École normale supérieure de Lyon
Unité de mathématiques pures et appliquées

THÈSE

en vue d'obtenir le grade de docteur de l'École normale supérieure de Lyon spécialité mathématiques, école doctorale de mathématiques et informatique fondamentales ; présentée et soutenue publiquement par

Benoît Kloeckner

le 1er décembre 2006

Géométrie des bords : compactifications différentiables et remplissages holomorphes

Thèse encadrée par	M. Abdelghani Zeghib	
soutenue après avis de	M. Marc Bourdon	
	M. Dominique Cerveau	
	M. Marc Herzlich	
devant la commission d'examen formée de		
	M. Marc Bourdon	*rapporteur*
	M. Dominique Cerveau	*rapporteur*
	M. Étienne Ghys	*membre*
	M. Marc Herzlich	*rapporteur*
	M. Pierre Pansu	*président*
	M. Abdelghani Zeghib	*directeur*

Numéro d'ordre : 385 *Numéro attribué par la bibliothèque : 06ENSL0 385*

À la mémoire de
Grand-père

Remerciements

Mes premiers mots sont pour Ghani. Si pendant ces trois ans j'ai pu prendre du plaisir à apprendre et à faire des mathématiques, c'est en grande partie grâce aux belles questions qu'il a su me proposer. Mes doutes et mes difficultés n'ont jamais entamé l'enthousiasme inoxydable avec lequel il m'a aidé à les surmonter.

En acceptant de relire ce mémoire, Marc Bourdon, Dominique Cerveau et Marc Herzlich m'ont fait un grand honneur. Leurs exposés, conseils et remarques m'ont souvent été précieux, et grâce à eux le texte a été débarrassé d'un grand nombre d'imprécisions et de maladresses.

Rendre compte de mes travaux à des mathématiciens tels qu'Étienne Ghys et Pierre Pansu est à la fois un plaisir et un défi. Tous deux font de très belles mathématiques et ont à cœur de les communiquer à une large audience ; j'aimerais marcher dans leurs traces.

C'est au contact des mathématiciens qu'on apprend le mieux les mathématiques. À l'UMPA, ce contact est exceptionnel : il suffit de se promener dans les couloirs ou de prendre un café pour découvrir un beau théorème ou une chouette conjecture. Bruno, toujours prêt à écouter un problème et à y réfléchir ; Étienne, qui sait rendre accessible des mathématiques subtiles ; Jean-Claude, qui partage volontiers sa culture encyclopédique ; Jean-Yves, qui ne lâche pas une question sans l'avoir résolue : tous, en me consacrant leur temps et leur attention, m'ont aidé à progresser. Par leurs questions et leurs réponses, Alexey, Emmanuel, Thierry, Yann et bien d'autres m'ont également beaucoup appris. Édouard, Pierre, Patrick, et Maxime ont souvent prêté une oreille attentive à mes élucubrations, j'espère qu'il ne retiendront pas les plus grossières. J'ai également profité de la rencontre de nombreuses personnes parmi lesquelles Vincent Borelli, Jérôme Germoni, Stéphane Lamy, Alberto Verjovski et, de façon epistolaire, Pierre de la Harpe, Marco Brunella et Laurent Siebenmann. Je dois aussi exprimer ma reconnaissance à Serge Cantat : depuis qu'il a encadré mon stage de maîtrise à Rennes, j'ai eu de nombreuses occasions de bénéficier de ses compétences et de sa disponibilité.

Il me reste à témoigner ma gratitude à tout ceux qui m'ont accompagné ces dernières années, en particulier mes parents, mon frère et ma sœur ; Gwendal mon éternel cothurne ; et enfin Myriam.

Introduction

Le fil rouge de ce mémoire est l'interaction entre le bord et l'intérieur d'une variété portant une structure géométrique. Les deux parties correspondent à l'étude de deux situations.

La première concerne les compactifications, qu'on entendra toujours « à bord ». Le principe est d'ajouter à une variété ouverte un horizon afin d'obtenir une variété compacte à bord. C'est donc la structure donnée *a priori* sur la variété ouverte qui va permettre de définir la structure du bord et le recollement. À l'intérieur de ce cadre très général on se concentre sur un type de structure en particulier, à savoir les variétés riemanniennes et plus spécialement les espaces symétriques. Les métriques considérées sont déjà complètes, et on ne peut pas espérer les prolonger. On va alors demander une condition d'équivariance : l'action des isométries doit se prolonger de façon régulière (par exemple lisse ou analytique réelle) sur tout le compactifié pour que celui-ci soit qualifié de différentiable.

Dans la seconde partie on procède en sens inverse en s'intéressant aux remplissages. Cette fois, on part d'une structure sur une variété fermée et on cherche à la remplir pour en faire le bord d'une variété compacte. Encore une fois, on s'attache à une structure particulière : le bord porte une dynamique CR et l'intérieur une structure complexe. La structure CR est la structure géométrique naturellement portée par les hypersurfaces réelles de variétés complexes ; l'hypothèse de « dynamique CR », signifie que le bord possède un groupe d'automorphismes riche, c'est-à-dire non compact (condition qui en fait détermine la structure CR). On demande alors que le remplissage soit équivariant relativement à un gros groupe, c'est-à-dire qu'au moins un sous-groupe d'automorphismes *fermé* et *non compact* se prolonge à l'intérieur du remplissage.

Le point de jonction de ces deux parties est l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$. Tout d'abord, c'est un espace symétrique qui possède une compactification différentiable bien connue. Un modèle en est donné par la boule unité de $\mathbb{C}^n$, dont la métrique de Kobayashi coïncide avec la métrique hyperbolique. Dans ce modèle la sphère unité munie de sa structure CR s'identifie au bord de $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$. On désigne par boule standard la variété complexe abstraite isomorphe à la boule unité et on définit de même la sphère standard.

Le groupe des isométries de $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ coïncide avec celui des automorphismes complexes de la boule standard et avec celui des automorphismes CR de la sphère standard. On peut interpréter ceci en disant qu'à rebours, la boule standard fermée est un remplissage holomorphe équivariant de la sphère standard. Ce remplissage se fait du côté convexe de la sphère, et dans la seconde partie on en étudie les remplissages concaves.

Pour éviter la technicité, on donne dans cette introduction des versions parfois informelles des théorèmes ; pour les énoncés précis on renvoie au corps du texte.

Présentation de la première partie

Comme point de départ, considérons le plan hyperbolique réel $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$. Il en existe deux modèles classiques : le disque de Klein et celui de Poincaré ; chacun correspond à une construction du plan hyperbolique. Décrivons-les brièvement.

Si l'on fixe sur $\mathbb{R}^3$ une métrique lorentzienne Q, le niveau $\{Q = -1\}$ est un hyperboloïde à deux nappes sur lesquelles Q induit une métrique riemannienne. En projectivant $\mathbb{R}^3$, ces nappes sont projetées sur un disque de $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ qu'on munit du poussé en avant de la métrique induite par Q: c'est le disque de Klein. On voit dans ce modèle que le groupe des isométries est $\mathrm{SO}_0(1,2) \approx \mathrm{PSL}(2;\mathbb{R})$.

Indépendamment, on peut fixer sur le disque unité de $\mathbb{C}$ la métrique riemannienne

$$ds^2 = \frac{4ds_0^2}{\left(1 - |z|^2\right)^2}$$

où z est le point courant du disque et ds_0 désigne la métrique euclidienne. C'est le disque de Poincaré.

Ces deux modèles décrivent le même espace, c'est-à-dire qu'ils sont isométriquement conjugués. De plus, ils sont tous deux naturellement plongés dans un espace plus grand sur lequel l'action de leurs isométries se prolonge : $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ pour le disque de Klein, $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ pour celui de Poincaré. Cette action reste analytique ; en particulier elle se prolonge à la frontière de chacun de ces disques : on obtient ainsi deux compactifications différentiables de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$. Elles sont topologiquement conjuguées, et coïncident avec la compactification (topologique) de Hadamard. Dans cette dernière, les points à l'infini sont définis comme les classes d'asymptotie de rayons géodésiques unitaires : deux rayons sont asymptotes s'ils restent à distance bornée l'un de l'autre.

Fait saillant, ces deux compactifications sont différentes au niveau différentiable : il n'existe pas de difféomorphisme entre les adhérences des disques de Klein et de Poincaré qui conjugue les actions de $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R})$. On appelle compactification projective l'adhérence du disque de Klein et compactification conforme celle du disque de Poincaré.

En fait, il existe une infinité dénombrable de compactifications analytiques réelles de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ deux à deux non conjuguées (Schneider [51], Stowe [58] et Mitsumatsu [44]). On peut par exemple les paramétrer par l'ordre de tangence des géodésiques issues d'un même point du bord : elles ne sont pas tangentes dans la compactification projective, sont tangentes à l'ordre 1 dans la compactification conforme, et à l'ordre 3/2, 2, 5/2, etc. dans les suivantes. Toutes ces compactifications sont encore topologiquement conjuguées.

Après un premier chapitre qui formalise quelques définitions et passe rapidement en revue la question de l'unicité de la compactification d'une variété différentielle sans structure géométrique particulière, on aborde dans le deuxième chapitre la généralisation de ce résultat.

D'abord, on montre que l'unicité topologique perdure en toute dimension.

Théorème A — *Soit α une action continue de $G = \mathrm{SO}_0(1,n)$ sur la boule fermée de dimension n. Si la restriction de α à la boule ouverte est topologiquement conjuguée à l'action par isométries de G sur $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$, alors α est topologiquement conjuguée à la compactification de Hadamard (page 19).*

Ensuite on aborde les compactifications différentiables. La classification analytique dans le cas de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ découle de l'étude des actions analytiques de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ sur les surfaces ; un argument géométrique permet de l'étendre en dimension supérieure et en régularité plus basse.

Théorème B — *Les compactifications analytiques de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ forment une famille dénombrable, paramétrée par l'ordre de tangence des géodésiques asymptotes. On dispose de cartes explicites pour les décrire (page 26).*

Théorème C — *Les compactifications de régularité $\mathscr{C}^k$ de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$, $n \geqslant 3$ sont classées par certains reparamétrages de la demi-droite réelle, et on peut les décrire dans des cartes explicites (page 28).*

Une fois qu'on connaît la liste des compactifications différentiables de l'espace hyperbolique réel, il est naturel de se demander si les deux plus usuelles, la projective et la conforme, peuvent posséder une particularité qui les distingue des autres. On peut donner plusieurs sens à cette question. Par exemple, on sait que comme leur nom l'indique, elles portent des structures géométriques ; sont-elles les seules ? Dans le troisième chapitre, on répond à une autre version de la question.

Théorème D — *Parmi toutes les compactifications $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$, seules la projective et la conforme sont algébriques. De plus, elles sont analytiquement algébriques (page 38).*

Ici, « algébrique » a le sens suivant. Une action α d'un groupe algébrique réel G sur une variété M est dite *$\mathscr{C}^k$-algébrique* s'il existe une représentation projective $\rho : G \to \mathrm{PGL}(n;\mathbb{R})$ et un plongement $\mathscr{C}^k$ de M dans $\mathrm{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ qui est équivariant par rapport à α et ρ.

Pour obtenir ce résultat, on se ramène à la dimension 2 puis on détermine toutes les actions algébriques de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ sur les surfaces.

Théorème E — *La liste de toutes les actions algébriques différentiables de* $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ *sur les surfaces est formée d'un nombre fini de familles finies ou dénombrables descriptibles explicitement (page 38).*

Le chapitre quatre présente les espaces symétriques à courbure négative et ce qu'il faut de théorie des immeubles pour les comprendre.

Arrivé à ce point, on a en effet étudié assez largement les compactifications différentielles de l'espace hyperbolique réel. Celui-ci appartient à la famille des espaces symétriques (c'est-à-dire que toutes les symétries centrales sont des isométries) à courbure négative. Il est dit « de rang 1 » car on ne peut y plonger de façon isométrique et totalement géodésique les espaces euclidiens $\mathbb{R}^k$ pour $k > 1$ (on appelle *plat* un tel plongement). Il reste des espaces de rang 1 à étudier, mais il est vraisemblable que la situation y soit en fait plus simple. L'étape suivante va donc concerner les espaces de rang supérieur, dans lesquels on peut trouver des plats.

Les espaces symétriques à courbure négative de rang 1 sont connus, à l'instar de l'espace hyperbolique réel, pour posséder (au moins) une compactification différentiable. De plus, ils induisent sur le bord des structures géométriques qui sont les espaces modèles des géométries dites paraboliques (géométries conforme et CR par exemple). Une conséquence intéressante des théorèmes B et C est que dans toutes les compactifications de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$, le bord est le même : c'est le recollement avec l'intérieur qui change.

Une motivation particulière pour étudier les compactifications différentiables des espaces de rang supérieur serait d'en déduire de nouvelles structures géométriques potentiellement intéressantes. Toutefois, on peut montrer que la structure d'immeuble sur le bord est incompatible avec l'existence d'une compactification différentiable dont la topologie est celle de la compactification de Hadamard.

Théorème F — *Aucun espace symétrique à courbure négative, de rang supérieur et non euclidien n'admet de compactification de Hadamard différentiable (page 94).*

Il existe des compactifications presque différentiables de ces espaces, les compactifications de Satake. Si elles présentent l'avantage de venir avec des modèles, le compactifié est alors une variété à bord et à coins. De plus la topologie de ces compactifications, en rang supérieur, n'est plus celle de la compactification de Hadamard. On peut se demander si encore d'autres topologies sont possibles. De plus, dans les exemples simples on semble constater une certaine dualité entre la structure d'une compactification de Satake et celle de l'immeuble à l'infini ; peut-on généraliser et formaliser ce constat ?

Présentation de la seconde partie

Dans cette partie le point du vue s'inverse et on cherche à remplir une structure géométrique, en l'occurrence une dynamique CR.

La question du remplissage de structure est loin d'être neuve. Les cas du remplissage d'une variété CR par une variété complexe et celui d'une variété de contact par une variété symplectique sont, par exemple, très étudiés. Ici c'est la condition d'équivariance qui nous intéresse particulièrement.

En ouverture, on donne dans le chapitre six les définitions des principaux objets — variétés CR, variétés complexes à bord — et certaines de leur propriétés qu'on utilisera par la suite. Citons en particulier le théorème de Webster-Schoen, selon lequel la seule variété CR strictement pseudoconvexe et compacte dont le groupe d'automorphismes est non compact est la sphère standard. On voit là que, sous l'hypothèse de stricte pseudoconvexité, notre condition dynamique nous limite à un objet particulier. On trouve ainsi dans ce chapitre une étude en dimension 2 de la sphère standard et de ses automorphismes vus dans leur cadre naturel, $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$.

Dans le chapitre sept, on rappelle quelques notions de géométrie complexe utiles par la suite, on définit les surfaces rationnelles et on en étudie plus en détail une famille importante, les surfaces de Hirzebruch.

Enfin, dans le chapitre huit on aborde la question des remplissages holomorphes, concaves et équivariants de la sphère standard. On n'aborde que la dimension 2 ; en dimension supérieure, même si des résultats partiels sont susceptibles de persister, la situation est sans doute beaucoup plus intriquée.

Il est facile de construire des exemples. Une transformation hyperbolique ou parabolique ϕ de la sphère unité de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ se prolonge en un biholomorphisme à tout $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. On peut priver ce dernier de la boule unité puis éclater des points fixes ou périodiques de ϕ loin du bord (éventuellement en rééclatant successivement). On obtient alors une surface rationnelle collée du côté concave de la sphère et sur laquelle agit un groupe non compact. On appelle ces exemples *éclatements standards de* $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B$. On obtient même un champ de vecteurs holomorphe : on a fait en sorte que l'action d'un élément non elliptique de $\mathrm{SU}(1,2)$ se prolonge à la surface, mais en fait il partage ses points fixes dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ avec au moins un groupe à un paramètre.

Théorème G — *Les remplissages concaves de la sphère standard S^3, équivariants relativement à un groupe fermé non compact, sont tous des éclatements standard de* $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B$ *(page 134).*

Au vu du théorème de Webster-Schoen, on peut réinterpréter ce résultat. Ainsi, il entraîne que la construction qu'on vient de décrire est la seule façon d'obtenir des surfaces complexes à bord strictement pseudoconcave dont le groupe d'automorphismes induit sur le bord un groupe fermé non compact d'automorphismes CR. La différence avec la formulation précédente est qu'on n'impose pas la structure au bord *a priori* : le théorème de Webster-Schoen et l'hypothèse de non-compacité de l'action la déterminent automatiquement. On peut encore reformuler ceci : la construction précédente est la seule façon d'obtenir une surface complexe dont assez d'automorphismes préservent une sphère standard qui borde une boule pour y induire un groupe fermé non compact d'automorphismes CR. En effet, l'hypothèse dynamique permet facilement de remplir le côté convexe du bord.

On termine le chapitre par des exemples singuliers construit à partir des surfaces de Hirzebruch, où le bord est la sphère standard à une unique singularité près. Ce n'est pas seulement une singularité de la structure CR : en ce point le bord n'est pas lisse.

En annexe on aborde un problème *a priori* déconnecté de la géométrie complexe, mais dont la conclusion est nécessaire pour le chapitre huit. Il s'agit d'étudier les sous-groupes d'isométries purement elliptiques dans un espace symétrique M à courbure négative. Un sous groupe F de son groupe d'isométries G est dit purement elliptique si tous ses éléments possèdent un point fixe dans M. On peut se demander si les éléments d'un tel groupe possèdent un point fixe commun ; c'est le cas dans $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ et $\mathbb{R}^{n-1}$ sous la condition $n < 5$. Toutefois, un exemple de Waterman [60] montre que c'est faux si $n \geqslant 5$. L'intérêt de ce phénomène est de comprendre les groupes non compacts de $\mathrm{SU}(1,2)$. S'ils contiennent une transformation non elliptique (la suite de ses itérés sort alors de tout compact), la non-compacité de F est traduite par un seul élément. L'exemple de Waterman montre qu'il ne faut pas tenir pour acquise l'existence dans un groupe non relativement compact d'un tel élément. C'est le rôle du résultat qu'on obtient dans cette partie.

Théorème H — *Un sous-groupe fermé purement elliptique d'isométries d'un espace symétrique à courbure négative est compact (page 145).*

Première partie

Compactifications différentiables des espaces symétriques

Chapitre I

Compactifications différentiables

> Je ne vibrais que pour le concret. Disséquer les planètes, observer les grenouilles au télescope, découvrir de chouettes nouvelles maladies, c'était ma vocation.
>
> Lewis Trondheim,
> *Vacances de printemps*

Les compactifications différentiables sont le fil conducteur de ce mémoire. Le but de ce chapitre est d'en motiver, énoncer et illustrer la définition, d'abord pour une variété différentielle « nue », ensuite pour une variété munie d'une structure géométrique.

1 Compactification des variétés

1.1 Définition et motivation

Le principe général d'une compactification est de plonger un objet non compact dans un objet compact pour « matérialiser son horizon » : on appelle en général les points ajoutés dans l'opération « points à l'infini ». Bien sûr, on ne souhaite pas ajouter trop de points : les points à l'infini doivent être adhérents à la variété de départ. La définition suivante traduit ces exigences.

Définition 1 (compactification différentiable) — *Soit M une variété différentielle ouverte. On appelle* compactification différentiable *de M la donnée d'une variété différentielle compacte (éventuellement à bord) N et d'un plongement $\phi : M \to N$ tel que $\phi(M)$ soit dense dans N.*

On peut préciser en parlant de compactification $\mathscr{C}^k$ si tous les objets (M, N et ϕ) sont de classe $\mathscr{C}^k$; on prendra toujours k entier ou ∞ ou ω, $\mathscr{C}^\omega$

signifiant « analytique réel ». On dit qu'une variété est *ouverte* si elle est sans bord et non compacte, *fermée* si elle est compacte sans bord.

Cette définition est très générale, et une variété peut posséder des compactifications de forme très différentes. Ainsi une boule ouverte peut être compactifiée en boule fermée, en sphère, en espace projectif. Toutefois, elle peut être encore généralisée en permettant que le bord de N présente des coins, comme dans la compactification de Satake d'un espace symétrique (voir par exemple [6]).

Dans ce mémoire, nous ne nous intéresserons qu'aux compactifications à bord. En effet, notre but est d'étudier les compactifications de structures géométriques, dont on peut espérer qu'elles induisent des structures spécifiques sur le bord. Allons plus loin : nous voulons même nous limiter aux compactifications qui présentent « le plus de bord possible ». À ce titre, la compactification d'un anneau ouvert qui consiste à ajouter un cercle à un bout et un point à l'autre pour obtenir un disque fermé n'est pas satisfaisante, l'un des bouts de l'anneau étant effacé (figure 1).

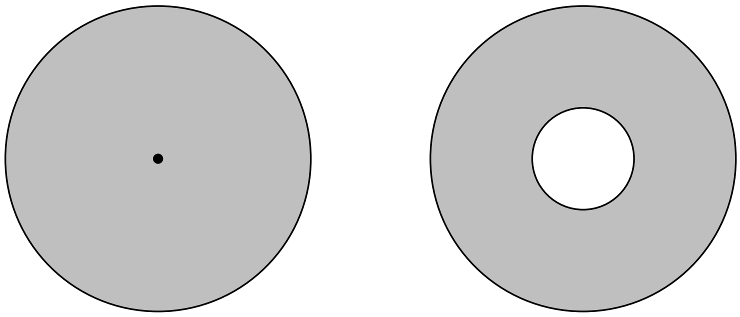

FIGURE 1 – *Deux compactifications de l'anneau*

DÉFINITION 2 (COMPACTIFICATION ÉTENDUE) — *Soit M une variété différentielle. Une compactification différentiable (N, ϕ) de M est dite* étendue *si $\phi(M)$ est exactement l'intérieur de N, c'est-à-dire si $N \setminus \phi(M) = \partial N$.*

Les questions de l'existence et de l'unicité de compactifications étendues sont évidemment très naturelles, mais assez complexes. On s'intéressera ici à celle de l'unicité (en ce qui concerne celle de l'existence voir par exemple [7], [55], [25]), car par la suite on s'intéressera à des variétés pour lesquelles l'existence ne fait pas de doute (essentiellement la boule ouverte). Pour y donner un sens il convient de définir sous quelle condition on identifie deux compactifications.

DÉFINITION 3 (CONJUGAISON) — *On dit de deux compactifications différentiables (N_1, ϕ_1) et (N_2, ϕ_2) d'une variété M qu'elle sont $\mathscr{C}^k$* conjuguées *s'il existe des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes $f : M \to M$ et $g : N_1 \to N_2$ tels que*

$$g \circ \phi_1 = \phi_2 \circ f.$$

Évidemment, on suppose que les compactifications sont au moins $\mathscr{C}^k$.

Donnons nous une variété lisse sans bord et non compacte, et supposons qu'elle admette deux compactifications différentiables étendues. Ces deux compactifications sont-elles nécessairement conjuguées ? La réponse à cette question est l'occasion d'un petit parcours à travers des avancées majeures des années 60 en topologie différentielle, pour lequel je dois remercier Laurent Siebenmann qui m'a fournit de nombreuses et précieuses indications.

1.2 Autour de l'unicité des compactifications

Le contre-exemple de Milnor

Notre point de départ est la question de l'unicité des compactifications différentiable étendues. Une autre façon de la présenter consiste à demander si deux variétés compactes à bord dont les intérieurs sont difféomorphes sont nécessairement difféomorphes elles-mêmes.

La réponse est négative. Le premier exemple a été donné par Milnor dans [41] où il démontre entre autres que les variétés à bord $L_{7,1} \times \bar{B}^5$ et $L_{7,2} \times \bar{B}^5$ ne sont pas difféomorphes, mais ont des intérieurs difféomorphes. Il montre également que leurs bords $L_{7,1} \times S^4$ et $L_{7,2} \times S^4$ sont h-cobordants mais pas difféomorphes.

Ici $L_{p,q}$ désigne l'espace lenticulaire de type (p, q), $\bar{B}^n$ la boule fermée et S^{n-1} la sphère qui la borde. Les définitions des espaces lenticulaires et du h-cobordisme sont rappelées ci-dessous.

Les espaces lenticulaires

Étant donnés deux entiers premiers entre eux p et q, on leur associe un *espace lenticulaire* de la façon suivante. Prenons une boule fermée $\bar{B}^3$ et un équateur sur son bord. Ce dernier divise le bord en deux hémisphères.

On aplatit maintenant la boule de façon à en faire une lentille dont les deux moitiés de bord, qu'on continue d'appeler hémisphères, forment un angle de $2\pi/p$ comme sur la figure 2. Ensuite, on recolle l'hémisphère supérieur sur l'hémisphère inférieur à l'aide de l'identification suivante. Un point a de l'hémisphère supérieur est identifié au point b obtenu en effectuant une rotation de q/p tours autour de l'axe de la lentille puis une projection verticale sur l'hémisphère inférieur. L'espace topologique obtenu est l'espace lenticulaire $L_{p,q}$.

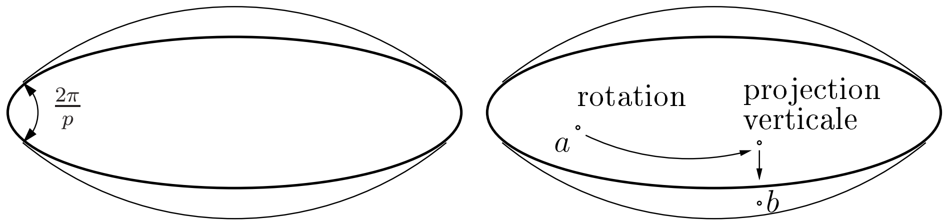

FIGURE 2 – *Construction d'un espace lenticulaire*

Un point x de l'équateur est ainsi identifié à $p-1$ autres points équatoriaux. En considérant des voisinages dans la lentille de chacun d'eux et en les recollant selon l'identification que l'on vient de décrire, on reconstitue un voisinage dans l'espace lenticulaire de la classe de x. Ce voisinage est composé de p parts de cylindre d'angle $2\pi/p$, et l'espace lenticulaire est naturellement muni d'une structure de variété lisse.

Notons que $L_{2,1}$ n'est autre que l'espace projectif $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$. Par ailleurs deux couples différents d'entiers peuvent mener à des espaces lenticulaires difféomorphes, par exemple $L_{7,2} \approx L_{7,3}$. Pour une illustration lumineuse de ce fait et de plus amples détails, on peut consulter le livre de Thurston [59].

Le h-cobordisme

On dit que deux variétés M_1 et M_2 sont *h-cobordantes* si leur union disjointe est le bord d'une variété compacte W admettant des rétractions par déformations sur M_1 et sur M_2. C'est une relation d'équivalence et on voit qu'il existe entre deux variétés h-cobordantes une équivalence d'homotopie. On dit que le triplet (W, M_1, M_2) est un *h-cobordisme.*

Il est intéressant de noter que les bords de deux variétés compactes ayant des intérieurs difféomorphes sont toujours h-cobordants (voir par exemple [7] dans le cas de bords simplement connexes).

Restriction des ambitions

On pourrait être tenté de penser qu'en spécifiant le bord, on peut obtenir l'unicité. Plus précisément : deux variétés compactes dont les intérieurs et les bords sont difféomorphes sont-elles nécessairement difféomorphes ?

La réponse, encore une fois, est négative : Barden, Mazur et Stallings ont démontré qu'on peut trouver des variétés W et M telles que (W, M, M') (où M' est une copie de M) soit un h-cobordisme avec

$$\overset{\circ}{W} \approx M \times]0,1[, \quad W \not\approx M \times [0,1]$$

où $\overset{\circ}{W}$ désigne l'intérieur de W ; voir [43].

On peut alors, puisqu'on s'intéressera principalement à des compactifications de structures sur la boule ouverte, poser la question restreinte : une variété compacte à bord dont l'intérieur est difféomorphe à la boule ouverte est-elle nécessairement difféomorphe à la boule fermée?

Comme on va le voir sous peu, en grande dimension la réponse est connue mais le problème est loin d'être élémentaire.

Le théorème du h-cobordisme

Un des résultat majeurs des années 60 est le théorème du h-cobordisme, dû à Smale [57] (voir aussi [42]). Celui-ci affirme que si (W, M_1, M_2) est un h-cobordisme avec W simplement connexe et de dimension au moins 6, alors W est difféomorphe à $M_1 \times [0,1]$ et en particulier M_1 et M_2 sont difféomorphes.

Ce théorème permet en particulier de démontrer la conjecture de Poincaré généralisée en grande dimension [56] : une variété de dimension $n \geqslant 5$ fermée qui a les mêmes groupes d'homotopie que S^n est homéomorphe à S^n. Si n est 5 ou 6, on a alors un difféomorphisme. Par contre pour des dimensions plus grande il existe des structures exotiques sur la sphère, c'est-à-dire des variétés différentielles homéomorphes à S^n mais qui ne lui sont pas difféomorphes [40].

Une autre conséquence du théorème du h-cobordisme est la suivante : si W^n est une variété compacte contractile dont le bord est simplement connexe et si $n \geqslant 6$, alors W^n est difféomorphe à $\bar{B}^n$. Si $n = 5$, le résultat reste vrai si on suppose de plus que le bord est difféomorphe à S^4 ; si on suppose seulement le bord homéomorphe à S^4, W^5 est alors homéomorphe à $\bar{B}^5$. En particulier, $\bar{B}^n$ ($n \geqslant 6$) est la seule variété compacte dont l'intérieur est $\mathbb{R}^n$: en effet une telle variété est contractile et son bord est h-cobordant à S^{n-1} donc en a le type d'homotopie. Pour $n = 5$, on peut seulement affirmer qu'une telle variété est homéomorphe à $\bar{B}^5$ en vertu de ce qui précède et de la démonstration de la conjecture de Poincaré en dimension 4 par Freedman [20]. Pour $n = 4$, la question est encore largement ouverte.

Question 1 — *Existe-t-il une variété compacte à bord dont l'intérieur est difféomorphe à $\mathbb{R}^4$ et qui ne soit pas difféomorphe à $\bar{B}^4$?*

Browder, Levine et Livesay ont, toujours en se basant sur le théorème du h-cobordisme, donné dans [7] un résultat assez général : si W_1 et W_2 sont des variétés compactes à bords de dimension au moins 6 et si leurs intérieurs sont difféomorphes et leurs bords simplement connexes, alors W_1 et W_2 sont difféomorphes.

Enfin dans [15], Edwards montre l'unicité topologique en dimension 3 : deux variétés compactes à bord de dimension 3 dont les intérieurs sont homéomorphes sont elles-mêmes homéomorphes.

Notons que dans cette dimension, d'après les travaux de Moise [45], deux variétés sont homéomorphes si et seulement si elles sont difféomorphes.

2 Compactification des structures

Par la suite, nous nous intéresserons à des compactifications pour lesquelles la topologie différentielle est fixée, et où on cherche à prolonger à l'infini une structure géométrique. Ce terme est assez flou et peut désigner des choses différentes ((G, X) structures ou G-structures par exemple). En fait, on s'intéressera surtout à des actions de groupes de Lie, mais pour indication on montre comment définir naturellement des compactifications différentiables d'autres structures.

2.1 Les actions de groupes de Lie

Quelle que soit le type de structure géométrique dont on parle, il lui est toujours associé des automorphismes. On peut naturellement demander, pour qualifier de différentiable un éventuel compactifié, que l'action du groupe d'automorphismes s'y prolonge en une action différentiable.

Il faut bien sûr modérer la portée de ce propos : le groupe d'automorphisme peut être vide ou au contraire être trop gros (c'est-à-dire ne pas être un groupe de Lie) pour appliquer les principes de cette section.

Toutefois, dans le cas par exemple d'une variété ouverte munie d'une métrique riemannienne complète, on ne peut espérer prolonger cette métrique à un compactifié et le prolongement différentiable des isométries est une propriété très naturelle.

Définition 4 (compactification d'une action) — *Soit $\alpha : G \times M \to M$ une action $\mathscr{C}^k$ d'un groupe de Lie G sur une variété ouverte M. On appelle* compactification différentiable *de α la donnée d'une variété différentielle compacte (éventuellement à bord) N et d'un plongement $\mathscr{C}^k$, $\phi : M \hookrightarrow N$ tel que :*

(i) l'image de M par ϕ est dense dans N ;

(ii) le poussé en avant $\phi_*\alpha$ se prolonge à N tout entier en une action $\mathscr{C}^k$, qu'on note encore $\phi_*\alpha$.

Une compactification différentiable de α est encore dite étendue *si l'image de M est exactement l'intérieur de N.*

Notons qu'on demande que l'action $\phi_*\alpha$ de G et l'action correspondante de son algèbre de Lie soient $\mathscr{C}^k$.

DÉFINITION 5 (CONJUGAISON) — *Deux compactifications* ϕ_1, N_1 *et* ϕ_2, N_2 *de* α *sont dites* $\mathscr{C}^k$*-conjuguées s'il existe des* $\mathscr{C}^k$*-difféomorphismes* $s : M \to M$ *et* $b : N_1 \to N_2$ *tels que*

(*i*) *on a la relation de conjugaison* $b\phi_1 = \phi_2 s$ *;*

(*ii*) *l'application* g *est équivariante : on a* $b \circ (\phi_{1*}\alpha(h)) = (\phi_{2*}\alpha(h)) \circ b$ *pour tout* h *dans* G.

Notons que si s et b réalisent une équivalence entre ϕ_1, N_1 et ϕ_2, N_2, alors les conditions (*i*) et (*ii*) impliquent l'équivariance de s.

Actions algébriques

Dans le cas où G est un groupe algébrique et M une variété algébrique, il est naturel de considérer les actions *régulières* de G sur M, c'est-à-dire telles que l'application $\alpha : G \times M \to M$ soit un morphisme de variétés algébriques. En particulier, étant donné une action régulière, on peut se demander si elle possède des compactifications elles aussi régulières.

Dans un esprit proche, introduisons la définition suivante.

DÉFINITION 6 (ACTION ALGÉBRIQUE) — *On considère un groupe algébrique réel ou complexe* G *et on note en conséquence* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Une action α *de* G *sur une variété (a priori quelconque)* M *est dite* $\mathscr{C}^k$-algébrique *(où* k *est un entier strictement positif,* ∞ *ou* ω*) s'il existe une représentation projective*

$$\rho : G \to \mathrm{PGL}(n; \mathbb{K})$$

et un plongement $\mathscr{C}^k$

$$\phi : M \hookrightarrow \mathrm{P}(\mathbb{R}^{n+1})$$

tels que pour tout élément $g \in G$ *:*

$$\phi \circ \alpha(g) = \rho(g) \circ \phi$$

Le résultat suivant [26] légitime cette définition ; notons toutefois que l'on s'intéressera essentiellement à un groupe algébrique réel, $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$, dans le chapitre III.

THÉORÈME 7 — *On se place sur le corps des nombres complexes. Si* G *est un groupe algébrique et* M *une variété normale quasi-projective, alors toute action régulière de* G *sur* M *est algébrique au sens précédent.*

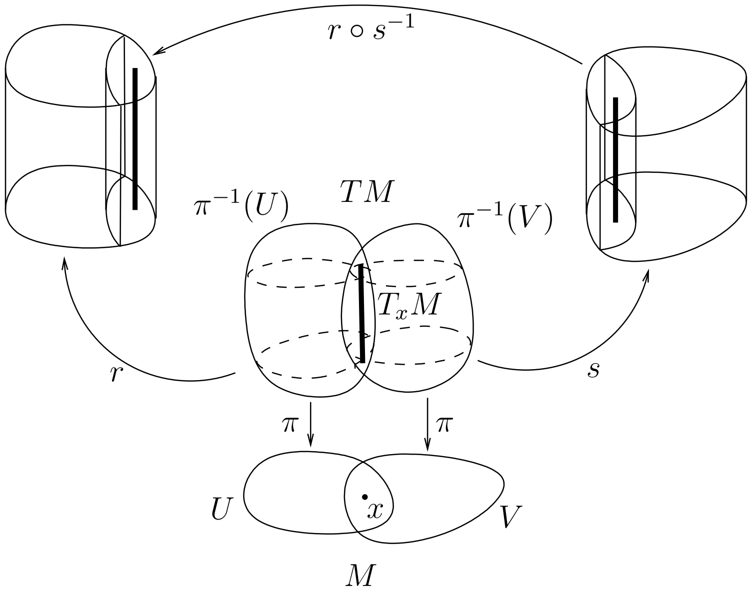

FIGURE 3 – *Changement de carte dans TM*

2.2 Les G-structures

Soit M une variété de dimension n et G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n)\mathbb{R}$.

Notons π la projection du fibré tangent sur M. On dispose sur TM d'un atlas $\mathscr{A}_T$ supposé maximal. Étant donné deux trivialisations locales dans cet atlas, $r : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ et $s : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^n$, par définition on a

$$\begin{array}{rcl} r \circ s^{-1} : U \cap V \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U \cap V \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) & \longmapsto & (x, g(x)v) \end{array} \tag{1}$$

où $g : U \cup V \to \mathrm{GL}(n)\mathbb{R}$ est une application lisse (voir figure 3).

On appelle *G-structure* sur M une réduction du fibré tangent TM au groupe G, c'est-à-dire un sous-atlas $\mathscr{G}_T$ de $\mathscr{A}_T$ tel que les trivialisations locales vérifient (1) avec g à valeurs dans G. On dit que $\mathscr{G}_T$ est un *G-atlas*.

Par exemple, l'existence sur M d'une structure riemannienne implique l'existence d'une $\mathrm{O}(n)$-structure.

DÉFINITION 8 (COMPACTIFICATION D'UNE G-STRUCTURE) — *Soit M une variété munie d'une G-structure $\mathscr{G}_T$. On appelle* compactification différentiable *de $(M, \mathscr{G}_T)$ la donnée d'une compactification différentiable $\phi : M \to N$ et d'une G-structure $\mathscr{G}'_T$ sur N compatible avec celle de M, c'est-à-dire telle que l'union des deux atlas $\mathscr{G}'_T$ et $\phi_*\mathscr{G}_T$ soit encore un G-atlas.*

2.3 Les (G,X)-structures

Soit X une variété et G un groupe de Lie agissant sur X. On suppose que le seul élément de G qui agisse trivialement sur un ouvert de X est l'élément neutre et que l'action est de classe au moins $\mathscr{C}^1$.

Soit maintenant une variété M de même dimension que X. On appelle (G, X)-*structure* sur M la donnée d'un atlas $\mathscr{G} = (f_i : U_i \to V_i)_i$ de M à valeur dans X (c'est-à-dire $U_i \subset M$ et $V_i \subset X$) tel que les changements de cartes, là où ils sont définis, soient des restrictions de l'action d'éléments de G. On dit également que M munie d'un tel atlas est une (G, X)-*variété*.

Soient M_1 et M_2 des variétés munies de (G, X)-structures $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$. Une application $f : M_1 \to M_2$ est un (G, X)-*morphisme* si, lue dans les cartes de $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$, elle est la restriction de l'action d'éléments de G. Ainsi, f est un (G, X)-morphisme si et seulement si c'est un difféomorphisme local et $f_*(\mathscr{G}_1) \cup \mathscr{G}_2$ est encore une (G, X)-structure sur M_2.

Définition 9 (compactification d'une (G, X)-structure) — *Soit M une (G, X)-variété ouverte. On appelle* compactification différentiable *de M la donnée d'une compactification différentiable $\phi : M \to N$ de M vue comme variété où de plus N est munie d'une (G, X)-structure et ϕ est un (G, X)-morphisme.*

3 La compactification géodésique

Nous allons maintenant rappeler comment on définit sur une certaine classe d'espaces riemanniens une compactification (topologique) naturelle, qu'on appelle compactification géodésique ou encore compactification de Hadamard.

Définition 10 (variété de Hadamard) — *Une* variété de Hadamard *ou* espace de Hadamard *est une variété riemannienne (M, g) complète, simplement connexe et de courbure négative (au sens large).*

On peut donner comme exemples $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ ou les perturbations de ce dernier suffisamment petites pour conserver le signe de la courbure. Notons également que le produit de deux variétés de Hadamard est encore une variété de Hadamard.

Les variétés de Hadamard sont topologiquement triviales d'après le résultat classique suivant.

Théorème 11 (Cartan-Hadamard) — *Les applications exponentielles des variétés de Hadamard sont des difféomorphismes globaux.*

Un espace de Hadamard est donc toujours difféomorphe à une boule, et deux de ses points sont toujours reliés par un unique segment géodésique.

Dans la suite on considère une variété M munie d'une métrique qui en fait une variété de Hadamard, et on note T^1M son fibré unitaire tangent.

DÉFINITION 12 (GÉODÉSIQUES ASYMPTOTES) — *Deux géodésiques unitaires (c'est à dire parcourue à vitesse* 1*)* γ *et* γ' *de* M *sont dites* asymptotes *si elles restent à distance bornée quand on les parcourt dans le sens positif :*

$$\sup_{t>0} d(\gamma(t), \gamma'(t)) < +\infty$$

Cette relation est une équivalence, et on note $\gamma(\infty)$ la classe d'une géodésique (éventuellement reparamétrée pour être unitaire). Le quotient de l'ensemble des géodésiques unitaires (ou, ce qui revient au même, de l'ensemble des rayons géodésiques) par cette relation d'équivalence est noté $M(\infty)$ et appelé *bord géodésique* ou *bord de Hadamard* de M. On le note aussi parfois ∂M.

Notons qu'on dit de deux géodésiques γ et γ' qu'elles sont *parallèles* si elles sont asymptotes et restent asymptotes quand on les parcourt toutes deux dans le sens négatif.

Étant donné un point $x \in M$ et un vecteur tangent $v \in T_xM$, on note γ_v la géodésique engendrée par v : $\gamma_v(t) = \exp_x(tv)$. On peut montrer que pour toute classe d'asymptotie de géodésiques $\gamma(\infty) \in M(\infty)$ et pour tout point $x \in M$, il existe un unique vecteur unitaire tangent à M en x, $v \in T_x^1M$, tel que γ_v soit asymptote à γ. Autrement dit, l'application dite de *projection visuelle* basée en x :

$$\begin{array}{rcl} \pi_x : T_x^1M & \longrightarrow & M(\infty) \\ v & \longmapsto & \gamma_v(\infty) \end{array}$$

est bijective.

De plus on peut montrer que la composée $\pi_x^{-1} \circ \pi_y$ est continue pour tout couple de points (x, y). On peut donc définir une topologie sur $M(\infty)$ en choisissant un point $x \in M$ et en poussant en avant la topologie de T_x^1M par π_x. La topologie obtenue ne dépendra alors pas du choix de x.

Pour définir la compactification géodésique de M, on va donner une topologie sur l'union disjointe $M \cup M(\infty)$. Cette topologie coïncidera sur $M(\infty)$ avec celle qu'on vient de définir et sur M avec sa topologie de variété différentielle.

Étant donné un point x et un ouvert $U_x \subset T_x^1M$, on appelle *cône* s'appuyant sur U_x l'ensemble suivant, illustré par la figure 4 :

$$C(U_x) = \{\gamma_v(t); v \in U_x \text{ et } t \in]0, +\infty]\} \subset M \cup M(\infty)$$

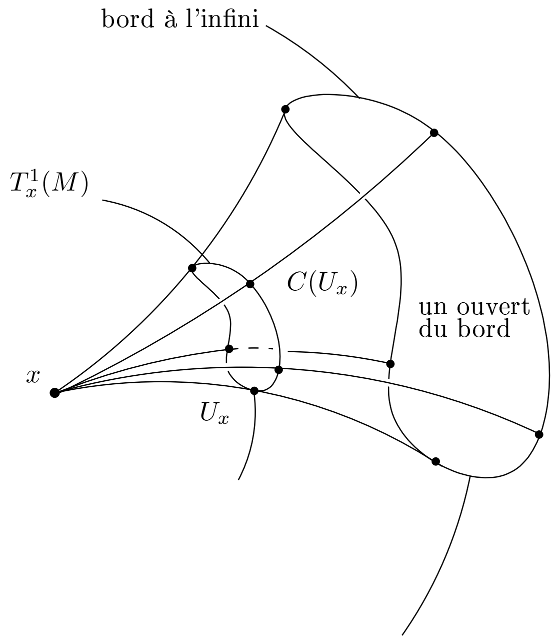

FIGURE 4 – *Un ouvert de base de la compactification de Hadamard*

DÉFINITION 13 — *On appelle* compactification géodésique *ou* compactification de Hadamard *d'une variété de Hadamard M l'union disjointe $\bar{M} = M \cup M(\infty)$ munie de la topologie engendrée par les cônes $C(U_x)$ où x parcourt M et U_x parcourt l'ensemble des ouverts de $T_x^1 M$.*

Cette compactification a toutes les qualités annoncées, et même plus.

PROPOSITION 14 — *L'inclusion $M \to \bar{M}$ est un homéomorphisme sur son image et $\bar{M}$ est une boule fermée topologique. La topologie induite par $\bar{M}$ sur $M(\infty)$ fait des projections visuelles des homéomorphismes. Enfin, le groupe des isométries de M agit continûment sur $\bar{M}$.*

Chapitre II

Compactifications de l'espace hyperbolique réel

– Voyons, Liberté ! Ceci est un triangle... un triangle... ?
– Comme il faut !
– Non ! regarde-le bien ! Si ce côté, ce côté et ce côté ont la même longueur, c'est un triangle... ?
– Conformiste !
– Non ! Un triangle dont les côtés sont égaux est un triangle...
– Ah ! Socialiste !

Quino,
Mafalda

Le contenu de ce chapitre est essentiellement une traduction de l'article [32].

1 Géométrie hyperbolique

Cette section est destinée à rappeler les propriétés essentielles de l'espace hyperbolique réel et de ses modèles classiques. Par la suite, elles seront utilisées pour en étudier les compactifications. Dans tout ce chapitre, on écrira souvent « espace hyperbolique » pour parler de l'espace hyperbolique réel.

1.1 Définition et modèles

Il est possible de donner différentes définitions de l'espace hyperbolique réel, nous allons utiliser celle qui se généralise le plus naturellement aux cas complexe et quaternionique (voir la section IV-1.5 et la deuxième partie).

Soit Q la métrique lorentzienne standard sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$, donnée par

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - y^2$$

La surface de niveau $\{Q = -1\}$ est un hyperboloïde à deux nappes. Notons-en H la nappe définie par $\{y > 0\}$. Alors Q induit sur H une métrique riemannienne de courbure sectionnelle constante égale à -1, on appelle *espace hyperbolique réel* de dimension n et on note $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ l'espace riemannien obtenu.

