Géométrie des bords : compactifications différentiables et remplissages holomorphes

Benoît Kloeckner

UMPA, École normale supérieure de Lyon

1er décembre 2006

Sommaire

Sommaire

Sommaire

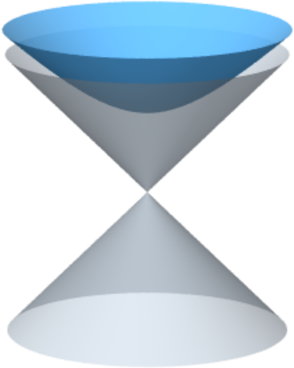
Construction de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$

Sur $\mathbb{R}^{n+1}$:

coordonnées	$(x_1, \ldots, x_n, y)$
forme lorentzienne	$Q = \sum x_i^2 - y^2$
nappe d'hyperboloïde	$\mathcal{H} = \{Q = -1 \text{ et } y > 0\}$

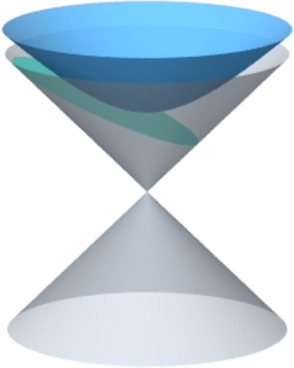
Construction de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$

$$Q = \sum x_i^2 - y^2 \qquad \mathcal{H} = \{Q = -1 \text{ et } y > 0\}$$



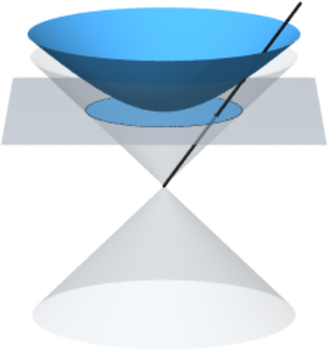
Construction de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$

$$\mathbb{R}\mathrm{H}^n = (\mathcal{H}, Q_{|T\mathcal{H}}) = \mathrm{SO}_0(1,n)/\mathrm{SO}(n)$$



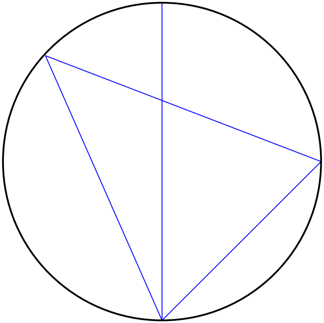
Construction de la boule de Klein

Plongement de $\mathbb{R}H^n$ dans $\mathbb{R}P^n$:
l'action des isométries se prolonge au bord.



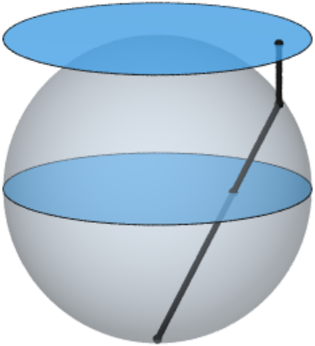
La boule de Klein

Les géodésiques sont des segments de droite.



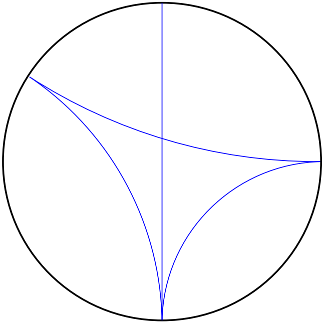
Construction de la boule de Poincaré

On compose une projection verticale et une stéréographique.
L'action des isométries se prolonge à nouveau au bord.



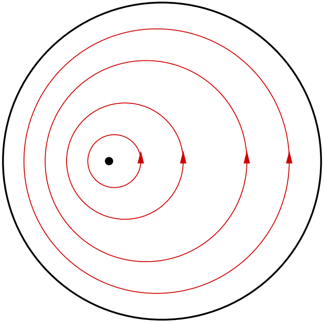
La boule de Poincaré

Les géodésiques sont des arcs de cercle orthogonaux au bord.



