



HAL
open science

Phénoménologie des mésons B et Chromodynamique sur réseau

Benoît Blossier

► **To cite this version:**

Benoît Blossier. Phénoménologie des mésons B et Chromodynamique sur réseau. Physique des Hautes Energies - Expérience [hep-ex]. Université Paris Sud - Paris XI, 2006. Français. NNT: . tel-00116253

HAL Id: tel-00116253

<https://theses.hal.science/tel-00116253>

Submitted on 24 Nov 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 8309

UNIVERSITÉ PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

par

Benoît BLOSSIER

sujet :

**Phénoménologie des mésons B et
Chromodynamique Quantique sur réseau**

Soutenue le 28 juin 2006 devant la Commission d'examen composée de

M. Laurent LELLOUCH (Rapporteur)
M. Vittorio LUBICZ
M. Olivier PÈNE (Directeur de thèse)
M. Patrick ROUDEAU
M. Hagop SAZDJIAN (Président)
M. Rainer SOMMER (Rapporteur)

Remerciements

Avant d'exposer le travail ayant été effectué dans cette thèse je me dois de remercier Dominique Schiff et Henk Hilhorst pour m'avoir accueilli au Laboratoire de Physique Théorique d'Orsay qu'ils ont successivement dirigé durant ma présence dans ses locaux.

Il me faut également remercier tout le personnel administratif du laboratoire qui a toujours su se montrer disponible face aux demandes les plus diverses. Une mention spéciale pour Mireille Calvet qui a fait preuve d'une redoutable efficacité lorsqu'il s'est agi de satisfaire aux exigences des nombreux dossiers administratifs que j'ai remplis durant ma thèse ; son aide m'a été très précieuse.

Un grand merci au Professeur Hagop Sazdjian qui a accepté volontiers de présider mon jury de thèse même s'il ne connaissait pas en détail les aspects techniques de la QCD sur réseau. Je remercie également Laurent Lellouch et Rainer Sommer d'être les rapporteurs de ma thèse. Je suis convaincu que le travail accompli dans le groupe de Rainer pendant mon prochain contrat postdoctoral sera fructueux et ce sera toujours un plaisir de discuter avec Laurent. Enfin je remercie Vittorio Lubicz et Patrick Roudeau d'avoir accepté d'être membres de mon jury et j'espère fortement pouvoir à nouveau travailler avec eux dans l'avenir.

C'est avec un grand plaisir que je remercie Olivier Pène pour m'avoir encadré durant ces trois années. Sa disponibilité, sa gentillesse et son sérieux m'ont permis de m'épanouir dans mon travail ; il m'a soutenu quand c'était nécessaire mais il m'a également laissé prendre des initiatives. Je tiens à remercier le groupe de QCD sur réseau du laboratoire dans son ensemble car j'ai bénéficié de la compétence, de la chaleur et de l'ouverture d'esprit de chacun de ses membres : je souhaite vivement prolonger mon travail avec eux. L'ambiance a également été rendue agréable grâce aux nombreux étudiants présents dans le laboratoire et les discussions avec Alexei, Yacine, Thorsten, Habib, Frédéric, FX, Chloé, Mathieu, Nicolas, Fabien et Emmanuel ont été très enrichissantes.

Je dois beaucoup à l'excellence du service d'ophtalmologie de l'Hôtel-Dieu - en particulier les Pr. Yves Pouliquen et Thierry David, ainsi que le Dr. Frédéric Azan - sans qui je n'aurais pu poursuivre mon cursus scolaire et universitaire. J'espère que le projet d'installer le Palais de Justice de Paris dans les locaux de l'Hôtel-Dieu ne se réalisera jamais : l'encombrement de la salle d'attente et des salles de visite dans le service d'ophtalmologie montre au contraire qu'il faut améliorer l'offre médicale - particulièrement en ophtalmologie - en adéquation avec le vieillissement de la population.

Je n'oublie pas mes proches qui m'ont toujours soutenu pendant mon travail, même s'il leur semblait parfois un peu abstrait, et m'ont aidé à la typographie du manuscrit quand cela a été nécessaire.

Table des matières

Introduction	7
1 Théorie effective des quarks lourds	11
1.1 Introduction de la théorie	11
1.2 Spectroscopie des mésons lourd-légers	13
1.3 Facteurs de forme	14
2 QCD sur réseau	17
2.1 Théories de jauge discrétisées	18
2.1.1 Actions fermioniques	19
2.1.2 Action chirale	21
2.1.3 Action du quark lourd	23
2.2 Calcul d'une observable physique par une simulation de QCD sur réseau	24
2.2.1 Extraction des quantités physiques	25
2.2.2 Calcul des propagateurs	26
2.2.3 Construction de l'ensemble statistique	29
2.2.4 Evaluation des erreurs statistiques	31
2.2.5 Matching vers le continu	32
3 Couplages pioniques	39
3.1 Lagrangien chirale et phénoménologie	39
3.1.1 Limite non relativiste	41
3.1.2 Couplages pioniques et théorie des perturbations chirales	43
3.1.3 Modèles des quarks	46
3.1.4 Couplages pioniques et règles de somme	47
3.2 Evaluation de \hat{g} et \tilde{g} sur le réseau	49
3.2.1 Facteurs de forme	50
3.2.2 Implémentation sur le réseau	51
3.2.3 Renormalisation non perturbative	55
4 Masse des quarks légers	61
5 Transitions $B \rightarrow D^{**}$	69
5.1 Phénoménologie de $B \rightarrow D^{**}$	69

5.1.1	Prédictions par des modèles de quarks covariants	71
5.1.2	Prédictions par les règles de somme à la limite de masse lourde	73
5.1.3	Résultats expérimentaux des désintégrations semi-leptoniques du B	76
5.2	Etude des excitations orbitales des mésons lourd-légers par la QCD sur réseau	79
5.2.1	Champs interpolants	79
5.2.2	Isolement des états fondamentaux	82
5.2.3	Estimations des fonctions d'Isgur-Wise $\tau_{\frac{1}{2}}(1)$ et $\tau_{\frac{3}{2}}(1)$	85
6	Mélange $B_s - \overline{B}_s$	101
6.1	Violation de CP dans le système des B_s	101
6.1.1	Matrice CKM	101
6.1.2	Le système $B_s - \overline{B}_s$	104
6.1.3	OPE	105
6.2	Calcul numérique de B_{B_s}	107
6.2.1	Principe du calcul	107
6.2.2	Extraction de la quantité physique B_{B_s}	110
	Conclusion et perspectives	125
	Annexe	127
	Bibliographie	129

Introduction

Le secteur des mésons B offre un champ d'investigations extrêmement vaste, que ce soit du point de vue théorique comme sur le plan expérimental. En effet il contient un quark beau, qui est de la 3^{ème} génération de saveur et qui, bien qu'étant lourd, peut former un état lié, contrairement à son partenaire de famille le quark top qui se désintègre avant de pouvoir s'hadroniser. Le nombre de canaux de désintégration est assez élevé, du fait de la masse de ces mésons (~ 5.2 GeV), que ce soit des désintégrations semi-leptoniques comme $B \rightarrow D^* l \nu$, ou non leptoniques comme $B \rightarrow D^{**} \pi$, $B \rightarrow \pi \pi$, $B \rightarrow K^* \gamma$, etc. Après la découverte de la résonance Υ à 9.5 GeV dans la collision $p + \bar{p} \rightarrow \mu^+ \mu^-$ [1] interprétée avec succès comme étant un état lié $b\bar{b}$ [2], celle du B [3] a donc été un élément fondamental dans la validation du Modèle Standard comme cadre théorique de la physique des particules, dans lequel les interactions électrofaible et forte peuvent être décrites à l'échelle de 100 GeV ; rappelons qu'il est construit à partir de la théorie de jauge $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ brisée spontanément en $SU(3)_C \times U(1)_{EM}$ [4, 5]. La découverte du méson B a offert des perspectives très intéressantes de tests minutieux de ce Modèle et d'observations d'une éventuelle nouvelle physique. C'est ainsi que de grands détecteurs ont mesuré avec précision certaines de ses caractéristiques physiques (CLEO à Cornell, BaBar à SLAC, Belle à KeK, CDF et D0 au Tevatron) ou le feront prochainement (LHCb au LHC), contraignant le Modèle Standard ou ouvrant la voie à de la nouvelle physique dans le secteur des saveurs. C'est l'étude de la transition $B \rightarrow J/\Psi K_s$ qui a permis de détecter pour la deuxième fois une source de violation de CP [6], après celle découverte en 1964 et en 1999 dans le secteur des K [7]. La violation directe de CP a été détectée dans les transitions $B_d \rightarrow \pi^\mp K^\pm$ [8], et les effets d'une nouvelle physique sont recherchés dans les transitions $B_s \rightarrow K^* \gamma$, $B_s \rightarrow K^* l^+ l^-$, $B_d \rightarrow \pi \pi$, $B_d \rightarrow \pi K$ [9]. Sur le plan théorique l'échelle d'énergie typique de ces mésons - autrement dit leur masse ou celle du quark b - permet suivant le processus considéré soit d'utiliser un développement perturbatif en un petit paramètre (par exemple la constante forte $\alpha_s(m_b) \sim 0.2$), soit de construire une théorie effective à basse énergie, de façon à simplifier les problèmes physiques rencontrés. Bien souvent les résultats obtenus par ces théories effectives sont comparés aux résultats expérimentaux, permettant ainsi leur justification dans un domaine bien précis de l'espace des phases, mais il arrive parfois qu'on souhaite utiliser à la fois un résultat expérimental et une prédiction théorique pour déterminer un paramètre fondamental du Modèle Standard. Or cette procédure peut être entachée d'incertitudes théoriques importantes, qu'il convient de réduire. C'est particulièrement le cas pour l'extraction des éléments de la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [10] à partir d'un processus exclusif, qui nécessite le calcul d'un élément de matrice hadronique, objet hautement non perturbatif du point de vue de la Chromodynamique Quantique (QCD), qui est la théorie de jauge décrivant les interactions entre

quarks et gluons, car ces derniers sont confinés dans les hadrons, états liés invariants de couleur. A ce jour il existe une seule approche pleinement satisfaisante sur le plan théorique qui répond à ce problème, le calcul statistique des fonctions de Green d'une théorie Euclidienne des champs discrétisée dans un volume fini d'espace-temps (théorie des champs sur réseau).

Dans ce mémoire seront présentés dans les 4 derniers chapitres quelques résultats, pour la plupart ayant trait à la phénoménologie du B , obtenus après simulation numérique de la QCD sur un réseau, après une introduction succincte dans le premier chapitre de la théorie effective parfaitement adaptée à l'étude des transitions molles impliquant le B , la Théorie Effective des Quarks Lourds (HQET), et la présentation dans le deuxième chapitre des outils nécessaires - mais pas suffisants - à une simulation numérique de la QCD. Il sera notamment question du calcul unquenched ($N_f = 2$) des facteurs de forme non leptoniques associés aux couplages $g_{B^*B\pi}$ et $g_{B_0^*B^1\pi}$ et qui sont des paramètres d'un Lagrangien chirale effectif pour lesquels aucune mesure expérimentale n'est disponible, simplement parce que les transitions $B^* \rightarrow B\pi$ et $B^1 \rightarrow B_0^*\pi$ sont interdites dans l'espace des phases, et pour lesquels nombre de modèles des quarks et d'utilisation des règles de somme de QCD donnent des résultats peu compatibles entre eux. Ce calcul a été mené à bien en déterminant non perturbativement certaines constantes de renormalisation, par l'utilisation d'identités de Ward chirales. On présentera donc cette méthode élégante et très couramment employée en QCD sur réseau pour renormaliser les grandeurs calculées numériquement, et qui a permis d'estimer la masse du quark étrange à partir d'une simulation avec 2 saveurs de quark de la mer dégénérées tout en réduisant certaines erreurs systématiques. Dans le cadre de HQET, les transitions semi-leptoniques $B \rightarrow D^{**}l\nu$, donnant une contrainte supplémentaire sur l'élément de la matrice CKM V_{cb} , sont paramétrées par un seul facteur de forme τ_j , où j dépend du moment orbital du D^{**} . Il existe une contradiction entre les mesures expérimentales de $B \rightarrow D^{**}l\nu$, des résultats théoriques concernant ces τ_j , issus de règles de somme de QCD et de modèles des quarks covariants, et les rapports d'embranchement observés dans les transitions $B \rightarrow D^{**}\pi$. Une première tentative du calcul dans l'approximation quenched de τ_j ($j = 1/2, 3/2$) a été faite, et on verra qu'elle semble confirmer les prédictions. Enfin rappelons que la violation de CP observée dans la transition $B_d \rightarrow J/\psi K_s$ est une mesure relativement précise de $\arg\left(\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{td}^*V_{tb}}\right)$, et qu'elle résulte de l'interférence entre les amplitudes de $B_d \rightarrow J/\psi K_s$ et du mélange $B_d - \bar{B}_d$. On s'attend également au mélange $B_s - \bar{B}_s$, et la mesure récente de son amplitude impose une contrainte supplémentaire sur V_{ts} , une fois calculé un élément de matrice hadronique approprié. Le calcul de ce dernier dans l'approximation quenched a été entrepris sur le réseau, avec la particularité que la théorie des champs utilisée est invariante sous la symétrie chirale, ce qui n'est pas trivial du tout pour une théorie discrète. De ce fait des mélanges spurieux entre opérateurs disparaissent lors de leur renormalisation, réduisant les erreurs systématiques.

Ces calculs ont été effectués sur une APEmille, une machine dédiée à la QCD sur réseau et construite dans le cadre du projet APE (Array Processor with Emulator). Ce projet, lancé peu après 1980 par des physiciens théoriciens Italiens, était destiné au développement d'une puce dédiée à la simulation numérique de la QCD et formée de processeurs mis en parallèle [11]. Il est à noter que c'est la première tentative européenne - et malheureusement la seule à ce jour - de construction d'une machine de calcul de puissance équivalente à un cluster de PCs, et à un coût moindre. La machine de dernière génération, l'APEnext, développe une capacité de calcul de 300 GFlops

efficace par "rack" de 512 processeurs. Ces performances sont très voisines de celles de son alter-ego anglo-américain, le projet QCDOC, qui a servi de source d'inspiration à IBM pour construire le supercalculateur le plus puissant du monde, BlueGene, développant une capacité de 2.5 TFlops soutenus par "rack" de 1024 processeurs.

Ce travail a donné lieu à 3 publications [50, 132, 133], une note informelle [103] et 2 proceedings [85, 148] qui sont les ébauches d'articles en préparation.

Chapitre 1

Théorie effective des quarks lourds

1.1 Introduction de la théorie

Pour le moment les équations du mouvement déduites du Lagrangien de QCD ne sont pas solubles analytiquement à longue distance, c'est à dire que les fonctions de Green de la théorie ne sont pas calculables exactement. Toutefois une échelle typique d'énergie Λ_{QCD} apparaît dynamiquement, par l'intermédiaire du groupe de renormalisation, qui permet de faire évoluer la constante de couplage α_s d'une échelle d'énergie μ_1 à une échelle μ_2 en intégrant tous les processus physiques entre ces deux échelles. Λ_{QCD} marque la limite en dessous de laquelle l'approche perturbative n'est plus appropriée pour décrire les interactions entre quarks et gluons dans les hadrons. A partir de la théorie complète on peut écrire une théorie effective si on s'intéresse à une physique contenant une autre échelle d'énergie typique μ qui est grande devant Λ_{QCD} , grâce à un développement en produits d'opérateurs, Λ_{QCD}/μ et $\alpha_s(\mu)$ étant les paramètres du développement. C'est le cas de la physique du méson B et de celle des hadrons lourd-légers en général, où l'échelle dure est la masse m_Q du quark lourd contenu dans ces hadrons. Ces systèmes physiques sont alors décrits par la théorie effective des quarks lourds (Heavy Quark Effective Theory, HQET) [12], dans laquelle on ne considère que les degrés de liberté $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}) \ll m_Q$. Formellement c'est toujours une théorie des champs au caractère confinant, mais son aspect prédictif est un peu plus étendu que celui de QCD car l'expression des quantités physiques impliquant le quark lourd est simplifiée par l'existence de symétries supplémentaires par rapport à la théorie originelle. Dans cette théorie les hadrons lourd-légers forment du point de vue de la couleur un système physique analogue à ce qu'est pour l'électromagnétisme un atome hydrogénoïde : le proton est ici remplacé par le quark lourd, les autres quarks et les gluons jouant le rôle des électrons et des photons. On décomposera l'impulsion p_Q du quark lourd $p_Q = m_Q v + k$ en une partie "classique" $m_Q v$ et une partie "fluctuations quantiques" $k \sim \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$. v est la quadrivitesse du quark lourd ($v^2 = 1$) et est une constante du mouvement pour les échanges d'impulsion $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$ entre les quarks légers et gluons et le quark lourd. v est donc un vecteur qui paramétrise l'espace de Hilbert de la théorie effective que nous voulons construire, et on définira les effectifs $h_v(x)$ et $H_v(x)$ en fonction du champ de quark lourd $Q(x)$ ($Q = b$ ou c) par :

$$Q(x) = e^{-im_Q v \cdot x} [h_v(x) + H_v(x)], \quad h_v(x) = e^{im_Q v \cdot x} \frac{1+\not{v}}{2} Q(x), \quad H_v(x) = e^{im_Q v \cdot x} \frac{1-\not{v}}{2} Q(x). \quad (1.1)$$

On a factorisé le terme d'oscillations rapides $e^{-im_Q v \cdot x}$, pour ne conserver que les degrés de liberté mous, et on projette le champ de quark lourd sur ses grandes et petites composantes. Ces dernières vérifient $\not{v}h_v = h_v$ et $\not{v}H_v = -H_v$. Les petites composantes H_v sont liées à la création d'antiquarks lourds ayant la vitesse v , et sont $\mathcal{O}(1/m_Q)$. Si on souhaite décrire la physique des antiquarks lourds par HQET, on définit Q en terme des champs \bar{h}_{-v} et \bar{H}_{-v} par

$$Q(x) = e^{im_Q v \cdot x} [\bar{h}_{-v}(x) + \bar{H}_{-v}(x)], \quad \bar{h}_{-v}(x) = e^{-im_Q v \cdot x} \frac{1-\not{v}}{2} Q(x), \quad \bar{H}_{-v}(x) = e^{-im_Q v \cdot x} \frac{1+\not{v}}{2} Q(x). \quad (1.2)$$

Il découle des projecteurs $\frac{1\pm\not{v}}{2}$ que la création d'une paire de quark-antiquark lourds $Q\bar{Q}$ n'est pas permise dans HQET : c'est un phénomène dont l'échelle caractéristique est m_Q , et a donc été intégré dans les coefficients de Wilson de l'OPE. Suivant la définition de Q choisie, la théorie effective contient soit les degrés de liberté du quark lourd, soit ceux de l'antiquark correspondant.

Le Lagrangien de HQET se déduit de celui de QCD $\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{Q}(i\not{D} - m_Q)Q$, où $D_\mu = \partial_\mu + ig_s A_\mu$ est la dérivée covariante et $X_\perp^\mu = X^\mu - x \cdot v v^\mu$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= [\bar{h}_v + \bar{H}_v][m_Q(\not{v} - 1) + i\not{D}][h_v + H_v] \\ &= [\bar{h}_v + \bar{H}_v][i\not{D}h_v + (i\not{D} - 2m_Q)H_v] \\ &= \left[\bar{h}_v \left(\frac{1+\not{v}}{2} \right) + \bar{H}_v \left(\frac{1-\not{v}}{2} \right) \right] \left[i\not{D} \left(\frac{1+\not{v}}{2} \right) h_v + (i\not{D} - 2m_Q) \left(\frac{1-\not{v}}{2} \right) H_v \right] \\ &= \bar{h}_v(iv \cdot D)h_v + \bar{H}_v i\not{D}h_v + \bar{h}_v i\not{D}H_v - \bar{H}_v(iv \cdot D + 2m_Q)H_v \\ , &= \bar{h}_v(iv \cdot D)h_v + \bar{H}_v i\not{D}_\perp h_v + \bar{h}_v i\not{D}_\perp H_v - \bar{H}_v(iv \cdot D + 2m_Q)H_v, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{HQET}} = \bar{h}_v(iv \cdot D)h_v + \mathcal{O}(1/m_Q) \equiv \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1. \quad (1.4)$$

L'ordre dominant de HQET est la limite $m_Q \rightarrow \infty$ dans laquelle on néglige \mathcal{L}_1 . On remarque qu'à cet ordre de nouvelles symétries apparaissent, puisque \mathcal{L}_0 est indépendant de la masse du quark lourd, et que l'interaction avec les champs de gluons est purement chromoélectrique : ces symétries sont donc la symétrie de saveur et la symétrie de spin. Elles sont regroupées sous le nom de "*symétrie des quarks lourds*" et forment un groupe $U(2N_h)$ où N_h est le nombre de saveurs lourdes mises en jeu. Ces invariances se traduisent physiquement par le fait que l'échange de gluons mous entre le quark lourd et le(s) quark(s) léger(s) ne permet pas de sonder la saveur ni le spin du quark lourd. Les effets de la brisure de la symétrie entre les quarks lourds Q_i et Q_j sont proportionnels à $1/m_i - 1/m_j$, ces effets se retrouvent dans la différence entre la physique du B et celle du D , tandis que les effets de la brisure de la symétrie de spin sont en $1/m_Q$, car c'est à cet ordre qu'entre en jeu l'interaction chromomagnétique, celle-ci faisant intervenir le spin du quark lourd. La symétrie des quarks lourds est de la même nature que celle présente dans l'atome hydrogénoïde, où la masse et le spin du proton découpent de la dynamique.

Les règles de Feynman se déduisent facilement de \mathcal{L}_0 :

$$\begin{aligned} \text{propagateur de quark HQET} &: \frac{i}{k \cdot v + i\epsilon} \frac{1+\not{v}}{2} \\ \text{vertex quarks gluon HQET} &: -igT_a v^\mu \end{aligned}$$

On peut trouver l'expression de \mathcal{L}_1 en remarquant que l'équation du mouvement de H_v s'écrit

$H_v = \frac{1}{iv \cdot D + 2m_Q} i \not{D}_\perp h_v$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \bar{h}_v i \not{D}_\perp \frac{1}{2m_Q + iv \cdot D} i \not{D}_\perp h_v \\ &= \bar{h}_v \frac{(i \not{D}_\perp)^2}{2m_Q} h_v + \mathcal{O}(1/m_Q^2) \\ &= -\bar{h}_v \frac{D_\perp^2}{2m_Q} h_v - g_s \bar{h}_v \frac{\sigma_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta}}{4m_Q} h_v + \mathcal{O}(1/m_Q^2), \end{aligned} \quad (1.5)$$

où $\sigma_{\alpha\beta} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$. \mathcal{L}_1 se décompose en un terme cinétique $L_{\text{kin}} = \frac{1}{2m_Q} \bar{h}_v (iD_\perp)^2 h_v$ et un terme chromomagnétique $L_{\text{mag}} = -\frac{1}{2m_Q} \bar{h}_v \frac{g_s}{2} \sigma_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} h_v$ ¹. Le premier ne brise que la symétrie de saveur tandis que le second brise également la symétrie de spin. On peut faire des prédictions sur la spectroscopie des mésons lourd-légers en tenant compte de ces brisures.

1.2 Spectroscopie des mésons lourd-légers

On s'appuiera sur la symétrie de saveur pour identifier les mésons B et D à des mésons lourd-légers H . Dans le référentiel au repos du méson le moment angulaire s'écrit $J = 1/2 + j_l$. $1/2$ représente le spin du quark lourd, et j_l est le moment total du quark léger de valence, et du nuage de gluons et de quarks : c'est un demi entier car il incorpore le spin $1/2$ du quark léger de valence. Comme le spin du quark lourd découple de la dynamique à la limite $m_Q \rightarrow \infty$, les mésons lourd-légers sont regroupés en doublets dégénérés du point de vue de la spectroscopie, comme indiqué dans la table 1.1, cette dégénérescence étant levée à l'ordre $1/m_Q$ par le terme d'interaction chromomagnétique. La masse de ces hadrons est donnée par :

$$M(J, j_l^P) = m_Q + \Lambda_{j_l^P} + \frac{f(J)}{2m_Q}. \quad (1.6)$$

$\Lambda_{j_l^P}$ et $f(J)$ s'expriment en termes d'éléments de matrice hadroniques définis dans HQET. $f(J)$ s'écrit de la manière suivante :

$$f(J) = -\lambda_1(j_l^P) + 2(J^2 - 3/4 - j_l^2)\lambda_2(j_l^P), \quad (1.7)$$

¹En fait, en incorporant les corrections radiatives, L_{mag} est proportionnel à un coefficient $a(\mu)$ dont la dépendance en μ se simplifie avec celle de l'opérateur de moment magnétique $\bar{h}_v \frac{g_s}{2} \sigma_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} h_v$. Un tel coefficient n'apparaît pas dans le terme cinétique grâce à l'invariance sous reparamétrisation $v \rightarrow v + \epsilon/m_Q$, $k \rightarrow k - \epsilon$, $h_v \rightarrow e^{i\epsilon \cdot x} \left(1 + \frac{\not{\epsilon}}{m_Q}\right) h_v$ [13] : la "quadrivitesse" invariante s'écrit $\mathcal{V} = v + \frac{iD}{m_Q}$. Le Lagrangien invariant sous cette reparamétrisation s'écrit alors $\frac{1}{2}m_Q \bar{h}_v \{(\mathcal{V}^2 - 1) - \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\beta} [\mathcal{V}^\alpha, \mathcal{V}^\beta]\} h_v$. Pour que cette forme reste inchangée après ajout des corrections quantiques, il faut que le terme dominant $\mathcal{L}_{\text{stat}}$ et le terme cinétique se renormalisent de la même façon. On peut se donner une image de cette invariance en disant que changer la quadrivitesse par un facteur $\mathcal{O}(1/m_Q)$ ne change pas la physique du quark lourd dans HQET.

j_l	J^P	excitation orbitale
$\frac{1}{2}$	0^-	H
	1^-	H^*
$\frac{1}{2}$	0^+	H_0^*
	1^+	H_1^*
$\frac{3}{2}$	1^+	H_1
	2^+	H_2^*

TAB. 1.1: Spectroscopie des mésons lourd-légers.

où

$$\begin{aligned}
2\lambda_1(j_l^P) &= -{}_v\langle H(j_l^P) | D_\perp^2 | H(j_l^P) \rangle_v, \\
16(\vec{s}_Q \cdot \vec{j}_l)\lambda_2(j_l^P) &= a(\mu)_v \langle H(j_l^P) | \sigma_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} | H(j_l^P) \rangle_v(\mu), \\
\vec{s}_Q \cdot \vec{j}_l &\equiv \frac{J^2 - (s_Q)^2 - (j_l)^2}{2}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Expérimentalement on a pu mesurer la différence de masse entre B et B^* d'un côté et D et D^* de l'autre, $m_{B^*} - m_B \sim 46$ MeV et $m_{D^*} - m_D \sim 142$ MeV : elles sont donc raisonnablement faibles comparées à m_B (5.2 GeV) et m_D (2.4 GeV), confirmant que HQET est un cadre théorique pertinent de ce point de vue. On prédit même que les différences $m_{B^*}^2 - m_B^2$ et $m_{D^*}^2 - m_D^2$ sont très voisines l'une de l'autre, ce qui est vérifié expérimentalement (0.49 GeV² et 0.55 GeV² respectivement). En outre la symétrie des quarks lourds a des conséquences phénoménologiques remarquables en ce qui concerne les facteurs de formes des transitions impliquant les mésons lourd-légers.

1.3 Facteurs de forme

Lorsqu'on s'intéresse à un processus exclusif dans lequel un méson M_1 se désintègre en un méson M_2 , on écrit les éléments de matrice $\langle M_2 | O | M_1 \rangle$ sous forme d'une combinaison linéaire $\sum_i f_i u_i$ où u_i est un quadrivecteur dépendant des quadrivecteurs contenus dans le problème et f_i est un facteur de forme, dépendant des invariants de Lorentz du problème. De manière générale on s'intéressera dans la suite à des éléments de matrice impliquant les mésons lourd-légers définis dans QCD, et on les exprimera en fonction d'éléments de matrice définis dans HQET, où les symétries qu'on a introduites plus haut simplifient les expressions et limitent le nombre d'observables à calculer. Pour cela il faut définir un état $|H\rangle_v$ de HQET. Comme on l'a déjà mentionné, un état de HQET est labellisé par sa vitesse v . La normalisation des états sera choisie de la façon suivante :

$${}_v\langle H(k') | H(k) \rangle_v = 2v^0 \delta_{vv'} (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \tag{1.9}$$

On fait alors appel à un formalisme où on représente les mésons lourd-légers par des champs $H_v(x)$ qui se transforment linéairement sous les symétries de saveurs lourdes et bilinéairement sous les transformations de Lorentz [14] :

$$H'_v(x) = D(\Lambda) H_{\Lambda^{-1}v}(\Lambda^{-1}x) D(\Lambda)^{-1}, \tag{1.10}$$

avec $v' = \Lambda v$ et $x' = \Lambda x$; on les écrit comme une combinaison linéaire des champs annihilant chacun des membres du doublet j_i^P et ayant les mêmes nombres quantiques que ceux-ci. Par exemple on a pour les doublets $\frac{1}{2}^-$, $\frac{1}{2}^+$ et $\frac{3}{2}^+$

$$\begin{aligned} H_v &= \frac{1+\not{v}}{2}(H^* - \gamma^5 H), \\ K_v &= \frac{1+\not{v}}{2}(H_1^{*\mu}\gamma^5\gamma_\mu + H_0^*), \\ F_v^\mu &= \frac{1+\not{v}}{2}\left[H_2^{*\mu\nu}\gamma_\nu - \sqrt{\frac{3}{2}}H_1^\nu\left(g_\nu^\mu - \frac{1}{3}\gamma_\nu(\gamma^\mu - v^\mu)\right)\right]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

H^* est le champ annihilant le méson vecteur, H est celui annihilant le méson pseudoscalaire, H_0^* le scalaire, H_1^* l'axial, etc. On définit également le champ conjugué \bar{H}_v :

$$\bar{H}_v = \gamma^0 H_v^\dagger \gamma^0. \quad (1.12)$$

Pour le doublet fondamental par exemple on a :

$$\bar{H}_v = (H_{v\mu}^{*\dagger}\gamma^\mu + H_v^\dagger\gamma^5)\frac{1+\not{v}}{2}. \quad (1.13)$$

En outre on a les relations de projection $\not{v}H_v = H_v$, $H_v\not{v} = -H_v$, $\not{v}K_v = K_v = K_v\not{v}$ car on suppose que la polarisation des mésons vecteur ou axial est orthogonale à la vitesse : on a donc $\not{v}P_v^* = -\not{v}P_v^*$; on a également $v_\mu D_2^{*\mu\nu} = 0$, $v_\mu D_1^\mu = 0$, $\not{v}F_v^\mu = F_v^\mu = -F_v^\mu\not{v}$ et $F_v^\mu\gamma_\mu = 0$. Enfin $\lim_{m_Q \rightarrow \infty} |H(p)\rangle = \sqrt{m_H}|H\rangle_v$, où $|H(p)\rangle$ est un état défini dans QCD.

La symétrie des quarks lourds a comme conséquence importante que les éléments de matrice ${}_{v'}\langle H_2|O|H_1\rangle_v$ ne dépendent que d'un facteur de forme $f_{j_i^P(H_2)}^{j_i^P(H_1)}(w \equiv v \cdot v')$ [15]; ces facteurs de forme sont appelés les fonctions d'Isgur-Wise. Dans la suite de cet exposé on s'intéressera plus particulièrement aux fonctions d'Isgur-Wise "à recul nul" $\tau_{\frac{1}{2}}(w=1)$ ($\tau_{\frac{3}{2}}(w=1)$) qui sont les invariants de Lorentz des transitions entre $j_i^P = \frac{1}{2}^-$ et $j_i^P = \frac{1}{2}^+$ ($j_i^P = \frac{3}{2}^+$). Un facteur de forme bien connu est celui associé à l'élément de matrice élastique $\langle \bar{B}|\bar{b}\gamma^\mu b|\bar{B}\rangle$, ξ . On connaît en particulier sa normalisation à recul nul grâce à la conservation du courant électromagnétique : $\xi(1) = 1$. En mesurant la largeur de la transition $\langle D^*|\bar{c}\Gamma b|\bar{B}\rangle$ à faible recul, on peut alors donner une estimation de l'élément de matrice V_{cb} de V_{CKM} en exprimant ${}_{v'}\langle D^*|\bar{c}_v\Gamma b_v|B\rangle_v$ en fonction de ξ et en effectuant un ajustement avec QCD, en tenant compte des corrections radiatives et des corrections en $1/m_c$, $1/m_b$ [16].

Ces facteurs de formes peuvent s'exprimer en terme de trace d'opérateurs sur les champs covariants (1.11). Ainsi pour la transition élastique ${}_{v'}\langle D|\bar{c}_v\gamma^\mu b_v|\bar{B}\rangle_v$ on a :

$$\begin{aligned} {}_{v'}\langle D|\bar{c}_v\gamma^\mu b_v|\bar{B}\rangle_v &= \xi(w) {}_{v'}\langle D|\text{Tr}\left(H_{v'}^{(c)\dagger}\gamma^5\frac{1+\not{v}'}{2}\gamma^\mu\frac{1+\not{v}}{2}\gamma^5 H_v^{(b)}\right)|\bar{B}\rangle_v \\ &= \xi(w)(v^\mu + v'^\mu). \end{aligned} \quad (1.14)$$

La trace est effectuée sur les spins, tandis que ξ est un objet non perturbatif et contient le terme de couleur, et on a la convention de signe $\bar{c}_v\Gamma b_v = -\xi(w)\text{Tr}\bar{H}_{v'}^{(c)}\Gamma H_v^{(b)}$.

Chapitre 2

QCD sur réseau

Dans ce chapitre seront abordés la plupart des aspects techniques concernant la QCD sur réseau. Rappelons que la Chromodynamique Quantique est une théorie asymptotiquement libre, et donc qu'à grande distance les champs fondamentaux de la théorie sont confinés dans les hadrons. A cette échelle on ne peut donc rien dire sur la physique hadronique en se basant uniquement sur des calculs perturbatifs en la constante de couplage forte α_s à partir des graphes de Feynman du Lagrangien de QCD¹. Toutefois on peut contourner cette difficulté en se souvenant que les fonctions de Green de la théorie $G(\phi(x_i))$ sont exprimées dans le cadre de la quantification par intégrale de chemin sous la forme $G(\phi(x_i)) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int [\mathcal{D}\phi] G(\phi(x_i)) e^{i \int d^4x \mathcal{L}}$, $\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}\phi] e^{i \int d^4x \mathcal{L}}$. En effectuant le prolongement analytique de ces fonctions de Green dans l'espace Euclidien [17], dont les coordonnées d'espace-temps s'expriment en fonction des coordonnées Minkowskiennes comme

$$t_E = it_M, \quad \vec{x}_E = \vec{x}_M, \quad (2.1)$$

on est amené à écrire les fonctions de Green Euclidiennes de la manière suivante :

$$G_E(\phi) = \frac{1}{\mathcal{Z}_E} \int [\mathcal{D}\phi] G(\phi(x_i)) e^{-S_E}, \quad \mathcal{Z}_E = \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S_E}. \quad (2.2)$$

On peut alors effectuer le prolongement de ces fonctions de Green Euclidiennes vers le Minkowskien, pourvu que l'action soit locale et vérifie ce qu'on appelle la condition de positivité sous réflexion [18] qui est une conséquence de la positivité du produit scalaire dans l'espace de Hilbert. On peut extraire de ces fonctions de Green les quantités physiques que l'on cherche, ce qui est le cas dans les processus considérés dans ce mémoire, mais cette extraction peut s'avérer parfois délicate, en particulier lorsque des phases complexes entrent en jeu de façon non triviale dans les amplitudes de transition Minkowskiennes [19], notamment lorsque les états finaux interagissent encore fortement entre eux, alors que les fonctions de Green Euclidiennes sont réelles. Dans l'Euclidien le système physique obéit alors à une loi statistique de Boltzmann, et la discrétisation de la théorie est au premier abord transparente. L'intégrale de chemin devient une intégrale sur un nombre fini de variables, à condition de se restreindre à un volume fini $V \equiv L^3 \times T$, et le calcul compliqué des fonctions de Green se meut en un calcul plus simple de valeur moyenne d'observables par une si-

¹Le mécanisme du confinement est d'ailleurs l'un des mystères les plus fascinants du monde subatomique, et n'est toujours pas élucidé.

mulation Monte-Carlo. Chaque point du réseau est séparé par une distance a (la maille du réseau), ce qui correspond à une régularisation ultraviolette non perturbative de la théorie. Les effets de bord sont supprimés en choisissant des conditions periodiques ($x + L \equiv x$). Ensuite il faut tenter de déduire la limite de ces valeurs moyennes dans le continu à volume infini ($a \rightarrow 0, V \rightarrow \infty$) en étudiant les effets systématiques de la discrétisation et les effets de volume fini. Cela s'accompagne d'un matching entre les opérateurs définis dans la théorie discrète et ceux définis dans le continu. Les paramètres introduits au cours de la simulation sont les masses nues et les couplages nus. La valeur de a se déduit à la fin du calcul en identifiant une grandeur caractéristique sans dimension mesurée sur le réseau et sa valeur expérimentale (par exemple l'énergie d'un état lié), a^d servant de facteur multiplicatif afin de rendre les deux côtés de cette identification de même dimension d .

Dans la suite on décrira comment on discrétise la Chromodynamique Quantique, et on abordera quelques aspects numériques et techniques de la QCD sur réseau.

2.1 Théories de jauge discrétisées

Remémorons-nous que la fonction de partition Euclidienne de QCD s'écrit

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}A_\mu] \mathcal{D}\psi [\mathcal{D}\bar{\psi}] e^{-S_E(A_\mu, \psi, \bar{\psi})}, \quad (2.3)$$

où A_μ sont les champs de gluons, bosons vecteurs de l'interaction forte, et $\psi, \bar{\psi}$ sont les champs de quarks, champs de matière de celle-ci. L'action Euclidienne de QCD s'écrit

$$\begin{aligned} S_E &= \int d^4x_E \frac{1}{2} \text{Tr} (F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)) + \bar{\psi}(x) (\mathcal{D} + m_0) \psi(x), \\ &\equiv S_{\text{YM}} + S_F, \end{aligned} \quad (2.4)$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig_0[A_\mu, A_\nu]$, $A_\mu = A_\mu^a \lambda^a / 2$, les λ^a étant les matrices de Gell-Mann de la représentation fondamentale de SU(3), et les matrices de Dirac Euclidiennes sont définies en fonction des matrices de Dirac Minkowskiennes par :

$$\gamma_E^0 = \gamma_M^0, \quad \gamma_E^i = -i\gamma_M^i, \quad \{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

C'est l'action d'une théorie de jauge SU(3), c'est à dire qu'elle est invariante sous la transformation de jauge *locale*

$$\psi(x) \longrightarrow V(x)\psi(x), \quad A_\mu(x) \longrightarrow V(x)A_\mu(x)V^{-1}(x) + \frac{i}{g_0} V(x)\partial_\mu V^{-1}(x), \quad V(x) \in \text{SU}(3). \quad (2.6)$$

Afin de discrétiser la théorie, on préfère briser la symétrie de Lorentz vers la symétrie d'hypercube H^4 et conserver l'invariance de jauge car elle contient toute la dynamique du problème. On a alors recours aux transporteurs parallèles $U_\mu(x, y) \equiv \mathcal{P}(e^{ig_0 \int_x^y A_\mu(z) dz})$ pour maintenir cette invariance ; ils sont écrits sous la forme d'un produit ordonné \mathcal{P} car les $A_\mu(z)$ ne commutent pas entre eux le long du chemin menant de x à y . Après transformation de jauge $U_\mu(x, y) \rightarrow V(x)U_\mu(x, y)V^{-1}(y)$. Le bilinéaire de quarks $\bar{\psi}(x)U_\mu(x, y)\psi(y)$ est donc un invariant de jauge. A noter que $U_\mu(y, x) =$

$U_\mu^\dagger(x, y)$. Sur le réseau on utilise les transporteurs parallèles d'un site vers le site voisin $U_\mu(x, x + a\hat{\mu}) \equiv U_\mu(x) = e^{iag_0 A_\mu(x+a\hat{\mu}/2)}$ et l'objet

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(x) &= (1/3) \text{Re Tr} [W_{\mu\nu}^\square(x)] \\ &= (1/3) \text{Re Tr} [U_\mu(x)U_\nu(x + a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)] \end{aligned} \quad (2.7)$$

est un invariant de jauge : on l'appelle une plaquette, car c'est la trace d'une boucle de Wilson le long d'un carré de côté a . C'est un objet particulièrement important car en effectuant un développement en a autour du centre de la plaquette $x + \frac{a\hat{\mu}+a\hat{\nu}}{2}$, en supposant que A_μ fluctue peu, et après un peu d'algèbre, on trouve que

$$P_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{3} \text{Re Tr} \left[1 - \frac{a^4}{2} g_0^2 F_{\mu\nu}^2(x) \right] + \mathcal{O}(a^6). \quad (2.8)$$

Wilson en a déduit une forme de l'action de Yang-Mills discrétisée [20] :

$$S_{\text{YM}}^{\text{W}}(U) = \beta \sum_x [\text{Re Tr} (1 - W_{\mu\nu}^\square(x))] + \mathcal{O}(a^2), \quad \beta = 6/g_0^2. \quad (2.9)$$

D'autres actions de Yang-Mills discrétisées existent, elles introduisent des termes correctifs en a^2 pour diminuer les effets $\mathcal{O}(a^2)$ de S_{YM}^{W} , par exemple en ajoutant des plaquettes 2×1 [21]. Cependant ces effets de discrétisation sont moins importants que ceux intervenant dans l'action fermionique, puisque pour cette dernière ces effets sont $\mathcal{O}(a)$ comme on le verra.

2.1.1 Actions fermioniques

La discrétisation naïve de l'action de Dirac est

$$S_F = \sum_x \left\{ \sum_\mu (1/2a) [\bar{\psi}(x) \gamma_\mu (U_\mu(x) \psi(x + a\hat{\mu}) - U_\mu^\dagger(x) \psi(x - a\hat{\mu}))] + m_0 \bar{\psi}(x) \psi(x) \right\}. \quad (2.10)$$

Le propagateur de quark libre exprimé dans l'espace des impulsions s'en déduit alors aisément :

$$S^{-1}(p) = m_0 + (i/a) \sum_\mu \gamma_\mu \sin(ap_\mu). \quad (2.11)$$

Malheureusement un problème sérieux apparaît avec cette action : bien qu'on retrouve la limite du continu $S^{-1}(p) = m_0 + (i/a) \sum_\mu \gamma_\mu ap_\mu$, cette limite n'est pas injective en p car on la retrouve pour $p' = \frac{\pi}{a} - p$. La théorie discrète présente $2^4 = 16$ pôles contre 1 seul pour la théorie du continu. Pour contourner cette difficulté, Wilson a proposé d'ajouter un terme levant cette dégénérescence en masse, qui s'écrit

$$\begin{aligned} -(r/a) \sum_x \bar{\psi}(x) \square \psi(x) &= -(r/a) \sum_x (2a)^{-1} \sum_\mu \left[\bar{\psi}(x) U_\mu(x) \psi(x + a\hat{\mu}) + \bar{\psi}(x) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \psi(x - a\hat{\mu}) \right. \\ &\quad \left. - 2\bar{\psi}(x) \psi(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le propagateur libre s'écrit alors dans l'espace des impulsions

$$S^{-1}(p) = m_0 + (i/a) \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin(ap_{\mu}) + (2r/a) \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{ap_{\mu}}{2} \right). \quad (2.13)$$

A la limite du continu $2^4 - 1$ fermions découplent de la dynamique, ayant une masse infinie, et il ne reste plus qu'un seul pôle physique. L'action de Wilson correspond à celle où $r = 1$. Mais on remarque qu'elle brise la symétrie chirale, puisqu'un terme en $\bar{\psi}\psi$ a été ajouté, ce qui peut entraîner des complications inattendues dans les procédures de renormalisation, en particulier lorsqu'on veut renormaliser des opérateurs ayant une structure chirale bien définie, comme il en sera question plus loin.

L'action de Wilson s'écrit alors (on note $a\hat{\mu} \hat{\mu}$ à partir de maintenant)

$$\begin{aligned} S_F^W &= \sum_{x,y} \bar{\psi}(x) M_{xy} \psi(y), \\ M_{xy} &= (m_0 + 4/a) \delta_{xy} - (1/2a) \sum_{\mu} [(1 + \gamma_{\mu}) U_{\mu}^{\dagger}(y) \delta_{x-\hat{\mu},y} + (1 - \gamma_{\mu}) U_{\mu}(y) \delta_{x+\hat{\mu},y}]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Il est alors commode de redéfinir les champs de fermions :

$$\psi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \psi, \quad 2\kappa = \frac{1}{4 + am_0}, \quad (2.15)$$

si bien que M s'écrit

$$M_{xy} = \delta_{xy} - \kappa \sum_{\mu} [(1 + \gamma_{\mu}) U_{\mu}^{\dagger}(y) \delta_{x-\hat{\mu},y} + (1 - \gamma_{\mu}) U_{\mu}(y) \delta_{x+\hat{\mu},y}]. \quad (2.16)$$

M vérifie la condition d'hermiticité $M_{yx}^{\dagger} = \gamma^5 M_{xy} \gamma^5$. κ s'appelle le paramètre de saut (hopping parameter) car c'est le facteur de proportionnalité d'un terme qui décrit les "sauts" d'un fermion situé sur un site x du réseau vers les sites voisins. La *valeur critique* κ_c correspond au paramètre de saut d'un fermion sans masse (limite chirale). Dans la théorie libre, $\kappa_c = 1/8$. Toutefois ce n'est plus vrai lorsqu'on considère les interactions entre fermions et bosons de jauge, car une renormalisation additive en $1/a$ doit être introduite, de sorte que $\kappa_c > 1/8$, et on écrit $am_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_c} \right)$.

Cette action introduit des effets de discrétisation au premier ordre en a . En effet, en se souvenant que nous sommes dans l'Euclidien ($p_0^E = iE$), on exprime la relation de dispersion sous la forme suivante :

$$\text{sh}^2(aE) = \sum_i \sin^2(ap_i) + \left[am_0 + 1 - \text{ch}(aE) + 2 \sum_i \sin^2 \left(\frac{ap_i}{2} \right) \right]^2. \quad (2.17)$$

Pour un fermion au repos, on a donc

$$\text{sh}(aE) = am_0 + 1 - \text{ch}(aE), \quad (2.18)$$

et la limite du continu $E = m_0$ est entachée d'une erreur $\mathcal{O}(a)$, introduite par le terme de Wilson. C'est le premier indice montrant que l'amélioration de la discrétisation de l'action du continu nécessite d'effectuer un développement "à la Symanzik" [22] $S_{\text{eff}} = S_0 + aS_1 + a^2S_2 + \dots$ et $\phi_{\text{eff}} =$

$\phi_0 + a\phi_1 + a^2\phi_2 + \dots$. Les termes qu'on ajoute à l'action et aux opérateurs sont irrélevants à la limite du continu, de manière à supprimer les artefacts réseau. Le premier terme du développement de l'action est connu, il s'agit du terme "clover" $S_F^{SW} = \frac{i}{4}c_{SW} \sum_{x,\mu,\nu} \bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu}(x)\psi(x)$, où $\hat{F}_{\mu\nu}(x)$ est une somme dans le plan (μ, ν) des 4 plaquettes de côté 1 auxquelles le site x appartient, et c_{SW} s'appelle le coefficient de Sheikholeslami-Wohlert, vaut 1 à l'ordre des arbres, et augmente lorsqu'on considère les interactions [23]. L'addition de ce terme réduit substantiellement les effets de discrétisation au premier ordre en a , mais l'action "clover" $S_F^{cl} = S_F^W + S_F^{SW}$ brise encore explicitement la symétrie chirale.

Une autre action très communément employée en QCD sur réseau est l'action de Kogut-Susskind [24], mais elle a le grave défaut de briser explicitement la symétrie de saveur. De plus la limite du continu de cette théorie n'est pas du tout assurée de manière directe car il subsiste à priori 4 "saveurs" dans cette limite au lieu d'une seule pour l'action de Wilson, et la manière de projeter les résultats sur une saveur [25] ne s'appuie pas sur les premiers principes de la théorie des champs.

2.1.2 Action chirale

Nous avons vu que les actions fermioniques envisagées jusqu'à présent engendrent des effets systématiques qui peuvent s'avérer désastreux suivant le problème considéré : l'action naïve contient des doublons, l'action de Wilson n'a pas ce défaut, mais brise explicitement la symétrie chirale, tout comme l'action "clover" ; quant à l'action de Kogut-Susskind, une controverse quant à sa formulation en terme d'une action locale agite encore à ce jour la communauté des réticolistes [26]. Ces faits ont entraîné l'écriture d'un théorème "no-go" à propos de la discrétisation des théories des champs fermioniques par Nielsen et Ninomiya qui est le suivant [27] :

l'opérateur de Dirac discrétisé ne peut pas simultanément :

- (1) être local ($|D(x, y)| < ce^{-\gamma|x-y|}$),
- (2) être inversible à $p \neq 0$ (non existence de doublons),
- (3) vérifier la limite du continu à $p \ll \pi/a$ ($D^{-1}(p) = i\gamma_\mu p_\mu + \mathcal{O}(ap^2)$),
- (4) vérifier la symétrie chirale ($\{D, \gamma^5\} = 0$).