Cette construction permet de voir immédiatement l'espace hyperbolique comme un espace homogène : $\mathbb{R}\mathrm{H}^n = \mathrm{SO}_0(1,n)/\mathrm{SO}(n)$. En particulier, le groupe des isométries directes de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ est le *groupe orthochrone* $\mathrm{SO}_0(1,n)$.

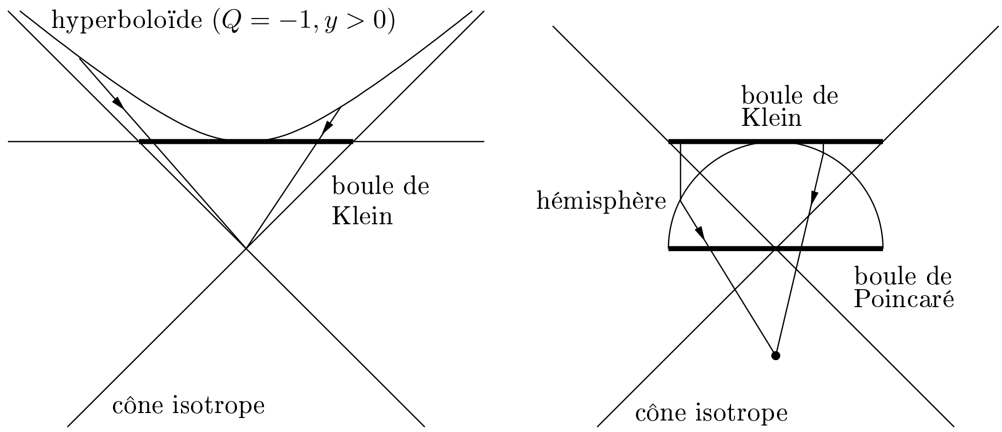

FIGURE 5 – *Construction des boules de Klein et de Poincaré*

La projectivation $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ et l'utilisation de la carte affine $\{y = 1\}$ permet de plonger différentiablement $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On appelle *Boule de Klein* ou *modèle projectif* l'image de ce plongement munie de la métrique poussée en avant. Dans ce modèle, les géodésiques sont les segments affines et les sous-variétés totalement géodésiques sont les sous-espaces affines.

Si l'on projette le modèle de Klein verticalement sur l'hémisphère supérieur de la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, on obtient le *modèle de l'hémisphère*.

Si l'on opère une projection stéréographique centrée en $s = (0, \ldots, 0, -1)$ du modèle de l'hémisphère sur l'hyperplan $\{y = 0\}$, on obtient un nouveau plongement différentiable de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, appelé *Boule de Poincaré* ou *modèle conforme* (voir la figure 5). Le groupe des isométries directes $\mathrm{SO}_0(1,n)$ de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ agit dans ce modèle en préservant la structure conforme standard de $\mathbb{R}^n$. Ainsi la métrique euclidienne sur la boule unité et la métrique hyperbolique sont conformément équivalentes. Dans ce modèle, les géodésiques sont les arcs de cercles de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux à la frontière et les sous-variétés

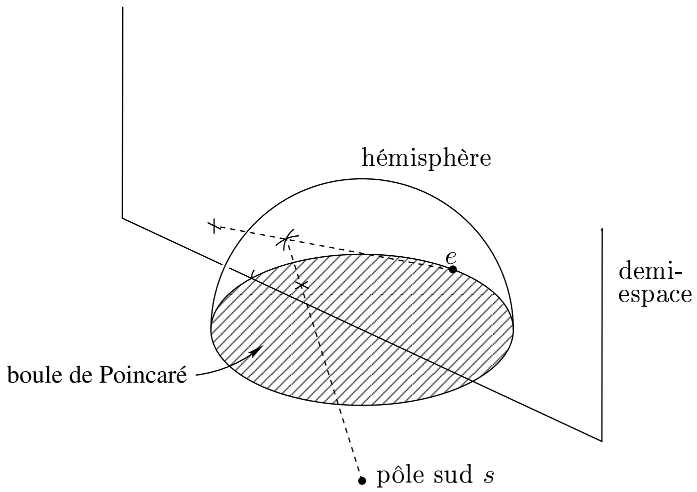

FIGURE 6 – *Projection de la boule de Poincaré sur le demi-espace*

totalement géodésiques de dimension k sont données par les k-sphères de $\mathbb{R}^n$ orthogonales au bord.

Si l'on opère une projection stéréographique centrée en $e = (0, \ldots, 0, 1, 0)$ du modèle de l'hémisphère sur le demi-espace $\{y > 0, x_n = 0\}$ (voir la figure 6), on obtient un nouveau plongement différentiable de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, appelé *demi-espace de Poincaré*. Dans ce modèle les géodésiques sont les demi-cercles orthogonaux à la frontière et les demi droites verticales, les sous-variétés totalement géodésiques sont les k-demi-plans verticaux et les k-demi-sphères euclidiennes orthogonales à la frontière.

Il faut noter que tous ces modèles sont plus que différentiables : ils sont analytiques réels.

1.2 Compactification de Hadamard

Les modèles sont évidemment tous conjugués via des changements de coordonnées analytique réels. De plus, les adhérences des boules de Klein et de Poincaré sont encore topologiquement[1] conjuguées. Mieux, elle sont conjuguées à la compactification de Hadamard $\overline{\mathbb{R}\mathrm{H}}^n$ de l'espace hyperbolique réel.

En particulier, deux rayons géodésiques sont asymptotes si et seulement s'ils ont la même extrémité dans la frontière de la boule de Poincaré (ou, ce qui revient au même, dans la frontière de la boule de Klein).

1. En fait la conjugaison est Hölder-$\frac{1}{2}$, on verra plus loin un argument montrant qu'elle ne peut pas être différentiable

L'adhérence du modèle du demi-espace est un demi-plan fermé, donc n'est pas conjugué à $\overline{\mathbb{R}\mathrm{H}}^n$. En fait il ne manque qu'un point pour que cela soit le cas : le compactifié d'Alexandroff du modèle du demi-espace est conjugué à $\overline{\mathbb{R}\mathrm{H}}^n$.

En particulier, deux rayons géodésiques sont asymptotes si et seulement s'ils ont la même extrémité dans la frontière du modèle du demi-espace ou si ce sont tous les deux des demi-droites verticales dirigés vers le haut.

1.3 Isométries

On distingue trois types d'éléments dans $\mathrm{SO}_0(1,n)$. Une isométrie est dite *elliptique* si elle admet un point fixe dans $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$. Une isométrie qui n'admet pas de point fixe dans $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ est dite *parabolique* si elle admet un unique point fixe dans le bord $\partial\mathbb{R}\mathrm{H}^n$, *hyperbolique* si elle en admet deux. Toute isométrie est soit elliptique, soit parabolique, soit hyperbolique. On définit de la même façon les éléments elliptiques, paraboliques et hyperboliques de l'algèbre de lie $\mathfrak{so}(1,n)$ de $\mathrm{SO}_0(1,n)$.

Une remarque de terminologie : parfois on refuse le qualificatif « elliptique » à l'élément neutre, et on utilise le terme loxodromique au lieu d'hyperbolique.

On peut également caractériser ces trois classes d'isométries par la *fonction de déplacement*

$$x \longmapsto d(x, g(x))$$

où g est une isométrie, x un point de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ et d la distance. Une isométrie est elliptique si sa fonction distance s'annule en au moins un point, parabolique si elle ne s'annule pas mais que son minimum est 0 et hyperbolique sinon. Dans ce cas elle atteint son minimum le long d'une géodésique.

1.4 Notations

Dans toute la suite du chapitre, on notera $G = \mathrm{SO}_0(1,n)$. L'action de G par isométrie sur $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$, identifié à la boule ouverte, sera notée $\mathtt{isom}$ ou $\mathtt{isom}^n$ si on veut préciser la dimension. Comme on considère les actions à changement de coordonnées près, l'identification choisie (boule de Klein ou de Poincaré par exemple) n'importe pas tant qu'on ne considère que la boule ouverte. Par $\mathtt{isom}(g)$ on désigne l'action d'un élément g de G. Les compactifications projective et conforme de $\mathtt{isom}$ seront notées respectivement $\mathtt{proj}$ et $\mathtt{conf}$. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et on note encore $\mathtt{isom}$, $\mathtt{proj}$ et $\mathtt{conf}$ les actions de $\mathfrak{g}$ dérivant des actions de G. On notera par exemple $\mathtt{proj}_X$ le champ de vecteur de la boule fermée obtenu par l'action projective d'un élément $X \in \mathfrak{g}$.

2 Unicité topologique de la compactification

On a vu que les compactifications `proj` et `conf` de `isom` étaient topologiquement conjuguées entre elles et à la compactification de Hadamard de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$. Plus généralement, l'objectif de cette section est de démontrer le résultat suivant.

Théorème A — *Soit α une action continue de G sur la boule fermée. Si la restriction de α à la boule ouverte est conjuguée à* `isom` *par un homéomorphisme $\psi : B^n \to B^n$, alors celui-ci se prolonge en un homéomorphisme $\widetilde{\psi} : \bar{B}^n \to \bar{B}^n$ qui conjugue α et la compactification de Hadamard.*

On utilisera dans ce chapitre la définition suivante d'une compactification différentiable. Le théorème précédent entraîne qu'elle est équivalente à celle qui a déjà été donnée, mais elle est plus pratique dans ce contexte particulier.

Définition 1 — *Une* compactification $\mathscr{C}^k$ *(où k est un entier, ∞ ou ω) de* `isom` *est un homéomorphisme Φ de la boule fermée qui induit un difféomorphisme $\mathscr{C}^k$ sur la boule ouverte et tel que l'action définie par*

$$\Phi^*\texttt{proj}(h) = \Phi^{-1} \circ \texttt{proj}(h) \circ \Phi \quad \forall h \in G$$

soit $\mathscr{C}^k$ sur la boule fermée.

Autrement dit, on ne distingue pas une compactification de `isom` de l'homéomorphisme qui la conjugue topologiquement à `proj`.

Précisons : étant donné un homéomorphisme Φ de la boule fermée comme dans la définition précédente, on construit un plongement de la boule ouverte dans la boule fermée par

$$\phi = \Phi^{-1} \circ i$$

où $i : B^n \hookrightarrow \bar{B}^n$ est un plongement qui correspond à l'action projective :

$$i \circ \texttt{isom}(h) = \texttt{proj}(h) \circ i \quad \forall h \in G$$

Le plongement ϕ est alors une compactification différentiable au sens du chapitre I.

Inversement, considérons une compactification $\mathscr{C}^k$, $\phi : B^n \hookrightarrow \bar{B}^n$ et notons α l'action de G induite sur $\bar{B}^n$. Sur B^n on a

$$\alpha(h) \circ \phi = \phi \circ \texttt{isom}(h) \quad \forall h \in G$$

Ainsi ϕ^{-1} conjugue topologiquement (et même $\mathscr{C}^k$) α à `isom` dans la boule ouverte. D'après le théorème A, il existe un homéomorphisme Φ de la boule fermée qui prolonge ϕ^{-1} (donc est $\mathscr{C}^k$ sur la boule ouverte) et conjugue α et `proj`. Le plongement $i = \Phi \circ \phi$ correspond alors à la compactification projective.

Le choix de `proj` comme modèle de référence est justifié par la forme de la classification (voir la section 3).

Lemme 2 — *Deux compactifications Φ_1, Φ_2 sont $\mathscr{C}^k$ conjuguées si et seulement si $\Phi_2^{-1}\Phi_1$ est un $\mathscr{C}^k$ difféomorphisme.*

Démonstration : la condition est clairement suffisante. Il suffit de considérer les difféomorphismes $b = \Phi_2^{-1}\Phi_1$ de $\bar{B}^n$ et $s = \mathrm{Id}$ de B^n pour retrouver la définition de la conjugaison du chapitre I.

Montrons qu'elle est nécessaire. Si Φ_1 et Φ_2 sont conjuguées, il existe par hypothèse des difféomorphismes s de B^n et b de $\bar{B}^n$ tels que $b\phi_1 = \phi_2 s$ et

$$b \circ (\phi_{1*}\mathtt{proj}(h)) = (\phi_{2*}\mathtt{proj}(h)) \circ b \quad \forall h \in G$$

(rappelons que pour $j = 1, 2$ on a $\phi_j = \Phi_j^{-1} \circ i$ où i est la compactification projective). Ceci entraîne l'équivariance de f :

$$f \circ \mathtt{proj}(h) = \mathtt{proj}(h) \circ f \quad \forall h \in G$$

Considérons deux points x, $y \in B^n$ où la boule est munie de la distance hyperbolique (poussée *via* i). Il existe une transformation hyperbolique $h \in G$ dont l'action projective envoie x sur y et telle que la géodésique passant par ces deux points est le lieu où la fonction de déplacement de h atteint son minimum. Comme f commute à $\mathtt{proj}(h)$, la distance de $f(x)$ à $f(y)$ est une valeur de la fonction de déplacement de h. Il s'ensuit que f dilate les distances, mais comme f^{-1} commute également avec $\mathtt{proj}(h)$, f doit être une isométrie. Mais f commute avec tous les éléments de G, donc doit être l'identité.

Alors $b = \Phi_2^{-1}\Phi_1$ sur la boule ouverte donc, par continuité, sur la boule fermée. Par hypothèse c'est un difféomorphisme. ∎

Démontrons maintenant le théorème A.

2.1 Première étape : l'action sur le bord

On va commencer par montrer que la restriction de α au bord de la boule fermée est topologiquement conjuguée à l'action de `proj` sur le bord de Hadamard de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$.

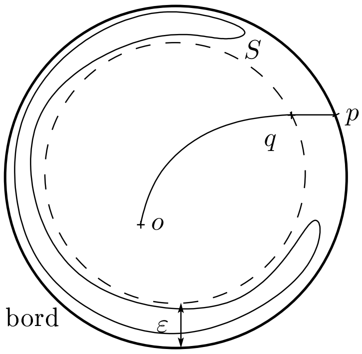

Figure 7 – *Un point du bord loin de la sphère serait relié à l'origine*

Cette dernière action est, à conjugaison topologique près, le seul espace homogène de G homéomorphe à S^{n-1} (voir la classification des actions transitives de groupes de Lie sur les sphères, par exemple exposée dans [21], partie II, section 2.6). Il suffit donc de montrer que α est transitive sur le bord.

Considérons le stabilisateur $\mathrm{SO}(n) \subset G$ d'un point de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$. Comme α est conjugué dans la boule ouverte à `isom`, les orbites de la boule ouverte sous l'action de $\alpha(\mathrm{SO}(n))$ sont : un point fixe o, et des sphères topologiques déconnectant chacune la boule ouverte en deux composantes, l'une contenant o et l'autre adhérente au bord.

Soit x un point du bord de la boule fermée et $\varepsilon > 0$ un nombre inférieur à la distance entre le bord et o (on peut utiliser ici la distance donnée par n'importe quelle métrique riemannienne sur la boule fermée). On suppose de plus ε suffisamment petit (ou on considère la métrique usuelle sur la boule unité) pour que l'ensemble des points qui sont à distance au plus ε du bord en constitue un voisinage tubulaire.

Comme $\mathrm{SO}(n)$ est un groupe compact, par uniforme continuité il existe un point x' de la boule ouverte tel que pour tout $g \in \mathrm{SO}(n)$, $\alpha(g)x'$ et $\alpha(g)x$ restent à distance au plus ε. Si on note S l'orbite de x', S est donc une orbite sphérique de $\alpha(\mathrm{SO}(n))$ qui est contenue dans un voisinage de largeur ε du bord. Inversement, le bord est aussi contenu dans le voisinage de largeur ε autour de S. En effet, s'il existait un point p du bord dont la distance à S était supérieure à ε, on pourrait trouver un chemin évitant S entre p et un point q distant du bord de plus de ε. Comme tous les points de S sont dans un ε voisinage tubulaire du bord, il existerait un chemin évitant S entre q et o. On construirait ainsi un chemin évitant S entre p et o (voir figure 7). Comme p est à l'extérieur de S et o à l'intérieur, un tel chemin ne peut exister.

On déduit de ce qui précède que l'orbite de x sous l'action de $\alpha(\mathrm{SO}(n))$ est ε-dense dans le bord pour tout ε suffisamment petit, donc est dense. Comme cette orbite est également compacte, elle est égale au bord tout entier et α est bien transitive sur le bord.

2.2 Deuxième étape : adhérence d'une géodésique

Soit ψ un homéomorphisme de la boule ouverte qui conjugue la restriction de α à la boule ouverte à `isom`

$$\psi : B^n, \alpha \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{H}^n, \mathtt{isom}$$

Soit L une géodésique de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$. On note $\mathrm{E}(L)$ l'intersection du bord de la boule et de l'adhérence de l'image réciproque $\psi^{-1}(L)$ de L. On appellera *extrémités* de $\psi^{-1}(L)$ les points de $\mathrm{E}(L)$. Notre but est ici de montrer que $\psi^{-1}(L)$ possède exactement deux extrémités.

Comme $\mathrm{E}(L)$ est compact et $\psi^{-1}(L)$ non compact et fermé dans la boule ouverte, $\mathrm{E}(L)$ n'est pas vide.

Notons $\mathrm{Stab}(L)$ l'ensemble des éléments $g \in G$ dont l'action $\mathtt{isom}(g)$ laisse L globalement invariante. Pour tout $g \in \mathrm{Stab}(L)$, $\alpha(g)$ laisse $\psi^{-1}(L)$ et donc $\mathrm{E}(L)$ globalement invariants. Or l'action $\mathtt{proj}(\mathrm{Stab}(L))$ de ces isométries partage le bord de l'espace hyperbolique en deux orbites : l'une d'elles est formée des extrémités de L, l'autre est son complémentaire. Ainsi, l'action de α sur le bord étant topologiquement conjuguée à celle de `proj` et $\mathrm{E}(L)$ étant compact et réunion d'orbites de $\alpha(\mathrm{Stab}(L))$, $\mathrm{E}(L)$ contient exactement deux points ou le bord tout entier.

Supposons que $\mathrm{E}(L)$ recouvre tout le bord de la boule fermée. Soit x un point du bord et $\alpha(g)$ l'action d'une isométrie elliptique fixant $\psi^{-1}(L)$ point par point mais pas x. Soit (x_n) une suite de points de $\psi^{-1}(L)$ de limite x. Alors $\alpha(g)x_n = x_n$, donc par continuité $\alpha(g)x = x$ ce qui est absurde.

Ainsi, $\psi^{-1}(L)$ a exactement deux extrémités. Chacune est adhérente à l'image d'un des deux rayons géodésiques composant L. De plus ces extrémités étant caractérisées par leur stabilisateur, les images de deux rayons géodésiques asymptotes ont la même extrémité et chaque point du bord de la boule est l'extrémité de l'image d'un rayon géodésique.

2.3 Troisième étape : prolongement de la conjugaison

On peut maintenant étendre ψ en une bijection $\widetilde{\psi}$ de la boule fermée : $\widetilde{\psi}^{-1}$ envoie l'extrémité d'un rayon géodésique sur l'extrémité de son image réciproque. Ainsi construit, $\widetilde{\psi}$ conjugue α et `proj`.

Il suffit de montrer que $\widetilde{\psi}$ est un homéomorphisme pour achever la démonstration. Comme c'est une bijection et que la boule fermée est compacte, il suffit de montrer que $\widetilde{\psi}^{-1}$ est continue. Comme elle coïncide avec ψ^{-1} sur la boule ouverte il suffit de montrer qu'elle est continue en tout point du bord.

Soit x un point du bord et $(x_n)_n$ une suite de points de la boule fermée de limite x. Soit L un rayon géodésique d'extrémité x. Soit o un point de L. On note L_n le rayon géodésique issu de o passant par x_n, P_n le plan hyperbolique totalement géodésique contenant L et L_n et Q_n le plus grand sous-espace hyperbolique totalement géodésique orthogonal à P_n et passant par o.

Il existe une unique suite (g_n) d'éléments elliptiques de G vérifiant :

– $\texttt{proj}(g_n)$ est l'identité sur Q_n ;

– $\texttt{proj}(g_n)$ stabilise globalement P_n ;

– $\texttt{proj}(g_n)L = L_n$.

Notons $y_n = \texttt{proj}(g_n)^{-1}(x_n)$. Pour tout n, $y_n \in L$ et y_n tend vers x. Comme x_n tend vers x, L_n tend vers L donc l'angle de la rotation g_n tend vers 0 et g_n tend vers 1.

On a alors :

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}^{-1}(x_n) &= \widetilde{\psi}^{-1}(\texttt{proj}(g_n)y_n) \\ &= \alpha(g_n) \circ \widetilde{\psi}^{-1}(y_n) \end{aligned}$$

or par définition $\widetilde{\psi}^{-1}(y_n)$ tend vers l'extrémité $\widetilde{\psi}^{-1}(x)$ de $\widetilde{\psi}^{-1}(L)$. De plus α est uniformément continue sur un voisinage de 1 dans G donc $\widetilde{\psi}^{-1}(x_n)$ tend vers $\widetilde{\psi}^{-1}(x)$ et $\widetilde{\psi}^{-1}$ est bien continue.

3 Classification des compactifications différentiables

Nous allons maintenant étudier les compactifications différentiables de l'espace hyperbolique réel, c'est-à-dire de l'action $\texttt{isom}$ de $G = \mathrm{SO}_0(1, n)$ sur B^n. On se place dans le cadre de la définition 1 de ce chapitre.

3.1 Multiplicité

Commençons par constater qu'il n'y a pas unicité. On se base sur l'observation suivante : dans la boule de Poincaré, des rayons géodésiques asymptotes d'extrémité commune x_0 sont tangents l'un à l'autre en x_0, mais dans la

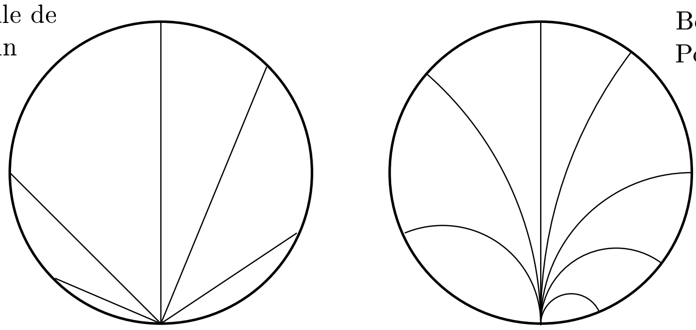

FIGURE 8 – *Géodésiques dans les boules de Klein et de Poincaré*

boule de Klein pour chaque direction transverse au bord il existe une unique géodésique qui lui soit tangente (voir figure 8). Ainsi, si h est une transformation parabolique fixant un point x_0, la différentielle en x_0 de l'action conforme de h fixe une direction transverse au bord, ce qui n'est pas le cas dans l'action projective. Comme c'est une propriété stable par conjugaison $\mathscr{C}^1$, on a démontré le résultat connu mais frappant qui suit.

PROPOSITION 3 — *Les compactifications projective et conforme de l'espace hyperbolique réel ne sont pas $\mathscr{C}^1$-équivalentes.*

3.2 CARTES DEMI-ESPACE

Soit $\bar{B}^n$ la boule fermée de dimension n et $\mathbb{R}^{n+}$ le demi-espace fermé de dimension n. Sur le demi-espace on utilisera des coordonnées canoniques $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)$ où $x_i \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^+$.

On appelle *carte demi-espace* de $\bar{B}^n$ tout difféomorphisme de $\bar{B}^n \setminus \{x\}$ dans $\mathbb{R}^{n+}$ (où x est un point du bord). On demande bien la différentiabilité jusqu'au bord.

Comme nous le verrons, ces cartes demi-espaces sont pratiques pour décrire simplement les compactifications différentiables de l'espace hyperbolique.

Demi-espaces de Poincaré et Klein

Le modèle du demi-espace de Poincaré est l'exemple le plus classique : c'est l'écriture dans une carte demi-espace (obtenue à partir de la boule de Poincaré en composant deux projections stéréographiques) de la compactification conforme.

On appellera *demi-espace de Klein* le poussé en avant du demi-espace de Poincaré par l'application :

$$\Phi_{y^2} : (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \longmapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, y^2)$$

On passe du disque de Klein au demi-espace de Klein en composant une projection verticale sur l'hémisphère, une projection stéréographique sur le demi-espace et Φ_{y^2}. Il est facile de vérifier que cette composition donne bien une carte analytique réelle de la boule fermée. En effet elle s'écrit

$$\begin{array}{rcl} \psi_s : \bar{B}^n \setminus \{x_\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+} \\ (z_1, \ldots, z_n) & \longmapsto & \left(\dfrac{z_1}{1 - z_n}, \ldots, \dfrac{z_{n-1}}{1 - z_n}, \dfrac{1 - \sum z_i^2}{(1 - z_n)^2} \right) \end{array}$$

où $x_\infty = (0, \ldots, 0, 1)$, et sa réciproque s'écrit

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \longmapsto \left(\frac{2x_1}{\sum x_i^2 + y + 1}, \ldots, \frac{2x_{n-1}}{\sum x_i^2 + y + 1}, \frac{\sum x_i^2 + y - 1}{\sum x_i^2 + y + 1} \right)$$

Modèles pour les compactifications

Décrivons maintenant les applications modèles pour les compactifications de l'espace hyperbolique.

Pour tout homéomorphisme $f : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$ qui est à la fois $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}^+$ et un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$, on note Φ_f l'homéomorphisme du demi-espace fermé qui s'écrit :

$$\Phi_f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, f(y)). \tag{1}$$

Enfin, pour tout entier strictement positif p, on note

$$\Phi_{y^p}(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y^p)$$

On dit qu'une compactification Φ de `isom` *s'écrit en carte demi-espace sous la forme* Φ_f s'il existe une carte demi-espace $\psi_b : \bar{B}^n \setminus \{y_\infty\} \to \mathbb{R}^{n+}$ telle que

$$\Phi_{|\bar{B}^n \setminus \{y_\infty\}} = \psi_s^{-1} \circ \Phi_f \circ \psi_b \tag{2}$$

où ψ_s est la carte du demi-plan de Klein et y_∞ est un point du bord de la boule.

Recouvrement d'une compactification à partir d'une carte

Comme l'action de G est transitive sur le bord et sur l'intérieur, il suffit de connaître une compactification Φ au voisinage d'un point du bord pour la connaître partout. *A fortiori*, la connaître sur une carte demi-espace est suffisant. Voyons comment retrouver la compactification d'origine à partir d'une carte.

Soit Φ une compactification de `isom`, et supposons qu'elle s'écrit dans une carte demi-espace ψ_b sous la forme Φ_f. On note α l'action correspondante :

$$\alpha(h) = \Phi^* \mathtt{proj}(h) = \Phi^{-1} \mathtt{proj}(h) \Phi \quad \forall h \in G$$

Considérons un élément involutif σ de G dont l'action projective envoie $x_\infty = (0, \ldots, 0, 1)$ sur $x_0 = (0, \ldots, -1)$. On note $y_\infty = \Phi^{-1}(x_\infty)$ et $y_0 = \Phi^{-1}(x_0)$. La carte ψ_b évite le point y_∞. L'application $\psi_b \circ \alpha(\sigma)$ est une carte demi-espace qui évite cette fois y_0. On a maintenant

$$\Phi_{|\bar{B}^n \setminus \{y_0\}} = (\psi_s \mathtt{proj}(\sigma))^{-1} \circ \Phi_f \circ \psi_b \alpha(\sigma) \tag{3}$$

Autrement dit, par un changement de carte naturel au but et à la source, Φ s'écrit encore sous la forme Φ_f au voisinage de y_∞. Mieux, le changement de coordonnées qui permet de passer d'une carte à l'autre s'écrit (voir la figure 9) :

$$\psi_b \alpha(\sigma) \psi_b^{-1} = \Phi_f^{-1} \psi_s \mathtt{proj}(\sigma) \psi_s^{-1} \Phi_f$$

donc ne dépend pas de la carte ψ_b. On vient de démontrer le lemme suivant.

LEMME 4 — *Si Φ s'écrit en carte sous la forme Φ_f, la donnée de f détermine Φ à conjugaison près.*

En particulier, au vu du lemme 2, si Φ_1 et Φ_2 sont des compactifications $\mathscr{C}^k$ qui s'écrivent dans des cartes ψ_1, ψ_2 sous la forme Φ_{f_1}, Φ_{f_2}, elles sont $\mathscr{C}^k$ conjuguées si et seulement si $f_2^{-1} \circ f_1$ est un difféomorphisme $\mathscr{C}^k$ de $\mathbb{R}^+$ (c'est-à-dire que sa dérivée est non nulle en 0).

3.3 Classification analytique

THÉORÈME B — *Pour tout entier $p > 0$, il existe une compactification analytique de* `isom` *qui s'écrit dans une carte demi-espace sous la forme Φ_{y^p}. Elle est unique à conjugaison près.*

Pour toute compactification analytique Φ de `isom`*, il existe un entier $p > 0$ tel que dans une carte demi-espace Φ s'écrit sous la forme Φ_{y^p}.*

Enfin deux nombres $p_1 \neq p_2$ définissent des compactifications qui ne sont pas $\mathscr{C}^1$-conjuguées.

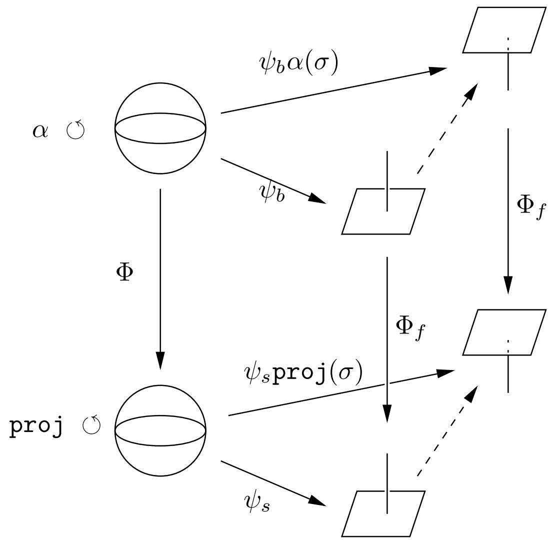

FIGURE 9 – *Description d'une compactification par deux cartes demi-espace*

Ainsi, on a une classification complète des compactifications analytiques de `isom`, qui sont en bijection avec les entiers strictement positifs. Par construction, $p = 1$ donne la compactification projective et $p = 2$ la compactification conforme.

La figure 10 illustre les géodésiques et les horosphères des différentes compactifications analytiques. Pour $p = 1$, c'est-à-dire dans le modèle de Klein, les géodésiques sont des paraboles et les horosphères sont tangentes au bord à l'ordre 2. Pour $p = 2$, c'est-à-dire dans le modèle de Poincaré, les géodésiques sont les cercles orthogonaux au bord et les horosphères les sphères (euclidiennes) tangentes au bord. Quand p est plus grand, les géodésiques « s'aplatissent » (dans le modèle demi-espace, vers la droite $\{y = 1\}$ et les droites verticales). Les horosphères, elles, deviennent singulières au point de contact avec le bord.

En dimension 2, le théorème B découle directement des travaux de Schneider [51] et Stowe [58], exposés par Mitsumatsu [44]. Nous allons le démontrer pour $n \geqslant 3$.

Remarquons qu'il découle de cette classification que deux compactifications analytiques qui sont $\mathscr{C}^1$-conjuguées sont nécessairement analytiquement conjuguées. En fait, il suffit même qu'elles soient Hölder-$(1-\varepsilon)$ conjuguées pour tous les $\varepsilon > 0$ (par exemple Lipschitz-conjuguées suffit).

On peut aussi voir la classification ainsi : les compactifications analytiques

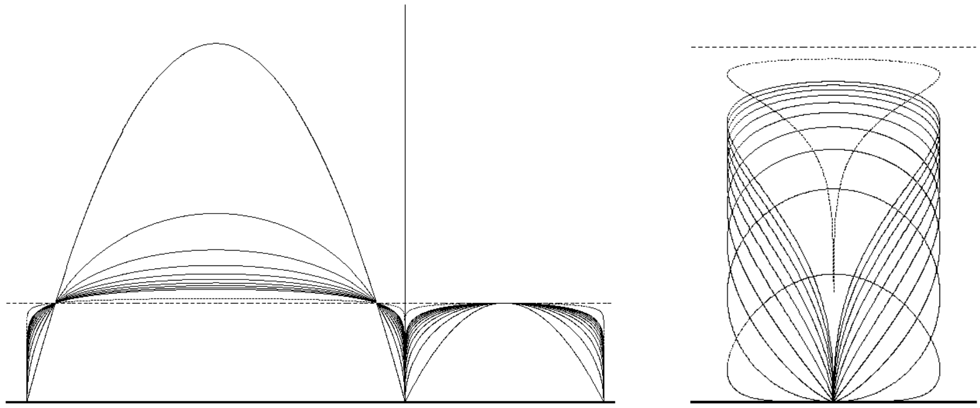

FIGURE 10 – *Géodésiques et horosphères des différentes compactifications analytiques*

de `isom` sont obtenues à partir de la boule de Klein

$$\left\{(x_1,\ldots,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1}; y=1, \sum x_i^2 \leqslant 1\right\}$$

par une projection verticale sur une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation

$$y^p = 1-\sum x_i^2$$

composée avec une projection stéréographique sur

$$\left\{(x_1,\ldots,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1}; y=0, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1\right\}$$

Dans le cas où $p=2$ on retrouve bien la compactification conforme. Quand p tend vers l'infini, l'hypersurface sur laquelle on projette se rapproche d'un cylindre, ses parois deviennent verticales, ce qui explique les formes observées dans la figure 10.

3.4 Classification différentiable

Théorème C — *Soit k un entier strictement positif ou ∞. On suppose que $n \geqslant 3$. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$ un homéomorphisme qui est à la fois $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}^+$ et un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$.*

Il existe une compactification $\mathscr{C}^k$ de `isom` *qui s'écrit en carte demi-espace sous la forme Φ_f si et seulement si*

$$f/f' \text{ admet un prolongement } \mathscr{C}^k \text{ au voisinage de } 0. \tag{4}$$

Toute compactification $\mathscr{C}^k$ de `isom` *s'écrit en carte demi-espace sous la forme Φ_f pour une certaine fonction f vérifiant* (4).

Deux compactifications qui s'écrivent en carte sous la forme Φ_{f_1} et Φ_{f_2} sont $\mathscr{C}^k$-conjuguées si et seulement si $f_1^{-1} \circ f_2$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme au voisinage de 0.

Enfin, la condition (4) *est nécessairement vérifiée si f est $\mathscr{C}^{k+1}$ et n'est pas plate (c'est-à-dire si son développement de Taylor en* 0 *est non nul).*

Remarquons que si f est plate, (4) peut être vérifiée ou pas. Il suffit pour cela de considérer les exemples $x \mapsto \exp(-x^{-2})$ et $x \mapsto \exp(-x^{-\frac{3}{2}})$, prolongé $\mathscr{C}^\infty$ par 0 sur $\mathbb{R}^-$.

Ces résultats de classification appellent naturellement de nouvelles questions.

Question 2 — *Quelles sont les compactifications différentiables des espace hyperboliques complexes, quaternioniques et du plan hyperbolique octonionique ?*

L'espace hyperbolique complexe sera présenté dans la deuxième partie. Comme il n'est pas de courbure sectionnelle constante, on peut imaginer qu'il admette moins de compactifications que l'espace hyperbolique réel. Peut-être même n'en admet-il qu'une seule.

3.5 Démonstration de la classification

La démonstration des théorèmes B et C se déroule de la façon suivante.

On commence par montrer le lemme central : toute compactification dans laquelle les géodésiques sont des sous variétés $\mathscr{C}^k$ transverses au bord s'écrit sous la forme Φ_f pour une certaine fonction f de classe $\mathscr{C}^k$. Quelques changements de coordonnées suffisent.

Dans la section suivante, on montre que pour $n \geqslant 3$, les géodésiques sont des sous-variétés $\mathscr{C}^k$ transverses au bord dans toute compactification $\mathscr{C}^k$. Il s'agit essentiellement d'appliquer le théorème d'inversion locale.

Ensuite, on finit la démonstration du théorème B. La dernière assertion du théorème B découle des lemmes 4 et 2. on remarque ensuite que si $k = \omega$, la fonction f peut être supposée de la forme $y \mapsto y^p$ où p est l'ordre du premier terme non nul dans le développement de Taylor de f en 0 puis on montre que chacune de ces fonctions produit bien une compactification par un lemme de « dépliage analytique ».

Enfin, on termine la démonstration du théorème C. On montre pour cela que la condition (4) est nécessaire et suffisante pour obtenir une compactification $\mathscr{C}^k$; il s'agit d'un calcul en cartes à partir des champs de vecteurs qui définissent l'action projective. La caractérisation de la conjugaison est encore une conséquence des lemmes 4 et 2. On conclut en démontrant que la condition (4) est vérifiée pour les fonctions non plates.

Lemme central

Dans cette section, k est un entier strictement positif, ∞ ou ω et $n \geqslant 2$.

On appelle géodésique d'une compactification Φ l'adhérence de l'image réciproque par Φ d'une géodésique du demi-plan de Klein.

LEMME 5 — *Soit Φ une compactification $\mathscr{C}^k$ de* `isom`. *Si les géodésiques de Φ sont des sous-variétés $\mathscr{C}^k$ transverses au bord, alors il existe une application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathscr{C}^k$, qui est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^+$ et un difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$, telle qu'en carte demi-espace Φ s'écrive sous la forme Φ_f.*

DÉMONSTRATION : rappelons que par définition, Φ est un homéomorphisme de la boule fermée et un difféomorphisme de la boule ouverte et que $\Phi^*\mathtt{proj}$, est une action $\mathscr{C}^k$ sur la boule fermée.

Pour simplifier les notations, on note $\infty = x_\infty$ le point du bord de la boule fermée qui est envoyé à l'infini lors du passage au demi-espace de Klein et $0 = x_0$ l'origine du demi-espace. Quitte à effectuer un changement de coordonnées à la source de Φ, on peut supposer $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(\infty) = \infty$. On choisi une carte demi-espace qui évite $\{\infty\}$ arbitraire à la source et la carte ψ_s au but pour considérer Φ comme une application de $\mathbb{R}^{n+}$ dans lui même.

Soit $(X_1, \ldots, X_{n-1})$ une base de la sous-algèbre $\mathfrak{g}^\infty$ de $\mathfrak{g}$ constituée des éléments paraboliques qui fixent ∞. Dans le demi-espace de Klein, leur action s'écrit $\mathtt{proj}_{X_i} = \partial/\partial x_i$. Comme les X_i commutent deux à deux, il en est de même pour les champs de vecteurs $\Phi^*(\mathtt{proj}_{X_i})$ définis sur l'intérieur. Par continuité du crochet, les prolongements différentiables de ces champs de vecteurs au bord du demi-espace commutent encore.

Quitte à effectuer un changement de coordonnées $\mathscr{C}^k$ à la source on peut donc supposer

$$\Phi^* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{5}$$

Remarquons que dans le demi-espace de Klein, les droites verticales sont des géodésiques et les plans horizontaux (orbites de l'action de $\mathfrak{g}^\infty$) sont les horosphères basées en ∞.

Soit L l'image réciproque par Φ de l'axe des y du demi-plan de Klein. Par définition c'est une géodésique, donc L est une sous-variété $\mathscr{C}^k$ transverse au bord. De plus L rencontre chaque hyperplan horizontal une et une seule fois, transversalement (ces plans sont les horosphères basées en ∞). Il existe donc des applications $f_1, \ldots, f_{n-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ telles que

$$L = \big\{(f_1(y), \ldots, f_{n-1}(y), y)\,;\, y \in \mathbb{R}^+\big\}$$

Quitte à effectuer un changement de coordonnées (toujours à la source)

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \longmapsto (x_1 - f_1(y), \ldots, x_{n-1} - f_{n-1}(y), y)$$

on peut supposer que L est l'axe des y.

Il existe donc un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tel que

$$\Phi(0, \ldots, 0, y) = (0, \ldots, 0, f(y))$$

et comme le dernier changement de coordonnées conserve la propriété (5), on a

$$\Phi(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, f(y))$$

On voit alors que f est un $\mathscr{C}^k$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ car par hypothèse, Φ est un difféomorphisme du demi-plan ouvert.

Il reste à montrer que f est une application de classe $\mathscr{C}^k$ en 0. Or on sait que dans le demi-plan de Klein, pour chaque direction transverse au bord il existe une géodésique qui lui est tangente. Il existe donc une géodésique du demi-plan de Klein qui s'écrit près de 0 sous la forme :

$$\{(x, k_2(x), \ldots, k_{n-1}(x), k_n(x)); x \in [0, \varepsilon[\} \tag{6}$$

où les k_i sont des applications de classe $\mathscr{C}^k$. Soit L' l'image réciproque par Φ de cette géodésique. Par hypothèse, L' est une sous-variété transverse au bord, donc il existe des applications $l_1, \ldots, l_{n-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ telles que L' s'écrive au voisinage de 0 sous la forme

$$\{(l_1(y), \ldots, l_{n-1}(y), y)\,;\, y \in [0, \varepsilon'[\}$$

Alors on a $\Phi(L') = \{(l_1(y), \ldots, l_{n-1}(y), f(y))\,;\, y \in [0, \varepsilon'[\}$ et, en comparant à (6), $f = k_n \circ l_1$. Ainsi f est bien de classe $\mathscr{C}^k$. ■

Transversalité des géodésiques

Dans cette section, k est encore quelconque : entier strictement positif, ∞ ou ω.

LEMME 6 — *Soit Φ une compactification $\mathscr{C}^k$ de* `isom`*. Si $n \geqslant 3$, les géodésiques de Φ sont des sous-variétés de classe $\mathscr{C}^k$ transverses au bord.*

Démonstration : supposons d'abord n impair. Alors une géodésique est l'ensemble des points fixes d'une symétrie $s \in G$ Les valeurs propres de son action $\Phi^*(\texttt{proj}(s))$ en un point de la géodésique sont 1 (avec multiplicité 1) et -1 (avec multiplicité $n-1$). Par continuité (l'action de G est par hypothèse au moins $\mathscr{C}^1$), ses valeurs propres à l'extrémité de la géodésique sont les mêmes. Donc à cette extrémité une unique direction, nécessairement transverse au bord, est fixée par s. Le théorème d'inversion locale permet alors de conclure que la géodésique est une sous-variété $\mathscr{C}^k$ transverse au bord.

Maintenant si n est pair (et différent de 2), la symétrie par rapport à une géodésique est de déterminant -1 donc n'est pas dans G. Mais une géodésique γ est alors l'ensemble des points fixés simultanément par deux symétries par rapport à deux plans hyperboliques la contenant. On peut de plus choisir ces plans orthogonaux, de sorte que les deux symétries engendrent le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

En considérant les différentielles de ses symétries au point $\gamma(t)$ pour $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on obtient une famille continue de représentations $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, constante (à conjugaison près) pour $t < \infty$. L'espace des représentations d'un groupe fini est discret, la représentation au point du bord $\gamma(\infty)$ est donc conjuguée à la représentation au point $\gamma(0)$. En particulier, il existe une unique direction, nécessairement transverse au bord, associée à la valeur propre 1 pour chacune des deux symétries. Comme γ est définie comme l'ensemble de leurs points fixes communs, on peut à nouveau déduire du théorème d'inversion locale que c'est une sous-variété transverse au bord. ■

Démonstration du théorème B

On suppose ici que $k = \omega$, et on considère une compactification analytique Φ de $\texttt{isom}$. D'après ce qui précède, il existe une application analytique $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, qui est également un homéomorphisme et telle que dans une carte demi-espace Φ s'écrive sous la forme Φ_f.

On veut montrer que quitte à effectuer un nouveau changement de coordonnées, on peut se ramener au cas où $f(y) = y^p$ avec p entier naturel. Cherchons ce changement de variable sous la forme

$$\Phi_{y^p}^{-1}\Phi = (x_1, \dots, x_{n-1}, y) \longmapsto \left(x_1, \dots, x_{n-1}, f(y)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Si on prend pour p la valuation du développement de Taylor de f en 0, on obtient $f(y)^{\frac{1}{p}} = y(g(y))^{\frac{1}{p}}$ où g est une fonction analytique avec $g(0) \neq 0$, donc $\Phi_{y^p}^{-1} \circ \Phi_f$ est bien un difféomorphisme analytique du demi-plan fermé, qui conjugue par construction Φ et Φ_{y^p}.

Le calcul de $\Phi_{p_1}^{-1} \circ \Phi_{p_2}$ montre immédiatement que deux entiers différents donnent naissance à deux compactifications non $\mathscr{C}^1$-conjuguées.

Pour conclure, on utilise le lemme de dépliage suivant.

Lemme 7 (dépliage analytique) — *Soit V un champ de vecteur analytique tangent au bord sur le demi-plan fermé. Alors pour tout entier p, le tiré en arrière par Φ_{y^p} de la restriction de V au demi-plan ouvert se prolonge analytiquement au demi-plan fermé.*

Démonstration : comme V est analytique on peut l'écrire

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{a,b} A^i_{a,b} x^a y^b \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{a,b} B_{a,b} x^a y^b \frac{\partial}{\partial y}$$

où on effectue les sommes sur tous les entiers naturels b et tous les n-uplets d'entiers naturels a ; x^a désigne $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$.

Un calcul direct montre que

$$\Phi_{y^p}{}^*(V) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{a,b} A^i_{a,b} x^a y^{pb} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{a,b} B_{a,b} x^a y^{pb+1-p} \frac{\partial}{\partial y}$$

donc $\Phi_{y^p}{}^*(V)$ se prolonge analytiquement au bord si $B_{a,0} = 0$ pour tout a, c'est-à-dire si V est tangent au bord. ■

Lemme 8 — *soit p un entier strictement positif. Alors l'application Φ_{y^p} est une compactification de* `isom`.

Démonstration : d'après le lemme 7, le tiré en arrière par Φ_{y^p} de l'action projective de l'algèbre de Lie de G en donne bien une action analytique sur la boule fermée (union de deux cartes demi-espace). Par compacité, cette action est complète donc induit une action α du revêtement universel $\widetilde{G}$ de G. Soit $g \in \widetilde{G}$ un élément qui se projette sur l'élément neutre de G. Alors $\alpha(g)$ agit trivialement sur la boule ouverte donc par continuité, agit trivialement sur la boule fermée. Ainsi l'action de $\widetilde{G}$ passe au quotient en une action analytique de G, qui est nécessairement $\Phi_{y^p}{}^*$`proj`. ■

Démonstration du théorème C

Lemme 9 — *En toute dimension $n \geqslant 2$, pour tout k entier strictement positif ou $+\infty$, pour tout homéomorphisme $f : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$ qui est à la fois $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}^+$ et un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$, Φ_f se prolonge en une compactification $\mathscr{C}^k$ de* `isom` *si et seulement si f/f' est $\mathscr{C}^k$ au voisinage de* 0.