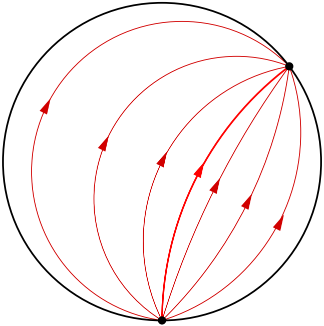
Isométries

Isométrie elliptique : points fixes à l'intérieur



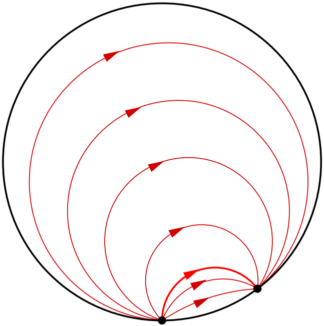
Isométries

Isométrie hyperbolique : deux points fixes au bord



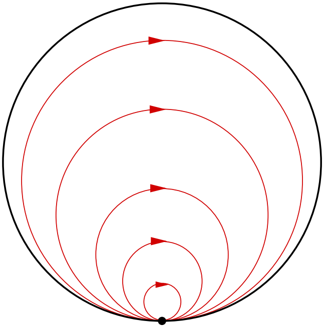
Isométries

Isométrie hyperbolique : deux points fixes au bord



Isométries

Isométrie parabolique : un seul point fixe au bord



Sommaire

Compactification différentiable

- M une variété riemannienne complète
- $G = \mathrm{Isom}_+(M)$
- α l'action de G sur M

Compactification différentiable

- M une variété riemannienne complète
- $G = \mathrm{Isom}_+(M)$
- α l'action de G sur M

Définition

Une compactification différentiable de M est la donnée d'un plongement $\Phi : M \to N$ où

- *N est une variété à bord*
- $\Phi(M) = \mathrm{int}(N)$
- $\Phi_*\alpha$ *se prolonge en une action différentiable sur N.*

Compactifications projective et conforme

L'action de $SO_0(1, n)$ sur la boule de Klein ou celle de Poincaré se prolonge analytiquement au bord.

On obtient ainsi deux compactifications appelées respectivement projective et conforme.

Compactifications projective et conforme

L'action de $\mathrm{SO}_0(1, n)$ sur la boule de Klein ou celle de Poincaré se prolonge analytiquement au bord.

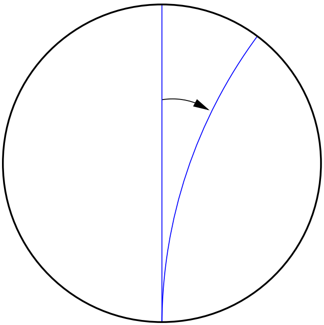
On obtient ainsi deux compactifications appelées respectivement projective et conforme.

Théorème (unicité topologique)

Toutes les compactifications de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ *sont topologiquement conjuguées.*

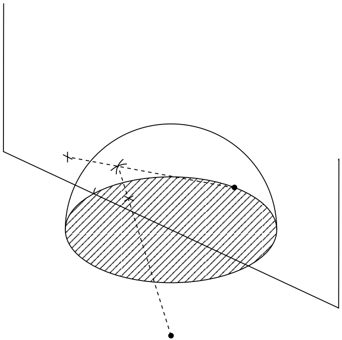
Les compactifications ne sont pas $\mathscr{C}^1$ conjuguées

La différentielle au point fixe d'une isométrie parabolique admet une direction propre transverse au bord dans le modèle de Poincaré, pas dans celui de Klein.



Cartes demi-espace

Passage de la boule de Poincaré au demi-espace

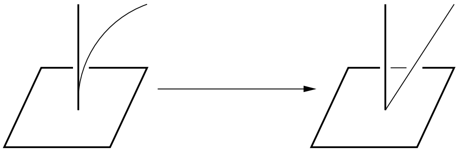


Différentes compactifications

On peut tirer en arrière l'action de G sur la boule de Klein par

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \longmapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, y^p)$$

(en carte demi-espace) et prolonger analytiquement au bord.



