice face à la véritable « réalité numérique », celle du nombre qui serait le quotient de a par b, et qui s'obtiendrait par une extension de l'algorithme usuel de division. C'est au reste ce que formalise la notion de *développement décimal* (« illimité ») d'un rationnel, avec sa partie apériodique et sa partie périodique : ainsi la fraction (ou l'écriture fractionnaire) $\frac{103}{666}$ désigne-t-elle le quotient de la division de 103 par 666, que l'on trouve égal à $0{,}1546\overline{546}$. Il s'agit là d'une idée prégnante [10], qui barre l'accès à un point essentiel de la construction – ou de la découverte – des systèmes de nombres que l'on trouve pourtant développé dans le séminaire du mardi matin presque chaque année depuis bien longtemps. À titre d'exemple, nous examinerons rapidement, ci-après, les éléments de réponse contenus dans les notes de l'année 2002-2003, en commençant par les questions auxquelles le formateur s'emploie à répondre.

1. Quelle est la différence entre fractions et écritures fractionnaires ? On m'a dit que les fractions désignaient exclusivement les quotients de nombres entiers, tandis que l'écriture fractionnaire correspond au quotient de deux nombres quelconques. Certains dictionnaires confirment cette distinction mais les fractions rationnelles ne se limitent pas aux entiers et on définit également le corps des fractions d'un anneau intègre quelconque. Qu'en est-il précisément ? (2002-2003, 4^{e}, semaine 9)

2. Je n'ai pas trouvé dans le programme de 4^{e} la présence de l'équivalence (pour b, $d \neq 0$) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$. Pourtant dans de nombreux manuels cette équivalence est abordée lors de l'étude des quotients égaux. Est-il nécessaire de la présenter aux élèves ? Dans quel chapitre pourra-t-elle être réinvestie ? Si

---

[10] La prégnance de cette idée est si forte qu'on la voit réapparaître dans le document d'accompagnement du programme du cycle terminal de la série littéraire paru en janvier 2006 où figure une rubrique intitulée *Écriture décimale d'un nombre rationnel*, qui commence ainsi : « La définition donnée en classe de sixième de l'écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ (a et b étant deux entiers naturels avec b non nul) est : "$\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a, autrement dit $\frac{a}{b}$ est le résultat de la division décimale de a par b." » Le commentaire « autrement dit $\frac{a}{b}$ est le résultat de la division décimale de a par b » est un ajout – et une « invention » – des rédacteurs du document d'accompagnement cité : ce commentaire n'apparaît nullement, sous cette forme ou dans une autre formulation, dans le programme de 6^{e} ancien ou nouveau.

je ne la leur présente pas, est-ce que je risque d'être « bloquée » par la suite ? (2002-2003, 4e, semaine 10)

3. Pour définir la fraction $\frac{b}{a}$ ($b \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}^*$), on dit que c'est l'unique solution de l'équation $a \times x = b$. Donc, sous-entendu, la multiplication est bien définie ! Mais quelle est cette multiplication ? On définit un objet $\frac{b}{a}$ sur lequel on sait déjà opérer ! En principe, on définit des objets, *puis* des opérations sur ces objets. (2002-2003, 4e, semaine 8)

La première question est rapidement écartée : le responsable du séminaire rappelle qu'elle a été traitée dans une séance antérieure du séminaire. C'est à propos de la deuxième question qu'il va expliciter la mise en place du corps $\mathbb{Q}$ des quotients.

On a vu lors de la séance 5 de ce Séminaire comment les quotients sont *en principe* introduits en 6e : le nombre $\frac{a}{b}$ (où $b \neq 0$) est défini comme *l'unique nombre x vérifiant l'équation bx = a*. Ce qu'un commentaire du programme de 6e explicite dans les termes suivants :

Les activités poursuivies en sixième s'appuient sur deux idées :

– le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre,

– le produit de $\frac{a}{b}$ par b est égal à a.

Ceci permet de considérer un nombre tel que $\frac{4}{3}$ comme quatre fois un tiers, le tiers de quatre ou encore le nombre dont le produit par trois est égal à quatre.

• L'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (où $bd \neq 0$) équivaut donc à chacune des égalités $b \times \frac{c}{d} = a$ et $d \times \frac{a}{b} = c$. La première égalité (par exemple) équivaut à celle qu'on obtient en multipliant chacun de ses membres par d : $\left(b \times \frac{c}{d}\right)d = ad$. On a : $\left(b \times \frac{c}{d}\right)d = b\left(\frac{c}{d} \times d\right) = bc$. Par suite, la première égalité est équivalente à l'égalité $ad = bc$; on a finalement : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$. Telle est la démonstration qui *pourrait* être faite à partir du point de vue introductif adopté en 6e.

• En 4e on peut reprendre cette question en supposant disponible un calcul plus fluent sur les fractions. Si on suppose que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (où $bd \neq 0$), on a aussi $(bd) \times \frac{a}{b} = (bd) \times \frac{c}{d}$. Comme on a

$$(bd) \times \frac{a}{b} = (db) \times \frac{a}{b} = d\left(b \times \frac{a}{b}\right) = da = ad$$

et de même $(bd) \times \frac{c}{d} = bc$, on obtient finalement l'égalité $ad = bc$. Inversement, si $ad = bc$ (avec $bd \neq 0$), on a $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ et donc, après simplification, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

• Ce qui importe est moins de « savoir par cœur » l'énoncé technologique « isolé » (et techniquement inintelligent) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ que de savoir manipuler les bonnes techniques de calcul sur les fractions. Si, par exemple (voir la séance 5, toujours), on veut comparer les fractions $\frac{4}{7}$ et $\frac{2}{3}$, on pourra par exemple les récrire sous la forme $\frac{3\times 4}{3\times 7}$ et $\frac{2\times 7}{3\times 7}$, soit encore $\frac{12}{3\times 7}$ et $\frac{14}{3\times 7}$, ce qui permettra de conclure : $\frac{4}{7} < \frac{2}{3}$. Plus rapidement (mais aussi plus subtilement étant donné les habitudes), on pourra aussi récrire la seconde fraction sous la forme $\frac{4}{6}$, ce qui permettra d'aboutir à la même conclusion. On pourra encore effectuer le *quotient* des deux fractions :

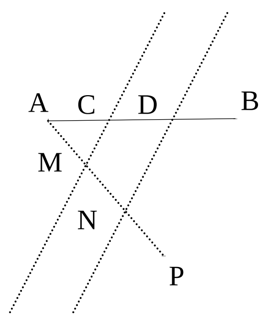
$$\frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{14} < 1$$

ce qui conduira à la même conclusion…

La troisième question donne l'exemple même du paralogisme qu'il s'agit pour le formateur d'éradiquer : l'élève professeur raisonne dans le paradigme « modernisme » au lieu de se placer d'un point de vue « réaliste ». De là découle l'explicitation suivante.

Le raisonnement de la 3^{e} question part de prémisses inadéquates (de type « modernistes »). La problématique adoptée au collège en ce qui concerne les *nombres* (en général) est de type *réaliste* : on suppose – il s'agit là d'un composant clé Θ de la *théorie* sous-jacente au curriculum mathématique du collège… – *qu'existent les nombres dont on a besoin pour mesurer les grandeurs géométriques usuelles*. Le « système de nombres » ainsi nécessaire, $\mathcal{N}$, est dans le même mouvement – la chose est consubstantielle à l'idée même de nombres – supposé constituer un *demi-anneau commutatif, unifère et intègre dont les lois prolongent celle de* $\mathbb{N}$.

• Soit donc un segment [AB] pris pour unité de longueur. Géométriquement, il est possible de construire sur [AB] des points C et D tels que AC = CD = DB (voir la figure ci-contre, où l'on a construit les points auxiliaires M, N, P de façon que AM = MN = NP).



Soit alors x le nombre mesurant la longueur des segments [AC], [CD], [DB] quand on prend la longueur AB comme unité. On a ainsi : $3x = 1$. Le nombre x est donc solution de l'équation $3x = 1$.

• Plus généralement, pour tout couple d'entiers $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$, il existe un nombre x unique tel que $bx = a$. (L'unicité de x découle de l'intégrité de $\mathcal{N}$.) C'est par définition ce nombre que l'on note $\frac{a}{b}$. On a donc *par définition* $b \times \frac{a}{b} = a$.

• Il importe d'observer qu'à partir du moment où on suppose $\mathcal{N}$ comme on l'a dit, les opérations d'addition et de multiplication de $\mathcal{N}$ découlent *implacablement* de la définition posée ci-dessus.

– Soit ainsi à déterminer le *produit* de $x = \frac{a}{b}$ et de $y = \frac{c}{d}$; en multipliant membre à membre les égalités $bx = a$ et $dy = c$, on obtient l'égalité $(bx)(dy) = ac$. Comme on a $(bx)(dy) = (bd)(xy)$ il vient $(bd)(xy) = ac$, égalité qui montre que $xy = \frac{ac}{bd}$ soit donc que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

– Soit de même à déterminer la *somme* de $x = \frac{a}{b}$ avec $y = \frac{c}{d}$; en multipliant les égalités $bx = a$ et $dy = c$ respectivement par d et b on obtient les égalités $d(bx) = da$ et $b(dy) = bc$, soit encore $(bd)x = ad$ et $(bd)y = bc$. En ajoutant membre à membre ces égalités, on obtient $(bd)x + (bd)y = ad + bc$, soit encore $(bd)(x + y) = ad + bc$, égalité qui montre enfin que $x + y = \frac{ad + bc}{bd}$, soit donc que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

Le point « faible » de la construction précédente est, à l'évidence, qu'on ne s'y préoccupe pas de sa consistance. Là encore un développement spécifique vient resituer fermement les choses.

• Bien entendu, il resterait à montrer que l'anneau commutatif, unitaire, intègre supposé existe bien, c'est-à-dire, en termes de logique, que si l'hypothèse d'existence du système des nombres entiers naturels n'entraîne pas de contradiction, alors il en est de même de l'hypothèse de l'existence du système des quotients d'entiers naturels. De tels résultats dits de *consistance* (ou de non-contradiction) *relative* n'apparaissent pas avant le XIX^e^ siècle : on en résume ci-après la chronique.

– En 1837, Hamilton montre que, *si* le système des nombres réels $\mathbb{R}$ est non contradictoire, *alors* il en est *de même* de $\mathbb{C}$. Pour cela, il observe que $\mathbb{C}$ peut se définir à partir du système $\mathbb{R}$ d'une manière aujourd'hui bien connue :

$$\begin{cases} \mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d) \\ (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \\ \text{si } c^2 + d^2 > 0 \text{ alors } \dfrac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) \end{cases}$$

– De la même façon, dans les années 1860, Weierstrass montrera, en exploitant l'idée de Hamilton (que Gauss prétendit avoir eue dès 1831, à propos des complexes), que, si $\mathbb{N}$ est consistant, alors il en est de même de $\mathbb{Z}$, puis de $\mathbb{Q}$. (La démonstration analogue pour $\mathbb{R}$ fit au cours du siècle l'objet de travaux plus difficiles, mais finalement convergents, de Cantor, Dedekind, Méray, etc.)

– Le projet de développer un système de nombres qui seraient l'analogue pour l'espace *à trois dimensions* de ce que les complexes sont pour le *plan* se révéla en revanche *impossible* (voir la séance 9 de ce Séminaire). Hamilton, qui y travailla sans succès « au moins quinze ans », dut finalement reconnaître que, s'il était facile de définir sur $\mathbb{R}^3$ une structure *additive* convenable, il n'était pas possible d'y définir une *multiplication*. Il prit conscience du même mouvement que, pour dépasser cette impossibilité, il fallait accepter, d'abord de *passer de* $\mathbb{R}^3$ *à* $\mathbb{R}^4$, ensuite de renoncer à la *commutativité* de la multiplication. Ainsi créa-t-il les *quaternions*, comme il le raconte dans le passage suivant (cité *in* Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972, p. 779) :

Tomorrow will be the fifteenth birthday of the Quaternions. They started into life, or light, full grown, on the 16th of October, 1843, as I was walking with Lady Hamilton to Dublin, and came up to Brougham Bridge. That is to say, I then and there felt the galvanic circuit of thought closed, and the sparks which fell from it were the fundamental equations between I, J, K ; *exactly such* as I have used them ever since. I pulled out, on the spot, a pocketbook, which still exists, and made an entry, on which, *at the very moment*, I felt that it might be worth my while to expend the labour of at least ten (or it might be fifteen) years to come. But then it is fair to say that this was because I felt a *problem* to have been at that moment *solved*, an intellectual *want relieved*, which has *haunted* me for at least *fifteen years* before.

Cette mise en perspective historique ouvre sur une conclusion tout aussi ferme, qui souligne le leurre d'une croyance naïve en la possibilité de donner une démonstration mathématique de consistance « absolue ».

• Au collège et au-delà, on s'en tiendra à l'approche « réaliste » des nombres sagement proposée par les programmes, en n'oubliant pas que la seule preuve d'existence possible serait un résultat de consistance *relative*, du type : si le « système de nombres » supposé, par exemple le système $\mathcal{N}$ des quotients $\frac{a}{b}$, comportait une *contradiction*, alors *il en irait de même d'un système de nombres réputé pourtant non contradictoire*, ici $\mathbb{N}$. Tel est le sens – bien mal compris, si l'on voit en elles des preuves de non-contradiction *absolue* – des prétendues « constructions » de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$ (ou de $\mathbb{Q}_+$ à partir de $\mathbb{N}$).

3.2. Ce long développement fort explicite ne suffit sans doute pas à clarifier complètement la situation pour ceux à qui il s'adresse. La troisième des questions qui le motive dans le séminaire d'où nous l'extrayons montre bien que la définition de $\frac{a}{b}$ comme le nombre dont le produit par b est égal à a n'est pas reçue sans difficulté par les professeurs stagiaires. En vérité, il y a sans doute là *deux* points de difficulté. Il y a d'abord cette découverte, vécue sans doute comme étrange par beaucoup d'entre eux, que, à partir du moment où l'on admet que $\frac{a}{b}$ est un nombre – donc l'élément d'un anneau commutatif, unitaire et intègre qui contient les décimaux comme sous-anneau – et que ce nombre est solution de l'équation $bx = a$, *toutes* les opérations sur les écritures de la forme $\frac{a}{b}$ sont complètement déterminées (sans recours à quelque mise en relation modélisante que ce soit) : les dés sont jetés, les jeux sont faits ! Mais venons-en maintenant à un autre point de vue, plus caché, que nous avons commencé d'exposer un peu plus haut : définir $\frac{a}{b}$ comme « le nombre qui… » entre en conflit avec une croyance plus ancienne et sans doute plus prégnante dans la culture mathématique scolaire, selon laquelle ce nombre, en quelque sorte, existerait « déjà » et n'aurait donc pas à être « introduit » ni, à plus forte raison, « créé » : ce serait le nombre même que l'on obtient *en effectuant la division* de a par b. C'est ce point de vue qui organise par exemple la logique de la question suivante, formulée par une professeure stagiaire de l'année 2005-2006, là encore après une première présentation de la théorie des « fractions d'entiers » exposée plus haut.

> Le thème de mon corpus B est la comparaison et l'addition en écriture fractionnaire. Pour l'instant, on a écrit que $\frac{a}{b}$ est le quotient de a par b… (Je comptais donner la définition « $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a » lorsque j'entamerai la multiplication en écriture fractionnaire.) Puis j'ai précisé que, lorsque a et b étaient des nombres entiers, le quotient $\frac{a}{b}$ était appelé fraction (comme je l'ai vu dans de nombreux livres, ainsi qu'avec ma PCP). Depuis ma visite et la discussion qui a suivi, je sais qu'il y a un problème dans cette définition (entre la nature et l'écriture d'un nombre), mais je dois dire que je saisis mal le problème. Peut-on revenir un peu sur tout ça ? (2005-2006, 5^{e}, semaine 18)

Tout se passe comme si cette vision des fractions était hantée par un spectre : celui de la « valeur » de la fraction, soit le nombre que désignerait la fraction et qui serait *la véritable réalité numérique*, objet de tout calcul et de toute considération. Un tel point de vue empêche sans doute de faire fond pleinement sur les écritures fractionnaires. Considérons ainsi cette question proposée par un professeur stagiaire ayant en responsabilité une classe de 5^{e} :

> Au sujet du contrôle des résultats d'une équation de la forme $a/x = b$ en 5^{e}, les élèves peuvent être amenés à trouver une fraction comme résultat (par exemple avec l'équation $2/x = 6$). Cependant ne connaissant pas la division des fractions, ils ne seront pas en mesure de vérifier leur résultat (hormis en utilisant la calculatrice). Comment faire ? (2003-2004, 5^{e}, semaine 17)

Il y a là, de fait, une difficulté non triviale. Tout d'abord, notons que *certaines* équations de la forme $\frac{a}{x} = b$ sont bien au programme de la classe de 5^{e}, qui range parmi les compétences exigibles la maîtrise du type de tâches suivant :

> Trouver, dans des situations numériques simples, le nombre par lequel diviser un nombre donné pour obtenir un résultat donné.

Un commentaire précise que le fait de « désigner par une lettre le nombre inconnu peut ici se révéler pertinent ». Il est donc indubitable que les élèves de 5^{e} devront savoir résoudre l'équation $\frac{12}{x} = 4$ ou l'équation $\frac{27}{x} = 3$, etc. Il est moins clair que l'équation proposée dans la question, à savoir $\frac{2}{x} = 6$, se trouve dans le champ délimité de manière un peu vague par les rédacteurs du programme. Si on l'y admet, toutefois, comment, d'abord, la *résoudre* ? À nouveau, la tension entre l'idée de « division effectuée » et la définition officielle des fractions semble manifeste. Dans le premier cas, on est tenté de chercher dans le répertoire des nombres que l'on connaît et des produits où on a l'habitude de les voir entrer une réponse toute faite. Le nombre 1, ainsi, ne convient pas, et de même 2, ni *a fortiori* 3, etc. Parmi les nombres plus petits que 1, le diviseur 0,2 donnerait 10 et non pas 6 ; 0,25 donnerait 8 ; 0,4 donnerait 5 ; etc. (l'élève peut s'aider ici de sa calculatrice). Cette recherche par essais et erreurs se révèle infructueuse ; c'est à une autre technique qu'il faut recourir. Cette autre technique est celle qu'engendre, de façon relativement naturelle, la technologie officielle des fractions installée depuis la classe de 6^{e}. Le nombre $\frac{2}{x}$ est le nombre qui, multiplié par x, donne 2 : $\frac{2}{x} \times x = 2$. Si l'on veut donc que $\frac{2}{x} = 6$, il faut que $6\,x = 2$, soit encore que $3\,x = 1$, ce qui s'écrit : $x = \frac{1}{3}$. C'est en ce point que la question examinée parle de *vérifier* le résultat en remplaçant x par la valeur trouvée, c'est-à-dire en calculant $\frac{2}{\frac{1}{3}}$. C'est là aussi que l'auteur de la question bute sur une difficulté : le quotient de 2 par $\frac{1}{3}$ *n'aurait pas été défini*. Mais s'il en était ainsi, la détermination de x, ainsi que nous l'avons menée à bien, *ne serait elle-même pas justifiée* – sauf à prétendre rechercher une solution x entière ou décimale, ce que le résultat obtenu montre non fondé. Tout ce que la résolution de l'équation, telle que nous l'avons conduite, montre alors, est que l'équation n'a pas de solution décimale, en sorte que, ayant trouvé formellement $x = \frac{1}{3}$, on doit alors se poser le problème de définir les quotients de la forme plus générale $\frac{\frac{a}{b}}{c}$, et, plus généralement, le quotient d'un rationnel $\frac{a}{b}$ par un rationnel $\frac{c}{d}$.

Cela figure-t-il au programme de la classe de 5^e ? Les textes, là-dessus, ne sont pas d'une clarté totale. En 5^e, le domaine des travaux numériques range d'emblée parmi les compétences exigibles la maîtrise du type de tâches suivant :

> Organiser, pour l'effectuer mentalement, avec papier crayon ou à la calculatrice, une succession d'opérations au vu d'une écriture donnée de la forme
>
> $$\mathrm{a + bc,\ a + \frac{b}{c},\ \frac{a}{b + c},\ \frac{a + b}{c},\ a/(b/c),\ \ldots}$$
>
> uniquement sur des exemples où a, b et c sont numériquement fixés.

On peut en conclure que l'écriture $\frac{2}{\frac{1}{3}}$ fait partie des entités manipulables par des élèves de 5^e.

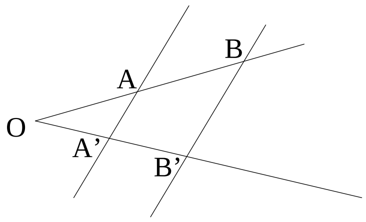
La technologie de ces manipulations découle évidemment de la théorie des fractions mises en place dès le programme de 6^e. On a explicité le principe théorique selon lequel on supposait que le système des nombres où on opérait était un anneau commutatif, unitaire et intègre. On peut donc considérer *a priori*, pour des décimaux a, b, c, d donnés, le *produit* $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$: notons-le x. Il est alors facile de voir que $bdx = ac$, d'où l'on conclut que $x = \frac{ac}{bd}$. Mais cette démarche ne saurait être adoptée, *mutatis mutandis*, à propos de la division : nous ne pouvons dire *a priori* s'il existe un nombre x, que l'on noterait alors $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, tel que $\frac{c}{d} \times x = \frac{a}{b}$. On peut cependant, comme on l'a fait à propos de l'équation $\frac{2}{x} = 6$, procéder à l'*analyse* que voici : si ce nombre x existe, il vérifie $bd \times \frac{c}{d} \times x = db \times \frac{a}{b}$, c'est-à-dire encore $bcx = ad$; or nous connaissons un nombre vérifiant cette dernière équation et nous savons *a priori*, d'après le principe théorique posé, que ce nombre est unique : il s'agit de $x = \frac{ad}{bc}$. Ce nombre convient-il ? On doit ici passer à la *synthèse*. Pour convenir, il doit vérifier $\frac{c}{d} \times x = \frac{a}{b}$. Or $\frac{c}{d} \times x = \frac{c}{d} \times \frac{ad}{bc}$, c'est-à-dire $\frac{acd}{bcd} = \frac{a}{b}$.

On découvre donc que le système des nombres qui peuvent s'écrire $\frac{a}{b}$, avec a et b entiers (ou décimaux), forme en réalité un *corps*. Pour deux tels nombres x et y, considérons leur quotient $\frac{x}{y}$. Montrons qu'on a alors $\frac{x}{y} \times y = x$. Posons $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ avec a, b, c, d entiers ou décimaux. On a alors $\frac{x}{y} = \frac{ad}{bc}$; il vient donc : $\frac{x}{y} \times y = \frac{ad}{bc} \times \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} = \frac{a}{b} = x$. En vertu de l'intégrité, on peut définir le quotient $\frac{x}{y}$, où x et y sont des rationnels, comme l'unique rationnel vérifiant $\frac{x}{y} \times y = x$. Il en résulte aussitôt, ainsi qu'il en allait dans le cas où tous les nombres manipulés étaient entiers ou décimaux, que, pour tout rationnel non nul r, on a $\frac{x}{y} = \frac{rx}{ry}$. En particulier, si $x = \frac{1}{3}$, on a $\frac{2}{x} = \frac{3 \times 2}{3x} = \frac{6}{1} = 6$: l'équation mentionnée dans la question que nous avons suivie est ainsi vérifiée. Accordons que le détour est un peu long ; mais il ne devrait l'être que pour des *élèves* de 5^{e}, non pour leurs professeurs. Or on doit constater que le curriculum mathématique est, sur ce point, laissé dans une confusion qui ne facilite pas le travail des professeurs, non plus bien sûr que celui des élèves. Dans le cas examiné, on pourrait certainement, ayant trouvé $x = \frac{1}{3}$, *admettre* que l'on opère sur des fractions de fractions *comme* sur des fractions d'entiers (ou de décimaux) – ne serait-ce déjà que pour éprouver la consistance de ce postulat pratique, avant peut-être d'en donner une démonstration fondée sur les postulats théoriques que nous avons soulignés. D'une manière générale, par exemple, on pourrait *admettre* que $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \times c}{\frac{b}{c} \times c} = \frac{ac}{b}$. On étendrait ainsi un geste de calcul (qui ne change pas la « valeur » de la fraction) pratiqué en principe *depuis la 6^{e}* puisque le programme de cette classe indique :

> On dégagera et on utilisera le fait qu'un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre.

4. Un analyseur : les produits en croix

4.1. Les faits que nous venons d'évoquer sont, évidemment, têtus. Les professeurs stagiaires les rencontrent indéfiniment sur leur route, à titre d'obstacles. En témoigne notamment une situation qu'ils tendent à subsumer sous l'étiquette archaïsante de « produits en croix », comme l'illustre la question suivante :

> Je prépare mon cours sur les fractions, en 5^e. Pour montrer que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on apprend qu'il faut qu'il existe $k \neq 0$ tel que $c = ka$ et $d = kb$. Mais le programme ne parle pas du produit en croix ($ad = bc$). Le problème c'est que le programme n'en parle pas non plus en 6^e ni en 5^e (proportionnalité), et pas non plus en 4^e. Pourtant, on en a besoin pour la « première forme » du théorème de Thalès :
>
> 
>
>
> $$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \Leftarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$
>
> À quel moment de la scolarité doit-on parler du « produit en croix » ? Doit-on seulement l'évoquer pour compléter un tableau de proportionnalité ? Dois-je le mentionner dans le cours ? (2001-2002, 5^e, semaine 7)

L'auteure de cette question indique à juste titre que l'expression traditionnelle de « produit en croix » n'apparaît pas dans le texte des programmes alors en vigueur au collège, non plus que dans les documents qui les accompagnent. Quelques promotions plus tard, cette absence formelle de l'antique expression met un doute dans l'esprit de l'auteure de la question suivante :

> Dans le chapitre « Proportionnalité » en 5^e, le terme « produit en croix » est-il toujours d'actualité pour calculer une quatrième proportionnelle ? (2004-2005, 5^e, semaine 13)

L'expression, donc, n'y est pas. Mais la chose qu'elle désigne traditionnellement y est-elle ? L'auteure de la question ci-après croit la voir dans le programme de 5^e, de même qu'elle croit y voir une autre vénérable « méthode », appelée traditionnellement « de réduction à l'unité » :

> Dans le BO, les conventions de mesure du temps entrent dans le chapitre de la proportionnalité (sur les manuels également) ; la méthode ainsi sous-jacente est donc l'utilisation du produit en croix. Or la méthode qui consiste à remplacer l'unité me semble beaucoup plus claire. Peut-on expliquer les deux méthodes « au même moment » ou doit-on laisser du temps aux élèves entre les deux ? (2002-2003, 5^e, semaine 13)

On saisit plus clairement, ici, que, par delà l'expression elle-même, c'est la *technique* qui est interrogée et comparée à d'autres techniques. En dépit de l'absence confirmée de l'expression, une stagiaire la fantasme, comme le montre la remarque qui clôt une question où elle met par ailleurs en débat la technique des produits en croix :

> Pour calculer une quatrième proportionnelle, en classe de 5e, on peut utiliser l'égalité des produits en croix. Le problème est qu'il y a ensuite une étape supplémentaire pour trouver x. Dans la synthèse, peut-on donner directement la méthode
>
> | | |
> |---|---|
> | a | x |
> | b | c |
>
> $$x = \frac{a \times c}{b} \ (b \neq 0,\ a \neq 0,\ c \neq 0)$$
>
> (Dans le programme officiel, on ne parle pas de cette technique, mais juste de l'égalité des produits en croix.) (2000-2001, 5e, semaine 17)

4.2. Arrêtons-nous un instant sur l'affirmation et la question posées ici. Les tableaux de proportionnalité sont introduits en classe de 5e. Soit un tel tableau

a	c
b	d

où a, b, c et d sont, en pratique, des nombres déterminés. De quel *type* de nombres s'agit-il ? En début de 6e, la réponse irait de soi : ce sont des entiers ou des décimaux (« courants »). Comment alors définir le fait qu'il s'agit là d'un tableau *de proportionnalité*. C'est en ce point que les quotients ou fractions d'entiers vont devoir être mobilisés, si, du moins, l'on veut pouvoir donner la définition suivante et l'utiliser de façon satisfaisante : le tableau sera dit de proportionnalité s'il existe un « nombre » k tel que $a = kb$ et $c = kd$. Bien entendu, cette définition suppose que, dans le système de nombres utilisé, a soit divisible par b et c par d. Si $a = 1$ et $b = 3$, quels que soient c et d le tableau ne pourra être dit de proportionnalité selon la définition retenue provisoirement ici. On peut évidemment « ouvrir » cette définition en posant que le tableau est de proportionnalité soit s'il existe un nombre k tel que $a = kb$ et $c = kd$, soit s'il existe un nombre ℓ tel que $b = \ell a$ et $d = \ell c$. Même dans ce cas, si le système des nombres disponibles se réduit à l'anneau $\mathbb{D}$ des décimaux, dès lors par exemple que $a = 3$ et $b = 7$, le tableau considéré ne pourra jamais être de proportionnalité ! Dans ce dernier cas, on peut ouvrir encore la définition en supposant qu'on lui rajoute cette clause : « … soit encore s'il existe m tel que $a = mc$ et $b = md$, ou s'il existe n tel que $c = na$ et $d = nb$ ». Si, par exemple, $c = 12$ et $d = 28$, le tableau sera de proportionnalité, puisque $c = 4a$ et $d = 4b$. En revanche, le tableau suivant ne pourra pas être regardé comme étant de proportionnalité :

21	33
49	77

Toutes ces difficultés disparaissent si l'on plonge le système des nombres jusqu'alors disponibles dans le système des *quotients d'entiers* (ou de décimaux), c'est-à-dire si l'on passe au corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. En supposant a, b, c, d décimaux non nuls, les énoncés suivants sont alors tous équivalents :

1. Il existe un nombre k tel que $a = kb$ et $c = kd$;
2. Il existe un nombre ℓ tel que $b = \ell a$ et $d = \ell c$;
3. Il existe un nombre m tel que $a = mc$ et $b = md$;
4. Il existe un nombre n tel que $c = na$ et $d = nb$;
5. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;
6. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$;
7. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$;
8. $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$.

Toutes ces égalités sont encore équivalentes à une ultime égalité, dite *des produits en croix* : $ad = bc$. Pour le voir, supposons d'abord qu'on ait $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Comme $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ et $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$, on a $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$; il vient alors : $ad = \frac{ad}{bd} \times bd = \frac{bc}{bd} \times bd = bc$. Inversement, supposons que l'on ait $ad = bc$; alors $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$. Supposons maintenant qu'il existe k, décimal ou non, tel que $a = kb$ et $c = kd$; on a alors $ad = (kb) \times d = b \times (kd) = bc$. Inversement, supposons que l'on ait $ad = bc$; on a alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et, en posant $k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, il vient $a = kb$ et $c = kd$. Dans le principe, la technologie des tableaux de proportionnalité est donc essentiellement constituée par les notions et résultats relatifs aux quotients d'entiers et de décimaux qui pourraient être disponibles dès la classe de 6^{e}. Pourtant, la pluralité des « critères » de proportionnalité, jointe à la variété des rapports rationnels k, ℓ, m ou n – qui peuvent être décimaux *ou non* – multiplie les possibles, en sorte que les élèves, comme les professeurs, se trouvent mis devant une diversité de techniques dont on peut comparer à l'infini les mérites respectifs. Notons en outre que le problème est encore compliqué par certaines inerties institutionnelles allogènes, ainsi que l'atteste la question suivante :

> Dans le chapitre « Fractions » en 4^{e} certains livres traitent du produit en croix et, depuis un certain temps, les élèves s'en servent dans d'autres matières (SVT, sciences physiques). Doit-on l'aborder en classe et le démontrer afin de justifier ce résultat mathématique qu'ils utilisent déjà ? (2005-2006, 4^{e}, semaine 7)

La technique plus rudimentaire de réduction à l'unité, rencontrée plus haut, côtoie ainsi des techniques mathématiquement plus évoluées, comme le montre la question suivante, à propos cette fois de la classe de seconde.

> Quelle technique choisir pour résoudre une équation où il apparaît une inconnue au dénominateur (par exemple $\frac{ax+b}{cx+d} = e$) ? Faut-il utiliser la technique du « produit en croix », préférée des élèves, ou utiliser la technique consistant à mettre au même dénominateur ? La deuxième technique a l'avantage d'être utilisable également pour les inéquations mais la demande des élèves me fait me poser des questions. D'autre part, comment puis-je motiver ce type d'équations ? (2000-2001, 2de, semaine 9)

Lorsque le choix de la technique est laissé flottant, les élèves entrent en jeu pour faire connaître leurs « préférences » : c'est du moins ce que croit, ici, le professeur. Les textes officiels, au vrai, ne réduisent guère le polytechnicisme régnant. Dans le document d'accompagnement de l'ancien programme de 6^{e} (en vigueur jusqu'en 2004-2005), on lit par exemple ceci :

> Même si les algorithmes de recherche systématique d'une quatrième proportionnelle ne sont pas au programme, on proposera des situations multiplicatives dont le traitement permet d'utiliser et de mettre en évidence les propriétés de linéarité ou la présence d'un coefficient de proportionnalité.

4.3. La recherche d'une quatrième proportionnelle, on l'aura noté, est *le* problème par excellence. On y considère un tableau

a	x
b	c

dont on pose qu'il est de proportionnalité, et l'on demande d'en tirer alors la valeur de l'inconnue x. S'il existe de façon évidente un nombre décimal k tel que $a = kb$, on pourra écrire que $x = kc$, ce qui résout le problème ; s'il n'en est pas ainsi, on pourra écrire l'égalité des rapports $\frac{x}{c} = \frac{a}{b}$ et en tirer la suite d'égalités $x = \frac{x}{c} \times c = \frac{a}{b} \times c$. Par rapport à ces deux techniques, la technique des produits en croix est en quelque sorte intermédiaire : si elle est, certes, plus sophistiquée que la technique de réduction à l'unité, l'élève qui la met en œuvre n'a pourtant pas à assumer d'écrire l'égalité de deux fractions ; il lui suffit de s'abandonner au rituel des produits en croix en écrivant que $bx = ac$. C'est là qu'intervient ce que l'auteur de la question évoquée ici appelait une « étape supplémentaire » : de l'égalité $bx = ac$, on doit tirer $x = \frac{ac}{b}$, ce qui découle de la définition de cette écriture fractionnaire. Il s'agit là d'une technique « transactionnelle », qui n'oblige pas à assumer que l'on *fait des mathématiques* (en cela que l'on manipulerait explicitement des fractions, des égalités de fractions, des produits où interviennent des fractions). D'où, sans doute, la prédilection pour cette technique qui s'affiche dans les disciplines non mathématiques ayant à traiter des situations de proportionnalité. Si, en effet, on pense le passage de l'égalité $bx = ac$ à l'égalité $x = \frac{ac}{b}$ comme consistant à *effectuer une division*, la notion explicite de fraction est évacuée : on réduit ainsi la longueur de la chaîne trophique mathématique [11] et, surtout, on évite d'avoir à assumer *ostensiblement* le maniement explicite d'entités mathématiques, ce qui pourrait entamer l'identité disciplinaire du domaine où ces mathématiques-là se trouvent mobilisées – accidentellement, semble-t-on ainsi nous dire. Cela noté, la recherche d'une quatrième proportionnelle était et demeure une question travaillée en classe de 5e. Aussi bien jusqu'en 2005-2006 qu'après, le programme range en effet au nombre des compétences exigibles la maîtrise du type de tâches suivant :

> Compléter un tableau de nombres représentant une relation de proportionnalité dont les données sont fournies partiellement. En particulier, déterminer une quatrième proportionnelle.

Mais alors que l'ancien programme de 4e ne proposait – explicitement – rien de nouveau à ce sujet, le futur programme de cette classe (qui devrait entrer en vigueur en septembre 2007) propose la mise en place « officielle » de la technique des produits en croix pour la recherche de la quatrième proportionnelle, comme le montre l'extrait suivant :

Contenus

---

[11] L'adjectif « trophique » vient du grec *trophê* « nourriture » (de *trephein* « nourrir ») : on retrouve cette racine dans *atrophie*, *hypertrophie*, *dystrophie* (trouble de la nutrition). L'organisation des connaissances mathématiques suppose des chaînes trophiques, dans lesquelles une praxéologie « se nourrit d'une autre » et, par cela, paradoxalement, *la fait exister* dans l'institution qui lui sert d'habitat.

1.1 Utilisation de la proportionnalité

Quatrième proportionnelle

Compétences

– Déterminer une quatrième proportionnelle.

Exemples d’activités, commentaires

Aux diverses procédures étudiées en classes de sixième et de cinquième pour rechercher une quatrième proportionnelle, s’en ajoute une nouvelle, communément appelée « produit en croix » » qui doit être justifiée (en lien avec l’égalité de quotients : voir § 2.2 ci-dessous).

Le fait que, dans une relation de proportionnalité, la correspondance est déterminée par un seul couple de valeurs homologues non nulles est mis en évidence.

Dans un tel contexte, ce programme mentionne explicitement « l’équivalence entre $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $ad = bc$ (b et d étant non nuls) » et ajoute que cette équivalence est « notamment utile pour justifier la propriété dite des “d’égalité des produits en croix”, relative aux suites de nombres proportionnelles ». Ces décisions ont l’avantage de clarifier les choses pour la classe de 4^{e} ; elles risquent dans le même temps de laisser sans repères nettement tracés les professeurs intervenant en 6^{e} et en 5^{e}.

5. Une notion embarrassante

5.1. Le flou qui enveloppe de fait la question des écritures fractionnaires et des nombres rationnels trouve à s’exprimer aussi à propos d’une question apparentée à celle des tableaux de proportionnalité : la *simplification* des fractions. Les questions formulées par les promotions des années 2000-2001 à 2005-2006 montrent à cet égard un embarras dont la source est en vérité multiple. Le premier fait qui conduit les professeurs stagiaires à s’interroger sur la simplification est lié à une attitude réflexe qui semble induite par le précepte : « Ne jamais laisser une fraction non simplifiée ! » Le désir de voir simplifier les fractions se manifeste le plus nettement en classe de 4^{e}, sans doute parce que les élèves professeurs sont portés à associer l’idée de simplification avec la notion de forme *irréductible* d’une fraction, dont l’étude figure, non pas au programme de 4^{e}, mais au programme de la classe de 3^{e}. Ainsi en va-t-il sans doute pour l’auteur de la question suivante, qui manifeste cependant une certaine retenue :

En 4^{e}, peut-on suggérer les simplifications des écritures fractionnaires, même si elles ne sont pas au programme ? (2000-2001, 4^{e}, semaine 8)

Dans la question ci-après, face au même interdit, l'impatience s'amplifie :

> Bien que la mise sous forme de fraction irréductible ne soit pas exigible en 4e, est-il possible d'inciter les élèves à simplifier au maximum ? (Application de la règle d'égalité des fractions.) (2004-2005, 4e, semaine 6)

Chez une autre stagiaire, on voit pointer explicitement le fait que la simplification, sans doute non démunie de fonctionnalités, est d'abord une « bonne habitude » à prendre et à conserver :

> En 4e, peut-on enlever des points (en DS) si les écritures fractionnaires ne sont pas simplifiées « au maximum », alors que cela n'apparaît pas comme étant une compétence exigible (en fait cela n'apparaît pas dans le programme) ? Personnellement, je pense qu'il vaut mieux donner aux élèves de bonnes habitudes, mais je ne sais pas si on peut les « pénaliser » si ce n'est pas fait… (2003-2004, 4e, semaine 7)

Chez telle autre stagiaire encore, ce n'est pas tant une adhésion personnelle qui est formulée qu'un compte rendu en quelque sorte objectif, qui fait apparaître la situation affrontée comme surcompliquée par la présence de la calculatrice :

> En 4e, dans le chapitre « Nombres relatifs en écriture fractionnaire », on incite les élèves à simplifier les écritures fractionnaires, bien que la forme irréductible ne soit pas exigible. Cependant la calculatrice permet d'obtenir une fraction sous la forme irréductible. Comment gérer l'utilisation de la calculatrice dans ce cas ? (2004-2005, 4e, semaine 7)

Pourtant, au-delà de cette attitude d'éducateur un peu rigide ou d'instructeur sobrement objectif, des interrogations se profilent chez les stagiaires officiant en 4e, qu'induit sans doute en partie l'interdit même pesant sur la notion de forme irréductible d'une fraction. C'est du moins ce qu'on peut entendre à travers la question suivante qui, en même temps, paraît suggérer que la simplification serait le point d'entrée dans un riche monde mathématique – celui des nombres premiers, etc.

> J'ai du mal à cerner ce que les élèves de 4e doivent savoir à propos de la simplification des fractions. Vaut-il mieux essayer déjà de leur faire sentir l'existence de nombres premiers ou se contenter de cas très simples en utilisant les critères de divisibilité par 2, 3, 5 ? (2001-2002, 4e, semaine 5)

Chez d'autres, la réponse à la question posée ici – que doivent apprendre les élèves de 4e en matière de simplification ? – est liée à une fonctionnalité centrale qu'ils prêtent à la simplification, et cela dès la classe de 4e. Ainsi un stagiaire soulève-t-il la question suivante :

> Est-on en droit de donner des exercices proposant des simplifications de fractions (même si cela n'est pas une compétence exigible) sachant que, pour effectuer un produit de fraction, on conseille (dans les manuels scolaires) de simplifier avant d'effectuer les calculs ? (2000-2001, 4e, semaine 15)

Une autre stagiaire semble moins sûre de son affaire ; elle formule ses doutes, encore accrus par le brouillage lié à la présence de la calculatrice, en illustrant le problème qu'elle entend poser à l'aide d'un exemple numérique maladroitement improvisé :

> Puis-je exiger des élèves qu'ils simplifient les fractions avant de les multiplier afin de simplifier les calculs et éviter d'utiliser la calculatrice ? Exemple : $\frac{25}{4} \times \frac{6}{10} = \frac{5\times\cancel{5}\times3\times\cancel{2}}{4\times\cancel{5}\times\cancel{2}} = \frac{15}{4}$; les élèves font : $\frac{25}{4} \times \frac{6}{10}$ $= \frac{150}{40} = \frac{15}{4}$. J'essaie de leur expliquer qu'il est plus difficile de simplifier la fraction obtenue que le produit de départ, mais cette méthode leur paraît plus difficile. De plus, les élèves me demandent toujours s'ils peuvent utiliser leur calculatrice même dans le cas de calculs simples. En général, je l'interdis, sauf si les calculs sont un peu compliqués ou si son utilisation ne nuit pas à l'apprentissage de la méthode étudiée. Ai-je raison ? (2001-2002, 4^{e}, semaine 7)

Chez tel autre stagiaire, mais cette fois à propos de la classe de 5^{e}, la question est soulevée en relation avec son travail d'étude et de recherche (TER), qui doit le conduire à la rédaction du mémoire professionnel demandé en deuxième année d'IUFM.

> Mon TER porte sur la multiplication des fractions en classe de 5^{e}, et plus précisément sur l'utilité d'effectuer des simplifications avant de multiplier. Je cherche à construire une AER (présentant et motivant cet aspect) basée sur des objets « concrets » (partages, aires…), mais rien ne me convient vraiment. Je voudrais chercher dans la littérature, mais je ne sais pas vers quels types d'ouvrages m'orienter… (2000-2001, 2de, 19)

Deux questions solidaires émergent ainsi : pourquoi simplifier des fractions, et – au fond – qu'est-ce que simplifier une fraction, du moins quand la chose ne se réduit pas, si l'on peut dire, à la réécrire sous sa forme dite irréductible ? L'interrogation surgit parfois de manière tout à fait explicite, comme dans la question suivante, fort concise :

> Comment motiver la simplification des fractions ? (2000-2001, 4^{e}, semaine 10)

D'autres tonalités sont possibles. Un professeur stagiaire qui, ayant en responsabilité une classe de 3^{e}, se situe donc de l'autre côté de l'interdit, semble quant à lui enclin à regarder la simplification des fractions comme « sous-motivée » au plan épistémologique et, en tout cas, peu motivante au plan psychologique ; il écrit :

> Je dois commencer l'arithmétique en 3^{e}. La notion principale est le PGCD. Les motivations principales du PGCD sont la simplification des fractions et les problèmes de partage. Ces motivations me semblent peu convaincantes (peu de goût pour le calcul fractionnaire et difficulté des problèmes de partage qui nécessitent une modélisation). Je suis donc à la recherche d'une autre motivation, plus forte. Auriez-vous des idées ou des références à ce sujet ? (2003-2004, 3^{e}, semaine 14)

5.2. Qu'elles situent l'opération de simplification comme une obligation élémentaire quasi automatique ou qu'elles s'interrogent sur ses raisons d'être, les questions précédentes semblent vouloir faire l'économie d'une interrogation fondamentale à propos de cette *notion*, et du *mot* même par lequel on la désigne. Supposons que l'on doive comparer les fractions $\frac{3}{7}$ et $\frac{12}{25}$; il n'est pas déraisonnable en ce cas (puisque 3 divise 12 alors que 7 ne divise pas 25) de réécrire la fraction $\frac{3}{7}$ sous la forme $\frac{12}{28}$, ce qui fait apparaître d'un simple coup d'œil que $\frac{3}{7} = \frac{12}{28} < \frac{12}{25}$. Dans ce cas, on l'aura noté, il s'agit moins de « simplifier » que de remplacer la fraction par une écriture *plus adaptée* au micro-projet mathématique dans lequel on se situe. Le cas de la multiplication, évoqué par plusieurs stagiaires, est sans doute conforme à cette problématique : en travaillant sur des nombres plus petits, dès lors qu'il s'agit, non pas de les comparer, mais de les *multiplier*, on augmente la fiabilité des calculs effectués et, accessoirement, on peut se dispenser du recours à la calculatrice – point sur lequel on ne fera pas davantage de commentaires ici. Le mot de simplification reste cependant ambigu : comme on vient de le voir, le geste approprié consiste parfois en une « complexification » de l'écriture dont on dispose au départ. En ce sens, les réécritures d'une fraction fonctionnellement utiles peuvent être diverses, en fonction du projet mathématique dans lequel cette réécriture prend place. Notons que, au demeurant, si l'habitude est bien ancrée, en France, de réécrire une fraction en la simplifiant (au sens où l'on divise numérateur et dénominateur, supposés entiers, par un même diviseur commun entier), il a existé et il existe encore en de nombreux pays une réécriture canonique qui consiste à ne pas laisser telle quelle une fraction « impropre » (c'est-à-dire dont le numérateur est supérieur au dénominateur), et à la réécrire sous la forme d'un entier augmenté d'une fraction « propre » : on écrira ainsi $\frac{17}{7} = 2 + \frac{3}{7}$ ou plutôt, selon une écriture qui n'est plus aujourd'hui en usage en France, $\frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}$. Dans un cas, une professeure stagiaire fait mention de la rencontre, vraisemblablement suscitée par la calculatrice, avec cet habitus culturel allogène :

> Comment réagir face à un élève qui simplifie la fraction $\frac{25}{15}$ en donnant $1 + \frac{10}{15}$? (2001-2002, 6^{e}, semaine 24)

Cette situation se reproduira à quelques années de distance avec la question que voici :

Est-il préconisé d'enseigner aux élèves à utiliser la touche qui écrit une fraction sous la forme $a + \frac{b}{c}$, où $b < c$? (2004-2005, 4e, semaine 6)

Dans le séminaire du mardi matin, cette dernière question reçoit, au reste, une assez longue réponse, qui présente aux élèves professeurs les usages anglo-américains (et autres) en la matière, à travers notamment un document explicitant les notions idoines (*« Improper Fractions »*, *« Mixed Numbers »*, etc.) et s'attardant sur les principaux types de tâches : *« Converting Improper Fractions to Mixed Numbers »*, *« Converting Mixed Numbers to Improper Fractions »*, *« Adding and Subtracting Mixed Numbers »*, *« Multiplying Mixed Numbers »*. La réponse proposée souligne que, en un cas, le document examiné présente une écriture de la forme $a + \frac{b}{c}$ dans laquelle la fraction $\frac{b}{c}$ n'est pas simplifiée (il s'agit de l'écriture $11\,\frac{3}{15}$) : on retrouve ainsi la diversité et la relative sous-détermination des jeux de réécriture possibles, que seul le besoin à satisfaire peut vraiment déterminer. Pourtant, on doit constater que l'interrogation sur la notion de simplification amorcée ici est généralement occultée par des questions écran, où les valeurs traditionnelles de la classe de mathématiques viennent masquer une difficulté qui ne prend pas spontanément le statut de *problème*. Ainsi en va-t-il dans la question ci-après, formulée par un élève professeur ayant en responsabilité une classe de seconde, où prime le souci de la « justification » – de la démonstration –, sans doute parce que le temps n'est plus à des interrogations dont le lieu naturel serait le collège :

Après avoir montré aux élèves la touche de la calculatrice qui rend une fraction directement irréductible, ou qui donne l'écriture scientifique d'un nombre, peut-on accepter des résultats sans justification (une fraction directement simplifiée, sans que la simplification soit apparente) ou, au contraire, ne faut-il justement plus les accepter ? (2004-2005, 2de, semaine 5)

Chez tel autre professeur stagiaire enseignant en seconde, toutefois, les doutes typiques des élèves professeurs intervenant en collège réapparaissent, apparemment non censurés, avec même une touche de fraîcheur mathématique de bon aloi :

Quelles sont les différences entre écritures fractionnaires et fractions ? Le nombre $\frac{6,3}{2,4}$ est-il une fraction ? Si oui, comment justifier une écriture sous forme de fraction irréductible ? ($\frac{6,3}{2,4} = \frac{63}{24} = \frac{21}{8} = \frac{2,1}{0,8}$) Et pour amener la définition d'un nombre rationnel ? (2004-2005, 2de, semaine 8)

En réalité, le trouble qui affecte la question des fractions et de leur simplification parcourt tout le secondaire. On le rencontre en seconde, nous l'avons vu ; la question ci-après, emblématique de ces mêmes difficultés, témoigne, elle, de la situation que doit affronter le professeur intervenant en classe de 5e :

> Je vais aborder le thème « Écritures fractionnaires, fractions ». Je me suis posé une question au sujet de l'organisation en sous-chapitres. Il y a un théorème (1) qui dit que $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ ou $\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$. Et il y a aussi un sous-titre (2), « Multiplication de deux fractions ». Est-ce qu'il vaut mieux, dans la synthèse, mettre (1) en premier, puis (2), ou l'inverse ? Je me pose la question car, quand on doit simplifier une fraction, comment expliquer le mécanisme ? Si (1) a été expliqué en premier, on applique la formule du théorème, par exemple : $\frac{21}{18} = \frac{3 \times 7}{3 \times 6} = \frac{7}{6}$ ou $\frac{21}{18} = \frac{21 : 3}{18 : 3} = \frac{7}{6}$. Si (2) a été expliqué en premier, on explique alors que $\frac{21}{18} = \frac{3 \times 7}{3 \times 6} = \frac{3}{3} \times \frac{7}{6} = 1 \times \frac{7}{6}$. Quelle est l'organisation la plus pertinente ? (2005-2006, 5e, semaine 8)

5.3. À l'évidence, ces jeunes professeurs sont plongés dans une culture mathématique qui, sur toutes les questions évoquées, est sévèrement mutique : l'information mathématique utile reste largement étrangère au quotidien de la profession. Indiquons-en rapidement les principaux linéaments. Le thème de la simplification désigne en réalité deux questions apparentées mais distinctes. La première, on l'a évoquée, est celle des réécritures fonctionnellement utiles d'une fraction ou d'une écriture fractionnaire donnée. La seconde peut être vue sans doute comme un cas particulier de la première, mais c'est un cas qui mérite une attention spécifique : c'est la question de l'existence et du maniement d'une écriture « canonique » d'une écriture fractionnaire donnée, en désignant par « écriture canonique » un système de notation dans lequel toute fraction (d'entiers ou de décimaux) aurait une écriture bien déterminée, unique, en sorte que deux écritures fractionnaires désignant le même nombre auraient formellement la même écriture canonique. Le résultat essentiel est à cet égard le suivant : étant donné une fraction (propre ou impropre) de nombres décimaux strictement positifs $\frac{a}{b}$, il existe un couple unique (c, d) d'entiers strictement positifs tels que $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, c et d n'ayant pas de diviseurs communs autres que 1. De ce résultat (sur lequel nous allons revenir), on peut déduire l'algorithme suivant pour obtenir ce qu'on nommera la *forme irréductible* $\frac{c}{d}$ d'une fraction $\frac{a}{b}$: tout d'abord, si a ou b n'est pas un entier, on multiplie ces nombres par une puissance de 10 convenable pour obtenir une fraction d'entiers égale, $\frac{a'}{b'}$. On procède ensuite à des divisions de *a'* et *b'* par des diviseurs entiers communs à *a'* et *b'*, et cela jusqu'à ce qu'on obtienne une fraction d'entiers dont le numérateur et le dénominateur n'auront plus de diviseur commun hormis 1 ; en vertu de l'unicité affirmée dans le théorème, cette fraction sera alors la forme irréductible cherchée. Le seul point qui resterait à justifier, c'est que la procédure de divisions successives par un même nombre entier strictement supérieur à 1 ne se poursuit pas indéfiniment : la chose résulte évidemment du fait que, dans $\mathbb{N}^*$, il n'existe pas de suite descendante infinie. On retrouve ainsi le geste décrit familièrement par les professeurs stagiaires selon lequel on essaie de simplifier « le plus possible » : s'il en est effectivement ainsi, on aboutit bien à la forme irréductible. Mais on voit que l'obtention de fait de la forme irréductible ne suppose pas, inversement, la connaissance du théorème formulé plus haut : on peut, dès la 4e (et même avant), en « simplifiant le plus possible », obtenir de fait la forme irréductible des fractions manipulées, sans pour cela s'interroger sur l'existence et l'unicité d'une telle écriture. Cette manipulation permet notamment de voir que deux fractions sont égales dès lors que l'une et l'autre donnent par simplification la même fraction d'entiers. Mais la réciproque pose problème si l'on ne dispose pas du résultat d'unicité : comment conclure, par exemple, que si c et d d'un côté sont premiers entre eux et si e et f d'un autre côté sont premiers entre eux, et si *on n'a pas* $c = e$ et $d = f$, alors $\frac{c}{d} \neq \frac{e}{f}$? La situation se règle aisément, bien entendu, si l'on a soit $c = e$ et $d \neq f$, soit $c \neq e$ et $d = f$; mais le cas général est beaucoup plus résistant. Pour le montrer, considérons la contraposée de la proposition en cause : si $\frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f}$ sont des fractions irréductibles et si $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, alors $c = e$ et $d = f$. L'hypothèse que $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ implique l'égalité $cf = ed$; l'entier c, qui divise cf, divise donc de ; étant premier avec d, il divise e (Gauss). On montre de la même façon que e divise c, ce qui entraîne, dans $\mathbb{N}^*$, que $c = e$, d'où il résulte aussitôt que $f = d$. Cette démonstration est regardée aujourd'hui comme ne pouvant pas être rendue disponible au collège. Une voie possible pour contourner la difficulté est alors la suivante : au lieu de prendre pour définition de la forme irréductible celle que nous avons évoquée (le numérateur et le dénominateur sont des entiers positifs premiers entre eux), on peut adopter, au niveau technologique, une définition qui ne répond pas immédiatement à l'usage technique de simplifier en divisant numérateur et dénominateur jusqu'à ne plus pouvoir le faire, mais qui se révèle plus maniable au plan technologique. Étant donné une fraction d'entiers $\frac{a}{b}$, avec a et b non nuls, on dira que $\frac{c}{d}$ est *une* forme *minimale* de $\frac{a}{b}$ s'il n'existe pas de fraction $\frac{c'}{d'}$ telle que $c' < c$ et $\frac{c'}{d'} = \frac{a}{b}$. Le résultat d'existence et d'unicité attendu peut s'établir alors de la façon suivante, en commençant par l'unicité. Si $\frac{c}{d}$ est une forme minimale de $\frac{a}{b}$ et si $\frac{c'}{d'}$ en est une autre, on a nécessairement $c' = c$; comme $\frac{c'}{d'} = \frac{c}{d}$, il en résulte aussitôt que $d' = d$. L'unicité étant ainsi démontrée, il reste à établir l'existence. C'est ici que la voie ouverte par la définition que nous avions posée présente un avantage redoutable, celui de fournir une démonstration d'apparence naturelle. Pour a et b donnés, considérons en effet l'ensemble des entiers c tels qu'il existe d vérifiant l'égalité $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$; cet ensemble n'est pas vide (il contient a, et aussi $2a$, $3a$, etc.) : on prend alors le premier (le plus petit) élément de cet ensemble : la démonstration est faite ! Bien entendu, dire que l'on prend le premier élément de cet ensemble infini, soit de $\{c \in \mathbb{N}^* \,/\, \exists\, d \in \mathbb{N}^* : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\}$, suppose que l'on se réfère à la propriété de l'ordre de $\mathbb{N}$ d'être un *bon ordre*, laquelle équivaut à d'autres propriétés puissantes (comme il en va de l'axiome de récurrence de Peano) et entraîne toutes les propriétés importantes sur les entiers, division euclidienne et théorème de Gauss inclus [12]. Notons ici, en passant, que si l'on a $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$, alors les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{u}{v}$ ont la même forme minimale. Cela noté, on voit à l'évidence que si $\frac{c}{d}$ est *la*

[12] Montrons d'abord que la propriété de bon ordre implique l'axiome de Peano. Soit une partie P de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que, si $n \in \mathbb{N}$, alors $n + 1 \in \mathbb{N}$. Si l'ensemble $Q = \mathbb{N} \backslash P$ n'était pas vide, il aurait un premier élément, k. Comme $0 \in P$, k serait non nul ; par définition l'entier $k - 1$ appartiendrait alors à P. Mais d'après la propriété de récurrence de P, on aurait alors $k = (k - 1) + 1 \in P$, en contradiction avec la définition de k. Donc $Q = \mathbb{N} \backslash P = \varnothing$ et $P = \mathbb{N}$. Montrons ensuite que la même propriété implique l'existence, pour des entiers a et b donnés, $b \geq 2$, d'entiers n et r vérifiant $a = nb + r$, avec $0 \leq r < b$. (L'unicité se démontre indépendamment.) L'ensemble $P = \{ k \in \mathbb{N} \,/\, kb > a \}$ n'étant pas vide (il contient a), il existe un premier élément m tel que $mb > a$. L'entier m étant non nul, posons $n = m - 1$: on a, par définition de m, $nb \leq a < (n + 1)b$, et donc $a = nb + r$ avec $0 \leq r < b$. Pour des entiers a et b non nuls, on note r_1 le reste de la division de a par b, r_2 le reste de la division de b par r_1 si $r_1 > 0$, etc. ; comme la suite (r_i) décroît strictement, il existe p tel que $r_p \geq 1$ et $r_{p+1} = 0$. En notant (n, m) le PGCD de deux entiers non tous deux nuls, on peut écrire : $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_p, 0) = r_p$. Il est clair que $(ka, kb) =$

forme minimale de $\frac{a}{b}$, alors c et d n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité : la forme minimale est irréductible. Mais la réciproque est-elle vraie ? Énonçons d'abord la propriété suivante : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, où $\frac{c}{d}$ est *la* forme minimale de $\frac{a}{b}$, il existe un entier n tel que $a = nc$ et $b = nd$. Avant d'établir ce théorème, tirons-en ce corollaire essentiel : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ avec $(c, d) = 1$, c'est-à-dire avec $\frac{c}{d}$ non simplifiable, alors $\frac{c}{d}$ est *la* forme minimale de $\frac{a}{b}$. En effet, soit $\frac{c'}{d'}$ la forme minimale de $\frac{a}{b}$; c'est aussi la forme minimale de $\frac{c}{d}$, en sorte qu'il existe un entier n supérieur ou égal à 1 tel que $c = nc'$ et $d = nd'$. Comme on suppose que c et d sont premiers entre eux, on a aussi nécessairement $n = 1$, et donc $c = c'$ et $d = d'$, CQFD. Ce résultat induit l'algorithme mis en œuvre *de facto* au collège : pour trouver la forme irréductible d'une fraction, simplifier la fraction jusqu'à ce qu'elle ne soit plus simplifiable. La technologie évoquée – fondée sur la notion de forme minimale d'une fraction d'entiers – rejoint ainsi la technique usuelle de « simplification ». Pour que l'exposé soit complet, il reste à démontrer la propriété dont nous venons d'examiner le corollaire. Supposons donc $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ avec $\frac{c}{d}$ minimale. On a évidemment $c \leq a$. Effectuons la division euclidienne de a par c ; on obtient l'égalité $a = nc + r$, où $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < c$. On a alors $b = a \times \frac{b}{a} = a \times \frac{d}{c} = (nc + r) \times \frac{d}{c} = nd + \frac{rd}{c}$. Comme b et nd sont des entiers, $s = \frac{rd}{c}$ est un entier. Si r n'est pas nul, s ne l'est pas davantage et il vient $\frac{c}{d} = \frac{r}{s}$, avec $r < c$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que $\frac{c}{d}$ est la forme minimale de $\frac{a}{b}$. On a donc $r = 0$ et, par suite, $a = nc$, et $b = nd$, CQFD.

6. Décimaux et approximations décimales

6.1. L'oubli déjà noté des décimaux dans la formation mathématique supérieure induit un éloignement à leur endroit de la part de ces ex-étudiants que sont les professeurs stagiaires. Ceux d'entre eux enseignant en collège – notamment – doivent alors apprendre à avoir à ces

---

$(kb, kr_1) = (kr_1, kr_2) = \ldots = (kr_p, 0) = kr_p$. Ce résultat établi, on peut démontrer le « lemme de Gauss » : si a divise bc et est premier avec b, alors a divise $(ac, bc) = c(a, b) = c$, CQFD.

nombres un rapport pour eux inédit. À cette occasion, ils vont s'apercevoir que cette matière mathématique recèle bien des points obscurs. On a vu plus haut l'incertitude qu'engendrait la co-présence, dans le texte des programmes, de deux expressions voisines mais distinctes, « fraction » et « écriture fractionnaire ». La question suivante, déjà rencontrée dans un contexte un peu différent [13], montre une tentative d'expliquer cette « anomalie » par une perturbation apportée précisément par les décimaux :

> Doit-on parler de la « fraction » $\frac{2}{3}$ ou de « l'écriture fractionnaire » $\frac{2}{3}$ en classe de 4^e^ ? Il me semble que l'on parle de fraction lorsque numérateur et dénominateur sont des entiers (non nul pour le dénominateur), et le terme « écriture fractionnaire » est réservé aux quotients de décimaux (non nuls). Cette distinction ne semble pas aussi nette dans les programmes ni chez les collègues. Qu'en est-il exactement ? (2001-2002, 4^e^, semaine 7)

La question suivante manifeste aussi le sentiment d'une perturbation que l'on tente – la chose est rarissime – de neutraliser par l'invocation bienveillante de la calculatrice !

> Quel est l'intérêt de cette compétence exigible : « Ramener une division dont le diviseur est décimal à une division dont le diviseur est entier » ? On transforme ainsi $\frac{1{,}65}{0{,}5}$ en $\frac{16{,}5}{5}$; or la calculatrice peut effectuer la division dans les deux cas. (2004-2005, 5^e^, semaine 10)

Quelques années auparavant, la même irritation contenue se faisant entendre à travers la question que voici :

> J'ai du mal à motiver la tâche suivante : diviser par un nombre décimal (en 5^e^). En effet par la suite les élèves n'auront plus à effectuer cette tâche à la main, comme le demande le programme de 5^e^, mais à l'aide de la calculette. (2000-2001, 5^e^, semaine 10)

Une autre question montre que la « perturbation » vécue par le professeur correspond parfois à une perturbation réelle du côté des élèves. C'est ce que suggère en tout cas la question ci-après, dont l'auteur a en responsabilité une classe de seconde.

> Pour mettre sous forme réduite une écriture fractionnaire du type $\frac{228}{136{,}8}$, quelques élèves ont utilisé la notion de PGCD dans l'anneau des décimaux $\mathbb{D}$. Cette généralisation, clairement inconsciente de la part des élèves, fournit cependant une méthode de réduction des écritures fractionnaires. Faudrait-il « censurer » cette technique pour lui préférer la voie classique consistant à se ramener dans $\mathbb{Q}$? Peut-on l'accepter sans entrer précisément sur les détails de la divisibilité dans $\mathbb{D}$? (2004-2005, 2^de^, semaine 14)

---

[13] Voir *supra*, § 2.6.

Le caractère perturbateur des décimaux est, on le voit, relativement multiforme. La question précédente a le mérite de rappeler subrepticement que les questions de la division et de la divisibilité dans $\mathbb{D}$ sont, à l'évidence, très peu familières dans la culture mathématique des élèves professeurs [14]. En conséquence, on marche sur des œufs, comme cela semble être le cas de l'auteur de la question suivante :

> Le programme de 6[e] mentionne que l'on peut introduire la division en encadrant un entier ou un décimal par deux multiples consécutifs d'un nombre entier. À partir de cette idée peut-on introduire la division décimale et euclidienne ? (2000-2001, 2[de], semaine 18)

Au reste, cette question fera l'objet d'une réponse explicite de la part du formateur, qui a sans doute vu là une lacune mathématique de ceux auxquels il s'adresse ; nous reproduisons cette réponse *in extenso*.

---

[14] La divisibilité dans l'anneau intègre $\mathbb{D}$ est une question fort peu évoquée dans la littérature mathématique. Par rapport à l'anneau $\mathbb{Z}$, le principal changement provient de l'existence d'un groupe des *unités* – les éléments inversibles de l'anneau – non trivial : alors que $U(\mathbb{Z}) = \{ -1, 1 \}$, on a ici $U(\mathbb{D}) = \{ 2^\alpha 5^\beta / \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \}$. Deux décimaux a et b sont *associés* s'il existe $u \in U(\mathbb{D})$ tel que $b = au$. L'association est une relation d'équivalence : on voit ainsi que, par exemple, les décimaux 1,4, 7, 35 font partie de la même classe d'équivalence, laquelle est formée des décimaux qui s'écrivent $2^\alpha \times 5^\beta \times 7$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. D'une façon générale, si P est un entier strictement positif qui n'est divisible dans $\mathbb{N}$ ni par 2 ni par 5, la classe d'équivalence de P dans $\mathbb{D}$ est formée des décimaux de la forme $2^\alpha \times 5^\beta \times P$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. On peut regarder P comme représentant canonique de cette classe d'équivalence : $\phi(2^\alpha \times 5^\beta \times P) = P$. On aura ainsi $\phi(1{,}4) = \phi(0{,}28) = \phi(35) = \phi(3{,}5) = \phi(70) = 7$; on a par ailleurs $\phi(u) = 1$ pour tout $u \in U(\mathbb{D})$. Toute unité de $\mathbb{D}$ divise tout décimal, en sorte qu'un couple de décimaux possèdent une infinité de diviseurs : 7, par exemple, est divisible par 10, par 70, par 17,5 ($= 2^{-1} \times 5 \times 7$), etc. Notons que deux décimaux possèdent des diviseurs communs « aussi grand qu'on veut » *du point de vue de l'ordre* de $\mathbb{D}$: l'unité 10^n divise a et b quels que soient $a, b \in \mathbb{D}$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}$. La définition du « PGCD » généralement adoptée est alors la suivante : d est un PGCD de a et b dans $\mathbb{D}$ si (1) d divise a et divise b, (2) si q divise a et b, alors q divise d. Si d est un PGCD de a et b dans $\mathbb{D}$, alors ud en est un autre, pour tout $u \in U(\mathbb{D})$ et, réciproquement, tout PGCD de a et b dans $\mathbb{D}$ est associé à d, en sorte qu'on peut désigner comme *le* PGCD de a et b dans $\mathbb{D}$ l'entier $\phi(d)$, où d est *un* PGCD de a et b dans $\mathbb{D}$. On aura ainsi : $\mathrm{PGCD}_{\mathbb{D}}(35, 70) = 7$. Dans l'exemple de la question ci-dessus, où $a = 228$ et $b = 136{,}8$, il vient $\mathrm{PGCD}_{\mathbb{D}}(228, 136{,}8) = \mathrm{PGCD}_{\mathbb{D}}(2^2 \times (3 \times 19), 2^2 \times 5^{-1} \times (3^2 \times 19)) = \mathrm{PGCD}_{\mathbb{D}}(3 \times 19, 3^2 \times 19) = 3 \times 19 = 57$. Comme $228 = 57 \times 4$ et $136{,}8 = 57 \times 2{,}4$, on a alors $\frac{228}{136{,}8} = \frac{4}{2{,}4}$. On peut « jouer » avec les unités de $\mathbb{D}$: $\frac{4}{2{,}4} = \frac{1}{2{,}4 : 4} = \frac{1}{0{,}6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. Mais tout cela suggère qu'il n'est pas déraisonnable de récrire d'abord $\frac{228}{136{,}8}$ sous la forme du quotient d'entiers $\frac{2280}{1368}$ avant d'opérer dans $\mathbb{N}$: $\frac{2280}{1368} = \frac{2^3 \times 3 \times 5 \times 19}{2^3 \times 3^2 \times 19} = \frac{5}{3}$.

Matériaux pour une réponse

1. Le programme de 6^e comporte ce commentaire :

La division est une opération en cours d'acquisition en début de collège. On la reliera aux problèmes d'encadrement d'un entier (ou d'un décimal) par des multiples d'un entier et on entraînera les élèves à donner aussi bien l'approximation entière d'un quotient par excès que par défaut. L'objectif principal est l'acquisition du sens de l'opération, au travers d'une pratique et de diverses utilisations.
Aucune compétence n'est exigible quant à la technique de la division à la main de deux décimaux.

2. Le schéma auquel le programme se réfère est le suivant. Soit un nombre $b \in \mathbb{N}^*$; la suite des nombres $(nb)_{\in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini. Étant donné alors un entier ou un décimal $a \in \mathbb{D}_+$, il existe un entier q unique tel que

$$qb \leq a < (q+1)b.$$

En divisant par b, on obtient : $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$. L'entier q est l'approximation entière *par défaut* du quotient $\frac{a}{b}$; de même, l'entier $q + 1$ est l'approximation entière *par excès* du même quotient.

3. Posons $r = a - bq$; on a $r \geq 0$ et $r < b$ puisque

$$0 = bq - bq \leq a - bq = r < (q+1)b - qb = b.$$

Il vient donc : $a = bq + r$, avec $0 \leq r < b$.

4. Lorsque a est entier, on peut – et, en 6^e, on doit – vérifier que le nombre q est le quotient obtenu par l'algorithme appris à l'école primaire pour diviser un nombre entier a par un nombre entier b :

Division		Vérification
315	28	$11 \times 28 + 7 = 315$
035	11	
07		

5. Lorsque a est décimal, il existe un plus petit entier m tel que $a \cdot 10^m$ est entier : en écriture décimale, $a \cdot 10^m$ n'est pas autre chose que l'entier obtenu en « enlevant la virgule » dans l'écriture du nombre décimal a. Soit alors l'entier q tel que

$$qb \leq a \cdot 10^m < (q+1)b.$$

En divisant par 10^m, on obtient :

$$\frac{q}{10^m} \cdot b \leq a < \frac{q+1}{10^m} \cdot b.$$

Le décimal $\frac{q}{10^m}$ n'est pas autre chose que ce qu'on obtient en plaçant la virgule dans le quotient euclidien q de $a \cdot 10^m$ par b de façon à laisser à sa droite m chiffres :

Division		Vérification
31,5	28	$1{,}1 \times 28 + 7 = 31{,}5$
03 5	1,1	
0 7		

6. Dans ce qui précède, on a supposé b entier. Mais le même schéma vaut encore *pour n'importe quel réel* $b > 0$. En particulier, si b est décimal, pour tout décimal $a \geq 0$, il existe un unique entier q tel que

$$qb \leq a < (q+1)b.$$

Soit p le plus petit entier tel que $b{\cdot}10^p$ soit entier ; en multipliant la double inégalité précédente par 10^p on obtient :

$$q(b{\cdot}10^p) \leq a{\cdot}10^p < (q+1)(b{\cdot}10^p).$$

On est ainsi ramené au cas précédent : celui de la division d'un décimal, ici $a{\cdot}10^p$, par un entier, ici $b{\cdot}10^p$. Mais ce cas est hors programme en 6e.

6.2. On voit apparaître dans ce qui précède, à peine esquissée (notamment dans le cas de l'approximation à une unité près, par excès ou par défaut), la notion de *valeur décimale approchée*. En prenant, dans la réponse que l'on vient de reproduire, $b = 10^{-n}$, on obtiendrait semblablement des valeurs approchées décimales par défaut et par excès à 10^{-n} près, à n décimales au plus. La situation comporte quelques subtilités. De fait, la notion générale de valeur décimale approchée pose problème dans la culture professorale, comme il ressort de la question ci-après.

> Je suis mal à l'aise sur les valeurs approchées car je ne sais pas si on doit respecter la définition et dire explicitement aux élèves que π a une infinité de valeurs approchées à 10^{-2} près : 3, 14 car $|\pi-3{,}14| \leq 10^{-2}$, 3, 15 car $|\pi-3{,}15| \leq 10^{-2}$, 3, 141 car $|\pi-3{,}141| \leq 10^{-2}$, etc. Est-ce un résultat mathématique (je l'entends chez mes collègues) de dire qu'une valeur approchée à 10^{-2} près est un nombre décimal à *deux* chiffres après la virgule ? (2001-2002, 4e, semaine 8)

Cette question, à nouveau, va susciter une réponse en forme de mise au point, réponse que nous reproduisons, elle encore, dans son intégralité.

① On appelle valeur approchée d'un réel α à 10^{-p} près (ou : à la précision 10^{-p}) *tout* nombre $\alpha*$ tel qu'on ait $|\alpha - \alpha*| \leq 10^{-p}$. On peut bien entendu dire que 1,9912345678 (par exemple) est une valeur approchée de 2 à la précision 10^{-2} (on a en effet : $2 - 1{,}9912345678 = 0{,}0087654322 < 0{,}009 < 10^{-2}$).

② Mais on peut rechercher aussi une valeur décimale approchée à 10^{-2} près qui s'écrive avec *le plus petit nombre possible de décimales*. Dans le cas où $\alpha = 2$, on prendra… $\alpha* = 2$. Dans le cas général d'un réel *quelconque* (et déjà d'un rationnel quelconque), on est sûr de trouver une telle valeur approchée qui s'écrive *avec au plus deux décimales*.

❶ On a ainsi par exemple : $\sqrt{2} - 1{,}41 = 0{,}0042\ldots < 0{,}005 < 10^{-2}$. En revanche, on a : $\sqrt{2} - 1{,}4 = 0{,}0142\ldots > 0{,}01 = 10^{-2}$ et $1{,}5 - \sqrt{2} = 0{,}085\ldots > 8\cdot10^{-2}$.

❷ Plus généralement, tout nombre réel α non de la forme $m\cdot10^{-p}$ est encadré par *deux* décimaux de cette forme ; on a $k\cdot10^{-p} < \alpha < (k + 1)\cdot10^{-p}$ avec $\alpha - k\cdot10^{-p} < (k + 1)\cdot10^{-p} - k\cdot10^{-p} = 10^{-p}$ et $(k + 1)\cdot10^{-p} - \alpha < (k + 1)\cdot10^{-p} - k\cdot10^{-p} = 10^{-p}$. Le décimal $k\cdot10^{-p}$ est *la* valeur approchée décimale à 10^{-p} près par défaut *à p décimales au plus* : c'est *une* valeur approchée décimale à 10^{-p} près par défaut. Une définition semblable vaut pour $(k + 1)\cdot10^{-p}$.

❸ Lorsque α est de la forme $m\cdot10^{-p}$, il existe non pas deux, mais *trois* décimaux $\alpha*$ de la forme $m\cdot10^{-p}$ qui vérifient l'inégalité $|\alpha - \alpha*| \leq 10^{-p}$, à savoir $(k - 1)\cdot10^{-p} = \alpha - 10^{-p}$, $k\cdot10^{-p} = \alpha$, et $(k + 1)\cdot10^{-p} = \alpha + 10^{-p}$. On règle cette petite difficulté, traditionnellement, en posant conventionnellement que…

• … *la* valeur approchée décimale à 10^{-p} près *par défaut* à p décimales au plus est le plus grand nombre $\alpha*$ de la forme $m\cdot10^{-p}$ tel que $\alpha* \leq \alpha$;

• … *la* valeur approchée décimale à 10^{-p} près *par excès* à p décimales au plus est le plus petit nombre $\alpha*$ de la forme $m\cdot10^{-p}$ tel que $\alpha < \alpha*$.

L'expression « par défaut » est donc prise *au sens large* (il peut y avoir égalité), tandis que l'expression « par excès » est prise *au sens strict* (l'égalité est interdite). Le nombre $\alpha = 1{,}414$, par exemple, est à lui-même sa propre valeur approchée décimale à 10^{-3} près *par défaut* à 3 décimales au plus, tandis que sa valeur approchée décimale à 10^{-p} près *par excès* à 3 décimales au plus est $\alpha* = 1{,}415$; quant aux valeurs approchées à 10^{-2} près à 2 décimales au plus de $\alpha = 1{,}414$, ce sont 1,41 et 1,42.