DÉMONSTRATION : comme dans le cas analytique, Φ_f est une compactification $\mathscr{C}^k$ de isom si et seulement si pour tout $V \in \mathfrak{g}$ le tiré en arrière $\Phi_f^*(\mathtt{proj}_V)$ se prolonge $\mathscr{C}^k$ au bord de la boule fermée.

Il suffit de vérifier cette condition pour une base de $\mathfrak{g}$.

Soit H un élément hyperbolique de $\mathfrak{g}$ qui préserve l'axe des y, $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ une base de l'espace vectoriel des éléments paraboliques de $\mathfrak{g}$ fixant le point à l'infini du demi-espace de Klein, $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ une base de l'espace vectoriel des éléments paraboliques de $\mathfrak{g}$ fixant 0 (où on choisit les Y_i unitaires), et $(R_j)_{1\leqslant j\leqslant (n-1)(n-2)/2}$ une base de l'espace vectoriel des éléments elliptiques de $\mathfrak{g}$ fixant l'axe des y.

La réunion de ces familles forme une base de $\mathfrak{g}$, et il nous suffit maintenant de calculer les tirés en arrière de leur actions.

Les $\mathtt{proj}_{X_i}$ et les $\mathtt{proj}_{R_j}$ sont identiques à leurs tirés en arrière par Φ_f, donc se prolongent $\mathscr{C}^k$ au bord.

Les Y_i sont conjugués les uns aux autres par des combinaisons linéaires des R_j, donc il suffit d'en étudier un.

Comme on dispose de formule explicites pour le demi-espace de Klein, on peut facilement exprimer $\widetilde{H} = \Phi_f^*(\mathtt{proj}_H)$ et $\widetilde{Y_1} = \Phi_f^*(\mathtt{proj}_{Y_1})$ en fonction de l'application f :

$$\begin{aligned}
\mathtt{proj}_H(x_1,\ldots,x_{n-1},y) &= \sum_{i=1}^{n-1} 2x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + 4y\frac{\partial}{\partial y}\\
\mathtt{proj}_{Y_1}(x_1,\ldots,x_{n-1},y) &= \left(y - x_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\\
&\quad -2x_1\sum_{i=2}^{n-1} x_i\frac{\partial}{\partial x_i} - 4x_1y\frac{\partial}{\partial y}\\
\widetilde{H}(x_1,\ldots,x_{n-1},y) &= \sum_{i=1}^{n-1} 2x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + 4\frac{f(y)}{f'(y)}\frac{\partial}{\partial y}\\
\widetilde{Y_1}(x_1,\ldots,x_{n-1},y) &= \left(f(y) - x_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\\
&\quad -2x_1\sum_{i=2}^{n-1} x_i\frac{\partial}{\partial x_i} - 4x_1\frac{f(y)}{f'(y)}\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

et on constate que $\widetilde{H}$ et $\widetilde{Y_1}$ se prolongent $\mathscr{C}^k$ au bord si et seulement si f/f' est $\mathscr{C}^k$ au voisinage de 0. Notons qu'en dehors de 0 il n'y a pas de problème puisque f y est un difféomorphisme. ■

Il ne nous reste plus qu'à démontrer le résultat suivant.

LEMME 10 — *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une application qui envoie* 0 *sur* 0*, admet un prolongement* $\mathscr{C}^{k+1}$ *au voisinage de* 0 *et dont la dérivée ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^{+*}$*. Si de plus* f *n'est pas plate en* 0*, alors* f/f' *admet un prolongement* $\mathscr{C}^k$ *au voisinage de* 0*.*

DÉMONSTRATION : par hypothèse la valuation du développement de Taylor de f en 0 est finie, notons la p:

$$f(x) = ax^p + \cdots + o(x^{k+1})$$

et

$$f'(x) = pax^{p-1} + \cdots + o(x^k)$$

donc $f/f' \sim x/p$ se prolonge continûment en 0.

Par récurrence on montre que la dérivée n-ième de f/f' s'écrit

$$\frac{d}{dx^n}\left(\frac{f}{f'}\right) = \frac{f_n}{(f')^{n+1}}$$

où f_n est définie par la relation

$$f_{n+1} = f_n' f' - (n+1) f_n f''$$

La fonction f_n admet un développement limité à l'ordre $k-n$ dont on note $a_n x^{v_n}$ le terme de plus bas degré. Alors la dérivée n-ième de f/f' admet un développement limité en 0 car le terme de plus bas degré putatif s'écrit

$$\frac{a_{n-1}(v_{n-1} - n(p-1))}{(ap)^n} x^{v_{n-1}-n(p-1)-1}$$

et est bien un monôme de degré positif sauf quand $v_{n-1} - n(p-1) = 0$, auquel cas ce terme s'annule. Les dérivées de f/f' admettent donc des limites en 0 et cette fonction admet un prolongement $\mathscr{C}^k$ au voisinage de 0. ■

Chapitre III

Actions algébriques de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ sur les surfaces

– You know, I don't think math is a science, I think it's a religion.
– A religion?
– Yeah. All these equations are like miracles. You take two numbers and when you add them, they magically become one *new* number! No one can say how it happens. You either believe it or you don't. This whole book is full of things that have to be accepted on faith! It's a religion!
– And in the public schools no less. Call a lawyer.
– As a math atheist, I should be excused from this.

Bill Watterson,
Calvin and Hobbes

Le contenu de ce chapitre est essentiellement une traduction de l'article [31].

1 Introduction

1.1 Motivation

Parmi les compactifications de l'espace hyperbolique réel, que nous venons de classifier, deux sont apparues naturelles : la compactification conforme et la compactification projective. On peut se demander si elles possèdent une propriété particulière qui les distingue des autres compactifications.

Comme leurs noms l'indiquent, elles portent chacune une structure géométrique, préservée par l'action de $\mathrm{SO}_0(1,n)$. On peut se demander si ce sont les seules.

Question 3 — *Les compactifications projective et conforme sont elles les seules à porter une structure géométrique invariante ?*

À « structure géométrique », on peut par exemple donner le sens de Cartan.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à une autre particularité de ces deux compactifications en montrant qu'elle sont les seules à être algébriques.

1.2 Résultats

Notre but principal est de démontrer le résultat suivant.

Théorème D — *Parmi toutes les compactifications $\mathscr{C}^1$ de* `isom`*, seules* `proj` *et* `conf` *sont algébriques. De plus, elles sont analytiquement algébriques.*

Rappelons que dans la section 2.1 du chapitre I, on a dit qu'une action $\mathscr{C}^k$ d'un groupe algébrique réel G (en particulier une compactification de `isom`) est ($\mathscr{C}^k$-)*algébrique* si elle se plonge de façon $\mathscr{C}^k$ et équivariante dans une représentation projective de G. Le corps de base sera $\mathbb{R}$ dans tout le chapitre.

Commençons par remarquer qu'il suffit d'étudier la dimension 2. Considérons pour cela une compactification algébrique $\mathscr{C}^k$, notée α, de $\mathrm{SO}_0(1,n)$. C'est une action de $\mathrm{SO}_0(1,n)$ sur la boule fermée B^n telle que l'action sur l'intérieur soit conjuguée à `isom`, et qui se plonge de façon équivariante dans l'espace $\mathrm{P}(V)$ d'une représentation linéaire de $\mathrm{SO}_0(1,n)$. Si on restreint α à l'adhérence d'un plan hyperbolique totalement géodésique et au sous-groupe (isomorphe à $\mathrm{SO}_0(1,2)$) des éléments de $\mathrm{SO}_0(1,n)$ qui préservent ce plan, on obtient une compactification algébrique de même régularité de $\texttt{isom}^2$ (action par isométries de $\mathrm{SO}_0(1,2)$ sur $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$). En effet d'après la classification obtenue dans le chapitre précédent, l'adhérence d'un plan hyperbolique totalement géodésique est toujours une sous-variété transverse au bord et l'action sur cette adhérence détermine, à conjugaison près, l'action sur toute la boule fermée.

Par ailleurs, rappelons que $\mathrm{SO}_0(1,2)$ est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R})$. Le théorème D découle des résultats de la section 3.2. Au passage, on donne plus généralement la classification de toutes les actions algébriques de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ sur des surfaces.

Théorème E — *Les actions algébriques différentiables de* $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ *sur les surfaces fermées sont exactement :*

- *l'action projective sur* $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ *;*
- *l'action conforme sur* S^2 *;*
- *l'action projective produit sur* $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ *;*
- *une action sur le plan projectif ayant une orbite dense ;*
- *une famille dénombrable d'actions sur la bouteille de Klein ;*
- *une famille dénombrable d'actions sur le tore, comportant deux orbites cylindriques ouvertes et deux orbites circulaires ;*
- *une famille dénombrable d'actions sur le tore, comportant quatre orbites cylindriques ouvertes et quatre orbites circulaires ;*
- *une action sur le tore* $S^1 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1$*, produit de l'action triviale sur le cercle par l'action projective sur* $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$*.*

De plus, toute action algébrique de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ *sur une surface non compacte ou avec bord est une sous-action (une union d'orbites) d'une des actions précédentes.*

1.3 Organisation de la démonstration

On commence dans la section 2 en étudiant directement les orbites des représentations projectives de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. On détermine lesquelles sont de dimension 1 ou 2 (ce qu'on appellera « petite dimension ») et on décrit leur topologie. Ensuite, dans la section 2.5, on détermine la topologie de leur adhérence. Enfin, dans la section 3 on étudie comment elles se collent les unes aux autres et avec quelle régularité.

2 Topologie des orbites algébriques de petite dimension

Dans cette section on décrit toutes les orbites de dimension au plus 2 dans les représentations projectives de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. On commence par étudier le cas des projectivés de représentations linéaires irréductibles, puis on introduit des notations pratiques pour étudier le cas général.

2.1 Représentations linéaires irréductibles de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$

Pour tout entier naturel n, soit $\mathbb{R}_n[X,Y]$ l'espace vectoriel des polynômes réels homogènes de degré n en les indéterminées X et Y. On définit une représentation linéaire de dimension $n+1$ de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$par :

$$\widetilde{\rho}_n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot P(X,Y) = P(aX+cY, bX+dY).$$

On note ρ_n l'action sur $\mathrm{P}(\mathbb{R}_n[X,Y])$ induite par $\widetilde{\rho}_n$.

Théorème 1 — *Les représentations linéaires irréductibles de* $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ *sont exactement les* $\widetilde{\rho}_n$. *De plus toute représentation projective de* $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ *vient d'une représentation linéaire.*

Remarquons que comme $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ est un groupe de Lie simple, ses représentations linéaires sont totalement décomposables, donc ce théorème classique permet d'en décrire toutes les représentations projectives.

Disons juste quelques mots de la démonstration. La classification des représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$ est très classique (on peut la déduire de la classification des représentations de $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$, voir par exemple [53]). Il apparaît que ce sont exactement les représentations induites par les représentations linéaires $\widetilde{\rho}_n$. Considérons une représentation projective ρ de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. Elle se relève en une représentation linéaire $\widetilde{\rho}$ du revêtement double connexe de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, noté $\widetilde{G}^2$. Cette représentation linéaire est entièrement déterminée par la représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$ qu'elle induit, car $\widetilde{G}^2$ est connexe. Mais toute représentation de $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$ s'étend en une représentation linéaire de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, donc $\widetilde{\rho}$ est nécessairement la composée de la projection $\widetilde{G}^2 \to \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ et d'une représentation linéaire de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. Notre représentation projective initiale est donc la projectivée d'une représentation linéaire, comme annoncé.

En général, on dira que ρ_n est irréductible pour dire qu'elle descend d'une représentation linéaire irréductible.

2.2 Orbites dans les représentations irréductibles

Description de ρ_0, ρ_1 et ρ_2

La représentation irréductible de dimension 1, $\widetilde{\rho}_0$, est la représentation triviale sur $\mathbb{R}_0[X,Y] = \mathbb{R}$ donc ρ_0 agit sur un seul point.

Le projectivé ρ_1 de la représentation irréductible de dimension 2 est l'action naturelle de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ sur la droite projective réelle, donc a une seule orbite, circulaire.

La première action non transitive apparaît à la dimension suivante : $\widetilde{\rho}_2$ correspond à l'action naturelle de $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R}) = \mathrm{SO}_0(1,2)$ sur l'espace de Minkowski de dimension 3. On l'identifie de la façon suivante : un polynôme homogène de degré 2 s'écrit $P = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2$, et son discriminant

$\Delta(P) = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ donne une forme lorentzienne sur $\mathbb{R}_2[X,Y] \approx \mathbb{R}^3$ qui est préservée par l'action linéaire $\widetilde{\rho}_2$. L'action ρ_2 sur le plan projectif a donc trois orbites : un disque, un cercle et un ruban de Möbius, correspondant respectivement aux polynômes de discriminant négatif, nul et positif.

En notant $[P(X,Y)]$ l'élément du plan projectif engendré par un polynôme P, on remarque que pour P de discriminant négatif on peut écrire $[P(X,Y)] = [(zX+Y)(\overline{z}X+Y)]$ où z est un nombre complexe de partie imaginaire strictement positive. De plus, z est entièrement déterminé par P. On a en fait construit ainsi un difféomorphisme équivariant du demi-plan de Poincaré $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$ dans l'orbite disque. Il est important de noter que ce difféomorphisme ne se prolongera pas au bord, puisque l'action de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ sur l'adhérence de l'orbite disque est naturellement conjuguée à l'action projective. Cette écriture est toutefois pratique puisque l'équivariance s'écrit :

$$\rho_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot [(zX+Y)(\overline{z}X+Y)] = \left[\left(\frac{az+b}{cz+d} X + Y \right) \left(\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} X + Y \right) \right].$$

De la même façon, l'orbite circulaire est paramétrée par $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ vu comme le bord de $\mathbb{C}^+$. En effet, elle est formé des éléments $[(tX+Y)^2]$, où t appartient à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (avec la convention $[(\infty X+Y)^2] = [X^2]$), et l'action de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ dans ce paramétrage est exactement l'action naturelle sur $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ (c'est-à-dire ρ_1).

Enfin, l'orbite Möbius est paramétrée par les paires (sans ordre) $\{t_1, t_2\}$ d'éléments distincts de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$.

Généralisation à ρ_n

Soit n un entier naturel. Un élément de $\mathrm{P}(\mathbb{R}_n[X,Y])$ se factorise sous la forme :

$$\left[\prod_{i=1}^{k} (t_i X + Y)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{l} (z_j X + Y)^{\beta_j} (\overline{z_j} X + Y)^{\beta_j} \right] \tag{1}$$

où les t_i sont des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$, les z_j sont des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{C}^+$ et $\sum \alpha_i + 2\sum \beta_j = n$.

Comme précédemment, l'action de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ sur cette écriture est naturelle : $\rho_n(A)$ agit sur l'élément décrit par (1) en remplaçant t_i par $A \cdot t_i$ et z_j par $A \cdot z_j$ avec l'action usuelle :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot t_i &= \frac{at_i + b}{ct_i + d} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z_j &= \frac{az_j + b}{cz_j + d}. \end{aligned}$$

Avec ces notations, on peut déterminer facilement les éléments dont l'orbite est de petite dimension.

Lemme 2 — *L'orbite d'un élément x écrit sous la forme* (1) *est de dimension* $\min(k+2l,3)$.

Démonstration : on considère les différents cas. On considère les actions de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ sur $\mathrm{P}(\mathbb{R}_n[X,Y])$ et sur le demi-plan fermé $\overline{\mathbb{C}^+}$.

Si $l=1$ et $k=1$, on peut écrire $x=[(tX+Y)^\alpha(zX+Y)^\beta(\overline{z}X+Y)^\beta]$ et le stabilisateur de x est l'ensemble des éléments de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ fixant le point z de $\mathbb{C}^+$ et le point t du bord, donc est réduit à l'identité. L'orbite de x est donc de la même dimension que $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, c'est-à-dire 3.

Si $l\geqslant 1$ et $k\geqslant 1$, on obtient la même conclusion.

Si $l\geqslant 2$ ou respectivement $k\geqslant 3$, un élément du stabilisateur de x stabilise une paire de points donnés de $\mathbb{C}^+$ ou respectivement trois points donnés du bord, donc est discret et on en tire la même conclusion.

Si $l=0$ et $k=1$, le stabilisateur de x est l'ensemble des éléments de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ qui fixent un point donné du bord, donc est de dimension 2 et l'orbite de x est de dimension 1.

Si $l=0$ et $k=2$ (ou respectivement $l=1$ et $k=0$), le stabilisateur de x est l'ensemble des éléments de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ qui fixent une paire de points donnés du bord de $\mathbb{C}^+$ (ou respectivement un point de $\mathbb{C}^+$), donc est de dimension 1 et l'orbite de x est de dimension 2. ■

On distingue donc trois types d'orbites de petite dimension : *elliptique* ($l=1$ et $k=0$), *parabolique* ($l=0$ et $k=1$) et *hyperbolique* ($l=0$ et $k=2$).

En utilisant l'écriture (1) il est facile de déterminer la topologie des orbites de petite dimension de ρ_n.

Proposition 3 — *Pour tout entier $n>0$, les orbites de dimension au plus 2 de ρ_n sont les suivantes (on utilise la notation* (1)*) :*

(i) ($l=0$ et $k=1$) une orbite parabolique

$$\left\{[(tX+Y)^n];t\in\mathbb{R}\mathrm{P}^1\right\}$$

(ii) ($l=0$, $k=2$ et $\alpha_1=\alpha_2$) si n est pair, une orbite hyperbolique ayant la topologie du ruban de Möbius

$$\left\{[(t_1X+Y)^{\frac{n}{2}}(t_2X+Y)^{\frac{n}{2}}];t_1\neq t_2\in\mathbb{R}\mathrm{P}^1\right\}$$

Il n'y a pas de telle orbite si n est impair ;

(iii) ($l=0$, $k=2$ et $\alpha_1\neq\alpha_2$) des orbites hyperboliques ayant la topologie d'un cylindre (il y en a $(n-1)/2$ si n est impair, $(n-2)/2$ sinon) :

$$\left\{[(t_1X+Y)^{\alpha_1}(t_2X+Y)^{\alpha_2}];t_1\neq t_2\in\mathbb{R}\mathrm{P}^1\right\}$$

(iv) ($l = 1$ et $k = 0$) si n est pair, une orbite elliptique qui a la topologie d'un disque

$$\left\{[(zX+Y)^{\frac{n}{2}}(\overline{z}X+Y)^{\frac{n}{2}}];\, z \in \mathbb{C}^+\right\}$$

Il n'y a pas de telle orbite si n est impair.

2.3 Notations pour le cas réductible

On va maintenant traiter le cas des représentations réductibles. Pour cela, quelques notations sont nécessaires. Considérons une représentation linéaire $\widetilde{\rho}$ de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, notons V l'espace de cette représentation et ρ, agissant sur $\mathrm{P}(V)$, son projectivé.

Comme $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ est un groupe de Lie simple, $\widetilde{\rho}$ se décompose sous la forme

$$\widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}_{n_1} \oplus \widetilde{\rho}_{n_2} \oplus \dots \widetilde{\rho}_{n_p}$$

où les n_i sont des entiers naturels. On peut également écrire

$$V = \mathbb{R}_{n_1}[X,Y] \oplus \mathbb{R}_{n_2}[X,Y] \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}_{n_p}[X,Y].$$

Quitte à permuter les n_i, on suppose $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_p$.

Comme on aura besoin de considérer l'ensemble des copies d'une représentation irréductible donnée, on définit $I_1 = [\![i_1, i_2-1]\!]$, $I_2 = [\![i_2, i_3-1]\!]$, $\dots$, $I_r = [\![i_r, i_{r+1}-1]\!]$ (où $i_1 = 1$ et $i_{r+1} - 1 = p$) les intervalles d'entiers tels que :

$$\underbrace{n_1 = \cdots = n_{i_2-1}}_{I_1} > \underbrace{n_{i_2} = \cdots = n_{i_3-1}}_{I_2} > \cdots > \underbrace{n_{i_r} = \cdots = n_p}_{I_r}.$$

On dit que I_s est *pair* (respectivement *impair*) si n_{i_s} est lui-même pair (respectivement impair).

On écrit un élément x de $\mathrm{P}(V)$ sous la forme factorisée suivante :

$$x = \left[u_q \prod_{i=1}^{k_q}(t_q^i X + Y)^{\alpha_q^i} \prod_{j=1}^{l_q}(z_q^j X + Y)^{\beta_q^j}(\overline{z_q^j}X+Y)^{\beta_q^j}\right]_{1\leqslant q\leqslant p} \tag{2}$$

où les u_q sont des nombres réels et pour tout q : $\sum_i \alpha_q^i + 2\sum_j \beta_q^j = n_q$.

On appelle *élément projectif* associé au point x l'élément $[u_1, \dots, u_p]$ de $\mathbb{R}\mathrm{P}^{p-1}$. On appelle *support* de x (ou de l'élément projectif associé) et on note $I(x)$ l'ensemble des intervalles I_s dont au moins un indice i vérifie $u_i \neq 0$. Par « q est dans le support de x », on entendra « q est dans un intervalle du support de x. »

On dit d'un support qu'il est *pair* (respectivement *impair*) si tous les intervalles qu'il contient sont pairs (respectivement impairs). On dit d'un support qu'il n'*a pas de parité* s'il n'est ni pair ni impair.

On note $I_+(x)$ (respectivement $I_-(x)$) l'intervalle du support de x qui est associé aux représentations irréductibles de plus grande (respectivement plus petite) dimension, c'est-à-dire aux indices les plus petits (respectivement les plus grands). On note $q_+(x)$ (respectivement $q_-(x)$) le plus petit (respectivement le plus grand) indice q tel que $u_q \neq 0$. On a donc $q_+(x) \in I_+(x)$ et $q_-(x) \in I_-(x)$.

Quand il n'y a de risque de confusion, on écrit I_+, I_-, q_+ et q_- pour $I_+(x)$, $I_-(x)$, $q_+(x)$ et $q_-(x)$.

Enfin, on note $k(x)$ (ou simplement k) le nombre de $t_q^i \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ différents qui apparaissent dans l'écriture (2) et $l(x)$ (ou simplement l) le nombre de $z_q^j \in \mathbb{C}^+$ différents.

2.4 Orbites des représentations réductibles

Le lemme 2 se généralise facilement au cas réductible sous la forme suivante.

Lemme 4 — *Soit x un élément de $\mathrm{P}(V)$ dont l'orbite est de dimension au plus 2. Alors $k(x) + 2l(x) \leqslant 2$.*

Notons qu'ici seule l'implication annoncée est vraie, comme nous le verrons par la suite.

On utilise à nouveau les appellations elliptique, parabolique et hyperbolique pour désigner les cas ($k = 0$, $l = 1$), ($k = 1$, $l = 0$) et ($k = 2$, $l = 0$).

Lemme 5 — *L'orbite d'un élément elliptique est toujours homéomorphe à un disque.*

Démonstration : un élément elliptique s'écrit, comme $k = 0$ et $l = 1$:

$$x = \left[u_q(z_0X + Y)^{\frac{n_q}{2}}(\overline{z_0}X + Y)^{\frac{n_q}{2}}\right]_{1\leqslant q\leqslant p}$$

et son support est nécessairement pair. Quitte à faire agir $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, on peut supposer $z_0 = i$.

Alors l'action de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ sur x s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q\,|ci+d|^{n_q}\,(zX + Y)^{\frac{n_q}{2}}(\overline{z}X + Y)^{\frac{n_q}{2}}\right]_{1\leqslant q\leqslant p}$$

où

$$z = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{ac+bd}{|ci+d|^2} + i\frac{ad-bc}{|ci+d|^2} = \frac{ac+bd}{|ci+d|^2} + i\frac{1}{|ci+d|^2}$$

donc on obtient en multipliant tous les termes par $(\operatorname{Im} z)^{\frac{n_{q+}}{2}}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q (\operatorname{Im} z)^{\frac{n_{q+}-n_q}{2}} (zX+Y)^{\frac{n_q}{2}} (\overline{z}X+Y)^{\frac{n_q}{2}} \right]_q$$

et on voit que l'orbite de x est paramétrée par z choisi dans le demi-plan de Poincaré, elle est par conséquent homéomorphe à un disque. ■

Lemme 6 — *L'orbite d'un élément parabolique dont le support est réduit à un élément est homéomorphe à un cercle.*

L'orbite d'un élément parabolique dont le support contient plusieurs éléments est homéomorphe à un cylindre

Démonstration : soit x un élément parabolique. Quitte à faire agir un élément de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, on peut supposer qu'il s'écrit

$$x = [u_q Y^{n_q}]_q$$

Un élément

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ qui fixe x doit fixer 0 (dans son action sur $\mathbb{RP}^1$) et donc vérifier $b=0$ et $d=a^{-1}$. De plus on a

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q a^{-n_q} Y^{n_q} \right]_q$$

Si le support de x est réduit à un seul intervalle I_s, la condition $b=0$ est suffisante pour que A fixe x et

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q \left(\frac{b}{d} X + Y \right)^{n_q} \right]_q$$

où $b/d \in \mathbb{RP}^1$, donc l'orbite de x est un cercle. Notons que si $d=0$, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot x = [u_q X^{n_q}]_q$$

ce qui est cohérent avec la convention $[\infty X + Y] = [X]$.

Si le support de x contient plusieurs intervalles, son stabilisateur est constitué des matrices

$$A = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$$

et on voit déjà que l'orbite de x est de dimension 2.

De plus

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q \left(bX + dY\right)^{n_q}\right]_q$$

donc un point de l'orbite de x est déterminé par un couple (b, d) de réels non tous deux nuls. Le cylindre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est naturellement homéomorphe à l'orbite de x si son support n'a pas de parité, mais est naturellement un revêtement à deux feuillets de cette orbite dans le cas contraire, car alors

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x.$$

Dans les deux cas, l'orbite de x est homéomorphe à un cylindre. ■

Enfin dans une orbite hyperbolique, en faisant agir $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ on peut trouver un élément qui s'écrit sous la forme

$$x = \left[u_q X^{\alpha_q} Y^{n_q - \alpha_q}\right]_q.$$

On définit la fonction δ qui à un élément q du support de x associe $\delta(q) = 2\alpha_q - n_q$.

Lemme 7 — *L'orbite de x est de dimension 2 si et seulement si la fonction δ est constante. Dans ce cas, on note encore δ sa valeur. Alors si $\delta = 0$ et $\alpha_{q+} - \alpha_q$ est pair pour tous les indices q du support de x, cette orbite est homéomorphe à un ruban de Möbius. Sinon, elle est homéomorphe à un cylindre. Enfin, si δ n'est pas constante, l'orbite de x est de dimension 3.*

Démonstration : un élément du stabilisateur de x doit fixer, dans l'action de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$, 0 et ∞ donc est diagonal. De plus

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q a^{2\alpha_q - n_q} X^{\alpha_q} Y^{n_q - \alpha_q}\right]$$

donc le stabilisateur de x est :

- l'ensemble des matrices diagonales de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ si δ est constante ;
- trivial sinon.

On se place maintenant dans le premier cas, où l'orbite de x est de dimension 2.

L'action d'un élément de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ sur x s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q c^{\alpha_q} d^{n_q - \alpha_q} (t_1 X + Y)^{\alpha_q} (t_2 X + Y)^{n_q - \alpha_q}\right]$$

où $t_1 = a/c$ et $t_2 = b/d$ sont des éléments de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$. En utilisant $ad - bc = 1$ et $\delta = 2\alpha_q - n_q$ et en multipliant chaque coordonnée par $d^\delta (cd)^{-\alpha_{q+}}$ on peut encore écrire

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q (t_1 - t_2)^{\alpha_{q+} - \alpha_q} (t_1 X + Y)^{\alpha_q} (t_2 X + Y)^{\alpha_q - \delta} \right]$$

en notant que si par exemple t_1 est infini, cette écriture reste cohérente quitte à renormaliser sous la forme suivante.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q X^{\alpha_q} (t_2 X + Y)^{\alpha_q - \delta} \right]$$

Un point de l'orbite de x est donc déterminé par le choix de deux points $t_1 \neq t_2$ de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$. Si δ est nul et $\alpha_{q+} - \alpha_q$ pair pour tout q dans le support de x, échanger t_1 et t_2 ne change pas le point de l'orbite considéré, celle-ci est donc paramétrée par les *paires* $\{t_1, t_2\}$ et est homéomorphe au ruban de Möbius. Sinon, l'orbite est paramétrée par les *couples* (t_1, t_2) et est homéomorphe à un cylindre. ∎

On sait d'ores et déjà que les seules orbites de dimension 1 sont les cercles paraboliques, il suffit de choisir un cercle de telles orbites pour construire un tore sur lequel $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ agit trivialement sur un facteur et toute autre surface où $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ agit algébriquement doit contenir une orbite ouverte.

2.5 Adhérences des orbites

On va maintenant étudier l'adhérence des orbites de dimension 2. Comme précédemment, on étudie successivement les cas elliptiques, paraboliques et hyperboliques.

Lemme 8 — *Considérons l'orbite $\mathcal{O}$ de*

$$x = \left[u_q (iX + Y)^{\frac{n_q}{2}} (-iX + Y)^{\frac{n_q}{2}} \right]_q .$$

Son adhérence, homéomorphe à un disque fermé, est obtenue en y ajoutant l'orbite parabolique circulaire de $[u_q Y^{n_q}]_{q \in I_+(x)}$.

L'expression $[u_q Y^{n_q}]_{q \in I_+(x)}$ représente bien un élément de $\mathrm{P}(V)$, dont tous les termes d'indice $q \notin I_+(x)$ sont nuls.

Démonstration : rappelons que les éléments de l'orbite de x s'écrivent sous la forme

$$\left[u_q (\mathrm{Im}\, z)^{\frac{n_{q+} - n_q}{2}} (zX + Y)^{\frac{n_q}{2}} (\overline{z} X + Y)^{\frac{n_q}{2}} \right]_q$$

avec $\operatorname{Im} z > 0$. Maintenant si on fait tendre z vers une limite finie $t \in \mathbb{R}$, on voit que l'élément de l'orbite de x associé tend vers

$$[u_q\,(tX+Y)^{n_q}]_{q\in I_+(x)}$$

et si on fait tendre $|z|$ vers $+\infty$, en divisant tous les termes par $|z|^{n_{q_+}}$ on voit que l'élément de l'orbite de x associé tend vers

$$[u_q X^{n_q}]_{q\in I_+(x)}$$

et l'adhérence de l'orbite de x dans $\mathrm{P}(V)$ est homéomorphe à l'adhérence du disque de Poincaré dans $\mathbb{C}$. ■

Pour le cas parabolique, on ne considère que les orbites de dimension 2 puisque les orbites de dimension 1 sont déjà fermées.

Lemme 9 — *Soit $\mathcal{O}$ l'orbite parabolique d'un élément $x = [u_q Y^{n_q}]_q$ dont le support contient au moins deux éléments. Son adhérence $\bar{\mathcal{O}}$ est obtenue en y ajoutant les orbites paraboliques de $[u_q Y^{n_q}]_{q\in I_+}$ et $[u_q Y^{n_q}]_{q\in I_-}$.*

Si le support de x est pair ou impair et $n_{q_-} = 0$, alors $\bar{\mathcal{O}}$ est homéomorphe à un disque fermé.

Si le support de x est pair ou impair et $n_{q_-} > 0$, alors $\bar{\mathcal{O}}$ est homéomorphe à un cylindre fermé.

Si le support de x n'a pas de parité et $n_{q_-} = 0$, alors $\bar{\mathcal{O}}$ est homéomorphe au plan projectif.

Enfin, si le support de x n'a pas de parité et $n_{q_-} > 0$, alors $\bar{\mathcal{O}}$ est homéomorphe à la bouteille de Klein.

Démonstration : les éléments de $\mathcal{O}$ sont de la forme

$$\left[u_q d^{n_q}\left(\frac{b}{d}X+Y\right)^{n_q}\right]_q$$

ou, pour $d=0$,

$$[u_q b^{n_q} X^{n_q}]_q$$

donc en faisant tendre (b,d) vers 0 ou vers l'infini, on voit que l'adhérence de $\mathcal{O}$ est constituée des orbites de $[u_q Y^{n_q}]_{q\in I_-}$ et $[u_q Y^{n_q}]_{q\in I_+}$.

Par ailleurs ces orbites sont paraboliques, celle de $[u_q Y^{n_q}]_{q\in I_+}$ est toujours circulaire tandis que celle de $[u_q Y^{n_q}]_{q\in I_-}$ est circulaire si $n_{q_-} > 0$ mais est réduite à un point sinon.

Enfin, on a

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \cdot [u_q Y^{n_q}]_{q\in I_\pm} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot [u_q Y^{n_q}]_{q\in I_\pm}$$

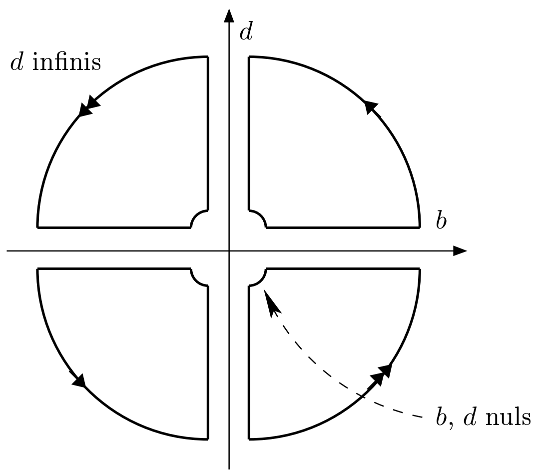

FIGURE 11 – *Paramétrage d'une orbite parabolique ouverte*

donc si le support de x est pair ou impair son orbite cylindrique se colle une fois sur chacune des orbites circulaires de son adhérence, sinon elle s'y colle en faisant deux tours. On a représenté la situation sur la figure 11. Les quatre parties sont distinctes si le support de x n'a pas de parité, sinon elles sont identifiées antipodalement. Elles se recollent de façon naturelle le long des côtés adjacents et antipodalement le long des arcs de cercle intérieurs et extérieurs.

Le résultat annoncé en découle. ■

LEMME 10 — *Soit $\mathcal{O}$ l'orbite hyperbolique d'un élément*

$$x = \left[u_q X^{\alpha_q} Y^{n_q - \alpha_q}\right]_q$$

où $\delta = 2\alpha_q - n_q$ est indépendant du choix de q dans le support de x. L'adhérence de $\mathcal{O}$ est obtenue en y ajoutant l'orbite parabolique circulaire de

$$x' = [u_q Y^{n_q}]_{q \in I_+}.$$

Si $\mathcal{O}$ est un ruban de Möbius, son adhérence est un ruban de Möbius fermé. Sinon $\mathcal{O}$ est un cylindre et son adhérence est un tore.

DÉMONSTRATION : un élément de $\mathcal{O}$ s'écrit

$$\left[u_q (t_1 - t_2)^{\alpha_{q_+} - \alpha_q} (t_1 X + Y)^{\alpha_q} (t_2 X + Y)^{\alpha_q - \delta}\right]$$

où $t_1 \neq t_2$ sont des éléments de $\mathbb{RP}^1$. Les points à ajouter pour obtenir l'adhérence de $\mathcal{O}$ s'obtiennent en faisant tendre t_1 et t_2 vers une même limite ;

dans le cas où cette limite est infinie, on peut écrire les éléments de $\mathcal{O}$ sous la forme

$$\left[u_q \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)^{\alpha_{q_+} - \alpha_q} \left(X + \frac{1}{t_1} Y\right)^{\alpha_q} \left(X + \frac{1}{t_2} Y\right)^{\alpha_q - \delta}\right]$$

pour constater que le comportement est le même : dans tous les cas, on obtient un élément de l'orbite de $[u_q Y^{n_q}]_{q \in I_+}$.

Si $\mathcal{O}$ est un ruban de Möbius, son adhérence est homéomorphe au quotient du tore $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ par l'involution qui échange les deux facteurs, donc à un ruban de Möbius fermé.

Enfin si $\mathcal{O}$ est un cylindre, son adhérence est homéomorphe au tore $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1$. ■

3 Recollements et régularité

Nous allons maintenant étudier comment les orbites de petite dimension se recollent entre elles, et avec quelle régularité.

3.1 Lemme de régularité

Nous aurons besoin d'un résultat préliminaire pour détecter les singularités.

Considérons une application $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, où $m > n$, dont les fonctions coordonnées $(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ sont des polynômes homogènes. On considère un voisinage U de 0 dans l'image de P.

Une sous-famille $(\tilde{P}_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$, où on a éventuellement permuté les indices i par rapport à la famille initiale des fonctions coordonnées de P et supprimé les polynômes constants, sera dite *bonne génératrice* si elle engendre $\mathbb{R}[P_1, \ldots, P_m]$ et si

$$\forall j \leqslant k \quad \begin{cases} \tilde{P}_j \notin \mathbb{R}[\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_{j-1}] \quad \text{et} \\ \tilde{P}_j \text{ est de degré minimal parmi les } P_i \\ \text{ avec cette propriété } (1 \leqslant i \leqslant m) \end{cases} \tag{3}$$

(en particulier, $\tilde{P}_1$ est de degré strictement positif minimal et la famille est minimale pour l'inclusion). Une famille qui vérifie la propriété 3 peut toujours être complétée en une famille bonne génératrice, on dira que c'est une *bonne famille libre*.

Lemme 11 (de régularité) — *S'il existe une bonne famille libre de cardinal strictement supérieur à n, alors U n'est pas une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^m$ de dimension n.*

Par « lisse » on entend $\mathscr{C}^\infty$.

Démonstration : on note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^n$.

Considérons une bonne famille libre $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_k$ qu'on suppose génératrice quitte à la compléter ; comme elle est minimale, aucun de ses éléments ne s'exprime comme un polynôme en ses autres éléments.

Notons maintenant $d_1, d_2, \ldots, d_\ell$ la liste strictement croissante des degrés des $\tilde{P}_i$ $(i \leqslant k)$ et n_j le nombre de $\tilde{P}_i$ de degré d_j $(j \leqslant \ell)$.

On note A_j l'ensemble des indices i tels que P_i est de degré d_j.

Si U est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^m$ de dimension n, elle est définie localement autour de 0 par une équation $h(y_1, \ldots, y_m) = 0$ où $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ est une application lisse de rang maximal et $h(0) = 0$. On va exhiber une famille libre du noyau de $dh(0)$ de cardinal k.

Considérons le développement de Taylor de h en 0 à un ordre arbitrairement grand, composons-le avec P et extrayons le terme de plus bas degré, c'est-à-dire de degré d_1 ; on obtient les équations :

$$\sum_{i \in A_1} \partial_i h_j(0) P_i(x) = 0 \quad \forall j \in [\![1, m-n]\!] \tag{4}$$

où ∂_i désigne la dérivation en la i-ième variable, h_j la j-ième fonction coordonnée de h et $x = (x_1, \ldots, x_n)$. En identifiant un polynôme homogène P_i à la liste $(p_{i,k})$ de ses coefficients, on peut récrire 4 sous une forme matricielle

$$(\partial_i h_j(0))_{j,i} (p_{i,k})_{i,k} = 0 \tag{5}$$

où l'indice i parcours A_1. Comme les $\tilde{P}_i$ de degré d_1 sont linéairement indépendants, la matrice $(p_{i,k})$ est de rang au moins n_1. On a donc une famille libre de rang n_1 dans le noyau de $dh(0)$.

Considérons maintenant le terme de degré d_2 dans le développement de Taylor de $h \circ P$. Les équations font cette fois intervenir des dérivées d'ordre supérieur de h :

$$\sum_{i \in A_2} \partial_i h_j(0) P_i(x) + \sum_{\underline{i}, \deg(P_{\underline{i}}) = d_2} \partial_{\underline{i}} h_j(0) P_{\underline{i}}(x) = 0 \tag{6}$$

où $\underline{i}$ désigne une famille d'indices $(i_1, \ldots, i_p)$, $\partial_{\underline{i}} = (1/p!) \partial_{i_1} \circ \ldots \circ \partial_{i_p}$ et $P_{\underline{i}}$ est le produit des P_i pour i parcourant $\underline{i}$. Toutefois, les termes de cette somme qui font intervenir des multi-indices s'écrivent comme des polynômes en les éléments $\tilde{P}_i$ de degré d_1. Éventuellement, certains des polynômes P_i de degré

d_2 aussi. Soit $E_1(d_2)$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d_2 qui s'écrivent comme des polynômes en les $\tilde{P}_i$ de degré d_1. Soit $E_2(d_2)$ l'espace vectoriel engendré par les $\tilde{P}_i$ de degré d_2. Par hypothèse, $E_1(d_2)$ et $E_2(d_2)$ sont en somme directe et $\dim E_2(d_2) = n_2$.

On déduit donc de (6)

$$\sum_i \partial_i h_j(0) P_i(x) = 0 \tag{7}$$

où cette fois la somme est prise sur les P_i de degré d_2 qui sont dans $E_2(d_2)$. Comme précédemment, en écrivant (7) sous forme matricielle on obtient une nouvelle famille de rang n_2 dans le noyau de $dh(0)$.

De la même façon on obtient pour chacun des degrés d_i un système du même type, qui fournit une famille de rang au moins n_i d'éléments du noyau. Ces familles sont indépendantes puisqu'elles font intervenir des dérivées différentes des h_j. Le rang de leur union est donc au moins égal à $\sum n_i = k$. Comme h est supposée de rang $m - n$, ceci impose $k \leqslant n$. ∎

3.2 Recollement des orbites elliptiques

Considérons l'orbite $\mathcal{O}$ d'un élément elliptique (dont, rappelons-le, le support est nécessairement pair) supposé sans perdre de généralité de la forme

$$x = \Big[u_q(iX+Y)^{\frac{n_q}{2}}(-iX+Y)^{\frac{n_q}{2}}\Big]_q$$

Lemme 12 — *Si la condition*

$$\frac{n_{q+} - n_q}{2} \text{ est pair pour tout } q \in I(x) \tag{8}$$

est satisfaite, alors l'union de $\mathcal{O}$, de l'orbite parabolique circulaire qui la borde et de l'orbite $\mathcal{O}'$ de l'élément hyperbolique

$$\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{n_{q+}-n_q}{4}} u_q X^{\frac{n_q}{2}} Y^{\frac{n_q}{2}}\right]_q$$

est une sous-variété analytique de $\mathrm{P}(V)$*, homéomorphe au plan projectif réel, et l'action de* $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ *y est analytiquement conjuguée à ρ_2.*

Alors en particulier l'action de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ *sur $\bar{\mathcal{O}}$ est analytiquement conjuguée à la compactification projective.*

Si la condition (8) *n'est pas vérifiée, notons $2k+1$ le plus petit nombre impair parmi les* $(n_{q+} - n_q)/2$. *Alors $\bar{\mathcal{O}}$ est $\mathscr{C}^k$ conjuguée à la compactification projective.*

DÉMONSTRATION : supposons tout d'abord que la condition (8) est vérifiée. Remarquons qu'alors la topologie annoncée est plausible puisque l'on est exactement dans le cas où $\mathcal{O}'$ est un ruban de Möbius.

On cherche une application ϕ qui conjugue ρ_2 à l'action de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ au moins sur $\mathcal{O}$, on cherchera ensuite à la prolonger. Considérons la carte affine $\{[aX^2+bXY+(1-a)Y^2]; a,b\in\mathbb{R}\}$ de $\mathrm{P}(\mathbb{R}_2[X,Y])$: elle en contient l'unique orbite elliptique. On peut choisir arbitrairement l'image d'un point elliptique fixé. Choisissons par exemple $\phi([X^2+Y^2])=x$; cette condition et l'équivariance imposent la valeur de ϕ sur l'adhérence de l'orbite elliptique. Un calcul direct montre que pour $b^2-4a(1-a)\leqslant 0$ on a

$$\begin{aligned}\phi\left(\left[aX^2+bXY+(1-a)Y^2\right]\right) &= \Bigg[u_q\left(a(1-a)-\frac{b^2}{4}\right)^{\frac{n_{q_+}-n_q}{4}} \\ &\qquad (aX^2+bXY+(1-a)Y^2)^{\frac{n_q}{2}}\Bigg]_q\end{aligned}$$

Ainsi définie ϕ se prolonge naturellement à toute la carte affine, puis par équivariance à tout $\mathrm{P}(\mathbb{R}_2[X,Y])$. La condition (8) assure qu'elle est analytique et les coefficients de plus haut degré qu'elle est partout de rang 2. C'est donc un plongement analytique équivariant, on vérifie facilement que l'image de l'orbite hyperbolique est $\mathcal{O}'$ en faisant tendre b vers l'infini avec a fixé.

Dans le cas où (8) n'est pas vérifiée, la même application ϕ réalise une conjugaison, cette fois seulement $\mathscr{C}^k$, entre la compactification projective et $\bar{\mathcal{O}}$, qui est alors une sous-variété $\mathscr{C}^k$. ■

LEMME 13 — *S'il existe un indice q_{2+} dans le support de x tel que*

$$\frac{n_{q_+}-n_{q_{2+}}}{2}=1$$

alors l'union de $\mathcal{O}$, de l'orbite parabolique circulaire de

$$y=[u_qY^{n_q}]_{q\in I_+(x)}$$

qui la borde et de l'orbite elliptique $\mathcal{O}'$ de

$$x'=\left[u_q(-1)^{\frac{n_{q_+}-n_q}{2}}(iX+Y)^{\frac{n_q}{2}}(-iX+Y)^{\frac{n_q}{2}}\right]_q$$

est une sous-variété analytique de $\mathrm{P}(V)$*, homéomorphe à une sphère, et l'action de* $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ *y est analytiquement conjuguée à son action sur la sphère de Riemann.*

Démonstration : à nouveau, on peut donner explicitement une conjugaison ψ naturelle entre l'action de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ sur l'union de $\bar{\mathcal{O}}$ et $\mathcal{O}'$ et sur la sphère de Riemann par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}\mathrm{P}^1 & \longrightarrow & \mathrm{P}(V) \\ [a+ib:1] & \longmapsto & \left[u_q b^{\frac{n_{q_+}-n_q}{2}}((a+ib)X+Y)^{\frac{n_q}{2}}((a-ib)X+Y)^{\frac{n_q}{2}}\right]_q \\ [1:0] & \longmapsto & [u_q X^{n_q}]_{q\in I_+(x)}. \end{array}$$

Ainsi définie, ψ est analytique, et les coefficients de $\psi[a+ib:1]$ de plus petit degré sont $u_{q2+}b$ et $u_{q_+}n_{q_+}a$ donc ψ est partout de rang 2. ∎

Lemme 14 — *S'il existe des indices q pour lesquels $(n_{q_+}-n_q)/2$ est impair mais que le plus petit d'entre eux est au moins égal à 3, alors $\bar{\mathcal{O}}$ n'est pas une sous-variété (à bord) lisse de* $\mathrm{P}(V)$*.*

Démonstration : considérons l'application ψ définie dans la démonstration du lemme 13. Alors $\bar{\mathcal{O}}$ est l'image par ψ de l'adhérence du demi-plan supérieur. Si $\bar{\mathcal{O}}$ était une sous-variété lisse, il existerait une application lisse h, de corang 2 et définissant un prolongement de $\bar{\mathcal{O}}$ dans un voisinage de $\psi(0)$. Alors $h\circ\psi$ serait lisse et nulle dans un demi voisinage de 0, ce qui suffit pour utiliser le lemme de régularité.