Ginsparg et Wilson ont proposé en 1982 d'employer un opérateur de Dirac violant faiblement la condition (4), afin de conserver après régularisation sur le réseau l'anomalie chirale axiale d'Adler, Bell et Jackiw présente dans le continu, et de contourner le problème des doublons. La relation de Ginsparg-Wilson, obtenue après une transformation du type "bloc de spin" d'une action invariante sous la symétrie chirale, s'écrit [28]

$$\{\gamma^5, D\} = a2D R\gamma^5D, \tag{2.19}$$

où R est un opérateur local. Ainsi à grande distance la symétrie chirale est maintenue, puisque les effets de R sont absents. Selon ces auteurs l'opérateur D vérifiant (2.19) brisera de façon minimale la symétrie chirale. On dira alors que D est un invariant chiral dans le cadre de la théorie de jauge discrétisée sur réseau. Mais pendant 15 ans aucun opérateur de Dirac satisfaisant cette condition n'ayant été trouvé, l'article de Ginsparg et Wilson est tombé dans l'oubli... jusqu'à ce que Hasenfratz ne découvre que l'action dite "de point fixe" [29] vérifie la relation de Ginsparg-Wilson. On s'est alors aperçu que les fermions "domain-wall" [30] et "overlap" [31], dont les propriétés chi-

rales avaient été démontrées quelques années auparavant, la vérifiaient tout autant. Dans le cas des fermions "overlap", l'opérateur de Dirac est défini par

$$D = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \right), \quad X^\dagger = \gamma^5 X \gamma^5, \quad (2.20)$$

$$\{\gamma^5, D\} = \frac{1}{a} \left(2\gamma^5 + \gamma^5 \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} + \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \gamma^5 \right),$$

$$\begin{aligned} aD\gamma^5 D &= \frac{1}{a} \left(\gamma^5 + \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \gamma^5 \right) \left(1 + \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(\gamma^5 + \gamma^5 \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} + \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \gamma^5 + \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \gamma^5 \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(\gamma^5 + \gamma^5 \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} + \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \gamma^5 + \gamma^5 \frac{X^\dagger}{\sqrt{X^\dagger X}} \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \right). \end{aligned}$$

On a donc $\{\gamma^5, D\} = aD\gamma^5 D$. L'opérateur de Wilson D_W sans terme de masse m_0 vérifie $\gamma^5 D_W \gamma^5 = D_W^\dagger$, et Neuberger a proposé de construire un opérateur overlap à partir de celui-ci en posant [32]

$$D_N = \frac{\rho}{a} \left(1 + \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \right), \quad X = D_W - \frac{\rho}{a}, \quad 0 < \rho < 2. \quad (2.21)$$

D_N vérifie alors la relation $\{\gamma^5, D\} = \frac{a}{\rho} D\gamma^5 D$. L'opérateur avec la masse m_0 s'écrit

$$D_N^{(m_0)} = \left(1 - \frac{1}{2\rho} a m_0 \right) D_N + m_0. \quad (2.22)$$

Lüscher [33] a alors montré que l'action fermionique $S = \sum_x \bar{\psi}(x) D \psi(x)$, où D vérifie la relation de Ginsparg-Wilson, est invariante sous une transformation très proche de la transformation chirale habituelle :

$$\psi \rightarrow \left[1 + i\epsilon \gamma^5 \left(1 - \frac{a}{2} D \right) \right] \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \left[1 + i\epsilon \left(1 - \frac{a}{2} D \right) \gamma^5 \right] \quad (2.23)$$

pour une transformation singlet de saveur et

$$\psi \rightarrow \left[1 + i\epsilon^a T^a \gamma^5 \left(1 - \frac{a}{2} D \right) \right] \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \left[1 + i\epsilon^a \left(1 - \frac{a}{2} D \right) \gamma^5 T^a \right] \quad (2.24)$$

pour une transformation non singlet. En effet, dans le cas singlet par exemple,

$$\begin{aligned}
 S &\longrightarrow \sum_x \bar{\psi} \left[1 + i\epsilon \left(1 - \frac{a}{2} D \right) \gamma^5 \right] D \left[1 + i\epsilon \gamma^5 \left(1 - \frac{a}{2} D \right) \right] \psi, \\
 &\longrightarrow \sum_x \bar{\psi} D \psi + i\epsilon [\bar{\psi} (\gamma^5 D + D \gamma^5 - a D \gamma^5 D)] \psi, \\
 &\longrightarrow \sum_x \bar{\psi} D \psi.
 \end{aligned}$$

Cette remarque a des conséquences très importantes car elle montre que l'action de Ginsparg-Wilson permet de réduire considérablement les erreurs systématiques sur le calcul de fonctions de Green impliquant des opérateurs ayant une structure chirale bien définie, comme par exemple l'opérateur à 4 fermions "left-left" qui intervient dans l'étude des mélanges $K - \bar{K}$ et $B - \bar{B}$, *puisqu'ils ne se mélangent pas avec des opérateurs appartenant à une représentation chirale différente, de sorte qu'il n'y a pas de soustraction à effectuer dans les procédures de renormalisation*. On définit alors les projecteurs $\hat{P}_\pm = \frac{1 \pm \hat{\gamma}^5}{2}$, $\hat{\gamma}^5 = \gamma^5 (1 - aD)$ et $P_\pm = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$. On peut développer les champs de fermions en modes gauche et droite : $\psi_L = \hat{P}_- \psi$, $\psi_R = \hat{P}_+ \psi$, $\bar{\psi}_L = \bar{\psi} P_+$ et $\bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_-$. Enfin on retrouve l'anomalie axiale du continu en rappelant que la mesure $[\mathcal{D}\psi][\mathcal{D}\bar{\psi}]$ devient après transformation singlet $[\mathcal{D}\psi][\mathcal{D}\bar{\psi}]\{1 + i\epsilon a \text{Tr}(\gamma^5 D)\}$.

L'opérateur de Neuberger vérifie les 3 premières conditions du théorème de Nielsen-Ninomiya, et il a été montré qu'il supprimait les effets $\mathcal{O}(a)$, et même ceux $\mathcal{O}(am_0)$ [34]. Du fait de l'unitarité de $\frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}}$, son spectre est sur un cercle : en effet $\lambda = \left(\frac{\rho}{a} - \frac{m_0}{2}\right) (1 - e^{i\alpha}) + m_0$. On remarque qu'à la limite chirale au moins un mode 0 existe. Cela tranche avec le spectre de l'opérateur de Wilson, qui n'a pas de mode 0 - si on excepte les configurations dites "exceptionnelles" - et possède un spectre tourmenté, tandis que l'opérateur de Neuberger a des valeurs propres complexes conjuguées deux par deux. Ce type de fermions a également permis d'étudier de manière approfondie la limite classique des théories de Yang-Mills, la physique des instantons et les configurations où la topologie de charge est non triviale, qui exigent de disposer de fermions chiraux. Ajoutons pour clore cette discussion que l'inconvénient majeur des opérateurs overlap est le coût très élevé du temps de calcul qu'ils nécessitent, en particulier l'évaluation de $\frac{1}{\sqrt{X^\dagger X}}$ est délicate, nous aurons l'occasion d'y revenir.

2.1.3 Action du quark lourd

On a vu précédemment qu'une théorie discrète devait répondre à certains critères, comme des effets $\mathcal{O}(a)$ faibles. Cela revient à s'interroger sur la pertinence du cut-off ultraviolet a^{-1} par rapport à la physique à plus courte distance véhiculée par les systèmes physiques que l'on souhaite étudier. Ainsi on s'attend à des effets de discrétisation faibles si a est beaucoup plus petit que la longueur de Compton de la particule simulée. Dans le système d'unité où $c = \hbar = 1$, cela conduit à supposer $am_0 \ll 1$ où m_0 est la masse nue de la particule. Or la masse du quark b est supérieure à 4 GeV. Sachant que les effets de volume fini sont faibles si on simule un volume physique avoisinant $(2 \text{ fm})^3$, la physique du quark b serait correctement étudiée si la condition $(L/a)^4 \gg 40^4$ était satisfaite, ce qui est totalement hors de portée avec les moyens numériques dont on dispose actuellement, et même dans un futur proche. On peut contourner cette difficulté en utilisant ce qui est communé-

ment appelé *non relativistic QCD* (NRQCD) et qui a fait ses preuves dans l'étude des quarkonia. Une transformation de Foldy-Wouthuysen-Tani des spineurs de quarks se traduit par une expansion en $1/m_b$, ce qui revient sur le réseau à effectuer un OPE dont le paramètre d'expansion est $1/(am_b)$ [35]. Malheureusement il a le grave inconvénient de ne pas admettre de limite du continu. On préfère donc se tourner vers HQET, qui est un OPE en Λ_{QCD}/m_b , puisqu'on peut la discrétiser. En effet le calcul d'une quantité physique à partir d'une simulation nécessite d'effectuer un matching entre HQET sur réseau et HQET dans le continu à l'échelle $\mu = a^{-1} < m_b$, et si on le souhaite on applique les équations du groupe de renormalisation, afin de faire évoluer les opérateurs HQET de $\mu_1 = a^{-1}$ à $\mu_2 < \mu_1 \leq m_b$.

Pour décrire le quark lourd sur le réseau il faut discrétiser l'opérateur du continu $\bar{h}_v i v \cdot D h_v$, qui est le Lagrangien de HQET à la limite statique. En se plaçant dans le référentiel de la source statique de couleur, l'opérateur à discrétiser devient $\bar{h}_v i D_0 h_v$ [36]. La partie non triviale du propagateur statique se situe dans une ligne de Wilson temporelle :

$$S_H(y, x) = -i\theta(y_0 - x_0)\delta(\vec{x} - \vec{y})\frac{1 + \gamma^0}{2} \mathcal{P} \left\{ \exp \left[ig \int_{x_0}^{y_0} A^0(\vec{x}, s) ds \right] \right\}. \quad (2.25)$$

L'expression de l'action du quark statique sur le réseau fait donc seulement appel à la discrétisation de la dérivée covariante D_0 , en prenant soin d'éviter là aussi le problème des doublons en le faisant de manière asymétrique. L'action du quark statique s'écrit donc [37]

$$S_H = \sum_x \bar{h}(x) \left[h(x) - U_0^\dagger(x - \hat{0})h(x - \hat{0}) \right]. \quad (2.26)$$

Le propagateur libre s'écrit dans l'espace des impulsions

$$S_H^{-1}(p) = a^{-1}(1 - e^{-iap_4}), \quad (2.27)$$

et remarquons que l'absence de doublons se paie par la non hermiticité de l'opérateur

$$D(x, y) = \delta_{x,y} - U_0^\dagger(y)\delta_{x-\hat{0},y} :$$

on a en effet $\gamma^5 D(x, y)\gamma^5 \neq D^\dagger(y, x)$, tandis que la γ^5 -hermiticité de D est une hypothèse du théorème de Nielsen-Ninomiya.

2.2 Calcul d'une observable physique par une simulation de QCD sur réseau

On cherche à calculer la valeur moyenne d'une observable O dans le vide $\langle O \rangle$: on l'exprime en terme d'intégrale de chemin par $\frac{1}{Z} \int [\mathcal{D}\psi][\mathcal{D}\bar{\psi}][\mathcal{D}U] O e^{-S(\psi, \bar{\psi}, U)}$, où U sont les liens de jauge, $S = S_{\text{YM}} + \bar{\psi}D(U)\psi$, $D(U)$ est l'opérateur de Dirac où les dérivées covariantes sont fonctions de U et $[\mathcal{D}U]$ est la mesure de Haar du groupe de jauge. Remarquons déjà que $\int [\mathcal{D}\psi][\mathcal{D}\bar{\psi}] e^{-\bar{\psi}D(U)\psi} = \text{Det}[D(U)]$; formellement les variables de Grassmann $\psi, \bar{\psi}$ disparaissent de l'intégrale et la fonction de poids est donnée par $e^{-S_{\text{eff}}} = e^{-S_{\text{YM}} \text{Det}[D(U)]}$. Numériquement on calcule donc $\langle O \rangle$ en effec-

tuant la moyenne sur N configurations des liens de jauge U , chaque configuration ayant un poids de Boltzmann $e^{-S_{\text{eff}}}$: $\langle O \rangle_U = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O(\{U\}_i)$. En invoquant le théorème "central limit" on estime l'erreur sur $\langle O \rangle$ de l'ordre de $1/\sqrt{N}$ par rapport à $\langle O \rangle_U$.

2.2.1 Extraction des quantités physiques

Une observable très couramment calculée par une simulation numérique sur un réseau de QCD est la fonction de corrélation à 2 points

$$C_{J,\vec{q}}^{(2)}(t) = \sum_{\vec{x}} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} [\langle 0|O_J(\vec{x}, t)O_J^\dagger(0)|0 \rangle + \langle 0|O_J^\dagger(0)O_J(\vec{x}, T-t)|0 \rangle], \quad (2.28)$$

où O_J est le *champ interpolant* du méson étudié : $O_J = \bar{\psi}_1 \Gamma \psi_2$, Γ étant un opérateur dans l'espace des spineurs et des couleurs dont les nombres quantiques sont ceux du méson considéré. Par exemple un méson pseudoscalaire aura comme champ interpolant $O_P = \bar{\psi}_1 \gamma^5 \psi_2$. T est l'extension temporelle du réseau, et le deuxième membre du terme de droite de (2.28) provient des conditions aux bords périodiques. On insère la relation de fermeture

$$1 = |0\rangle\langle 0| + \sum_{i,\vec{p}} \frac{|i,\vec{p}\rangle\langle i,\vec{p}|}{2E_i(\vec{p})} + F, \quad (2.29)$$

où F représente tous les états à plusieurs particules, la normalisation utilisée étant relativiste, \vec{p} l'impulsion de la particule, $E_i(\vec{p})$ l'énergie de celle-ci, i les autres nombres quantiques qui la caractérisent, et on a :

$$\begin{aligned} C_{J,\vec{q}}^{(2)}(t) &= \sum_{\vec{x}} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \left\{ \sum_{i,\vec{p}} \frac{\langle 0|O_J(0)|i,\vec{p}\rangle\langle i,\vec{p}|O_J^\dagger(0)|0\rangle e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-E_{J,i}(\vec{p})t}}{2E_{J,i}(\vec{p})} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{J_t} \sum_{i,\vec{p}} \frac{\langle 0|O_J^\dagger(0)|i,\vec{p}\rangle\langle i,\vec{p}|O_J(0)|0\rangle e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-E_{J,i}(\vec{p})(T-t)}}{2E_{J,i}(\vec{p})} \right\} \\ &= \sum_i \left[\frac{\langle 0|O_J(0)|i,\vec{q}\rangle\langle i,\vec{q}|O_J^\dagger(0)|0\rangle e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} e^{-E_{J,i}(\vec{q})t}}{2E_{J,i}(\vec{q})} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{J_t} \frac{\langle 0|O_J^\dagger(0)|i,\vec{q}\rangle\langle i,\vec{q}|O_J(0)|0\rangle e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} e^{-E_{J,i}(\vec{q})(T-t)}}{2E_{J,i}(\vec{q})} \right] \\ &= \sum_i \frac{\mathcal{Z}_{J,i}}{2E_{J,i}(\vec{q})} \left(e^{-E_{J,i}(\vec{q})t} + (-1)^{J_t} e^{-E_{J,i}(\vec{q})(T-t)} \right). \quad (2.30) \end{aligned}$$

$(-1)^{J_t}$ est le nombre quantique de la parité de renversement par rapport au temps de O , et $\mathcal{Z}_{J,i} = |\langle 0|O_J(0)|i,\vec{q}\rangle|^2$ est le couplage entre le vide et la particule ayant les nombres quantiques (i, \vec{q}) du champ interpolant O_J . Enfin on a utilisé l'invariance par translation dans l'espace-temps $O(\vec{x}, t) = e^{-iP\cdot x} O(0) e^{iP\cdot x}$. Lorsque $t \gg a$ et $T-t \gg a$, on peut isoler l'état fondamental, dont on extrait la masse en fixant $\vec{q} = \vec{0}$ (rappelons que l'exponentielle en temps est réelle car la métrique est Euclidienne), ainsi que la constante de désintégration qui est proportionnelle à \mathcal{Z}_J . Par exemple pour un méson pseudoscalaire, où $(-1)^{J_t} = 1$, on a $\frac{C_P^{(2)}(t+1)}{C_P^{(2)}(t)} = \text{ch}(m_P) + \text{sh}(m_P) \text{th}(m_P(t - T/2))$.

Une deuxième observable est la fonction de corrélation à 3 points

$$C_{J_1, J_2, O_\Gamma, \vec{q}, \vec{q}'}^{(3)}(t_1, t_2) = \sum_{\vec{x}, \vec{y}} e^{-i(\vec{q} \cdot \vec{x} + \vec{q}' \cdot \vec{y})} \langle 0 | \mathcal{T} (O_{J_2}(\vec{y}, t_2) O_\Gamma(\vec{x}, t_1) O_{J_1}(0)) | 0 \rangle, \quad (2.31)$$

où \mathcal{T} est le produit ordonné en temps. En négligeant le terme de propagation de l'antiparticule, et en appliquant la même procédure qu'en (2.28), on a

$$C_{J_1, J_2, O_\Gamma, \vec{q}, \vec{q}'}^{(3)}(t_1, t_2) \xrightarrow{t_2 - t_1, t_1 \gg 0} \frac{\sqrt{\mathcal{Z}_{J_1}} \sqrt{\mathcal{Z}_{J_2}}}{2E_{J_1}(\vec{q}) 2E_{J_2}(\vec{q}')} e^{-E_{J_1}(\vec{q}) t_1} e^{-E_{J_2}(\vec{q}') (t_2 - t_1)} \langle J_2, \vec{q}' | O_\Gamma | J_1, \vec{q} \rangle. \quad (2.32)$$

On peut donc extraire l'élément de matrice hadronique $\langle J_2, \vec{q}' | O_\Gamma | J_1, \vec{q} \rangle$ à partir de $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$:

$$\frac{C_{J_1, J_2, \vec{q}, \vec{q}'}^{(3)}(t_1, t_2) \sqrt{\mathcal{Z}_{J_1}} \sqrt{\mathcal{Z}_{J_2}}}{C_{J_1, \vec{q}}^{(2)}(t_1) C_{J_2, \vec{q}'}^{(2)}(t_2 - t_1)} \xrightarrow{t_2 - t_1, t_1 \gg a} \langle J_2, \vec{q}' | O_\Gamma | J_1, \vec{q} \rangle. \quad (2.33)$$

2.2.2 Calcul des propagateurs

Afin de calculer les fonctions de corrélation $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ avec une configuration $\{U\}_i$ donnée, il faut calculer des propagateurs. En effet $C_{P, \vec{0}}^{(2)}(t)$ par exemple est donné par :

$$\begin{aligned} C_{P, \vec{0}}^{(2)}(t) &= \sum_{\vec{x}} \langle \bar{\psi}_1(\vec{x}, t) \gamma^5 \psi_2(\vec{x}, t) \bar{\psi}_2(0) \gamma^5 \psi_1(0) \rangle \\ &= - \sum_{\vec{x}} \text{Tr} [\gamma^5 \mathcal{S}_1(0; \vec{x}, t) \gamma^5 \mathcal{S}_2(\vec{x}, t; 0)] \\ &= - \sum_{\vec{x}} \text{Tr} [\mathcal{S}_1^\dagger(\vec{x}, t; 0) \mathcal{S}_2(\vec{x}, t; 0)]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

La trace Tr est effectuée sur les indices de spineur et de couleur. \mathcal{S}_i sont les propagateurs des quarks i . Ils obéissent à l'équation du mouvement

$$D_i(U)(x, y) \mathcal{S}_i(y, z) = \delta(x, z) \quad (2.35)$$

ou avec une source quelconque

$$D_i(U)(x, y) \mathcal{S}_i(y, z) = R(x, z). \quad (2.36)$$

Numériquement on "inverse" les opérateurs de Dirac D_i , et on effectue les traces appropriées. Habituellement on utilise l'invariance par translation du réseau pour fixer z à 0, mais on verra qu'il existe des astuces pour s'en affranchir et profiter ainsi de toute l'information dont on dispose sur une configuration.

L'inversion directe de l'opérateur de Dirac est impossible, puisque c'est une matrice à $12V \times 12V$ entrées, où V est le nombre de sites du réseau ($> 10^5$). Cependant la présence de nombreux

éléments nuls - dus aux couplages entre sites voisins seulement - fait que ce problème est entré dans la catégorie des "sparse linear systems", dont de nombreuses méthodes de résolution ont été proposées, à la fois pour assurer la convergence des algorithmes de recherche de la solution, mais aussi pour l'accélérer [38].

On a vu dans la section précédente que l'opérateur de Dirac-Wilson, ainsi que l'opérateur clover, s'écrit $D = 1 - \kappa M$. L'approximation de Jacobi consiste à effectuer le développement de D^{-1} en série géométrique : on a donc $S = \sum_{n=1}^N (\kappa M)^n R$, où N devrait être choisi de manière à ce que l'erreur par rapport à la solution réelle soit inférieure à un petit paramètre ϵ . La convergence est garantie si $\kappa \lambda_{\max} < 1$, où λ_{\max} est la valeur propre maximale de M , ce qui n'est pas assuré si la configuration $\{U\}_i$ est exceptionnelle ou si $\kappa \sim \kappa_c$. Une version voisine est l'itération de Gauss-Seidel, où on décompose M en partie triangulaire supérieure M_u et triangulaire inférieure stricte M_l et où la relation de récurrence s'écrit $S_{n+1} = (1 - \mu)S_n + \mu[R + \kappa(M_l S_{n+1} + M_u S_n)]$. μ est un paramètre de relaxation qui peut aider à l'accélération de la convergence.

D'autres méthodes très couramment utilisées pour résoudre le système $DS = R$ sont des méthodes dites de projection : on choisit une solution test S_0 , on obtient un résidu $r_0 \equiv DS_0 - R$. Ensuite on contraint les résidus r_k , associés aux solutions $S_k \in S_0 + \mathcal{K}$ où \mathcal{K} est un sous-espace de \mathcal{C}^n , de plus en plus fortement en imposant leur orthogonalité par rapport à un sous-espace \mathcal{L} de \mathcal{C}^n (conditions de Petrov-Galerkin). Le critère d'arrêt est fixé par rapport à la norme de ces résidus : $\|r_k\|^2 < \epsilon$; dans les simulations ϵ vaut généralement 10^{-16} . Un algorithme populaire entrant dans cette catégorie est le "Minimum Residual", où

$$\mathcal{K} = \text{span}(r_n), \quad \mathcal{L} = \text{span}(D r_n),$$

$$r_n = R - DS_n, \quad \alpha_{n+1} = (Dr_n, r_n)/(Dr_n, Dr_n), \quad S_{n+1} = S_n + \alpha_{n+1} r_n. \quad (2.37)$$

Dans (2.37), (a, b) désigne le produit scalaire. Un autre algorithme très connu également est l'algorithme du Gradient Conjugué, dont l'une des particularités est que $(r_i, r_j) = 0, i \neq j$: on contraint de plus en plus la solution approchée. La relation de récurrence sur S est dans ce cas $S_{n+1} = S_n + \alpha_n p_n$, où $(D p_n, p_{n-1}) = 0$ et $p_{n+1} = r_n + \beta_n p_n$. Enfin si D n'est pas défini positif, l'algorithme utilisé est le Gradient Bi-Conjugué, c'est à dire que deux systèmes itératifs (r_i, p_i) et (r_i^*, p_i^*) sont à résoudre tels que $(r_i, r_j^*) = 0, (D p_i, p_j^*) = 0, i \neq j$, et $S_{n+1} = S_n + \alpha_n p_n, p_{i+1} = r_i + \beta_i p_i, p_{i+1}^* = r_i^* + \beta_i p_i^*$.

Etant donnée la taille du système linéaire à résoudre, des méthodes de "préconditionnement" sont très souvent utilisées afin d'accélérer encore la convergence des inversions. Ces méthodes consistent à écrire à partir de l'équation (2.36) une équation auxiliaire soluble plus rapidement pour le calculateur. Ce preconditionnement dépend alors de la structure de ce dernier. On donnera juste un exemple de preconditionnement qui a été employé dans les simulations réalisées à l'occasion de ce travail : le preconditionnement "ILU-SSOR", version particulière du preconditionnement "ILU". On définit deux opérateurs auxiliaires L et U (à ne pas confondre avec les liens de jauge !) tels que :

$$DS = R \iff [L^{-1}DU^{-1}]US = L^{-1}R.$$

On rappelle que l'opérateur de Dirac clover s'écrit $D = 1 + l + u + \mathcal{C}$ où \mathcal{C} est le terme de clover et l ,

u , sont respectivement des matrices triangulaires inférieure et supérieure stricte dans l'espace des sites du réseau, cf (2.16). On choisit alors $L = 1 + cl$, $U = 1 + cu$, de sorte que le système à résoudre est

$$L^{-1} \left[1 + \frac{1}{c} (L + U - 2) + \mathcal{C} \right] U^{-1} U = L^{-1} R \iff \frac{1}{c} [L^{-1} (1 + (c - 2 + \mathcal{C})U^{-1}) + U^{-1}] U S = L^{-1} R.$$

Comme L et U sont triangulaires, l'algorithme de Gauss-Seidel peut s'appliquer sous la version "Symmetric Successive Over Relaxation" (SSOR). c est un coefficient de préconditionnement, et sa valeur est trouvée empiriquement suivant la vitesse de résolution du problème.

Le calcul du propagateur overlap est beaucoup plus délicat que les propagateurs de Wilson ou clover, et nettement plus coûteux. En effet, on rappelle que l'opérateur de Dirac overlap contient un terme $\frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \sim \text{sign}(X)$ qui n'est pas simple du tout à évaluer. On applique la décomposition spectrale de l'opérateur $X^\dagger X$, on calcule ses N plus petites valeurs propres à l'aide de la procédure d'Arnoldi - par la minimisation de la fonctionnelle de Ritz $\frac{\langle v | X^\dagger X | v \rangle}{\langle v | v \rangle}$ suivant un algorithme bien établi [39] - et la valeur propre maximale λ_{\max} , puis on effectue l'approximation de $\frac{1}{\sqrt{X^\dagger X}}$ en polynômes de Chebyshev dans l'intervalle $\left[\frac{\lambda_N}{\lambda_{\max}}, 1 \right]$. On résout finalement l'équation $D_N^{m_0} \mathcal{S} = R$ où $D_N^{m_0} = [\rho + (am_0/2)] \left[1 + \frac{\rho - (am_0/2)}{\rho + (am_0/2)} \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \right]$ par l'algorithme du Gradient Bi-Conjugué. Rappelons que la procédure d'Arnoldi est applicable car le spectre de $X^\dagger X$ est réel et borné inférieurement. Enfin l'approximation de $\frac{1}{\sqrt{X^\dagger X}}$ en polynômes de Chebyshev a été préférée à celle en polynômes de Zolotarev car celle-ci s'avère plus coûteuse en temps de calcul ($\sim 20\%$ [40]).

Il a été affirmé auparavant que dans l'égalité $D(x, y)\mathcal{S}(y, z) = \delta(x, z)$, z est généralement fixé à 0. On obtient alors ce qu'on appelle un propagateur "point-to-all". Si l'on souhaite calculer un propagateur "all-to-all", on ne peut effectuer l'inversion précédente $\forall z$: c'est irréalisable dans un temps raisonnable. On contourne cette difficulté en ayant une fois encore recours à la décomposition spectrale de D , ou plutôt de $Q = \gamma^5 D$, de manière à travailler avec un opérateur hermitien (on rappelle que l'opérateur clover vérifie $D^\dagger(x, y) = \gamma^5 D(y, x)\gamma^5$) : $Q(x, y) = \sum_i \lambda_i^N |v_i(x)\rangle \langle v_i(y)|$. On organise cette décomposition en deux parties [41, 42] :

$$Q(x, y) = \sum_{i=1}^{N_{ev}} \lambda_i |v_i(x)\rangle \langle v_i(y)| + \sum_{i=N_{ev}+1}^N \lambda_i |v_i(x)\rangle \langle v_i(y)|.$$

On écrit alors $Q^{-1} = \overline{Q_0} + \overline{Q_1}$, où $\overline{Q_0} = \sum_{i=1}^{N_{ev}} \frac{1}{\lambda_i} |v_i\rangle \langle v_i|$, et $\overline{Q_1} = \mathcal{P}_1 Q^{-1}$, $\mathcal{P}_1 = 1 - \sum_{i=1}^{N_{ev}} |v_i\rangle \langle v_i|$. L'idée est de calculer exactement les N_{ev} vecteurs propres ayant les valeurs propres les plus petites, et de résoudre $D\psi^r = \eta^r$. η^r est un bruit stochastique qui vérifie

$$\langle\langle \eta(x)\eta^\dagger(y) \rangle\rangle \equiv (1/N_r) \sum_{r=1}^{N_r} |\eta^r(x)\rangle \langle \eta^r(y)| = \delta(x, y) \quad (2.38)$$

et $\langle v_i | \eta^r \rangle = 0$. Le propagateur "stochastique" est donné par $\mathcal{S}(x, y) = \langle\langle \psi(x)\eta^\dagger(y) \rangle\rangle$. A noter que la moyenne stochastique «...» n'a rien à voir avec la moyenne statistique $\langle \dots \rangle$ sur les configurations de jauge, elle est calculée avec une configuration donnée. Afin de réduire l'erreur introduite dans le calcul du propagateur à l'aide d'une équation stochastique, on "dilue" le bruit η^r [43] : $\eta^r = \sum_{j=1}^{N_d} \eta_j^r$ où

$\{\eta_j^r(x) = \eta^r(x), x \in \Omega_j; \eta_j(x) = 0, x \notin \Omega_j\}$. Un exemple important est la dilution temporelle, où les η_j^r sont situés sur des tranches de temps. Cette procédure réduit la variance stochastique car dans la moyenne $\langle\langle \psi(x)\eta^\dagger(y) \rangle\rangle$ de nombreux termes sont nuls en moyenne mais contribuent de façon non négligeables aux fluctuations : la "dilution" supprime arbitrairement ces fluctuations.

Les propagateurs "all-to-all" sont très utiles car ils permettent de calculer des quantités physiques où la contribution des diagrammes "en œil" est importante, comme l'étude de la règle $\Delta I = 1/2$ ou ce qui concerne la physique des résonances singlets de saveur. Vu qu'on dispose de toute l'information disponible de chaque configuration et qu'on profite pleinement de l'invariance par translation, on peut effectuer les moyennes statistiques sur un ensemble de configurations moins grand. Malheureusement leur implémentation n'a débuté que récemment sur les machines APE, et ils n'ont pas pu être exploités pendant la durée de ce travail.

2.2.3 Construction de l'ensemble statistique

Le calcul des fonctions de corrélation se fait en moyennant sur N configurations de jauge $\{U\}$, chaque configuration ayant le poids statistique à l'équilibre $W(\{U\}) \equiv e^{-S_{\text{eff}}} = e^{-S_{\text{YM}} \text{Det}[D(U)]}$. La configuration $\{U'\}$ s'obtient en appliquant une procédure de modification standard telle que l'algorithme de Metropolis. La transition $\{U\} \rightarrow \{U'\}$ se fait avec une probabilité de transition $P(\{U\} \rightarrow \{U'\})$ vérifiant la condition de bilan détaillé $W(\{U\})P(\{U\} \rightarrow \{U'\}) = W(\{U'\})P(\{U'\} \rightarrow \{U\})$, garantissant ainsi l'évolution de l'ensemble statistique vers l'équilibre thermique. Les taux de transition doivent également vérifier la condition d'ergodicité forte $P(\{U\} \rightarrow \{U'\}) > 0$, c'est à dire que n'importe quelle configuration peut être obtenue à partir de n'importe quelle autre en un nombre fini d'étapes. Dans les simulations, P est définie par $P = P_A P_C$, où P_C est une probabilité que l'on se donne et P_A est une probabilité d'acceptance qui s'écrit

$$P_A = \min \left(1, \frac{W(\{U\})P_C(\{U\} \rightarrow \{U'\})}{W(\{U'\})P_C(\{U'\} \rightarrow \{U\})} \right). \quad (2.39)$$

L'algorithme de Metropolis est un cas particulier où P_C est uniforme. On pratique ce qu'on appelle communément l'*overrelaxation* de façon à s'assurer que l'ensemble de l'espace des phases est exploré en un nombre limité de tirages, ce qui n'est pas forcément le cas, notamment lorsqu'on s'approche de la limite du continu où le temps d'autocorrélation $\tau_{\text{min}} \propto \xi^z$ diverge, ξ étant la longueur de corrélation. La modification s'effectue en fixant $U'_l = V_0 U_l V_0^{-1}$, avec $V_0 \in \text{SU}(3)$ donné.

L'*approximation quenched* est l'approximation dans laquelle on fixe $\text{Det}[D(U)]$ à une constante : on décrit les effets de la quarks de la mer par un champ moyen. Cette approximation néglige la polarisation du vide de QCD par les boucles de quarks. La théorie n'est alors plus unitaire, et cela pose parfois des problèmes sérieux, en particulier quand la contribution des diagrammes en œil aux quantités physiques étudiées est prépondérante. Cette approximation génère une erreur systématique avoisinant les 10%, mais cette dernière peut s'avérer plus importante encore, en particulier lorsqu'on veut effectuer des extrapolations chirales, puisque les logarithmes chiraux divergent dans cette théorie de champ moyen. L'avantage en coût de calcul de cette approximation est évident, puisque l'action de jauge est purement locale, et la modification de la configuration se fait aisément, en appliquant successivement pour tous les sites du réseau l'algorithme d'updating à partir

des plaquettes.

Les simulations avec *quarks dynamiques* ont pris leur essor à partir de 1990. On a considéré immédiatement le cas avec 2 saveurs dégénérées de quarks de la mer, correspondant à la symétrie chirale $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. En effet, $\text{Det}[D(U)]$ s'écrit alors $\text{Det}[D(U)] = \text{Det}[D'^{\dagger}(U)D'(U)]$. On exprime ce déterminant en utilisant des variables bosoniques auxiliaires χ, χ^* , et on a :

$$\int [\mathcal{D}U] \text{Det}[D(U)] e^{-S_{\text{YM}}} = \int [\mathcal{D}U][\mathcal{D}\chi][\mathcal{D}\chi^*] e^{-S_{\text{eff}}} \quad S_{\text{eff}} = S_{\text{YM}} + \sum_{xy} \chi^*(x) D'^{-1} (D'^{\dagger})^{-1} \chi(y). \quad (2.40)$$

A partir de maintenant, on omettra les ' et on identifiera D' à D . Afin que chaque configuration soit suffisamment décorrélée, il faudrait faire un updating très important si on suit l'approche requise dans l'approximation quenched. Mais cela impliquerait à chaque fois le calcul du déterminant $\text{Det}[D(U)]$, ce qui est irréaliste. Pour explorer un volume d'espace des phases plus vaste, tout en ayant une probabilité d'acceptance non négligeable, une méthode très populaire est employée, *Hybrid Monte Carlo* (HMC) [44]. On applique la dynamique moléculaire, comme pour l'équation de Langevin, avec l'introduction d'un temps fictif τ et la définition d'un hamiltonien $H(\Pi, U, \chi, \chi^*)$:

$$H(\Pi, U, \chi, \chi^*) = \frac{\Pi^2}{2} + S_{\text{eff}}(U, \chi, \chi^*). \quad (2.41)$$

Les champs Π sont les "moments conjugués" des U . Le long d'une "trajectoire" la variation de cet hamiltonien est peu importante, et on s'attend donc à avoir un faible taux de rejet de la modification de la configuration. On résout les équations du mouvement :

$$\dot{U} = \frac{\delta H}{\delta \Pi} = \Pi, \quad \dot{\Pi} = -\frac{\delta H}{\delta U} = -\frac{\delta S_{\text{YM}}}{\delta U} - \chi^* \left[(D^{\dagger} D)^{-1} \frac{\delta D^{\dagger}}{\delta U} (D^{\dagger})^{-1} + D^{-1} \frac{\delta D}{\delta U} (D^{\dagger} D)^{-1} \right] \chi. \quad (2.42)$$

χ, χ^* sont fixés pendant les étapes de la dynamique moléculaire. Les conditions initiales sont telles que $\Pi(0)$ est choisi aléatoirement avec une loi de probabilité gaussienne $P_G(\Pi) \propto e^{-\Pi^2/2}$ et $\chi = D\eta$, où η est là encore un bruit gaussien. La trajectoire T_H est discrétisée, et le point final de celle-ci est en $\{\Pi', U'\} = T_H(\{\Pi, U\})$. La dynamique moléculaire étant un processus déterministe, la probabilité P_C est donnée par $P_C(\{\Pi', U'\}) = \delta(\{\Pi', U'\} - T_H(\{\Pi, U\}))$. Une condition de réversibilité sur la trajectoire $\{\Pi, U\} \rightarrow \{\Pi', U'\}$ doit être assurée, quelle que soit la dynamique moléculaire utilisée, ce qui se traduit par :

$$P_C(\{\Pi, U\} \rightarrow \{\Pi', U'\}) = P_C(\{-\Pi', U'\} \rightarrow \{-\Pi, U\}), \quad (2.43)$$

ce qui est le cas avec l'hamiltonien choisi ici. La probabilité d'acceptance est comme pour l'algorithme de Metropolis

$$P_A(\{\Pi, U\} \rightarrow \{\Pi', U'\}) = \min(1, e^{\delta H}) \quad \delta H = H(\Pi', U') - H(\Pi, U). \quad (2.44)$$

La probabilité de transition $P(\{U\} \rightarrow \{U'\})$ s'écrit :

$$P(\{U\} \rightarrow \{U'\}) = \int [d\Pi d\Pi'] P_A(\{\Pi, U\} \rightarrow \{\Pi', U'\}) P_C(\{\Pi, U\} \rightarrow \{\Pi', U'\}) P_G(\Pi). \quad (2.45)$$

On peut montrer que la distribution $W = e^{-S_{\text{eff}}(U)}$ est le point fixe de ce processus d'updating car c'est avec cette distribution que la condition de bilan détaillé est satisfaite, en s'appuyant notamment sur la condition de réversibilité P_C . La discrétisation de la trajectoire se fait de la manière suivante : la trajectoire de longueur totale $n\Delta\tau$ est découpée en intervalles $[\tau_j, \tau_j + \Delta\tau]$, $j = 0, n-1$. On effectue alors une intégration "leapfrog". Les moments conjugués Π sont définis aux points $\tau = (j + \frac{1}{2}) \Delta\tau$, $j = 0, n-1$, et les U sont définis aux points $(j+1)\Delta\tau$. Le long de la trajectoire $\{\Pi, U\} \rightarrow \{\Pi', U'\}$, $\{\Pi, U\} \equiv \{\Pi(0), U(0)\}$ et $\{\Pi', U'\} \equiv \{\Pi(n\Delta\tau), U(n\Delta\tau)\}$. La première étape "demi-leapfrog" est :

$$\Pi\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) = \Pi(0) - \frac{\delta S_{\text{eff}}[U(0)]}{\delta U} \frac{\Delta\tau}{2};$$

les étapes "leapfrog" sont :

$$\begin{aligned} U[(j+1)\Delta\tau] &= U(j\Delta\tau) + \Pi\left[\left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta\tau\right], \quad j = 0, n-1, \\ \Pi\left[\left(j+1 + \frac{1}{2}\right) \Delta\tau\right] &= \Pi\left[\left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta\tau\right] - \frac{\delta S_{\text{eff}}[U(j\Delta\tau)]}{\delta U} \Delta\tau, \quad j = 0, n-2; \end{aligned}$$

enfin une seconde étape "demi-leapfrog" est nécessaire à la fin de la trajectoire :

$$\Pi(n\Delta\tau) = \Pi\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \Delta\tau\right] - \frac{\delta S_{\text{eff}}[U(n\Delta\tau)]}{\delta U} \frac{\Delta\tau}{2}.$$

La question qui se pose avant de fabriquer un ensemble statistique est de savoir quel $\Delta\tau$ choisir afin d'avoir une probabilité d'acceptance suffisante. On peut montrer qu'en valeur moyenne, par rapport à l'espace des phases $\{U, \Pi\}$, $\langle \delta H \rangle \propto \Omega \Delta\tau^4$, où Ω est le volume du réseau [45]. Si on souhaite maintenir une probabilité d'acceptance constante lorsqu'on augmente le volume, il faut diminuer $\Delta\tau$ suivant la loi $\Omega^{1/4}$. Si une trajectoire a été acceptée, on prend le point final obtenu comme point de départ d'une nouvelle trajectoire, et on applique ce processus jusqu'à ce que le temps d'autocorrélation soit dépassé. Notons enfin que les préconditionnements et les algorithmes d'inversion des opérateurs de Dirac les plus ingénieux possibles sont très utiles car de nombreuses inversions sont nécessaires dans le calcul des moments conjugués Π le long de la trajectoire.

2.2.4 Evaluation des erreurs statistiques

On définit la valeur moyenne d'une quantité "primaire" A (par exemple une fonction de corrélation à 2 points) par $\bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i$. La meilleure estimation de la moyenne d'une quantité "secondaire" $y(A)$ (par exemple la masse d'un état lié de quarks) n'est pas $\overline{y(\bar{A})}$ mais plutôt $y(\bar{A})$. On s'affranchit ainsi des fluctuations statistiques trop importantes. La variance sur y s'obtient alors en effectuant une analyse dite "jackknife", qui est le moyen le plus adéquat de tenir compte des autocorrélations existant dans un ensemble fini de configurations [46] : à partir des N mesures A_i ,

on construit un ensemble de N_j valeurs $A_{J(j)} = \frac{1}{N-n_j} \sum_{r \neq i_{J(j)}}^N A_r$; n_j termes $A_{i_{J(j)}}$ sont exclus de la somme, et tous les ensembles $\{A_{i_{J(j)}}\}$ sont disjoints. La moyenne et la variance "jackknife" de y s'écrivent

$$\overline{y(J)} = \frac{1}{N_j} \sum_j^{N_j} y_{J(j)}, \quad \sigma_{y(J)}^2 = \frac{N-n_j}{N_j} \sum_j^{N_j} (y_{J(j)} - \overline{y(J)})^2. \quad (2.46)$$

La variance de la quantité primaire est donnée par

$$\sigma_{A(J)}^2 = \frac{1}{N_j(N-n_j)} \sum_j^{N_j} \left(A_{\{j\}} - \frac{N}{N_j} \bar{A} \right)^2, \quad (2.47)$$

où $A_{\{j\}}$ est la somme des n_j termes $A_{i_{J(j)}}$. Quand $n_j = 1$, on a la relation $\sigma_{A(J)}^2 = \sigma_A^2 \equiv \frac{1}{N(N-1)} \sum_i^N (A_i - \bar{A})^2$. Cette relation est également vérifiée à quelques millièmes près si les configurations sont suffisamment décorréelées.

2.2.5 Matching vers le continu

Rappelons les points essentiels d'une simulation de QCD sur réseau. On génère un ensemble statistique de configurations de liens de jauge $\{U_\mu(x)\}$: les procédures d'updating sont telles que les configurations sont distribuées selon la loi $e^{-S_{\text{eff}}} = \text{Det}[D(U)]e^{-S_{\text{YM}}}$. S_{YM} est proportionnelle à la "température" $\beta \equiv \frac{6}{g_0^2}$, où g_0 est la constante de couplage fort nue. On peut extraire la masse des états liés de quarks ou des éléments de matrice hadroniques en calculant la moyenne des fonctions de corrélation à 2 points $C^{(2)}(t)$ et à 3 points $C^{(3)}(t_1, t_2)$ calculée sur cet ensemble statistique. Tous les nombres obtenus sont sans dimension. Pour faire le lien avec les grandeurs physiques de dimension canonique d recherchées il faut multiplier ceux-ci par a^d . Par exemple on a la masse d'un hadron qui est donnée par $M_{\text{phys}} = a^{-1} M_{\text{latt}}$, où M_{latt} a été extraite de l'analyse d'une fonction de corrélation à 2 points. La détermination de la maille a devient alors cruciale. Il a été mentionné auparavant que a^{-1} représente le cut-off ultraviolet de la régularisation non perturbative de la théorie. Lorsqu'on fait tendre ce cut-off vers l'infini, c'est à dire lorsqu'on tend vers la limite du continu, la propriété de liberté asymptotique implique que le couplage nu $g_0^2 = \frac{6}{\beta}$ tende vers 0. On constate donc que choisir un β élevé revient à s'approcher de la limite du continu. Encore faut-il savoir comment varie $g_0(a)$ et ce que signifie "limite du continu" pour les quantités physiques calculées.

Scaling

On dit qu'une masse M_{phys} a une limite du continu définie si $M_{\text{phys}} = a^{-1} M_{\text{latt}}(g_0(a)) \equiv a^{-1} f(g_0(a))$ est fixe lorsqu'on fait tendre a vers 0. Cela signifie que la longueur de corrélation $\xi = \frac{1}{a M_{\text{phys}}}$ diverge, et donc que le couplage $g_0(a)$ se rapproche du point critique $g_c = 0$: on a affaire à une transition de phase au moins du deuxième ordre. Le flot de g_0 dans l'espace des couplages peut être décrit par le groupe de renormalisation et on peut écrire une équation de Callan-Symanzik pour $M_{\text{phys}} \equiv m$:

$$a \frac{dm}{da} = 0 = -a^{-1} \left(f(g_0) - a \frac{dg_0}{da} \frac{\partial f}{\partial g_0} \right), \quad (2.48)$$

$$\beta(g_0) \frac{\partial f}{\partial g_0} - f(g_0) = 0, \quad \beta(g_0) = -a \frac{dg_0}{da}. \quad (2.49)$$

A l'ordre de 2 boucles, $\beta(g_0)$ est connue et on a $\beta(g_0) = -\beta_0 \frac{g_0^3}{4\pi^2} - \beta_1 \frac{g_0^5}{16\pi^4} + \mathcal{O}(g_0^7)$, $\beta_0 = \frac{1}{4} (11 - \frac{2}{3}n_f)$ et $\beta_1 = \frac{1}{16} (102 - \frac{38}{3}n_f)$ sont indépendants du schéma de renormalisation suivi. $f(g_0)$ a alors pour solution

$$f(g_0) = C \exp \left(- \int^{g_0(a)} \frac{dg'_0}{\beta(g'_0)} \right). \quad (2.50)$$

On définit ensuite $\Lambda_{\text{latt}} = \frac{1}{a} \exp \left(- \int^{g_0(a)} \frac{dg'_0}{\beta(g'_0)} \right)$ et on a $M_{\text{phys}} = \Lambda_{\text{latt}} C$. Cette relation est valable seulement dans la région dite de "scaling", et le rapport de deux quantités physiques m_1 et m_2 sera dans cette région $\frac{m_1}{m_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Il est très important d'estimer cette région de scaling, et il a été évalué numériquement qu'elle correspond à des $\beta \equiv \frac{6}{g_0^2} > 5.9$ dans l'approximation quenched pour le potentiel statique [47]. La relation $dm/da = 0$ n'est vraie qu'à des termes $\mathcal{O}(a^n)$ près : l'amélioration des actions jusqu'à l'ordre a^n permet d'étendre la région de scaling puisque $dm/da = 0$ à l'ordre a^{n+1} . Ainsi elle est étendue jusqu'à $\beta = 5.7$ avec l'action clover, toujours dans l'approximation quenched. En terme de maille elle correspond grosso modo à $a^{-1} > 1.5$ GeV.

Détermination de la maille a

On détermine a^{-1} en mesurant une quantité physique caractéristique comme la constante de désintégration du pion f_π , la masse du proton, la valeur du paramètre de Sommer r_0 [48] ou encore la méthode dite des "lattice physical planes" [49]. Les deux dernières approches ont été utilisées pour déterminer la maille dans la simulation unquenched réalisée durant ce travail avec $N_f = 2$ saveurs de quark de la mer dégénérées [50], l'action fermionique étant l'action de Wilson. Les paramètres de cette simulation sont donnés dans la table 2.1.

	$\beta = 5.8$				$\beta = 5.6$		
κ_s	0.1535	0.1538	0.1540	0.1541	0.1560	0.1575	0.1580
$L^3 \times T$	$24^3 \times 48$				$16^3 \times 48$		
minutes/traj.	10	12	16	21	5.3	13	28
T_{MC}	2250	2250	2250	2250	2250	2250	2250
N_{conf}	50	50	50	50	50	50	50
$\langle P \rangle$	0.59268(3)	0.59312(2)	0.59336(3)	0.59341(3)	0.56990(6)	0.57248(6)	0.57261(6)
$L^3 \times T$	$16^3 \times 48$						
minutes/traj.	3.3	4.4	4.4	5.6			
T_{MC}	4500	4500	4500	4500			
N_{conf}	100	100	100	100			
$\langle P \rangle$	0.59283(3)	0.59314(3)	0.59340(3)	0.59345(3)			

TAB. 2.1: Paramètres de la simulation unquenched ; à partir des T_{MC} trajectoires calculées, N_{conf} configurations ont été sélectionnées pour analyse : 1 configuration sur 45 a été retenue, de manière à supprimer les effets d'autocorrélation ; $\langle P \rangle$ est la valeur moyenne de la plaquette et min/traj est le temps mis par l'APÉmille (128 GFlops) pour calculer une trajectoire. Le critère d'arrêt d'inversion de l'opérateur de Dirac est $\|DS - R\| < 10^{-15}$.

1 trajectoire sur 45 a été retenue pour effectuer les mesures, après l'étude du temps d'autocorréla-

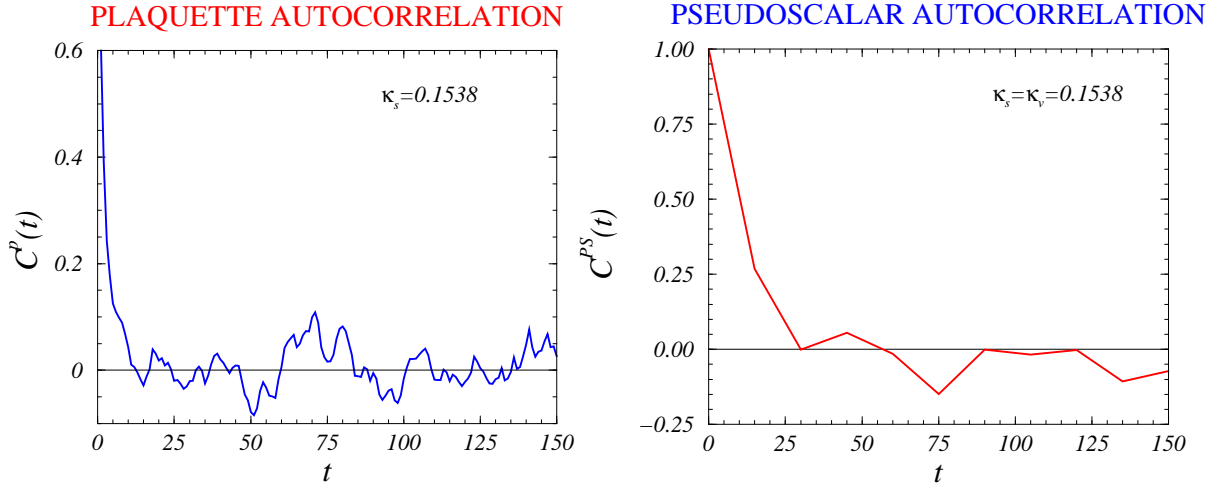


FIG. 2.1: Autocorrelations de la plaquette $C^p(t)$ (gauche), et de la fonction de corrélation pseudoscalaire $C^{PS}(t)$ (droite), en fonction du nombre de trajectoires t utilisées pour séparer 2 configurations consécutives. Pour $C^{PS}(t)$ le temps de séparation entre les sources a été fixé à $T = 14a$ et les fluctuations autour de 0 débutent à $t \sim 30$, indiquant que les configurations séparées par moins de 30 trajectoires sont corrélées. Les graphes ci-dessus ont été obtenus avec la simulation à $\beta = 5.8$ ($V = 24^3 \times 48$, et $\kappa_s = 0.1538$).

tion. Le taux d'autocorrélation $C^A(t)$ associé à une observable A a comme expression :

$$C^A(t) = \frac{\frac{1}{(T_{MC} - t)} \sum_{s=1}^{T_{MC}-t} (A_s - \langle A \rangle)(A_{s+t} - \langle A \rangle)}{\frac{1}{T_{MC}} \sum_{s=1}^{T_{MC}} (A_s - \langle A \rangle)^2}, \quad (2.51)$$

où $\langle A \rangle$ est la valeur moyenne de A calculée sur le nombre total des trajectoires T_{MC} et A_s est la valeur mesurée le long de la trajectoire s . L'autocorrélation de la plaquette et de la fonction à 2 points pseudoscalaire sont représentées sur la figure 2.1. On constate que la plaquette a un temps d'autocorrélation plus court que la fonction de corrélation pseudoscalaire. *La plaquette n'est donc pas forcément l'observable la plus adéquate pour définir le temps d'autocorrélation des trajectoires.* A noter que le taux de 1 trajectoire sur 45 est suffisant pour que la fonction de corrélation vectorielle, qui n'a pas été représentée ici, ne soit plus autocorrélée.