Classification analytique

Théorème

Toute compactification analytique de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ s'obtient à partir de la compactification projective en tirant en arrière par une application qui s'écrit

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, y^p)$$

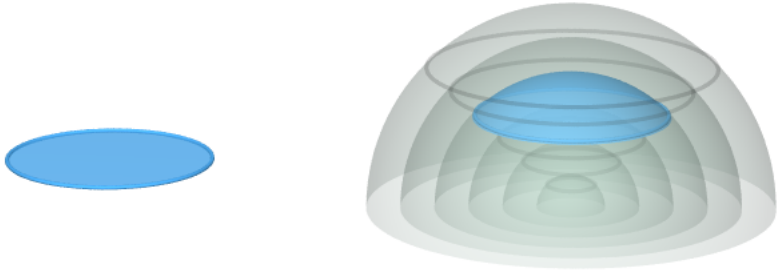
en cartes demi-espaces.

Sommaire

Action algébrique

Définition

Une action d'un groupe G est algébrique si elle se plonge de façon équivariante dans une représentation projective de G.



Algébricité des compactifications classiques

Théorème

Parmi les compactifications de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$, la projective et la conforme sont les seules à être algébriques.

Algébricité des compactifications classiques

Théorème

Parmi les compactifications de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$, la projective et la conforme sont les seules à être algébriques.

- Classification pour se ramener à la dimension 2
- Étude exhaustive des orbites des représentations projectives de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

Sommaire

Sommaire

Variété de Hadamard

Définition

Une variété de Hadamard est une variété riemannienne complète

- *simplement connexe*
- *à courbure sectionnelle* $\leqslant 0$.

Variété de Hadamard

Définition

Une variété de Hadamard est une variété riemannienne complète

- *simplement connexe*
- *à courbure sectionnelle* $\leqslant 0$.

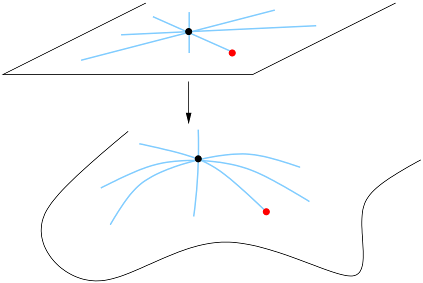
Exemples :

- l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$
- l'espace hyperbolique $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$
- les petites perturbations de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$

Trivialité topologique

Théorème (Cartan-Hadamard)

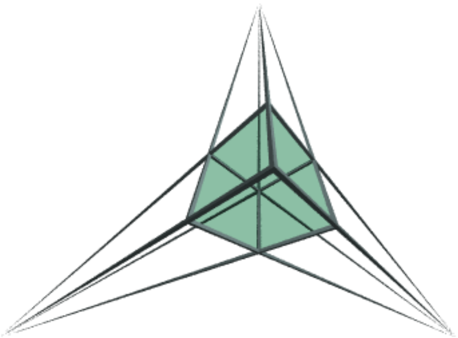
Dans une variété de Hadamard, l'application exponentielle en un point est un difféomorphisme global.



Bord à l'infini

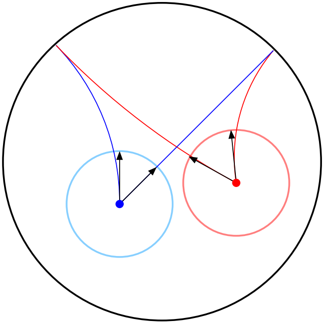
Le bord à l'infini est défini comme

$$M(\infty) = \{\text{rayons géodésiques}\}/(\text{distance bornée})$$



Projection visuelle

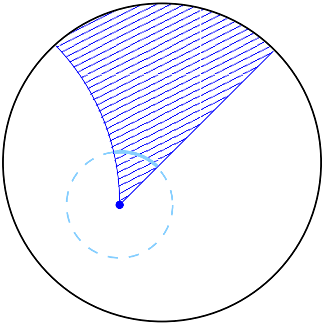
La projection visuelle $\pi_x : T^1_x M \longrightarrow M(\infty)$ permet d'identifier le bord à chaque sphère unitaire tangente.