La coordonnée non constante de ψ de plus bas degré est, à une constante près, a. La coordonnée de plus bas degré qui n'est pas un polynôme en a est, toujours à une constante près, a^2+b^2. Mais la coordonnée de plus bas degré qui n'est pas un polynôme en a et a^2+b^2 est b^{2k+1} où $2k+1$ est le plus petit entier impair parmi les $(n_{q_+}-n_q)/2$. La famille (a,a^2+b^2,b^{2k+1}) est une bonne famille libre donc d'après le lemme de régularité $\bar{\mathcal{O}}$ ne peut pas être une sous-variété de dimension 2 ne serait-ce que lisse de $\mathrm{P}(V)$. Sa dimension topologique est 2, donc elle n'est pas lisse. ∎

D'ors et déjà on voit que le théorème D découle de la discussion page 38 et des lemmes 12, 13 et 14. En effet `isom` n'est conjugué qu'aux orbites elliptiques. De plus on obtient le résultat suivant.

Théorème 15 — *En dimension 2, une réalisation algébrique lisse de* `proj` *ou $\mathscr{C}^1$ de* `conf` *est toujours analytique, mais il existe des réalisations $\mathscr{C}^k$ non $\mathscr{C}^{k+1}$ de* `proj` *pour tout entier k.*

3.3 Recollement des orbites paraboliques

On considère l'orbite $\mathcal{O}$ d'un élément parabolique $x=[u_qY^{n_q}]_q$. On suppose que cette orbite est de dimension 2, c'est-à-dire que le support de x

contient plusieurs intervalles I_s distincts. Comme on l'a vu dans le lemme 9, l'adhérence de $\mathcal{O}$ s'écrit sous la forme

$$\bar{\mathcal{O}} = \left\{ \left[u_q d^{n_q - n_{q-}} (tX+Y)^{n_q} \right]_q ; d \in \mathbb{R} \cup \pm\infty, t \in \mathbb{RP}^1 \right\}$$

avec les conventions habituelles. Par exemple

$$\left[u_q (-\infty)^{n_q - n_{q-}} (tX+Y)^{n_q} \right]_q = \left[u_q (-1)^{n_q - n_{q-}} (tX+Y)^{n_q} \right]_{q \in I_+(x)}.$$

Soit q_{2+} un indice du support de x tel que $n_{q_{2+}} < n_{q_+}$ et $n_{q_{2+}}$ est maximal avec cette propriété. De même on note q_{2-} un indice du support de x tel que $n_{q_{2-}} > n_{q_-}$ et $n_{q_{2-}}$ est minimal avec cette propriété. On dira que le support de x est *régulier* si toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) si $n_{q_-} = 0$ alors $n_{q_{2-}} = 1$;

(ii) on a $n_{q_+} - n_{q_{2+}} = n_{q_{2-}} - n_{q_-}$;

(iii) pour tout indice q du support de x, $n_{q_{2\_}} - n_{q_-}$ divise $n_q - n_{q_-}$.

Lemme 16 — *Si $\bar{\mathcal{O}}$ est une sous-variété lisse de* $\mathrm{P}(V)$*, alors le support de x est régulier.*

Démonstration : Commençons par supposer que $n_{q_-} = 0$ et $n_{q_{2-}} > 1$. Au voisinage du point $[u_q Y^{n_q}]_{q \in I_-}$ correspondant aux paramètres $t = 0$ et $d = 0$, $\bar{\mathcal{O}}$ s'écrit comme l'image de

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \bar{\mathcal{O}} \\ (t,d) & \longmapsto & \left[u_q d^{n_q - n_{q-}} (tX+Y)^{n_q} \right]_q . \end{array}$$

Les coordonnées homogènes $d^{n_{q_{2-}}}$ et $td^{n_{q_{2-}}}$ forment une bonne famille libre des coordonnées de cette application mais n'est pas génératrice puisqu'une des coordonnées est proportionnelle à $t^2 d^{n_{q_{2-}}}$, il y a donc une bonne famille libre comptant au moins 3 éléments et $\bar{\mathcal{O}}$ n'est pas une sous-variété lisse de $\mathrm{P}(V)$.

On suppose maintenant que $\bar{\mathcal{O}}$ est une sous-variété lisse de $\mathrm{P}(V)$, et donc d'après ce qui précède que la condition (i) est vérifiée.

Montrons que la condition (iii) est vérifiée. Pour cela il suffit de considérer la même application que précédemment : t, $d^{n_{q_{2-}} - n_{q_-}}$ est une bonne famille libre donc doit être génératrice, et comme on a des coordonnées proportionnelles à $d^{n_q - n_{q_-}}$ pour tous les indices q dans le support de x, nécessairement $n_{q_{2\_}} - n_{q_-}$ divise $n_q - n_{q_-}$.

Maintenant en considérant le voisinage du point $[u_q Y^{n_q}]_{q \in I_+}$ correspondant aux paramètres $d = +\infty$ et $t = 0$ et en utilisant un changement de coordonnées $f = d^{-1}$, on peut écrire localement $\bar{\mathcal{O}}$ comme l'image de l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \bar{\mathcal{O}} \\ (t,f) & \longmapsto & \left[u_q f^{n_{q+}-n_q}(tX+Y)^{n_q}\right]_q \end{array}$$

et en considérant la famille t, $f^{n_{q+}-n_{q2+}}$ on voit que pour tout q, $n_{q+} - n_{q2_+}$ divise $n_{q+} - n_q$. Alors $n_{q+} - n_{q2_+}$ divise $n_{q2_-} - n_{q-}$ et inversement, donc la propriété (ii) est bien vérifiée. ■

Lemme 17 — *Si le support de x est régulier, alors $\bar{\mathcal{O}}$ est une sous-variété analytique réelle de* P(V). *De plus les adhérences de deux orbites paraboliques de dimension 2 sont analytiquement conjuguées si et seulement si elles ont la même topologie et la même valeur pour $n_{q2-} - n_{q-}$.*

Démonstration : supposons d'abord que n_{q_-} est non nul. Alors en effectuant un changement de variable $e = d^{n_{q2-}-n_{q-}}$ on obtient un plongement

$$(e,t) \longmapsto \left[u_q e^{j_q}(tX+Y)^{n_q}\right]$$

où on a noté $j_q = (n_q - n_{q-})/(n_{q2-} - n_{q-})$. Cette application clairement analytique est bien un plongement pour e et t finis car $j_{q2-} = 1$. Au voisinage des points pour lesquels e ou t est infini, il suffit d'effectuer un changement de coordonnées *ad hoc* pour construire un plongement similaire, en utilisant la propriété (ii).

Si n_{q_-} est nul, l'application

$$(b,d) \longmapsto \left[u_q d^{n_q}\left(\frac{b}{d}X+Y\right)^{n_q}\right]$$

fait alors l'affaire grâce à la condition (i).

De plus les plongements que l'on vient d'exhiber permettent de conjuguer analytiquement les adhérences d'orbites partageant la même topologie et la même valeur pour $n_{q2_-} - n_{q_-}$. ■

Il reste maintenant à comprendre comment les différentes orbites paraboliques de dimension 2 se collent analytiquement entre elles. Remarquons que d'après les résultats qui suivent elles se collent bien entre elles et pas avec des orbites d'un autre type, ce qui est naturel puisqu'elles sont « moralement » associées à l'annulation du discriminant d'un polynôme, grandeur analytique qui si elle s'annule sur un ouvert d'une surface connexe s'annule sur toute la surface.

Le lemme précédent donne la réponse pour les orbites dont l'adhérence est sans bord.

Proposition 18 — *Supposons que le support de x soit régulier.*

Si $n_{q_-} = 0$, alors $\bar{\mathcal{O}}$ est un plan projectif analytiquement plongé. Deux actions algébriques de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ *sur le plan projectif obtenus de cette manière sont toujours analytiquement conjuguées.*

Si n_{q_-} est non nul et $n_{q_{2-}} - n_{q_-}$ est impair, alors $\bar{\mathcal{O}}$ est une bouteille de Klein analytiquement plongée et la classe de conjugaison analytique de l'action de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ *est déterminée par $n_{q_{2-}} - n_{q_-}$. Il en existe donc une infinité dénombrable.*

Démonstration : il suffit de remarquer que le support de x a une parité si et seulement si $n_{q_{2-}} - n_{q_-}$ est pair. Tout découle alors du lemme 17 et de la définition d'un support régulier. ∎

Il reste à s'occuper du cas des orbites dont l'adhérence est un cylindre fermé, le cas du disque étant écarté par la condition de régularité (i).

Rappelons qu'on note $j_q = (n_q - n_{q_-})/(n_{q_{2-}} - n_{q_-})$ pour tout indice q du support de x.

On définit les éléments suivants de $\mathrm{P}(V)$:

$$\begin{aligned} x' &= \left[(-1)^{j_q} u_q Y^{n_q}\right]_q \\ x'' &= \left[(-1)^{j_{q+}} u_q Y^{n_q}\right]_q \\ x''' &= \left[(-1)^{j_{q+}-j_q} u_q Y^{n_q}\right]_q \end{aligned}$$

et on note $\mathcal{O}'$, $\mathcal{O}''$ et $\mathcal{O}'''$ leurs orbites respectives.

Proposition 19 — *Supposons que $\bar{\mathcal{O}}$ est un cylindre fermé analytiquement plongé dans $\mathrm{P}(V)$, c'est-à-dire que le support de x est régulier, n_{q_-} est non nul et $n_{q_{2-}} - n_{q_-}$ est pair.*

Si j_{q_+} est pair, l'union de $\bar{\mathcal{O}}$ et de $\bar{\mathcal{O}}'$ est un tore analytiquement plongé.

Si j_{q_+} est impair, l'union de $\bar{\mathcal{O}}$, $\bar{\mathcal{O}}'$, $\bar{\mathcal{O}}''$ et $\bar{\mathcal{O}}'''$ est un tore analytiquement plongé.

On obtient ainsi deux famille infinies dénombrables d'action analytiques algébriques de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ *sur le tore, l'une avec deux orbites ouvertes l'autre avec quatre.*

Démonstration : appelons « bord inférieur » de $\mathcal{O}$ l'orbite circulaire de $[u_q Y^{n_q}]_{q\in I_-}$ et « bord supérieur » celle de $[u_q Y^{n_q}]_{q\in I_+}$. On utilisera la même terminologie pour les bords des autres orbites considérées.

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ ont toujours le même bord inférieur. De plus, elles ont même bord supérieur si et seulement si j_{q_+} est pair (auquel cas $x'' = x$ et $x''' = x'$).

Si au contraire j_{q+} est impair, $\mathcal{O}'$ a le même bord supérieur que $\mathcal{O}''$, qui a le même bord inférieur que $\mathcal{O}'''$, qui elle-même a le même bord supérieur que $\mathcal{O}$.

Il ne reste qu'à vérifier que tous ces recollement sont analytiques. Pour cela, le plongement qu'on a déjà utilisé

$$(e,t) \longmapsto \left[u_q e^{j_q}(tX+Y)^{n_q}\right]$$

permet de conclure. ∎

On a traité le cas de toute les orbites paraboliques et elliptiques, il ne reste donc qu'à étudier les hyperboliques pour obtenir le théorème E.

3.4 Recollement des orbites hyperboliques

On considère maintenant l'orbite $\mathcal{O}$ d'un élément hyperbolique. Son adhérence peut (voir lemme 10) être décrite ainsi :

$$\bar{\mathcal{O}} = \left\{\left[u_q(t_1-t_2)^{\alpha_{q+}-\alpha_q}(t_1X+Y)^{\alpha_q}(t_2X+Y)^{n_q-\alpha_q}\right]_q ; t_1,t_2 \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1\right\}$$

avec $\delta = 2\alpha_q - n_q$ constante sur le support de x.

Proposition 20 — *Si $\mathcal{O}$ est un ruban de Möbius (c'est-à-dire si $\delta = 0$ et $\alpha_{q+} - \alpha_q$ est pair pour tout q pris dans le support de x), alors il existe une orbite elliptique $\mathcal{O}'$ telle que l'union de $\bar{\mathcal{O}}$ et de $\mathcal{O}'$ soit une sous-variété analytique de $\mathrm{P}(V)$, et l'action de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ sur cette union est conjuguée à ρ_2.*

S'il existe un indice q_{2+} dans le support de x pour lequel $\alpha_{q+} - \alpha_{q_{2+}} = 1$, alors $\bar{\mathcal{O}}$ est une sous-variété analytique de $\mathrm{P}(V)$ et l'action de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ y est conjuguée à l'action produit naturelle sur $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1$.

Dans tous les autres cas, $\bar{\mathcal{O}}$ n'est pas une sous-variété lisse de $\mathrm{P}(V)$.

Démonstration : si $\mathcal{O}$ est un ruban de Möbius, il suffit de considérer le plongement ϕ de la démonstration du lemme 12 pour conclure.

S'il existe un indice q_{2+} dans le support de x pour lequel $\alpha_{q+} - \alpha_{q_{2+}} = 1$, on considère l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl} \theta : \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1 & \longrightarrow & \mathrm{P}(V) \\ (t_1,t_2) & \longmapsto & \left[u_q(t_1-t_2)^{\alpha_{q+}-\alpha_q}\,(t_1X+Y)^{\alpha_q}\,(t_2X+Y)^{n_q-\alpha_q}\right]_q \end{array}$$

qui est évidemment analytique et équivariante, et partout de rang 2. En effet ses applications coordonnées correspondant aux monômes $XY^{n_{q+}-1}$ et $Y^{n_{q2+}}$

sont, à une constante près, $\alpha_{q+}t_1 + (n_{q+} - \alpha_{q+})t_2$ et $t_1 - t_2$; le déterminant de la jacobienne partielle associée est $-n_{q+} \neq 0$.

Pour traiter le dernier cas, on va utiliser à nouveau le lemme de régularité. On peut encore voir $\mathcal{O}$ comme l'image de l'application θ, mais cette dernière n'est plus un plongement. On cherche donc à exhiber une bonne famille libre de ses applications coordonnées comptant au moins 3 éléments.

Commençons avec le polynôme

$$P_1(t_1, t_2) = \alpha t_1 + \beta t_2$$

où on a noté $\alpha = \alpha_{q+}$ et $\beta = n_{q+} - \alpha_{q+}$. C'est le seul candidat pour démarrer la famille bonne génératrice puisque c'est le seul à être de degré 1. On peut continuer avec n'importe quel polynôme de degré 2 qui ne soit pas un polynôme en P_1, par exemple le coefficient d'un terme en $X^2Y^{n_{q+}-2}$:

$$P_2(t_1, t_2) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t_1^2 + \alpha\beta t_1 t_2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2}t_2^2.$$

Si (P_1, P_2) n'est pas une famille génératrice, on peut la compléter en une famille bonne génératrice, qui comptera au moins 3 éléments. Il nous suffit donc de trouver une application coordonnée de θ qui n'appartienne pas à $\mathbb{R}[P_1, P_2]$. On distingue deux cas, selon que δ est nul ou non.

Commençons par supposer $\delta = 0$. Alors il y a au moins un nombre impair supérieur ou égal à 3, notons-le k, parmi les $\alpha_{q+} - \alpha_q$. Sinon $\mathcal{O}$ serait un ruban de Möbius, cas déjà traité. De plus $\delta = 0$ implique $\alpha = \beta$ donc P_1 et P_2 sont des polynômes symétriques. On exhibe alors, parmi les applications coordonnée de θ, le polynôme

$$P_3(t_1, t_2) = (t_1 - t_2)^k$$

qui, n'étant pas symétrique, n'appartient pas à $\mathbb{R}[P_1, P_2]$.

Supposons maintenant $\delta \neq 0$. Alors $\alpha \neq \beta$, et on considère le polynôme correspondant à un coefficient en $X^3Y^{n_{q+}-3}$

$$\begin{aligned} P_3(t_1, t_2) \quad &= \quad \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}t_1^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\beta t_1^2 t_2 \\ &\quad\quad + \alpha\frac{\beta(\beta-1)}{2}t_1 t_2^2 + \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{6}t_2^3. \end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs, remarquons qu'en posant

$$\tilde{P}_2(t_1, t_2) = \alpha t_1^2 + \beta t_2^2$$

on a $\mathbb{R}[P_1, P_2] = \mathbb{R}[P_1, \widetilde{P}_2]$. En utilisant $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, un calcul montre que P_3 ne s'écrit pas comme un polynôme en P_1 et $\tilde{P}_2$. ■

Chapitre IV

Espaces symétriques à courbure négative

> Donnerwetter ! Une nouvelle machinerie incongrue ! Quel peut bien en être l'usage ?
>
> A. Ayroles et J.-L. Masbou,
> *Le Mystère de l'île étrange*

L'objet de ce chapitre est d'étudier une classe d'espaces qui généralise l'espace hyperbolique réel : les espaces symétriques. On se limitera aux espaces à courbure négative, ce dernier adjectif étant à entendre au sens large.

On s'attardera surtout sur les espaces dits de rang supérieur, dont les compactifications différentiables feront l'objet du chapitre suivant.

Ce chapitre ne contient pas de résultat nouveau mais se veut une exposition concise du matériel minimal à posséder pour le chapitre suivant. En particulier, très peu de démonstrations sont données.

1 Généralités sur les espaces symétriques

Pour cette section, les deux principales références utilisées sont les ouvrages de Helgason [24] et Eberlein [14].

1.1 Définition

Les espaces symétriques à courbure négative sont des cas (très) particuliers d'espaces de Hadamard (voir I–3). On commence par construire sur ces derniers une transformation naturelle.

Inversions géodésiques

Considérons donc un espace de Hadamard M et fixons-en un point x. Pour tout autre point y de M, on sait qu'il existe une unique géodésique γ_{xy} telle que $\gamma_{xy}(0) = x$ et $\gamma_{xy}(1) = y$. On définit maintenant l'*inversion géodésique* centrée en x comme l'application $s_x : y \mapsto \gamma_{xy}(-1)$ (figure 12). Elle est conjuguée à l'application $-\mathrm{Id}$ de T_xM par l'exponentielle, donc c'est un difféomorphisme de M. On obtient ainsi une inversion pour chaque point de M.

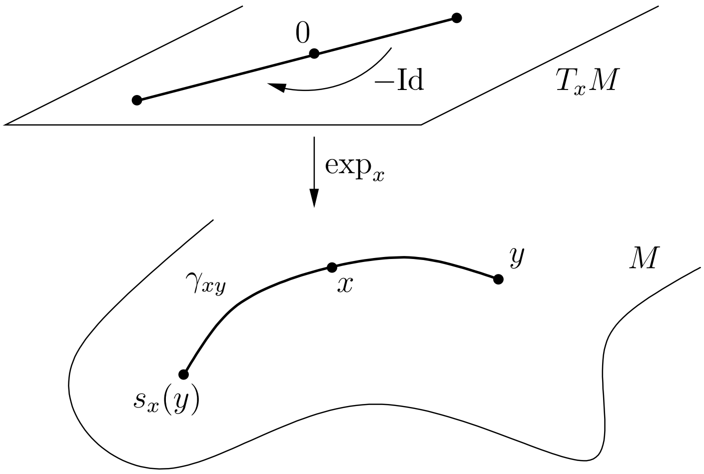

FIGURE 12 – *Inversion géodésique*

DÉFINITION 1 (ESPACE SYMÉTRIQUE) — *Un* espace symétrique *(à courbure négative) est un espace de Hadamard dont toutes les inversions géodésiques sont des isométries.*

Remarquons bien qu'on ne demande pas que les inversions géodésiques soient dans la composante neutre du groupe des isométries.

Cette définition est beaucoup plus restrictive qu'elle peut le paraître. En particulier, l'inversion géodésique par rapport au milieu d'un segment géodésique échange les extrémités de celui-ci, ce qui montre que tout espace symétrique est homogène.

À titre d'exemple, signalons que $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ sont des espaces symétriques. Remarquons également qu'un produit d'espaces symétriques est encore un espace symétrique.

En fait, les espaces symétriques forment une classe fondamentale mais restreinte, et on dispose d'une classification complète. À ce sujet, on peut consulter de nombreux ouvrages parmi lesquels [24]. Brièvement, disons qu'un espace homogène peut s'écrire sous la forme d'un quotient de groupes G/K où G est le groupe des isométries et K le stabilisateur d'un point. Dans le cas d'un espace symétrique, il s'avère (voir par exemple [14] 2.1) que G est toujours le produit d'un groupe d'isométries affines $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^r) = \mathrm{O}(r) \ltimes \mathbb{R}^r$ et d'un groupe semi-simple (une définition est rappelée en 1.3). Comme il est possible de classifier complètement ces derniers, on classifie du même coup les espaces symétriques.

Décomposition de de Rham

Une variété riemannienne M complète et simplement connexe se décompose toujours comme un produit d'un espace euclidien et de variétés riemanniennes irréductibles, c'est-à-dire ne s'écrivant pas elles-mêmes comme des produits Cette décomposition est unique à permutation près et on l'appelle *décomposition de de Rham* (voir [35], chapitre IV, théorème 6.2).

De plus, la composante neutre du groupe des isométries de M est le produit des composantes neutres des groupes d'isométries des facteurs. Le groupe total des isométries de M est un peu plus compliqué puisqu'une isométrie peut permuter des facteurs isométriques. Toutefois, à indice fini près il se décompose de la même façon.

Dans le cas où M est un espace symétrique à courbure négative, on dit qu'il est *de type non compact* s'il n'a pas de facteur euclidien. On aura besoin d'étudier le cas général, mais parfois on se placera par commodité dans le cas « type non compact ». L'écriture sous forme d'un produit permettra alors de généraliser après coup.

1.2 Rang et courbure

On sépare usuellement les espaces symétriques en deux catégories : les espaces de *rang* 1 et les espaces de *rang supérieur*. Une façon de voir est de dire qu'un espace est de rang 1 s'il est à courbure strictement négative et qu'il est de rang supérieur sinon, c'est-à-dire si sa courbure sectionnelle s'annule sur certains 2-plans de son fibré tangent.

Toutefois cette définition n'est pas quantitative, elle ne rend pas compte de la quantité de 2-plans où la courbure sectionnelle s'annule. C'est cette lacune qui motive la définition suivante.

Définition 2 (rang et plats) — *On appelle* rang *d'un espace symétrique à courbure négative la dimension maximale d'un espace euclidien plongé isométriquement et totalement géodésiquement.*

On appelle plat *l'image d'un tel plongement maximal.*

Une espace est dit de rang supérieur *si son rang est au moins égal à 2.*

Rappelons qu'une sous-variété V d'un espace riemannien (M, q) est dite *totalement géodésique* si toute géodésique de V (pour la métrique induite par q) est également une géodésique de M.

Cette définition de rang supérieur est équivalente à la première qu'on a donnée. En effet, l'espace tangent à un plat est de courbure sectionnelle nulle. Dans l'autre sens, l'image par l'exponentielle d'un 2-plan de courbure sectionnelle nulle est un plongement isométrique et totalement géodésique de $\mathbb{R}^2$.

Enfin, notons la formule suivante concernant le rang d'un produit :

$$\operatorname{rang}(M_1 \times M_2) = \operatorname{rang} M_1 + \operatorname{rang} M_2$$

et sa conséquence immédiate : un espace de rang 1 est nécessairement irréductible. Par contre, c'est loin d'être une condition suffisante : il existe de nombreux espaces irréductibles de rang supérieur.

1.3 Décomposition de Cartan

Considérons un espace symétrique M. On le suppose dans un premier temps de type non compact. On note G son groupe d'isométries et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de ce dernier.

Forme de Killing

Comme sur n'importe quelle algèbre de Lie on définit sur $\mathfrak{g}$ la *représentation adjointe* $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ par :

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{ad} X : \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ Y & \longmapsto & [X, Y]. \end{array}$$

On dispose alors d'une forme bilinéaire symétrique invariante par automorphismes, appelée *forme de Killing*, définie par

$$B(X, Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y).$$

Une algèbre de Lie est dite *simple* si elle n'est pas abélienne et n'admet aucun idéal propre non trivial et *semi-simple* si elle admet une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$ où les $\mathfrak{g}_i$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$ qui sont aussi des algèbres de Lie simples. Quand elle existe, une telle décomposition est unique et les seuls idéaux de $\mathfrak{g}$ sont les sommes de $\mathfrak{g}_i$. Le critère de Cartan permet de caractériser les algèbres de Lie semi-simples : ce sont exactement celles dont la forme de Killing est non dégénérée. Il se trouve que dans notre cas (M symétrique de type non compact), $\mathfrak{g}$ est toujours semi-simple. Rappelons qu'on dit d'un groupe de Lie qu'il est *semi-simple* si son algèbre de Lie est semi-simple.

La décomposition d'une algèbre semi-simple en idéaux simples permet de simplifier sa compréhension : en effet $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ et $B(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) = 0$ si $i \neq j$. En particulier la restriction de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ à l'un des facteur $\mathfrak{g}_i$ est la forme de Killing de $\mathfrak{g}_i$ en tant qu'algèbre de Lie (en fait c'est vrai en général pour un idéal).

Inversion de Cartan

Fixons maintenant un point $x \in M$. Son stabilisateur K est un sous-groupe compact maximal de G et on en note $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie. L'inversion géodésique s_x étant par hypothèse une isométrie de M, elle agit par conjugaison sur G. On note σ_x l'involution ainsi obtenue :

$$\begin{aligned} \sigma_x : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto s_x \circ g \circ s_x. \end{aligned}$$

En différenciant en l'élément neutre, on obtient l'action adjointe de σ_x sur $\mathfrak{g}$:

$$\theta_x = \mathrm{Ad}\,\sigma_x = d_e\sigma_x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}.$$

Cet automorphisme θ_x est appelé *involution de Cartan* au point x.

Comme c'est une involution, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 et -1. Comme $d_x s_x$ est égale à $-\mathrm{Id}$ et qu'une isométrie est entièrement définie par sa valeur et sa différentielle en un point, on voit que $\mathfrak{k}$ est incluse dans l'espace propre associé à la valeur propre 1. On voit facilement qu'il y en fait égalité et on note $\mathfrak{p}$ l'espace propre associé à la valeur propre -1.

Par ailleurs le choix de x donne également une application de G sur M encore notée x et définie par $x(g) = g(x)$. En prenant la différentielle en l'élément neutre e, on obtient une application $d_e x$ de $\mathfrak{g}$ sur $T_x M$, dont le noyau est exactement $\mathfrak{k}$. En conséquence, $d_e x$ réalise un isomorphisme linéaire entre $\mathfrak{p}$ et $T_x M$.

On obtient ainsi une décomposition, appelée *décomposition de Cartan* :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

qui, vu que θ_x préserve le crochet, vérifie :

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}, \quad \text{et } [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k} \tag{1}$$

et où $\mathfrak{p}$ s'identifie naturellement avec l'espace tangent en x. De plus la forme de Killing est définie négative sur $\mathfrak{k}$, définie positive sur $\mathfrak{p}$ et ces deux sous-espaces sont orthogonaux.

Avec un facteur euclidien

Quand M possède un facteur euclidien, les choses sont un peu différentes.

Par exemple, si le facteur euclidien est de dimension 1, l'algèbre de Lie $\mathbb{R}$ étant abélienne sa forme de Killing est nulle.

Plus généralement, la décomposition $M = \mathbb{R}^r \times M'$ où M' est de type non compact donne une décomposition $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^r) \times G'$, où G' est semi-simple, qui passe au niveau de l'algèbre de Lie : $\mathfrak{g} = \mathfrak{isom}(\mathbb{R}^r) \oplus \mathfrak{g}'$ où $\mathfrak{g}'$ est semi-simple et $[\mathfrak{isom}(\mathbb{R}^r), \mathfrak{g}'] = 0$. Il suffit donc de comprendre l'algèbre de Lie $\mathfrak{isom}(\mathbb{R}^r)$, or celle-ci se décompose sous la forme $\mathfrak{so}(r) \oplus \mathbb{R}^r$ où $\mathfrak{so}(r)$ est l'algèbre des matrices $r \times r$ antisymétriques et $\mathbb{R}^r$ est l'algèbre abélienne de dimension r. Le crochet est donné par $[u, A] = Au$ pour $A \in \mathfrak{so}(r)$ et $u \in \mathbb{R}^r$, Au représentant l'action usuelle d'une matrice sur un vecteur colonne. Le calcul de la forme de Killing en découle : sur $\mathfrak{so}(r)$ on a $B(A, A) = -2\,\mathrm{tr}({}^tAA)$ et B y est définie négative (remarquons que $\mathfrak{so}(r)$ n'est pas un idéal de $\mathfrak{isom}(\mathbb{R}^r)$ donc la restriction de B n'a aucune raison d'y être égale à la forme de Killing de $\mathfrak{isom}(\mathbb{R}^r)$; qu'elle le soit à un facteur 2 près semble assez étonnant). Maintenant sur $\mathbb{R}^r$, qui est un idéal abélien, B est nécessairement nulle.

1.4 De l'algèbre à la géométrie

On a donné une définition géométrique d'un espace symétrique, et on en a déduit des propriétés algébriques sur l'algèbre de Lie de son groupe d'isométries. On va maintenant voir comment l'algèbre de Lie décrit à son tour la géométrie de M. On suppose à nouveau M de type non compact.

La forme de Killing et la métrique riemannienne

On note q la métrique riemannienne sur M. Comme on dispose d'une identification $d_ex : \mathfrak{p} \to T_xM$ et que T_xM est muni d'un produit scalaire q_x, on peut tirer celui-ci en arrière sur $\mathfrak{p}$. Alors l'action adjointe de K laisse $\mathfrak{p}$ et le produit scalaire obtenu invariants. En fait, ce dernier est presque la restriction à $\mathfrak{p}$ de la forme de Killing. Le « presque » vient de la possible réductibilité de M. En effet si M est un produit $M_1 \times \cdots \times M_m$, en multipliant les métriques sur les facteurs par des constantes positives on ne change pas la composante neutre de G. La situation est la meilleure possible : B et le tiré en arrière de q_x sur $\mathfrak{p}$ coïncident quitte à multiplier q_x par des constantes $\mu_i > 0$ le long des facteurs T_xM_i ([14] 2.3.11).

Systèmes triples de Lie et sous-variétés totalement géodésiques

Commençons par considérer les sous-variétés totalement géodésiques les plus simples. Les géodésiques de M passant par x sont exactement les

$$\gamma_X : t \longmapsto \exp(tX)x$$

où $X \in \mathfrak{p}$: la correspondance entre T_xM et l'ensemble des géodésiques passant par x s'étend à $\mathfrak{p}$ *via* d_ex.

Pour étendre cette correspondance à des sous-variétés de dimension plus grande, on définit un *système triple de Lie* comme un sous-espace $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{p}$ qui vérifie $[[\mathfrak{s},\mathfrak{s}],\mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$. Alors étant donné un sous-espace $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{p}$, la sous-variété $\exp(\mathfrak{s})x$ est totalement géodésique si et seulement si $\mathfrak{s}$ est un système triple de Lie. De plus on obtient ainsi toutes les sous-variétés totalement géodésiques de M passant par x ([24] IV-7).

Par exemple, d'après (1), $\mathfrak{p}$ est un système triple de Lie ; la sous-variété totalement géodésique associée est M elle-même.

Crochets et tenseur de courbure

Le tenseur de courbure de Riemann de M est directement lié au crochet sur $\mathfrak{g}$: si X, Y et Z sont des éléments de $\mathfrak{p}$ on a

$$R(X,Y)Z = -[[X,Y],Z] \tag{2}$$

où on a identifié les éléments de $\mathfrak{p}$ et les vecteurs tangents à x en M par l'intermédiaire de d_ex ([24] IV-4). Notons que l'on obtient bien un vecteur de T_xM puisque $\mathfrak{p}$ est un système triple de Lie.

Sous-algèbres abéliennes et plats

Considérons un plat A de M. C'est par hypothèse une sous-variété totalement géodésique et euclidienne de dimension maximale de M. Soit x un point de A et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan au point x. Soit $\mathfrak{a} = (d_ex)^{-1}(T_xA)$ le sous-espace de $\mathfrak{p}$ associé à A. Alors comme A est totalement géodésique, $\mathfrak{a}$ est un système triple de Lie. Mais comme A est plat, d'après (2), $B([[X,Y],X],Y) = 0$ pour tous X, Y dans $\mathfrak{a}$. On en déduit que $[X,Y] = 0$ et donc que $\mathfrak{a}$ est une algèbre abélienne. On voit qu'il y a une correspondance bi-univoque entre les algèbres abéliennes de dimension maximale incluses dans $\mathfrak{p}$ et les plats de M.

En particulier, on peut définir le rang de M comme la dimension d'une telle algèbre. Si on parle de G, on dira qu'il s'agit de son *rang réel*.

Remarquons que pour une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{p}$ comme pour une sous-variété euclidienne totalement géodésique de M, être maximale pour l'inclusion est équivalent à être de dimension maximale. En effet si $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ sont deux sous-algèbres abéliennes de $\mathfrak{p}$, alors il existe $k \in K$ tel que $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$ ([24] V-6) et si $y = g(x)$ est un autre point de M, alors $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p} \oplus \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{k}$ est la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ au point y.

Avec un facteur euclidien

Ce qui précède ne demande qu'un ajustement pour s'appliquer au cas où M admet un facteur abélien : la forme de Killing restreinte à $\mathfrak{p}$ et le tiré en arrière par $d_e x$ de la métrique q_x coïncident quitte à multiplier q_x par des constantes $\mu_i \geqslant 0$ le long des facteurs $T_x M_i$ où, si M_0 est le facteur euclidien, $\mu_0 = 0$ et $\mu_i > 0$ pour tout $i > 0$.

Les systèmes triples de Lie restent en bijection avec les sous-variétés totalement géodésiques de M : ceux-là sont les $\mathfrak{s} \times \mathbb{R}^s$ où $\mathfrak{s}$ est un système triple de Lie de la partie de type non compact et $\mathbb{R}^s$ est une sous-algèbre de la partie euclidienne, celles-ci sont les produits d'une variété totalement géodésique de la partie de type non compact et d'un sous-espace affine de la partie euclidienne.

La relation (2) reste valable, ainsi que la correspondance entre les sous-algèbres abéliennes maximales de $\mathfrak{p}$ et les plats : celle-là sont les produits d'une algèbre abélienne maximale de la partie de type non compacte et du facteur abélien $\mathbb{R}^r$, ceux-ci sont les produits d'un plat de la partie de type non compact et du facteur euclidien.

1.5 Espaces de rang un

Classification

Les espaces symétriques à courbure négative de rang 1 sont peu nombreux, et on en a déjà étudié puisque $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ en est le représentant le plus classique. On peut construire des analogues de ce dernier basés sur les nombres complexes ($\mathbb{C}\mathrm{H}^m$, dont la construction est détaillée dans la deuxième partie), les quaternions ($\mathbb{H}\mathrm{H}^p$) ou les octonions ($\mathbb{O}\mathrm{H}^2$, un seul espace de ce type peut être défini).

Proposition 3 — *Il n'existe pas d'autre espace symétrique à courbure négative de rang* 1 *que* $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$, $\mathbb{C}\mathrm{H}^m$, $\mathbb{H}\mathrm{H}^p$ *et* $\mathbb{O}\mathrm{H}^2$.

Voir par exemple [24] IX-4.

Une propriété particulièrement intéressante des espaces symétriques de rang 1 est de posséder une structure géométrique naturelle sur le bord.

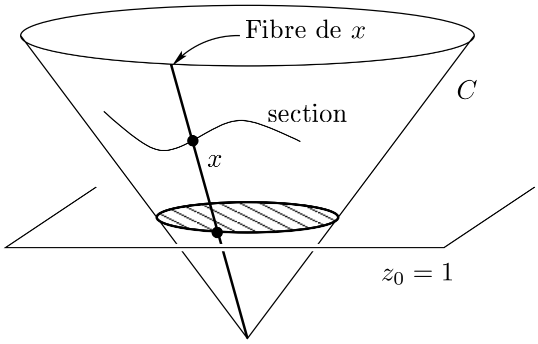

FIGURE 13 – *Construction du bord conforme de* $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$

Structure géométrique au bord

Le bord $\partial\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ de l'espace hyperbolique réel porte une structure conforme naturelle que nous allons décrire. Notons C le demi-cône isotrope $(Q = 0, y > 0)$ de l'espace de Minkowski $(\mathbb{R}^{n+1}, Q)$, privé de 0. Il se projette sur le bord de l'espace hyperbolique réel et la projection est un fibré en droites dont les fibres sont les demi-droites isotropes de Q dirigées vers le haut. La restriction de Q au plan tangent de C est une métrique sous-riemannienne, c'est-à-dire qu'on obtient pour chaque point x de C une forme quadratique positive q_x (mais pas définie positive) sur T_xC. Le noyau de cette forme quadratique est exactement l'espace tangent à la fibre en x. Ainsi, si on pousse en avant q_x par la projection $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ on obtient un produit scalaire défini positif sur $T_{\pi(x)}\partial\mathbb{R}\mathrm{H}^n$. Si on remplace x par un autre point sur la même fibre, on obtient un autre produit scalaire qui est un multiple du précédent : on vient de construire une structure conforme sur $\partial\mathbb{R}\mathrm{H}^n$. Les sections tracées sur le cône isotrope correspondent aux métriques de cette classe conforme (voir la figure 13). De plus, la construction ne fait pas intervenir de choix arbitraire et le groupe des isométries de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ agit de façon conforme sur le bord. C'en est même exactement le groupe des automorphismes conformes.

Dans la compactification conforme, en prenant dans l'intérieur de la boule la classe conforme de la métrique hyperbolique et sur le bord la structure conforme qu'on vient de définir, on obtient une structure conforme sur la boule fermée.

Il peut paraître surprenant qu'on ait pu définir la structure conforme du bord dans le cadre du modèle projectif. En fait c'est assez naturel puisque comme on l'a vu dans le chapitre II, toutes les compactifications différentiables de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ ont le même bord : elles sont différenciées par la façon dont l'intérieur se colle dessus.

Signalons enfin que la structure ainsi obtenue est la *sphère conforme standard* : elle coïncide avec la structure conforme de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. C'est l'espace modèle plat pour les structures conformes.

Le bord de l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{C}\mathrm{H}^m$ porte, lui, une *structure CR* naturelle, avec les mêmes propriétés que dans le cas réel : les isométries de l'intérieur agissent par automorphismes au bord, tout automorphisme du bord se prolonge à l'intérieur en une isométrie, la structure coïncide avec la structure standard sur la sphère unité de $\mathbb{C}^m$ qui est l'espace modèle pour les structure CR plates.

Des constructions similaire sont possible dans les cas quaternioniques et octonioniques. Pour une présentation unifiée dans le cadre des géométries de Cartan, on peut consulter [18]. Pour une interprétation en terme de dégénérescence de la métrique à l'infini, voir les travaux de Biquard [5].

2 Exemples d'espaces de rang supérieur

La façon la plus simple de construire un espace symétrique de rang supérieur est de considérer un produit. Nous allons nous préoccuper dans cette section des deux produits les plus simples : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ et $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$. Les espaces symétriques $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ sont des exemples fondamentaux, mais largement traités dans la littérature. Notons que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ est décrit dans [1].

2.1 L'exemple le plus simple

Commençons par $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$, qui a l'avantage de se dessiner facilement puisqu'il est de dimension 3. On est naturellement tenté de le dessiner cylindrique comme sur la figure 14 où on a indiqué une géodésique et, en pointillés, ses projections sur les facteurs. Toutefois, cette figure ne rend pas compte de la topologie du bord de Hadamard.

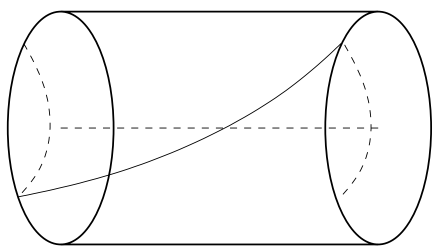

Figure 14 – *Le cylindre produit* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$

Une géodésique se projette sur des géodésiques dans chacun des deux facteurs. Les géodésiques unitaires de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ s'écrivent donc

$$\gamma = (v_0\gamma_0, v_1\gamma_1)$$

où :

– on entend par $v_i\gamma_i$ la géodésique de même lieu géométrique que γ_i mais de vitesse v_i fois plus élevée, c'est-à-dire que $v_i\gamma_i(t) = \gamma_i(v_it)$;

– les vitesses le long des facteurs vérifient $v_0^2 + v_1^2 = 1$;

– enfin γ_0 désigne l'unique géodésique directe unitaire de $\mathbb{R}$ (qu'on suppose orienté) et γ_1 est une géodésique unitaire de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$.

Quitte à changer l'orientation de γ_1, on supposera toujours $v_1 \geqslant 0$.

Introduisons pour un bref instant un peu de terminologie. On dira, dans cette section seulement, qu'une géodésique est *verticale* si sa projection sur le facteur $\mathbb{R}$ est constante, c'est-à-dire si $v_0 = 0$. On dira qu'elle est *horizontale* si sa projection sur $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ est constante ($v_1 = 0$), et qu'elle est *diagonale* si elle n'est ni horizontale ni verticale.

Deux géodésiques $(v_0\gamma_0, v_1\gamma_1)$ et $(v_0'\gamma_0, v_1'\gamma_1')$ sont asymptotes si et seulement si elles vérifient l'une des deux propriétés suivantes :

– elles sont toutes les deux horizontales et de même sens ($v_0 = v_0' = \pm 1$) ;

ou

– les projections γ_1 et γ_1' sont asymptotes et $v_0 = v_0'$.

Remarquons que puisqu'on suppose v_1 et v_1' positifs, on a nécessairement $v_1 = v_1'$.

Ainsi, toutes les géodésiques horizontales orientées dans le même sens, qui dans la figure 14 touchent à l'infini l'un des deux « couvercles » qui constituent $(\partial\mathbb{R}) \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \{\pm\infty\} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$, sont asymptotes. De même, deux géodésiques verticales dont les extrémités se projettent sur le même élément de $\partial\mathbb{R}\mathrm{H}^2$, c'est-à-dire telles que γ_1 et γ_1' sont asymptotes, sont asymptotes. Inversement, deux géodésiques diagonales peuvent avoir la même extrémité dans $\{\pm\infty\} \times \partial\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ mais ne pas être asymptotes. Cela arrive exactement quand γ_1 et γ_1' sont asymptotes mais $v_1 \neq v_1'$.

Donc pour passer du bord du cylindre au bord de Hadamard de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$, il faut écraser chacun des deux couvercles $\{\pm\infty\} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ en un point, écraser la « paroi » $\mathbb{R} \times \partial\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ en un cercle et étirer les deux cercles $\{\pm\infty\} \times \partial\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ en des anneaux. Le résultat est illustré par la figure 15.

Sur celle-ci, les deux points obtenus en écrasant les deux couvercles sont représentés avec des pointes ; ce n'est pas un hasard, on dit que ce sont des *points singuliers*. De même on dit que les géodésiques qui ont un de ces points comme extrémité (remarquons que nécessairement leur autre extrémité est l'autre point singulier puisque ce sont exactement les géodésiques

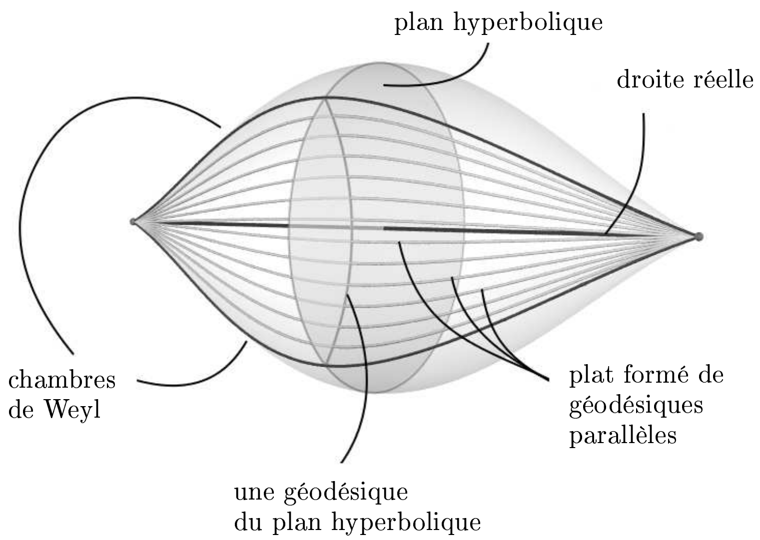

FIGURE 15 – *Compactification de Hadamard de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$

horizontales) sont *singulières*. Elles ont la particularité d'avoir une projection constante sur un des deux facteurs, mais c'est aussi le cas des géodésiques verticales qu'on qualifiera pourtant avec les géodésiques diagonales de *régulières*. La particularité qui nous intéresse est liée aux plats de notre espace.

La formule du rang d'un produit montre que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ est un espace de rang 2, il est grand temps d'en identifier les plats. Ceux-ci sont exactement les produits de plats de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$. Comme ce sont des espaces de rang 1, leurs plats correspondent à leurs géodésiques. Ainsi un plat de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ est le produit de $\mathbb{R}$ par le lieu géométrique d'une géodésique γ_1 de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$. On voit maintenant qu'une géodésique régulière est contenue dans un unique plat, tandis qu'il y en a une infinité qui contiennent une géodésique singulière donnée. C'est cette différence qu'on utilisera pour étendre les définitions au cas général.

Avant de passer à l'exemple suivant, décrivons la trace d'un plat $\mathbb{R} \times \gamma_1$ sur le bord de Hadamard. C'est simplement l'union de deux demi-cercles, chacun correspondant à un des rayon géodésiques associés à γ_1. Sur le bord de Hadamard se dessine une structure formée de points (les deux points singuliers) reliés par une famille de demi-cercles qu'on appellera *chambres de Weyl*, chaque paire de chambres pouvant être réunie en un bord de plat, qu'on appellera un *appartement*. C'est notre premier exemple d'immeuble.