Dans les tables 5 et 6 de l'annexe on donne la masse des mésons légers pseudoscalaire et vectoriel en fonction du paramètre de saut κ_s des quarks de la mer et des deux paramètres de saut κ_{v1} et κ_{v2} des quarks de valence. On donne également la masse des quarks calculée en utilisant les identités de Ward chirales, dont on discutera plus en avant.

La méthode des "lattice physical planes" consiste à fixer la maille a à partir d'un rapport de quantités physiques connu expérimentalement : on choisira ici le rapport m_{K^*}/m_K , plus approprié que le rapport m_ρ/m_π , puisque cela nécessiterait de simuler des quarks très légers, ce qui n'était pas encore d'actualité au moment où ont été effectués ces calculs, étant donné que nos quarks les plus légers étaient $m_q = m_s/2$ ². En s'appuyant sur la forme de la dépendance de m_V en fonction de

²Les progrès algorithmiques ont permis depuis d'atteindre environ 15 MeV.

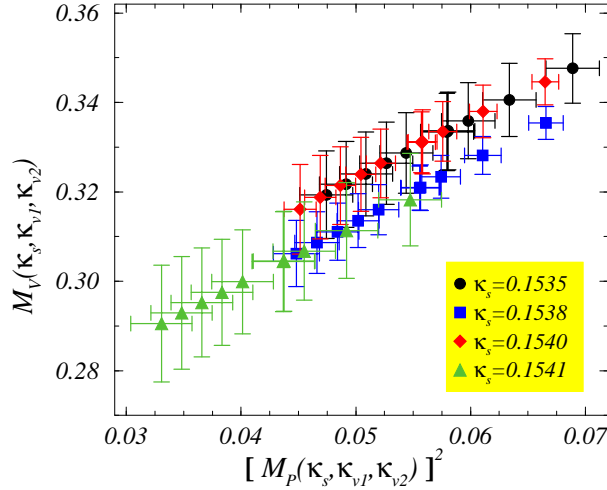


FIG. 2.2: Dépendance de M_V en fonction de M_P^2 .

m_{PS}^2 , qui est montrée figure 2.2, on fitte celle-ci en :

$$M_V(\kappa_s, \kappa_{v1}, \kappa_{v2}) = P_1 + P_2 \times M_P^2(\kappa_s, \kappa_{v1}, \kappa_{v2}) + P_3 \times M_P^2(\kappa_s, \kappa_s, \kappa_s). \quad (2.52)$$

Le fit donne $P_3 = 0.1(3)$, c'est à dire que la dépendance en fonction de κ_s est faible. On fixe donc P_3 à 0. Ensuite on cherche le couple (M_V, M_P) tel que $M_V/M_P = m_{K^*}/m_K$ et on obtient a par l'égalité $M_{K^*} = am_{K^*}^{\text{phys}}$. Pour la simulation à $\beta = 5.8$ on obtient

$$a_{m_{K^*}}^{-1} = 3.2(1) \text{ GeV}. \quad (2.53)$$

Le paramètre de Sommer r_0 est une échelle de référence, voisine de 0.5 fm, marquant la limite au-delà de laquelle le caractère confinant du potentiel d'interaction $V(R)$ entre un quark et un antiquark statiques l'emporte sur la partie coulombienne du potentiel, caractéristique d'une interaction à portée infinie et valable à petite distance à cause de la propriété de liberté asymptotique des théories de Yang-Mills non abéliennes. $V(R)$ est défini à partir de la boucle de Wilson $W(R, t)$ rectangulaire, de côté R et t , comme

$$W(R, t) = \mathcal{C}(R)e^{-V(R)t} \Rightarrow V(R) = \lim_{t \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(R, t) = \ln \left(\frac{W(R, t)}{W(R, t+1)} \right). \quad (2.54)$$

En s'appuyant sur la loi des aires³ $W(R, T) \sim e^{-\sigma RT}$ valable à couplage fort, on fitte le potentiel confinant linéairement :

$$V(R) = V_0 + \sigma R - \frac{e}{R} - g\delta V(R), \quad (2.55)$$

où $\delta V(R)$ est la correction au potentiel coulombien due à la discrétisation, celle-ci étant estimée perturbativement [52] :

$$\delta V(R) = 1/R - \sum_{\vec{q}} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}}}{\sum_i \sin^2 q_i}. \quad (2.56)$$

³La loi des aires a inspiré de nombreux modèles phénoménologiques de cordes pour décrire l'interaction entre deux quarks [51], et ils ont donné des résultats qualitatifs intéressants.

L'échelle de Sommer $R_0 = \frac{r_0}{a}$ est alors définie comme :

$$R^2 \frac{dV}{dR} \Big|_{R=R_0} = 1.65. \quad (2.57)$$

Malheureusement la boucle de Wilson construite avec les liens de jauge $U_\mu(x)$ est bruyante à grande séparation, parce que les fluctuations ultraviolettes sont telles que la physique à longue distance y est noyée. Une approche visant à contourner ce problème a récemment été proposée : le "blocking hypercubique" consiste à construire un lien $U_\mu^{\text{HYP}}(x)$ à partir de tous les liens de jauge appartenant à l'hypercube entourant le site x [53] :

$$\begin{aligned} U_\mu^{\text{HYP}}(x) &= \text{Proj}_{\text{SU}(3)} \left[\alpha_1 U_\mu(x) + (1 - \alpha_1) \sum_{\nu \neq \mu} U_{\nu;\mu}^{(1)\text{staple}}(x) \right], \\ U_{\nu;\mu}^{(1)}(x) &= \text{Proj}_{\text{SU}(3)} \left[\alpha_2 U_\nu(x) + (1 - \alpha_2) \sum_{\rho \neq \{\mu, \nu\}} U_{\rho;\nu,\mu}^{(2)\text{staple}}(x) \right], \\ U_{\rho;\nu,\mu}^{(2)}(x) &= \text{Proj}_{\text{SU}(3)} \left[\alpha_3 U_\rho(x) + (1 - \alpha_3) \sum_{\sigma \neq \{\mu, \nu, \rho\}} U_{\sigma;\rho}^{\text{staple}}(x) \right], \\ A_{\alpha;\beta}^{\text{staple}}(x) &= A_\alpha(x) A_\beta(x + \alpha) A_\alpha^\dagger(x + \beta) + A_\alpha^\dagger(x - \beta) A_\beta(x - \beta) A_\alpha(x + \alpha - \beta). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Plusieurs jeux de coefficients α_i peuvent être choisis : [53] les avait déterminés de manière à minimiser les fluctuations sur les plaquettes, en réduisant notablement le nombre de plaquettes négatives. On trouvait alors $\alpha_1 = 0.75$, $\alpha_2 = 0.6$ et $\alpha_3 = 0.3$. Nous avons choisi ce même ensemble dans les simulations, non seulement pour déterminer le paramètre de Sommer des configurations unquenched qui sont discutées ici, mais également pour ce qui concerne la physique du B décrite par HQET, où on est amené à calculer un propagateur statique qui est une ligne de Wilson et qui souffre de la même pathologie vis à vis des fluctuations ultraviolettes, mais nous aurons l'occasion d'y revenir. Le point important ici est que la constante V_0 du potentiel dépend certainement du type de liens utilisés, puisqu'elle est reliée à la self-energy du quark, mais on s'attend à ce que les autres paramètres tels que la tension de la corde σ n'en dépendent pas. En particulier la force d'interaction dV/dR est indépendante de V_0 . Les boucles de Wilson ont été calculées pour 4 types de segments spatiaux différents : sur les axes $(m, 0, 0)$ et non parallèles aux axes $(m, m, 0)$, (m, m, m) , $(m, 2m, 0)$. Pour le réseau $24^3 \times 48$, $\beta = 5.8$, $V(R)$ a été estimé à partir d'un fit sur $W(R, t)$ où $t \in [8, 13]$, fenêtre dans laquelle les signaux sont stables. Il a été représenté sur la figure 2.3. Le comportement linéaire du potentiel apparaît clairement sur cette figure, quelque soit κ_s , mais la variation de la tension de la corde en fonction de κ_s est un effet très ténu. R_0 a été extrait d'un fit de V sur la fenêtre $R \in [2, 7]$,

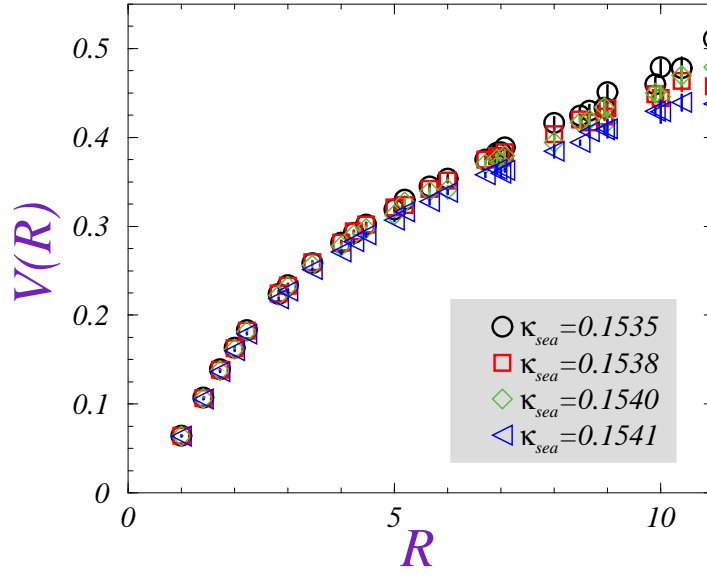


FIG. 2.3: Potentiel d'interaction entre deux sources statiques de couleur obtenu à partir de la simulation à $\beta = 5.8$ sur le réseau $24^3 \times 48$.

au-delà de laquelle le signal se détériore rapidement. On obtient alors le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
 \beta = 5.8 : \quad \kappa_s &= \{0.1535, 0.1538, 0.1540, 0.1541\}, \\
 R_0 &= \{7.52(17), 7.70(9), 7.78(19), 8.10(20)\}, \\
 \sqrt{\sigma} &= \{0.155(4), 0.151(2), 0.150(4), 0.144(4)\}, \\
 e &= \{0.289(10), 0.302(5), 0.294(7), 0.288(13)\}, \\
 V_0 &= \{0.260(7), 0.268(3), 0.264(5), 0.262(9)\}, \\
 g &= \{0.033(14), 0.036(9), 0.035(7), 0.015(15)\}.
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Les valeurs de R_0 extraites de la simulation au même β et sur le volume $16^3 \times 48$ sont dans les erreurs statistiques de celles donnée dans le tableau 2.59. Enfin à $\beta = 5.6$ le fit de W est effectué dans la fenêtre $t \in [3, 5]$, et le résultat suivant est obtenu, après un fit de $V(R)$, $R \in [2, 7]$:

$$\begin{aligned}
 \beta = 5.6 : \quad \kappa_s &= \{0.1560, 0.1575, 0.1580\}, \\
 R_0 &= \{5.15(5), 5.72(10), 5.98(8)\}, \\
 \sqrt{\sigma} &= \{0.225(3), 0.202(4), 0.195(3)\}, \\
 e &= \{0.305(11), 0.317(8), 0.308(6)\}, \\
 V_0 &= \{0.262(9), 0.279(7), 0.275(5)\}, \\
 g &= \{0.009(11), 0.022(7), 0.020(4)\}.
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Il est en bon accord avec celui donné dans [54].

En supposant que a ne dépende pas de κ_s , on effectue l'extrapolation chirale en écrivant $R_0 =$

$c + dM_P^2(\kappa_s, \kappa_s, \kappa_s)$, ce qui donne $R_0 = 8.6(4)$ à $\beta = 5.8$ et

$$a_{r_0}^{-1} = 3.4(2) \text{ GeV}, \quad (2.61)$$

en bon accord avec la valeur obtenue en (2.53).

Renormalisation

Un élément de matrice hadronique calculé en QCD sur réseau est un élément de matrice nu. La QCD sur réseau est un calcul non perturbatif dans le sens où l'intégrale de chemin, estimée par Monte-Carlo, contient tous les ordres bare de la théorie, le cut-off ultraviolet étant l'inverse de la maille du réseau a^{-1} . On doit ensuite appliquer une procédure de renormalisation, ce qui peut être fait perturbativement ou non perturbativement, suivant le schéma suivi, à l'aide d'un calcul de graphes de Feynman ou du calcul d'un rapport numérique de quantités calculées sur le réseau astucieusement choisies, sur la base par exemple d'identités de Ward entre fonctions de Green. Dans les chapitres suivants on sera amené à présenter les deux approches.

Chapitre 3

Couplages pioniques

Il sera question dans cette partie d'une première estimation unquenched ($N_f = 2$) des couplages pioniques \hat{g} et \tilde{g} , associés aux couplages $g_{H^*H\pi}$ et $g_{H_1^*H_0^*\pi}$ ($H = \{B, D\}$) par les relations

$$g_{H^*H\pi} = \frac{2\sqrt{m_{H^*}m_H}}{f_\pi}\hat{g}_Q, \quad g_{H_1^*H_0^*\pi} = \frac{2\sqrt{m_{H_1^*}m_{H_0^*}}}{f_\pi}\tilde{g}_Q, \quad \hat{g}_Q = \hat{g} + \mathcal{O}(1/m_Q^n), \quad \tilde{g}_Q = \tilde{g} + \mathcal{O}(1/m_Q^n). \quad (3.1)$$

Ce sont 2 couplages particulièrement importants, qui contribuent à de nombreux aspects phénoménologiques de la physique des mésons B et D . Ils apparaissent notamment dans un Lagrangien effectif ayant les symétries des quark lourds et chirale et qui a engendré de nombreuses prédictions pour la physique des mésons légers à faible impulsion [55]-[57]. Dans la suite on introduira ce Lagrangien et on présentera quelques évaluations de \hat{g} et de \tilde{g} dans le cadre de cette théorie, dans celui des modèles des quarks et par les règles de somme de QCD. Enfin on donnera les détails du calcul unquenched de ces couplages, permis par l'utilisation astucieuse du théorème de *Partially Conserved Axial Currents* (PCAC) [58], dans le cadre de HQET sur réseau. Au cours de ce calcul la constante de renormalisation Z_A du courant axial $\bar{\psi}\gamma^i\gamma^5\psi$ a été estimée non perturbativement en s'appuyant sur les identités de Ward chirales.

3.1 Lagrangien chiral et phénoménologie

Le Lagrangien de QCD présente une symétrie nouvelle lorsque le terme de masse est très faible devant l'échelle de brisure de la symétrie chirale, comme c'est le cas des quarks u et d , pour lesquels $m_{u,d} \sim 5 \div 10$ MeV, et dans une moindre mesure du quark s . En effet dans la limite où on néglige ces masses le Lagrangien de QCD peut s'écrire

$$\mathcal{L} = \bar{q}_L i \not{D} q_L + \bar{q}_R i \not{D} q_R. \quad (3.2)$$

Dans cette limite il est symétrique sous les transformations $g \in \text{SU}(3)_L \otimes \text{SU}(3)_R$ dans l'espace des saveurs :

$$q_L \longrightarrow L q_L, \quad q_R \longrightarrow R q_R, \quad q = (q^1 = u, q^2 = d, q^3 = s). \quad (3.3)$$

Cette symétrie est spontanément brisée vers la symétrie $\text{SU}(3)_V$, par la présence d'un condensat chiral $\langle \bar{q}_R^i q_L^j \rangle = v \delta^{ij}$, $v \sim (\Lambda_{\text{QCD}})^3$. Ce condensat se transforme en $\langle \bar{q}_R^i q_L^j \rangle = v (LR^\dagger)^{ji}$, et

est invariant si $L = R$. Aux 8 générateurs de $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ brisés spontanément sont associés 8 bosons de Goldstone. Les 8 mésons pseudoscalaires légers π, K, η sont interprétés comme ces bosons de Goldstone : ils sont massifs car le Lagrangien de QCD brise explicitement la symétrie chirale. Une théorie effective a été développée, dans laquelle ces bosons sont les champs de la théorie, regroupés dans une matrice $\Sigma(x) \in SU(3)$ qui se transforme sous $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ en $\Sigma \rightarrow L\Sigma R^\dagger$. Le Lagrangien effectif invariant chiral le plus général s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{f^2}{8} \text{Tr}(\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) + \mathcal{L}_1, \quad (3.4)$$

où f est une constante ayant la dimension d'une masse et \mathcal{L}_1 contient des termes d'ordre plus élevés en dérivée. On définit Σ par $\Sigma = \exp\left(\frac{2iM}{f}\right)$, avec $M = M^\dagger$ et $\text{Tr}(M) = 0$. Σ se transforme en $\Sigma \rightarrow L\Sigma L^\dagger$ sous $SU(3)_V$, ce qui implique que $M \rightarrow LML^\dagger$, c'est à dire qu'elle se transforme comme la représentation adjointe. On écrit alors M en fonction des champs de Goldstone de la façon suivante :

$$M = \begin{bmatrix} \pi^0/\sqrt{2} + \eta/\sqrt{6} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\pi^0/\sqrt{2} + \eta/\sqrt{6} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -2\eta/\sqrt{6} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Les bosons de Goldstone sont rendus massifs par l'ajout du terme de masse

$$\mathcal{L}_{\text{masse}} = v \text{Tr}(m_q \Sigma^\dagger + m_q^\dagger \Sigma), \quad m_q = \text{diag}(m_u, m_d, m_s). \quad (3.6)$$

Le Lagrangien effectif décrivant les interactions entre mésons légers a comme expression

$$\mathcal{L}_{\text{light}} = \frac{f^2}{8} \text{Tr}(\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) + v \text{Tr}(m_q \Sigma^\dagger + m_q^\dagger \Sigma) + \dots, \quad (3.7)$$

où des termes d'ordres supérieurs en dérivée ou en masse de quark n'ont pas été mentionnés. Rappelons que cette théorie effective décrit la physique où $(|\vec{p}|/\Lambda_{\text{CSB}})$ et $(m_q/\Lambda_{\text{CSB}}) \ll 1$, Λ_{CSB} étant l'échelle de brisure de la symétrie chirale ~ 1 GeV. Enfin on peut exprimer la masse des mésons légers en développant Σ dans le terme de masse du Lagrangien, et on a :

$$m_{\pi^\pm}^2 = \frac{4v}{f^2}(m_u + m_d), \quad m_{K^\pm}^2 = \frac{4v}{f^2}(m_u + m_s), \quad m_{K^0, \bar{K}^0}^2 = \frac{4v}{f^2}(m_d + m_s),$$

$$m_{\pi^0}^2 \simeq \frac{4v}{f^2}(m_u + m_d), \quad m_\eta^2 \simeq \frac{4v}{3f^2}(m_u + m_d + 4m_s).$$

Puisqu'un élément non diagonal apparaît dans la matrice de masse de $\pi^0 - \eta$ (η étant lui-même une combinaison de η_8 et η_0), le signe \simeq a été utilisé dans l'expression des masses carrées $m_{\pi^0}^2$ et m_η^2 ; toutefois ce terme est proportionnel à $(m_u - m_d)$, et on peut le négliger en première approximation.

Afin d'étudier les interactions entre mésons B, D et mésons légers lorsque ceux-ci ont une impulsion faible, on ajoute au Lagrangien précédent des termes où apparaissent les champs covariants H, K, F, \dots introduits dans le Chapitre 1. On leur insère un indice a de saveur légère, de sorte que

par exemple le doublet fondamental $j_l^P = \frac{1}{2}^-$ est représenté par

$$H_{a,v} = \frac{1+\not{v}}{2}(\not{H}_a^* - \gamma^5 H_a); \quad (3.8)$$

ils se transforment en $H_a \rightarrow H_b V_{ba}^\dagger$ sous $SU(3)_V$. Suivant l'idée de Callan, Coleman, Wess et Zumino [59], les interactions entre bosons de Goldstone et champs de matière, tels que les mésons lourd-légers ou les mésons légers vectoriels, sont décrites par une théorie dite des représentations non linéaires. On introduit le champ $\xi(x) \in SU(3)_L \otimes SU(3)_R/SU(3)_V$ et tel que $\Sigma = \xi^2$. Sous $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$, ξ se transforme en $\xi \rightarrow L\xi U^\dagger = U\xi R^\dagger$. $U \in SU(3)_V$ est une fonction très compliquée de ξ , et par conséquent dépend de x . Sous cette même transformation, $H_a \rightarrow H_b U_{ba}^\dagger(x)$. Il faut alors employer des dérivées covariantes dans les couplages dérivatifs entre champs H_a et on montre que les courants vectoriel et axial \mathcal{V}_μ et \mathcal{A}_μ

$$\mathcal{V}_\mu = \frac{1}{2}(\xi^\dagger \partial_\mu \xi + \xi \partial_\mu \xi^\dagger), \quad \mathcal{A}_\mu = \frac{i}{2}(\xi^\dagger \partial_\mu \xi - \xi \partial_\mu \xi^\dagger), \quad (3.9)$$

se transforment en

$$\mathcal{V}_\mu \rightarrow U\mathcal{V}_\mu U^\dagger + U\partial_\mu U^\dagger, \quad \mathcal{A}_\mu \rightarrow U\mathcal{A}_\mu U^\dagger. \quad (3.10)$$

Dans l'espace des saveurs \mathcal{V}_μ joue le rôle d'un "champ de jauge", et sert à définir la dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu + \mathcal{V}_\mu$. Le terme d'interaction entre mésons lourd-légers et bosons de Goldstone s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Heavy-Light}} &= i\text{Tr}(\bar{H}_a v \cdot D_{ab} H_b) + \hat{g}\text{Tr}(\bar{H}_a \gamma_\mu \gamma^5 \mathcal{A}_{ab}^\mu H_b) \\ &+ \text{Tr}[\bar{K}_a (-iv \cdot D_{ab}) K_b] - \Delta_E \text{Tr}(\bar{K}_a K_a) + \tilde{g}\text{Tr}(\bar{K}_a \gamma_\mu \gamma^5 \mathcal{A}_{ab}^\mu K_b) \\ &+ -h\text{Tr}(\bar{H}_a \gamma_\mu \gamma^5 \mathcal{A}_{ab}^\mu K_b) + h.c. + \dots, \end{aligned} \quad (3.11)$$

où $\Delta_E = E\left(\frac{1}{2}^+\right) - E\left(\frac{1}{2}^-\right)$. Les couplages \hat{g} , \tilde{g} , h, \dots sont donc essentiels dans la description de ces interactions par cette théorie effective, et on se propose dans ce chapitre d'évaluer sur le réseau \hat{g} et \tilde{g} ; une tentative de mesure de h a également été entreprise, mais elle s'est avérée infructueuse, les signaux étant trop incertains.

3.1.1 Limite non relativiste

En utilisant la propriété PCAC $\partial_\mu(\bar{u}\gamma^\mu\gamma^5 d) = f_\pi m_\pi^2 \pi^-$, on se ramène du calcul de $\langle H^*(p)\pi(q)|H(p)\rangle$, $q = p - p'$, à celui de $q_\mu \langle H^*(p')|\bar{u}\gamma^\mu\gamma^5 d|H(p)\rangle$. C'est cette propriété que nous avons utilisée pour effectuer le calcul sur le réseau. On peut déjà donner la valeur de \hat{g} et \tilde{g} dans le modèle non-relativiste des quarks constituants. Dans cette limite, le champ de quark q est donné par

$$q = \begin{bmatrix} q_{\text{nr}}(\uparrow) \\ q_{\text{nr}}(\downarrow) \\ -\bar{q}_{\text{nr}}(\downarrow) \\ \bar{q}_{\text{nr}}(\uparrow) \end{bmatrix} + \dots \quad (3.12)$$

où des termes dérivatifs n'ont pas été mentionnés. q_{nr} annihile un quark, tandis que \bar{q}_{nr} crée un antiquark. Le courant $\bar{u}\gamma^3\gamma^5d$, provenant du courant $(A_-^3)_{ab} = (A_1^3 + iA_2^3)_{ab}$ dans l'espace SU(3) de saveur, s'écrit en terme des champs non relativistes

$$\begin{aligned}\bar{u}\gamma^3\gamma^5d &= [u_{nr}^\dagger(\uparrow), u_{nr}^\dagger(\downarrow), \bar{u}_{nr}^\dagger(\downarrow), -\bar{u}_{nr}^\dagger(\uparrow)] \begin{bmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{nr}(\uparrow) \\ d_{nr}(\downarrow) \\ -\bar{d}_{nr}(\downarrow) \\ \bar{d}_{nr}(\uparrow) \end{bmatrix} \\ &= [u_{nr}^\dagger(\uparrow), u_{nr}^\dagger(\downarrow), \bar{u}_{nr}^\dagger(\downarrow), -\bar{u}_{nr}^\dagger(\uparrow)] \begin{bmatrix} d_{nr}(\uparrow) \\ -d_{nr}(\downarrow) \\ \bar{d}_{nr}(\downarrow) \\ \bar{d}_{nr}(\uparrow) \end{bmatrix} \\ &= u_{nr}^\dagger(\downarrow)d_{nr}(\downarrow) - u_{nr}^\dagger(\uparrow)d_{nr}(\uparrow) + \bar{u}_{nr}^\dagger(\downarrow)\bar{d}_{nr}(\downarrow) - \bar{u}_{nr}^\dagger(\uparrow)\bar{d}_{nr}(\uparrow).\end{aligned}\quad (3.13)$$

L'élément de matrice $\langle D^+ | \bar{u}\gamma^3\gamma^5d | D^{*0} \rangle$ s'obtient aisément :

$$\begin{aligned}|D^{*0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|c\uparrow\rangle|\bar{u}\downarrow\rangle + |c\downarrow\rangle|\bar{u}\uparrow\rangle], \\ |D^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|c\uparrow\rangle|\bar{d}\downarrow\rangle - |c\downarrow\rangle|\bar{d}\uparrow\rangle],\end{aligned}\quad (3.14)$$

$$\langle D^+ | \bar{u}\gamma^3\gamma^5d | D^{*0} \rangle = 1. \quad (3.15)$$

L'élément de matrice $\langle D^+\pi^- | D^{*0}(\epsilon_\lambda^\mu) \rangle$ est quant à lui égal à $\epsilon^\mu\hat{g}$. En identifiant ces deux éléments de matrice, et en choisissant la polarisation $\epsilon_\lambda^\mu = (0, 0, 0, 1)$, on obtient [57]

$$\hat{g} = 1, \quad \text{limite non relativiste.} \quad (3.16)$$

Le même travail peut être effectué pour \tilde{g} , bien que l'expression des états en termes de quarks constituants soient un peu plus complexe que précédemment, car les mésons $J^P = 0^+, 1^+$ ont un moment orbital $L = 1$. On a donc

$$\begin{aligned}|D_0^{0*}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}[|L_z = 1, S_z = -1\rangle - |L_z = 0, S = 1, S_z = 0\rangle + |L_z = -1, S_z = 1\rangle], \\ |D_1^{+*}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}[|L_z = 1, S_z = -1\rangle - |L_z = 0, S = 0, S_z = 0\rangle + |L_z = -1, S_z = 1\rangle].\end{aligned}\quad (3.17)$$

L'élément de matrice $\langle D_0^{0*} | \bar{u}\gamma^3\gamma^5d | D_1^{+*} \rangle$ est donné par

$$\begin{aligned}\langle D_0^{0*} | \bar{u}\gamma^3\gamma^5d | D_1^{+*} \rangle &= \frac{1}{3} \left[(\langle c\downarrow | \langle \bar{u}\downarrow |) \bar{u}_{nr}^\dagger(\downarrow) \bar{d}_{nr}(\downarrow) (|c\downarrow\rangle |\bar{d}\downarrow\rangle) - (\langle c\uparrow | \langle \bar{u}\uparrow |) \bar{u}_{nr}^\dagger(\uparrow) \bar{d}_{nr}(\uparrow) (|c\uparrow\rangle |\bar{d}\uparrow\rangle) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left((\langle c\uparrow | \langle \bar{u}\downarrow |) \bar{u}_{nr}^\dagger(\downarrow) \bar{d}_{nr}(\downarrow) (|c\uparrow\rangle |\bar{d}\downarrow\rangle) + (\langle c\downarrow | \langle \bar{u}\uparrow |) \bar{u}_{nr}^\dagger(\uparrow) \bar{d}_{nr}(\uparrow) (|c\downarrow\rangle |\bar{d}\uparrow\rangle) \right) \right] \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

On obtient finalement

$$\tilde{g} = \frac{1}{3}, \quad \text{limite non relativiste.} \quad (3.19)$$

Dans la limite non relativiste, \hat{g} et \tilde{g} vérifient la relation $\left| \frac{\tilde{g}}{\hat{g}} \right| = \frac{1}{3}$: cette hiérarchie est purement due aux coefficients de Clebsch-Gordon.

3.1.2 Couplages pioniques et théorie des perturbations chirales

Les corrections relativistes peuvent s'analyser de plusieurs manières. L'une d'entre elles consiste à paramétrer les transitions impliquant les B et les D à l'aide du Lagrangien chiral effectif, et à comparer les résultats obtenus avec les expériences. On prendra comme exemple la transition semi-leptonique $D \rightarrow K \bar{\nu}_e e$. Pour cela il faut d'abord donner les règles de Feynman associées à la théorie effective, v étant la vitesse du méson lourd-léger, k son moment résiduel, et $\Delta^{(Q)}$ la différence de masse entre les deux membres du doublet j_i^P :

$$\begin{aligned} \text{propagateur de } H(J^P = 0^-) & \quad \frac{i\delta^{ab}}{2(v \cdot k + i\epsilon)}, \\ \text{propagateur de } H^*(J^P = 1^-) & \quad \frac{i\delta^{ab}(g^{\mu\nu} - v^\mu v^\nu)}{2(v \cdot k - \Delta^{(Q)} + i\epsilon)}, \\ \text{couplage } HH^*(\epsilon)\pi(q) & \quad \frac{2M(\frac{1}{2}^-)}{f_\pi} \epsilon \cdot q \hat{g}. \end{aligned}$$

L'élément de matrice $\langle K(p_k) | \gamma^\mu (1 - \gamma^5) | D(p_D) \rangle$ s'écrit en termes de facteurs de forme

$$\begin{aligned} \langle K(p_k) | \bar{s} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) c | D(p_D) \rangle & = f^{+(c)} (p_D + p_K)^\mu + f^{-(c)} (p_D - p_K)^\mu \\ & = (f^{+(c)} + f^{-(c)}) m_D v^\mu + (f^{+(c)} - f^{-(c)}) p_K^\mu. \end{aligned} \quad (3.20)$$

En négligeant les corrections en m_c dues au matching vers HQET, on sait que $\langle K(p_k) | \gamma^\mu (1 - \gamma^5) | D(p_D) \rangle$ doit vérifier la loi d'échelle en $\sqrt{m_c}$, par la normalisation des états. Par conséquent

$$f^{+(c)} + f^{-(c)} \sim 1/\sqrt{m_c}, \quad f^{+(c)} - f^{-(c)} \sim \sqrt{m_c}. \quad (3.21)$$

A la limite cinématique $v \cdot p_K \ll m_D$, on peut utiliser le Lagrangien chiral : en remarquant que $\bar{q}_a \gamma^\mu (1 - \gamma^5) c$ a une structure chirale $\bar{\mathbf{3}}_L \otimes \mathbf{1}_R$, on associe à $\bar{q}_a \gamma^\mu (1 - \gamma^5) c$

$$\bar{q}_a \gamma^\mu (1 - \gamma^5) c \longrightarrow \frac{b_a^Q}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu (1 - \gamma^5) H_b \xi_{ba}^\dagger),$$

$$\xi = \exp\left(\frac{iM}{f}\right) = 1 + i\frac{M}{f} + \dots, \quad b_a^Q(\mu = m_Q) = \sqrt{m_Q} f_{P_a^{(Q)}}.$$

La transition $D \rightarrow K \bar{\nu}_e e$ comporte à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations deux contributions, celle provenant de la trace précédente et celle avec en plus l'émission du K par couplage fort et propagation d'un D_s^* virtuel. On trouve

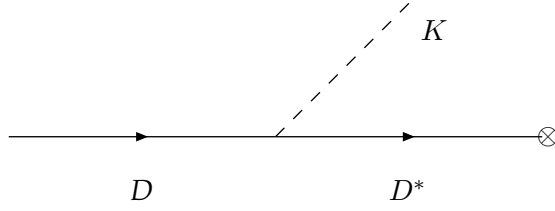


FIG. 3.1: Contribution à la transition semi-leptonique $D \rightarrow K$ par l'émission du kaon par interaction forte.

$$\begin{aligned}
 \langle K(p_k) | \bar{s} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) c | D(p_D) \rangle &= \frac{b_u^c \sqrt{m_D}}{f} v^\mu - \frac{\hat{g}_c b_s^c \sqrt{m_{D_s}}}{f} p_K^\nu \frac{g^{\nu\mu} - v^\nu v^\mu}{-v \cdot p_K - \Delta^c} \\
 &= \frac{1}{f} \left[v^\mu \left(m_D f_D - \frac{m_{D_s} f_{D_s} \hat{g}_c v \cdot p_K}{v \cdot p_K + \Delta^c} \right) + \frac{m_{D_s} f_{D_s} \hat{g}_c}{v \cdot p_K + \Delta^c} p_K^\mu \right], \\
 f^{+(c)} + f^{-(c)} &\sim \frac{f_D}{f} \left[1 - \frac{\hat{g}_c v \cdot p_K}{v \cdot p_K + \Delta^c} \right], \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

$$f^{+(c)} - f^{-(c)} = \frac{\hat{g}_c m_{D_s} f_{D_s}}{f(v \cdot p_K + \Delta^c)}. \tag{3.23}$$

On remarque que $f^{+(c)} - f^{-(c)}$ est nettement plus grand que $f^{+(c)} + f^{-(c)}$, car il est renforcé par rapport à celui-ci d'un facteur $\frac{m_{D_s}}{v \cdot p_K}$ (sauf si $\hat{g}_c \sim 0$ évidemment), et on a $f^{+(c)} \simeq -f^{-(c)}$, de sorte que

$$f^{+(c)} \simeq \frac{\hat{g}_c m_{D_s} f_{D_s}}{2f(v \cdot p_K + \Delta^c)}. \tag{3.24}$$

A la limite de recul nul, où $q^2 = (p_D - p_K)^2 = q_{\max}^2 = (m_D - m_K)^2$, on a

$$\begin{aligned}
 f^{D \rightarrow K}(q_{\max}^2) &= \frac{\hat{g}_c m_{D_s} f_{D_s}}{2f(m_K + m_{D_s^*} - m_{D_s})}, \\
 f^{D \rightarrow K}(q_{\max}^2)_{\text{exp}} &= 1.31, \quad f_{D_s} = 224 \text{ MeV}, \quad \hat{g}_c = 0.6. \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

La mesure expérimentale de la largeur $\Gamma(D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+) = \frac{\hat{g}_c^2}{6\pi f_\pi^2} |\vec{p}_\pi|^3$ [60] donne la valeur du couplage $g_{D^* D \pi} = 2 \frac{\sqrt{m_D m_{D^*}}}{f_\pi} \hat{g}_c$:

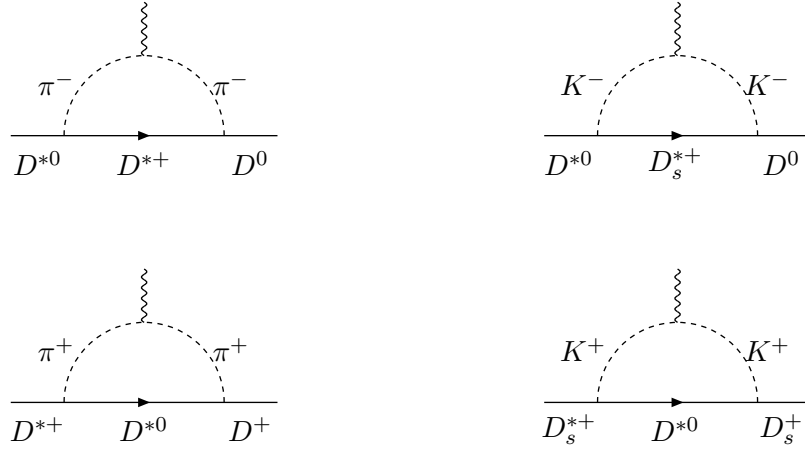
$$g_{D^* D \pi} = 17.9 \pm 0.3 \pm 1.9, \quad \hat{g}_c = 0.61 \pm 0.01 \pm 0.07. \tag{3.26}$$

Toutefois une seconde mesure serait la bienvenue car la détection des pions mous est très délicate.

L'analyse des désintégrations radiatives

$$\Gamma(D_a^* \rightarrow D_a \gamma) = \frac{\alpha}{3} \frac{m_{D_a^*}}{m_{D_a}} |\mu_a|^2 |\vec{k}|^3, \quad \mu_a = \mu^c + \mu_a^\ell, \tag{3.27}$$

où α est la constante de structure fine électromagnétique et \vec{k} est l'impulsion du photon, permet également d'accéder à \hat{g}_c car les corrections aux moments magnétiques des quarks légers μ_a^ℓ sont décrites par l'émission-absorption de pions et de kaons virtuels, qui émettent le photon. Ces boucles

FIG. 3.2: Corrections à l'ordre $\sqrt{m_q}$ à la désintégration radiative des D^* .

de pions et de kaons contiennent un facteur \hat{g}_c^2 . Ainsi [61],

$$\begin{aligned}
 \mu^c &= \frac{2}{3m_c} \\
 \mu_u^\ell &= \frac{2}{3}\beta - \hat{g}_c^2 \frac{m_K}{4\pi f_K^2} - \hat{g}_c^2 \frac{m_\pi}{4\pi f_\pi^2}, \\
 \mu_d^\ell &= -\frac{1}{3}\beta + \hat{g}_c^2 \frac{m_\pi}{4\pi f_\pi^2}, \\
 \mu_s^\ell &= -\frac{1}{3}\beta + \hat{g}_c^2 \frac{m_K}{4\pi f_K^2}.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Ici β est relié à la masse des quarks constituants (à la limite non relativiste, $\beta = m_q^{-1}$, $m_q \sim 300 - 500$ MeV). En comparant avec les résultats expérimentaux on obtient $0.3 < \hat{g}_c < 0.7$. L'intervalle est large car les erreurs expérimentales sur les rapports d'embranchement de la désintégration radiative $D^{*+} \rightarrow D^+ \gamma$ sont importantes, et les termes supérieurs contenus dans la théorie des perturbations chirales peuvent contribuer de façon non négligeable.

L'estimation de la différence de masse $\Delta_B = (m_{B_s^*} - m_{B_s}) - (m_{B^*} - m_B) \equiv \Delta_s - \Delta$ donne avec la théorie des perturbations chirales [62]

$$\begin{aligned}
 \Delta_B &= \frac{\hat{g}_b^2 \Delta}{16\pi^2 f_\pi^2} \left[4m_K^2 \ln \left(\frac{\Lambda_\xi}{m_K^2} \right) + 2m_\eta^2 \ln \left(\frac{\Lambda_\xi}{m_\eta^2} \right) - 6m_\pi^2 \ln \left(\frac{\Lambda_\xi}{m_\pi^2} \right) \right] \\
 &+ \frac{\hat{g}_b^2 \Delta}{16\pi^2 f_\pi^2} [24\pi m_K \Delta_s] \\
 &- \frac{\hat{g}_b^2 \Delta_g}{6\pi^2 f_\pi^2 \hat{g}_b} \left[m_K^3 + \frac{1}{2}m_\eta^3 - \frac{3}{2}m_\pi^3 \right],
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

où $\Delta_g \equiv g_{H^*H^*\pi} - g_{H^*H\pi}$ provient d'une correction $\mathcal{O}(1/m_Q)$ au Lagrangien chiral (3.11). Suite à une estimation de $\frac{\Delta_g}{\hat{g}_b}$ par les règles de somme de QCD [63], on trouve $\Delta_B = 12.9 \hat{g}_b^2$ MeV : la valeur expérimentale de Δ_B étant voisine de 1 MeV, on obtient $\hat{g}_b \simeq 0.3$.

En s'appuyant sur un autre modèle chiral effectif [64], dans lequel les doublets $(0^-, 1^-)$ et $(0^+, 1^+)$ sont partenaires chiraux l'un de l'autre, la différence de masse entre ceux-ci provenant de la brisure spontanée de la symétrie chirale, on obtient $\hat{g} = \tilde{g}$. Puisque ce modèle tend à se ré-

pandre dans la communauté des physiciens théoriciens, il convient de mesurer indépendamment \hat{g} et \tilde{g} , afin de s'assurer de sa pertinence, et la simulation sur réseau est un excellent laboratoire d'étude, puisque les résultats expérimentaux concernant les excitations orbitales du B et du D sont encore peu nombreux. L'étude de la hiérarchie entre \hat{g} et \tilde{g} est d'autant plus importante qu'il y a une contradiction entre la différence des splittings hyperfins $\Delta m_u - \Delta m_s \equiv (m_{D^*} - m_D) - (m_{D_s^*} - m_{D_s})$ mesurée expérimentalement et celle prédite par la théorie des perturbations chirales. En effet on a [65]

$$(\Delta m_u - \Delta m_s)^{\text{exp}} > 0, \quad \Delta m_s = 348.4(9) \text{ MeV}, \quad (\Delta m_u)^{(1)} = 444(36) \text{ MeV}, \quad (\Delta m_u)^{(2)} = 538(41) \text{ MeV},$$

où la valeur de $(\Delta m_u)^{(1)}$ a été rapportée par Belle, tandis que $(\Delta m_u)^{(2)}$ provient d'une mesure de Focus. La théorie des perturbations chirales prédit quant à elle [66]

$$\begin{aligned} \Delta m_{u/d} - \Delta m_s &= \frac{h^2 \Delta_E}{(4\pi f)^2} \sum_{z=\pm} \left[J_1(m_K, z\Delta_E) + \frac{1}{2} J_1(m_\eta, z\Delta_E) - \frac{3}{2} J_1(m_\pi, z\Delta_E) \right. \\ &\quad \left. + J_2(m_K, z\Delta_E) + \frac{1}{2} J_2(m_\eta, z\Delta_E) - \frac{3}{2} J_2(m_\pi, z\Delta_E) \right] \\ &\quad - \frac{\hat{g}^2 - \tilde{g}^2}{16\pi f^2} (m_\eta^3 + 2m_K^3 - 3m_\pi^3) - 2(\lambda - \tilde{\lambda})(m_{u/d} - m_s), \end{aligned} \quad (3.30)$$

où le premier terme est négatif et le contre-terme $-2(\lambda - \tilde{\lambda})(m_{u/d} - m_s)$ est lui aussi négatif. Le signe de $\Delta m_{u/d} - \Delta m_s$ dépend donc uniquement de celui de $\hat{g}^2 - \tilde{g}^2$. Les résultats sont jusqu'à présent $\hat{g}^2 - \tilde{g}^2 \geq 0$, de sorte que $(\Delta m_{u/d} - \Delta m_s)^{\chi\text{PT}} < 0$.

3.1.3 Modèles des quarks

Une manière complémentaire à la précédente de calculer les couplages pioniques consiste à élaborer des modèles de quarks plus réalistes que le modèle non relativiste et d'exprimer les grandeurs recherchées en termes de recouvrement de fonctions d'onde - encore faut-il donner un sens à la notion de fonction d'onde dans ce contexte. Un modèle couramment employé est un modèle de quarks constituants, c'est à dire que le nombre de quarks est fixe dans l'état lié, il n'y a pas de paires virtuelles ni de transitions inélastiques, on choisit un potentiel d'interaction entre quarks inspiré de la QCD, tel celui de Richardson [67]

$$V(r) = \frac{8\pi}{33 - 2n_f} \Lambda \left(\Lambda r - \frac{f(\Lambda r)}{\Lambda r} \right), \quad (3.31)$$

où f est une fonction telle qu'à r petit V obéisse aux prédictions de QCD et croît linéairement à $r \rightarrow \infty$. Dans le cas du méson D la fonction d'onde de ce dernier $\psi(\vec{k} + x\vec{p}, -\vec{k} + (1-x)\vec{p})$ vérifie l'équation d'onde de Salpeter [68]

$$\begin{aligned} &\left\{ \sqrt{(\vec{k} + x\vec{p})^2 + m_Q^2} + \sqrt{(-\vec{k} + (1-x)\vec{p})^2 + m_{q_a}^2} - \sqrt{m_D^2 + \vec{p}^2} \right\} \psi(\vec{k} + x\vec{p}, -\vec{k} + x\vec{p}) \\ &+ \int d\vec{k}' V(\vec{p}, \vec{k}, \vec{k}') \psi(\vec{k}', \vec{p} - \vec{k}') = 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

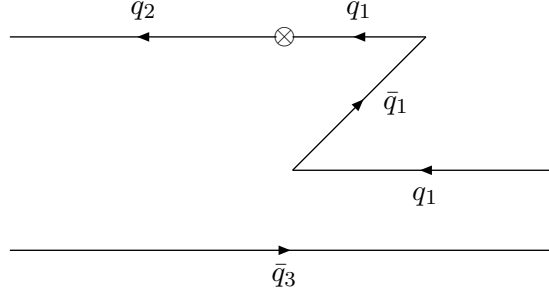


FIG. 3.3: Les graphes "en Z" peuvent contribuer de manière appréciable au calcul d'un processus hadronique : ils ont pour origine la création virtuelle d'une paire particule-antiparticule.

qui contient les effets relativistes dus à la cinématique de façon explicite. Elle est normalisée par

$$\frac{1}{2\pi^3} \int d\vec{k} |\psi|^2 = 2\sqrt{m_D^2 + p^2}. \quad (3.33)$$

Dans le cadre de ce modèle on obtient [69]

$$\hat{g} = \frac{1}{4m_D} \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} |\psi|^2 \frac{E_q + m_q}{E_q} \left[1 - \frac{k^2}{3(E_q + m_q)^2} \right], \quad E_q = \sqrt{\vec{k}^2 + m_q^2}. \quad (3.34)$$

Dans la limite non relativiste $E_q \simeq m_q \gg k$, on déduit de l'équation précédente $\hat{g} = 1$, tandis que dans la limite chirale $m_q = 0$, acceptable dans l'équation de Salpeter, on trouve $\hat{g} = \frac{1}{3}$.

Un second type de modèle est basé sur l'utilisation de l'équation de Dirac : on choisit un potentiel à symétrie centrale tel qu'il traite le plus correctement possible la vitesse des quarks internes. En particulier il contient les graphes "en Z" et modifie de manière appréciable l'estimation des petites composantes comparé à l'utilisation de spineurs libres. Ce modèle, proposé par Bogolioubov [70], lui a permis de calculer avec succès le couplage axial g_A associé à la diffusion πN : $g_A = 5/3(1 - 2\delta)$, où $\delta > 0$ permet de mesurer la contribution des petites composantes des spineurs de Dirac. L'estimation non relativiste standard $g_A = 5/3$ [71] est considérablement réduite, puisqu'on trouve $g_A = 1.25$, très proche de sa valeur expérimentale 1.269(3) [72]. L'équation de Dirac à résoudre est alors

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m + V(\vec{r}) - E)\Psi(\vec{r}) = 0, \quad V(r) = -\frac{\kappa}{r} + \beta(ar + c). \quad (3.35)$$

On ajuste les différents paramètres κ , $m + c$, a de manière à retrouver le spectre des états liés et \hat{g} est donné par [73]

$$\begin{aligned} \hat{g} &= \int_0^\infty \left\{ |f_{1/2}^{(-1)}|^2 - \frac{1}{3} |g_{1/2}^{(-1)}|^2 \right\} r^2 dr, \\ \Psi_{jm}^k(\vec{r}) &= \begin{pmatrix} f_j^k(r) \mathcal{Y}_{jm}^k(\hat{r}) \\ i g_j^k(r) \mathcal{Y}_{jm}^{-k}(\hat{r}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Avec les paramètres $-(m + c) = 200 \text{ MeV}$, $a = 0.20 \text{ GeV}^2$, $\kappa = 0.65$, on trouve $\hat{g} = 0.61$.