Compactification géodésique

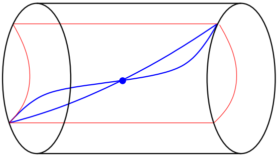
On munit $\overline{M} = M \cup M(\infty)$ de la topologie engendrée par les cônes ouverts

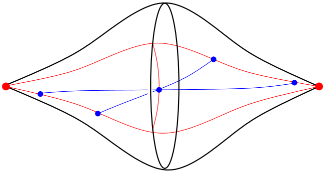
$$\mathcal{C}(x, U) = \left\{\gamma_v(t); v \in U, t \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}\right\}$$



Compactification de $\mathbb{R}H^2 \times \mathbb{R}$

On passe du produit du disque par la droite dans $\mathbb{R}^3$ à la compactification géodésique en contractant le côté et les opercules du cylindre et en éclatant les deux cercles extrémaux.

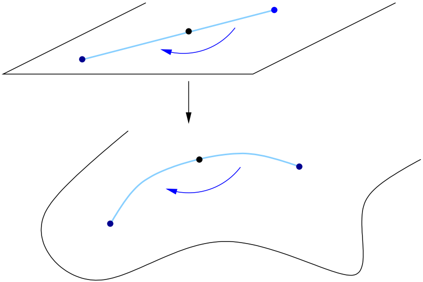




Sommaire

Symétrie géodésique

M variété de Hadamard
La symétrie géodésique en $x \in M$ est conjuguée par l'exponentielle à la symétrie centrale



Espace symétrique à courbure négative

Définition

Une variété de Hadamard est un espace symétrique si la symétrie géodésique en tout point est une isométrie.

Espace symétrique à courbure négative

Définition

Une variété de Hadamard est un espace symétrique si la symétrie géodésique en tout point est une isométrie.

Exemples :

- espace euclidien $\mathbb{R}^n$
- espace hyperbolique réel $\mathbb{R}H^n$
- $SL_n(\mathbb{R})/SO(n)$
- produit d'espaces symétriques

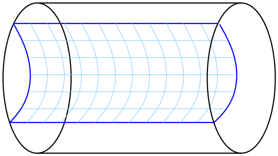
Rang d'un espace symétrique

Définition

Le rang de M est le plus grand k tel qu'on puisse y plonger $\mathbb{R}^k$ de façon isométrique et totalement géodésique.

Exemples :

- $\mathrm{rang}(\mathbb{R}^n) = n$
- $\mathrm{rang}(\mathbb{R}\mathrm{H}^n) = 1$
- $\mathrm{rang}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)) = n - 1$
- $\mathrm{rang}(M_1 \times M_2) = \mathrm{rang}(M_1) + \mathrm{rang}(M_2)$



Sommaire

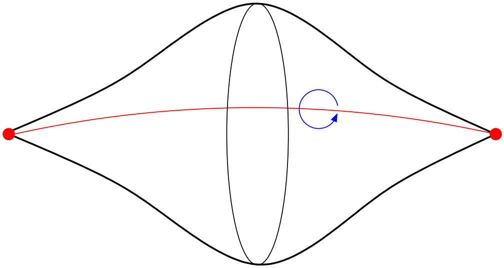
Absence de compactification différentiable

Théorème

Un espace symétrique à courbure négative, s'il est de rang supérieur et non euclidien, n'admet pas de compactification différentiable topologiquement conjuguée à sa compactification géodésique.

Un cas simple

Dans $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}$, considérons la symétrie s autour d'une géodésique horizontale.



Un cas simple

Dans $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}$, considérons la symétrie s autour d'une géodésique horizontale.