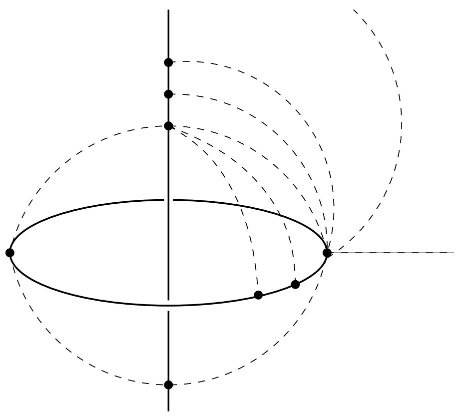

FIGURE 16 – *Le bord de* $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$

2.2 L'exemple de type non compact le plus simple

L'exemple précédent est un bon préliminaire pour étudier un exemple tout juste plus complexe, qui a l'avantage de ne pas posséder de facteur euclidien (on dira qu'il est « de type non compact ») : $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$.

Une géodésique unitaire de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ s'écrit $\gamma = (v_1\gamma_1, v_2\gamma_2)$ où γ_i est une géodésique unitaire du i-ième facteur et $v_1^2 + v_2^2 = 1$. Deux géodésiques $\gamma = (v_1\gamma_1, v_2\gamma_2)$ et $\gamma' = (v_1'\gamma_1', v_2'\gamma_2')$, où quitte à changer l'orientation des γ_i et γ_i' on suppose les v_i et v_i' positifs ou nuls, sont asymptotes si et seulement si $v_1 = v_1'$, γ_1 est asymptote à γ_1' et γ_2 est asymptote à γ_2'. Notons qu'alors nécessairement $v_2 = v_2'$.

Comme précédemment, on dit qu'une géodésique unitaire est verticale si elle se projette sur un point dans le premier facteur, horizontale si elle se projette sur un point dans le second facteur et diagonale sinon.

Les plats de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ sont exactement les produits $\gamma_1 \times \gamma_2$ des lieux géométriques de deux géodésiques, une dans chaque facteur.

Topologiquement, le bord de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ est une sphère S^3 représentée après projection stéréographique par la figure 16.

Une géodésique étant singulière si elle est contenue dans plusieurs plats, on déduit de ce qui précède que les géodésiques singulières sont exactement les géodésiques verticales ou horizontales. La classe d'asymptotie d'une géodésique verticale correspond à une classe d'asymptotie dans le second facteur donc à un point du bord de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$. De même les classes d'asymptotie des géodésiques horizontales sont en bijection avec les points du bord du premier facteur. Les points singulier de $\partial(\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2)$ forment donc deux cercles disjoints, en trait continu sur la figure.

Pour chaque paire de points singuliers, l'un correspondant à une géodésique γ_1 du premier facteur, l'autre à γ_2 dans le deuxième, on peut associer le segment des $(v_1\gamma_1, v_2\gamma_2)$ où $v_1^2 + v_2^2 = 1$ et les v_i sont strictement positifs. Ce segment (en pointillé sur la figure) relie les deux points singuliers choisis et ne dépend que des classes d'asymptoties de γ_i. Tout point du bord de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ est soit singulier, donc sur un des deux cercles singuliers, soit régulier, donc sur l'un des segments que l'on vient de construire. La sphère à l'infini est ainsi réalisée comme le *joint* des bords des facteurs. On peut définir plus généralement le joint de deux espaces topologiques X_1, X_2 comme l'union des deux espaces et d'une famille de segments reliant chaque couple de points $(p_1, p_2) \in X_1 \times X_2$.

Un plat est donné par une géodésique dans chaque facteur, donc par deux points de chaque bord. Sa trace sur la sphère à l'infini est exactement le cercle formé des quatre points singuliers définissant le plat et des quatre segments les reliant les uns aux autres.

On appelle encore chambre de Weyl les segments et appartement le bord d'un plat.

On voit dans ces deux exemples qu'entre la combinatoire du produit des compactifications (qui est naturellement une variété à bord et à coins avec les incidence face-arête que cela implique) et celle du bord de Hadamard, il semble y avoir une certaine dualité.

Question 4 — *Peut-on définir une dualité qui, à partir de la compactification géodésique, donne une compactification à bord et à coins stable par produit ?*

Par « stable par produit », on entend que la compactification du produit est le produit des compactifications.

3 Immeubles

Les exemples précédents permettent d'entrevoir une structure combinatoire que nous allons maintenant étudier *in abstracto*. Notons que les immeubles de Tits n'interviennent pas seulement dans l'étude des espaces symétriques (voir le théorème de rigidité de Mostow ou le chapitre V par exemple) mais aussi dans d'autres pans des mathématiques, comme la cohomologie des groupes.

Parmi les références sur les immeubles, citons les ouvrages de Brown [8] et de Ronan [49]. Dans chacun de ces livres, au moins deux chapitres de préliminaires précèdent la définition du mot « immeuble ». Bien que nous n'ayons besoin que de choses assez basiques, concernant un type particulier d'immeubles (à savoir ceux qui sont épais et sphériques), la construction d'une terminologie cohérente impose de passer ici aussi par quelques préliminaires.

3.1 Complexes simpliciaux

Ici la notion de complexe simplicial est à entendre au sens purement combinatoire : aucune topologie n'est impliquée.

Définition 4 — *On appelle* complexe simplicial *la donnée d'un ensemble non vide Σ, dont les éléments sont appelés* sommets*, et d'un ensemble Δ de parties de Σ, dont les éléments sont appelés* simplexes*, vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *tout singleton de Σ est un simplexe ;*

(ii) *toute partie d'un simplexe est un simplexe.*

On appelle rang *d'un simplexe son cardinal et* rang *du complexe le rang maximal d'un simplexe.*

Notons qu'avec cette définition l'ensemble vide est un simplexe, de rang nul. Comme on peut retrouver les sommets à partir de l'ensemble des simplexes, on note parfois un complexe simplicial Δ plutôt que (Σ, Δ).

On défini naturellement un *sous-complexe* de Δ comme une partie $\Delta' \subset \Delta$ telle que pour tout simplexe $A \in \Delta'$, toutes les parties de A sont également dans Δ'. L'ensemble Σ' des sommets de Δ' est alors une partie de Σ, et Δ' a bien une structure de complexe simplicial.

Soient (Σ, Δ) et (Σ', Δ') deux complexes simpliciaux et $f : \Sigma \to \Sigma'$ une application. Si pour tout simplexe $\delta \in \Delta$ on a $f(\delta) \in \Delta'$, f induit une application $\Delta \to \Delta'$ et on dit que f est un *morphisme*. Un *isomorphisme* est un morphisme bijectif dont la réciproque est également un morphisme.

La relation d'inclusion fait d'un complexe simplicial un ensemble ordonné, dans lequel deux éléments ont toujours un plus grand minorant (leur intersection). On dit que deux simplexes sont *incidents* si l'un est inclus dans l'autre.

Donnons maintenant quelques exemples. Un graphe, où les sommets forment les simplexes de rang 1 et les arêtes les simplexes de rang 2, peut être vu comme un complexe simplicial de rang 2. Une triangulation d'une variété de dimension n est un complexe simplicial de rang $n+1$ si on identifie chaque simplexe topologique à l'ensemble de ses sommets. Dans la section suivante on décrit un exemple fondamental pour la suite.

3.2 Groupes de réflexions

Retour aux exemples simples

Considérons un plat A de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ et son espace tangent T_xA en un de ses points. Ce dernier possède un hyperplan particulier H, à savoir la droite tangente à la géodésique singulière incluse dans A et passant par x. Une rotation d'un demi-tour autour de cette géodésique, restreinte à T_xA, réalise la symétrie orthogonale par rapport à H.

De la même façon, un espace tangent T_xA d'un plat de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ possède deux hyperplans particuliers H_1 et H_2, à savoir les droites tangentes aux deux géodésiques singulières (l'une horizontale, l'autre verticale) incluses dans A et passant par x. Encore une fois les symétries par rapport à H_1 et H_2 sont réalisable par des isométries de l'espace ambiant, et comme les deux droites sont orthogonales elles engendrent un groupe fini.

Dans cette section, on développe le cadre qui permettra d'énoncer la propriété générale illustrée par ces deux exemples.

Systèmes d'hyperplans

Plaçons-nous dans un espace euclidien $V = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Par *hyperplan* de V, on entend un hyperplan vectoriel. On supposera chaque hyperplan H muni d'une orientation arbitraire. À un hyperplan orienté correspond une unique forme linéaire de noyau H et de norme 1, qu'on notera encore H. Le contexte permettra toujours de déterminer si on parle de la forme ou de son noyau.

Étant donné un hyperplan H de V, on note s_H la réflexion orthogonale par rapport à H. Si on se donne un ensemble (ou *système*) $\mathscr{H}$ d'hyperplans, les réflexions associées engendrent un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ qu'on note $W(\mathscr{H})$. Un groupe obtenu de cette façon est appelé *groupe de réflexions*. Un système d'hyperplans est dit *clos* si $W(\mathscr{H})$ est fini et $\mathscr{H}$ est globalement invariant sous l'action de $\mathscr{H}$. Si $W(\mathscr{H})$ est fini, on peut compléter $\mathscr{H}$ en un système clos en ajoutant les images par $W(\mathscr{H})$ des éléments de $\mathscr{H}$.

Inversement, si on considère un groupe W de réflexions, l'ensemble des hyperplans qui sont le lieu fixe d'un élément de W est une famille invariante d'hyperplans. Il y a ainsi une bijection naturelle entre les systèmes clos d'hyperplans et les groupes finis de réflexions.

La figure 17 montre deux exemples de systèmes clos d'hyperplans. Bien que de dimensions différentes, ils sont très semblables. En particulier, leurs groupes finis de réflexions sont tous les deux isomorphes au groupe diédral D_3.

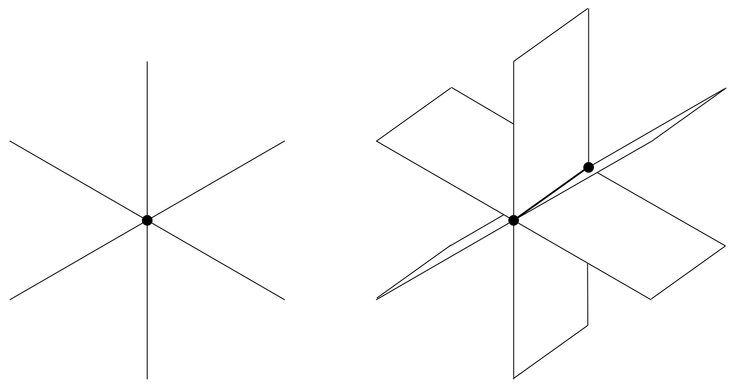

Figure 17 – *Deux systèmes d'hyperplans ayant de forts liens de parenté*

Partie essentielle

Considérons un système clos $\mathscr{H}$ d'hyperplans, dont on note simplement W le groupe fini de réflexions. Notons V_0 l'intersection des hyperplans $H \in \mathscr{H}$ et V_1 l'orthogonal de V_0 dans V. On appelle V_0 la *partie inessentielle* de $\mathscr{H}$ et V_1 sa *partie essentielle* (on les appelle aussi parties inessentielles et essentielles du groupe W). Alors $\mathscr{H}$ induit par intersection un système clos $\mathscr{H}_1$ d'hyperplans sur V_1. Le groupe de réflexions W_1 qui lui est associé est alors isomorphe à W (l'isomorphisme est simplement réalisé par l'opérateur de restriction à V_1). On dit que $\mathscr{H}$ est *essentiel* si sa partie inessentielle est triviale.

3.3 Complexes de Coxeter sphériques

Les complexes de Coxeter serviront de modèles pour les appartements des immeubles. Comme nous n'étudierons que les immeubles sphériques, nous ne définissons que les complexes de Coxeter du même nom. Nous omettrons souvent l'adjectif « sphérique » mais il sera toujours présent implicitement.

On se place encore sur un espace euclidien V dont on note S la sphère unité centrée à l'origine, et on se donne un système clos d'hyperplans $\mathscr{H} = \{H_1, \ldots, H_d\}$ dont on note W le groupe fini de réflexions.

Traces des hyperplans sur la sphère

Notons sgn la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe 1 aux nombres positif, -1 aux nombres négatifs et 0 à 0. À une famille $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ où $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout i, on associe le système d'(in)équations :

$$\operatorname{sgn} H_i(x) = \varepsilon_i$$

On dit qu'il s'agit d'une *famille consistante* si ce système admet au moins une solution dans V, et on associe alors à cette famille la partie $\phi(\mathscr{H}, \underline{\varepsilon})$ de S formée des point qui satisfont au système. Les parties de S obtenues de cette façon et sont appelées les *faces* de $\mathscr{H}$.

Remarquons qu'une face correspond à une unique famille de signe (il suffit de considérer un point dans la face et d'estimer dessus les $H \in \mathscr{H}$). L'ensemble des faces forme une partition de S privée de la partie inessentielle. L'intersection de S et de la partie inessentielle correspond à la famille nulle : $\varepsilon_i = 0, \forall i$. On l'appelle par conséquent la *face nulle*. Elle est vide si le système d'hyperplan est essentiel.

On peut munir cette partition d'une relation d'incidence naturelle en écrivant $\phi' \leqslant \phi$ si et seulement si ϕ' est incluse dans l'adhérence de ϕ. On remarque que la face nulle est ainsi incidente à toutes les autres.

Muni de cette relation d'ordre, on peut donner à l'ensemble des faces une structure de complexe simplicial de la façon suivante. Les sommets sont les faces non nulles minimales pour la relation d'incidence. Les simplexes sont les faces, chacune étant identifiée à l'ensemble des faces minimales qui lui sont incidentes. La face nulle correspond au simplexe vide.

Définition 5 (Complexe de Coxeter) — *On appelle* complexe de Coxeter sphérique *un complexe simplicial obtenu de la façon décrite ci-dessus à partir d'un système d'hyperplans clos et essentiel.*

En fait, tout système clos d'hyperplans permet de construire un complexe de Coxeter : il suffit de le restreindre à sa partie essentielle. Par la suite, quand on ajoutera de la topologie, les systèmes non essentiels auront leur importance dans l'étude des espaces symétriques possédant des facteurs euclidiens. Donnons tout de suite une définition en ce sens.

Définition 6 (Réalisation métrique) — *On appelle* réalisation métrique *ou simplement* réalisation *d'un complexe de Coxeter sphérique Δ la donnée d'un système clos (pas nécessairement essentiel) d'hyperplans dont le complexe de Coxeter associé est Δ.*

On a muni V d'un produit scalaire — c'est ce qui permet de définir la réflexion orthogonale par rapport à un hyperplan. On a donc une distance naturelle $\sphericalangle$ sur S : étant donnés deux vecteurs unitaires u, v on note $\sphericalangle(u, v)$ la mesure de l'angle sous lequel on voit l'arc (u, v), c'est-à-dire $\arccos(u \cdot v)$.

La combinatoire des complexes simpliciaux obtenus à partir de $\mathscr{H}$ dans V et dans sa partie essentielle V_1 coïncident, mais il n'en est pas de même des espaces métriques S et $S_1 = S \cap V_1$. Une réalisation métrique réunit donc deux types d'informations : combinatoire et métrique.

Dans une réalisation métrique, une face F possède une *dimension* $\dim(F)$

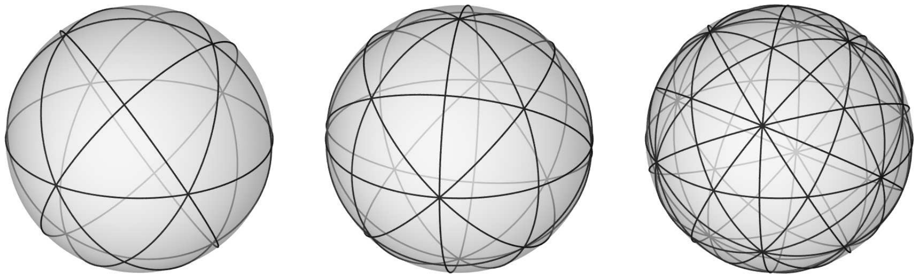

Figure 18 – *Les complexes de Coxeter sphériques de type A_3, B_3 et H_3*

(sa dimension topologique) et un rang $\mathrm{rg}(F)$ (comme simplexe d'un complexe simplicial). Ils vérifient l'inégalité

$$\dim(F) \geqslant \mathrm{rg}(F) - 1$$

avec égalité si et seulement si la réalisation est essentielle. On convient que la dimension de la face vide est -1, ce qui permet à ces assertions de l'englober.

Dans un complexe de Coxeter de rang r on appelle *chambres* les faces de rang r et *cloisons* les faces de rang $r-1$. Une cloison d'une réalisation métrique est contenue dans un unique hyperplan du système.

Exemples

Les figures 18 et 19 illustrent quelques exemples de complexes de Coxeter. Détaillons la construction du système essentiel d'hyperplans de type A_3. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^4$ et regardons $\mathbb{R}^3$ comme le sous-espace défini par $\sum \lambda_i = 0$. Considérons les six hyperplans $\{\lambda_i = \lambda_j\}$ pour toutes les paires $i \neq j$. On vérifie facilement qu'ils forment un système clos et essentiel. Le groupe fini de réflexions associé est isomorphe au groupe des permutations de quatre éléments. Le complexe de Coxeter associé est représenté à gauche dans la figure 18. On voit que les grands cercles tracés par les hyperplans sur S s'intersectent parfois deux par deux, parfois trois par trois. En effet, en un point où l'hyperplan $\{\lambda_1 = \lambda_2\}$ rencontre l'hyperplan $\{\lambda_2 = \lambda_3\}$ passe nécessairement un troisième : $\{\lambda_1 = \lambda_3\}$. Par contre, en un point d'intersection de $\{\lambda_1 = \lambda_2\}$ et $\{\lambda_3 = \lambda_4\}$, la condition $\sum \lambda_i = 0$ empêche que passe un troisième hyperplan.

Systèmes de générateurs de W

Étant donnée une chambre C, il existe un unique ensemble minimal $\mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$ d'hyperplans qui définit C, c'est-à-dire tel que les inéquations

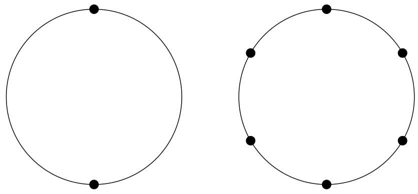

Figure 19 – *Des réalisations des complexes de Coxeter de type A_1 et A_2*

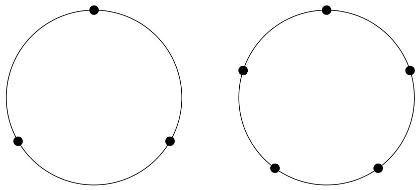

Figure 20 – *Des complexes simpliciaux qui ne sont pas de Coxeter*

$\{(H_i = \varepsilon_i); H_i \in \mathscr{H}'\}$ suffisent à définir C. C'est exactement l'ensemble des hyperplans qui contiennent les cloisons incidentes à C. on appelle *murs* de C les éléments de $\mathscr{H}'$. On peut vérifier que C a exactement r murs.

Proposition 7 — *Considérons un complexe de Coxeter associé à un système d'hyperplans clos et essentiel $\mathscr{H}$, dont on note W le groupe fini de réflexions. Alors :*

(*i*) *l'action de W sur l'ensemble des chambres est simplement transitive ;*

(*ii*) *pour toute chambre C, W est engendré par l'ensemble des réflexions s_H où H parcourt l'ensemble des murs de C.*

3.4 Matrices et diagrammes de Coxeter

Dans cette section on va associer à tout complexe de Coxeter une matrice et un graphe, ce qui permettra d'en présenter la classification.

Considérons donc un complexe de Coxeter défini par un système d'hyperplans de $V = \mathbb{R}^n$ essentiel et clos, noté $\mathscr{H} = \{H_1, \ldots, H_d\}$, de groupe de réflexion W. Fixons une chambre C et supposons que les murs de C sont $H_1, \ldots, H_r$. Pour alléger les notations on note s_i la symétrie orthogonale par rapport à H_i

Pour tout couple (i, j) avec $1 \leqslant i, j \leqslant r$, la composée $s_i s_j$ est d'ordre fini, qu'on note $m_{i,j}$. On appelle *matrice de Coxeter* du complexe la matrice dont ce sont les coefficients. On a $m_{i,i} = 1$ et $m_{j,i} = m_{i,j} \geqslant 2$ pour tout couple $i \neq j$.

Cette matrice permet de reconstruire, à isométrie linéaire près, le système d'hyperplans $\mathscr{H}$ et donc le complexe de Coxeter. De plus, on peut faire la liste complète des matrices qui conviennent. La première étape réside dans le résultat suivant.

PROPOSITION 8 — *Une matrice vérifiant $m_{i,i} = 1$ et $m_{j,i} = m_{i,j} \geqslant 2$ pour tout couple $i \neq j$ est la matrice de Coxeter d'un complexe de Coxeter sphérique si et seulement si la matrice $(-\cos(\pi/m_{i,j}))_{i,j}$ est définie positive.*

Il se trouve que cette condition est très contraignante ; pour énoncer le résultat précis, on définit le *diagramme de Coxeter* associé au complexe (ou à sa matrice) de la façon suivante. C'est un graphe à r sommets, où les sommets i et j sont reliés par une arête si et seulement si $m_{i,j} > 2$ et où les arêtes sont étiquetées par $m_{i,j}$. Quand $m_{i,j} = 3$, on omet en général l'étiquette.

Si on considère deux groupes finis de réflexions W_1 et W_2 sur des espaces euclidiens V_1 et V_2, leur produit direct $W_1 \times W_2$ se réalise comme un groupe fini de réflexions sur la somme directe orthogonale $V_1 \oplus V_2$. On vérifie alors facilement que le diagramme de $W_1 \times W_2$ est l'union disjointe des diagrammes de W_1 et W_2. La réciproque est également vraie : un groupe fini de réflexions W dont le diagramme de Coxeter est non connexe se décompose en un produit direct $W = W_1 \times \cdots \times W_p$, et l'espace se décompose en une somme directe orthogonale $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$ avec W_i se réalisant comme un groupe fini de réflexions de V_i de diagramme de Coxeter connexe, et le diagramme de W est exactement l'union disjointe des diagrammes des W_i. On dit par conséquent d'un groupe fini de réflexions (ou de son système d'hyperplans ou du complexe de Coxeter associé) qu'il est *irréductible* si et seulement si son diagramme est connexe.

THÉORÈME 9 — *La liste complète des diagrammes de Coxeter connexes est donnée par la figure 21.*

Notons que dans le nom d'un diagramme, l'indice représente toujours le nombre de sommets.

Notons que, puisque le diagramme définit complètement la matrice et donc le complexe de Coxeter, cette liste classifie complètement les complexes de Coxeter sphériques, et donc les groupes finis de réflexions.

Les diagrammes à au plus 3 sommets sont faciles à illustrer, puisqu'ils correspondent à des groupes finis de réflexion de l'espace euclidien de dimension au plus 3.

La figure 19 montre, à droite, la partition du cercle S^1 associé au diagramme A_2. À gauche dans la même figure, le cercle découpé par deux points en deux segments correspond à un système clos non essentiel d'hyperplans de diagramme A_1. C'est le système d'hyperplans qu'on observe dans les plats

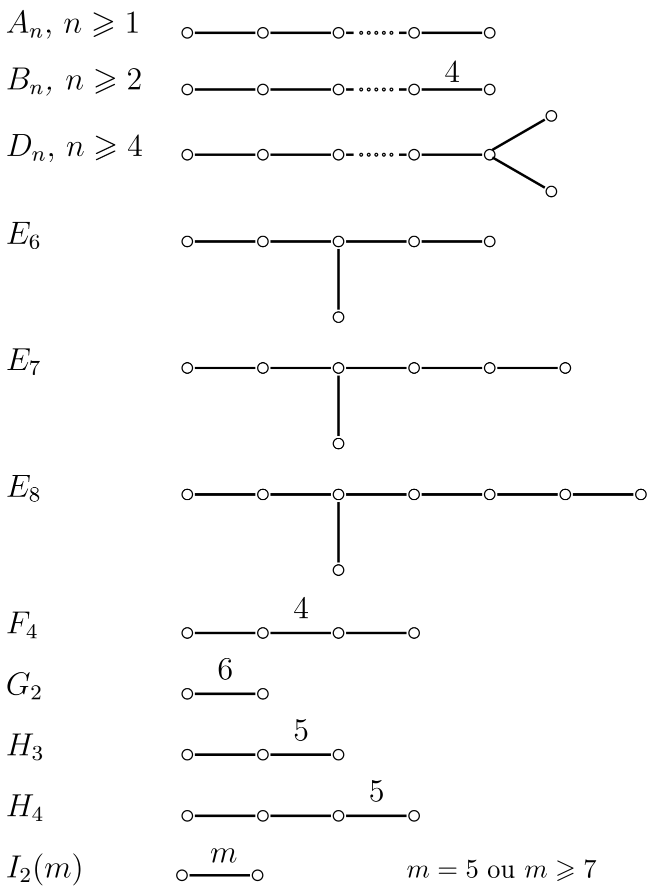

FIGURE 21 – *Liste des diagrammes de Coxeter connexes*

de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$; il a deux chambres, mais une seule cloison puisqu'il y a un seul hyperplan. Autrement dit, les deux points ne doivent pas être considérés séparément, mais comme une seule face dont la topologie, celle de S^0, n'est pas connexe. Remarquons que le complexe est de rang 1 et que cette cloison est également la face nulle.

À gauche de la figure 18 on trouve le complexe de Coxeter de diagramme A_3. Si on y considère une chambre, elle a exactement une paire de murs qui s'intersectent avec un angle $\pi/2$, les deux autres paires s'intersectent avec un angle $\pi/3$.

Les diagrammes connexes à deux sommets correspondent aux groupes diédraux ; le diagramme à deux sommets et sans arêtes ($A_1 \cup A_1$) correspond au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et une réalisation dans $\mathbb{R}^2$ est obtenue par le système formé de deux droites orthogonales. Le complexe de Coxeter a quatre chambres et deux cloisons. Le dessin correspondant sur S^1 comporte quatre points (deux pour chaque cloison) et quatre segments (un pour chaque chambre). On observe ce système d'hyperplans dans les plats de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$.

Pour d'autres détails sur les différents groupes de réflexions, on peut consulter [8].

3.5 Immeubles sphériques

Suivant le modèle donné par les bords de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ et $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$, on va définir les immeubles sphériques comme des complexes simpliciaux possédant des « appartements » modelés sur un complexe de Coxeter et vérifiant des propriétés de symétrie.

Définition 10 — *On dit d'un complexe simplicial Δ de rang r que c'est un* immeuble sphérique *s'il s'écrit comme l'union d'une famille de sous-complexes appelés* appartements *vérifiant les propriétés suivantes :*

(*i*) *tout appartement est un complexe de Coxeter sphérique ;*

(*ii*) *étant données deux simplexes quelconques de Δ, il existe toujours un appartement les contenant tous les deux ;*

(*iii*) *si Σ et Σ' sont des appartements contenant tous les deux des simplexes A et B, il existe un isomorphisme $\Sigma \to \Sigma'$ qui fixe les points de A et de B ;*

(*iv*) *tout simplexe de rang $r-1$ est incident à au moins trois simplexes de rang r.*

On appelle chambres de Weyl *ou simplement* chambres *les simplexes de rang r et* cloisons *les simplexes de rang $r-1$.*

Notons que dans cette définition, A et B peuvent être vide, donc deux appartements sont toujours isomorphes. En particulier, à chaque immeuble sphérique on peut associer un unique complexe de Coxeter sphérique auquel sont isomorphes tous les appartements.

Dans la littérature, on omet parfois la condition (*iv*) et on qualifie alors d'*épais* un immeuble qui la vérifie.

Les bords de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ et $\mathbb{R}\mathrm{H}^2\times\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ sont naturellement munis d'une structure d'immeubles sphériques en prenant comme appartements les bords des plats. Dans les deux cas le groupe des isométries agit par isomorphismes de complexes simpliciaux et par homéomorphismes pour la topologie de Hadamard du bord. Mieux, on peut toujours prendre comme isomorphismes entre appartements pour vérifier la propriété (*iii*) l'action sur le bord d'isométries de l'espace considéré.

3.6 Immeubles métriques

Pour l'étude du bord de Hadamard des espaces symétriques à courbure négative, il est nécessaire de faire intervenir de la topologie — en l'occurrence, *via* une distance — en plus de la combinatoire.

Motivation

Pour illustrer cette nécessité, résumons la structure d'immeuble du bord de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$: il a une unique cloison (qui a la topologie de S^0) constituée des deux points singuliers et une famille infinie, paramétrée par le cercle, de chambres qui ont la topologie d'un segment. L'union de la cloison et d'une paire quelconque de chambres est un appartement. Mais le système d'hyperplans naturel pour la topologie n'est pas essentiel. Si on considère $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$, on obtient exactement la même structure d'appartements mais cette fois la cloison a la topologie d'un cercle S^1 et une chambre celle d'un disque B^2. Combinatoirement, il n'y a aucune différence. Topologiquement, les dimensions et les types d'homotopie des cloisons sont différents.

Pour introduire la topologie, on a besoin de nouvelles définitions ; la notion de CW-complexe, par exemple, n'est pas adaptée puisque nos « briques élémentaires » n'ont pas forcément une topologie triviale. Ce besoin est spécifique au espaces symétriques admettant un facteur euclidien, c'est pourquoi beaucoup d'ouvrages, qui s'intéressent plutôt au type non compact, ne l'abordent pas.

Complexes métriques

La définition suivante permet d'ajouter de la topologie dans la structure de complexe simplicial.

Définition 11 (complexe métrique) — *Soit (X, d) un espace métrique (où la distance peut éventuellement prendre la valeur ∞) doté d'une partition dont les éléments sont appelés les* faces*. Une face F_1 est dite* incidente *à une autre face F_2 si $F_1 \subset \bar{F}_2$.*

On dit que (X, d) est un complexe métrique *si la relation d'incidence fait de l'ensemble des faces un complexe simplicial et si l'adhérence d'une face est exactement l'union des faces qui lui sont incidentes.*

On appelle comme précédemment *cloisons* les faces de rang $r - 1$ et *chambres* celles de rang r.

Notons qu'une réalisation d'un complexe de Coxeter définit un complexe métrique : la sphère unité S munie de la distance angulaire $\sphericalangle$ et de la partition en faces.

Dans la définition d'immeuble les complexes de Coxeter servaient de modèle pour les appartements, dans celle d'immeuble métrique ce seront leurs réalisations qui joueront le rôle de modèle.

Pour pouvoir parler de modèle, il faut définir les morphismes. Il s'agit naturellement de préserver aussi bien la métrique que la combinatoire. Une application ϕ entre deux complexes métriques X_1, X_2 (les deux distances sont notées d) est un *morphisme* si elle est isométrique

$$d(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X_1$$

et envoie face sur face en préservant le rang et la relation d'incidence. C'est un *isomorphisme* si elle est bijective et que son inverse est également un morphisme.

On appelle sous-complexe d'un complexe métrique une partie telle que l'inclusion est un morphisme. En particulier c'est une union de faces.

On peut maintenant définir un immeuble métrique.

Définition 12 (immeuble métrique) — *On dit d'un complexe métrisé X que c'est un* immeuble métrique *s'il dispose d'une famille de sous-complexes appelés* appartements métriques *ou simplement* appartements *vérifiant les propriétés suivantes :*

(*i*) *tout appartement est isomorphe à une réalisation d'un complexe de Coxeter ;*

(*ii*) *étant données deux faces de X, il existe toujours un appartement les contenant toutes les deux ;*

(*iii*) *si Σ et Σ' sont des appartements contenant tous les deux des faces A et B, il existe un isomorphisme $\Sigma \to \Sigma'$ qui fixe les points de A et de B ;*

(*iv*) *toute cloison est incidente à au moins trois chambres ;*

et si sa distance est la distance de Tits, *définie comme suit.*

Si x et y sont deux points de X, un chemin γ de x à y est une suite de points $x = x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ dont deux éléments consécutifs sont toujours dans un même appartement. La longueur d'un chemin est définie par

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1}, x_i)$$

La distance de Tits est alors définie par

$$d_T(x, y) = \inf_{\gamma} l(\gamma)$$

où la borne inférieure est prise sur tous les chemins entre x et y.

Encore une fois, dans cette définition les faces A et B peuvent être vides donc deux appartements sont toujours isomorphes. Pour chaque immeuble métrique il existe donc un unique complexe de Coxeter sphérique

Appelons *entourage* d'un point x l'ensemble des appartements contenant x. Les voisinages de x pour la distance de Tits sont alors les unions de voisinages de x dans chacun des appartements de son entourage. Autrement dit, la topologie induite par la distance de Tits est la topologie la moins fine qui fait de tous les isomorphismes entre la réalisation du complexe de Coxeter et les appartements des homéomorphismes sur leur image.

Les bords de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ et $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ sont munis d'une structure d'immeubles métriques. La topologie définie par cette distance est, dans ce cas, différente de la topologie de Hadamard. Par exemple pour $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$, enlever les deux points correspondant à l'unique cloison (qui, dans ce cas, est la face nulle) déconnecte la topologie de Tits mais pas la topologie originale.

4 Immeuble à l'infini d'un espace symétrique

Nous allons maintenant voir comment définir sur le bord à l'infini d'un espace symétrique une structure d'immeuble naturelle. Pour cela on va revenir au niveau de l'algèbre de Lie en utilisant les notations de 1.3. Il faut en particulier garder en tête la correspondance entre les plats passant par x et les sous-algèbres abéliennes de $\mathfrak{p}$ et l'homéomorphisme entre la fibre unitaire tangente en x et le bord à l'infini.

Encore une fois, on suppose dans un premier temps que M est de type non compact.

4.1 Systèmes de racines

Un point x de M étant fixé, on définit sur $\mathfrak{g}$ toute entière une forme bilinéaire définie positive par

$$Q_x(X, Y) = -B(\theta_x X, Y)$$

où B est la forme de Killing. On vérifie facilement que Q_x est invariante par l'involution de Cartan θ_x. De plus, pour ce produit scalaire $\operatorname{ad} X$ est un opérateur symétrique si $X \in \mathfrak{p}$ et antisymétrique si $X \in \mathfrak{k}$.

Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{p}$. Les opérateurs $\operatorname{ad} H$ où H parcourt $\mathfrak{a}$ sont symétriques et commutent deux à deux donc sont simultanément diagonalisables.

Pour un élément λ du dual $\mathfrak{a}^*$ de $\mathfrak{a}$, on note

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g}; \mathrm{ad}(A)X = \lambda(A)X \quad \forall A \in \mathfrak{a}\}$$

et on dit que λ est une *racine* si $\mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}$.

Comme $\mathrm{ad}(\mathfrak{a})$ est, on l'a vu, une famille d'opérateurs simultanément diagonalisables, l'ensemble Λ des racines définies par $\mathfrak{a}$ est fini et non vide, et on a une décomposition en somme directe appelée *décomposition en espaces de racines* :

$$\mathfrak{g} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{g}_\lambda$$

où par définition $\mathfrak{g}_0$ est le commutant de $\mathfrak{a}$, donc est non trivial : $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_0$.

De nombreuses propriétés de ces décompositions sont exposées dans l'ouvrage [14] (voir en particulier la section 2.7), on verra très peu de détails ici. Certaines d'entre elles, décrivant la structure de Λ, sont résumées à la section suivante.

Signalons tout de même que

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \tag{3}$$

et que si $\alpha + \beta \neq 0$ les espaces $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_\beta$ sont orthogonaux pour la forme de Killing.

On aura également besoin de la formule :

$$\mathrm{Ad}(\exp(H))X = e^{\lambda(H)}X \tag{4}$$

si $A \in \mathfrak{a}$ et $X \in \mathfrak{g}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.

4.2 La structure d'immeuble

On dispose maintenant sur l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$, qui s'identifie à l'espace tangent à un plat passant par x, d'un système fini de racines $\Lambda \subset \mathfrak{a}^*$ et donc d'un système fini d'hyperplans.

Éléments singuliers et géodésiques singulières

Pour comprendre ces hyperplans, considérons un élément X de $\mathfrak{a}$ qui annule une racine non nulle $\lambda \in \Lambda$. On va montrer qu'alors l'espace $Z(X) \cap \mathfrak{p}$ des éléments de $\mathfrak{p}$ qui commutent à X n'est pas abélien.

Par définition X commute avec tous les éléments de $\mathfrak{g}_\lambda$ et $\mathfrak{g}_\lambda \cap \mathfrak{a} = 0$. Considérons $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$ non nul et écrivons $Y = Y_1 + Y_2$ où $Y_1 \in \mathfrak{p}$ et $Y_2 \in \mathfrak{k}$. On a $0 = [X,Y] = [X,Y_1] + [X,Y_2]$ or ces deux termes sont respectivement dans $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}$, donc $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_\lambda$. Si $Y_1 = 0$, $Y_2 \neq 0$ et comme $Y_2 \in \mathfrak{g}_\lambda$ il existe $A \in \mathfrak{a}$

tel que $[Y_2, A] \neq 0$. Mais $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{g}_\lambda$ donc $[Y_2, A] \in \mathfrak{g}_\lambda \cap \mathfrak{p}$. Que Y_1 soit nul ou non, $\mathfrak{g}_\lambda \cap \mathfrak{p}$ est donc non vide.

Il existe par conséquent une autre sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{a}$ qui contient X. Mais $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ étant supposées maximales, l'espace $Z(X) \cap \mathfrak{p}$ des éléments de $\mathfrak{p}$ qui commutent à X n'est pas abélien.

À X est associé une géodésique issue de x, qui va par conséquent être incluse dans les plats A et A' déterminés par $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$. En conséquence, suivant les exemples de la section 2, on donne la définition suivante.

Définition 13 (singularité et régularité) — *Une géodésique de M est dite* singulière *si elle est contenue dans plusieurs plats,* régulière *sinon.*

Un élément X de $\mathfrak{p}$ est dit singulier *si $Z(X) \cap \mathfrak{p}$ n'est pas abélien,* régulier *sinon.*

On a vu qu'un élément de $\mathfrak{p}$ et la géodésique associée sont simultanément singuliers ou simultanément réguliers, ainsi ce caractère ne dépend que de X et pas du choix de $\mathfrak{p}$. De plus un élément de $\mathfrak{a}$ est singulier si et seulement s'il annule une racine, ce qui ne dépend donc pas de $\mathfrak{a}$.

Complexe de Coxeter et immeuble à l'infini

Rappelons que B définit sur $\mathfrak{a}$ un produit scalaire. Étant donné une racine λ, on peut montrer que la symétrie orthogonale (pour B) s_λ de $\mathfrak{a}$ par rapport au noyau de λ est réalisée par un élément du stabilisateur K de x. Plus précisément il existe $h \in K$ tel que $\mathrm{Ad}(h)$ laisse $\mathfrak{a}$ globalement invariant et sa restriction y coïncide avec s_λ ([14] 2.9.7).

Comme le système d'hyperplans défini sur $\mathfrak{a}$ par les racines est canonique, il est stable sous l'action du groupe de réflexions qu'il engendre. Ceci qui constitue la première partie du résultat suivant.

Proposition 14 — *Le système d'hyperplans défini sur $\mathfrak{a}$ par ses racines est clos et essentiel.*

Rappelons qu'on suppose M de type non compact ; si on rajoute un facteur euclidien il est facile de voir qu'on obtient un système toujours clos mais qui n'est plus essentiel. Inversement si ce système n'est pas essentiel, l'intersection des algèbres abéliennes de $\mathfrak{p}$ est non triviale, c'est-à-dire $Z(\mathfrak{p}) \neq 0$ et M contient un facteur euclidien.

On obtient ainsi une structure de complexe de Coxeter sur la sphère unité de $\mathfrak{a}$, et donc sur l'espace tangent au plat A correspondant. Par la projection visuelle, on peut porter cette structure sur le bord $M(\infty)$ de M, ce qui nous donne un appartement $A(\infty)$ dans $M(\infty)$. Cet appartement est métrique car, la métrique étant euclidienne sur A, l'angle sous lequel on voit deux points de $A(\infty)$ ne dépend pas du point de A d'où l'on regarde.

Comme toute géodésique appartient à au moins un plat, tout point de $M(\infty)$ appartient à au moins un appartement. Les chambres de Weyl d'un appartement sont les composantes connexes de l'ensemble des éléments réguliers.

THÉORÈME 15 — *Ces appartements définissent sur $M(\infty)$ une structure d'immeuble métrique. De plus G agit par automorphismes d'immeuble, préserve la distance de Tits et G_0 agit transitivement sur les chambres de Weyl. Un élément de G_0 qui stabilise une chambre la fixe point par point. Enfin, tous les isomorphismes entre appartements requis dans la définition 12 (condition (iii)) sont réalisable par des isométries de M.*

DÉMONSTRATION : Commençons par remarquer que G agit en préservant la structure combinatoire définie par les appartements et la métrique de Tits car elles sont construites de façon intrinsèque. De plus la métrique de Tits induit la propriété de rigidité : un élément de G_0 qui stabilise une chambre la fixe point par point ([14] 3.6.31, corollaire).

Pour la transitivité de G_0 on peut consulter [14], section 2.12.

Vérifions maintenant que les appartements définissent un immeuble. On a déjà vérifié la condition (*i*). La condition (*ii*) peut s'obtenir à partir de la métrique de Tits : entre deux points de $M(\infty)$ il existe toujours une géodésique de Tits et toute géodésique de Tits est contenue dans un appartement (voir [14] section 3.6). Pour la condition (*iii*), il suffit d'utiliser deux faits : deux plats sont toujours image l'un de l'autre par une isométrie, et la propriété de rigidité. Du même coup, on voit que les isomorphismes peuvent réalisés par des isométries de M.

Enfin il est facile de voir pourquoi une cloison est toujours incidente à au moins trois chambres : une géodésique γ singulière dont l'extrémité est dans une cloison est contenue dans au moins deux plats (en fait, une infinité) qui s'intersectent transversalement le long de γ et fournissent quatre chambres incidentes à la cloison de $\gamma(\infty)$. ■

La structure d'immeuble ainsi définie est donc tout-à-fait canonique. Remarquons que si M est de rang 1, elle est triviale : les plats sont les géodésiques et les appartements sont les paires de points à l'infini. En particulier l'immeuble est de rang 1. Dans le cas de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$, l'immeuble est de rang 1 (pour la combinatoire) mais de dimension 1 (et pas 0). C'est seulement par la structure d'immeuble *métrique* que l'on voit à l'infini le rang de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$.

On peut interpréter en terme de groupes paraboliques la structure d'incidence du complexe simplicial sous-jacent à l'immeuble. Deux points à l'infini sont dans le même simplexe si et seulement s'ils ont même stabilisateur dans G ([14] 3.6.26). Il y a donc une bijection entre les faces de $M(\infty)$ et les stabilisateurs de points à l'infini (aussi appelé *sous-groupes paraboliques*) dans G. Si on ordonne l'ensemble des faces par la relation d'incidence et l'ensemble des sous-groupes paraboliques par l'inclusion, cette bijection est strictement décroissante.

On définit l'*indice* d'un rayon géodésique comme le nombre $k - f$ où k est le rang de l'immeuble et f celui de la face à laquelle l'extrémité du rayon appartient. Un rayon régulier est d'indice nul, un rayon dont l'extrémité est dans une cloison est d'indice 1.

Pour finir, citons un résultat important dans la théorie de la rigidité.

Théorème 16 — *Si M est de type non compact et ne contient pas de facteur de rang* 1, *toutes les applications $M(\infty) \to M(\infty)$ qui sont des homéomorphismes pour la topologie de Hadamard et des isomorphismes d'immeuble métrique peuvent être réalisés par l'action d'éléments de G.*

Pour une démonstration, on peut consulter [14] (corollaire 3.10.2). Dans le cas où M contient un facteur M_1 de rang 1, l'immeuble à l'infini ne permet pas de distinguer les points du bord de M_1 donc en considérant un homéomorphisme de $M(\infty)$ qui ne préserve pas la structure géométrique (conforme, CR, etc.) de $M_1(\infty)$ on obtient un homéomorphisme de $M(\infty)$ qui préserve la métrique de Tits et la combinatoire de l'immeuble à l'infini mais qui n'est pas l'action au bord d'une isométrie. Les hypothèses du théorème sont donc indispensables.

4.3 Avec un facteur euclidien

Si on considère un espace symétrique $M = \mathbb{R}^s \times M'$ où M' est de type non compact, la situation diffère sur quelques points.

Tout d'abord la forme Q_x est positive mais pas définie : son noyau est exactement l'espace tangent au facteur euclidien en x. En effet, cet espace tangent s'identifie au centre $Z(\mathfrak{p})$ de $\mathfrak{p}$. On peut encore diagonaliser la représentation adjointe sur $\mathfrak{g}$ d'une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{a}$ et obtenir une décomposition en espaces de racines. On a simplement les inclusions $Z(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$.

Les définitions des éléments, géodésiques et points à l'infini singuliers et réguliers restent inchangées.

La proposition 14 et le théorème 15 restent vraies à ceci près que la réalisation topologique du complexe de Coxeter n'est plus essentielle. Les géodésiques de la forme $\gamma \times \{x\}$ où γ est une droite de $\mathbb{R}^s$ et x un point de M', définissent les faces nulles des appartements. Pour x fixé toutes ces géodésiques sont dans les mêmes plats mais dès que $s > 1$ elles ne sont pas toutes parallèles et leurs groupes paraboliques diffèrent, on ne peut donc pas utiliser ceux-ci pour décrire la structure simpliciale.

Chapitre V

Compactification des espaces de rang supérieur

> Mais quand à force de raconter des histoires que nul ne comprend, vous vous retrouverez entre vous, tellement entre vous que vous serez tout seuls, alors revenez m'expliquer comment vous parviendrez à changer le monde.
>
> F. Vehlmann et F. Duchazeau,
> *Les cinq conteurs de Bagdad*

Ce chapitre est essentiellement une traduction de l'article [30].

1 Introduction

Soit M un espace symétrique à courbure négative, G le groupe de ses isométries et G_0 la composante neutre de celui-ci. On note $M(\infty)$ le bord de Hadamard de M et k son rang. Suivant I–2.1 on donne la définition suivante.

Définition 1 — *On appelle* compactification de Hadamard différentiable *de M une structure différentielle sur sa compactification de Hadamard $\bar{M}$ qui soit compatible avec la structure différentielle de M et pour laquelle l'action de G est différentiable. Autrement dit, c'est une compactification différentiable de l'action de G sur M topologiquement conjuguée à la compactification de Hadamard.*

Quand on garantit seulement la différentiabilité de l'action de G_0, on parle de compactification de Hadamard différentiable faible.