La calculatrice, qui peut apparaître comme opportunément bienfaisante, on l'a vu, est généralement tenue pour un mauvais objet. C'est ce qui apparaît, de façon caricaturale, dans la question suivante dont nous ne commenterons que les premières lignes :

> Le problème des calculatrices est qu'elles donnent aux élèves qui en sont utilisateurs privés depuis des années [l'impression] que l'écriture canonique des nombres est leur écriture décimale. Du coup, tout problème concernant le calcul sur les fractions ou les radicaux est considéré comme résoluble à la calculatrice et donc non motivé. En bref, les calculatrices, comme d'autres appareils privés, n'incitent pas à connaître mais à se débarrasser. Que peut-on faire ? Et pour être provoquant, faut-il arrêter ou limiter l'usage de la calculatrice pour remettre les élèves au travail, tout comme il faudrait limiter l'usage des automobiles pour entretenir la forme physique des populations ? (2004-2005, 4e, semaine 8)

La calculatrice, il est vrai, vient souligner crûment l'absence de maîtrise des questions d'approximations décimales dans la culture mathématique scolaire. Loin d'apaiser l'inquiétude qu'engendre une culture inadéquate, elle exacerbe les difficultés engendrées par cette insuffisante maîtrise des phénomènes d'approximation numérique. Dans la question qui suit, on voit ainsi les élèves jouer la calculatrice *contre* la théorie mathématique, sans doute en partie parce que cette théorie est évanescente :

> Concernant le thème d'étude « Nature d'un nombre », j'ai proposé à mes élèves de travailler le sujet d'étude « Nombres décimaux ». Nous avons fait émerger la technique suivante, relative au type de tâches T : « Étant donné un nombre en écriture fractionnaire, déterminer si ce nombre est décimal. » Une première technique a été essayée en tapant à la calculatrice. Elle ne marchait pas puisque les décimales étaient trop nombreuses pour la calculatrice. Une deuxième technique a été mise en place : 1) décomposer le numérateur et le dénominateur de cette fraction ; 2) rendre la fraction irréductible ; 3) si le dénominateur de la fraction irréductible est une puissance de 2 ou de 5, alors… Or, lors d'un DS, les élèves continuent d'utiliser la calculatrice pour déterminer la nature du nombre $\frac{49}{375}$; ils trouvent $\frac{49}{375}$ = 0,13066667, donc c'est décimal. Ils résistent au travail sur le thème « Représentation des nombres dans la calculatrice », qui poussait à « se méfier » des nombres affichés dans la calculatrice. (2004-2005, 2de, semaine 9)

En réalité, la calculatrice révèle non seulement une réelle faiblesse de la culture mathématique de la profession en la matière, mais elle surprend même des manières de faire anciennement installées chez les élèves professeurs. Ainsi en va-t-il dans le cas de figure suivant, qu'aucune question n'atteste dans le corpus des questions des professeurs stagiaires, mais que nous avons pu observer notamment dans le cadre de la préparation au CAPES [15]. On étudie une suite récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est continue et possède un point fixe unique ℓ vers lequel la suite (u_n) converge si l'on part d'une valeur u_0 bien choisie. Supposons alors que l'on souhaite

---

[15] Les questions suivantes, choisies parmi quelques-unes des questions formulées dans le cadre du dispositif des « Questions de la semaine » en première année d'IUFM, en témoignent :

1. Lorsqu'on étudie une suite (u_n) : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, convergente vers α à l'aide de la calculatrice, je me suis demandé si l'approximation faite par la calculatrice à chaque u_n avait une grande influence lorsqu'on cherche à estimer α à 10^{-k} près sur l'indice qu'il faut prendre. Réponse : dans le cas général, la calculatrice prend suffisamment de décimales pour que ce ne soit pas le cas. (2001-20002)

2. Dans de nombreux exercices, on majore l'erreur commise par le terme général d'une suite convergente. On demande souvent de donner le plus petit n à partir duquel on a une approximation à 10^{-k} près. Cette question est *a priori* mal posée puisque la majoration donne un *n suffisant* pour majorer l'erreur. Vient se greffer là-dessus le problème de l'approximation (due à la calculatrice). Comment remodeler de telles questions qui terminent très souvent les exercices d'approximation ? (2002-2003)

3. Je rencontre des difficultés pour la recherche d'approximation d'un nombre par les suites. Par exemple, $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$, on cherche un n convenable qui vérifie cette inégalité. Le n_0 trouvé convient, *i.e.* $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-3}$. Mais on doit donner la valeur de u_{n_0} qui est elle-même une valeur approchée, alors comment faire ? (2002-2003)

connaître ℓ à 10^{-4} près. Notons que, dans ce cas, on ne demande qu'une valeur approchée à 10^{-4} près et non l'une ou l'autre des valeurs approchées décimales à 10^{-4} près qui s'écrivent avec au plus 4 décimales, ce qui éloigne ce cas de figure des situations, autrefois classiques dans l'enseignement scolaire, de division ou d'extraction de racines « à la main » (par des algorithmes donnant les décimales l'une après l'autre). Face à ce type de situation, il a été d'usage de faire deux parts pour l'erreur acceptable : on cherchait une valeur de n telle que u_n se situe à moins de $0{,}5{\cdot}10^{-5}$ de la limite ℓ ; puis on calculait une valeur décimale approchée u_n* située à moins de $0{,}5{\cdot}10^{-5}$ de u_n, en sorte qu'on obtenait ainsi une valeur décimale approchée à 10^{-4} près de la limite ℓ, à savoir u_n*. Cette manière de faire est sans doute devenue un peu inadaptée aujourd'hui : on peut calculer par exemple une valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée à 10^{-5}, puis demander à la calculatrice une valeur décimale approchée à la précision dont elle est capable, ce qui fournit normalement une valeur approchée à 10^{-4} près. À ce qui reste une pratique juste, mais non mise à jour, il faut alors opposer une pratique dont la justification ne va nullement de soi, même si, en général, elle n'entraîne pas de véritable problème, qui consiste à déterminer n tel que u_n soit une valeur approchée à… 10^{-4} près de ℓ et à adopter pour valeur décimale approchée prétendument à 10^{-4} près de ℓ une valeur tronquée de la valeur décimale approchée de u_n qu'affiche la calculatrice, en général sans contrôle sérieux sur la troncature effectuée [16].

6.3. Le traitement des approximations décimales repose, dans l'organisation mathématique savante, sur la théorie des nombres réels, indisponible dans une forme satisfaisante tout au long des années de la scolarité obligatoire et au-delà. Les questions reproduites ci-après témoignent de la difficulté subséquente de constituer une théorie et une technologie scolaires des écritures décimales :

1. Pourquoi est-il utile de connaître et de manipuler l'écriture décimale des nombres non entiers ?
2. Quelles connaissances sont utiles à propos de l'écriture décimale des nombres, et pourquoi (ou pour quoi) ?

---

[16] Si, notamment, on ne conserve que les quatre premières décimales, on a toutes chances de fournir une valeur incorrecte : $u_n = 0{,}99995 - \frac{1}{n}$ est à moins de 10^{-4} de sa limite $\ell = 0{,}99995$ dès que $n \geq 10\,001$; or on a $u_{10\,001} = 0{,}99995 - \frac{1}{10\,001} = 0{,}999850009999000099990000999900\ldots$ Si l'on tronque à la 4^{e} décimale, on obtient $u_{10\,001}* = 0{,}9998$ et l'on a donc $\ell - u_{10\,001}* = 1{,}5{\cdot}10^{-4}$.

3. Quelle est l'influence de l'apparition et de l'emploi des calculatrices sur les réponses à apporter aux questions précédentes ?

En vérité, ces questions, qui apparaissent dans les notes relatives à la séance 4 du séminaire 2004-2005, n'émanent pas d'élèves professeurs, mais sont formulées par le formateur lui-même, et adressées aux professeurs stagiaires, auxquels il était demandé, à cette occasion, un petit travail sur lequel nous allons revenir. Se référant notamment aux questions 2 et 3, le formateur donnera quelques séances plus tard un développement relatif à la notion d'écriture décimale d'un nombre, développement que nous reproduisons ci-après.

① On pourrait commencer par dire qu'un nombre $\alpha > 0$ « possède une écriture décimale » si sa « partie fractionnaire » $F(\alpha)$ peut s'écrire sous la forme $F(\alpha) = 0{,}a_1a_2\ldots a_n$, où $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, avec $a_n \neq 0$, c'est-à-dire peut s'écrire sous la forme $F(\alpha) = \frac{a_1}{10^1} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}$, soit encore sous la forme $\frac{k}{10^n}$ avec $n, k \in \mathbb{N}^*$. Cette définition étant étendue aux nombres négatifs, on obtiendrait ainsi qu'un nombre « a une écriture décimale » si, et seulement si, ce nombre est… décimal !

② Cette définition est *a priori* suffisante dès lors qu'on peut établir le résultat suivant :

Pour tout nombre $\alpha > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre décimal d_n tel que

$$d_n \leq \alpha < d_n + \frac{1}{10^n}.$$

Il suffit pour cela d'observer que, en vertu de l'axiome d'Eudoxe-Archimède (voir plus haut), la suite strictement croissante $\left(\frac{k}{10^n}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini, en sorte qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{k}{10^n} \leq \alpha < \frac{k+1}{10^n} = \frac{k}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

Il ne reste plus alors qu'à poser : $d_n = \frac{k}{10^n}$.

③ Il y a plus. Notons k_n l'entier tel que $\frac{k}{10^n} \leq \alpha < \frac{k+1}{10^n}$. On a ainsi : $\frac{k_{n+1}}{10^{n+1}} \leq \alpha < \frac{k_{n+1}+1}{10^{n+1}}$. Soit k le quotient de k_{n+1} par 10, et soit r le reste ($0 \leq r \leq 9$) : $k_{n+1} = 10k + r$. Il vient $\frac{k_{n+1}}{10^{n+1}} = \frac{10k + r}{10^{n+1}} = \frac{k}{10^n} + \frac{\frac{r}{10}}{10^n} \geq \frac{k}{10^n}$ et $\frac{k_{n+1}+1}{10^{n+1}} = \frac{10k + (r+1)}{10^{n+1}} = \frac{k}{10^n} + \frac{\frac{r+1}{10}}{10^n} \leq \frac{k+1}{10^n}$. On a donc finalement : $\frac{k}{10^n} \leq \frac{k_{n+1}}{10^{n+1}} \leq \alpha < \frac{k_{n+1}+1}{10^{n+1}} \leq \frac{k+1}{10^n}$. Il en résulte que $k = k_n$. Par exemple, si $\frac{k_3}{10^3} = 1{,}618$ alors on a $k_3 = 1618$ et $k_2 = 161$, en sorte que $\frac{k_2}{10^2} = 1{,}61$. Plus généralement, on obtient la valeur décimale approchée $\frac{k_n}{10^n}$ en tronquant la valeur décimale approchée $\frac{k_{n+m}}{10^{n+m}}$ après la n-ième décimale. La calculatrice donne ainsi : $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} =$ 1,6180339887498948482045868343656… On a donc $\frac{k_{25}}{10^{25}}$ = 1,6180339887498948482045868, $\frac{k_{12}}{10^{12}}$ = 1,618033988749, etc.

④ On peut ainsi parler, d'une façon générale, de *l'écriture décimale* d'un nombre α *jusqu'au rang n*. Si α et β ont les mêmes écritures décimales jusqu'à *n'importe quel rang*, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{k_n}{10^n} \leq \alpha, \beta < \frac{k_n + 1}{10^n}$ et donc $|\beta - \alpha| < \frac{k_n + 1}{10^n} - \frac{k_n}{10^n} = \frac{1}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en sorte que, puisque $\frac{1}{10^n}$ peut devenir inférieur à tout nombre positif non nul, on a $\alpha = \beta$.

Bien entendu, selon la philosophie réaliste du numérique que l'on a déjà rencontrée, ce développement, qui se présente comme valant pour « tout nombre », alors même que le corps des nombres réels n'a pas été défini, doit être lu en quelque sorte « à l'envers » : ce qu'on appellera système de nombres est un anneau (ou un demi-anneau) qui, outre le fait d'être unitaire, commutatif et intègre, doit être ordonné et archimédien. On notera en passant qu'il y a là le point de départ d'une construction rigoureuse des nombres réels, ceux-ci étant identifiés aux « développements décimaux illimités » (DDI), c'est-à-dire aux suites infinies de nombres entiers a_0, a_1, …, a_n, …, où a_0 est un entier quelconque tandis que les termes suivants sont compris entre 0 et 9 et ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. Cette vision de la définition des nombres réels, dont Henri Lebesgue s'était fait l'avocat avant-guerre [17], fut mise à l'honneur, autour de 1970, dans le cadre de la « réforme des mathématiques modernes » : elle apparaissait alors dans le programme de la classe de quatrième [18]. Cette introduction dans le curriculum des collèges avait été préparée au cours des années 1960 par différents auteurs : ainsi trouvera-t-on dans l'ouvrage déjà cité de Jacqueline Lelong-Ferrand une construction complète des réels fondée sur la notion de développement décimal illimité, construction que nous ne ferons que mentionner ici, mais

---

[17] Voir son travail sur *La mesure des grandeurs* paru dans la revue *L'enseignement mathématique* (Genève, 1931), qui sera publié ensuite sous forme d'ouvrage chez Albert Blanchard (Paris, 1975).

[18] Voir ainsi le manuel *Mathématiques classe de quatrième* publié en 1971 chez Fernand Nathan dans la « Nouvelle collection » dirigée par Michel Queysanne et André Revuz, notamment chapitre 11 (Biancamaria, 1971).

dont on peut penser que sa présence dans la formation des futurs professeurs ne serait pas déraisonnable [19].

7. Une difficulté discrète mais révélatrice

7.1. Nous nous arrêterons maintenant sur une autre question que font surgir les programmes du collège, question qui, une nouvelle fois, met en évidence une lacune de la culture mathématique scolaire – en entendant par là, au sens large, la culture dans laquelle baignent et les professeurs et les élèves. Les programmes de mathématiques du collège mentionnent à plusieurs reprises l'expression « ordre de grandeur » sans véritable précision, comme si la notion allait de soi. Or les professeurs stagiaires en découvrent vite le caractère problématique, et cela de deux façons au moins. Une première manière est interne au fonctionnement de la classe de mathématiques : on s'aperçoit que la notion n'est pas définie de manière rigoureuse et que sa manipulation fait apparaître bien des incertitudes. Un professeur ayant en charge une classe de 6^e l'exprime d'une façon tout à fait significative, en demandant d'abord comment « expliquer » la notion à ses élèves, mais en avouant très vite que le mal est, pour lui, déjà dans la notion elle-même.

> Comment bien expliquer en 6^e la notion d'ordre de grandeur (cette notion me paraît bancale) ? Exemple : $4{,}5 \times 24{,}3$; ordre de grandeur : $4 \times 25 = 100$. Mais pourquoi ne pas prendre 5×26 ou 4×24 ? (2000-2001, 4^e et 6^e, semaine 10)

L'observation est certainement pertinente : en bien des cas les programmes – et notamment le programme de 6^e – usent de l'expression « ordre de grandeur » pour désigner manifestement un nombre à la fois assez proche du nombre à déterminer, mais en même temps plus simple à énoncer (plus « rond »). Dans le cas évoqué, on pourrait par exemple dire que l'on prend un minorant de l'expression proposée ($4{,}5 \times 24{,}3$) en calculant 4×24 (= 96), un majorant en calculant 5×25 (= 125), qui sont sans doute des « ordres de grandeur » si l'on entend l'expression très libéralement, mais que l'on peut trouver avantage à minorer un facteur et à majorer l'autre pour trouver un ordre de grandeur au sens que l'on vient d'évoquer (on trouve, ici, $4 \times 25 = 100$ et $5 \times 24 = 120$), sans que cela, du reste, donne toujours un *encadrement* du

[19] Voir Lelong-Ferrand, *op. cit.*, p. 127-141.

résultat[20]. Mais l'usage de l'expression « ordre de grandeur » dans ce contexte – où il vaudrait mieux sans doute parler tout simplement de valeur approchée, sans autre précision – va entrer en tension avec des usages allogènes ayant une réelle légitimité scientifique. Le « choc » culturel est bien exprimé par la question suivante, émanant d'un professeur stagiaire ayant en responsabilité une classe de seconde :

> Suite au sujet sur les puissances de 10 et l'écriture scientifique, j'ai une question sur la notion d'ordre de grandeur. Le terme est employé différemment en sciences physiques et en mathématiques : en mathématiques, $3{,}1 \times 10^6$ est de l'ordre de 3 millions (« pour moi »), en physique, $3{,}1 \times 10^6$ est de l'ordre du million. C'est une question que m'ont posée les élèves, qui s'y perdent. Comment gérer cette situation ? (2002-2003, 2de, semaine 14)

La même surprise se lit encore dans la question ci-après, qui concerne à nouveau une classe de seconde, aux prises avec les mêmes difficultés :

> Conformément aux programmes, j'ai introduit en cours la notion d'ordre de grandeur. Le problème est que les élèves avaient été confrontés à une définition différente en cours de sciences physiques. J'ai été un peu surprise et j'ai laissé en suspens cette notion en leur avouant que j'avais un doute. Perd-on de la crédibilité face à la classe ? (2003-2004, 2de, semaine 1)

Notons en passant le repliement subjectif de la professeure (« Perd-on de la crédibilité ? »), alors que la difficulté rencontrée est, à l'évidence, de nature on ne peut plus objective ! La même année, mais un peu plus tard, une professeure stagiaire, en charge cette fois d'une classe de 4e, précise la difficulté technologico-technique sur laquelle elle a buté :

> Dans l'écriture scientifique $a \times 10^n$, un ordre de grandeur est-il 10^n, ou 10^n si $1 \leq a < 5$ et 10^{n+1} si $5 \leq a < 10$? (2003-2004, 4e, semaine 9)

7.2. C'est en substance la même question qui sera proposée l'année d'après par une élève professeure enseignant en seconde. Cette fois, la tentative de donner une définition de l'ordre de grandeur est tout près d'aboutir (l'ordre de grandeur n'est pas ici *une* valeur approchée parmi d'autres possibles), mais la définition proposée ne concorde toujours pas avec la « définition » que les élèves rapportent de la classe de physique :

> Lors d'un travail sur l'écriture scientifique des nombres et l'ordre de grandeur, j'ai posé la définition suivante : « Pour trouver l'ordre de grandeur d'un nombre décimal dont l'écriture scientifique est $a \times 10^p$, où $a \in \mathbb{D}$, $1 \leq |a| < 10$, et $p \in \mathbb{Z}$, on arrondit a à l'unité dans cette écriture. » Les élèves avaient

---

[20] Dans le cas considéré ici, on a $4{,}5 \times 24{,}3 = 109{,}35$, et l'on a donc bien $4 \times 25 \leq 4{,}5 \times 24{,}3 \leq 5 \times 24$. Cela n'est pas toujours vrai : ainsi le produit $2{,}1 \times 9{,}1$, égal à 19,11, n'est-il pas encadré par $2 \times 10 = 20$ et $3 \times 9 = 27$.

déjà travaillé ces notions en sciences physiques et rencontré une définition différente (« puissance de 10 la plus proche du nombre »). Peut-on leur imposer deux définitions différentes ? (2004-2005, 2de, semaine 6)

À nouveau, on voit la professeure tentée de ne pas affronter le noyau de la difficulté, en se montrant avant tout soucieuse des conséquences « pédagogiques ». Mais sa question ne va pas rester sans réponse. Elle sera d'abord travaillée sommairement lors de la séance 7, où le document ci-après, qui témoigne du point de vue « des physiciens », est examiné.

L'ordre de grandeur d'un nombre est utilisé pour comparer entre elles certaines quantités ou mesures. Il permet de faire des comparaisons rapides.
L'ordre de grandeur [d'un nombre est] *la puissance de dix* qui se rapproche le plus de ce nombre.
Pour trouver l'ordre de grandeur d'un nombre on doit suivre les étapes suivantes :
1. Transforme le nombre en notation scientifique.
2. Arrondis le coefficient à l'unité près.
3. Une fois arrondi, si le coefficient est plus petit que 5, l'ordre de grandeur est la même puissance de dix que le nombre en notation scientifique. Si le coefficient est 5 ou plus que 5, on ajoute 1 à l'exposant de la puissance de dix du nombre écrit en notation scientifique.
Exemples :
– Le diamètre de la Terre est de 12 770 000 m. Quel est l'ordre de grandeur de cette distance ? Suis les étapes : 1. $1{,}277 \times 10^7$ m ; 2. 1×10^7 m ; 3. l'ordre de grandeur de 12 770 000 est 10^7.
– Le rayon de la Terre est de 6 378 000 m. Quel est l'ordre de grandeur de cette distance ? Suis les étapes : 1. $6{,}378 \times 10^6$; 2. 6×10^6 ; 3. l'ordre de grandeur de 6 378 000 m est 10^7. [On ajoute 1 à l'exposant parce que le coefficient arrondi à l'unité est plus grand que 5. Le nombre 6 378 000 est plus près de 10 000 000 (10^7) que de 1 000 000 (10^6).]
– La longueur d'une cellule de plante est 0,000 007 6 m. Quel est l'ordre de grandeur de cette distance ? Suis les étapes : 1. $7{,}6 \times 10^{-6}$ m ; 2. 8×10^{-6} ; 3. l'ordre de grandeur de 0,000 007 6 m est 10^5. [On ajoute 1 à l'exposant parce que le coefficient arrondi à l'unité est plus grand que 5.]

La même question sera reprise lors de la séance 10 : cette fois, elle fait l'objet d'un long développement (ci-après) qui, à l'évidence, s'efforce de ne rien laisser dans l'ombre, du moins pour la petite troupe des participants au séminaire. On notera que, passé le premier point, le propos se centre (implicitement) sur les nombres *positifs*.

❶ La définition « mathématique » évoquée – l'ordre de grandeur d'un décimal $a \times 10^p$, où $a \in \mathbb{D}$, $1 \leq |a| < 10$, $p \in \mathbb{Z}$, s'obtient en arrondissant a à l'unité – ne pose pas de problème particulier (l'ordre de grandeur de $480 = 4{,}8 \times 10^2$ est 5×10^2, soit 500, par exemple), hormis le fait qu'elle ne correspond pas à l'usage généralement accepté, qui veut que l'ordre de grandeur d'un nombre soit une puissance de 10 (en sorte que l'ordre de grandeur de 480 est, soit 100, soit 1000, par exemple).

❷ Le rappel de ce fait, qui doit guider le professeur de mathématiques, n'était pas assorti d'une définition précise, mais d'une simple illustration par un document témoignant de l'usage dit « des physiciens », celui de prendre pour ordre de grandeur d'un nombre la « puissance de 10 la plus proche du nombre ». On reproduit ci-après une partie de ce document, en appliquant les indications qu'il donne au cas du nombre 480 :

L'ordre de grandeur [d'un nombre est] *la puissance de dix* qui se rapproche le plus de ce nombre.

Pour trouver l'ordre de grandeur d'un nombre on doit suivre les étapes suivantes :

1. Transforme le nombre en notation scientifique

[$480 = 4{,}8 \times 10^2$]

2. Arrondis le coefficient à l'unité près.

[$4{,}8 \times 10^2 \approx 5 \times 10^2$]

3. Une fois arrondi, si le coefficient est plus petit que 5, l'ordre de grandeur est la même puissance de dix que le nombre en notation scientifique. Si le coefficient est 5 ou plus que 5, on ajoute 1 à l'exposant de la puissance de dix du nombre écrit en notation scientifique.

[Ordre de grandeur de 480 : $10^{2+1} = 1000$]

❸ Une difficulté surgit : 480 n'est-il pas en fait « plus proche » de 100 que de 1000 ? Si on entend la chose au sens usuel, on a en effet : $480 - 100 = 380 < 1000 - 480 = 520$. On peut même noter qu'on a de même $500 - 100 = 400 < 1000 - 500 = 500$, en sorte que la puissance de 10 la plus proche de 500 serait 100 et non 1000, contrairement à ce qu'implique la règle donnée précédemment !

❹ Le milieu de l'intervalle [100 ; 1000] est en fait 550 et non 500. Plus généralement, le milieu de l'intervalle [10^p ; 10^{p+1}] est $5{,}5 \times 10^p$. On peut donc être porté alors à donner pour technique d'obtention de l'ordre de grandeur ceci :

1. Transforme le nombre en notation scientifique

[$480 = 4{,}8 \times 10^2$]

2. Tronque le coefficient au dixième.

[$4{,}8 \times 10^2 \approx 4{,}8 \times 10^2$]

3. Une fois tronqué, si le coefficient est plus petit que 5,5, l'ordre de grandeur est la même puissance de dix que le nombre en notation scientifique. Si le coefficient est 5,5 ou plus que 5,5, on ajoute 1 à l'exposant de la puissance de dix du nombre écrit en notation scientifique.

[Ordre de grandeur de 480 : $10^2 = 100$]

② S'il ne s'agit que de donner une définition précise de la notion d'ordre de grandeur, définition qui tantôt s'accordera, tantôt non, avec telle ou telle autre définition possible, la définition précédente peut certes être adoptée. Mais, à l'instar d'ailleurs de celle proposée dans le document cité, elle est critiquable pour des raisons que l'on va exposer rapidement.

❶ La notion de « plus proche » utilisée ci-dessus est la notion que l'on peut appeler *arithmétique* (en suivant un vocabulaire fixé par les mathématiciens grecs). Des nombres $a < x < b$ forment une

« médiété arithmétique » si $x - a = b - x$, c'est-à-dire si $x = \frac{a+b}{2}$, en d'autres termes si x est la moyenne *arithmétique* de a et b. (Le mot « médiété » traduit ici un mot grec qui signifie à peu près « moyenne, proportion ».) On dira en ce sens que x est plus proche, arithmétiquement, de a que de b si $x - a < b - x$, c'est-à-dire si $x < \frac{a+b}{2}$.

❷ Dans le cas des ordres de grandeur, les puissances de 10 ne forment pas une progression *arithmétique* (additive) mais une progression *géométrique* (multiplicative), et la « distance » entre deux nombres $x < y$ se mesure, non par leur *rapport arithmétique* $y - x$ mais par leur *rapport géométrique* $\frac{y}{x}$. Les anciens Grecs disaient ainsi que $a < x < b$ forment une « médiété géométrique » si l'on a $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$, c'est-à-dire si « x est à a comme b est à x », ce qui revient à l'égalité $x = \sqrt{ab}$: x est ainsi la moyenne *géométrique* de a et b.

❸ Quand dira-t-on alors que « x est plus proche (géométriquement) de a que de b » ? Lorsqu'on a $\frac{x}{a} < \frac{b}{x}$, c'est-à-dire lorsque $x < \sqrt{ab}$. Dans le cas où $a = 10^p$ et $b = 10^{p+1}$, on dira que « x est plus proche de 10^p que de 10^{p+1} » si l'on a $\frac{x}{10^p} < \frac{10^{p+1}}{x}$, soit encore si $x < \sqrt{10} \times 10^p$. On a $\sqrt{10} =$ 3,16227766016837933199889354443271… On en déduit la règle suivante pour obtenir l'ordre de grandeur d'un nombre x :

1. Transforme le nombre en notation scientifique
[480 = $4{,}8 \times 10^2$]
~~2. Tronque le coefficient au dixième.~~
~~[$4{,}8 \times 10^2 \approx 4{,}8 \times 10^2$]~~
3. ~~Une fois tronqué,~~ si le coefficient est plus petit que $\sqrt{10}$ **(= 3,162…)**, l'ordre de grandeur est la même puissance de dix que le nombre en notation scientifique. Si le coefficient est ~~5,5 ou~~ plus grand que $\sqrt{10}$ **(= 3,162…)**, on ajoute 1 à l'exposant de la puissance de dix du nombre écrit en notation scientifique.
[Ordre de grandeur de 480 : $10^{2+1} = 1000$]

❹ En pratique, si $x = k \times 10^p$, où $k \in \mathbb{D}_+$, $1 \leq k < 10$, et $p \in \mathbb{Z}$, on peut comparer le coefficient k à $\sqrt{10}$, mais on peut aussi bien comparer les fractions $\frac{x}{10^p}$ et $\frac{10^{p+1}}{x}$. On a ainsi $\frac{480}{100} = 4{,}8$ et $\frac{1000}{480} = 2{,}083\ldots$, en sorte que 480 est (multiplicativement) « plus proche » de 1000 que de 100, ce qui entraîne que l'ordre de grandeur de 480 est 1000, et non 100. On notera que le programme de 4^e^ comporte tous les ingrédients utiles pour que la définition authentique de l'ordre de grandeur y soit opérationnelle.

② La difficulté rencontrée pour définir l'ordre de grandeur d'un nombre est liée à une situation qu'il convient de préciser.

❶ On définit parfois la relation binaire « x et y ont le même ordre de grandeur », où x et y sont strictement positifs, en disant que le rapport (« géométrique ») $\frac{\max(x, y)}{\min(x, y)}$ du plus grand des deux nombres au plus petit est inférieur strictement à 10. Cette relation est évidemment *réflexive* et *symétrique*. S'il s'agissait d'une relation *d'équivalence*, on pourrait, selon un procédé tout classique, définir abstraitement l'ordre de grandeur d'un nombre x comme *la classe d'équivalence* à laquelle ce nombre appartient, et, concrètement, identifier cette classe d'équivalence – et donc l'ordre de grandeur commun à tous ses éléments – à l'unique puissance de 10 qu'elle contient.

❷ Le problème est que la relation « avoir même ordre de grandeur » ainsi définie n'est pas *transitive* et n'est donc pas une relation d'équivalence ! Le nombre 2×10^p a ainsi même ordre de grandeur que 10^{p+1} qui a lui-même le même ordre de grandeur que $4 \times 10^{p+1}$; mais les nombres 2×10^p et $4 \times 10^{p+1}$, dont le rapport est égal à 20, n'ont pas le même ordre de grandeur. Telle est la raison pour laquelle la définition de la notion d'ordre de grandeur ne va pas de soi.

❸ La définition préconisée ici revient à dire que l'ensemble des nombres $x > 0$ ayant pour ordre de grandeur 10^p, où $p \in \mathbb{Z}$, s'écrit $\{ x > 0 \,/\, \sqrt{10} \times 10^{p-1} \leq x < \sqrt{10} \times 10^p \}$. Pour $x = 480$, par exemple, on a vu que $p = 3$; on a bien : $\sqrt{10} \times 10^2 = 316,\ldots \leq 480 < \sqrt{10} \times 10^3 = 3162,\ldots$ L'ensemble précédent s'écrit encore : $\{ x > 0 \,/\, \frac{1}{\sqrt{10}} \leq \frac{x}{10^p} < \sqrt{10} \}$. En d'autres termes, avoir pour ordre de grandeur 10^p, pour un nombre x, c'est avoir avec 10^p un rapport $\frac{x}{10^p}$ qui ne soit pas plus grand que $\sqrt{10} = 3,162\ldots$, et qui soit au moins égal à $\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = 0,3162\ldots$

7.3. Le traitement de la notion d'ordre de grandeur dans le séminaire de formation des professeurs stagiaires a longtemps été entaché d'une inexactitude qui ne sera pas levée avant le développement précédent (lequel date de la 10e séance du séminaire 2004-2005). La question de l'ordre de grandeur est abordée au moins dès le séminaire 2002-2003. L'objectif de la réponse avancée alors semble être d'amener les élèves professeurs à renoncer à l'idée que, par exemple, le nombre de tirages possibles au loto, qui est égal à 13 983 816, aurait 13 millions pour ordre de grandeur. Pour cela, le formateur s'appuie sur l'usage dont témoignent des documents issus de la culture « physicienne ». Se centrant sur cette visée de déconstruction, il reprend sans la critiquer l'expression de « puissance de 10 la plus proche de… ». Ainsi accrédite-t-il l'idée que, pour les nombres compris entre 10^n et 5.10^n exclu, l'ordre de grandeur serait 10^n, et qu'il serait de 10^{n+1} de 5.10^n inclus à 10^{n+1}. Le choix de ce critère ne change certes rien dans l'exemple que l'on vient de mentionner. Dans le séminaire 2003-2004, les mêmes exemples sont proposés, mais cette fois deux éléments viennent se rajouter qui, d'une certaine manière, laissent pressentir une difficulté encore non clairement identifiée. Le texte « physicien » examiné indique, on l'a vu plus haut, qu'il convient, dans l'écriture scientifique du nombre x considéré, « d'arrondir à l'unité près » le nombre k tel que $x = k\cdot 10^n$, où $1 \leq k < 10$. La réponse proposée fait observer qu'il y a là un point de désaccord éventuel : si, par exemple, $x = 4{,}86 \times 10^3$, la règle des physiciens ici présentée conduit à passer à 5×10^3 et « donc » à conclure que l'ordre de grandeur de $4{,}86 \times 10^3$ est 10^4. En revanche, si l'on tronque l'écriture du nombre en ne retenant que sa partie entière, alors on est conduit à conclure que l'ordre de grandeur de x est 10^3. On notera au passage que le souci, visible dans le document commenté, de fournir un algorithme simple, voire simplet, introduit en vérité des complications tout à fait inutiles ! Si 5 est la valeur séparatrice, alors la valeur 4,86 est inférieure à 5 et on doit conclure que l'ordre de grandeur est 10^3, sans qu'il soit utile de considérer arrondi ou troncature. Il est un autre point sur lequel la réponse proposée cette année-là innove par rapport à la réponse de l'année précédente, mais toujours dans le même sens semble-t-il : afin d'aider les jeunes professeurs à abandonner l'idée naïve d'ordre de grandeur qu'ils portent en eux. Pour cela le formateur change d'échelle : au lieu de s'en tenir à l'échelle des puissances de 10, il considère un instant l'échelle des puissances de 3. Prenant toujours pour exemple le nombre des résultats possibles au jeu du loto, 13 983 816, il rappelle que l'ordre de grandeur, dans l'échelle des puissances de 3, est donné par l'échelon le plus proche ; puis, pour déterminer cet échelon, il calcule l'entier n tel que $3^n \leq x < 3^{n+1}$. À cette fin, il utilise la fonction logarithme : de fait, on a $n = \mathrm{E}(\log_3 x) = \mathrm{E}\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)$, où E est la fonction partie entière. On trouve ici $n = 14$: la réponse proposée retient que x s'écrit sous la forme : $x = \frac{13983816}{3^{14}} \times 3^{14}$, soit encore $2{,}923\ldots \times 3^{14}$. Mais, alors même que le principe de la valeur séparatrice qui sera proposé lors de la séance 10 du séminaire 2004-2005 conduirait ici à prendre $\sqrt{3} \times 3^{14}$, ce qui correspond à la moyenne arithmétique des logarithmes de base 3 des deux puissances de 3 successives [21], la réponse avancée s'en tient au critère « arithmétique » et conclut que, « comme $2{,}923\ldots \in [1{,}5 ; 3[$, l'ordre de grandeur de x est 3^{15} ». Bien entendu,

[21] D'une manière générale, si l'on prenait la base b ($b \geq 2$), la valeur séparatrice entre b^n et b^{n+1} serait le nombre x tel que $\frac{b^n}{x} = \frac{x}{b^{n+1}}$, soit $x = b^n\sqrt{b}$, dont le logarithme de base b est bien égal à la moyenne *arithmétique* des logarithmes de base b des deux puissances de b considérées, puisque $\frac{\log_b b^n + \log_b b^{n+1}}{2} = \frac{n + (n+1)}{2} = n + \frac{1}{2} = \log_b(b^n\sqrt{b})$.

dans ce cas précis, comme d'ailleurs dans les autres exemples utilisés, la conclusion est compatible avec le critère « géométrique », puisque, à l'évidence, 2,923… $\in$ [$\sqrt{3}$; 3[. Il n'en reste pas moins que, bien que la situation ait « forcé » le recours aux fonctions logarithmes, cela n'a pas modifié le critère de séparation retenu. Et, comme on l'a vu, il faudra attendre l'année suivante pour que, en quelque sorte au « deuxième coup », le critère « géométrique » généralement adopté soit explicité.

8. Unités et grandeurs

8.1. Dans le travail sur le système des nombres utilisé, la notion de *grandeur* (et non plus d'ordre de grandeur) occupe une place tout à fait essentielle. Longtemps, dans le texte du savoir mathématique de l'école primaire (en incluant l'ancien primaire supérieur, soit *grosso modo* notre collège actuel), on « définit » un nombre comme étant la *mesure* d'une *grandeur* – dès lors qu'une *unité de grandeur* a été choisie. Les nombres sont ainsi les rejetons des grandeurs : un nombre est le résultat du mesurage d'une grandeur. Parce qu'on peut couper un segment en trois « bouts » de même longueur et qu'on peut considérer le segment formé par deux de ces bouts, on a besoin du nombre $\frac{2}{3}$ pour mesurer la *longueur* du segment ainsi obtenu. De la même façon, c'est pour mesurer la longueur d'une diagonale d'un carré dont la longueur des côtés est prise pour unité que l'on doit accepter l'existence du nombre noté $\sqrt{2}$. Semblablement, encore, c'est parce que l'on prétendra pouvoir identifier un angle de 20º que l'on admettra l'existence d'un nombre noté cos 20º, dont nous verrons plus loin qu'il est non constructible. C'est encore parce que l'on prétendra mesurer la longueur d'un quart de cercle de rayon unité que l'on introduira le nombre π, qui n'est pas algébrique. Mais avant de revenir sur ces extensions du système des nombres utilisé, il convient d'examiner la rencontre des professeurs stagiaires avec le principe générateur que nous venons d'évoquer : les besoins numériques imposés par le désir de pouvoir mesurer les différentes espèces de grandeurs. Cette rencontre met au jour un certain nombre de difficultés, dont nous verrons que, à l'instar des difficultés examinées jusqu'ici, elles ne trouvent pas à se résoudre simplement dans la culture professionnelle où ces élèves professeurs font leur entrée. La première difficulté par laquelle nous entamerons notre examen a trait à la question des *unités*, et notamment à leur rôle dans les calculs à conduire dans les classes de collège. La situation la plus élémentaire surgit au moment où l'on prétend indiquer une longueur, comme le rappelle la question suivante :

Puis-je écrire AB = 6 cm ou AB = 6 l'unité étant le centimètre ? (2002-2003, 4e, semaine 8)

Le questionnement précédent a un prolongement naturel que soulève clairement la question suivante :

Une longueur (par exemple la longueur AB) doit-elle forcément avoir une unité ? Peut-on écrire AB = 3 sans préciser d'unité ? Dans le cas où l'unité est précisée, les unités doivent-elles figurer dans toutes les étapes de calcul ? Exemples : $AB^2 + BC^2 = 13 \text{ cm} \times 13 \text{ cm} + 20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} = \ldots$; $AB^2 = 25 \text{ cm}^2$ donc $AB = \sqrt{25 \text{ cm}^2} = 5$ cm… (2002-2003, 4e, semaine 6)

La réponse qui va être faite à cette dernière question, réponse que nous reproduisons ci-après, est nuancée : on y indique que les unités sont évidemment nécessaires, même si elles restent « supposées », et comme à l'arrière-plan ; que cette mise entre parenthèses des unités est justifiée par une propriété très particulière de l'espace *euclidien*, propriété qu'énonce l'axiome de Wallis ; que, toutefois, l'habitude de ne pas faire figurer les unités dans les calculs est trop souvent regardée à tort comme une règle absolue ; que la véritable règle est bien celle évoquée dans la question examinée.

1. Une *longueur* a forcément une *unité* ; mais on peut décider de désigner par AB, non la longueur (13 cm), mais sa *mesure* (13) lorsque telle unité (ici, le centimètre) a été choisie : tel est l'usage général dans la classe de mathématiques, usage à certains égards critiquables mais qui a le mérite d'alléger les écritures.

2. On peut même ne pas préciser l'unité et parler d'un triangle « de côtés de mesures 4, 8 et 9 » (l'unité étant laissée indéterminée). Cette possibilité est fondée sur une propriété essentielle de l'espace *euclidien*, le *principe de similitude*, énoncé pour la première fois dans un exposé « lu publiquement à Oxford le soir du 11 juillet 1663 » par le mathématicien anglais John Wallis (1616-1703) : soit le fait que « pour une figure quelconque, il y en a toujours une autre, de grandeur quelconque, qui lui est semblable », ou, pour le dire autrement, que « toute figure peut être rapetissée ou agrandie de manière illimitée ».

• L'apport essentiel de Wallis à cet égard consiste à observer que, si cette propriété est admise à titre d'axiome, il devient possible de *démontrer* le « cinquième postulat d'Euclide », c'est-à-dire de prouver l'*unicité* de la parallèle passant par un point donné à une droite donnée (l'*existence* résulte des autres axiomes d'Euclide). Il suffit même, comme l'observera Girolamo Saccheri en 1733, de supposer la propriété vraie pour ces figures particulières que sont les triangles. Ce qu'on nomme aujourd'hui l'*axiome de Wallis* s'énonce donc ainsi :

Étant donné un triangle ABC et des points distincts D et E, il existe F tel que les triangles ABC et DEF soient semblables.

• La propriété selon laquelle les « faits spatiaux » – selon l'expression de Charles Méray (1835-1911) – sont *invariants par similitude*, c'est-à-dire ne dépendent pas de la « taille » des figures, *caractérise* la géométrie que l'on nomme aujourd'hui euclidienne (en l'opposant ainsi aux géométries non euclidiennes, à la géométrie hyperbolique notamment) : c'est cela qui permet *d'oublier l'unité de longueur* quand on fait de la géométrie euclidienne. Dans son *Programme d'Erlangen* (1872), Felix Klein (1849-1925) redéfinira d'ailleurs cette géométrie comme l'étude des *propriétés invariantes par le groupe des similitudes de l'espace*.

• On notera encore que l'invariance des propriétés de l'espace par similitude a des conséquences décisives pour toutes sortes de pratiques sociales : si, par exemple, l'espace ambiant était hyperbolique, la notion de *plan* d'une ville ou d'un bâtiment n'aurait guère de sens – le plan d'un objet devant alors, pour être rigoureux, être *de la même taille* que l'objet lui-même ! L'axiome de Wallis implique au contraire que l'espace « tout entier » ne contient *rien de plus ni rien de moins* que ce que peut contenir cette minuscule parcelle d'espace qu'est la feuille de papier où le géomètre trace des figures pour les étudier. Dès lors, le *laboratoire du géomètre euclidien* se réduit à une feuille de papier, en même temps que toute expérience relative aux faits de l'espace devient, au moins s'agissant de géométrie plane, expérience *graphique*. Il y a là, on doit le souligner, un fait des plus singuliers : on voit mal, par exemple, un océanographe étudier *tout l'océan* en se limitant à l'étude d'une pièce d'eau de quelques mètres carrés au bord du rivage ! Or c'est bien cela pourtant que fait le géomètre euclidien, qui semble en conséquence se désintéresser de l'espace ambiant, pour ne plus guère s'intéresser qu'à son laboratoire miniature.

3. Les remarques précédentes ne concernent toutefois que ces grandeurs particulières que sont les *longueurs* : la plupart des propriétés physiques, en effet, *ne sont nullement invariantes par similitude*, et il n'est dès lors plus question « d'oublier les unités »… En revanche, il reste possible de calculer sur les *mesures*, et de ne réintroduire les unités qu'en fin de calcul. Cette exception, devenue aujourd'hui abusivement une règle quasi absolue, cache la véritable règle, celle relative aux calculs *avec* unités, qui permet d'écrire par exemple que la longueur a du côté d'un carré d'aire 25 cm^2 est donnée par $a = \sqrt{25 \text{ cm}^2} = 5$ cm. De la même façon, sachant que la période T d'un pendule simple de longueur ℓ est donnée, en un lieu où l'accélération de la pesanteur est g, par $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, on écrira, si $g = 9{,}75$ m/s^2 et $\ell = 0{,}988$ m par exemple, $T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}988 \text{ m}}{9{,}75 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}988}{9{,}75}}$ s $= 2{,}0001\ldots$ s ≈ 2 s.

8.2. L'exemple du pendule simple est tout à fait indicatif d'une constante de la formation prodiguée dans le séminaire adressé aux professeurs stagiaires, tout au long des années auxquelles nous nous référons ici. En rupture avec des pratiques dominantes, qui se sont parfois indurées en valeurs solidement respectées dans la profession, la formation invite les élèves professeurs à réfléchir sur l'introduction des unités dans les calculs, et, en un sens, les pousse à se rallier à cette pratique, quoique sans dogmatisme théorique ou pratique. Cette invitation rencontre toutefois quelques réticences, qui sont sans doute moins d'ordre intellectuel – le « dossier » est convaincant – que d'ordre institutionnel. C'est ainsi qu'un stagiaire s'interroge dans ces termes :

> Faire apparaître les unités dans les calculs semble n'avoir que des avantages (homogénéité, nécessité des conversions). Mais est-ce légal ? (2001-2002, 4^e^, semaine 23)

Le souci s'exprime en particulier d'un conflit possible avec les autres professeurs, conflit dont les élèves pourraient alors être les innocentes victimes. Ainsi en va-t-il dans les deux questions suivantes :

> 1. Je me range désormais derrière la possibilité (et même à la nécessité) d'inclure les unités dans les calculs ; mais on ne peut l'exiger encore : en effet, nos élèves doivent savoir que certains professeurs de mathématiques n'en veulent pas… (2003-2004, 4^e^, semaine 21)
> 2. Je demande à mes élèves de garder les unités lors des calculs, mais j'ai appris que les autres professeurs du collège sanctionnent ce genre de raisonnement. Comment faire ? Le brevet approche et je ne voudrais pas les pénaliser. (2004-2005, 3^e^, semaine 24)

La novation change si fort les habitudes que nombre de questions viennent demander la confirmation d'une pratique encore vécue comme incertaine dans ses principes les plus élémentaires. Ainsi en va-t-il de la question ci-après :

> Il faut mettre les unités dans les calculs. Il faut donc aussi les mettre dans les équations ? (2002-2003, 4^e^, semaine 5)

Cette question, au reste, servira de point de départ à un exposé de facture classique – dans le cadre du séminaire du mardi matin – sur les grandeurs et leur mesure. Nous en extrayons un passage faisant référence de manière plus précise à la question ci-dessus.

> Ce qui précède contient une réponse implicite à la question sur la présence des unités dans les *équations* : la « tradition » actuelle, on le sait, est *d'oublier les unités*, de ne retenir que les *mesures*, et de *réintroduire les unités à la fin* ; mais il est évidemment tout à fait justifié de résoudre une équation en conservant les unités, notamment dans la préparation des deux membres de l'équation, ce qui permettra de vérifier qu'ils ont bien la même « dimension », avant d'omettre les unités dans l'étape de résolution proprement dite.

• Supposons par exemple qu'un automobiliste parcoure 40 km d'autoroute à la vitesse moyenne de 100 km/h, puis, à la sortie de l'autoroute, soit pris dans un embouteillage où il reste bloqué pendant un certain temps ; quelle doit être la durée de cet arrêt intempestif pour que sa moyenne tombe à 70 km/h ?

• Le temps écoulé est donné par : $\dfrac{40\text{ km}}{100\text{ km/h}} + x\text{ min} = \dfrac{4}{10}\text{ h} + \dfrac{x}{60}\text{ h} = \left(\dfrac{4}{10} + \dfrac{x}{60}\right)\text{h}$. La vitesse moyenne est alors : $\dfrac{40\text{ km}}{\left(\dfrac{4}{10} + \dfrac{x}{60}\right)\text{h}} = \dfrac{40 \times 60}{24 + x}\text{ km/h} = \dfrac{2400}{24 + x}\text{ km/h}$. On doit donc résoudre l'équation $\dfrac{2400}{24 + x} = 70$, dont l'unique solution est $x = \dfrac{24 \times 3}{7} = 10{,}28...$ Un arrêt d'à peine plus de 10 minutes suffit à faire tomber la vitesse moyenne de 100 à 70 km/h !

En vérité, le calcul de vitesses – qui, dans les programmes de mathématiques du collège, est une pointe avancée vers le territoire de la physique, et où le problème des grandeurs est difficilement évitable – constitue une source évidente de difficultés pour les professeurs stagiaires. Dans la question suivante, déjà, une professeure s'émeut de trouver dans son manuel des notations qu'elle imagine sans doute peu appropriées pour des élèves de collège.

En classe de 4^{e}, dans le chapitre « proportionnalité », le livre de la classe utilise, pour les vitesses moyennes, les unités notées $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Dois-je institutionnaliser cette notation et l'utiliser quotidiennement ou la remplacer par les notations m/s, km/h ? (2000-2001, 4^{e}, semaine 23)

Sa question suscite une réponse (reproduite ci-après) qui attire d'abord l'attention sur le fait qu'il ne s'agit pas d'un choix des *auteurs* du manuel mais bien d'une injonction des programmes, ajoute ensuite que l'usage d'exposants entiers relatifs (comme dans la notation $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$) peut avoir une certaine fonctionnalité, et note enfin qu'il convient toutefois d'en faire une exploitation avertie.

1. Le programme utilise bien cette notation, au demeurant classique. Ainsi en va-t-il dans le passage suivant :

… la vitesse moyenne d'un trajet sur un parcours de 60 km, où l'aller se parcourt à 20 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ et le retour à 30 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Dans le document d'accompagnement des programmes du cycle central, on lit de même :

On introduit les unités-quotients à propos de la vitesse. Les élèves ont pu être amenés à faire usage des $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ dès la classe de 5^{e}, mais les problèmes proposés à ce niveau…

2. D'une manière générale, et bien que les programmes du collège semblent ignorer cet aspect de la question des grandeurs et des unités, il n'est pas déraisonnable d'*exploiter* la capacité de calculer à l'aide de *puissances d'exposant entier relatif*, qui doit se construire en 4^{e}, pour manipuler de manière

intelligible et fiable les unités de grandeurs composées en combinant l'emploi des *fractions* et l'emploi des *puissances*. On aura ainsi par exemple :

$$9 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = \frac{9 \text{ km}}{\text{h}} = \frac{9000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{9000}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2{,}5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

En revanche, il serait inutilement exigeant, et inapproprié parce que peu fiable, de prétendre demander aux élèves qu'ils procèdent *uniquement* avec des puissances, comme ci-après :

$$9 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 9\cdot(1000 \text{ m})\cdot(3600 \text{ s})^{-1} = 9\ (1000 \text{ m})\cdot3600^{-1}\ \text{s}^{-1} = \frac{9000}{3600}\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 2{,}5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Les questions ci-après témoignent encore de l'embarras devant ce qu'on peut nommer – et ce que, au demeurant, la formation prodiguée nomme – l'« algèbre des grandeurs ». Ce que l'on fait couramment avec les *nombres*, il semble qu'on n'ose pas tout à fait le faire avec ce que la tradition de l'enseignement primaire nommait jadis des « nombres concrets » :

1. Lorsqu'on effectue des calculs de distance, de temps ou de vitesse moyenne, doit-on préciser les unités dans les calculs ? Doit-on écrire : d = 70 km·h^{-1} × 3 h = 210 km ? Ou bien peut-on écrire : 70 × 3 = 210, donc d = 210 km ? (2002-2003, 4^{e}, semaine 16)

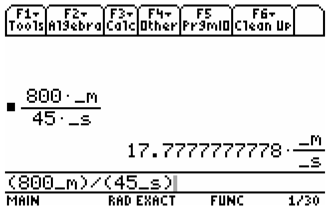
2. Comment doit-on présenter les calculs de vitesse par exemple ? Peut-on écrire $v = \frac{100 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$? Peut-on écrire $v = \frac{100}{2} = 50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$? Ou bien doit-on faire les calculs à part sans les unités puis faire une phrase de conclusion avec les unités ? (2003-2004, 4^{e}, semaine 10)

Chaque fois, la question posée est, pour le responsable du séminaire, l'occasion de nourrir le travail sur le thème du calcul avec unités. S'agissant de la deuxième question, par exemple, les éléments de réponse reproduits ci-après, où l'on voit la calculatrice appelée à témoigner en faveur du point de vue exposé, sont notamment apportés.

La question de la présence des unités dans les calculs a été abordée dans la séance 16 : contre une tradition encore dominante, la technique préconisée consiste *à calculer avec les unités*, ce qui a de multiples avantages, dont certains seront soulignés ici.

① Le calcul incluant les unités, c'est-à-dire le calcul sur des *grandeurs*, et non sur leurs *mesures* par rapport à des unités fixées, permet de donner des définitions *indépendantes des unités*. C'est ainsi que la vitesse est le quotient de la distance parcourue par la durée du parcours, et ce *quelles que soient les unités de temps, de distance et de vitesse utilisées*.

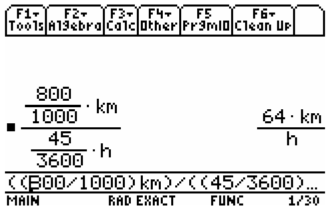
❶ Si par exemple « une voiture parcourt 800 m en 45 s », sa vitesse est $v = \frac{d}{t} = \frac{800 \text{ m}}{45 \text{ s}} = \frac{800}{45}$ m/s ≈ 18 m/s. La calculatrice TI-89 donne ainsi :



❷ Si l'on veut la vitesse précédente en km/h, on écrira :

$$v = \frac{800\text{ m}}{45\text{ s}} = \frac{160\text{ m}}{9\text{ s}} = \frac{160 \times \frac{1}{1000}\text{ km}}{9 \times \frac{1}{3600}\text{ h}} = 64\text{ km/h}.$$

La TI-89 donne ici :



❸ Notons que l'emploi des unités permet d'éviter des résultats absurdes que l'usage des seules mesures tend à induire entre les mains des élèves : à propos d'un cycliste qui a roulé à la vitesse moyenne de 40 km/h pendant 5 h et dont on demande quelle distance il a parcouru, certains élèves seront tentés de répondre par un nombre (de kilomètres) égal à $\frac{40}{5} = 8$… Alors que l'on a très simplement : $d = vt = 40\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \times 5\text{ h} = 200\text{ km}$.

Ce qui précède fait alors apparaître comme relevant d'un paradigme dépassé – quoique encore lourdement présent dans l'enseignement scolaire français – les pratiques de conversion d'unités que révèlent encore la question suivante.

> Existe-t-il des normes pour les unités de vitesse ? C'est-à-dire si l'on veut comparer deux vitesses (une en km/h et l'autre en m/min), quelle unité choisir pour la conversion ? (2003-2004, 4e, semaine 24)

Le paradigme ancien, insistons-y, est prégnant : la question précédente est en effet formulée lors de la *dernière* séance de formation de l'année ! Or le problème des unités, déjà travaillé lors de la séance 16, avait encore reçu une attention particulière lors de la séance 18, sous la forme de la réponse dont un extrait a été cité plus haut. Cette même réponse proposait, au reste, l'exemple suivant, qui évoque clairement la technique implicitement préconisée par le formateur pour comparer des vitesses données dans des unités différentes.

Si l'on a trouvé dans un ouvrage spécialisé qu'un escargot avance à la vitesse moyenne de 5,4 m/h et qu'on veuille exprimer cette vitesse en *décimètres par 5 minutes*, on calculera ainsi (par exemple) : 5,4 m/h = $\frac{5{,}4\text{ m}}{\text{h}} = \frac{5{,}4 \times 10\text{ dm}}{60\text{ min}} = \frac{54\text{ dm}}{\frac{60}{5} \times 5\text{ min}} = \frac{54\text{ dm}}{12 \times 5\text{ min}} = \frac{54}{12}$ dm/(5 min) = 4,5 dm/(5 min).

Il semble pourtant que ce type d'indications, plusieurs fois répété, ne soit pas parvenu à entamer l'ancienne pratique de « conversion des unités ». Dans d'autres cas, on a pris acte du calcul sur les grandeurs ; mais on se heurte, comme il n'est pas anormal chez un débutant, aux moindres difficultés. Ainsi en va-t-il du problème soulevé par la question suivante.

Ça me paraît normal d'écrire des égalités de vitesses dans différentes unités : $v = \frac{10\text{ m}}{\text{h}} = \frac{1}{360}\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mais pour le passage de litre par 100 km au km par litre, je ne peux pas mettre d'égalités. (2002-2003, 4$^{\text{e}}$, semaine 15)

Désignons par *c*, pour tel modèle de voiture, la consommation unitaire moyenne, exprimée en litres par 100 kilomètres ; la distance parcourue pour un litre d'essence consommé (dans les mêmes conditions) est alors donné par $d = \frac{1}{c}$: si, par exemple, $c = \frac{8\text{ l}}{100\text{ km}}$, alors $d = \frac{100\text{ km}}{8\text{ l}}$ = 12,5 km/l. De toute situation, semble-t-il, peut tout à coup surgir une difficulté imprévue, ainsi que l'illustrent les deux questions suivantes.

1. Est-il correct d'écrire des unités dans un calcul tel que : $\widehat{\text{AOB}}$ = 80° + 12° = 92° ? (2003-2004, 5$^{\text{e}}$, semaine 10)

2. Des élèves marquent sur leur copie tan(55°) et d'autres tan(55) quand ils font leurs calculs. Plus généralement, doit-on mettre les unités dans les différents calculs ? (2005-2006, 2$^{\text{de}}$, semaine 7)

Cela noté, quand on assume l'intégration des unités dans les calculs, ainsi que le font certains professeurs stagiaires, on voit, comme en d'autres domaines, proliférer les erreurs. Mais ici, de tels désagréments sont entièrement inédits (ils n'avaient lieu d'être lorsqu'on proscrivait les unités). Ils déconcertent donc, d'autant plus que l'on se sent alors plus directement impliqué dans leur apparition. Ainsi en va-t-il avec l'épisode de classe rapporté dans la question ci-après.

Dans un exercice où l'on calcule l'aire d'un rectangle en utilisant les unités de mesure dans les calculs, comment réagir face à la réponse d'un élève qui calcule ainsi l'aire d'un rectangle de longueur 6 m et de largeur 6 cm :

$$\begin{aligned}\text{Aire} &= 6\text{ m} \times 6\text{ cm}\\ &= 6 \times 6 \times \text{m} \times \text{cm}\end{aligned}$$

$= 36 \times \text{cm} \times \text{m}$

$= 36 \times \text{c}(\text{m}^2)$

$= 36 \times \text{cm}^2$

(L'élève utilise les règles du calcul littéral.) (2004-2005, 4^e^, semaine 20)

Les deux questions suivantes seront rapprochées l'une de l'autre par le responsable du séminaire, sans doute en partie parce que, dans des situations inégalement complexes, elles expriment en quelque sorte la même difficulté à assumer le calcul *avec* unités :

1. Suite au travail que nous avons effectué sur l'écriture des unités, je voudrais savoir s'il existe des conventions d'utilisation des unités à l'intérieur des calculs. Par exemple, est-il correct d'écrire 10 m + 15 m = 25 m ? (2004-2005, 2de, semaine 16)

2. Sur une carte dont l'échelle est 1/26 000, lorsque l'on cherche à déterminer la quatrième proportionnelle *x* (voir le tableau), à quel moment doit-on préciser l'unité ?

distance réelle (cm)	26 000	*x*
distance sur la carte (cm)	1	16

Doit-on écrire $\begin{cases} x = 16 \times 26000 \\ x = 416000 \text{ cm} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 16 \times 26000 \text{ cm} \\ \quad = 416000 \text{ cm} \end{cases}$? Plus généralement, que faire des unités dans les calculs ? Faut-il les mettre sur la dernière ligne de calcul ? Ou faut-il les mettre tout le long du calcul ? Ou bien ne mettre l'unité que dans la phrase de conclusion qui répond à la question posée et pas dans les calculs ? (2004-2005, 5e, semaine 16)

8.3. Ces questions vont donner lieu à la présentation d'un long développement. Dans une première étape, la réponse souligne la distinction entre nombres et grandeurs, en notant l'inanité des écritures du type $\frac{1}{2} = 30$ min.

1. Les grandeurs sont l'articulation essentielle entre le monde mathématique et le monde extramathématique : on ne peut donc réfléchir sur la question de la modélisation de systèmes extramathématiques (notamment) sans rencontrer le problème des grandeurs et de leur écriture.

2. Il convient pour cela de distinguer clairement entre les *nombres*, éléments de $\mathbb{R}$, et les différentes espèces de *grandeurs* (longueurs, durées, vitesse, etc.) : une grandeur d'une *espèce* donnée est un élément, non de $\mathbb{R}$, mais d'une (demi-)droite vectorielle de la forme $\mathbb{R}_{(+)}\, u$, où u est une grandeur de l'espèce considérée – centimètre ou mètre, par exemple, s'il s'agit de longueurs, seconde ou heure, par exemple, s'il s'agit de durées, cm/s ou m/h, par exemple, s'il s'agit de vitesse, etc.

① Le non-respect de cette distinction – une longueur n’est pas une durée, et ni l’une ni l’autre ne sont des nombres, même si l’une et l’autre *se mesurent* par un nombre, dès lors qu’une unité a été choisie – conduit à des épisodes du type suivant.

Dans une classe de 6e qui étudie les écritures fractionnaires de nombres décimaux, les élèves avaient à déterminer combien il y a de minutes dans une demi-heure, dans un quart d’heure, dans un cinquième d’heure, etc.

Une élève passe au tableau pour corriger l’exercice. Le travail se réalise à travers un dialogue entre l’élève et le professeur. Les traces écrites qui apparaissent sur le tableau sont les suivantes :

$$\frac{1}{2} = 30 \text{ mn} \quad \frac{1}{4} = 15 \text{ mn} \quad \frac{1}{5} = 12 \text{ mn.}$$

Le professeur commente la solution de l’élève, mais ne corrige pas les égalités écrites au tableau.

② Il est clair que ces égalités ne sont pas correctes : le *nombre* $\frac{1}{5}$ (= 0,2) ne saurait être égal à la *durée* 12 min, pas davantage que 12 cm n’est égal à 12 kg. Les écritures correctes auraient été simplement :

$$\frac{1}{2}\text{ h} = 30 \text{ min} \quad \frac{1}{4}\text{ h} = 15 \text{ min} \quad \frac{1}{5}\text{ h} = 12 \text{ min.}$$

Dans une deuxième étape, le rédacteur des notes fait valoir que le calcul avec unités est parfaitement « légal », même si les manuels de physique semblent être les premiers à l’ignorer !

③ Ce que montre l’épisode de classe évoqué est pourtant une pratique encore dominante, à propos de laquelle les professeurs manquent des informations appropriées ou hésitent à les mettre en œuvre.

❶ Tel manuel de mathématiques de 5e commence ainsi fort à propos par indiquer les normes de l’AFNOR (Association française de normalisation) en la matière :

Il est tout à fait autorisé d’écrire :

1,825 km = 1 825 m

$2 \text{ m} \times 3{,}5 \text{ m} = 7 \text{ m}^2$

Mais les auteurs reprennent sans faiblir un usage désormais tout aussi traditionnel qu’erroné :

aire de base $A_2 = (6 \times 6) : 2 = 18 \text{ cm}^2$

aire de base $A_3 = 72 – 18 = 54 \text{ cm}^2$

$V_2 = 18 \times 12 = 216 \text{ cm}^3$

$V_3 = 864 – 216 = 648 \text{ cm}^3$

❷ Il s’agit là d’une pratique malheureuse, mais apparemment bien installée – en France –, et cela en particulier en classe de sciences physiques, comme le montre cet extrait d’un ouvrage de 2de :

L’amplitude est représentée sur l’écran par 1,5 div et la sensibilité correspondante est de 5 V/div. L’amplitude est donc

$$U_{max} = 1{,}5 \times 5 = 7{,}5\ \text{V}.$$

La période est représentée sur l'écran par 2 div et la sensibilité horizontale est de 5 ms/div. La valeur de la période est donc

$$5 \times 2 = 10\ \text{ms} = 10^{-2}\ \text{s}.$$

La fréquence est l'inverse de la période, donc

$$f = 1/10^{-2} = 100\ \text{Hz}.$$

La réponse se concentre alors sur la grande question des changements d'unités, pour faire valoir la faiblesse de la technique habituellement utilisée en France – appelée ici technique « abstraite » – et, par contraste, l'intérêt de la technique qui sera préconisée sous le nom de technique « concrète » (parce qu'elle utilise des « nombres concrets »), et qui s'appuie de manière essentielle sur l'intégration des unités dans les calculs. L'exemple suivant est d'abord proposé.

Un réservoir parallélépipédique a 0,6 m de longueur, 10 cm de largeur, et 50 mm de profondeur. Quelle est, en litres, sa capacité ? (On prendra : 1 litre = 1 dm^3.)

❶ Dans la technique concrète, on utilise bien la formule $V = L \times \ell \times p$, mais L, ℓ, p sont alors, non des *nombres*, mais des *grandeurs*.

❷ Puisque on a $L = 0{,}6$ m, $\ell = 10$ cm, $p = 50$ mm, il vient simplement : $V = 0{,}6\ \text{m} \times 10\ \text{cm} \times 50\ \text{mm}$.

❸ Si l'on décidait de prendre pour *unité de volume* le produit $\varpi = \text{m} \times \text{cm} \times \text{mm}$, on aurait : $V = 0{,}6\ \text{m} \times 10\ \text{cm} \times 50\ \text{mm} = (0{,}6 \times 10 \times 50)\ \text{m} \times \text{cm} \times \text{mm} = 300\ \varpi$.

❹ Si on cherche à exprimer le volume en dm^3, on peut par exemple procéder ainsi : $V = 0{,}6\ \text{m} \times 10\ \text{cm} \times 50\ \text{mm} = 0{,}6\ (10\ \text{dm}) \times 10\ (10^{-1}\ \text{dm}) \times 50\ (10^{-2}\ \text{dm}) = 6\ \text{dm} \times 1\ \text{dm} \times 0{,}5\ \text{dm} = 3\ \text{dm}^3 = 3$ litres.

Pour éprouver l'argumentation en faveur de la technique concrète, six petits problèmes de conversion sont alors présentés, avec, pour chacun d'eux, d'une part la solution par la technique concrète, d'autre part la solution rédigée par un professeur de physique de lycée dans le cadre d'une enquête sur les changements d'unités. Le problème IV s'énonce ainsi :

Les acides gras s'étalent spontanément sur l'eau où ils forment un film monomoléculaire. On verse dans une cuvette pleine d'eau une quantité de 0,1 mm^3 d'acide stéarique (acide gras), qui s'étale pour former une tache de 400 cm^2. Quelle est, en angströms, l'épaisseur moyenne du film d'acide ? (On rappelle que l'on a : 1 Å = 10^{-7} mm.)

La mise en œuvre de la technique traditionnelle par le professeur de physique interrogé livre la solution suivante :

Le volume d'acide gras est v = 0,1 mm^3. La surface est s = 400 cm^2. On demande l'épaisseur. $v = s\times e$ donc $e = \frac{v}{s}$. Exprimons v en mm^3, s en mm^2, on aura e en mm : v = 0,1 mm^3, s = 400 cm^2 = 400×10^2 mm^2. D'où $e = \frac{v}{s} = \frac{0,1}{400\times 10^2} = 2,5\times 10^{-6}$ mm. Avec 1 Å = 10^{-7} mm on a $e = \frac{2,5\times 10^{-6}}{10^{-7}}$ Å = 25 Å.

Le contraste est net avec la mise en œuvre de la technique concrète, qui occupe à peine une ligne :

$$e = \frac{0,1\ \text{mm}^3}{400\ \text{cm}^2} = \frac{0,1\ \text{mm}^3}{400\ (10\ \text{mm})^2} = \frac{0,1}{4\cdot 10^4}\ \text{mm} = 25\cdot 10^{-7}\ \text{mm} = 25\ \text{Å}.$$

Le problème V va provoquer le naufrage de la technique abstraite ; il s'énonce en ces termes :

Une pression de 1 atmosphère vaut 101,3 kPa. Dans la littérature scientifique de langue anglaise, on trouve souvent les pressions exprimées en PSI, c'est-à-dire en *pound per square inch*, ou livre-force par pouce carré. On a : 1 Pa = 1 N/m^2 ; 1 livre-force = 1 lbf = 4,448 N ; 1 pouce = 1 in = 2,54 cm. Que vaut 1 atmosphère en PSI ?

La technique concrète fait ici simplement son office ; on a ceci :

$$1\ \text{atm} = 101,3\cdot 10^3\ \text{Pa} = 101,3\cdot 10^3\ \text{N/m}^2 = 101,3\cdot 10^3\ \frac{\frac{1}{4,448}\ \text{lbf}}{\left(\frac{100}{2,54}\ \text{in}\right)^2} = \frac{101,3\cdot 10^3\times 2,54^2}{4,448\cdot 10^4}\ \text{lbf/in}^2 \approx 14,69\ \text{PSI}.$$

Mais, cette fois, il n'y aura pas de solution « traditionnelle » : le professeur renonce, en arguant que les élèves ne connaissent qu'un seul système d'unités, « le SI », et qu'il faut donc les préserver de ce genre de situations ! Sur le document qu'il rend aux enquêteurs, il porte cette conclusion courroucée : « Je ne donnerai pas de correction pour les [problèmes] n^{o} V et VI ! » Le problème VI, également rejeté par ce professeur, donc, avait l'énoncé suivant :

La masse volumique de l'eau, à 4 °C, est 1 g/cm^3. Donner cette masse volumique en livres anglaises par pied cube. (On a : 1 livre anglaise = 1 lb = 0,454 kg ; 1 pied = 1 ft = 0,305 m.)

Là encore, la technique concrète triomphe sans coup férir :

$$\mu = 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{10^{-3}\text{ kg}}{(10^{-2}\text{ m})^3} = 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10^3\,\frac{1\text{ lb}}{0{,}454\text{ m}^3} = 10^3\,\frac{0{,}305^3\text{ lb}}{0{,}454\text{ ft}^3} = \frac{30{,}5^3\text{ lb}}{454\text{ ft}^3} \approx 62{,}5\text{ lb/ft}^3.$$

Le rédacteur des notes du séminaire apporte alors le commentaire ci-après.

Le fait de tenir les grandeurs à l'écart conduit mécaniquement à des pratiques dont l'impuissance est évidente. Le professeur interrogé a ainsi jugé le problème IV *très difficile* (ce que confirme l'aspect hésitant, pas à pas, du corrigé proposé). Or ce problème consiste, étant donné un *parallélépipède rectangle* dont on connaît le *volume v* et l'*aire* de la *base s*, a en calculer la *hauteur e*. La réponse est pourtant, en principe, triviale : $e = \frac{v}{s}$. À condition de regarder les quantités v, s et e comme des *grandeurs* ! Or, dans les classes françaises de mathématiques ou de physique, *on ne sait pas calculer avec des grandeurs*. Une trivialité devient ainsi, pour les élèves des lycées, chose *très difficile*. Sans parler des calculs nécessaires pour passer d'un système d'unités à un autre (problèmes V & VI), qui semblent à jamais hors de portée…

La suite de la réponse s'attachera à montrer que l'intégration des unités dans les calculs – du moins une certaine forme d'intégration – prévaut hors de France. C'est ainsi que sont présentés des extraits – reproduits ci-après – d'un ouvrage contemporain en langue anglaise, montrant la mise en œuvre de la technique concrète.

Ex. 2. Express the speed of 90 km/h (90 km h^{-1}) in metres per second.

We have $\frac{90\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{90\times1000\text{ m}}{3600\text{ s}} = \mathbf{25\text{ m/s }(m\ s^{-1})}$.

Ex. 3. How many tiles 6 cm × 9 cm are needed to cover a wall of length 3.6 metres to a height of 1.8 metres, if the tiles are laid longways ?

$$\frac{\text{Length of wall}}{\text{Length of tile}} = \frac{3.6\text{ m}}{9\text{ cm}} = \frac{360\text{ cm}}{9\text{ cm}} = \frac{360}{9} = 40$$

$$\frac{\text{Height of wall}}{\text{Hight of tile}} = \frac{1.8\text{ m}}{6\text{ cm}} = \frac{180\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{180}{6} = 30$$

$\therefore$ Number of tiles needed $40 \times 30 =$ **1200**

Ex. 4. Taking one metre as 39.6 inches approximately, show that 1 hectare is very nearly 2½ acres.

We have 1 hectare = 10 000 m^2 = 10 000×(39,6)^2 in^2

1 acre = 4840 yd^2 = 4840 × (36)^2 in^2

$$\therefore \frac{1 \text{ hectare}}{1 \text{ acre}} = \frac{10\,000}{4840} \times \left(\frac{39.6}{36}\right)^2$$

La même démonstration est faite s'agissant d'ouvrages en langue espagnole. Ainsi en va-t-il avec cet extrait relatif à un problème simple de cinématique :

Un automóvil empieza a subir une cuesta recta a 72 km/h y llega a la parte más alta a 36 km/h habiendo disminuido uniformemente la velocidad.

a) Hallar la longitud de la cuesta si tardó 4 minutos en subirla.

b) ...

Expresamos, en primer lugar, las velocidades en m/s:

$$v_0 = \frac{72 \text{ km}}{\text{h}} = \frac{72\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad v = \frac{36 \text{ km}}{\text{h}} = \frac{36\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

a) Calculamos la aceleración:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \cdot 60 \text{ s}} = \frac{-10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{240 \text{ s}} = -\,0{,}04\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Determinada la aceleración, calculamos la distancia recorrida en 4 minutos, o sea, la longitud de la cuesta:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}\,a \cdot t^2 = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 240 \text{ s} - \frac{1}{2}\,0{,}04\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 240^2 \text{ s}^2 = (4800 - 1152) \text{ m} = 3\,648 \text{ m}.$$

8.4. Le travail avec les unités touche certes au problème des grandeurs : il apporte en effet une solution technique simple et efficace aux difficultés classiques liées au changement d'unités et, plus généralement, à la manipulation d'unités différentes relatives à une même espèce de grandeurs (longueurs, durées, vitesses, etc.). Mais ce que nous avons vu jusqu'ici est encore loin de régler certains problèmes sensibles que rencontrent les professeurs stagiaires – problèmes qui ont, en partie au moins, motivé historiquement la construction de la théorie des grandeurs (à laquelle les manuels d'autrefois faisaient une place des plus explicites). Or la disparition somme toute récente de cette conceptualisation classique a fait émerger divers paralogismes dont le plus commun, sans doute, est bien exprimé dans la question suivante.

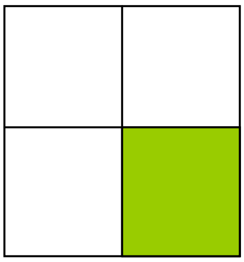
En 6$^{\text{e}}$, lorsqu'on introduit les fractions, on « sépare » les fractions en deux groupes. Tout d'abord les fractions inférieures à 1 (et positives) : on parle de $\frac{3}{4}$ d'un gâteau, on coupe le gâteau en quatre parts égales et on en prend 3 parts. Ensuite les fractions supérieures à 1. Pour faire comprendre aux élèves ce à quoi cela correspond, cela me semble plus dur. Avec les deux professeures avec lesquelles je travaille pour les 6[es], on n'arrivait pas à trouver d'exemples d'emplois de fractions supérieures à 1, si ce n'est la reproduction d'une figure à l'échelle $\frac{6}{5}$ par exemple. Quels emplois peut-on proposer ? (2001-2002, 4[e], semaine 13)

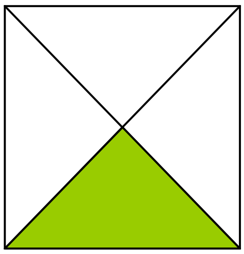
Cette question va susciter une assez longue réponse qui insiste d'emblée, avec la plus grande fermeté, sur l'erreur consistant à confondre un certain *objet* – tel une *tarte* – et telle *grandeur* qui peut lui être associée – tel le *poids* de la tarte. Dès lors que cette distinction est faite, c'est-à-dire dès lors qu'on renonce à parler des « trois quarts d'une tarte » pour parler des « trois quarts du *poids* d'une tarte », la difficulté évoquée dans la question s'évanouit. La réponse proposée s'attache, en un premier développement, à montrer notamment, ainsi qu'on le verra ci-après, qu'un même objet est en général le support de *plusieurs* grandeurs, même si, en certains usages sociaux, une convention sélectionne *une* grandeur parmi toutes celles qui peuvent être attachées à l'objet considéré.

1. Rien n'indique dans le programme de 6[e] qu'il faille distinguer les fractions inférieures à 1 des fractions supérieures à 1. Cette distinction est le symptôme d'une *incompréhension* qui s'est répandue depuis quelques années *et qu'il convient de déconstruire*.

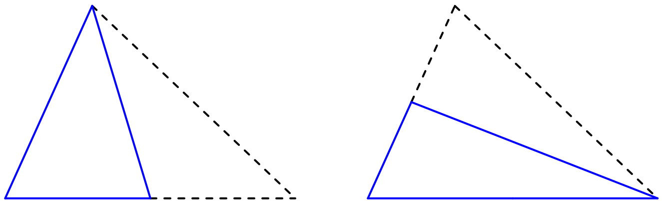
2. La première *erreur* consiste à parler des trois quarts (par exemple) d'un *objet* matériel – tarte, groupe de personnes, etc. Le « corollaire » de cette manière de penser les choses est qu'on dira alors que parler de cinq quarts d'une tarte « n'a pas de sens ». Or les mathématiciens se sont rendu compte très tôt que cette manière de considérer les choses était *incohérente* : on ne peut définir les « trois quarts » (ou les « deux tiers », etc.) d'une tarte ; on peut seulement parler des trois quarts d'une certaine *grandeur* attachée à la tarte, par exemple les trois quarts du *poids* de la tarte. À partir de ce moment-là, le problème des fractions supérieures à l'unité tombe : on peut aussi bien parler des *sept quarts du poids* de la tarte.

3. Pourquoi tout cela ? Considérons d'abord, simplement, un carré (ou, si l'on veut, un *champ* carré, ou une *tarte* carrée). Ce que l'on serait tenté d'appeler « le » quart du carré *n'est pas défini de manière univoque*, comme le montrent les figures ci-après.





Ces « portions » du carré ont même aire, à savoir « le quart de *l'aire* du carré », seule notion véritablement définie, alors que « *le* quart du carré » ne l'est pas. Si, par exemple, par rapport à une certaine unité *u*, le carré ci-dessus a des côtés de mesure 10, le quart de son aire, mesuré avec l'unité d'aire u^2, vaut $\frac{10^2}{4} = 25$. Si l'on examine maintenant, non pas la grandeur « aire » mais la grandeur « périmètre », on voit que les deux « portions » de carré sont de *grandeurs inégales* : le périmètre de la première est égal à 20 *u*, le périmètre de la seconde à $10(1+\sqrt{2})\ u$. Le prétendu « quart » du carré n'est ainsi un quart que par rapport à l'aire, non par rapport au périmètre. Il en va de même si l'on prétend prendre « la » moitié du triangle ci-après.



4. Telle est la raison pour laquelle les mathématiciens ont introduit la notion de *grandeur* (poids, masses, volume, aire, longueur, puissance, etc.), question à laquelle le document d'accompagnement du programme de 3e consacre un long développement […]

Bien entendu, note le rédacteur de la réponse, les pratiques observables dans les manuels sont, à cet égard, fréquemment condamnables : le contraste est vif, suggère-t-il, entre la rigueur mise par les manuels d'autrefois à distinguer entre grandeurs et objets supports de grandeurs, et le laxisme conceptuel et pratique de nombre de manuels contemporains.

5. Répétons-le : une tarte n'est pas une grandeur ; son volume, son poids, l'aire de sa surface, oui. On ne peut considérer « la » moitié ou « les » trois quarts d'une tarte ou de quelque autre objet que ce soit, car de tels « sous-objets » *ne sont pas définis*.