1. Sur l'espace tangent au bord en un point fixe, ds est conjuguée à $-\mathrm{Id}$.
2. Il en est de même pour une autre symétrie s'.
3. Donc $ds\, ds' = \mathrm{Id}$ au bord.
4. Mais $s\, s'$ est une isométrie hyperbolique de $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$.
5. Contradiction car $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est simple.

Sommaire

Sommaire

Opérateur complexe

Opérateur complexe J :

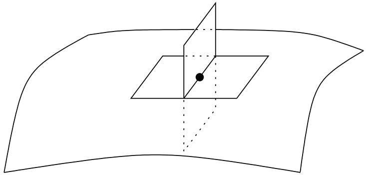
$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{C}^2 & \longrightarrow & T\mathbb{C}^2 \\ (x, v) & \longmapsto & (x, iv) \end{array}$$

En tout point, $J_x^2 = -\mathrm{Id}$.

Hypersurfaces

Une hypersurface réelle $H \subset \mathbb{C}^2$ est munie

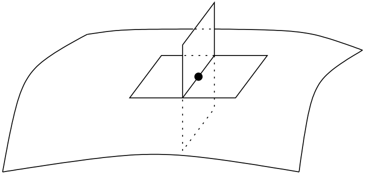
- d'un champ d'hyperplans $\xi = TH \cap J(TH)$



Hypersurfaces

Une hypersurface réelle $H \subset \mathbb{C}^2$ est munie

- d'un champ d'hyperplans $\xi = TH \cap J(TH)$
- d'un opérateur complexe $J : \xi \to \xi$



Variétés CR

Définition

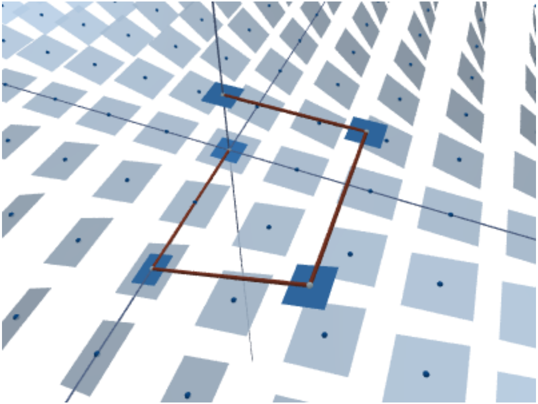
Une structure CR sur une variété M de dimension 3 est la donnée

- *d'un champ d'hyperplans $\xi \subset TM$*
- *d'un opérateur complexe $J : \xi \to \xi$*

Forme de Levi

Forme de Levi associée à une 1-forme θ définissant ξ

$$L_x(V) = -\theta([V, JV]) \qquad \forall V \in \xi_x$$



Des géométries différentes

Signature de L	La variété est dite	ξ induit
nulle	Levi-plate	un feuilletage en surfaces de Riemann
définie	strictement pseudoconvexe	une structure de contact

Sommaire

Remplissages

Variété M munie d'une structure CR

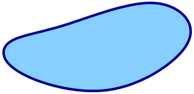
Définition

Un remplissage de M est une variété complexe à bord X telle que

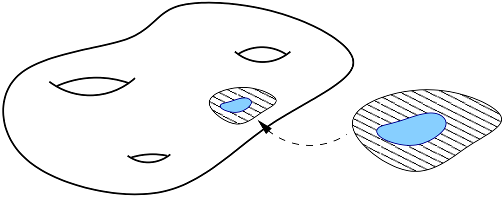
$$\partial X \overset{CR}{\simeq} M$$

Exemples

D domaine borné à bord lisse de $\mathbb{C}^n$, convexe

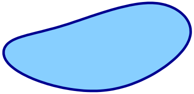


- D est un remplissage convexe de ∂D
- on obtient des remplissages concaves en perçant n'importe quelle variété complexe sans bord.