Les espaces de rang 1 possèdent des compactifications de Hadamard différentiables et on a classé celles de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$.

Il est facile de voir que l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ possède également une compactification de Hadamard différentiable. Pour cela regardons $\mathbb{R}^n$ comme l'hyperplan affine $(x_0 = 1)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et considérons la projection centrée en 0 : elle envoie $\mathbb{R}^n$ sur l'hémisphère supérieur de la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$. En composant avec une projection stéréographique, on envoie cet hémisphère sur la boule unité de $(x_0 = 0)$ (voir figure 22). L'action du groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^n$, une fois poussée en avant, se prolonge analytiquement à la boule fermée.

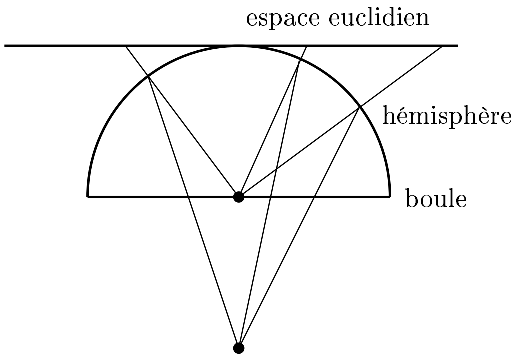

FIGURE 22 – *Compactification de l'espace euclidien*

De plus, le bord à l'infini d'un espace de rang 1 porte une géométrie intéressante en soi : conforme, CR (strictement pseudoconvexe), quaternion-contact, ... Il est donc naturel de se demander si certains espaces de rang supérieur admettent des compactifications de Hadamard différentiables. On pourrait alors espérer obtenir sur leur bord à l'infini de nouvelles géométries à explorer. L'objectif de ce chapitre est de démontrer que ce n'est pas le cas.

THÉORÈME F — *Aucun espace symétrique à courbure négative, de rang supérieur et non euclidien n'admet de compactification de Hadamard différentiable.*

En fait, on va même montrer qu'il n'y a pas de compactification de Hadamard différentiable faible. Ce théorème, et surtout sa démonstration, montrent que le bord de Hadamard d'un espace symétrique porte une structure différentielle ou une structure combinatoire d'immeuble, mais que les deux sont incompatibles.

On peut espérer élargir le résultat en répondant à la question suivante.

Question 5 — *Un espace symétrique à courbure négative de rang supérieur peut-il admettre une compactification différentiable dont la topologie n'est pas celle de Hadamard ?*

On a vu qu'il peut exister, en rang supérieur (par exemple pour un produit), différente topologies. Les compactifications de Satake en sont un exemple. En existe-t-il une qu'on puisse lisser? Cela semble peu probable.

Organisation du chapitre

On commence par remarquer que le bord de Hadamard ne peut pas être muni d'une structure différentielle juste en projetant celle d'une fibre unitaire tangente. Dans un second temps, on montre le théorème F pour $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$, et plus généralement pour les produits $\mathbb{R}^{k-1} \times F$ où F est un espace de rang 1. Enfin, on démontre le théorème en toute généralité. Les différentes parties sont assez indépendantes, la section 4 utilise les idées de la section 3 mais les contingences de la technique empêchent d'en utiliser le résultat.

2 La projection visuelle

Soit x un point de M. L'application de projection visuelle π_x a été définie au chapitre I, section 3. On a vu que c'était un homéomorphisme $T^1_x M \to M(\infty)$ de la fibre unitaire tangente à M en x sur le bord à l'infini de M. Il serait satisfaisant de construire une structure différentielle sur $M(\infty)$ qui en fasse un difféomorphisme, mais c'est impossible en rang supérieur.

Proposition 2 — *Si M est de rang supérieur, il n'existe pas de structure différentielle sur $M(\infty)$ qui fasse des projections visuelles centrées en chaque point des difféomorphismes.*

Démonstration : supposons qu'on ait construit sur $M(\infty)$ une structure différentielle qui fasse des projections visuelles centrées en chaque point des difféomorphismes. Un appartement de $M(\infty)$ est la trace sur le bord d'un plat A de M. Si on considère la projection visuelle centrée en un point $x \in A$, on voit que l'appartement $A(\infty)$ est l'image par un difféomorphisme de l'intersection de $T^1_x M$ et de l'espace tangent $T_x A$. C'est donc une sous-variété de $M(\infty)$. De la même façon, on voit que les cloisons sont également des sous-variétés.

Comme M est de rang supérieur, son bord de Hadamard porte une structure d'immeuble non triviale. Soit P une cloison et $p \in P$, il existe trois chambres C_1, C_2, C_3 incidentes à P et chaque union de deux d'entre elles est incluse dans un appartement (voir la figure 23). Comme les appartements et les cloisons sont des sous-variétés, les C_i ont des demi-espaces tangents E_i en p. Mais $E_i \cup E_j$ doit être l'espace tangent à un appartement pour tout couple $i \neq j$, ce qui est impossible. ■

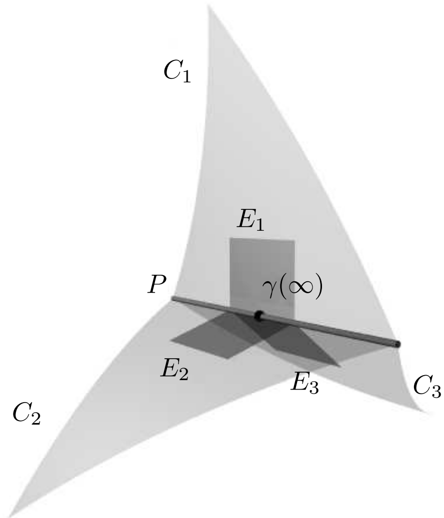

Figure 23 – *Trois chambre incidentes à une cloison*

3 Produit d'un espace de rang un et d'un espace euclidien

L'idée essentielle de la démonstration du théorème F est exactement la démonstration du résultat suivant. Ce cas particulier permet d'éviter toute question technique.

Proposition 3 — *L'espace* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ *n'admet pas de compactification de Hadamard différentiable faible.*

Démonstration : supposons donnée une compactification de Hadamard différentiable de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$. On a donc une structure différentielle sur $\bar{M}$ pour laquelle l'action de G_0 est $\mathscr{C}^1$. Considérons une géodésique horizontale γ, c'est-à-dire dont le lieu géométrique est de la forme $\mathbb{R} \times \{x\}$ où $x \in \mathbb{R}\mathrm{H}^2$. Toutes les géodésiques horizontales orientées dans le même sens que γ lui sont asymptotes, donc le groupe $G_1 = \mathrm{SO}_0(1,2)$ des isométries directes de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$, qui agit sur $\bar{M}$ comme sous-groupe de G_0, fixe le point singulier $\gamma(\infty) \in M(\infty)$ défini par γ. Comme G_1 préserve $M(\infty)$, en différenciant on obtient une représentation linéaire ρ de G_1 sur $T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$.

Considérons maintenant la rotation d'angle π autour de γ, qu'on note $s_x \in G_1$. En chaque point de γ, la différentielle de s_x a pour valeurs propres $1, -1, -1$. Comme l'action de G_1 est $\mathscr{C}^1$, les valeurs propres de la différentielle de s_x au point $\gamma(\infty)$ sont les mêmes. Comme s_x est involutive, sa différentielle est diagonalisable en tout point. Les directions propres associées à la valeur propre -1 sont nécessairement tangentes au bord et donc $\rho(s_x) = -\mathrm{Id}$. De la même façon, pour un autre point $y \in \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ on a $\rho(s_y) = -\mathrm{Id}$. Donc $\rho(s_x s_y) = \mathrm{Id}$, mais $s_x s_y$ est une transformation hyperbolique non triviale de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$. La représentation ρ n'est donc ni fidèle ni triviale, ce qui est impossible puisque G_1 est un groupe de Lie simple. ∎

On va maintenant démontrer, avec la même idée, le même résultat pour un produit $\mathbb{R}^{k-1} \times F$ où le rang de F vaut 1. L'utilisation des symétries géodésiques de F imposent un préliminaire.

PROPOSITION 4 — *Si F est un espace symétrique à courbure négative de rang 1, alors soit $F = \mathbb{R}\mathrm{H}^n$ avec n impair, soit les symétries géodésiques de F sont dans la composante neutre de son groupe d'isométries.*

DÉMONSTRATION : Vu la classification des espaces de rang 1, les $\mathbb{R}\mathrm{H}^{2q+1}$ sont les seuls à être de dimension impaire (ce qui empêche clairement leurs symétries géodésiques d'être dans la composante neutre : elles renversent l'orientation).

On utilise pour les espaces de dimension paire le critère suivant : si on note $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan du groupe des isométries de F, les symétries géodésiques sont dans la composante neutre si et seulement si $\mathfrak{k}$ contient une algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$ (voir [24], chapitre IX, §3).

Il suffit donc de comparer les rangs de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$, qu'on peut par exemple trouver dans [34], appendice C :

- dans le cas réel, $F = \mathbb{R}\mathrm{H}^n$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,n)$ est de rang $\left\lfloor \frac{1}{2}(n+1) \right\rfloor$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n)$ de rang $\lfloor n/2 \rfloor$: les deux coïncident exactement quand n est pair ;
- dans le cas complexe, $F = \mathbb{C}\mathrm{H}^m$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1,m)$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(m) \times \mathfrak{u}(1))$ sont tous deux de rang m ;
- dans le cas quaternionique, $F = \mathbb{H}\mathrm{H}^p$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(p,1)$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{sp}(p) \times \mathfrak{sp}(1)$ sont tous deux de rang $p+1$;
- enfin dans le cas octonionique[1], $F = \mathbb{O}\mathrm{H}^2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_{4(-20)}$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(9)$ sont tous deux de rang 4.

∎

PROPOSITION 5 — *Si $M = \mathbb{R}^{k-1} \times F$ où F est de rang 1, alors M n'admet pas de compactification de Hadamard différentiable faible.*

1. Merci à Fokko Ducloux, Jérôme Germoni et Bruno Sévennec pour leurs explications concernant ce cas pathologique

Démonstration : on raisonne par l'absurde et on suppose donnée une telle compactification.

Une isométrie g de F sera identifiée à l'isométrie $\mathrm{Id} \otimes g$ de M, ce qui permet de considérer la composante neutre G_0^F du groupe des isométries de F comme un sous-groupe de G_0.

Supposons d'abord que F est de dimension paire.

Soient s_x et s_y les symétries géodésiques de F centrées en deux points x et y distincts quelconques. Soit d une droite de $\mathbb{R}^{k-1}$. Alors $\gamma_1 = d \times \{x\}$ et $\gamma_2 = d \times \{y\}$ sont des géodésiques asymptotes de M, singulières d'indice 1. On note $z = \gamma_1(\infty) = \gamma_2(\infty) \in M(\infty)$.

L'opération $g \mapsto dg(z)$, après restriction à l'espace tangent au bord, nous donne un représentation ρ de G_0^F sur $T_zM(\infty)$.

En chaque point de γ_1, ds_x a pour valeurs propre 1 avec multiplicité $k-1$ et -1 avec multiplicité $\dim F$, donc les valeurs propres de $\rho(s_x)$ sont 1 avec multiplicité $k-2$ et -1 avec multiplicité $\dim F$.

Pour conclure comme précédemment, on va maintenant décomposer ρ.

Lemme 6 — *La cloison P qui contient z est une sous-variété différentielle de $M(\infty)$.*

Démonstration : les isométries de F, en particulier s_x, fixent chaque point de P. Dans une carte locale autour de z, l'équation $s_x(p) - p = 0$ est de rang $\dim F$ vu les valeurs propres de s_x. Mais P est une sous-variété topologique de $M(\infty)$ de codimension $\dim F$. D'après le théorème des fonctions implicites, P est donc une sous-variété différentielle de $M(\infty)$. ■ **Lemme**

D'après ce lemme, P possède un espace tangent T_zP qui est du coup l'espace propre de $\rho(s_x)$ associé à la valeur propre 1. Mais T_zP est en fait fixé par tout G_0^F, donc ρ se décompose en $\rho_0 \oplus \rho_1$ où ρ_0 est la représentation triviale sur T_zP et ρ_1 est une représentation sur un supplémentaire. Mais alors $\rho_1(s_x) = \rho_1(s_y) = -\mathrm{Id}$ et $\rho_1(s_x s_y) = \mathrm{Id}$: ρ_1 n'est ni fidèle ni triviale, ce qui est absurde.

Il reste à étudier le cas où $F = \mathbb{R}\mathrm{H}^n$, n impair.

Comme les symétries géodésiques ne sont pas dans la composante neutre, on remplace s_x par des rotations r_1, r_2 d'angle π autour de deux géodésiques sécantes de F. La cloison P, comme ensemble des points fixés simultanément par r_1 et r_2, est à nouveau une sous-variété différentielle. On peut donc définir ρ_1 de la même manière. C'est maintenant une représentation non triviale de $G_0^F = \mathrm{SO}_0(1,n)$ de dimension n, mais ce groupe n'en admet pas de dimension inférieure à $n+1$, ce qui fournit la contradiction. ■

4 Cas général

Nous somme maintenant prêts à démontrer le théorème F en utilisant les idées utilisées dans les cas particuliers.

Notations

On considère toujours un espace symétrique à courbure négative M de rang $k \geqslant 2$ et de dimension m. On note encore G le groupe des isométries de M, G_0 sa composante neutre et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Comme précédemment, $\bar{M}$ désigne la compactification géodésique de M et $M(\infty)$ son bord de Hadamard.

On raisonne par l'absurde en supposant donnée une structure différentielle sur $\bar{M}$ compatible avec celle de M et pour laquelle l'action de G_0 est $\mathscr{C}^1$. On note $\alpha(g)$ l'action d'un élément du groupe et $\alpha(X)$ celle d'un élément de l'algèbre. Avec cette dernière notation, on a une identification

$$\alpha : \mathfrak{g} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Kg}(T\bar{M})$$

où $\mathrm{Kg}(T\bar{M})$ est l'ensemble des champs de vecteurs sur $\bar{M}$ qui sont des champs de Killing sur M. Pour chaque $x \in M$, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ est la décomposition de Cartan au point x, cette application descend en une identification

$$\alpha_x : \mathfrak{p} \xrightarrow{\simeq} T_x M$$

et $\alpha_x(\mathfrak{k}) = 0$.

Quitte à multiplier la métrique de M par des constantes le long des différents facteurs de de Rham — ce qui ne change pas G ni son action par isométries — on suppose que la métrique q de M coïncide *via* α avec la forme de Killing B. C'est-à-dire que l'application α_x est une isométrie linéaire de $\mathfrak{p}$ sur $T_x M$.

Isolement d'un produit $\mathbb{R}^{k-1} \times F$

Soit γ une géodésique unitaire, singulière d'indice 1 dans M. Alors (voir [14], section 3) l'union F_γ des géodésiques parallèles à γ est une sous variété totalement géodésique de M et isométrique à $\mathbb{R}^{k-1} \times F$ où F est un espace symétrique de type non compact de rang 1 (voir la figure 24). On note f la dimension de F.

Décrivons brièvement la construction de F_γ. Plaçons-nous au point $\gamma(0)$ et choisissons un plat A contenant γ. On note $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}^0 + \mathfrak{k}^0$ la décomposition de Cartan au point $\gamma(0)$ et $\mathfrak{a}$ l'algèbre abélienne associée à A. Comme γ est d'indice 1, elle annule une racine α de $\mathfrak{a}$ (et les éventuelles racines colinéaires).

Comme on l'a vu à la section 4.2 du chapitre IV, l'espace $Z(X) \cap \mathfrak{p}^0$ contient $\mathfrak{a}$ mais n'est pas abélien. On vérifie facilement que c'est un système triple de Lie, et F_γ est exactement la sous-variété totalement géodésique associée :

$$F_\gamma = \exp(Z(X) \cap \mathfrak{p}^0)(\gamma(0))$$

De plus γ et chacune des géodésiques qui lui sont parallèles s'écrivent sous la forme $\mathbb{R} \times \{x\}$ où $\mathbb{R}$ représente une droite fixée de $\mathbb{R}^{k-1}$ et x parcourt $\mathbb{R}^k - 2 \times F$: les points de $\mathbb{R}^k - 2 \times F$ paramètrent la famille des géodésiques parallèles à γ.

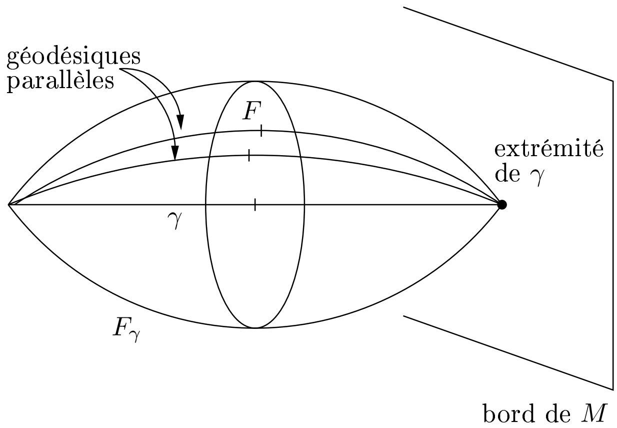

FIGURE 24 – *Famille de géodésiques parallèles*

Quitte à reparamétrer on écrit donc $\gamma(t) = \{(t, 0, \ldots, 0)\} \times \{p\}$ où p est un point de F et on identifie $F^t = \{(t, 0, \ldots, 0)\} \times F$ avec son image plongée dans M et F^0 avec F. On note encore $p = \gamma(0)$, on le considère donc à la fois comme un point de M et un point de F.

On note $\bar{F}_\gamma$ l'adhérence de F_γ dans $\bar{M}$ et $F_\gamma(\infty) = \bar{F}_\gamma \cap M(\infty)$.

Remarquons que $\bar{F}_\gamma$ n'a *a priori* aucune raison d'être une sous-variété de $\bar{M}$, donc on ne peut pas directement invoquer la proposition 5.

Prolongement des isométries de F

Soit G^F le groupe de Lie des isométries de F, G_0^F sa composante neutre et $\mathfrak{g}_F$ son algèbre de Lie. Notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^0 \oplus \mathfrak{p}^0$ et $\mathfrak{g}_F = \mathfrak{k}_F \oplus \mathfrak{p}_F$ les décompositions de Cartan au point $\gamma(0) = p$. Comme F est une sous-variété totalement géodésique de M, les identifications naturelles

$$\mathfrak{p}^0 \xrightarrow{\simeq} T_{\gamma(0)}M \quad \text{et} \quad \mathfrak{p}_F \xrightarrow{\simeq} T_pF$$

induites par α permettent de voir $\mathfrak{p}_F$ comme un système triple de Lie de $\mathfrak{p}^0$. Mais comme F est de type non compact, l'algèbre de Lie engendrée par $\mathfrak{p}_F$ est $\mathfrak{g}_F$. Ainsi $\mathfrak{g}_F$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et G_0^F un sous-groupe de G_0. Autrement dit, toute isométrie de F qui est dans la composante neutre se prolonge en une isométrie de M tout entier.

Une représentation linéaire à l'infini

Par construction, l'action de G_0^F fixe l'extrémité $\gamma(\infty)$ de γ, donc en différenciant en ce point on obtient une représentation ρ de G_0^F sur $T_{\gamma(\infty)}\bar{M}$:

$$\begin{array}{rcl} \rho : G_0^F & \longrightarrow & \mathrm{GL}(T_{\gamma(\infty)}\bar{M}) \\ g & \longmapsto & d_{\gamma(\infty)}\alpha(g) \end{array}$$

Notre but est maintenant de décomposer cette représentation pour en extraire une sous-représentation qui fournira la contradiction recherchée.

Décomposition de l'espace tangent à l'intérieur

Notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^t \oplus \mathfrak{p}^t$ la décomposition de Cartan au point $\gamma(t)$. Comme F_γ est totalement géodésique, on peut pousser plus loin la décomposition :

$$\mathfrak{p}^t = \mathfrak{p}^t_F \oplus \mathfrak{p}^t_{eucl} \oplus \mathfrak{p}^t_\perp$$

où les différents termes sont orthogonaux pour la forme de Killing et où α envoie $\mathfrak{p}^t_F$ sur $T_{\gamma(t)}F^t$, $\mathfrak{p}^t_{eucl}$ sur $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^{k-1}$ et $\mathfrak{p}^t_\perp$ sur $(T_{\gamma(t)}F_\gamma)^\perp$.

Notons que $\mathfrak{p}^t$ est de dimension m, $\mathfrak{p}^t_F$ de dimension f, $\mathfrak{p}^t_{eucl}$ de dimension $k-1$ et $\mathfrak{p}^t_\perp$ de dimension $m-f-k+1$.

Stabilité de la décomposition à l'intérieur

Notons X l'unique élément de $\mathfrak{p}^t$ tel que $\alpha(X)$ coïncide avec le vecteur vitesse de γ au point $\gamma(t)$. Il est indépendant de t donc $X \in \mathfrak{p}^t$ pour tout t.

Notons également $\mathfrak{p}^t_\gamma = \mathfrak{p}^t_F \oplus \mathfrak{p}^t_{eucl}$. Par définition α l'envoie sur $T_{\gamma(t)}F_\gamma$ et c'est l'ensemble des champs de Killing $Y \in \mathfrak{p}^t$ qui commutent avec X. Or

$$\mathfrak{p}^t_\gamma = \mathrm{Ad}(\exp(tX))\mathfrak{p}^0_\gamma$$

donc par commutativité $\mathfrak{p}^t_\gamma = \mathfrak{p}^0_\gamma$ ne dépend pas de t. On le note par conséquent $\mathfrak{p}_\gamma$.

De la même façon on voit que $\mathfrak{p}^t_F$ et $\mathfrak{p}^t_{eucl}$ ne dépendent pas de t et on les note $\mathfrak{p}_F$ et $\mathfrak{p}_{eucl}$.

Par l'intermédiaire de α, on vient de décomposer $T_{\gamma(t)}M$. Il nous faut maintenant prolonger cette décomposition au bord. Remarquons qu'on ne peut pas le faire directement en regardant l'image de $\mathfrak{p}_F$ sous α au point $\gamma(\infty)$ puisqu'elle est réduite à 0.

Décomposition de l'espace tangent au bord (I)

Lemme 7 — *L'espace tangent $V_\perp$ à l'orbite de $\gamma(\infty)$ sous l'action de G_0 est la limite quand $t \to +\infty$ de $(T_{\gamma(t)}F_\gamma)^\perp$.*

Démonstration : on va utiliser la constance de $\mathfrak{p}_\gamma$. On dispose en considérant les points $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$ de deux décompositions, orthogonales pour la forme de Killing :

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{k}^0 \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{p}^0_\perp \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{p}^0_\gamma \tag{1}$$

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{k}^t \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{p}^t_\perp \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{p}^t_\gamma \tag{2}$$

De $\mathfrak{p}^0_\gamma = \mathfrak{p}^t_\gamma$ on déduit $\mathfrak{p}^0_\perp \subset \mathfrak{k}^t \oplus \mathfrak{p}^t_\perp$. Il s'ensuit que, considérée au point $\gamma(t)$, α envoie $\mathfrak{p}^0_\perp$ dans $T_{\gamma(t)}F_\gamma$. Mais un champ de Killing appartenant à $\mathfrak{p}^0$ ne s'annule pas, donc par égalité des dimensions on a :

$$\alpha_{\gamma(t)}(\mathfrak{p}^t_\perp) = (T_{\gamma(t)}F_\gamma)^\perp$$

et ce, pour tout t.

Il suffit donc de montrer que $V_\perp$ est l'image par α de $\mathfrak{p}^0_\perp$ au point $\gamma(\infty)$ pour obtenir par continuité de α le résultat annoncé.

Il est tout d'abord clair que $\mathfrak{p}^0_\perp$ est envoyé par α dans l'espace tangent à l'orbite de $\gamma(\infty)$:

$$\alpha_{\gamma(t)}(\mathfrak{p}^0_\perp) \subset V_\perp \tag{3}$$

Les cloisons sont des variétés topologiques de dimension $k-2$, les chambres sont de dimension $k-1$ et l'espace des chambres adjacentes à la cloison P contenant $\gamma(\infty)$ est paramétré par le bord de F donc est de dimension $f-1$. L'orbite de $\gamma(\infty)$ est donc de dimension $m-f-k+1 = \dim(\mathfrak{p}^0_\perp)$ et il suffit de montrer l'injectivité de $\alpha_{\gamma(t)}$ restreinte à $\mathfrak{p}^0_\perp$ pour avoir égalité dans 3.

Or si $H \in \mathfrak{p}^0_\perp$ était envoyé sur $0 \in T_{\gamma(\infty)}\bar{M}$ par α_∞, en conjuguant avec une inversion géodésique il serait aussi envoyé sur $0 \in T_{\gamma(-\infty)}\bar{M}$ par $\alpha_{-\infty}$ (on utilise ici que $\mathfrak{p}^0$ est un espace propre pour l'involution de Cartan au point $\gamma(0)$).

Alors $\alpha(\exp(H))$ transformerait γ en une géodésique parallèle et $\alpha(H)$ serait en tout point de γ tangent à F_γ, ce qui est impossible par définition de $\mathfrak{p}^t_\perp$. ∎

Décomposition de l'espace tangent au bord (II)

On va maintenant se servir de la présence d'un groupe compact dans G_0^F pour continuer la décomposition au bord, *via* le résultat suivant.

Lemme 8 — *Soit K un groupe topologique compact et $(\mu_t)_{t\in\mathbb{R}}$ une famille continue de représentations linéaires de K sur un espace vectoriel V de dimension finie. Alors les représentations μ_t sont toutes conjuguées deux à deux.*

Démonstration : la classe de conjugaison d'une représentation de K est entièrement déterminée par son caractère. Plus précisément, la multiplicité d'une représentation irréductible ν dans μ_t est donnée par le produit scalaire des caractères de ν et μ_t, c'est donc une fonction continue de t. Elle est à valeurs entières donc constante. ■

On note ρ^t la représentation naturelle (obtenue en différenciant) du fixateur $K_0^F \subset G_0^F$ de p sur l'espace vectoriel $T_{\gamma(t)}M$.

$$\begin{array}{rcl}\rho^t : K_0^F & \longrightarrow & \mathrm{GL}(T_{\gamma(t)}M)\\ k & \longmapsto & d_{\gamma(t)}\alpha(k)\end{array}$$

On note ρ^∞ la restriction de ρ à K_0^F. C'est aussi la limite des ρ_t quand $t \to \infty$.

Lemme 9 — *Les sous-espaces vectoriels $T_{\gamma(t)}F^t$ et $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^{k-1} \subset T_{\gamma(t)}M$ admettent quand $t \to \infty$ des sous-espaces vectoriels limites V_F et $V_{eucl} \subset T_{\gamma(\infty)}M$.*

De plus la restriction ρ^∞ de ρ au groupe compact K_0^F agit transitivement sur V_F et trivialement sur V_{eucl}.

Démonstration : d'après le lemme 8, les ρ^t $(t \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ sont deux à deux conjuguées. En particulier comme les sous-espaces tangents $T_{\gamma(t)}F^t$, $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^{k-1}$ et $(T_{\gamma(t)}F_\gamma)^\perp$ sont des espaces stables sous ρ^t, il existe une décomposition

$$T_{\gamma(\infty)}\bar{M} = V_F \oplus V_{eucl} \oplus V_\perp$$

stable sous ρ^∞ et telle que ses restrictions à V_F, V_{eucl} et $V_\perp$ soient conjuguées aux restrictions de ρ^t à respectivement $T_{\gamma(t)}F^t$, $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^{k-1}$ et $(T_{\gamma(t)}F_\gamma)^\perp$.

Comme ρ^t est triviale sur $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^{k-1}$, ρ^∞ l'est sur V_{eucl}. De même ρ^∞ est irréductible sur V_F car F, de rang 1, est isotrope.

Enfin par continuité de ρ^t au point $t = \infty$, V_F et V_{eucl} sont les limites de $T_{\gamma(t)}F^t$ et $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^{k-1}$ respectivement. ■

Notons que V_F est inclus dans $T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$ car ce dernier est de codimension 1 et préservé par K_0^F qui agit transitivement sur V_F.

Stabilité de la décomposition au bord

Notre but est maintenant de montrer que V_F est stable par ρ, autrement dit qu'on obtient le même V_F si on remplace γ par une autre géodésique qui lui est parallèle.

Rappelons qu'on note X l'élément de $\mathfrak{p}_\gamma$ vérifiant $\gamma'(t) = \alpha(X)$ au point $\gamma(t)$.

LEMME 10 — *La restriction de* $\rho(\exp(X)) - \mathrm{Id}$ *à* $V_\perp$ *est de rang maximal.*

DÉMONSTRATION : par définition de ρ on a

$$\rho(\exp X) = d_{\gamma(\infty)}(\alpha(\exp X))$$

Fixons un plat maximal contenant γ et écrivons la décomposition en racines associée :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{g}_\lambda$$

Comme γ est singulier, X annule certaines racines. Les champs de Killing qui commutent avec X sont les éléments de

$$\mathfrak{g}_0 + \sum_{\lambda(X)=0} \mathfrak{g}_\lambda$$

et par orthogonalité

$$\mathfrak{p}_\perp^0 \subset \sum_{\lambda(X)\neq 0} \mathfrak{g}_\lambda$$

Or au point $\gamma(\infty)$, α est à valeur dans $V_\perp$ et réalise un isomorphisme de $\mathfrak{p}_\perp^0$ sur $V_\perp$. On induit donc par α une surjection

$$\sum_{\lambda(X)\neq 0} \mathfrak{g}_\lambda \longrightarrow V_\perp$$

Maintenant pour tout $H \in \mathfrak{g}_\lambda$, on a

$$d_{\gamma(\infty)}(\alpha(\exp X))(\alpha(H)) = \alpha(Ad(\exp(X))(H)) = e^{\lambda(X)}\alpha(H)$$

donc $\rho(\exp(X)) - \mathrm{Id}$ est de rang maximal sur $V_\perp$. ∎

LEMME 11 — *La cloison* P *qui contient* $\gamma(\infty)$ *est, au voisinage de ce point, une sous-variété de* $M(\infty)$.

DÉMONSTRATION : la cloison P est contenue dans l'ensemble des points de $M(\infty)$ qui sont fixés par l'action de G_0^F et de $\exp X$. On obtient en coordonnées locales un système infini d'équation dont le rang est, d'après ce qui précède, au moins égal à $\dim V_\perp + \dim V_F = m - k + 1$ (on utilise ici le lemme 10 et l'irréductibilité de ρ^∞ sur V_F).

On peut donc extraire un système libre de $m - k + 1$ équations indépendantes, qui par le théorème des fonctions implicites définit localement une sous-variété différentielle S de $M(\infty)$, de dimension $k-2$. Mais P est une sous-variété topologique de codimension $k-2$ incluse dans S, donc S et P sont localement confondues et P est localement une sous-variété différentielle. ∎

Lemme 12 — *Le sous-espace V_F est un espace stable de ρ.*

Démonstration : comme $V_\perp$ est l'espace tangent à l'orbite de $\gamma(\infty)$ sous l'action de G, c'est un espace stable de ρ. Comme G_0^F est un groupe de Lie simple, ρ est totalement réductible et il existe un unique supplémentaire de $V_\perp$ stable par ρ. Mais $V_F \oplus V_{eucl}$ est l'unique supplémentaire de $V_\perp$ stable par ρ^∞, restriction de ρ au groupe compact K_0^F. Ces deux supplémentaires sont donc identiques, et $V_F \oplus V_{eucl}$ est stable par ρ.

Comme $T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$ est stable par ρ, il existe une droite vectorielle $L \subset T_{\gamma(\infty)}M$ stable par ρ et transverse au bord. Elle est en particulier stable par ρ^∞ ; elle ne peut être incluse dans V_F car c'est un espace irréductible de ρ^∞, donc L est incluse dans V_{eucl}. On peut donc écrire $V_{eucl} = L \oplus V'_{eucl}$ où $V'_{eucl} = V_{eucl} \cap T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$.

Comme la cloison P est une sous-variété de $M(\infty)$ fixée point par point par G_F^0, son espace tangent au point $\gamma(\infty)$ est un espace stable de ρ sur lequel ρ est triviale. En particulier ρ^∞ y est triviale, donc

$$T_{\gamma(\infty)}P \subset V'_{eucl}$$

et comme ces deux espaces sont tous deux de dimension $k-2$, ils sont égaux.

Comme ρ est totalement réductible il existe un unique supplémentaire V de $V_\perp \oplus V'_{eucl}$ dans $T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$ stable par ρ. Mais V doit être en particulier stable par ρ^∞, donc est nécessairement égal à V_F. ∎

Conclusion

On note ρ_1 la restriction de ρ à V_F. On peut appliquer les idées de la section précédente.

Si F est de dimension paire, les inversions géodésiques sont dans la composante neutre G_0^F et on peut regarder leurs images par ρ_1, qui par continuité sont $-\mathrm{Id}$. La composition de deux d'entre elle est un élément non trivial de G_0^F dont l'image par ρ_1 est Id : ρ_1 est alors non triviale et non fidèle, ce qui est impossible.

Si F est de dimension impaire, ρ_1 est une représentation non triviale de dimension $2m+1$ de $\mathrm{SO}_0(1, 2m+1)$ pour un certain m, ce qui est également impossible.

On a donc montré le théorème F.

Deuxième partie

Remplissages holomorphes équivariants

Chapitre VI

Géométrie CR et variétés complexes à bord

À l'école, en algèbre, j'étais du genre Einstein. Mais plutôt Franck qu'Albert.

Philippe Geluck,
Le chat à Malibu

Cette deuxième partie est consacrée à l'étude de certaines variétés complexes à bord. Le but de ce chapitre est de les définir et dans un premier temps de donner des éléments sur la structure de leur bord. La géométrie CR (pour Cauchy et Riemann) décrit la structure induite par une variété complexe sur une sous-variété réelle, c'est donc un objet essentiel pour notre étude.

1 Éléments de géométrie CR

1.1 Deux exemples fondamentaux

Le cas fondamental en géométrie CR est celui des hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$. Leur étude est naturelle dès qu'on constate qu'il n'y a pas d'uniformisation en dimension supérieure ou égale à 2. C'est Poincaré qui le premier démontra, en étudiant leurs groupes d'automorphismes, que la boule

$$B^{2\times 2} = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 ; |x|^2 + |y|^2 < 1\right\}$$

et le polydisque

$$\Delta^2 = \{x \in \mathbb{C} ; |x| < 1\} \times \{y \in \mathbb{C} ; |y| < 1\}$$

ne sont pas biholomorphiquement conjugués.

Comparons brièvement les deux hypersurfaces correspondantes : la sphère unité et l'hyperplan (celui-ci est localement biholomorphe aux « faces » du polydisque : il suffit pour le voir d'uniformiser le bord circulaire d'un des facteurs sur une droite). Un hyperplan affine réel de $\mathbb{C}^2$ contient des droites affines complexes, qui forment un feuilletage par surfaces de Riemann. Par exemple le plan $\{\operatorname{Im} x = 0\}$ est feuilleté par les droites $\{x = r\}$ où r parcourt $\mathbb{R}$. Au contraire, la sphère unité $S^3 = \{|x|^2 + |y|^2 = 1\}$ borde un domaine strictement convexe de l'espace affine $\mathbb{C}^2$, donc ne peut contenir de surface de Riemann. En effet, pour tout point $p \in S^3$ il existe une forme affine réelle a de $\mathbb{C}^2$ telle que $a(p) = 0$ et $a(q) > 0$ pour tout $q \in S^3$, $q \neq p$. La restriction d'une telle forme à une surface de Riemann passant par p serait une fonction harmonique admettant un minimum strict, ce qui n'existe pas. On voit donc très simplement que ces deux hypersurfaces sont de nature différente. Dans la suite on présente des outils qui permettent de raffiner cette distinction.

On parlera toujours de *boule standard* pour la variété complexe abstraite isomorphe à la boule unité — pour la norme hermitienne canonique — de $\mathbb{C}^n$ et de *sphère standard*, notée simplement S^{2n-1}, pour la variété CR abstraite isomorphe à la sphère unité.

1.2 Définitions

Étudions maintenant les hypersurfaces réelles générales de $\mathbb{C}^n$: on en tirera une définition des variétés CR abstraites et leurs propriétés élémentaires.

Considérons donc une hypersurface réelle H de $\mathbb{C}^n$ (ou d'une variété complexe) de régularité $\mathscr{C}^k$. Pour tout ce qui est fait ici, $k \geqslant 6$ suffit mais pour plus de simplicité on peut se restreindre aux hypersurfaces lisses ($k = \infty$) ou analytiques (ω).

Notons J l'opérateur de multiplication par i sur le fibré tangent de $\mathbb{C}^n$. L'intersection $T_xH \cap J(T_xH)$ définit dans le fibré tangent de H un champ d'hyperplans, noté ξ (sur la figure 25, on triche évidemment sur les dimensions). Par construction, l'opérateur J agit sur ξ et on note encore J sa restriction. Le couple (ξ, J) constitue la structure CR de H.

Intégrabilité

On sait que dans une variété complexe l'opérateur J satisfait la condition d'intégrabilité de Nijenhuis

$$J\big([X, JY] + [JX, Y]\big) = [JX, JY] - [X, Y] \tag{1}$$

Il en découle que la structure CR d'une hypersurface réelle d'une variété complexe satisfait une propriété analogue, qu'on appellera encore *condition*

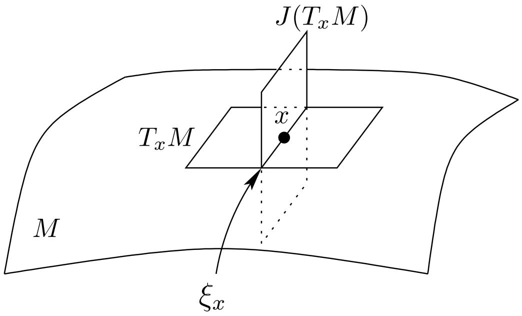

FIGURE 25 – *Champ d'hyperplans d'une hypersurface*

d'intégrabilité: pour tous champs de vecteurs X, Y définis sur H et partout tangents à ξ,

$$\begin{array}{rcl} [JX,Y]+[X,JY] & \in & \xi \\ & \text{et} & \\ J\big([JX,Y]+[X,JY]\big) & = & [JX,JY]-[X,Y] \end{array} \tag{2}$$

Forme de Levi et pseudoconvexité

En tant que sous-variété, H peut être paramétrée implicitement: localement, elle s'écrit comme un niveau $\{h = 0\}$ où $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction analytique réelle dont 0 est une valeur régulière. Si x est un point de H et v un élément de $T_x\mathbb{C}^n$, $dh_x(v) = 0$ si et seulement si $v \in T_xH$ et $dh_x(v) = (dh_x \circ J)(v) = 0$ si et seulement si $v \in \xi_x$. Si on définit θ_x comme la restriction à T_xH de $dh_x \circ J$, on obtient sur H une 1-forme différentielle dont le noyau est ξ. Le choix de h ne change bien évidemment θ que par multiplication par une fonction ne s'annulant pas.

Muni de cette forme, on peut définir sur ξ_x une forme quadratique appelée *forme de Levi*:

$$L_x(v) = d\theta_x(v, Jv) \tag{3}$$

Un peu de calcul différentiel extérieur amène une autre expression de la forme de Levi: pour n'importe quel champ de vecteurs V défini au voisinage de x et tangent à ξ, on a

$$L_x(V_x) = -\theta_x([V, JV]_x) \tag{4}$$

Cette expression montre en particulier que le choix de h n'influe sur L que par multiplication par une fonction ne s'annulant pas. Ainsi la signature de la forme de Levi est bien définie au signe près. La figure 26 illustre l'équation (4) dans le cas où L est non dégénérée. On y a représenté ξ dans le plan

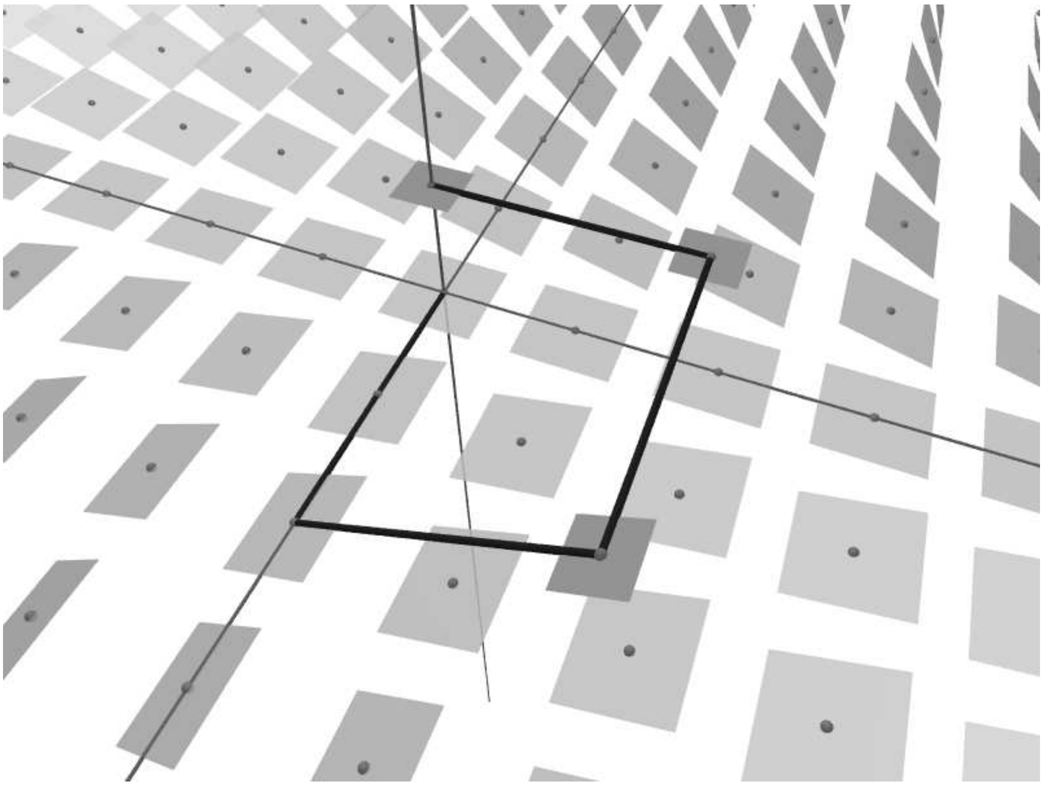

FIGURE 26 – *La forme de Levi*

horizontal, il est supposé invariant par translation verticale. L'opérateur J est la rotation de ξ d'un quart de tour en sens direct. On considère un champ de vecteur V partout tangent à ξ et supposé constant dans cette carte. Le trajet foncé représente de façon macroscopique le crochet $[V, JV]$: on suit V, puis JV, $-V$ et enfin $-JV$. Le décalage vertical est alors mesuré par $L(V)$.

Cette signature a un sens géométrique fort, par exemple la forme de Levi est partout non dégénérée si et seulement si ξ est une distribution de contact. Si la forme de Levi est partout définie positive ou définie négative, on dit que H est *strictement pseudoconvexe*. Si elle est partout positive ou partout négative sans être nécessairement définie, on dit que H est *faiblement pseudoconvexe*. Si elle est partout nulle, on dit que H est *Levi-plate* et dans ce cas ξ engendre un feuilletage de codimension 1, dont les feuilles sont des variétés complexes.

Par exemple les hyperplans affines réels sont Levi-plats et la sphère standard strictement pseudoconvexe. Le champ d'hyperplans obtenu sur celle-ci est la structure de contact standard.

Définition abstraite

On peut maintenant donner les définitions générales.

Définition 1 (variété CR) — *On appelle* variété CR *une variété M munie d'un champ d'hyperplans ξ et d'un opérateur presque complexe J sur ξ (c'est-à-dire $J : \xi \to \xi$, $J^2 = -\mathrm{Id}$) vérifiant la condition* (2).

On ne considérera que des variétés orientables. Une variété CR est nécessairement de dimension impaire, en général notée $2n-1$ avec $n \geqslant 2$. Tous les objets sont supposés $\mathscr{C}^k$.

Définition 2 (application CR) — *Étant données des variétés M et N munies de structures CR (ξ, J) et (η, K), on appelle* application CR *de M dans N une application différentiable $F : M \to N$ telle que $F_*\xi \subset \eta$ et, pour tout $X \in \xi$, $dF(JX) = KdF(X)$.*

Une application CR qui est également un difféomorphisme est un isomorphisme. *Un isomorphisme d'une variété CR vers elle-même est appelé un* automorphisme.

On vérifie facilement que la réciproque d'un isomorphisme est bien une application CR. Deux variétés entre lesquelles il existe un isomorphisme sont dites *isomorphes* ou *équivalentes*.

La forme de Levi d'une variété CR abstraite est définie comme précédemment par (3), où θ est une forme différentielle de noyau ξ. La signature de la forme de Levi est, au signe près, un invariant CR. On dit encore d'une variété CR qu'elle est strictement pseudoconvexe ou respectivement Levi-plate si sa forme de Levi est partout définie (positive ou négative) ou respectivement partout nulle.

1.3 Calibrations

Considérons une variété CR (M, ξ, J) de dimension $2n-1$. Comme on l'a vu la forme de Levi n'est pas intrinsèquement définie par la structure CR de M, mais dépend du choix d'une forme différentielle définissant la distribution d'hyperplans ξ. Une telle forme existe toujours car M est supposée orientée et ξ est coorienté par J.

Définition 3 (calibration) — *On appelle* calibration *de M une 1-forme θ telle qu'en tout point $x \in M$, $\ker \theta_x = \xi_x$.*

Il est important de remarquer qu'une calibration n'a *a priori* aucune raison d'être préservée par les automorphismes de M ; on sait seulement que deux calibrations sont multiples l'une de l'autre par une fonction ne s'annulant pas.