① À cet égard, nombre d'énoncés proposés dans les manuels sont *doublement fautifs*, tels les suivants :

« Dites, pour chacun des dessins ci-dessous, quelle fraction du cercle a été peinte en rouge »

« Quelle fraction de tarte reste-t-il ? Quelle fraction de tarte a-t-on déjà mangée ? »

« L'aire d'un champ est de 6394 m^2. On vend les 3/4 du champ. Quelle est l'aire de la partie vendue ? »

Non seulement, on parle ici d'objets non définis, mais on se réfère à travers eux à des grandeurs dont la *nature* n'est pas claire, *n'étaient les conventions de l'usage scolaire* : en pratique, aussi, on peut fort bien préférer la « moitié supérieure » d'un gâteau (ou, plus encore, d'un gratin…) à sa « moitié inférieure », même si le faire savoir est contraire aux règles de la civilité. En revanche, les choses s’éclairent dès qu’on parle de fractions *de grandeurs*, et non de fractions *d’objets*, comme il en va dans l’énoncé suivant :

« Un brocanteur avait acheté un meuble 380 F. Il le revend et son bénéfice est les 2/5 du prix d’achat.

Quel a été, en francs, son bénéfice ? Quel a été le prix de vente ? »

② Les remarques précédentes montrent qu’une *« théorie » des grandeurs* est nécessaire : elle seule fournit des entités sur lesquelles on puisse opérer comme d’aucuns rêvent vainement d’opérer *sur les objets eux-mêmes*. Il convient donc d’assumer le *détour par les grandeurs* dans le trajet qui conduit des *objets* aux *mesures*.

③ C’est ce que l’on faisait autrefois au collège, ainsi que le montre l’extrait ci-après d’une arithmétique pour les classes de 4e et 3e due à Anna et Élie Cartan (1934) : on y voit en effet que c’est, non une pièce de ruban, mais sa *longueur*, non un champ, mais sa *surface*, non le contenu d’un tonneau de vin, mais la *quantité* correspondante de vin que l’on peut diviser « en un nombre absolument quelconque de parties égales », ces parties étant des parties (« aliquotes ») de *grandeurs* (la grandeur h est une partie aliquote de la grandeur g s’il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g = n\,h$), et non des parties (« concrètes ») d’un ruban, d’un champ, ou du contenu d’un tonneau.

I. — PARTIE ALIQUOTE D’UNE GRANDEUR

103. — Grandeurs divisibles ou continues. — Il existe, parmi les grandeurs, certaines d’entre elles qui peuvent être divisées, au moins par la pensée, en un nombre absolument quelconque de parties égales, par exemple : la longueur d’une pièce de ruban, la surface d’un champ, la quantité de vin contenue dans un tonneau, etc.

De telles grandeurs sont dites *divisibles* ou *continues*.

104. — Définition : ***Une grandeur continue est dite une partie aliquote d’une autre grandeur de même espèce, si la première grandeur est contenue un nombre entier de fois dans la seconde.***

Dans la figure 10, la longueur CD, contenue 3 fois dans AB, est une partie aliquote de AB.

On dit aussi que AB est un *multiple* de CD :

$$AB = 3CD$$

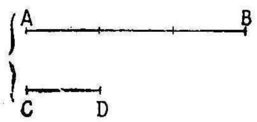
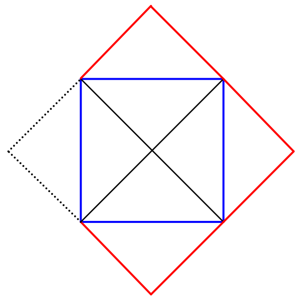


Fig. 10.

On dit encore que le nombre entier 3 *mesure* la longueur AB quand on prend CD pour unité.

④ L’analyse qui précède permet d’enrichir le complexe de types de tâches qu’il convient d’explorer en classe : on pourra non seulement demander aux élèves de préciser une partie d’un carré dont l’aire (ou le périmètre) soit le quart de l’aire (ou du périmètre) d’un carré donné, ou de s’assurer que telle partie d’un carré, qui a même aire que la partie restante, n’a pas le même périmètre, mais on pourra aussi leur demander de préciser une région du plan, carrée ou non, dont l’aire soit par exemple les sept quarts de l’aire d’un carré donné (voir ci-après), etc.



Le refoulement de la théorie des grandeurs entraîne avec lui la disparition, dans la culture *mathématique scolaire*, de la notion même de grandeur. Bien que les programmes du collège, par exemple, utilisent de nombreuses fois le *mot* de grandeur (en-dehors de ses occurrences dans l'expression « ordre de grandeur », nous l'avons dénombré 63 fois dans l'ensemble des programmes et documents d'accompagnement en vigueur au collège jusqu'en 2004-2005), le contraste est fort, pour les professeurs en formation, entre les notions regardées par eux comme « strictement mathématiques », auxquelles ils accordent la vertu d'être précisément définissables, et cette notion qu'ils découvrent comme un problème au moment de l'intégrer dans leur enseignement. De cette rencontre inattendue et troublante témoigne ainsi la question suivante :

> À propos de proportionnalité, j'ai un peu laissé tomber l'idée d'expliquer ce qu'est une grandeur. J'ai défini « deux grandeurs proportionnelles », mais j'ai passé sous silence la définition de « grandeur ». Heureusement (ou malheureusement), je n'ai pas eu de remarque là-dessus. Où puis-je m'instruire sur ce sujet ? (2001-2002, 5e, semaine 15)

Une réponse est apportée, qui commence par renvoyer à deux articles publiés dans la revue *Petit x*, dont seul le premier est alors paru [22], et qui tente ensuite de résumer comme on le verra ci-après une théorie des grandeurs jugée trop complexe pour être exposée *in extenso*.

② En termes « savants », la théorie mathématique des grandeurs conduit à regarder une espèce de grandeurs $\mathcal{G}$ (aire, volume, masse, etc.) comme une *demi-droite vectorielle réelle* (lorsque le système des nombres positifs disponibles n'est encore que $\mathbb{D}_+$ on doit bien sûr parler de demi-module ; lorsque ce système n'est encore que $\mathbb{Q}_+$, de demi-droite vectorielle rationnelle).

[22] Voir Yves Chevallard & Marianna Bosch (2001), Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée, *Petit x*, 55, 5-32 ; et Yves Chevallard & Marianna Bosch (2002), Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations, *Petit x*, 59, 43-76.

③ En pratique, une fois choisie une grandeur $u \in \mathcal{G}$ non nulle, toute grandeur $g \in \mathcal{G}$ s'écrira sous la forme $g = x\,u$. Dans le langage de l'algèbre linéaire, $\{ u \}$ est une *base* de $\mathcal{G}$, et x est la *coordonnée* du *vecteur* $g \in \mathcal{G}$ dans cette base. Dans le langage des grandeurs, u est la *grandeur unité*, et x est la *mesure* de la *grandeur* g par rapport à cette unité.

④ Si v est une seconde grandeur non nulle, et si $v = r\,u$, soit encore si $u = \frac{1}{r}v$, alors on a : $g = x\,u = x\left(\frac{1}{r}v\right) = \left(x\frac{1}{r}\right)v = \frac{x}{r}v$.

❶ Si $\mathcal{G}$ est l'espèce $\mathcal{L}$ des *longueurs*, et si u = m et v = cm, on a m = 1 m = 100 cm et donc par exemple 10 m = 10 (100 cm) = (10 × 100) cm = 1000 cm.

❷ Si $\mathcal{G}$ est l'espèce $\mathcal{D}$ des *durées*, et si u = h et v = min, on a h = 1 h = 60 min et donc par exemple $\frac{1}{2}$ h = $\frac{1}{2}$ (60 min) = $\frac{60}{2}$ min = 30 min. De même on aura $\frac{1}{4}$ h = $\frac{1}{4}$ (60 min) = $\frac{60}{4}$ min = 15 min, ou $\frac{1}{5}$ h = $\frac{1}{5}$ (60 min) = $\frac{60}{5}$ min = 12 min, et aussi $\frac{11}{15}$ h = $\frac{11}{15}$ (60 min) = $\left(\frac{11}{15}\times 60\right)$ min = 44 min.

⑤ Ce qui précède se généralise aux grandeurs *composées* : à la notion de demi-droite vectorielle réelle il faut alors substituer une structure mathématique appelée *algèbre de grandeurs*. L'essentiel est de retenir que l'on peut ainsi justifier complètement le calcul *avec les unités*, qu'elles soient « simples » (comme ci-dessus) ou « composées ».

Une autre question avait attiré l'attention du séminaire sur un problème non évoqué dans le travail accompli jusque-là. À côté des grandeurs telles les longueurs, les volumes, etc., le curriculum mathématique scolaire amène traditionnellement à considérer des « grandeurs discrètes », situation à certains égards problématique dont témoigne la question suivante, quoiqu'elle le fasse de manière oblique, la difficulté objective étant rabattue subjectivement sur la difficulté qu'auraient les élèves à « comprendre » et le professeur à « expliquer ».

> Je suis en train de faire le chapitre sur les nombres en écriture fractionnaire. Je leur ai donné quelques petits problèmes. Les élèves ont eu du mal à comprendre pourquoi si, par exemple, l'énoncé parle des « trois quarts de 2700 élèves » on doit faire $\frac{3}{4}\times 2700$. Je leur ai expliqué de différentes façons, mais certains n'y arrivent pas. Quelle méthode aurait été plus efficace ? (2001-2002, 4^{e}, semaine 13)

On reproduit ci-après, en entier et sans commentaire, la réponse que reçoit cette question : on y trouvera explicitée une élaboration sans doute subtile mais éclairante et utile, qui étend la théorie présentée dans les articles de *Petit x* mentionnés plus haut.

① La théorie des grandeurs évoquée jusqu'ici s'applique implicitement aux espèces de grandeurs *« discrètes »*, dont les mesures sont *a priori* regardées comme *entières*.

❶ Soit E un ensemble (potentiellement) infini et X l'ensemble des parties finies de E. Sur X est définie une espèce de grandeur $\mathcal{G}$ qu'on peut appeler la *« numérosité »*, ou la « nombrosité », ou la *cardinalité*, ou, simplement (mais de manière un peu gauche au plan de la langue), la *quantité* d'un ensemble fini $x \in X$. Une grandeur $g \in \mathcal{G}$ est une certaine « numérosité » (ou cardinalité), et sa mesure $n \in \mathbb{N}$ est le *cardinal* de tout ensemble $x \in X$ de numérosité g. Un tel schéma peut paraître subtil, parce que la conceptualisation courante portée par le langage ordinaire gomme quelque peu la distinction pourtant indispensable entre la grandeur (la numérosité, la quantité, la cardinalité) et sa mesure (le cardinal).

❷ Selon que l'on prend pour E l'ensemble de toutes les *personnes*, ou l'ensemble de tous les *bonbons*, ou l'ensemble de toutes les *billes*, on obtient des espèces de grandeurs différentes : l'expression « 3 billes » désigne, non tel ou tel ensemble de billes de cardinal 3, mais une numérosité possible d'un ensemble fini de billes ; et il en va de manière analogue de « 8 bonbons » ou de « 2700 personnes ». Les mots « bille », « bonbon », « personne » désignent ici des *unités*, et non *telle* personne, *tel* bonbon, *telle* bille.

❸ Comme dans le cas continu, on peut, dans le cas discret, prendre pour grandeur unité de la numérosité d'ensembles $x \in X = \mathcal{P}_f(E)$ une autre numérosité que la grandeur u = personne, bonbon, bille, etc., c'est-à-dire autres que ce que les anciens manuels d'arithmétique appelaient *l'unité simple* : on compte aussi « par six », « par dizaine », « à la douzaine », « par centaine », etc., ce qui revient à prendre pour unité $v = 6\,u$, $10\,u$, $12\,u$, $100\,u$, etc.

❹ Dans un tel cas, la *mesure* de la cardinalité considérée peut ne pas être entière, et on doit alors recourir aux nombres « fractionnaires ». On aura ainsi : 67 personnes = $\frac{67}{12}$ douzaines de personnes. L'écriture traditionnelle était en fait (et continue d'être, dans les pays anglo-saxons) : 67 personnes = $5\frac{7}{12}$ douzaines de personnes, où l'écriture $5\frac{7}{12}$ désigne le nombre $5 + \frac{7}{12}$.

② L'expression « 2700 personnes » ne dénote nullement un *ensemble* de personnes, mais bien une certaine grandeur, qui est ici une cardinalité, celle de tout ensemble de personnes de cardinal 2700.

❶ En notant u l'unité « personne », on a alors par exemple : $\frac{3}{4}(2700\,u) = \left(\frac{3}{4} \times 2700\right) u = 3 \times \frac{2700}{4}\,u = 3 \times 675\,u = 2025\,u$. On peut écrire si l'on veut : $\frac{3}{4}$(2700 personnes) = … = 2025 personnes, ou même : $\frac{3}{4}$(2700 p) = … = 2025 p. On aura de même : $\frac{5}{12}$(2700 personnes) = $\left(\frac{5}{12} \times 2700\right)$ personnes = 1125 personnes. Ou même : $\frac{5}{7}$(2700 personnes) = $\left(\frac{5}{7} \times 2700\right)$ personnes = $\left(1928 + \frac{4}{7}\right)$ personnes.

❷ Soulignons encore qu'on ne doit pas s'abuser – et abuser les élèves – en confondant l'objet $x \in X = \mathcal{P}_f(E)$ avec ce qui est en fait *une* grandeur $\tilde{x}$ de cet objet. Dans un autre contexte social, pour le même ensemble $X = \mathcal{P}_f(E)$ des ensembles finis de personnes, on pourra par exemple considérer, non la numérosité $\tilde{x}$ de $x \in X$, mais le poids total $\check{x}$ de l'ensemble de personnes x, sans qu'il y ait une relation simple entre $\tilde{x}$ et $\check{x}$ (on pourra songer ici à certains ascenseurs…).

9. Besoins numériques : un bilan

9.1. La théorie des grandeurs évoquée dans ce qui précède fera l'objet, lors du séminaire de l'année 2001-2002, d'une annexe détaillée, présentée comme complétant la réponse qui renvoyait aux articles parus dans la revue *Petit x* (et préalable à la réponse sur les fractions d'ensembles « concrets » que nous venons de parcourir). On a vu jusqu'ici que les nombres utilisés étaient regardés comme éléments d'un anneau unitaire, commutatif, intègre et – nous l'avons vu aussi – muni d'un ordre archimédien. L'explicitation faite dans l'annexe indiquée sous le titre « La structure d'espèce de grandeurs » va, comme nous allons le vérifier, introduire un saut en imposant au système des nombres une propriété qui l'identifiera au corps des réels. Une première partie de la construction montre comment, à partir d'un ensemble d'*objets*, et d'une certaine relation d'équivalence entre objets (avoir même poids, avoir même périmètre, etc.), on peut construire un ensemble de grandeurs comme structure quotient de l'ensemble des objets par la relation d'équivalence considérée. L'opération, sur laquelle nous passerons ici, conduit à une première axiomatique de la structure d'*espèce de grandeurs* que l'on reproduit ci-après (l'ensemble $\mathcal{G}$ des grandeurs est supposé ne pas se réduire à la grandeur nulle notée $0_{\mathcal{G}}$) :

GR1. un et un seul des énoncés $g_1 < g_2$, $g_1 = g_2$, $g_1 > g_2$ est vrai ;
GR2. si $g_1 < g_2$ et $g_2 < g_3$ alors $g_1 < g_3$;
GR3. $g_1 + g_2 = g_2 + g_1$;
GR4. $(g_1 + g_2) + g_3 = g_1 + (g_2 + g_3)$;
GR5. si $g_2 \neq 0_G$ alors $g_1 < g_1 + g_2$;
GR6. si $g_1 < g_2$ il existe une unique grandeur h telle que $g_1 + h = g_2$;
GR7. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une unique grandeur h telle que $g = nh$;
GR8. si $g \neq 0_{\mathcal{G}}$ alors $0_{\mathcal{G}} < g$ et $0_{\mathcal{G}} + g = g + 0_{\mathcal{G}} = g$.

L'axiome GR7 assure que, pour tout entier $n \geq 2$ et pour toute grandeur g, on peut considérer une grandeur, que l'on notera $\frac{1}{n}g$, telle que $n\left(\frac{1}{n}g\right) = g$. L'exposé montre alors que l'on peut poser, de manière cohérente, $\frac{m}{n}g = \frac{1}{n}(mg)$, et établit l'égalité $\frac{m}{n}\left(\frac{q}{p}g\right) = \frac{mq}{np}g$, ainsi que l'équivalence $\frac{m}{n} < \frac{q}{p} \Leftrightarrow \frac{m}{n} g < \frac{q}{p} g$, pour tout grandeur g de l'espèce considérée. L'étape suivante va alors consister à rechercher si l'on peut montrer que, étant donné une espèce de grandeurs vérifiant GR1 à GR8, il est possible de *mesurer* ces grandeurs, c'est-à-dire de trouver un système de nombres positifs $\mathcal{S}$ et une application μ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}$ qui respecte l'ordre entre grandeurs et l'addition des grandeurs. Le système $\mathcal{S}$ étant, ainsi qu'on l'a vu, supposé muni d'un ordre archimédien, on peut démontrer – l'exposé l'indique sans toutefois le faire – que, si la mesure μ existe, alors elle est *unique*. Cela noté, on va avancer en imposant classiquement à la structure $\mathcal{G}$ de satisfaire elle-même l'*axiome d'Archimède* (ou d'Eudoxe-Archimède), dont l'exposé souligne qu'il revient à dire que, si h est une grandeur non nulle, alors la suite $\left(\frac{1}{n} h\right)_{n\geq 1}$, tend vers $0_{\mathcal{G}}$ dans $\mathcal{G}$ muni dans la topologie de l'ordre :

GR9. Si $h \neq 0_{\mathcal{G}}$, pour tout $g \in \mathcal{G}$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nh > g$.

Une analyse *a priori* de ce que peut être $\mu(g)$ est alors menée à bien : on la reproduit ci-après.

Soit alors $u \in \mathcal{G}$ une grandeur non nulle (l'unité), et soit $a \in \mathbb{N}^*$, $a \geq 2$. D'après l'axiome d'Eudoxe-Archimède, pour tout $g \in \mathcal{G}$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k_n \in \mathbb{N}^*$ unique tel que $\frac{k_n}{a^n} u \leq g < \frac{k_n + 1}{a^n} u$: $k_n + 1$ est le plus petit des entiers ℓ tels que $\ell \frac{u}{a^n} > g$ (et k_n le plus grand des entiers ℓ tels que $\ell \frac{u}{a^n} \leq g$). Si $\mu_u(g)$ est défini, il vient $\frac{k_n}{a^n} \leq \mu_u(g) < \frac{k_n + 1}{a^n}$. Observons que la suite $\left(\frac{k_n}{a^n}\right)_{n\geq 1}$ est croissante : puisque $\frac{k_n}{a^n} u = \frac{ak_n}{a^{n+1}} u \leq g$, on a $ak_n \leq k_{n+1}$ et il vient donc $\frac{k_n}{a^n} \leq \frac{k_{n+1}}{a^{n+1}}$. On montre semblablement que $\left(\frac{k_n + 1}{a^n}\right)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante. En outre on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{k_n + 1}{a^n} - \frac{k_n}{a^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$. Les deux suites sont donc adjacentes. Si, comme on l'a supposé, $\mu_u(g)$ a été défini, on peut conclure que, pour la topologie de l'ordre dans l'ensemble $\mathcal{S}$ des nombres disponibles, elles convergent toutes les deux vers le nombre $\mu_u(g)$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n + 1}{a^n} = \mu_u(g)$.

Cette analyse suggère de *définir* $\mu_u(g)$ en posant : $\mu_u(g) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{a^n}$. Bien entendu, l'opération n'est admissible que si l'on s'est assuré que la suite $\left(\frac{k_n}{a^n}\right)_{n\geq 1}$ a bien une limite dans le système des nombres $\mathcal{S}$ utilisé ! Très classiquement, on impose alors au système $\mathcal{S}$ de satisfaire l'axiome de la borne supérieure : comme $\mathcal{S}$ peut être regardé comme plongé dans $\mathbb{R}_+$

(puisqu'il satisfait l'axiome d'Archimède), on a dès lors $\mathcal{S} = \mathbb{R}_+$. Cela fait, la suite $\left(\frac{k_n}{a^n}\right)_{n\geq 1}$ étant croissante et majorée (par $\frac{k_1 + 1}{a}$), elle possède une limite et la définition envisagée plus haut devient donc possible. L'exposé indique qu'on peut alors vérifier que μ_u respecte l'ordre et l'addition de $\mathcal{G}$, et précise en outre qu'on peut aisément vérifier que, si $g = \frac{q}{p}u$, alors on a bien $\mu(g) = \frac{q}{p}$. À ce stage, $\mathcal{G}$ peut être regardé comme une demi-droite vectorielle sur $\mathbb{Q}_+$. L'étape suivante de la construction va consister à définir rg, pour $g \in \mathcal{G}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, et cela de façon qu'on ait encore l'égalité $\mu_u(rg) = r\ \mu_u(g)$. L'analyse *a priori* du problème conduit alors à imposer à l'espèce de grandeurs $\mathcal{G}$ un nouvel axiome, qui n'est autre que l'axiome *de la borne supérieure*. Comme cet axiome implique l'axiome d'Eudoxe-Archimède [23], il n'y a pas formellement ajout d'un axiome GR10, mais remplacement de l'ancien axiome GR9 par l'axiome ci-après :

GR9. toute partie de $\mathcal{G}$ non vide et majorée a une borne supérieure.

L'axiomatique ainsi élaborée permet de regarder $\mathcal{G}$ comme un demi-espace vectoriel sur $\mathbb{R}_+$ et d'affirmer que, pour tout $u \in \mathcal{G}$, si $u \neq 0_{\mathcal{G}}$, il existe un unique isomorphisme de demi-droite vectorielles de $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{R}_+$, μ_u. Soit alors $g \in \mathcal{G}$ et soit $r = \mu_u(g)$; on a : $\mu_u(g) = r = r\mu_u(u) = \mu_u(ru)$. Par suite, $g = ru$: $\mu_u(g)$ est donc la coordonnée de g dans la base $\{u\}$ de g.

9.2. Le besoin des nombres réels positifs s'introduit ainsi de manière un peu oblique et relativement cachée dans la formation proposée – par les notions d'*espèce de grandeurs* et de *mesure des grandeurs*. Les besoins numériques au collège mettent clairement en évidence la nécessité de disposer au moins des nombres *constructibles*. Il y a là déjà un premier paradoxe de la profession. Longtemps, en effet, la formation des professeurs de mathématiques a pu ignorer entièrement cette notion, qui acquiert cependant une certaine popularité dans la noosphère de l'enseignement des mathématiques grâce au livre de Jean-Claude Carréga, *Théorie des corps. La règle et le compas*, publié en 1981 chez Hermann. Ce n'est qu'avec le

[23] Si, en effet, pour $h \neq 0_{\mathcal{G}}$ et g donnés, on avait $nh \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $H = \{ nh \,/\, n \in \mathbb{N}^* \}$, qui est non vide et majoré par g, aurait une borne supérieure g^*. Soit alors $g^\#$ tel que $g^\# + h = g^*$; comme $g^\# < g^*$, $g^\#$ n'est pas un majorant de H, et il existerait donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^\# < Nh$. On aurait alors $(N + 1)h = Nh + h > g^\# + h = g^*$, en contradiction avec le fait que g^* majore H.

programme de l'option facultative de la première littéraire qui entre en vigueur en septembre 2001 que les nombres constructibles font leur apparition au secondaire, de façon un peu périphérique et, de plus, éphémère, puisque cette notion disparaît du programme à la rentrée 2005. Ce bref épisode aura suffi cependant pour que le CAPES de mathématiques fasse droit pendant quelques années à la question des constructibles, puisque ce thème figure dans la liste des sujets de la deuxième épreuve orale d'admission [24] aux concours 2002, 2003 et 2004. Il s'agit là d'un viatique minimaliste, alors même que, si l'on peut dire, les nombres constructibles constituent une part essentielle des nombres manipulés dans la scolarité obligatoire.

9.3. Bien entendu, le corps des constructibles ne permet pas de satisfaire entièrement les besoins numériques du travail mathématique, et cela dès la classe de 6^e^. C'est ainsi que le nombre π, par exemple, nécessaire pour exprimer la mesure d'un arc de cercle est, on le sait, transcendant. D'une manière plus large, le problème des angles et de la mesure des angles vient compliquer subrepticement le problème du système des nombres nécessaire. Qu'en est-il au juste ? Supposons pour commencer qu'on ne dispose que des nombres constructibles et qu'on n'utilise que les nombres constructibles [25]. Un angle existe alors si et seulement si les coordonnées du point correspondant du cercle trigonométrique sont constructibles. Or si on suppose, comme il est d'usage dès la 6^e^, l'existence d'angles de n degrés, pour les entiers n compris entre 0 et 180, on sort d'emblée du corps des constructibles. On démontre en effet [26]

[24] Par le biais du sujet suivant : « Exemples de problèmes de constructions illustrant les notions de nombres constructibles et de commensurabilité. »

[25] En d'autres termes, on identifie le plan à l'ensemble $\mathcal{C}^2$, où $\mathcal{C}$ est le corps des réels constructibles.

[26] Un angle de $\frac{2\pi}{n}$ radians = $\frac{360}{n}$ degrés ($n \geq 3$) est constructible si et seulement si le polygone régulier à n côtés est constructible, ce qui revient à dire – d'après un théorème de Gauss – que n est de la forme : $n = 2^k p_1 p_2 \ldots p_r$, où $k \in \mathbb{N}$ et où les p_i sont des nombres premiers distincts qui sont des nombres de Fermat (*i.e.* de la forme $p = 1 + 2^{2^m}$). Comme 3 et 5 sont des nombres de Fermat qui sont premiers, on peut alors vérifier que les angles de 1° et de 2° ne sont pas constructibles ($1 = \frac{360}{360}$ et $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$; $2 = \frac{360}{180}$ et $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$), alors que $\theta = 3°$ est constructible ($3 = \frac{360}{120}$ et $120 = 2^3 \times 3 \times 5$). On en déduit alors aisément le résultat mentionné. Il en découle que, hormis l'angle nul et l'angle plat, parmi les angles mesurés par un nombre entier de degrés, seuls existent les angles suivants dans le plan des points constructibles : 3°, 6°, 9°, 12°, 15°, 18°, 21°, 24°, 27°, 30°, 33°, 36°, 39°, 42°, 45°, 48°, 51°, 54°, 57°, 60°, 63°, 66°, 69°, 72°, 75°, 78°, 81°, 84°, 87°, 90°, 93°, 96°, 99°, 102°, 105°, 108°, 111°,

que les seuls angles de n degrés qui sont constructibles sont exactement les multiples entiers de l'angle de 3º. Bien entendu, il existe d'autres angles constructibles que ceux-là : c'est ainsi que, par exemple, les angles moitiés d'angles constructibles étant constructibles (ils s'obtiennent à partir des angles supposés par un simple tracé de bissectrice), l'angle de 22,5º est constructible (puisque les angles de 21º et de 24º le sont). Cela noté [27], qu'en est-il plus généralement des angles qui se mesurent en radians à l'aide d'un multiple rationnel de π (ce qui correspond aux angles dont la mesure en degrés est un rationnel, et, en particulier, un décimal) ? Pour de tels angles θ, on peut montrer que les fonctions trigonométriques – en entendant par là le cosinus, le sinus et la tangente – ont des valeurs *irrationnelles*, sauf dans les cas « triviaux » où elles valent 0 ou $\pm\frac{1}{2}$ ou ± 1 pour ce qui est du cosinus et du sinus, et 0 ou ± 1, pour ce qui est de la tangente. Pour toutes les autres valeurs de θ, les lignes trigonométriques sont irrationnelles. La question de l'irrationalité, peu travaillée dans la formation de deuxième année, a toutefois fait l'objet d'un travail spécifique dans le cadre d'un module de formation [28] assuré pendant de nombreuses années par le même formateur à l'intention des élèves professeurs de première année, qui préparent le CAPES de mathématiques. De la sorte, un certain nombre d'élèves professeurs de deuxième année, c'est-à-dire de professeurs stagiaires, ont été quelque peu familiarisés avec les résultats que l'on vient d'évoquer. Dans les notes du module OEM de l'année 2001-2002, on trouve ainsi une étude – fragmentée entre plusieurs séances successives – qui commence d'abord par établir le résultat suivant, fort classique :

> Corollaire 1. – Si le polynôme $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_{n-1}X + a_n$ à coefficients entiers avec $a_n \neq 0$ admet une racine rationnelle, alors cette racine est entière et divise a_n.

On passe ensuite au cœur de la question, qui occupe alors le développement suivant.

114º, 117º, 120º, 123º, 126º, 129º, 132º, 135º, 138º, 141º, 144º, 147º, 150º, 153º, 156º, 159º, 162º, 165º, 168º, 171º, 174º, 177º.

[27] La question des nombres constructibles semble n'avoir pas été travaillée d'une manière importante dans le séminaire destiné aux professeurs stagiaires de mathématiques. La raison en est sans doute que, ces stagiaires n'ayant pas de classe au-delà de la seconde, cette question n'est pas franchement apparue dans ce dispositif de formation.

[28] Il s'agit du module de formation OEM – Outils d'étude en mathématiques – déjà mentionné au chapitre 2.

On examine ici le cas des réels de la forme cos θ, mais seulement dans un type de cas familier : celui où θ est un *multiple rationnel* de π : $\theta = \frac{p}{q}\pi$ (où $p, q \in \mathbb{N}^*$).

Admettons ici que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme unitaire $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que : $2 \cos n\theta = P_n(2 \cos \theta)$. Prenons alors $n = q$; il vient : $P_q(2 \cos \theta) = 2 \cos(q\theta) = 2 \cos(p\pi) = \pm 2$. Supposons de plus que $\cos \theta \neq 0$; le polynôme $P_q \mp 2$ vérifie les conditions du corollaire 1 et, par suite, le réel $2\cos\theta$ est entier. Comme $-2 \leq 2\cos\theta \leq 2$, on a soit $2\cos\theta = \pm 2$, soit $2\cos\theta = \pm 1$. Il en résulte que, *à l'exception* des cas où $\cos \theta = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$, $\cos \theta = \cos\left(\frac{p}{q}\pi\right)$ *est irrationnel* :

Corollaire 3. – Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $\theta = \frac{p}{q}\pi$. Si $\cos \theta \notin \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, alors cos θ est irrationnel.

Au cours d'une autre séance, le lemme principal admis dans ce qui précède est établi de la façon suivante :

Il reste à prouver l'existence des polynômes unitaires $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tels que

$$2 \cos n\theta = P_n(2 \cos \theta).$$

On a déjà $P_1(X) = X$. Pour $n = 2$, on a vu que $2\cos 2a = (2\cos a)^2-2$, en sorte que $P_2(X) = X^2-2$. La clé est alors l'identité trigonométrique qui généralise l'égalité précédente :

$$2 \cos(n+1)\theta = (2 \cos \theta)(2 \cos n\theta) - 2 \cos (n-1)\theta$$

On l'obtient en additionnant les deux identités suivantes, essentiellement classiques :

$$2 \cos(n+1)\theta = 2 [\cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta]$$

$$2 \cos(n-1)\theta = 2 [\cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta]$$

On a ainsi $P_{n+1}(X) = XP_n(X)-P_{n-1}$, ce qui permet de conclure.

Le résultat établi pour le cosinus sera ensuite étendu au sinus, à travers la remarque ci-après.

Le résultat obtenu pour les réels de la forme $\cos\left(\frac{p}{q}\pi\right)$ permet d'établir un résultat analogue pour les réels de la forme $\sin\left(\frac{p}{q}\pi\right)$. Puisque, en effet, $\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ et que $\frac{\pi}{2} - \theta$ est un multiple rationnel de θ en même temps que θ, sin θ est irrationnel s'il ne prend pas l'une des valeurs $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$.

Enfin, le cas de la tangente fera l'objet des considérations consignées ci-après.

Dans ce qui suit, θ est un multiple rationnel de π. L'égalité classique $\cos 2\theta = \dfrac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ montre que, si $\tan \theta$ est rationnel, il en est de même de $\cos 2\theta$, c'est-à-dire que l'on a $\cos 2\theta = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$. Lorsque $\cos 2\theta = 0$, et puisque $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, on a $\tan \theta = \pm 1$. Quand $\cos 2\theta = 1$, on a $1 - 2 \sin^2\theta = 1$ et donc $\tan \theta = 0$. Quand $\cos 2\theta = -1$, on a $2 \cos^2\theta - 1 = -1$ et donc $\tan \theta$ n'est pas défini. Lorsque, enfin, $\cos 2\theta = \pm\frac{1}{2}$ on a $1 + \tan^2\theta = \pm 2(1 - \tan^2 \theta)$, soit $(1\pm 2)\tan^2\theta = \pm 2 - 1$, c'est-à-dire encore $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$ ou $\tan^2\theta = 3$, soit donc $\tan \theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $\tan \theta = \pm\sqrt{3}$. Lorsque le nombre $\tan \theta$ est défini et ne prend pas l'une des valeurs 0 ou ± 1, $\tan \theta$ est irrationnel.

L'étude n'ira pas au-delà du point de vue de la nature des nombres $\cos \theta$, $\sin \theta$ et $\tan \theta$. Bien entendu, il serait utile de se demander si ces nombres irrationnels sont ou non transcendants. En fait, il est facile de montrer que, si $\theta = \frac{m}{n}\pi$ rad, alors $\cos \theta$, $\sin \theta$ et $\tan \theta$ sont des nombres algébriques – pas nécessairement constructibles, donc, mais pas transcendants non plus [29]. Tout cela, qui relève *a priori* des mathématiques pour l'enseignant, peut, lors qu'on le regarde du point de vue de Sirius, paraître bien éloigné des soucis de la classe. Il n'en est rien, comme l'atteste par exemple la question que voici :

> Je voudrais faire avec les élèves un bilan sur les différentes écritures des nombres rencontrées en 4e : forme décimale, fractions, racines carrées, puissances de 10. Je ne sais pas comment traiter les cosinus. (2003-2004, 4e, semaine 24)

---

[29] Soit le réel $\theta = \frac{2\pi k}{n}$, avec k et n premiers entre eux. En égalant les parties réelles des deux membres de l'égalité $(\cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta)^n = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \sin^{2k}\theta \cos^{n-2k}\theta = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (1 - \cos^2\theta)^k \cos^{n-2k}\theta = 1$, égalité de la forme $P(\cos \theta) = 1$ où $P \in \mathbb{Z}[X]$ est non nul (son coefficient dominant vaut 2^{n-1}), qui montre que $\cos \theta$ est algébrique. Comme $\sin \theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$, il en est de même de $\sin \theta$. De plus, en égalant les parties imaginaires de l'égalité de Moivre, on obtient l'égalité $\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2k+1} \sin^{2k+1}\theta \cos^{n-1-2k}\theta = 0$, dont la division par $\cos^n\theta$ donne $\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2k+1} \tan^{2k+1}\theta = 0$: on en déduit de même que $\tan \theta$ est algébrique.

Les résultats qui précèdent sembleraient indiquer qu'il suffit de passer du corps des réels constructibles au corps des réels algébriques. Mais un autre type de besoins numériques apparaît dès lors qu'on manipule, ainsi qu'on le fait implicitement à partir de la classe de 4e, les fonctions trigonométriques inverses. Lorsque, à partir de la classe de seconde, il faudra indiquer qu'un angle dont le cosinus vaut 0,5 a pour mesure en radians $\frac{\pi}{3}$, force sera de manipuler des nombres réels transcendants, situation qui généralise en l'espèce le cas de l'emploi de π dans le calcul de la longueur d'un cercle. Plus généralement, on peut montrer que lorsque a est un réel algébrique non nul, si $a \neq 1$, alors arccos a, arcsin a et arctan a sont transcendants. Ainsi en va-t-il en particulier lorsque a est rationnel ou constructible. Ce résultat généralise le fait que, par exemple, on a $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. On voit donc que tout un ensemble de besoins numériques conduisent inévitablement vers l'introduction du corps « complet » des nombres réels, ce qui rejoint l'expérience historique. Bien avant d'avoir clarifié les propriétés d'irrationalité, d'algébricité, de constructibilité et de transcendance, les mathématiciens avaient supposé – implicitement puis explicitement – la disponibilité d'un tel système de nombres.

9.4. Quoique bien réelles, les nombreuses obscurités qui, dans la culture des professeurs de mathématiques, affectent la question du système des nombres utilisé, ne doivent pas être l'arbre qui cache la forêt : c'est presque en chaque domaine, en chaque secteur, à propos de chaque thème des programmes de l'enseignement secondaire que surgissent des difficultés *mathématiques* dans l'accomplissement de la mission *didactique* du professeur. La réforme du programme de seconde, à la rentrée 2000, propose une innovation maladroitement étiquetée : à la partie obligatoire du programme est joint un volet constitué de « thèmes d'étude » associés à chacun des trois grands domaines composant le programme – « statistique », « géométrie », « calcul et fonctions » [30]. Le professeur doit travailler avec sa classe, dans une

---

[30] La liste de ce que nous appellerons, suivant en cela la terminologie adoptée dans la formation des élèves professeurs, des thèmes d'études libres (TEL) – par opposition aux thèmes d'études *imposés* (TEI), qui constituent le *« programme commun »* des élèves de seconde – est la suivante. *Statistique* : simulations d'un sondage ; simulations de jeux de pile ou face ; simulations du lancer de deux dés identiques et distribution de la somme des faces ; simulations de promenades aléatoires sur des solides ou des lignes polygonales ; simulations de naissances. *Calcul et fonctions* : calculatrices et grands nombres ; étude détaillée d'un exemple concret de fonction ; sur tableur, explicitation des différentes étapes du calcul d'une formule en appliquant d'une colonne à

certaine liberté didactique, sur au moins un thème d'étude par domaine. Nous nous arrêterons ici, pour terminer, sur le thème « Caractérisation des éléments de $\mathbb{D}$ et de $\mathbb{Q}$, soit en termes de développement décimal fini ou périodique, soit comme quotient irréductible d'entiers (le dénominateur étant ou non de la forme $2^p \times 5^q$) ». Il s'agit là d'une question qui, au moment de sa réintroduction, a cessé depuis longtemps de figurer dans la culture des professeurs de mathématiques : nous pouvons témoigner qu'il était permis, dans les décennies précédentes, d'être lauréat de l'agrégation et d'ignorer entièrement le critère, pourtant trivial, de décimalité d'une fraction d'entiers ! Dans le séminaire du mardi matin, la question est plusieurs fois abordée – en relation précisément avec sa réintroduction en classe de seconde. Les développements qui lui sont consacrés commencent par rappeler qu'il s'agit là d'un thème autrefois présent dans l'enseignement primaire supérieur. À titre d'illustration, les notes du séminaire comportent des extraits d'un manuel d'arithmétique conforme au programme du 26 juillet 1909, extraits que nous reproduisons ci-après.

> 315. – CONSÉQUENCES.
>
> Théorème I. *Le dénominateur de la fraction irréductible égale à la fraction génératrice d'un nombre décimal périodique simple* est premier avec 10 ; *c'est-à-dire qu'il ne renferme ni le facteur 2 ni le facteur 5.*
>
> En effet…
>
> Théorème II. *Le dénominateur de la fraction irréductible égale à la fraction génératrice d'un nombre décimal périodique mixte* n'est pas premier avec 10. *En outre, le plus fort exposant du facteur 2 ou 5 du dénominateur est égal au nombre des chiffres irréguliers.*
>
> En effet…
>
> 316. *Remarque.* – Les théorèmes I et II étant contraires l'un de l'autre, leurs réciproques sont vraies, ainsi qu'il est facile de s'en rendre compte.

---

l'autre une seule opération ; problèmes historiques sur les nombres ; croissance et fonction du temps ; construction, prévision des variations de la somme ou différence de fonctions données par leurs représentations graphiques ; caractérisation des éléments de $\mathbb{D}$ et de $\mathbb{Q}$ **;** fonction affine par morceaux conforme à un tableau de variation ou un tableau de valeurs ; à l'aide d'un traceur de courbes, ajustement fonctionnel d'un tableau de valeurs. *Géométrie* : patrons de pyramides non régulières ; repérage sur la sphère ; exemples de pavages périodiques du plan ; les solides de Platon ; exemples de démonstrations classiques par les aires ; représenter en perspective cavalière et en vraie grandeur une section plane d'un solide de référence dans des cas simples ; reconstitution d'un objet à partir de trois vues ; reconstitution d'un objet à partir d'une suite de coupes parallèles ; empilement de boules et cylindres de même diamètre ; exemples de réseaux dans le plan et l'espace ; puzzle 3D ; projections orthogonales d'une sphère ou d'un disque sur un plan.

I° *Si le dénominateur d'une fraction irréductible est premier avec 10, elle donne naissance par sa conversion en décimale à un nombre décimal périodique simple.*

…

II° *Si le dénominateur d'une fraction irréductible n'est pas premier avec 10, et qu'il renferme d'autres facteurs premiers que 2 et 5, elle donne naissance par sa conversion en décimale à un nombre décimal périodique mixte.*

…

317. RÉSUMÉ. – Si l'on considère une fraction *irréductible* $\frac{b}{a}$ *(sic)*, trois cas peuvent se présenter dans la conversion en décimale.

1° *b ne contient pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5.* – La fraction $\frac{a}{b}$ est alors exactement réductible en décimale : elle donne naissance à un nombre décimal limité.

Exemple : $\frac{33}{40} = \frac{33}{2^3 \times 5} = 0{,}825.$

2° *b ne contient ni le facteur 2 ni le facteur 5.* – La fraction $\frac{a}{b}$ donne alors naissance à un nombre décimal périodique simple.

Exemple : $\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots.$

3° *b contient l'un des facteurs 2 et 5, ou tous les deux, avec d'autres facteurs premiers.* – La fraction $\frac{a}{b}$ donne alors naissance à un nombre décimal périodique mixte ; et le nombre des chiffres irréguliers est égal au plus fort exposant du facteur 2 ou 5 au dénominateur.

Exemple : $\frac{189}{440} = \frac{189}{2^3 \times 5 \times 11} = 0{,}429.54.54.54\ldots.$

Les notes examinées soulignent également que l'un des grands types de problèmes autrefois proposés à un niveau élémentaire consistait à trouver ce que l'on appelle alors la *fraction génératrice* d'un nombre rationnel non décimal donné par son développement périodique illimité. À cela s'ajoute une remarque sur la détermination de la longueur de la partie périodique du développement : cette détermination, lit-on, « était en fait regardée autrefois comme se situant au-delà de l'horizon mathématique des études secondaires ». Le rédacteur des notes indique que, lorsque la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, et b divisible ni par 2 ni par 5, la longueur ℓ de sa partie périodique est égale au plus petit des entiers naturels n tels qu'on ait $10^n \equiv_b 1$. C'est ainsi que, si $b = 11$, on a $10^1 = 10 \equiv_{11} 10$ et $10^2 = 100 = 9\times11 + 1 \equiv_{11} 1$, en sorte que $\ell = 2$, etc. La démonstration de cette caractérisation, en revanche, semble avoir été laissée à l'initiative des participants au séminaire. Le manque dont se fait l'écho le travail du séminaire est patent, classique autant que l'est la solution qui, ici, lui est apportée. Il semble que, de façon durable, répétitive, certaines questions de mathématiques qui constituent le soubassement irremplaçable de l'enseignement secondaire soient mises en jachère, après avoir dûment porté fruits. Ainsi voit-on se multiplier les guérets mathématiques, où la profession ne parvient pas à satisfaire ses besoins de connaissances [31].

Épilogue

Les nombres constituent une part essentielle autant qu'immémoriale de l'univers mathématique. Or, dans le curriculum d'aujourd'hui, cette part est mitée par d'innombrables lacunes que le professeur stagiaire découvre, non sans surprise et sans inquiétude, non sans en être plus ou moins fortement gêné en tout cas, lorsqu'il entreprend, comme il le doit, de l'enseigner. Tout ici semble à rebâtir. L'ancienne construction scolaire, longuement élaborée et mise en œuvre dans l'enseignement primaire, primaire supérieur et secondaire, avec quelques variantes, s'est par pans entiers effondrée. La construction « moderne » des systèmes de nombres, à son apogée vers 1970, n'est plus au secondaire qu'un souvenir. Quant à la construction poussée en avant par les programmes actuels du collège, qui suppose une problématique réaliste de l'activité mathématique, elle n'a jamais été véritablement reçue, comprise et mise en œuvre par la profession. L'écart est alors maximal entre les mathématiques à enseigner et le repérage nécessaire d'un corpus de mathématiques pour l'enseignant qui devrait permettre d'élaborer des mathématiques pour l'enseignement à la fois authentiques épistémologiquement, cohérentes formellement, adéquates didactiquement. À nouveau, le problème, qui reste ouvert, interpelle frontalement la profession. Mais, comme on va le voir dans le chapitre qui suit, là ne s'arrête pas, tant s'en faut, la problématicité du métier dans lequel les lauréats des concours de recrutement ont choisi de s'engager.

[31] Un guéret est une terre labourée mais non ensemencée, et qu'on laisse reposer pendant un an au moins. Les plus démunis allaient y rechercher les rares pousses résultant des anciennes semailles.

Chapitre 5

Au chevet de la classe : le cœur du métier

1. Les professeurs stagiaires et les attentes de la profession

1.1. Les difficultés d'ordre mathématique révélées par les professeurs stagiaires, et qui exposent bien souvent des points faibles du « savoir de la profession » dans laquelle ils entrent, ne doivent pas faire oublier que cette profession même a ses normes, qui sont autant de critères selon lesquels ses membres sont jugés. Au cours de l'année 2000-2001, au début du mois de novembre, les professeurs stagiaires de mathématiques eurent à apprécier par eux-mêmes, sur une échelle allant de 0 à 5, leur adéquation (supposée) à un ensemble d'exigences, présenté sous la forme de 29 « critères », que l'analyse avait permis de dégager d'un corpus de rapports de maîtres de stage étudié dans le cadre d'une recherche récemment conduite à l'époque [1]. Le document soumis aux stagiaires comportait un tableau en 29 lignes, telles les suivantes.

Critère	**/5**
« Tenir le rythme dans le traitement du programme »	
« Donner un enseignement structuré, diversifié, équilibré, adapté »	
« Définir des objectifs d'apprentissage »	

Les 29 critères retenus sont reproduits ci-après. Outre le score qu'il s'attribuait sur chaque critère, chaque stagiaire devait choisir, dans la liste des 29 critères, de 2 à 5 critères sur lesquels il souhaitait progresser durant les mois à venir.

[1] Voir Yves Chevallard et Michèle Artaud, *L'ordinaire des classes et les novations spontanées* (2000), consultable sur Internet à l'adresse http://yves.chevallard.free.fr/.

Le métier et l'établissement « Investissement personnel, dynamisme » « Intégration » **La classe** **– Concevoir l'enseignement à donner** « Préparer ses cours » « Connaître les programmes » « Respecter le programme » « Programmer son enseignement » « Analyser les mathématiques à enseigner » « Moduler le traitement du programme selon la classe » « Bien choisir les techniques » « Bien choisir les documents distribués » « Anticiper les difficultés des élèves » **– Les fonctions didactiques à assurer** « Tenir le rythme dans le traitement du programme » « Donner un enseignement structuré, diversifié, équilibré, adapté » « Définir des objectifs d'apprentissage »	« Présenter les notions » « Mettre en forme les contenus enseignés » « Donner sa place à l'élève dans la gestion de la séance » « Bien calibrer des travaux personnels diversifiés » « Corrections et erreurs » « Contrôler le travail et les connaissances des élèves » **– Gestion de la séance** « Aisance, assurance » « Avoir le contact avec les élèves, avec une distance adéquate » « S'adresser à toute la classe » « Un langage approprié » « Gestion du tableau » « Matériel pédagogique » « Figures géométriques » « Prise de notes » **– D'une séance à l'autre** « Analyser sa pratique »

1.2. Dans le cadre du séminaire du mardi matin, cette enquête semble avoir eu un double objectif : d'une part, forcer la rencontre des élèves professeurs avec une certaine expression des attentes des maîtres de stage ; d'autre part, fournir une matière à questionner alimentant un travail de formation en statistique. À chacun des 47 élèves professeurs stagiaires P_j de la promotion 2000-2001 ayant rempli le questionnaire (la promotion comportait 48 professeurs stagiaires) était ainsi associée une série de 29 données numériques. L'une des questions soulevées à propos de ces données était la suivante : peut-on dire d'un professeur stagiaire ayant telle série de scores qu'il a une bonne (ou une mauvaise) image de lui-même ? À titre d'exemple, voici les scores [2] de l'un des ces élèves professeurs, que l'on désignera par P*.

[2] Les scores de la forme $n + 0{,}5$ correspondent, par convention, à des réponses non entièrement déterminées, où le répondant a situé son appréciation entre le score n et le score $n + 1$.

C_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x_i*	4	5	4	3	4,5	3	1,5	3	2,5	3,5	1,5	5	3	2,5

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
3	4	4	2,5	4	3	4,5	4	3	3	2	3	2,5	3,5	3,5

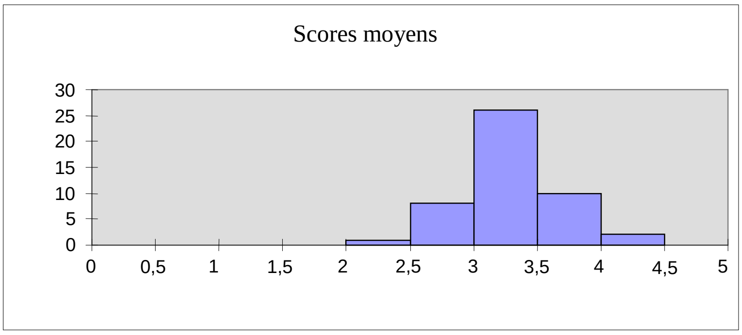
La dynamique du travail amorcé alors conduit à examiner la moyenne des scores de chaque professeur stagiaire P_j. C'est ainsi que P*, par exemple, a une moyenne de 3,29 environ. Peut-on dire alors que P* a une « bonne opinion » de lui-même ? La remarque suivante va conduire à examiner la série des 47 *scores moyens* d'auto-estimation :

Pour déterminer si 3,29 est un « bon » score moyen, il faut en effet le situer *par rapport à la population des scores moyens* : on ne peut le regarder comme *intrinsèquement « bon »*. Il se pourrait, en fait, que, dans cette population, 3,29 soit un score *médiocre*, et même franchement mauvais : il en irait ainsi par exemple si les 46 scores moyens des 46 autres P_j étaient supérieurs ou égaux à 3,5 par exemple ! En d'autres termes, l'appréciation du score moyen de P* est liée à la *distribution* des scores moyens de la population considérée : un score moyen de 3,29 *n'est pas en soi bon ou mauvais*.

La distribution est reproduite ci-après. Les scores moyens y ont été arrondis à la quatrième décimale. Le score moyen de P* est alors 3,2931, ce qui correspond à un total des 29 scores égal à 95,5 – total auxquels arrivent aussi deux autres professeurs stagiaires (en gras ci-après).

2,2414	2,5517	2,6897	2,6897	2,8276	2,8793
2,9655	2,9655	3,0000	3,0172	3,0345	3,0345
3,1379	3,1379	3,1552	3,1897	3,1897	3,2414
3,2414	3,2414	3,2414	3,2586	3,2586	3,2759
3,2759	**3,2931**	**3,2931**	**3,2931**	3,3103	3,3621
3,3621	3,4138	3,4138	3,4138	3,4828	3,5517
3,5862	3,6034	3,6724	3,6897	3,6897	3,7069
3,7759	3,8621	3,9138	4,0690	4,1724	

La médiane de cette série est le score 3,2759, qui est inférieur strictement au score moyen de P*, lequel ne peut donc être regardé comme ayant une *mauvaise* image de lui-même. Mais son image de soi, positive, est toutefois loin d'être euphorique : le score de P* n'appartient pas même aux 40 % des scores les plus élevés. Bien entendu, on peut tenter d'apprécier tel ou tel résultat de manière intrinsèque par rapport à *l'échelle des scores*, et non par rapport à la *population des scores moyens*. De fait, l'histogramme reproduit ci-dessous rappelle clairement que les scores moyens – à une exception près – se situent dans la moitié supérieure de l'échelle des scores.



Sans doute peut-on tirer de là que l'estimation *déclarée* par ces professeurs stagiaires de leur adéquation à ce qui leur est présenté comme des exigences du métier traduit un sentiment général d'être d'ores et déjà *en bonne consonance avec le métier*. On peut bien sûr se demander s'il ne s'agit pas là d'une autosatisfaction *obligatoire* ; si, en d'autres termes, ce sentiment n'est pas « forcé » par la profession elle-même. Il semble en effet que, selon une tradition que la création des IUFM n'aura pas aboli, l'on devienne professeur *d'un coup*, après la réussite à un concours de recrutement, par la nomination par l'autorité de tutelle, au moment où celle-ci se concrétise par l'injonction : « Voici vos classes, à vous de faire ! » On ne se dit pas mathématicien ou anthropologue parce qu'on a fait quelques études en ce domaine, avec soutenance d'un mémoire ou d'un autre à la clé : il est ainsi des domaines où la reconnaissance subjective de sa qualité – de mathématicien, d'anthropologue, etc. – demande plus que l'adoubement symbolique par un diplôme ou une institution ; des domaines où une maturation est nécessaire pour qu'on en vienne à se regarder comme ceci ou cela – comme anthropologue ou mathématicien, par exemple. Il semble, par contraste, que certains métiers ne laissent pas à leurs praticiens la liberté de cette venue progressive à une identité subjective qui se construit, se mûrit dans une assez longue période de temps. En un tel cas, où il n'est pas permis de douter de son appartenance, il n'est guère permis non plus d'avouer sans une conscience *douloureuse* qu'on n'est pas en adéquation avec les critères les plus communément explicités pour définir un « bon professionnel ». Ici, le minimum de la série, soit le score moyen de 2,24, est, d'un tel point de vue, chose rare : le professeur stagiaire concerné, P_{min}, s'est attribué 7 fois la note 1 et 10 fois la note 2, même s'il ne s'est jamais attribué la note 0 – ce qui, sans doute, serait un aveu de l'illégitimité de sa présence dans le métier[3] ; mais il n'a jamais retenu la note 5, et ne s'est attribué que deux fois la note 4. Notons en revanche que la note 3 est mise en correspondance avec 10 des 29 critères : cela nous rappelle que, même si l'appréciation est (relativement) dépréciative, elle n'est pas catastrophique – et il y aurait là matière à reprendre la remarque que nous venons de faire à propos du score nul. À l'autre extrémité de la série, l'élève professeur P_{max} qui croit pouvoir s'attribuer un score moyen de 4,17 paraît beaucoup plus « aberrant » : pour parvenir à un tel score moyen, en effet, il a dû s'attribuer 18 fois un score compris entre 4 et 4,5, et 6 fois la note 5 ; il n'a jamais choisi les scores 0, 1, 2, le plus petit score auto-attribué étant 3.

P_{min}	
Scores	*Effectifs*
0	0
1	7
2	10
3	10
4	2
5	0

P_{max}	
Scores	*Effectifs*
0	0
1	0
2	0
3	2
3,5	3
4	13
4,5	5
5	6

S'attribuer 24 fois sur 29 une note supérieure ou égale à 4 suppose une appréciation de soi très hypertrophiée et une entrée imaginaire plutôt que réelle dans le métier : le processus d'identification subjective instantanée, dont nous avons avancé qu'il était forcé par la profession, semble ici porté à un point d'incandescence.

1.3. L'adéquation exprimée est toutefois inégale selon les critères. Considérons le tableau suivant et situons d'abord les scores de P* par rapport aux moyennes m_i des scores relatifs aux critères C_i (on note s_i l'écart type de la série correspondante des scores).

		P*	*m*	*s*	*m–s*	*m+s*
C_1	Investissement personnel, dynamisme	4	4,11	0,62	3,49	4,72
C_2	Intégration	5	3,34	0,89	2,45	4,23
C_3	Préparer ses cours	4	3,78	0,83	2,95	4,61
C_4	Connaître les programmes	3	3,41	0,82	2,59	4,24
C_5	Respecter les programmes	4,5	4,06	1,00	3,07	5,06
C_6	Programmer son enseignement	3	2,96	1,01	1,94	3,97
$\mathbf{C_7}$	**Analyser les mathématiques à enseigner**	**1,5**	**3,06**	**0,91**	**2,15**	**3,98**

[3] Sur l'ensemble des scores des 47 répondants, le score nul est auto-attribué trois fois sur $47 \times 29 = 1363$ scores, soit dans 0,22 % des cas environ.

C_8	Moduler le traitement du programme selon la classe	3	3,40	0,77	2,63	4,17
C_9	Bien choisir les techniques	2,5	3,14	0,69	2,45	3,83
C_{10}	Bien choisir les documents distribués	3,5	3,52	0,77	2,75	4,29
C_{11}	**Anticiper les difficultés des élèves**	**1,5**	**2,44**	**0,98**	**1,46**	**3,41**
C_{12}	Tenir le rythme dans le traitement du programme	5	3,18	0,91	2,27	4,09
C_{13}	Donner un enseignement structuré, diversifié…	3	2,97	0,77	2,20	3,74
C_{14}	Définir des objectifs d'apprentissage	2,5	3,07	0,82	2,25	3,90
C_{15}	Présenter les notions	3	3,32	0,75	2,57	4,07
C_{16}	Mettre en forme les contenus enseignés	4	3,11	0,90	2,20	4,01
C_{17}	Donner sa place à l'élève dans la gestion de la séance	4	3,53	0,87	2,67	4,40
C_{18}	Bien calibrer des travaux personnels diversifiés	2,5	3,01	0,75	2,26	3,76
C_{19}	Corrections et erreurs	4	3,30	0,88	2,42	4,18
C_{20}	Contrôler le travail et les connaissances des élèves	3	3,30	0,73	2,57	4,02
C_{21}	Aisance, assurance	4,5	3,60	0,73	2,87	4,32
C_{22}	Avoir le contact avec les élèves, avec une distance adéquate	4	3,02	0,85	2,17	3,87
C_{23}	S'adresser à toute la classe	3	3,26	0,76	2,49	4,02
C_{24}	Un langage approprié	3	3,37	0,72	2,65	4,09
C_{25}	Gestion du tableau	2	3,48	0,86	2,62	4,34
C_{26}	Matériel pédagogique	3	2,74	0,79	1,95	3,54
C_{27}	Figures géométriques	2,5	3,03	0,77	2,26	3,81
C_{28}	Prise de notes	3,5	3,33	0,73	2,60	4,06
C_{29}	Analyser sa pratique	3,5	3,60	0,75	2,85	4,34

On voit par exemple que P* se regarde comme insuffisant vis-à-vis de C_7 (« Analyser les mathématiques à enseigner ») : la moyenne des scores est ici $m_7 = 3{,}06$, avec pour écart type $s_7 = 0{,}91$, en sorte que $x_{7*} = 1{,}5$ est inférieur à $m_7 - 1{,}5s_7 = 1{,}69$. En fait, 43 des 47 répondants (soit 91,5 % environ) se sont attribué un score strictement supérieur à celui de P*. On aura noté aussi que P* s'attribue le même score à propos du critère C_{11} (« Anticiper les difficultés des élèves ») ; mais cette fois il s'agit d'un critère dont la moyenne est sensiblement plus faible : on a $m_{11} = 2{,}44$, $s_{11} = 0{,}98$ et donc $x_{11*} = 1{,}5 > m_{11} - s_{11}$. Cela noté, ils sont tout de même 38 sur 47 (soit près de 81 %) à s'être attribué un score supérieur à celui de P*. Sur l'ensemble des professeurs stagiaires qui ont répondu, quels sont donc les critères les mieux classés ? Le critère C_{11} – « Anticiper les difficultés des élèves » – est classé bon dernier. Là-dessus, P* suit le groupe plutôt qu'il ne s'en distingue. Le critère C_7 – « Analyser les mathématiques à enseigner » – est mieux placé : 22^{e} sur 29, et P*, là encore, ne fait pas figure de « point aberrant ». Il est instructif de regarder alors le classement des 29 critères, ce que le tableau ci-après fait clairement apparaître [4].

Rang	Critères		Moyennes
1	C_1	Investissement personnel, dynamisme	4,11
2	C_5	Respecter les programmes	4,06
3	C_3	Préparer ses cours	3,78
4,5	C_{21}	Aisance, assurance	3,60
4,5	C_{29}	Analyser sa pratique	3,60
6	C_{17}	Donner sa place à l'élève dans la gestion de la séance	3,53
7	C_{10}	Bien choisir les documents distribués	3,52
8	C_{25}	Gestion du tableau	3,48
9	C_4	Connaître les programmes	3,41
10	C_8	Moduler le traitement du programme selon la classe	3,40
11	C_{24}	Un langage approprié	3,37
12	C_2	Intégration	3,34
13	C_{28}	Prise de notes	3,33
14	C_{15}	Présenter les notions	3,32
15,5	C_{19}	Corrections et erreurs	3,30
15,5	C_{20}	Contrôler le travail et les connaissances des élèves	3,30
17	C_{23}	S'adresser à toute la classe	3,26
18	C_{12}	Tenir le rythme dans le traitement du programme	3,18
19	C_9	Bien choisir les techniques	3,14
20	C_{16}	Mettre en forme les contenus enseignés	3,11
21	C_{14}	Définir des objectifs d'apprentissage	3,07
22	C_7	Analyser les mathématiques à enseigner	3,06
23	C_{27}	Figures géométriques	3,03
24	C_{22}	Avoir le contact avec les élèves, avec une distance adéquate	3,02
25	C_{18}	Bien calibrer des travaux personnels diversifiés	3,01
26	C_{13}	Donner un enseignement structuré, diversifié…	2,97
27	C_6	Programmer son enseignement	2,96
28	C_{26}	Matériel pédagogique	2,74
29	C_{11}	Anticiper les difficultés des élèves	2,44

Ce classement, que nous avons commencé de commenter en partant des critères auxquels les professeurs stagiaires disent satisfaire le moins, sera examiné maintenant en partant des critères les mieux classés. Le critère qui obtient le plus fort score moyen est C_1, « Investissement personnel, dynamisme ». Cette appréciation souligne manifestement le désir

[4] Dans ce qui suit, et selon l'usage en statistique (voir par exemple Siegel 1956, p. 206), les critères ex æquo par rapport à une certaine variable ordinale *X* (score moyen, etc.) se voient attribués pour rang la moyenne arithmétique des rangs qu'ils occupent ensemble dans le classement.

d'adéquation à un métier dont on a vu, dans le chapitre 1 de ce mémoire, que ceux qui l'exercent le regardent comme supposant une grande énergie et un investissement sans faille – ce qui n'est peut-être pas si évident pour qui regarde le métier à quelque distance : il est d'autant plus frappant que ces jeunes professeurs aient identifié une exigence apparemment emblématique, mais « interne », de la profession qu'ils rejoignent. Les deux critères suivants – « Respecter les programmes », « Préparer ses cours » – sont on ne peut plus traditionnels, en cela qu'ils énoncent des principes du métier, même si l'on n'ignore pas que ces exigences peuvent n'être qu'imparfaitement respectées. Soulignons que la référence aux programmes, formulée de façon toute traditionnelle (il s'agit de les « respecter »), voit peut-être son rang amélioré du fait que la formation à l'IUFM (et par contiguïté « sur le terrain », c'est-à-dire dans le travail mené avec le maître de stage) insiste non seulement sur l'importance d'être attentif aux programmes, mais encore sur le *devoir* d'en faire l'un des points d'appui essentiels de l'enseignement à prodiguer. Il est remarquable qu'un autre critère en apparence très voisin, le critère C_4, « Connaître les programmes », soit sensiblement moins bien placé – il figure au 9e rang. Traditionnellement, prétendre *respecter* les programmes n'est en effet pas la même chose que les *connaître* ! La clinique du système d'enseignement des mathématiques montre quantité d'exemples où les programmes, invoqués par certains professeurs pour justifier la place donnée dans leur enseignement à tel développement (ou, au contraire, le fait d'en écarter tel ou tel élément) sont en fait mal connus de ceux qui s'en autorisent ainsi. De là, sans doute, la différence imprimée aux scores selon qu'ils se réfèrent au critère C_5 (« Respecter les programmes ») ou au critère C_4 (« Connaître les programmes »), alors même que ces critères se succédaient dans la liste proposée lors de l'enquête. Par rapport à ces considérations, le critère C_{29} – « Analyser sa pratique » –, classé au rang 4,5, rend un son beaucoup plus « contemporain » : il apparaît comme témoignant de la sensibilité des professeurs stagiaires enquêtés à un certain « air du temps » professionnel, alors même que, si la formation reçue met évidemment l'accent sur l'analyse des *praxéologies* professionnelles, leur déconstruction et leur reconstruction subséquentes, elle ne se fait pas l'écho du slogan alors récemment répandu concernant le « praticien réflexif », non plus que des pratiques de formation qui tentent de s'articuler à ce slogan [5]. Au même rang que l'analyse de la pratique, on affirme ensuite faire montre d'*aisance* et d'*assurance*. Au rang suivant, le 6e, on dit donner

[5] Sur cette question, voir Yves Chevallard, *« Analyse des pratiques professionnelles », dites-vous ? Notes pour une analyse praxéologique de l'analyse de pratiques* (2002), consultable sur Internet à l'adresse http://yves.chevallard.free.fr/.

sa place à l'élève dans l'activité de la classe. En ces deux derniers cas, on retrouve l'expression plus ou moins emphatique d'un désir d'adéquation au métier. Les documents distribués, la gestion du tableau sont à l'avenant. Des exigences classiques, mais dont la maîtrise ne va pas de soi, sont alors mises en avant : adapter à la classe le traitement du programme, user d'un langage approprié en sont deux exemples. L'intégration dans l'établissement est classée au 12e rang : si la chose demeure parfois un peu problématique, elle semble d'ores et déjà bien engagée. On voit pourtant que, jusqu'ici, l'identification au métier se fait par ce qu'on peut regarder comme des traits externes, qui ne touchent pas au *cœur* du métier, mais à ses entours – quelque importants que soient ces derniers. La transition se situe après le 13e rang, où le classement fait apparaître le critère de la prise de notes – il faut entendre par là la capacité du professeur à faire que les élèves prennent des notes, ne « décrochent » pas (sur ce point au moins). On est là encore dans la périphérie du cœur du métier ; mais les critères suivants vont nous faire entrer dans l'intimité de l'activité en classe, saisie du point de vue du professeur : présenter les notions, mener à bien les corrections et travailler sur les erreurs, contrôler le travail et les connaissances des élèves sont des critères qui relèvent certainement de ce point de vue : ils occupent les rangs 14 et 15,5. À l'instar des maîtres de stage, la formation prodiguée insiste, on le sait, sur des exigences certes génériques, mais qui se spécifient aux contenus à enseigner : il faut s'adresser à toute la classe (alors que nombre de débutants, rappelons-le, semblent en être incapables) et, dans la durée, il faut « tenir le rythme » qui permet de faire avancer le temps didactique de manière adéquate. Nous sommes là aux rangs 17 et 18. Les critères suivants renvoient davantage à des aspects du travail du professeur sans doute ressentis comme un peu plus à l'arrière-plan pour un regard évaluateur (alors que le fait de s'adresser à toute la classe se voit lors d'une visite *in situ* et que le cahier de textes de classe témoigne que le rythme est plus ou moins bien tenu) : il faut donc – dans un certain désordre – « bien choisir les techniques », « mettre en forme les contenus enseignés », « définir des objectifs d'apprentissage », « analyser les mathématiques à enseigner », et puis encore s'appliquer à bien dessiner les figures géométriques au tableau – afin d'obtenir que les élèves fassent de même sur leur cahier. Cette dernière exigence, qu'on pourrait juger *a priori* toute simple, marque sans doute une frontière dans la professionnalisation : un certain amateurisme « grand style » conduit en effet à rechigner devant cette humble exigence du métier, à laquelle on est parfois d'autant plus tenté de se soustraire que le fait de disposer dans la classe du matériel nécessaire suppose souvent une grande vertu ! Tous ces critères, sur lesquels les professeurs stagiaires s'accordent tout de même, globalement, une note supérieure à 3 sur 5 (le critère « Figures géométriques » occupe le 23e rang, avec une moyenne de 3,03) sont tout de même jugés un peu mieux satisfaits que les trois critères qui suivent, et qui peuvent apparaître, à des débutants, typiques de ce qu'un professeur *aguerri* a dû apprendre à faire : tout d'abord, « avoir le contact avec les élèves, avec une distance adéquate » ; ensuite, bien calibrer les travaux proposés aux élèves ; enfin, donner à son enseignement une lisibilité que permet une bonne structuration, sans pour autant en réduire la diversité (laquelle doit répondre à la diversité des élèves). La difficulté à programmer son enseignement, qui occupe l'antépénultième place, constitue pour des débutants un obstacle qu'ils ne sauraient nier : ils ne le nient pas. La question de l'emploi, voire du bon emploi des matériels pédagogiques relève sans doute de la même catégorie d'imperfection. Enfin le critère classé bon dernier, « anticiper les difficultés des élèves », qui, dans un classement thématique, devrait aller avec les critères C_{13}, C_{18} et C_{22} (classés respectivement aux 26e, 25e et 24e rangs) témoigne bien du fait que, quel que soit le désir de s'identifier vite – et sans doute trop vite – à ce qu'on croit être consubstantiel au métier, il est des mystères de la vie d'une classe qui, en cette étape de la formation, conservent leur opacité. Sans doute le souci d'*anticiper* les difficultés prêtées aux élèves relève-t-il d'un certain leurre : on semble tout près de croire que la difficulté correspondante n'en serait plus une pour le professeur chevronné, alors que la clinique de l'enseignement des mathématiques montre sans façon que l'accord parfait est rare, et vite mis en pièce dès lors qu'un professeur reçoit la responsabilité d'un niveau où il n'a pas enseigné depuis longtemps, ou d'un type de public dont il est demeuré jusque-là éloigné. Soulignons en outre la formulation psychologisante qui, tout à la fois, épaissit le mystère et semble en creux désigner le lieu où sa résolution pourrait advenir – la connaissance d'une supposée « psychologie de l'enfant » (ou de l'adolescent) qui ferait connaître à l'avance, hors de toute analyse didactique, l'agir futur des élèves. Sans doute n'est-ce pas là le point de vue des maîtres de stage, puisque le critère en question répond, dans l'enquête que nous avons évoquée, à ce propos d'un conseiller pédagogique à l'endroit du travail de son stagiaire :

> P a pris au fil du stage l'habitude d'analyser soigneusement chaque notion nouvelle en termes de pré-requis, de types de tâches, mais le manque d'expérience l'a parfois empêchée de pointer les véritables obstacles que les élèves rencontreraient durant l'étude.

Le lestage didactique du propos est ici très net. Mais de l'abord « psychologique » spontané que nous prêtons aux enquêtés à la problématisation didactique qui devrait advenir, le chemin peut être long.

1.4. On peut songer à classer les critères en examinant ceux sur lesquels les professeurs stagiaires enquêtés souhaiteraient progresser de façon préférentielle : dans le tableau ci-après, les critères sont classés, en l'espèce, selon le nombre de fois où ils sont cités à ce titre par les 47 enquêtés.

Rang	**Critère**		**Nombre de citations**
1	C_{11}	Anticiper les difficultés des élèves	21
2,5	C_{22}	Avoir le contact avec les élèves, avec une distance adéquate	15
2,5	C_6	Programmer son enseignement	15
4	C_{12}	Tenir le rythme dans le traitement du programme	12
5	C_{19}	Corrections et erreurs	11
6	C_{13}	Donner un enseignement structuré, diversifié…	10
7	C_7	Analyser les mathématiques à enseigner	9
9	C_{14}	Définir des objectifs d'apprentissage	8
9	C_{18}	Bien calibrer des travaux personnels diversifiés	8
9	C_{26}	Matériel pédagogique	8
11,5	C_{25}	Gestion du tableau	7
11,5	C_{23}	S'adresser à toute la classe	7
14	C_{29}	Analyser sa pratique	6
14	C_{15}	Présenter les notions	6
14	C_{20}	Contrôler le travail et les connaissances des élèves	6
17,5	C_3	Préparer ses cours	4
17,5	C_{21}	Aisance, assurance	4
17,5	C_{17}	Donner sa place à l'élève dans la gestion de la séance	4
17,5	C_8	Moduler le traitement du programme selon la classe	4
22	C_4	Connaître les programmes	3
22	C_{24}	Un langage approprié	3
22	C_9	Bien choisir les techniques	3
22	C_{16}	Mettre en forme les contenus enseignés	3
22	C_{27}	Figures géométriques	3
25	C_{28}	Prise de notes	2
26	C_1	Investissement personnel, dynamisme	1
28	C_5	Respecter les programmes	0
28	C_{10}	Bien choisir les documents distribués	0
28	C_2	Intégration	0

Les deux classements obtenus – par score moyen croissant et par nombre de citations décroissant – ont des physionomies voisines, tout en présentant de multiples inversions que montre le tableau suivant et qu'exhibe le graphique des croisements qui s'en déduit [6].

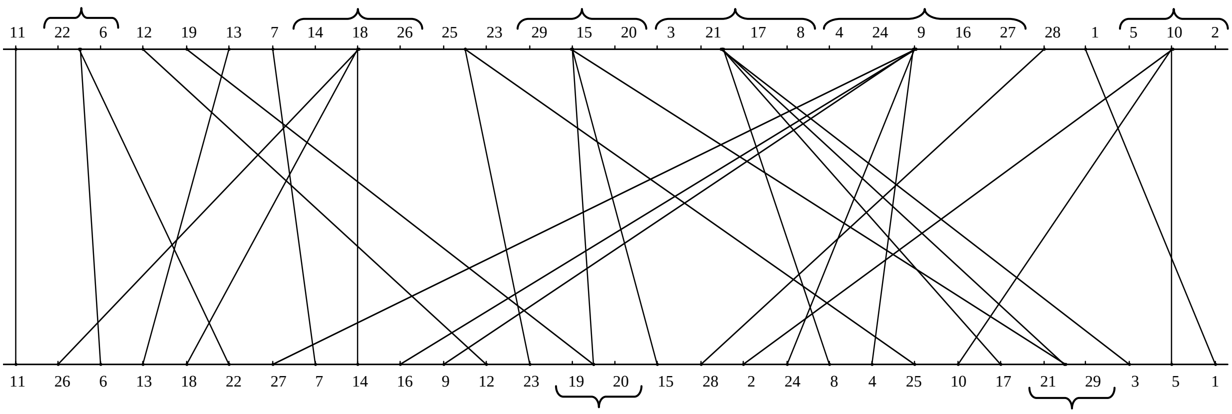
Critère		Rang par score moyen croissant	Rang par nombre de citations décroissant
C_{11}	Anticiper les difficultés des élèves	1	1
C_{26}	Matériel pédagogique	2	9
C_6	Programmer son enseignement	3	2,5
C_{13}	Donner un enseignement structuré, diversifié…	4	6
C_{18}	Bien calibrer des travaux personnels diversifiés	5	9
C_{22}	Avoir le contact avec les élèves, avec une distance adéquate	6	2,5
C_{27}	Figures géométriques	7	22
C_7	Analyser les mathématiques à enseigner	8	7
C_{14}	Définir des objectifs d'apprentissage	9	9
C_{16}	Mettre en forme les contenus enseignés	10	22
C_9	Bien choisir les techniques	11	22
C_{12}	Tenir le rythme dans le traitement du programme	12	4

---

[6] La « corrélation » entre les deux classements peut être mise en évidence par le calcul du « τ de Kendall ». Celui-ci est donné, lorsqu'il y a des ex æquo, par l'expression $\tau = \dfrac{S}{\sqrt{N(N-1)/2 - T}\sqrt{N(N-1)/2 - T'}}$, où N est l'effectif des individus classés (on a ici $N = 29$), où S est égal, après rangement des critères selon l'ordre croissant du premier classement, à la somme des « scores » assignés aux paires du second classement – le « score » d'une paire est égal à ± 1 selon que ses éléments sont dans l'ordre croissant ou non – et où T et T' sont des termes correcteurs liés à la présence d'ex æquo respectivement dans le premier classement et dans le second classement : voir là-dessus Siegel, *op. cit.*, p. 217-219. On a en l'espèce : $T = \binom{2}{2} + \binom{2}{2} = 2$ et $T' = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{3}{2} = 27$. Par ailleurs il vient : $S = (28-0) + (19-6) + (25-0) + (22-3) + (19-4) + (23-0) + (5-13) + (19-2) + (18-2) + (5-11) + (5-11) + (17-0) + (14-1) + (15-0) + (11-1) + (11-1) + (4-8) + (0-9) + (3-6) + (4-2) + (3-5) + (7-0) + (0-5) + (2-1) + (2-1) + (3-0) + (2-0) + (0-1) + (0-0) = 193$. On a donc $\tau = \dfrac{193}{\sqrt{29(29-1)/2-2}\sqrt{29(29-1)/2-27}} = \dfrac{193}{\sqrt{404 \times 379}} \approx 0{,}49$. Pour $N > 10$, τ suit approximativement une loi normale de moyenne nulle et d'écart type $\sigma = \sqrt{\dfrac{2(2N+5)}{9N(N-1)}}$, soit ici $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{58}}$, en sorte que $z = \dfrac{\tau}{\sigma} = \dfrac{193\sqrt{58}}{\sqrt{404 \times 379}} \approx 3{,}76\ldots$ Sous l'hypothèse d'absence de liaison entre les deux classements, la probabilité d'observer une valeur de z supérieure à 3,76 est inférieure à 10^{-4} : on peut donc rejeter cette hypothèse.