3.1.4 Couplages pioniques et règles de somme

La dernière approche phénoménologique qui a été utilisée pour estimer \hat{g} et \tilde{g} est basée sur les règles de somme de QCD [74]. Cette approche très générale, introduisant néanmoins différentes

approximations et quelques procédés heuristiques, est centrée autour des propriétés analytiques des fonctions de Green, en faisant abondamment appel aux relations de dispersions. Par exemple la fonction à deux points $\Pi_{\text{hadr}}(q^2) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T(J(x) J^\dagger(0)) | 0 \rangle$, associée au courant $J(x)$ s'exprime de la façon suivante :

$$\Pi_{\text{hadr}}(q^2) = \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\text{Im} \Pi_{\text{hadr}}(s)}{s - q^2 - i\epsilon}. \quad (3.37)$$

Par le théorème de Cauchy elle s'écrit

$$\Pi_{\text{hadr}}(q^2) = \frac{(q^2)^N}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\text{Im}(\Pi_{\text{hadr}})(s)}{s^N (s - q^2 - i\epsilon)} + f_{\text{anal}}(q^2), \quad (3.38)$$

où f_{anal} est un polynôme de degré N en q^2 dont les coefficients a_i sont des constantes de soustraction. En utilisant la fonction spectrale $\rho_{\text{hadr}}(s)$ donnée par

$$\theta(q^0) \rho_{\text{hadr}}(q^2) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n - q) |\langle 0 | J(0) | n \rangle|^2, \quad (3.39)$$

elle s'écrit finalement

$$\Pi_{\text{hadr}}(q^2) = \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\rho_{\text{hadr}}(s)}{s - q^2 - i\epsilon}, \quad (3.40)$$

où s_0 est le seuil au-dessus duquel des états intermédiaires peuvent être créés. On approxime $\rho_{\text{hadr}}(s)$ par des résonances et un continuum

$$\rho_{\text{hadr}}(s) = \rho_{\text{res}}(s) + \theta(s - \omega) \rho_{\text{cont}}(s). \quad (3.41)$$

Les règles de somme à la Shifman-Vainshtein-Zakharov [75] consistent d'une part à écrire la relation de dispersion pour les hadrons et d'autre part à écrire une relation de dispersion pour les quarks et les gluons, $\Pi_{\text{pert}}(q^2) = \int \frac{\rho_{\text{pert}}(s)}{s - q^2 - i\epsilon} + \Pi_{\text{cond}}$, où Π_{cond} est la partie non définie par la théorie des perturbations et est calculée en effectuant un OPE pour le corrélateur de dimension canonique $d T(J(x) J^\dagger(0)) = \sum_n c^n O_n$, où c^n sont des coefficients de Wilson et O_n sont des opérateurs de dimension $d - n$: les éléments de matrice $\langle 0 | O_n | 0 \rangle$ portent le nom de "condensats". On peut les calculer sur le réseau, comme ce fut le cas du condensat $\langle A^2 \rangle$ [76], ou les identifier à des paramètres du Lagrangien chiral comme c'est le cas de $\langle m_s \bar{s} s \rangle \simeq -f_\pi^2 m_K^2$. Les coefficients de Wilson sont en principe calculables perturbativement, à condition de se placer dans le régime des q^2 appropriés, à savoir dans une région de haute virtualité... mais pas trop, au risque de devoir inclure dans ρ_{res} de plus en plus d'états excités. En effet on emploie alors ce qu'on appelle la dualité quarks-hadrons et on identifie $\Pi_{\text{hadr}}(q^2) \equiv \Pi_{\text{pert}}(q^2)$, ce qui conduit en fait à identifier ρ_{cont} et ρ_{pert} , de façon à exprimer les grandeurs phénoménologiques telles que les constantes de désintégration où les couplages uniquement en terme de condensats. Afin d'augmenter la contribution de l'état fondamental apparaissant dans ρ_{res} , on a alors recours à des transformations appropriées de la fonction Π_{hadr} , comme par exemple la transformée de Borel

$$\mathcal{B}_{M^2}[f(q^2)] \equiv \lim_{n, q^2 \rightarrow \infty, q^2/n = M^2} \frac{(q^2)^{n+1}}{n!} \left(-\frac{d}{dq^2} \right)^n f(q^2). \quad (3.42)$$

Lorsqu'une des particules de l'état final d'une transition est un pion, comme c'est le cas de la transition $D^* \rightarrow D\pi$, on utilise ce qu'on appelle les règles de somme sur le cône de lumière. On suit la même approche que SVZ, sauf que le développement en condensats est remplacé par un développement en fonctions d'onde du pion sur le cône de lumière :

$$\begin{aligned} \langle \pi(q) | \bar{d}(x) \gamma_\mu \gamma^5 A(x|0) u(0) | 0 \rangle &= -iq_\mu f_\pi \int_0^1 e^{i u q \cdot x} (\phi_\pi(u) + x^2 g_1(u) + \mathcal{O}(x^4)) \\ &+ f_\pi \left(x_\mu - \frac{x^2 q_\mu}{q \cdot x} \right) \int_0^1 e^{i u q \cdot x} g_2(u), \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$A(x|0) = \mathcal{P} \exp \left(ig_s \int_0^1 dz A(zx) \cdot x \right).$$

Cela permet d'éviter certaines irrégularités de l'OPE dans les règles de somme à trois points. On écrit une fonction à trois points comme l'élément de matrice entre le vide et un état de pion d'un courant bilocal : dans le cas de $D^{*0} \rightarrow D^+\pi^-$, on a donc

$$F_\mu(p, q) = i \int d^4x e^{i p \cdot x} \langle \pi^-(q) | T[\bar{d}(x) \gamma_\mu c(x), \bar{c}(0) i \gamma^5 u(0)] | 0 \rangle. \quad (3.44)$$

On remarque que le T-produit contient le propagateur du quark charmé, qu'on sort de l'élément de matrice, et ce dernier s'exprime alors à l'aide de (3.43). Par conséquent les équivalents des condensats sont ici les fonctions d'onde du pion, classées suivant leur twist, et qui sont pour le moment impossibles à déterminer, sauf pour quelques valeurs bien précises de u , comme $u = 1$ ou $u = 1/2$ [77].

En résumé toute la difficulté des règles de somme de QCD et les éventuelles approximations qu'elles nécessitent pour extraire des couplages hadroniques ou des constantes de désintégration réside dans

- 1) le choix judicieux du seuil ω , au-delà duquel la fonction spectrale ρ_{hadr} est considérée comme un continuum d'états, et des paramètres M_i^2 de Borel¹,
- 2) le calcul des coefficients de Wilson de l'OPE et la détermination des condensats à partir de données expérimentales (règles de somme *à la* SVZ) ou certaines approximations des fonctions d'onde du pion (règles de somme sur le cône de lumière).

Les résultats obtenus doivent être stables en fonction de ω et des M_i^2 .

Suivant cette approche une première estimation du couplage $g_{D^*D\pi}$ a donné $g_{D^*D\pi} = 10 \pm 3$ [78], mais avec une faible stabilité en M_i^2 . Une stabilité bien meilleure a été obtenue en insérant dans ρ_{res} les premières excitations radiales du D et du D^* [79] et conduit à $g_{D^*D\pi} = 19.49$ ($\hat{g}_c \sim 0.7$), très proche de la valeur expérimentale mesurée par CLEO. A la limite de masse infinie, l'ensemble des règles de somme ont donné $\hat{g} \sim 0.3$ [78, 80], et $\tilde{g} = 0.10 \pm 0.02$ [81].

3.2 Evaluation de \hat{g} et \tilde{g} sur le réseau

Après cette introduction phénoménologique où on a pu se rendre compte de l'importance de ces couplages pioniques, mais aussi constater une grande dispersion des prédictions suivant les

¹Le calcul d'une fonction à trois points s'effectue avec 2 transformations de Borel.

approches employées, on se propose dans cette partie d'exposer le travail qui a été effectué sur leur calcul à partir d'une simulation numérique. Le calcul de \hat{g} par la collaboration UKQCD a donné $\hat{g} = 0.42(4)(9)$ [82], mais cette étude exploratoire a été menée en effectuant une extrapolation vers la masse $m_Q \rightarrow \infty$ à partir de deux mesures à m_Q finie, avec une maille relativement grossière. Un calcul récent avec un quark lourd à la masse physique du c a obtenu $\hat{g}_c = 0.67 \pm 0.08_{-0.06}^{+0.04}$ [83]. Enfin une évaluation dans l'approximation quenched a donné $\hat{g} = 0.48 \pm 0.03 \pm 0.10$ et $\hat{g}_b = 0.60 \pm 0.07 \pm 0.13$ [84].

3.2.1 Facteurs de forme

Grâce au théorème PCAC, \hat{g} et \tilde{g} sont obtenus à partir du calcul des éléments de matrices hadroniques $\langle H|A_\mu|H^* \rangle$ et $\langle H_0^*|A_\mu|H_1^* \rangle$, où $A_\mu(x) = \bar{u}(x)\gamma_\mu\gamma^5 d(x)$ ². En prenant l'exemple de \hat{g} , on a en effet :

$$\langle B(p)\pi(q)|B^*(p', \epsilon^\lambda) \rangle = g_{B^*B\pi} q \cdot \epsilon^\lambda, \quad q = p' - p, \quad (3.45)$$

$$\langle B(p)|q_\mu A^\mu|B^*(p', \epsilon^\lambda) \rangle = g_{B^*B\pi} \frac{q \cdot \epsilon^\lambda}{m_\pi^2 - q^2} f_\pi m_\pi^2 + \dots \quad (3.46)$$

Dans l'équation précédente les termes supprimés lorsque q^2 est petit et proche du pôle m_π^2 n'ont pas été mentionnés. Il existe une paramétrisation standard de $\langle B(p)|A^\mu|B^*(p', \epsilon^\lambda) \rangle$ en termes de facteurs de forme, en utilisant notamment les nombres quantiques de parité et de conjugaison de charge des états initial et final, ainsi que ceux de l'opérateur axial A_μ :

$$\begin{aligned} \langle B(p)|A^\mu|B^*(p', \epsilon^\lambda) \rangle &= 2m_{B^*} A_0(q^2) \frac{\epsilon^\lambda \cdot q}{q^2} q^\mu + (m_{B^*} + m_B) A_1(q^2) \left[\epsilon^{\lambda\mu} - \frac{\epsilon^\lambda \cdot q}{q^2} q^\mu \right] \\ &+ A_2(q^2) \frac{\epsilon^\lambda \cdot q}{m_B + m_{B^*}} \left[p^\mu + p'^\mu - \frac{m_{B^*}^2 - m_B^2}{q^2} q^\mu \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Lorsque $\vec{q} = 0$, la limite de pion mou est vérifiée car $q^2 = (m_{B^*} - m_B)^2 \sim 0$. En particulier dans la limite statique de HQET, $q^2 = 0$, puisque les mésons lourd-légers pseudoscalaire et vectoriel sont dégénérés dans le doublet $\frac{1}{2}^-$. Dans le référentiel où les mésons sont au repos on peut écrire

$$\langle B(p)|A_i|B^*(p', \epsilon^\lambda) \rangle = (m_{B^*} + m_B) A_1(0) \epsilon_i^\lambda. \quad (3.48)$$

Par ailleurs il existe une relation entre les facteurs de forme $A_{0,1,2}$ car le pôle en q^2 n'est pas physique :

$$2m_{B^*} A_0(0) = (m_{B^*} + m_B) A_1(0) + (m_{B^*} - m_B) A_2(0). \quad (3.49)$$

En prenant la divergence de (3.47) on obtient :

$$\begin{aligned} g_{B^*B\pi} &= \frac{2m_{B^*}}{f_\pi} A_0(0) \\ &= \frac{1}{f_\pi} [(m_{B^*} + m_B) A_1(0) + (m_{B^*} - m_B) A_2(0)]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

²Ici on suppose que les quarks u et d sont dégénérés.

Avec la définition de \hat{g}_b donnée en (3.1) celui-ci a comme expression

$$\hat{g}_b = \frac{m_{B^*} + m_B}{2\sqrt{m_B m_{B^*}}} A_1(0) + \frac{m_{B^*} - m_B}{2\sqrt{m_B m_{B^*}}} A_2(0), \quad (3.51)$$

qui se simplifie à la limite statique : $\hat{g} = A_1(0)$.

3.2.2 Implémentation sur le réseau

Comme c'est expliqué dans [85], il s'agit de calculer $\langle H^* | A_i | H \rangle$ et $\langle H_0^* | A_i | H_1^* \rangle$ sur le réseau par HQET à la limite statique. En se rapportant au chapitre 2, on déduit qu'il est nécessaire de calculer des fonctions de corrélation à deux points $C^{(2)}(t) \sim \langle 0 | J(t) J^\dagger(0) | 0 \rangle$ et à trois points $C^{(3)}(t_1, t_2) \sim \langle 0 | J_2(t_2) A_i^0(t_1) J_1^\dagger(0) | 0 \rangle$ avec les champs interpolants $J = \bar{h} \gamma^5 q$, $\bar{h} q$, $\bar{h} \gamma_i q$ et $\bar{h} \gamma_i \gamma^5 q$ et le courant nu $A_i^0 = \bar{q} \gamma_i \gamma^5 q$. Il faudra ensuite renormaliser ce courant, et la constante de renormalisation Z_A sera estimée non perturbativement. Des méthodes empiriques ont été trouvées pour augmenter le recouvrement des champs interpolants J avec les états fondamentaux : en particulier le "smearing" [86]. On utilise un champ interpolant non local $J(x, \vec{r}) = \phi(|\vec{r}|) \bar{h}(x) \Gamma P(x, x + \vec{r}) q(x + \vec{r})$ où Γ est une matrice de Dirac, $P(x, x + \vec{r})$ est une ligne de Wilson assurant la covariance de jauge du champ interpolant et ϕ est une "fonction d'onde" caractérisant la distribution du quark léger autour de la source statique de couleur créée par le quark lourd. On choisit ϕ de manière à réduire le couplage avec les excitations radiales, de sorte que les masses effectives atteignent un plateau plus rapidement dans le temps. Dans notre simulation ϕ est de la forme $\phi(r) = e^{-r/R_b}$. Cette fonction hydrogénoïde peut se justifier si on considère le méson pseudoscalaire, un peu moins si c'est le scalaire, mais elle s'est avérée donner des résultats satisfaisants pour ce dernier. Dans le chapitre 5 on donnera une méthode beaucoup plus systématique de déterminer cette fonction ϕ , en particulier pour les excitations orbitales 0^+ et 2^+ . En outre $P(x, x + \vec{r})$ est construit à partir de lien "fuzzés" $U_i^F(x)$:

$$U_i^F(x) = \text{Proj}_{\text{SU}(3)} \left[C U_i(x) + \sum_{i \neq j} \left[U_j^{\text{Staple}}(x, x + \hat{i}) + U_{-j}^{\text{Staple}}(x, x + \hat{i}) \right] \right], \quad (3.52)$$

où C est un coefficient choisi empiriquement. On accomplit N_F itérations de fuzzing, où N_F est choisi de manière à ce que le signal ne se détériore pas trop. En effet cette procédure consiste à couper les fluctuations ultraviolettes, comme le blocking hypercubique, et un moyennage trop important fait disparaître la physique longue-distance. Finalement les champs interpolants étalés s'écrivent

$$J^S(x) = \sum_{r=0}^{R_{\max}} (r+1/2)^2 \phi(r) \sum_{i=x,y,z} \left\{ \left[\prod_{k=1}^r U_i^F(x+(k-1)\hat{i}) \right] \bar{h}(x) \Gamma q(x+r\hat{i}) + \left[\prod_{k=1}^r U_i^{F\dagger}(x-k\hat{i}) \right] \bar{h}(x) \Gamma q(x-r\hat{i}) \right\}. \quad (3.53)$$

L'action de Eichten-Hill est connue pour engendrer du bruit statistique d'origine ultraviolette. On s'affranchit de ce dernier en écrivant une action pour le quark statique légèrement modifiée :

$$S_H^{\text{HYP}} = \sum_x \bar{h}(x) \left[h(x) - U_0^{\text{HYP}\dagger}(x - \hat{0}) h(x - \hat{0}) \right]. \quad (3.54)$$

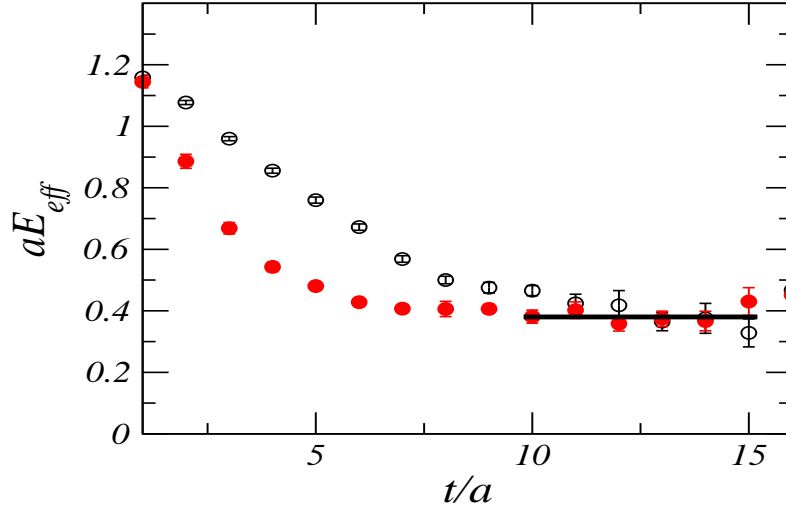


FIG. 3.4: Masse effective du méson pseudoscalaire : les symboles vides correspondent à un champ interpolant local, tandis que les symboles pleins correspondent à un champ interpolant étalé ; $\kappa_{\text{sea}} = \kappa_{\text{val}} = 0.1535$, $\beta = 5.8$, $V = 16^3$.

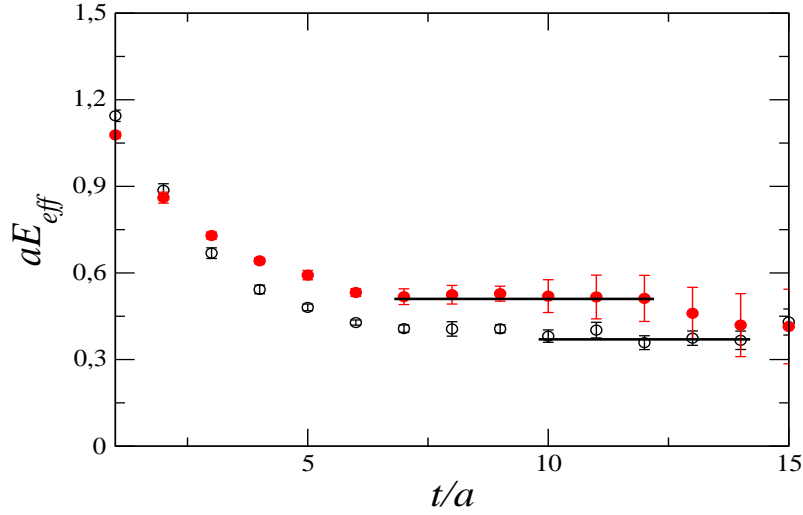


FIG. 3.5: Masse effective des mésons pseudoscalaire (symboles vides) et scalaire (symboles pleins) ; $\kappa_{\text{sea}} = \kappa_{\text{val}} = 0.1535$, $\beta = 5.8$, $V = 16^3$.

Le propagateur statique est donné par

$$S_H(y, x) = -i\theta(y_0 - x_0)\delta(\vec{x} - \vec{y})\frac{1 + \gamma^0}{2} \prod_{t_z=y_0}^{x_0} U_0^{\text{HYP}\dagger}(\vec{x}, t_z). \quad (3.55)$$

Nous pouvons donc construire des fonctions à deux points $C_{S;L;S;L}^{(2)}(t) = \langle 0 | J_{S;L}(\vec{x}, t) J_{S;L}^\dagger(0) | 0 \rangle$ avec les 4 combinaisons possibles de champs interpolants locaux ou étalés. Sur la figure 3.4 on a représenté la masse effective du méson lourd-léger pseudoscalaire obtenue à partir de $C_{L;L}^{(2)}(t)$ et de $C_{S;S}^{(2)}(t)$: on constate que le plateau est meilleur si les champs interpolants sont étalés, ce qui est dû au moyennage sur une configuration donnée qu'introduit cette procédure, permettant de réduire les fluctuations statistiques, et au fait que le couplage avec les excitations radiales sont fortement supprimées beaucoup plus tôt en temps, dès $t = 6a$. On vérifie sur la figure 3.5 que les états fondamentaux du 0^- et du 0^+ ont été correctement isolés, avec un plateau bien identifié pour chacun

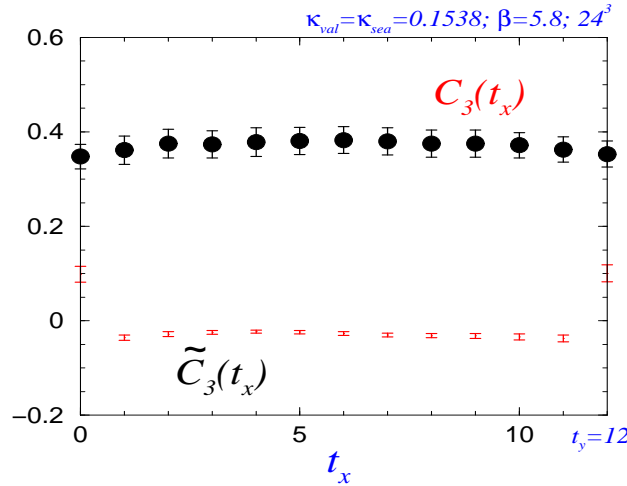


FIG. 3.6: Fonctions de corrélation $C^{(3)}(t_x)$ et $\tilde{C}^{(3)}(t_x)$ pour lesquelles les sources sont fixées en 0 et à $t_y = 12$.

d'entre eux. A noter que c'est presque la première fois que la fonction à deux points du scalaire présente un signal aussi bien exploitable, et le blocking hypercubique n'y est certainement pas étranger.

En se reportant au chapitre précédent on sait que l'élément de matrice $\langle 0^- | A_i | 1^- \rangle$ est donné par le rapport "numérique"

$$R_{\text{num}}(t_x, t_y) = 1/3 \sum_i \frac{C_{V_i, P, A_i}^{(3)}(t_x, t_y) \sqrt{Z_V} \sqrt{Z_P}}{C_V^{(2)}(t_x) C_P^{(2)}(t_y - t_x)}. \quad (3.56)$$

Rappelons qu'à la limite statique 0^- et 1^- sont dégénérés en masse, et même que grâce à la symétrie des quarks lourds les fonctions à deux points $C_V^{(2)}$ et $C_P^{(2)}$ sont strictement identiques, de sorte qu'en fait le rapport "analytique", obtenu par un fit des fonctions à deux points, s'écrit

$$R_{\text{anal}}(t_x, t_y) = 1/3 \sum_i \frac{C_{V_i, P, A_i}^{(3)}(t_x, t_y)}{Z_P e^{-E(0^-) t_y}}. \quad (3.57)$$

Ici on a fait l'hypothèse que t_x et t_y sont tels que l'état fondamental est isolé. On a représenté sur la figure 3.6 les fonctions à trois points $C^{(3)}(t_x, t_y = 12)$ et $\tilde{C}^{(3)}(t_x, t_y = 12)$, correspondant à \hat{g} et \tilde{g} respectivement. Le fait marquant sur cette figure est que le plateau apparaît très tôt en temps, laissant entendre que les couplages $\langle 0^- | A_i | 1^- \rangle$, $\langle 0'^- | A_i | 1^- \rangle$ et au-delà sont pratiquement nuls. En effet, en se limitant à la première excitation radiale de chaque état, on a

$$\begin{aligned} C_{V, P, A_i}^{(3)}(t_x, t_y) &= Z_{\frac{1}{2}^-} e^{-E(\frac{1}{2}^-) t_y} \langle 0^- | A_i | 1^- \rangle + \sqrt{Z_{\frac{1}{2}^-}} \sqrt{Z'_{\frac{1}{2}^-}} e^{-[E(\frac{1}{2}^-) - E'(\frac{1}{2}^-)] t_x} e^{-E'(\frac{1}{2}^-) t_y} \langle 0^- | A_i | 1^- \rangle \\ &+ \sqrt{Z'_{\frac{1}{2}^-}} \sqrt{Z_{\frac{1}{2}^-}} e^{-[E'(\frac{1}{2}^-) - E(\frac{1}{2}^-)] t_x} e^{-E(\frac{1}{2}^-) t_y} \langle 0'^- | A_i | 1^- \rangle + Z'_{\frac{1}{2}^-} e^{-E'(\frac{1}{2}^-) t_y} \langle 0'^- | A_i | 1^- \rangle. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Puisque cette fonction à trois points est quasiment constante dans le temps, les couplages $\langle H_k | A_i | H_l^* \rangle$,

κ_s	$[t_{\min} - t_{\max}]$	χ^2/dof	m_1	v_1^2	m_2	v_2^2
0.1535	[2-13]	2.35/(12-4)	0.39(1)	83(7)	1.3(1)	830(140)
	[2-13]	2.14/(12-6)	0.38(1)	80(11)	1.2(2)	610(400)
0.1538	[2-13]	0.51/(12-4)	0.37(1)	76(6)	1.2(1)	830(130)
	[2-13]	0.16/(12-6)	0.37(1)	72(10)	1.1(2)	650(260)
0.1540	[2-15]	1.84/(14-4)	0.38(1)	81(7)	1.3(1)	1100(190)
	[3-14]	0.5/(12-6)	0.36(2)	66(20)	0.9(3)	300(240)
0.1541	[2-14]	0.84/(13-4)	0.37(1)	76(6)	1.3(1)	920(150)
	[2-13]	0.5/(12-6)	0.37(1)	73(10)	1.2(2)	690(360)

TAB. 3.1: Résultat des fits de $C_P^{(2)}(t)$ par 2 ou 3 exponentielles ; $\beta = 5.8, V = 24^3$.

κ_s	$[t_{\min} - t_{\max}]$	χ^2/dof	m'_1	v'_1	m'_2	v'_2
0.1535	[2-12]	1.40/(11-4)	0.50(2)	64(12)	1.3(1)	390(80)
0.1538	[2-12]	0.91/(11-4)	0.49(3)	60(15)	1.2(1)	370(70)
0.1540	[2-12]	0.81/(12-4)	0.51(2)	78(13)	1.3(2)	470(130)
0.1541	[2-12]	0.44/(11-4)	0.48(2)	60(13)	1.1(2)	330(50)

TAB. 3.2: Résultat du fit de $C_S^{(2)}(t)$ par 2 exponentielles ; $\beta = 5.8, V = 24^3$.

$k \neq l$, sont nuls : ceci est valable dans le cadre du modèle des quarks, où l'opérateur A_i n'agit que sur les spins des quarks légers, et où les fonctions d'onde de l'état fondamental et de l'état excité sont orthogonales. On extrait le couplage nu \hat{g}^0 en fittant par une constante R_{anal} et R_{num} là où ces deux rapports coïncident, en supposant que le smearing a été suffisamment efficace pour supprimer le terme $\mathcal{Z}'_{\frac{1}{2}-} e^{-E'(\frac{1}{2}-)t_y} \langle 0' - | A_i | 1' - \rangle$ du développement de la fonction à trois points. Cela ne serait pas le cas si $\mathcal{Z}'_{\frac{1}{2}-} e^{-E'(\frac{1}{2}-)t_y} \sim \mathcal{Z}_{\frac{1}{2}-} e^{-E(\frac{1}{2}-)t_y}$, c'est à dire $\mathcal{Z}'_{\frac{1}{2}-} \gg \mathcal{Z}_{\frac{1}{2}-}$, ce qui signifierait que la procédure de smearing aurait totalement échoué. Nous avons indiqué dans la table 3.1 les valeurs de m_i et de v_i^2 , après un fit de la fonction à 2 points $C_P^{(2)}(t)$ par 2 ou 3 exponentielles :

$$C_P^{(2)}(t) = \sum_i v_i^2 e^{-m_i t}.$$

On remarque que les résultats sont quasiment les mêmes, le fit à 3 exponentielles donnant des erreurs plus grandes. Cela signifie que le fondamental est bien isolé, tandis que le couplage avec la première excitation a été relativement bien supprimé. Notons qu'un fit à 2 exponentielles effectué dans l'intervalle [5-14] donne à $\kappa_s = 0.1535$ $E(\frac{1}{2}-) = 0.35(1)$ et $E'(\frac{1}{2}-) = 0.6(5)$, ce qui confirme que la procédure de smearing a été efficace car la masse de la première excitation radiale est très mal déterminée. La table 3.2 contient les valeurs de m'_i , et v'_i déterminées par un fit de $C_S^{(2)}(t)$ à 2 exponentielles uniquement, un fit à 3 exponentielles étant impossible.

Il semble donc que les fonctions à 3 points ne contiennent que les éléments de matrice recherchés et que leur extraction ne soit pas contaminée par les excitations car on a systématiquement $\mathcal{Z}'_{\frac{1}{2}\pm} e^{-E'(\frac{1}{2}\pm)t_y} \ll \mathcal{Z}_{\frac{1}{2}\pm} e^{-E(\frac{1}{2}\pm)t_y}$.

On a récapitulé les résultats dans la table 3.3, pour le réseau $\beta = 5.8$ et $V = 24^3$. La stabilité en fonction de t_y a été vérifiée en fixant celui-ci à 11 et à 13.

$\kappa_{\text{sea}} = \kappa_{\text{val}}$	$r_0 m_\pi$	$r_0(E(\frac{1}{2}^+) - E(\frac{1}{2}^-))$	$\hat{g}(m_\pi^2)$	$\tilde{g}(m_\pi^2)$
0.1535	1.97(5)	1.49(11)	0.55(4)	-0.18(1)
0.1538	1.82(4)	1.71(12)	0.48(3)	-0.20(4)
0.1540	1.72(5)	1.60(12)	0.52(6)	-0.21(4)
0.1541	1.47(7)	1.74(19)	0.43(4)	-0.14(2)

TAB. 3.3: Résultats pour le splitting orbital $E(\frac{1}{2}^+) - E(\frac{1}{2}^-)$, les couplages \hat{g} et \tilde{g} , obtenus à partir des simulations unquenched $N_f = 2$ dans lesquelles les quarks dynamiques ont une masse correspondant à celle du pion, celle-ci étant également donnée.

Les valeurs de $\hat{g}(m_\pi^2)$ sont compatibles avec les estimations quenched effectuées auparavant [84]. On remarque que \tilde{g} est clairement négatif, et sa valeur absolue est nettement inférieure à celle de \hat{g} , remettant ainsi en question le modèle des doublets de parité [64]. Malheureusement les erreurs statistiques et systématiques ne sont pas suffisamment petites pour effectuer les extrapolations chirales en toute confiance, si bien qu'on ne donnera que des bornes pour ces couplages pioniques : $0.4 \leq \hat{g} \leq 0.6$ et $-0.3 \leq \tilde{g} \leq -0.1$. Le rapport $\frac{\tilde{g}}{\hat{g}}$ est moins sujet aux fluctuations statistiques, et on a

$$\tilde{g}/\hat{g} = -0.34(3), -0.43(9), -0.39(7), -0.31(6), \quad (3.59)$$

dans l'ordre décroissant de la masse du quark léger.

Il reste encore à discuter de la renormalisation non perturbative du courant axial $\bar{q}\gamma_\mu\gamma^5q$: les couplages pioniques ont été obtenus en multipliant les rapports (3.56) par la constante de renormalisation Z_A calculée en utilisant les identités de Ward chirales.

3.2.3 Renormalisation non perturbative

Les identités de Ward sont l'équivalent quantique du théorème de Noether établissant l'existence de courants conservés lorsqu'un Lagrangien classique est invariant sous une symétrie locale. Ces identités sont des égalités entre fonctions de Green qui impliquent des courants classiquement conservés. Les courants dont il sera question dans ce paragraphe sont les courants vectoriels $\bar{\psi}\gamma_\mu t^a\psi$ et axiaux $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5 t^a\psi$, où t^a sont les générateurs des symétries dans l'espace des saveurs. Dans l'espace Euclidien la valeur moyenne d'un produit de champs composites \mathcal{O} est défini par

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\text{champs}} \mathcal{O} e^{-S}, \quad (3.60)$$

et on suppose que la mesure d'intégration est invariante sous une transformation infinitésimale des champs ; les identités de Ward s'écrivent génériquement

$$\langle \delta \mathcal{O} \rangle = \langle \mathcal{O} \delta S \rangle. \quad (3.61)$$

Par exemple avec l'action $S = \int d^4x \bar{\psi}(\not{D} + m)\psi$, où on se place dans l'espace des isospins avec $m \propto 1$, et la transformation $\delta\psi(x) = \omega^a(x)\frac{\tau^a}{2}\gamma^5\psi(x)$, $\delta\bar{\psi}(x) = \omega^a(x)\bar{\psi}(x)\gamma^5\frac{\tau^a}{2}$,

$$\delta S = \int d^4x \omega^a(x)[- \partial_\mu A^{a\mu} + 2mP^a], \quad A^{a\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\frac{\tau^a}{2}\psi, \quad P^a = \bar{\psi}\gamma^5\frac{\tau^a}{2}\psi. \quad (3.62)$$

Si de plus on suppose que $\delta\mathcal{O} = 0$, on obtient l'identité

$$\langle \partial_\mu A^{a\mu}(x)\mathcal{O} \rangle = 2m\langle P^a(x)\mathcal{O} \rangle, \quad (3.63)$$

ce qui est l'équivalent dans l'Euclidien de PCAC. Ajoutons que si la matrice de masse m est quelconque cette identité devient

$$\langle \partial_\mu A^{a\mu}\mathcal{O} \rangle = \langle \bar{\psi}(x) \left\{ m, \frac{\tau^a}{2} \right\} \psi(x)\mathcal{O} \rangle. \quad (3.64)$$

Notons enfin que le courant vectoriel $V^{a\mu} = \bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\tau^a}{2}\psi$, associé à la transformation $\delta\psi(x) = \omega^a(x)\frac{\tau^a}{2}\psi(x)$, $\delta\bar{\psi}(x) = -\omega^a(x)\bar{\psi}(x)\frac{\tau^a}{2}$, vérifie l'identité

$$\langle \partial_\mu V^{a\mu}\mathcal{O} \rangle = \langle \bar{\psi}(x) \left[m, \frac{\tau^a}{2} \right] \psi(x)\mathcal{O} \rangle, \quad (3.65)$$

et qu'il est conservé si $m \propto 1$.

Il est intéressant de s'interroger sur le devenir de ces identités de Ward sur le réseau : en particulier est-ce qu'on peut modifier simplement le terme ∂_μ par la différentielle discrétisée Δ_μ . Rappelons que l'action de Wilson brise explicitement la symétrie chirale, si bien que l'opérateur axial $A^{a\mu}$ n'est plus partiellement conservé. De même on sait que l'opérateur vectoriel local $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\frac{\tau^a}{2}\psi(x)$ n'est plus conservé non plus car l'action discrète contient des termes non locaux $\bar{\psi}(x)U_\mu(x)\psi(x + \mu)$. Réécrivons la transformation infinitésimale générale sous la forme

$$\begin{aligned} \delta\psi(x) &= i \left[(\omega_V^a + \omega_A^a\gamma^5) \frac{\tau^a}{2} \right] \psi(x), \\ \delta\bar{\psi}(x) &= i\bar{\psi}(x) \left[(-\omega_V^a + \omega_A^a\gamma^5) \frac{\tau^a}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Avec un opérateur quelconque $\mathcal{O}(x_1, \dots, x_n)$, $x_1 \neq \dots \neq x_n$ (de façon à éliminer les termes de contact), on écrit les identités de Ward sous la forme

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta\omega^a(x)} \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) \right\rangle = \left\langle \frac{\delta\mathcal{O}(x_1, \dots, x_n)}{\delta\omega^a(x)} \right\rangle. \quad (3.67)$$

Avec l'action de Wilson définie par l'équation (2.14), l'identité de Ward vectorielle s'obtient en fixant

$\omega_A^a(x) \equiv 0$:

$$\begin{aligned}
-i \frac{\delta S}{\delta \omega_V^a(x)} &= \bar{\psi}(x) \left[m_0, \frac{\tau^a}{2} \right] \psi(x) - \frac{1}{2a} \sum_{\mu} \left[\bar{\psi}(x+\mu)(1+\gamma_{\mu}) \frac{\tau^a}{2} U_{\mu}^{\dagger}(x) \psi(x) - \bar{\psi}(x)(1-\gamma_{\mu}) \frac{\tau^a}{2} U_{\mu}(x) \psi(x+\mu) \right. \\
&\quad \left. - \bar{\psi}(x)(1+\gamma_{\mu}) \frac{\tau^a}{2} U_{\mu}^{\dagger}(x-\mu) \psi(x-\mu) + \bar{\psi}(x-\mu)(1-\gamma_{\mu}) \frac{\tau^a}{2} U_{\mu}(x-\mu) \psi(x) \right] \\
&= \bar{\psi}(x) \left[m_0, \frac{\tau^a}{2} \right] \psi(x) - \sum_{\mu} \Delta_{\mu} \tilde{V}^{\mu}(x), \tag{3.68}
\end{aligned}$$

$$\tilde{V}^{a\mu}(x) = \frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(x+\mu)(1+\gamma_{\mu}) \frac{\tau^a}{2} U_{\mu}^{\dagger}(x) \psi(x) - \bar{\psi}(x)(1-\gamma_{\mu}) \frac{\tau^a}{2} U_{\mu}(x) \psi(x+\mu) \right], \quad \Delta_{\mu}^x f(x) = \frac{f(x) - f(x-\mu)}{a}.$$

On trouve finalement

$$i \left\langle \frac{\delta \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n)}{\delta \omega_V^a(x)} \right\rangle = \sum_{\mu} \Delta_{\mu}^x \langle \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) \tilde{V}_{\mu}^a(x) \rangle + \left\langle \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) \bar{\psi}(x) \left[\frac{\tau^a}{2}, m_0 \right] \psi(x) \right\rangle. \tag{3.69}$$

En choisissant $\mathcal{O}(x_1, x_2) = \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)$ et la limite des masses nues des quarks dégénérées, on écrit l'égalité précédente dans l'espace de Fourier et on l'exprime à la limite du continu. Enfin en exigeant qu'elle demeure vraie pour les quantités renormalisées, on montre que $\tilde{V}_{\mu}^a(x)$ est conservé ($Z_{\tilde{V}} = 1$), et qu'il s'écrit en fonction du courant local V_{μ}^a de la manière suivante :

$$\tilde{V}_{\mu}^a(x) = V_{\mu}^a(x) + \frac{a}{2} \left[\bar{\psi}(x) (\gamma_{\mu} - 1) \frac{\tau^a}{2} \vec{D}_{\mu} \psi(x) + \bar{\psi}(x) \overleftarrow{D}_{\mu} (\gamma_{\mu} + 1) \frac{\tau^a}{2} \psi(x) \right], \tag{3.70}$$

si bien qu'on exprime la constante de renormalisation $Z_V(g_0^2)$, légèrement différente de 1, par l'élément de matrice hadronique $\langle i | \tilde{V}_{\mu}^a | j \rangle = Z_V(g_0^2) \langle i | V_{\mu}^a | j \rangle$. Il a été montré qu'aucune divergence supplémentaire n'est introduite, et ceci à tous les ordres de la théorie des perturbations [87]. En choisissant $\mathcal{O}(x_1, x_2) = P^{ij}(x_1) P^{ki}(x_2)$, $P^{ij}(y) = \bar{\psi}_i(y) \gamma^5 \psi_j(y)$, et $x \neq x_1, x_2$ on obtient

$$\sum_{\mu} \Delta_{\mu}^x \langle P^{ij}(x_1) \tilde{V}_{\mu}^{jk}(x) P^{ki}(x_2) \rangle = (m_j - m_k) \langle P^{ij}(x_1) S^{jk}(x) P^{ki}(x_2) \rangle. \tag{3.71}$$

En exigeant que cette identité soit vraie également pour les quantités renormalisées, on a $Z_m Z_S = 1$, où $m_i^R = Z_m(m_i - m_c)$ et $S^R(x) = Z_S S(x)$ (rappelons que la masse doit être renormalisée additivement).

L'identité de Ward axiale s'obtient en suivant le même schéma que précédemment, avec cette fois $\omega_V^a(x) \equiv 0$:

$$\begin{aligned}
-i \frac{\delta S}{\delta \omega_A^a(x)} &= \bar{\psi}(x) \left\{ m_0, \frac{\tau^a}{2} \gamma^5 \right\} \psi(x) + \frac{8}{a} \bar{\psi}(x) \frac{\tau^a}{2} \gamma^5 \psi(x) \\
&\quad - \frac{1}{2a} \sum_{\mu} \left[\bar{\psi}(x+\mu)(1+\gamma_{\mu}) \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} U_{\mu}^{\dagger}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x)(1+\gamma_{\mu}) \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} U_{\mu}(x) \psi(x+\mu) \right. \\
&\quad \left. + \bar{\psi}(x)(1-\gamma_{\mu}) \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} U_{\mu}^{\dagger}(x-\mu) \psi(x-\mu) + \bar{\psi}(x-\mu)(1-\gamma_{\mu}) \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} U_{\mu}(x-\mu) \psi(x) \right] \\
&= \bar{\psi}(x) \left\{ m_0, \frac{\tau^a}{2} \right\} \gamma^5 \psi(x) - \sum_{\mu} \Delta_{\mu} \tilde{A}^{a\mu}(x) + X^a, \tag{3.72}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{a\mu}(x) &= \frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(x+\mu)\gamma_\mu\gamma^5\frac{\tau^a}{2}U_\mu^\dagger(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma^5\frac{\tau^a}{2}U_\mu(x)\psi(x+\mu) \right], \\ X^a &= -\sum_\mu \left[\bar{\psi}(x)\frac{\tau^a}{2}\gamma^5 \left(U_\mu(x)\psi(x) + U_\mu^\dagger(x-\mu)\psi(x-\mu) - 2\psi(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\bar{\psi}(x-\mu)U_\mu(x-\mu) + \bar{\psi}(x+\mu)U_\mu^\dagger(x) - 2\psi(x) \right) \frac{\tau^a}{2}\gamma^5\psi(x) \right] \\ &= -\frac{1}{2}a \left[\bar{\psi}(x)\frac{\tau^a}{2}\gamma^5 \overrightarrow{D}^2 \psi(x) + \bar{\psi}(x)\overleftarrow{D}^2 \frac{\tau^a}{2}\gamma^5\psi(x) \right].\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$i \left\langle \frac{\delta \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n)}{\delta \omega_A^a(x)} \right\rangle = \sum_\mu \Delta_\mu \langle \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) \tilde{A}_\mu^a \rangle - \left\langle \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) \bar{\psi}(x) \left\{ \frac{\tau^a}{2}, m_0 \right\} \psi(x) \right\rangle - \langle \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) X^a \rangle. \quad (3.73)$$

X^a provient de la variation du terme de Wilson dans l'action fermionique sous la transformation axiale et ne peut pas être écrit comme un terme de divergence. C'est un opérateur de dimension 5 et peut se mélanger avec des opérateurs de dimension inférieure au-delà du calcul à l'ordre des arbres. On définit alors un opérateur \overline{X}^a à partir de X^a [88]

$$\overline{X}^a = X^a + \bar{\psi}(x) \left\{ \overline{m}, \frac{\tau^a}{2} \right\} \gamma^5 \psi(x) + (Z_{\tilde{A}} - 1) \Delta_\mu^x \tilde{A}_\mu^a. \quad (3.74)$$

Par un simple comptage dimensionnel, on note que $Z_{\tilde{A}}(g_0^2, am)$ est fini, tandis que $\overline{m}(g_0^2, m_0)$ diverge linéairement et que les divergences logarithmiques sont absentes à tous les ordres de la théorie des perturbations. $Z_{\tilde{A}}$ et \overline{m} sont choisis tels que le courant axial renormalisé vérifie l'identité de Ward du continu : cela implique une condition de renormalisation qui assure que la symétrie chirale est restaurée dans la théorie renormalisée. Avec $\mathcal{O}(x_1, x_2) = \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)$, cette condition est la suivante :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \bar{\psi}(x_1) \overline{X}^a(x) \psi(x_2) \rangle = 0, \quad (3.75)$$

c'est à dire que le corrélateur d'un opérateur et de \overline{X}^a soit nul à la limite du continu. La limite chirale est définie par la valeur m_c de m_0 de sorte que $m_c - \overline{m}(g_0^2, m_c) = 0$. \tilde{A}_μ^a peut s'écrire en fonction du champ local A_μ^a , et on identifie à la limite du continu $Z_{\tilde{A}} \tilde{A}_\mu^a = Z_A A_\mu^a$. Avec $O(x_1) = P^{ji}(x_1)$, $x \neq x_1$, on a

$$Z_A \sum_\mu \Delta_\mu^a \langle A_\mu^{ij}(x) P^{ji}(x_1) \rangle = \langle \overline{X}^{ij}(x) P^{ji}(x_1) \rangle + (m_{0i} + m_{0j} - \overline{m}_i - \overline{m}_j) \langle P^{ij}(x) P^{ji}(x_1) \rangle. \quad (3.76)$$

En définissant $m^R = \overline{Z}_m(m_0 - \overline{m}(m_0))$, et en exigeant que cette identité soit valable à la limite du continu pour les quantités renormalisées, on a $\overline{Z}_m Z_P = 1$. Dans cette limite on définit la *masse axiale* ρ par

$$2\rho^{ij} = Z_A^{-1} (m_{0i} + m_{0j} - \overline{m}_i - \overline{m}_j) = \frac{\sum_\mu \Delta_\mu^x \langle A_\mu^{ij}(x) P^{ji}(x_1) \rangle}{\langle P^{ij}(x) P^{ji}(x_1) \rangle}. \quad (3.77)$$

On est alors en mesure de calculer non perturbativement les constantes de renormalisation Z_A ,

$\beta(N_f)$	κ_s	Z_V	Z_A	$(Z_P/Z_S)_I$	$(Z_P/Z_S)_{II}$
5.8 ($N_f = 2$)	0.1535	0.67(1)	0.86(2)	0.66(2)	0.66(3)
	0.1538	0.68(1)	0.84(2)	0.66(2)	0.64(3)
	0.1540	0.68(1)	0.83(3)	0.69(3)	0.69(3)
	0.1541	0.64(2)	0.81(2)	0.67(5)	0.77(6)
5.6 ($N_f = 2$)	0.1560	0.64(1)	0.86(1)	0.63(1)	0.57(1)
	0.1575	0.64(1)	0.88(2)	0.64(3)	0.64(1)
	0.1580	0.64(2)	0.83(3)	0.60(2)	0.57(3)

TAB. 3.4: Constantes de renormalisation des opérateurs bilinéaires de quarks légers calculées non perturbativement par les identités de Ward chirales.

$Z_V, Z_P/Z_S$, associées aux opérateurs bilinéaires de quark ayant la même structure tensorielle. Par exemple en choisissant $O = V_0^b(x)P(0)$, et en supposant que $\omega_A^a(0) = 0$, on a [89]

$$2\rho Z_V \int d^4z \sum_{\vec{x}} \langle P^a(z) V_0^b(x) P(0) \rangle = \epsilon^{abc} \sum_{\vec{x}} \langle A_0^c(x) P(0) \rangle, \quad (3.78)$$

d'où on extrait Z_V . En choisissant $O = V_i^b(x)A_i^c(0)$, on a

$$2\rho Z_V Z_A^2 \int d^4z \sum_{\vec{x}} \langle P^a(z) V_i^b(x) A_i^c(0) \rangle = Z_A^2 \epsilon^{abd} \sum_{\vec{x}} \langle A_i^d(x) A_i^c(0) \rangle + Z_V^2 \epsilon^{acd} \sum_{\vec{x}} \langle V_i^b(x) V_i^d(0) \rangle; \quad (3.79)$$

avec $a = 1, b = 2$ et $c = 3$, on obtient

$$2\rho Z_V Z_A^2 \int d^4z \sum_{\vec{x}} \langle P^1(z) V_i^2(x) A_i^3(0) \rangle = Z_A^2 \sum_{\vec{x}} \langle A_i^3(x) A_i^3(0) \rangle - Z_V^2 \sum_{\vec{x}} \langle V_i^2(x) V_i^2(0) \rangle, \quad (3.80)$$

d'où on extrait Z_A . Enfin en choisissant $O = S(x)P(0)$, on peut écrire

$$2\rho Z_A Z_S Z_P \int d^4z \sum_{\vec{x}} \langle P^a(x) S(x) P(0) \rangle = Z_P^2 \sum_{\vec{x}} \langle P^a(x) P(0) \rangle + Z_S^2 \sum_{\vec{x}} \langle S(x) S^a(0) \rangle, \quad (3.81)$$

$$2\rho Z_A \int d^4z \sum_{\vec{x}} \langle P^a(z) S(x) P(0) \rangle = \frac{Z_P}{Z_S} \sum_{\vec{x}} \langle P^a(x) P(0) \rangle + \frac{Z_S}{Z_P} \sum_{\vec{x}} \langle S(x) S^a(0) \rangle, \quad (3.82)$$

ce qui permet d'estimer non perturbativement Z_P/Z_S , qui est donné également par $Z_P/Z_S = \frac{2\rho Z_A}{m_0 - m_c}$.

Les constantes de renormalisation $Z_V, Z_A, (Z_P/Z_S)_I$ et $(Z_P/Z_S)_{II}$ déterminées à l'aide des identités de Ward écrites précédemment ont été indiquées dans la table 3.4, les indices I et II faisant référence aux deux manière d'estimer (Z_P/Z_S) .

Chapitre 4

Masse des quarks légers

Nous allons dans ce petit chapitre terminer la présentation de l'estimation non perturbative de la masse des quarks légers débutée dans le chapitre 2, où nous avons introduit la calibration de la maille du réseau a par l'estimation de r_0 , en reprenant dans les grandes lignes ce qui a été exposé dans [50]. Les masses des 6 quarks présents dans le Modèle Standard sont 6 des 19 paramètres fondamentaux de cette théorie. Il convient donc de les estimer le mieux possible. Malheureusement aucune mesure expérimentale directe n'est envisageable puisque ces quarks ne sont pas des particules libres. Une évaluation indirecte peut être entreprise en étudiant attentivement les corrections radiatives sur une grandeur donnée, comme ce fut le cas pour déterminer la masse du quark t . Les masses des quarks légers sont cruciales à déterminer, car elles entrent dans l'expression de nombreuses quantités phénoménologiques de la physique chirale. Toutefois étant donné qu'un quark ne peut pas se trouver sur sa couche de masse, sa masse n'est en soi pas une quantité physique, mais elle dépend d'une échelle d'énergie, à cause des fluctuations quantiques. Dans la suite on donnera donc les valeurs de $m_{u,d,s}(\mu = 2 \text{ GeV})$ renormalisées dans le schéma $\overline{\text{MS}}$. Les résultats semblaient indiquer que l'inclusion des quarks dynamiques avaient tendance à baisser ces masses : par exemple dans l'approximation quenched, $m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) \simeq 100 \text{ MeV}$ tandis que $m_s^{\overline{\text{MS}}, N_f=2}(2 \text{ GeV}) = 85 \div 90 \text{ MeV}$ [90], [91] et $m_s^{\overline{\text{MS}}, N_f=3}(2 \text{ GeV}) = 75 \div 80$ [92]. Malheureusement les estimations unquenched sont sujettes à de grandes erreurs systématiques, notamment à cause de la manière dont les constantes de renormalisation sont calculées, comme cela a été montré dans l'approximation quenched. Le calcul non perturbatif de ces constantes ont abouti au résultat $m_s^{\overline{\text{MS}}, N_f=2}(2 \text{ GeV}) = 119 \pm 9 \text{ MeV}$ [93], soit 20% plus élevé que celui donné par [91] qui a mené un calcul perturbatif. Dans [50] la constante de renormalisation de la masse a été évaluée non perturbativement dans le schéma de renormalisation RI-MOM [94] dont nous allons brièvement exposer le principe.