La donnée d'une calibration rigidifie beaucoup M. Considérons le cas strictement pseudoconvexe. On sait que la restriction de $d\theta$ à ξ est non dégénérée, donc que $d\theta$ est de rang au moins $2n$. Mais comme M est de dimension impaire, la puissance extérieure $(n+1)$-ième de $d\theta$ est nulle, autrement dit le noyau de $d\theta$ est de dimension 1 et transverse à θ. Il existe par conséquent un unique champ de vecteurs X vérifiant en tout point $X \lrcorner\, d\theta = 0$ et la condition de normalisation $\theta(X) = 1$. On l'appelle le *champ de Reeb* de ξ associé à la calibration θ. Son flot préserve θ et donc ξ, comme le montre la formule magique de Cartan :

$$\mathcal{L}_X\theta = d(X \lrcorner\, \theta) + X \lrcorner\, d\theta = 0$$

De plus la donnée d'une calibration fixe la forme de Levi L qui, quitte à considérer $-\theta$, est définie positive sur ξ. Mais la projection $\pi : TM \to \xi$ sur ξ dans la direction du champ de Reeb permet d'étendre L à tout l'espace tangent. On obtient alors une forme quadratique définie positive sur TM par la formule

$$q_x(v) = L_x \circ \pi_x(v) + \theta_x(v)^2 \tag{5}$$

où $x \in M$ et $v \in T_xM$. La donnée d'une calibration détermine donc une métrique riemannienne sur M. On l'appelle la *métrique de Webster* associée à la calibration.

Notons que ni cette métrique, ni sa classe conforme ne sont canoniques : si l'on considère une nouvelle calibration $\theta' = f\theta$ où f est une fonction à valeurs strictement positives, la nouvelle métrique s'écrit

$$q' = L' \circ \pi' + \theta'^2 = fL \circ \pi' + f^2\theta^2$$

donc on a $q' = fq$ sur ξ mais en notant encore X le champ de Reeb associé à θ, $q'(X) \geqslant \theta'(X)^2 = f^2$. Si f n'est pas constante égale à 1, q' n'est donc pas un multiple de q.

1.4 Côtés d'une hypersurface

Soit H une hypersurface de $\mathbb{C}^n$, supposée strictement pseudoconvexe. On peut en distinguer les deux côtés, qui ne jouent pas des rôles symétriques. L'un sera appelé *côté convexe* et l'autre *côté concave* de H ; on propose deux méthodes équivalentes pour les définir, toutes deux locales.

Choisissons une fonction h qui définit localement H : h s'annule exactement le long de H et 0 en est une valeur régulière. Comme on l'a vu, h définit une calibration $dh \circ J$ et donc une forme de Levi L. Quitte à considérer $-h$, on peut supposer L positive. On définit alors le côté convexe de H comme le domaine défini par $\{h < 0\}$ et son côté concave comme le domaine défini par $\{h > 0\}$.

Alternativement, considérons un champ de vecteurs V défini au voisinage d'un point de M qui, le long de H, est tangent à la distribution d'hyperplans ξ. Le champ de vecteurs JV est alors également tangent à ξ le long de H ; comme H est strictement pseudoconvexe le champ $[V, JV]$ est lui toujours transverse à ξ. L'orientation de $(\xi, [V, JV])$ ne dépend pas du choix de V d'après (4). Le champ $J[V, JV]$ est donc transverse à H et pointe toujours vers le côté concave de H.

1.5 Quelques propriétés

Pour conclure cette section, présentons quelques résultats importants.

Tout d'abord, la construction de la structure CR d'une hypersurface ne dépendant que de la structure complexe de $\mathbb{C}^n$, le résultat suivant est évident.

Proposition 4 — *Une transformation biholomorphe entre deux ouverts de $\mathbb{C}^n$ qui envoie une hypersurface sur une autre induit sur les hypersurfaces un isomorphisme CR.*

Si le biholomorphisme n'est défini que d'un côté de l'hypersurface, le problème est nettement plus compliqué.

Théorème 5 (Fefferman [17]) — *Si D_1 et D_2 sont des domaines bornés de $\mathbb{C}^n$ dont les bords sont $\mathscr{C}^\infty$ et strictement pseudoconvexes, tout biholomorphisme $F : D_1 \to D_2$ se prolonge en un difféomorphisme $\bar{F} : \bar{D}_1 \to \bar{D}_2$.*

Ce résultat a été redémontré avec différentes techniques et étendu, par exemple aux domaines faiblement pseudoconvexes à bord analytique réel [4].

Le prolongement d'une application CR est également délicat. Notons par exemple l'hypothèse de convexité dans le résultat suivant.

Théorème 6 (Pinchuk [28]) — *Une application CR, $\mathscr{C}^1$ et non constante entre deux hypersurfaces analytiques réelles et strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$ se prolonge localement biholomorphiquement.*

Enfin on termine ce très court panorama par des résultats d'existence et d'unicité des remplissages.

Théorème 7 (Boutet de Monvel [47]) — *Une variété CR compacte, $\mathscr{C}^\infty$ et strictement pseudoconvexe de dimension $2n-1 \geqslant 5$ est isomorphe à une hypersurface réelle $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{C}^n$.*

Notons qu'en dimension 3 il existe des contre-exemples analytique réels globaux [50] et même locaux [48].

Théorème 8 (Eliashberg [16]) — *Soit X une variété complexe à bord, de dimension 2. Si le bord de X est difféomorphe à la sphère et strictement pseudoconvexe, alors X est difféomorphe à la boule fermée éventuellement éclatée en quelques points.*

2 La boule standard

Dans cette section on étudie plus en détail la boule standard et son bord. Elle est indissociable de l'espace hyperbolique complexe, que l'on commence par construire.

2.1 Construction de l'espace hyperbolique complexe

De la même façon qu'on construit l'espace hyperbolique réel comme une nappe de $\{Q = -1\}$ pour le produit scalaire lorentzien Q sur $\mathbb{R}^n$ (voir le chapitre II, section 1.1), on peut construire l'espace hyperbolique complexe. Plus précisément, considérons sur $\mathbb{C}^{n+1}$ la forme hermitienne de signature lorentzienne :

$$Q(z_0, \ldots, z_n) = -|z_0|^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$$

et notons H son niveau $\{Q = -1\}$. Remarquons que H est, cette fois, connexe : en effet la forme symétrique réelle $\mathrm{Re}(Q)$ est de signature $(2, 2n)$. Toutefois c'en est encore un quotient qui va servir de modèle pour l'espace hyperbolique. En effet, si on multiplie $(z_0, \ldots, z_n) \in H$ par un complexe de module 1 on obtient encore un point de H, donc la projection de H dans le projectif $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ n'est pas injective. C'est une fibration, dont les fibres sont exactement les cercles obtenus en faisant agir par multiplication le groupe $\mathrm{U}(1)$ des nombres complexes unitaires.

La restriction de $\mathrm{Re}(Q)$ au fibré tangent (réel) de H est une métrique lorentzienne pour laquelle l'action de $\mathrm{U}(1)$ est isométrique. On appelle d'ailleurs *espace de Sitter* cet espace lorentzien. La restriction de $\mathrm{Re}(Q)$ à l'orthogonal des fibres est définie positive, qu'on pousse par la projection de H sur la carte affine $\{z_0 = 1\}$ (identifiée naturellement à $\mathbb{C}^n$) de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ pour obtenir dans la boule une métrique riemannienne. La variété riemannienne obtenue est l'*espace hyperbolique complexe* $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ et sa réalisation dans la boule de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ en est le *modèle de Klein*.

Cette construction permet également de voir l'espace hyperbolique complexe comme un espace homogène : $\mathbb{C}\mathrm{H}^n = \mathrm{SU}(1, n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1))$. Le groupe $\mathrm{SU}(1, n)$ est l'ensemble des matrices complexes carrées de taille $n+1$

qui préservent la forme hermitienne Q et dont le déterminant vaut 1. Le groupe $\mathrm{S}\left(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1)\right)$ est l'ensemble des couples (A, u), où A est une matrice unitaire de taille n et u un complexe de module 1, qui vérifient $u \det A = 1$.

Remarquons que les isométries de $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ sont exactement, dans le modèle de Klein, les biholomorphismes de la boule standard. En les prolongeant au bord, ce sont aussi exactement les automorphismes CR de la sphère standard.

2.2 Les automorphismes en dimension 2

On va maintenant décrire plus précisément l'action sur la boule standard de dimension 2 de son groupe d'automorphismes $\mathrm{SU}(1,2)$.

Classification des automorphismes

Dans la suite on utilise sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ des coordonnées homogènes $[x : y : z]$ dans lesquelles la boule unité, qu'on notera B, s'écrit $\{|x|^2 + |y|^2 - |z|^2 < 0\}$.

Chaque élément de $\mathrm{SU}(1,2)$ admet au moins un point fixe dans la boule fermée $\bar{B}$. Comme pour l'espace hyperbolique réel on peut grâce à ces points fixes classer ces isométries en trois catégories : un élément de $\mathrm{SU}(1,2)$ est

- *elliptique* s'il fixe un point de B ;
- *parabolique* s'il ne fixe aucun point de B mais exactement un point de ∂B ;
- *hyperbolique* s'il ne fixe aucun point de B mais exactement deux points de ∂B,

et tout élément est d'un de ces trois types.

Remarquons qu'un point de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ fixé par $A \in \mathrm{SU}(1,2)$ correspond à un vecteur propre de la matrice A.

Description de l'algèbre de Lie

L'algèbre de Lie contient beaucoup d'information sur le groupe, et se prête souvent mieux aux calculs. Les éléments de $\mathfrak{su}(1,2)$ sont les matrices 3×3 de la forme

$$A = \begin{pmatrix} -i(b_1 + b_2) & l_1 & l_2 \\ \overline{l_1} & ib_1 & c \\ \overline{l_2} & -\overline{c} & ib_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

où b_1 et b_2 sont des nombres réels tandis que l_1, l_2 et c sont des nombres complexes.

La forme de Killing est donnée par

$$B(A) = \mathrm{tr}(A^2) = -3\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{b_1-b_2}{2}\right)^2 + |l_1|^2 + |l_2|^2 - |c|^2 \qquad (7)$$

Un élément de $\mathfrak{su}(1,2)$ est dit elliptique, parabolique ou respectivement hyperbolique si l'adjectif s'applique à son exponentielle. Autrement dit, il est elliptique s'il a un vecteur propre v avec $Q(v) < 0$, parabolique si tous ses vecteurs propres vérifient $Q(v) \geqslant 0$ avec égalité pour exactement un d'entre eux et hyperbolique si tous ses vecteurs propres vérifient $Q(v) \geqslant 0$ avec égalité pour exactement deux d'entre eux. Un élément elliptique est de norme de Killing négative, mais la réciproque est fausse.

Nous nous intéressons maintenant aux transformations paraboliques et hyperboliques, qui nous seront utiles par la suite.

Éléments hyperboliques

Par définition, un élément hyperbolique $A \in \mathrm{SU}(1,2)$ a deux points fixes p_1 et p_2 dans ∂B. Par chacun de ses points, il passe exactement une droite projective tangente à la sphère ∂B, dont la direction est la droite complexe $\xi_{p_i} \subset T_{p_i}\partial B$ de la distribution de contact sous-jacente à la structure CR. Ces deux droites se coupent en un point q de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ et comme elles sont globalement préservées, q est un point fixe pour l'action projective de A. Ces trois points non alignés correspondent à trois vecteurs propres linéairement indépendants, il n'y en a donc pas d'autre.

L'action de $\mathrm{SU}(1,2)$ est deux fois transitive sur ∂B ; quitte à conjuguer A on peut donc supposer que les p_i sont les points $[1:1:0]$ et $[1:-1:0]$. Alors q doit être le point $[0:0:1]$, intersection des droites $\{x = y\}$ et $\{x = -y\}$. En utilisant (6) on peut écrire A sous la forme

$$A = \exp\begin{pmatrix} ib & l & 0 \\ l & ib & 0 \\ 0 & 0 & -2ib \end{pmatrix} \qquad (8)$$

où $l \neq 0$ et b sont des nombres réels. Quitte à considérer $-A$ qui a la même action sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, on peut supposer $l > 0$. Les valeurs propres de A sont $\exp(l+ib)$, $\exp(-l+ib)$, $\exp(-2ib)$ et A est diagonalisable. Un calcul en coordonnées projectives permet de déterminer la nature des trois points fixes. L'un des points fixes du bord, disons p_1, est attractif avec valeurs propres $\exp(-2l)$ et $\exp(-l-3ib)$. L'autre est répulsif avec valeurs propres $\exp(2l)$ et $\exp(l-3ib)$. Enfin, q est hyperbolique avec valeurs propres $\exp(-l+3ib)$ et $\exp(l+3ib)$. Sur la figure 27, la sphère ∂B est représentée en dimension 2 au lieu de 3 et les droites complexes sont représentées par des lignes.

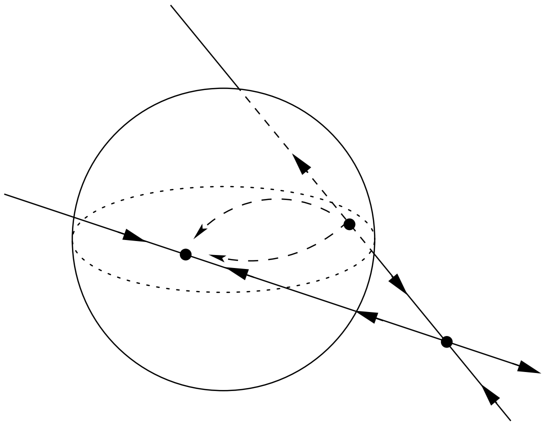

FIGURE 27 – *Dynamique d'une transformation hyperbolique*

Éléments paraboliques

Considérons maintenant un élément parabolique $a \in \mathfrak{su}(1,2)$ et A son exponentielle. Quitte à conjuguer, on peut supposer que son unique point fixe au bord est $p = [1 : 1 : 0]$.

L'action de A sur la droite projective L passant par p et tangente à ∂B ne peut être hyperbolique, donc la valeur propre de a associée au vecteur propre $(1,1,0)$ est imaginaire pure et on peut écrire

$$a = \begin{pmatrix} -i(d_1 + d_2) & i\left(d_1 + \frac{1}{2}d_2\right) & c \\ -i\left(d_1 + \frac{1}{2}d_2\right) & id_1 & c \\ \overline{c} & -\overline{c} & id_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

où d_1 et d_2 sont réels et c est complexe. Les valeurs propres de a sont id_2 et $-id_2/2$ avec multiplicité 2. On peut maintenant distinguer trois cas, selon la forme de Jordan de A.

Si $d_2 \neq 0$, p définit l'unique direction propre associée à la valeur propre $-id_2/2$ donc a n'est pas diagonalisable et la forme de Jordan de A est

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{d_2}{2}} & 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{d_2}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{id_2} \end{pmatrix} \tag{10}$$

L'action de A sur L est alors conjuguée à une rotation de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ et A admet un deuxième point fixe $q \in L$. Sur la figure 28, on a cette fois représenté L par une section plane pour y montrer la rotation.

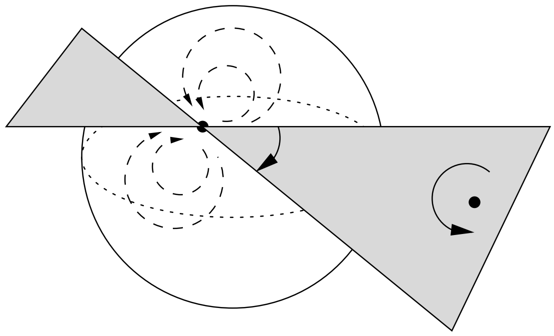

FIGURE 28 – *Dynamique d'une transformation parabolique à deux points fixes*

Si $d_2 = 0$ et $c = 0$, a est nilpotente d'ordre 2, la forme de Jordan de A est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

et elle fixe chaque point de L (voir la figure 29).

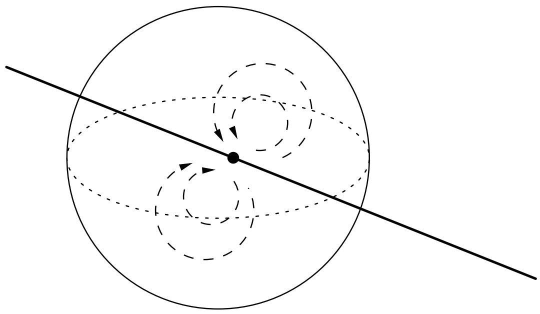

FIGURE 29 – *Dynamique d'une transformation parabolique fixant chaque point d'une droite*

Enfin si $d_2 = 0$ et $c \neq 0$, a est nilpotente d'ordre 3, la forme de Jordan de A est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

et p est son seul point fixe, à la fois attractif et répulsif (voir la figure 30).

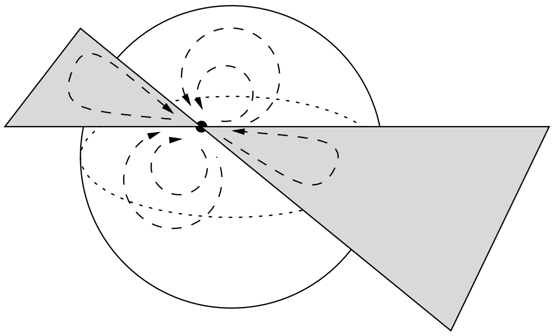

Figure 30 – *Dynamique d'une transformation parabolique fixant un seul point*

3 Le théorème de Webster–Schoen

Dans cette section on s'intéresse au théorème de Webster–Schoen, qui caractérise la sphère standard par la non-compacité de son groupe d'automorphisme.

Le théorème de Webster–Schoen est un analogue CR du théorème de géométrie conforme d'Obata-Ferrand. Il a été démontré d'abord sous des hypothèses très fortes par Webster [61] puis dans différentes versions par, sans prétention à l'exhaustivité, Burns et Shnider [10], Wong [63], Klembeck [29], Kamishima [27] et Lee [37] avant d'être démontré dans toute sa généralité par Schoen [52]. Très récemment, Frances [18] l'a démontré dans le cadre général des géométries de Cartan paraboliques (incluant entre autres le cas conforme).

Théorème 9 (Webster–Schoen) — *Soit M^{2n-1} une variété CR strictement pseudoconvexe dont le groupe d'automorphismes agit non proprement. Alors si M est compacte elle est CR-équivalente à la sphère standard S^{2n-1}, si M est non compacte elle est CR-équivalente à la sphère standard privée d'un point.*

On dit que l'action de G sur M est propre si pour tout compact K de M, l'ensemble

$$\{g \in G; g{\cdot}K \cap K \neq \varnothing\}$$

est compact dans G. Si M est compacte, cela revient à dire que G est compact.

On propose maintenant d'en esquisser une démonstration géométrique. Le but est de montrer pourquoi ce résultat est raisonnable, pas de mener à bien tous les arguments dans le détail. Ceux-ci sont essentiellement inspirés des travaux de Webster [61] et Frances et Tarquini [19] ; on ne s'occupe que de la partie locale, le passage du local au global étant semblable au cas conforme traité dans [19]. De plus on traite le cas compact pour plus de simplicité.

Tenseur de courbure

L'outil principal dont nous avons besoin est le tenseur de courbure de Chern–Moser S défini dans [13], qui est un analogue CR du tenseur de Weyl en géométrie conforme. C'est un tenseur qui est défini sur une variété CR de dimension $2n-1$ pourvu que n soit au moins égal à 2 ; il peut être défini si $n=1$ mais est alors toujours nul.

Sans entrer dans les détails (pour lesquels on peut consulter [62]), il nous suffit de savoir qu'on peut en tirer une fonction $\|S\|_\theta$ dépendant de la calibration (c'est essentiellement une norme de S) qui satisfait les deux propriétés suivantes :

- (i) si $\|S\|_\theta$ s'annule sur un ouvert $U \subset M$, alors U est localement équivalent à la sphère standard ;
- (ii) la modification de $\|S\|_\theta$ sous le changement de calibration $\theta' = f\theta$ s'écrit

$$\|S\|_{\theta'} = f^{-1}\,\|S\|_\theta$$

Dans le cas $n=1$, on peut remplacer $\|S\|_\theta$ par le tenseur Q de Cartan [11], [12] tout comme dans le cas conforme on utilise en dimension 3 le tenseur de Cotton plutôt que celui de Weyl.

Calibration canonique

On considère donc une variété CR compacte et strictement pseudoconvexe (M,ξ,J). À partir d'une calibration arbitraire θ, on construit partout où $\|S\|_\theta$ ne s'annule pas une calibration canonique par

$$\theta_1 = \|S\|_\theta\,\theta \tag{13}$$

Changer θ en $f\theta$ n'affecte pas θ_1, qui est donc préservée par l'action du groupe G des automorphismes de M.

Si M n'est pas partout localement équivalente à la sphère standard, il existe un ouvert U sur lequel $\|S\|_\theta$ ne s'annule pas. Sur cet ouvert, θ_1 définit par (5) une métrique riemannienne q_1 qui se prolonge naturellement par 0 là où $\|S\|_\theta$ s'annule. Si le lieu d'annulation est vide, G agit par isométrie sur la variété riemannienne compacte (M,q_1) et est compact. Sinon le lieu d'annulation est alors à distance finie de tout point de U, et on peut définir pour tout $\varepsilon>0$ un compact

$$K_\varepsilon = \{x\in M; d(x,U)\leqslant\varepsilon\}$$

où d est la distance définie par la métrique q. En prenant ε suffisamment petit on s'assure que l'intérieur de K_ε est non vide. Maintenant (K_ε, d) est un espace métrique compact sur lequel G agit fidèlement par isométries, et G est nécessairement compact.

4 Variétés complexes à bord

4.1 Définition

On peut généraliser de la façon suivante la notion de variété complexe.

Définition 10 (variété complexe à bord) — *Fixons un nombre $k > 1$ entier ou ∞ ou ω. Soient X un espace topologique paracompact séparé et n un entier positif. On appelle* carte complexe *(de dimension n) de X tout quadruplet $\mathscr{U} = (U, \varphi, H, A)$ où*

(i) U est un ouvert de X, appelé domaine *de la carte ;*

(ii) A est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et :

- *soit H est une hypersurface $\mathscr{C}^k$ de A et $A \setminus H$ a deux composantes connexes D_+ et D_-,*
- *soit H est vide et on note $D_+ = A$;*

(iii) φ est un homéomorphisme de U vers $D_+ \cup H$.

Deux cartes complexes (U, φ, H, D) et (V, ψ, K, E) sont dites compatibles *si le changement de coordonnées*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

se prolonge en un biholomorphisme dans un voisinage de son domaine de définition vers un voisinage de son image. On considère cette condition satisfaite si $U \cap V = \varnothing$. Un atlas complexe *est un ensemble de cartes compatibles dont les domaines recouvrent X.*

On appelle variété complexe à bord $\mathscr{C}^k$ *de dimension n un espace topologique paracompact X muni d'un atlas complexe.*

Enrichir un atlas d'une carte compatible à toutes les précédentes est une opération anodine ; on dit que deux atlas sont équivalents si leur union est encore un atlas et on identifie en fait la structure de variété complexe à bord à la classe d'équivalence de l'atlas choisi.

Si on ne précise pas la régularité, on la suppose analytique ($k = \omega$). Une variété complexe à bord est naturellement munie d'une structure de variété différentielle à bord $\mathscr{C}^k$.

L'intérieur d'une variété complexe à bord est muni d'une structure complexe tandis que son bord porte une structure CR, définie localement par les cartes.

Définition 11 (isomorphisme) — *Soient X et Y deux variétés complexes à bord. Un homéomorphisme $F : X \to Y$ est un* isomorphisme complexe *si pour toute carte $\mathscr{V}$ de Y, $F^*\mathscr{V}$ est compatible à toute carte de X. Si $X = Y$, on parle d'*automorphisme.

Considérons une variété complexe à bord X, et supposons que la structure CR de son bord ∂X est strictement pseudoconvexe. Localement, l'image d'une carte est à valeurs dans l'un des côtés de l'image du bord. De plus pour deux cartes dont les domaines s'intersectent, ce côté est le même. Il en découle qu'on peut définir une composante de bord comme concave ou convexe, selon que l'image d'une carte est du côté concave ou convexe de l'image du bord. On dit que X est *à bord strictement pseudoconcave* si toutes les composantes de bord sont concaves, *à bord strictement pseudoconvexe* étant désormais réservé au cas où toutes les composantes de bord sont convexes. Il faut donc bien distinguer si l'adjectif « pseudoconvexe » s'applique à un bord ou à une structure CR abstraite.

4.2 Exemples

On se propose maintenant d'énumérer succinctement trois types d'exemples de variétés complexes compactes à bord, suivant la signature de la forme de Levi du bord : strictement pseudoconvexe ou concave, de signature intermédiaire (dont la forme de Levi n'est ni dégénérée ni définie), et à bord Levi-plat.

Ces exemples montre qu'il existe une certaine variété de bords possibles pour une variété complexe. On peut se demander jusqu'où s'étend cette variété.

Question 6 — *Quelles contraintes être le bord d'une variété complexe impose à une variété CR ?*

Cette question extrêmement générale peut se décliner sous de multiples formes. Par exemple, Rossi montre (entre autre !) dans [50] qu'en dimension $2n - 1 \geqslant 5$ une hypothèse de convexité impose la connexité du bord. Autre exemple, dans le cas Levi-plat on peut se demander quels feuilletages peuvent apparaître au bord d'une variété complexe.

Bord strictement pseudoconvexe ou concave

L'exemple le plus commun est celui de la boule standard fermée, strictement pseudoconvexe. L'équivalent concave est son complémentaire

$$\{|x_1|^2 + \cdots + |x_{n-1}|^2 - |x_n|^2 > 0\}$$

dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Dans les deux cas, le bord est la sphère standard.

On peut construire de nombreux autres exemples convexes en considérant des domaines à bord analytique strictement pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n$. On peut également considérer n'importe quelle variété complexe compacte, choisir un tel domaine contenu dans l'image d'une de ses cartes et en considérer le complémentaire pour obtenir une variété à bord strictement pseudoconcave. On appelle cette opération *percer* la variété.

Bord de signature intermédiaire

Le modèle plat pour les variétés CR de dimension $2n-1$ dont la forme de Levi est de signature $(2p, 2q)$ avec $p+q+1 = n$ est l'hyperquadrique définie dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ en coordonnées homogènes par $\{Q_{p+1,q+1}(z) = 0\}$ où

$$Q_{p+1,q+1}(z) = |z_0|^2 + \cdots + |z_p|^2 - |z_{p+1}|^2 - \cdots - |z_{p+q+1}|^2$$

et on obtient une variété complexe à bord de signature $(2p, 2q)$ en considérant le domaine de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ défini par $\{Q_{p+1,q+1}(z) < 0\}$.

Bord Levi-plat

L'exemple le plus simple de variété CR Levi-plate est sans doute le produit $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times S^1$. On obtient une variété complexe à bord Levi-plat en effectuant le produit $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times \Delta$ où Δ est le disque de $\mathbb{C}$. Cette variété se plonge dans toutes les surfaces rationnelles sauf $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$; plus de détails sur les surfaces rationnelles seront donnés dans le chapitre VII.

Donnons un exemple où le bord est Levi-plat mais n'est pas un produit. On note $\mathrm{H}_{2,2}$ la surface complexe obtenue en effectuant le quotient de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ par l'homothétie centrée en l'origine et de rapport 2. On l'appelle *surface de Hopf* et on y place des coordonnées $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ où $1 \leqslant |x|^2 + |y|^2 \leqslant 4$ et $(x, y) = (2x, 2y)$ si $|x|^2 + |y|^2 = 1$. Elle est difféomorphe à $S^3 \times S^1$. Si l'on découpe la surface de Hopf le long de l'hypersurface $\{y \in \mathbb{R}\}$, on obtient une variété complexe $\{\operatorname{Im} y > 0\}$ dont le bord est Levi-plat. Le feuilletage sous-jacent à la structure CR est donné par les sections verticales $\{y = \text{constante}\}$, et on constate facilement qu'il correspond au recollement de deux composantes de Reeb le long du tore $\{y = 0\}$, unique feuille compacte. On peut voir par exemple la figure 33, où les côtés fins se recollent par homothétie à gauche et par translation à droite.

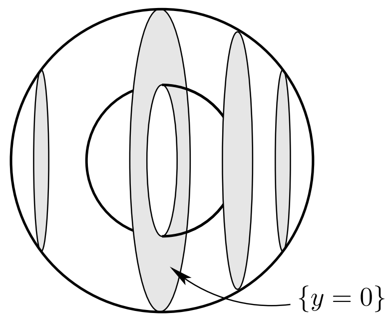

FIGURE 31 – *Hypersurface Levi-plate dans la surface de Hopf*

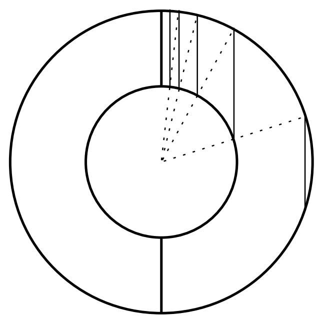

FIGURE 32 – *Accumulation d'une feuille sur la feuille compacte*

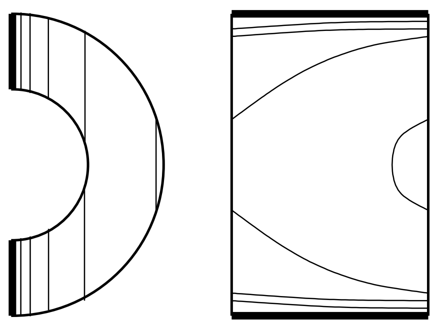

FIGURE 33 – *Deux visions du feuilletage de Reeb*

Chapitre VII

Surfaces rationnelles

Un point de fuite mal réglé, ce sont des ennuis en perspective.

Marc-Antoine Mathieu,
La 2,333^e dimension

Dans ce chapitre on donne quelques informations sur les surfaces rationnelles et des éléments de géométrie complexe, en adoptant un point de vue adapté à l'usage qu'on en fera et sans rentrer dans les détails. Pour plus d'informations on peut par exemple consulter le livre de Griffiths et Harris [23].

En plus de fournir des exemples intéressants, les surfaces rationnelles seront essentielles dans le chapitre VIII où on se ramènera à leur étude pour en démontrer le résultat principal.

1 Éléments de géométrie complexe

1.1 Forme d'intersection

Soit X une surface complexe. En comptant avec signe (selon l'orientation) le nombre $A \cdot B$ de points d'intersection de représentants génériques de deux classes d'homologie $A, B \in H_2(X, \mathbb{Z})$, on obtient une forme bilinéaire symétrique. En particulier on définit l'*auto-intersection* $A \cdot A$ comme le nombre de points d'intersection, comptés avec signe, d'un couple générique de représentants de A.

On peut ainsi calculer l'auto-intersection d'une courbe complexe de X ou l'intersection de deux courbes. L'auto-intersection induit par cette identification une forme bilinéaire symétrique sur l'espace de cohomologie $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$.

Remarquons que comme la structure complexe donne une orientation canonique, l'intersection de deux courbes complexes est toujours positive ou nulle et qu'une courbe C d'auto-intersection strictement négative est rigide, c'est-à-dire que X n'induit de structure complexe sur aucune autre des surfaces réelles représentant la classe de C dans $H_2(X, \mathbb{Z})$.

1.2 Éclatement et contraction

Définitions

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et p un point de U. On appelle *éclaté* de U en p la variété complexe ouverte $U^\wedge = \{(L, x)\}$ où $x \in U$ et L parcourt l'ensemble des droites affines complexes qui passent par p et x. Soit $E \subset U$ l'ensemble $\{(L, p)\}$ des droites issues de p. On l'appelle *courbe exceptionnelle* de l'éclatement et on a une application naturelle

$$\begin{array}{rccc} \pi : & U^\wedge & \longrightarrow & U \\ & (L, x) & \longmapsto & x \end{array}$$

qui envoie E sur p, biholomorphe de $U^\wedge \setminus E$ sur $U \setminus \{p\}$ et qu'on appelle *contraction*. Sa réciproque π^{-1}, qui n'est bien définie que sur $U \setminus \{p\}$, est appelée *éclatement* de U en p.

Considérons le cas $n = 2$. On utilise des coordonnées (x, y) dans $U = \mathbb{C}^2$ et on suppose, quitte à translater, que $p = (0, 0)$. La droite passant par p et (x, y) peut être repérée par sa pente x/y, éventuellement infinie. La courbe E est *rationnelle*, c'est-à-dire que c'est un plongement de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ et on peut décrire $U^\wedge$ par deux cartes $(u, v) \mapsto (u, uv)$ et $(s, t) \mapsto (st, t)$ où le changement de carte s'écrit $1 = sv, t = uv$ et où E intersecte les cartes selon $(u = 0)$ et $(t = 0)$.

Si n est plus grand, la situation est semblable et en particulier E est un $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ plongé.

On appelle *éclaté* d'une surface complexe X en un point p de son intérieur la variété obtenue en remplaçant un ouvert de carte contenant p par son éclaté en p. La contraction $\pi : M^\wedge \to M$ et l'éclatement sont définis comme précédemment.

Transformées d'une courbe

Étant donnée une courbe lisse C sur X et $\pi^{-1} : X \to X^\wedge$ l'éclatement en $p \in X$, on appelle *transformée totale* de C son image par π^{-1}, qui n'est pas une courbe lisse si $p \in C$ puisqu'elle contient alors la courbe exceptionnelle $\pi^{-1}(p)$. On appelle *transformée propre* de C l'adhérence dans $X^\wedge$ de $\pi^{-1}(C \setminus \{p\})$. La transformée propre de C est notée $C^\wedge$; c'est une courbe lisse de $X^\wedge$ dont l'auto-intersection vérifie

$$C^\wedge \cdot C^\wedge = C \cdot C - 1$$

En fait, un des intérêts des éclatements est de permettre de désingulariser des courbes pour les rendre lisses.

Critère de contractibilité et minimalité

Citons un exemple important : la courbe E créée par un éclatement est une courbe rationnelle d'auto-intersection -1. La réciproque est vraie et importante.

Théorème 1 (critère de Castelnuovo-Enriques) — *Soit X une surface complexe et C une courbe rationnelle lisse d'auto-intersection -1 dans X. Alors on peut contracter C, c'est-à-dire qu'il existe une surface complexe $X^\vee$ et une application $\pi : X \to X^\vee$ telle que X est l'éclaté en un point p de $X^\vee$ et $C = \pi^{-1}(p)$ où π est la contraction.*

Ce critère peut également être mis sous la forme suivante (grâce à la formule d'adjonction). On note K le fibré canonique de X, qu'on peut interpréter comme un diviseur pour calculer des intersections.

Théorème 2 — *Soient X une surface complexe et C une courbe rationnelle lisse telle que $C \cdot C < 0$ et $C \cdot K < 0$. Alors on peut contracter C.*

On dit d'une surface ne possédant pas de courbe rationnelle contractible qu'elle est *minimale*. Comme un éclatement fait augmenter le deuxième nombre de Betti de 1, en partant d'une surface X on ne peut contracter successivement qu'un nombre fini de courbes (bien qu'au départ X puisse posséder une infinité de courbes contractibles). Ainsi toute surface possède au moins un modèle minimal à partir duquel elle est obtenue par éclatements successifs.

2 Surfaces de Hirzebruch

On est maintenant équipé pour définir les surfaces rationnelles.

Définition 3 (surface rationnelle) — *On appelle* surface rationnelle *toute surface qu'on peut obtenir à partir de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ par une suite d'éclatements et de contractions.*

On va maintenant en étudier une famille importante, qui contient en particulier la plupart des surfaces rationnelles minimales.

2.1 Définition

Les *surfaces de Hirzebruch* sont les fibrations holomorphes régulières en $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

Soit Σ une telle surface. Utilisons deux cartes pour décrire la base, U et V avec coordonnées $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C}$ et changement de coordonnées $w = z^{-1}$. La surface Σ est alors obtenue en recollant les deux cartes $(z, [u : v]) \in U \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ et $(w, [s : t]) \in V \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1$. On peut effectuer un recollement de la forme

$$(w, [s : t]) = (z^{-1}, [u : z^n v]) \tag{1}$$

où n est un entier positif, et on obtient ainsi, à biholomorphisme près, toutes les surfaces de Hirzebruch. On les note Σ_n, où n est l'entier utilisé dans (1).

2.2 Rationalité et autres propriétés

Tout d'abord on constate facilement que Σ_0 est la fibration triviale $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ et que Σ_1 est l'éclaté de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ en un point. Dans ce dernier cas la base de la fibration s'identifie à la courbe exceptionnelle de l'éclatement et les fibres sont les transformées propres des droites passant par le point éclaté.

Sections et forme d'intersection

La surface Σ_n est une fibration, et on peut en décrire les sections : elles s'écrivent en cartes sous la forme

$$\left\{ z, \left[\sum_{i=0}^{n} b_i z^i : 1 \right] \right\} \text{ ou } \{z, [1 : 0]\} \tag{2}$$

La dernière est appelée la *section infinie* tandis que les premières sont appelées *sections finies*.

Toutes les sections sont des courbes rationnelles lisses. Les sections finies forment un espace vectoriel de dimension $n+1$, sont d'auto-intersection n et sont homologues entre elles tandis que la section infinie est d'auto-intersection $-n$ et est donc rigide.

Les fibres sont des courbes rationnelles homologues entre elles et donc d'auto-intersection 0. L'homologie de Σ_n est engendrée par la classe F des fibres et la classe B de la section infinie. On vérifie que la classe des sections finies est $F + B$.

Il se trouve que la section infinie est la seule courbe lisse d'auto-intersection négative ; Σ_n est donc une surface minimale pour $n \neq 1$. Les surfaces de Hirzebruch sont toutes rationnelles, et les seules surfaces rationnelles minimales sont $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ et les Σ_n, $n \neq 1$.

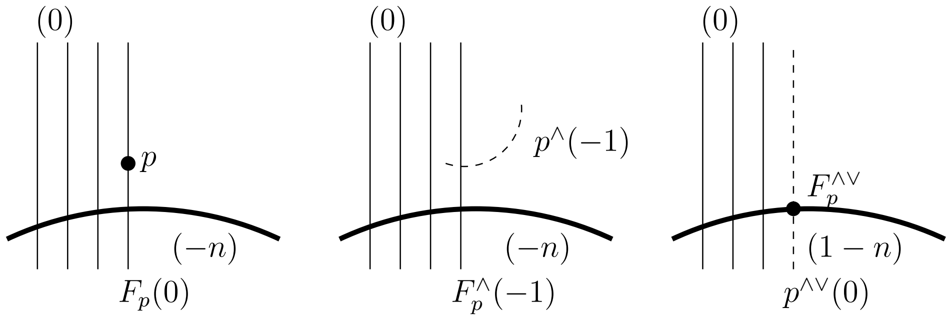

FIGURE 34 – *Transformation birationnelle entre Σ_n et Σ_{n-1}*

Rationalité

Décrivons rapidement comment on peut passer de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ à Σ_n par des éclatements et des contractions. D'abord on a déjà vu que Σ_1 est l'éclaté de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ en un point. Il nous suffit maintenant de passer de Σ_n à $\Sigma_{n\pm 1}$.

Si on éclate Σ_n en un point p hors de la base, puis si on contracte la transformée propre $F_p^\wedge$ de la fibre contenant p, l'auto-intersection de la base a augmenté et on obtient Σ_{n-1}.

Si on éclate un point de la base avant de contracter la transformée propre de la fibre correspondante, l'auto-intersection de la base augmente et on obtient Σ_{n+1}.

Les deux opérations sont inverses l'une de l'autre car la première contraction envoie $F_p^\wedge$ sur le point $F_p^{\wedge\vee}$ de la base de Σ_{n-1}.

Sur la figure 34, on a indiqué les l'auto-intersection de chaque courbe entre parenthèse.

Chapitre VIII

Remplissages concaves équivariants

– Oui, Sire. Mathématiques modernes et logique floue sont les deux mamelles du Poupoulou.
– Mais comme vraies armes on a quoi ?
– Les maths et la logique sont des armes, Sire. Rien ne leur résiste.

L. Trondheim, J. Sfar
et Andreas,
La carte majeure

Le contenu de ce chapitre correspond essentiellement à l'article [33].

1 Introduction

1.1 Remplissages équivariants de la sphère standard

Le théorème de Webster–Schoen montre que la sphère standard est la seule variété CR strictement pseudoconvexe dont l'action des automorphismes possède une dynamique riche. De plus cette dynamique se prolonge du côté convexe à la boule standard (en une action particulièrement intéressante puisqu'elle s'identifie à l'action des isométries de l'espace hyperbolique complexe). On parle de remplissage équivariant.

Définition 1 (remplissage) — *Soit M une variété CR ; on appelle* remplissage holomorphe *(ou simplement* remplissage*) de M toute variété complexe à bord dont le bord est CR-équivalent à M.*

Quand M est strictement pseudoconvexe et connexe, on dit que le remplissage est convexe ou concave selon que la variété est à bord strictement pseudoconvexe ou strictement pseudoconcave.

DÉFINITION 2 (ÉQUIVARIANCE FORTE) — *Soit M une variété CR ; on appelle* remplissage fortement équivariant *tout remplissage tel que les automorphismes CR du bord se prolongent en des biholomorphismes de toute la variété.*

On a vu à la fin du chapitre VI qu'à éclatement près un remplissage convexe de la sphère standard est difféomorphe à la boule. Si on demande de plus l'équivariance forte, il est très facile de voir qu'un remplissage convexe est toujours biholomorphe à la boule standard, sans éclatement possible (voir les détails plus loin).

Il est alors naturel de se demander quels remplissages sont possibles du côté concave. Comme on l'a vu, percer des variétés compactes permet de construire de nombreux exemples et l'unicité du cas convexe n'est plus de mise. Qu'en est-il si on ajoute une hypothèse d'équivariance ? Demander que tout le groupe des automorphismes se prolonge est une hypothèse forte qui amène immédiatement l'unicité (le seul remplissage possible étant alors l'espace projectif privé de la boule unité, noté $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B$) et il est nécessaire d'assouplir l'hypothèse.

DÉFINITION 3 (ÉQUIVARIANCE RELATIVE) — *On appelle* remplissage équivariant *de M* relativement *au groupe $F \subset \mathrm{Aut}(M)$ tout remplissage de M où tous les éléments de F se prolongent en des biholomorphismes.*

Notre but dans ce chapitre est de montrer que dans le cas des surfaces on conserve une grande rigidité dès que le groupe F est suffisamment gros.

On ne peut pas espérer l'unicité car on construit facilement différents exemples à partir de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B$. Choisissons un élément hyperbolique ou parabolique ϕ de $\mathrm{SU}(1,2)$ (c'est-à-dire un élément qui engendre un sous-groupe fermé non compact). Alors ϕ agit sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B$ et s'il admet un point fixe p en dehors du bord, on peut éclater $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B$ en p pour obtenir un nouvel exemple. En effet ϕ agit encore sur l'éclaté et engendre un groupe fermé non compact. On peut continuer à éclater des points fixes de l'action de ϕ pour obtenir de nombreux exemples. Ces remplissages concaves de S^3 sont appelés *éclatements standards* de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B$.

THÉORÈME G — *Soit R un remplissage concave de la sphère standard S^3, équivariant relativement à un groupe $F \subset \mathrm{Aut}(S^3) = \mathrm{SU}(1,2)$. Si F est non compact et fermé dans* $\mathrm{Aut}(S^3)$, *alors R est un éclaté standard de* $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B$.

Remarquons qu'après l'éclatement, ϕ n'est pas le seul élément de $\mathrm{SU}(1,2)$ qui continue à agir biholomorphiquement sur R : c'est aussi le cas de tous les éléments fixant les points successivement éclatés. On obtient ainsi au moins un groupe à un paramètre contenant ϕ agissant sur R. En particulier, R admet un champ de vecteurs holomorphe.

On peut envisager plusieurs prolongements naturels de ce résultat.

Question 7 — *Que reste-t-il du théorème G en dimension supérieure ? Quand le bord est de signature différente ? Quand on demande seulement que l'action se prolonge par biméromorphismes ?*

1.2 Surfaces complexes à bord concave et à gros groupe d'automorphismes

Reformulation

Dans cette section, nous proposons une seconde interprétation du théorème G.

Remarquons tout d'abord que le groupe des automorphismes d'une variété complexe à bord s'injecte naturellement dans le groupe des automorphismes CR du bord. Toutefois cette injection, comme on le verra plus bas, n'est pas nécessairement propre.

Corollaire 4 — *Les surfaces complexes à bord strictement pseudoconcave*

(*i*) *dont le groupe d'automorphisme est non compact et*

(*ii*) *tel que l'inclusion de celui-ci dans le groupe d'automorphismes du bord est propre*

sont toutes des éclatés de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B$*, obtenues comme dans le théorème G.*

Cet énoncé découle du théorème G grâce au théorème de Webster–Schoen. En effet nos hypothèses assurent que le groupe d'automorphismes du bord est non compact, donc que le bord est bien la sphère standard.

On peut encore reformuler le résultat en terme de sphère invariante.

Corollaire 5 — *Une surface complexe*

(*i*) *possédant une sphère* S^3 *plongée qui la déconnecte*

(*ii*) *et ayant suffisamment d'automorphismes qui préservent cette sphère pour y induire un groupe fermé non compact d'automorphismes CR*

est nécessairement un éclaté de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$*, obtenu comme dans le théorème G.*

Pour se ramener à cette forme, il suffit de constater que le remplissage concave peut être complété par un remplissage convexe par la boule pour donner une variété complexe sans bord (voir la démonstration plus loin).

À ce stade, il est clairement vain d'espérer classifier précisément les variétés complexes à bord strictement pseudoconcave. Pour se convaincre que demander seulement la non-compacité du groupe d'automorphismes holomorphes du remplissage ne rend pas le problème accessible, considérons un exemple édifiant dû à McMullen.

L'exemple de McMullen

Dans [38], McMullen décrit une surface K3 (et plus récemment dans [39], des surfaces rationnelles) possédant un automorphisme ϕ cumulant les deux propriétés suivantes :

(i) il est d'entropie positive ;

(ii) il admet un domaine de Siegel.

Comme ϕ est d'entropie positive, il engendre un groupe non compact. Mais le domaine de Siegel est par définition un ouvert de la surface dans lequel ϕ est conjugué à une rotation, donc il contient un ouvert stable biholomorphe à la boule standard. Si on prive la surface de cet ouvert, on obtient une surface à bord strictement pseudoconcave possédant un automorphisme d'entropie positive. L'image du groupe engendré par ϕ dans le groupe d'automorphismes du bord est relativement compacte et l'inclusion ne peut pas être propre.

En un sens, on peut dire que la dynamique de la surface ainsi construite reste à l'écart du bord.

2 Remplissages équivariants de la sphère

Dans cette dernière section nous donnons une démonstration du théorème G. Commençons par en présenter le déroulement.

On considère donc un remplissage concave R de la sphère standard, équivariant relativement à un sous-groupe $F \subset \mathrm{SU}(1,2)$ fermé et non compact.

Notre premier outil est le théorème H démontré en annexe, qui implique que F n'est pas purement elliptique. Il contient donc au moins une transformation hyperbolique ou parabolique, qui agit sur R et sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ après conjugaison par un difféomorphisme CR : $\partial R \to S \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ où S désigne la sphère unité de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. On note ϕ l'automorphisme de R et $\widetilde{\phi}$ celui de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$.