C_{23}	S’adresser à toute la classe	13	11,5
C_{19}	Corrections et erreurs	14,5	5
C_{20}	Contrôler le travail et les connaissances des élèves	14,5	14
C_{15}	Présenter les notions	16	14
C_{28}	Prise de notes	17	25
C_{2}	Intégration	18	28
C_{24}	Un langage approprié	19	22
C_{8}	Moduler le traitement du programme selon la classe	20	17,5
C_{4}	Connaître les programmes	21	22
C_{25}	Gestion du tableau	22	11,5
C_{10}	Bien choisir les documents distribués	23	28
C_{17}	Donner sa place à l’élève dans la gestion de la séance	24	17,5
C_{21}	Aisance, assurance	25,5	17,5
C_{29}	Analyser sa pratique	25,5	14
C_{3}	Préparer ses cours	27	17,5
C_{5}	Respecter les programmes	28	28
C_{1}	Investissement personnel, dynamisme	29	26

Graphique des croisements



Plusieurs commentaires méritent d’être explicités. La priorité absolue est donnée au critère C_{11}, « Anticiper les difficultés des élèves ». Sans doute peut-on voir là une confirmation de l’analyse proposée plus haut : s’il y a certainement un aspect instrumental dans le souhait de progresser en la matière, le nombre de citations recueillies résulte aussi, croyons-nous, du statut donné à la capacité invoquée, regardée comme étant au cœur du savoir-faire du professeur chevronné. Le contraste est à cet égard évident avec le critère C_{26}, qui concerne l’utilisation des instruments et appareils auxquels peut recourir l’activité de la classe (instruments de tracé en géométrie, calculatrice, rétroprojecteur, vidéoprojecteur, etc.) Alors en effet que le premier indicateur retenu pour classer les critères – la valeur du score moyen – classe ce critère en 2^{e} position (après le critère C_{11}) sur une échelle qui va de la non-satisfaction à la satisfaction des critères, le nombre de citations le fait apparaître en 9^{e}

position. Pour prendre un autre exemple du même phénomène, le critère C_{27}, qui concerne le dessin au tableau des figures géométriques, classé en 7e position par son score moyen, est rétrogradé ici à la 22e place ! Si, à propos du bon usage des matériels pédagogiques, on peut invoquer le fait qu'il s'agirait là de gestes regardés comme peu spécifiques du métier de professeur de mathématiques, y compris quand il s'agit d'utiliser une calculatrice ou des instruments de dessin, la considération du tracé des figures, que la tradition associe organiquement à l'activité du professeur de mathématiques, porte à penser qu'il y a là en vérité une part de l'activité professorale sur laquelle, sans être encore au point, on pense pouvoir progresser en quelque sorte « sur le tas », sans l'aide d'une formation formelle. Les deux sortes de critères s'opposent en outre, croyons-nous, du point de vue de la « noblesse » des activités auxquelles ils renvoient : prévoir les difficultés des élèves est, à cet égard, d'une autre veine que le fait de tracer proprement une configuration de Thalès ou de gérer l'emploi des calculatrices pour exécuter un programme de calcul un tant soit peu complexe ! Le déclassement des critères C_{26} et (surtout) C_{27} est un schéma que l'on retrouve à plusieurs reprises. C'est ainsi que C_{16}, « Mettre en forme les contenus enseignés », qui occupe le 10e rang des scores moyens croissants, est renvoyé à la 22e place du classement par le nombre de citations. De même, le critère C_9, « Bien choisir les techniques », passe du 11e score moyen au 22e rang pour le nombre de citations. D'autres cas de déclassement pourraient encore être cités : la prise de notes (C_{28}) et l'intégration (C_2), qui occupaient respectivement les places 17 et 18 du classement par score moyen croissant, se trouvent reléguées à la 25e et 28e (et dernière place) dans le classement par nombre de citations – la prise de notes étant citée deux fois, et l'intégration n'étant jamais citée. Sans doute peut-on interpréter ces déclassements, là encore, comme touchant des capacités moins exposées au débat, sur lesquelles la pression est moindre dans la culture de la profession comme dans la culture de la formation à la profession, et dans lesquelles un progrès spontané peut être attendu du seul fait que l'on enseigne. Certains critères connaissent un sort inverse : quoique leur score moyen soit relativement élevé, et donc qu'ils se situent assez loin dans le classement par score moyen croissant, le nombre de citations dont ils font l'objet ramène sur eux l'attention, dans une perspective de progrès professionnel. De façon certes modeste, le critère C_{22}, « Avoir le contact avec ses élèves, avec une distance adéquate », que son score moyen situe à la 6e place est propulsé au rang 2,5 par le nombre de citations qu'il reçoit. Plus nettement, le critère C_{12}, « Tenir le rythme dans le traitement du programme », situé au 12e rang des scores moyens croissants, vient en 4e position pour le nombre des citations. Les critères C_{19} (« Corrections et erreurs ») et C_{20} (« Contrôler le travail est les connaissances des élèves ») ont le même score moyen, qui les situent au rang 14,5 ; mais le nombre de citations va les départager : alors que C_{20} conserve son rang (il est 14e pour le nombre des citations), C_{19} est ramené au 5e rang des priorités des enquêtés. L'étude des questions formulées dans le cadre du séminaire du mardi matin montre surabondamment, de fait, que la question des corrections est un point extrêmement sensible pour ces professeurs débutants, et constitue la source de beaucoup de frustrations : bien qu'ils se jugent positivement sur ce critère (le score moyen est d'environ 3,3), ils éprouvent un besoin de progresser à la mesure de leur désarroi. La gestion du tableau (C_{25}) est, on le sait, dans la culture traditionnelle du métier, un critère important, promu par des générations d'inspecteurs ! Il n'est donc qu'à demi surprenant de voir ici le critère C_{25}, placé au 22e rang des scores moyens croissants, faire un bond spectaculaire pour se placer au rang 11,5 pour le nombre de citations. D'autres remontées sont encore à signaler : « Analyser sa pratique » (C_{29}), dont le score moyen est proche de 3,6, ce qui lui assure le rang 25,5 des scores moyens croissants, remonte au 14e rang pour le nombre des citations, ce qui accrédite l'idée d'une pression culturelle sur ce critère. Plus discrètement, la capacité de « préparer ses cours » (C_3), que l'on avait déclaré bien maîtriser (avec un score moyen proche de 3,8, en 27e position), n'en remonte pas moins sensiblement (au rang 17,5) pour le nombre de citations. Bien entendu, comme le souligne le responsable du séminaire, chacun des critères n'est soutenu que par un petit nombre de citations, y compris le critère C_{11}, qui recueille 21 citations sur les 47 possibles, soit un peu moins de 45 %. Et sans doute serait-il délicat d'avancer les ébauches d'analyse que nous venons d'expliciter si les mouvements de déclassement et de reclassement commentés ici n'étaient pas interprétables – et confortés – à partir d'autres points de vue sur la culture du métier et sur la « subculture » des professeurs stagiaires enquêtés. C'est, au reste, par d'autres outils d'exploration que nous poursuivrons maintenant l'investigation amorcée.

2. Un passé qui ne passe pas : DM & DS

2.1. Les exigences des maîtres de stage se formulent dans un vocabulaire qui atténue le caractère crucial des types de situations que le professeur doit concevoir et réaliser dans la classe. « Présenter les notions », expression qui étiquette le critère C_{15} de l'enquête précédente, est ainsi une manière de dire empruntée aux maîtres de stage, qui euphémise ce qu'en même temps elle prétend désigner : le problème de l'entrée des élèves dans l'intelligence de contenus mathématiques déterminés. Il s'agit là, en vérité, du problème central, dont plusieurs essais de résolution ont été historiquement mis en œuvre à grande échelle dans le système scolaire. Dans la formation qui leur est donnée, les professeurs stagiaires de mathématiques sont, sur ce problème, destinataires d'un certain nombre d'analyses « macro-didactiques » que nous présenterons ici rapidement afin de mieux situer certains obstacles qu'ils sont amenés à affronter au cours de leur année de formation à l'IUFM d'Aix-Marseille [7].

2.2. Le premier paradigme organisateur considéré est celui des lycées du XIXe siècle, où le travail scolaire est structuré par l'opposition entre *la classe* et *l'étude*, et où le temps passé en étude, au sein de l'établissement, l'emporte très largement sur le temps passé en classe [8]. La classe, en outre, n'est nullement le lieu de ce qu'on nomme aujourd'hui, dans le jargon professoral, le « cours » : il s'agit alors d'un point de rendez-vous entre deux périodes passées en étude, où l'on corrige les devoirs faits par les élèves, dont ils ont remis copie au professeur, qui les a visés, annotés, avant d'en proposer une correction en classe et de fournir aux élèves leur ration de nouveaux devoirs à faire. Le travail du professeur ressemble ici à l'activité du « régent », figure déjà presque obsolète mais dont les fonctions didactiques ne sont pas pour autant périmées, puisqu'elles demeurent encore aujourd'hui, comme le rappelle de façon concise l'article L912-1 du code de l'éducation que nous reproduisons ci-après.

> Les enseignants sont responsables de l'ensemble des activités scolaires des élèves. Ils travaillent au sein d'équipes pédagogiques ; celles-ci sont constituées des enseignants ayant en charge les mêmes classes ou groupes d'élèves ou exerçant dans le même champ disciplinaire et des personnels spécialisés, notamment les psychologues scolaires dans les écoles. Les personnels d'éducation y sont associés.
> Les enseignants apportent une aide au travail personnel des élèves et en assurent le suivi. Ils procèdent à leur évaluation. Ils les conseillent dans le choix de leur projet d'orientation en collaboration avec les personnels d'éducation et d'orientation. Ils participent aux actions de formation continue des adultes et aux formations par apprentissage.
> Ils contribuent à la continuité de l'enseignement sous l'autorité du chef d'établissement en assurant des enseignements complémentaires.

---

[7] Nous le ferons en suivant l'une des « notices » qui complètent les notes du séminaire du mardi matin. Intitulée *L'espace de l'étude*, et diffusée aux stagiaires de la promotion 2005-2006, elle rassemble et organise un grand nombre de données, notamment historiques, sur la question de l'organisation de l'étude scolaire. Cette notice est consultable sur Internet à l'adresse http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/index.html, à la rubrique *Notices* de l'*Encyclopédie du professeur*.

[8] Selon Antoine Prost, en 1876 encore les lycéens passent ainsi chaque jour de la semaine 4 heures en classe pour presque 8 heures en étude.

> Leur formation les prépare à l'ensemble de ces missions.

Mais ce paradigme classe/étude, traditionnel, va se trouver en quelque sorte dynamité par la promotion d'un autre paradigme venu des institutions du haut enseignement : le *cours*, c'est-à-dire le « cours magistral ». La notice mentionnée présente ainsi ce bouleversement :

> … autour de 1880 s'opère un basculement pédagogique qui, au primat du temps passé « en étude », va substituer le primat du *cours magistral*, donné en classe. La population des professeurs des collèges et des lycées se modifie fortement : la plupart des nouvelles recrues, titulaires de la licence ou de l'agrégation, sont passées par l'enseignement supérieur ; la classe, jusque-là simple point de rendez-vous entre deux périodes en étude, devient alors le lieu où le professeur témoigne de son « expertise » par le moyen du cours magistral.

Mais le cours magistral, viable comme fait culturel, ne saurait se suffire à lui-même en tant qu'organisateur des apprentissages. À côté de cette structure, dont l'ombre tutélaire enveloppe encore la culture scolaire contemporaine, d'autres dispositifs didactiques vont émerger, et tout d'abord ce qu'on nommera alors, en français, la *conférence*, dans laquelle celui qui n'est plus un professeur donnant son cours, c'est-à-dire exposant magistralement la théorie et la technologie d'une question, mais un « maître de conférences » va présenter la technique en la mettant en œuvre devant les étudiants. Ceux-ci demeurent encore, selon l'ancien paradigme, de purs spectateurs : ils ne deviennent de véritables acteurs que dans les travaux qu'ils réalisent en dehors des cours et des « conférences », en étude pour certains de ces travaux, en travaux pratiques pour d'autres, sous l'autorité d'un enseignant « subalterne ».

2.3. Cette structure complexe, qui accroît l'importance de ce qui est *montré* à l'élève – de ce qui lui est enseigné [9] – par rapport à ce qu'il avait et continue d'avoir à *faire* lui-même, aura une lente évolution : dans l'enseignement secondaire, la nouvelle organisation de l'étude, qui, on l'a dit, vient du haut enseignement universitaire ou professionnel, se figera dans une pratique tôt quoique vainement combattue par le ministère : le *« cours dicté »*. Dans le même temps, une idée se fait jour, qu'on désigne d'abord par l'expression de *« méthode active »* : l'idée de réaliser *en classe* certaines des activités auxquelles l'élève était jusque-là censé se livrer *en dehors* de la classe, « en étude ou à la maison », selon une expression encore employée aujourd'hui dans les textes officiels gouvernant l'enseignement des mathématiques. La notice se réfère sur ce point aux instructions générales du 1er octobre 1946, qui poussent en

[9] Dans son dictionnaire, Émile Littré (1801-1881) enregistre ce sens du verbe « montrer », sens encore vivace de son temps : « Enseigner. *Montrer* les langues, la grammaire, les mathématiques. *Montrer* à écrire. »

avant un changement *de l'organisation de l'étude* impliquant en vérité un changement *dans le métier de professeur* lui-même. Il y avait, on l'a vu, l'ancienne figure professorale de celui qui donne à l'élève des travaux à faire, à qui l'élève fournit une copie de son travail, copie que le professeur va alors examiner et annoter attentivement : les travaux donnés à faire aux élèves – qui, au vrai, peuvent être divers, la copie annotée d'un travail écrit pouvant céder la place au commentaire critique d'un exposé oral, par exemple – sont alors le lieu par excellence de l'apprentissage [10]. Il y a ensuite la figure emblématique, éternisée, du professeur *faisant son cours* – un cours dont on ne prend conscience que peu à peu qu'il ne saurait exister seul, et qui se voit donc complété par des travaux donnés à faire. C'est alors que, dans les instructions de 1946, surgit une nouvelle figure du professeur, qui va devoir assumer que ces travaux traditionnels soient, en partie, *réalisés en classe*. Tel est le pari des instructions de 1946, qu'elles énoncent dans les termes suivants :

> C'est, pour employer un terme traditionnel, le « cours », ou la « leçon du maître » qui apporte et communique aux élèves les notions nouvelles qu'ils doivent acquérir. Il ne peut s'agir quelle que soit la classe, d'un enseignement *ex cathedra*, où le professeur a seul la parole ; un tel « monologue » est trop souvent sans portée. La pratique de la « méthode active » s'impose [...] : elle exige, pour donner son plein rendement, beaucoup d'application et peut-être une certaine virtuosité que l'expérience conférera peu à peu. Le débutant aura parfois quelque peine à s'y adapter, mais il ne doit point se décourager devant les difficultés [...].

Quels changements cela entraîne-t-il très concrètement dans la vie de la classe ? La réponse est sans ambiguïté – la part allouée au « cours » doit diminuer pour que croisse le temps donné aux « exercices » :

> ... il convient de réserver une fraction notable de chaque heure de classe au contrôle et à la mise en œuvre directe des notions acquises (récitations de leçons, recherche d'exercices, correction des devoirs), donc de limiter la durée du « cours » proprement dit, c'est-à-dire la présentation de notions nouvelles. Il ne peut être fixé, à cet égard, de règle précise ; l'essentiel est que le temps consacré aux « exercices » ne soit pas excessivement réduit.

On touche du doigt, ici, le mélange paradigmatique dont ce texte équilibré se fait l'avocat. Tout d'abord, il y a l'ancien paradigme du travail fait *hors de la classe*, avec la « récitation de

---

[10] Une telle organisation didactique existe encore en bien des préparations au CAPES, où les étudiants sont censés apprendre en préparant puis en présentant des exposés. Avant d'être regardés comme isomorphes aux épreuves orales auxquelles ils se réfèrent – isomorphie au vrai assez largement fictive –, de tels travaux sont implicitement vus comme l'outil principal de *formation* du préparationnaire, à quoi s'ajoutent les commentaires du préparateur – dont la relative concision semble être une source de frustration pour les étudiants concernés.

leçons » et la « correction des devoirs ». Ensuite, il y a le *cours*, témoin du paradigme de la gloire des professeurs : le cours « proprement dit », car l'emploi métonymique du mot avait fini par désigner le *tout* de l'activité professorale en classe. Enfin, il y a les « exercices », le mot étant dûment guillemeté, car son emploi dans ce cadre fait encore problème, on va le voir. Le texte que nous suivons fait donc droit au besoin légitime d'explicitation concernant ce dispositif neuf, à propos duquel il apporte les précisions suivantes :

> ... une bonne part de l'activité des élèves doit être consacrée à l'étude et à la recherche de la solution de « problèmes », depuis le simple exercice d'application proposé pour illustrer un théorème, pour rendre vivante une formule, jusqu'au « devoir », exigeant un effort plus personnel, rédigé hors de la classe et donnant lieu ensuite à un compte rendu précis et détaillé.

Le « compte rendu précis et détaillé » est là un reste de l'ancien paradigme, où le devoir était tout, ou presque. « L'étude et la recherche » de la solution de problèmes constitue l'élément neuf, à ce point d'ailleurs qu'il suscite un néologisme ambigu, celui d'« exercices *improvisés* », c'est-à-dire improvisés *pour les élèves* – lesquels, contrairement à une tradition bien établie, ne les auront pas étudiés *préalablement*, hors de la classe. À ce propos, le texte cité précise :

> Les exercices « improvisés » (pour les élèves) doivent faire l'objet d'une préparation de la part du maître ; ils ne seront profitables qu'à cette condition ; leur choix doit permettre de saisir, sous leurs différents aspects, les initiatives à prendre pour mettre en train, pour conduire un raisonnement.

La conduite du travail en classe appelle ainsi une modification des compétences nécessaires au professeur, à qui l'on demande désormais, en quelque sorte, de gérer ensemble, *hic et nunc*, le savoir à enseigner, les élèves, et leur rapport naissant ou déjà figé au contenu mathématique travaillé. Les rédacteurs des instructions écrivent à ce propos :

> ... une question étant à résoudre, on acceptera, dans les tâtonnements de la recherche, toute idée raisonnable ; on comparera les démarches possibles ; on montrera comment l'on fixe son choix ; on fera comprendre la nécessité d'une mise au point ; on guidera peu à peu vers une solution harmonieuse et satisfaisante, dont on fera apprécier la valeur.

Le professeur de mathématiques, qui pouvait être jusqu'alors un enseignant au sens restreint du terme, doit désormais devenir un *directeur d'étude* et un *« aide à l'étude »* dans l'espace même de la classe. Il n'est pas, d'ailleurs, jusqu'au « cours proprement dit » qui ne doive permettre « la participation constante des élèves », lesquels sont censés désormais participer « à l'élaboration du "cours", c'est-à-dire à l'exposé et à l'application des questions nouvelles ». La chose, si inouïe soit-elle, ne devrait pas offrir de difficultés insurmontables

« si le professeur sait partir de l'expérience accessible à l'enfant, enchaîner les faits dans une progression naturelle, élargir peu à peu le champ des acquisitions, construire logiquement un édifice solide et harmonieux ».

2.4. Le texte de 1946 est tendu, en équilibre instable, entre un passé dont il rejette certains éléments et un avenir où devrait s'imposer une nouvelle façon d'enseigner. Ainsi y vitupère-t-on encore la « pédagogie de régent » au profit de l'exposé magistral : « il va de soi », lit-on, que « les élèves ne doivent, sous aucun prétexte, garder leur livre ouvert sous les yeux pendant que le professeur expose une question ». La gloire des professeurs n'est pas morte et la parole magistrale n'admet pas de rival ; mais, dans le même temps, cette parole se trouve délogée de sa position d'extériorité emblématique : le cours dicté « est à proscrire » et il convient de décourager « la prise de notes “à la volée” par les élèves cherchant à enregistrer la totalité d'un exposé ». Il n'est pourtant pas interdit au professeur de procéder à « la dictée d'un résumé ou d'un texte bref destiné à modifier ou à compléter, sur quelque point, la rédaction d'un livre ». Le « livre », on le voit, est toujours là, comme dans l'ancienne pédagogie de régent : mais le professeur le complète, voire le corrige : sa parole prime, son verdict s'impose. Et pourtant – telle est la vraie nouveauté – cette parole magistrale doit *composer avec les élèves*. Tel est le nouveau régime didactique, que, presque subrepticement, les instructions affirment en ces termes :

> Une telle dictée, qui doit toujours être courte, constituera d'ailleurs un exercice actif et profitable si elle est présentée comme une mise au point, faite en commun, de la question traitée

D'autres novations sont poussées en avant, tel le travail en « petites équipes d'élèves, dont chacune reçoit la charge d'exposer une question déterminée, en présentant en même temps quelques exercices d'application imaginés ou choisis par elle. » De telles équipes ne doivent pas être permanentes, mais seront constituées chaque fois avec une visée bien déterminée, comme l'explicite ce passage :

> ... il paraît préférable de ne constituer d'équipes qu'en vue de l'accomplissement d'une tâche nettement limitée : étude d'une question exigeant une certaine documentation et que l'équipe devra exposer à l'ensemble de la classe ; recherche de la solution d'un problème présentant quelque difficulté ; préparation d'un travail de révision ; confection de modèles de géométrie ; rédaction d'un formulaire ; organisation d'une bibliothèque de classe...

Le travail en équipe trouve sa place lors des *séances de travail dirigé*, au cours desquelles le professeur a la possibilité « d'étudier les réactions et les comportements de chacun devant une tâche proposée » et, en conséquence, de « donner, individuellement, les conseils appropriés ».

Le travail du professeur change ainsi profondément [11]. Le risque est évidemment que les professeurs ne reconnaissent plus le métier qu'ils croient être le leur et que l'énergie et l'investissement qu'ils mettaient jusque-là à préparer « leur » cours leur semblent désormais sans utilité pour animer des activités où, peuvent-ils d'abord penser, l'à-peu-près le dispute à l'impréparation. Pour prévenir ce risque, les instructions expriment fortement que les exigences traditionnelles de sérieux de la profession doivent maintenant être appliquées au contenu nouveau qu'elles définissent :

> On ne saurait trop insister sur l'importance que doit attacher le professeur à la préparation de chacune de ses classes. Bien plus que l'enseignement *ex cathedra*, la pratique de la « méthode active » rend nécessaire une mise au point préalable de ce qui sera fait par le maître et de ce qui sera demandé aux élèves. Il faut prévoir dans le détail : la matière de la leçon nouvelle ; la nature et la forme des questions qui solliciteront, au cours d'un exposé, la participation de la classe ; l'énoncé bien choisi, des exercices d'application, des calculs numériques, le texte, soigneusement étudié, du devoir.

À la simplicité de l'ancienne organisation – celle du cours complété par *le* devoir –, la nouvelle organisation didactique semble vouloir substituer un système complexe et exigeant, qui mêle indissociablement l'action du professeur à l'activité supposée des élèves. La mue est considérable et ne se réalisera – partiellement – qu'au fil de plusieurs décennies. Jeune professeure enseignant en terminale C au début des années 1980, nous pouvons témoigner que notre travail était encore à cette époque structuré par l'obligation de préparer « le cours » et de proposer chaque semaine un devoir substantiel, selon un mélange des deux premiers paradigmes distingués ci-dessus, sans même proposer d'exercices *à la maison* entre deux séances en classe, même si, assez vite, il fallut apporter, pour tenir compte d'une évolution quelque peu souterraine, divers enrichissements à ce menu didactique spartiate, conforme à l'enseignement que nous avions nous-même reçu au lycée quelques années auparavant.

---

[11] Parmi les changements poussés en avant par le texte de 1946, les deux précédemment cités ont fait long feu. Tout d'abord, il semble bien que, selon ces instructions, les exposés faits par les élèves devaient « compter pour de bon » dans l'enseignement prodigué, la matière présentée par les élèves à leurs camarades étant *à savoir* – alors que l'usage qui s'est installé ensuite fut de confier aux élèves des sujets « périphériques », en quelque sorte superfétatoires, qui ne laisseront pas de traces institutionnalisées dans le texte du savoir élaboré par la classe. Ensuite, l'invitation faite au professeur *d'étudier* ses élèves lors des séances de travail dirigé (afin de spécifier plus adéquatement son intervention auprès de chacun d'eux) préfigure des incitations analogues formulées à nouveau lors de la création en classe de seconde des *modules* puis de l'*aide individualisée*, dispositifs dont les effets à cet égard restent, nous semble-t-il, à être mis en évidence.

2.5. Sur la voie ouverte par les instructions de 1946, d'autres avancées touchant à l'organisation didactique verront le jour – au moins dans les textes – sur lesquelles nous reviendrons. Mais nous nous arrêterons ici sur les obstacles que dressent devant les professeurs stagiaires aujourd'hui, 60 ans après les instructions de 1946, les vestiges des paradigmes didactiques hétérogènes que nous venons de rappeler. On a dit ainsi que, dans l'ancien paradigme didactique, le devoir était quasiment tout ; on a souligné aussi qu'il demeurera longtemps l'un des deux ou trois piliers de l'enseignement secondaire des mathématiques. De cette tradition de longue durée, presque immémoriale pour les générations les plus anciennes de professeurs, il demeure aujourd'hui encore un habitus, qui fait du *devoir à la maison* (DM) une structure à la fois capitale et en quelque sorte « totipotente », supposée capable d'assumer toutes les fonctions didactiques essentielles [12]. Le premier caractère « vestigial », à cet égard, est cette idée prégnante que le professeur devrait proposer à ses élèves, au rythme par exemple d'un par quinzaine, un « gros devoir ». Or, depuis les années 1980 et jusqu'à aujourd'hui, les textes officiels incitent les professeurs à abandonner cette structure didactique à l'ancienne, au profit de « devoirs à la maison » à la fois *courts* et *fréquents*. Il s'agit là d'une tentative de rééquilibrage entre l'ancien paradigme didactique (qui voulait des « gros devoirs ») et le nouveau, qui fait de la classe le lieu premier de l'activité personnelle de l'élève. C'est ainsi que, dans le programme de seconde en vigueur au milieu des années 1980, on lit :

> *La résolution d'exercices et de problèmes* doit jouer un rôle central dans le *travail personnel des élèves*. À cet effet, on combinera une participation active des élèves aux travaux effectués en classe avec des travaux effectués à la maison (préparation d'exercices, rédaction *fréquente* de devoirs) et *quelques* devoirs de contrôle.

Notons la référence à la « préparation d'exercices », typique de l'ancien paradigme, ainsi que la référence, sur laquelle nous allons revenir, au *petit* nombre de « devoirs de contrôle ». Pour la même classe, mais au milieu des années 1990 cette fois, les mêmes préconisations sont reprises et affinées. On n'y parle plus de *devoirs* – vocabulaire traditionnel qui, toutefois, ne disparaîtra pas – mais, plus largement, de « travaux de rédaction », dont il est répété qu'ils doivent être courts, fréquents et diversifiés :

> Les travaux individuels de *rédaction* (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte...) visent essentiellement à

---

[12] En biologie, on appelle cellule totipotente une cellule souche capable d'engendrer un organisme tout entier : une telle cellule a la capacité de donner naissance à tous les types de cellules de l'organisme.

> développer les *capacités de mise au point d'un raisonnement et d'expression écrite* ; vu l'importance de ces objectifs, ces travaux de rédaction doivent être *fréquents*, mais leur *longueur* doit rester raisonnable.

Sous le titre *Les travaux écrits des élèves en mathématiques au collège et au lycée*, l'ensemble de ces prescriptions fera l'objet d'une synthèse, datée du 27 mars 1997, due au groupe des mathématiques de l'Inspection générale de l'éducation nationale. Les rédacteurs distinguent, parmi les « travaux écrits en dehors de la classe », les deux catégories que sont les « exercices d'entraînement », qui « doivent, en règle générale, accompagner toutes les séances de mathématiques », d'une part, et les « travaux individuels de rédaction », comportant « notamment les "devoirs à la maison" », d'autre part. À propos de ces travaux, les auteurs précisent que leur fréquence est chose essentielle – la tendance est à un travail de rédaction chaque semaine –, et que, par voie de conséquence, il faut réduire leur *longueur* ainsi que leur difficulté par rapport à une norme ancienne qui n'est jamais désignée qu'en creux. Bref, écrivent-ils, « il vaut mieux faire "souvent et court" que "rarement et long" ».

2.6. Face à ces indications que la formation donnée à l'IUFM leur fait connaître de manière insistante, les professeurs stagiaires apparaissent souvent déconcertés. Les questions fusent. Lors de la première séance du séminaire du mardi matin, un stagiaire de la promotion 2000-2001 demande : « Faut-il donner des DM à rédiger toutes les semaines ? » Lors de la quatrième séance, il reprend sa question : « Faut-il donner un DM (à rédiger) toutes les semaines ? » À l'occasion des questions de la séance 2, un autre stagiaire s'était montré dubitatif : « Est-ce qu'un devoir à la maison par semaine n'est pas trop ? » Lors de la séance 4 de l'année suivante (2001-2002), un autre stagiaire feint de n'avoir pas clairement compris la consigne et demande : « Doit-on faire des DM courts et très fréquents ou alors longs et plus rares ? » La même année, lors de la séance 5, un stagiaire défend âprement sa manière de faire, dont la description montre qu'il n'a pas su combiner augmentation de la fréquence et diminution de la longueur du travail demandé aux élèves :

> Fréquence des DM sachant que je donne aussi d'une séance sur l'autre des exercices ? Pour l'instant, je donne un DM tous les 15 jours, avec une semaine pour le faire. Certains élèves n'ont pas fait le DM en entier, et ils ne m'ont pas même posé de question sur les « trous ». Est-ce parce qu'ils n'ont pas eu assez de temps ? Est-ce parce qu'ils ont cherché, mais pas trouvé ?… (2001-2002, 4e, semaine 5)

Parfois, la consigne est poussée en quelque sorte à l'absurde, ce qui est sans doute une autre forme, peu consciente, de résistance. Alors que le texte de l'Inspection générale parle d'un « travail hebdomadaire de rédaction en temps libre » en précisant que cette règle s'applique

« hors les semaines où figure un devoir de contrôle », un stagiaire de la promotion 2002-2003 formule l'interrogation suivante :

> Je donne aux élèves des DM notés toutes les semaines. Mais dois-je aussi en donner les semaines où il y a un contrôle en classe ? (2002-2003, 2de, semaine 4)

Lors de la séance suivante, une autre stagiaire revient à la charge : « Peut-on donner un DM la même semaine qu'une interrogation ? » Lors de la journée de rentrée de la promotion 2003-2004, une stagiaire interroge l'équipe de formation, en s'embrouillant un peu :

> Qu'entendez-vous par donner des interrogations moins souvent et plus longues *(sic)* et des DM plus souvent et moins longs ? Et comment mettre en place un tel dispositif ? (2003-2004, 4e, semaine 0)

Lors de la quatrième séance du séminaire, un autre stagiaire recherche la validation d'un système sans doute plus conforme aux prescriptions officielles :

> Un « petit » DM tous les quinze jours est-il un bon rythme de travail pour les élèves ? (2003-2004, 3e, semaine 4)

Certains pourtant persistent et signent, tel cet élève professeur qui, lors de la séance 10, avoue s'être aperçu un peu tard que ses choix personnels n'étaient pas complètement orthodoxes :

> J'ai donné à mes élèves quatre DM dans le premier trimestre. Mon PCP m'a dit qu'il craignait que ce ne soit pas suffisant. A-t-il raison ou dois-je dissiper mes angoisses ? (2003-2004, 5e, semaine 10)

La même année, lors de la séance 17, c'est-à-dire tardivement, un autre stagiaire exprime son malaise devant les effets objectifs du conflit des paradigmes que, sans doute, il n'appréhende pas clairement : « Est-il gênant de changer la fréquence des DM ? », interroge-t-il. C'est que, insistons là-dessus, la plupart des stagiaires arrivent en deuxième année d'IUFM avec, sur le point examiné ici, des réflexes d'ancien régime, ou plutôt avec le regret de devoir renoncer aux « gros devoirs » qui en étaient l'emblème. En 2003-2004 toujours, mais lors de la journée de rentrée cette fois, un stagiaire, oscillant entre ancien et nouveau, réagit en ces termes :

> Quel doit être le rythme au niveau des interrogations ? Un DM par semaine ? Une interrogation de cours chaque semaine ? Un gros devoir après chaque chapitre ?… (2003-2004, 4e, semaine 0)

Lorsque la consigne « nouvelle » est entendue, selon un schéma classique elle porte le professeur stagiaire à évoquer des modifications de *l'ensemble* du système des travaux demandés aux élèves. Lors de la séance 5 de l'année 2001-2002, un élève professeur interroge ainsi :

> Peut-on ne fonctionner au niveau des travaux à faire chez soi en ne donnant qu'un devoir à la maison par semaine (assez court) et en ne donnant rien d'autre puisque tous les exercices sont faits en classe entière ? (2001-2002, 2de, semaine 5)

L'acceptation de la nouvelle norme semble ainsi impliquer une compensation par diminution du travail à faire d'une séance sur l'autre. Dans une autre orientation de pensée, un stagiaire de l'année 2002-2003, prenant acte de la nouvelle consigne, voudrait en inférer une autre modification, mais de sens inverse cette fois :

> Les devoirs à la maison doivent être courts et fréquents. Peut-on alors leur donner à faire en moins d'une semaine ? (2002-2003, 4e, semaine 2)

Le « modèle » à implanter dans les classes est ainsi perçu comme structurellement instable. Certains s'en disent déconcertés, telle cette stagiaire de l'année 2003-2004 qui, lors de la séance 8, dit sa confusion dans les termes suivants :

> De quelle longueur doivent être les DM ? J'ai eu plusieurs versions différentes ; donc j'aimerais savoir ce que je dois faire. (2003-2004, 2de, semaine 8)

Car, on l'a noté, on entend d'abord l'injonction portant sur la *fréquence* des DM, et ce n'est que de façon plus hésitante qu'on enregistre le réquisit concernant leur *longueur*. La résistance du paradigme ancien, ébranlée sur le premier point, ne lâche pas sur le second. En outre, les réticences rencontrées ne s'atténuent pas nettement au fil des années. En 2005-2006, par exemple, lors de la journée de rentrée, une stagiaire s'enquiert des consignes officielles dans le temps même où elle les conteste :

> Quelle fréquence pour les DM ? Les textes préconisent un devoir par quinzaine au collège. N'est-ce pas trop ? Quelle longueur ? Quel système de notation ? (2005-2006, 4e, semaine 0)

La même année, lors de la séance 3, un autre participant au séminaire semble découvrir un problème examiné pourtant dès la journée de rentrée ; il questionne en ces termes :

> Quelle taille doit avoir un DM ? À quelle fréquence doit-on les donner aux élèves ? Comment tenir compte des notes de ces DM ? (2005-2006, 2de, semaine 3)

Lors de la même séance, une autre participante, apparemment plus avancée dans sa réflexion, semble vouloir rouvrir le débat :

> Vaut-il mieux donner plusieurs DM courts ou des DM plus longs et plus espacés dans le temps ? (2005-2006, 2de, semaine 3)

Visiblement, le passé ne passe pas.

2.7. La tentation d'externaliser le travail par le moyen des DM n'est peut-être jamais aussi forte qu'à l'approche des vacances scolaires, où le bilan de l'avancée de l'étude apparaît, en règle générale, déficitaire : on voudrait en avoir fait plus, et on projette alors de rattraper le temps perdu en conjuguant DM et vacances. Ainsi une stagiaire formule-t-elle la question suivante :

> Peut-on profiter des vacances de Toussaint pour donner un DM plus long que les précédents ? (2004-2005, 2de, semaine 6)

Plus crûment encore, une autre stagiaire s'interroge ainsi :

> Peut-on donner, pendant les vacances, un DM qui va permettre d'avancer dans le chapitre ? (2005-2006, 4^{e}, semaine 6)

Une professeure stagiaire s'enquiert de même du bon usage qu'elle pourrait faire des vacances de Noël :

> Début janvier, mes élèves ont un contrôle commun à toutes les classes de 4^{e} portant sur ce qui a été fait depuis la rentrée. Puis-je leur donner un DM récapitulatif à faire pendant les vacances ? (2005-2006, 4^{e}, semaine 11)

Ce n'est qu'en 2005-2006 que les notes du séminaire font, sur ce point, apparaître une très courte réponse, en réaction à une question posée à la veille des vacances de Toussaint [13].

> Faut-il donner à faire un travail important aux élèves pendant les vacances scolaires ? (2005-2006, 4^{e}, semaine 6)

Réponse express. – La réponse est essentiellement négative : il ne faut pas donner aux élèves un « travail de vacances » qui prétende *faire avancer le temps didactique*, même si l'on peut – et si l'on doit, en règle générale – proposer un travail de bilan, d'inventaire de ce qui a été fait, de ce que l'on sait faire, etc.

La concision de la réponse ne permet guère d'apercevoir les raisons de cette prise de position. Sa motivation se résume en une expression, celle de *désengagement didactique*, dont on

[13] Il apparaît que ce genre de questions, posées avec insistance chaque année, n'a jusqu'alors fait l'objet que de commentaires oraux, sans traces écrites. Qu'il en aille autrement en 2005-2006 tient à l'institution du « forum express », où, en certaines séances dites d'explicitation, le responsable du séminaire répond de façon impromptue, et forcément concise, à des questions choisies de façon aléatoire parmi les questions récemment posées : la question reproduite ci-dessus n'aurait peut-être pas été retenue dans un forum des questions ordinaire ; le hasard l'a imposée dans le cadre d'un forum express.

trouve une explicitation à propos de la fonction « attrape-tout » assignée aux DM par certains professeurs stagiaires, à l'occasion de la question suivante :

Peut-on donner comme DM un des thèmes du programme de 2de ? (2003-2004, 2de, semaine 5)

La réponse proposée commence par expliciter le terme de *thème* employé dans la question, dont l'auteur désigne ainsi ce que le programme de seconde appelle des *thèmes d'étude* [14] et que le responsable du séminaire propose d'appeler des thèmes d'études *libres* (TEL), pour distinguer ces items optionnels des contenus obligatoirement étudiés, les thèmes d'études *imposés* (TEI). Après un développement sur le dispositif des TEL et leurs contenus, la réponse formulée en vient aux principes qui fondent le rejet du scénario envisagé dans la question :

Le choix de « donner en DM » l'un des TEL est en vérité *déraisonnable*, à l'instar de *tout* choix conduisant à un *désengagement didactique* du professeur – ici en « dégageant en DM » ce dont il lui incombe de diriger l'étude avec vigilance – en classe et hors classe ! En vérité, l'*organisation didactique* relative aux TEL est dans son principe *la même* que l'organisation de l'étude de *n'importe quel autre thème* figurant au programme de la classe : l'étude d'un TEL doit procéder selon les « normes », déjà travaillées dans le Séminaire, concrétisées par le triptyque Activités / Synthèses / Exercices.

À ce développement s'ajoute la remarque suivante, qui participe de la même inspiration :

Les travaux *hors classe*, toujours utiles et parfois nécessaires, ne doivent toutefois pas prendre une place excessive. Dans tous les cas, ils doivent assumer des *fonctions didactiques précises* : travaux préparatoires à une phase de travail en classe, mises en forme de travaux faits en classe (dont les synthèses), etc.

Alors que la question qui motivait cette remarque avait été intitulée « Thèmes d'étude en seconde et DM », une autre question surgira quelques semaines plus tard, que les notes du séminaire rangent cette fois sous l'étiquette « DM et "désengagement didactique" » :

Peut-on proposer la démonstration d'un théorème en DM (à la condition évidemment de guider suffisamment les élèves) ? (2003-2004, 3e, semaine 9)

---

[14] Sur ces « thèmes d'étude », voir le chapitre 4.

La réponse se borne cette fois à reprendre sèchement, après une notule introductive, les matériaux apportés en réponse à la question précédente.

2.8. La tentation d'externaliser ce qui est censé se faire en classe ne concerne pas que les DM. En 2003-2004, par exemple, la question suivante était posée, qui relève essentiellement du même phénomène :

> Plusieurs collègues, pour tenir les délais, demandent à leurs élèves d'apprendre le cours sur le bouquin, pendant les vacances… Ceci bien sûr pour les révisions du collège (définition et somme de vecteurs). Qu'en pensez-vous ? (2003-2004, 2^de^, semaine 14)

L'apparition de l'Internet, en particulier, renouvelle le genre, comme l'illustre cette question :

> Dans quelle mesure et selon quelles modalités peut-on mettre à disposition des documents (du type cahier de textes, classeur type…) sur Internet ? (2005-2006, 5^e^, semaine 11)

En cette occasion, les éléments théorico-technologiques déjà présentés en 2003-2004 sont repris et actualisés dans les termes suivants :

> … tout document proposé doit résulter d'un travail de la classe sous la direction du professeur et/ou doit nourrir la préparation d'un tel travail. Tout autre document (complément laissé à l'étude libre des élèves, etc.) doit être regardé comme un risque de *désengagement didactique du professeur*, de déresponsabilisation de celui-ci et de dérive vers une responsabilisation *abusive* des élèves : les élèves ne vont pas à l'école pour étudier seuls et être laissés à eux-mêmes. À cet égard, les documents mis en ligne par un professeur pour les élèves de telle classe dont il a la responsabilité ne devraient être accessibles aux élèves de telle autre classe que par le truchement de leur propre professeur, seul responsable, en l'espèce, de ce que l'établissement leur propose dans la matière concernée. Le réglage de cet accès éventuel des élèves (ou de certains d'entre eux) à des ressources constituées à d'autres fins doit être soigneusement étudié par les professeurs concernés et faire l'objet, à l'adresse de la communauté éducative, de règles clairement énoncées.

Mais revenons aux DM. Le questionnement entêté des élèves professeurs dépasse de loin la seule question des vacances scolaires. À travers leurs interrogations, on peut voir se déployer une conception protéiforme des DM, dont la polyvalence didactique paraît indéfiniment extensible, en conformité avec l'ancien rôle dévolu aux « devoirs », qui en faisait un lieu essentiel aux apprentissages scolaires. C'est ainsi que, toujours à propos des TEL en classe de seconde, une stagiaire de la promotion 2001-2002 pose cette question :

Comment faut-il intégrer les thèmes d'étude en 2de ? En DM ? En module ?… (2001-2002, 2de, semaine 5)

En 2002-2003, une stagiaire assortit sa question de considérations typiques de la vision des DM comme « réservoir de temps didactique » :

Peut-on étudier les thèmes d'étude en DM ? J'ai cours les lundis et jeudis ; cette année tous les jours fériés tombent des lundis ou des jeudis. (De plus, des voyages en Espagne et en Italie sont prévus.) Je n'ai aucune possibilité pour rattraper ces cours, car l'emploi du temps de ma classe ne le permet pas, et cela représente au moins dix heures. Je pense donc avoir du mal pour boucler le programme. (2002-2003, 2de, semaine 3)

En 2004-2005, à nouveau, les questions suivantes sont posées :

1. À quel rythme doit-on donner les devoirs à la maison ? Un par semaine est-il convenable ? Peuvent-ils traiter d'un « thème d'étude » signalé sur le programme officiel ? (2004-2005, 2de, semaine 1)

2. Peut-on donner un thème d'étude en devoir à la maison (exemple : irrationalité de $\sqrt{2}$) ? (2004-2005, 2de, semaine 2)

Toutefois, les DM se voient attribués d'autres fonctions « compensatoires ». En 2004-2005, lors de la dernière séance du séminaire, et nonobstant le travail fait au cours de l'année, un professeur stagiaire s'entête :

Peut-on traiter certaines parties du cours sous forme de DM ? (2004-2005, 2de, semaine 24)

La raison d'une telle externalisation est parfois précisée ; dans la question ci-après, posée par le *même* stagiaire alors que l'année est déjà bien avancée, c'est le retard pris dans l'avancée de l'étude qui est explicitement invoqué :

J'ai pris du retard par rapport à ma progression. Je suis conscient que les devoirs à la maison doivent être courts et ont pour but la vérification de l'acquisition par les élèves des notions de cours. Vu le contexte, est-ce que je peux utiliser un DM pour compléter un cours (démonstration d'une propriété par exemple) ? (2004-2005, 2de, semaine 19)

D'autres fois, toujours dans le souci de gagner du temps, on pense pouvoir comprimer en un DM toute une partie du programme. Le « renvoi en DM » de ce qui devrait se faire en classe apparaît souvent, à cet égard, comme l'aveu d'une minoration – voire d'une péjoration – du contenu mathématique concerné et/ou de l'activité d'étude à conduire sur ce contenu. Ainsi en va-t-il typiquement avec la question suivante, due au même auteur que les deux précédentes :

Peut-on traiter le chapitre *Statistique* sous forme d'exercices et de DM ? (2004-2005, 2de, semaine 17)

Il est rare que l'on envisage de traiter ainsi tout un domaine d'études inscrit au programme de la classe. Plus souvent, ce sont des parties jugées un peu secondaires de thèmes ou de secteurs d'études déterminés dont on souhaiterait reléguer l'étude en DM. La question suivante témoigne à cet égard qu'il s'agit là d'une pratique qui, sans faire norme dans la profession, y apparaît prégnante [15] :

> Vaut-il mieux donner des devoirs à la maison visant à faire travailler les techniques qui seront évaluées lors du contrôle (c'est-à-dire un DM qui serait une répétition générale du futur contrôle), ou alors des DM où on demanderait des choses nouvelles que l'on n'aborderait pas en classe ? Les professeurs de mon lycée (dont mon maître de stage) préfèrent donner des DM du deuxième type alors que j'avais pour habitude de donner des DM du premier type. (2000-2001, 2^de^, semaine 4)

La pratique évoquée suscite bien entendu des interrogations, comme le montre encore cette autre question :

> Le programme de 2^de^ prévoit d'aborder l'étude de fonctions de référence telles $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, …
> J'envisage de laisser l'étude de certaines de ces fonctions à faire en DM afin d'avoir juste une courte synthèse à traiter en classe et également afin de les familiariser avec les études de fonctions. Néanmoins, cela les obligera à se confronter à des notions qu'ils n'ont pas encore abordées. Est-ce donc une bonne idée ? (2000-2001, 2^de^, semaine 12)

Mais la tentation n'en est pas moins présente d'alléger par cet artifice le fardeau du professeur. La question suivante, qui évoque une organisation de l'étude sans doute largement imaginaire, tente d'intégrer un tel usage des DM à un cadre plus large :

> Peut-on faire un chapitre (par exemple « Droites remarquables du triangle ») uniquement en DM, en avançant petit à petit (en en parlant régulièrement en classe), mais sinon en les laissant mettre en place leur cours ? (2003-2004, 4^e^, semaine 8)

Le désengagement didactique est ici évident. Il est moins net, bien entendu, quand le contenu mathématique du DM et le travail demandé à son propos sont censés s'inscrire dans le cadre de *révisions*. Un élève professeur soulève ainsi la question suivante :

> Peut-on utiliser une partie d'un DM pour faire réviser des notions des classes antérieures ? (2004-2005, 2^de^, semaine 5)

---

[15] L'auteur de la question avait déjà fait une année de stage l'année précédente : d'où la référence à son « habitude ».

Il s'agit là d'un cas extrême. Généralement, les révisions envisagées concernent le travail de l'année, notamment lors des césures qu'instituent les vacances scolaires, comme il en va dans cette question :

> Quelle quantité de travail doit-on donner pendant les vacances ? Et faut-il revenir, dans ces devoirs, sur les connaissances de début d'année pour les réactiver, les consolider, les élargir ? (2001-2002, 5e, semaine 7)

La remontée dans le temps didactique, cependant, est souvent douloureuse [16]. À cet égard, les DM semblent avoir une image ambivalente. Dans certains cas, en effet, c'est un DM qui va révéler la volatilité des connaissances et des compétences, ainsi qu'il ressort de cette question :

> À la fin du mois, ma classe de 4e a un devoir commun portant sur les chapitres relatifs au numérique traités depuis le début de l'année. Dans cette optique, je leur avais donné un DM de révisions pendant les vacances de Noël. J'ai constaté que les calculs sur les fractions ont été majoritairement ratés. Alors que je suis loin d'être en avance, dois-je prendre le temps, avant le devoir commun, de revenir sur ce chapitre avec eux ? (2003-2004, 4e, semaine 14)

Dans d'autres cas, à l'inverse, le DM apparaît comme l'antidote au poison de l'oubli. Ainsi en va-t-il, par exemple, dans les deux questions reproduites ci-après :

> 1. Je me rends compte en ce moment que les chapitres que j'ai enseignés au début de l'année ont été moins bien compris par les élèves, globalement, que les chapitres plus récents. Cela vient bien évidemment de ma manière d'expliquer, qui était sans doute moins claire. Puis-je donner aux élèves, en DM, des exercices se rapportant à ces chapitres et, lors de la correction, changer « sensiblement » la rédaction de la solution, pour permettre à certains élèves de comprendre ces exercices ? (2001-2002, 4e, semaine 16)
>
> 2. J'ai corrigé pendant les vacances le dernier DS de ma classe. Pour ce DS, il y avait plusieurs chapitres à réviser. Les élèves ont plutôt bien réussi les exercices correspondants au chapitre que l'on était en train de traiter, mais ils ont très mal réussi les exercices correspondants aux chapitres les plus anciens. Il s'agissait pourtant de notions dont on a à nouveau besoin maintenant. J'ai donc décidé de leur donner un DM très court portant sur ce chapitre ancien pour les obliger à le réviser. Est-ce une bonne méthode ? (2001-2002, 2de, semaine 18)

---

[16] Cette remontée apparaît comme une autre tentation des professeurs stagiaires, ainsi qu'en témoigne cette question parmi d'autres : « Lorsqu'on donne un DS ou un DM aux élèves, peut-on y mettre des notions des chapitres de début d'année ? » Sans doute s'agit-il là aussi d'un vestige, en forme d'« inconscient d'école », d'un temps où le programme d'une classe comportait *officiellement* des révisions du programme de la classe

D'une façon plus générale, le DM reçoit une fonction d'*économiseur* du temps passé en classe, notamment pour ce qui apparaît au professeur débutant comme des répétitions ou des reprises sans grand intérêt – peut-il penser. La tentation de faire de semblables économies est forte, notamment en classe de seconde, à propos de la géométrie plane. En 2002-2003, dès la séance 3, une stagiaire soulève la question :

> Le chapitre des configurations planes n'est composé que de résultats vus au collège. Peut-on donner des DM sur le sujet, sans faire de cours en classe, puis faire un bilan des difficultés pendant une heure ? (2002-2003, 2de, semaine 3)

Les « configurations du plan » constituent, en seconde, la terre d'élection des révisions qu'on se plait à envisager de renvoyer en DM. La même professeure stagiaire formulera un peu plus tard, au cours de deux séances successives, une interrogation insistante dont on reproduit les formulations successives :

> 1. Pour introduire l'étude des configurations du plan, je compte donner un DM à faire pendant les vacances faisant appel aux techniques apprises au collège, puis faire une synthèse sur ces techniques et théorèmes à la rentrée. Ce dispositif est-il approprié ? (2002-2003, 2de, semaine 10)
> 2. Puis-je aborder la géométrie dans le plan par un DM qui fait appel aux techniques vues au collège (les objectifs étant de réviser ces notions mais surtout de travailler la rédaction et le raisonnement logique) ? Ou bien est-il préférable de commencer l'étude des triangles semblables ? (2002-2003, 2de, semaine 11)

Une autre élève professeure posera plus tardivement le même problème, mais dans une forme générale, qui a le mérite de ne pas apparaître comme occasionnaliste et explicite pour cela une fonction didactique permanente – parmi d'autres – assignée aux DM :

> Peut-on s'aider d'un DM pour réactiver le savoir ancien afin d'attaquer un thème nouveau ? (2002-2003, 2de, semaine 20)

Bien entendu, ce type de souci n'est pas l'apanage de la classe de seconde : il se rencontre aussi au collège, ainsi que l'illustre la question suivante.

> Concernant le chapitre « Translations », est-il indispensable de faire des rappels sur les parallélogrammes (caractérisation, construction, parallélogrammes particuliers) ? Serait-il plus judicieux que les élèves fassent ce travail de remise en place des connaissances à travers un DM ? (2002-2003, 4^{e}, semaine 17)

---

précédente. (Voir Pierre Bourdieu, « L'inconscient d'école », *Actes de la recherche en sciences sociales*, 2000, n^{o} 135, p. 3-5.)

En outre, la propension à utiliser ainsi les devoirs à la maison semble ne pas avoir diminué au fil des années, comme en témoigne cette question posée en 2005-2006 :

> En 4e le chapitre « Droites remarquables » est une reprise de l'étude déjà menée en 5e. Dois-je leur proposer quelques rappels ? Je pensais leur donner en DM à rédiger une fiche sur ce qu'ils connaissent déjà (en utilisant tous les supports dont ils disposent). (2005-2006, 4e, semaine 8)

Mais les fonctions didactiques que l'on assigne au DM sont en vérité beaucoup plus ouvertes encore que les inventaires précédents ne le suggèrent. C'est ainsi qu'un DM peut être vu comme un moyen de préparer l'étude à venir, et d'aller de l'avant plutôt que de revenir en arrière, comme l'atteste cette question :

> Est-il intéressant de donner un « DM – Activités » afin d'amorcer de nouvelles notions plus tard dans l'année ? (2005-2006, 3e, semaine 6)

Mais une autre fonction est également proposée de façon significative, en laquelle on ne peut manquer de voir une trace de l'ancien paradigme scolaire : un DM constitue un travail dans lequel on va *plus loin*, plus *profond*, ou qui, du moins, se prête à cette possibilité. Un stagiaire s'interroge ainsi, en rapprochant deux fonctions didactiques :

> Doit-on voir les DM comme des problèmes de recherche ? Peut-on varier le contenu et donner par exemple des exercices préparatoires à une leçon ? (2001-2002, 4e, semaine 13)

Une autre stagiaire avait *a priori* une idée déterminée, mais dont elle se prend à douter :

> En ce qui concerne les devoirs à faire à la maison et à rendre, doit-on poser plutôt des problèmes de recherche ou plutôt d'application du cours ? (Je pencherais pour la recherche, mais y aura-t-il du répondant ?) (2002-2003, 4e, semaine 0)

La vision du DM comme lieu d'une étude plus approfondie apparaît prégnante, même lorsqu'elle est formulée de façon interrogative, comme ci-après :

> Est-ce qu'un devoir à la maison peut être plus difficile que les exercices faits en classe et demander éventuellement plus de raisonnement ? (2001-2002, 2de, semaine 2)

Mais l'appel au DM pour approfondir le travail de la classe, sans doute conforme à l'inconscient d'école que nous avons évoqué, se heurte vite au réel. Une stagiaire fait part de ses doutes en ces termes :

> Quelle structure serait la meilleure pour un travail de recherche des élèves ? En effet, dans un devoir à la maison, ils semblent démotivés par un problème qu'ils parviennent mal à résoudre, surtout si la note qui suit est faible. (2000-2001, 2de, semaine 16)

La déception est parfois source de sagesse, ce qui semble du moins être le cas pour l'auteur de cette autre question :

> J'ai déjà donné deux DM à mes élèves. Ces devoirs demandaient plus de réflexion que ceux effectués en classe. Beaucoup se sont découragés. Dois-je continuer dans cette voie ? Ou vaut-il mieux proposer un devoir qui ressemble à ce qui pourrait être demandé en DS ? (2002-2003, 2de, semaine 3)

Au demeurant, les élèves ne sont pas seuls à rechigner – en quelques cas, les parents font de la résistance, comme le signale un professeur stagiaire :

> Dans les DM, j'essaie de donner trois quarts d'exercices d'application du cours et un quart (souvent 1 ou 2 exercices) de problèmes qui, plus complexes, font appel à des notions vues dans les classes précédentes. Pendant la rencontre parents-professeurs, certains se sont plaints que je donnais des exercices dont tous les éléments n'étaient pas dans le cours. Je leur ai répondu que ces exercices faisaient appel à des notions antérieures, mais ces parents ne semblaient pas convaincus. Est-il légitime de donner en DM des exercices « d'approfondissement » ? (2000-2001, 4^{e}, semaine 14)

Même en face du sobre démenti apporté par l'attitude de certains élèves et de certains parents, la prégnance du « gros devoir », où le professeur comme les élèves seraient censés donner toute leur mesure, est indéniable. Les questions ci-après le rappellent avec entêtement.

> 1. Je souhaite poser un problème complet en DM sur la trajectoire d'un bateau sur un plan d'eau (vecteurs et repères en 2de). Dans ce problème, un vecteur peut représenter alternativement une trajectoire ou une vitesse, avec des échelles différentes (pour des objets physiques de dimensions différentes). Est-ce jouable ? (2002-2003, 2de, semaine 15)
>
> 2. Peut-on évaluer des tâches qui ne sont pas des compétences exigibles, par exemple dans le but de mettre en valeur le travail fait en DM ? (2002-2003, 2de, semaine 18)
>
> 3. Je me demandais si je pouvais, par l'intermédiaire des DM, évaluer des compétences qui ne sont pas exigibles d'après le programme officiel. Par ailleurs, j'ai proposé dans mon premier DM des problèmes dont les énoncés sont intégralement en français ; j'ai vu lors de la correction que certains avaient été bloqués par leur non-compréhension de la question posée – une élève m'a dit qu'elle trouvait mes consignes « trop compliquées ». Je me demande si je dois simplifier mes DM. (2003-2004, 4^{e}, semaine 4)
>
> 4. Peut-on donner en DM des exercices nécessitant des connaissances apprises en cours mais demandant une réflexion un peu plus poussée que pour les exercices faits en classe, des exercices sortant un peu de l'ordinaire ? Ou bien faut-il donner uniquement des exercices de même type que ceux faits en classe ? (2003-2004, 4^{e}, semaine 7)
>
> 5. Dans les programmes j'arrive à déterminer les types de tâches. Cependant les exercices qui sont des spécimens de ces types de tâches me semblent être des « exercices d'entraînement ». Ainsi comment doit-on traiter les « exercices de recherche » des manuels (en DM) ? (2003-2004, 5^{e}, semaine 16)

La soif d'excellence qui résonne dans le questionnement des professeurs stagiaires s'autorise de la présence dans la classe d'élèves visant à poursuivre des études scientifiques. La question suivante fournit à cet égard un exemple presque cocasse : alors que la rentrée 2000 voit, en seconde, l'éviction du programme de la notion d'écart type, l'auteur de la question voudrait réintroduire l'écart type par le biais d'un DM.

> En seconde, en statistiques, l'écart type n'est plus au programme. Peut-on quand même en parler ? Plus précisément, j'ai choisi, à chaque DM, de rajouter quelques questions (hors barème) pour ceux qui envisagent une 1re S. Puis-je alors parler d'écart type à la fin d'un DM de statistiques ? (2000-2001, 2de, semaine 12)

L'utilisation méliorative des DM est envisagée notamment lorsqu'une classe ne comporte que quelques « bons élèves », ce qui contraint le professeur à un enseignement dont le niveau reste modeste. En ce cas, les DM sont vus comme une manière de compléter vers le haut l'enseignement proposé. C'est ce qu'attestent, en particulier, les questions réunies ci-après.

> 1. Pour satisfaire la « soif » de recherche de quelques élèves, j'ai mis dans le premier DM un exercice « bonus » plus difficile noté sur 5 points (pour un devoir sur 20). Qu'en pensez-vous ? (2002-2003, 4^{e}, semaine 3)
>
> 2. Au dernier DM, j'ai donné un exercice facultatif que j'ai conseillé surtout aux bons élèves en disant aux élèves en difficulté de se concentrer sur le reste. Puis-je régulièrement donner un exercice facultatif difficile à ceux qui sont intéressés par la 1re S ? (2002-2003, 2de, semaine 7)
>
> 3. J'ai une classe de 34 élèves plus portée sur les matières littéraires (*i.e.* ils comptent aller en 1re L). Seules 4 ou 5 personnes souhaitent aller en 1re S et ont un bon niveau. Puis-je donner à ces élèves des DM différents ? (2002-2003, 2de, semaine 9)
>
> 4. J'ai une classe de seconde dans laquelle « seulement » 4 ou 5 élèves veulent passer en 1re S. Quand je me renseigne auprès des collègues qui ont des classes à fort profil scientifique (notamment ayant l'option MPI), je réalise qu'ils font du hors programme et qu'ils approfondissent beaucoup les notions du programme. Comment compenser ce « manque » qu'auraient les élèves de ma classe qui passeront en S pour qu'ils puissent suivre l'année prochaine ? Puis-je donner des DM différents ou avec des exercices supplémentaires aux élèves concernés ? Si oui, comment les évaluer ? (2002-2003, 2de, semaine 17)

Mais la pulsion venue des temps anciens ne s'arrête pas à ce type de configurations de classe, comme l'illustre la question suivante :

> J'ai une classe où le nombre d'élèves qui veulent aller en 1re S est important (plus des deux tiers). En conséquence, je donne des DM relativement difficiles. Mon souci est bien de les préparer pour la 1re S. Cela dit, les élèves trouvent effectivement les DM difficiles (en particulier le dernier). J'estime qu'ils sont intéressants pour les élèves (qu'ils soient « bons » ou « moins bons »). La difficulté est de trouver

des exemples de DM qui ne fassent pas changer d'avis les élèves qui se destinent à une 1re S. Quel est votre avis ? (2004-2005, 2de, semaine 14)

L'attitude dominante est bien de regarder le DM comme un réservoir de temps didactique et, si l'on peut dire, de « puissance mathématique ». La question suivante comporte à cet égard un aveu explicite, quoique à peine conscient sans doute :

En ce qui concerne le théorème de Pythagore et sa réciproque, peut-on donner des exercices d'entraînement rapides mais qui ne présentent pas de situation (type : téléviseur, menuisier…) et par exemple donner des situations en activité, en DM, cela par manque de temps ? (2002-2003, 4e, semaine 13)

Les parents, on l'a vu, sont vigilants vis-à-vis de ce qui leur apparaît comme une « rupture de contrat » de la part du professeur : de cela témoigne encore la question suivante.

Comment faire avec des parents qui prétendent connaître mon travail mieux que moi ? En DM, une question portait sur les pourcentages (programme de 5e), thème repris en exercices auparavant. L'élève n'a pas fait son DM, avec lettre des parents à l'appui m'expliquant que je ne devais pas donner un travail pour lequel je n'ai pas fait de cours (et cela de façon virulente !). (2001-2002, 4e, semaine 24)

La tentation que nous n'avons cessé de souligner semble toujours recommencée, et toujours contestée. La question ci-après en témoigne.

Quand les parents d'élèves contestent notre manière de travailler (DM trop éloigné, selon eux, de ce que l'on fait en classe, par exemple), comment réagir ? (2005-2006, 4e, semaine 7)

Il n'empêche : les DM sont vus comme un *ailleurs* de la classe, qui donnerait licence au professeur d'opérer comme il ne se le permet guère dans le cadre exigu des séances en classe. Plusieurs professeurs stagiaires, ainsi, envisagent les DM comme un moyen de compenser les déficits constatés chez certains élèves, voire de différencier leur action didactique. L'un d'eux interroge :

Un DM peut-il servir au soutien d'un groupe d'élèves ? Dans ce cas, comment faire lors de la correction en classe ? (2002-2003, 4e, semaine 9)

Une autre, qui vient tout juste de prendre en main sa classe, écrit :

J'ai proposé aux élèves un petit test de quinze minutes pour les préparer au chapitre que l'on va aborder. Or, en les corrigeant, je ne m'attendais pas à autant de différence entre les connaissances des élèves. Est-il profitable et surtout réalisable de leur proposer un devoir à la maison individualisé ? (2004-2005, 2de, semaine 1)

Mais d'autres contenus d'activité peuvent être encore assignés à un DM : les deux questions qui suivent en sont l'illustration.

> 1. J’ai proposé en DM un QCM. Pour en avoir parlé à plusieurs collègues, il me semble que les avis divergent quant à la valeur pédagogique d’un tel exercice, et quant au barème également. Faut-il renoncer au QCM ? Sinon, comment les noter ? (2004-2005, 2^de^, semaine 6)
>
> 2. Pour encourager les élèves à lire et à travailler leurs cours, est-il intéressant de leur demander de rendre à chaque fin de chapitre, par exemple, des fiches résumées qui seraient comme des DM ? (Je me suis rendu compte que les élèves qui pratiquaient déjà cette méthode avaient de bons, voire de très bons résultats.) (2004-2005, 2^de^, semaine 13)

Certains professeurs débutants peuvent se laisser entraîner dans ce qu’ils croient être une brèche ouverte dans la routine de la classe. Les deux questions qui suivent, dues au même élève professeur, témoignent de ces aventures didactiques dont ni les enjeux, ni l’issue n’apparaissent réellement maîtrisés.

> 1. Est-ce judicieux de donner à faire en DM un exposé sur la vie et l’œuvre d’un mathématicien (Thalès, Pythagore, etc.) ? (2003-2004, 4^e^, semaine 14)
>
> 2. Dans le cadre d’un DM (un exposé sur Thalès), un groupe d’élèves m’a rendu un travail extrêmement fouillé et détaillé sur, non seulement Thalès, mais aussi les mathématiques générales dans la Grèce antique. Je voudrais réutiliser cette mine d’informations (par exemple lors de l’introduction du théorème de Pythagore), mais le temps me manque. Avez-vous quelques suggestions de dispositifs permettant de tirer profit de ces recherches ? Par ailleurs, sur quels critères doit-on évaluer un exposé en général (écrit ou oral) ? (2003-2004, 4^e^, semaine 18)

Ce n’est pas, bien entendu, que la formation prodiguée reste muette sur la question. Mais c’est bien difficilement que ses préconisations semblent entendues par des jeunes professeurs, vieux déjà de tout un inconscient scolaire non analysé. Tel professeur stagiaire, ainsi, apporte cette formulation, qui dessine l’espace à l’intérieur duquel il semble encore osciller :

> En ce qui concerne les devoirs à la maison, doit-on plutôt poser des exercices plus difficiles ou plus longs que ceux que l’on poserait en devoir en classe, ou au contraire poser des exercices équivalents, dans l’optique de les y préparer ? (2001-2002, 4^e^, semaine 3)

L’intégration des DM dans une organisation mathématique d’ensemble ne va pas de soi. Les devoirs à la maison conservent d’un passé prestigieux, certes ancien, mais souterrainement influent, l’image d’un dispositif à fort pouvoir d’attraction didactique, capable de tout permettre – surtout ce que les séances en classe, dans leur relatif dénuement, semblent échouer à apporter. La question reproduite ci-après, où une conception emphatique et d’un autre temps est opposée à la vision simple et modeste du temps actuel, exprime ainsi à cet égard une tension essentielle dans la profession qu’embrassent les professeurs stagiaires :

Sur un chapitre donné, est-il préférable de donner un DM (et de le corriger) avant un DS, de manière à préparer en quelque sorte le DS, ou bien de le donner après le DS, de manière cette fois à approfondir les notions vues dans le chapitre et à réinvestir et/ou améliorer les connaissances ? (2001-2002, 5e, semaine 9)

2.9. La rémanence dans l'inconscient scolaire du rôle assigné aux devoirs dans l'ancien paradigme ne se heurte pas qu'aux injonctions officielles qui donnent au DM un tout autre rôle dans l'organisation de l'étude. Ainsi qu'on l'a vu, dans la pédagogie d'autrefois, le devoir faisait couple avec la séance en classe qui, elle, était dévolue en très grande partie à la *correction* du devoir, en quoi consistait l'essentiel de l'activité du professeur en présence des élèves. Or cet aspect de l'ancienne organisation didactique semble aujourd'hui naufragé : tout se passe en effet comme si, ni les élèves, ni les professeurs, en cela à l'unisson, ne supportaient plus ce temps donné à une affaire jugée par nombre d'entre eux terminée une fois la copie remise au professeur et rendue par celui-ci notée et annotée [17]. Rien sans doute n'est plus éloigné d'une organisation de l'étude où le travail accompli hors la classe avait pour objet de nourrir le travail en classe, qui venait en quelque sorte confirmer, renforcer, stabiliser les efforts entrepris en étude par les élèves. La réticence des professeurs stagiaires devant l'exigence supposée de procéder à une correction en bonne et due forme des travaux donnés à faire s'exprime donc en une longue plainte, qui égrène des « solutions » alternatives, motivées par des expériences frustrantes, comme l'indique aussi la question suivante.

Comment organiser la correction d'un contrôle ou d'un devoir à la maison ? J'ai fait l'expérience d'une correction au tableau où j'ai expliqué, corrigé, les erreurs les plus fréquentes que j'avais relevées, mais j'ai eu l'impression que peu d'entre eux écoutaient ou voyaient l'intérêt de cette correction. (2001-2002, 6e, semaine 7)

Plusieurs stratégies se font jour, dont la plus commune est sans doute de distribuer aux élèves un corrigé photocopié, en minorant en conséquence le temps passé en classe à la correction proprement dite. Le long échantillon de questions reproduit ci-après montre la force de la tentation qui s'impose à cet égard au professeur débutant.

1. Pour une correction de DM, est-ce une bonne idée de donner aux élèves la photocopie du devoir d'un élève qui est très bien rédigé ? (2000-2001, 2de, semaine 5)

---

[17] Sans doute y a-t-il là l'effet d'un changement dans la perception du temps didactique, devenue beaucoup plus formelle et sensiblement moins capable d'intégrer des retours en arrière – alors que, par contraste, on l'a dit, dans la première partie du XXe siècle encore, les programmes prévoyaient des révisions officielles du programme de l'année antérieure.

2. Comment gérer la correction des DM et des petites interrogations écrites ? Peut-on donner aux élèves une correction photocopiée (quitte à expliciter oralement ou au tableau les points sensibles, les erreurs les plus rencontrées), leur faire corriger leur copie eux-mêmes (après quelques explications) et la ramasser à nouveau ? Cela permet de gagner du temps en classe. Mais est-ce bien bénéfique pour les élèves ? (2001-2002, 4e, semaine 9)

3. Pour effectuer la correction d'un contrôle d'une heure, peut-on se permettre de développer certains points précis et de répondre aux questions des élèves qui ont eu la séance précédente leur copie et une correction écrite (totale) du contrôle ? La question pourrait être posée pour la correction d'un DM. (2001-2002, 4e, semaine 18)

4. Doit-on passer beaucoup de temps sur la correction des DM ou peut-on simplement leur donner une correction polycopiée et la commenter (notamment en passant plus de temps sur les erreurs répétées des élèves) ? (2002-2003, 2de, semaine 4)

5. Doit-on corriger un DM ou DS en classe lors de la remise des copies ou peut-on leur distribuer une correction sur feuille ? (2002-2003, 4e, semaine 4)

6. La correction des DS prend beaucoup de temps en classe, mais cela me semble nécessaire. Cependant, pour le DM, je leur distribue une correction lorsque je leur rends leurs copies. Cela fait gagner du temps, mais comment être sûre qu'ils retravaillent dessus ? (2002-2003, 4e, semaine 8)

7. Pour les corrections de DS ou de DM, est-ce qu'il vaut mieux corriger tous ensemble en classe ou distribuer un corrigé et « inviter » les élèves ayant des difficultés en AI pour détailler la correction ? (2003-2004, 2de, semaine 1)

8. Ma question relève du problème général de la correction des travaux réalisés en classe. En effet, si l'exercice était relativement facile et que la majorité des élèves l'ont fait dans son intégralité, ils s'ennuient – et, par conséquent, dans mon cas, bavardent – pendant la correction. Pourrais-je alors, dans le cas d'un DM, et pour un exercice majoritairement bien traité, en donner un corrigé photocopié et réserver la correction au tableau aux exercices plus difficiles ? La même question vaut pour la correction d'interrogations. Comment (et même pourquoi) imposer à tous une correction qui concerne seulement quelques-uns ? (2003-2004, 2de, semaine 3)

9. Comment gérer la correction des DS ? Doit-on faire la correction intégrale au tableau ? Doit-on distribuer un corrigé et le commenter ? De même, comment corriger les DM ? Peut-on se contenter de corriger les erreurs sur les copies ? (2003-2004, 2de, semaine 4)

10. Si tous les élèves ont bien réussi un DM, peut-on leur distribuer un corrigé ou doit-on quand même faire une correction en classe ? (2003-2004, 2de, semaine 7)

11. Combien de temps doit-on consacrer à la correction d'un DM ? Doit-on forcément y consacrer beaucoup de temps en classe pour une correction intégrale ? À l'inverse, une simple photocopie de correction distribuée suffit-elle – au risque qu'elle ne soit même pas lue ? (2004-2005, 4e, semaine 3)

12. Est-il possible de donner des corrigés écrits de DM et donc de seulement survoler la correction en classe ? (2004-2005, 2de, semaine 3)

13. Est-il intéressant de corriger les DM en classe entière ? Est-ce qu'un corrigé photocopié suffit ? (2004-2005, 2de, semaine 3)

14. Si je distribue une correction des DM, dois-je passer systématiquement un moment à revenir dessus en classe entière ? (2004-2005, 2de, semaine 4)

15. Comment gérer la correction des DM et DS ? Faut-il proposer une correction détaillée polycopiée aux élèves, leur laisser le soin de l'étudier et éventuellement reprendre les questions qui ont posé problème en cours avec eux ? Ou faut-il proposer une correction en classe avec les élèves et les laisser noter la correction, au risque d'avoir des élèves disant « Moi, j'ai fait juste à cet exercice, je ne prends pas la correction » ? (2004-2005, 2de, semaine 4)

16. Pour la correction d'un DM, j'ai envoyé successivement plusieurs élèves au tableau. La correction a duré une heure c'est-à-dire la totalité du cours. Est-ce à éviter ? Est-il alors préférable de distribuer un corrigé ? (2005-2006, 2de, semaine 3)

17. Comment rendre une correction de DM ou de contrôle profitables pour les élèves : correction en classe ou distribution d'un corrigé type ? (2005-2006, 2de, semaine 3)

18. L'ensemble des exercices donnés (y compris les DS et DM) doit-il être corrigé au tableau – par l'élève ou par l'enseignant ? – ou ces corrigés peuvent-ils faire l'objet d'un polycopié ? (2005-2006, 2de, semaine 3)

19. En combien de temps doit-on corriger en classe des DS ? Doit-on toujours corriger les DM, les interrogations en classe ou donner aux élèves un corrigé ? (2005-2006, 5^{e}, semaine 3)

20. Doit-on corriger tous les exercices au tableau (devoirs, DS, DM, etc.) ou peut-on donner une feuille de corrigé détaillé ? (2005-2006, 4^{e}, semaine 3)

21. Comment gérer la correction d'un DM ou d'un DS en classe ? Une correction photocopiée étant distribuée, une correction en classe des points importants et les plus « ratés » suffit-elle, au risque de laisser de côté certains élèves ? (2005-2006, 2de, semaine 4)

D'autres techniques sont également mises en œuvre, qui toutes visent à externaliser d'une certaine manière le travail de correction proprement dit. Telle stagiaire écrit ainsi :

> Pour la correction des interrogations et des DM, je donne les éléments de réponse, la conclusion. Les élèves ont à corriger sur leurs cahiers en soignant la rédaction. Je vérifie leurs corrections lorsque je ramasse le cahier. Est-ce une méthode possible ? (2001-2002, 4^{e}, semaine 14)

La correction, moment cardinal de l'étude dans le paradigme ancien, tend ici à être élidée, déplacée vers les périphéries de la classe, ainsi que l'attestent, parmi d'autres, les questions suivantes :

1. À la suite d'un contrôle, peut-on donner la correction à faire comme « devoir à la maison », et rajouter des points « bonus » ? (2001-2002, 6^{e}, semaine 5)

2. Est-ce une bonne idée de faire la correction d'un DS ou d'un DM pendant les modules plutôt qu'en classe entière ? (2002-2003, 2^{de}, semaine 5)

3. Lorsqu'un DS a porté sur des types de tâches dûment travaillés en classe et que rien ne n'est donc à ajouter dans la synthèse, comment tirer parti de la correction d'un devoir ? Est-il intéressant de demander aux élèves ayant raté un exercice d'en refaire un similaire en devoir à la maison ? Dans ce cas, comment les encourager à le faire ? En le notant comme un DM ? (2003-2004, 2^{de}, semaine 19)

La réalité n'est guère niable : spontanément, c'est-à-dire dans les contrats didactiques contemporains tels qu'ils se nouent dans les classes ordinaires, le temps de la correction et son contenu lui-même semblent devenus superfétatoires, en sorte que les élèves sont réputés s'y ennuyer tandis que le professeur craint d'y perdre son temps – ce qu'attestent les questions suivantes.

1. Comment faire une correction d'un DM ou d'un DS tout en intéressant les élèves ? (2004-2005, 2^{de}, semaine 4)

2. Comment éviter que pendant les corrections (d'exercices, de DM ou de DS) les élèves qui ont réussi s'ennuient ? (2004-2005, 4^{e}, semaine 7)

3. J'ai tenté plusieurs sortes de correction pour un DS : en DM (après avoir donné les exercices correspondants faits en classe) ; en commun au tableau ; en n'expliquant que les points qui ont posé problème ; etc. Je n'ai toujours pas trouvé la formule qui me convienne parfaitement, ainsi qu'aux élèves. Quelles peuvent être les solutions différentes ? (2005-2006, 4^{e}, semaine 10)

4. Comment faire en sorte que la correction d'un DS ou d'un DM serve au maximum les élèves ? Comment susciter l'intérêt de la classe lorsque beaucoup d'élèves considèrent ce travail comme une *n*-ième répétition ? (2005-2006, 4^{e}, semaine 11)

Bref, le temps presse, et les corrections, en lesquelles on ne voit plus le lieu d'un apprentissage essentiel, semblent dès lors intempestives : l'ennui décelé chez les élèves est le symptôme d'une absence de projet didactique partagé. On va donc chercher à réduire le temps de correction ; on demandera parfois l'autorisation de le faire, que l'on s'accordera peut-être plus souvent encore, contre les préconisations officielles elles-mêmes, d'abord dans des cas limites – par exemple sous le prétexte que le DM à corriger « a été réalisé par la quasi-totalité des élèves » –, ensuite de façon beaucoup plus générale – afin, comme l'écrit une professeure stagiaire, de « vérifier sans perdre trop de temps ».

2.10. Comme le suggèrent les questions reproduites dans ce qui précède, on pourrait conduire une étude analogue à propos des « devoirs de contrôle » ou DS (« devoirs surveillés »). Rappelons que, dans l'organisation de l'étude d'aujourd'hui, telle qu'elle est préconisée par les textes officiels, les devoirs de contrôle doivent être à la fois *peu nombreux* et, ainsi que l'explicitait l'ancien programme de seconde (en vigueur jusqu'à la rentrée 2000), « suffisamment *courts* pour permettre à la grande majorité des élèves d'étudier l'ensemble des questions posées et de *rédiger posément* la solution qu'ils proposent ». Dans la note de l'Inspection générale relatives aux travaux écrits des élèves, le contrat à propos de la fréquence et des diverses modalités de contrôle est formulé ainsi :

> Il convient de faire se côtoyer deux types d'épreuves écrites d'évaluation :
>
> – les interrogations écrites courtes (10 à 20 min) dont le but est de vérifier qu'une notion, une méthode ou une démonstration est correctement assimilée. On peut en prévoir une par chapitre du cours (soit une par quinzaine en moyenne) ;
>
> – les devoirs de contrôle (de 30 min en 6e à 3 ou 4 h en terminale) sont peu fréquents (2 à 3 par trimestre) et doivent rester de difficulté et de longueur raisonnables. Ils ne doivent en aucun cas déborder du programme de la classe, ni faire appel à des notions ou des méthodes qui n'y sont pas étudiées.