Nous avons vu dans les sections précédentes que la masse du quark est définie soit par une identité de Ward axiale

$$\frac{\langle \sum_{\vec{x}} \partial_0 A_0(x) P^\dagger(0) \rangle}{\langle \sum_{\vec{x}} P(x) P^\dagger(0) \rangle} \xrightarrow{t \gg 0} (m_{v_1}(a) + m_{v_2}(a))^{\text{AWI}}, \quad (4.1)$$

où $A_0(x) = \bar{q}_{v_1}(x) \gamma_0 \gamma^5 q_{v_2}(x)$, $P(x) = \bar{q}_{v_1}(x) \gamma^5 q_{v_2}(x)$, soit par une identité de Ward vectorielle

$$m_v^{\text{VWI}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_v} - \frac{1}{\kappa_c(\kappa_s)} \right), \quad (4.2)$$

où $v = v_1, v_2$. Ces deux masses dépendent bien entendu de la masse des quarks de la mer, soit au travers du rapport des fonctions à deux points pour l'AWI, soit dans $\kappa_c(\kappa_s)$ pour la VWI. Les constantes de renormalisation Z_m^{VWI} et Z_m^{AWI} sont alors définies par

$$Z_m^{\text{VWI}}(a\mu) = \frac{1}{Z_S(a\mu)}, \quad Z_m^{\text{AWI}}(a\mu) = \frac{Z_A}{Z_P(a\mu)}. \quad (4.3)$$

Rappelons que le courant axial est partiellement conservé, si bien que Z_A ne dépend d'aucune échelle de renormalisation. Le calcul non perturbatif des constantes de renormalisation définies dans le schéma RI-MOM s'effectue de la manière suivante : considérons un opérateur bilinéaire de quarks $O_\Gamma = \bar{q}\Gamma q$ dont on calcule la fonction de corrélation

$$G_\Gamma(p, p') = \int d^4x d^4y e^{-i(p \cdot x - p' \cdot y)} \langle q^R(x) O_\Gamma(0) \bar{q}^R(y) \rangle, \quad (4.4)$$

où q^R désigne le champ de quark renormalisé. En utilisant la fonction de Green renormalisée $G_\Gamma^R(p, p')$ et le propagateur de quark renormalisé

$$S^R(p) = \int d^4x e^{-ip \cdot x} \langle q^R(x) \bar{q}^R(0) \rangle, \quad (4.5)$$

on définit la fonction de vertex amputé renormalisée $\Lambda_\Gamma^R(p, p') = (S^{-1})^R(p) G_\Gamma^R(p, p') (S^{-1})^R(p')$, et Z_Γ est calculé en imposant la condition $Z_\Gamma \Lambda_\Gamma(p, p)|_{p^2=\mu^2} = \Lambda^{\text{tree}}$, ou $Z_\Gamma \text{Tr}(\Lambda_\Gamma(p, p) P_\Gamma)|_{p^2=\mu^2} = 1$, $\text{Tr}(\Gamma P_\Gamma) = 1$. Ce schéma s'appelle le schéma MOM. En pratique $\Lambda_{\text{QCD}} \ll \mu \ll \pi/a$, de façon à pouvoir faire le raccordement avec d'autres schémas à l'aide de la théorie des perturbations. Le calcul de la fonction de vertex est effectué dans une jauge covariante fixée, comme la jauge de Landau. Dans cette approche la constante de renormalisation du champ de quark Z_q est donnée par

$$Z_q \frac{i}{12} \text{Tr} \left(\frac{\not{p} S^{-1}(p)}{p^2} \right)_{p^2=\mu^2} = 1, \quad \not{p} \equiv \frac{1}{a} \sum_\nu \gamma_\nu \sin(ap_\nu), \quad p^2 \equiv \frac{1}{a^2} \sum_\nu \sin^2(ap_\nu). \quad (4.6)$$

On évalue alors

$$Z_\Gamma(a\mu_0) = C_\Gamma(a\mu_0) Z_\Gamma^{\text{RGI}} = C_\Gamma(a\mu_0) [Z_\Gamma(a\mu)/C_\Gamma(a\mu)], \quad (4.7)$$

où la fonction d'évolution $C_\Gamma(a\mu)$ est donnée par $C_\Gamma(a\mu) = \exp(\int^{\alpha_s(\mu)} d\alpha_s \gamma_\Gamma/\beta(\alpha_s))$, est connue à N³LO en théorie des perturbations dans le schéma RI-MOM [95] et compense explicitement toute la dépendance en μ de Z_Γ à cet ordre.

Les résultats obtenus doivent être plats en $(a\mu)^2$, modulo les erreurs de discrétisation. On a représenté sur la figure 4.1 $Z_{V,A}$ ainsi que $Z_{S,P,T}(a\mu_0)$ en fonction de $(a\mu)^2$, où $a\mu_0 = 1$, et on constate que ces effets sont bien marqués pour $Z_S(a\mu_0)$; ils ont été corrigés en extrapolant linéairement de $1 \leq (a\mu)^2 \leq 2$ vers $(a\mu)^2 = 0$. Puisque le schéma RI-MOM est indépendant de masse on peut extrapoler la faible dépendance en masse des quarks de la mer de ces constantes de renormalisation linéairement vers la limite chirale, ce qui est indiqué dans la table 4.1. Elles ne diffèrent que de 5% avec celles obtenues à $\beta = 5.8$ et $L = 16$. Les effets de volume fini sont faibles comparés aux effets de discrétisation car on s'intéresse ici à la physique courte distance. Afin de comparer avec un calcul perturbatif on a également indiqué leur valeur obtenue par un calcul à 1 boucle de

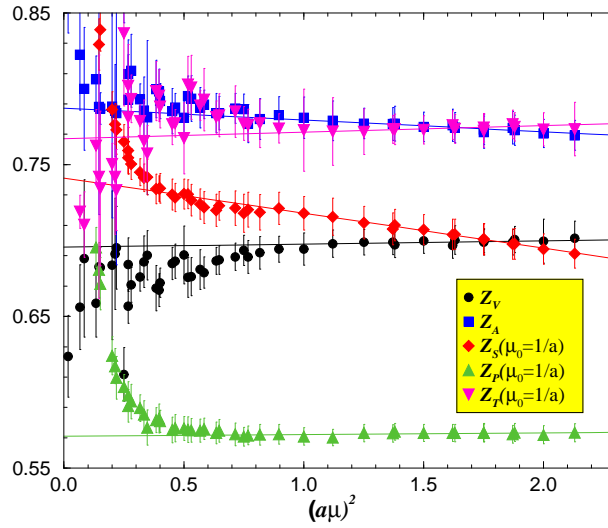


FIG. 4.1: Constantes de renormalisation dans le schéma RI-MOM à l'échelle $a\mu_0 = 1$, calculée à l'aide de (4.7), comme une fonction de l'échelle initiale de renormalisation $(a\mu)^2$. Les effets de discrétisation $\propto (a\mu)^2$ sont supprimés en extrapolant les données de $1 \leq (a\mu)^2 \leq 2$, à $(a\mu)^2 = 0$. Ici $\kappa_s = 0.1538$.

la "Boosted Perturbation Theory" (BPT) [96], employée en remplaçant la constante de couplage nue $g_0^2 \rightarrow \tilde{g}^2$ dans les expressions de [97] soit de manière "naïve"

$$\tilde{g}^2 = g_0^2 / \langle P \rangle, \quad (4.8)$$

où $\langle P \rangle$ est la valeur moyenne de la plaquette, ou "tadpole improved" défini en inversant la série perturbative du logarithme de la plaquette :

$$\ln \langle P \rangle = -\frac{1}{3} \tilde{g}^2 (3.40/a) \left[1 - (1.1905 - 0.2266 N_f) \frac{\tilde{g}^2 (3.40/a)}{(4\pi)} \right]. \quad (4.9)$$

On constate alors que les $Z_{S,P}$ perturbatifs sont nettement plus grands que les non perturbatifs, si bien que les constantes $Z_m^{\text{AWI}, \text{VWI}}$ non perturbatives sont renforcées de 15% et 6% respectivement, à $\beta = 5.8$.

L'estimation de m_v^{VWI} nécessite celle de κ_c . Inspiré par la ChPT partiellement quenched [98], mais en négligeant les log chiraux (la masse des quarks de la mer étant trop élevée), on fitte les données sur la masse du méson pseudoscalaire par

$$M_P^2(\kappa_s, \kappa_{v_1}, \kappa_{v_2}) = Q_1 m_v^{\text{VWI}} [1 + Q_2 m_s^{\text{VWI}} + Q_3 m_v^{\text{VWI}}], \quad (4.10)$$

et on obtient $Q_2 = -0.2(25)$ et $Q_3 = 0.4(14)$. Autrement dit nous ne sommes pas sensibles aux corrections quadratiques, ainsi qu'on l'observe sur la figure 4.2, et on fixe $Q_2 = Q_3 = 0$. On trouve $Q_1 = 1.70(3)$ et

$$(\kappa_{cr})_{\kappa_s} = \{0.15544(7)_{0.1535}, 0.15537(6)_{0.1538}, 0.15537(5)_{0.1540}, 0.15503(8)_{0.1541}\}. \quad (4.11)$$

L'étape suivante consiste à étudier la dépendance en la masse des quarks de valence et de la mer de M_P^2 . De la partie gauche de la figure 4.3 on constate qu'elle dépend linéairement de la masse de

$\beta (N_f)$	κ_s	Z_q	Z_V	Z_A	Z_S	Z_P	Z_T
5.8 ($N_f = 2$)	0.1535	0.81(1)	0.70(1)	0.80(2)	0.74(1)	0.54(1)	0.78(2)
	0.1538	0.80(1)	0.70(1)	0.79(2)	0.73(2)	0.55(1)	0.77(2)
	0.1540	0.78(1)	0.67(1)	0.77(2)	0.72(1)	0.52(1)	0.75(2)
	0.1541	0.79(1)	0.69(1)	0.78(2)	0.71(2)	0.52(1)	0.77(2)
	$\kappa_{cr}(\kappa_{cr})$	0.76(1)	0.66(2)	0.76(1)	0.67(3)	0.50(2)	0.74(4)
	N-BPT	0.75	0.70	0.77	0.75	0.61	0.75
	TI-BPT	0.72	0.65	0.73	0.71	0.55	0.71
5.6 ($N_f = 2$)	0.1560	0.78(2)	0.63(4)	0.78(3)	0.67(2)	0.46(1)	0.76(5)
	0.1575	0.78(2)	0.64(4)	0.77(2)	0.65(2)	0.46(1)	0.77(3)
	0.1580	0.78(1)	0.66(1)	0.78(4)	0.69(2)	0.50(1)	0.78(3)
	$\kappa_{cr}(\kappa_{cr})$	0.78(1)	0.66(1)	0.78(1)	0.67(1)	0.47(1)	0.78(2)
		N-BPT	0.74	0.67	0.75	0.73	0.58
	TI-BPT	0.69	0.62	0.71	0.69	0.51	0.68
6.2 ($N_f = 0$)	—	0.82(1)	0.71(1)	0.80(1)	0.71(1)	0.54(1)	0.79(3)
	N-BPT	0.78	0.73	0.79	0.77	0.65	0.77
	TI-BPT	0.72	0.64	0.73	0.71	0.55	0.71

TAB. 4.1: Valeurs des constantes de renormalisation dans le schéma RI-MOM à l'échelle $\mu = 1/a$ pour les 2 simulations partiellement quenched à $\beta = 5.8$ ($a^{-1} = 3.2(1)$ GeV) et 5.6 ($a^{-1} = 2.4(2)$ GeV) et pour la simulation quenched à $\beta = 6.2$ ($a^{-1} = 3.0(1)$ GeV). On n'a indiqué que les erreurs statistiques. Ces constantes déterminées non perturbativement sont comparées à leur valeur perturbative (Boosted Perturbative Theory, BPT), où "TI" et "N" correspondent aux deux types de "boosting" du couplage nu g_0 comme discuté dans le texte.

valence, la pente est indépendante de κ_s , contrairement à $M_P^2(m_v^{AWI} = 0)$. On fitte alors M_P^2 par

$$M_P^2(\kappa_s, \kappa_{v_1}, \kappa_{v_2}) = C_0(\kappa_s) + C_1 m_v^{AWI} [1 + C_2 m_s^{AWI} + C_3 m_v^{AWI}], \quad (4.12)$$

où $m_v^{AWI} \equiv m^{AWI}(\kappa_s, \kappa_{v_1}, \kappa_{v_2})$ et $m_s^{AWI} \equiv m^{AWI}(\kappa_s, \kappa_s, \kappa_s)$. La constante $C_0(\kappa_s)$ rappelle que la masse du méson pseudoscalaire, la masse axiale des quarks ou les deux souffrent des effets de discrétisation $\mathcal{O}(a)$. On trouve que C_2 et C_3 sont consistants avec 0 ($C_2 = 0.6(18)$, $C_3 = 0.08(63)$) et en fixant $C_2 = C_3 = 0$, on obtient $C_1 = 2.05(3)$ et

$$C_0(\kappa_s) = \{0.0007(18)_{0.1535}, 0.0023(20)_{0.1538}, 0.0046(15)_{0.1540}, -0.0039(25)_{0.1541}\}. \quad (4.13)$$

Ensuite on remplace le terme de gauche des équations (4.10) et (4.12) par la masse physique du pion et du kaon, afin d'estimer la valeur moyenne m_{ud} des masses m_u et m_d , et la masse m_s du quark étrange, et on utilise la valeur de a^{-1} déterminée au chapitre précédent. On a donc par l'identité de Ward vectorielle

$$(m_\pi^2)^{\text{phys}} = a^{-1} Q_1 m_{ud}, \quad (m_K^2)^{\text{phys}} = \frac{a^{-1}}{2} Q_1 (m_s + m_{ud}), \quad (4.14)$$

et la même expression, avec C_1 à la place de Q_1 , par l'identité de Ward axiale. Enfin les masses nues des quarks sont multipliées par les constantes de renormalisation du schéma RI-MOM rassemblées

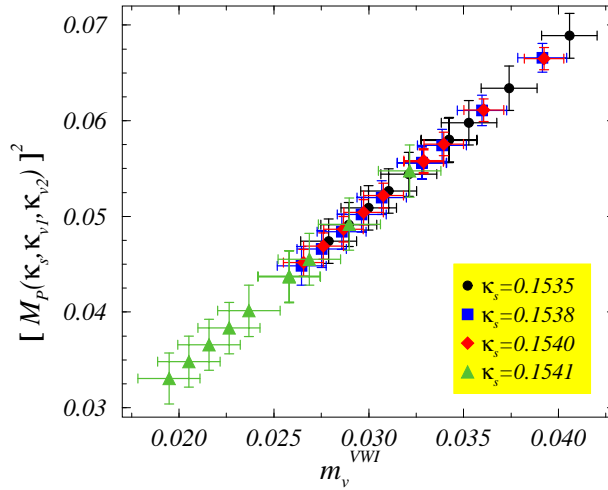
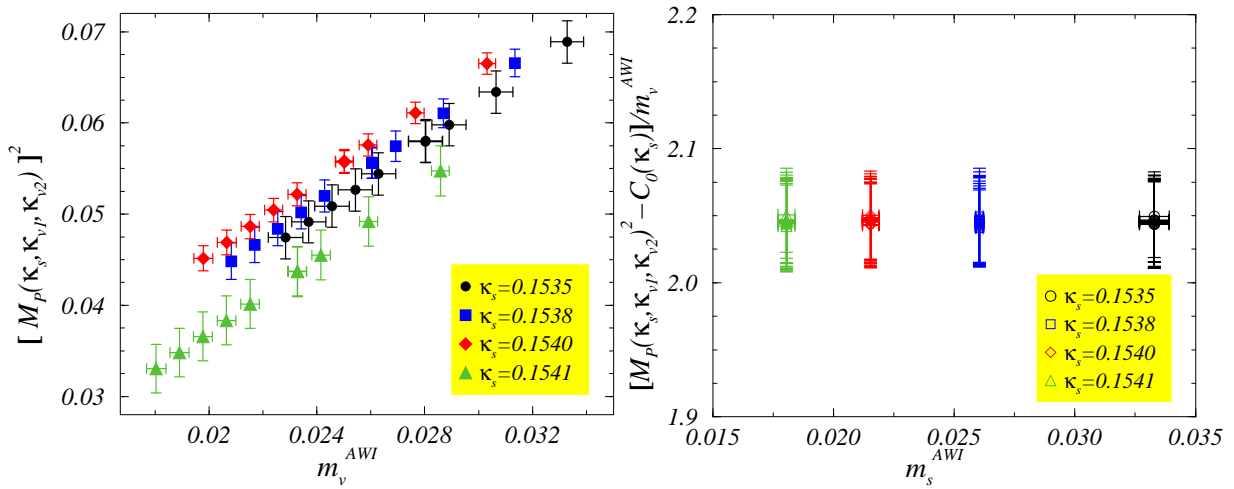


FIG. 4.2: Graphe illustrant la dépendance discutée dans (4.10).

FIG. 4.3: Dépendance de la masse du méson pseudoscalaire en la masse des quarks de valence m_v^{AWI} (gauche) et du rapport $(M_P^2 - C_0)/m_v^{AWI}$ en la masse des quarks de la mer m_s^{AWI} . Les résultats sont extraits de la simulation partiellement quenched à $\beta = 5.8$.

dans la table 4.1. La conversion dans le schéma $\overline{\text{MS}}$ à $\mu = 2$ GeV, est faite grâce à la théorie des perturbations connue à l'ordre $N^3\text{LO}$ [95, 99] avec $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(N_f=2)} = 0.245(16)(20)$ MeV [100]. On obtient finalement

$$\begin{aligned} \text{VWI} &: m_{ud}^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 5.1(4) \text{ MeV}, & m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) &= 120(7) \text{ MeV}, \\ \text{AWI} &: m_{ud}^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 4.3(4) \text{ MeV}, & m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) &= 101(8) \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Notons que $m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV})$ que nous obtenons est très voisine du résultat donné par la collaboration QCDSF-UKQCD (119(5)(8) MeV), qui a utilisé la masse de quark définie par l'identité de Ward vectorielle renormalisée également dans le schéma RI-MOM, tandis que la masse de quark axiale est en accord avec celle trouvée par la collaboration ALPHA, $m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 97(22)$ MeV [101].

Pour clore cette présentation donnons quelques pistes concernant les erreurs systématiques sur ces masses.

– En premier lieu viennent les erreurs de discrétisation. Nous avons appris que dans l'approximation quenched l'écart entre les valeurs des masses calculées en employant deux définitions à priori

équivalentes, à savoir les définitions par les identités de Ward vectorielle et axiale, sont dues à des erreurs de discrétisation. Ce même effet a été observé dans les simulations unquenched $N_f = 2$ [90, 91]. [90] a montré que cet écart diminue avec la maille du réseau de sorte que dans la limite du continu les deux masses coïncident. En outre il s'est avéré que ces effets étaient plus marqués dans le cas vectoriel, ce qui a conduit la collaboration JLQCD à donner comme résultat final la valeur de la masse AWI, incluant l'écart avec la masse vectorielle dans les erreurs systématiques. Nous avons suivi cette approche et on trouve

$$m_{ud}^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 4.3(4)_{-0}^{+0.8} \text{ MeV}, \quad m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 101(8)_{-0}^{+19} \text{ MeV}. \quad (4.16)$$

Avec les configurations produites à $\beta = 5.6$ on trouve

$$m_{ud}^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 4.2(3)_{-0}^{+0.7} \text{ MeV}, \quad m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 101(6)_{-0}^{+18} \text{ MeV}, \quad (4.17)$$

ce qui est parfaitement compatible avec les résultats à $\beta = 5.8$. Il suffit donc d'incorporer dans les erreurs de discrétisation celle indiquée dans (4.16).

– Ensuite, si au lieu de choisir $a_{m_{K^*}}^{-1}$ on fait le calcul avec $a_{r_0}^{-1}$, la valeur des masses est augmentée de 6% : on ajoutera cette contribution aux erreurs systématiques.

– Une contribution non négligeable pourrait provenir de l'action de Wilson qui n'est pas améliorée, et qui engendre une erreur sur les constantes de renormalisation. On a estimé celle-ci en calculant (Z_P/Z_S) à l'aide de l'identité de Ward hadronique (3.82) : $(Z_P/Z_S)^{\text{hWI}} = 0.67(1)$, soit 11% plus petit que $(Z_P/Z_S)^{\text{RI-MOM}} = 0.75(1)$ indiqué dans la table 4.1. Un effet similiaire est constaté à $\beta = 5.6$. Cependant, étant donné que $(Z_P/Z_S)^{\text{hWI}}$ a tendance à réduire l'écart AWI-VWI des masses, l'effet est inclus dans les 19% d'erreurs systématiques déjà introduites, si bien qu'on ne l'additionnera pas. Notons que $(Z_P/Z_S)^{\text{NSPT}}$ calculé par la théorie des perturbations stochastiques à 4 boucles donne un résultat consistant avec $(Z_P/Z_S)^{\text{RI-MOM}}$, à savoir 0.77(1) [102].

– Les effets de volume fini ont été étudiés à l'aide de la simulation à $\beta = 5.8$, $V \times T = 16^3 \times 48$. On trouve qu'ils sont importants pour les masses effectives, comme c'est représenté sur la figure 4.4 ; ce fait est déjà observé dans [54], où il est montré que dans l'intervalle de masse des quarks de la mer que nous étudions ces effets sont appréciables avec $L \simeq 1 \text{ fm}$, mais sont insignifiants à $L = 1.5 \text{ fm}$. On se ralliera à cette conclusion et on supposera que les effets de volume fini sont négligeables avec notre statistique et noyés dans les autres erreurs systématiques. Une étude approfondie devrait être menée avec des volumes plus larges.

On ajoute algébriquement ces erreurs systématiques et on obtient

$$\begin{aligned} m_{ud}^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) &= 4.3 \pm 0.4_{-0}^{+1.1} \text{ MeV} \\ m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) &= 101 \pm 8_{-0}^{+25} \text{ MeV} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{c} N_f = 2, \quad \beta = 5.8 \\ \text{RI-MOM} \end{array} \right), \quad (4.18)$$

Lorsque les constantes de renormalisation sont calculées avec la BPT "tadpole improved" à une

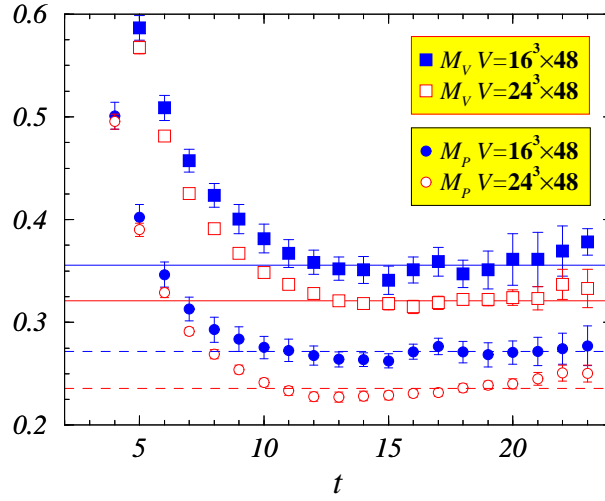


FIG. 4.4: Masses effectives pseudoscalaire et vectorielle à 2 volumes différents à $\beta = 5.8$ et avec $\kappa_s = 0.1538$. Les masses des quarks de valence sont dégénérées avec celles de quarks de la mer. Les volumes physiques correspondent à $(1.5 \text{ fm})^3$ et $(1 \text{ fm})^3$ respectivement.

boucle, on trouve

$$\begin{aligned} m_{ud}^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) &= 3.7 \pm 0.3_{-0}^{+1.3} \text{ MeV} \\ m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) &= 88 \pm 7_{-0}^{+30} \text{ MeV} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{c} N_f = 2, \quad \beta = 5.8 \\ \text{TI-BPT} \end{array} \right), \quad (4.19)$$

en bon accord avec les estimations déjà effectuées dans un schéma perturbatif, à savoir $m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 88_{(-6)}^{(+4)} \text{ MeV}$ [90], et $m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 84.5_{(-1.7)}^{(+12.0)} \text{ MeV}$ [91]. Enfin le résultat quenched à $\beta = 6.2$ donne

$$\begin{aligned} m_{ud}^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) &= 4.6 \pm 0.2_{-0}^{+0.5} \text{ MeV} \\ m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) &= 106 \pm 2_{-0}^{+12} \text{ MeV} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{c} N_f = 0, \quad \beta = 6.2 \\ \text{RI-MOM} \end{array} \right), \quad (4.20)$$

le réseau étant similaire en taille et en finesse et l'action étant également celle de Wilson. *Les effets du quenching semblent donc peu importants.* Néanmoins afin d'avoir une conclusion plus claire sur ce point des simulations avec des masses plus légères et 3 saveurs de quark dans la mer devront avoir lieu.

Chapitre 5

Transitions $B \rightarrow D^{**}$

Dans ce chapitre on discutera d'une étude exploratoire qui a été menée sur les transitions du B vers un état $L = 1$ du D , dans la limite des quarks lourds statiques, par l'intermédiaire d'une simulation numérique. Contrairement aux chapitres précédents où les opérateurs relevants étaient des binaires de quarks légers, on s'intéresse ici à des transitions véhiculées par des courants lourd-lourd. Nous avons vu au premier chapitre que dans le cadre de HQET les transitions $H_1(v) \rightarrow H_2(v')$ sont paramétrées par un nombre restreint de facteurs de forme, les fonctions d'Isgur-Wise $\zeta(w = v \cdot v')$. Nous décrivons la tentative d'évaluer sur le réseau deux de ces fonctions, à recul nul $w = 1$, à savoir $\tau_{\frac{1}{2}}(1)$ et $\tau_{\frac{3}{2}}(1)$, associées aux transitions $H_{\frac{1}{2}^-} \rightarrow H_{\frac{1}{2}^+}$ et $H_{\frac{1}{2}^-} \rightarrow H_{\frac{3}{2}^+}$, après avoir introduit la phénoménologie très riche de la transition du B vers les excitations orbitales du D dans la limite $m_c \rightarrow \infty$. Ce travail s'est accompagné de l'étude, dans le cadre de la théorie des groupes, des champs interpolants les plus appropriés afin de supprimer le mieux possible la contribution des excitations radiales aux différentes fonctions de corrélation. Enfin l'extraction de $\tau_{\frac{1}{2}}(1)$ et $\tau_{\frac{3}{2}}(1)$ à partir des données réseau nécessite le calcul d'une constante de renormalisation : nous présenterons l'évaluation de cette constante que nous avons effectuée à l'aide de la théorie des perturbations.

5.1 Phénoménologie de $B \rightarrow D^{**}$

Le développement de cette partie s'appuie sur la note [103]. Rappelons que les 4 excitations $L = 1$ du D sont regroupées en deux doublets

$$\underbrace{(D_0^*(J^P = 0^+), D_1^*(J^P = 1^+))}_{j_l^P = \frac{1}{2}^+} \quad \text{et} \quad \underbrace{(D_1(J^P = 1^+), D_2^*(J^P = 2^+))}_{j_l^P = \frac{3}{2}^+}.$$

Les résonances du doublet $j_l^P = \frac{1}{2}^+$ sont larges tandis que celles du doublet $j_l^P = \frac{3}{2}^+$ sont étroites. En effet les principaux canaux de désintégration sont les transitions non leptoniques $D^{**} \rightarrow D^{(*)}\pi$. La parité étant conservée, le pion doit se trouver avec un moment angulaire ℓ pair par rapport au $D^{(*)}$. Par conservation du moment cinétique, $\ell = 0, 2$. En conséquence D_0^* et D_1^* se désintègrent avec le pion dans l'onde S , tandis que D_2^* se désintègre seulement avec le pion dans l'onde D . Le canal $D_1 \rightarrow D^*\pi$ est autorisé avec le pion émis a priori dans l'onde S ou dans l'onde D . Toutefois la

	Masse (MeV)	Largeur (MeV)
D_0^*	2352 ± 50	261 ± 50
D_1^*	$2427 \pm 26 \pm 25$	$384_{-75}^{+107} \pm 74$
D_1	2421.8 ± 1.3	$20.8_{-2.8}^{+3.3}$
D_2^*	2461.1 ± 1.6	32 ± 4

TAB. 5.1: Masse et largeur des excitations orbitales du D .

symétrie des quarks lourds interdit la voie S , car l'amplitude associée à ce canal est proportionnelle à l'élément de matrice $\langle \ell, \ell_z; s'_l = 1/2, s'_{l_z} | s_l = 3/2, s_{l_z} \rangle$ qui est nul lorsque $\ell = 0$. Les désintégrations du doublet $j_l^P = \frac{3}{2}^+$ sont de ce fait supprimées par un facteur $|\vec{p}_\pi|^5$, ce qui rend ces résonances étroites, contrairement aux résonances du doublet $\frac{1}{2}^+$, comme indiqué dans la table 5.1. Notons que pour les D les corrections $\mathcal{O}(1/m_c)$ aux prédictions de la limite statique de HQET sont importantes car dans cette limite on trouve les rapports d'embranchement relatifs suivants :

$$\begin{array}{cccc} \Gamma(D_1 \rightarrow D\pi) & \Gamma(D_1 \rightarrow D^*\pi) & \Gamma(D_2^* \rightarrow D\pi) & \Gamma(D_2^* \rightarrow D^*\pi) \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}, \quad (5.1)$$

et donc $\frac{\Gamma(D_2^* \rightarrow D\pi)}{\Gamma(D_2^* \rightarrow D^*\pi)} = 2/3$; en incluant les corrections en $1/m_c$ violant la symétrie de spin dans le Lagrangien chiral effectif introduit au chapitre 3, on trouve

$$\begin{array}{cccc} \Gamma(D_1 \rightarrow D\pi) & \Gamma(D_1 \rightarrow D^*\pi) & \Gamma(D_2^* \rightarrow D\pi) & \Gamma(D_2^* \rightarrow D^*\pi) \\ 0 & 1 & 2.3 & 0.92 \end{array}, \quad (5.2)$$

et $\frac{\Gamma(D_2^* \rightarrow D\pi)}{\Gamma(D_2^* \rightarrow D^*\pi)} \simeq 2.5$, en bon accord avec la valeur expérimentale 2.3 ± 0.6 . En conclusion on peut dire que l'observation des éléments du doublet $\frac{3}{2}^+$ est plutôt bien établie expérimentalement et on comprend assez aisément leur faible largeur. En revanche la situation est beaucoup moins claire en ce qui concerne le doublet $\frac{1}{2}^+$, comme on aura l'occasion de le voir dans la suite ¹.

Même si des progrès théoriques et expérimentaux remarquables ont été accomplis depuis 1990 dans l'étude des transitions $B \rightarrow D$, permettant ainsi de réduire l'incertitude sur $|V_{cb}|$ à moins de 2% grâce à la largeur inclusive $\Gamma(\bar{B} \rightarrow X_c l \bar{\nu})$ [104], des questions restent ouvertes concernant la composition de X_c . En particulier se pose le problème de la hiérarchie entre les largeurs $\Gamma(\bar{B} \rightarrow D(j_l^P = \frac{1}{2}^+) l \bar{\nu})$ et $\Gamma(\bar{B} \rightarrow D(j_l^P = \frac{3}{2}^+) l \bar{\nu})$. Dans le cadre théorique de HQET, les amplitudes associées sont proportionnelles à

$$\begin{aligned} v' \langle D_0^*(v') | \bar{c}_{v'} \gamma^\mu \gamma^5 b_v | \bar{B}(v) \rangle_v &\equiv \tau_{\frac{1}{2}}(w)(v - v')^\mu, \\ v' \langle D_2^*(v') | \bar{c}_{v'} \gamma^\mu \gamma^5 b_v | \bar{B}(v) \rangle_v &\equiv \sqrt{3} \tau_{\frac{3}{2}}(w)[(w + 1) \epsilon^{*\mu\alpha} v_\alpha - \epsilon_{\alpha\beta}^* v^\alpha v^\beta v'^\mu], \end{aligned} \quad (5.3)$$

les autres s'en déduisant par symétrie des quarks lourds [15]. Les fonctions $\tau_{\frac{1}{2}}$ et $\tau_{\frac{3}{2}}$ dépendent en plus d'une échelle μ , puisque HQET est une théorie effective dérivée de QCD par un OPE. Cette dépendance se compense avec celle apparaissant dans les coefficients de matching C_i entre l'opérateur

¹La très faible largeur de la résonance $D_{s0}^*(2317)$, interprétée comme ayant les nombres quantiques $J^P = 0^+$, est due au fait qu'elle se situe en dessous du seuil DK . L'écart important par rapport à ce seuil (50 MeV) demeure d'ailleurs totalement inexplicable pour l'instant.

$\bar{c}\gamma^\mu\gamma^5 b$ de QCD et les opérateurs O_i de HQET, dont $O_1 = \bar{c}_{v'}\gamma^\mu\gamma^5 b_v$, puisque par exemple l'élément de matrice $\langle D_0^* | \bar{c}\gamma^\mu\gamma^5 b | \bar{B} \rangle$ est une quantité physique. On constate que les amplitudes de transition étudiées ici s'annulent à recul nul $w = 1$, contrairement à la transition élastique $H(v) \rightarrow H(v')$ pour laquelle la symétrie de saveur impose la condition de normalisation de la fonction d'Isgur-Wise $\xi(1) = 1$ (on rappelle que le tenseur de polarisation ϵ^* est orthogonal à la vitesse v' , $\epsilon_{\alpha\beta}^* v'^\beta = 0$). Une telle normalisation de $\tau_{\frac{1}{2}}$ et $\tau_{\frac{3}{2}}$ n'existe pas, bien qu'on puisse montrer que dans cette limite ces fonctions ne dépendent plus de μ . En effet, on a dans QCD

$$\begin{aligned} \frac{\langle D_0^* | \bar{c}\gamma^\mu\gamma^5 b | B \rangle}{\sqrt{m_B m_{D_0^*}}} &\equiv g^+(v+v')^\mu + g^-(v-v')^\mu \\ &\equiv -\tau_{1/2}(\mu, w) \sqrt{w-1} F^\mu, \\ F^\mu &= \sqrt{w+1} C_1^5(\mu, w) a^\mu + \sqrt{w-1} [C_2^5(\mu, w) v^\mu + C_3^5(\mu, w) v'^\mu], \end{aligned}$$

où $\sqrt{w^2-1} a^\mu = (v-v')^\mu$, et les C_i^5 sont les coefficients de matching entre l'opérateur $\bar{c}\gamma^\mu\gamma^5 b$ défini dans QCD et les opérateurs HQET $\bar{c}_{v'}\gamma^\mu\gamma^5 b_v$, $\bar{c}_{v'}v^\mu\gamma^5 b_v$ et $\bar{c}_{v'}v'^\mu\gamma^5 b_v$ respectivement.

$$\begin{aligned} \frac{\langle D_0^* | \bar{c}\gamma^\mu\gamma^5 b | B \rangle}{\sqrt{w-1} \sqrt{m_B m_{D_0^*}}} &= -\tau_{1/2}(\mu, w) F^\mu \\ &\xrightarrow{w \rightarrow 1} -\tau_{1/2}(\mu, 1) \sqrt{2} C_1^5(\mu, 1) a^\mu. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Puisque $\bar{c}_v\gamma_\mu b_v$ est le courant conservé associé à la symétrie de saveur lourde et que $\bar{c}_v\Gamma b_v$ lui est relié par la symétrie de spin du quark lourd, on déduit qu'à tous les ordres de la théorie des perturbations,

$$\langle c(v, s') | \bar{c}_v\Gamma b_v | b(v, s) \rangle = \bar{u}(v, s') \Gamma u(v, s), \quad (5.5)$$

où Γ est une matrice de Dirac quelconque, et le terme à droite du signe = de (5.5) est normalisé par la symétrie des quarks lourds. Cette relation est μ -indépendante, de sorte que $C_1^5(\mu, 1) \equiv C_1^5(1)$ ($C_1^5(1) \equiv \eta_A = 0.986 \pm 0.005$ [12]), et le terme à gauche du signe = de (5.4) est également indépendant de μ : on a donc $\tau_{1/2}(\mu, 1) \equiv \tau_{1/2}(1)$. Le même argument s'applique à $\tau_{3/2}(\mu, 1)$.

5.1.1 Prédications par des modèles de quarks covariants

L'origine cinématique de l'annulation de ces amplitudes rend délicates les éventuelles tentatives de mesure expérimentale des largeurs de transition à faible recul $B \rightarrow D^{**}$, et les extrapolations vers $w = 1$ nécessaires à la détermination de $\tau_{\frac{1}{2}}(1)$ et de $\tau_{\frac{3}{2}}(1)$ sont hasardeuses. Il faut donc s'appuyer sur les prédictions théoriques pour connaître un peu mieux ces fonctions. Elles ont été bornées par des règles de somme et elles ont même été calculées à partir de modèles de quarks ayant des propriétés très intéressantes à la limite de masse infinie. Ces classes de modèles particuliers, dits à la Bakamijan-Thomas, sont des modèles de quarks relativistes ayant un nombre fixe de constituants dans les interactions et pour lesquels les états liés sont des représentations du groupe de Poincaré [105]. Il a été montré que dans la limite de masse lourde les facteurs de forme deviennent covariants, la loi d'échelle d'Isgur-Wise des éléments de matrice $\langle H_2 | O_\Gamma | H_1 \rangle \propto m_Q$ est vérifiée. Chacun de ces modèles est caractérisé par un opérateur de masse M décrivant la dynamique du système au repos. Il contient un terme d'énergie cinétique et un terme potentiel d'interaction dont les caractéristiques

sont déterminées de manière à ce que les valeurs propres de M soient ajustées au spectre physique des masses hadroniques. Les éléments de matrice ont comme expression dans ce contexte

$$\begin{aligned} \langle p' | J | p \rangle &= \int \frac{d\vec{p}_2}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{(p_1^0 + p_2^0)(p_1^0 + p_2^0)}{M_0' M_0}} \sqrt{\frac{k_1'^0 k_1^0}{p_1^0 p_1^0}} \sqrt{\frac{k_2'^0 k_2^0}{p_2^0 p_2^0}} \\ &\times \sum_{s_1', s_2'} \sum_{s_1, s_2} \varphi_{s_1' s_2'}^* (\vec{k}_2') [D(R_1'^{-1} J(p_1', p_1) R_1)]_{s_1' s_1} [D(R_2'^{-1} R_2)]_{s_2' s_2} \varphi_{s_1 s_2} (\vec{k}_2). \end{aligned} \quad (5.6)$$

A ce stade $J(p_1', p_1)$ n'est en général pas covariant : J est défini dans un référentiel comme un courant à une particule, mais cela n'est plus vrai sous une transformation de Lorentz. Toutefois dans la limite de masse lourde ce courant est covariant, et les éléments de matrice sont alors donnés par

$$\begin{aligned} \langle v' | j_\mu(0) | v \rangle &= \sum_{s_1', s_1} \bar{u}_{s_1'} \gamma_\mu u_{s_1} \int \frac{d\vec{p}_2}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{(p_i \cdot v)(p_2' \cdot v')}{p_2^0}} \\ &\times \sum_{s_2', s_2} \phi_{s_2' s_2}^* (\vec{k}_2') [D(R_1' - 1_2 R_2)]_{s_2' s_2} \phi_{s_1 s_2}' (\vec{k}_2). \end{aligned} \quad (5.7)$$

$D(R_2'^{-1} R_2)$ est la rotation de Wigner appliquée sur le quark spectateur, accompagnant les boosts sur les états initial et final, tandis que $\bar{u}_{s_1'} \gamma_\mu u_{s_1}$ rappelle que le quark 1 est le quark lourd actif. Enfin φ et φ' sont les fonctions d'onde du système au repos, dépendant des impulsions relatives et des spineurs de Pauli : ce sont les seules quantités reliées au modèle de potentiel choisi. Avec le potentiel de Godfrey-Isgur [106], rendu attractif par le fait qu'il puisse reproduire l'ensemble du domaine spectroscopique des mésons, on trouve [107]

$$\tau_{1/2}(1) = 0.22, \quad \tau_{3/2}(1) = 0.54, \quad (5.8)$$

et les rapports d'embranchement semi-leptoniques

$$\text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D) = (1.95 \pm 0.45)\%, \quad (5.9)$$

$$\text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D^*) = (5.90 \pm 1.10)\%, \quad (5.10)$$

$$\text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D_2^{3/2}) = (0.63_{-0.2}^{+0.3})\%, \quad (5.11)$$

$$\text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D_1^{3/2}) = (0.40_{-0.14}^{+0.12})\%, \quad (5.12)$$

$$\text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D_1^{1/2}) = (0.06 \pm 0.02)\%, \quad (5.13)$$

$$\text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D_0^{1/2}) = (0.06 \pm 0.02)\%. \quad (5.14)$$

Les données expérimentales sont les suivantes [108] :

$$\text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l\bar{\nu}X_c) = (10.31 \pm 0.15)\%, \quad (5.15)$$

$$\text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l\bar{\nu}X_c) - \text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l\bar{\nu}D) - \text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l\bar{\nu}D^*) = (2.9 \pm 0.3)\%. \quad (5.16)$$

La transition inclusive $\bar{B}_d \rightarrow l\bar{\nu}X_c$ est donc dominée par les canaux $\bar{B}_d \rightarrow l\bar{\nu}D$ et $\bar{B}_d \rightarrow l\bar{\nu}D^*$, qui en représentent 75%. Les résultats obtenus par le modèle B-T sont compatibles avec ces données, ce qui

augmente son crédit. Il conduit alors à une prédiction intéressante : les canaux $\bar{B} \rightarrow D^{3/2}$ dominent nettement les canaux $\bar{B} \rightarrow D^{1/2}$. Cette hiérarchie est causée en partie par les valeurs de $\tau_{\frac{1}{2}}(1)$, $\tau_{\frac{3}{2}}(1)$ et en partie (facteur 2-3) par un effet de cinématique interne [107]. Elle est prédite également par les règles de somme de QCD dans la limite de masse lourde $m_Q \rightarrow \infty$.

5.1.2 Prédiction par les règles de somme à la limite de masse lourde

En s'appuyant sur les notations du chapitre 3 on définit le corrélateur à deux points entre deux B pseudoscalaires

$$T_{12}(q) = -i \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle \bar{B}(p_f) | T [J_1(x) J_2^\dagger(0)] | \bar{B}(p_i) \rangle, \quad J_i(x) = (\bar{b} \Gamma_i c)(x),$$

$$T_{12} = 1/(2\pi) \int d^4x e^{-iq \cdot x} \int d\omega \frac{e^{-i\omega x^0}}{\omega + i\epsilon} \langle \bar{B}(p_f) | J_1(x) J_2^\dagger(0) | \bar{B}(p_i) \rangle$$

$$= 1/(2\pi) \int d^4x e^{-iq \cdot x} \int d\omega \frac{e^{-i\omega x^0}}{\omega + i\epsilon} \sum_{X_c} [e^{i(p_f - p_X) \cdot x} \langle \bar{B}(p_f) | J_1(0) | X_c \rangle \langle X_c | J_2^\dagger(0) | \bar{B}(p_i) \rangle$$

$$- e^{i(p_X - p_i) \cdot x} \langle \bar{B}(p_f) | J_2^\dagger(0) | X_{\bar{c}bb} \rangle \langle X_{\bar{c}bb} | J_1(0) | \bar{B}(p_i) \rangle].$$

En choisissant $\vec{p}_i = \vec{p}_f = \vec{0}$, on a

$$T_{12} = (2\pi^3) \sum_{X_c} \left[\delta^3(\vec{q} + \vec{p}_X) \frac{\langle \bar{B} | J_1(0) | X_c \rangle \langle X_c | J_2^\dagger(0) | \bar{B} \rangle}{m_B - E_X - q^0 + i\epsilon} - \delta^3(\vec{p}_X - \vec{q}) \frac{\langle \bar{B} | J_2^\dagger(0) | X_{\bar{c}bb} \rangle \langle X_{\bar{c}bb} | J_1(0) | \bar{B} \rangle}{E_{X'} - m_B - q^0 - i\epsilon} \right]. \quad (5.17)$$

On remarque que les canaux directs sont pondérés par le dénominateur $1/V$, $V = m_B - E_X - q^0$ étant la virtualité, alors que les graphes en Z sont pondérés par $1/(V + 2m_D)$. En choisissant q^0 tel que $\Lambda_{\text{QCD}} \ll V \ll m_B$, on peut appliquer l'OPE à T_{12} qui s'écrit alors

$$T_{12} = -i \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle \bar{B}(p_f) | \bar{b}(x) \Gamma_1 S_c(x, 0) \Gamma_2 b(0) | \bar{B}(p_i) \rangle + \mathcal{O}(1/m_c^2), \quad (5.18)$$

où $S_c(x, 0)$ est le propagateur du quark charmé libre, si on ne considère que l'ordre des arbres. En ne prenant en compte que le pôle positif du propagateur on a alors l'égalité suivante :

$$\sum_X \langle \bar{B} | J_1(0) | X_c \rangle \langle X_c | J_2^\dagger(0) | \bar{B} \rangle = \langle \bar{B} | \bar{b} \Gamma_1 \frac{\not{v}'_q + 1}{2v'_0} \Gamma_2 b | \bar{B} \rangle, \quad (5.19)$$

où $v'_q = \frac{1}{m_c} \left(\sqrt{m_c^2 + \vec{q}^2}, -\vec{q} \right)$. L'équation (5.19) est l'application de la *dualité quarks-hadrons*, dont on sait qu'elle est bien justifiée dans l'étude des désintégrations impliquant le quark b , et en particulier dans les désintégrations semi-leptoniques [109]. En identifiant la vitesse v'_q du quark c à celle du méson D , en supposant que les vitesses initiale v_i et final v_f du \bar{B} sont différentes et en utilisant le

formalisme des traces introduit au premier chapitre, on obtient

$$\sum_{j,n} a^n(w_i) a^n(w_f) \text{Tr}(\bar{B}_i(v_i) \Gamma_1 D^j) \text{Tr}(\bar{D}^j \Gamma_2 B_f(v_f)) + \dots = -2\xi(w_{if}) \text{Tr}(\bar{B}_f(v_f) \Gamma_2 P'_+ \Gamma_1 \bar{B}_i(v_i)), \quad (5.20)$$

$$w_i = v' \cdot v_i, \quad w_f = v' \cdot v_f, \quad w_{if} = v_i \cdot v_f;$$

en choisissant $\Gamma_1 = \not{v}_i \gamma^5$ et $\Gamma_2 = \not{v}_f \gamma^5$, on trouve [110]

$$\begin{aligned} L(w_i, w_f, w_{if}) &= R(w_i, w_f, w_{if}), & (5.21) \\ & (w_i w_f - w_{if}) \sum_n \xi^{(n)}(w_i) \xi^{(n)}(w_f) \\ & + [3(w_i w_f - w_{if})^2 - (w_i^2 - 1)(w_f^2 - 1)] \sum_n \tau_{3/2}^{(n)}(w_i) \tau_{3/2}^{(n)}(w_f) \\ & + 4(w_i - 1)(w_f - 1) \sum_n \tau_{1/2}^{(n)}(w_i) \tau_{1/2}^{(n)}(w_f) \\ & + .. \\ & = -(1 - w_i - w_f + w_{if}) \xi(w_{if}). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Quelques règles de somme s'en déduisent en écrivant

$$\left. \frac{\partial L}{\partial w_{if}} \right|_{w_{if}=1, w_i=w_f=w} = \left. \frac{\partial R}{\partial w_{if}} \right|_{w_{if}=1, w_i=w_f=w}, \quad (5.23)$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial w_i} \right|_{w_i=1, w_{if}=w_f=w} = \left. \frac{\partial R}{\partial w_i} \right|_{w_i=1, w_{if}=w_f=w}, \quad (5.24)$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial w_i} \right|_{w_{if}=1, w_i=w_f=w} = \left. \frac{\partial R}{\partial w_i} \right|_{w_{if}=1, w_i=w_f=w} : \quad (5.25)$$

$$(w^2 - 1) \sum_n [\xi^{(n)}(w)]^2 + 2(w^2 - 1)^2 \sum_n [\tau_{3/2}^{(n)}(w)]^2 + 4(w - 1)^2 \sum_n [\tau_{3/2}^{(n)}(w)]^2 + \dots = 2(w - 1), \quad (5.26)$$

$$- \sum_n [\xi^{(n)}(w)]^2 - 6(w^2 - 1) \sum_n [\tau_{3/2}^{(n)}(w)]^2 + \dots = -1 - 2\rho^2(w - 1), \quad \rho^2 = -\xi'(1), \quad (5.27)$$

$$2(w + 1) \sum_n \tau_{3/2}^{(n)}(1) \tau_{3/2}^{(n)}(w) - 4 \sum_n \tau_{1/2}^{(n)}(1) \tau_{1/2}^{(n)}(w) + \dots = \xi(w), \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} & w \sum_n [\xi^{(n)}(w)]^2 + (w^2 - 1) \sum_n \xi^{(n)}(w) \xi^{(n)'}(w) \\ & + 2(w^2 - 1) \left\{ 2w \sum_n [\tau_{3/2}^{(n)}(w)]^2 + (w^2 - 1) \sum_n \tau_{3/2}^{(n)}(w) \tau_{3/2}^{(n)'}(w) \right\} \\ & + 4(w - 1) \left\{ \sum_n [\tau_{1/2}^{(n)}(w)]^2 + (w - 1) \sum_n \tau_{1/2}^{(n)}(w) \tau_{1/2}^{(n)'}(w) \right\} \\ & + \dots = 1. \end{aligned} \quad (5.29)$$

En divisant (5.26) by $2(w - 1)$ on obtient la *règle de somme de Bjorken* [15, 111] :

$$\frac{w+1}{2} \sum_n [\xi^{(n)}(w)]^2 + (w-1) \left\{ 2 \sum_n [\tau_{1/2}^{(n)}(w)]^2 + (w+1)^2 \sum_n [\tau_{3/2}^{(n)}(w)]^2 \right\} + \dots = 1, \quad (5.30)$$

qui s'écrit à l'ordre $(w - 1)$

$$\rho^2 = \frac{1}{4} + \sum_n [\tau_{1/2}^{(n)}(1)]^2 + 2 \sum_n [\tau_{3/2}^{(n)}(1)]^2. \quad (5.31)$$

L'égalité (5.28) écrite à recul nul redonne la *règle de somme d'Uraltsev* [112]

$$\sum_n [\tau_{3/2}^{(n)}(1)]^2 - \sum_n [\tau_{1/2}^{(n)}(1)]^2 = \frac{1}{4}. \quad (5.32)$$

En combinant (5.31) et (5.32) on trouve

$$\sum_n [\tau_{1/2}^{(n)}(1)]^2 = \frac{1}{3} \left(\rho^2 - \frac{3}{4} \right), \quad (5.33)$$

et on trouve comme borne inférieure $\rho^2 \geq \frac{3}{4}$. Les règles de somme sur les moments [114]

$$\mu_\pi^2(\mu)/3 = \sum_n^\mu (\epsilon_n^{(1/2)})^2 |\tau_{1/2}^{(n)}(1)|^2 + 2 \sum_m^\mu (\epsilon_m^{(3/2)})^2 |\tau_{3/2}^{(m)}(1)|^2, \quad (5.34)$$

$$\mu_G^2(\mu)/3 = -2 \sum_n^\mu (\epsilon_n^{(1/2)})^2 |\tau_{1/2}^{(n)}(1)|^2 + 2 \sum_m^\mu (\epsilon_m^{(3/2)})^2 |\tau_{3/2}^{(m)}(1)|^2, \quad (5.35)$$

où $\epsilon_n^j = M_{D^n}^j - M_D^j$, conduisent à la hiérarchie $\mu_\pi^2(\mu) \geq \mu_G^2(\mu)$ pour n'importe quelle cut-off μ dans la somme. Enfin en combinant les règles de somme sous-dominantes de Voloshin [115] et d'Uraltsev [112]

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\Lambda}(\mu)}{2} &= \sum_n^\mu (\epsilon_n^{(1/2)})^2 |\tau_{1/2}^{(n)}(1)|^2 + 2 \sum_m^\mu (\epsilon_m^{(3/2)})^2 |\tau_{3/2}^{(m)}(1)|^2, \\ \bar{\Sigma}(\mu) &= 2 \sum_m^\mu (\epsilon_m^{(3/2)})^2 |\tau_{3/2}^{(m)}(1)|^2 - 2 \sum_n^\mu (\epsilon_n^{(1/2)})^2 |\tau_{1/2}^{(n)}(1)|^2, \end{aligned} \quad (5.36)$$

se déduisant elles aussi de l'équation (5.20), en tenant compte des termes à l'ordre $1/m_Q$ des deux côtés [116], on obtient le rapport [117]

$$\frac{\sum_n^\mu (\epsilon_n^{(3/2)})^2 |\tau_{3/2}^{(n)}(1)|^2}{\sum_n^\mu (\epsilon_n^{(1/2)})^2 |\tau_{1/2}^{(n)}(1)|^2} = 4. \quad (5.37)$$

²Lorsqu'on tient compte des corrections radiatives, la borne sur ρ^2 devient $\rho^2(\mu) > \frac{3}{4} + \frac{4\alpha_s}{9\pi} \left(\frac{5}{3} - \ln \frac{4\Delta^2}{\mu^2} \right)$, où α_s est évalué au point de soustraction μ , et $\Delta \sim \mu$ est un cut-off sur la somme des états intermédiaires charmés $|X_c\rangle$ de (5.17) [113].