On se base alors sur l'étude des bassins d'attraction et de répulsion de $\widetilde{\phi}$. Elle permet de montrer de façon très élémentaire que R se complète par l'ajout d'une boule en une surface sans bord X sur laquelle ϕ agit encore. Mieux, elle permet d'exhiber dans X une famille de courbes rationnelles d'auto-intersection 1, homologues entre elles et dont la classe est invariante sous l'action de ϕ. Il découle alors du lemme de Noether que X est une surface rationnelle.

On utilise ensuite le théorème d'indice de Hodge pour montrer que quitte à élever ϕ à une certaine puissance ϕ^k, on peut supposer que ϕ préserve globalement chaque courbe exceptionnelle, ce qui permet de les contracter.

Il suffit alors d'étudier le cas des surfaces rationnelles minimales.

2.1 Bassins d'attraction et de répulsion

Étude dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$

On se base sur la description des éléments de $\mathrm{SU}(1,2)$ qui a été faite dans le chapitre VI.

Commençons par considérer un élément hyperbolique. On note p_+ son point fixe attractif, p_- son point fixe répulsif et p_h son troisième point fixe, hyperbolique et situé hors de la boule $\bar{B}$. On note encore L_+ la droite projective qui passe par p_+ et p_h, L_- celle qui passe par p_- et p_h. Ces deux droites sont tangentes à S en p_+ et p_-, respectivement. Le bassin d'attraction de p_+ est $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus L_-$ tandis que le bassin de répulsion de p_- est $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus L_+$. Leur union est donc $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus \{p_h\}$. Elle contient un voisinage de la boule unité fermée et de nombreuses droites projectives, dont par exemple celles qui passent par p_+ et pas par p_h.

Considérons un élément parabolique ayant un seul point fixe dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. On voit alors facilement que le bassin d'attraction de ce point est $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ tout entier.

Considérons un élément parabolique ayant exactement deux points fixes. L'un de ceux-ci est sur S, on le note p_+. L'autre est sur la droite L_+ tangente à la sphère en p_+. Le bassin d'attraction de p_+ est $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus L_+$, plus p_+ lui-même.

Considérons enfin un élément parabolique fixant chaque point de la droite L_+ qui est tangente à la sphère en son unique point fixe p_+. Le bassin d'attraction est encore $(\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus L_+) \cup \{p_+\}$.

Le résumé suivant découle directement de ces considérations.

Lemme 6 — *Notons p_+ le point fixe attractif de $\widetilde{\phi}$, p_- son point fixe répulsif s'il est différent et L_+ la droite projective tangente à la sphère unité en p_+.*

Tout ouvert de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ contenant l'union du bassin d'attraction de p_+ et du bassin de répulsion de p_- contient :

(*i*) *un voisinage de la boule unité fermée et*

(*ii*) *la famille des droites projectives passant par p_+, sauf éventuellement L_+.*

Prolongement des conjugaisons

On dit de deux automorphismes ψ et $\widetilde{\psi}$ de variétés complexes (éventuellement à bord) X et Y qu'ils sont *localement conjugués* s'il existe des ouverts $U \subset X$ et $V \subset Y$ et un biholomorphisme $F : U \to V$ tel que $F \circ \psi = \widetilde{\psi} \circ F$ là où cette expression est définie. On dit que U et V sont les *ouverts de conjugaison.*

On va utiliser notre étude des bassins d'attraction grâce au lemme élémentaire qui suit.

Lemme 7 (de prolongement) — *Soient ψ et $\widetilde{\psi}$ des automorphismes de variétés complexes (éventuellement à bord) X et Y, localement conjugués dans des ouverts $U \subset X$ et $V \subset Y$. On peut alors prolonger la conjugaison à des ouverts stables $U' \supset U$ et $V' \supset V$ où V' contient tous les bassins d'attraction et de répulsion des points fixes de $\widetilde{\psi}$ dans V.*

Démonstration : notons $U_0 = U$, $V_0 = V$ et $F_0 = F$. On définit récursivement

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= \psi^{-1}(U_k) \\ V_{k+1} &= \widetilde{\psi}^{-1}(V_k) \\ F_{k+1} &= \widetilde{\psi}^{-1} \circ F_k \circ \psi \end{aligned}$$

Ainsi F_k est une conjugaison locale entre les ouverts U_k et V_k. De plus là où deux F_k sont définis simultanément, ils coïncident par équivariance. En passant à l'union, on peut donc construire une conjugaison F_∞ entre les ouverts

$$\bigcup_k U_k \quad \text{et} \quad \bigcup_k V_k$$

et ce dernier contient tous les bassins d'attractions des point fixes de $\widetilde{\psi}$ contenus dans V. Comme F est également une conjugaison de ψ^{-1} et $\widetilde{\psi}^{-1}$ on peut à nouveau la prolonger jusqu'à englober les bassins de répulsion. Par construction les ouverts de conjugaison sont stables sous l'action de ψ et $\widetilde{\psi}$ respectivement. ∎

Conséquences

Le plongement de S^3 (avec sa structure CR standard) dans une surface est localement unique d'après le théorème 6 du chapitre VI. De plus, l'action d'un automorphisme sur une hypersurface détermine son action partout. Il s'ensuit que ϕ est localement conjugué, au moins au voisinage de ses points fixes au bord, à la transformation modèle $\widetilde{\phi}$ agissant sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B$.

On applique le principe de prolongement des conjugaisons : grâce au lemme 6 on peut prolonger la conjugaison autour des points fixes à une conjugaison entre des voisinages des bords de R et de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B$. On peut alors compléter le remplissage R en une variété complexe sans bord en recollant la boule B du côté concave.

PROPOSITION 8 — *Il existe une surface complexe sans bord X et une application $i : R \to X$ biholomorphe sur son image, telles que :*

(*i*) $X \setminus i(\mathring{R})$ *est isomorphe à la boule standard fermée ;*

(*ii*) *l'automorphisme $i_*\phi$ de $i(R)$ se prolonge en un automorphisme de X, qu'on note encore ϕ ;*

(*iii*) *l'action de ϕ sur X est conjuguée, au voisinage de $X \setminus \mathring{R}$, à l'action de $\widetilde{\phi}$ sur un voisinage de la boule unité fermée de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$.*

Remarquons que de la même façon on obtient le résultat complètement élémentaire suivant.

PROPOSITION 9 — *À isomorphisme près, le seul remplissage convexe de la sphère standard équivariant relativement à un groupe fermé non compact est la boule standard fermée.*

Le seul remplissage concave fortement équivariant de la sphère standard est $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B$.

Le lemme 6 livre une information cruciale sur X.

LEMME 10 — *La surface X contient une courbe lisse, irréductible, rationnelle d'auto-intersection 1 qui appartient à un pinceau préservé par ϕ dont au plus un élément est réductible et dont l'unique point-base est le point fixe attractif de ϕ dans ∂R.*

D'après le lemme de Noether, comme X contient en particulier une courbe rationnelle d'auto-intersection 1, c'est une surface rationnelle.

On note $|C|$ le pinceau obtenu dans le lemme 10 et C une de ses courbes génériques.

2.2 CONTRACTION DES COURBES EXCEPTIONNELLES

On cherche maintenant à contracter les courbes exceptionnelles de X pour se ramener au cas des surfaces rationnelles minimales, qu'on comprend bien.

LEMME 11 — *Il existe un entier k tel que ϕ^k fixe globalement chacune des courbes exceptionnelles.*

DÉMONSTRATION : les diviseurs de X se plongent naturellement dans l'espace de cohomologie $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ sur lequel la forme d'intersection se prolonge en une forme quadratique symétrique non dégénérée. Le théorème d'indice de Hodge (voir par exemple [2] page 143) dit que cette forme est de signature lorentzienne. En particulier, puisqu'elle vaut 1 sur la classe de C, elle préserve son orthogonal $C^\perp$ et sur celui-ci elle est définie négative.

Un vecteur de $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ se décompose sous la forme $\lambda C + D$ où $D \in C^\perp$, et la forme définie positive donnée par

$$\lambda^2 - D \cdot D$$

est alors préservée par ϕ.

Considérons l'ensemble $\mathscr{E}$ des courbes exceptionnelles de X. C'est une partie discrète de $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ et comme ϕ agit par isométrie pour une forme définie positive, il existe un exposant k tel que l'action de ϕ^k sur $\mathscr{E}$ est triviale. En particulier chaque courbe exceptionnelle est globalement fixée par ϕ^k. ■

On veut maintenant contracter les courbes rationnelles d'auto-intersection -1 : comme chacune de ces courbes est préservée, ϕ sera rationnellement conjuguée par cette contraction à un automorphisme d'une surface minimale.

Toutefois, il ne faut pas contracter de courbe qui rencontre ∂R sous peine de singulariser le bord. Le lemme suivant nous permet de contourner cette difficulté.

Lemme 12 — *Soit E une courbe rationnelle d'auto-intersection -1 qui rencontre ∂R. Alors il existe une autre courbe rationnelle d'auto-intersection -1 et qui évite ∂R.*

Démonstration : on reprend les détails de la démonstration du lemme de Noether pour déceler cette nouvelle courbe (voir [23] page 513).

La courbe E, puisqu'elle est préservée par ϕ, est nécessairement tangente à ∂R en un point fixe de ϕ. De plus la conjugaison à $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ doit l'envoyer, au moins au voisinage de ce point, sur la droite tangente à S^3 en p_+ ou p_-.

Il s'ensuit que le pinceau $|C|$ contient bien une courbe réductible C_0, dont E est l'une des composantes. Éclatons le point-base de $|C|$ et notons $C^\wedge$, $C_0^\wedge$ et $E^\wedge$ les transformées propres.

Notons

$$C_0^\wedge = \sum_\nu a_\nu C_\nu$$

où les C_ν sont irréductibles, l'une d'elles est $E^\wedge$ et $a_\nu > 0$. Maintenant l'auto-intersection de $C^\wedge$ est 0 et les C_ν tout comme $E^\wedge$ sont disjointes de $C^\wedge$. On en déduit que

$$C_0^\wedge \cdot C_\nu = C^\wedge \cdot C_\nu = 0$$

puis que toutes les composantes C_ν sont d'auto-intersection négative. La formule d'adjonction donne, en notant K le fibré canonique de X,

$$\frac{C_0^\wedge \cdot C_0^\wedge + C_0^\wedge \cdot K}{2} + 1 = 0 \tag{1}$$

et, comme $C_0^\wedge \cdot C_0^\wedge = 0$, $C_{\nu_0} \cdot K < 0$ pour un certain ν_0. Il découle du second critère de contractibilité qu'on a vu que C_{ν_0} peut être contractée. Or l'auto-intersection de $E^\wedge$ vaut -2, donc $C_{\nu_0} \neq E$ et C_{ν_0} doit éviter $(\partial R)^\wedge$, en particulier n'est pas affectée par l'éclatement. Avant celui-ci il existait donc bien une courbe contractible évitant ∂R. ∎

Si X n'est pas minimale, on peut donc trouver une courbe à contracter. Comme cette courbe est globalement préservée par ϕ, on obtient après contraction un biholomorphisme $\phi^\vee$ de $X^\vee$ qui fixe le point image de la courbe contractée. On peut alors continuer car $\phi^\vee$ préserve encore une sphère standard, $\partial R^\vee$. Après un nombre fini d'étapes, on arrive à une surface rationnelle minimale.

Il suffit maintenant de montrer un dernier lemme pour obtenir le théorème G.

Lemme 13 — *Si X est minimale, $X = \mathbb{C}\mathrm{P}^2$.*

Démonstration : supposons que la surface X est une surface de Hirzebruch. La classe fondamentale de la courbe C d'auto-intersection 1 doit alors se décomposer en

$$[C] = a[F] + b[B]$$

où a, b sont des entiers, F est une fibre et B est la base. Or si $X = \Sigma_n$ on a :

$$F \cdot F = 0 \qquad F \cdot B = 1 \qquad B \cdot B = -n$$

d'où

$$1 = C \cdot C = 2ab - nb^2 = b(2a - nb)$$

On en déduit $b = 1$ et $a = (n+1)/2$, d'où

$$C \cdot B = a - nb = \frac{1-n}{2}$$

Comme l'intersection de deux courbes complexes distinctes est positive, $n = 1$. Mais Σ_1 est justement la seule surface de Hirzebruch à ne pas être minimale. ∎

2.3 Exemples singuliers

En guise de conclusion, nous proposons de montrer comment, en acceptant les sphères à une singularité, on peut construire des presque-exemples sur Σ_n.

Considérons une transformation parabolique ϕ de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ préservant la boule unité, choisie de façon à fixer chaque point d'une droite projective L. Celle-ci est donc tangente à la sphère unité. Éclatons deux points de L, loin du bord et notons E_1, E_2 les courbes exceptionnelles obtenues. La transformée propre $L^\wedge$ est alors d'auto-intersection -1, et on peut la contracter. À travers cette transformation, ϕ passe en un automorphisme de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ qui préserve un domaine biholomorphe à la boule, dont le bord est topologiquement une sphère mais possède un point singulier au point image de la courbe contractée. Ce point est en effet le seul point d'intersection de la sphère avec les transformées propre $E_i^\vee$, et si elle était différentiable en ce point elle devrait leur être tangente à toutes les deux. Mais ces deux courbes sont chacune une fibre d'un des deux réglages de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ et sont donc transverses.

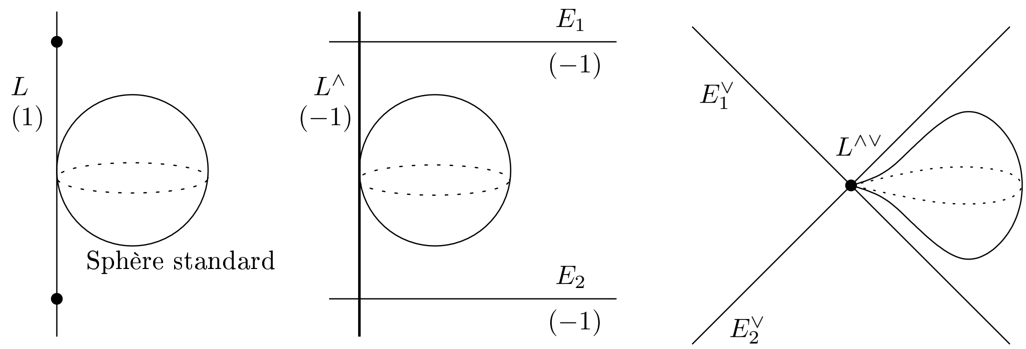

Figure 35 – *Construction d'un exemple singulier dans* Σ_0

Considérons maintenant une transformation ϕ qui possède un point fixe hors de la boule unité fermée et éclatons ce point fixe. Dans la surface Σ_1 obtenue la transformée propre $L^\wedge$ de la droite joignant le point éclaté à l'un quelconque des points fixes de ϕ sur la sphère est d'auto-intersection 0. Le point d'intersection entre $L^\wedge$ et la courbe exceptionnelle créée par l'éclatement est alors fixé par $\phi^\wedge$, conjugué de ϕ par l'éclatement. On peut donc éclater Σ_1 en ce point puis contracter la transformée propre de $L^\wedge$ pour obtenir un automorphisme de Σ_2 qui préserve un domaine biholomorphe à la boule, dont le bord est topologiquement une sphère mais possède un point singulier.

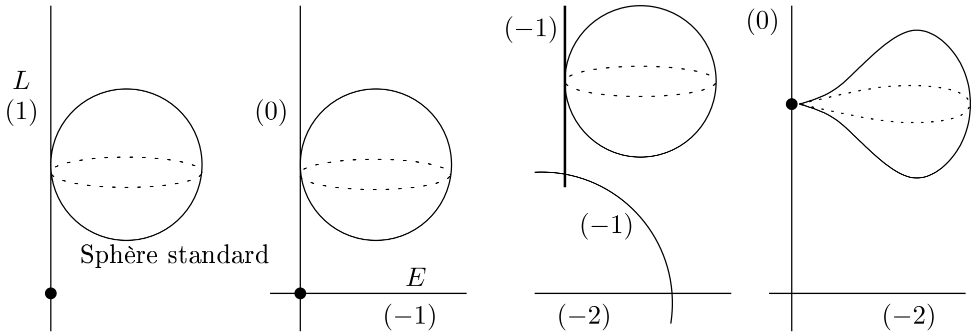

FIGURE 36 – *Construction d'un exemple singulier dans* Σ_2

Ensuite on peut passer à Σ_n en répétant autant de fois que nécessaire l'éclatement du point d'intersection entre la fibre portant le point singulier et la base et la contraction de la transformée propre de cette fibre.

L'existence de ces exemples, singuliers mais dociles, amène à se poser la question suivante.

Question 8 — *Peut-on trouver une surface X possédant automorphisme qui :*

(*i*) *est d'entropie topologique positive et*

(*ii*) *préserve une hypersurface réelle H et*

(*iii*) *induit sur H un groupe non relativement compact*

en supposant par exemple que

(*i*) *H est singulière en un ou plusieurs points et strictement pseudoconvexe là où elle est lisse ou*

(*ii*) *H est lisse partout et strictement pseudoconvexe sauf le long d'une sous-variété ?*

Annexe

Sous-groupes purement elliptiques

– Ne t'affole pas, il y a autant de réponses qu'il y a de questions.
– Non... il y a toujours une question de plus !

Andreas,
Fragments

Dans cette annexe nous nous intéressons à certains sous-groupes de transformations d'espaces symétriques à courbure négative. L'objectif principal est de démontrer un résultat utilisé dans le chapitre VIII, mais c'est aussi l'occasion de présenter un phénomène étonnant.

1 Position du problème

Soit M un espace symétrique à courbure négative et G son groupe d'isométries. Un élément de G est dit *elliptique* s'il admet un point fixe dans M. Un sous-groupe F de G est dit *purement elliptique* si tous ses éléments sont elliptiques. On dit que F admet un point fixe s'il est purement elliptique et s'il existe un point de M fixé simultanément par tous les éléments de F.

Dans ce chapitre, notre but principal est de démontrer le résultat suivant.

Théorème H — *Un sous-groupe fermé purement elliptique d'isométries d'un espace symétrique à courbure négative est compact.*

Plus généralement on se demande quel lien il y a entre la pure ellipticité et la compacité. Le premier élément de réponse est donné par un résultat très naturel dû à Élie Cartan.

Théorème 1 — *Un sous-groupe compact de G admet toujours un point fixe.*

DÉMONSTRATION : Ce résultat est vrai plus généralement si M est une variété de Hadamard. C'est dans ce cadre qu'on se propose de le démontrer.

Soit p un point quelconque de M et μ la mesure de Haar sur F. On définit sur M une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^+$ par la formule

$$f(x) = \int_F d(g(p), x)^2 d\mu(g) \tag{1}$$

où d représente la distance dans M.

Par construction, f est préservée par l'action de F et strictement convexe sur M. Elle atteint donc son minimum en un unique point [9], qui est fixé par F. ■

On peut facilement exhiber des groupes purement elliptiques et non compacts : il suffit par exemple de considérer le groupe engendré par une rotation irrationnelle. Toutefois ces groupes sont relativement compacts, c'est-à-dire que leur adhérence est compacte. Comme les groupes compacts maximaux de G sont les fixateurs des points de M, on a l'équivalence suivante.

PROPOSITION 2 — *Un sous-groupe de G est relativement compact si et seulement s'il admet un point fixe.*

Notre question est maintenant la suivante : un sous-groupe purement elliptique admet-il nécessairement un point fixe? De façon surprenante, la réponse se révèle négative et le recours à des hypothèses supplémentaires sur F ou sur M est nécessaire.

2 Le cas des espaces euclidiens et hyperboliques réels

Les résultats de cette section sont essentiellement tirés des travaux de Beardon [3], Waterman [60] et Kulkarni [36].

Les espaces euclidiens et hyperboliques réels semblent être les seuls pour lesquels le problème a été traité jusqu'à présent. Ils sont fortement reliés comme on va le voir sous peu.

La droite et le plan

Commençons par régler le cas euclidien en très petite dimension, c'est-à-dire celui de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

PROPOSITION 3 — *Tout sous-groupe purement elliptique d'isométries de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ admet un point fixe.*

Démonstration : c'est évident pour $\mathbb{R}$; pour $\mathbb{R}^2$, il suffit de constater que le commutateur de deux rotations de centres différents est une translation. En effet l'action des rotations sur le cercle des directions (c'est-à-dire, en termes pompeux, sur le bord géodésique de $\mathbb{R}^2$) est commutative et les seules isométries qui agissent trivialement sur ce cercle sont l'identité et les translations. ■

Lien euclidien-hyperbolique réel

On définit l'*ensemble limite* de F par

$$L(F) = \{x \in M(\infty); \exists (g_n) \in F^{\mathbb{N}}, \exists p \in M \text{ tels que } g_n(p) \to x\}$$

où $M(\infty)$ désigne le bord de Hadamard de M (voir le chapitre I, section 3). Remarquons que $L(F)$ est invariant par F et que $L(F) = L(\bar{F})$.

La proposition suivante (voir [22] et [60]) montre que le rôle de l'ensemble limite est déterminant.

Proposition 4 — *Supposons $M = \mathbb{R}\mathrm{H}^n$.*

Si $L(F) = \varnothing$, alors F admet un point fixe.

Si $L(F)$ contient exactement un point, alors F s'identifie à un sous-groupe d'isométries de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Si $L(F)$ contient au moins deux points, alors F contient un élément hyperbolique.

Remarquons qu'un élément hyperbolique engendre un groupe non relativement compact, le cas où $L(F)$ contient exactement un point est donc le cas qui nous intéresse. Détaillons-le.

Si $L(F)$ contient exactement un point p alors F agit par transformations conformes sur la sphère conforme standard $\partial\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ en fixant p et ne contient pas d'élément hyperbolique. En effectuant sur $\partial\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ la projection stéréographique centrée en p, on peut identifier F à un sous-groupe d'isométries de $\mathbb{R}^{n-1}$. Inversement comme toute transformation conforme du bord $\partial\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ se prolonge en une isométrie à l'intérieur, à un sous-groupe d'isométries de $\mathbb{R}^{n-1}$ on peut associer un sous-groupe d'isométries de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ avec au plus un point limite.

Maintenant si F admet un point fixe q dans M, la géodésique reliant p à q est fixée par F. L'extrémité de cette géodésique est, dans notre identification, un point fixe pour l'action de F sur $\mathbb{R}^{n-1}$. Inversement, si dans cette identification F admet un point fixe dans $\mathbb{R}^{n-1}$ alors la géodésique de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ reliant les deux points fixes à l'infini de F est globalement préservée. Elle est en fait fixée point par point, sinon F contiendrait un élément hyperbolique dont les deux points fixes à l'infini seraient dans $L(F)$. On obtient ainsi le résultat suivant.

PROPOSITION 5 — *Il existe un sous-groupe purement elliptique et sans point fixe dans le groupe d'isométries de* $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ *si et seulement s'il en existe dans le groupe d'isométries de* $\mathbb{R}^{n-1}$.

Résultats connus

Un certain nombre de résultats positifs sont connus.

THÉORÈME 6 — *Soit* F *un sous-groupe d'isométries de* $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ *ou* $\mathbb{R}^{n-1}$ *purement elliptique. Si l'une des conditions suivantes est réalisée :*

(*i*) $n \leqslant 4$ *ou*

(*ii*) F *est discret ou*

(*iii*) F *contient un sous-groupe discret, résoluble et d'indice fini ou*

(*iv*) F *est un groupe de torsion ;*

alors F *admet un point fixe.*

Le cas $n \leqslant 3$ est démontré dans le livre de Beardon [3] et peut se déduire de ce qui précède et de la proposition 3. Le cas $n = 4$ a été démontré par Waterman [60], les cas (*ii*) et (*iii*) dans Kulkarni [36].

Le cas (*iv*) est une conséquence d'un théorème de Schur selon lequel un groupe de matrices complexes qui est de torsion est virtuellement abélien (contient un sous-groupe abélien distingué et d'indice fini). Ceci m'a été signalé par Serge Cantat.

Dans [60], le résultat le plus frappant est négatif et montre que les groupes purement elliptiques peuvent se révéler surprenants.

THÉORÈME 7 (WATERMAN) — *Il existe des sous-groupes d'isométries de* $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ *et de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *qui sont purement elliptiques et sans point fixe, dès que* $n \geqslant 5$.

On est bien sûr tenté de poser la question pour d'autres espaces, en particulier celui qui nous intéresse le plus dans cette partie.

Question 9 — *Les sous-groupes purement elliptiques d'isométries de* $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ *ont-ils tous un point fixe ?*

Enfin, signalons qu'on peut trouver dans l'ouvrage de Serre [54] un résultat de ce type concernant les actions des groupes de type fini sur les arbres.

3 Le cas fermé

Rappelons les notations : M est un espace symétrique de courbure négative, G est son groupe d'isométries et F est un sous-groupe de G. On démontre maintenant le théorème H, en procédant par étapes. Le principe est simple : si F est discret ou connexe, le résultat découle respectivement du lemme de Selberg ou d'un théorème de Montgomery et Zippin. Le cas général se déduit de ses deux cas extrêmes.

Théorème 8 (Lemme de Selberg) — *Un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ *de type fini est virtuellement sans torsion.*

Par « virtuellement sans torsion », on entend qu'il contient un sous-groupe distingué d'indice fini et sans torsion.

Corollaire 9 — *Si F est purement elliptique et discret, il admet un point fixe dans M.*

Démonstration : c'est une généralisation d'une démonstration de [60].

Tout élément a de F est d'ordre fini : a est elliptique donc agit comme une rotation sur l'espace tangent de l'un quelconque de ses points fixes, et comme F est discret les angles de cette rotation sont commensurables à π.

De plus F est dénombrable donc il est l'union dénombrable de sous-groupes de type fini $F_n = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Comme M est un espace symétrique, G est un groupe de matrices et il en est de même pour F et F_n. On peut ainsi appliquer le lemme de Selberg à F_n qui est donc virtuellement sans torsion. Mais c'est un groupe de torsion donc il est fini.

D'après le théorème 1, il s'ensuit que l'ensemble V_n des points fixes de F_n est non vide. Or V_n est une sous-variété totalement géodésique et complète de M. Une suite décroissante de telles sous-variétés est stationnaire, donc $\bigcap V_n \neq \varnothing$ et F admet un point fixe. ∎

Théorème 10 (Montgomery-Zippin [46]) — *Un groupe de Lie connexe et non compact contient un sous-groupe à un paramètre fermé et non compact.*

Corollaire 11 — *Si F est purement elliptique, fermé et connexe, il admet un point fixe dans M.*

Démonstration : comme F est purement elliptique, ses sous-groupes fermés à un paramètre sont tous des cercles. D'après le théorème 10, F est donc compact. On conclut par le théorème 1. ∎

On peut maintenant démontrer le théorème H. On suppose donc que F est un groupe purement elliptique et fermé de G et on va montrer qu'il est compact.

Pour $f \in F$, on note $\mathrm{Fix}(f)$ l'ensemble des points fixes de f.

D'après le corollaire 11, la composante neutre F_0 de F est compacte. Alors l'ensemble

$$P_0 = \bigcap_{f \in F_0} \mathrm{Fix}(f)$$

des points fixés par tout F_0 est non vide et c'est une sous-variété complète et totalement géodésique de M. À ce titre, c'est un espace symétrique.

Considérons $g \in F \setminus F_0$. Alors on a

$$\begin{aligned} gP_0 &= \bigcap_{f \in F_0} g\mathrm{Fix}(f) \\ &= \bigcap_{f \in F_0} \mathrm{Fix}(gfg^{-1}) \\ &= P_0 \end{aligned}$$

donc g agit sur P_0. De plus, n'importe quel autre élément de la composante connexe de g dans F s'écrit gf où $f \in F_0$ donc cette action passe au quotient en une action du groupe discret F/F_0 sur l'espace symétrique P_0. D'après le corollaire 9, F/F_0 est fini et F est compact.

Table des figures

1	Deux compactifications de l'anneau	4
2	Construction d'un espace lenticulaire	6
3	Changement de carte dans TM	10
4	Un ouvert de base de la compactification de Hadamard	13
5	Construction des boules de Klein et de Poincaré	16
6	Projection de la boule de Poincaré sur le demi-espace	17
7	Un point du bord loin de la sphère serait relié à l'origine	21
8	Géodésiques dans les boules de Klein et de Poincaré	24
9	Description d'une compactification par deux cartes demi-espace	27
10	Géodésiques et horosphères des différentes compactifications analytiques	28
11	Paramétrage d'une orbite parabolique ouverte	49
12	Inversion géodésique	62
13	Construction du bord conforme de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$	69
14	Le cylindre produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$	70
15	Compactification de Hadamard de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$	72
16	Le bord de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2$	73
17	Deux systèmes d'hyperplans ayant de forts liens de parenté	77
18	Les complexes de Coxeter sphériques de type A_3, B_3 et H_3	79
19	Des réalisations des complexes de Coxeter de type A_1 et A_2	80
20	Des complexes simpliciaux qui ne sont pas de Coxeter	80
21	Liste des diagrammes de Coxeter connexes	82
22	Compactification de l'espace euclidien	94
23	Trois chambre incidentes à une cloison	96
24	Famille de géodésiques parallèles	100
25	Champ d'hyperplans d'une hypersurface	111

26 La forme de Levi 112
27 Dynamique d'une transformation hyperbolique 119
28 Dynamique d'une transformation parabolique à deux points fixes 120
29 Dynamique d'une transformation parabolique fixant chaque point d'une droite 120
30 Dynamique d'une transformation parabolique fixant un seul point 121
31 Hypersurface Levi-plate dans la surface de Hopf 126
32 Accumulation d'une feuille sur la feuille compacte 126
33 Deux visions du feuilletage de Reeb 126

34 Transformation birationnelle entre Σ_n et Σ_{n-1} 131

35 Construction d'un exemple singulier dans Σ_0 142
36 Construction d'un exemple singulier dans Σ_2 143

Index

Action algébrique, 9
Action régulière, 9
Algèbre de Lie
  semi-simple, 64
  simple, 64
Application CR, 113
Auto-intersection, 127
Automorphisme complexe, 124
Automorphisme CR, 113

Bord
  de Hadamard, 12
  géodésique, 12
  pseudoconcave, 124
  pseudoconvexe, 124
Boule de Klein, 16
Boule de Poincaré, 16
Boule standard, 110

Côté concave, 114
Côté convexe, 114
Calibration, 113
Carte demi-espace, 24
Chambre, 79, 83
Champ de Reeb, 114
Cloison, 79
Compactification différentiable
  d'une action de groupe, 8, 19
  d'une G-structure, 10
  d'une (G, X)-structure, 11
  d'une variété, 3
  étendue, 4
Complexe de Coxeter, 78
Complexe métrique, 84
Complexe simplicial, 75
Condition d'intégrabilité, 111
Conjugaison, 5, 20
Contraction, 128
Courbe exceptionnelle, 128
Courbe rationnelle, 128

Décomposition de de Rham, 63
Décomposition en espaces de racines, 87
Décomposition de Cartan, 65
Demi-espace de Klein, 25
Demi-espace de Poincaré, 17
Diagramme de Coxeter, 81

Éclatement, 128
Élément régulier, 88
Élément singulier, 88
Ensemble limite, 147
Espace hyperbolique réel, 16
Espace symétrique, 62
  de type non compact, 63
Espaces lenticulaires, 5

Face nulle, 78
Faces, 78
  d'un système d'hyperplans, 78
Famille consistante, 78
Fonction de déplacement, 18
Forme de Killing, 64

Forme de Levi, 111

G-atlas, 10
G-structure, 10
Géodésiques
 asymptotes, 12
 parallèles, 12
 régulières, 88
 singulières, 88
Groupe de Lie semi-simple, 65
Groupe de réflexion, 76
Groupe orthochrone, 16
(G, X)-morphisme, 11
(G, X)-structure, 11

h-cobordisme, 6

Immeuble
 métrique, 85
Immeuble sphérique, 83
Indice d'une géodésique, 90
Inversion géodésique, 62
Involution de Cartan, 65
Isométrie, 18
 elliptique, 18, 117
 hyperbolique, 18
 parabolique, 18
Isomorphisme complexe, 124
Isomorphisme CR, 113

Métrique de Webster, 114
Matrice de Coxeter, 80
Modèle conforme, 16
Modèle projectif, 16

Partie essentielle, 77
Partie inessentielle, 77
Percer, 125
Plat, 63
Projection visuelle, 12

Racine, 87
Rang, 63
 d'un complexe simplicial, 75
 d'un espace symétrique, 63
Rang réel, 67
Réalisation topologique, 78
Remplissage holomorphe, 133
 Équivariant, 134
Représentation adjointe, 64

Sous-groupe
 parabolique, 90
 purement elliptique, 145
Sous-variété totalement
 géodésique, 64
Sphère standard, 110
Surface de Hirzebruch, 130
Surface de Hopf, 125
Surface minimale, 129
Surface rationnelle, 129
Système d'hyperplans, 76
 clos, 76
 essentiel, 77
Système triple de Lie, 67

Transformée propre, 128
Transformée totale, 128

Variété
 fermée, 4
 ouverte, 4
Variété complexe à bord, 123
Variété CR, 113
 Levi-plate, 112
 pseudoconvexe, 112
Variété de Hadamard, 11

Bibliographie

[1] W. Ballmann, M. Gromov et V. Schroeder – *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Mathematics, vol. 61, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.

[2] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters et A. Van de Ven – *Compact complex surfaces*, second éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[3] A. F. Beardon – *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 91, Springer-Verlag, New York, 1983.

[4] S. Bell et E. Ligocka – "A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mappings", *Invent. Math.* **57** (1980), no. 3, p. 283–289.

[5] O. Biquard – "Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques", *Astérisque* (2000), no. 265, p. vi+109.

[6] A. Borel et L. Ji – *Compactifications of symmetric and locally symmetric spaces*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2006.

[7] W. Browder, J. Levine et G. R. Livesay – "Finding a boundary for an open manifold", *Amer. J. Math.* **87** (1965), p. 1017–1028.

[8] K. S. Brown – *Buildings*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[9] D. Burago, Y. Burago et S. Ivanov – *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[10] D. Burns, Jr. et S. Shnider – "Geometry of hypersurfaces and mapping theorems in $\mathbf{C}^n$", *Comment. Math. Helv.* **54** (1979), no. 2, p. 199–217.

[11] E. Cartan – "Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes", *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **11** (1932), p. 17–90.

[12] — , “Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l’espace de deux variables complexes ii”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. (2)* **1** (1932), p. 333–354.

[13] S. S. Chern et J. K. Moser – “Real hypersurfaces in complex manifolds”, *Acta Math.* **133** (1974), p. 219–271.

[14] P. B. Eberlein – *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996.

[15] C. H. Edwards, Jr. – “Concentricity in 3-manifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **113** (1964), p. 406–423.

[16] Y. Eliashberg – “Filling by holomorphic discs and its applications”, Geometry of low-dimensional manifolds, 2 (Durham, 1989), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 151, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, p. 45–67.

[17] C. Fefferman – “The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains”, *Invent. Math.* **26** (1974), p. 1–65.

[18] C. Frances – “A Ferrand-Obata theorem for rank one parabolic geometries”, 2006, arXiv:math.DG/0608537.

[19] C. Frances et C. Tarquini – “Autour du théorème de Ferrand-Obata”, *Ann. Global Anal. Geom.* **21** (2002), no. 1, p. 51–62.

[20] M. H. Freedman – “The topology of four-dimensional manifolds”, *J. Differential Geom.* **17** (1982), no. 3, p. 357–453.

[21] V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishchik et E. B. Vinberg – *Foundations of Lie theory and Lie transformation groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1997, Translated from the Russian by A. Kozlowski, Reprint of the 1993 translation [*Lie groups and Lie algebras. I*, Encyclopaedia Math. Sci., 20, Springer, Berlin, 1993; MR1306737 (95f:22001)].

[22] L. Greenberg – “Discrete subgroups of the Lorentz group”, *Math. Scand.* **10** (1962), p. 85–107.

[23] P. Griffiths et J. Harris – *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994, Reprint of the 1978 original.

[24] S. Helgason – *Differential geometry and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XII, Academic Press, New York, 1962.

[25] L. S. Husch et T. M. Price – “Finding a boundary for a 3-manifold”, *Ann. of Math. (2)* **91** (1970), p. 223–235.

[26] T. Kambayashi – “Projective representation of algebraic linear groups of transformations”, *Amer. J. Math.* **88** (1966), p. 199–205.

[27] Y. Kamishima – “A rigidity theorem for CR manifolds and a refinement of Obata and Lelong-Ferrand’s result”, Geometry and its applications (Yokohama, 1991), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1993, p. 73–83.

[28] G. M. Khenkin (éd.) – *Several complex variables. III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, 1989, Geometric function theory, A translation of Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya, Tom 9, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1986 [MR0860607 (87m:32011)], Translation by J. Peetre, Translation edited by G. M. Khenkin.

[29] P. F. Klembeck – “Kähler metrics of negative curvature, the Bergmann metric near the boundary, and the Kobayashi metric on smooth bounded strictly pseudoconvex sets”, *Indiana Univ. Math. J.* **27** (1978), no. 2, p. 275–282.

[30] B. Kloeckner – “Symmetric spaces of higher rank do not admit differentiable compactifications”, prépublication.

[31] — , “On differentiable compactifications of the hyperbolic plane and algebraic actions of $SL_2(\mathbb{R})$ on surfaces”, *Geom. Dedicata* **117** (2006), p. 161–180.

[32] — , “On differentiable compactifications of the hyperbolic space”, *Transform. Groups* **11** (2006), no. 2, p. 185–194.

[33] — , “Sur les remplissages holomorphes équivariants”, 2006.

[34] A. W. Knapp – *Representation theory of semisimple groups*, Princeton Mathematical Series, vol. 36, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986, An overview based on examples.

[35] S. Kobayashi et K. Nomizu – *Foundations of differential geometry. Vol I*, Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-Lond on, 1963.

[36] R. S. Kulkarni – “Conjugacy classes in $M(n)$”, Conformal geometry (Bonn, 1985/1986), Aspects Math., E12, Vieweg, Braunschweig, 1988, p. 41–64.

[37] J. M. Lee – “CR manifolds with noncompact connected automorphism groups”, *J. Geom. Anal.* **6** (1996), no. 1, p. 79–90.

[38] C. T. McMullen – “Dynamics on $K3$ surfaces: Salem numbers and Siegel disks”, *J. Reine Angew. Math.* **545** (2002), p. 201–233.

[39] — , “Dynamics on blowups of the projective plane”, 2006, prépublication.

[40] J. Milnor – “On manifolds homeomorphic to the 7-sphere”, *Ann. of Math. (2)* **64** (1956), p. 399–405.

[41] — , “Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct”, *Ann. of Math. (2)* **74** (1961), p. 575–590.

[42] — , *Lectures on the h-cobordism theorem*, Notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.

[43] — , "Whitehead torsion", *Bull. Amer. Math. Soc.* **72** (1966), p. 358–426.

[44] Y. Mitsumatsu – "SL(2; **R**)-actions on surfaces", Geometric study of foliations (Tokyo, 1993), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994, p. 375–389.

[45] E. E. Moise – *Geometric topology in dimensions* 2 *and* 3, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 47.

[46] D. Montgomery et L. Zippin – "Existence of subgroups isomorphic to the real numbers", *Ann. of Math. (2)* **53** (1951), p. 298–326.

[47] L. Boutet de Monvel – "Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles", Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1974–1975; Équations aux derivées partielles linéaires et non linéaires, Centre Math., École Polytech., Paris, 1975, p. Exp. No. 9, 14.

[48] L. Nirenberg – "A certain problem of Hans Lewy", *Uspehi Mat. Nauk* **29** (1974), no. 2(176), p. 241–251, Translated from the English by Ju. V. Egorov, Collection of articles dedicated to the memory of Ivan Georgievič Petrovskiĭ (1901–1973), I.

[49] M. Ronan – *Lectures on buildings*, Perspectives in Mathematics, vol. 7, Academic Press Inc., Boston, MA, 1989.

[50] H. Rossi – "Attaching analytic spaces to an analytic space along a pseudoconcave boundary", Proc. Conf. Complex Analysis (Minneapolis, 1964), Springer, Berlin, 1965, p. 242–256.

[51] C. R. Schneider – "SL(2, R) actions on surfaces", *Amer. J. Math.* **96** (1974), p. 511–528.

[52] R. Schoen – "On the conformal and CR automorphism groups", *Geom. Funct. Anal.* **5** (1995), no. 2, p. 464–481.

[53] J.-P. Serre – *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W. A. Benjamin, inc., New York-Amsterdam, 1966.

[54] — , *Arbres, amalgames,* SL_2, Société Mathématique de France, Paris, 1977, Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.

[55] L. Siebenmann – "The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five", Thèse, Princeton University, 1965.

[56] S. Smale – "Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four", *Ann. of Math. (2)* **74** (1961), p. 391–406.

[57] — , "On the structure of manifolds", *Amer. J. Math.* **84** (1962), p. 387–399.

[58] D. C. Stowe – "Real analytic actions of $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ on a surface", *Ergodic Theory Dynam. Systems* **3** (1983), no. 3, p. 447–499.

[59] W. P. Thurston – *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, Princeton Mathematical Series, vol. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, Edited by Silvio Levy.

[60] P. L. Waterman – "Purely elliptic Möbius groups", Holomorphic functions and moduli, Vol. II (Berkeley, CA, 1986), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 11, Springer, New York, 1988, p. 173–178.

[61] S. M. Webster – "On the transformation group of a real hypersurface", *Trans. Amer. Math. Soc.* **231** (1977), no. 1, p. 179–190.

[62] — , "Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface", *J. Differential Geom.* **13** (1978), no. 1, p. 25–41.

[63] B. Wong – "On the automorphism group of compact measure hyperbolic manifolds and complex analytic bundles with compact measure hyperbolic fibres", *Proc. Amer. Math. Soc.* **62** (1976), no. 1, p. 54–56 (1977).

Table des matières

Remerciements **v**

Introduction **vii**

Compactifications différentiables des espaces symétriques

I Compactifications différentiables **3**
- 1 Compactification des variétés . . . 3
  - 1.1 Définition et motivation . . . 3
  - 1.2 Autour de l'unicité des compactifications . . . 5
- 2 Compactification des structures . . . 8
  - 2.1 Les actions de groupes de Lie . . . 8
  - 2.2 Les G-structures . . . 10
  - 2.3 Les (G,X)-structures . . . 11
- 3 La compactification géodésique . . . 11

II Compactifications de l'espace hyperbolique réel **15**
- 1 Géométrie hyperbolique . . . 15
  - 1.1 Définition et modèles . . . 15
  - 1.2 Compactification de Hadamard . . . 17
  - 1.3 Isométries . . . 18
  - 1.4 Notations . . . 18
- 2 Unicité topologique de la compactification . . . 19
  - 2.1 Première étape : l'action sur le bord . . . 20
  - 2.2 Deuxième étape : adhérence d'une géodésique . . . 22
  - 2.3 Troisième étape : prolongement de la conjugaison . . . 22

3 Classification des compactifications différentiables 23
3.1 Multiplicité 23
3.2 Cartes demi-espace 24
3.3 Classification analytique 26
3.4 Classification différentiable 28
3.5 Démonstration de la classification 29

III Actions algébriques de SL$(2;\mathbb{R})$ sur les surfaces 37
1 Introduction 37
1.1 Motivation 37
1.2 Résultats 38
1.3 Organisation de la démonstration 39
2 Topologie des orbites algébriques de petite dimension 39
2.1 Représentations linéaires irréductibles de SL$(2;\mathbb{R})$ . . . 39
2.2 Orbites dans les représentations irréductibles 40
2.3 Notations pour le cas réductible 43
2.4 Orbites des représentations réductibles 44
2.5 Adhérences des orbites 47
3 Recollements et régularité 50
3.1 Lemme de régularité 50
3.2 Recollement des orbites elliptiques 52
3.3 Recollement des orbites paraboliques 54
3.4 Recollement des orbites hyperboliques 58

IV Espaces symétriques à courbure négative 61
1 Généralités sur les espaces symétriques 61
1.1 Définition 61
1.2 Rang et courbure 63
1.3 Décomposition de Cartan 64
1.4 De l'algèbre à la géométrie 66
1.5 Espaces de rang un 68
2 Exemples d'espaces de rang supérieur 70
2.1 L'exemple le plus simple 70
2.2 L'exemple de type non compact le plus simple 73
3 Immeubles 74
3.1 Complexes simpliciaux 75
3.2 Groupes de réflexions 76
3.3 Complexes de Coxeter sphériques 77
3.4 Matrices et diagrammes de Coxeter 80
3.5 Immeubles sphériques 83
3.6 Immeubles métriques 84

4 Immeuble à l'infini d'un espace symétrique 86
4.1 Systèmes de racines 86
4.2 La structure d'immeuble 87
4.3 Avec un facteur euclidien 90

V Compactification des espaces de rang supérieur 93
1 Introduction 93
2 La projection visuelle 95
3 Produit d'un espace de rang un et d'un espace euclidien 96
4 Cas général 99

Remplissages holomorphes équivariants

VI Géométrie CR et variétés complexes à bord 109
1 Éléments de géométrie CR 109
1.1 Deux exemples fondamentaux 109
1.2 Définitions 110
1.3 Calibrations 113
1.4 Côtés d'une hypersurface 114
1.5 Quelques propriétés 115
2 La boule standard 116
2.1 Construction de l'espace hyperbolique complexe 116
2.2 Les automorphismes en dimension 2 117
3 Le théorème de Webster–Schoen 121
4 Variétés complexes à bord 123
4.1 Définition 123
4.2 Exemples 124

VII Surfaces rationnelles 127
1 Éléments de géométrie complexe 127
1.1 Forme d'intersection 127
1.2 Éclatement et contraction 128
2 Surfaces de Hirzebruch 129
2.1 Définition 130
2.2 Rationalité et autres propriétés 130

VIII Remplissages concaves équivariants **133**
1 Introduction 133
1.1 remplissages équivariants de la sphère standard 133
1.2 Surfaces complexes à bord concave et à gros groupe d'automorphismes 135
2 Remplissages équivariants de la sphère 136
2.1 Bassins d'attraction et de répulsion 137
2.2 Contraction des courbes exceptionnelles 139
2.3 Exemples singuliers 142

Annexe – Sous-groupes purement elliptiques **145**
1 Position du problème 145
2 Le cas des espaces euclidiens et hyperboliques réels 146
3 Le cas fermé 149

Table des figures **151**

Index **153**

Bibliographie **155**