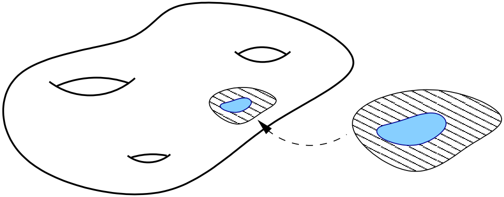


Exemples

D domaine borné à bord lisse de $\mathbb{C}^n$, convexe

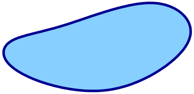


- D est un remplissage convexe de ∂D
- on obtient des remplissages concaves en perçant n'importe quelle variété complexe sans bord.

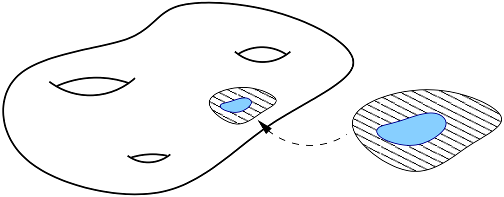


Exemples

D domaine borné à bord lisse de $\mathbb{C}^n$, convexe



- D est un remplissage convexe de ∂D
- on obtient des remplissages concaves en perçant n'importe quelle variété complexe sans bord.



Exemples fondamentaux

Sphère standard

$$S^3 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_0|^2\} \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^2$$

Boule standard

$$B^4 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 < |z_0|^2\} \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^2$$

Exemples fondamentaux

Sphère standard

$$S^3 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_0|^2\} \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^2$$

Boule standard

$$B^4 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 < |z_0|^2\} \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^2$$

- $\overline{B}^4$ est un remplissage convexe de S^3
- $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B^4$ est un remplissage concave de S^3

Équivariance

Variété M munie d'une structure CR, G son groupe d'automorphismes, $F \subset G$.

Définition

Un remplissage X de M est équivariant relativement à F si l'action de F sur ∂X se prolonge à X.

Restrictions

On se restreint au cas strictement pseudoconvexe.
On s'intéresse à des sous-groupes F non compacts et fermés dans G.

Théorème (Webster–Schoen)

La seule variété CR strictement pseudoconvexe et compacte dont le groupe d'automorphisme est non compact est la sphère standard.

On se restreint donc aux remplissages de S^3.

Restrictions

On se restreint au cas strictement pseudoconvexe.
On s'intéresse à des sous-groupes F non compacts et fermés dans G.

Théorème (Webster–Schoen)

La seule variété CR strictement pseudoconvexe et compacte dont le groupe d'automorphisme est non compact est la sphère standard.

On se restreint donc aux remplissages de S^3.

Restrictions

On se restreint au cas strictement pseudoconvexe.
On s'intéresse à des sous-groupes F non compacts et fermés dans G.

Théorème (Webster–Schoen)

La seule variété CR strictement pseudoconvexe et compacte dont le groupe d'automorphisme est non compact est la sphère standard.

On se restreint donc aux remplissages de S^3.

Restrictions

On se restreint au cas strictement pseudoconvexe.
On s'intéresse à des sous-groupes F non compacts et fermés dans G.

Théorème (Webster–Schoen)

La seule variété CR strictement pseudoconvexe et compacte dont le groupe d'automorphisme est non compact est la sphère standard.

On se restreint donc aux remplissages de S^3.

Unicité du remplissage équivariant

Théorème

Soit X un remplissage de S^3, équivariant relativement à un sous-groupe non compact et fermé de $\mathrm{SU}(1,2)$.

- *Si X est convexe, $X \overset{hol}{\simeq} \overline{B}^4$.*
- *Si X est concave, $X \overset{mér}{\simeq} \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B^4$.*

Principe de la démonstration (I)

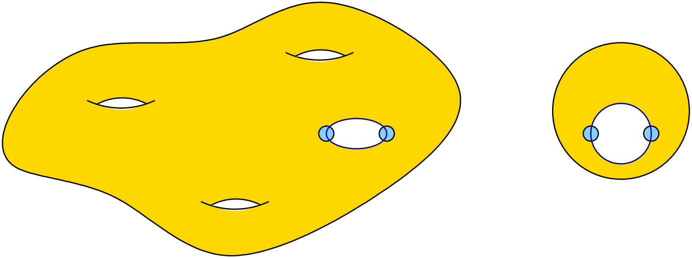
- Sous-groupes purement elliptiques : toute la non-compacité de F est contenue dans un élément.