La règle de somme d'Uraltsev (5.32) et le rapport précédent conduisent à la hiérarchie $\sum_n^\mu \left| \tau_{1/2}^{(n)}(1) \right|^2 < \sum_n^\mu \left| \tau_{3/2}^{(n)}(1) \right|^2$. En faisant l'hypothèse que cette relation est vraie pour les états fondamentaux, on conclut que $\tau_{\frac{1}{2}}(1) < \tau_{\frac{3}{2}}(1)$, confirmant le calcul mené dans le cadre des modèles B-T.

5.1.3 Résultats expérimentaux des désintégrations semi-leptoniques du B

ALEPH [118] a reconstruit les états D^{**} se désintégrant en $D^{(*)}\pi^\pm$. Il n'a pas été observé un excès de signal par rapport au bruit de fond des combinaisons dites "de mauvais signe" $D^{(*)+}\pi^+$ et $D^0\pi^-$. A partir du taux mesuré "de bon signe", et en supposant que la seule contribution au $D^{(*)}\pi$ observée provient du D^{**} , il a été trouvé

$$\text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D^{**}) = (2.2 \pm 0.3 \pm 0.3)\%. \quad (5.38)$$

De plus en supposant que l'état $D_1^{3/2}$ se désintègre seulement en $D^*\pi$, il a été obtenu

$$\text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D_1^{3/2}) = (0.70 \pm 0.15)\% \quad (5.39)$$

$$\text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D_2^{3/2}) < 0.2\%, \quad (5.40)$$

valeurs consistantes avec les prédictions B-T. Enfin à partir des taux mesurés pour les combinaisons "de mauvais signe", on en déduit à 90% C.L.

$$\text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D^*\pi\pi) \leq 0.35\%, \quad \text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D\pi\pi) \leq 0.9\%. \quad (5.41)$$

DELPHI a publié une réanalyse des données, mettant à jour une étude précédente [119]. Comme ALEPH aucun indice sérieux de la transition possible "de mauvais signe" $\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D^{**} \rightarrow l\bar{\nu}D^{(*)}\pi\pi$ n'a été observé ; en supposant que seules les combinaisons $D^{(*)}\pi$ contribuent, on obtient

$$\text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l\bar{\nu}D^{**}) = (2.7 \pm 0.7 \pm 0.2)\%. \quad (5.42)$$

Cette valeur est suffisante pour saturer la largeur semi-leptonique $\Gamma_{SL}(B)$, c.f. (5.16), et deux résonances étroites ont été clairement observées : en les identifiant au $D^{3/2}$, DELPHI a trouvé

$$\text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D_1^{3/2}) = (0.56 \pm 0.10)\%, \quad \text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D_2^{3/2}) = (0.30 \pm 0.08)\%, \quad (5.43)$$

une nouvelle fois en accord satisfaisant avec les prédictions B-T. Cependant un taux significatif de production d'un état hadronique large a été mesuré,

$$\text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D_{s1}) = (1.24 \pm 0.25 \pm 0.27)\%, \quad \text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D_{s0}) = (0.65 \pm 0.69)\%, \quad (5.44)$$

en conflit avec les prédictions B-T. A partir de l'analyse des combinaisons "de mauvais signe", on trouve les limites

$$\text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D^*\pi\pi) \leq 1.2\%, \quad \text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D\pi\pi) \leq 1.3\%. \quad (5.45)$$

³Les $\epsilon_n^{j=1/2}$, $\epsilon_n^{j=3/2}$ sont très voisins dans tous les modèles spectroscopiques habituellement utilisés.

En considérant que le $1^+ D^{**}$ peut se désintégrer en $D\pi\pi$ et en analysant la distribution en masse de $D\pi$, un fit a donné $(19 \pm 13)\%$ pour cette composante. Dans l'analyse des moments de la distribution en masse une telle possibilité a été incluse avec $\text{BR}(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D\pi\pi) = (0.36 \pm 0.27)\%$. Cela constitue d'ailleurs la principale source d'incertitude systématique sur la mesure de ces moments. La collaboration D0 a mesuré les taux de production des résonances étroites de D^{**} dans la désintégration $\bar{B} \rightarrow \mu^-\bar{\nu}D^*\pi$. En supposant que $\text{BR}(D_1^{3/2} \rightarrow D^*\pi) = 100\%$ et $\text{BR}(D_2^{3/2} \rightarrow D^*\pi) = (30 \pm 6)\%$, elle a obtenu [120]

$$\text{BR}(\bar{B} \rightarrow \mu^-\bar{\nu}D_1^{3/2}) = (0.33 \pm 0.06)\% , \quad \text{BR}(\bar{B} \rightarrow \mu^-\bar{\nu}D_2^{3/2}) = (0.44 \pm 0.16)\% . \quad (5.46)$$

Si on identifie les résonances larges aux états $D_{0,1}^{1/2}$, comme c'est le cas dans (5.44), on trouve un résultat en contradiction flagrante avec les prédictions faites à partir de l'OPE ou les calculs numériques effectués à partir des modèles B-T. Les données de DELPHI conduisent à la hiérarchie $\Gamma(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D^{1/2}) > \Gamma(\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D^{3/2})$. Ce "puzzle $1/2 > 3/2$ " [121] n'est pas aisé à élucider car les prédictions théoriques sont basées sur un formalisme relativement solide, en particulier en ce qui concerne l'OPE. Evidemment aucune preuve irréfutable que les résonances larges $D^{(*)} + \pi$ sont des états $P j = 1/2$ n'a encore été fournie : ils pourraient être des excitations radiales ou des combinaisons non résonantes d'états quantiques indéterminés. Par conséquent les données de DELPHI ne sont pas nécessairement en contradiction avec les prédictions théoriques. Toutefois la situation se brouille encore un peu plus pour les raisons suivantes :

- BELLE a présenté à l'été 2005 une analyse de $\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D/D^*\pi$ [122], qui est en contradiction avec les études précédentes : en reconstruisant un B entièrement dans $\Upsilon(4S) \rightarrow B\bar{B}$, l'analyse de la désintégration de l'autre méson beau a donné en faisant l'hypothèse que la factorisation s'applique dans la transition non leptonique $\bar{B} \rightarrow D^{**}\pi$

$$\text{BR}(B^- \rightarrow l^-\bar{\nu}D\pi) = (0.81 \pm 0.18)\% , \quad (5.47)$$

$$\text{BR}(B^- \rightarrow l^-\bar{\nu}D^*\pi) = (1.00 \pm 0.22)\% , \quad (5.48)$$

$$\text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l^-\bar{\nu}D\pi) = (0.49 \pm 0.13)\% , \quad (5.49)$$

$$\text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l^-\bar{\nu}D^*\pi) = (0.97 \pm 0.22)\% . \quad (5.50)$$

La manière dont BELLE sépare les états finaux avec D et D^* est intéressante car elle fournit une information sur les poids relatifs des productions de $3/2$ et $1/2$. En combinant les deux classes d'états finaux on obtient

$$\text{BR}(B^- \rightarrow l^-\bar{\nu}D^{(*)}\pi) = (1.81 \pm 0.20 \pm 0.20)\% , \quad (5.51)$$

$$\text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l^-\bar{\nu}D^{(*)}\pi) = (1.47 \pm 0.20 \pm 0.17)\% , \quad (5.52)$$

laissant de la place dans l'espace des phases pour une large composante $D^{(*)}\pi\pi$ de $\sim (1.3 \pm 0.4)\%$, tandis que les études précédentes donnaient à 90 % C.L. des limites supérieures comprises entre 0.35 et 1.3 %. Les résultats de BELLE sont assez consistants avec les prédictions théoriques des modèles B-T pour la production des états $P j = 3/2$, même si BELLE n'a pas encore déterminé précisément les nombres quantiques des états hadroniques finaux.

- Les modèles B-T prédisent pour la production de $D\pi$ et $D^*\pi$

$$\text{BR}(B^- \rightarrow l^- \bar{\nu} D\pi) = \text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l^- \bar{\nu} D\pi) = 0.51\% \quad (5.53)$$

$$\text{BR}(B^- \rightarrow l^- \bar{\nu} D^*\pi) = \text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l^- \bar{\nu} D^*\pi) = 0.65\% \quad (5.54)$$

en accord qualitatif avec les valeurs de BELLE.

- Dans l'approximation BPS [124], où $\mu_\pi^2 = \mu_G^2$, on a $\tau_{\frac{1}{2}}^n(1) = 0$. En supposant que la règle de somme d'Uraltsev est saturée par l'état fondamental on trouve $\tau_{\frac{3}{2}}(1) = 1/2$ et

$$\text{BR}(B^- \rightarrow l^- \bar{\nu} D\pi) = \text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l^- \bar{\nu} D\pi) = 0.39\% \quad (5.55)$$

$$\text{BR}(B^- \rightarrow l^- \bar{\nu} D^*\pi) = \text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l^- \bar{\nu} D^*\pi) = 0.50\% . \quad (5.56)$$

- En utilisant les résultats expérimentaux (5.43, 5.44) fournis par DELPHI et en supposant que les états "1" et "0" se désintègrent uniquement en $D^*\pi$ et $D\pi$ respectivement, on trouve

$$\text{BR}(B^- \rightarrow l^- \bar{\nu} D\pi) = \text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l^- \bar{\nu} D\pi) \sim (0.9 \pm 0.7)\% \quad (5.57)$$

$$\text{BR}(B^- \rightarrow l^- \bar{\nu} D^*\pi) = \text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l^- \bar{\nu} D^*\pi) \sim (1.9 \pm 0.4)\% , \quad (5.58)$$

pour un rapport d'embranchement total

$$\text{BR}(B^- \rightarrow l^- \bar{\nu} D^{(*)}\pi) = \text{BR}(\bar{B}_d \rightarrow l^- \bar{\nu} D^{(*)}\pi) \sim 2.8\% . \quad (5.59)$$

Notons que la tendance est qualitativement la même que celle fournie par BELLE (5.47 - 5.50), à savoir que les états $D^*\pi$ dominent les $D\pi$, mais que le taux total de $D^{(*)}\pi$ dépasse celui rapporté par BELLE et prédit par les modèles B-T d'environ 1%. Cela constitue juste une reformulation du puzzle "1/2 vs 3/2".

- Mentionnons qu'à la fois dans le cadre théorique des modèles B-T et dans celui de l'OPE on ne s'attend pas à ce que D , D^* et les 4 états $P D^{**}$ saturent complètement la largeur inclusive ; ceci se déduit plus aisément avec les modèles B-T. On s'attend en particulier à ce que les corrections radiatives, pas encore prises en compte dans ce qui précède, génèrent une queue régulière dans la distribution en masse des états hadroniques finaux : elle n'est pas composée de résonances étroites, mais plutôt d'une distribution large et continue. Cependant il n'y a pas une telle queue dans les données fournies par CDF, ni dans celle de DELPHI au-delà de la queue des résonances D^{**} . Numériquement environ 6.4% et 18.3% de tous les états D^{**} ont une masse entre 2.6 et 3.3 GeV pour les données de CDF et DELPHI respectivement, la proportion chutant à 3.2% et 7.8% entre 2.8 et 3.3 GeV, et à 0.3% et 3.1% entre 3.0 et 3.3 GeV. D'autre part CDF semble avoir détecté plus d'événements en dessous des pics $D^{3/2}$, comme montré sur la figure 5.1 : ces états $D^{(*)}\pi$ pourraient être le produit d'une désintégration d'un état de masse plus élevé en $D^{(*)}\pi\pi$: toutefois un tel scénario n'a pas été inclus dans les analyses, puisque des mesures plus anciennes n'ont pas révélé de telles désintégrations.

En résumé ALEPH, DELPHI et D0 sont en accord pour un taux égal à 0.8% de la largeur Γ_B de la production des deux résonances étroites de D^{**} , ce qui est consistant avec les prédictions théoriques pour la production de $D^{3/2}$, ainsi qu'avec les mesures de BELLE. C'est la production des

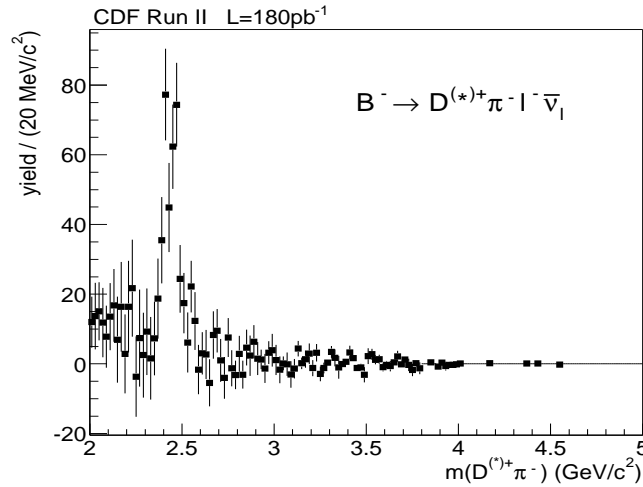


FIG. 5.1: Distribution en masse $m(D^{(*)+}\pi^-)$ mesuré par la collaboration CDF [123].

résonances larges de D^{**} qui pose problème : le taux estimé par ALEPH et DELPHI suffit à saturer $\Gamma_{SL}(B)$, étant supérieur aux prédictions concernant $\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}D^{1/2}$ d'environ un ordre de grandeur, tandis que les valeurs données par BELLE sont raisonnablement compatibles avec les prédictions, semblant confirmer notamment que D , D^* , et les 4 états P de D^{**} ne saturent pas $\Gamma_{SL}(B)$. On ne se prononcera pas sur la validité des mesures expérimentales, même si cela montre une fois de plus que les analyses impliquant des résonances scalaires sont extrêmement délicates. Dans la suite on se propose de présenter une étude menée dans le cadre de HQET sur réseau des transitions $\bar{B} \rightarrow D^{**}$, qui a conduit à une première estimation de $\tau_{\frac{1}{2}}(1)$ et $\tau_{\frac{3}{2}}(1)$.

5.2 Etude des excitations orbitales des mésons lourd-légers par la QCD sur réseau

On commencera cette partie par présenter les différents champs interpolants possibles de ces états, en s'appuyant sur la théorie des groupes, on exposera les méthodes envisagées pour séparer le fondamental des excitations radiales ; enfin on donnera à titre d'illustration les résultats du calcul des fonctions d'Isgur-Wise $\tau_{\frac{1}{2}}(1)$ et $\tau_{\frac{3}{2}}(1)$ entrepris sur le réseau.

5.2.1 Champs interpolants

On souhaite trouver les champs interpolants des états ayant les nombres quantiques $J^P = 0^-, 0^+$ et 2^+ . On dispose pour cela des matrices de Dirac et des liens de jauge du réseau, assurant la covariance de jauge des champs interpolants étalés. Du point de vue de la théorie des groupes, les états propres à impulsion nulle de la matrice de transfert bosonique seront classés en fonction du groupe cubique O_h associé aux rotations et réflexions du cube à 3 dimensions. Soit $|\psi_R\rangle$ un état sur le réseau, appartenant à l'une des 10 représentations irréductibles de O_h , et $|\psi\rangle_{J,m}$ appartenant à la

représentation irréductible $D^{(J)}$ du spin J dans le continu. On a la relation

$$|\psi_R\rangle = \sum_{J,m} c_{J,m}^R |\psi\rangle_{J,m}. \quad (5.60)$$

Le spin J contribue au membre de droite de (5.60) si et seulement si R appartient à la représentation "subduite" de O_h , $D^{(J)} \downarrow O_h$. Ces $D^{(J)} \downarrow O_h$ sont réductibles en somme directe de représentations irréductibles de O_h qui sont au nombre de 10 : quatre de dimension 1 (A_1^\pm et A_2^\pm), deux de dimension 2 (E^\pm) et quatre de dimension 3 (T_1^\pm et T_2^\pm), $A_{1,2}$, E et $T_{1,2}$ étant les 5 RI du groupe des rotations du cube O ($O_h = O \otimes$ réflexion). En pratique on a

J	$D^{(J)} \downarrow O_h$
0	A_1^\pm
1	T_1^\pm
2	$E^\pm \oplus T_2^\pm$
3	$A_2^\pm \oplus T_1^\pm \oplus T_2^\pm$
4	$A_1^\pm \oplus E^\pm \oplus T_1^\pm \oplus T_2^\pm$
5	$E^\pm \oplus 2T_1^\pm \oplus T_2^\pm$
6	$A_1^\pm \oplus A_2^\pm \oplus E^\pm \oplus T_1^\pm \oplus 2T_2^\pm$
etc	etc

En terme de bilinéaires de quarks de J^P , les RI de O_h sont données par

J^P	0^+	0^-	1^+	1^-
base	1	γ^5	$\gamma^5 \gamma_i$	γ_i
RI de O_h	A_1^+	A_1^-	T_1^+	T_1^-

Les opérateurs de création des états 0^- , 0^+ et 2^+ sont construits également à partir de chemins $P(x_1, x_2)$ composés de liens du réseau. On note $1, \bar{1}, 2, \bar{2}, 3, \bar{3}$ les liens de longueur a orientés dans la direction $+x, -x, \dots$, $s_i = i + \bar{i}$ et $p_i = i - \bar{i}$. Avec ces opérateurs, les RI de O_h sont données par

RI	base
A_1^+	$s_1 + s_2 + s_3$
T_1^-	p_1, p_2, p_3
E^+	$s_2 - s_3, 2s_1 - s_2 - s_3$

Le produit tensoriel des représentations bilinéaires de quarks \otimes chemins donne

$$A_1 \otimes X = X,$$

$$T_1 \otimes A_1 = T_1,$$

$$T_1 \otimes E = T_1 \oplus T_2,$$

$$T_1 \otimes T_1 = A_1 \oplus T_1 \oplus T_2 \oplus E.$$

Les champs interpolants recherchés s'obtiennent alors en combinant les bilinéaires de quarks et les chemins de la manière suivante [125] :

$\bar{h}\Gamma q$	chemin	RI de O_h	champ interpolant	J^P
A_1^-	A_1^+	A_1^-	$\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{h}\gamma^5(s_1 + s_2 + s_3)q$	$0^-, 4^-$
A_1^+	A_1^+	A_1^+	$\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{h}(s_1 + s_2 + s_3)q$	$0^+, 4^+$
T_1^-	A_1^+	T_1^-	$\bar{h}\gamma_i(s_1 + s_2 + s_3)q$	$1^-, 3^-$
A_1^-	T_1^-	T_1^+	$\bar{h}\gamma^5 p_i q$	$1^+, 3^+$
T_1^-	T_1^-	A_1^+	$\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{h}\sum_i \gamma_i p_i q$	$0^+, 4^+$
T_1^-	T_1^-	T_2^+	$\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{h}(\gamma_i p_j + \gamma_j p_i)q$	$2^+, 3^+$
T_1^-	T_1^-	E^+	$\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{h}(\gamma_2 p_2 - \gamma_3 p_3)q$ $\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{h}(2\gamma_1 p_1 - \gamma_2 p_2 - \gamma_3 p_3)q$	$2^+, 4^+$
A_1^+	E^+	E^+	$\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{h}(s_2 - s_3)q$ $\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{h}(2s_1 - s_2 - s_3)q$	$2^+, 4^+$
T_1^+	E^+	T_2^+	$\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{h}\gamma^5 \gamma_k (2s_k - s_i - s_j)q$	$2^+, 3^+$

Notons qu'il existe des champs interpolants plus complexes puisque les représentations de O_h peuvent s'exprimer dans les bases "à deux liens" $[ij]$ et "à trois liens" $[ijk]$.

Le tableau des champs interpolants nécessite quelques commentaires. Tout d'abord la symétrie de quarks lourds induit la dégénérescence exacte, configuration par configuration, des corrélateurs à deux points $\langle O_{0-}(t)O_{0-}(0) \rangle$ et $\langle O_{1-}(t)O_{1-}(0) \rangle$, et $\langle O_{0+}(t)O_{0+}(0) \rangle$ et $\langle O_{1+}(t)O_{1+}(0) \rangle$, à cause du projecteur $\frac{1+\gamma^0}{2}$ composant le propagateur du quark statique. Ensuite deux types de champs interpolants sont possibles pour le 0^+ et le 2^+ : ceux donnés par la restriction au groupe O_h du modèle des quarks du continu ("q"), et ceux qui ne le sont pas ("nq"). Ainsi l'état $|0^+, q\rangle$ a comme champ interpolant $\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{h}\sum_i \gamma_i p_i q$ tandis que $|0^+, nq\rangle$ a comme champ interpolant $\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{h}(\sum_i s_i) q$. Pour le 2^+ on a alors

$$\begin{aligned}
|T_2^+, 12, q\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{h}(\gamma_1 p_2 + \gamma_2 p_1)q, & |T_2^+, 12, nq\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{h}\gamma^5 \gamma_3 [2s_3 - (s_1 + s_2)]q, \\
|T_2^+, 23, q\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{h}(\gamma_2 p_3 + \gamma_3 p_2)q, & |T_2^+, 23, nq\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{h}\gamma^5 \gamma_1 [2s_1 - (s_2 + s_3)]q, \\
|T_2^+, 31, q\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{h}(\gamma_1 p_3 + \gamma_3 p_1)q, & |T_2^+, 31, nq\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{h}\gamma^5 \gamma_2 [2s_2 - (s_3 + s_1)]q, \\
|E^+, 23-, q\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{h}(\gamma_2 p_2 - \gamma_3 p_3)q, & |E^+, 23-, nq\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{h}(s_2 - s_3)q, \\
|E^+, 23+, q\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{h}(2\gamma_1 p_1 - \gamma_2 p_2 - \gamma_3 p_3)q, & |E^+, 23+, nq\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{h}(2s_1 - s_2 - s_3)q,
\end{aligned}$$

où $|T_2^+, ij\rangle$ est symétrique dans l'échange $i \leftrightarrow j$, invariant sous $k \leftrightarrow -k$ mais change de signe sous $i \leftrightarrow -i$ et $j \leftrightarrow -j$, $|E^+, 23+(-)\rangle$ est (anti)symétrique sous $y \leftrightarrow z$ (rappelons que $\gamma^5 \gamma^k$ change de signe sous $i \leftrightarrow -i$ et $j \leftrightarrow -j$). On remarque alors que grâce à ces symétries, les corrélateurs à deux points composés de deux champs interpolants appartenant à des lignes différentes du tableau précédent vont être nuls en moyenne sur l'ensemble des configurations, et que la symétrie des

quarks lourds conduit à 4 corrélateurs possibles dont les expressions sont

$$\begin{aligned}
\langle 2^+, q | 2^+, q \rangle &= \left\langle \frac{1}{3} \sum_i [\bar{q} \gamma_i p_i h](t) [\bar{h} \gamma_i p_i q](0) - \frac{1}{6} \sum_{i \neq j} [\bar{q} \gamma_i p_i h](t) [\bar{h} \gamma_j p_j q](0) \right\rangle, \\
\langle 2^+, nq | 2^+, nq \rangle &= \left\langle \frac{1}{3} \sum_i [\bar{q} s_i h](t) [\bar{h} s_i q](0) - \frac{1}{6} \sum_{i \neq j} [\bar{q} s_i h](t) [\bar{h} s_j q](0) \right\rangle, \\
\langle 2^+, q | 2^+, nq \rangle &= \left\langle \frac{1}{3} \sum_i [\bar{q} \gamma_i p_i h](t) [\bar{h} s_i q](0) - \frac{1}{6} \sum_{i \neq j} [\bar{q} \gamma_i p_i h](t) [\bar{h} s_j q](0) \right\rangle, \\
\langle 2^+, nq | 2^+, q \rangle &= \left\langle \frac{1}{3} \sum_i [\bar{q} s_i h](t) [\bar{h} \gamma_i p_i q](0) - \frac{1}{6} \sum_{i \neq j} [\bar{q} s_i h](t) [\bar{h} \gamma_j p_j q](0) \right\rangle, \tag{5.61}
\end{aligned}$$

tandis que les expressions des 4 corrélateurs de 0^+ sont

$$\begin{aligned}
\langle 0^+, q | 0^+, q \rangle &= \left\langle \frac{1}{3} \sum_i [\bar{q} \gamma_i p_i h](t) [\bar{h} \gamma_i p_i q](0) + \frac{1}{3} \sum_{i \neq j} [\bar{q} \gamma_i p_i h](t) [\bar{h} \gamma_j p_j q](0) \right\rangle, \\
\langle 0^+, nq | 0^+, nq \rangle &= \left\langle \frac{1}{3} \sum_i [\bar{q} s_i h](t) [\bar{h} s_i q](0) + \frac{1}{3} \sum_{i \neq j} [\bar{q} s_i h](t) [\bar{h} s_j q](0) \right\rangle, \\
\langle 0^+, q | 0^+, nq \rangle &= \left\langle \frac{1}{3} \sum_i [\bar{q} \gamma_i p_i h](t) [\bar{h} s_i q](0) + \frac{1}{3} \sum_{i \neq j} [\bar{q} \gamma_i p_i h](t) [\bar{h} s_j q](0) \right\rangle, \\
\langle 0^+, nq | 0^+, q \rangle &= \left\langle \frac{1}{3} \sum_i [\bar{q} s_i h](t) [\bar{h} \gamma_i p_i q](0) + \frac{1}{3} \sum_{i \neq j} [\bar{q} s_i h](t) [\bar{h} \gamma_j p_j q](0) \right\rangle. \tag{5.62}
\end{aligned}$$

Le rapport $1/(-1/2)$ entre les termes $i \neq j$ des corrélateurs de 0^+ et 2^+ peut s'interpréter comme la conséquence d'un couplage spin-orbit $\langle l \cdot s_l \rangle = \frac{1}{2}(j_l(j_l + 1) - l(l + 1) - s_l(s_l + 1))$ qui vaut $1/2$ pour le 2^+ ($j_l = 3/2$) et -1 pour le 0^+ ($j_l = 1/2$). Il lève la dégénérescence entre ces deux états.

5.2.2 Isolement des états fondamentaux

Les champs interpolants écrits au paragraphe précédent permettent d'extraire la physique d'un état ayant les nombres quantiques J^P souhaités ; cependant il faut un ingrédient supplémentaire pour que les résultats recherchés ne soient pas trop brouillés par les excitations radiales. En effet on ne peut pas isoler correctement les états fondamentaux à grand temps car les fluctuations statistiques sont trop importantes. La méthode générale est la construction d'une matrice de corrélation $C^{ab}(t)$ d'où on extrait les énergies d'un fit à plusieurs exponentielles.

Ainsi le "smearing multistate" consiste à définir un état $|\phi^a, t\rangle = \sum_{\vec{r}} \Psi^a(\vec{r}) h(0, t) \bar{q}(\vec{r}, t)$, où $\Psi^a(\vec{r})$, $a = 1, M$ est une des n fonctions de smearing orthonormées obtenues en résolvant un modèle de quark relativiste avec un hamiltonien $H = H_{\text{kin}} + V(r)$ où H_{kin} est un terme cinétique discrétisé et $V(r)$ est le potentiel statique mesuré sur le réseau [126]. On calcule $(E - H)^{-1} \chi$ sur un vecteur source χ pour un E donné qu'on fait varier afin de chercher les pôles, qui sont les valeurs propres de H et dont les résidus sont les fonctions d'onde Ψ^a . Ensuite le corrélateur $C^{ab}(t) = \langle \phi^a, t | \phi^b, 0 \rangle$ est

fitté par plusieurs exponentielles :

$$C^{ab}(t) = \sum_m e^{-E_m t} \langle \phi^a | m \rangle \langle m | \phi^b \rangle + O(e^{-E_{M+1} t}). \quad (5.63)$$

Les coefficients de mélanges $v_m^a = \langle m | \phi^a \rangle$ sont extraits en minimisant

$$\chi^2 = \sum_{a,b} \sum_{t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{[C^{ab}(t) - v_m^a v_m^b e^{-E_m t}]^2}{\sigma^{ab}(t)}, \quad (5.64)$$

et on déduit le degré de recouvrement entre les solutions exactes et les états ϕ^a . Enfin on isole l'état A souhaité en construisant $|\phi^A\rangle = \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_M} \prod_{i \neq A} v^{a_i} |\phi^{a_i}\rangle$. Même si cette approche a permis de faire des avancées importantes dans la compréhension des systèmes lourd-légers, elle se place dans un cadre théorique trop restreint puisqu'elle fait appel à une jauge particulière qui est la jauge de Coulomb.

Le smearing proposé dans [86] a l'avantage d'être invariant de jauge, et on en a tiré partie pour les calculs impliquant le méson pseudoscalaire ; toutefois il suppose des fonctions d'onde du type hydrogénoïde, ce qui peut ne pas être du tout une description correcte de la physique des excitations orbitales. Rappelons en effet que le potentiel d'interaction est confinant, ce qui modifie profondément la physique de ces systèmes.

Deux approches analogues à l'utilisation d'une matrice de corrélateurs $C^{ab}(t)$ ont été proposées [127, 42] : elles ont l'avantage d'être invariantes de jauge. Les indices a, b se rapportent au type de fuzzing appliqué sur les liens $U_i^F(x)$ inclus dans les champs interpolants $O_{a,b}$, ou au nombre d'itérations et à la valeur de κ_j du smearing de Jacobi [128]. On effectue un fit analogue à (5.64), on écrit la matrice C sous la forme $C = v^T D v$, où D est la matrice diagonale des masses, et on isole le $i^{\text{ème}}$ état en utilisant le champ interpolant $O^{(i)} = (v^T)_{ij}^{-1} O_j$. Elles ont permis de donner une première idée de la spectroscopie des systèmes lourd-légers [129], même si certains résultats préliminaires doivent être pris avec précaution car on constate par exemple un désaccord flagrant dans la hiérarchie des énergies du 0^+ et du 2^+ entre [42] et [129], les valeurs ne se recouvrant même pas dans les barres d'erreur - les raisons invoquées sont des réseaux trop grossiers ($\beta = 5.7$) et l'absence du terme clover dans l'action du quark léger employée dans [42], ce qui entraîne un effet non-négligeable dans le couplage spin-orbit. Par ailleurs une étude assez précise des "fonctions d'onde" v_j^i a été entreprise [129], mais à notre avis il semble difficile d'attacher une trop grande importance à ce type de fonction d'onde car la manière d'utiliser le fuzzing y joue un trop grand rôle et nous ne comprenons pas très bien quel sens physique lui donner. L'inconvénient d'utiliser le smearing de Jacobi est de fournir à tous les états le même type de champ interpolant, où les composantes à petite distance entre le quark statique et le quark léger sont renforcées, comme on peut le voir sur les différentes figures présentés dans [128]. Par conséquent nous avons choisi une approche analogue à ces différents auteurs, mais nous avons pris l'option de faire courir les indices matriciels sur la distance entre les quarks constituants du méson, avec éventuellement un indice supplémentaire correspondant au type de champ interpolant "modèle des quarks" ou "non-modèle des quarks", et ainsi donner un sens clair à la notion de fonction d'onde qui est défini par $\psi^n(r) = \langle 0 | O_r | n \rangle$, comme cela avait d'ailleurs été le cas dans le premier article consacré à ce sujet [127] mais non repris par

	$ii, q - q$	$ij, q - q$	$ii, nq - nq$	$ij, nq - nq$
$\langle C \rangle$	$1.88 \cdot 10^{-3}$	$2.18 \cdot 10^{-4}$	$2.29 \cdot 10^{-3}$	$2.07 \cdot 10^{-3}$
σ	$1.51 \cdot 10^{-4}$	$1.01 \cdot 10^{-4}$	$1.17 \cdot 10^{-4}$	$1.07 \cdot 10^{-4}$

TAB. 5.2: Valeur moyenne et erreur des composantes de $\langle 0^+, r(t=7) = 3, (n)q | 0^+, r(t=0) = 1, (n)q \rangle$ et de $\langle 2^+, r(t=7) = 3, (n)q | 2^+, r(t=0) = 1, (n)q \rangle$.

	0^-	$0^+(nq)$	$0^+(q)$	2^+
$[t_{min} - t_{max}]$	[5-14]	[5-10]	[6-13]	[5-12]
χ_{dof}	(280)/(360-21)	(99.8)/(216-21)	(220)/(200-18)	(252)/(200-18)
am	0.492(1)	0.676(3)	0.727(8)	0.753(6)
am'	0.92(4)	1.046(18)	0.98(7)	1.10(3)

TAB. 5.3: Spectre des états $0^-, 0^+$ et 2^+ .

la suite. Les états fondamentaux seront isolés plus rapidement en temps Euclidien par la définition du champ interpolant $O_r^{(0)} = \psi^\perp(r)O_r, \sum_r \psi^\perp(r)\psi^n(r) = A\delta_{n0}$.

L'étude exploratoire a été menée avec un réseau de volume $16^3 \times 40$, à $\beta = 6.0$, l'action du quark léger étant l'action clover avec $\kappa = 0.1334$ ($m_q \sim m_s$) et $c_{SW} = 1.769$, l'action du quark lourd étant l'action HQET statique définie en (3.54). On fait appel aux champs interpolants décrits au paragraphe précédent, avec p_i et s_i écrits en fonction de U_i^F :

$$U_i^F(x) = \prod_{J=1}^n \text{Proj}_{\text{SU}(3)} \left[U_i^{(J-1)}(x) + C \sum_{i \neq j} \left[U_j^{\text{Staple}(J-1)}(x, x + \hat{i}) + U_{-j}^{\text{Staple}(J-1)}(x, x + \hat{i}) \right] \right],$$

où $n = 5$, $C = 0.25$ et $U_i^{(0)}(x) \equiv U_i(x)$. Les résultats indiquent que les corrélateurs $\langle 2^+, nq | 2^+, nq \rangle$ sont extrêmement bruyants, tandis que le splitting entre le 0^+ et le 2^+ est difficile à identifier si on s'intéresse aux valeurs numériques des corrélateurs "q-q". Pour illustrer ces affirmations on a indiqué dans la table 5.2 la valeur des composantes "diagonale" ii et "non diagonale" ij des corrélateurs $C(r(0) = 1, r(t=7) = 3, q - q)$ et $C(r(0) = 1, r(t=7) = 3, nq - nq)$, avec leur erreur associée. Les corrélateurs " $ij, q - q$ " sont nettement plus petits que les corrélateurs " $ii, q - q$ ", tandis que les composantes "diagonale" et "non diagonale" des corrélateurs $nq - nq$ sont du même ordre de grandeur, de sorte que leur soustraction, donnant le corrélateur $\langle 2^+ | 2^+ \rangle$, conduira à des valeurs numériques très petites pour celui-ci avec de grandes fluctuations. Quant aux corrélateurs "mixtes" $nq - q$ et $q - nq$ on a constaté que eux aussi étaient bruyants et n'étaient guère exploitables. Par conséquent le spectre des états et les fonctions d'onde seront issus des fits sur le corrélateur $nq - nq$ pour le 0^+ et $q - q$ pour le 2^+ , sachant que les données du corrélateur $\langle 0^+, q | 0^+, q \rangle$ seront insérées dans les erreurs systématiques. Le spectre correspondant est indiqué dans la table 5.3 et les fonctions d'onde associées sont représentées sur la figure 5.2.

Quelques commentaires s'imposent : on trouve un splitting $E_{1P^-} - E_{1S}$ d'environ 360 MeV, en accord avec d'autres résultats réseaux [42, 129], ou un calcul basé sur un modèle de quarks [73]. En revanche le splitting $E_{1P^+} - E_{1P^-}$ semble plus élevé que ce qui a été trouvé par les autres groupes et la première excitation radiale $2S$ se situe à un niveau beaucoup plus haut. On n'accordera donc qu'un crédit limité à nos résultats. On doit avoir la même attitude en ce qui concerne les fonctions d'onde, même si le fait que les fonctions d'onde des états excités présente un noeud est très en-

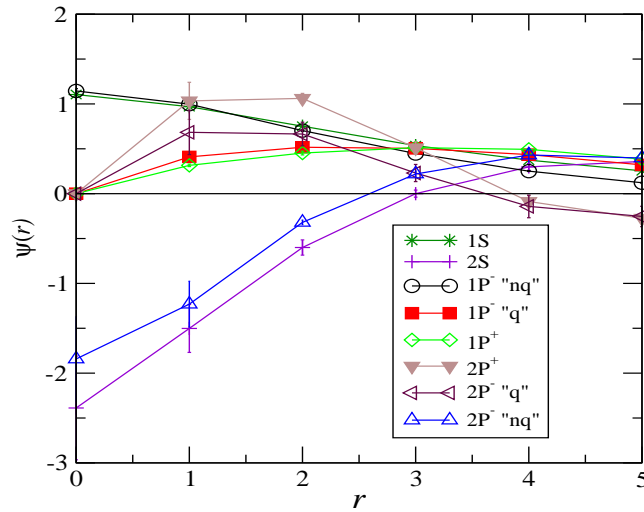


FIG. 5.2: Fonctions d'onde des excitations orbitales S et P^\pm (états fondamental et première excitation radiale) : on a utilisé les notations spectroscopiques standard, S se rapportant au 0^- , P^- au 0^+ tandis que P^+ se rapporte au 2^+ .

courageant. Toutefois en comparant avec une étude similaire [127] on note qu'elles sont dans notre cas beaucoup moins étendues en r , le sommet de la bosse de $\psi_{1P^-, "q"}$ et ψ_{1P^+} notamment étant à une distance inférieure à $r_0/2$ ($r_0 \sim 5.36a$ [53]), alors qu'il apparaît être très voisin de r_0 dans [127]. Il semble que la décroissance en r soit un petit peu plus lente pour ψ_{1P^+} que pour $\psi_{1P^-, "q"}$, bien qu'elles soient quasiment confondues comme dans [127]. Enfin on ne s'explique pas pourquoi on note une telle différence entre $E_{1P^-, "q"}$ et $E_{1P^-, "nq"}$, peut-être que le contenu physique des chemins p_i est contrebalancé par des fluctuations statistiques importantes. Il se peut également que la contribution du champ interpolant $\bar{h}(x)\Gamma q(x)$, absente dans ce cas, joue un rôle non négligeable dans les scalaires, et donc que les effets de discrétisation sont trop élevés pour considérer un champ interpolant $\gamma_i p_i$. On a représenté sur la figure 5.3 les masses effectives du 0^+ et du 2^+ estimées après l'emploi des champs interpolants $O_r^{(0)}[0^+(2^+)] = \psi_{0^+(2^+)}^\perp(r)O_r[0^+(2^+)]$. On constate que pour le 0^+ la procédure d'orthogonalisation est efficace, avec un plateau précoce, tandis que le plateau du 2^+ est malheureusement très court, les fluctuations statistiques détruisant le signal à plus grand temps. Enfin lorsqu'on diminue le nombre d'itérations de fuzzing, les fonctions d'onde deviennent davantage centrées en zéro, le spectre est identique, même si les énergies des états excités sont moins bien déterminées par le fit, les erreurs étant nettement plus élevées.

5.2.3 Estimations des fonctions d'Isgur-Wise $\tau_{\frac{1}{2}}(1)$ et $\tau_{\frac{3}{2}}(1)$

Principe du calcul

Nous souhaitons calculer sur le réseau un élément de matrice électrofaible entre un méson pseudoscalaire H_v et une excitation orbitale $H_{v' \rightarrow v}^{**}$. Une possibilité serait de le faire avec des vitesses v et v' différentes, et d'extrapoler vers le recul nul. En effet, bien que la théorie effective Euclidienne ne fasse pas apparaître de borne inférieure sur les énergies du quark lourd, et donc qu'il faille introduire un cut-off ultraviolet sur les moments résiduels k , il semble que les fonctions de corrélation impliquant en plus le nuage léger soient finies lorsqu'on supprime le cut-off, au moins à l'ordre d'une boucle [130]. Cependant nous préférons utiliser le fait que lorsqu'un élément de ma-

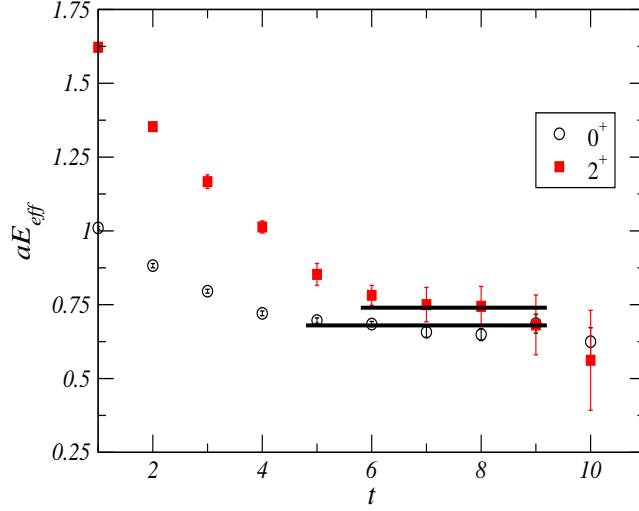


FIG. 5.3: Masses effectives du 0^+ et du 2^+ , avec les champs interpolants $O_r^{(0)}[0^+(2^+)] = \psi_{0^+(2^+)}^\perp(r)O_r[0^+(2^+)]$.

trice s'annule linéairement en $v - v'$ comme c'est le cas ici, il existe des éléments de matrice vers l'avant ($v = v'$) non nuls impliquant un opérateur de dérivée covariante D_μ [131], permettant ainsi d'accéder à $\tau_{\frac{1}{2}}$ et $\tau_{\frac{3}{2}}$.

Le principe du calcul, exposé dans [132], est le suivant : prenons pour simplifier $v' = (1, 0, 0, 0)$, et $v = v' + v_\perp$, v_\perp étant spatial à des corrections d'ordre plus élevé dans la différence $v' - v$. On suppose que pour une matrice de Dirac Γ quelconque, on a

$$v' \langle H^{**} | [\bar{h}_{v'} \Gamma h_v](x) | H^{(*)} \rangle_v = t_l^m v_\perp m \tau_j(w) + \dots, \quad (5.65)$$

où $w \equiv v \cdot v'$, $j = 1/2, 3/2$, et $l, m = 1, 2, 3$ sont des indices spatiaux, t^{lm} est un tenseur qui dépend de l'état final (H^{**}) et de l'état initial (H^* or H). Les \dots représentent des termes d'ordre supérieur en $v' - v$. En utilisant l'invariance par translation dans le temps on a

$$\begin{aligned} -i\partial_0 v' \langle H^{**} | [\bar{h}_{v'} \Gamma h_v](x) | H^{(*)} \rangle_v &= \\ -i_{v'} \langle H^{**} | [\bar{h}_{v'} \left(\vec{\Gamma}_l \overrightarrow{D}^0 + \overleftarrow{D}^0 \Gamma_l \right) h_v](x) | H^{(*)} \rangle_v &= t_l^m v_\perp m \tau_j(w) (M_{H^{**}} - M_H) + \dots \end{aligned} \quad (5.66)$$

En s'appuyant sur l'équation du mouvement $(v \cdot D)h_v(x) = 0$, impliquant que

$$D^0 h_{v'}(x) = 0, \quad D^0 h_v(x) = -(D \cdot v_\perp) h_v(x), \quad (5.67)$$

et sur (5.66) on peut écrire

$$i_{v'} \langle H^{**} | [\bar{h}_{v'} \Gamma_l (D \cdot v_\perp) h_v](x) | H^{(*)} \rangle_v = t_l^m v_\perp m \tau_j(w) (M_{H^{**}} - M_H) + \dots, \quad (5.68)$$

qui a une limite finie quand $v_\perp \rightarrow 0$, à savoir

$$i_v \langle H^{**} | [\bar{h}_v \Gamma_l D^m h_v](x) | H^{(*)} \rangle_v = t_l^m \tau_j(1) (M_{H^{**}} - M_H). \quad (5.69)$$

Appliquant (5.65) à l'état $J = 0 H_0^*$ on obtient de [15] :

$$\langle H_0^*(v') | \bar{h}(v') \gamma_i \gamma_5 h(v) | H(v) \rangle \equiv -\tau_{\frac{1}{2}}(w) v_{\perp i}. \quad (5.70)$$

De (5.70) on déduit que

$${}_v \langle H_0^* | [\bar{h}_v \gamma_i \gamma_5 D_j h_v](x) | H \rangle_v = i g_{ij} (M_{H_0^*} - M_H) \tau_{\frac{1}{2}}(1). \quad (5.71)$$

De manière analogue pour l'état $J = 2 H_2^*$ on a

$${}_{v'} \langle H_2^* | [\bar{h}_{v'} \gamma_i \gamma_5 h_v](x) | H \rangle_v \equiv \sqrt{3} \tau_{\frac{3}{2}}(w) \epsilon_i^{*j} v_{\perp j} + \dots, \quad (5.72)$$

où ϵ_{ij}^* est le tenseur de polarisation, d'où

$${}_v \langle H_2^* | [\bar{h}_v \gamma_i \gamma_5 D_j h_v](x) | H \rangle_v = -i\sqrt{3} (M_{H_2^*} - M_H) \tau_{\frac{3}{2}}(1) \epsilon_{ij}^*. \quad (5.73)$$

Afin de calculer (5.71) et (5.73) sur le réseau on doit d'abord donner une forme discrète de la dérivée covariante. On choisit la forme symétrique

$$D_i h(\vec{x}, t) \rightarrow \frac{1}{2a} \left(U_i(\vec{x}, t) h(\vec{x} + \hat{i}, t) - U_i^\dagger(\vec{x} - \hat{i}, t) h(\vec{x} - \hat{i}, t) \right). \quad (5.74)$$

Les champs interpolants ont été définis aux paragraphes précédents ; on calcule alors comme d'habitude les fonctions de corrélation à deux points

$$\begin{aligned} C_{0^-}^{(2)}(t) &= \langle 0 | O_{0^-}(t) O_{0^-}^\dagger(0) | 0 \rangle, \\ C_{P^\pm}^{(2)}(t) &= \langle 0 | O_{P^\pm}(t) O_{P^\pm}^\dagger(0) | 0 \rangle, \end{aligned}$$

les fonctions à trois points

$$C_{P^\pm}^{(3)}(t_1, t_2) = \langle 0 | O_{P^\pm}(t_2) O_{\Gamma, j_l=1\pm 1/2}(t_1) O_{0^-}^\dagger(0) | 0 \rangle,$$

et les rapports

$$\left(M_{H_j^{j_l=1\pm 1/2}} - M_H \right) \sqrt{2j_l} \tau_{j_l=1\pm 1/2}(1) = \frac{Z_{0^-} Z_{P^\pm} C_{P^\pm}^{(3)}(t_1, t_2)}{C_{0^-}^{(2)}(t_1) C_{P^\pm}^{(2)}(t_2 - t_1)}.$$

Calcul perturbatif des constantes de renormalisation

Les relations (5.71) et (5.73) sont définies entre quantités renormalisées, si bien qu'on doit renormaliser l'élément de matrice $\langle H^{**} | O | H \rangle$ sur le réseau, où O est un opérateur de dimension 4 ayant la structure $\bar{h} \gamma_i \gamma_5 D_j h$. Il ne se mélange pas avec un opérateur de dimension 3 car l'élément de matrice entre un état de parité positive et un état de parité négative d'un tel opérateur est nul, de sorte qu'il n'y a pas de divergence linéaire en a^{-1} à craindre. Aucune divergence logarithmique $\ln(a\mu)$ n'est présente non plus car on a montré que toute dépendance en une échelle d'énergie μ de $\tau_{\frac{1}{2}}$ et $\tau_{\frac{3}{2}}$ disparaît à recul nul. Seule une renormalisation finie doit être calculée lorsqu'on effectue le

matching entre le résultat lattice et la valeur dans le continu de $\tau_{\frac{1}{2}}, \tau_{\frac{3}{2}}$.