Là encore, le paradigme contemporain s'oppose au paradigme ancien, que marquaient les compositions trimestrielles, associées en amont aux « révisions trimestrielles » et, en aval, au « classement » des élèves [18]. Rappelons à cet égard que la disparition des compositions trimestrielles et des classements, et donc des révisions de fin de trimestre, a été amorcée, après la grande commotion de Mai-68, par une circulaire datée du 6 janvier 1969, signée du ministre de l'Éducation nationale de l'époque, Edgar Faure (1908-1988). Ce texte rappelle que c'est un arrêté du 5 juillet 1890 qui avait institué le système des compositions notées entre 0 et 20, aboutissant à un « classement linéaire » des élèves. Or cette manière de faire est désormais regardée comme à la fois peu crédible dans son fondement (la circulaire fait référence aux travaux de docimologie conduits à partir des années 1920) et, surtout, nocive dans ses effets, la *pédagogie de l'émulation* qu'elle concrétise aboutissant à toutes sortes d'effets pervers [19], y compris les « procédés douteux » qui se concrétisent par la « fraude aux

---

[18] Dans son *Dictionnaire de la langue pédagogique*, paru en 1971 aux PUF, Paul Foulquié définit ainsi la notion scolaire de *composition* : « Travail écrit (qui peut se réduire à une récitation) ayant pour but d'apprécier le savoir des élèves d'une classe, leur valeur intellectuelle et littéraire, appréciations qui se concrétisent par des notes et par un classement. Composition de mathématiques, d'histoire. Compositions trimestrielles. »

[19] Dans le *Dictionnaire d'histoire de l'enseignement* de Dimitri Demnard et Dominique Fourment paru en 1981 chez Jean-Pierre Delarge, on lit à l'entrée CLASSEMENT cette présentation critique typique de réalités pédagogiques aujourd'hui oubliées : « Échelle de rangs établie parmi les élèves d'une classe, selon leurs mérites. Les *Jésuites* (…) instituèrent les premiers de telles hiérarchies dans leurs collèges, visant à susciter l'émulation,

examens ». Le texte proscrit donc d'un même mouvement ce qui lui semble organiquement lié : compositions trimestrielles, notes sur 20, classements. On sait que cette tentative sera vouée à l'échec s'agissant de la notation : l'échelle réduite à cinq échelons (éventuellement désignés par les lettres A, B, C, D, E) qui est préconisée alors se révèlera impuissante à modifier l'usage installé de noter de 0 à 20 (en faisant usage, qui plus est, de demi-points, voire de quarts de points). En revanche, compositions et classements vont effectivement disparaître. À la redoutable composition de fin de trimestre, la circulaire demande de substituer « l'exercice de contrôle », qui deviendra l'actuel « devoir de contrôle » (ou, plus brièvement, le « contrôle », tout court). La circulaire présente alors ce dispositif nouveau comme « dépouillé de cérémonial mais mieux compatible avec la régularité et le calme du travail ». Derechef, un constat s'impose : bien qu'aucun des professeurs stagiaires n'ait à l'évidence connu l'ancien système, celui-ci a laissé des traces dans la culture réflexe de l'institution, où ils ont baigné élèves et qu'ils retrouvent en tant que professeurs. Comme à propos des DM, on ne se résigne pas aisément à l'idée de devoirs de contrôle *courts* et *peu nombreux*. Les compositions trimestrielles étaient un moment de vérité, où un cérémonial quelque peu solennel concourait à mettre en scène la rencontre de l'élève avec la réalité de ses acquis et de ses lacunes : dans un vocabulaire aujourd'hui courant, les compositions trimestrielles participaient sans ambiguïté d'une évaluation « sommative ». Or les contrôles demandés aux professeurs apparaissent d'emblée ambivalents à cet égard : d'un côté, en association avec des « interrogations écrites courtes », ils sont les instruments les plus saillants d'une évaluation « formative », possible et indispensable [20] ; d'un autre côté, au fur et à mesure de l'avancement du trimestre, ils apparaissent de plus en plus nettement comme les critères d'un jugement porté, notes trimestrielles à l'appui, par le conseil de classe. En ce

---

sinon la concurrence. Par la suite, dans les écoles primaires, l'instauration des *bons points* (…), et l'attribution des notes comptabilisées plusieurs fois par an, donnèrent lieu à de tels classements. Pourtant, ce type d'émulation qui ne tient pas compte des efforts individuels fournis par des élèves qui ont plus de difficultés à se surpasser que d'autres, crée souvent un climat inutile d'injustice, dont les résultats psychologiques peuvent se révéler négatifs, sinon parfois traumatisants. »

[20] Dans la partie consacrée à « L'évaluation en temps limité » du texte du groupe des mathématiques de l'IGEN déjà cité, on lit notamment : « Il convient de garder un rapport correct entre l'évaluation et la formation : c'est l'évaluation qui est au service de la formation, et non le contraire. En particulier, il ne faut pas négliger, par un choix judicieux des épreuves, le rôle formateur de l'évaluation. » Pour plus d'information, voir la notice *Évaluation & notation* de l'*Encyclopédie du professeur de mathématiques*, à l'adresse suivante : http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/index.html.

sens, ces contrôles demeurent hantés par l'ancien dispositif des compositions trimestrielles, et la tentation de leur restituer quelque chose de leur ancienne grandeur scolaire est présente à travers bien des questions formulées par les professeurs stagiaires, telle celle-ci :

> Il m'arrive souvent de donner en DS des sujets comportant un large panel de tâches à accomplir. Il se pose alors le problème de la répartition des points. Comment juger de l'importance des parties ? (2004-2005, 2^{de}, semaine 20)

Explicitement, son auteur soulève un problème d'évaluation chiffrée, mais ce qu'il nous dit en passant – en parlant d'un « large panel de tâches à accomplir » –, c'est que, à l'instar de bien de ses congénères, il participe d'une conception « gloutonne » du contrôle, qui voudrait *tout embrasser* – au risque de mal étreindre. La question suivante formule explicitement ce problème :

> Dans le dernier DS, j'ai voulu vérifier si toutes les tâches, techniques et technologies étudiées en cours sur deux chapitres (« Triangles isométriques » et « Fonctions affines ») étaient connues. Mais je me suis rendu compte pendant le contrôle que le devoir était trop long. Comment faire pour ne pas faire un DS trop long tout en évaluant toutes les tâches, techniques et technologies abordées en cours ? (2005-2006, 2^{de}, semaine 15)

À ce fantasme d'exhaustivité du contrôle sont associés d'un côté la déploration du manque de temps offert aux élèves, de l'autre le souhait d'allonger le temps alloué. Du premier aspect relève par exemple la question suivante :

> Que faire lorsque, lors d'un DS, on se rend compte que certains élèves ont été pénalisés par un manque de temps lié à un devoir trop long ? (2005-2006, 2^{de}, semaine 5)

Plutôt que de renoncer à cette conception un peu datée, nombre de stagiaires tentent alors de ruser avec les contraintes, par exemple en « maniant » adéquatement cette variable didactique qu'est le *barème*. Les questions ci-après témoignent de cette stratégie :

> 1. Est-il possible de donner un DS volontairement long quitte à adapter un barème particulier ? (2002-2003, 4^{e}, semaine 3)
>
> 2. Lorsque l'on donne un contrôle et qu'on s'aperçoit que celui-ci était objectivement trop long, comment l'évaluer ? Doit-on écarter un exercice de la correction ? (2002-2003, 4^{e}, semaine 7)
>
> 3. Doit-on prévoir des points de présentation dans le barème d'un devoir de contrôle long ? (2002-2003, 4^{e}, semaine 11)
>
> 4. Je me demande comment évaluer le temps que vont mettre les élèves pour faire un DS. Jusqu'à présent, je faisais moi-même l'interrogation et je multipliais le temps que j'avais mis par trois ou quatre. Cependant, la dernière interrogation a été visiblement trop longue pour les élèves, alors que je

n'avais mis que dix minutes pour la rédiger totalement. J'ai donc adapté le barème, mais cela me pose un problème. (2002-2003, 4^{e}, semaine 13)

5. J'ai l'intention de donner un DS à la fin d'un chapitre, mais il me semble un peu long. Pourtant il me permettra de vérifier si tous les points essentiels du chapitre ont été assimilés. Dois-je le donner quand même et adapter le barème ? Dois-je mettre un des exercices en facultatif ou dois-je le raccourcir tout simplement ? (2003-2004, 2^{de}, semaine 3)

Du deuxième aspect – la tentation d'allonger la durée des contrôles – témoignent entre autres les questions retenues ci-après :

1. Au cours des deux premiers trimestres, je n'ai proposé à mes élèves que des DS d'une durée d'une heure. Serait-il utile, indispensable ou sans intérêt de proposer des épreuves de deux heures au 3^{e} trimestre ? (2000-2001, 2^{de}, semaine 22)

2. J'ai deux heures de suite. Est-ce que je peux faire des DS de deux heures ? (2002-2003, 4^{e}, semaine 3)

3. Peut-on faire des DS de deux heures en 2^{de} ? (2003-2004, 2^{de}, semaine 6)

4. Un contrôle d'une heure et demie est-il trop long pour une classe de 4^{e} ? (2003-2004, 4^{e}, semaine 7)

Bien entendu, la démarche inflationniste ne va pas sans appréhension, comme le suggèrent les questions précédentes – qui ne sont pas que des demandes d'autorisation – et comme le montre la question suivante :

Je souhaiterais faire un DS d'une durée de deux heures, mais je crains que les élèves n'arrivent pas à se concentrer aussi longtemps. Mais je pense que cela constituerait un bon entraînement. Qu'en pensez-vous ? (2000-2001, 2^{de}, semaine 14)

Il semble que beaucoup de professeurs stagiaires ont du mal à passer d'une notion de contrôle à prétention exhaustive à une conception du contrôle comme prise d'information sélective, c'est-à-dire portant sur des contenus choisis – le problème de la sélection adéquate de tels contenus étant bien sûr, au-delà du professeur, un problème *de la profession*. En réalité, les interrogations reproduites plus haut sont en parties biaisées par la force d'influence du modèle ancien des « compositions », dont le rayonnement fossile enveloppe encore largement les technologies didactiques communément répandues. C'est ainsi que, dans la question suivante, on voit surgir sous la plume du professeur stagiaire l'expression (qui, en principe, n'a plus lieu d'être) de « contrôle trimestriel », qui mélange les âges du système éducatif.

Peut-on donner des fiches d'exercices aux élèves sur des notions « anciennes » ? D'une part pour permettre des révisions pour un contrôle trimestriel sur ces notions, d'autre part parce qu'une notion n'est acquise par les élèves qu'après une certaine maturation. (2001-2002, 4^{e}, semaine 12)

La prégnance du modèle ancien se marque notamment dans la propension à exiger des élèves de répondre de tout ce qui aura été fait « depuis le début de l'année ». Dans la question ci-après, ce principe l'emporte même sur la fonction propre d'un contrôle d'aujourd'hui – contrôler le ou les « chapitres » dont l'étude vient de se clore.

> Mes DS portent à chaque fois sur « tout le programme depuis le début de l'année » et tombent à intervalles réguliers indépendants des chapitres. Bien entendu, le DS porte principalement sur le dernier chapitre vu en classe mais est-ce grave si chaque chapitre n'est pas clos par un DS ? (2001-2002, 2^{de}, semaine 10)

Certains, il est vrai, s'interrogent, comme on le voit dans la question suivante.

> Pour les contrôles (de 10 à 15 minutes ou d'une heure), et en particulier pour les contrôles d'une heure, je leur demande de réviser tout depuis le début de l'année en géométrie et travaux numériques. Est-ce raisonnable de demander cela à des élèves de 4^{e} ? J'ai retenu l'idée de mettre dans un DS un quart de l'ancien DS ou d'un ancien DS. (2001-2002, 4^{e}, semaine 17)

Ceux qui n'ont pas pris de parti net sur la question en sont tout de même travaillés, et s'interrogent en conséquence, comme l'illustrent les questions que voici.

> 1. Lors d'un contrôle (en 4^{e}), peut-on donner des questions sur des thèmes qui ont été abordés en début d'année, ou doit-on se limiter au(x) thème(s) abordé(s) récemment ? (2001-2002, 4^{e}, semaine 10)
>
> 2. Jusqu'à présent, les contrôles que je posais portaient seulement sur le chapitre qui venait d'être fini. J'ai décidé de « glisser » dorénavant dans l'interrogation un exercice qui porte sur un autre chapitre, pour leur faire réviser ce que l'on a fait avant. Est-ce trop de travail à leur imposer ? (2001-2002, 4^{e}, semaine 14)
>
> 3. Un contrôle doit-il porter uniquement sur le chapitre qui vient d'être fait ou peut-il comporter quelques petites questions portant sur les différents chapitres précédents ? (2003-2004, 4^{e}, semaine 1)
>
> 4. Lorsqu'on donne un DS ou un DM aux élèves, peut-on y mettre des notions des chapitres de début d'année ? (2003-2004, 2^{de}, semaine 13)
>
> 5. Est-ce que les DS en classe peuvent porter, pour une petite part, sur une notion vue au début de l'année, de manière à contrôler que les élèves n'ont pas oublié ? (2004-2005, 4^{e}, semaine 12)
>
> 6. Y a-t-il un intérêt à faire un devoir pour travailler sur du long terme ? Par exemple, un DS portant sur plusieurs chapitres faits au début de l'année ? (2005-2006, 5^{e}, semaine 8)
>
> 7. Est-il conseillé de faire des « gros » contrôles récapitulatifs ? Ou alors doit-on se contenter de contrôler les connaissances au fur et à mesure ? (2005-2006, 4^{e}, semaine 12)

Le désir de totalisation peut aller plus loin, et viser l'ensemble d'une année, comme l'attestent les questions suivantes :

> 1. Peut-on, en fin d’année, donner un contrôle portant sur l’ensemble du programme de 4e ? (2003-2004, 4e, semaine 24)
>
> 2. Sur quels critères doit-on se baser pour porter notre jugement de redoublement ou de passage en fin d’année ? Doit-on faire en fin d’année un DS qui permette d’interroger les élèves sur les sujets importants abordés tout au long de l’année, ce qui permettrait de connaître les compétences de chacun des élèves ? (2004-2005, 4e, semaine 18)

L’aspect « sommatif » est ici évident. Mais la tentation totalisatrice, celle d’un « bilan complet », se fait sentir en d’autres moments du parcours annuel, comme dans la question ci-après (due, au reste, au même auteur que la dernière question reproduite ci-dessus).

> Peut-on, en milieu d’année (fin janvier, début février) faire un DS avec tous les chapitres abordés depuis le début de l’année, ce qui constituerait, pour chaque élève, une évaluation témoignant de son niveau en mathématiques pour le passage ou non en classe supérieure – le but de ce DS étant aussi d’avertir les parents sur d’éventuelles difficultés de leur enfant ? (2004-2005, 4e, semaine 14)

Le fantasme que nous poursuivons ici va quelquefois au-delà du « tout depuis le début de l’année ». Ainsi en est-il dans la question ci-après.

> J’aimerais faire un contrôle en tout début d’année portant sur certaines (ou sur les) connaissances supposées acquises des classes antérieures. Mes interrogations portent sur les outils de notation et sur la gestion du temps pour un tel contrôle. De plus, comment expliquer mes intentions ?… (2005-2006, 2de, semaine 0)

En vérité, de telles pratiques ne sont pas le privilège de professeurs débutants : ceux-ci les rencontrent en quelque sorte très vivaces encore chez leurs collègues plus anciens. En 2001-2002, un élève professeur écrit ainsi :

> Lundi prochain, nous faisons avec les autres professeurs de 4e un contrôle commun qui porte sur tout ce qui a été vu depuis le début de l’année. Qu’attendre réellement des élèves sachant qu’un chapitre – la statistique – n’a pas été abordé ? (2001-2002, 4e, semaine 9)

En 2005-2006, la situation n’a pas changé, à en juger d’après la question suivante, où le système DS/DM continue d’avoir sa vie propre, selon des usages en quelque sorte immémoriaux :

> Début janvier, mes élèves ont un contrôle commun à toutes les classes de 4e portant sur ce qui a été fait depuis la rentrée. Puis-je leur donner un DM récapitulatif à faire pendant les vacances ? (2005-2006, 4e, semaine 11)

Il n'est pas étonnant alors que, en dépit des préconisations officielles et de la formation prodiguée, ces manières de faire conquièrent certains jeunes professeurs, comme le suggère cette question :

> En 5e, contrairement aux autres niveaux, il n'y a pas d'évaluations communes en mathématiques prévues dans l'établissement. Est-il pertinent que je fasse faire à mes élèves un contrôle portant sur les chapitres travaillés depuis le début de l'année (dans le même esprit que les évaluations communes) ? (2005-2006, 5e, semaine 21)

Les contrôles communs imposent une norme qui, loin en général de donner lieu à une négociation raisonnée entre les professeurs concernés à propos du programme du contrôle, impose brutalement, à des exceptions et des détails près, le principe du « tout depuis le début de l'année ». Cette quasi-norme de la profession prolonge souterrainement, mais réellement, la pratique enfuie des compositions trimestrielles, qu'elle renouvelle à sa façon. Exemplairement, l'élève professeur se voit donc ici confronté à une contradiction entre, d'un côté, les normes prescrites par le ministère et « travaillées » en formation à l'IUFM, de l'autre la norme qui ne dit pas son nom mais qui structure au quotidien les exigences qu'il découvre en entrant dans la profession [21].

---

[21] Plusieurs questions mentionnent l'idée de *bilan* :

– Peut-on envisager d'évaluer les élèves à l'aide d'un QCM, et ce afin de faire un bilan à la fin de chaque trimestre, ou de chaque chapitre suffisamment important (les fonctions, la géométrie plane, etc.) (2000-2001, 2de, semaine 16)

– Je me demande comment utiliser les évaluations de 6e. La plupart des notions abordées sont retravaillées et approfondies en cours d'année. Serait-il bon de procéder à un bilan en cours d'année pour permettre aux élèves de se rendre compte de leur progression ? (2001-2002, 6e, semaine 12)

– J'ai vraiment du mal à cibler le niveau de mes interrogations écrites (je parle des contrôles-bilans). Pourrait-on avoir quelques idées directrices sur la manière d'élaborer une évaluation (je pense faire quelque chose de trop dur pour mes élèves) ? (2003-2004, 4e, semaine 6)

– Un bilan de connaissances mathématiques est-il nécessaire en début d'année pour évaluer les difficultés des élèves ? (2005-2006, 2de, semaine 0)

– L'année doit-elle débuter par une interrogation bilan de la classe précédente pour "calibrer" le cours que l'on va donner ? (2005-2006, 2de, semaine 0)

– Vaut-il mieux faire des contrôles de petite durée (15 min) régulièrement, ou plutôt des évaluations bilan à chaque fin de chapitre ? (2005-2006, 4e, semaine 3).

Il semble que les rédacteurs du nouveau programme de 6e aient en quelque façon perçu le problème, puisque, après avoir mentionné – classiquement – les « interrogations écrites courtes dont le but est de vérifier qu'une notion ou une méthode sont correctement assimilées » et les « devoirs de contrôle courts et peu nombreux qui permettent de vérifier, de façon plus synthétique, la capacité des élèves à utiliser leurs acquis, à la suite d'une

3. La notion d'AER

3.1. L'abandon demandé aux jeunes professeurs de certains habitus anciennement indurés dans la culture de la profession va de pair avec l'injonction, plus explicite et plus insistante encore, semble-t-il, d'adopter un nouveau type d'organisation de l'étude, à mettre en place dans la classe. Dans la formation donnée à l'IUFM d'Aix-Marseille, cette nouvelle manière d'enseigner est traditionnellement présentée aux professeurs stagiaires dès la rentrée pédagogique, laquelle a lieu, traditionnellement, dans les derniers jours du mois d'août, alors même qu'ils n'ont pas entamé encore leur stage en responsabilité. Le travail de cette première journée est en particulier nourri par une notice de plusieurs pages, la première de l'ensemble des notices qui constitueront, comme chaque année, l'*Encyclopédie du professeur de mathématiques*. Il s'agit, en l'espèce, d'un document intitulé *Première rentrée des classes* – sous-entendu : en tant que professeur [22]. L'équipe de formation y présente de façon structurée l'ensemble des questions sur lesquelles elle estime quasi indispensable de prévenir les stagiaires avant même la journée de « prérentrée » dans l'établissement où ils effectuent leur stage en responsabilité. Des conseils tout pratiques [23] y voisinent avec des développements plus fondamentaux. Après avoir ainsi attiré l'attention des élèves professeurs sur le « contrôle des absences », la « gestion des retards », le « règlement intérieur », etc., le rédacteur de la notice a rassemblé, dans une section intitulée « Quelques principes d'organisation du travail de la classe », ce qui va être au cœur du changement demandé aux jeunes professeurs. Même s'il l'on n'oublie pas qu'il s'agit là d'un texte dont le but est d'alimenter un travail conduit en séance sous la direction des formateurs, on ne peut qu'être frappé par l'obligation que ressent l'équipe de formation de confronter ainsi *ex abrupto* les nouveaux entrants dans le métier aux principes qu'exposent le long passage que nous reproduisons ci-après.

---

phase d'apprentissage », ils ajoutent : « certains devoirs de contrôle peuvent être remplacés par un bilan trimestriel qui est l'occasion de faire le point sur les acquis des élèves relatifs à une longue période d'étude. » On notera qu'un tel « bilan trimestriel », s'il peut *remplacer* un devoir de contrôle proprement dit, est soigneusement distingué, ici, des devoirs de contrôle au sens « moderne » de l'expression.

[22] Pour un très petit nombre d'élèves professeurs de chaque promotion, cet intitulé est trompeur : certains en effet ont déjà enseigné, y compris au secondaire, généralement dans des conditions précaires.

[23] À propos de la journée de rentrée scolaire des enseignants (la « prérentrée »), on lit par exemple ceci : « La structure de cette journée est sujette à des variations locales, mais certaines questions y sont nécessairement abordées auxquelles le professeur débutant – dans le métier ou dans l'établissement – doit rechercher des réponses fiables, en n'hésitant pas à *prendre des notes* afin d'exploiter au mieux la masse des informations recueillies. »

Le professeur stagiaire, à qui échoit la responsabilité d'une classe de collège ou de lycée, doit savoir que son expérience d'ancien élève d'une telle classe est à considérer méthodiquement de manière *critique* : il se trompera souvent – et parfois lourdement – s'il prétend reconduire sans plus de façon des modalités de travail et de vie collective qui lui semblaient peut-être aller de soi du temps où il était lui-même élève d'un collège ou d'un lycée. Dans la classe de mathématiques, ainsi, le « cours magistral » n'est aujourd'hui plus de mise, et il en va de même de cette forme adoucie qu'est le « cours dialogué », qui fait à l'élève une place souvent illusoire. L'organisation didactique, dont dépend d'une manière essentielle la *réussite des apprentissages*, est aujourd'hui centrée sur la notion d'*activité*. Encore cette notion doit-elle être précisée ! Trop souvent, en effet, ce mot semble ne désigner qu'une simple phase « préparatoire », voire un pur « échauffement » en début d'heure, sans lien fort avec ce qui suivra. Par contraste, l'activité que l'on qualifiera ici d'*activité d'étude et de recherche* (AER), qui doit laisser une large place à l'action et à la réflexion *des élèves*, est *le cœur de la vie mathématique de la classe*. C'est là, en effet, que se construisent les mathématiques que le professeur doit enseigner et que les élèves doivent apprendre : toute AER proposée à la classe doit ainsi provoquer l'émergence de notions et outils mathématiques visés. Le matériau mathématique élaboré est alors mis en forme – *par la classe, sous la direction du professeur* – dans une *synthèse* qui en précise les différents composants et les *« institutionnalise »* d'une manière presque définitive. Au-delà de la synthèse, en effet, la classe doit ensuite *s'exercer à maîtriser* les contenus mathématiques ayant subi cette première mise en forme, *et doit les « faire travailler »* : c'est là le rôle des *exercices* (le mot est pris ici en son sens strict) et des *problèmes*, lesquels permettent *de pousser plus loin*, d'une façon ou d'une autre, sur tel ou tel point, la construction mathématique entreprise dans l'AER ou la suite d'AER réalisées. À un tel « travail » de l'*organisation mathématique* mise en place jusque-là doit répondre alors une *reprise* de la synthèse, qui en retouche certains points et en complète d'autres. L'utilité pour un apprentissage solide de cette exigence didactique – que les traditionnels « corrigés » *ne satisfont que très imparfaitement* – ne saurait être surestimée.

On notera d'abord, bien sûr, la mise en garde contre l'inertie dont les destinataires de ce message pourraient être victimes : le passage du temps, leur signifie-t-on en quelque sorte, a disqualifié nombre de pratiques qui leur étaient familières en tant qu'élèves de collège ou de lycée. Par contraste, ce qu'il y a de neuf est symbolisé par le mot d'*activité*, dont on leur indique que le concept n'est pas si simple, et qu'en particulier on ne saurait le superposer à l'idée sous-jacente à l'expression, familière à certains professeurs, d'activité *préparatoire*. Contre cette réduction de la notion d'activité à celle d'un échauffement, d'un « tour de chauffe », le texte avance l'expression d'*activité d'étude et de recherche*, dont le sigle, AER, va devenir emblématique de ces « nouvelles » manières d'enseigner avec lesquelles les professeurs stagiaires sont invités à se familiariser. Bien entendu, ce dispositif didactique fondateur qu'est l'AER ne saurait vivre à l'état isolé : il ne peut exister durablement qu'en association organique avec deux autres dispositifs, celui des *synthèses*, qui mettent en forme le *produit* des activités d'étude et de recherche, et celui des *exercices & problèmes*, le mot d'exercice retrouvant ici son sens vrai [24], qui font « travailler » l'organisation mathématique construite et la maîtrise qu'on en a. Ainsi se dessine une opposition entre une structure *binaire*, établie au XIX^e^ siècle mais encore fortement prégnante dans la culture professorale, la structure Cours/Exercice, et une structure *ternaire*, que l'on vient d'évoquer. La mise en contact brutalement opérée par le texte que nous suivons a une raison toute concrète, que la suite du passage cité plus haut révèle alors :

> À l'ancienne opposition binaire Cours / Exercices s'est ainsi substituée une structuration *ternaire*, Activités / Synthèses / Exercices & problèmes, qui doit elle-même trouver une traduction appropriée dans l'organisation des *traces écrites*. À nouveau, même dans les classes ayant adopté une organisation ternaire du travail mathématique – elles sont la majorité –, on trouve encore trop souvent une organisation *binaire* des traces écrites, incongruité qui diminue l'efficacité du travail effectué avec les élèves. En rupture avec cette tradition souvent mécaniquement poursuivie, mais en harmonie avec l'organisation de l'étude très généralement adoptée, les traces écrites doivent donc comporter les *trois* rubriques indiquées ci-dessus. Les programmes scindant le corpus mathématique à étudier en trois grands *domaines* (en gros : Calcul [3. Le mot *calcul* est pris en un sens extensif, incluant au fil des classes le calcul sur les nombres, le calcul littéral, le calcul trigonométrique, le calcul sur les fonctions, le calcul vectoriel, le calcul infinitésimal, etc.], Géométrie, Statistique), lorsque les élèves utilisent un classeur, celui-ci sera divisé d'abord en trois parties correspondant aux trois domaines, chaque partie étant subdivisée à son tour en les trois rubriques que forment respectivement les AER, les synthèses, les exercices et problèmes [4. Le programme de seconde préconise un « cahier de statistique » (qui devrait être conservé par l'élève en 1^re^ puis en terminale) ; ce cahier est en fait pour l'essentiel un cahier *d'AER de statistique*]. À cela s'ajouteront deux rubriques *communes aux trois domaines mathématiques* : la première rassemblera les *travaux* (effectués en classe ou « à la maison ») faisant l'objet d'une *« copie »* remise au professeur en vue de sa *notation* éventuelle (DM, DS, interrogations écrites, etc.) ; la seconde, que l'on peut intituler *Vie et travail de la classe en mathématiques*, permettra de consigner par écrit un

---

[24] Le mot d'exercice renvoie à l'idée d'une pratique régulièrement reconduite : on s'exerce à réaliser des tâches d'un type déjà familier ou avec lequel on continue de se familiariser. Par contraste, un *problème* comporte une difficulté encore jamais rencontrée dans la communauté d'étude où il est « posé ». (Sur la notion de problème, voir la notice *Questions et réponses* de l'*Encyclopédie du professeur de mathématiques* de l'année 2005-2006 : http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fc/encyclopedie/volume2/notices_2005-2006.html.)
La rencontre avec un type de tâches inédit engendre un *problème* : celui d'élaborer une technique adéquate, bien justifiée, permettant d'accomplir des tâches de ce type. Ce problème une fois résolu, on devra encore s'exercer à mettre en œuvre ladite technique sur un grand nombre de tâches du type considéré.

certain nombre de directives et d'explications relatives aux conditions, modalités et moyens du travail de la classe et des élèves. Lorsque les élèves utilisent des cahiers, on mettra en œuvre les principes précédents d'une manière appropriée : dans le cas même où les élèves ne disposeraient que d'un unique cahier de mathématiques à la fois (ce qu'imposent certains établissements), on pourra par exemple consacrer les pages paires aux AER et les pages impaires (hormis la première !) aux synthèses, en consignant exercices et problèmes (quand ils ne font pas l'objet d'une « copie ») dans le cahier pris à rebours. Les dispositions adoptées à cet égard seront consignées sous la rubrique *Vie et travail…*, laquelle pourra en ce cas trouver sa place dans le cahier de textes individuel par exemple. À tout cela devra être ajouté un *cahier de brouillon* – ou, du moins, des *feuilles* de brouillon –, instrument nécessaire pour que l'élève mène une recherche *personnelle* en classe même, et qui lui rappellera discrètement que son engagement effectif dans le travail proposé est une exigence didactique essentielle pour la réussite de ses apprentissages.

La volonté de passer à une organisation ternaire se heurte en effet à l'inertie culturelle de la structuration des documents de travail de l'élève en *Cours* et *Exercices* : c'est cette antique bipartition qui, si l'on n'y prend garde, vient gêner le fonctionnement d'une organisation générale de l'étude qui soit véritablement compatible avec la trifonctionnalité didactique préconisée ici.

3.2. Chacun des trois volets composant le triptyque évoqué pose des problèmes de réception spécifiques – problèmes qui se cumulent lorsqu'il s'agit, pour l'élève professeur, de recevoir, d'organiser dans la classe et d'y mettre en œuvre le triptyque lui-même. Il y a là un point crucial dans la formation des professeurs stagiaires, sur lequel les séminaires des années auxquelles nous nous référons dans ce travail ne cessent de mettre l'accent [25]. À titre d'exemple, examinons ce que livrent sur cette question les notes du séminaire de l'année 2001-2002. Dès la première séance, on y découvre ainsi le développement suivant, où un schéma suggestif rappelle qu'une mise à jour didactique est indispensable pour celles et ceux qui demeurent marqués par le diptyque Cours/Exercices.

[25] Jusqu'en 2002, la notice *Première rentrée des classes* n'existait pas sous la forme décrite ici, ou ne comportait pas encore les développements relatifs à la structure ternaire de l'étude. À partir de 2002-2003, l'insistance sur la structure ternaire de l'organisation de l'étude dans les comptes rendus des séances s'affaiblit un peu, dans la mesure où la question est abordée frontalement, d'emblée, et non plus au long cours, au gré de la dynamique du séminaire.

1. *L'organisation de l'étude*, en classe et hors classe, était autrefois fondée sur la structure *binaire* Cours-Exercices. Depuis plusieurs décennies maintenant, cette structure jadis classique a généralement laissé la place à une structure *ternaire*, que concrétisent les vocables d'*activités*, de *synthèses* et d'*exercices & problèmes*.

2. Pour des raisons profondes, sur lesquelles on reviendra, on parlera ici d'activités d'*étude et de recherche* (en abrégé : AER), plutôt que d'activités, tout court, ou, pire encore, d'activités « préparatoires » (expression qui n'apparaît nulle part dans les programmes, et qui est une création des manuels). Le schéma suivant symbolise alors le changement intervenu depuis une vingtaine d'année, au collège d'abord, puis, plus progressivement, au lycée :

~~Cours~~ **Exercices**

AER **Synthèse** **Exercices & Problèmes**

Comme l'indiquent les flèches, le contenu du « cours » d'autrefois est reversé pour l'essentiel dans la *Synthèse* – laquelle, on le verra, ne se limite pas pour autant à ce seul contenu. Semblablement, une partie de la catégorie traditionnelle des « exercices » trouve sa place dans les *AER*, le terme d'exercices reprenant ici son sens vrai – on ne saurait l'appliquer qu'à ce qui permet *de s'exercer*, et non, par conséquent, à une difficulté que l'on rencontre *pour la première fois*. Etc.

3. La tripartition

AER / Synthèse / Exercices & Problèmes

doit notamment être observée à propos des *travaux hors classe* proposés aux élèves : loin de tout faire entrer dans une unique rubrique « Exercices » servant de fourre-tout, il convient de préciser si le travail proposé est un exercice au sens vrai du terme, ou un travail de *préparation* d'une *AER* ou d'un temps de *synthèse*, ou encore un travail de *mise en forme* d'un exercice ou d'une activité réalisée en classe, etc.

Lors de la 5^{e} séance, cette année-là, le responsable du séminaire se saisit d'une question posée deux semaines auparavant pour rectifier un vocabulaire fautif dont il n'ignore pas qu'il révèle une structure sous-jacente très prégnante encore :

Faut-il faire en module des activités préparatoires au cours ? (2001-2002, 2de, semaine 3)

La réponse est sans détour, et prend appui sur une comparaison, ou plutôt sur une identification foncière, *mutatis mutandis*, entre le travail de construction des organisations mathématiques dans la classe et le travail de production de telles organisations mathématiques par les mathématiciens :

L’expression « activités préparatoires » *ne figure nulle part dans les programmes*. Elle est une invention des auteurs de manuels, et a pour principal inconvénient d’induire en erreur sur ce qu’est une AER : non pas un « échauffement », un *warm-up*, comme on dit en anglais, un « tour de chauffe », mais *le cœur même du travail mathématique*. Lorsqu’un mathématicien travaille sur un problème, lorsqu’il obtient à grand-peine quelque résultat, on ne regarde pas cela comme… un « échauffement préparatoire » à la rédaction d’un article (ou d’une thèse) ! En classe comme ailleurs, l’AER est le lieu *où l’on fait des mathématiques*, même si le travail du mathématicien *ne peut se limiter à cela*, en ce sens que l’AER appelle une « mise en forme », une « synthèse », qui créera la *face visible* de son travail. Parce qu’on ne connaît vraiment *que ce qu’on a pris la peine de refaire*, il convient donc d’écarter fermement une expression – activité « préparatoire » – certes largement répandue, mais qui exprime surtout une vision de *consommateur de science toute faite*, et non de *producteur*, même infiniment modeste, *de science en train de se (re)faire*.

Le fait que la structuration la plus commune des traces écrites se conforme implicitement au diptyque Cours/Exercices est bien une difficulté cardinale, qui émerge tant dans la pratique que dans la pensée des professeurs stagiaires. L’un d’eux interroge ainsi :

> Le lycée où je suis conseille le cahier de statistique, ce qui n’est pas très pratique pour la séparation Activités / Synthèse / Exercices. (2001-2002, 2de, semaine 8)

La réponse, apportée lors de la séance 9, est fort simple : ce que disent les textes officiels du « cahier de statistique » dont ils préconisent la mise en place en seconde (et qui devrait suivre l’élève en première puis en terminale) font de celui-ci un « cahier d’*AER de statistique* », en sorte qu’il n’y a pas de conflit fondamental avec la structuration ternaire des traces de l’étude préconisée par l’équipe de formation [26]. À cet égard, la réponse donnée insiste sur le fait que la proposition « officielle » de faire vivre un cahier de statistique peut être élargie : il n’y a pas de vraies raisons de ne pas avoir aussi un « cahier de géométrie » et un « cahier de “calcul” », même si les rédacteurs des textes officiels, qui paraissent avoir une idée claire de ce que pourrait être le contenu d’un cahier d’AER de statistique, montrent une imagination didactique inégalement déliée s’agissant du domaine de la géométrie ou de celui des calculs. Plus encore, si l’on peut dire, le développement donné à la réponse pousse en avant le

[26] Le programme de seconde précise notamment : « Les notions de fluctuation d’échantillonnage et de simulation ne doivent pas faire l’objet d’un cours. L’élève pourra se faire un “cahier de statistique” où il consignera une grande partie des traitements de données et des expériences de simulation qu’il fait, des raisons qui conduisent à faire des simulations ou traiter des données, l’observation et la synthèse de ses propres expériences et de celles de sa classe. Ce cahier sera complété en première et terminale et pourra faire partie des procédures d’évaluation annuelle. »

rapprochement entre le cahier d'AER et ce registre emblématique des laboratoires scientifiques qu'est le cahier de laboratoire : l'idée est ici que les traces écrites d'une AER doivent contenir nombre d'informations que, à tort, « la mise au net » du cours traditionnel écarte impitoyablement. En fait, lors de la même séance de séminaire, une question va être posée qui, à la séance suivante, relancera le travail sur ce sujet :

> Un professeur de l'établissement fonctionne suivant le triptyque cahier de recherche / cours / exercices. La différence majeure avec notre construction du triptyque est que le cahier de recherche (AER) est un cahier de brouillon. Donc les élèves ne sont pas censés reprendre à la maison cette partie du travail. Pour le travail que je propose, j'ai la conviction qu'ils ne reprennent pas le cahier d'AER bien que je leur aie expliqué qu'ils devaient le reprendre pour mieux comprendre la synthèse. Comment les convaincre de cette utilité ? (2001-2002, 4e, semaine 9)

Cette question illustre bien les à-peu-près et les dénaturations dont la notion d'activité peut être la proie à l'occasion de sa percolation au sein du système éducatif : dans l'organisation adoptée par le professeur évoqué, le travail d'étude et de recherche conserve son statut privé, personnel, et n'accède pas au statut d'activité à la fois publique (au sein de la classe) et collective, qui déterminera le contenu de la synthèse, c'est-à-dire du « cours proprement dit ». La réponse apportée le souligne dans les termes suivants :

Cette observation illustre l'un des obstacles à franchir pour imposer, dans la culture scolaire actuelle, un registre d'écriture – celui du « cahier » d'AER – qui ne prétende pas à la pseudo-« impeccabilité » du traditionnel « cahier de cours » : dès lors qu'on y admet essais, erreurs, ratures, reprises, annulations, on verserait donc du côté du « cahier de brouillon » ! À cet égard, il faut méditer le rapprochement opéré lors de la séance dernière avec le « cahier de laboratoire » :

– en un sens, comme il en va avec un cahier de brouillon, le cahier d'AER *ne doit pas être expurgé* des traces écrites ou figurées que, de manière légitime, on prendra ultérieurement la décision de ne pas intégrer dans la *synthèse* ;

– le cahier d'AER s'éloigne pourtant du cahier de brouillon en cela qu'il n'est pas un document « intime », mais une chronique qui doit permettre de reconstituer la recherche conduite, exigence que l'un des textes examinés lors de la séance 9 énonçait en ces termes : « Écrivez toujours avec le souci que quelqu'un d'autre puisse comprendre exactement votre cheminement à la lecture du cahier de laboratoire ».

En passant, la réponse proposée fait aussi référence à un autre registre écrit, qui s'est introduit à la faveur de la mise en place des travaux personnels encadrés (TPE) en classe de première, puis en classe terminale [27] :

Le cahier d'AER doit de même être rapproché d'un nouveau venu sur la scène scolaire, le *carnet de bord* que les élèves doivent tenir dans le cadre de leur *travail personnel encadré* (TPE), en classe de 1re et, désormais, également en terminale, carnet de bord dont la brochure ministérielle *Mise en œuvre des Travaux Personnels Encadrés* publiée à la rentrée 2000 précise en ces termes la fonction :

Défini dans sa forme par l'équipe de l'établissement, le carnet de bord n'est pas un registre de présence. Trace d'un itinéraire personnel, avec ses tâtonnements et ses infléchissements, il permet à l'élève de noter, au fil du temps, le déroulement et les principales étapes de son travail. Il garde également la mémoire des documents consultés et leurs références (*op. cit.*, p. 15).

Un autre passage du même texte propose cette définition :

Carnet de bord : indispensable aux élèves, parce qu'il garde la trace des étapes de leur travail et les conduit à penser leur synthèse finale, il est aussi un outil précieux pour les enseignants qui mesurent, grâce à lui, la qualité de la démarche et l'investissement de chaque élève (*ibid.*, p. 21).

Là encore, il s'agit de faire exister, contre le fantasme scolaire d'impeccabilité, un registre qui, par définition, donne à voir les incertitudes d'une recherche.

La « licence » octroyée, voire préconisée à propos des traces écrites des AER, scolairement incorrecte en ce qu'elle rompt avec le souci d'impeccabilité traditionnelle, fait couple pourtant avec la notion de synthèse, qui comporte, elle, l'idée et d'une mise en forme et d'une mise au net des praxéologies mathématiques qui ont émergé. C'est ce que, pour finir, la réponse proposée souligne en ces termes :

De la même façon que professeurs et élèves doivent aujourd'hui apprendre ensemble à assumer une telle situation d'à-peu-près rédactionnel, de même il convient d'apprendre à pratiquer le passage, dans une classe donnée, du régime de l'AER au régime de la synthèse. Ce passage doit se faire, non à la sauvette, mais selon un dispositif clairement mis en place. Il pourra ainsi s'appuyer, au moins en un premier temps, sur cette double règle : la révision du cahier d'AER préparatoire à la synthèse est le travail *exclusif* donné à faire hors classe pour la séance où aura lieu la synthèse ; les élèves sollicités dans le cadre de la synthèse pour qu'ils restituent le travail accompli reçoivent une note d'oral chiffrée.

---

[27] La brochure ministérielle *Mise en œuvre des Travaux Personnels Encadrés* (Ministère de l'Éducation nationale 2000) est disponible sur http://www.cndp.fr/secondaire/tpe/pdf/tper2000.pdf.

3.3. Mais que désigne plus précisément la notion d'activité d'étude et de recherche ? Il semble [28] que cette notion s'inscrit dans la filiation de la notion de *situation didactique* telle qu'elle a été produite, développée et travaillée dans la lignée des travaux de Guy Brousseau [29]. Mais la référence est aussi, plus humblement, à ce qui est à l'évidence un autre rejeton de la théorie des situations didactiques, à savoir les prescriptions contenues dans les programmes des classes de collège fixés par l'arrêté du 14 novembre 1985 [30]. Les instructions générales indiquent notamment que les « séquences » de travail au cours d'une séance « sont centrées sur l'étude de situations mettant en jeu les "outils" visés… ». Le même texte donne de ce principe l'illustration simple (et fondamentale) que voici :

> Par exemple, pour l'acquisition des techniques opératoires sur les nombres décimaux, il ne suffit pas de décrire des placements de virgule et d'adjoindre éventuellement des zéros adéquats. Il est nécessaire d'étudier des situations dans lesquelles on a besoin d'opérer sur des nombres décimaux, et d'écrire un même décimal sous plusieurs formes…

L'assertion clé concerne le *besoin* éprouvé dans l'accomplissement de la tâche problématique assignée aux élèves. Tel est le grand principe que les instructions poussent en avant : « il est indispensable, y lit-on encore, que les connaissances aient pris du sens pour [l'élève] à partir de questions qu'il s'est posées et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes. » Ces exigences sont explicitées en un passage qui souligne la dialectique de l'ancien et du nouveau – la rencontre en situation avec des connaissances nouvelles, rencontre elle-même appuyée sur des acquisitions antérieures, engendrera de nouvelles acquisitions permettant de répéter cette boucle de l'ancien et du nouveau :

> … les professeurs vont avoir à choisir des situations créant un problème, dont la solution fera intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour des « outils » qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente.

L'insistance se porte sur le fait de provoquer la rencontre avec des situations problématiques où des notions antérieurement étudiées vont concourir à résoudre le problème proposé en

---

[28] Voir Yves Chevallard, *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*, conférence plénière au 1er congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (Baeza, 27-30 octobre 2005). À paraître.

[29] Voir Guy Brousseau, *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1998.

[30] Voir Ministère de l'Éducation nationale, *Collèges. Programmes et instructions* (CNDP, 1985). Ces programmes entrent en vigueur successivement à la rentrée scolaire de 1986 pour la classe de 6e, de 1987 pour la classe de 5e, de 1988 pour la classe de 4e, et de 1989 pour la classe de 3e.

même temps que cet effort de résolution engendrera des connaissances nouvelles elles-mêmes indispensables. À cet égard, les instructions mettent en avant la dialectique de la création et de l'institutionnalisation des connaissances mathématiques, ainsi que le montre l'extrait suivant :

> Chaque sujet mathématique n'est pas un bloc d'un seul tenant, il n'a pas à être présenté de façon exhaustive. Il convient au contraire de faire fonctionner à propos de nouvelles situations, et autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision, les notions et « outils » mathématiques antérieurement étudiés ; il convient également de préciser à chaque étape de l'apprentissage quelles connaissances sont désormais en place ; il convient enfin de mettre en œuvre des exercices de synthèse pour coordonner des acquisitions diverses.

On voit ici se dessiner la tripartition dont nous avons parlé longuement : les « nouvelles situations » correspondent aux AER, le fait de préciser les connaissances qui sont « désormais en place » se réfère aux synthèses, et, en dépit d'une légère anomalie de vocabulaire, les « exercices de synthèse » renvoient aux exercices & problèmes qui permettent de « travailler » l'organisation mathématique en construction. Le texte examiné se signale en particulier par l'accent qui y est mis sur la nécessité de mobiliser assez fréquemment les connaissances antérieurement mises en place, à titre d'outils dans l'étude de situations nouvelles : un élément mathématique nouveau doit non seulement être rencontré, à l'origine, comme participant de la résolution d'un certain problème, mais il doit continuer, une fois mis en place, à intervenir dans la résolution d'autres problèmes encore – qui, eux-mêmes, feront rencontrer pour la première fois, sous la forme du manque, les connaissances que l'on entend faire advenir dans la classe. Cette recommandation est ubiquitaire dans le texte que nous examinons, où elle prend par exemple la forme suivante :

> L'étude d'une notion à un niveau déterminé implique qu'elle sera désormais, et le plus souvent possible, intégrée systématiquement à l'activité mathématique.

3.4. Dans la formation prodiguée, le fonctionnement didactique correspondant à la structure ternaire de l'étude est analysé à l'aide d'un modèle dit *des moments didactiques* (ou des moments de l'étude). Par rapport aux indications des textes officiels, le propos se fait ici beaucoup plus précis, au prix d'une complexité renforcée. Le problème envisagé est celui de la mise en place de l'organisation de l'étude, notée $\partial\mathcal{O}$, permettant la mise en place d'une certaine organisation mathématique locale $\mathcal{O} = [T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{i\in I}$. Le modèle des moments didactiques est fondé sur le constat que, quelle que soit la structure de l'organisation didactique $\partial\mathcal{O}$, celle-ci doit permettre d'assurer, de façon éventuellement minimale, certaines grandes fonctions didactiques, lesquelles sont précisément appelés des *moments* didactiques, et cela parce que, quelle que soit $\partial\mathcal{O}$, « il arrive forcément un moment » où telle ou telle action didactique est réalisée, « où, par exemple, la classe, sous la direction du professeur, *rencontre* pour la première fois le type de tâches T_i ($i \in$ I) ». De ces différentes fonctions didactiques qu'il apparaît indispensable de situer, les notes du séminaire pour l'année 2000-2001 donnent alors la présentation concise suivante [31].

De manière précise, étant donné l'organisation mathématique ponctuelle $\mathcal{O}_i = [T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i] \subset \mathcal{O}$, où θ_i et Θ_i sont les parties de θ et Θ permettant de justifier le bloc $[T_i/\tau_i]$, on distingue 6 moments :

- le moment *de la première rencontre* avec le type de tâches T_i ;
- le moment *exploratoire*, qui voit *l'exploration* du type de tâches T_i et *l'émergence de la technique* τ_i ;
- le moment *technologico-théorique*, qui voit *la création du bloc* $[\theta_i/\Theta_i]$;
- le moment *du travail* de l'organisation mathématique créée, et en particulier *du travail de la technique*, où *l'on fait travailler* les éléments de l'OMP élaborée pour s'assurer qu'ils « résistent » (et, le cas échéant, pour les améliorer), et où, en même temps, on *travaille sa maîtrise* de l'OMP considérée, et en particulier de la technique τ_i ;
- le moment *de l'institutionnalisation*, où l'on *met en forme* l'organisation mathématique $[T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i]$, en précisant chacun de ses composants, et en l'amalgamant à l'organisation déjà institutionnalisée, $\sum_{j<i}[T_j/\tau_j/\theta_j/\Theta_j]_{j\in \mathrm{I}, j<i} = [T_j/\tau_j/\sum_{j<i}\theta_j/\sum_{j<i}\Theta_j]_{j<i}$;
- le moment *de l'évaluation*, où l'on évalue sa maîtrise de l'organisation mathématique créée, mais aussi où l'on évalue cette organisation mathématique elle-même.

La suite de la présentation proposée explicite brièvement la relation entre l'ensemble des six moments de l'étude et la structure ternaire de l'étude [32] :

Les moments didactiques sont en étroite correspondance avec la structure ternaire déjà envisagée :

[31] Le sigle OMP employé ci-après désigne une organisation mathématique *ponctuelle*, c'est-à-dire constituée autour de ce « point » qu'est un type de tâches unique T : une OMP s'écrit donc sous la forme $[T/\tau/\theta/\Theta]$.

[32] Le moment de l'évaluation est en fait clivé entre l'évaluation de l'organisation mathématique construite et l'évaluation de la maîtrise qu'en ont les élèves. Le premier volet est lié au moment de l'institutionnalisation, qu'il permet d'éclairer et de guider. L'évaluation du rapport des élèves à l'organisation mathématique construite se réalise classiquement à travers des travaux notés (tels les « DM » et « DS » qui sont au cœur de la section 2 de ce chapitre), ou du moins « évalués », travaux qui, toutefois, participent aussi plus largement de la dynamique de l'étude, notamment par les insuffisances qu'ils permettent de mettre en lumière dans le travail réalisé jusque-là. Sur ces questions complexes, voir la notice *Évaluation & notation* déjà mentionnée.

• le moment *de la première rencontre*, le moment *exploratoire*, le moment *technologico-théorique* se réalisent dans l'*Activité d'étude et de recherche* (AER) ;

• le moment *de l'institutionnalisation* correspond pour l'essentiel à la *Synthèse* ;

• le moment *du travail de l'organisation mathématique* se concrétise dans les *Exercices* [*et problèmes*].

Le modèle des moments didactiques a de nombreux usages que nous ne ferons que mentionner rapidement ici. Il permet notamment de poser plus clairement certains problèmes clés tant de l'analyse didactique d'une séquence observée que de l'ingénierie de séquences didactiques. Il met en évidence notamment que l'activité d'étude *n'est pas homogène* et se scinde en des « temps » différents, entre lesquels existent des discontinuités du point de vue épistémologique comme du point de vue psychologique. Vivre un moment de première rencontre, ainsi, c'est vivre un temps d'ouverture, marqué par une incertitude plus ou moins forte, qui peut au reste engendrer un stress spécifique, et qui, dans tous les cas, mobilise une grande énergie individuelle et collective. Par contraste, le moment de l'institutionnalisation requiert une prise de distance par rapport aux matériaux mathématiques qui auront émergé de l'activité d'étude et de recherche, en vue d'y distinguer et d'y séparer ce qui sera vu comme éphémère et promis à un oubli officiel, et les éléments mathématiques pérennes, qui seront en quelque sorte officialisés. Quant au travail de l'organisation mathématique, il s'établit en principe dans un recul plus grand encore, où le stress de la première rencontre est oublié et où, dans une certaine sérénité, on s'assure que la construction élaborée est désormais un acquis, même si, toutefois, des mises au point plus fines apparaissent utiles. L'hétérogénéité des moments didactiques étant notée, la grande question qui se pose porte sur la manière de *réaliser* chacun d'eux dans la pratique de la classe. Comment, par exemple, réaliser le moment de la première rencontre avec un certain type de problèmes ? Comment gérer l'émergence d'une technique ? Comment impulser, guider et contrôler le développement d'une technologie adéquate ? Etc. Bien entendu, des questions analogues se posent pour les moments didactiques qui relèvent structurellement de la *Synthèse* ou des *Exercices & problèmes*. S'agissant des synthèses, par exemple, les nouvelles formes d'enseignement dans lesquelles les élèves professeurs doivent apprendre à entrer comportent des exigences incompatibles avec les réflexes didactiques associés à la structure binaire Cours/Exercices. C'est ainsi que, se situant dans la perspective ouverte par les programmes du collège de 1985, le programme de la classe de seconde défini par l'arrêté du 25 avril 1990 précise :

> La *synthèse*, qui constitue le cours proprement dit, doit être *brève* ; elle porte non seulement sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître et savoir utiliser, mais aussi sur les méthodes de résolution de problèmes qui les mettent en jeu.

Là où la tradition déclinante du cours magistral n'intègre essentiellement que la technologie mathématique saisie dans sa majesté, la synthèse ainsi entendue appelle une présentation complexe de *toute* l'organisation mathématique, types de problèmes et techniques compris.

3.5. Nous n'examinerons pas plus avant cette difficulté et nous nous centrerons désormais sur les obstacles à surmonter pour parvenir à un enseignement fonctionnel (et non pas formel), articulé en AER de bon aloi. Les problèmes qui surgissent à cet égard sont légion. Les instructions officielles du collège que nous avons suivies plus haut imposent par exemple, de façon sans doute très judicieuse, de respecter un certain nombre de contraintes qu'elles présentent dans les termes suivants :

> Les activités choisies doivent développer la capacité de se poser des problèmes et de progresser vers leur résolution. Elles doivent aussi :
>
> Permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne donner que des consignes très simples et n'exiger que des connaissances solidement acquises par tout le monde ;
>
> Créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures ;
>
> Rendre possible la mise en jeu des outils prévus ;
>
> Fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement. On y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.

Il s'agit là d'un programme de travail déjà considérable, que le même texte résume abruptement par ces mots :

> Le professeur doit procéder avec une attention particulière au choix pertinent des situations à étudier. Il doit aussi veiller à bien organiser les phases du déroulement de l'activité.

Vaste programme ! La formation des élèves professeurs que nous examinons ici montre que ces quelques principes appellent de difficiles développements, que les notes du séminaire de l'année 2000-2001 condensent dans ce qui apparaît d'abord comme un simple ajout au tableau tracé par les instructions générales de 1985, la notion de *motivation* (mathématique) d'un type de problèmes :

Une AER doit en particulier

• « permettre *un démarrage possible pour tous les élèves* » ;

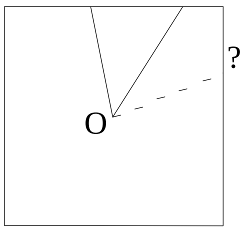
• « créer rapidement une situation *assez riche pour provoquer des conjectures* » ;

• « rendre possible *la mise en jeu des outils prévus* » ;

• « fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions *de contrôle de leurs résultats* »

Mais une AER doit en premier lieu *motiver le type de tâches* T dont l'étude est programmée, en exhibant l'une au moins de ses *raisons d'être*, et cela en présentant une situation dans laquelle un personnage – qui peut être l'élève – doit, pour accomplir une certaine tâche ✓, affronter une tâche *problématique* $t* \in T*$, dont l'accomplissement suppose celui d'une tâche $t \in T$: ainsi ✓ motive-t-il $T*$ qui motive T (on peut bien sûr avoir $T* = T$).

On voit là se mettre en place une configuration de base qui va gouverner une grande partie du travail des professeurs stagiaires, tant dans leur classe que dans les travaux demandés dans la formation à l'IUFM. Au point de départ d'une AER se trouve l'évocation d'une certaine *situation du monde* **s** qu'on peut écrire de manière générique **s** = { σ ; ✓ ; x, x', x'', ... }. Dans une telle situation du monde, des personnages x, x', x'', etc. doivent réaliser une certaine « tâche ✓ » [33] à propos d'un système σ. Or, dans l'accomplissement de cette tâche supposée d'un *type* en principe familier, les acteurs de la situation rencontrent une difficulté inédite. Par exemple [34], lors d'un goûter organisé pour des enfants, un adulte doit découper un gâteau de forme carrée en parts de même volume ; il a découpé une première part (voir la figure ci-après), et doit en découper une seconde incluant l'un des coins du carré.



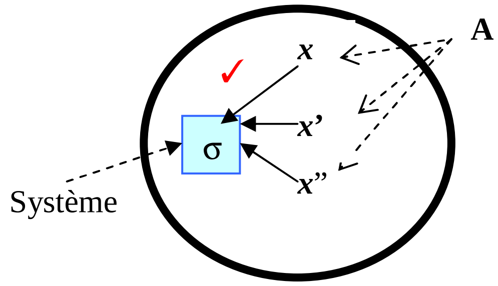
Surgit donc, dans l'accomplissement de la tâche ✓, une tâche *t problématique* : comment déterminer la coupure afin que le volume de la part découpée soit le même ? Alors que la tâche ✓ est regardée *a priori* comme non mathématique, ou plutôt comme ne mobilisant du point de vue mathématique que la capacité d'estimer à l'œil nu l'égalité approchée du volume des parts, la tâche *t peut* faire l'objet d'un processus de mathématisation qui la fera apparaître

[33] L'usage s'est imposé de lire « tâche "coche" » ce qu'on note « tâche ✓ ».

[34] Cet exemple est tiré de la notice *Questions et réponses* déjà mentionnée.

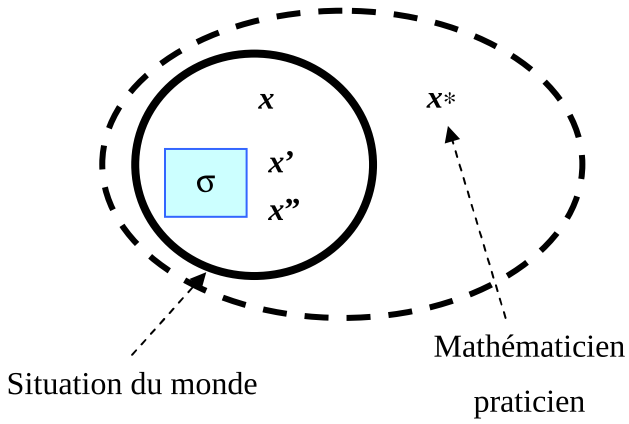
comme un « problème de mathématiques » [35]. Il s'agit là du cœur d'un emboîtement de situations à propos duquel plusieurs versions des notes du séminaire proposent des schémas dont l'origine paraît se trouver dans certains développements de la théorie des situations [36]. Une situation du monde est représentée par le schéma ci-après, où apparaissent le système σ, les acteurs *x*, *x*', *x*", etc., et l'action de ces acteurs sur le système σ en vue d'accomplir la tâche ✓.

Situation du monde



La situation du monde évoquée constitue alors le point de départ d'une nouvelle situation du monde, appelée *situation d'intervention*, dans laquelle un mathématicien praticien $x*$ apparaît, pour apporter le secours de son expertise aux acteurs de la situation. À ce stade, on peut imaginer encore une bifurcation, ou plutôt une trifurcation. La première possibilité, c'est que l'expert praticien $x*$ parvient à accomplir la tâche *t* qui était problématique pour les acteurs de la situation. L'affaire s'arrête là.

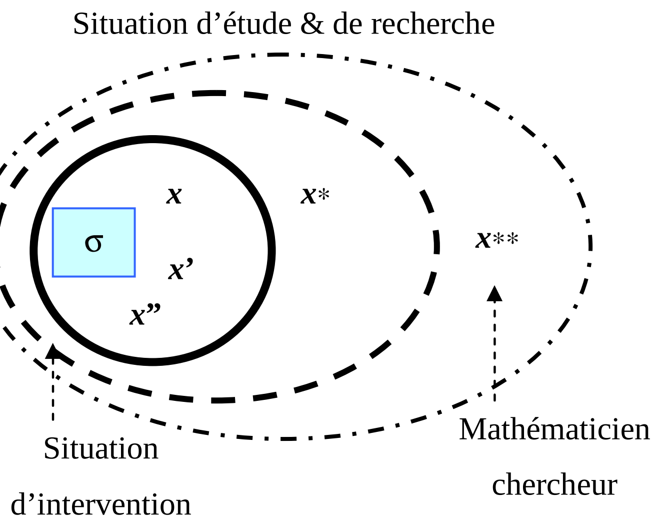
Situation d'intervention



[35] La formation insiste sur le fait, regardé comme un universel anthropologique, que, en nombre de cas, les acteurs d'une situation tendent d'abord à *nier* la problématicité des difficultés rencontrées – spécialement, semble-t-il, s'il s'agit d'une problématicité qu'ils subodorent être de nature mathématique.

[36] Voir Brousseau, 1998, p. 326.

Mais il est une deuxième possibilité. La tâche t peut se révéler problématique aussi pour l'expert $x\ast$, lequel pourtant va nier qu'il en est ainsi et accomplir en conséquence un simulacre pour lequel il recherchera l'accréditation – au moins pour un temps – des acteurs de la situation du monde ! Une troisième possibilité s'offre alors, qui va engendrer une autre situation du monde social encore, qu'on désignera par l'expression de *situation d'étude & de recherche*. Parce que $x\ast$ ne parvient pas à accomplir la tâche t, il va se tourner vers un nouveau personnage, qui est d'abord ici une évocation allégorique, le *mathématicien chercheur*, $x\ast\ast$. L'état du monde social peut alors être schématisé comme ci-après.



Notons que le rôle du « mathématicien chercheur » $x\ast\ast$ peut fort bien être joué par la personne qui jouait le rôle du mathématicien praticien $x\ast$ – de la même façon, au reste, que le rôle du mathématicien praticien $x\ast$ pouvait être tenu par l'un des acteurs de la situation du monde initiale, regardé par les autres acteurs comme le « mathématicien du groupe ». Ce qui importe, chaque fois, c'est le fait que la situation, c'est-à-dire le système des conditions et contraintes sous lesquelles travaillent les sujets, *change*. Une situation d'étude et de recherche peut inclure une situation d'intervention, mais ne saurait en principe s'y réduire : la « production » attendue de $x\ast\ast$ n'est pas une intervention réussie sur le système σ, mais une technique justifiée pour accomplir des tâches du type de t, technique intelligible pour $x\ast$ et que celui-ci pourra alors mettre en œuvre dans une intervention sur σ qui ne sera que cela. Notons ici une configuration sociale – de type didactique – que nous avons *a priori* écartée : celle où $x\ast$ serait convoqué, non pour intervenir sur σ à la place des acteurs de la situation, x, x', x'', etc., mais pour *enseigner* à ces derniers une certaine technique τ connue de lui qui devrait leur permettre d'accomplir *t*, parce qu'il s'agirait d'une tâche d'un type promis à être fréquemment rencontré par eux : $x*$ serait alors réputé être, non un mathématicien expert, mais un enseignant de mathématiques. Cela précisé, que décrit l'emboîtement commenté jusqu'ici, en ce qui concerne l'étude scolaire ? La situation du monde originelle, on l'a dit, est celle classiquement évoquée par les énoncés de problèmes quand ceux-ci conservent un caractère « concret », comme il en va dans l'exemple suivant :

> Un paysan doit expédier un lot de 250 œufs dans des boîtes pouvant contenir chacune 6 œufs. Combien le paysan doit-il se procurer de boîtes pour cela ?

Ici, la situation du monde de départ est décrite par la première phrase : le système σ est constitué de 250 œufs ; la tâche ✓ à réaliser par l'unique acteur, *x*, de la situation – le « paysan » – consiste à ranger ces œufs dans des boîtes à œufs. La tâche problématique *t* qui surgit alors pour *x* consiste à déterminer le nombre de boîtes à se procurer pour accomplir la tâche ✓. Dans un tel cadre classique, il y a clairement disjonction entre l'élève et l'acteur de la situation : l'élève, bien réel, n'est pas le paysan, personnage évoqué qui, sauf exception, reste imaginaire [37]. Ce qui peut être demandé alors aux élèves – à chacun d'eux en particulier –, à travers la question posée – combien de boîtes ? –, c'est d'assumer d'abord le rôle du mathématicien praticien $x*$. En principe, si le « problème » proposé n'est en fait qu'un *exercice*, la tâche *t* sera pour la plupart des élèves, voire pour tous les élèves, non problématique : chacun jouera alors le rôle du praticien expert, qui intervient dans une situation (imaginaire) donnée. Si, en revanche, le problème proposé est un véritable problème pour la classe [38], celle-ci se situera comme un mathématicien chercheur collectif $x**$, qui doit

---

[37] Par contraste avec les énoncés de l'arithmétique élémentaire traditionnelle, les énoncés de les enseignements secondaire et supérieur pratiquent plus volontiers l'ellipse des acteurs de la situation du monde ainsi que de la tâche ✓. C'est ainsi que l'énoncé « Soit ABC un triangle. Construire le centre du cercle circonscrit » peut être entendu ainsi : 1) Un personnage *x* veut construire le cercle circonscrit à un triangle ABC : telle est la tâche ✓ ; 2) Pour ce faire, il décide de déterminer le centre de ce cercle : telle est la tâche *t* ; 3) Sans s'attarder sur le fait que *t* serait ou non problématique pour *x*, l'énoncé demande au « lecteur » de venir occuper la position du mathématicien praticien *x** vis-à-vis de *t*, ce qui exigera peut-être du lecteur qu'il vienne d'abord occuper la position *x*** du mathématicien chercheur vis-à-vis du type de tâches *T* dont relève *t*.

[38] À propos du mot de problème, la notice *Questions et réponses* précise : « Le mot dérive, par le latin *problema*, qui désigne une question à résoudre, d'un mot grec signifiant "ce que l'on a devant soi, et spécialement un obstacle, une tâche, un sujet de controverse, une question à résoudre". Le grec *problêma* est en effet formé à partir de *pro*, "devant", et *ballein*, "lancer" : l'idée essentielle est celle d'une difficulté, d'un défi – intellectuel, par exemple – que l'on *lance* (*ballein*) devant soi (*pro*), *au sein d'une communauté*. » Le même texte ajoute

élaborer une technique lui permettant non seulement de répondre au problème proposé, mais à d'autres encore du même type – comme le fait, par exemple, de devoir déterminer combien de caisses pouvant contenir chacune 60 exemplaires d'un certain ouvrage un éditeur doit se procurer pour transporter 5327 exemplaires de cet ouvrage [39].

3.6. Le professeur de mathématiques doit créer les conditions pour qu'adviennent dans sa classe des situations d'étude ou de recherche peu ou prou conformes aux schémas génériques précédents. D'une telle situation d'étude et de recherche doit sortir une praxéologie mathématique ponctuelle inédite, relative au type T de tâches dont t a été choisi comme tâche princeps. Dans ce processus de création praxéologique, plusieurs objectifs se présentent naturellement : tout d'abord, le fait d'élaborer une technique τ pour accomplir les tâches t, t', t'', etc., du type T ; ensuite, le fait d'élaborer, de façon concomitante, une technologie θ qui engendre, ou du moins éclaire, et en tout cas justifie la technique τ, et qui pourra en nombre de cas engendrer, éclairer, justifier d'autres techniques relatives à d'autres types de tâches ; enfin, modifier, retoucher ou compléter l'environnement théorique dans lequel la classe de mathématiques travaille. Dans le cas du problème du transport des œufs ou des livres, la technique intégrant aujourd'hui l'usage d'une calculatrice peut s'énoncer ainsi : si le quotient affiché est entier, ce quotient est le nombre de contenants nécessaires ; sinon, le nombre cherché est l'entier immédiatement supérieur. Dans le cas des œufs, la calculatrice affiche 41,666… et il faut donc 42 boîtes ; dans le cas des ouvrages, le quotient est égal à 88,78333… et il convient donc de se munir de 89 caisses. En réalité, la *technologie* contient ici essentiellement ce résultat : le nombre de boîtes nécessaires est le plus *petit* entier k qui, multiplié par la contenance d'une boîte, soit *supérieur ou égal* au nombre d'objets à transporter. Mais la *technique* à concevoir et à mettre en œuvre doit tenir compte du fait que tout l'univers mathématique traditionnel – auquel sont assujettis les curriculums autant que les calculatrices, les élèves et les professeurs – donne sa faveur à l'entier q dont le produit par la contenance b est le plus *grand* possible qui soit *inférieur ou égal* au nombre d'objets à transporter a, c'est-à-dire qui réponde aux conditions classiques de la division euclidienne :

---

alors : « Il s'agit là très exactement de ce que fait quotidiennement le professeur de mathématiques dans cette communauté X de “mathématiciens” qu'est – ou devrait être – une classe de mathématiques. »

[39] La technique à construire semble n'être pas disponible aujourd'hui au collège : dans une étude non publiée, datant de la fin des années 1980, on voyait ainsi les élèves donner pour réponse au problème des œufs transportés un nombre allant de 41 (en 6e) à 41,666… (en 3e).

$a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. Par contraste, le nombre Q cherché doit être tel qu'il existe R vérifiant les conditions de la « division » définie par $a = bQ - R$ et $0 \leq R < b$: R est ici le nombre de « places libres » restant dans la Q-ième boîte. Il y a là une technologie manquante, dont l'absence renvoie à un certain regard théorique sur la suite des nombres entiers : alors que dans l'abord classique on recherche l'encadrement de la forme $bq \leq a < b(q + 1)$, on recherche ici l'encadrement $b(Q - 1) < a \leq bQ$; au lieu de privilégier le « plancher », on doit ici privilégier le « plafond », ce que les notes du séminaire de l'année 2004-2005 commentent dans le passage suivant.

❶ Considérons le problème suivant : on doit transporter 1000 exemplaires d'un ouvrage dans des caisses pouvant contenir chacune 17 exemplaires de cet ouvrage ; combien de caisses faudra-t-il utiliser ? La réponse n'est pas le quotient entier de 1000 par 17, mais ce quotient *augmenté d'une unité*. On a en effet $1000 = 58 \times 17 + 14$ et il faudra donc utiliser 58 + 1 caisses, soit 59 caisses. La notion de quotient entier (« euclidien ») n'est pas, ici, la « bonne » notion. Chez des élèves jeunes (et moins jeunes…), elle provoque des erreurs rédhibitoires : confrontés au problème, la plupart répondraient qu'il faut 58 caisses !

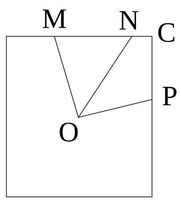
❷ Étant donné des entiers non nuls a et b, trois nombres associés peuvent être utiles : le quotient $\frac{a}{b}$, le quotient entier, c'est-à-dire *le plus grand entier inférieur ou égal* à $\frac{a}{b}$, et – c'est la « bonne » notion ici – *le plus petit entier supérieur ou égal* à $\frac{a}{b}$. Dans l'arsenal des mathématiques « scolaires », on dispose éventuellement de la fonction « partie entière », notée souvent $[x]$, qui permet d'écrire le quotient entier de a par b sous la forme

$$\left[\frac{a}{b}\right].$$

Mais rien sur la « bonne » notion – le quotient entier *plus un*, du moins lorsque le quotient exact n'est pas entier !

❸ L'introduction des fonctions utiles a été faite par l'informaticien Kenneth E. Iverson dans son ouvrage *A Programming Language* publié chez Wiley en 1962 – il y a donc moins d'un demi-siècle, et après plusieurs millénaires de travail mathématique ! Iverson nomme respectivement *floor* (sol) et *ceiling* (plafond) les fonctions qui, à un réel x, associent le plus grand entier inférieur ou égal et le plus petit entier supérieur ou égal à x, entiers qu'il note respectivement $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$. Le nombre de caisses nécessaire s'écrit donc maintenant : $\lceil a/b \rceil$. Mais à l'évidence les problèmes d'objets à transporter dans des boîtes n'ont pas suffi à engendrer ces notions !

La « générativité » de la situation évoquée est évidente : elle contient en germe des créations technologiques qui font même bouger l'enchâssement théorique traditionnel ! Bien entendu, de même que la problématicité d'une tâche peut, sous certaines conditions, être méconnue ou même niée, voire refoulée, de même la générativité épistémologique d'un problème peut être étouffée, la solution apportée procédant d'un bricolage qui évite soigneusement toute nouveauté technologico-théorique. L'étude des conditions et contraintes qui empêchent ou au contraire favorisent l'assomption de la problématicité d'une tâche *t* donnée puis la « mise en culture » productive de ses éléments problématiques relève de la théorie des AER, sur laquelle nous ne nous arrêterons pas davantage ici [40]. On notera encore, dans cette perspective, l'exemple fourni par le découpage du « gâteau » carré : le problème proposé en ce cas, s'il n'est pas évité, doit conduire, sous les conditions prévalant usuellement dans une classe de mathématiques, à la mise au jour d'un « théorème » peu connu, que la notice *Questions & réponses*, à laquelle nous l'avons emprunté, présente dans ces termes :

> Une telle situation de problématicité est une *condition nécessaire de création de connaissances* – de ces connaissances, exactement, qui permettront d'accomplir la tâche problématique *t* (et, du même coup, quelques-unes des tâches, *t*', *t*'', etc., du même *type* que *t*). Dans le cas du gâteau carré à découper de manière équitable (t_0), on découvrira ainsi le petit théorème de géométrie suivant :
>
> θ_0. Pour que deux parts de gâteaux, telles MON et NOP sur le schéma ci-contre, aient même surface (et donc même volume), il faut et il suffit qu'elles aient des bords extérieurs *de même longueur*, soit ici que l'on ait MN = NC + CP.
>
> 
>
>
> Si *a* est la longueur du côté du carré et si le bord extérieur de la portion a pour longueur ℓ, l'aire de la portion sera en effet égale à $\frac{1}{4} a \times \ell$, que le bord du morceau de gâteau *comporte un coin ou non*.

[40] Les conditions et contraintes évoquées sont celles de « l'échelle des niveaux de détermination didactique » : sur cet outil d'analyse didactique, voir par exemple la thèse récente de Floriane Wozniak, *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique* (Université Claude Bernard Lyon 1, 2006). Une part essentielle de la théorie des AER mentionnée ici est apportée par la théorie des situations didactiques.

Les deux exemples évoqués jusqu'ici – celui du paysan et des œufs et celui du découpage du gâteau carré – illustrent un premier niveau, fondamental, d'élaboration d'une AER, qui répond à une problématique désormais relativement classique (même si elle n'est qu'inégalement pratiquée dans les classes) : étant donné un ensemble θ d'éléments technologiques (notions, résultats, notations, etc.), déterminer un type de tâches T tel que l'effort, conduit sous un ensemble donné de conditions et de contraintes, pour construire une technique τ adéquate et justifiée aboutisse à la mise en évidence de θ comme un ensemble technologique adéquat pour justifier, guider, éclairer, nourrir la création de τ. Cette problématique, notons-le, tend à donner le primat à θ, regardé comme une œuvre (mathématique, en l'espèce) qui est *déjà là* et se trouve désignée par le programme comme devant être enseignée aux élèves [41]. Déterminer un type de problèmes T adéquat, c'est, pour le dire autrement, problématiser le « savoir » θ. Le premier effort demandé aux élèves professeurs est donc celui-là : problématiser les savoirs mathématiques à enseigner. Dans un autre langage, davantage utilisé dans la formation, on dira que, étant donné un savoir θ proposé à titre de thème d'études par le programme de la classe considérée, il convient d'en découvrir – ou d'en retrouver – les *raisons d'être*, ou, plus exactement, les raisons d'être en adéquation avec le programme et les traditions d'enseignement de ce programme. Une autre formulation encore, utilisée de façon corrélative avec à peu près le même niveau d'emploi, s'exprime en termes de *motivation* : faire rencontrer aux élèves, notamment en situation d'étude et de recherche, certaines au moins de ces raisons d'être appropriées, c'est *motiver le savoir* θ, cette motivation étant donc entendue d'abord au plan *épistémologique*, et faisant en cela contraste avec l'un des fléaux de tout enseignement, *l'immotivation* des savoirs enseignés [42]. La découverte de l'exigence de mise en évidence, d'abord pour eux-mêmes, puis

---

[41] Si l'on peut dire que cette problématique correspond à un « enseignement *par les problèmes* », en revanche le programme d'enseignement n'est pas défini comme *un ensemble de problèmes* à étudier, mais comme un ensemble *d'œuvres mathématiques*, qui permettent potentiellement d'outiller l'étude et la résolution d'un certain nombre de types de problèmes.