Principe de la démonstration (I)

- Sous-groupes purement elliptiques : toute la non-compacité de F est contenue dans un élément.
- Étude de l'action des paraboliques et hyperboliques sur $\mathbb{C}P^2$.

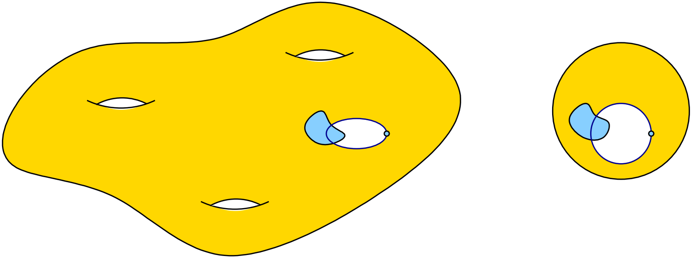
Principe de la démonstration (II)

Extension de la conjugaison locale entre le remplissage et le modèle.



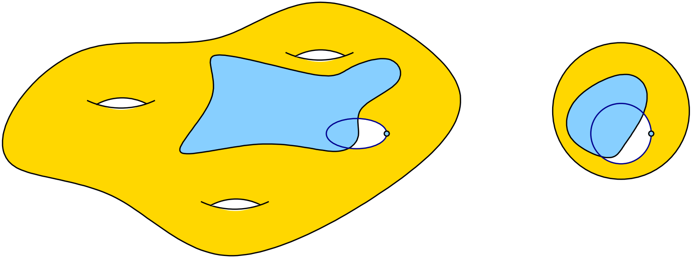
Principe de la démonstration (II)

Extension de la conjugaison locale entre le remplissage et le modèle.



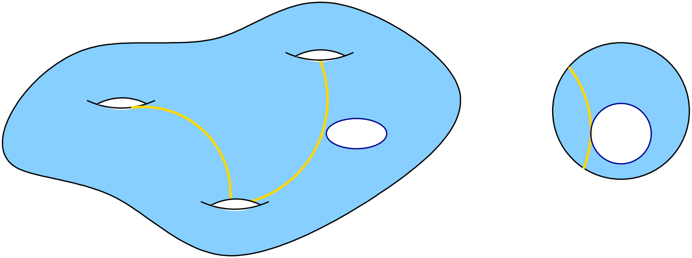
Principe de la démonstration (II)

Extension de la conjugaison locale entre le remplissage et le modèle.



Principe de la démonstration (II)

Extension de la conjugaison locale entre le remplissage et le modèle.



Principe de la démonstration (III)

On utilise la conjugaison et la connaissance du modèle pour :

- se ramener aux surfaces rationnelles ;

Principe de la démonstration (III)

On utilise la conjugaison et la connaissance du modèle pour :

- se ramener aux surfaces rationnelles ;
- contracter les courbes exceptionnelles ;

Principe de la démonstration (III)

On utilise la conjugaison et la connaissance du modèle pour :

- se ramener aux surfaces rationnelles ;
- contracter les courbes exceptionnelles ;
- écarter les surfaces de Hirzebruch.

Sommaire

Compactifications différentiables

Espace hyperbolique complexe

Quelles sont ses compactifications différentiables ?

Compactification des espaces de rang supérieur

Celles qui n'ont pas la topologie de Hadamard peuvent-elles être lissées ?

Remplissages holomorphes

Dimension supérieure

L'unicité du remplissage équivariant perdure-t-elle ?

Cas Levi-plat

Peut-on classer les surfaces complexes à bord Levi-plat qui ont beaucoup d'automorphismes ?

Sans équivariance

Trouver des contraintes topologiques vérifiées par les bords pseudoconvexes ou Levi-plats des variétés complexes.