Le paragraphe qui vient suit de près la présentation du calcul des constantes de renormalisation appropriées effectuée dans [133]. On doit renormaliser et raccorder au continu l'opérateur nu $O_{ij}^B = \bar{h}^B \gamma_i \gamma^5 D_j h^B$, où h^B est le champ nu du quark lourd. On choisit de renormaliser dans un schéma MOM dont les conditions de renormalisation sont : 1) le propagateur de quark lourd renormalisé est égal au propagateur libre, et 2) la fonction de vertex renormalisée prises entre pattes externes renormalisées est égale à la fonction en arbre. Comme la self-energy de quark lourd diverge linéairement en a^{-1} [37] on introduit un contre-terme de masse $a\delta m \sum_x \bar{h}(x)h(x)$ dans l'action du quark lourd ; numériquement cette divergence se compense non perturbativement dans les rapports entre fonctions de corrélation à trois points et à deux points donnant les éléments de matrice, ou entre les différences de masse entre les mésons lourd-légers.

Le propagateur nu de quark lourd s'écrit

$$\begin{aligned} S^B(p) &= \frac{a}{1 - e^{-ip_4 a} + a\delta m + a\Sigma(p)} \\ &= \frac{a}{1 - e^{-ip_4 a}} \sum_n \left(\frac{-a[\delta m + \Sigma(p)]}{1 - e^{-ip_4 a}} \right)^n \\ &\equiv Z_{2h} S^R(p). \end{aligned} \quad (5.75)$$

En choisissant les conditions de renormalisation

$$(S^R)^{-1}(p)|_{ip_4 \rightarrow 0} = ip_4, \quad \delta m = -\Sigma(p_4 = 0),$$

on obtient pour la constante de renormalisation Z_{2h} :

$$Z_{2h} = 1 - \left. \frac{d\Sigma}{d(ip_4)} \right|_{ip_4 \rightarrow 0}.$$

La fonction de vertex nue $V_{ij}^B(p)$ est définie par :

$$\begin{aligned} V_{ij}^B(p) &= (S^B)^{-1}(p) \sum_{x,y} e^{ip \cdot (x-y)} \langle h^B(x) O_{ij}^B(0) \bar{h}^B(y) \rangle (S^B)^{-1}(p) \\ &= \frac{Z_{\mathcal{D}}}{Z_{2h}} (S^R)^{-1}(p) \sum_{x,y} e^{ip \cdot (x-y)} \langle h^R(x) O_{ij}^R(0) \bar{h}^R(y) \rangle (S^R)^{-1}(p), \end{aligned} \quad (5.76)$$

où

$$O_{ij}^B(0) = Z_{\mathcal{D}} O_{ij}^R(0)^4.$$

On verra dans la suite que $V_{ij}^B(p)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} V_{ij}^B(p) &= (1 + \delta V) \bar{u}(p) \gamma_i \gamma^5 p_j u(p) \\ &\equiv (1 + \delta V) V_{ij}^R(p). \end{aligned} \quad (5.77)$$

⁴La convention que nous avons choisie ici de la relation entre champs et opérateurs nus et leur équivalent renormalisé est celle utilisée dans tous les traités de théorie des champs, mais c'est l'inverse de celle employée par la communauté des spécialistes de QCD sur réseau.

δV est obtenu par le calcul de tous les diagrammes 1PI à une boucle contenant le vertex. On déduit alors que $\langle H^{**} | O_{ij}^R | H \rangle = Z_D^{-1} \langle H^{**} | O_{ij}^B | H \rangle$ où $Z_D = Z_{2h}(1 + \delta V)$ et $\langle H^{**} | O_{ij}^B | H \rangle$ est calculé sur le réseau comme expliqué auparavant.

Rappelons que l'action HQET utilisée est

$$S^{\text{HQET}} = a^3 \sum_n \left\{ h^\dagger(n) \left[h(n) - U_4^{\dagger, \text{HYP}}(n - \hat{4}) h(n - \hat{4}) \right] + a \delta m h^\dagger(n) h(n) \right\}, \quad (5.78)$$

où $U_4^{\text{HYP}}(n)$ est un lien de jauge construit à partir d'un blocking hypercubique. Nous emploierons les notations suivantes, tirées de [97, 134, 135] :

$$\int_p \equiv \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \quad \int_{\vec{p}} \equiv \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \quad a^4 \sum_n e^{ipn} = \delta(p),$$

$$\int_k \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}, \quad \int_{\vec{k}} \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3},$$

$$h(n) = \int_p e^{ipn} h(p),$$

$$U_\mu(n) = e^{ia g_0 A_\mu^a(n) T^a} = 1 + ia g_0 A_\mu^a(n) T^a - \frac{a^2 g_0^2}{2!} A_\mu^a(n) A_\mu^b(n) T^a T^b + \mathcal{O}(g_0^3),$$

$$U_\mu^{\text{HYP}}(n) = e^{ia g_0 B_\mu^a(n) T^a} = 1 + ia g_0 B_\mu^a(n) T^a - \frac{a^2 g_0^2}{2!} B_\mu^a(n) B_\mu^b(n) T^a T^b + \mathcal{O}(g_0^3),$$

$$A_\mu^a(n) = \int_p e^{ip(n+\frac{a}{2})} A_\mu^a(p), \quad B_\mu^a(n) = \int_p e^{ip(n+\frac{a}{2})} B_\mu^a(p),$$

$$\Gamma_\lambda = \sin ak_\lambda,$$

$$c_\mu = \cos\left(\frac{a(p+p')_\mu}{2}\right), \quad s_\mu = \sin\left(\frac{a(p+p')_\mu}{2}\right),$$

$$M_\mu = \cos\left(\frac{k_\mu}{2}\right), \quad N_\mu = \sin\left(\frac{k_\mu}{2}\right),$$

$$W = 2 \sum_\lambda \sin^2\left(\frac{k_\lambda}{2}\right),$$

$$\bar{p}_\mu = \sin(ap_\mu), \quad \hat{p}_\mu = \sin\left(\frac{ap_\mu}{2}\right).$$

Dans l'espace de Fourier l'action HQET est donnée à l'ordre $\mathcal{O}(g_0^2)$ par

$$\begin{aligned} S^{\text{HQET}} &= \int_p a^{-1} h^\dagger(p) (1 - e^{-ip_4 a}) h(p) + \delta m h^\dagger(p) h(p) \\ &+ ig_0 \int_p \int_{p'} \int_q \delta(q+p'-p) (h^\dagger(p) B_4^a(q) T^a h(p')) e^{-i(p_4+p'_4)\frac{a}{2}} \\ &+ \frac{ag_0^2}{2!} \int_p \int_{p'} \int_q \int_r \delta(q+r+p'-p) h^\dagger(p) B_4^a(q) B_4^b(r) T^a T^b h(p') e^{-i(p_4+p'_4)\frac{a}{2}}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Les blocs de champs de jauge B_μ^a s'expriment en fonction des champs de jauge classiques de la façon suivante :

$$B_\mu = \sum_{n=1}^{\infty} B_\mu^{(n)},$$

où $B_\mu^{(n)}$ contient n facteurs de A . A l'ordre d'une boucle, il a été montré que seul $B_\mu^{(1)}$ est nécessaire [136] :

$$\begin{aligned} B_\mu^{(1)}(k) &= \sum_{\nu} h_{\mu\nu}(k) A_\nu(k), \\ h_{\mu\nu}(k) &= \delta_{\mu\nu} D_\mu(k) + (1 - \delta_{\mu\nu}) G_{\mu\nu}(k), \\ D_\mu(k) &= 1 - d_1 \sum_{\rho \neq \mu} N_\rho^2 + d_2 \sum_{\rho < \sigma, \rho, \sigma \neq \mu} N_\rho^2 N_\sigma^2 - d_3 N_\rho^2 N_\sigma^2 N_\tau^2, \\ G_{\mu\nu}(k) &= N_\mu N_\nu \left(d_1 - d_2 \frac{N_\rho^2 + N_\sigma^2}{2} + d_3 \frac{N_\rho^2 N_\sigma^2}{3} \right), \end{aligned}$$

$$d_1 = (2/3)\alpha_1[1 + \alpha_2(1 + \alpha_3)], \quad d_2 = (4/3)\alpha_1\alpha_2(1 + 2\alpha_3), \quad d_3 = 8\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Deux ensembles de α_i ont été choisis : 1) $\alpha_1 = 0.75, \alpha_2 = 0.6, \alpha_3 = 0.3$, qui est l'ensemble considéré dans notre simulation et a été motivé par le fait que la valeur moyenne minimale d'une plaquette était la plus élevée [53] et 2) $\alpha_1 = 1.0, \alpha_2 = 1.0, \alpha_3 = 0.5$, pour lequel il s'avère que la divergence linéaire de la self-energy du quark lourd est la plus faible [137]. Nous appellerons ces deux ensembles respectivement HYP1 et HYP2.

Les règles de Feynman s'obtiennent alors aisément :

propagateur du quark lourd	$a(1 - e^{-ip_4 a} + \epsilon)^{-1}$
vertex $V_{\mu, hhg}^a(p, p')$	$-ig_0 T^a h_{\mu 4} e^{-i(p_4 + p'_4) \frac{a}{2}}$
vertex $V_{\mu\nu, hhgg}^{ab}(p, p')$	$-\frac{1}{2} a g_0^2 h_{\mu 4} h_{\nu 4} \{T^a, T^b\} e^{-i(p_4 + p'_4) \frac{a}{2}}$
propagateur du gluon dans la jauge de Feynman	$a^2 \delta_{\mu\nu} \delta^{ab} (2W + a^2 \lambda^2)^{-1}$

Notons que p' et p sont les impulsions des fermions entrant et sortant respectivement. On a également introduit un régularisateur infrarouge λ pour le propagateur de gluon. On a symétrisé le vertex $V_{\mu\nu, hhgg}^{ab}$ en introduisant l'anticommutateur des générateurs de $SU(3)$, normalisé par un facteur $1/2$. Le propagateur de gluon est défini avec les champs A . On a choisi la jauge de Feynman : puisqu'on veut renormaliser un opérateur invariant de jauge, la constante de renormalisation $Z_{\mathcal{D}}$ est invariante de jauge.

On tire de (5.75) que $\Sigma(p) = -(F_1 + F_2)$, où F_1 et F_2 correspondent aux diagrammes dessinés sur les figures 5.4(a) et (b) :



FIG. 5.4: Corrections de la self-energy du quark lourd.

$$\begin{aligned}
F_1 &= -\frac{4}{3a} g_0^2 \int_k \frac{H(N_4)}{2W + a^2 \lambda^2} \frac{e^{-i(k_4 + 2ap_4)}}{1 - e^{-i(k_4 + ap_4)} + \epsilon} \\
&= -\frac{1}{3a} g_0^2 \int_k \frac{H(N_4)}{N_4^2 + E^2} \frac{e^{-i(k_4 + 2ap_4)}}{1 - e^{-i(k_4 + ap_4)} + \epsilon} \\
&= -\frac{1}{3a} g_0^2 \int_k \frac{H(N_4)}{(N_4 + iE)(N_4 - iE)} \frac{e^{-i(k_4 + 2ap_4)}}{1 - e^{-i(k_4 + ap_4)} + \epsilon} \\
&= -\frac{1}{3a} g_0^2 \int_{\vec{k}} \frac{1}{E} \frac{H(-iE)}{\sqrt{1 + E^2}} \frac{e^{-2iap_4}}{e^{E'} - e^{-iap_4}}.
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Rappelons que les indices latins sont spatiaux et

$$E^2 = \sum_i N_i^2 + \frac{a^2 \lambda^2}{4},$$

$$\begin{aligned}
H(N_4) &= \left(1 - d_1 \sum_i N_i^2 + d_2 \sum_{i < j} N_i^2 N_j^2 - d_3 N_1^2 N_2^2 N_3^2 \right)^2 \\
&+ N_4^2 \sum_i N_i^2 \left(d_1 - \frac{d_2}{2} \sum_{j \neq i} N_j^2 + \frac{d_3}{3} \prod_{j \neq i} N_j^2 \right)^2,
\end{aligned}$$

$$E' = 2 \operatorname{argsh}(E).$$

Dans l'équation (5.80) on a éliminé proprement le pôle non covariant $k_4 = -ap_4 + i\epsilon$ en refermant le contour d'intégration dans le plan complexe $\Im(k_4) < 0$ où se trouve le pôle simple $N_4 = -iE$. En outre les intégrales le long des chemins $k_4 = \pm\pi + ik'_4$ sont égales, car l'intégrand est 2π -périodique. Finalement on trouve à la limite $ap_4 \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{4}{3a} g_0^2 \int_{\vec{k}} \frac{H(-iE)}{4E\sqrt{1 + E^2}} \frac{1}{1 - e^{E'}} \\
&+ \frac{4}{3} g_0^2 ip_4 \int_{\vec{k}} \frac{H(-iE)}{2E\sqrt{1 + E^2}} \left[\frac{1}{e^{E'} - 1} + \frac{1}{2(e^{E'} - 1)^2} \right],
\end{aligned} \tag{5.81}$$

$$F_1 \equiv -\frac{g_0^2}{12\pi^2} \{ f_1(\alpha_i)/a + ip_4 [2\ln(a^2 \lambda^2) + f_2(\alpha_i)] \}. \tag{5.82}$$

Le diagramme "tadpole" F_2 a pour expression

$$\begin{aligned}
F_2 &= -\frac{1}{2} \frac{4g_0^2}{3a} e^{-iap_4} \int_k \frac{H(N_4)}{2W} \\
&\stackrel{=ap_4 \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} \frac{4g_0^2}{3} (1/a - ip_4) \int_k \frac{H(N_4)}{2W} \\
&\equiv -\frac{g_0^2}{12\pi^2} (1/a - ip_4) f_3(\alpha_i). \tag{5.83}
\end{aligned}$$

Le facteur 1/2 est introduit pour compenser l'excès de comptage du facteur 2 de la règle de Feynman du vertex à 2 gluons lorsqu'une boucle gluonique est calculée. On remarque que la divergence

$$\Sigma_0(\alpha_i) = \frac{g_0^2}{12\pi^2 a} \sigma_0(\alpha_i), \quad \sigma_0 = f_1 + f_3, \tag{5.84}$$

de la self-energy est plus petite avec les ensembles HYP1 et HYP2 des α_i que sans ces liens de bloc [37], comme indiqué dans la table 5.4 : $\sigma_0(\alpha_i = 0) = 19.95$, $\sigma_0(\text{HYP1}) = 5.76$ et $\sigma_0(\text{HYP2}) = 4.20$, en bon accord avec le calcul fait par la collaboration ALPHA [137], qui a comparé l'énergie effective du méson lourd-léger pseudoscalaire avec différentes actions du quark lourd, et par Hasenfratz *et al* [138]. Qualitativement, on s'attend à ce que le blocking hypercubique réduise les corrections radiatives puisqu'il revient grosso-modo à introduire un cut-off supplémentaire dans les intégrales. La constante de renormalisation du champ de quark lourd Z_{2h} s'écrit

$$Z_{2h}(\alpha_i) = 1 + \frac{g_0^2}{12\pi^2} [-2\ln(a^2\lambda^2) + z_2(\alpha_i)], \quad z_2 = f_3 - f_2. \tag{5.85}$$

$|z_2|$ est également réduite par le blocking hypercubique, comme indiqué dans la table 5.4 : $z_2(\alpha_i = 0) = 24.48$ [37], $z_2(\text{HYP1}) = 2.52$ et $z_2(\text{HYP2}) = -3.62$.

On doit renormaliser l'opérateur $O_{ij}^B = \bar{h}^B \gamma_i \gamma^5 D_j h^B$. Suivant les notations de [97], on a

$$\begin{aligned}
a^4 \sum_n O_{ij}^B(n) &= a^4 \frac{1}{2a} \sum_n \bar{h}^B(n) \gamma_i \gamma^5 U_j(n) h^B(n + \hat{j}) - \bar{h}^B(n) \gamma_i \gamma^5 U_j^\dagger(n - \hat{j}) h^B(n - \hat{j}) \\
&= \int_p \int_{p'} a^{-1} \delta(p - p') \bar{h}^B(p) (i\gamma_i \gamma^5 \sin ap'_j) h^B(p') \\
&+ ig_0 \int_p \int_{p'} \int_q \delta(q + p' - p) \bar{h}^B(p) \gamma_i \gamma^5 c_j A_j^a(q) T^a h^B(p') \\
&- \frac{ia g_0^2}{2!} \int_p \int_{p'} \int_q \int_r \delta(q + r + p' - p) \bar{h}^B(p) T^a T^b \gamma_i \gamma^5 \sin_j A_j^a(q) A_j^b(r) h^B(p'). \tag{5.86}
\end{aligned}$$

Notons qu'on a choisi d'utiliser les liens classiques dans la définition de la dérivée covariante, de manière à ne pas supprimer la physique ultraviolette au niveau de cet opérateur. La fonction de vertex V_{ij}^B s'obtient en écrivant $V_{ij}^B = V_{ij}^0 + V_{ij}^1 + V_{ij}^2$, correspondant aux diagrammes (a), (b) et (c) de la figure 5.5 ; $V_{ij}^k(\alpha_i) = \bar{u}(p) \gamma_i \gamma^5 u(p) V_j^k(\alpha_i)$, $k = 0, 1, 2$. La contribution V_{ij}^0 est donnée en

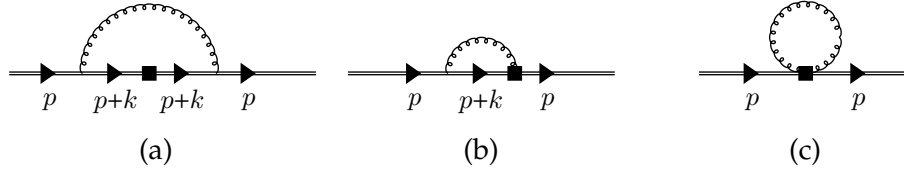


FIG. 5.5: Diagrammes associés aux corrections à une boucle de l'opérateur $O_{ij}^B = \bar{h}^B \gamma_i \gamma^5 D_j h^B$.

calculant

$$\begin{aligned}
 V_j^0(\alpha_i) &= -\frac{4i}{3a} g_0^2 \int_k \frac{H(N_4)}{2W + a^2 \lambda^2} \sin(k + ap)_j \frac{e^{-i(k_4 + 2ap_4)}}{(1 - e^{-i(k_4 + ap_4)} + \epsilon)^2} \\
 &= -\frac{4i}{3a} g_0^2 \int_k \frac{H(N_4)}{2W + a^2 \lambda^2} (\Gamma_j + ap_j \cos k_j) e^{-iap_4} \left(\frac{e^{-i\frac{k_4 + ap_4}{2}}}{1 - e^{-i(k_4 + ap_4)} + \epsilon} \right)^2 \\
 &= -\frac{4i}{3a} g_0^2 \int_k \frac{H(N_4)}{2W + a^2 \lambda^2} (\Gamma_j + ap_j \cos k_j) (1 - iap_4) \frac{1}{\left[2i \sin\left(\frac{k_4 + ap_4}{2}\right) + e^{i\frac{k_4 + ap_4}{2}} \epsilon \right]^2}.
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

On peut supprimer l'intégrand proportionnel à Γ_j , car il est impair. Il reste

$$V_j^0(\alpha_i) = -\frac{4}{3} i g_0^2 p_j \int_k \frac{H(N_4)}{2W + a^2 \lambda^2} \frac{\cos k_j}{(2iN_4 + \epsilon M_4)^2}.$$

L'intégrand a des pôles en $N_4 = \pm iE$, $k_4 = 2i \operatorname{arcth}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$. Une fois encore on referme le contour d'intégration autour du pôle simple $N_4 = -iE$.

Le diagramme "sail" a l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 V_j^1 &= \frac{4}{3a} g_0^2 \int_k \frac{h_{4j}}{2W + a^2 \lambda^2} \cos\left(\frac{k_j}{2} + ap_j\right) \frac{e^{-i\left(\frac{k_4}{2} + ap_4\right)}}{1 - e^{-i(k_4 + ap_4)} + \epsilon} \\
 &= \frac{4}{3a} g_0^2 \int_k \frac{h_{4j}}{2W + a^2 \lambda^2} (M_j - ap_j N_j) \left(1 - i\frac{ap_4}{2}\right) \frac{1}{2i \sin\left(\frac{k_4 + ap_4}{2}\right) + e^{i\frac{k_4 + ap_4}{2}} \epsilon} \\
 &= -\frac{4}{3} g_0^2 p_j \int_k \frac{h_{4j}}{2W + a^2 \lambda^2} N_j \frac{1}{2iN_4 + \epsilon M_4} \\
 &= -\frac{4}{3} g_0^2 p_j \int_k \frac{N_4 A'_j}{2W + a^2 \lambda^2} N_j^2 \frac{1}{2iN_4 + \epsilon M_4} \\
 &= \frac{2}{3} g_0^2 i p_j \int_k \frac{A'_j N_j^2}{2W + a^2 \lambda^2}, \\
 A'_j &= \left(d_1 - d_2 \frac{N_k^2 + N_l^2}{2} + d_3 \frac{N_k^2 N_l^2}{3} \right), \quad k \neq l \neq j.
 \end{aligned}$$

Il faut le multiplier par 2 car il y a deux manières équivalentes d'attacher la patte gluonique du vertex à l'un ou à l'autre propagateur de quark.

Enfin la contribution du tadpole V_{ij}^2 s'obtient en calculant

$$V_j^2(\alpha_i) = -\frac{1}{2!} \frac{4}{3} i g_0^2 p_j \int_k \frac{1}{2W} = -\frac{i g_0^2}{12\pi^2} p_j \tag{5.88}$$

	$\alpha_i = 0$	HYP1	HYP2
f_1	7.72	1.64	-1.76
f_2	-12,25	1.60	9.58
f_3	12.23	4.12	5.96
f_4	-12.68	-4.95	-0.56
σ_0	19.95	5.76	4.20
z_2	24.48	2.52	-3.62
z_d	11.80	-2.43	-4.19

TAB. 5.4: Valeurs numériques des paramètres $f_1, f_2, f_3, f_4, \sigma_0, z_2, z_d$ définies dans les équations (5.82), (5.83), (5.89), (5.84), (5.85) et (5.90), respectivement.

On peut alors écrire $\langle H^{**} | O_{ij}^R | H \rangle = Z_D^{-1}(\alpha_i) \langle H^{**} | O_{ij}^B | H \rangle(\alpha_i)$ où

$$\begin{aligned}
Z_D(\alpha_i) &= Z_{2h}(\alpha_i)[1 + \delta V(\alpha_i)], \\
\delta V(\alpha_i) &= -\frac{4g_0^2}{3} \int_k \left(\frac{H(N_4) \cos k_j}{(2W + a^2\lambda^2)(2iN_4 + \epsilon M_4)^2} + \frac{1 - 2N_j^2 A'_j}{4W} \right) \\
&= -\left\{ \frac{4g_0^2}{3} \int_{\vec{k}} \left[\frac{H(-iE) \cos k_j}{2(2E)^3 \sqrt{1 + E^2}} - \frac{A'_j N_j^2}{4E \sqrt{1 + E^2}} \right] + \frac{g_0^2}{12\pi^2} 12.23 \right\} \\
&\equiv \frac{g_0^2}{12\pi^2} [2 \ln(a^2\lambda^2) + f_4(\alpha_i)], \tag{5.89}
\end{aligned}$$

$$Z_D(\alpha_i) = 1 + \frac{g_0^2}{12\pi^2} z_d(\alpha_i), \quad z_d = z_2 + f_4. \tag{5.90}$$

Les valeurs numériques de z_d sont indiquées dans la table 5.4. Remarquons que les divergences infrarouges apparaissant dans Z_{2h} et $1 + \delta V$ se compensent et qu'il n'y a pas de dépendance explicite en a , une conséquence de l'indépendance en μ de l'élément de matrice $\langle H_0^*(v') | \bar{h}(v') \gamma_i \gamma_5 D_j h(v) | H(v) \rangle$ à recul nul. Notons également que le diagramme "tadpole" de la correction du vertex n'est pas régularisé par le blocking hypercubique ; par conséquent sa contribution est importante. En revanche la contribution du diagramme "tadpole" à la correction de la self-energy est régularisée par le blocking. Le résultat final est une correction positive assez large pour l'élément de matrice renormalisé. En fixant $g_0 = 1$ ($\beta = 6.0$), cela donne $Z_D^{-1}(\text{HYP1}) = 1.02$ et $Z_D^{-1}(\text{HYP2}) = 1.04$, de sorte que l'écart entre $Z_D^{-1}(\text{HYP1})$ et $Z_D^{-1}(\text{HYP2})$ est faible (2%) ; sans blocking hypercubique on obtient $Z_D^{-1}(\alpha_i = 0) = 0.90$. On peut imaginer une renormalisation par boosting ; dans le cas où tous les liens ont subi un blocking hypercubique la correction de boosting à la plaquette est très faible [135] (équation 19 et en-dessous). D'autre part l'opérateur de dérivée covariante ne contient pas de tels liens : on pourrait utiliser une autre prescription pour le diagramme dessiné sur la figure 5.5(c), conduisant éventuellement à une contribution plus importante du tadpole à $Z_D^{-1}(\alpha_i \neq 0)$, et donc à une correction positive plus large à l'élément de matrice considéré. Toutefois ce genre de "recette", assez empirique, n'aurait pas pour effet d'avoir $Z_D^{-1}(\alpha_i \neq 0)$ beaucoup plus grand que 1.1. Avec notre étude exploratoire du calcul de $\tau_{\frac{1}{2}}(1)$ et de $\tau_{\frac{3}{2}}(1)$ menée sur le réseau [132] et $Z_D^{-1}(\text{HYP1})$, on trouve $\tau_{\frac{1}{2}}(1) = 0.39(5)$, $\tau_{\frac{3}{2}}(1) = 0.54(6)$, les valeurs "nues" étant $\tau_{\frac{1}{2}}^{(B)}(1) = 0.38(4)$ et $\tau_{\frac{3}{2}}^{(B)}(1) = 0.53(8)$, et $\tau_{\frac{3}{2}}^2(1) - \tau_{\frac{1}{2}}^2(1) = 0.14(10)$, où les erreurs systématiques sont encore indétermi-

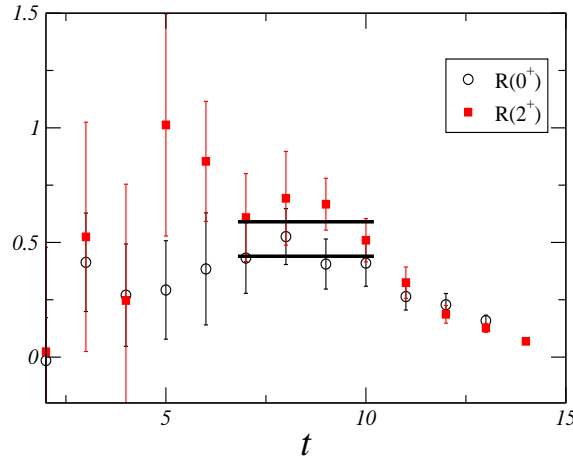


FIG. 5.6: Rapports $1/(M_{H_j^{j_i=1\pm 1/2}} - M_H) \sqrt{2j_i} \frac{z_{0^-} z_{P^\pm} C_{P^\pm}^{(3)}(t_1, t_2)}{C_{0^-}^{(2)}(t_1) C_{P^\pm}^{(2)}(t_2 - t_1)}$, $j_i = 1/2, 3/2$.

nées ; ce résultat n'est de ce fait pas très loin (à 1σ) de saturer la règle de somme d'Uraltsev (5.32). Malheureusement la relation sur les moments $\mu_\pi^2 - \mu_G^2 > 9 \Delta^2 \tau_{\frac{1}{2}}^2(1)$ [139], où $\Delta \equiv M_{H_0^*} - M_H = 0.4$ GeV [132], $\mu_G^2 = 0.35$ GeV², donne μ_π^2 plus grand que 0.6 GeV², bien au-dessus des valeurs expérimentales déterminées par les moments de la distribution de masse. Mentionnons qu'une estimation de $\tau_{\frac{1}{2}}(1)$ par les règles de somme a donné $\tau_{\frac{1}{2}}(1) = 0.34 \pm 0.09$ [140].

Le problème majeur avec notre simulation est la faible qualité du signal : les rapports des fonctions à trois points sur les fonctions à deux points ont des plateaux très court pour $\tau_{\frac{3}{2}}$ ou de qualité moyenne pour $\tau_{\frac{1}{2}}$. Afin d'améliorer cette situation on a tenté d'appliquer la méthode expliquée au paragraphe précédent, espérant ainsi mieux isoler les états fondamentaux. On a effectué ce test en faisant varier le temps source t_2 de 12 à 15. Le meilleur signal a été obtenu à $t_2 = 14$ pour $\tau_{\frac{1}{2}}$ et $t_2 = 15$ pour $\tau_{\frac{3}{2}}$, les rapports des fonctions à 3 points par les fonctions à 2 points correspondants étant représentés sur la figure 5.6. On trouve alors $\tau_{\frac{1}{2}}^{(B)}(1) = 0.44(9)$ et $\tau_{\frac{3}{2}}^{(B)}(1) = 0.59(9)$. L'utilisation des propagateurs "all-to-all" permettra sans doute de réduire considérablement les fluctuations statistiques, si bien qu'une étude plus approfondie des erreurs systématiques par rapport à la masse du quark léger ou aux effets de quenching sera possible.

Constantes de renormalisation des opérateurs de dimension 3 lourd-lourd et lourd-léger

Nous allons à présent effectuer une petite digression, car nous souhaitons donner la valeur des constantes de renormalisation des opérateurs de dimension 3 lourd-lourd $\bar{h}\gamma h$ et lourd-léger $\bar{h}\gamma q$ avec l'action HQET HYP pour le quark lourd et l'action de Wilson pour le quark léger, dont les règles de Feynman sont

propagateur du quark léger	$a (i\gamma \cdot \bar{p} + am + \frac{r}{2}\hat{p}^2)^{-1}$
vertex $V_{\mu,qqg}^a(p, p')$	$-igT^a(\gamma^\mu c_\mu - ir s_\mu)$
vertex $V_{\mu\nu,qqgg}^{ab}(p, p')$	$\frac{1}{2}ia g^2 \delta_{\mu\nu} \{T^a, T^b\} (\gamma^\mu s_\mu + ir c_\mu)$

Dans la suite on ne tiendra pas compte de la masse m , puisque les constantes de renormalisation sont écrites dans le schéma MOM qui est indépendant de la masse, et on fixera r à 1. Pour la self-energy du quark léger le diagramme analogue à celui représenté sur la figure 5.4(a) a comme

expression

$$\begin{aligned}
F'_1 &= -\frac{4}{3a}g_0^2 \sum_{\mu} \int_k \left(\frac{1}{2W + a^2\lambda^2} + 2a \frac{\sum_{\lambda} p_{\lambda} \Gamma_{\lambda}}{(2W + a^2\lambda^2)^2} \right) \left[\gamma^{\mu} M_{\mu} - iN_{\mu} - \frac{ap_{\mu}}{2} (\gamma^{\mu} N_{\mu} + iM_{\mu}) \right] \\
&\quad - \frac{-i \not{V} + W}{\Gamma^2 + W^2} \left[\gamma^{\mu} M_{\mu} - iN_{\mu} - \frac{ap_{\mu}}{2} (\gamma^{\mu} N_{\mu} + iM_{\mu}) \right], \\
F'_1 &= -\frac{4}{3a}g_0^2 \int_k \frac{1}{(2W + a^2\lambda^2)(\Gamma^2 + W^2)} \sum_{\mu} (-i\gamma^{\mu} \not{V} M_{\mu} + W\gamma^{\mu} M_{\mu} - \not{V} N_{\mu} - iW N_{\mu}) (\gamma^{\mu} M_{\mu} - iN_{\mu}) \\
&\quad - \frac{4}{3}g_0^2 \int_k \frac{2 \sum_{\lambda} p_{\lambda} \Gamma_{\lambda}}{(2W + a^2\lambda^2)^2(\Gamma^2 + W^2)} \sum_{\mu} (-i\gamma^{\mu} \not{V} M_{\mu} + W\gamma^{\mu} M_{\mu} - \not{V} N_{\mu} - iW N_{\mu}) (\gamma^{\mu} M_{\mu} - iN_{\mu}) \\
&\quad + \frac{4}{3}g_0^2 \frac{1}{2} \int_k \frac{1}{(2W + a^2\lambda^2)(\Gamma^2 + W^2)} \sum_{\mu} p_{\mu} (-i\gamma^{\mu} \not{V} N_{\mu} + W\gamma^{\mu} N_{\mu} + \not{V} M_{\mu} + iW M_{\mu}) (\gamma^{\mu} M_{\mu} - iN_{\mu}) \\
&\quad + \frac{4}{3}g_0^2 \frac{1}{2} \int_k \frac{1}{(2W + a^2\lambda^2)(\Gamma^2 + W^2)} \sum_{\mu} p_{\mu} (\gamma^{\mu} M_{\mu} - iN_{\mu}) (-i \not{V} \gamma^{\mu} N_{\mu} + W\gamma^{\mu} N_{\mu} + \not{V} M_{\mu} + iW M_{\mu}) \\
&= \frac{4}{3a}g_0^2 \int_k \frac{1}{2W(\Gamma^2 + W^2)} \left(\Gamma^2 - W \sum_{\mu} \cos k_{\mu} \right) \\
&\quad - \frac{4}{3}g_0^2 i \not{p} \int_k \frac{1}{(2W + a^2\lambda^2)^2(\Gamma^2 + W^2)} \left[(d - W)\Gamma_{\nu}^2 - 2 \sum_{\mu} \sin^2 k_{\mu} \cos^2 \frac{k_{\mu}}{2} \right] \\
&\quad + \frac{4}{3}g_0^2 i \not{p} \int_k \frac{1}{(2W + a^2\lambda^2)(\Gamma^2 + W^2)} (W \cos k_{\nu} - \Gamma_{\nu}^2). \tag{5.91}
\end{aligned}$$

Dans les relations précédentes on n'a gardé que les termes pairs dans les intégrales, on a utilisé diverses relations telles que $M_{\mu}^2 + N_{\mu}^2 = 1$, $M^2 + N^2 = \sum_{\mu} M_{\mu}^2 + N_{\mu}^2 = d$, d étant la dimension utilisée pour la régularisation dimensionnelle, $M_{\mu} N_{\mu} = \frac{\Gamma_{\mu}}{2}$, et on a fait appel à des simplifications comme $\sum_{\mu} \Gamma_{\mu} \Gamma_{\rho} = \delta_{\mu\rho} \Gamma_{\rho}^2$, $\sum_{\mu} p_{\mu} \gamma^{\mu} \int f_{\mu} = \not{p} \int f_{\mu}$ lorsque l'intégrand est invariant par rotation. Lorsqu'on ajoute le diagramme tadpole on trouve que la constante de renormalisation du champ de quark léger s'écrit [141]

$$Z_{2l} = 1 + \frac{g_0^2}{12\pi^2} [\ln(a^2\lambda^2) + z'_2], \quad z'_2 = 13.35. \tag{5.92}$$

Le diagramme 1PI donnant la correction au premier ordre de l'opérateur de vertex lourd-léger a comme expression

$$\begin{aligned}
J_{h\gamma} &= -\frac{4}{3}g_0^2 \int_k \frac{\sum_j h_{4j}}{(2W + a^2\lambda^2)(\Gamma^2 + W^2)} \frac{e^{-i\frac{k_4}{2}}}{1 - e^{-ik_4} + \epsilon} \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma(-i \not{V} + W)(\gamma_j M_j - iN_j) \\
&= -\frac{4}{3}g_0^2 \int_k A_h B_{h\gamma}, \tag{5.93}
\end{aligned}$$

$$A_h = \frac{1}{(2W + a^2\lambda^2)(\Gamma^2 + W^2)} \frac{1 + \gamma^0}{2},$$

$$\begin{aligned}
B_{h\gamma} &= \frac{e^{-i\frac{k_4}{2}}}{1 - e^{-ik_4} + \epsilon} \sum_j h_{4j} \gamma(-iM_j \mathcal{V}\gamma_j - N_j \mathcal{V} + WM_j\gamma_j - iWN_j) \\
&= \frac{D_4}{2iN_4 + \epsilon M_4} \gamma(-iM_4 \mathcal{V}\gamma_0 - N_4 \mathcal{V} + WM_4\gamma_0 - iWN_4) \\
&\quad + \sum_{j=1}^3 \frac{N_4 A'_j}{2iN_4 + \epsilon M_4} \gamma \left(-i \mathcal{V} \frac{\mathcal{V}_j}{2} - \mathcal{V} N_j^2 + W \frac{\mathcal{V}_j}{2} - iWN_j^2 \right).
\end{aligned}$$

A ce stade, on élimine les termes qui ne vont pas contribuer à l'intégrale.

$$\begin{aligned}
B_{h\gamma} &= \frac{D_4}{2iN_4 + \epsilon M_4} \gamma \left[WM_4\gamma^0 - 2iN_4 \left(M_4^2 + \frac{W}{2} \right) \right] \\
&\quad - \gamma \frac{iN_4}{2iN_4 + \epsilon M_4} \sum_{j=1}^3 A'_j \left(\frac{\Gamma_j^2}{2} + WN_j^2 \right) + \dots.
\end{aligned}$$

Sur $[-\pi/2, \pi/2]$, M_4 garde un signe constant, positif, et $2iN_4 + \epsilon M_4$ a un seul pôle en $k_4 = 2i \operatorname{argth}(\epsilon/2)$. En refermant le contour d'intégration dans le plan complexe $\Im(z) < 0$, on peut s'affranchir du ϵ , à condition de ne pas avoir de singularité en $k_4 = 0$; on a finalement :

$$J_{h\gamma} = \frac{4}{3} g_0^2 \int_k A_h \left\{ \gamma \left[D_4 \left(M_4^2 + \frac{W}{2} \right) + \sum_{j=1}^3 A'_j N_j^2 \left(M_j^2 + \frac{W}{2} \right) \right] - \gamma \gamma_0 \frac{D_4 W M_4}{2iN_4 + \epsilon M_4} \right\} \quad (5.94)$$

On remarque alors que $J_{h\gamma} = \frac{1+\gamma_0}{2} \gamma \beta_{hl}$:

$$\beta_{hl}(\alpha_i) = \frac{4}{3} g_0^2 (D_1(\alpha_i) + GD_2(\alpha_i)),$$

avec

$$\begin{aligned}
G\gamma &= \gamma_0 \gamma \gamma_0, \\
D_1(\alpha_i) &= \frac{1}{4} \int_k \frac{1}{N_4^2 + E^2} \frac{1}{\Gamma^2 + W^2} \left[D_4 \left(M_4^2 + \frac{W}{2} \right) + \sum_{j=1}^3 A'_j N_j^2 \left(M_j^2 + \frac{W}{2} \right) \right], \\
D_2(\alpha_i) &= -\frac{1}{4} \int_k \frac{1}{N_4^2 + E^2} \frac{1}{\Gamma^2 + W^2} \frac{D_4 W M_4}{2iN_4 + \epsilon M_4}, \quad (5.95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2 + W^2 &= 4[N_4^2(1 - N_4^2) + A^2 + (N_4^2 + E_0^2)^2] \\
&= 4[N_4^2(1 + 2E_0^2) + E_0^4 + A^2], \\
A^2 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \sin^2(k_i),
\end{aligned}$$

$$D_1(\alpha_i) = \frac{1}{16} \int_k \frac{1}{N_4^2 + E^2} \frac{1}{1 + 2E_0^2} \frac{1}{N_4^2 + E_1^2} \left[D_4 \left(M_4^2 + \frac{W}{2} \right) + \sum_{j=1}^3 A'_j N_j^2 \left(M_j^2 + \frac{W}{2} \right) \right], \quad E_1 = \sqrt{\frac{E_0^4 + A^2}{1 + 2E_0^2}}.$$

	$\alpha_i = 0$	HYP1	HYP2
D'_1	5.46	4.99	4.72
D_2	-7.22	-3.70	-1.87
δ	-4.53	3.24	7.82
$z_{hh\gamma}$	19.95	5.76	4.20

TAB. 5.5: Valeurs numériques des paramètres D'_1 , D_2 , δ , $z_{hh\gamma}$ définies dans les équations (5.96), (5.97), (5.100) (5.101), respectivement.

On peut identifier E à E_0 si l'intégrale n'est pas divergente infrarouge :

$$\begin{aligned}
D_1(\alpha_i) &= \frac{1}{16} \int_{\vec{k}} \frac{1}{1+2E_0^2} \frac{1}{N_4^2 + E_1^2} \left[D_4 \left(\frac{M_4^2}{N_4^2 + E^2} + 1 \right) + \sum_{j=1}^3 A'_j N_j^2 \left(\frac{M_j^2}{N_4^2 + E^2} + 1 \right) \right], \\
D_1(\alpha_i) &= \frac{1}{16} \int_{\vec{k}} \frac{1}{1+2E_0^2} \frac{1}{\sqrt{1+E_1^2}} \frac{1}{E_1} \left(D_4 + \sum_{j=1}^3 A'_j N_j^2 \right) \\
&+ \frac{1}{16} \int_{\vec{k}} \frac{1}{1+2E_0^2} \frac{1}{E_1^2 - E^2} \left[D_4 \left(\frac{\sqrt{1+E^2}}{E} - \frac{\sqrt{1+E_1^2}}{E_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^3 A'_j N_j^2 M_j^2 \left(\frac{1}{E\sqrt{1+E^2}} - \frac{1}{E_1\sqrt{1+E_1^2}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{16\pi^2} [D'_1 - \ln(a^2\lambda^2)]. \tag{5.96}
\end{aligned}$$

Le terme provenant de la brisure de la symétrie chirale par l'action de Wilson est donné par :

$$\begin{aligned}
D_2(\alpha_i) &= -\frac{1}{8} \int_{\vec{k}} \frac{D_4}{1+2E_0^2} \frac{1}{N_4^2 + E_1^2} \frac{M_4}{2iN_4 + \epsilon M_4} \\
&= -\frac{1}{16} \int_{\vec{k}} \frac{D_4}{1+2E_0^2} \frac{1}{E_1^2} \\
&= -\frac{1}{16} \int_{\vec{k}} \frac{D_4}{E_0^4 + A^2}. \tag{5.97}
\end{aligned}$$

En renormalisant dans le même schéma que précédemment, le vertex nu $V_{hl\gamma}^B$ s'écrit donc

$$V_{hl\gamma}^B = (1 + \beta_{hl}) V_{hl\gamma}^R, \tag{5.98}$$

et la constante de renormalisation de l'opérateur $\bar{h}\gamma q$, $Z_{hl\gamma} \equiv \sqrt{Z_{2h}}\sqrt{Z_{2l}}(1+\beta_{hl})$ a comme expression

$$Z_{hl\gamma}(\alpha_i) = 1 + \frac{g_0^2}{12\pi^2} \left(\frac{z'_2 + z_2(\alpha_i) - 3\ln(a^2\lambda^2)}{2} + D'_1(\alpha_i) + GD_2(\alpha_i) \right). \tag{5.99}$$

La divergence infrarouge disparaît lorsqu'on fait le matching avec HQET dans le continu, et il reste seulement la dépendance en $\ln(a\mu)$ de l'opérateur lourd-léger $\bar{h}\gamma q$ dans HQET. Les constantes D'_1 et D_2 ont été données dans la table 5.5 pour les mêmes ensembles de α_i que précédemment.

Enfin la correction au vertex de courant lourd-lourd $\bar{h}\gamma h$ est donnée par $V_{hh\gamma}^B = (1 + \beta_{hh})\bar{h}\gamma h$ où

$$\begin{aligned}
\beta_{hh}(\alpha_i) &= -\frac{4}{3}g_0^2 \int_k \frac{H(N_4)}{2W} \left(\frac{e^{-i\frac{k_4}{2}}}{1 - e^{-ik_4} + \epsilon} \right)^2 \\
&= -\frac{1}{3}g_0^2 \int_k \frac{H(N_4)}{(N_4 + iE)(N_4 - iE)} \frac{1}{(2iN_4 + \epsilon M_4)^2} \\
&= -\frac{1}{3}g_0^2 \int_{\vec{k}} \frac{H(-iE)}{4E^3} \frac{1}{\sqrt{1 + E^2}} \\
&= \frac{g_0^2}{12\pi^2} [2 \ln(a^2 \lambda^2) + \delta(\alpha_i)], \tag{5.100}
\end{aligned}$$

et la constante de renormalisation du courant lourd-lourd $Z_{hh\gamma} \equiv Z_{2h}(1 + \beta_{hh})$ est donnée par

$$Z_{hh\gamma}(\alpha_i) = 1 + \frac{g_0^2}{12\pi^2} z_{hh\gamma}(\alpha_i), \quad z_{hh\gamma} = z_2 + \delta. \tag{5.101}$$

La divergence infrarouge est également absente, et est liée à la normalisation de la fonction d'Isgur-Wise élastique à recul nul. On a indiqué dans la table 5.5 les valeurs de δ et de $z_{hh\gamma}$ pour les mêmes ensembles de α_i que précédemment.

Chapitre 6

Mélange $B_s - \overline{B}_s$

Dans cette dernière partie on abordera l'étude du mélange $B_s - \overline{B}_s$: nous commencerons par présenter les résultats généraux concernant la violation de CP dans le système des B_s , puis nous décrirons l'estimation du paramètre B_{B_s} par un calcul sur réseau.

6.1 Violation de CP dans le système des B_s

Nous introduirons dans cette partie la matrice CKM, ingrédient minimal pour paramétrer la violation de CP dans le Modèle Standard, et nous décrirons comment le développement en produits d'opérateurs permet à partir d'un hamiltonien effectif d'exprimer simplement la différence de masse ΔM_s non nulle entre B_s et \overline{B}_s , qui est une conséquence de la violation de CP dans le Modèle Standard.

6.1.1 Matrice CKM

Dans le Modèle Standard, la principale source de violation de CP provient des couplages de Yukawa entre les champs de fermions et les champs de Higgs¹. Lorsqu'on exprime le Lagrangien du Modèle Standard dans l'espace des états propres de masse, la violation de CP se traduit dans le secteur des quarks par l'apparition d'une matrice unitaire V_{CKM} dans le Lagrangien de courant chargé \mathcal{L}_{CC} :

$$\mathcal{L}_{\text{CC}} = \frac{g_2}{2\sqrt{2}}(J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu}), \quad (6.1)$$

$$J_\mu^+ = (\bar{u}d')_{V-A} + (\bar{c}s')_{V-A} + (\bar{t}b')_{V-A},$$

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = V_{\text{CKM}} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Un des paramètres de cette matrice est un nombre complexe non réabsorbé dans la redéfinition des champs. A noter que l'unitarité de V_{CKM} garantit l'absence de courants neutres à l'ordre des arbres, ce qui est la base du mécanisme GIM; ces processus appelés également *Flavor Changing Neutral*

¹Une source de violation de CP est contenue dans le terme $\theta F \tilde{F}$ contribuant à l'interaction forte, mais les mesures sur le moment dipolaire du neutron ont montré que θ est très petit ($< 10^{-9}$).