[42] Ce qu'il s'agit de motiver, c'est bien le savoir mathématique enseigné : motivation épistémologique, donc, et non motivation psychologique des élèves, laquelle n'est pas recherchée pour elle-même *en premier lieu*. On notera toutefois que l'engagement didactique des élèves paraît fortement favorisé par la motivation épistémologique des contenus à travailler. Dans une réponse à un questionnaire de fin d'année déjà évoqué, où l'on demandait notamment aux professeurs stagiaires d'indiquer « *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous a paru plutôt *positif* », une stagiaire ayant en responsabilité une classe de 4e indique ainsi de façon significative : « J'ai pu au cours de l'année modifier le mode de préparation de mes

pour les élèves, des raisons d'être des résultats et des notions *à enseigner* peut être décrite comme une expérience forte : dès lors qu'ils découvrent que l'univers mathématique est motivé (ou, du moins, motivable) et non pas immotivé comme leurs études mathématiques pouvaient le leur laisser croire, les professeurs stagiaires font de la recherche des raisons d'être un thème permanent d'interrogation. En 2002-2003, lors de la 16^{e} séance, un stagiaire ayant en responsabilité une classe de seconde note ainsi : « En géométrie euclidienne, je n'ai pas encore trouvé les raisons d'être des triangles isométriques et semblables. » La même année, lors de la séance 20, un stagiaire écrit : « Quelles sont les raisons d'être de la "configuration papillon" du théorème de Thalès ? » En 2003-2004, lors de la séance 15, ce souhait est exprimé : « J'aimerais savoir pourquoi on étudie les cônes et les pyramides en 4^{e} et connaître leurs raisons d'être. » En 2004-2005, séance 9, on s'interroge ainsi : « Comment rattacher la symétrie centrale à un problème concret ? Comment faire émerger les raisons d'être de l'étude de cette nouvelle transformation ? » La même année, lors de la séance 16, un autre stagiaire demande plus abruptement : « Quelles sont les raisons d'être des vecteurs ? » Lors de la séance 19, une question plus explicite est énoncée :

> Un exercice demande, par exemple, de construire l'image d'une figure par une translation déterminée. Quelles sont les raisons d'être de ce type de tâches ? Les exercices de travail de la technique dispensent-ils de véritables raisons d'être ? (2004-2005, 4^{e}, semaine 19)

À l'occasion de la séance 23, alors qu'on touche au terme de la formation, une autre question est très directement posée : « Quelles sont les raisons d'être des translations ? » En 2005-2006, séance 10 : « Quelles sont les raisons d'être des angles adjacents ? » Séance 21 : « Quelles sont les raisons d'être de l'étude des droites remarquables d'un triangle ? » Lorsqu'on s'essaie à rechercher par soi-même, on mesure la difficulté de la tâche, comme le suggère cette question :

> Où peut-on chercher les raisons d'être du cosinus, du sinus, de la tangente d'un angle aigu ? Nos recherches sur Internet n'ont pas été très fructueuses. Y a-t-il des ouvrages que vous connaissez qui pourraient nous aider ? (2004-2005, 2de, semaine 19)

Tout sujet mathématique peut susciter semblable quête. En 2004-2005, dès la troisième séance, un stagiaire écrit : « J'envisage de faire avec ma classe l'étude du thème "Développement décimal illimité périodique". Quelles sont les raisons d'être ? » En 2000-

---

séquences de cours en me basant sur les outils du séminaire. En particulier je me suis attardée sur la préparation des AER et, en reprenant les exemples fournis en séminaire, j'ai pu mettre en pratique le fonctionnement par "questions cruciales" et tenter par là même d'intéresser les élèves en motivant les études réalisées en classe. »

2001, un stagiaire ayant en responsabilité une classe de seconde dit l'embarras qu'il a connu devant sa classe :

> Quelles sont les raisons d'être de la valeur absolue ? Plusieurs élèves m'ont posé la question et j'ai été bien embêté pour donner une réponse cohérente (mon discours confus faisait état de distances, du fait que $\sqrt{a^2} = |a|$, mais ils n'ont guère été satisfaits). (2000-2001, 2^de^, semaine 7)

Les archives de questions montrent que, une fois lancée, l'enquête va investir les coins et recoins du corpus mathématique à enseigner. 2002-2003, séance 19 : « Que peut-on dire sur les raisons d'être de l'intégrité ? » Semblablement, à propos de « l'effet de l'addition sur l'ordre », exprimé comme on le verra ci-après, une stagiaire s'interroge ainsi :

> … je n'arrive pas à trouver la raison d'être de ces calculs : dans les livres, on trouve comme application à « $a < b$ donc $a + c < b + c$ » l'exemple suivant : $4 < 5$ donc $4 + 0{,}5 < 5 + 0{,}5$. Je n'en vois pas l'intérêt car on peut comparer directement 4,5 à 5,5. Comment expliquer donc aux élèves les raisons d'être de ces formules, tout en se limitant aux exigences de 4^e^ ? (2001-2002, 4^e^, semaine 20)

Une autre stagiaire précise :

> Le calcul littéral (réduction) sert entre autres à se ramener à des équations simples (passer de $2x + 3x = 6$ à $5x = 6$ par exemple). Mais quelles en sont les autres raisons d'être en 4^e^ ? Quelles sont les motivations du développement ? (2003-2004, 4^e^, semaine 19)

La même année, lors de la séance 20, cette question est posée : « Quelles sont les raisons d'être du fait de développer des expressions en 2^de^ ? » On bute sur tout, ou à peu près, comme le montre encore cette question :

> Quelles sont les véritables raisons d'être de la recherche de valeurs interdites dans le cas d'équations du type $\frac{x+5}{x+3} = 2$? Je n'ai pas vraiment su répondre à mes élèves. Je leur ai dit que ça serait très important pour la recherche d'ensembles solutions d'inéquations (notamment au niveau des intervalles ouverts ou fermés) ; mais dans le cas d'une équation, la seule chose que j'ai trouvé à répondre était que l'on ne pouvait pas diviser par zéro. (2004-2005, 2^de^, semaine 22)

En 2000-2001, lors de la dernière séance de l'année, on s'interroge toujours : « Comment introduire en classe de seconde les fonctions sinus et cosinus ? Quelles sont les raisons d'être de ces fonctions ? » La question posée met parfois en cause tout un pan de la culture mathématique. Ainsi de cette interrogation d'une professeure stagiaire ayant en responsabilité une classe de 3^e^ :

> Je ne trouve pas de raisons d'être aux fonctions linéaires (en 3e) ; elles modélisent certes des situations de proportionnalité mais je ne vois pas ce que l'*outil* fonction apporte à ce niveau. (2003-2004, 3e, semaine 11)

La tentation existe toujours de soulever la question des raisons d'être de manière un peu formelle, automatique. Mais, même dans cette optique, la traque entreprise permet de mettre le doigt sur bien des vérités cachées, qu'un travail approprié devrait permettre de révéler. Ainsi en va-t-il avec cette question :

> En 4e, un des types de tâches du domaine de la statistique est de « calculer une valeur approchée de la moyenne d'une série statistique regroupée en classe d'intervalles ». Quelles sont les raisons d'être ? (2004-2005, 4e, semaine 16)

Souvent, sans doute, le questionnement et la difficulté à y répondre situent implicitement les élèves professeurs devant l'abîme d'ignorance accumulé par la « culture mathématique » dans laquelle ils ont évolué depuis des années. Ainsi de ce professeur stagiaire qui, en 2003-2004, à l'occasion de la séance 21, écrit :

> J'aimerais savoir quelles sont exactement les raisons d'être de l'indépendance (stochastique, causale), car je n'ai pas encore réussi à répondre à cette question. (2003-2004, 3e, semaine 21)

Connaître *exactement* les raisons d'être ! La formulation trahit le manque d'expérience et de vécu en la matière : déterminer les raisons d'être d'une notion, d'une théorie n'est certainement pas chose simple : l'effort participe d'un travail – individuel et collectif – de reconstruction de toute une culture peu présente ou très implicite dans la formation reçue jusqu'alors. En 2005-2006, un élève professeur s'interroge sur la *technique* que devrait mettre en œuvre cette quête épistémologique apparemment sans fin : « Quel travail, demande-t-il, faut-il entreprendre pour trouver la motivation de certains savoirs étudiés ? » Cette question suscitera une longue réponse qui tente de situer le travail à accomplir par rapport à quelques-uns des obstacles qu'il convient de repérer et d'éviter : on la reproduit *in extenso*.

D'une façon générale, le problème posé est typiquement un *problème de la profession*, qui doit être pris en charge collectivement – dans ce Séminaire, comme partout ailleurs dans l'espace professionnel.

a) Étant donné une entité mathématique (de quelque nature qu'elle soit : type de tâches, technique, composant technologique, principe théorique), l'interrogation évoquée doit d'abord être clarifiée : les raisons de sa création *historique* ne s'identifient pas forcément à ses raisons d'être *actuelles*, et, parmi ces dernières, les motifs de mobiliser cette entité – c'est-à-dire de la « recréer » – pourront différer selon l'institution à laquelle on se réfère – selon par exemple que la question est posée au collège ou à l'université, etc. Cela souligné, le travail à entreprendre appelle le concours de chacun des membres de la profession. Ce travail suppose que l'on se situe dans une culture mathématique qui excède *a priori* largement le monde déjà vaste et divers des « mathématiques à enseigner ».

b) Le démarrage de l'enquête doit s'appuyer sur un réexamen personnel de son expérience vécue des mathématiques, par un effort d'*anamnèse* mathématique, c'est-à-dire de levée de l'amnésie sur les motifs effectivement rencontrés d'employer telle ou telle entité – en mathématiques ou en d'autres disciplines. Notons en passant que cette amnésie a partie liée avec la pratique scolaire-universitaire de proposer à l'élève-étudiant des travaux mathématiques consistant à combler les lacunes d'une étude mathématique toute faite (aux lacunes près !), sans avoir à connaître l'*objet*, ni à plus forte raison l'*organisation* – la logique et la dynamique – de cette étude, toutes choses qui restent dans le *topos* du proposant (professeur, auteur de manuel, auteur de l'épreuve d'examen, etc.) ; inversement, le travail de recherche par *questions cruciales* (dont le professeur doit s'efforcer d'impulser la pratique dans la classe) constitue une ascèse efficace susceptible d'aider à lever l'amnésie qui frappe les raisons d'être des entités mathématiques à enseigner. Ce travail d'anamnèse trouve une aide dans l'étude des programmes et doit porter aussi sur les manuels et autres ouvrages traitant des contenus mathématiques à enseigner. L'enquête gagne en outre à s'appuyer sur l'examen de textes mathématiques – tels des manuels anciens – qui aient moins subi que les manuels d'aujourd'hui le refoulement des raisons d'être, parce qu'ils déploient explicitement une logique davantage fonctionnelle et s'éloignent donc, en cela, de la tentation de l'exhibition mathématique formelle.

c) L'obstacle fondamental à vaincre est celui de la *naturalisation* des entités mathématiques, c'est-à-dire de l'illusion de naturalité, qui pousse à penser que si, par exemple, existent en mathématiques les notions de droite, de demi-droite, de segment, ou d'angle aigu, d'angle obtus, d'angle saillant, d'angle rentrant, c'est tout simplement *parce qu'il y aurait* – en quelque sorte *dans la « nature »* – des droites, des demi-droites, des segments, des angles aigus, des angles obtus, des angles saillants, des angles rentrants, etc. C'est oublier que ces entités sont des constructions humaines, et sont donc le fruit d'une intention, où ils trouvent leur motivation. Il y avait autrefois la notion d'angle *corniculaire*. Pourquoi ? Et pourquoi cette notion n'a-t-elle pas été conservée dans la culture mathématique scolaire ? Plus simplement, tout cruciverbiste connaît la notion de triangle *scalène*, que, à côté des dictionnaires généraux de la langue française, certains textes mathématiques mentionnent encore : ainsi lit-on dans l'« encyclopédie libre » Wikipédia (http://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle) qu'un triangle scalène est un triangle « ne présentant pas de symétrie particulière », tandis que le site Mathworld, qui se présente comme *« the web's most complete mathematical resource »* indique que *« a scalene triangle is a triangle that has three unequal sides »* (http://mathworld.wolfram.com/ScaleneTriangle.html). Mais pourquoi cette notion n'est-elle pas aujourd'hui présente dans la culture mathématique scolaire ? Et pourquoi parle-t-on moins qu'on ne le faisait autrefois, dans les manuels, de triangle *acutangle*, *obtusangle*, alors qu'on parle toujours de triangles *rectangles* ? Il s'agit là de types de questions qu'il convient de constamment ruminer…

3.7. La réponse précédente ne s’attache qu’aux raisons d’être proprement dites, non à leur mise en situation visant à provoquer, en la régulant, la rencontre des élèves avec les savoirs mathématiques ainsi motivés – ou plutôt avec le manque de ces savoirs. Là encore, une longue litanie de questions peut être énoncée. 2001-2002, séance 9 : « Comment motiver le cours sur le parallélogramme en 5e ? ». 2000-2001, séance 14 : « Comment motiver l’introduction des notions de triangles isométriques et triangles semblables ? » Quelques semaines plus tôt, un autre stagiaire s’interrogeait sur l’idée qui lui était venue à cet égard, et demandait : « Peut-on “motiver” l’étude des triangles isométriques comme “outil” puissant permettant de démontrer la réciproque du théorème de Pythagore ? » La même année, même séance, mais venant d’un stagiaire ayant en responsabilité une 4e : « Comment motiver les droites remarquables dans le triangle et le fait qu’elles soient concourantes ? » On voit ainsi que l’interrogation ranime les notions les plus anciennement « naturalisées ». À propos de son travail d’étude et de recherche (TER, qui aboutit à la rédaction du « mémoire professionnel »), une stagiaire écrit :

> Mon TER porte sur les droites parallèles, principalement sur deux propriétés : la transitivité du parallélisme et une propriété d’incidence (« étant donné deux parallèles, toute droite sécante à l’une est sécante à l’autre »). Comment peut-on, face à des élèves de 6e, motiver cette propriété ? Quel type d’activité peut nécessiter cette propriété ? (2000-2001, 2de, semaine 19)

La difficulté ne se rencontre pas que dans des travaux qui pourraient être regardés comme exceptionnels : elle est quotidienne. Un autre élève professeur qui, lui, a en charge une classe de 6e, écrit par exemple :

> Relativement au thème que je suis en train de traiter, « Symétrie axiale », le programme demande d’utiliser cette symétrie pour construire des figures planes comme le rectangle et le carré. Je ne vois pas l’intérêt de la symétrie pour construire de telles figures, ou, plus précisément, je ne trouve aucune technique qui me satisfait, qui motive l’utilisation de cet outil pour résoudre la tâche considérée (y compris dans les livres). J’aimerais avoir des idées, des pistes relatives à ce problème. (2001-2002, 6e, semaine 20)

La liste des questions soulevées semble pouvoir être presque indéfiniment allongée, ainsi que le suggère ce petit florilège :

> – Comment motiver le fait que l’image d’une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle ? (2002-2003, séance 19)
> – Quel est l’intérêt du barycentre de trois points pondérés ? Comment peut-on alors motiver cette notion ? (2002-2003, séance 19)

– Qu'est-ce qui motive l'introduction des parallélogrammes en 5^{e} et en mathématiques de manière plus générale ? (2003-2004, semaine 7)
– Les vecteurs au collège sont liés à la notion de « déplacement translatif » *(sic)*. Est-ce là la principale motivation pour l'introduction des vecteurs au collège ? (2003-2004, semaine 18)
– Comment motiver la propriété d'homogénéité du barycentre en 1re S (sans parler de l'associativité du barycentre) ? (2004-2005, semaine 18)
– Quelle activité proposer à des élèves de 4^{e} pour motiver le type de tâches « Caractériser le triangle rectangle par son inscription dans un demi-cercle » ? (2004-2005, semaine 19)
– Comment lier la tangente d'un cercle avec le reste du chapitre (distance) ? J'ai du mal à motiver ce passage. (2000-2001, semaine 4)
– Comment motiver le théorème de Pythagore ? (2000-2001, semaine 9)
– Qu'est-ce qui peut motiver l'utilisation du sinus ? La simplification des calculs ? (2004-2005, semaine 16)
– Quelles sont les motivations de l'introduction du cosinus d'un angle aigu en 4^{e} ? En particulier le cosinus est introduit avant le sinus et la tangente. (2005-2006, semaine 17)
– Comment motiver la simplification des fractions ? (2000-2001, semaine 10)
– Dans le chapitre sur les puissances, comment motiver le fait de calculer des puissances de nombres négatifs pour des élèves de 4^{e} ? (2003-2004, semaine 13)
– Comment motiver, en classe de 4^{e}, les opérations sur les écritures fractionnaires de nombres relatifs ? (2000-2001, semaine 14)
– Comment motiver l'égalité $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$? (2005-2006, semaine 15)
– Comment motiver la propriété “si $a \times d = b \times c$ avec b et $d \neq 0$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$” ? (2003-2004, semaine 17)
– Lors de l'apprentissage du calcul littéral, faut-il mettre en perspective la résolution d'équations pour motiver le travail effectué ? (2001-2002, semaine 18)
– Comment motiver / introduire au mieux les *méthodes* de résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues ? (2003-2004, semaine 19)
– Les problèmes conduisant à une équation du premier degré sont faciles à résoudre sans faire appel à une écriture du type $ax + b = c$. Comment motiver l'écriture d'une équation ? (2003-2004, semaine 22)
– Je ne sais pas trop comment motiver l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique sans que cela ne me paraisse trop artificiel et imposé. (2003-2004, semaine 15)
– Comment motiver l'usage *(sic)* de l'angle en radians ? (2004-2005, semaine 15)
– Comment motiver l'étude des fonctions cosinus et sinus en 2de ? (2004-2005, semaine 16)
– Comment introduire l'étude des fonctions circulaires (sinus et cosinus) classe de 2de ? (2004-2005, semaine 20)
– Comment motiver l'étude des fonctions de référence x^2 et $\frac{1}{x}$? (2005-2006, semaine 16)
– Comment motiver la recherche d'un paramètre de dispersion ? (2001-2002, semaine 23)

– Comment est motivé le mode d'une série ? Qu'est-ce qu'une zone modale ? Qu'est-ce que l'écart type ? Comment est motivé l'écart type ? (2003-2004, semaine 6)

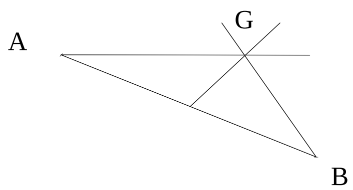
– Comment motiver, justifier l'intérêt de la linéarité de la moyenne en statistique ? (2003-2004, semaine 13)

3.8. La finalité du type de questionnement précédent est de parvenir à l'élaboration d'une ou de plusieurs AER à réaliser en classe. Les questions reproduites ci-dessus sont – en principe – au point de départ d'un processus de conception et de réalisation didactiques dont, pour fixer les idées, nous brosserons maintenant à grands traits l'aboutissement possible, en utilisant pour cela des matériaux issus du travail du séminaire de l'année 2005-2006. Dès la première séance, le 6 septembre 2005, une partie du temps est consacrée à l'analyse d'un compte rendu d'une séance observée l'année scolaire précédente – le 21 janvier 2005 – dans une classe de 4^{e}. Cette analyse se construira peu à peu au fil de plusieurs séances du séminaire. La tonalité générale des fragments d'analyse figurant dans les notes du séminaire porte à penser que le choix de cette séance a été motivé par la qualité du travail effectué par la stagiaire observée : ce que le compte rendu en montre se rapproche, peut-on croire, de quelque chose comme une AER « authentique ». Le problème générateur de cette AER est le suivant : sur une feuille, quelqu'un a marqué trois points A, B, C puis construit le centre de gravité G du triangle ABC ; mais le point C a été effacé et l'on voudrait en retrouver l'emplacement précis. On peut imaginer ici une situation du monde dans laquelle le « on » qu'on vient d'évoquer soit l'acteur de la situation, et qu'il bute sur la tâche *t* confiée à la classe par l'énoncé du problème : marquer à nouveau le point C tel que le triangle ABC ait pour centre de gravité le point G figurant sur la feuille. Le compte rendu rapporte dans les termes suivants le démarrage de l'étude dirigée par la professeure – que nous nommerons Sabine.

Un dialogue vivant s'instaure. On prend le milieu de [AB]. Peut-on construire les médianes ? Non ! Sabine : « Je vous laisse un peu réfléchir… »

L'élève qui avait lu l'énoncé intervient spontanément : « On n'a pas toutes les données !… » Il est 14 h 12. Murmures de travail.

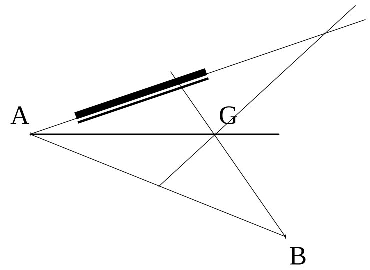
Sabine : « Qui a une idée ? » Un élève, qu'elle envoie au tableau, dit qu'on peut construire les trois médianes – contrairement à ce qu'affirment certains, souligne Sabine.



L’élève au tableau met en place le milieu de [AB]. Sabine conteste sa manière de faire ; il recommence, cette fois correctement, mais il est gêné par le bas du tableau, trop proche de son dessin…

La classe est lancée dans une vraie recherche, comme en témoignent les résultats partiels obtenus jusque-là – qui ne permettent pas de conclure, du moins pour le moment. Une idée est alors avancée, dont le compte rendu restitue ainsi l’apparition :

Sabine souligne qu’on a ainsi la 3e médiane, bien qu’on n’ait pas le point C. « Comment construire le point C ? » Plusieurs doigts se lèvent. C est sur la médiane, mais où ? L’idée s’exprime de faire glisser la règle pour obtenir approximativement la situation voulue…



En ce point pourtant, la professeure va faire une intervention qui, en un certain sens, « brutalise » la dynamique de la recherche : sans doute sous la pression de la culture mathématique dominante, elle impose à la classe une direction de recherche pour laquelle elle a préparé à l’avance un certain nombre d’outils. Le passage suivant du compte rendu d’observation en témoigne.

Sabine : « Il faudrait qu’on sache où se trouve le centre de gravité sur une médiane… » Une élève : « Au milieu ! » Sabine fait observer qu’alors on aurait C facilement. On laisse de côté le problème, indique-t-elle, on y reviendra.
On passe à l’étude de la position du centre de gravité de G sur les médianes. Sabine a fait la figure au tableau, sur le quadrillage peint. Les élèves sont invités à travailler sur la feuille distribuée, qui porte deux exemples. Sabine leur montre comment placer le milieu à l’aide du quadrillage. Il est 14 h 24.
La classe travaille. Sabine circule, donne une explication à un élève, félicite une élève, etc. Un élève, au premier plan, se mouche avec énergie, suscitant des rires. Puis le silence revient.
Il est 14 h 27. Sabine : « Pendant que vous finissez, je vais le faire moi-même au tableau… » Elle trace les médianes à l’aide de la règle après avoir placé les points à l’aide du quadrillage. Une élève regimbe devant l’utilisation du quadrillage. Sabine lui explique la manière de faire. L’élève semble d’accord.
Sabine souligne que G est sur le quadrillage et demande à la classe ce qui a été trouvé. Un élève lui donne d’abord la position de G sur la médiane [AA’] ; Sabine écrit :

AG = 2 GA’

Qu’en est-il pour BG ? Une élève propose l’égalité BG = GB’ × 2. Sabine écrit :

BG = 2 GB’

CG = 2 GC’

Sabine : « Le deuxième triangle, je ne l’ai pas fait. Vous avez vérifié que c’est la même chose ? » La classe : « Oui !!! »
Sabine : « Apparemment, il semblerait que G ait toujours la même position… Que vaut AG par rapport à AA’ ? » Une élève : « Deux tiers ! » Sabine : « Très bien. Deux tiers. »

La propriété relative à la position du centre de gravité sur une médiane étant ainsi dégagée, l’étude se poursuit d’une manière apparemment conforme aux prescriptions générales concernant la conduite d’une AER. C’est du moins ce que le passage suivant du compte rendu permet de vérifier.

Sabine demande quelle conjecture on peut formuler. Un élève se lance : « le centre de gravité est situé au même endroit… » Sabine le reprend, le relance : « aux deux tiers », etc. Elle écrit :

Conjecture. Le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet.

Sabine : « Maintenant, je pense qu’on va pouvoir arriver à trouver le point C. » L’élève qui n’aimait pas le quadrillage réagit : « C’est une conjecture ! » Une autre élève : « On n’avait pas besoin de tracer les deux autres médianes ! » Sabine approuve : « Exactement. On avait simplement à tracer la médiane qui passe par C. »
Sabine vérifie que les élèves ont bien mis en place le point C. Il est 14 h 35. Une élève se fait rappeler à l’ordre : elle ne sait pas ce qu’il faut faire, comprend, le fait ; Sabine : « Très bien ! » Puis : « Qui est-ce qui veut bien finir la construction et marquer le point C [au tableau] ? » Elle sollicite une élève qui va au tableau, s’affaire tout en décrivant ce qu’elle fait. Sabine la félicite : « Très bien, elle a utilisé la propriété qu’on vient de voir. » Sabine conclut : « On a réussi à reconstituer le triangle ABC en ayant juste le point G et le côté [AB]. » L’élève retourne à sa place.

La propriété conjecturée reste à démontrer, ce qui ne sera pas fait dans le cadre de la séance observée. Le compte rendu d’observation ne fait pas seulement l’objet d’un travail d’analyse dans le cadre du séminaire : selon un schéma que les élèves professeurs auront à mettre en œuvre ensuite dans leur mémoire professionnel, la séance observée est le point de départ d’un *développement* alternatif, qui contraste sur tel ou tel point avec la réalité observée. Non sans originalité, cette version alternative est proposée ici à travers un *compte rendu d’observation* *fictif*, qui, en ce cas, met spécialement l'accent sur l'emploi de questions *cruciales* dans la conduite d'une AER, et que nous reproduisons ci-après.

Semaine *n* – Lundi

La classe étudie le problème suivant : on a effacé le point C d'un triangle ABC dont on avait marqué le centre de gravité G ; comment retrouver le point C à partir de ce qui reste, c'est-à-dire A, B et G ?

P : « Comment trouver le point C ? Kévin, tu as une idée ? » Kévin : « Si on sait tracer les deux côtés, on a C ! » P : « Qu'en pensez-vous ? Farida ? » Farida : « Oui, mais comment on trace les côtés ? On sait pas, ça !… » P : « Bon, alors ? Quelle question on peut se poser ? Si on veut tracer les côtés ? » Un élève lève le doigt. P : « Oui, Ricardo… » Ricardo : « Comment on fait pour déterminer une droite ? » P : « Oui, c'est ça. Comment peut-on déterminer une droite. Alors comment ? Qui peut répondre ? Qu'est-ce qu'on connaît ici ? » Nabil : « On connaît un point ? Ça suffit pas. » P : « Exact. Alors ? Qu'est-ce qu'il faudrait ? »

Une élève se signale : « Madame ! Madame ! » « Oui, Sarah… » Sarah : « Madame, si on connaissait la direction du côté ! Comme quand on a fait avec le point de concours des bissectrices ! » P : « Oui, qu'est-ce qui s'était passé ? Qui peut nous le rappeler ? Joris ? » Joris : « Ben, au lieu de G on avait le point… » P : « Comment on l'avait noté ce point ? » Des élèves : « I… » P : « Voilà, on l'avait appelé I. Et c'était ? » Des élèves : « Le centre du cercle inscrit dans le triangle. » P : « Bien, c'est ça. Alors, Joris ? » Joris : « Bon, le côté passant par A par exemple c'était le symétrique de (AB) par rapport à (AI), on doublait l'angle, quoi… » P : « Vous êtes d'accord ? » Des élèves en chœur : « Oui ! » P : « Bon, et ici ? Est-ce qu'on peut faire ça ? » Silence…

P relance : « Qu'est-ce qu'il faudrait pour qu'on puisse espérer que ça marche ?… Qui a une idée ? » Une élève semble hésiter à répondre ; P la sollicite : « Manon, tu as une idée ? » Manon : « Si par exemple l'angle était le double, ou le triple, si on avait quelque chose comme ça… » P : « Précise : quel angle ? » Manon : « L'angle $\widehat{GAC}$, si c'était par exemple deux fois $\widehat{BAG}$, ou la moitié, comme ça… » P : « Oui, par exemple si c'était la moitié, qu'est-ce qu'on ferait ? Jocelyn ? » Jocelyn : « On prend la moitié de $\widehat{BAG}$… » P : « Dis-le en termes de symétrie, s'il te plaît. » Jocelyn hésite un peu, puis se lance : « (AC) c'est le symétrique de la bissectrice de $\widehat{BAG}$. » P : « Par rapport à ? » Jocelyn : « À la droite (AG) ! » P : « Oui, enfin, *ce serait !* »

Une élève intervient : « Ça marche pas ! » P : « Oui, Sofia, ça marche pas ? Comment tu sais ? Qu'est-ce qui ne marche pas d'abord ? » « Si on fait ce qu'a dit Jocelyn. » P : « Comment tu as fait ? » Sofia : « J'ai fait la figure avec le quadrillage. Ça marche pas. La moitié, ça marche pas. Et le double non plus. » P : « Bon, qu'est-ce que nous allons faire pour prolonger ce que nous dit Sofia ? Lucas ? » Lucas : « On fait une étude avec le logiciel ! » P : « Oui, avec le logiciel Wallis, c'est ça. Alors comment on fait ça ? Alors Anaïs ? » Anaïs : « On fait la figure. » P : « Oui. » Anaïs : « Et après on demande d'afficher l'angle $\widehat{BAG}$ et l'angle $\widehat{GAC}$, et on compare. » P à la classe : « Vous êtes d'accord ? » Des élèves en chœur : « Oui. » P : « Bon, moi j'ai une question. “On compare”, ça veut dire quoi ? Vous faites quoi ? » Silence… P : « Alors ? » Jocelyn : « On regarde si l'un est le double de l'autre, ou le triple, je sais pas… » P : « Mais pour ça, qu'est-ce qu'on peut faire ? » Un élève demande la parole. P : « Camille ? » Camille : « On demande à Wallis d'afficher le rapport des angles, comme ça on sait directement si c'est un ou un demi, ou deux… » P : « Est-ce qu'on sait faire ça ? » Les élèves en chœur : « Oui ! » P : « Bon, alors vous noter ça dans votre cahier de textes pour jeudi. Allez… »

Les élèves s'affairent. P circule, échange quelques mots avec un élève. Une élève l'appelle. P se rend auprès d'elle, l'écoute. P : « Écoutez, un peu. Amélie demande comment on appelle les mesures des angles. Sarah ? » Sarah : « Moi j'ai mis *u* et *v*, comme on avait fait déjà. » P : « Oui, d'accord, on peut faire ça. Et puis pour le rapport de *u* et *v* donc ? » Sarah : « *r* ? » P : « Voilà, *r*, par exemple ! » Un élève se manifeste : « Madame on peut aussi faire afficher *v*/*u* ! Ça facilite. » P : « Oui, pourquoi pas. Et tu l'appelles comment ? » Florian : « Je l'appelle *s*. » P : « D'accord. Bon, alors on verra jeudi ce qu'on fait… On en reste là pour cette recherche aujourd'hui ! »

Semaine *n* – Jeudi

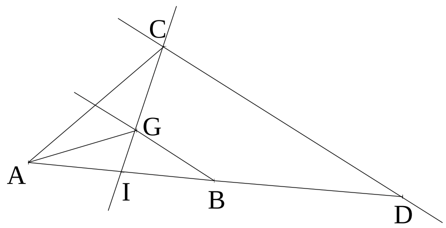
P : « Bon alors, maintenant on revient au problème de retrouver le sommet C d'un triangle dont on connaît les sommets A et B et le centre de gravité G. J'ai demandé à Farida de nous rappeler ce qu'on avait fait et ce qu'il y avait à faire. Farida, à toi ! » Farida va au tableau et trace rapidement à main levée une figure où apparaissent les points A, B, C et G ainsi que les médianes ; puis elle s'adresse à la classe : « On avait posé la question "Comment faire pour déterminer les droites (AC) et (BC) ?" On a étudié la réponse "On cherche à déterminer la direction de (AC) et de (BC)", un peu comme on avait fait à propos du même problème avec le centre du cercle inscrit I à la place du centre de gravité G. Mais là on n'a pas trouvé une relation simple… Il fallait faire une étude expérimentale avec Wallis pour voir si par exemple [elle se tourne vers le tableau] l'angle $\widehat{GAC}$ serait la moitié ou le tiers ou autre chose de l'angle $\widehat{GAC}$. Voilà… » P : « Merci Farida, très bien… Bon, vous avez donc étudié ça avec Wallis. Alors votre réponse ? »

Un élève : « Ça marche pas ! » P : « Vous êtes d'accord ? Que ça marche pas ? » Des élèves en chœur : « Oui. » P : « Qui aurait trouvé quelque chose ? » Silence… P regarde la classe : « Bon, alors on va abandonner cette voie – provisoirement ! On revient donc à la question rappelée par Farida : "Comment faire pour déterminer les droites (AC) et (BC) ?" On avait répondu en termes de direction de la droite. Quelle autre réponse est possible ? Pour déterminer une droite ? Kévin ? » Kévin : « Il suffit d'avoir un autre point. » P : « Oui, d'accord. Quel autre point ? Brice ? » Brice : « C. » Rires dans la classe. P : « Brice, pourquoi ils rient ? » Brice : « Parce que c'est ça qu'on cherche ! » P : « Bien. Alors, à quel autre point on pourrait penser ? » Brice : « Le point qui est sur la médiane (AG). » P : « D'accord. Et c'est quoi ce point ? » Ricardo : « Le milieu ! » La classe approuve. P : « Bien, le milieu A', c'est ça. Problème : comment déterminer A' ? » Camille : « On peut faire comme avec les angles : on regarde si par exemple GA' est égal à GA, ou si c'est le double, etc. » P : « Vous êtes d'accord ? » Silence. P : « On peut essayer ça ? » La classe semble approuver. P : « Bon, alors vous savez ce qu'il vous reste à faire ! Cette fois *u* c'est la mesure GA, *v* c'est GA'. C'est clair ? » Les élèves : « Oui. » P : « Alors vous notez ça dans votre cahier de textes. Vous pensez aussi à faire une narration écrite de la recherche qu’on a arrêtée, en vue de la synthèse à venir. » Un élève : « C’est pour quand, Madame ? » P : « Pour lundi prochain. Vous notez ; après, on va faire des exercices de calcul littéral. Je vous donne le premier, vous le recopiez là où vous savez… » Elle écrit :

Exercice 11. Montrer que, si x est un entier pair, alors le nombre $y = 3x-(4x-2)$ est aussi un entier pair. Que peut-on dire de y lorsque x est impair ?

P : « Allez ! Dépêchons-nous… »

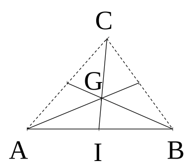
L’affaire, pourtant, ne s’arrête pas là. Un peu plus tard – lors de la séance 10 du séminaire –, un participant va en effet poser la question suivante, qui aura supposé de sa part – on s’en doute – une interrogation mathématico-didactique relativement « pointue », et qui va relancer le travail engagé par le séminaire.

> En relation avec le compte rendu d’une séance en 4^e, qu’aurait pu faire P si un élève lui avait proposé la solution suivante : « Si on note D le point symétrique de A par rapport à B, la droite (Δ) parallèle à (BG) coupe la médiane (IG) en C » ? Et ce en s’appuyant sur le théorème de la droite des milieux.
>
> 
>
>
> N’y aurait-il pas alors une réelle diversion dans l’étude proposée par P, et comment alors revenir à l’étude envisagée par P ? (2005-2006, 2de, semaine 10)

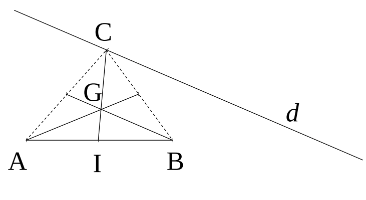
Dans la réponse qu’il propose lors de la séance suivante, le responsable du séminaire note en préambule que « la difficulté évoquée n’est pas si redoutable qu’on peut le penser de prime abord ». Il souligne ensuite que « lors de la préparation de l’AER (ou de la suite d’AER) prévue, il est essentiel de procéder à une *analyse a priori* des situations d’étude et de recherche envisagées ». Que vise cette analyse préalable ? Réponse : elle doit « tenter d’identifier les différentes “histoires” mathématiques qui pourront se vivre concrètement dans la classe, sous la direction du professeur ». Le rédacteur des notes rappelle ainsi que, dans le compte rendu fictif reproduit plus haut, « on avait imaginé une telle histoire […] dans laquelle la classe cherchait à déterminer le point C comme intersection de deux droites » : telle était en effet la proposition de l’élève Kévin, point de départ de cette « histoire parallèle ». À son propos, le responsable du séminaire fait alors ce commentaire : « La proposition de Kévin, en l’espèce, constitue un cas particulier de réponse – simple, trop simple – à la question *cruciale* générique “Comment déterminer un point ?”. L’une des réponses possibles est en effet : “Comme l’intersection de deux droites (connues).” Le *choix* de ces deux droites est lui-même *crucial* : celui proposé par Kévin n’aboutira pas – du moins dans l’histoire imaginaire narrée lors de la séance 4 ! » Le commentaire note alors que la question examinée évoque certes un autre aboutissement de l’étude, mais sans proposer une *histoire* qui aurait pu y conduire. Une telle histoire, est-il souligné encore, « ne peut être qu'assez complexe ». Le cœur de la réponse à la question examinée sera donc constitué d'un autre compte rendu fictif, décrivant une autre aventure mathématique possible. On le reproduit ci-après.

La classe étudie le problème suivant : on a effacé le point C d'un triangle ABC dont on avait marqué le centre de gravité G ; comment retrouver le point C à partir de ce qui reste, c'est-à-dire A, B et G ?

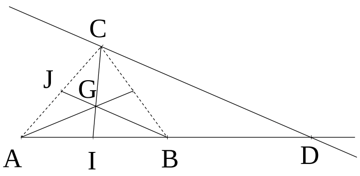
P : « Comment trouver le point C ? Kévin, tu as une idée ? » Kévin : « Comme intersection de deux droites… » P : « D'accord. Mais lesquelles ? » Silence. Farida : « On peut prendre (IG). » P. « Exact. Et puis ? Quelle autre droite ? Comment on détermine une droite ? » Ricardo : « Ben, par deux points distincts… » P. « Oui. Et puis ? » Nabil : « Comme parallèle à une droite donnée passant par un point donné. » P. « Oui. Mais quel point ? Et parallèle à quelle droite ? Ici ?… » Silence. P relance : « Bon, on a déjà vu ça. Qu'est-ce qu'il faut faire dans ce cas ? Si on est bloqués ? Si on ne voit pas ? » Sarah lève la main : « On fait par analyse-synthèse. » P. « Ce qui veut dire ? » Sarah : « On suppose le problème résolu, on regarde la figure. » P. « Bon, regardons ! » Elle trace rapidement un schéma de figure au tableau. Je mets en trait plein ce qu'on connaît. »



P. « Alors, cette droite passant par C qui serait parallèle à une droite de la figure ? Ça pourrait être quoi ? » Silence. P. « Regardons les droites de la figure… Laissons de côté (IG), puisque, ça, c'est la première droite, si on suit la proposition de Farida. » Brice : « Ça peut pas être (AC) ou (BC), puisqu'on les connaît pas. » P. « En effet. Donc ça nous laisse trois droites. À savoir ? » Anaïs : « Ben, y a (AB), mais il faudrait avoir un point autre que C. » P. « Oui, et ça, apparemment, on l'a pas ! » Silence. P. « Alors ? » Elle avise un élève qui lève le doigt : « Oui, Belkacem ? » Belkacem : « Il reste plus que (AG) et (BG). » P. « Oui, et alors ? Qu'est-ce qu'on peut faire ? » Belkacem : « Ben on trace la parallèle par exemple à (BG). » P. « Oui, voilà… » Elle complète son dessin.



P. « Voilà. J'ai tracé la parallèle d à (BG) passant par C. Le problème, c'est qu'on n'a pas le point C ! Quelle question doit-on se poser alors ? » Lucas : « Si on connaît un point de la droite d, à part C. » P. « Vous êtes d'accord ? Qui a une idée ? » Farida : « Ça peut être le point d'intersection avec une droite connue. Ça veut dire (AB). Ou (AG)… » P. « Oui. Pas avec (BG) bien sûr ! Et alors ? » Kévin : « Madame, vous pouvez pas marquer l'intersection de d avec (AB) ? » P s'exécute.

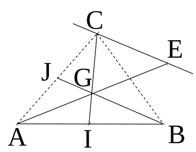


P. « Pourquoi ? Tu as vu quelque chose, Kévin ? » Kévin : « Oui, la droite des milieux. Dans… ACD. » P. « Explicite. » Kévin : « Dans le triangle ACD, J est le milieu de [AC] et (JB) est parallèle à (CD) ; donc B est le milieu de [AD]. » Une élève se manifeste : « Madame, je sais ! Je sais ! » P. « Oui, Manon, qu'est-ce que tu veux dire ? » Manon : « On prend D symétrique de A par rapport à B ! » P. « Oui, et alors ? » Manon : « Et après on trace la parallèle à (BG) passant par D. Et on a C. » P. « On dirait en effet que ça marche… Bon alors écoutez-moi. On va reprendre ça tous ensemble d'abord. Mais après, chacun va rédiger une mise en forme de la construction de C que, apparemment, nous venons de trouver. Sur une feuille que vous me remettrez. Je veux savoir où vous en êtes… Alors, qui peut reprendre ? »

Cette analyse *a priori*, coulée dans une fiction didactique, apporte quelques conclusions, et tout d'abord celle-ci : « la création endogène spontanée (et non dirigée par P) du procédé de construction évoqué dans la question est sans doute très peu probable ! » Elle permet aussi, par un jeu de variations, d'imaginer encore d'autres histoires possibles, même quand de telles histoires semblent peu probables. Un autre compte rendu fictif envisageable est ainsi proposé.

………

P. « Voilà. J'ai tracé la parallèle *d* à (BG) passant par C. Le problème, c'est qu'on n'a pas le point C ! Quelle question doit-on se poser alors ? » Lucas : « Si on connaît un point de la droite *d*, à part C. » P. « Vous êtes d'accord ? Qui a une idée ? » Farida : « Ça peut être le point d'intersection avec une droite connue. Ça veut dire (AB). Ou (AG)… » P. « Oui. Pas avec (BG) bien sûr ! Et alors ? » Kévin : « Madame, vous pouvez pas marquer l'intersection de *d* avec (AG) ? » P s'exécute.



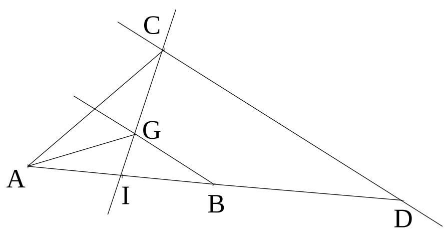
P. « Pourquoi ? Tu as vu quelque chose, Kévin ? » Kévin : « Oui, la droite des milieux. Dans… ACE. » P. « Explicite. » Kévin : « Dans le triangle ACE, J est le milieu de [AC] et (JG) est parallèle à (CE) ; donc G est le milieu de [AE]. » Une élève se manifeste : « Madame, je sais ! Je sais ! » P. « Oui, Manon, qu'est-ce que tu veux dire ? » Manon : « On prend E symétrique de A par rapport à G ! » P. « Oui, et alors ? » Manon : « Et après on trace la parallèle à (BG) passant par E. Et on a C. » P. « On dirait en effet que ça marche… »

La fin de la réponse apportée ce jour-là à la question examinée s'achève alors sur un ensemble de considérations relatives à la gestion didactique de situations où le projet d'enseignement du professeur pourrait se voir perturbé par la survenue de tel ou tel événement.

5) S'il est peu probable que, pendant le temps de la recherche en classe, un élève parvienne seul, par son activité propre, à l'une des solutions alternatives évoquées ici, il est certes possible qu'un élève l'*apporte* toute faite de l'extérieur de la classe, parce qu'on la lui aura montrée dans un cours particulier, parce qu'il l'aura trouvée toute faite dans un livre, etc. À ce moment-là devra s'enclencher la « dialectique des médias et des milieux », le « milieu » approprié étant ici, soit la théorie géométrique disponible (si, du moins, elle contient les théorèmes des milieux), soit l'expérimentation graphique (sur papier blanc ou sur papier quadrillé) ou l'expérimentation numérico-graphique (à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique), soit les deux. Mais ce qui manquera, du point de vue des apprentissages, aura été, pour cette solution-là, le processus collectif et dirigé d'étude et de recherche – tel par exemple qu'on l'a imaginé dans le compte rendu fictif précédent.

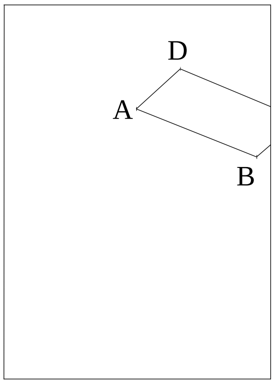
6) Plusieurs observations sont encore essentielles. Qu'une telle solution ait été produite en classe par un ou des élèves ou qu'elle ait été apportée en classe par l'un d'eux (si l'AER s'est étendue sur deux séances successives par exemple), l'attention à lui porter, en règle générale indubitable, *n'aura pas de priorité* par rapport à l'histoire collective en cours de construction dans la classe. Le professeur prendra acte de la solution proposée, en en différant toutefois l'étude collective – qui pourra aussi bien se faire dans le cadre d'un DM, par exemple, dès lors du moins que les conditions didactiques requises par ce dispositif seront satisfaites.

7) Quel que soit le cheminement parcouru, on devra en fin de parcours tenter de dégager la solution « la plus simple ». Cette exigence a déjà été évoquée à propos d'une autre solution : si l'on cherche à définir C comme intersection de (AC) et de (IG), on peut être amené à chercher à déterminer la position de J sur [BG], et donc arriver par là au résultat technologique θ qui commande la séance observée : le centre de gravité est situé sur chaque médiane aux deux tiers de la longueur à partir du sommet. Mais on devra s'efforcer ensuite de « réduire » la solution obtenue – en observant qu'il n'est nul besoin de construire J, etc., puisqu'une construction directe de C sur [IG] est possible à l'aide de θ.



Le même genre de réduction fera passer de la solution évoquée dans la question examinée ici à la solution « standard » visée par P : dans le triangle ICD, B est, par définition de D, situé aux deux tiers de [ID] à partir de D, et donc, d'après le théorème de Thalès appliqué aux triangles ICD et IGB, G est situé aux deux tiers de [IC] à partir de C. La synthèse enregistrera, *in fine*, la solution standard, à laquelle on arrive quelle que soit l'aventure mathématique vécue dans la classe.

3.9. Ce qui précède demeure, si l'on peut dire, une réalité de papier. Par contraste, nous examinerons maintenant une séance observée à l'occasion de la validation des professeurs stagiaires de l'année 2005-2006 : on y verra que le travail de formation accompli en la matière, et dont nous avons rapidement restitué quelques épisodes, ne reste pas sans effet dans la pratique et la pensée des élèves professeurs. La séance observée a lieu cette fois dans une classe de 5e, le 9 février 2006. La première partie de la séance a été occupée par un travail qui avait été donné à faire à la maison. Puis la professeure, que nous appellerons Julia, fait distribuer une feuille de travail portant le dessin d'un parallélogramme ABCD dont le sommet C est hors de la feuille (voir ci-contre).La consigne est la suivante : « Le sommet C du parallélogramme ABCD est sorti des limites de la feuille. Tracer la partie visible de la droite (AC). » On notera la proximité d'inspiration avec l'AER précédente, relative au centre de gravité, dans une classe de 4e. Mais soulignons avant toute chose que la classe de 5e à laquelle ce problème est proposé *ne connaît pas* la propriété clé, soit le fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : c'est précisément pour tenter de résoudre le problème proposé que l'idée va émerger qu'il pourrait bien en être ainsi. La conduite de l'AER par Julia se révèle plus « douce » que ne l'avaient été les interventions de Sabine vues précédemment : le travail de la classe, tel que le restitue le compte rendu reproduit ci-après, montre Julia sans doute davantage attentive au cheminement réel qui s'ébauche.



En écho [à la lecture de l'énoncé], Julia écrit :

<u>Question</u> : tracer (AC) ?

Elle demande ce que sont, ici, les données. Un élève, sollicité, répond : « ABCD est un parallélogramme. » Julia : « Tout le monde voit ? » Puis : « Qu'est-ce qu'il faut pour tracer une droite ? » Une élève : « Une droite ? Un compas, un crayon, une gomme. » Julia : « Laissez de côté les instruments de géométrie. » Un élève intervient, sans succès ; puis une élève trouve : « Des points ! », s'écrit-elle. Julia : « Combien ? » L'élève : « Deux ! » « Tout le monde est d'accord ? » « Oui… » « Par quels points passe la droite ? » « A et C » « C, on ne peut pas s'en servir. Comment faire ? » Julia relance : « Qu'est-ce qu'il faudrait faire ? »

Tout indique que la classe s'emploie moins à décrypter le désir de la professeure qu'à étudier le problème proposé. De façon duale, Julia se montre capable de valider des avancées de la classe que, peut-on penser, nombre de professeurs passeraient par profits et pertes ! C'est ainsi que le compte rendu d'observation restitue dans les termes suivants la suite de l'épisode dont nous venons de prendre connaissance.

Après quelques essais infructueux, la classe dégage la réponse attendue : il faudrait avoir un autre point. Julia écrit :

> Activité 2
> Pour tracer (AC), il faut 2 points
> Ici, on n'en a qu'un : le point A
> Il faudrait trouver un autre point

La notion de résultats partiels se met ici à vivre ! La suite du compte rendu le confirme.

Julia : « Ce point, il faudrait qu'il soit comment ? » Elle interroge une élève, qui répond : « Sur la droite (AC). » Julia approuve et écrit :

> Il faudrait trouver un autre point
> qui est sur (AC)

Un débat s'ensuit à propos de ce deuxième point : il faut qu'il soit sur la feuille, souligne Julia, « sinon ça n'a aucun intérêt ». Elle écrit :

> qui est sur (AC), et sur
> la feuille

Julia : « Comment on pourrait trouver ce deuxième point ?… Cherchez. Et après on partagera ensemble ce qu'on a fait ! »

L'authenticité de la recherche de la classe se marque encore à d'autres signes. Dans le passage du compte rendu reproduit ci-après, on voit ainsi à la fois « exploser » l'idée qui permettra – conjecturalement – de résoudre complètement le problème proposé, mais aussi des idées adventices – idées sans avenir, ou idées alternatives dont l'examen est sagement différé par Julia (sans que celle-ci succombe à la tentation commune de les éconduire), ou idées fausses qui, chez tel ou tel élève, tentent de s'articuler à l'idée clé qui vient de surgir.

Les élèves travaillent en silence. Julia circule lentement. Peu à peu des élèves se manifestent auprès de Julia. Un élève dit à voix basse : « Ça y est, j'ai trouvé ! J'ai trouvé ! » Julia s'adresse bientôt à la classe : « Bon, on va partager les solutions. » Elle sollicite un élève : « Explique-nous ce que tu as fait. » L'élève a… ajouté une feuille pour tracer le parallélogramme. Une élève, interrogée, va droit au but : « On trace le segment [DB], on prend le milieu, on le nomme, et après on trace (AI), si I est le milieu… » Plusieurs ont trouvé cette solution. Une élève a fait comme le premier élève interrogé. Un autre élève parle de l'angle $\widehat{DAB}$. Julia : « Mais où le tracer l'angle $\widehat{BCD}$? » Un élève encore propose une tentative qui n'aboutit pas. Un autre veut faire la symétrie par rapport à (AD). Julia indique qu'on verra cette idée demain : pour le moment, on examine la solution par le milieu de [DB]. Après un court dialogue à ce sujet, Julia écrit :

> Les diagonales [AC] et [DB] se coupent,
> en un point O

Julia : « Il se balade sur le segment ? Il est où ? » « Au milieu », répond une voix. Un autre élève intervient ; il a compris la solution, mais il semble qu'il veuille « placer le point C », à partir de A et O. Julia fait reformuler le problème : il s'agit de tracer la droite (AC), pas le point C. Un élève encore parle de « trouver où est le point C ». Julia : « Est-ce que c'est ça le problème ? » Des élèves en chœur : « Non ! » Mais certains semblent avoir un peu de mal à l'entendre.

Alors même que la clé du problème vient d'être découverte, l'idée de trouver le point C pour construire la partie « visible » de la droite (AC) est, on le voit, toujours présente. Mais cette idée est maintenant en position dominée : le « coupable » qui l'énonce est promptement corrigé par ses pairs. La classe est prête pour une nouvelle étape, que la professeure enchaîne donc aussitôt : la solution trouvée est conditionnelle ; elle suppose que ce qui est apparu comme une propriété « bienvenue » du parallélogramme soit *vraie* [43] ! Conformément à un enseignement fondamental apporté par la formation, Julia a prévu maintenant une vérification expérimentale, conçue comme distincte d'une « démonstration », c'est-à-dire d'une déduction à l'intérieur de la théorie géométrique disponible et – le cas échéant – préalable à cette dernière [44]. Le compte rendu est à cet égard très clair : nous le reproduisons ici sans autre commentaire.

---

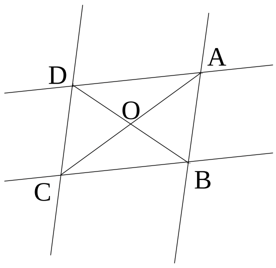
[43] Rappelons que la classe n'a pas encore rencontré cette propriété : elle la découvre comme clé possible du problème étudié.

[44] Comme on le verra ci-après, Julia proposera à la classe d'admettre le résultat dont la vérité aura été établie expérimentalement, c'est-à-dire d'admettre sa déductibilité dans la théorie géométrique du plan alors disponible.

Julia : « Je vous propose d'expérimenter à l'ordinateur pour voir si on a bien les diagonales qui se coupent en leur milieu. » Julia projette au tableau l'écran d'un ordinateur portable et demande à un élève d'aller écrire au tableau en même temps. L'élève note :

> <u>Avec le logiciel Cabri-géomètre</u>
> On a tracé un parallélogramme ABCD

Une élève se plaint que c'est écrit « trop petit ». Julia fait apparaître deux couples de parallèles, « des bandes », disent les élèves. Elle trace les diagonales, nomme O leur intersection.



« Il y a une fonction dans l'ordinateur qui permet de mesurer les distances », dit Julia. Un élève précise : on mesure AO, etc. Les distances mesurées apparaissent en projection sur le tableau. Échange pour savoir si O est bien le milieu de [BD] : oui ! Ensuite, on passe à AO et OC, qui sont eux aussi trouvés égaux. Conclusion : dans ce parallélogramme, O est le milieu des deux diagonales. Julia précise : « On peut changer les droites avec ce logiciel. » Elle sollicite un élève qui va à l'ordinateur pour faire bouger (AD) et (AB) : il y parvient après un minimum d'hésitations. Les distances affichées restent égales entre elles ! Les élèves : « L'autre droite ! L'autre bande ! » L'élève le fait, fort bien. Pendant ce temps, l'élève au tableau a écrit :

> On a bougé les diagonales AC et BD
> On mesure BO et OD pour savoir
> Si O est le milieu puis on fait pareil
> avec AO et OC
> On a bougé les droites et on
> remarque que O est bien le milieu

Un élève s'étonne que les diagonales n'aient la même longueur. Une élève affirme : « C'est que dans les carrés ! » Julia prend acte du propos de l'élève mais ajoute qu'on verra, que là on voit que ce n'est pas pareil… L'élève au tableau a écrit :

> remarque que O est bien le milieu des segments
> DB et AC

Julia corrige les notations fautives. Puis elle demande à un élève de formuler la propriété étudiée, ce qu'il fait : « Les diagonales se coupent en leur milieu. » Elle ajoute : « On pourrait le démontrer, mais c'est un peu long. Donc on va l'admettre. » Elle écrit :

> <u>Propriété</u> (admise) : si
> alors

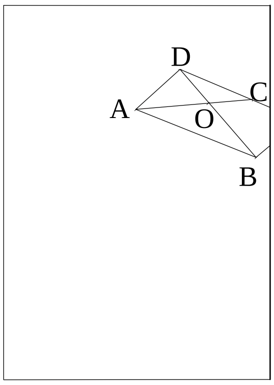
Julia : « Qu’est-ce que je mets après le “si” ? » Un élève se lance ; des élèves semblent rejeter sa formulation. Julia, finalement, conclut :

> Propriété (admise) : si un quadrilatère est un
> parallélogramme alors ses diagonales
> se coupent en leur milieu

L’affaire n’est pas terminée : il reste à conclure. Alors que la séance tire à sa fin, le compte rendu montre que l’avancée d’ensemble de ce collectif d’étude et de recherche qu’est la classe laisse la possibilité à certains de ses membres d’être un peu à la traîne encore, même si des repositionnements se sont silencieusement réalisés.

Julia : « Quelqu’un peut résumer ce qu’était le problème et ce qu’on a fait pour le résoudre ? » Un élève : « C’était trouver le point C » Non ! Un élève qui avait fait cette erreur rectifie : « C’est tracer (AC). » Une élève précise la technique pour ce faire. Julia reprend sa formulation puis ajoute : « Je vous laisse tracer la partie visible de la droite (AC). »

La classe « travaille » sa solution. L’élève qui avait rectifié l’erreur de son camarade montre à ses voisins le dessin qu’il a fait, en leur demandant s’il est correct. Ceux-ci répliquent aussitôt : sa « solution » est rejetée ! L’élève a en effet placé le point O de sorte que [AO] coupe [DC] *sur la feuille* (voir ci-contre) : le point C a un incontestable pouvoir d’attraction… Mais l’erreur commise est fragile : elle ne tient plus que par un fil. Julia intervient et demande à cet élève d’aller au tableau « finir le dessin ». Les dernières lignes du compte rendu montrent l’entremêlement du « travail de la solution » par la classe (dont l’élève au tableau) avec la direction d’étude imprimée par Julia tant en ce qui concerne l’AER réalisée que les autres activités qui font la vie d’une classe.



Julia à l’élève : « Bon, alors, tu vas finir le dessin qui est au tableau ! » Il est midi. L’élève dessine à main levée, fort bien. Julia enchaîne : « Je vais distribuer la feuille d’exercices… » Elle le fait, aidée par deux élèves. Une élève demande si, pour indiquer que DO = OB, on peut mettre les « traits ». Julia rétorque que « ça ne te montre rien ». L’élève : « Je sais, mais ça permet de voir. » Julia approuve et place les traits indiquant l’égalité des longueurs en question. Elle poursuit : « Vous sortez votre cahier de textes. » Des élèves protestent : « Demain, on a le test ! » Julia : « C’est bon ! C’est bon ! » Elle indique qu’il s’agit de travailler la deuxième stratégie proposée, qu’on a laissée de côté :

Pour vendredi → tracer le symétrique
de la figure par rapport à (AD)

Un débat s'esquisse : s'agit-il d'une symétrie centrale ? La sonnerie retentit. Julia poursuit : « Interrogation écrite d'une demi-heure demain… » Les élèves corrigent : « 35 minutes ! » Julia : « N'oubliez pas votre calculatrice. » La séance est finie.

Tel est donc un tableau de ce vers quoi les élèves professeurs sont censés aller au cours de leur formation à l'IUFM. Mais, pour parvenir jusqu'en ce point d'accomplissement, la route est généralement bien longue !

4. Un exemple : les fonctions

4.1. Si la question des *fonctions* nous a semblé mériter la petite étude monographique que nous lui consacrons ici, c'est que l'introduction et les usages de la notion de fonction font basculer d'un monde mathématique dans un autre, tant au plan historique qu'au plan scolaire [45]. De là découlent alors un grand nombre de « problèmes de la profession » avec lesquels les professeurs stagiaires, notamment ceux qui enseignent en classe de seconde, se trouvent d'emblée aux prises. Dans la période actuelle, l'*idée* de fonction est censée être

[45] Au plan historique, la notion de fonction a une longue histoire ; mais la bascule se produit vraiment au XVIII^e^ siècle. Abordée sous l'angle – réduit mais révélateur – de la notation, elle a pu être résumée en ces termes par Hans Freudenthal (*Dictionnaire des mathématiques. Fondements, probabilités, applications*, Encyclopædia Universalis et Albin Michel, Paris, 1998, p. 431-432) : « L'emploi mathématique du terme de fonction date de la correspondance de Leibniz avec Johann Bernoulli. Les auteurs sont conscients du fait que, parmi quelques variables, l'une peut être une fonction de l'autre et ils rendent, s'il est possible, cette dépendance explicite ; mais des signes de fonction y sont très rares (Johann Bernoulli, 1718 : φx, φ fonction de x). Cela change avec Euler et d'Alembert ; Euler établit la préférence pour f, F, φ, Φ en tant que symboles de fonction et Lagrange propage l'emploi de ces signes. » À cette période classique succèdera un siècle plus tard une autre rupture, que le même auteur condense sobrement dans les lignes suivantes (*ibid.*) : « La notation des fonctions a subi des changements profonds depuis 1930 environ, bien qu'il y ait des précurseurs dès le début du siècle et que des conservateurs ne se soient pas encore convertis au nouveau style. Dans l'analyse pratiquée avant 1930, il était usuel de désigner une fonction par $f(x)$, c'est-à-dire avec un argument explicite. Le nouveau style fut suggéré par l'analyse fonctionnelle. Tant que l'on ne considère qu'une seule fonction ou un nombre fini de fonctions, il importe peu qu'une fonction soit désignée par f ou par $f(x)$. Mais de quelle manière devrait-on exprimer le fait qu'une fonction appartient à un ensemble A ? La notation $f(x) \in$ A est décidément fausse ; elle stipule l'appartenance des valeurs de la fonction à A ; on doit dire $f \in$ A. »

présente dans la classe de mathématiques depuis la 6e. L'ancien programme de cette classe comportait par exemple ce subtil commentaire : « Certains travaux conduiront à décrire des situations qui mettent en jeu des fonctions. Toute définition de la notion de fonction sera évitée, mais des expressions telles que "en fonction de", "est fonction de" pourront être utilisées. » Cette distinction est reprise par le programme de la classe de 5e, à un détail près : « Toute définition de la notion de fonction sera évitée, mais des expressions telles que "en fonction de", "est fonction de" seront utilisées. » Alors que les expressions mentionnées *peuvent* être utilisées en 6e, elles *doivent* l'être en 5e. Le programme de 4e reconduit ces prescriptions : « Comme en 5e, le mot "fonction" sera employé, chaque fois que nécessaire, en situation, et sans qu'une définition formelle soit donnée. » L'idée clé semble être celle de progressivité dans la montée en puissance du concept de fonction. C'est ainsi que, à propos du calcul littéral, le document d'accompagnement du programme du cycle central (5e-4e) précise :

> En classe de 5e, la substitution de nombres à des lettres permet, comme en classe de 6e, d'exécuter des calculs numériques, de comprendre et de maîtriser les règles d'écriture d'expressions littérales. Cette substitution, accompagnée de la constitution de tableaux de nombres et de la construction de points dans un plan muni d'un repère, prépare à la notion de fonction.

Ce même document annonce ce qui devrait être un changement crucial à opérer en classe de 3e. Commentant la place donnée à l'étude des situations de proportionnalité, ses rédacteurs écrivent en effet :

> La proportionnalité est un concept capital. Elle est indispensable pour l'étude et la compréhension des relations entre grandeurs physiques ; sous l'aspect des pourcentages, elle joue un rôle essentiel dans la vie du citoyen. Sa bonne appréhension par les élèves est fondamentale, son apprentissage ne peut être que progressif. L'étude de situations familières permet de développer chez les élèves un « mode de pensée proportionnel ». C'est en classe de 3e que les fonctions linéaires sont introduites pour modéliser les situations de proportionnalité.

Ce qui était donc jusqu'alors une manière de penser cède la place à un *modèle mathématique*, celui des *fonctions linéaires* (et, plus largement, des fonctions *affines*). En vérité, le concept de fonction se voit doté d'une double ascendance : d'un côté il fournit un cadre conceptuel général à des entités fonctionnelles particulières, les fonctions linéaires et affines, qui modélisent les situations de proportionnalité ; d'un autre côté, il est un rejeton des manipulations sur les expressions littérales – le programme parle à cet égard « de compléter les bases du calcul littéral et d'approcher le concept de fonction ». Dans l'introduction au secteur des fonctions que propose le programme de 3e, la synthèse de cette double filiation est esquissée dans les termes suivants :

> L'un des objectifs est de faire émerger progressivement, sur des exemples très simples, la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre un nombre à un autre nombre. Les exemples mettant en jeu des fonctions peuvent être issus de situations concrètes ou de thèmes interdisciplinaires. L'utilisation des expressions « est fonction de » ou « varie en fonction de », déjà amorcée dans les classes précédentes, est poursuivie et sera associée à l'introduction prudente de la notation $f(x)$, où x a une valeur numérique donnée.

Le programme s'attache à marquer le lien qui doit être fait entre l'outil fonctionnel ainsi renouvelé et le passé mathématique des élèves. À propos des fonctions linéaires, indique-t-il ainsi, les élèves devront « connaître la notation $x \mapsto ax$, pour une valeur numérique de a fixée ». Un commentaire met en valeur cette indication dans les termes suivants :

> La définition d'une fonction linéaire de coefficient a s'appuie sur l'étude de situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes. On pourra recourir à des tableaux de proportionnalité et on mettra en évidence que le processus de correspondance est « je multiplie par a ».

Allant plus loin, le programme de 3e ébauche un certain nombre de développements typiques de l'organisation mathématique classiquement mise en place autour de la notion de fonction. Ainsi inclut-il ce commentaire :

> L'étude de la fonction linéaire est aussi une occasion d'utiliser la notion d'image. On introduira la notation $x \mapsto ax$ pour la fonction. À propos de la notation des images $f(2)$, $f(-0{,}25)$…, on remarquera que les parenthèses y ont un autre statut qu'en calcul algébrique.

La notion de *représentation graphique* d'une fonction linéaire est un autre objet d'étude canonique, qui fait ici l'objet de ce commentaire :

> L'énoncé de Thalès permet de démontrer que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine ; cette droite a une équation de la forme $y = ax$. On interprétera graphiquement le nombre a, coefficient directeur de la droite.

Cette esquisse d'étude est reprise et complétée à l'occasion de l'abord des fonctions *affines*. Là encore, les élèves devront « connaître la notation $x \mapsto ax+b$ pour des valeurs numériques de a et b fixées », prescription qui est assortie de ce long commentaire :

> Pour des valeurs de a et b numériquement fixées, le processus de correspondance sera aussi explicité sous la forme « je multiplie par a puis j'ajoute b ». La représentation graphique de la fonction affine peut être obtenue par une translation à partir de celle de la fonction linéaire associée. C'est une droite,

qui a une équation de la forme $y = ax+b$. On interprétera graphiquement le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b ; on remarquera la proportionnalité des accroissements de x et y.

D'autres éléments classiquement inclus dans l'étude des fonctions seront abordés en 3e, sans pour autant faire l'objet d'une mise en forme arrêtée, comme le précise *in fine* le commentaire suivant :

> On fera remarquer qu'une fonction linéaire est une fonction affine.
> Des enregistrements graphiques ou des courbes représentatives de fonctions non affines peuvent servir de support à la construction de tableaux de valeurs ou à la recherche de particularités d'une fonction : coordonnées de points, sens de variation sur un intervalle donné, maximum, minimum.
> Aucune connaissance n'est exigible à ce sujet.

C'est donc en principe en 3e qu'un basculement fort s'opère, comme le document d'accompagnement du programme le souligne encore :

> Jusqu'à la fin du cycle central, la notion de fonction n'a été utilisée que de manière implicite. Les transformations géométriques étudiées n'ont pas été présentées comme application du plan dans lui-même. Le travail sur la proportionnalité, et plus largement sur l'étude de relations entre données numériques, a permis d'utiliser des formules, des tableaux de nombres et des représentations dans le plan muni d'un repère, en particulier comme outils pour résoudre des problèmes. Ainsi, à l'occasion du traitement de situations numériques ou géométriques, les élèves ont été amenés à passer d'un langage à un autre (par exemple, d'une formule ou d'un graphique à un tableau de nombres). Mais, si des expressions telles que « en fonction de » ou « est fonction de » ont été utilisées, les fonctions numériques associées à ces formules, à ces tableaux ou à ces représentations n'ont pas été explicitées.

On aura noté que ce basculement, bien qu'articulé essentiellement aux fonctions linéaires et aux fonctions affines, n'y est pas entièrement limité, ce que le document d'accompagnement rappelle dans le passage suivant :

> La classe de 3e est donc l'occasion du premier véritable contact des élèves avec cette notion de fonction, dans sa conception actuelle qui fait correspondre à tout élément d'un ensemble un élément d'un autre ensemble. Mais il ne s'agit pas de donner une définition générale de la notion de fonction. Le travail est limité à l'étude de fonctions particulières : les fonctions linéaires et affines. D'autres exemples de fonctions simples seront également utilisés, en particulier pour montrer que toute représentation graphique ne se réduit pas à un ensemble de points alignés (par exemple, en représentant quelques points d'une fonction telle que $x \mapsto x^2$, sur un intervalle). Au lycée, la notion de fonction occupera une place centrale, dans le cadre de l'enseignement de l'analyse.

La classe de 3e est ainsi le lieu d'une récapitulation et d'une formulation renouvelée d'acquis des classes antérieures : elle constitue une préparation aux enseignements du lycée, et singulièrement aux enseignements de la classe de seconde. Le document déjà cité précise par exemple :

> La notion de fonction linéaire permet, en 3e, d'opérer une synthèse des différents aspects de la proportionnalité rencontrés tout au long du collège et de les exprimer dans un nouveau langage. Toute situation de proportionnalité est modélisable par une fonction linéaire. Dans cette perspective, il convient d'être attentif, avec les élèves, aux questions soulevées par le domaine d'adéquation du modèle mathématique avec la situation traitée, en ayant soin de préciser, chaque fois, le domaine de signification de la fonction (définie, elle, sur l'ensemble des réels) dans le contexte de la situation traitée (qui impose souvent une restriction à un intervalle ou à un nombre fini de valeurs).

Les points d'articulation avec le programme de seconde sont ainsi plus nombreux que beaucoup de professeurs semblent le penser, comme on le constatera maintenant à travers les questions soulevées par les élèves professeurs, notamment ceux ayant en responsabilité une classe de seconde.

4.2. L'examen auquel nous allons procéder suit l'ordre chronologique des années (et des séances au sein des années) afin d'illustrer – plus peut-être que nous ne l'avons fait jusqu'ici – la construction d'une culture professionnelle au sein d'une formation *sur une suite d'années,* chaque promotion étant, d'une certaine manière, plongée dans la culture jusqu'alors élaborée. Ce processus cumulatif, qui permet de n'avoir pas à tout recommencer *ab ovo* chaque année, s'est concrétisé en 2005-2006 par la création d'un nouveau dispositif de formation, les *archives du séminaire*, regroupant en l'espèce les notes des séminaires des années 2000-2001 à 2004-2005, où les élèves professeurs de la promotion étaient amenés, de façon plus ou moins régulière, à se plonger pour y rechercher des éléments de réponse aux questions officiellement soulevées, comme aux questions que leurs pratiques régulières d'enseignement les amenaient à se poser [46]. En 2000-2001, lors de la séance 12, une stagiaire formule par écrit la question suivante :

> En 2de, le programme prévoit au moment de l'introduction sur les fonctions, la tâche « connaissant la courbe représentative d'une fonction, dresser son tableau de variation ». Comment justifier cela auprès des élèves ? (2000-2001, 2de, semaine 12)

Cette question est prise en compte dès la séance suivante, mais les *Matériaux pour une réponse* figurant dans les notes du séminaire montrent que le formateur commence par

[46] Chaque professeur stagiaire s'est vu attribuer en début d'année un cédérom comportant les fichiers correspondants, fichiers auxquels il pouvait en outre accéder en ligne.

substituer à la question posée une autre question qui lui paraît sans doute plus fondamentale et qu'il formule ainsi : « Comment justifier auprès des élèves qu'on s'efforce d'obtenir la représentation graphique d'une fonction donnée par son expression analytique ? Qu'est-ce qui motive cette quête ? » La réponse apportée à cette question – laissée depuis plusieurs décennies sans réponse institutionnelle claire – fait d'abord référence à un état antérieur du champ du calcul numérique, celui d'un temps où la disponibilité de représentations graphiques précises et toutes faites permettait de résoudre des équations de degré 2 et 3.

– Classiquement, en fait, la représentation graphique constituait le point culminant, l'achèvement de l'étude de la fonction et *ne servait donc à rien*.

– Elle servait autrefois à résoudre des équations et inéquations par *« calcul graphique »*.

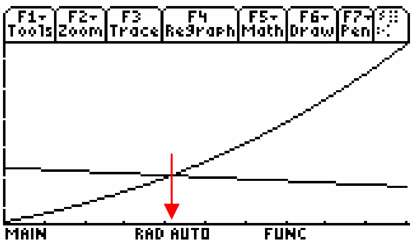
• Il fallait alors, pour cela, que la courbe représentative soit une *épure* (et non un tracé qualitativement correct mais quantitativement approximatif).

• Ainsi, pour résoudre graphiquement les équations du type $x^3+px+q = 0$ (auxquelles se ramène *toute* équation de degré 3), on *tabule* une fois pour toutes l'application $x \mapsto x^3$, comme ci-après :

1,40 $\mapsto$ 2,74 ; 1,41 $\mapsto$ 2,80 ; 1,42 $\mapsto$ 2,86 ; 1,43 $\mapsto$ 2,92 ; 1,44 $\mapsto$ 2,99 ; 1,45 $\mapsto$ 3,05 ; 1,46 $\mapsto$ 3,11 ; 1,47 $\mapsto$ 3,18 ; 1,48 $\mapsto$ 3,24 ; 1,49 $\mapsto$ 3,31 ; 1,50 $\mapsto$ 3,38 ; …

Pour résoudre l'équation $x^3+px+q = 0$, il suffit alors de tracer la courbe $\mathcal{C}_3$ représentative de $x \mapsto x^3$, puis la droite $\mathcal{D}_{p,q}$ d'équation $y = -px-q$, enfin de lire l'abscisse de l'intersection de $\mathcal{C}_3$ avec $\mathcal{D}_{p,q}$. Ainsi, pour $4x^3+3x-11\sqrt{2} = 0$ on construit sur du papier finement quadrillé la courbe $\mathcal{C}_3$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -0{,}75x+2{,}75\sqrt{2}$, ou plutôt la droite $\mathcal{D}^*$ d'équation $y = -0{,}75x+3{,}89$ ($2{,}75\sqrt{2} \approx 3{,}89$). (De façon anachronique, on a réalisé l'opération, ci-après, avec une calculatrice graphique.)

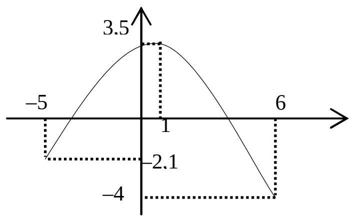
Il ne reste plus alors à « lire » la solution x^* par *« interpolation à vue »* : $x^* \approx 1{,}41$. (En fait, on a $4x^3+3x-11\sqrt{2} = 0$ pour $x = \sqrt{2} =_{\text{calc}} 1{,}414213562\ldots$)



• Pour résoudre les équations du second degré $x^2+px+q = 0$ on peut, de même, opérer graphiquement par l'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ avec la droite $y = -px-q$, ou encore par l'intersection de l'hyperbole $y = \dfrac{1}{x}$ avec la droite $y = -\dfrac{1}{q}x - \dfrac{p}{q}$ (ce qui pose le problème de la division par q).

La réponse aborde ensuite la question soulevée par l'élève professeur : pour quelles raisons doit-on apprendre aux élèves à passer de la courbe représentative – supposée disponible – d'une fonction à son tableau de variation ? Incontestablement, notons-le d'abord, le programme de seconde prescrit de faire travailler ce type de tâches – à propos duquel il parle d'ailleurs de « fonction définie par une courbe » – ainsi que quelques autres encore [47]. La réponse consignée dans les notes du séminaire s'appuie sur une distinction présente dans le texte du programme, mais qui peut paraître quelque peu opaque au néophyte : « S'il s'agit des courbes, y lit-on en effet, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. » S'agissant du premier type de courbes, la réponse est alors la suivante.

Dans le cas où la « courbe » apporte une « information exhaustive » sur les variations de la fonction, le passage de la « courbe » au tableau de variation n'est en fait qu'un changement de *code graphique* : il n'y a pas plus dans la courbe qu'il n'y a dans le tableau de variation, la courbe n'est qu'une expression graphique plus proche par l'apparence de la réalité représentée. Sur le schéma ci-contre, par exemple, on *voit* que $f(x)$ croît de –2,1 à 3,5 quand x croît de –5 à 1, puis décroît de 3,5 à –4 quand x croît de 1 à 6.



En vérité, le schéma *n'est qu'une autre manière de dire* ce qui vient d'être indiqué. Il s'agit donc purement et simplement d'apprendre à décoder les informations qui s'y expriment, et inversement à coder sous la forme d'un tel schéma les informations apportées par un tableau de variation ou sous forme discursive (comme ci-dessus : « $f(x)$ croît de –2,1 à 3,5 quand x croît de –5 à 1, puis décroît de… »).

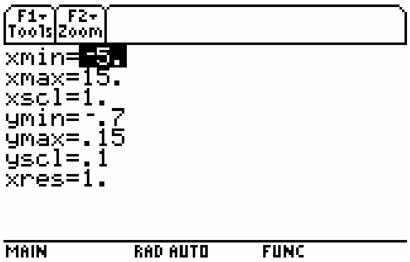
Le second type de « courbes » repéré par le programme est en fait d'une autre nature et soulève des problèmes qui seront résolus classiquement, à partir de la classe de première, au moyen de l'étude du signe de la *dérivée*. La réponse, qui se place sans doute dans la zone supérieure d'habilité calculatoire qu'on peut attendre d'une classe de seconde aujourd'hui, propose sur ce point un exemple qui, à vrai dire, est également à la limite de ce que le

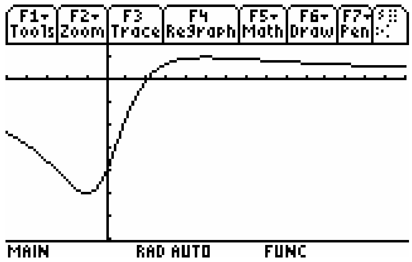
[47] Et notamment le type de tâches « réciproque » : « Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation. »

programme prescrit – tout cela, sans doute, pour frapper les esprits (et donc sans prétendre livrer un matériel d'enseignement prêt à l'emploi).

Dans le cas où la « courbe » est « obtenue sur un écran graphique », les choses sont toutes différentes : le tableau de variation modélise, non sans incertitude éventuelle, une réalité graphique « empirique », qui apporte des informations partielles sur la fonction f étudiée.

– Supposons par exemple que l'on étudie la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+5}$ sur l'intervalle [–5 ; 15]. Une calculatrice graphique livre par exemple le tracé suivant du graphe de f.





– On peut traduire le comportement observé par la *conjecture* suivante : f décroît d'abord sur $[-5 ; \alpha]$, où $\alpha \approx -1$, puis croît sur $[\alpha ; \beta]$, où $\beta \approx 5$, enfin décroît sur $[\beta ; 15]$.

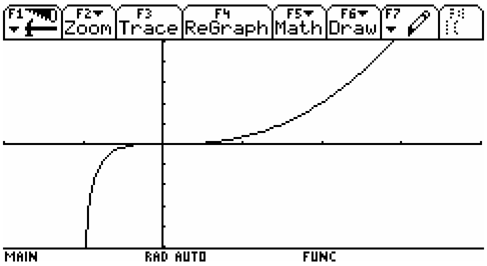
– Il resterait alors à vérifier qu'il en est bien ainsi, opération pour laquelle on ne dispose, en 2[de], que d'*outils rudimentaires*, mais néanmoins utilisables.

• Soit $a, b \geq 5$, avec $a < b$; tentons d'établir que $f(a) > f(b)$, c'est-à-dire que $\dfrac{a-2}{a^2+5} > \dfrac{b-2}{b^2+5}$. On a successivement : $f(a) > f(b) \Leftrightarrow (a-2)(b^2+5) > (b-2)(a^2+5) \Leftrightarrow ab^2 + 5a - 2b^2 - 10 > a^2b + 5b - 2a^2 - 10$ $\Leftrightarrow ab(b-a) + 5(a-b) - 2(b^2-a^2) > 0 \Leftrightarrow ab - 5 - 2(a+b) > 0$.

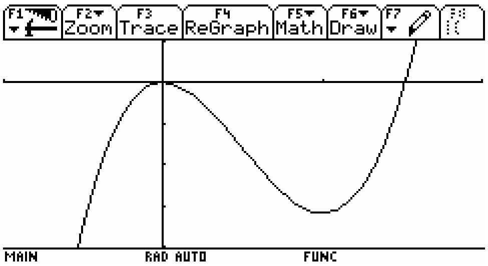
• Pour $a \geq 5$, on a : $ab-5-2(a+b) \geq 5b-5-2(a+b)$. Or : $5b-5-2(a+b) = 3b-5-2a = (b-5)+2(b-a) > 0$ et donc $ab - 5 - 2(a+b) > 0$, comme demandé. On a ainsi établi que f est strictement décroissante sur [5 ; 15].

Pourquoi alors cherche-t-on à connaître les variations d'une fonction sur un intervalle, tel qu'un « tableau de variation » peut les donner à voir. La démonstration proposée dans l'extrait ci-dessus témoigne de ce qu'un tableau est supposé apporter une information validée « théoriquement », alors que le tracé « obtenu sur un écran graphique » est un objet empirique qui peut tromper l'observateur. Le phénomène est au cœur des changements qui affectent aujourd'hui la culture mathématique au lycée dans ses rapports avec l'emploi des calculatrices (ce qui suffirait à justifier le travail accompli sur ce point dans le séminaire). De cela témoigne par exemple le sujet proposé à l'ensemble des candidats au baccalauréat de la série scientifique en 2005 en Nouvelle-Calédonie : on y considérait la fonction définie sur

]–1 ; +∞[par $f(x) = x^2 - 2{,}2\,x + 2{,}2\ln(x + 1)$, qui s'annule en $x = 0$; si, comme le demande la première question de l'énoncé, on fait apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-2 \leq x \leq 4$, $-5 \leq y \leq 5$, on voit s'afficher ceci, qui porte à regarder f comme une fonction croissante.



Or l'étude analytique de f (dans laquelle l'énoncé guide les candidats) conduit à établir que la courbe représentative a en réalité l'allure suivante : f s'annule en une valeur $x > 0$.



Mais la valeur $x > 0$ en laquelle $f(x) = 0$ est en réalité proche de 0,151778066136 (valeur pour laquelle f prend la valeur $-8{,}194539\ldots \times 10^{-14}$). Pour cela, la portion de courbe ci-dessus n'a pu être obtenue qu'en prenant pour fenêtre $-0{,}1 \leq x \leq 0{,}2$, $-4 \times 10^{-4} \leq y \leq 10^{-4}$, choix auquel on arriverait malaisément par de simples tâtonnements.

4.3. La réponse à la question examinée n'est pas achevée. Dans un paragraphe ultérieur, son rédacteur s'interroge sur l'intérêt de connaître les *variations* d'une fonction. À nouveau, la réponse qu'il apporte fait référence – de façon un peu implicite – à l'histoire de l'analyse élémentaire : l'étude des variations d'une fonction doit être située dans la perspective de la recherche des *extrémums* de la fonction sur un intervalle donné. Cette réponse est masquée, institutionnellement, par l'outil que l'on met aujourd'hui au service d'un tel projet : le calcul de la dérivée et l'étude de son signe. Contre cela, la réponse apportée fait l'économie de l'appareil mathématique devenu classique – la dérivée – et s'efforce d'aller à l'essentiel en recourant à des outils rudimentaires, mais exploités de façon judicieuse.

Qu'est-ce qui motive la connaissance des variations d'une fonction sur un intervalle ? Une réponse classique, liée à ce qu'on appelait autrefois les *« problèmes de maxima et de minima »*, est que c'est là une voie – qui n'est pas la seule ni nécessairement la plus directe – pour déterminer les *extrémums* d'une fonction.

• On peut par exemple se demander (pour des raisons dans lesquelles on n'entrera pas ici) quel est le maximum (s'il existe) de la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{x-2}{x^2+5}$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par exemple.

• Le travail déjà fait à propos de f permet de répondre. On sait déjà que $f(5) > f(b)$ pour $b > 5$. Reprenons alors le travail sur l'inégalité $f(a) > f(b)$ au point où l'on n'avait encore fait usage d'aucune hypothèse sur a et b. On a : $f(a) > f(b) \Leftrightarrow ab(b-a) + 5(a-b) - 2(b^2-a^2) > 0$.

Faisons $a = 5$, et supposons $b < 5$. Il vient : $f(5) > f(b) \Leftrightarrow 5b - 5 - 2(b+5) < 0 \Leftrightarrow 3b - 15 < 0 \Leftrightarrow b < 5$. On obtient ainsi que $f(5) > f(b)$ sur $[0 ; 5[$: f atteint donc son maximum sur $[0 ; +\infty[$ en 5.

• On saisit mieux alors l'intérêt de l'étude préalable des variations d'une fonction f : dispenser d'études locales multipliées. Pour la fonction f déjà examinée, par exemple, les égalités ①, ②, ③

$$f(a)-f(b) = \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[ab-5-2(a+b)]$$

$$= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[(a-5)b+(b-5)+2(b-a)] \qquad ①$$

$$= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[(b-5)(a+1)+3(a-b)] \qquad ②$$

$$= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[a(b+1)-3(a+1)-2(b+1)] \qquad ③$$

justifient respectivement les comportements de f conjecturés sur $[5 ; 15]$, $[-1 ; 5]$, $[-5 ; -1]$.

Mais le retour sur les « fondamentaux » de la théorie des fonctions est à peine amorcé par les considérations qui précèdent. Cette même année 2000-2001, le séminaire travaille sur une observation dans une classe de seconde à propos des *fonctions linéaires*. En seconde, le sujet n'est pas neuf. Est-il pour autant véritablement maîtrisé dans la culture des professeurs ? La séance choisie pour être analysée ne l'a pas été par hasard. On y voit le professeur stagiaire observé mettre en place une technique de calcul de la valeur d'une fonction linéaire qui ne nous semble pas être bien partagée, encore aujourd'hui, dans la culture mathématique du secondaire. Elle consiste, lorsqu'on sait par exemple que la fonction linéaire f vérifie $f(5) = 3$, à calculer $f(7)$ en écrivant : $f(7) = f\left(\frac{7}{5} \times 5\right) = \frac{7}{5} f(5) = \frac{7}{5} \times 3 = \dots$ Les notes du séminaire soulignent à cet égard que ce qui importe ici est la propriété qu'on peut noter $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors que, mû sans doute par un habitus engendré à l'université par l'étude de l’algèbre linéaire, le professeur stagiaire avait inséré dans son « cours » ce couple de propriétés présenté comme « caractéristique » des fonctions linéaires :

$$\begin{cases} f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x). \end{cases}$$

On voit ainsi de manière très concrète comment des connaissances acquises dans un autre contexte d’activité mathématique doivent être retravaillées pour être manipulées adéquatement en classe – ici, dans une seconde. Les fonctions linéaires ne sont pas, en l’espèce, des applications « de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ » en général, mais des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C’est ce que souligne implicitement le commentaire inclus dans les notes du séminaire.

– L’organisation mathématique qui se met en place sous les yeux de l’observateur se forme autour de deux types de tâches, T_C et T_M, successivement abordés.

– Les tâches du premier type, T_C, consistent, une fonction linéaire f étant connue par une de ses valeurs, $f(x_0) = y_0$, à calculer la valeur $f(x)$ pour une valeur x donnée quelconque.

– Une technique classique, τ_C, consiste pour cela à calculer d’abord le *coefficient de proportionnalité* $k = \frac{y_0}{x_0}$ puis à calculer $f(x)$ par l’expression analytique $f(x) = kx$.

– Une autre technique, τ_C*, que P s’efforce de mettre en place au cours de la séance observée, consiste à effectuer, oralement ou par écrit, la suite de calcul ci-après :

$$f(x) = f\left(\frac{x}{x_0}\, x_0\right) = \frac{x}{x_0}\, f(x_0) = \frac{x}{x_0} \times y_0.$$

– La justification de cette technique se trouve (plus ou moins implicitement) dans les deux « propriétés des fonctions linéaires » établies plus tôt dans la matinée.

– On notera, plus exactement, que c’est en fait la *seconde* propriété, le fait que $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, qui est *seule* utilisée dans cette justification. Ce fait n’est pas explicité, alors même que sa compréhension découle d’une simple utilisation « technologique » de la technique en cours de construction – en dimension 1, la première propriété, $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$, se déduit trivialement de la seconde, puisqu’on a :

$$f(x_1+x_2) = f((x_1+x_2)\times 1) = (x_1+x_2)f(1) = x_1f(1)+x_2f(1) = f(x_1\times 1)+f(x_2\times 1) = f(x_1)+f(x_2).$$

– La propriété d’additivité des fonctions linéaires ne peut donc avoir qu’une valeur *technique*, maladroitement exploitée par l’un des élèves à l’occasion du calcul de $f(5)$, et qui, puisque les élèves connaissaient $f(3)$ par définition de f et avaient calculé $f(5)$, aurait pu être beaucoup plus judicieusement mise en jeu dans le calcul de $f(8)$, partie du travail proposé dont on sait qu’elle ne sera pas réalisée en séance…

À ces considérations rectificatives s’ajoutent des remarques sur la gestion de l’organisation mathématique, notamment d’un point de vue certainement nouveau pour un professeur débutant : celui de la *nomination* adéquate des entités qui émergent dans le travail de la classe. C'est ainsi que, dans le passage suivant, le responsable du séminaire incite les élèves professeurs à marquer la distinction entre des techniques différentes, l'une anciennement connue, l'autre nouvellement apparue dans le travail de la classe, en leur donnant un *nom*.

– Lorsque s'arrête, de manière à peu près définitive semble-t-il, le travail de mise en place de la technique τ_C*, celle-ci n'a encore que le statut d'un tour de main de calcul, qui n'est pas *nommé* et ne peut être *décrit* dans sa spécificité, ce qui favorise le recours à des étiquettes ambiguës, forgées spontanément avec les mots disponibles – du genre « on multiplie et on divise », « on fait sortir... », etc.

• On aurait pu au contraire parler par exemple *d'exprimer x sous la forme* kx_0, ce qui se fait alors grâce au « tour de main » consistant à remplacer x par $\frac{x}{x_0}x_0$. (On notera que l'opération consistant à « exprimer x sous la forme kx_0 » revient à *décomposer x sur la base* $\{x_0\}$, en regardant le corps $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.)

• De même, la technique introduite, τ_C*, qui procède « par linéarité », pourrait être nommée *technique de linéarité*, pour la distinguer de la *technique du coefficient de proportionnalité* (ou *de l'expression analytique*).

La dynamique de travail du séminaire conduira à bien des développements encore. C'est ainsi que, s'agissant des techniques τ_C et τ_C*, il apparaîtra utile de préciser les techniques fort anciennes du type « règle de trois », en lesquelles on peut voir le germe des techniques « modernes » τ_C et τ_C*. De cette relativement longue incursion dans l'histoire des mathématiques de la proportionnalité, on ne retiendra ici, à titre d'illustration, que les éléments de conclusion reproduits ci-après.

– D'autres techniques ont été proposées avec le souci d'une moindre « pression » mathématique […], tout en étant « à technologie intégrée ». Ainsi en alla-t-il de la « méthode de *réduction à l'unité* », qui fut longtemps l'apanage de l'enseignement primaire élémentaire, et qui supposait de dérouler un texte *appris par cœur*, enchâssant de brefs *calculs*, qu'il fallait être capable de faire *de tête* (d'où le caractère très fonctionnel de l'entraînement au calcul mental), dans le déroulé même du discours, afin de ne pas interrompre celui-ci : « Trois cahiers coûtent 13,80. Un cahier coûte 3 fois moins, soit 13,80 F ÷ 3 = 4,60 F. Cinq cahiers coûteront 5 fois plus, soit 4,60 F × 5 = 23 F. »

– Au-delà de ces formes classiques de la *« règle de trois »* apparaît la forme « moderne », cristallisée dans l'égalité $y = kx$, et qui, en fait, n'est qu'une mise à jour de la technique de réduction à l'unité. C'est aussi la technique notée τ_C lors de la séance 10. Dans le cas pris pour exemple ici, le coefficient de proportionnalité k est le prix unitaire : « On a : $3k = 13,80$ et donc $k = 13,80 \div 3 = 4,60$. Le prix y de x cahiers est donc donné par : $y = 4,6\, x$. Pour $x = 5$, il vient $y = 4,6 \times 5 = ...$ »

– Une forme très utile, faiblement mathématisée et à technologie en partie intégrée (ce qui la distingue de la « règle pratique » vue plus haut, dont elle n'est qu'une version plus « intelligente »), a aussi été poussée en avant, notamment par l'ancien programme de la classe de 4e sous un libellé apparemment sibyllin, que les auteurs de manuels comme les professeurs semblent avoir ignoré sans états d'âme :

« L'image par une application linéaire d'une somme, ou du produit par un nombre donné, ce qui permet à l'occasion de faire fonctionner l'application linéaire sans utiliser son coefficient. »

Cette technique, très proche de la technique τ_C* de la séance en classe 2de en cours d'analyse, conduit à « produire » l'égalité $5 = \frac{5}{3} \times 3$ afin d'en déduire l'égalité attendue :

$$\begin{array}{ccc} 5 = & \dfrac{5}{3} \times & 3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ x = & \dfrac{5}{3} \times & 13,80 \end{array}$$

– La technique fonctionnelle τ_C* découle en fait de la technique précédente, en l'explicitant plus solidement par le recours à la notion de fonction et à la notation correspondante :

$$x = f(5) = f\left(\frac{5}{3} \times 3\right) = \frac{5}{3} f(3) = \frac{5}{3} \times 13,80 = \ldots$$

4.4. Le travail porte aussi sur les questions de *modélisation* d'une situation par une fonction *linéaire*, ce qui correspond à ce que le texte reproduit plus haut nommait le type de tâches T_M, dont un autre passage précise ainsi la nature.

– Le type de tâches T_M consiste, étant donné un système $\mathcal{S}$,

• à identifier deux (grandeurs) *variables*, x et y, de ce système,

• à vérifier que, lorsque l'état du système $\mathcal{S}$ varie, il existe entre les variables x et y une relation *fonctionnelle*, et que cette relation fonctionnelle est *linéaire*, c'est-à-dire que x et y sont des « grandeurs directement proportionnelles », ce qu'on note classiquement $y \propto x$,

• à déterminer un couple (x_0,y_0) de valeurs des variables x et y (si $x_0 = 1$, y_0 n'est rien d'autre que le coefficient de proportionnalité).

Cela fait, on peut enclencher l'exécution de tâches du type T_C : une valeur x_1 étant donnée, calculer la valeur y_1 correspondante, etc.

Le travail amorcé conduit alors à expliciter une question qui semble peu et mal posée dans le curriculum mathématique du collège : « Qu'est-ce qui assure que la relation fonctionnelle entre x et y est linéaire, c'est-à-dire que nous avons bien affaire à une *situation de proportionnalité* ? » Là encore, le travail s'appuie sur l'enquête historique. Le rédacteur présente à cette fin un passage d'un « cours d'arithmétique élémentaire à l'usage des écoles primaires » datant du XIX^e^ siècle, dans lequel on peut lire le discours classique sur le sujet, selon lequel la charge de la preuve est *extérieure au champ de l'arithmétique* – où l'on se contente d'enregistrer des résultats relevant d'autres domaines, mathématiques ou extra-mathématiques.

> En arithmétique, on n'a jamais à démontrer que deux grandeurs varient dans le même rapport ou dans un rapport inverse ; tantôt c'est une convention ou bien un fait d'expérience, tantôt c'est une vérité de géométrie, de physique ou de mécanique.
>
> Par exemple, on démontre, en géométrie, que les circonférences sont entre elles comme leurs rayons. – En physique, on prouve, par l'expérience, que les volumes occupés par une masse d'air sont, lorsque la température reste la même, en raison inverse des pressions qu'elle supporte. – L'observation a montré que les carrés des temps des révolutions des planètes autour du Soleil sont entre eux comme les cubes de leurs moyennes distances au centre de cet astre. – On fait voir, en mécanique, que les espaces parcourus par les corps qui tombent librement dans le vide sont proportionnels aux carrés des temps.
>
> Dans les applications numériques, on admet ces vérités sans démonstration.

Le rédacteur saisit cette occasion pour souligner ce que nous avons nommé plus haut le basculement d'un monde mathématique dans un autre – du monde ancien, où l'on combinait proportionnalité directe et/ou inverse et puissances positives et/ou négatives des variables considérées, au monde actuel où de telles combinaisons se trouvent subsumées sous le concept général de fonction.

> Cette remarque rappelle en passant l'usage *intensif*, quasiment *universel*, de la proportionnalité avant l'avènement de la notion de fonction : là où, par exemple, nous verrions une application $f : t \mapsto d = kt^2$ (donnant la distance parcourue en fonction du temps) on voyait jadis une proportionnalité $d \propto t^2$.

Mais la question du critère de la proportionnalité va donner lieu à un examen plus poussé. Celui-ci aboutit à la mise en avant d'un résultat mathématique non élémentaire, mais utile pour situer les notions enseignées et l'évolution de leur enseignement.

> – Le fait qu'on ait bien affaire à une situation de proportionnalité fait l'objet d'un critère que les auteurs classiques présentent généralement comme le font les auteurs du manuel d'arithmétique pour la « classe de mathématiques » (correspondant à la terminale S d'aujourd'hui) cité ci-après : ayant défini la relation de proportionnalité entre les variables x et y par l'existence d'un nombre k tel que, pour tout

couple (x, y) de valeurs de ces variables, on a $y = kx$, ils indiquent (F. Brachet et J. Dumarqué, *Arithmétique*, Delagrave, Paris, 1934, p. 114) :

Pour que deux grandeurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient proportionnelles, il faut et il suffit :

1° qu'à deux états égaux de l'une correspondent des états égaux de l'autre ;

2° qu'à la somme de deux états quelconques de l'une corresponde la somme des états correspondants de l'autre.

Cette définition revient à dire, d'abord que l'on a une bijection (une application « biunivoque ») entre « états » des variables considérées, ensuite que cette bijection (comme sa réciproque) est *additive*.

• Il est clair que si f est de la forme $f(x) = kx$, il y a bien additivité :

$$f(x_1+x_2) = k(x_1+x_2) = kx_1+kx_2 = f(x_1) + f(x_2).$$

• La réciproque recèle une difficulté que les manuels d'autrefois ignoraient. Si f est additive, on a $f(x) = f(x+0) = f(x)+f(0)$, ce qui donne $f(0) = 0$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$f(nx) = f((n-1)x)+f(x) = (n-1)f(x) + f(x) = nf(x)$$

si bien que $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il vient ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$,

$$m\, f\left(\frac{n}{m}x\right) = f\left(m\frac{n}{m}x\right) = f(nx) = n\, f(x)$$

en sorte que $f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n\, f(x)}{m} = \frac{n}{m}f(x)$. On a donc $f(rx) = rx$ pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$. Mais, pour passer de $\mathbb{Q}_+$ à $\mathbb{R}_+$, il convient de faire sur f une hypothèse de régularité supplémentaire : telle est la difficulté que le texte classique ignore.

• Si, par exemple, on suppose que f est continue, même en un seul point $x_0 \in \mathbb{R}_+$, l'affaire est close. Tout d'abord, si (x_k) est une suite tendant vers $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$f(x_k) = f(x_k-x+x_0) + f(x) - f(x_0)$$

et donc $\lim f(x_k) = \lim f(x_k-x+x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x)$, de sorte que f est continue en tout point de $\mathbb{R}_+$. Alors, si $(r_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels positifs tendant vers $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(\lambda x) = \lim f(r_k x) = \lim r_k f(x) = (\lim r_k)\, f(x) = \lambda f(x)$.

• On peut aussi, au lieu de la continuité, supposer que f est *bornée sur un intervalle ouvert borné au moins*, « aussi petit qu'on veut », ou encore qu'elle est *mesurable* : on montre en effet que chacune de ces conditions, *jointe à l'additivité* de f, entraîne que f est linéaire. On montre aussi que l'absence d'une telle condition supplémentaire *ne permet pas de conclure* : il existe des fonctions *additives non linéaires*. Une telle fonction doit évidemment être *discontinue en tout point*, n'être *bornée sur aucun intervalle*, si petit soit-il, et n'est pas *mesurable* : la définition d'un tel « monstre » utilise l'axiome du choix (et, plus précisément, l'existence d'une base de Hamel, c'est-à-dire d'une base de $\mathbb{R}$ regardé comme espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels).

4.5. L'analyse du compte rendu d'observation se révèle génératrice d'un véritable *parcours de formation*, aux propriétés « écologiques » analogues à celles des *parcours d'étude et de* *recherche* (PER) que nous évoquerons plus loin [48]. Le travail du séminaire, en l'espèce, va conduire à s'arrêter sur une question essentielle touchant à la dialectique de la modélisation, c'est-à-dire aux liens complexes entre modèle et système modélisé. Les notes du séminaire introduisent ainsi cette question.

…dès que le système $\mathcal{S}$ auquel on s'intéresse n'est pas strictement mathématique, le caractère linéaire du lien fonctionnel entre les variables *x* et *y* n'est qu'*approché* (à moins qu'il ne soit défini par « convention entre les hommes »). C'est ce que note par exemple un autre auteur, l'abbé Moreux, dans un ouvrage de vulgarisation intitulé *Pour comprendre l'Arithmétique* (Doin, Paris, 1931, p. 100-101) :

Les règles énoncées sont applicables toutes les fois qu'il y a proportionnalité entre des nombres ou des grandeurs. Les cas de ce genre sont nombreux surtout en Géométrie et en Physique. En voici quelques cas.

Deux rectangles de même base ont leurs surfaces proportionnelles à leurs hauteurs.

Deux circonférences sont proportionnelles à leurs diamètres et à leurs rayons.

Dans le mouvement régulier ou uniforme, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps, c'est-à-dire que si le temps est trois fois plus long l'espace parcouru sera trois fois plus grand.

Tout ceci est exact et rigoureusement exact, mais il n'en est pas toujours de même dans la pratique.

On admet en effet qu'un salaire doit être proportionnel au temps consacré par l'ouvrier à faire son travail ; et ceci est une pure convention. En fait, tout le monde sait qu'un ouvrier ne travaille pas toujours avec la même ardeur ; il y a des heures où son activité est plus grande ou plus ralentie.

De même on admet que 3 ouvriers font 3 fois plus de travail qu'un seul, mais les entrepreneurs qui occupent des ouvriers n'ignorent pas cependant que pratiquement la valeur des hommes qu'ils emploient est toujours différente.

On pourrait continuer longtemps sur ce thème ; ce que nous avons dit suffit pour la démonstration.

Cette référence à un passé méconnu ouvre en fait la voie à un long développement nourri de matériaux historiques, dont l'un des objets est d'exposer le caractère inapproprié de la culture actuelle de la proportionnalité au collège, dans laquelle la relation entre deux grandeurs variables *est* ou *n'est pas* de proportionnalité, contre une très ancienne sagesse dans le maniement culturel des modèles, fussent-ils réduits à des « règles de trois ».

– L'idée que la proportionnalité n'est en général qu'*approchée* est fondamentale ; mais il faut regarder ce fait *positivement*, et non comme exprimant un « manque ». Lorsqu'on s'intéresse au lien entre des variables *x* et *y*, on peut en effet toujours essayer de modéliser ce lien par une fonction linéaire, le plus

[48] Voir la conclusion de notre mémoire.

simple des modèles non triviaux, ce qui permettra souvent de produire des connaissances *utiles*, bien qu'« approchées », sur le système $\mathcal{S}$ considéré.

• Supposons que l'on ait à vider un bassin pour le nettoyer. La hauteur de l'eau est d'environ 1,20 m. Ayant ouvert l'unique conduit qui permet de vider le bassin, on observe que, au bout d'un quart d'heure, l'eau a baissé d'à peu près 10 cm. En modélisant la relation entre le temps t pendant lequel l'eau s'écoule et la quantité q d'eau écoulée par un modèle linéaire ($q \propto t$), on peut conclure que l'on pourra revenir pour nettoyer le bassin dans environ $\frac{120–10}{10}$ quarts d'heures, soit 11 quarts heures : ainsi, en décidant de ne revenir que dans 3 heures, on est quasiment sûr de trouver le bassin entièrement vidé.

• Le fait que les modèles linéaires les plus classiques (comme dans les problèmes de baignoire qui se remplissent, ou se vident, ou se remplissent et se vident en même temps…) ne sont en vérité que des modèles approchés *n'a jamais été ignoré*. Ainsi l'auteur de l'article *Règle* [de trois] de l'*Encyclopédie* (1751-1772) de d'Alembert et Diderot – l'abbé de La Chapelle – rappelait de manière tout à fait explicite :

> Cette *règle* est d'un usage fort étendu tant dans la vie civile que dans les sciences ; mais elle n'a lieu que quand on reconnaît la proportionnalité des nombres donnés. Supposons, par exemple, qu'un grand vaisseau plein d'eau se vuide par une petite ouverture, de manière qu'il s'en écoule trois piés cubes d'eau en deux minutes, qu'on demande en combien de temps il s'en écoulerait cent piés cubes ; il y a à la vérité dans cette question, trois termes donnés, & un quatrième qu'on cherche ; mais l'expérience fait voir évidemment que l'eau s'écoule plus vite au commencement qu'elle ne le fait à la suite ; d'où il résulte que la quantité d'eau qui s'écoule n'est pas proportionnelle au temps, & que par conséquent la question présente ne sauroit être résolue par une simple *règle* de trois.

• Dans cette même tradition classique, les auteurs d'une *Arithmétique* pour les écoles primaires supérieures, A. Marijon et A. Péquignot, soulignent notamment ce fait qu'un modèle linéaire n'est souvent acceptable que dans une plage de valeurs déterminée des variables x et y (Hatier, Paris, 1928, p. 241-242) :

> Pour des charges qui ne dépassent pas 80 grammes, l'allongement du ressort est proportionnel à la charge. En désignant l'allongement par a, la charge par p, on a : $a = pk$, k étant un coefficient constant. Ce coefficient représente l'allongement correspondant à la charge de 1 gramme. Pour des charges supérieures à 80 grammes, l'allongement est plus grand que celui qui serait calculé par la formule $a = pk$. D'ailleurs pour des charges trop fortes le ressort subirait des déformations permanentes ou se briserait.
>
> Nous avons là un exemple de proportionnalité de deux grandeurs qui n'est réalisée que dans de certaines limites.

– On rencontre ainsi un aspect fondamental de la relation de modélisation, qu'il convient de mettre en avant à propos des problèmes proposés aux élèves.

• Considérons ainsi les « exercices » suivants, extraits d'un manuel de 6^{e} (Chapiron *et al.* 1996, p. 92) :

« 40 litres de super coûtent 218,40 F. Combien coûte un plein de 45 litres ? »

« En 24 heures, une installation de chauffage consomme régulièrement 8 litres de mazout. Combien consomme-t-elle en 150 heures ? »

Dans le premier cas, la proportionnalité est certes une convention commerciale, mais on sait que, en pratique, elle n'est jamais *réalisée* que de manière *approchée*. Ce fait, toutefois, n'invalide en rien le « modèle conventionnel » utilisé, et en particulier la pratique de fixer au centième de franc près le prix au litre. Dans le deuxième cas, en revanche, la proportionnalité a seulement valeur d'approximation utile : si l'on admet qu'il y a (à peu près) proportionnalité entre la durée du fonctionnement de l'installation et la consommation de mazout, on peut conclure que, en 150 heures, celle-ci sera (à peu près) égale à $\frac{150}{24} \times 8$ litres (soit 50 litres). L'adverbe *régulièrement* que les auteurs ont placé dans l'énoncé rappelle discrètement ce caractère.

– Le caractère nécessairement approché des modèles mathématiques de systèmes non mathématiques autorise, inversement, à modéliser par des relations de proportionnalité des systèmes dont on sait par ailleurs qu'ils ne sont pas « véritablement » proportionnels.

• Si je dois transporter des livres dans des caisses cubiques, les unes « petites », les autres deux fois plus grandes, je m'autoriserai à prévoir que, dans ce dernier cas, une caisse pleine pèsera environ *huit* fois plus – et non, par exemple, deux fois plus – qu'une petite caisse : ce qui peut n'être pas sans conséquence sur le choix des caisses à utiliser.

• De même encore, si je sais qu'une course de cent mètres, au plus haut niveau, dure environ 10 secondes, je pourrai conclure qu'une course de 400 mètres, courue dans les mêmes conditions, durera quelque 40 secondes (plutôt qu'une minute ou trente secondes), et qu'une course de 60 mètres durera à peu près 6 secondes (plutôt que 3 ou 8 secondes).

Les conclusions précédentes sont confortées par un développement qui rappelle que, lorsqu'une fonction f est régulière au voisinage d'un point, ses variations sont à peu près proportionnelles aux variations de la variable : on passe ainsi de l'opposition tranchée entre linéaire et non-linéaire à un univers plus complexe, où, « localement », la linéarité est partout.

– Les considérations précédentes touchent la *dialectique des systèmes et des modèles*, dont la claire compréhension est indispensable à toute formation mathématique et scientifique de base. Il convient en particulier de dépasser le point de vue, *scientifiquement et didactiquement inadéquat*, mais très répandu aujourd'hui au collège notamment, selon lequel le lien entre deux variables *est ou n'est pas* linéaire : en nombre de cas, dans un domaine de valeurs déterminé, ce lien peut être *assez voisin* d'une relation linéaire *par rapport aux décisions à prendre* pour conduire à des décisions bien contrôlées.

– Soit une application f définie dans un voisinage $\mathcal{V}$ de $x_0 \in \mathbb{R}$. Considérons les variables $X = x - x_0$ et $Y = f(x) - f(x_0)$, où $x \in \mathcal{V}$.

• Si f est une application *affine* sur $\mathcal{V}$, avec $f(x) = mx+p$, il vient, pour $X \in \mathcal{V}-x_0$, $Y = (m(x_0+X)+p)-(mx_0+p) = mX$: on a donc $Y \propto X$. Inversement, supposons que l'on ait $Y = mX$ pour tout $X \in \mathcal{V}-x_0$. On a $f(x)-f(x_0) = m(x-x_0)$, soit $f(x) = mx+(f(x_0)-mx_0) = mx + p$, avec $p = f(x_0)-mx_0$, pour tout $x \in \mathcal{V}$.

• Si f est une application dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$, on a $f'(x_0) = \lim_{X\to 0} \frac{Y}{X}$ et donc $\frac{Y}{X} = m + \varepsilon(X)$, où $m = f'(x_0)$ et $\lim_{X\to 0} \varepsilon(X) = \lim_{X\to 0} \left(\frac{Y}{X} - f'(x_0)\right) = 0$. Il vient ainsi : $Y = mX + X\varepsilon(X)$. Selon l'usage que l'on entend faire de la connaissance de Y pour une valeur de X donnée, on pourra considérer que, dans un certain voisinage $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}-x_0$, on a $Y \approx mX$, et on remplacera donc Y par $Y^* = mX$, soit encore $y = f(x)$ par $y^* = mx+(y_0-mx_0)$. Tel est le fondement de l'usage de modéliser *localement* le lien entre deux variables x et y par une fonction *affine*, comme il en va dans le problème suivant :

La longueur ℓ d'une barre de cuivre exposée à différentes températures peut être regardée comme une fonction affine de la température t si $t < 150°$. Déterminer l'expression de ℓ en fonction de t sachant que, pour $t_1 = 15°$, on a $\ell_1 = 76{,}45$ cm, et, pour $t_2 = 100°$, on a $\ell_2 = 76{,}56$ cm.

Le commentaire appelle alors à observer la progression en quelque sorte naturelle « qui conduit des fonctions *linéaires* aux fonctions *affines*, puis aux fonctions *dérivables* » [49]. À cet égard, le programme de seconde est appelé à témoigner de ce que le professeur doit avoir en tête deux soucis solidaires. D'un côté, il doit s'efforcer de faire que la classe situe les fonctions affines dans la filiation des fonctions linéaires – le programme demande, au reste, que les élèves sachent « caractériser les fonctions affines par le fait que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable » [50]. D'un autre côté, le professeur devra, selon les termes mêmes du programme, faire une place, pour le contraste, à la *non-linéarité*, ce que les notes du séminaire expriment dans les termes suivants.

– L'usage extensif des modèles linéaires dans la vie quotidienne comme dans les différents domaines scientifiques et techniques doit évidemment être complété par l'examen des cas où une telle modélisation serait *grossièrement inadéquate* – ce que souligne cet autre passage du même programme de 2[de] :

Exemples de non-linéarité. En particulier, on fera remarquer que les fonctions carré, inverse, … ne sont pas linéaires.

[49] L'introduction de la dérivation se fait en classe de première : le programme de seconde ne mentionne donc pas les fonctions dérivables.

Les notations précédentes résument un travail conduit dans le cadre de la séance 11 du séminaire. Une question qui ne sera formulée qu'à la séance 18 va relancer brièvement, et quelque peu paradoxalement, le questionnement autour de la *non*-linéarité.

> Peut-on donner un théorème de caractérisation des fonctions linéaires en seconde ? Car pour avoir une caractérisation par l'équation fonctionnelle $f(a+b) = f(a)+f(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, il faut mettre une contrainte (f continue ou monotone, etc.) pour que f soit de la forme $f(x) = mx$, $m \in \mathbb{R}$. Je me pose cette question car elle pourrait éviter les erreurs du style $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou $(a+b)^2 = a^2+b^2$ ou $\sin(a+b) = \sin a + \sin b$. (2000-2001, 2de, semaine 18)

La réponse apportée ici désigne deux directions de travail complémentaires. Tout d'abord, il convient de ne pas regarder comme une simple erreur le traitement linéaire des expressions rencontrées. Tout au contraire, et conformément aux principes posés plus haut concernant la modélisation, il faut le regarder comme un geste dont on doit amener les élèves à examiner toutes les conséquences, et notamment les incohérences qui en résultent.

> …il faut, non pas éviter, mais *organiser* la *rencontre* des élèves avec *la non-linéarité*, et, au-delà, conduire *l'exploration* et *l'institutionnalisation*, dans la classe, du *« fait non linéaire »* en mathématiques : si par exemple on avait $\sin (a+b) = \sin a + \sin b$, on aurait aussi $\sin 2a = 2 \sin a$, ce qui, pour $a = \frac{\pi}{2}$, conduirait tout droit à l'égalité $0 = 2$.

Ensuite, et en conséquence, il conviendra de rechercher les véritables « algorithmes » de manipulation des expressions rencontrés, algorithmes qui devront s'imposer ensuite à l'élève contre les modèles inadéquats vers lesquels il était porté à aller d'abord.

> Au-delà d'une telle reconnaissance du fait non linéaire, ce qui nous empêche véritablement d'appliquer indûment le schéma linéaire, *c'est qu'un autre schéma s'impose plus fortement*. Si, par exemple, nous devons dériver l'expression $\sqrt{1+x^2}$, ce qui éloigne la tentation d'écrire l'égalité, fausse pour $x > 0$,
>
> $$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1} + \sqrt{x^2} = 1 + x$$
>
> c'est que nous sommes prioritairement « attirés » par la formule de dérivation dûment mémorisée
>
> $$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

---

[50] Cette propriété des fonctions affines était en principe connue depuis la 3e, on l'a vu. C'est sa réciproque qui fait la nouveauté de la classe de seconde.

qui nous empêche de « succomber à la tentation linéaire ». De la même façon, nous serons sauvés par l'attraction – certes toujours résistible – créée par la formule

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

ou encore par

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

sans oublier le plus célèbre des attracteurs, la formule

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab.$$

De cette dernière on déduit d'ailleurs aisément une égalité instructive mais trop rarement mise en place :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$$

4.6. Dans le cadre du séminaire de l'année 2001-2002, une rubrique va – un peu tardivement – être consacrée, sous le titre *Enseigner les fonctions*, à la question mathématico-didactique qui nous occupe ici. Le point de départ en est une question posée par des élèves professeurs ayant en responsabilité une classe de seconde à propos de la notion de *programme de calcul*. Celle-ci a été présentée dans le séminaire en relation avec les débuts de l'enseignement de l'algèbre au collège : l'idée essentielle est qu'une « expression algébrique » *exprime algébriquement* un programme de calcul – l'expression $x^2 - 3x$, par exemple, exprime algébriquement le programme dont une formulation rhétorique d'époque serait : « Prendre l'excès du carré du nombre sur le triple de celui-ci. » Le travail réalisé en cette occasion suscite donc la question que voici :

> Introduire les expressions algébriques comme des programmes de calcul ne revient-il pas d'une certaine façon à parler de fonctions aux élèves dès la 4^{e} sans introduire toute la terminologie ? (2001-2002, 2de, semaine 13)

La réponse reprend soigneusement certains éléments du programme de seconde déjà reproduits plus haut, avant de proposer, à titre de première conclusion du travail entrepris, le constat suivant.

Les « programmes de calcul » sont ainsi généralisés sous le nom de fonction : au lieu de parler de « l'expression algébrique d'un programme de calcul » on va se mettre à parler maintenant de « l'expression algébrique d'une fonction » (lorsque la chose existe), comme dans le passage suivant du programme de 3^{e} :

> Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image.

La suite de la réponse explicite alors ce que le passage de la notion élémentaire de programme de calcul à la notion plus avancée de fonction permet, de fait, de gagner.

La nouveauté qu'apporte le mot de fonction, c'est que, sous ce nom, les programmes de calcul vont se voir associés un certain nombre d'« attributs » : représentation graphique, sens de variation sur intervalle, etc. C'est déjà ce que suggèrent les passages suivants du programme de 3^e^ :

– C'est l'occasion de prendre conscience de l'existence de fonctions dont la représentation graphique n'est pas une droite (par exemple, en examinant comment varie l'aire d'un carré quand la longueur de son côté varie de 1 à 3).

– Des enregistrements graphiques ou des courbes représentatives de fonctions non affines peuvent servir de support à la construction de tableaux de valeurs ou à la recherche de particularités d'une fonction : coordonnées de points, sens de variation sur un intervalle donné, maximum, minimum. Aucune connaissance n'est exigible à ce sujet.

❶ Jusqu'alors, on pouvait seulement dire d'un programme de calcul qu'il renvoie telle valeur numérique lorsque ses variables prennent telles et telles valeurs : par exemple le programme de calcul d'expression algébrique $x^2–8x+17$ renvoie les valeurs suivantes (colonne B) pour les valeurs indiquées de la variable x (colonne A) :

	A	B
1	0	17
2	0,5	13,25
3	1	10
4	1,5	7,25
5	2	5
6	2,5	3,25
7	3	2
8	3,5	1,25
9	4	1

❷ Il s'agit là d'un type de tâches encore inscrit au programme de 4^e^ : « Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques. » Mais le tableau de valeurs obtenu ici conduit maintenant à penser que, lorsque x croît de 0 à 4, la valeur numérique de l'expression décroît (de 17 à 1). C'est là une propriété – de décroissance – qu'on pourrait attribuer au programme de calcul (sur l'intervalle [0 ; 4]), mais qu'on va attribuer plus précisément à la *fonction* que ce programme de calcul permet de définir (sur ce même intervalle) – à condition, bien entendu, d'en apporter la preuve.

Comme souvent, le rédacteur a le souci d'articuler l'état présent à des états antérieurs du curriculum mathématique. De là le développement dont il fait suivre les lignes ci-dessus, que nous reproduisons.

La filiation entre programmes de calcul et fonctions était autrefois plus clairement attestée.

❶ Un manuel de 3e dû à de prolifiques auteurs (C. Lebossé & C. Hémery, 1940) proposait d'abord cette définition :

Un nombre y est fonction d'un nombre variable x quand à chaque valeur de x correspond une valeur déterminée de y.
x s'appelle la variable indépendante.

Puis ces auteurs indiquaient :

Lorsque y est la valeur numérique d'une expression algébrique de la variable x, on dit que y est une *fonction algébrique* de x. Ainsi :

$$y = 2x + 3 \qquad y = \frac{1}{x+2} \qquad y = \frac{x^2}{2} - 3x$$

sont des fonctions algébriques de x.

❷ Bien entendu, il existe des fonctions qu'on ne sait pas faire naître d'une expression algébrique, telle la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f : x \mapsto \text{Card}\ \{ n \in \mathbb{N}^* / n \leq x \wedge n \text{ premier} \}$. On a ici $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(6) = 3$, $f(9) = 4$, etc. Les auteurs d'un manuel pour la formation des maîtres écrivaient à ce propos (J. Gal, A. Marijon, 1929) :

La formule $y = x^2$ est appelé *équation* de la courbe tracée sur la figure 5. On dit aussi que cette courbe est la courbe représentant l'équation $y = x^2$, ou la fonction $y = x^2$. Ce n'est qu'exceptionnellement qu'on peut, comme dans cet exemple, donner une *expression algébrique* de la valeur d'une fonction. Il est clair qu'une telle expression n'existe pas pour le nombre d'habitants d'une commune en fonction de l'époque, ou pour la pression barométrique en un lieu en fonction de l'heure.

La conclusion générale est alors reformulée dans les termes suivants : « La notion de fonction généralise donc la notion de programme algébrique de calcul. Mais ce qu'elle apporte *surtout*, c'est qu'elle permet l'attribution de propriétés : une fonction sera croissante sur un intervalle, continue, dérivable, etc. » Cette entrée en matière à propos des fonctions est suivie, lors de la même séance du séminaire 2001-2002, d'un travail motivé par une difficulté que l'on retrouve au fil des années et des promotions, et qui, en l'espèce, a été formulée deux séances plus tôt par une stagiaire ayant en charge une classe de 4e : « Quelle est, demande-t-elle, la différence entre courbe, graphe et graphique ? » La réponse examine d'abord l'usage de ces mots dans les textes officiels : si l'expression « courbe représentative » apparaît bien dans le programme de 3e, ainsi qu'on vient de le voir, le mot de courbe n'a en fait qu'une autre occurrence, dans le programme de sixième [51]. Si le programme de seconde fait un usage beaucoup plus généreux du terme, c'est, au collège comme au lycée, l'expression de « représentation

[51] Où on lit en effet ceci : « Les mesures de longueur, intégrées à des activités telles que la construction de courbes point par point, peuvent conduire à de telles opérations. »

graphique » (abrégée parfois en « graphique ») qui prévaut. Le commentaire que nous suivons complète ces remarques par le propos suivant :

> Bien entendu, en un sens naïf du mot, la représentation graphique d'une fonction est une… courbe – d'où l'emploi de ce mot en 2^{de} –, alors que, notamment en statistique, il existe des représentations graphiques qui ne sont nullement des courbes (tels les diagrammes en bâtons, les histogrammes, etc.).

La question examinée portait aussi sur l'emploi du mot *graphe*, au sens de la théorie des fonctions [52]. En ce sens, le mot n'apparaît ni au collège, ni au lycée, même si, au collège, on parle de « grapheur » pour désigner un logiciel permettant le tracé de représentations graphiques. Pour préciser alors la différence que l'on peut voir entre graphe et graphique, la réponse proposée recourt à nouveau à l'histoire, et plus précisément à ce que le rédacteur des notes du séminaire appelle « l'histoire moderne de la notion de fonction ». Le développement qui s'ensuit est reproduit ici *in extenso*.

> ❶ L'apport clé est dû à Richard Dedekind (1831-1916), ainsi que le rappelle Jean Dieudonné (*Pour l'honneur de l'esprit humain*, 1987, p. 145) :
>
> Au lieu de se borner, comme dans les conceptions antérieures, aux fonctions réelles (ou complexes) d'une ou plusieurs variables complexes, Dedekind va d'un coup jusqu'au bout de la généralisation : étant donné deux ensembles *quelconques* E et F, une application f de E dans F est une loi (« Gesetz ») qui, à tout élément x de E, fait correspondre un élément *bien déterminé* de F, sa *valeur* en x que l'on note de façon générale $f(x)$ [...].
>
> ❷ Dedekind réalise ainsi une mathématisation de la notion « protomathématique » de *dépendance fonctionnelle*, et cela par la création de nouveaux objets mathématiques, les fonctions. Pourtant cette mathématisation reste incomplète, ne serait-ce qu'à cause du recours à la notion de *loi* (*Gesetz*), laissée par Dedekind *non mathématisée* : qu'est-ce au juste qu'une « loi » ? Dieudonné poursuit :
>
> Il manque encore à Dedekind une notion d'usage constant, introduite seulement par Cantor un peu plus tard, celle de *produit* (ou « produit cartésien ») E×F de deux ensembles quelconques : c'est l'ensemble des *couples* (x, y) pour tous les éléments x de E et tous les éléments y de F, généralisation naturelle et indispensable des coordonnées cartésiennes. On peut [alors] rattacher la notion d'application $f : E \to F$ à celle de partie du produit E×F : le *graphe* Γ_f de f est la partie de E×F formée des couples $(x, f(x))$ pour tous les éléments x de E, généralisation évidente du « graphique » classique d'une fonction réelle d'une variable réelle [...].

[52] Et non au sens de la théorie des graphes, laquelle ne sera introduite en terminale ES qu'à la rentrée 2002.

❸ On aboutit ainsi à la définition actuelle de la notion de fonction (empruntée ici à Chambadal et Ovaert 1966, p. 23) :

Soient E et F deux ensembles, A une partie de E×F, et supposons que pour tout *x* appartenant à E, il existe un *y* et un seul appartenant à F tel que le couple (*x*, *y*) appartienne à A [...].

DÉFINITION 2. – *Un tel triplet f* = (E, F, A) *s'appelle fonction définie sur* E, *à valeurs dans* F, *ou encore application de* E *dans* F.

On dit que E est l'*ensemble de définition* de la fonction *f*, que F est l'ensemble dans lequel la fonction *f prend ses valeurs*, et que A est le *graphe* (ou le *graphique*) de la fonction *f*.

La fonction, qui est le triplet (E, F, Γ_f), s'identifie ainsi à peu près à son graphe Γ_f (duquel on peut tirer la connaissance de E, mais non celle de F).

❹ La synonymie indiquée par les auteurs entre *graphe* et *graphique* ne doit pas tromper : alors que le graphe est une entité *purement mathématique* (c'est un ensemble de couples – de réels, si E = F = ℝ par exemple), qui n'a guère sa place au collège ou au lycée, « graphique » (ou, mieux, « représentation graphique ») y désigne une réalité… *graphique*, un *tracé*, c'est-à-dire en fin de compte un objet *non mathématique*. On se gardera donc de confondre « graphe » et « représentation graphique » : en toute rigueur, contrairement à ce que dit le programme de 2[de] par abus de langage, une « courbe » au sens graphique du terme, c'est-à-dire un tracé dessiné, ne saurait véritablement définir une fonction.

4.7. Le travail amorcé se poursuit en prenant appui sur deux questions dont la formulation semble quelque peu embarrassée :

1. Dans le chapitre sur les fonctions (généralités), l'écho qu'ont reçu les élèves est que tous les types de tâches et techniques sont triviaux, mais ils ont pris conscience de la subtilité de l'abstraction sous-jacente, ce qui a créé un malaise chez eux nuisant à leur apprentissage. Ce chapitre me pose donc la question du passage de l'étude locale d'un problème à une étude plus générale, plus abstraite. Comment graduer cette évolution ? (2001-2002, 2[de], semaine 12)

2. À propos des fonctions, le programme précise qu'une définition formelle de la croissance et de la décroissance est attendue. Est-ce que cela implique que l'on doive insister sur des exercices – comme on peut en trouver dans quasiment tous les manuels de 2[de] – où une démonstration très formelle est attendue ? C'est peut-être un bon moyen d'illustrer les théorèmes de comparaison sur les réels. Cependant, si l'on doit insister, est-ce que les élèves ne vont pas trouver ces méthodes compliquées, surtout si l'on a travaillé auparavant sur les représentations graphiques ? (2001-2002, 2[de], semaine 14)

Tout se passe ici comme si ces professeurs stagiaires rencontraient une difficulté qu'ils ne parviennent pas, à ce stade de leur formation, à décrire de façon précise et univoque : d'où l'impression que leurs propos tournent autour d'un problème qui reste à énoncer – leurs questions ressemblent à s'y méprendre à des questions écran. La stratégie de réponse va consister à aller droit au cœur du malaise. Alors que la culture professorale tend à présenter l'initiation aux fonctions, en seconde, à l'instar d'ailleurs de l'introduction à la statistique, comme une « affaire de vocabulaire » (dans un cas, « fonction croissante », « fonction décroissante », etc., dans l'autre, « moyenne », « médiane », etc.), l'exorde du commentaire est sans détour : « Comme avec toute notion, y lit-on, les "attributs" que l'on peut attacher à une fonction doivent être *motivés*. Pourquoi s'y intéresse-t-on ? Que permettent-ils de comprendre ou de faire ? Pour quelles raisons par exemple se demande-t-on si une fonction est croissante ou décroissante ? Quel intérêt cette connaissance peut-elle avoir ? » Ce questionnement ciblé est aussitôt illustré par un petit apologue présenté comme « l'argument mathématique d'une AER envisageable ». On le reproduit *in extenso*.

❶ Deux étudiants travaillant ensemble lors d'une séance de TD arrivent à l'expression suivante

$$H = \frac{100}{(2+\sqrt{3})^2}.$$

Ne disposant pas d'une calculatrice, ils décident d'en déterminer par leurs propres moyens l'ordre de grandeur : H est-il proche de 1, ou de 10, ou de 20, ou de 30, etc. ? Pour cela, ils décident d'utiliser 1,7 pour valeur approchée de $\sqrt{3}$. Chacun d'eux calcule de son côté afin de contrôler un résultat par l'autre.

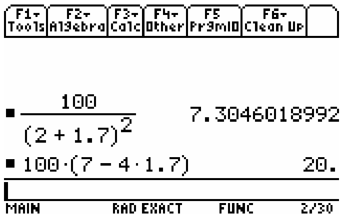
❷ Le premier procède ainsi : il remplace $H = \frac{100}{(2+\sqrt{3})^2}$ par $H^* = \frac{100}{(2+1{,}7)^2}$ qui est supérieur à H (puisque le dénominateur en est plus petit) : $H < H^*$. Il obtient donc : $H^* = \frac{100}{3{,}7^2}$. Il calcule alors de tête le carré de 3,7 en procédant comme suit : $37^2 = (40 - 3)^2 = 1600 - 240 + 9 = 1369$. Il a ainsi : $H^* = \frac{100}{13{,}69}$. Pour simplifier les choses il décide alors de remplacer H^* par $H^{**} = \frac{100}{14} < H^*$. Afin de s'épargner de poser la division, il imagine alors le calcul suivant :

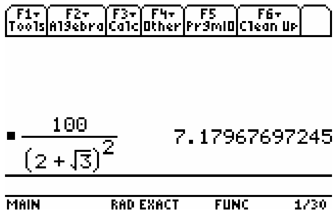
$$H^{**} = \frac{100}{14} = \frac{100}{2\times 7} = \frac{100}{2\times 7}\times\frac{7}{7} = \frac{100}{2\times 49}\times 7 = \frac{100}{98}\times 7.$$

En observant que $\frac{100}{98} \approx 1$, il en déduit que $H \approx 7$.

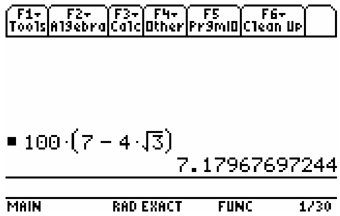
❸ Le second étudiant, lui, commence par noter que l'on a $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$ et écrit alors : $H = \frac{100}{(2+\sqrt{3})^2} = \frac{100}{(2+\sqrt{3})^2}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{100(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = \frac{100(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 100(2-\sqrt{3})^2 = 100(7 - 4\sqrt{3})$. Il obtient ainsi : $H \approx 100(7 - 4\times 1{,}7) = 100(7 - 6{,}8) = 100\times 0{,}20$. Il arrive donc à : $H \approx 20$.

❹ Comparant leurs résultats, les deux étudiants en restent stupéfaits ! Chacun pense que *l'autre* a fait une erreur. Pour en avoir le cœur net, ils vont emprunter une calculatrice et vérifient d'abord, sans même calculer l'expression exacte de H, les valeurs $\frac{100}{(2+1{,}7)^2}$ et $100(7 - 4\times 1{,}7)$. À leur grande surprise, ils obtiennent ceci [ci-dessous, à gauche]. Puis ils interrogent la même calculatrice sur la valeur « véritable » de H [ci-dessous, à droite].





Le premier étudiant triomphe ! Le second calcule l'expression exacte obtenue, pensant que son calcul préalable pourrait contenir une erreur :



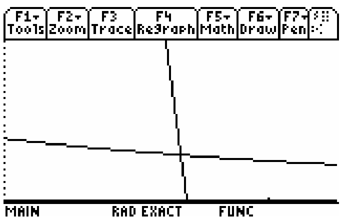
Une seconde calculatrice, plus puissante, fournit les valeurs suivantes :

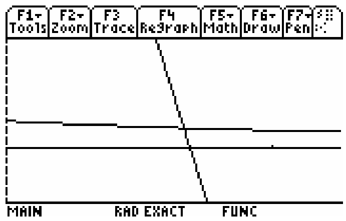
$$\frac{100}{(2+\sqrt{3})^2} = \quad 7{,}1796769724490825890214633976510\,5$$

$$100(7 - 4\sqrt{3}) = \quad 7{,}1796769724490825890214633976510\,5.$$

Où est la clé du mystère ? La suite de la réponse la révèle sans façon.

❺ Les étudiants se demandent alors d'où vient l'anomalie : si dans les expressions numériques *égales* $\frac{100}{(2+\sqrt{3})^2}$ et $100(7 - 4\sqrt{3})$ on remplace $\sqrt{3}$ par 1,7, on obtient des résultats *très* différents ! Pour cela ils ont l'idée d'introduire les fonctions f et g définies dans un voisinage de $\sqrt{3}$ par $f(x) = \frac{100}{(2+x)^2}$ et $g(x) = 100(7 - 4x)$ telles que l'on a : $H = f(\sqrt{3}) = g(\sqrt{3})$.

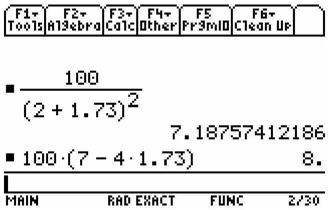


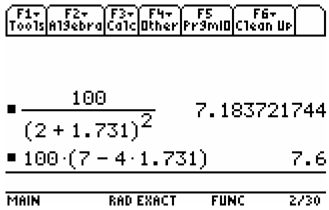


• Les deux courbes se coupent au point de coordonnées $(\sqrt{3}, H)$. La courbe représentative de g est une droite de pente –400 : si on remplace $\sqrt{3}$ par un nombre légèrement inférieur, comme 1,7, la valeur de $g(1{,}7)$ est *très supérieure* à $g(\sqrt{3}) = H$, comme on l'a vu : 20 au lieu de 7,179…

• En revanche, la courbe représentant f apparaît doucement descendante : on doit donc s'attendre à ce que $f(1{,}7)$ soit *à peine supérieure* à $f(\sqrt{3}) = H$, comme on l'a observé : 7,304… au lieu de 7,179…

• Cette différence se fait sentir même si l'on prend une valeur de x plus proche de $\sqrt{3}$, comme 1,73 :



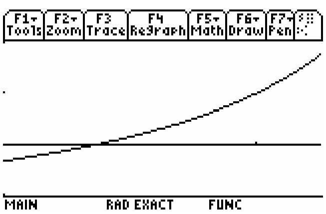


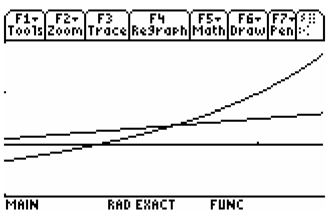
On a ainsi un exemple où apparaissent de façon combinée deux propriétés attribuables à des fonctions : le sens de variation de *f* (la fonction est croissante ou décroissante, ce qui se traduit numériquement par le fait de donner une valeur approchée $f(x*)$ par défaut ou par excès de $f(x)$ lorsque $x*$ est une valeur approchée par défaut de x), la « pente » de *f* au voisinage de *x* (ou plutôt la valeur absolue de cette pente), notion qui peut être appréhendée qualitativement dès la seconde, même si elle n'est quantifiée qu'en première. Les notions correspondantes sont les clés de l'explication d'un certain phénomène, par exemple le fait que – chose paradoxale pour une culture du numérique un peu archaïque – l'expression « simplifiée » $100(7 - 4\sqrt{3})$ de l'expression numérique $\dfrac{100}{(2+\sqrt{3})^2}$ fournit, pour une même précision sur $\sqrt{3}$, des valeurs approchées de qualité *très inférieure* à celles que fournit l'expression originale. La réponse apportée dans le séminaire se poursuit alors en généralisant légèrement l'argument mathématique exposé précédemment.

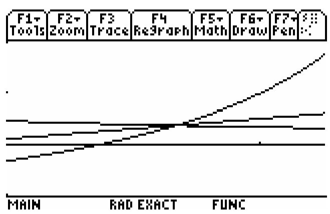
❷ Le travail accompli dans l'AER évoquée ci-dessus pourra être poursuivi à propos du type de tâches suivant :

T_0. Plusieurs expressions numériques égales $f(a) = g(a) = h(a) = \ldots = b$ étant données, prévoir comme se situeront les valeurs approchées $f(a*)$, $g(a*)$, $h(a*)$, etc., par rapport à b selon la position de $a*$ par rapport à a.

Prenons par exemple $f(\sqrt{3}) = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3-\sqrt{3}}$; $g(\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$; $h(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$. On représente successivement, autour de $a = \sqrt{3}$, les fonctions définies par $f(x) = \dfrac{2x-3}{3-x}$; $g(x) = \dfrac{x-1}{2}$; $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.







On déduit de là l'encadrement : $g(1{,}7) < f(\sqrt{3}) < h(1{,}7)$. Comme $g(1{,}7) = \frac{1{,}7-1}{2} = 0{,}35$ et $h(1{,}7) = \frac{1}{1+1{,}7} = \frac{1}{2{,}7} < \frac{1}{2{,}5} = \frac{100}{25} \times \frac{1}{10} = 0{,}4$. On a ainsi à peu de frais : $0{,}35 < f(\sqrt{3}) < 0{,}4$. Avec un peu plus d'effort, on obtient $\frac{1}{2{,}7} < 0{,}3704$, etc.

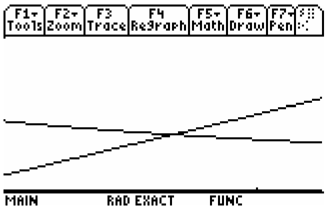
Un autre problème est alors proposé et sa solution exposée.

T_1. Une expression numérique $f(a) = b$ étant donnée, fabriquer d'autres expressions $g(a) = h(a) = \ldots = b$ permettant de produire un encadrement $g(a*) < b < h(a*)$, où $a*$ est une valeur approchée de a.

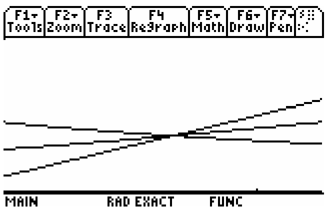
Partant de $b = \frac{2\sqrt{3}-3}{3-\sqrt{3}}$, on obtient d'abord en multipliant par $\sqrt{3}$: $\frac{2\sqrt{3}-3}{3-\sqrt{3}} = \frac{6-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-3} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$. On peut ici utiliser le résultat suivant :

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ua+vc}{ub+vd}$ quels que soient a, b, c, d, u, v tels que les quotients indiqués soient définis.

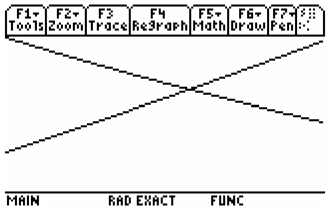
En prenant $u = v = 1$, il vient ainsi : $b = \frac{2\sqrt{3}-3}{3-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$; en prenant $u = 1$ et $v = 2$, on a : $b = \frac{2\sqrt{3}-3}{3-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$. On retrouve ainsi les fonctions g et h introduites plus haut. Mais on peut améliorer encore les choses par une observation simple ; considérons les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$.



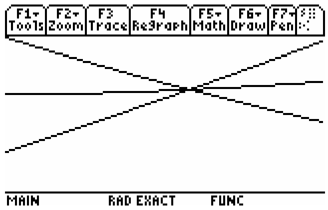
Posons $\varphi(x) = \frac{g(x)+h(x)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2} + \frac{1}{1+x}\right) = \frac{x^2+1}{4(1+x)}$. On a bien sûr : $\varphi(\sqrt{3}) = \frac{g(\sqrt{3})+h(\sqrt{3})}{2} = \frac{b+b}{2} = b$. Par ailleurs la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ « se faufile » entre les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$:



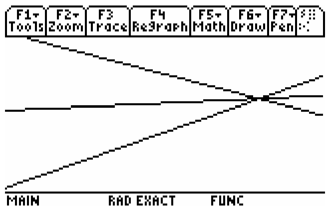
On a ainsi $\varphi(1{,}7) < f(\sqrt{3}) < h(1{,}7)$, avec $\varphi(1{,}7) = \frac{1{,}7^2+1}{4(1+1{,}7)} = \frac{3{,}89}{4\times 2{,}7} = \frac{3{,}89}{10{,}8} > 0{,}36$. On peut itérer l'opération ; considérons les courbes $\mathcal{C}_\varphi$ et $\mathcal{C}_h$:



Posons $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x) + h(x)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+1}{4(1+x)} + \dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{x^2+5}{8(1+x)}$. On a alors la configuration suivante :



Pour s'assurer que ψ est bien croissante, on peut resserrer la fenêtre de représentation graphique :



On a alors $\psi(1{,}7) < f(\sqrt{3}) < h(1{,}7)$. Il vient : $\psi(1{,}7) = \dfrac{1{,}7^2 + 5}{8(1 + 1{,}7)} = \dfrac{7{,}89}{21{,}6} > 0{,}3652$. (On a en fait : $f(\sqrt{3}) = 0{,}36602540\ldots$)

Tout cela fait, la réponse parvient à une conclusion qui, en quelque sorte, « porte l'estocade » aux conceptions spontanées dont nombre d'élèves professeurs sont, à leur insu sans doute, les porteurs. La voici.

L'étude précédente rend raisonnable que l'on se préoccupe d'établir de manière indubitable la croissance ou la décroissance d'une fonction, par exemple de $\psi : x \mapsto \dfrac{x^2+5}{8(1+x)}$ sur [1,5 ; 2].

➊ D'une manière générale, ayant conjecturé (par examen de son graphique par exemple) que f est croissante sur un intervalle I, on doit montrer que, si $a, b \in$ I et $a < b$ alors $f(a) < f(b)$. La technique usuelle consiste à écrire la différence $f(b) - f(a)$ sous la forme $(b - a)\omega(a, b)$ et à montrer alors que, quels que soient $a, b \in$ I, on a $\omega(a, b) > 0$. Dans le cas de la fonction ψ on a : $f(b) - f(a) = \dfrac{b^2+5}{8(1+b)} - \dfrac{a^2+5}{8(1+a)}$. On peut simplifier le travail de calcul par les changements de variables $u = 1 + a$, $v = 1 + b$. Il vient : $a^2 + 5 = (u-1)^2 + 5 = u^2 - 2u + 6$ et donc $\dfrac{a^2+5}{8(1+a)} = \dfrac{1}{8}\left(u - 2 + \dfrac{6}{u}\right)$. On a ainsi : $f(b) - f(a) = \dfrac{1}{8}$

$\left(v-2+\frac{6}{v}\right)-\frac{1}{8}\left(u-2+\frac{6}{u}\right)=\frac{1}{8}\left((v-u)+6\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)\right)=\frac{1}{8}\left((v-u)-6\,\frac{v-u}{uv}\right)\;=(v-u)\,\frac{1}{8}\left(1-\frac{6}{uv}\right)$. Comme $a, b \geq 1{,}5$, on a $u, v \geq 2{,}5$ et donc $uv \geq 6{,}25$; il vient ainsi : $1-\frac{6}{uv}>0$.

❷ On a aura de même, dans un cas de décroissance : $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}=(b-a)\,\frac{-1}{ab}<0$. Dans les cas les plus simples, toutefois, on peut utiliser les résultats antérieurement établis. Pour $f(x) = x^2$, par exemple, on a : $b^2 - a^2 > ab - a^2 = (b - a)a > 0$. (On utilise ici le fait que l'application linéaire $x \mapsto bx$ est strictement croissante.) Cela démontré, il vient : $b^3 - a^3 > ab^2 - a^3 = (b^2 - a^2)a > 0$.

Non seulement, comme on l'avait déjà vu, le travail mathématique use ici d'outils très élémentaires là où les élèves professeurs ont été accoutumés à employer la lourde panoplie de la dérivation, mais il énonce surtout une exigence qui est au cœur de la formation : celle d'une introduction *fonctionnelle*, et non pas *formelle*, des notions et entités mathématiques que le programme enjoint d'enseigner. La notion de fonction croissante, par exemple, ne se justifie pas du fait qu'il y aurait des fonctions croissantes, mais du fait que la croissance de certaines fonctions explique et permet de contrôler certains phénomènes mathématiques. La leçon sera reprise deux séances plus tard, toujours dans le cadre de la rubrique « Enseigner les fonctions ». Cette fois, le stock des questions qui servent de matériaux au travail envisagé s'est accru [53] :

1. Dans le chapitre sur les fonctions (généralités), l'écho qu'ont reçu les élèves est que les types de tâches et techniques sont triviaux, mais ils ont pris conscience de la subtilité de l'abstraction sous-jacente, ce qui a créé un malaise chez eux nuisant à leur apprentissage. Ce chapitre me pose donc la question du passage de l'étude locale d'un problème à une étude plus générale, plus abstraite. Comment graduer cette évolution ? (2001-2002, 2^de^, semaine 12)

2. Lors du cours sur les fonctions, j'ai traduit l'égalité $f(a) = b$ de trois façons : b est l'image de a par la fonction f ; a est un antécédent de b par la fonction f ; le point de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ appartient à la courbe représentative de f. De plus, je leur ai donné des exercices sur la lecture graphique d'antécédents. Or le terme d'antécédent n'apparaît pas explicitement dans le programme (il y a toutefois la résolution graphique de $f(x) = k$). Est-ce que je suis hors programme ? (2001-2002, 2^de^, semaine 12)

3. Je suis en train de traiter le chapitre « Généralités sur les fonctions » en 2^de^. Je n'ai trouvé le mot d'antécédent ni dans le programme, ni dans le document d'accompagnement. J'ai quand même décidé

[53] Rappelons que la première des quatre questions ci-après, déjà mentionnée plus haut, avait été abordée dans le séminaire du mardi matin, deux séances auparavant.

d'aborder les types de tâches « Déterminer l'antécédent d'un nombre réel par une fonction définie par une formule » et « Déterminer l'antécédent d'un nombre réel par une fonction définie par une courbe ». En effet, cela revient à résoudre les équations de la forme $f(x) = k$ de manière algébrique et graphique, ce qui figure de manière explicite dans le programme. Je ne sais pas si j'ai eu raison d'introduire la notion d'antécédent. Est-ce vraiment nécessaire ? En ce qui me concerne, cela me semble peu coûteux ; ce n'est que du vocabulaire et cela ne rajoute aucune difficulté technique. (2001-2002, 2de, semaine 16)

4. La démonstration de la parité d'une fonction est un travail formel pour nos élèves de 2de. Le programme ne parle pas de cette notion mais le commentaire stipule : « la perception sur un graphique de symétries pourra conduire à une formulation analytique de ces propriétés ». Faut-il tout de même travailler sur ce type de tâches ? La parité est une notion intéressante car elle permet de conclure sur l'existence d'un centre de symétrie sans avoir le graphique de la fonction. Je vois un deuxième intérêt pour la résolution d'équation $f(x) = a$ avec f paire (si cette équation a une solution, alors il en existe une deuxième). Que faut-il faire ? (2001-2002, 2de, semaine 16)

À nouveau, on retrouve des formulations symptomatiques, périphériques par rapport au cœur du problème, et travaillées par une tendance au formalisme. Obstinément, le responsable du séminaire ramène au devant de la scène le principe fondamental, dont il donne cette fois une formulation des plus fermes.

Contre une funeste tradition qui semble se transmettre avec une implacable fatalité, on doit répéter qu'on ne saurait être quitte vis-à-vis de sa mission de professeur en alignant de manière immotivée, à l'instar de certaines réalisations muséographiques, une succession de notions, de notations ou de types de tâches : il s'agit au contraire d'en faire apparaître la nécessité ou, du moins, l'utilité dans un certain projet de connaissance. Ainsi doit-on faire apparaître *pourquoi* on est amené à « décrire […] le comportement d'une fonction définie par une courbe […] obtenue sur un écran graphique » ; *pourquoi*, aussi, il est intéressant de disposer de la notion de croissance, etc. En somme, il convient de concevoir et de réaliser *un enseignement fonctionnel de la « théorie » des fonctions*.

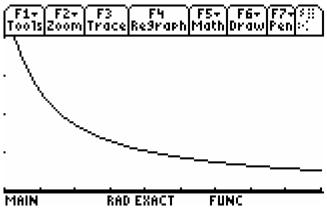
S'employant à battre le fer pendant qu'il est chaud, la réponse rédigée fait suivre le précepte précédent d'une nouvelle illustration de ce que pourrait être un « enseignement “fonctionnaliste” ».

➊ L'idée de base est de regarder une certaine « quantité » comme fonction d'une certaine variable, et cela pour expliquer un certain phénomène (physique, numérique, etc.), ou pour parvenir à une certaine connaissance.

• Considérons l’expression numérique suivante (prise pour exemple dans le programme de 5[e]) : $\frac{5{,}24}{2{,}1} \times \frac{2}{3}$. Voulant la calculer de tête, au prix de quelques approximations, un élève procède ainsi : $\frac{5{,}24}{2{,}1} \times \frac{2}{3} \approx \frac{5{,}24}{3} \approx \frac{5{,}25}{3} = 1{,}75$. Contrôlant plus tard, à l’aide d’une calculatrice, la valeur ainsi obtenue, il obtient la valeur $\frac{5{,}24}{2{,}1} \times \frac{2}{3} = 1{,}66\ldots$ Il est étonné par le degré de surestimation à laquelle l’ont conduit les approximations effectuées. Comment expliquer la chose ?

• On peut considérer les deux fonctions $x \mapsto f(x) = \frac{5{,}24}{2{,}1} \times \frac{2}{x} = \frac{5{,}24}{1{,}05x}$ et $x \mapsto g(x) = \frac{5{,}25}{x}$ et observer que l’élève a calculé $g(3)$ à la place de $f(3)$. Introduisons alors la différence $\varphi(x) = g(x) - f(x) = \frac{5{,}25}{x} - \frac{5{,}24}{1{,}05x} = \ldots = \frac{109}{420x}$, qui mesure l’erreur (par excès) commise.

• La représentation graphique ci-après, relative à l’intervalle [1 ; 10], montre que la surestimation mesurée par $\varphi(x)$ décroît avec x, mais que, pour $x = 3$, elle est encore nettement supérieure au pas de graduation sur l’axe des y, à savoir 0,05.



• S’il s’était agi de calculer $\frac{5{,}24}{2{,}1} \times \frac{2}{15}$ avec les mêmes approximations l’élève aurait obtenu : $\frac{5{,}24}{2{,}1} \times \frac{2}{15} \approx \frac{5{,}24}{15} \approx \frac{5{,}25}{15} = \frac{1{,}75}{5} = 0{,}35$, alors qu’on a : $\frac{5{,}24}{2{,}1} \times \frac{2}{15} = 0{,}332698\ldots$

• On doit en particulier retirer de cette petite étude l’idée que, lorsqu’on introduit des approximations dans un calcul, l’effet produit va dépendre de « l’environnement numérique » dans lequel ces approximations interviennent. Ainsi, remplacer $\frac{2}{2{,}1}$ par 1 n’est pas en soi une « bonne » ou une « mauvaise » approximation : tout dépend de l’expression numérique dans laquelle le quotient $\frac{2}{2{,}1}$ se trouve « enchâssé ».

• On pourra toutefois observer que, ici, l’erreur *relative* $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ est, elle, *constante*, égale à $\frac{\frac{109}{420}}{\frac{5{,}24}{1{,}05}} = 0{,}052\ldots \approx 5\ \%$.

La réponse se poursuit par une référence à l'« utilisation des fonctions dans l'étude d'inéquations ». La distinction de deux techniques, l'une classique et « algébrique », l'autre, moins pratiquée mais « fonctionnelle », est illustrée sur le cas de l'inéquation $0{,}5\,x + 12 \leq 3 - 2x$. La technique classique de résolution permet de conclure, après calcul, que cette inéquation est équivalente à $x \leq -3{,}6$. Mais les notions de fonction, de fonction croissante, de fonction affine permettent de procéder autrement. Si cette remarque est sobrement explicitée, sa portée, quant à la « fonctionnalité » de la théorie des fonctions, est essentielle.

• Une technique utilisant la théorie des fonctions peut procéder selon le raisonnement suivant : l'inégalité proposée est vraie si, et seulement si, la droite représentant la fonction affine *croissante* $x \mapsto 0{,}5x + 12$ est *au-dessous* du graphique de la fonction affine décroissante $x \mapsto 3 - 2x$, c'est-à-dire lorsque x est inférieur (ou égal) à la valeur x_0 où ces deux fonctions sont égales, qui est l'abscisse du point où leurs graphiques se croisent : $S =]-\infty\,; x_0]$. Il ne reste alors qu'à résoudre l'*équation* correspondant à l'inéquation proposée, ce qui fournira la valeur x_0.

• Une technique « mixte » peut être envisagée avec profit : si l'on ramenait tous les termes dans le membre de gauche, on obtiendrait une inéquation de la forme $ax + b \leq 0$, avec $a = 0{,}5 + 2 > 0$. Les valeurs de x cherchées sont donc celles pour lesquelles une fonction affine strictement croissante est négative ou nulle : l'ensemble S des solutions est donc de la forme $]-\infty\,; x_0]$, où x_0 est l'unique solution de l'équation associée. Là encore on résout l'inéquation proposée *sans manipuler d'inégalité*.

Ce n'est qu'ensuite que les notes du séminaire abordent les questions touchant l'usage du mot *antécédent* ou le travail demandé sur la notion de *parité* d'une fonction. À nouveau, le rédacteur oppose le formalisme d'un enseignement qui s'en tient aux mots à l'emploi motivé des notions correspondantes, lequel en effet suppose en bien des cas l'usage de mots appropriés, dont, semble-t-il, les rédacteurs du programme n'ont en vérité nullement pensé interdire l'usage.

④ Le doute quant à la licéité de l'emploi de la notion d'antécédent peut être levé par la lecture (et la rumination) de ce passage du document d'accompagnement, qui suggère que l'absence du mot dans le programme ne doit pas être trop interprété :

Le programme demande explicitement de traiter des exemples de fonctions données à l'aide d'une courbe (elles sont fréquentes dans les documents des autres disciplines ou dans les média : la légende accompagnant la courbe suffit en général pour comprendre le lien fonctionnel entre les deux grandeurs en jeu) ainsi que celles fournies par un tableau de données (type « tarifs postaux »). À propos de fonction définie par une courbe, il importe que les élèves sachent lire de façon critique l'information contenue dans la courbe (lectures approchées d'images et d'antécédents, ou lectures exactes dans certains cas précisés par le graphique, variations, etc.) ; on pourra convenir ici que l'information sur les variations est exhaustive et on montrera la nécessité d'une telle convention à l'aide de courbes tracées avec un grapheur à partir d'une formule (des changements de fenêtre peuvent modifier l'allure de la courbe : mais il ne s'agit plus là de fonction définie par une courbe).

⑤ Comme sur d'autres sujets, il n'est toutefois pas judicieux de multiplier à vide les exercices *formels* de recherche d'antécédents. On se rappellera, au reste, qu'une telle recherche n'intervient pas seulement lors de la résolution d'une équation de la forme $f(x) = k$ (où il s'agit bien de rechercher les antécédents par f du nombre k) : on n'a pas à résoudre d'équation pour reconnaître que le nombre $\frac{5,24}{2,1} \times \frac{2}{3}$ a pour antécédent 3 par la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{5,24}{2,1} \times \frac{2}{x} = \frac{5,24}{1,05x}$ ou que (séance 15) les expressions numériques $\frac{100}{(2+\sqrt{3})^2}$ et $\frac{100}{(2+1,7)^2}$ ont respectivement pour antécédents par la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{100}{(2+x)^2}$ les nombres $\sqrt{3}$ et 1,7.

⑥ Des observations analogues peuvent être faites à propos des notions de *symétrie* et de *périodicité* : ces notions doivent être motivées par ce qu'elles permettent de comprendre, de justifier, de faire, dans un ou plusieurs contextes mathématiques. On observera en outre qu'elles ne sont mentionnées par le programme qu'en relation avec le graphique d'une fonction, comme l'indique ce passage du commentaire :

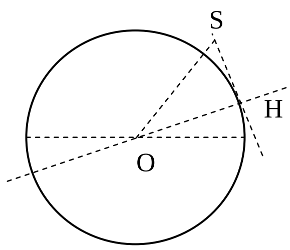
La perception sur un graphique de symétries ou de périodicité pourra conduire à une formulation analytique de ces propriétés.

On devra donc s'en tenir au cas où la symétrie est révélée par le graphique et apparaît exploitable dans l'étude mathématique en cours, avant d'être, le cas échéant, confirmée analytiquement.

Tant les réponses apportées que les questions soulevées expriment de grands problèmes posés à la profession. Les questions manifestent l'habitus professionnel qui consiste, une fois une tradition d'enseignement constituée, à adhérer au traitement que reçoit une notion dans cette tradition, ce traitement étant d'une certaine façon sacralisé. C'est ainsi que, en dépit des efforts délibérés des concepteurs des programmes antérieurs pour susciter un enseignement fonctionnel de la théorie des fonctions en seconde, les professeurs enseignant dans cette classe avant la réforme entrée en vigueur en 2000 ont leur « cours » sur la parité ou encore sur la périodicité, par exemple, et qui tend à persister dans son être... Dans ce cadre, la formulation du nouveau programme selon laquelle « la perception sur un graphique de symétries ou de périodicité pourra conduire à une formulation analytique de ces propriétés » n'est guère recevable dans un contexte où prévaut une « loi du tout ou rien » : car c'est dire là trop, ou trop peu. Bien entendu, une telle irrecevabilité s'efface dans un enseignement « fonctionnaliste », où la parité d'une fonction, ou sa périodicité, seront d'abord reconnues comme expliquant un certain type de phénomènes, ce qui justifiera qu'on s'arrête sur la propriété explicative le temps qu'il faudra pour préciser adéquatement la « causalité mathématique » rencontrée. On peut considérer que, aujourd'hui encore, ce problème de la profession reste ouvert.

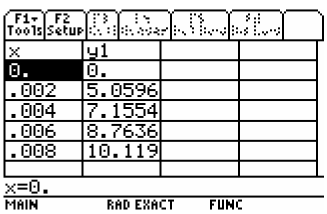
4.8. Lors de cette séance-là, la dix-septième de l'année 2001-2002, la rubrique *Enseigner les fonctions* se poursuit par un exemple qui était en fait apparu dans une forme peu développée dès l'année précédente au moins, et dont l'objet est, à nouveau, de faire apparaître les propriétés des fonctions comme éclairant certains phénomènes mathématiques ou extramathématiques, moyennant leur modélisation mathématique préalable. L'objectif de l'étude est de répondre à la question suivante : « Quand on regarde la mer, comment peut-on savoir à quelle distance se trouve l'horizon ? ». Les notes de la séance décrivent d'abord le problème et sa solution.

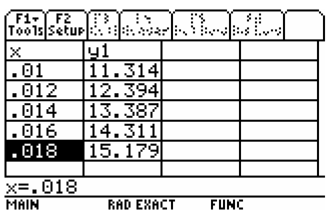
❷ La figure ci-après fournit un élément de réponse.



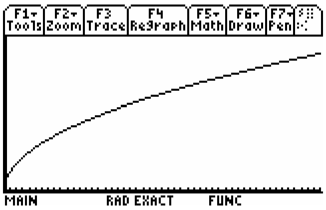
L'horizon H est à la distance SH du spectateur S : d'après le théorème de Pythagore, on a $SH^2+OH^2 = OS^2$. En notant *r* le rayon de la terre et *x* la hauteur des yeux du spectateur S au-dessus du niveau de la mer, il vient : $SH = \sqrt{(r+x)^2-r^2} = \sqrt{2rx+x^2} \approx \sqrt{2rx} = f(x)$. Prenons $r = 6400$ km ; on a par exemple, pour $x = 10$ m, $f(x) = \sqrt{2rx} = \sqrt{2 \times 6400 \text{ km} \times 0{,}01 \text{ km}} = \sqrt{128}$ km $\approx 11{,}3$ km. Il vient de même, pour $x = 1$ m, $f(x) = \sqrt{12800 \text{ km} \times 0{,}001 \text{ km}} \approx 3{,}58$ km.

❸ On peut utiliser une calculatrice (ou un tableur) pour obtenir un tableau de valeurs de la fonction (le pas est ici de 2 m = 0,002 km) :



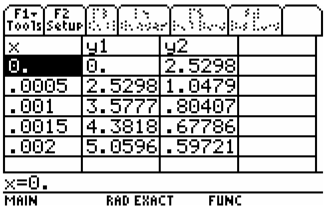


On trouve bien sûr que la distance à l'horizon *croît* avec la hauteur du point d'observation, ce que confirme le graphique sur l'intervalle [0 ; 0,1] :



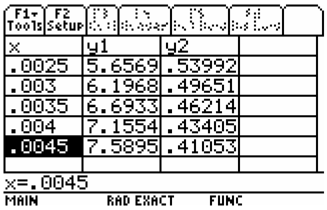
Jusqu'ici, très classiquement, on s'est contenté d'établir et d'utiliser une formule pour déterminer des valeurs de la distance cherchée. On aura noté toutefois que la théorie des fonctions s'introduit subrepticement quand on passe de la formule SH ≈ $\sqrt{2rx}$ à la fonction f d'expression $f(x) = \sqrt{2rx}$ et à son traitement numérique et graphique par la calculatrice. La suite de l'étude va illustrer comment le modèle fonctionnel ainsi adopté permet d'exprimer et de mettre à l'épreuve certaines propriétés que l'on peut aisément observer sur le système lui-même. C'est ainsi que le rédacteur des notes écrit : « On sait […] que, quand, étant assis sur le sable au bord de l'eau, on se lève, l'horizon *s'éloigne brusquement* ; et que, quand, pour voir plus loin, on gagne ensuite de la hauteur, le gain visuel diminue au fur et à mesure que l'on monte. » Ce constat « expérientiel » est alors mis à l'épreuve du modèle mathématique élaboré.

Pour le vérifier, on peut tabuler la fonction $\varphi : x \mapsto f(x + 0{,}0005) - f(x)$, qui donne l'accroissement de la distance à l'horizon lorsqu'on monte de 50 cm. On obtient ce qui suit.



x	y1	y2
0.	0.	2.5298
.0005	2.5298	1.0479
.001	3.5777	.80407
.0015	4.3818	.67786
.002	5.0596	.59721

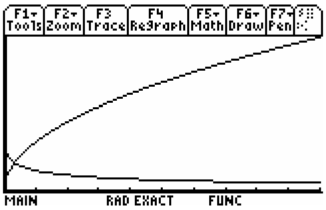
x=0.

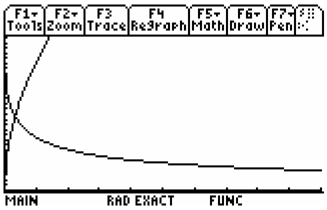


x	y1	y2
.0025	5.6569	.53992
.003	6.1968	.49651
.0035	6.6933	.46214
.004	7.1554	.43405
.0045	7.5895	.41053

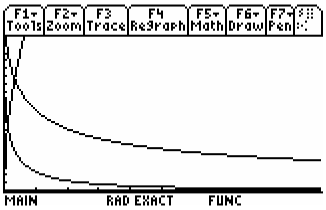
x=.0045

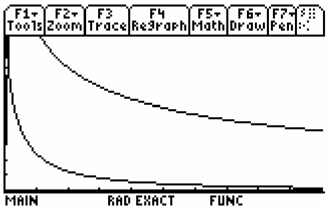
Ces résultats sont confirmés par le graphique de la fonction φ sur l'intervalle [0 ; 0,005], qui montre la décroissance de φ :





❺ Ce qu'on peut encore vérifier, c'est que, lorsqu'on monte, l'accroissement de la distance à l'horizon diminue, mais il diminue *de moins en moins*, c'est-à-dire que la fonction $\psi : x \mapsto \varphi(x) - \varphi(x + 0{,}0005)$ est décroissante, comme le montre le graphique ci-après.

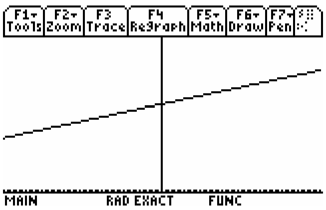




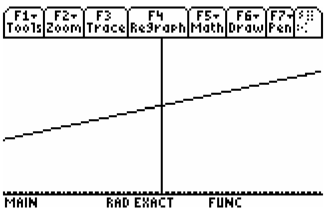
Un autre problème est ensuite soulevé et une solution en est exposée : on laissera le lecteur en prendre connaissance par lui-même, en notant le jeu motivé avec différentes notions mentionnées par le programme (fonctions affines, symétries, etc.).

❻ On peut s'interroger sur l'imprécision introduite par le choix de $r = 6400$ km dans le calcul de $f(x)$. Prenons $x = 10$ m $= 0{,}01$ km et posons $\delta(u) = \sqrt{2 \times (6400 + u) \times 0{,}01} = \sqrt{128 + 0{,}02u}$ où $u \in [-50 ; 50]$. Comment varie δ en fonction de u ?

• Sur l'intervalle indiqué, le graphique est le suivant (avec $y_{\min} = 11{,}2$ et $y_{\max} = 11{,}4$). Les valeurs extrêmes sont : $\delta(-50) = \sqrt{127} \approx 11{,}27$, $\delta(50) = \sqrt{129} \approx 11{,}36$.



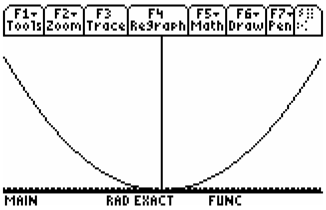
• La courbe représentative obtenue ressemble fort à une droite. On peut l'expliquer par l'approximation « classique » (et donc à étudier…) $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \dfrac{\varepsilon}{2}$ qui donne ici : $\delta(u) = \sqrt{128 + 0{,}02u} = \sqrt{128}\sqrt{1 + \dfrac{u}{6400}} \approx \sqrt{128}\left(1 + \dfrac{u}{12800}\right)$. La fonction δ est ainsi peu différente de la fonction affine $\delta^* : u \mapsto \dfrac{1}{100\sqrt{128}}\, u + \sqrt{128}$. Sur l'écran graphique paramétré comme ci-dessus, les courbes représentatives de δ et de δ^* sont indiscernables :



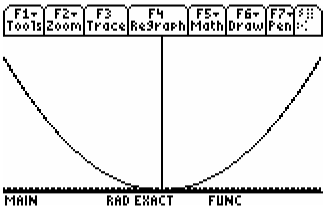
On parvient à distinguer graphiquement les deux fonctions en représentant leur différence

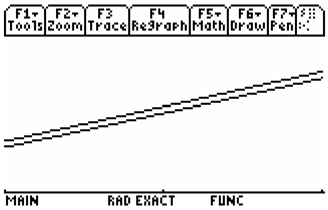
$\eta : u \mapsto \left(\dfrac{1}{100\sqrt{128}}\,u + \sqrt{128}\right) - \sqrt{128 + 0{,}02u}$

sur l'intervalle [–50 ; 50], avec $y_{min} = 0$, $y_{max} = 10^{-4}$.



La courbe obtenue *semble* symétrique, mais si l'on représente sur le même écran graphique la fonction η et la fonction $u \mapsto \eta(-u)$, on voit que les graphiques ne se superposent pas exactement : on peut les séparer en se limitant à [48 ; 50] et en prenant $y_{min} = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ et $y_{max} = 9 \cdot 10^{-5}$.





Le travail accompli jusqu'ici reste en partie conjectural ; la dernière partie de la réponse aborde donc les aspects *démonstratifs*, avec toujours le même souci d'économie des outils mathématiques engagés.

❼ Il resterait bien entendu à fournir une démonstration des constats effectués jusqu'ici.

• On a ainsi observé que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2rx}$ était strictement croissante : on établit ce résultat en notant que l'on a $f(x) = \sqrt{2r}\sqrt{x} = a\sqrt{x}$ et en montrant que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, en conformité avec ce commentaire du programme :

D'autres fonctions telles que $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto |x|$… pourront être découvertes à l'occasion de problèmes.

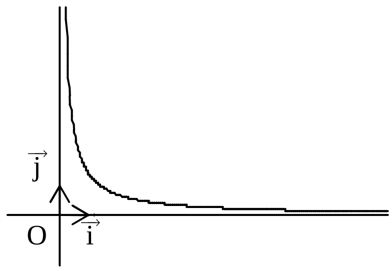
• On pourra aussi bien établir la démonstration, légèrement plus complexe, de la stricte croissante de la fonction $F : x \mapsto \sqrt{2xr + x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$. On a ici : $F(x) < F(y) \Leftrightarrow 2xr + x^2 < 2yr + y^2 \Leftrightarrow y^2 - x^2 + 2r(y - x) > 0 \Leftrightarrow (y - x)(x + y + 2r) > 0 \Leftrightarrow y - x > 0 \Leftrightarrow y > x$.

• La démonstration du fait que la fonction $\varphi : x \mapsto f(x + 0{,}0005) - f(x)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ peut procéder ainsi. Posons $h = 5 \cdot 10^{-4}$, et supposons $x < y$; on a d'une part $f(x) < f(y)$ et, puisque $x +$

$h < y + h$, on a d'autre part $f(x + h) < f(y + h)$ de sorte qu'on a : $f(x + h) + f(x) < f(y + h) + f(y)$. Il vient alors : $\varphi(y) = f(y + h) - f(y) = \dfrac{2r(y+h) - 2ry}{f(y+h) + f(y)} = \dfrac{2rh}{f(y+h)+f(y)} > \dfrac{2rh}{f(x+h)+f(x)} = f(x + h) - f(x) = \varphi(x)$.

Ce que la formation apporte ici révèle, par contraste, un autre grand problème actuel de la profession, également suscité par une loi du tout ou rien : l'intégration dans la classe de mathématiques du travail « expérimental » (exploitant notamment la calculatrice ou le tableur), dimension longtemps refusée dans une culture mathématique sacralisant de façon exclusive la démonstration, tend aujourd'hui à avoir pour corrélat la *minoration du travail démonstratif*, c'est-à-dire du travail d'organisation déductive des connaissances, pourtant consubstantiel à l'activité mathématique depuis toujours. Le message de cette dernière partie de la réponse est donc que, même si les résultats établis expérimentalement semblent solides, il convient encore, en bonne méthode mathématique, de les établir « démonstrativement ».

4.9. Le fait d'enseigner un thème ou un secteur mathématique donné implique en général un travail fondamental sur la matière mathématique concernée. Mais il oblige aussi à répondre à une foule de questions adventices qui, en bien des cas, ramènent à ce travail fondamental. Voici par exemple la situation que décrit une question formulée en 2001-2002, lors de la séance dont nous venons d'examiner une partie du travail :

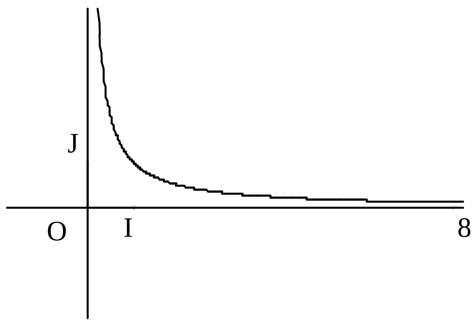
> Je suis assez gênée par les compétences du programme « déterminer l'ensemble de définition d'une fonction définie par une courbe, ou un tableau ». J'ai proposé l'exercice suivant : « La fonction f est donnée par sa courbe représentative [ci-après]. Déterminer l'ensemble de définition de f ».
>
> 
>
>
> Beaucoup d'élèves ont répondu $]-\infty ; +\infty[$ car je leur avais déjà parlé de la convention graphique consistant à considérer que la courbe est illimitée si aucun point n'est placé de manière explicite à ses extrémités. J'ai eu beaucoup de mal à leur faire comprendre que les informations apportées par la courbe étaient exhaustives (je ne le leur ai pas expliqué comme ça, bien sûr) et que, donc, la courbe ne couperait pas l'axe des ordonnées. Beaucoup ont été surpris par le fait que l'ensemble de définition était $]0 ; +\infty[$. En fait, dans mon for intérieur, j'étais d'accord avec eux, je trouve que ce genre de type de tâches est beaucoup trop ambigu. (2001-2002, 2^{de}, semaine 17)

Le problème soulevé est en fait l'un de ces problèmes de la profession qui n'en finissent pas de demeurer ouverts. Une réponse détaillée, précise, est alors tentée, que nous reproduisons ci-après. Le problème du professeur – ici de la professeure stagiaire – est évidemment celui de la *réception* d'une telle réponse – la possibilité qu'aura celle-ci de vivre dans l'écosystème professionnel qui impose ses contraintes et ses conditions aux entités qu'on voudrait y faire exister.

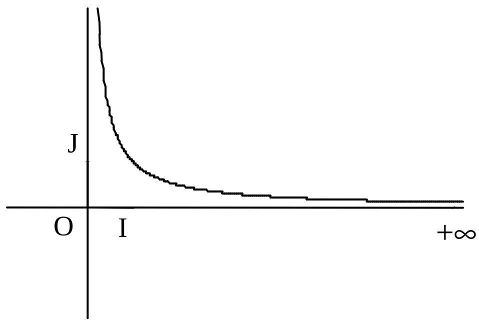
① On bute en l'espèce sur un problème général : celui des conventions de la schématisation graphique, dont on peut penser que, d'une manière générale, elles ne sont pas suffisamment explicitées. S'il est vrai que le programme enjoint de considérer, dans le cas évoqué, que « l'information sur les variations est exhaustive », il reste à préciser… ce qu'est l'information en question !

② L'observation précédente peut être illustrée par le fait que voici. Le schéma graphique présenté, qui est ici censé « vouloir dire » que la fonction *f* supposée est décroissante sur]0 ; +∞[. Or pourquoi s'agirait-il là de l'information pertinente qu'il conviendrait de lire sur le schéma proposé ?

❶ Comment représenterait-on par exemple la même fonction *f* sur l'intervalle]0 ; 8[? Il y a là une ambiguïté fondamentale, dont la levée suppose que l'on cote le schéma présenté. On aura par exemple le schéma coté suivant :

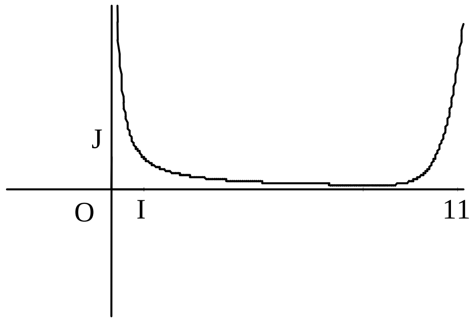


Si l'on veut indiquer que la fonction est définie sur l'intervalle]0 ; +∞[, on cotera par exemple ainsi :



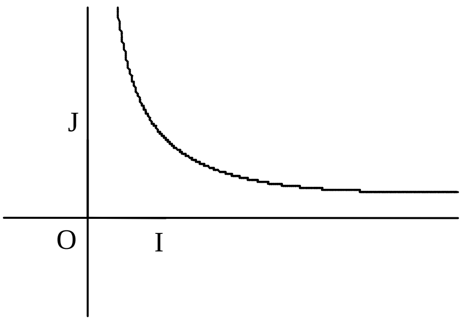
Le schéma non coté donné aux élèves ne permet en effet de dire que ceci (en faisant jouer la convention de l'information exhaustive) : la fonction considérée est définie au moins sur un intervalle]ε ; *a*[(avec éventuellement ε = 0 et *a* = +∞), où elle est décroissante.

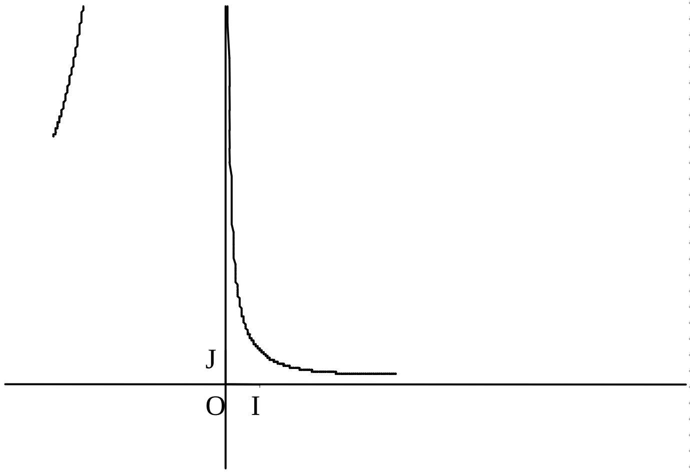
❷ On ne peut pas dire davantage. Ainsi la fonction utilisée pour obtenir le graphique sur]0 ; 8[ci-dessus est-elle la fonction donnée par $f(x) = \frac{1}{x} + x^4 \exp\left(-\frac{1000}{x^2}\right)$, dont le graphique sur l'intervalle]0 ; 11[a l'allure suivante.



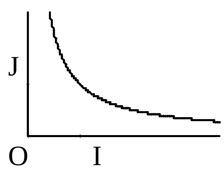
③ La même exigence vaut pour les domaines où l'on veut signifier que *f* n'est pas définie.

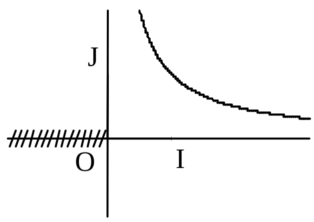
❶ Voici à nouveau le graphique (ci-dessous, à gauche), sur un intervalle non précisé, d'une certaine fonction *f*. En fait, la fonction *f* est définie, non sur]0 ; +∞[, mais sur [–5 ; 5]\{ 0 }, et cela par : $f(x) = \frac{1}{x} + \exp\left(-\frac{10}{x}\right)$. Son graphique sur l'intervalle de définition a l'allure ci-dessous, à droite. Simplement, la composante du graphique située dans le deuxième quadrant sort de la « fenêtre » dans laquelle on a tracé le premier graphique.



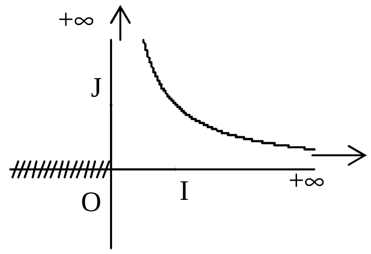


❷ Dans un tel cas, il convient donc de faire apparaître conventionnellement, si on le souhaite, que *f* n'est pas définie pour $x < 0$, comme ci-dessous par exemple.





❸ On voit qu'une ambiguïté au moins demeure : que se passe-t-il près de 0, à droite ? Il convient ici de préciser – par un codage adéquat – le fait que la courbe conserve « indéfiniment » son allure, ainsi qu'on l'a fait pour +∞, ce qu'on peut faire comme ci-dessous.



④ Ce qui précède est d’autant plus important qu’il convient, dans une AER d’abord, dans la synthèse corrélative ensuite, de consigner en un schéma, ou plutôt en une suite de schémas, les informations apportées tant par une étude empirique – numérique ou numérico-graphique – telle qu’on peut la conduire avec une calculatrice graphique ou un ordinateur, par exemple, que par une étude théorique. Le type de tâches critiqué peut à bon droit être critiqué, parce que mal défini ; mais il est en même temps indispensable au travail mathématique dans le domaine des fonctions.

Le souci est constant, dans la formation proposée, de mettre en relation des difficultés « de surface » rapportées par les élèves professeurs et des problèmes plus fondamentaux de l’enseignement qu’ils ont à assumer. Lors de la même séance 18, le forum des questions fait droit à une interrogation sur la manière de situer et d’exploiter les notations f et $f(x)$, dont la coexistence, on l’a vu en passant, est depuis longtemps problématique :

> Le document d’accompagnement du programme précise que la différence entre $f(x)$ et f est plutôt un objectif à long terme. Faut-il quand même vraiment insister sur cette différence ? (2001-2002, 2de, semaine 10)

Sans reprendre de façon complète la réponse apportée, notons d’abord qu’elle reprend deux passages des textes officiels, l’un extrait du programme de seconde, l’autre de son document d’accompagnement.

> 1. Les notations $f(x)$, déjà introduite au collège, et f seront systématiquement utilisées. Il importe d’être progressif dans l’utilisation de ces écritures : le passage du nombre $f(x)$ à l’objet mathématique « fonction » noté f est difficile et demande un temps de maturation individuelle qui peut dépasser la classe de 2de.
>
> 2. On portera une attention particulière à la maîtrise de la notation $f(x)$, où le parenthésage va à l’encontre de certaines notations du calcul algébrique. Quant à la compréhension de la notation f, c’est un objectif à plus long terme : il est approché en seconde par l’accumulation d’exemples nombreux et variés, par l’étude des variations d’une fonction (avec la prise en compte de tout un ensemble de valeurs) et par l’étude des premières fonctions de référence.

La question examinée, qui exprime une gêne persistante mais sans doute regardée comme dénuée de profondeur par l’auteur de la question, va alors être reliée à la fois à la genèse historique de la notion de fonction et au projet didactique qui, de façon consonante, devrait être celui du professeur de seconde.

Les difficultés sous-jacentes à ce relatif pessimisme didactique [des deux citations des textes officiels reproduits ci-dessus] doivent être précisées : on esquisse ci-après les principales étapes à parcourir dans la mise en place de la notion de fonction.

❶ Le point de départ est le suivant : on considère un certain « système » dont l'état est caractérisé par certaines *grandeurs variables* qu'on appelle encore *variables*, tout court.

• Un mobile sera ainsi caractérisé par la durée écoulée t, par les coordonnées x et y de sa position dans un certain repère, par la distance qu'il a parcourue s.

• Un enclos rectangulaire sera caractérisé par les longueurs a et b de ses côtés et par son aire $\mathcal{A}$.

• Un volume de gaz sera caractérisé par sa température T et sa pression p.

❷ D'une manière générale, une variable y apparaît *dépendante* d'autres variables x_1, x_2, …, x_n. Dans le cas le plus simple, on considère deux variables, x et y, et l'on introduit une asymétrie entre elles en supposant que, si x a une valeur déterminée, alors y a également une valeur déterminée, et en regardant alors y comme dépendant de x. La variable x est alors dite *indépendante*, tandis que la variable y est la variable *dépendante*.

❸ Pour indiquer qu'on regarde y comme dépendant de x, ou, pour le dire autrement, comme une *fonction* de x (le terme apparaît d'abord dans la correspondance de Leibniz avec Johann Bernoulli, à la fin du XVII^e^ siècle), on peut être tenté de noter, non pas y, mais $y(x)$: c'est ce qu'on fait lorsqu'on parle de la pression $p(T)$ d'un volume de gaz, de l'abscisse $x(t)$ d'un mobile, etc.

❹ Mais cette notation, qui indique seulement qu'on regarde une certaine variable comme fonction d'une autre, soulève des problèmes. Si, au lieu de considérer l'abscisse x comme une fonction de t, on la regarde comme dépendant de la longueur s de l'arc de courbe parcouru, on sera conduit à noter $x(s)$ l'abscisse en question. Or la manière dont x dépend de t et la manière dont x dépend de s ne sont pas identiques : les notations $x(t)$ et $x(s)$ sont en ce sens trop implicites. Il faut donc expliciter « la manière de dépendre », qui est l'être abstrait qu'on va appeler « fonction ». On le fait en notant par exemple $x = f(t)$, d'une part, $x = \varphi(s)$, d'autre part. Ainsi émerge la notion de fonction comme « forme de dépendance » : cette émergence conduit notamment à étudier les « formes de dépendance de base » (« de référence »), qu'on notait traditionnellement $y = ax$, $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, etc.

❺ Lorsqu'on ne connaît pas ou qu'on ne souhaite pas expliciter la forme de dépendance entre les variables x et y, on écrit de façon générique $y = f(x)$: x est la variable indépendante, y la variable dépendante, f la fonction. Un pas de plus dans l'abstraction va consister alors à se débarrasser des variables x et y, dont la nature importe peu, pour ne plus considérer que la fonction f. Et c'est tout ce processus d'abstraction qu'il échoit au professeur de mathématiques de faire (re)vivre aux élèves en classe de 2^de^…

Différentes catégories de difficultés professorales se dégagent. On s'interroge sur l'origine d'un mot, par exemple, comme si toute la formation reçue jusqu'alors était restée muette à ce propos : ainsi, d'où vient le mot cosinus ? On se sent, aussi, mal à l'aise devant des situations jugées mathématiquement peu franches, dont le traitement adéquat exige du doigté mathématique, épistémologique et didactique. Ainsi en va-t-il dans cette question, soulevée lors de la séance 22 par une stagiaire qui travaille alors à son mémoire professionnel :

> En 1re ES, après avoir introduit (de plusieurs manières possibles) la notion de dérivée, on donne la définition du nombre dérivé comme « limite de $\frac{f(a+h)-f(h)}{h}$ quand h tend vers 0 ». Il est bien précisé que « On ne donnera pas de définition formelle de la notion de limite. Le vocabulaire et la notation relatifs aux limites seront introduits à l'occasion de ce travail sur la notion de dérivée ; on s'en tiendra à une approche sur des exemples et à une utilisation intuitive. Aucun développement n'est demandé sur ce sujet ». Faut-il comprendre que les élèves devront savoir (intuitivement) déterminer une limite, ou alors que le but n'est qu'une manipulation rapide afin d'établir les dérivées des fonctions demandées ? (2001-2002, 2de, semaine 22)

Comme souvent, la réponse consignée dans les notes du séminaire examine d'abord les textes officiels, dégage les intentions didactiques – la notion de limite apparaît en première ES comme « un simple *outil d'étude*, dont l'introduction est motivée (et même « forcée ») par l'étude des dérivées des fonctions, *et non un objet d'étude en lui-même* ». On s'assure donc de l'appui sur les textes gouvernant officiellement l'enseignement à prodiguer. Mais on cherche aussi à rassurer en vérifiant qu'on ne s'éloigne ainsi ni de l'authenticité historique des notions à enseigner, ni d'un traitement mathématique de bon aloi – que le professeur doit apprendre à connaître, non pour l'enseigner, mais pour concevoir son enseignement. Après avoir longuement cité un passage éclairant du document d'accompagnement relatif à la classe de première S, le responsable du séminaire enchaîne en ces termes :

> En relation avec le statut ainsi assigné à l'opérateur de passage à la limite (ici, en 0), le même document indique :
>
> … en analyse, l'observation (sur la base de calculs) permet d'atteindre le concept de limite d'une fonction en un point ou à l'infini, sans qu'il soit indispensable de définir formellement ce concept au niveau de la première ; on peut ensuite dégager un certain nombre de règles opératoires : ces règles correspondent à des théorèmes démontrables dans un cadre formel qui sera développé ultérieurement (c'est ce qu'il importe de dire aux élèves). Calculer une limite relève alors d'une mise en œuvre de ces règles opératoires.

❶ Si l'on désigne par $\mathcal{L}$ l'opérateur de passage à la limite en 0 pour les fonctions définies sur un voisinage de 0, les règles opératoires en question seront les suivantes :

L_1. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(kf) = k\mathcal{L}(f)$.

L_2. $\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$.

L_3. $\mathcal{L}(fg) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$.

L_4. S'il existe un voisinage de 0 où f ne s'annule pas, et si $\mathcal{L}(f) \neq 0$, alors $\mathcal{L}(1/f) = 1/\mathcal{L}(f)$.

L_5. S'il existe un voisinage de 0 où $f(x) = \ell$ pour tout x, alors $\mathcal{L}(f) = \ell$.

L_6. S'il existe un voisinage de 0 où $f(x) = x$ pour tout x, alors $\mathcal{L}(f) = 0$.

❷ Le point de vue adopté dans les programmes de première actuels est largement en accord avec la genèse historique des notions concernées. On lira à cet égard l'article *Notion de limite* de Christian Houzel dans le *Dictionnaire des mathématiques - Algèbre, analyse, géométrie* (Encyclopaedia Universalis & Albin Michel, 1997, p. 622-624), dont on reproduit ci-après une première partie :

La notion de limite fait son apparition dans un ouvrage du mathématicien anglais B. Robins intitulé *A Discourse Concerning the Nature and Certainty of Sir Isaac Newton's Method of fluxions and Prime and Ultimate Ratios* (1735) ; c'est une réponse aux critiques formulées par le philosophe G. Berkeley dans son célèbre pamphlet *The Analyst* (1734). Robins essaie de préciser et de clarifier l'expression un peu obscure de Newton « premières et dernières raisons », en parlant de *limites* vers quoi tendent, sans jamais les atteindre, des rapports de quantités variables ; il a dû soutenir une controverse contre son compatriote J. Jurin, newtonien orthodoxe et sourcilleux, pour qui les premières et dernières raisons étaient effectivement atteintes (à l'instant de naissance ou d'évanouissement). C. Maclaurin, dans son *Treatise of Fluxions* (1742), présenté lui aussi comme une réponse à Berkeley, reprend l'interprétation des « premières et dernières raisons » de Newton en termes de limites ; cependant il fonde le calcul infinitésimal sur la notion de fluxion (vitesse instantanée) et non sur celle de limite. Au contraire, d'Alembert, dans l'article « Différentiel » de l'*Encyclopédie*, vol. IV, 1754, présente la notion de limite comme « la vraie métaphysique du calcul différentiel » : il y définit le rapport différentiel dy/dx comme la limite du rapport des accroissements finis de y et de x lorsque ces accroissements tendent vers 0, et il insiste sur le fait que l'on ne doit pas séparer les « différentielles » dy et dx. Comme pour ses prédécesseurs Robins et Maclaurin, le langage de d'Alembert est entièrement géométrique, et la notion de limite n'est pas très clairement définie : on dit simplement que le rapport considéré peut devenir aussi proche que l'on veut de sa limite, ou encore qu'une « grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut s'approcher de la première plus près qu'une quantité donnée, si petite qu'on puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui s'approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle s'approche, en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable » (on remarque que, pour d'Alembert, la limite est approchée d'un seul côté).

À tout instant, la formation a ainsi une fonction d'instruction professionnelle au triple plan mathématique, épistémologique et didactique et une fonction de réassurance pour qui n'a reçu qu'une éducation trop vite restreinte à la fréquentation des cimes d'un univers mathématique à l'atmosphère raréfiée. D'autres questions suscitent par exemple un retour sur l'articulation entre programmes de calcul et fonctions, que le programme de seconde intègre dans un thème d'étude intitulé « Fonctions et formules algébriques », où l'on demande par exemple que l'élève devienne capable d'« identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule » ou de « reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…) ». En 2002-2003, séance 7, le travail du séminaire se fait, sur ce point, tout pratique et débouche très concrètement sur la fabrication de l'énoncé suivant, première étape d'un parcours que l'on ne suivra pas davantage ici :

On désire évaluer l'expression $2(x–1)^2+4$ pour les valeurs suivantes de x : –2, 1, 3, 8.

1) Pour chacune de ces valeurs, préciser laquelle des formes suivantes de l'expression donnée est la plus « économique » :

$E_0 = 2(x–1)^2+4$;

$E_1 = 2x^2–4x+6$;

$E_2 = 2(x–1)(x–3)+4x$;

$E_3 = 2(x–4)(x+2) + 22$.

On vérifiera chaque fois que l'on a bien égalité algébrique entre l'expression E_0 et l'expression proposée.

2) Indiquer une valeur de x pour laquelle l'évaluation de $2(x–1)^2+4$ à partir de l'expression développée E_1 serait la plus économique.

Quelques séances plus tard, cette même année 2002-2003, la question de l'usage du mot *antécédent* ou celle de l'utilité de la caractérisation des fonctions affines est à nouveau soulevée. Autre question classique : les élèves professeurs découvrent que, au lycée du moins, on ne dit plus officiellement – et en fait, depuis belle lurette – « domaine de définition » d'une fonction, mais « ensemble de définition ». La réponse apportée avance que le mot *domaine* désigne traditionnellement, en topologie, un ouvert connexe, ce qui exclut par exemple qu'une fonction ait pour domaine de définition le segment [0, 1] et ne permet pas de parler du domaine de définition sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Plus classique encore, si l'on peut dire, est la découverte qu'un type de tâches autrefois incontournable en seconde, la détermination de l'ensemble de définition d'une fonction donnée par son expression analytique, a aujourd'hui perdu de sa superbe. Selon la loi du tout ou rien plusieurs fois mentionnée, alors, on ne sait plus exactement ce qu'il convient de faire. La réponse, ici, pointe un effet retard : la situation que l'on déplore était en effet déjà inscrite dans les textes officiels qu'a rendu caducs la réforme appliquée à la rentrée 2000 ! L'ancien programme de seconde indiquait en effet :

> [Le programme] ne porte que sur *l'étude d'exemples* et se place dans le cadre des *fonctions définies sur un intervalle* ; on évitera tout exposé général sur les fonctions (statut mathématique du concept de fonction, notion d'ensemble de définition, opérations algébriques, composition, relation d'ordre, restriction...). Le plus souvent, l'intervalle d'étude sera indiqué lors de la définition de la fonction considérée. Dans certains exemples, l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles : on se ramène alors à une étude portant sur chacun de ces intervalles ; on ne multipliera pas de tels exemples.

Le programme « nouveau » valide ce point de vue.

> À l'occasion de tous ces exemples, on abordera la notion d'ensemble de définition. On évitera les exercices systématiques de détermination d'ensemble de définition ; dans la plupart des cas, on le donnera. En dehors de quelques exemples où celui-ci pourra être fini (cas de fonctions du temps du type « nombre de mariages en fonction de l'année » où la variable est discrète et les graphiques correspondants parfois continus !), ce sera toujours un intervalle ou la réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

La conclusion de la réponse tente alors de définir un *modus vivendi* acceptable, en rappelant les excès que les rédacteurs des programmes successifs ont tenté de prévenir.

En pratique, la recherche de l'ensemble « maximal » sur lequel une expression donnée est définie doit rester exceptionnelle. On demandera en revanche aux élèves de se rendre capable de vérifier, chaque fois qu'une fonction est donnée par son expression algébrique, que cette fonction est bien définie sur tel intervalle *donné* sur lequel on souhaiterait *a priori* – à tort ou à raison – l'étudier. Une telle étude peut conduire alors à scinder l'intervalle en deux sous-intervalles disjoints, ou à en rejeter une partie, etc. Ce qu'illustrent les problèmes ci-après :

Dans chacun des cas suivants, la formule algébrique permet-elle de définir une fonction sur l'intervalle I ?

a) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$; $I =]0, +\infty[$

b) $\dfrac{\sqrt{2x+7}}{x^2-4}$; $I =]-2, 5[$.

Bien entendu, on devra soigneusement doser la quantité d'exercices formels du type précédent, sous peine de voir refleurir la domaine-de-définitionite qui sévit jadis si lourdement.

En 2003-2004, une question posée sur la comparaison d'expressions comportant un radical – comment comparer, par exemple, $2\sqrt{5}$ et $\sqrt{21}$? – conduit *in fine* le responsable du séminaire à souligner le profit qu'on peut tirer en seconde de la modélisation fonctionnelle de telles expressions. À nouveau, le travail du séminaire se concrétise en la production d'un énoncé de problème à valeur illustrative, que nous reproduisons ci-après [54].

Lycée Sophie Germain

2^{e} 5

Épreuve de mathématiques 7 – *Corrigé*

1. Calcul et fonctions

(rédigé par Élodie Dadoun & Marc Venturi)

1. On considère les nombres $x = 2\sqrt{5}$ et $y = \sqrt{21}$. Déterminer l'ordre de x et y en utilisant successivement chacune des deux propriétés suivantes (que l'on ne demande pas de justifier) :

a) l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur [0, +∞[;

b) l'application $x \mapsto 2\sqrt{x}$ est strictement croissante sur [0, +∞[;

2. On considère les nombres $s = 2$ et $t = \sqrt{4{,}2}$.

a) Déterminer l'ordre de s et t en utilisant le fait que l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur [0, +∞[(propriété qu'on ne demande pas de justifier).

b) À l'aide du résultat précédent, et en utilisant le fait que l'application $x \mapsto \sqrt{5}\,x$ est strictement croissante sur [0, +∞[, retrouver le résultat de la question 1 relatif à x et y.

Solution

1. a) On a : $2\sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20}$. L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ étant strictement croissante sur [0, +∞[, les nombres $x = \sqrt{20}$ et $y = \sqrt{21}$ sont rangés dans le même ordre que 20 et 21 : on a donc $x < y$, soit $2\sqrt{5} < \sqrt{21}$.

Vérification. La calculatrice donne les résultats suivants : $\sqrt{5} = 4{,}47\ldots$; $\sqrt{21} = 4{,}58\ldots$

b) On a : $\sqrt{21} = \sqrt{4 \times \frac{21}{4}} = 2\sqrt{5{,}25}$. L'application $x \mapsto 2\sqrt{x}$ étant strictement croissante sur [0, +∞[, les nombres $x = 2\sqrt{5}$ et $y = 2\sqrt{5{,}25}$ sont rangés dans le même ordre que 5 et 5,25 : d'où le résultat.

2. a) On a $s = 2 = \sqrt{4}$. L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ étant strictement croissante sur [0, +∞[, les nombres $s = \sqrt{4}$ et $t = \sqrt{4{,}2}$ sont rangés dans le même ordre que 4 et 4,2 : on a donc $s < t$, soit $2 < \sqrt{4{,}2}$.

---

[54] Le « lycée Sophie Germain » mentionné ici est évidemment un lycée imaginaire, que l'on se gardera d'identifier avec tel ou tel lycée portant le nom de cette mathématicienne. Une remarque analogue vaut pour les élèves nommés dans le document présenté.

b) On a : $\sqrt{21} = \sqrt{5\times\frac{21}{5}} = \sqrt{5} \times \sqrt{4,2}$. L'application $x \mapsto \sqrt{5}\,x$ étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$, les nombres $x = \sqrt{5} \times 2$ et $y = \sqrt{5} \times \sqrt{4,2}$ sont rangés dans le même ordre que 2 et $\sqrt{4,2}$: on retrouve ainsi le résultat déjà obtenu dans la question 1.

② De la même façon qu'il convient d'apprendre à « voir dans l'espace », il convient donc d'apprendre à voir dans « l'espace » des *formes algébriques* – et d'apprendre à reconnaître, derrière ces formes, des *fonctions*. On notera que, précisément à propos du thème d'études *Fonctions et formules algébriques*, il s'agit là, bel et bien, de *capacités attendues*…

4.10. La question de l'enseignement des fonctions apparaît, en classe de seconde, comme un point d'accumulation de difficultés. Devant ce constat, lors de la séance 18 de l'année 2003-2004, c'est-à-dire dans le dernier quart du temps de formation, le responsable du séminaire lance un PER (parcours d'étude et de recherche), non pour des élèves de collège et de lycée, bien sûr, mais pour ces professeurs en formation que sont les participants au séminaire. Ce PER, qui s'appelle tout simplement *Enseigner les fonctions*, est inauguré par la présentation d'une suite de questions posées jusque-là. Ce tableau donne une bonne idée de ce que les élèves professeurs peuvent rapporter de leur expérience de terrain.

1. La notion de fonction semble poser beaucoup de problèmes aux élèves. Existe-t-il une approche qui faciliterait la mise en place de cette notion ? (2003-2004, 2^{de}, semaine 14)

2. Je cherche une situation de la vie courante qui conduise à l'étude de la fonction inverse en 2^{de} (j'ai déjà traité l'ordre des nombres : si $0 < a < b$ alors $1/b < 1/a$). Comment motiver l'étude de cette fonction ? J'aimerais trouver des situations (en économie par exemple) mais en général la fonction n'apparaît pas telle quelle. Le travail consistant à changer de repère ne risque-t-il pas de trop m'éloigner des objectifs du cours ? Par exemple, s'agissant de la fonction carré, j'aurais pu parler de la chute d'un objet dans le vide ($\frac{1}{2}gt^2$, où g est la constante de gravité), mais alors qu'apporte cette étude pour la fonction carré ? Cette approche ne risque-t-elle pas d'apparaître artificielle au final ? (2003-2004, 2^{de}, semaine 16)

3. Peut-on introduire la notation $f\circ g$ ou bien cela risque-t-il d'être trop dur pour une classe de 2^{de} ? (2003-2004, 2^{de}, semaine 16)

4. Comment définir « simplement » une fonction ? (2003-2004, 2^{de}, semaine 16)

5. Le programme de 2^{de} cite à titre de capacité attendue le fait de savoir « identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule ». Qu'en est-il des représentations graphiques ? Peut-on demander, ou simplement voir, la construction de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto (x-2)^2 + 1$ par exemple ? (2003-2004, 2^{de}, semaine 16)

6. Dans le cadre des fonctions de référence, on n'étudie pas uniquement mais principalement la fonction carré et la fonction inverse. Les exercices qui en découlent, issus de situations concrètes, concernent surtout la fonction carré. Est-ce maladroit de laisser plus de place à cette fonction qu'à la fonction inverse ? (2003-2004, 2^de^, semaine 17)

7. Dans l'étude d'une fonction, on peut faire tracer la courbe représentative et, par lecture graphique, faire établir le sens de variation, des solutions d'équations et d'inéquations, des symétries éventuelles, ou bien, en sens inverse, faire établir ce qui précède et en déduire la courbe représentative. Y a-t-il une façon de faire meilleure que l'autre ? (2003-2004, 2^de^, semaine 17)

On voit ici émerger, sur un cas particulier, ce qui deviendra plus tard le dispositif des *archives du séminaire* dont nous avons parlé plus haut. Le responsable du séminaire a en effet rassemblé dans un fichier disponible en ligne « un corpus d'extraits des notes des séminaires des années précédentes réunis sous le titre "Enseigner les fonctions : matériaux divers". » Il ajoute : « Au cours des séances à venir, on y recherchera des éléments de réponse aux questions posées ci-dessus. » Dans l'instant, toutefois, il intervient sans plus tarder sur une question indéfiniment renaissante dans l'abord entaché de formalisme qu'ont spontanément les professeurs stagiaires de ce que le programme désigne sous le nom de « fonctions de référence ».

Dans ce qui suit, on examine rapidement une « difficulté » fréquemment évoquée : la distinction faite entre, par exemple, l'application $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ (ou, plus généralement, l'application $x \mapsto kx^2$) et l'application, qu'il s'agirait de « singulariser », $x \mapsto x^2$; ou encore entre les applications $x \mapsto \frac{k}{x}$ et l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$.

❶ La recherche d'une situation du monde dans laquelle on soit conduit *exactement* à la considération de la fonction $x \mapsto x^2$ ou de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est *dénuée de sens* : car ces expressions ne sont pas *invariantes* par un changement d'unité affectant la grandeur dont x est la mesure (ou la grandeur dont $y = f(x)$ est la mesure)... On ne peut donc arriver aux formes x^2 ou $\frac{1}{x}$ que de deux façons : soit en essayant d'obtenir ces formes *a priori*, en imposant des contraintes artificielles (et fragiles) ; soit en se ramenant aux formes visées par un changement d'unités *qui fera partie du travail d'étude et de recherche*.

❷ Dans les deux cas évoqués, contrairement à ce que certains professeurs sont portés à penser, le programme fournit *tout ce qu'il faut* pour travailler avec les fonctions considérées, puisque, si on le suit, les élèves doivent se rendre capables d'« identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à

$f(x)$ quand f est donnée par une formule » : l'application $x \mapsto kx^2$, ainsi, résulte de « l'enchaînement » des applications $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto kx$, etc.

La suite des notes du séminaire n'ajoutera que quelques éléments au corpus des connaissances professionnelles évoqué jusqu'ici : il semble y avoir à cet égard une relative stabilisation de ce corpus, troublée de loin en loin par une question qui conduit, soit à ajouter certains développements, soit, plus souvent, à approfondir le travail accompli au cours des années précédentes. En 2003-2004 comme en 2004-2005, le travail sur la modélisation sera ainsi davantage approfondi, et renouvelé par des matériaux inédits, issus de l'observation de classes. En 2005-2006, lors de la séance 9, le séminaire s'arrête de même sur cette question, rédigée à la séance précédente :

> Lors du cours sur les fonctions, on aborde les fonctions définies sur un ensemble fini. Lors de ma recherche d'exemples, je me suis posé une question : toutes les courbes de l'INSEE représentant le chômage sont représentées par des courbes affines par morceaux (de janvier 2005 à février 2005, etc.) Sachant que la fonction est définie sur un ensemble *fini* (relevés discrets en tout cas…), il est donc incorrect de la représenter par une courbe continue. Est-il judicieux de le faire remarquer ? (2005-2006, 2[de], semaine 8)

C'est là l'occasion de rappeler qu'un modèle est une construction délibérée qui suppose une prise de décision, et qu'il est donc loisible de modéliser une réalité par un modèle continu ou discret.

1) C'est plutôt l'occasion de faire remarquer qu'il y a là un *choix* de modélisation mathématique – en trois temps. Dans un premier temps, on décide de regarder le taux de chômage r comme une fonction du temps t, lui-même regardé comme une variable « continue » prenant ses valeurs dans l'intervalle [0 ; 365] (par exemple) : $r = f(t)$. Dans un deuxième temps, on relève la valeur de r en $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ À ce stade, une représentation graphique ne comporterait qu'un nombre fini de points (t_1, r_1), (t_2, r_2), (t_3, r_3), etc. Dans un troisième point, on décide de rechercher des valeurs approchées de r sur $]t_1 ; t_2[$,$]t_2 ; t_3[$, etc., *par interpolation*, et en l'espèce par interpolation *« affine »*.
2) La représentation de r par une « courbe continue » n'est donc nullement « incorrecte » : elle résulte en effet, *non du phénomène étudié lui-même*, mais d'une *décision de modélisation* – consistant (ici) à opter pour un modèle continu plutôt que pour un modèle discret. Cette remarque est essentielle : ce ne sont pas les phénomènes étudiés qui « dictent » le modèle. Dans tous les cas, bien entendu, il restera à examiner ce que le modèle élaboré nous apprend vraiment sur le système qu'il modélise. Pour ne prendre ici qu'un exemple, on peut modéliser l'évolution d'une population par un modèle discret de la forme

$$x(t + 1) = x(t)[1 + r(t, x(t))]$$

c’est-à-dire par une relation de récurrence d’ordre 1, ou par un modèle continu de la forme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(t)r(t, x).$$

(Sur cette question, voir par exemple Alain Hillion, *Les théories mathématiques des populations*, PUF [coll. « Que sais-je ? »], Paris, 1986.)

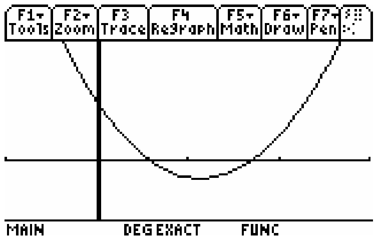
Les mêmes difficultés sont débusquées année après année par ces jeunes professionnels que sont les professeurs stagiaires. Les réponses, alors, puisent dans le fonds constitué lors des années précédentes – les archives du séminaire. Mais le responsable du séminaire reprend quelquefois la plume pour expliciter des points sur lesquels il ressent le besoin d’une réponse plus ferme et plus explicite. Ainsi en va-t-il à propos de la question suivante, qui reconduit implicitement la loi d’airain du tout ou rien gouvernant l’économie didactique de nombre de professeurs.

> Est-ce gênant de parler rapidement de la parité des fonctions, sachant que cette notion est sortie récemment des programmes ? Je ne comptais pas le faire ; mais quelques élèves qui cherchent les exercices du manuel m’ont posé des questions à ce sujet. Plutôt que de leur dire que ce n’était pas au programme, j’en ai parlé cinq minutes et certains ont noté ces remarques dans la synthèse. (2005-2006, 2$^{\text{de}}$, semaine 12)

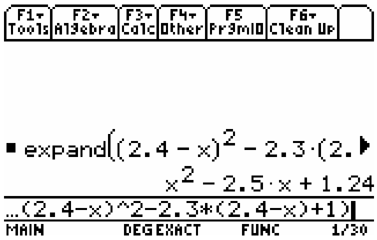
Face à ce retour du refoulé, la réponse se fait circonstanciée. Une fois encore, on la reproduit *in extenso*.

1) Il n’est pas tout à fait exact de dire que la notion est « sortie » du programme de la classe de seconde. Un passage du commentaire relatif au thème intitulé « Étude qualitative de fonctions » indique en effet ceci : « La perception sur un graphique de symétries ou de périodicité pourra conduire à une formulation analytique de ces propriétés. » La même terminologie est usitée en classe de première S, dont un commentaire précise : « On justifiera les symétries observées sur les représentations graphiques. » La différence entre les deux classes et que, en seconde, le fait qu’une courbe représentative apparaisse symétrique *pourra* donner lieu à une « formulation analytique », tandis qu’en première S, il *faudra* établir la symétrie analytiquement.

2) Considérons par exemple l’application $x \mapsto f(x) = x^2 - 2{,}3x + 1$. L’examen de la courbe représentative obtenue à l’écran d’une calculatrice graphique laisse penser à une symétrie par rapport à un axe « vertical », d’équation $x = a$.

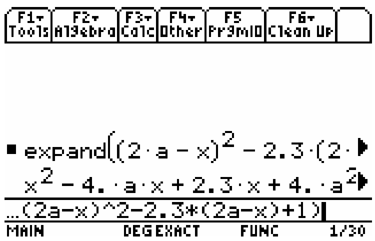


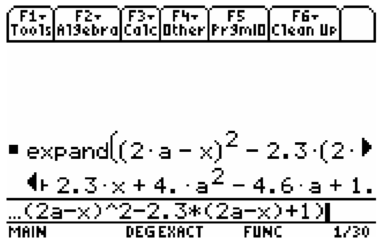
On suppose que la conjecture surgit, dans l'AER conduite en telle classe de seconde, que l'on pourrait bien avoir $a = 1{,}2$. Comment s'exprime analytiquement la symétrie supposée ? Les abscisses x et x' sont symétriques par rapport à a si $\frac{x + x'}{2} = a$, c'est-à-dire si $x' = 2a - x$. Pour que la courbe soit symétrique, il est donc nécessaire et suffisant que l'on ait toujours $f(2a - x) = f(x)$, soit ici $f(2{,}4 - x) = f(x)$. Or on a ceci :



L'égalité n'est vraie que si $x^2 - 2{,}5x + 1{,}24 = x^2 - 2{,}3x + 1$, soit si $0{,}2x = 0{,}24$ et donc si $x = 1{,}2$, ce qui était évident sur l'écriture $f(2{,}4 - x) = f(x)$! Déception…

3) Pour en avoir le cœur net, on peut songer à résoudre en a l'équation $f(2a - x) = f(x)$, pour x donné ; on a d'abord ceci :





On aurait ainsi : $f(2a - x) = x^2 - (4a - 2{,}3)x + 4a^2 - 4{,}6a + 1$. L'égalité $f(2a - x) = f(x)$, soit

$$x^2 - (4a - 2{,}3)x + 4a^2 - 4{,}6a + 1 = x^2 - 2{,}3x + 1$$

se récrit donc : $(4a - 4{,}6)a = (4a - 4{,}6)x$. On voit que l'égalité est vraie pour tout x si, et seulement si, $4a - 4{,}6 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a = \frac{4{,}6}{4} = \frac{2{,}3}{2} = 1{,}15$.

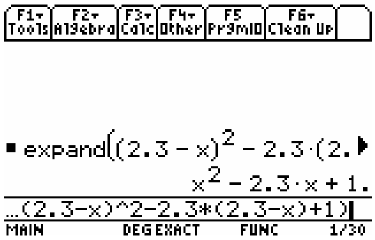
4) On arrive ainsi à une nouvelle conjecture que l'on devra vérifier soigneusement, en conduisant le calcul par exemple ainsi :

$f(2{,}3 - x) = (2{,}3 - x)^2 - 2{,}3(2{,}3 - x) + 1 = (2{,}3 - x)[(2{,}3 - x) - 2{,}3] + 1 = (x - 2{,}3)x + 1 = x^2 - 2{,}3x + 1.$

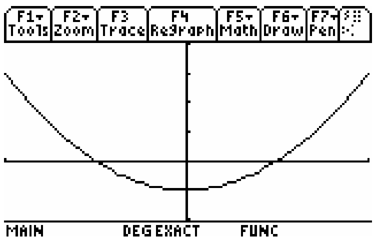
On peut multiplier les voies de calcul ; en posant $x' = 2{,}3 - x$ et en notant que $x + x' = 2{,}3$, on a par exemple :

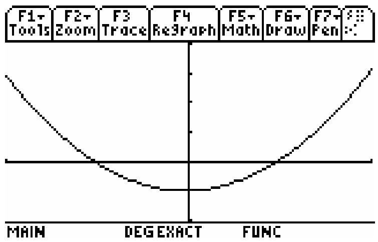
$f(2{,}3 - x) - f(x) = f(x') - f(x) = x'^2 - x^2 - 2{,}3(x' - x) = (x' - x)[(x' + x) - 2{,}3] = 0.$

La conclusion semble sûre ; mais on la vérifiera tout de même à l'aide de la calculatrice.



5) Le type de problème posé ici à la profession engendre souvent la tentation de faire jouer une loi du tout ou rien : *si* la notion de parité n'est pas désignée comme « à enseigner » de façon explicite, *alors* cette notion doit être écartée, même si d'aucuns le regrettent ! Or ce que dit le programme – un peu implicitement, sans doute –, c'est que cette notion *pourra* être évoquée, mais cela dans un contexte où elle apparaisse *fonctionnelle*, comme poussée en avant par le cadre d'étude : sur l'intervalle [–1 ; 1], la courbe représentative de $x \mapsto g(x) = 4x^2 - 1$ (ci-dessous à gauche) de même que celle de $x \mapsto h(x) = 4x^2 + 0{,}1x - 1$ (ci-dessous à droite) semblent symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ; qu'en est-il au juste ?





Un raisonnement peut aider : si l'une est symétrique, l'autre ne peut pas l'être. Mais l'une des deux l'est-elle ? Laquelle ? Etc.

6) Ainsi le fait de ne pas « faire de cours » sur « la parité » n'entraîne-t-il nullement que cette question n'émerge pas – et ne soit pas étudiée – dans le travail de la classe. On notera qu'il en est de même de la notion de *périodicité*. Par contraste avec les exemples qui précèdent, on soulignera surtout que le travail spontané des élèves sur la notion de parité, tel du moins que l'évoque la question posée, ressemble davantage à du *recopiage culturel* qu'à une activité de *problématisation du réel mathématique*.

Bien d'autres développements pourraient être présentés à propos de la théorie des fonctions, par exemple à propos de la trigonométrie et des fonctions trigonométriques – à telle fin que, répondant au questionnaire de fin d'année en mai 2006, une stagiaire, sollicitée d'indiquer « *un* aspect de la formation proposée qui [lui] a paru plutôt *positif* », pourra écrire : « Certains des sujets traités en séminaire, notamment à propos de la trigonométrie, m'ont aidé à mieux appréhender des thèmes dans leur globalité. »

Épilogue

Que la profession apparaisse souvent muette ou démunie devant les difficultés du métier, ainsi qu'on l'a vu, ne signifie nullement, on le sait aussi, qu'elle n'ait pas à l'égard de ses recrues des attentes déterminées. La pression est même si forte que les professeurs stagiaires se persuadent bientôt que, hormis sur quelques points somme toute peu nombreux, ils en viendront très vite à satisfaire raisonnablement aux exigences du métier. Cette entrée subjective rapide, sinon instantanée, dans la culture de la profession se paie en quelque façon par l'adoption peu critique, consciente ou non, d'habitus de pensée et d'action très anciennement constitués, et que la formation donnée à l'IUFM vient pourtant questionner. Ce questionnement obstiné, qui naît de la rencontre organisée du fonctionnement de la profession telle qu'elle existe et de la formation au métier telle que la dispense l'IUFM, s'efforce de déplacer les lignes de tension en constituant en problèmes de la profession ce qui n'en était au mieux que des symptômes individuels ou collectifs. Le travail de la formation – et l'effort de recherche en didactique des mathématiques auquel il s'articule – fait surgir de nouvelles normes potentielles, en vue de rénover une normalité professionnelle en voie d'épuisement, mais dont les vestiges restent encore très prégnants. Le conflit entre l'ancien qui ne veut pas mourir et le nouveau qui peine à naître se vit au quotidien, dans la formation à l'IUFM comme dans l'établissement d'exercice. La formation ne permet certes pas d'abolir d'un trait de plume les difficultés éprouvées dans la classe ; mais elle conduit à les reformuler dans un cadre théorique, technologique, technique plus large qui, si l'on peut dire, modifie profondément le rapport à la problématicité du métier. À l'issue de sa formation, le professeur stagiaire peut sans doute faire ce bilan : l'exercice individuel et collectif du métier et sa construction collective continuée posent plus de problèmes – beaucoup plus – qu'il ne l'imaginait ; et, en même temps, cette construction, qui à bien des égards sonne comme une reconstruction, peut aujourd'hui disposer d'outils assez efficaces et bien justifiés pour avoir été d'ores et déjà engagée et pour être, demain, poursuivie.

Conclusion

Les mathématiques comme problème professionnel

La recherche « clinique » que nous avons menée en interrogeant les difficultés et obstacles rencontrés sur le chemin qui va de l'état d'étudiant en mathématiques au statut de professeur de mathématiques met au jour ce qui est sans doute le nœud d'un malentendu fondamental sur le métier de professeur et les exigences qui lui sont consubstantielles. Alors que le contrat qui se noue dans la société à propos de l'École postule depuis des siècles que la matière enseignée ne fait pas en elle-même problème, que seul le *choix* de cette matière donne lieu à débat, voire à polémiques, et qu'elle ne fait problème en vérité que pour ceux qui doivent apprendre, l'étude conduite ici établit l'évidence contraire : la matière mathématique, puisque c'est cela qui nous importe, est presque toujours mal définie, insuffisamment travaillée, et indéfiniment problématique. À vrai dire, dans le paradigme classique où règne le postulat évoqué, il n'est pas tout à fait juste de dire que l'on pose comme un principe la non-problématicité des contenus à enseigner. Mais la problématicité reconnue se réduit, au mieux, au problème de la conformité de la matière enseignée à la matière savante correspondante, conformité que les savants – ou des « réunions de savants » – contrôlent. (Ainsi les programmes des lycées du 10 avril 1803 prévoient-ils par exemple que, dans la sixième classe et en mathématiques, on étudiera « l'Arithmétique de Lacroix jusqu'aux fractions décimales exclusivement » ; que, dans la cinquième classe et en physique, on étudiera la première partie des « Éléments de physique du citoyen Haüy » ; que, dans la quatrième classe et en ce qui concerne « la Sphère », on étudiera la première partie des « Éléments d'astronomie du citoyen Biot » ; etc.) Mais, comme le prévoit la théorie de la transposition didactique [1], la mise en relation avec l'orthodoxie savante ne se produit que de loin en loin dans l'histoire de l'École, en des moments de « crise » où le savoir enseigné a, aux yeux de la société, perdu une part

[1] Voir Yves Chevallard, *La transposition didactique*, La pensée sauvage, Grenoble, 1991.

essentielle de son crédit. La rénovation « savante » du curriculum réalisé en ces moments critiques – que l'on songe à la réforme dite des mathématiques modernes – a alors des effets violents, que le travail réalisé ici permet de mieux comprendre : si l'afflux autour de l'École, dans la noosphère de l'enseignement des mathématiques, de matériaux savants permet un renouvellement de fait des mathématiques *pour l'enseignant*, il n'engendre pas pour autant les mathématiques *pour l'enseignement* sans lesquelles il n'est pas d'écologie mathématico-didactique fonctionnelle et durable. Encore faut-il que les contenus mathématiques pour l'enseignant ne soient pas choisis pour leur simple disponibilité savante, mais pour leur pertinence vis-à-vis de l'effort d'élaboration des mathématiques pour l'enseignement qui apparaissent nécessaires.

Un tel effort doit être conduit sous des conditions et des contraintes qui ne sont nullement identiques à celles sous lesquelles le savoir savant est créé par les mathématiciens et diffusé par eux jusques et y compris au sein de la noosphère du système éducatif. Les conditions et contraintes sous lesquelles les mathématiques pour l'enseignement doivent être créées, modifiées, façonnées et refaçonnées à un rythme parfois rapide sont en partie au moins celles que notre recherche a permis de dégager, en y distinguant deux parts. D'un côté, il y a les normes d'une profession à forte inertie, dont certaines s'imposent presque brutalement, même si d'autres paraissent fuyantes, voire insaisissables, ou encore en quelque sorte subsidiaires. D'un autre côté, en dialogue parfois difficile avec cette normalité « native », il y a la normativité de fait et de droit de cette « école normale » – au sens originel du terme – qu'est la formation proposée à l'IUFM. Ce que la pratique du métier fait apparaître comme difficultés, la formation prodiguée a pour objet de le problématiser, c'est-à-dire d'en faire autant de problèmes, défis lancés à la profession elle-même, entendue ici au sens large, ce qui inclut les formateurs et ceux des chercheurs qui prennent au sérieux – au plan scientifique, s'entend – les difficultés du métier d'enseignant.

La tribune offerte aux élèves professeurs par la formation à travers le dispositif des questions de la semaine et le forum des questions qui lui répond permet de voir ce que, ordinairement, les professionnels du métier sont portés à dissimuler en le refoulant : la formidable pression de la problématicité mathématico-didactique éprouvée par les professeurs. Le refoulement ordinaire, du même coup, se comprend. Par contraste, la formation proposée vient ouvrir la boîte de Pandore en donnant à voir les mille difficultés de la profession vécue au quotidien. Mais ce qui apparaît aussi, une fois ces difficultés transmuées en *problèmes* de la profession, c’est l’état de relatif dénuement de cette dernière et son impuissance chronique à trouver des solutions bien fondées dans la situation où la société l’abandonne – du seul fait du postulat énoncé plus haut –, alors même que, historiquement, elle n’a pas encore reconnu la nécessité indépassable d’une recherche organiquement articulée à ses problèmes de développement. On aura compris que l’ensemble des analyses élaborées ici s’inscrit dans une perspective où une telle articulation parviendrait enfin à se mettre en place et à être pleinement acceptée, tant de la profession *stricto sensu* que des chercheurs en didactique des mathématiques.

Nous voudrions, pour terminer, souligner ce qui peut apparaître, à l’issue de cette recherche, comme une difficulté, d’un côté, et une limitation, de l’autre. La difficulté : à lire le travail qui s’achève, on peut être tenté d’objecter devant ce qui apparaît, dans l’état actuel de la culture et des savoirs de la profession, comme la conquête (ou parfois la reconquête) d’une culture et de savoirs mathématico-didactiques à la richesse foisonnante et quasiment illimitée. Que serait-ce alors, dira-t-on peut-être, s’il s’agissait de constituer une profession vouée à l’enseignement non seulement des mathématiques, mais encore des sciences des systèmes naturels et artificiels (qui recouvriraient à peu près ce qui se répartit aujourd’hui entre physique-chimie, sciences de la vie et de la Terre, et technologie) ! Faudrait-il que chaque professeur soit un Pic de la Mirandole ? Nullement. Le point de vue individualiste, où chacun est une île, et qui vit en autarcie intellectuelle et professionnelle, doit être résolument abandonné. S’il est un Pic de la Mirandole, ce sera la profession, regardée comme intellectuel collectif, étalon du savoir professionnel de ses membres – un professionnel sachant *grosso modo* ce que sait la profession, et ignorant de même ce qu’elle ne sait pas, selon le principe (certes contraire à ce que Freud nommait pour le dénoncer le « narcissisme des petites différences ») au fondement de toute profession véritable. La limitation : ce que nous avons tenté de donner à voir n’est, bien entendu, qu’une part minime quoique significative du travail engagé, qu’il conviendrait de poursuivre. Travail de qui ? s’interrogera-t-on peut-être. Dans la perspective que nous faisons nôtre ici, la réponse ne peut être que celle-ci : travail *tout ensemble* des professeurs, des formateurs, des chercheurs et autres « noosphériens ». De ce travail « décomplexé » relève notamment une structure didactique dont nous n’avons à peu près pas parlé dans ce qui précède mais dont on pourrait montrer qu’elle est née entre les mains de formateurs et de chercheurs comme une solution à un problème d’écologie didactique des AER : la notion de *parcours d'étude et de recherche*, ou PER [2]. D'un point de vue plus proche de celui du chercheur sans doute, il resterait à évoquer encore la manière dont les professeurs stagiaires s'emparent des apports de la formation pour les intégrer dans leurs praxéologies professionnelles et les faire vivre ainsi dans le système éducatif. Au-delà des quelques illustrations que nous avons pu fournir d'un tel phénomène – que l'on songe ici au travail de Sabine et de Julia évoqué au chapitre 5 de ce mémoire –, on disposerait pour cela d'une masse énorme d'archives réunies par l'équipe de formation, à l'instar des questions de la semaine ou des notes du séminaire, et sur une période de semblable durée, relatives au corpus B, dispositif de formation et d'évaluation évoqué dès le premier chapitre de ce mémoire. Il s'agirait là d'une autre recherche, prolongement naturel du travail qui s'achève en ce point.

[2] Voir Yves Chevallard, *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*, conférence plénière au 1er congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (Baeza, 27-30 octobre 2005). À paraître.

Bibliographie

Les sites Internet mentionnés dans ce mémoire étaient actifs à la date du 20 juin 2006.

Azoulay, É., & Avignant, J. (1991). *Mathématiques DEUG A 1*. Paris : McGraw-Hill.

Balaguer, B. (1999). *La leçon d'analyse au CAPES de mathématiques*. Paris : Ellipses.

Bell, E. T. (1950). *Les grands mathématiciens*. Paris : Payot.

Berthelot, R., & Salin, M.-H. (1993-1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, *53*, 39-56.

Biancamaria, P., *et al.* (1971). *Mathématique. Classe de quatrième*. Paris : Nathan (Collection Queysanne et Revuz).

Bourdieu, P. (2000). L'inconscient d'école. *Actes de la recherche en sciences sociales*, *135*, 3-5.

Brachet, F., & Dumarqué, J. (1934). *Arithmétique*. Paris : Delagrave.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Canguilhem, G. (1966). *Le normal et le pathologique*. Paris : PUF.

Carréga, J.-C. (1981). *Théorie des corps. La règle et le compas*. Paris : Hermann.

Cartan, A., & Cartan, E. (1934). *Arithmétique. Classes de 4^e et 3^e*. Paris : Armand Colin.

Chambadal, L. (1978). *Dictionnaire de mathématiques*. Paris : Hachette.

Chambadal, L., & Ovaert, J.-L. (1966). *Cours de mathématiques.* Tome I. *Notions fondamentales d'algèbre et d'analyse*. Paris : Gauthier-Villars.

Chapiron G., *et al.* (1996). *Mathématiques 6^e*. Paris : Hatier (Collection Triangle).

Chapiron, G., *et al.* (2001). *Mathématiques 5^e*. Paris : Hatier (Collection Triangle).

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2005). Didactique et formation des enseignants. In B. David (éd.), *Impulsions 4*, p. 215-231. Lyon : INRP.

Chevallard, Y. (2006). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. J. García, (eds), *Actes du 1er congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (Baeza, 27-30 octobre 2005)*. À paraître.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, *55*, 5-32.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, *59*, 43-76.

Chevallard, Y., & Jullien, M. (1989). *Sur l'enseignement des fractions au collège. Ingénierie, recherche, société*. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.

Choquet, G. (1964). *L'enseignement de la géométrie*. Paris : Hermann.

Comtet, L. (1970). *Analyse combinatoire*. Volume 2. Paris : PUF.

Corrieu, L., *et al.* (1997). *Mathématiques 5^e*. Paris : Delagrave.

Curel, P., *et al.* (1995). *Mathématiques 5^e^*. Paris : Hatier (Collection Alpha Math).

Deheuvels, P. (1986). *L'intégrale*. Paris : PUF.

Demnard, D., & Fourment, D. (1981). *Dictionnaire d'histoire de l'enseignement*. Paris : Jean-Pierre Delarge.

Desanti, J.-T. (1998). Mathématiques (Fondements des). In *Dictionnaire des mathématiques, fondements, probabilités, applications*, p. 380-397. Paris : Encyclopædia Universalis et Albin Michel.

Dhombres, J. (1998). Réels (Nombres). In *Dictionnaire des mathématiques, fondements, probabilités, applications*, p. 537-563. Paris : Encyclopædia Universalis et Albin Michel.

Diderot, D., & d'Alembert, J. (1751-1772). *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers par une société de gens de lettres*.
http://diderot.alembert.free.fr/

Dieudonné, J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (3^e^ éd. corrigée et augmentée, 1968). Paris : Hermann.

Dieudonné, J. (1987). *Pour l'honneur de l'esprit humain*. Paris : Hachette.

Durand, G. (1947). *Pour comprendre la trigonométrie*. Paris : Doin.

Euclide (v. 300 av. J.-C.). *Les Éléments.* Volume 1. Livres I à IV. Traduction française de Bernard Vitrac (1990). Paris : PUF.

Foulquié, P. (1971). *Dictionnaire de la langue pédagogique*. Paris : PUF.

Freudenthal, H. (1998). Notation mathématique. In *Dictionnaire des mathématiques. Fondements, probabilités, applications,* p. 431-432. Paris : Encyclopædia Universalis & Albin Michel.

Gal, J., & Marijon, A. (1929). *Les problèmes résolus par la méthode naïve. Barèmes, graphiques, formules*. Paris : Fernand Nathan.

Hilbert, D. (1899). *Les fondements de la géométrie.* Traduction française de Paul Rossier (1971). Paris : Dunod.

Hillion, A. (1986). *Les théories mathématiques des populations*. Paris : PUF.

Houzel, C. (1996). *Analyse mathématique. Cours et exercices*. Paris : Belin.

Houzel, C. (1997). Limite (Notion de). In *Dictionnaire des mathématiques. Algèbre, analyse, géométrie*, p. 622-624. Paris : Encyclopædia Universalis & Albin Michel.

Iverson, K. E. (1962). *A Programming Language*. New York : Wiley.

Jullien, V., *et al.* (1987). *Mathématiques 5^{e}. Nombres et formes*. Paris : Magnard.

Klein, F. (1872). *Le programme d'Erlangen. Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*. Traduction française de M. H. Padé (1974). Paris : Gauthier-Villars.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York : Oxford University Press.

Kuzniak, A. (2003). *Paradigmes et espaces de travail géométriques : développement d'un cadre théorique pour l'étude de l'enseignement et de la formation des enseignants en géométrie*. Habilitation à diriger des recherches, Université Denis Diderot Paris 7, Paris, France.

Lambre, T. (1998). *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES. II. Analyse*. Paris : Ellipses.

Lanoëlle, A., *et al.* (1997). *Dimathème 5^{e}*. Paris : Didier.

Lebesgue, H. (1975). *La mesure des grandeurs*. Paris : Albert Blanchard.

Lebossé, C., & Hémery, C. (1940). *Algèbre et géométrie. Classe de troisième. Troisième année des E.P.S. et des Cours complémentaires*. Paris : Fernand Nathan.

Lelièvre, C., & Nique, C. (1995). *L'école des présidents : de Charles de Gaulle à François Mitterrand*. Paris : Odile Jacob.

Lelong-Ferrand, J. (1964). *Les notions de mathématiques de base dans l'enseignement du second degré*. Paris : Armand Colin.

Lelong-Ferrand, J., & Arnaudiès, J.-M. (1977). *Cours de mathématiques*. Paris : Dunod.

Lenfant, A. (2002). *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires*. Thèse de doctorat, Université Paris 7, Paris, France.

Lloyd, G. (1996). Observation et recherche. In J. Brunschwig, & G. Lloyd (eds), *Le savoir grec : dictionnaire critique*, p. 250-275. Paris : Flammarion.

Macherey, P. (1993). De Canguilhem à Canguilhem en passant par Foucault. In E. Balibar, M. Cardot, F. Duroux, M. Fichant, D. Lecourt, & J. Roubaud (eds), *Georges Canguilhem, philosophe, historien des sciences*, p. 286-294. Paris : Albin Michel. http://stl.recherche.univ-lille3.fr/sitespersonnels/macherey/machereybiblio49.html

Malaval, J., (dir.). (1989). *Maths 5^e^*. Paris : Nathan (Collection Transmath).

Malaval, J., *et al.* (1995). *Maths 5^e^*. Paris : Nathan (Collection Transmath).

Malaval, J., *et al.* (2001). *Math 5^e^. Programme 1997*. Paris : Nathan (Collection Transmath).

Marijon, A. & Péquignot, A. (1928). *Arithmétique du Brevet élémentaire avec des compléments pour le Brevet supérieur*. Paris : Hatier.

Ministère de l'Éducation nationale (1985). *Collèges. Programmes et instructions.* Paris : CNDP.

Ministère de l'Éducation nationale (1998). *Enseigner au collège. Mathématiques. Programmes et accompagnement*. Paris : CNDP.
http://www.cndp.fr/archivage/valid/54412/54412-9698-14925.pdf

Ministère de l'Éducation nationale (2000). *Documents d'accompagnement des programmes. Mathématiques. Classe de seconde*. Paris : CNDP.
http://www.cndp.fr/archivage/valid/14963/14963-8208-9261.pdf

Ministère de l'Éducation nationale (2000). *Mise en œuvre des Travaux Personnels Encadrés à la rentrée 2000*. Paris : CNDP.
http://www.cndp.fr/secondaire/tpe/pdf/tper2000.pdf

Ministère de l'Éducation nationale (2001). Programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. *BOEN, HS2*. Paris : CNDP.
ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2001/hs2/mathematiques.pdf

Ministère de l'Éducation nationale (2003). Programme de mathématiques de la classe de seconde de la série technique de la musique et de la danse. *BOEN 28*. Paris : CNDP.
ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2003/28/maths1.pdf

Ministère de l'Éducation nationale (2006). *Documents d'accompagnement des programmes. Mathématiques. Cycle terminal de la série littéraire.* Paris : CNDP.
http://www.cndp.fr/archivage/valid/73366/73366-12310-15608.pdf

Misset, L., *et al.* (2000). *Maths Seconde*. Paris : Hachette (Collection Déclic).

Monier, J.-M. (1991). *Algèbre 1. Algèbre générale*. Paris : Dunod.

Moreux, Th. (1931). *Pour comprendre l'Arithmétique*. Paris : Doin.

Pène, N., & Depresle, P. (2001). *Math 5^e^*. Paris : Belin (Collection Nouveau décimale).

Pène, N., *et al.* (1995). *Math 5^e^*. Paris : Belin.

Perrin, D. (2005). *Mathématiques d'école. Nombres, mesures et géométrie.* Paris : Cassini.

Reinhardt, F., & Soeder, H. (1997). *Atlas des mathématiques*. Paris : Librairie Générale Française.

Rivaud, J. (1963). *Exercices d'analyse*, tome 1. Paris : Vuibert.

Rogalski, M., *et al.* (2001). *Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie*. Paris : Ellipses.

Russell, B. (1897). *An Essay on the Foundations of Geometry* (1956). New York : Dover.

Serra, É., (dir.) (2001). *Math 5^{e}. Mathématiques*. Paris : Bordas.

Siegel, S. (1956). *Non-parametric Statistics: For the Behavioral Sciences*. Tokyo : McGraw-Hill.

Théron, P., *et al.* (1969). *Mathématiques. Classe de 4^{e}*. Paris : Bordas (Collection Cossart et Théron).

Verdier, N. (1995). Danse avec les chiffres. *Tangente*, *42*, 4-7.

Wattiaux, L., *et al.* (1968). Mathématiques 4^{e}. Paris : Hachette (Cours Brédif).

Wozniak, F. (2000). *Les mathématiques du repérage dans la scolarité obligatoire*. DEA, Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France.

Wozniak, F. (2005). *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France.