Current (FCNC) sont permis à l'ordre d'une boucle et sont à l'origine du mélange $B_s - \overline{B}_s$. Leur étude permet de contraindre de façon importante une éventuelle nouvelle physique qui pourrait se manifester par l'échange de particules nouvelles dans les boucles. Suivant la paramétrisation du Particle Data Group, V_{CKM} est donnée par :

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

où δ est la phase nécessaire pour la violation de CP . La mesure de cette dernière dans la désintégration des K fixe δ dans l'intervalle $0 < \delta < \pi$. Phénoménologiquement on sait que s_{12} et s_{23} sont très petits, $\mathcal{O}(10^{-3})$ et $\mathcal{O}(10^{-2})$ respectivement, de sorte qu'on fixe $c_{12} = c_{23} = 1$ et les paramètres indépendants sont

$$s_{12} = |V_{us}|, \quad s_{13} = |V_{ub}|, \quad s_{23} = |V_{cb}|, \quad \delta. \quad (6.4)$$

L'avantage de cette paramétrisation est que la phase violant CP est multipliée par le petit paramètre $s_{13} = |V_{ub}|$, indiquant que cette violation est très faible, quelque soit δ . Une deuxième paramétrisation très usuelle est la paramétrisation de Wolfenstein : V_{CKM} , dont chaque élément est un développement par rapport au sinus de l'angle de Cabibbo $\lambda = |V_{us}| = 0.22$, est donnée par

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\varrho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \varrho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4), \quad (6.5)$$

et les 4 paramètres sont

$$\lambda, \quad A, \quad \varrho, \quad \eta. \quad (6.6)$$

A une excellente approximation on peut écrire

$$V_{us} = \lambda, \quad V_{cb} = A\lambda^2, \quad (6.7)$$

$$V_{ub} = A\lambda^3(\varrho - i\eta), \quad V_{td} = A\lambda^3(1 - \bar{\varrho} - i\bar{\eta}), \quad (6.8)$$

avec

$$\bar{\varrho} = \varrho \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right), \quad \bar{\eta} = \eta \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right). \quad (6.9)$$

A noter qu'il existe une généralisation de cette paramétrisation, en poursuivant plus loin les développements en λ et en définissant les paramètres de $(\lambda, A, \varrho, \eta)$ par

$$s_{12} = \lambda, \quad s_{23} = A\lambda^2, \quad s_{13}e^{-i\delta} = A\lambda^3(\varrho - i\eta); \quad (6.10)$$

on peut écrire notamment

$$V_{ud} = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4 + \mathcal{O}(\lambda^6), \quad V_{us} = \lambda + \mathcal{O}(\lambda^7), \quad (6.11)$$

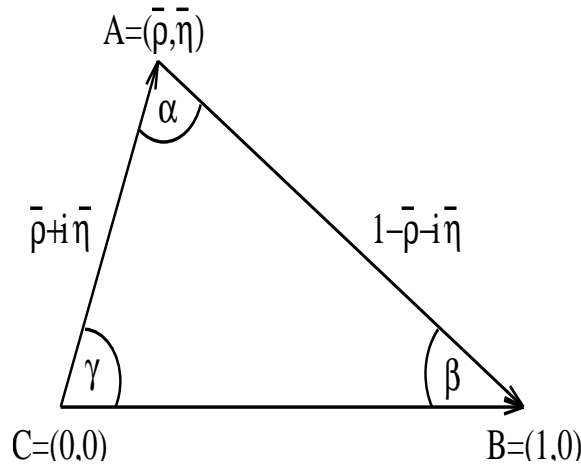


FIG. 6.1: Triangle d'unitarité.

$$V_{ub} = A\lambda^3(\varrho - i\eta), \quad V_{cd} = -\lambda + \frac{1}{2}A^2\lambda^5[1 - 2(\varrho + i\eta)] + \mathcal{O}(\lambda^7), \quad (6.12)$$

$$V_{cs} = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4(1 + 4A^2) + \mathcal{O}(\lambda^6), \quad V_{cb} = A\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^8), \quad (6.13)$$

$$V_{td} = A\lambda^3 \left[1 - (\varrho + i\eta)(1 - \frac{1}{2}\lambda^2) \right] + \mathcal{O}(\lambda^7), \quad V_{ts} = -A\lambda^2 + \frac{1}{2}A(1 - 2\varrho)\lambda^4 - i\eta A\lambda^4 + \mathcal{O}(\lambda^6), \quad (6.14)$$

$$V_{tb} = 1 - \frac{1}{2}A^2\lambda^4 + \mathcal{O}(\lambda^6). \quad (6.15)$$

L'unitarité de la matrice CKM implique plusieurs relations entre ses éléments et en particulier

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0, \quad (6.16)$$

ce qui se représente par un triangle d'unitarité dans le plan complexe $(\bar{\varrho}, \bar{\eta})$, comme montré sur la figure 6.1. En effet, en remarquant que

$$V_{cd}V_{cb}^* = -A\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^7), \quad (6.17)$$

on constate que $V_{cd}V_{cb}^*$ est réel, $|V_{cd}V_{cb}^*| = A\lambda^3$. En gardant les corrections $\mathcal{O}(\lambda^5)$ et en divisant tous les termes de (6.16) par $A\lambda^3$ on trouve

$$\frac{1}{A\lambda^3}V_{ud}V_{ub}^* = \bar{\varrho} + i\bar{\eta}, \quad \frac{1}{A\lambda^3}V_{td}V_{tb}^* = 1 - (\bar{\varrho} + i\bar{\eta}), \quad (6.18)$$

où $\bar{\varrho}$ et $\bar{\eta}$ sont définis en (6.9). Le taux de violation de CP J_{CP} est relié à l'aire A_Δ du triangle par $|J_{CP}| = 2A_\delta$ [142]. Les valeurs actuelles des paramètres de la matrice CKM sont les suivantes [72] :

$$|V_{ud}| = 0.9738 \pm 0.0005, \quad |V_{us}| = 0.2200 \pm 0.0026, \quad (6.19)$$

$$|V_{cd}| = 0.224 \pm 0.012, \quad |V_{cs}| = 0.996 \pm 0.013, \quad (6.20)$$

$$|V_{cb}| = (41.3 \pm 1.5) \times 10^{-3}, \quad |V_{ub}| = (3.67 \pm 0.47) \times 10^{-3}, \quad (6.21)$$

$$0.0048 < |V_{td}| < 0.014, \quad 0.037 < |V_{ts}| < 0.043, \quad 0.9990 < |V_{tb}| < 0.9992. \quad (6.22)$$

A partir des transitions $b \rightarrow c$ inclusives et exclusives, on détermine $|V_{cb}|$ et par conséquent la taille du triangle d'unitarité :

$$V_{cb} \implies \lambda V_{cb} = \lambda^3 A. \quad (6.23)$$

A partir des transitions $b \rightarrow u$ inclusives et exclusives, on détermine $|V_{ub}/V_{cb}|$, ce qui contraint le côté $CA = R_b$ du triangle d'unitarité :

$$\left| \frac{V_{ub}}{V_{cb}} \right| \implies R_b = \sqrt{\bar{\varrho}^2 + \bar{\eta}^2} = 4.44 \cdot \left| \frac{V_{ub}}{V_{cb}} \right|. \quad (6.24)$$

A partir de la valeur expérimentale du taux de violation de CP indirecte ϵ dans le système des K , on obtient une contrainte ayant la forme d'une hyperbole dans le plan complexe $(\bar{\varrho}, \bar{\eta})$. A partir du mélange $B_d - \bar{B}_d$, paramétré par la différence de masse ΔM_d , on détermine le côté $BA = R_t$ du triangle d'unitarité :

$$R_t = \frac{1}{\lambda} \frac{|V_{td}|}{V_{cb}} = 1.0 \cdot \left[\frac{|V_{td}|}{8.8 \cdot 10^{-3}} \right] \left[\frac{0.040}{V_{cb}} \right] \quad (6.25)$$

avec

$$V_{td} = 8.8 \cdot 10^{-3} \left[\frac{200 \text{ MeV}}{\sqrt{\hat{B}_{B_d} F_{B_d}}} \right] \left[\frac{170 \text{ GeV}}{\bar{m}_t(m_t)} \right]^{0.76} \left[\frac{\Delta M_d}{0.50 \text{ ps}^{-1}} \right]^{0.5} \sqrt{\frac{0.55}{\eta_B}}. \quad (6.26)$$

Enfin la mesure du mélange $B_s - \bar{B}_s$, paramétré par la différence de masse ΔM_s , impose une contrainte supplémentaire sur R_t , en fixant $\Delta M_d^{\max} = 0.482 \text{ ps}^{-1}$ et $|V_{ts}/V_{cb}|^{\max} = 0.993$:

$$(R_t)_{\max} = 1.0 \cdot \xi \sqrt{\frac{10.2 \text{ ps}^{-1}}{\Delta M_s}}, \quad \xi = \frac{F_{B_s} \sqrt{\hat{B}_{B_s}}}{F_{B_d} \sqrt{\hat{B}_{B_d}}}. \quad (6.27)$$

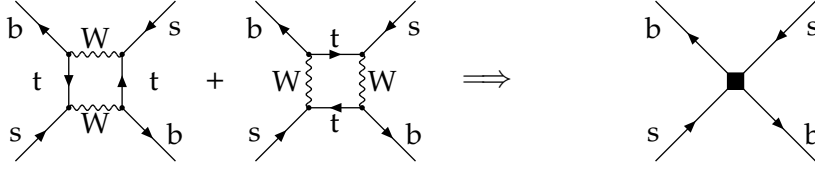
6.1.2 Le système $B_s - \bar{B}_s$

Les mésons B_s et \bar{B}_s forment un système à deux niveaux dont l'étude constitue un classique de la mécanique quantique standard. On définit les états $|B_s\rangle$ et $|\bar{B}_s\rangle$ comme états propres de saveur $b = +1$ et $b = -1$ respectivement. De plus on choisit la convention de phase $|\bar{B}_s\rangle = +CP|B_s\rangle$. Etant donné que l'interaction faible ne conserve pas la saveur, les états $|B_s\rangle$ et $|\bar{B}_s\rangle$ sont couplés. Par conséquent, les états propres de masse

$$|B_{sL,H}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}} [p|B_s\rangle \pm q|\bar{B}_s\rangle] \quad (6.28)$$

ne sont pas identiques aux états propres de saveur. En outre, si la symétrie CP n'est pas conservée, les états propres de masse ne sont pas non plus les états propres de l'opérateur CP , c'est à dire que $|p/q| \neq 1$. ΔM_s est donnée par l'élément de matrice $\langle \bar{B}_s | \mathcal{H}_{ef}^{\Delta B=2} | B_s \rangle$ représenté par les diagrammes "en boîte" de la figure 6.2, puisque le processus de mélange est dominé par les contributions de courte distance - contrairement au système des K . Alors qu'un calcul mené dans le cadre du Modèle Standard donne $\Delta M_s = 18.3_{-1.5}^{+6.5} \text{ ps}^{-1}$ [143] et que deux fits avec les autres paramètres du Modèle

t

FIG. 6.2: Diagrammes "en boîte" donnant un couplage effectif à l'opérateur $(\bar{b}s)_{V_A}(\bar{b}s)_{V_A}$

Standard constraints obtiennent comme résultats [144]

$$(\Delta M_s)_{\text{UTfit}}^{\text{SM}} = (21.5 \pm 2.6) \text{ ps}^{-1}, \quad (\Delta M_s)_{\text{CKMfitter}}^{\text{SM}} = (21.7^{+5.9}_{-4.2}) \text{ ps}^{-1}, \quad (6.29)$$

une mesure expérimentale très récente effectuée sur le détecteur D0 du Tevatron a fixé un intervalle sur ΔM_s [145] :

$$17 \text{ ps}^{-1} < \Delta M_s < 21 \text{ ps}^{-1} \text{ (90 \%CL)}. \quad (6.30)$$

Une mesure encore plus récente effectuée sur le détecteur CDF a fixé $\Delta M_s = 17.330^{+0.426}_{-0.221}$ [146]. Les oscillations sont nettement plus rapides dans le système des B_s que dans celui des B_d ($\sim 0.5 \text{ ps}^{-1}$) et leur observation est un challenge expérimental ; néanmoins LHCb est un détecteur à priori bien calibré pour une telle mesure et sera capable de confirmer ou d'infirmer les résultats obtenus au Tevatron, et on pourra en principe déterminer la composante ΔM_s du Modèle Standard, et celle provenant de la nouvelle physique. Il est par conséquent nécessaire de déterminer le mieux possible la composante ΔM_s^{SM} , ce qui implique en particulier le calcul de l'élément de matrice $\langle \bar{B}_s | \mathcal{H}_{eff}^{\Delta B=2} | B_s \rangle$ non perturbativement.

6.1.3 OPE

La liberté asymptotique de QCD et la séparation importante entre les énergies mises en jeu ($\sim 100 \text{ GeV}$ pour l'interaction faible et $\sim 1 \text{ GeV}$ pour l'interaction forte) permettent d'utiliser la technique du développement en produit d'opérateurs où on remplace un produit d'opérateurs non locaux par une somme d'opérateurs locaux. Dans le cas qui nous intéresse ici, cela se fait en intégrant les degrés de liberté du boson W (ce qui revient à faire un développement en $1/M_W$) et les diagrammes "en boîte" se réduisent à un opérateur à 4 fermions :

$$\mathcal{H}_{eff}^{\Delta S=2} = \lambda_t^2 \frac{G_F^2}{16\pi^2} M_W^2 S_0(x_t) (\bar{b}s)_{V-A} (\bar{b}s)_{V-A}, \quad \lambda_t = V_{ts}^* V_{tb}, \quad x_t = \frac{m_t^2}{M_W^2}, \quad (6.31)$$

où S_0 est une fonction d'Inami-Lim [147] :

$$S_0(x_t) = \frac{4x_t - 11x_t^2 + x_t^3}{4(1-x_t)^2} - \frac{3x_t^3 \ln x_t}{2(1-x_t)^3}. \quad (6.32)$$

Lorsqu'on tient compte des effets de QCD, un Hamiltonien effectif décrivant un processus gouverné par l'interaction faible s'écrit

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i C_i(\mu) Q_i(\mu) \equiv \frac{G_F}{\sqrt{2}} \vec{Q}^T(\mu) \vec{C}(\mu). \quad (6.33)$$

C_i sont les coefficients de Wilson et correspondent à des couplages effectifs des opérateurs Q_i . Ils dépendent de α_s , M_W et de l'échelle de renormalisation μ : en principe c'est une série perturbative en $\frac{\alpha_s}{4\pi} \ln\left(\frac{M_W^2}{\mu^2}\right)$ mais à $\mu=1$ GeV les premières corrections radiatives sont très grandes, bien que $\frac{\alpha_s}{4\pi} \sim 4\%$. On resomme les grands logarithmes à tous les ordres de la théorie des perturbations en utilisant les équations du groupe de renormalisation. Avec

$$\vec{C}^{(0)} = \hat{Z}_c \vec{C} \quad \vec{Q}^{(0)} = \hat{Z} \vec{Q}, \quad \hat{Z}_c^T = \hat{Z}^{-1}, \quad (6.34)$$

$$\hat{\gamma} = \hat{Z}^{-1} \frac{d\hat{Z}}{d \ln \mu} = \hat{\gamma}^{(0)} \frac{\alpha_s}{4\pi} + \hat{\gamma}^{(1)} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2, \quad (6.35)$$

$$\beta(g) = -\beta_0 \frac{g^3}{16\pi^2} - \beta_1 \frac{g^5}{(16\pi^2)^2}, \quad (6.36)$$

la non dépendance en μ des coefficients nus $\vec{C}^{(0)}$ implique

$$\frac{d\vec{C}(\mu)}{d \ln \mu} = \hat{\gamma}^T(\alpha_s) \vec{C}(\mu), \quad (6.37)$$

dont la solution est

$$\vec{C}(\mu) = \hat{U}(\mu, M_W) \vec{C}(M_W), \quad \hat{U}(\mu, \mu_W) = 1 + \int_{g(\mu_W)}^{g(\mu)} dg_1 \frac{\hat{\gamma}^T(g_1)}{\beta(g_1)} + \int_{g(\mu_W)}^{g(\mu)} dg_1 \int_{g(\mu_W)}^{g_1} dg_2 \frac{\hat{\gamma}^T(g_1)}{\beta(g_1)} \frac{\hat{\gamma}^T(g_2)}{\beta(g_2)} + \dots \quad (6.38)$$

On réécrit $\hat{U}(\mu, \mu_W)$ de manière plus compacte sous la forme

$$\hat{U}(\mu, \mu_W) = T_g \exp \int_{g(\mu_W)}^{g(\mu)} dg' \frac{\hat{\gamma}^T(g')}{\beta(g')}. \quad (6.39)$$

\hat{U} s'écrit finalement

$$\hat{U}(\mu, \mu_W) = \left[1 + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \hat{J} \right] \hat{U}^{(0)}(\mu, \mu_W) \left[1 - \frac{\alpha_s(\mu_W)}{4\pi} \hat{J} \right], \quad (6.40)$$

où $\hat{U}^{(0)}$ est la matrice d'évolution obtenue à l'ordre dominant :

$$\hat{U}^{(0)}(\mu, \mu_W) = \hat{V} \left(\left[\frac{\alpha_s(\mu_W)}{\alpha_s(\mu)} \right]^{\frac{\vec{\gamma}^{(0)}}{2\beta_0}} \right)_D \hat{V}^{-1}, \quad (6.41)$$

\hat{V} diagonalisant la matrice de dimension anomale à l'ordre dominant $\vec{\gamma}^{(0)T}$:

$$\hat{\gamma}_D^{(0)} = \hat{V}^{-1} \gamma^{(0)T} \hat{V}. \quad (6.42)$$

Dans le cas du mélange $B_s - \overline{B}_s$ toutes les matrices précédentes se réduisent à des nombres et l'hamiltonien effectif renormalisé à l'échelle $\mu_b \sim m_b$ a comme expression

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}}^{\Delta B=2} &= \frac{G_F^2}{16\pi^2} M_W^2 (V_{tb}^* V_{ts})^2 \eta_B S_0(x_t) \times \\ &\times \left[\alpha_s^{(5)}(\mu_b) \right]^{-6/23} \left[1 + \frac{\alpha_s^{(5)}(\mu_b)}{4\pi} J_5 \right] Q_{LL}^{\Delta B=2} + h.c., \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$Q_{LL}^{\Delta B=2} = (\overline{b}s)_{V-A} (\overline{b}s)_{V-A} \quad (6.44)$$

et [143]

$$\eta_B = 0.55 \pm 0.01. \quad (6.45)$$

Enfin $J_5 = 1.627$ dans le schéma \overline{MS} (NDR). On définit alors le paramètre \hat{B}_{B_s} invariant sous le groupe de renormalisation par :

$$\hat{B}_{B_s} = B_{B_s}(\mu) \left[\alpha_s^{(5)}(\mu) \right]^{-6/23} \left[1 + \frac{\alpha_s^{(5)}(\mu)}{4\pi} J_5 \right], \quad \langle \overline{B}_s^0 | (\overline{b}s)_{V-A} (\overline{b}s)_{V-A} | B_s^0 \rangle \equiv \frac{8}{3} B_{B_s}(\mu) F_{B_s}^2 m_{B_s}^2, \quad (6.46)$$

où F_{B_s} est la constante de désintégration du méson B_s , et ΔM_s s'écrit

$$\Delta M_s = \frac{G_F^2}{6\pi^2} \eta_B m_{B_s} (\hat{B}_{B_s} F_{B_s}^2) M_W^2 S_0(x_t) |V_{ts}|^2. \quad (6.47)$$

On se propose d'exposer dans la suite comment le calcul de $\langle \overline{B}_s | (\overline{b}s)_{V-A} (\overline{b}s)_{V-A} | B_s \rangle$ a été effectué sur le réseau, d'où on extrait le paramètre de sac $B_{B_s}(m_b)$. On développera le sujet introduit dans [148].

6.2 Calcul numérique de B_{B_s}

6.2.1 Principe du calcul

Rappelons que B_{B_s} est défini par

$$B_{B_s} = \frac{\langle \overline{B}_s | (\overline{b}s)_{V-A} (\overline{b}s)_{V-A} | B_s \rangle}{\langle \overline{B}_s | (\overline{b}s)_{V-A} (\overline{b}s)_{V-A} | B_s \rangle_{\text{VSA}}}, \quad \langle \overline{B}_s | (\overline{b}s)_{V-A} (\overline{b}s)_{V-A} | B_s \rangle_{\text{VSA}} = \langle \overline{B}_s | (\overline{b}s)_{V-A} | 0 \rangle \langle 0 | (\overline{b}s)_{V-A} | B_s \rangle,$$

$$\langle 0 | (\overline{b}^i \gamma_\mu \gamma^5 s^j)(x) | B_s(p) \rangle \equiv \frac{\delta^{ij}}{3} i p_\mu F_{B_s} e^{-ip \cdot x}, \quad \langle \overline{B}_s(p) | (\overline{b}^i \gamma_\mu \gamma^5 s^j)(x) | 0 \rangle \equiv -\frac{\delta^{ij}}{3} i p_\mu F_{B_s} e^{ip \cdot x}.$$

Il nous faut également introduire en plus de l'opérateur $O_1 \equiv Q_{LL}^{\Delta B=2}$ les opérateurs suivants dits de la base supersymétrique :

$$\begin{aligned} O_2 &= \overline{b}^i (1 - \gamma^5) s^i \overline{b}^j (1 - \gamma^5) s^j, \\ O_3 &= \overline{b}^i \gamma_\mu (1 - \gamma^5) s^i \overline{b}^j \gamma_\mu (1 + \gamma^5) s^j, \\ O_4 &= \overline{b}^i (1 - \gamma^5) s^i \overline{b}^j (1 + \gamma^5) s^j. \end{aligned} \quad (6.48)$$

En utilisant PCAC, on a par ailleurs les égalités suivantes :

$$\langle 0|\bar{b}^i\gamma^5 s^j|B_s(p)\rangle = i\frac{\delta^{ij}}{3}\frac{m_{B_s}^2 F_{B_s}}{m_b + m_s}e^{-ip\cdot x}, \quad \langle \overline{B_s}(p)|\bar{b}^i\gamma^5 s^j|0\rangle = i\frac{\delta^{ij}}{3}\frac{m_{B_s}^2 F_{B_s}}{m_b + m_s}e^{ip\cdot x}.$$

Les différentes contractions de Wick et les identités de Fierz adéquates permettent de paramétrer les éléments de matrice $\langle \overline{B_s}|O_i|B_s\rangle$ en fonction de $\langle \overline{B_s}|O_i|B_s\rangle_{\text{VSA}}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \langle \overline{B_s}|O_1|B_s\rangle &= \frac{8}{3}m_{B_s}^2 F_{B_s}^2 B_1(\mu), \\ \langle \overline{B_s}|O_2|B_s\rangle &= -\frac{5}{3}\left(\frac{m_{B_s}}{m_b(\mu) + m_s(\mu)}\right)^2 F_{B_s}^2 B_2(\mu), \\ \langle \overline{B_s}|O_3|B_s\rangle &= -\frac{4}{3}\left(\frac{m_{B_s}}{m_b(\mu) + m_s(\mu)}\right)^2 F_{B_s}^2 B_3(\mu), \\ \langle \overline{B_s}|O_4|B_s\rangle &= 2\left(\frac{m_{B_s}}{m_b(\mu) + m_s(\mu)}\right)^2 F_{B_s}^2 B_4(\mu). \end{aligned} \quad (6.49)$$

De nombreuses évaluations de $B_{B_s}(\mu_b)$ ont été réalisées par des calculs sur réseau [149] - [155]. L'un des problèmes majeurs avec ces calculs est que l'action de Wilson standard brise explicitement la symétrie chirale, ce qui complique beaucoup la procédure de renormalisation de O_1 et son matching dans le continu. Pour contourner cette difficulté, on propose de calculer $B_{B_s}(\mu_b)$ à l'aide de l'action overlap que nous avons présentée au chapitre 2. D'un autre côté, le quark lourd est statique et son évolution est décrite par l'action HQET. De ce fait nos résultats ne tiennent pas compte des corrections en $1/m_b$. L'action que nous utilisons s'écrit $S = S_H^{\text{EH}} + S_L^{\text{N}}$ où

$$S_H^{\text{EH}} = a^3 \sum_x \left\{ \bar{h}^+(x) \left[h^+(x) - V_0^{\text{HYP}\dagger}(x - \hat{0})h^+(x - \hat{0}) \right] - \bar{h}^-(x) \left[V_0^{\text{HYP}}(x)h^-(x + \hat{0}) - h^-(x) \right] \right\}.$$

$S_L^{\text{N}} = a^3 \sum_x \bar{\psi}(x)D_N^{(m_0)}\psi(x)$ est l'action du quark léger overlap. Rappelons que le champ $h^+(h^-)$ annihile le quark (l'antiquark) lourd statique. Nous calculons alors les fonctions à 2 et 3 points :

$$\tilde{C}_{AA}^{(2)\pm}(t) = \left\langle \sum_{\vec{x}} \tilde{A}_0^\pm(\vec{x}, t)\tilde{A}_0^{\pm\dagger}(0) \right\rangle_U \xrightarrow{t \gg 0} \tilde{Z}_A e^{-\epsilon t}, \quad (6.50)$$

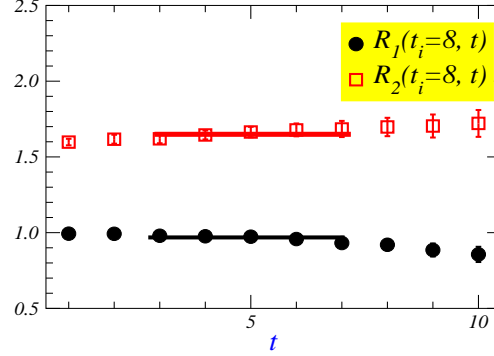
$$\tilde{C}_{VV+AA}^{(3)}(t_i, t) = \left\langle \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \tilde{A}_0^+(\vec{x}, t_i)\tilde{O}_1(0, 0)\tilde{A}_0^{-\dagger}(\vec{y}, t) \right\rangle_U \xrightarrow{t_i - t \gg 0} \tilde{Z}_A v \langle \overline{B_s}|\tilde{O}_1(\mu)|B_s\rangle_v e^{-\epsilon(t_i - t)}, \quad (6.51)$$

$$\tilde{C}_{SS+PP}^{(3)}(t_i, t) = \left\langle \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \tilde{A}_0^+(\vec{x}, t_i)\tilde{O}_2(0, 0)\tilde{A}_0^{-\dagger}(\vec{y}, t) \right\rangle_U \xrightarrow{t_i - t \gg 0} \tilde{Z}_A v \langle \overline{B_s}|\tilde{O}_2(\mu)|B_s\rangle_v e^{-\epsilon(t_i - t)}, \quad (6.52)$$

$$\tilde{A}_0^\pm \equiv \bar{h}^\pm \gamma_0 \gamma^5 s, \quad \tilde{O}_1 = \bar{h}^{(+i)} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) s^i \bar{h}^{(-j)} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) s^j, \quad \tilde{O}_2 = \bar{h}^{(+i)} (1 - \gamma^5) s^i \bar{h}^{(-j)} (1 - \gamma^5) s^j.$$

$\sqrt{\tilde{Z}_A} = \langle 0|\tilde{A}_0^-|B_s\rangle_v = \langle 0|\tilde{A}_0^+|\overline{B_s}\rangle_v$ et ϵ est l'énergie de liaison du méson lourd-léger pseudoscalaire. Les fonctions à 2 points $\tilde{C}_{AA}^{(2)\pm}(t, t_i)$ sont composées d'un courant \tilde{A}_0^\pm local et d'un courant \tilde{A}_0^\pm étalé. Les opérateurs de source dans $\tilde{C}_{VV+AA}^{(3)}(t_i, t)$ et $\tilde{C}_{SS+PP}^{(3)}(t_i, t)$ sont les courants \tilde{A}_0^\pm étalés tandis que les opérateurs à 4 fermions \tilde{O}_1 et \tilde{O}_2 sont purement locaux. Dans les équations (6.50)-(6.52), les indices "v" et le superscript "~" sont mentionnés pour rappeler que les états et les opérateurs sont définis dans le cadre de HQET. Rappelons que dans le calcul des fonctions à 3 points $\tilde{C}_{\Gamma_i \Gamma_i}^{(3)}(t_i, t)$

β	V	N_{conf}	action	ρ	am_0^s	κ_l
6.0	$16^3 \times 32$	100	overlap Wilson	1.4	0.06	0.1435
5.85	$16^3 \times 32$	40	overlap	1.6	0.09	

TAB. 6.1: Paramètres de nos simulations : am_0^s et ρ ont été choisies d'après [156, 157]FIG. 6.3: Signaux pour $R_{1,2}(t_i, t)$ définis dans eq (2.4) : les lignes indiquent l'intervalle de temps sur lequel on a un plateau d'où on extrait $\tilde{B}_1(1/a)$ et $\tilde{B}_2(1/a)$.

il y a 2 termes provenant de 2 contractions de Wick différentes, à savoir $\sum_a B_i^{aa}(t) \sum_b B_i^{bb}(t_i)$ et $\sum_{a,b} B_i^{ab}(t) B_i^{ba}(t_i)$, où a, b sont des indices de couleur et $B_i^{ab}(t) = \text{Tr} \left[\sum_{\vec{x}} \Gamma_i \mathcal{S}_L^{\dagger ac}(0; \vec{x}, t) \gamma_0 \gamma^5 \mathcal{S}_H^{cb}(\vec{x}, t; 0) \right]$; \mathcal{S}_L et \mathcal{S}_H sont respectivement les propagateurs léger et lourd et la trace est effectuée sur les indices spinoriels.

Après avoir calculé les fonctions de corrélation (6.50)-(6.52), on construit les 2 rapports $R_1(t_i, t)$ et $R_2(t_i, t)$ suivants :

$$\begin{aligned}
 R_1(t_i, t) &= \frac{\tilde{C}_{VV+AA}^{(3)}(t_i, t)}{\frac{8}{3} Z_A^2 \tilde{C}_{AA}^{(2)+}(t_i) \tilde{C}_{AA}^{(2)-}(t)} \xrightarrow{t_i-t \gg 0} \frac{v \langle \overline{B}_s | \tilde{O}_1 | B_s \rangle_v}{\frac{8}{3} |\langle 0 | \tilde{A}_0^- | B_s \rangle_v|^2} \equiv \tilde{B}_1(1/a), \\
 R_2(t_i, t) &= \frac{C_{SS+PP}^{(3)}(t_i, t)}{-\frac{5}{3} Z_A^2 \tilde{C}_{AA}^{(2)+}(t_i) \tilde{C}_{AA}^{(2)-}(t)} \xrightarrow{t_i-t \gg 0} \frac{v \langle \overline{B}_s | \tilde{O}_2 | B_s \rangle_v}{-\frac{5}{3} |\langle 0 | \tilde{A}_0^- | B_s \rangle_v|^2} \equiv \tilde{B}_2(1/a),
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

où $\langle \tilde{A}_0^{\overline{MS}}(\mu) \rangle = Z_A \langle \tilde{A}_0(a) \rangle$. Ces rapports sont calculés soit avec un temps fixé $t \in [-6, -8, -12, -14, -16]$ et t_i libre ou en fixant $t_i \in [6, 8, 10, 12, 14, 16]$ tout en laissant t libre. On prend la moyenne de ces 2 possibilités.

Nous avons effectué deux simulations, l'une à $\beta = 6.0$ et l'autre à $\beta = 5.85$; leurs paramètres sont indiqués dans la table 6.1. La plupart des données numériques que nous présenterons concerne la simulation effectuée à $\beta = 6.0$ avec l'action overlap pour le quark léger, les autres actions et simulation servant à étudier les erreurs systématiques.

Sur la figure (6.3) on a représenté les signaux pour les rapports $R_{1,2}(t_i, t)$ avec $t_i = 8$ fixé. Le résultat obtenu pour $\tilde{B}_1(1/a)$ est relativement stable en fonction de t_i tandis que $\tilde{B}_2(1/a)$ a un signal qui se détériore rapidement pour des t_i plus grands et même ne peut pas être extrait lorsque $t_i > 10$. Les valeurs numériques de $\tilde{B}_{1,2}(1/a)$ sont extraites des rapports calculés à $t_i = 8$. Les plateaux sont fittés à $t \in [3 - 7]$. On a indiqué dans la table 6.2 la valeur des composantes $\frac{B_i^{aa}(t) B_i^{bb}(t_i)}{\tilde{C}_{AA}^{(2)+}(t_i) \tilde{C}_{AA}^{(2)-}(t)}$ et $\frac{B_i^{ab}(t) B_i^{ba}(t_i)}{\tilde{C}_{AA}^{(2)+}(t_i) \tilde{C}_{AA}^{(2)-}(t)}$ contribuant à $\tilde{B}_{1,2}(1/a)$, où $i = A, V, P$ et S . La table 6.3 contient les rapports

	AA	VV	PP	SS
$(aa)(bb)$	2.025(41)	-0.005(5)	-2.034(42)	-0.010(3)
$(ab)(ba)$	0.662(28)	-0.064(7)	-0.689(15)	-0.007(2)

TAB. 6.2: Composantes $\frac{B_i^{aa}(t)B_i^{bb}(t_i)}{\tilde{C}_{AA}^{(2)+}(t_i)\tilde{C}_{AA}^{(2)-}(t)}$ et $\frac{B_i^{ab}(t)B_i^{ba}(t_i)}{\tilde{C}_{AA}^{(2)+}(t_i)\tilde{C}_{AA}^{(2)-}(t)}$ contribuant à $\tilde{B}_{1,2}(1/a)$, $i = A, V, P$ et S .

$\frac{B_A^{ab}(t)B_A^{ba}(t_i)}{B_A^{aa}(t)B_A^{bb}(t_i)}$	$\frac{B_P^{ab}(t)B_P^{ba}(t_i)}{B_P^{aa}(t)B_P^{bb}(t_i)}$	$\frac{B_S^{ab}(t)B_S^{ba}(t_i)}{B_S^{aa}(t)B_S^{bb}(t_i)}$
0.3329(12)	0.339(8)	0.72(18)

TAB. 6.3: Rapports $\frac{B_i^{ab}(t)B_i^{ba}(t_i)}{B_i^{aa}(t)B_i^{bb}(t_i)}$ $i = A, P$ et S .

$\frac{B_i^{ab}(t)B_i^{ba}(t_i)}{B_i^{aa}(t)B_i^{bb}(t_i)}$ avec $i = A, P$, et S , la partie vectorielle étant nulle.

On constate que les composantes vectorielle et scalaire contribuent de manière marginale aux rapports qui nous intéressent, la composante fierzée de couleur $(ab)(ba)$ des fonctions à trois points est à une excellente approximation 3 fois plus petite que la composante $(aa)(bb)$, ce qui est très raisonnable. Enfin on trouve que $\frac{\tilde{C}_{PP}^{(3)}(t_i, t)}{\tilde{C}_{AA}^{(3)}(t_i, t)} = -1.005(4)$, ce qui signifie que la composante temporelle de $\tilde{C}_{AA}^{(3)}(t_i, t)$ domine très largement la composante spatiale. Rappelons que dans HQET $\tilde{C}_{A_0A_0}^{(3)}(t_i, t)$ et $\tilde{C}_{PP}^{(3)}(t_i, t)$ sont opposés ; de plus on obtient

$$\frac{v\langle\overline{B}_s|\widetilde{O}_2|B_s\rangle_v}{v\langle\overline{B}_s|\widetilde{O}_1|B_s\rangle_v} = -1.057(9), \quad \frac{v\langle\overline{B}_s|\widetilde{O}_3|B_s\rangle_v}{v\langle\overline{B}_s|\widetilde{O}_1|B_s\rangle_v} = -1.072(9), \quad \frac{v\langle\overline{B}_s|\widetilde{O}_4|B_s\rangle_v}{v\langle\overline{B}_s|\widetilde{O}_1|B_s\rangle_v} = 1.048(9). \quad (6.54)$$

On trouve finalement

$$\tilde{B}_1(1/a) = 0.960(13), \quad \tilde{B}_2(1/a) = 1.667(24). \quad (6.55)$$

6.2.2 Extraction de la quantité physique B_{B_s}

Trois étapes sont nécessaires pour extraire $B_{B_s} \equiv B_1$ à partir du calcul sur réseau :

- (1) $\tilde{B}_{1,2}(1/a)$ sont raccordés à leur valeur du continu par l'application de la théorie des perturbations dans un schéma $\overline{\text{MS}}(\text{NDR})$ à NLO à l'échelle de renormalisation $\mu = 1/a$ [158].
- (2) On fait évoluer $\tilde{B}_{1,2}(1/a)$ de $\mu = 1/a$ à $\mu = m_b$ en utilisant la matrice des dimensions anomales connue à l'ordre de 2 boucles en théorie des perturbations de HQET [153, 159].
- (3) On raccorde alors $\tilde{B}_{1,2}(\mu = m_b)$ à leur valeur dans QCD, $B_{1,2}(m_b)$, en employant le schéma $\overline{\text{MS}}(\text{NDR})$ à NLO [159].

A priori l'étape (1) nécessite le calcul de 16 constantes de renormalisation, puisque \tilde{O}_1 et \tilde{O}_2 peuvent se mélanger avec $\tilde{O}_3 \equiv \bar{h}^{(+i)}\gamma_{\mu L}s^i\bar{h}^{(-j)}\gamma_{\mu R}s^j$ et $\tilde{O}_4 \equiv \bar{h}^{(+i)}(1-\gamma^5)s^i\bar{h}^{(-j)}(1+\gamma^5)s^j$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{O}_1^{\overline{\text{MS}}}(\mu) \\ \tilde{O}_2^{\overline{\text{MS}}}(\mu) \\ \tilde{O}_3^{\overline{\text{MS}}}(\mu) \\ \tilde{O}_4^{\overline{\text{MS}}}(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11}(a\mu) & Z_{12}(a\mu) & Z_{13}(a\mu) & Z_{14}(a\mu) \\ Z_{21}(a\mu) & Z_{22}(a\mu) & Z_{23}(a\mu) & Z_{24}(a\mu) \\ Z_{31}(a\mu) & Z_{32}(a\mu) & Z_{33}(a\mu) & Z_{34}(a\mu) \\ Z_{41}(a\mu) & Z_{42}(a\mu) & Z_{43}(a\mu) & Z_{44}(a\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{O}_1(a) \\ \tilde{O}_2(a) \\ \tilde{O}_3(a) \\ \tilde{O}_4(a) \end{pmatrix}.$$

Toutefois grâce à la symétrie des quarks lourds, ces constantes ne sont pas toutes indépendantes. En utilisant les transformations de la symétrie des quarks lourds (HQS) $\bar{h}^{(\pm)}(x) \xrightarrow{HQS(i)} -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\bar{h}^{(\pm)}(x)\gamma_j\gamma_k$ ($i = 1, 2, 3$), et les équations du mouvement pour le quark lourd $\bar{h}^{(\pm)}\gamma_0 = \pm\bar{h}^{(\pm)}$, on déduit :

$$\begin{aligned}\tilde{O}_{SS+PP} &\equiv -\tilde{O}_{(VV+AA)_0}, & \tilde{O}_{VV+AA} &\xrightarrow{HQS(i)} \tilde{O}_{VV+AA}, & \tilde{O}_{SS+PP} &\xrightarrow{HQS(i)} -\tilde{O}_{(VV+AA)_i}, \\ \tilde{O}_{VV-AA} &\xrightarrow{HQS(i)} (\tilde{O}_{VV-AA})_{\perp} - (\tilde{O}_{VV-AA})_{\parallel} = \sum_{j=1,3}^{j \neq i} \tilde{O}_{(VV-AA)_j} - \tilde{O}_{(VV-AA)_i} - \tilde{O}_{(VV-AA)_0}, \\ \tilde{O}_{SS-PP} &\equiv -\tilde{O}_{(VV-AA)_0}, & \tilde{O}_{SS-PP} &\xrightarrow{HQS(i)} \tilde{O}_{(VV-AA)_i}.\end{aligned}$$

Etant donné que l'action est invariante sous les transformations de (HQS), des contraintes importantes peuvent être trouvées sur la matrice de renormalisation Z_{ij} :

$$\begin{aligned}\langle \tilde{O}_{VV+AA}(\mu) \rangle &= Z_{11}\langle \tilde{O}_{VV+AA}(a) \rangle + Z_{12}\langle \tilde{O}_{SS+PP}(a) \rangle + Z_{13}\langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle + Z_{14}\langle \tilde{O}_{SS-PP}(a) \rangle, \\ \langle \tilde{O}_{VV+AA}(\mu) \rangle &= Z_{11}\langle \tilde{O}_{VV+AA}(a) \rangle - Z_{12}\langle \tilde{O}_{(VV+AA)_i}(a) \rangle + Z_{13}(\langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle_{\perp} - \langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle_{\parallel}) \\ &+ Z_{14}\langle \tilde{O}_{(VV-AA)_i}(a) \rangle \quad (\text{HQS(i)}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1,3} \langle \tilde{O}_{VV+AA}(\mu) \rangle &\equiv 3\langle \tilde{O}_{VV+AA}(\mu) \rangle \\ &= (3Z_{11} - Z_{12})\langle \tilde{O}_{VV+AA}(a) \rangle - Z_{12}\langle \tilde{O}_{SS+PP}(a) \rangle + (Z_{13} + Z_{14})\langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle \\ &+ (Z_{14} + 4Z_{13})\langle \tilde{O}_{SS-PP}(a) \rangle,\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$Z_{12} = 0, \quad Z_{14} = 2Z_{13}. \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned}\langle \tilde{O}_{SS+PP}(\mu) \rangle &= Z_{21}\langle \tilde{O}_{VV+AA}(a) \rangle + Z_{22}\langle \tilde{O}_{SS+PP}(a) \rangle + Z_{23}\langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle + Z_{24}\langle \tilde{O}_{SS-PP}(a) \rangle, \\ -\langle \tilde{O}_{(VV+AA)_i}(\mu) \rangle &= Z_{21}\langle \tilde{O}_{VV+AA}(a) \rangle - Z_{22}\langle \tilde{O}_{(VV+AA)_i}(a) \rangle + Z_{23}(\langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle_{\perp} - \langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle_{\parallel}) \\ &+ Z_{24}\langle \tilde{O}_{(VV-AA)_i}(a) \rangle \quad (\text{HQS(i)}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\sum_{i=1,3} \tilde{O}_{(VV+AA)_i}(\mu) \pm \tilde{O}_{(VV+AA)_0}(\mu) &\equiv -\langle \tilde{O}_{SS+PP}(\mu) \rangle - \langle \tilde{O}_{VV+AA}(\mu) \rangle \\ &= (3Z_{21} - Z_{22})\langle \tilde{O}_{VV+AA}(a) \rangle - Z_{22}\langle \tilde{O}_{SS+PP}(a) \rangle \\ &+ (Z_{23} + Z_{24})\langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle + (Z_{24} + 4Z_{23})\langle \tilde{O}_{SS-PP}(a) \rangle \\ &= -(Z_{11} + Z_{21})\langle \tilde{O}_{VV+AA}(a) \rangle - Z_{22}\langle \tilde{O}_{SS+PP}(a) \rangle \\ &- [(Z_{13} + Z_{23})\langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle + (Z_{14} + Z_{24})\langle \tilde{O}_{SS-PP}(a) \rangle],\end{aligned}$$

donnant les contraintes

$$Z_{21} = \frac{Z_{22} - Z_{11}}{4}, \quad Z_{24} = -(Z_{13} + 2Z_{23}). \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{O}_{VV-AA}(\mu) \rangle &= Z_{31} \langle \tilde{O}_{VV+AA}(a) \rangle + Z_{32} \langle \tilde{O}_{SS+PP}(a) \rangle + Z_{33} \langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle + Z_{34} \langle \tilde{O}_{SS-PP}(a) \rangle, \\
\langle \tilde{O}_{SS-PP}(\mu) \rangle &= Z_{41} \langle \tilde{O}_{VV+AA}(a) \rangle + Z_{42} \langle \tilde{O}_{SS+PP}(a) \rangle + Z_{43} \langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle + Z_{44} \langle \tilde{O}_{SS-PP}(a) \rangle, \\
\langle \tilde{O}_{(VV-AA)_i}(\mu) \rangle &= Z_{41} \langle \tilde{O}_{VV+AA}(a) \rangle - Z_{42} \langle \tilde{O}_{(VV+AA)_i}(a) \rangle + Z_{43} (\langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle_{\perp} - \langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle_{\parallel}) \\
&\quad + Z_{44} \langle \tilde{O}_{(VV-AA)_i}(a) \rangle \quad (\text{HQS(i)}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1,3} \tilde{O}_{(VV-AA)_i}(\mu) \pm \tilde{O}_{(VV-AA)_0}(\mu) &\equiv \langle \tilde{O}_{SS-PP}(\mu) \rangle + \langle \tilde{O}_{VV-AA}(\mu) \rangle \\
&= (3Z_{41} - Z_{42}) \langle \tilde{O}_{VV+AA}(a) \rangle - Z_{42} \langle \tilde{O}_{SS+PP}(a) \rangle \\
&\quad + (Z_{43} + Z_{44}) \langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle + (Z_{44} + 4Z_{43}) \langle \tilde{O}_{SS-PP}(a) \rangle, \\
&= (Z_{31} + Z_{41}) \langle \tilde{O}_{VV+AA}(a) \rangle + (Z_{32} + Z_{42}) \langle \tilde{O}_{SS+PP}(a) \rangle \\
&\quad + (Z_{33} + Z_{43}) \langle \tilde{O}_{VV-AA}(a) \rangle + (Z_{34} + Z_{44}) \langle \tilde{O}_{SS-PP}(a) \rangle,
\end{aligned}$$

donnant les contraintes

$$Z_{44} = Z_{33}, \quad Z_{42} = -\frac{Z_{32}}{2}, \quad Z_{41} = \frac{2Z_{31} - Z_{32}}{4}, \quad Z_{43} = \frac{Z_{34}}{4}. \quad (6.58)$$

La matrice de renormalisation a donc la forme suivante :

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & 0 & Z_{13} & 2Z_{13} \\ \frac{Z_{22}-Z_{11}}{4} & Z_{22} & Z_{23} & -(Z_{13} + 2Z_{23}) \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} \\ \frac{2Z_{31}-Z_{32}}{4} & -\frac{Z_{32}}{2} & \frac{Z_{34}}{4} & Z_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.59)$$

Avec les fermions overlap cette matrice se simplifie bien davantage, puisque sous la transformation de symétrie chirale

$$\psi(x) \rightarrow i\gamma^5\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}i \left(1 - \frac{aD_N}{\rho}\right) \gamma^5, \quad (6.60)$$

les 4 opérateurs précédents deviennent :

$$\begin{aligned}
\tilde{O}_{VV+AA} &\rightarrow -\tilde{O}_{VV+AA}, & \tilde{O}_{SS+PP} &\rightarrow -\tilde{O}_{SS+PP}, \\
\tilde{O}_{VV-AA} &\rightarrow +\tilde{O}_{VV-AA}, & \tilde{O}_{SS-PP} &\rightarrow +\tilde{O}_{SS-PP}.
\end{aligned}$$

L'action étant invariante sous ces transformations, la matrice de renormalisation peut s'écrire sous la forme

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Z_{22}-Z_{11}}{4} & Z_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{33} & Z_{34} \\ 0 & 0 & \frac{Z_{34}}{4} & Z_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.61)$$

Comme annoncé auparavant les opérateurs LL ne se mélangent plus avec les opérateurs ayant une

structure chirale différente, et on a

$$\begin{pmatrix} \tilde{O}_1^{\overline{\text{MS}}}(\mu) \\ \tilde{O}_2^{\overline{\text{MS}}}(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11}(a\mu) & 0 \\ \frac{1}{4}[Z_{22}(a\mu) - Z_{11}(a\mu)] & Z_{22}(a\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{O}_1(a) \\ \tilde{O}_2(a) \end{pmatrix}.$$

Cette absence de mélange est très importante au vu des rapports (6.54), qui sont tous voisins de 1 en valeur absolue et dont les signes alternent. Si on a du mélange,

$$\langle \tilde{O}_1 \rangle^{\text{ren}} = Z_{11} \langle \tilde{O}_1 \rangle^{\text{lat}} \left(1 + Z_{13} \frac{\langle \tilde{O}_3 \rangle^{\text{lat}}}{\langle \tilde{O}_1 \rangle^{\text{lat}}} + Z_{14} \frac{\langle \tilde{O}_4 \rangle^{\text{lat}}}{\langle \tilde{O}_1 \rangle^{\text{lat}}} \right)$$

peut être sujet à des erreurs systématiques importantes car une faible correction sur Z_{13} et Z_{14} a des conséquences importantes, à cause de la valeur de $\frac{\langle \tilde{O}_{3,4} \rangle^{\text{lat}}}{\langle \tilde{O}_1 \rangle^{\text{lat}}}$.

Le calcul de Z_{11} et Z_{22} par la théorie des perturbations nécessite de dériver les règles de Feynman de l'opérateur overlap D_N (2.21). Tout d'abord on remarque que la partie libre X_0 de X s'écrit dans l'espace des moments, en utilisant les notations du chapitre précédent :

$$X_0(k) = a^{-1}(i \not{V}(k) + W(k) - \rho).$$

En notant $a^{-1}(W(k) - \rho) \equiv b(k)$ et $\omega(k) = \left(\sqrt{X^\dagger X} \right)_0(k) \equiv a^{-1} \sqrt{\Gamma^2 + [W(k) - \rho]^2}$, le propagateur overlap a comme expression

$$S_{\text{overlap}}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{1}{2\rho} \left(\frac{-i \not{V}}{\omega + b} + a \right). \quad (6.62)$$

On effectue le développement de X jusqu'au deuxième ordre en g_0 , afin de tenir compte du diagramme tadpole dans la self-energy du quark : $X(p, p') = X_0(p)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') + X_1(p, p') + X_2(p, p') + \mathcal{O}(g_0^3)$, où

$$X_1(p, p') = \sum_{\mu, a} -igT^a (\gamma^\mu c_\mu - is_\mu) \equiv \sum_{\mu, a} V_{\mu, qq}^a(p, p'), \quad (6.63)$$

$$X_2(p, p') = \sum_{\mu, a, b} \frac{1}{2} ia g^2 \delta_{\mu\nu} \{T^a, T^b\} (\gamma_\mu s_\mu + ic_\mu) \equiv \sum_{\mu, a, b} V_{\mu\nu, qqg}^{ab}(p, p'). \quad (6.64)$$

Ensuite on développe $\frac{1}{\sqrt{X^\dagger X}}(p, p') = \left(\frac{1}{\sqrt{X^\dagger X}} \right)_0(p, p') + Y_1(p, p') + Y_2(p, p') + \mathcal{O}(g_0^3)$. Y_1 et Y_2 sont calculés en imposant l'identité suivante ordre par ordre dans le couplage g_0 [161] :

$$\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} (X^\dagger X)(p, q) \left(\frac{1}{\sqrt{X^\dagger X}} \right)(q, r) \left(\frac{1}{\sqrt{X^\dagger X}} \right)(r, p') = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p'), \quad (6.65)$$

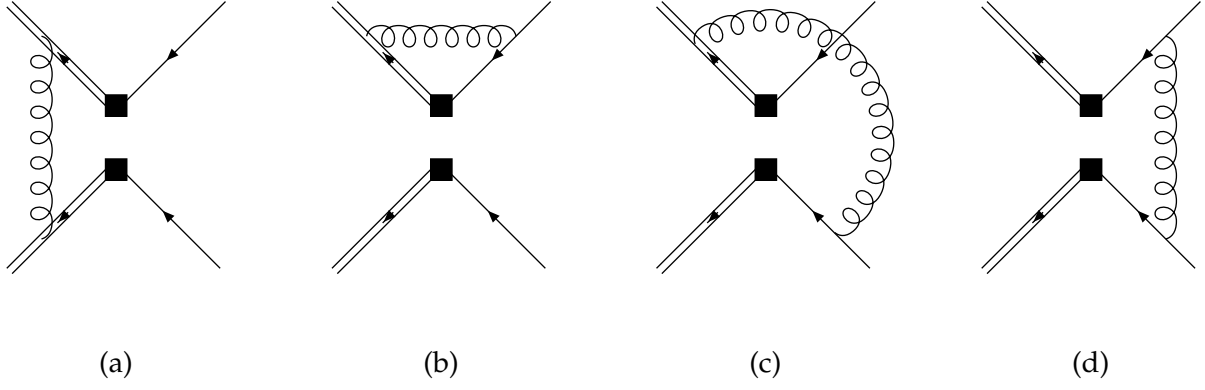


FIG. 6.4 : Diagrammes associés à la correction à une boucle d'un opérateur à 4 fermions.

et on obtient au premier ordre en g_0

$$(X^\dagger X)_1(p, p') \left(\frac{1}{\sqrt{X^\dagger X}} \right)_0^2(p') + (X^\dagger X)_0(p) Y_1(p, p') \left(\frac{1}{\sqrt{X^\dagger X}} \right)_0(p') + (\sqrt{X^\dagger X})_0(p) Y_1(p, p') = 0, \quad (6.66)$$

ce qui donne pour Y_1 :

$$Y_1(p, p') = -\frac{1}{(\omega(p) + \omega(p'))\omega(p)\omega(p')} (X^\dagger X)_1(p, p'). \quad (6.67)$$

Le même travail peut s'effectuer pour Y_2 . Enfin on développe $\left(\frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \right)_1 = X_0 Y_1 + X_1$ et $\left(\frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \right)_2 = X_0 Y_2 + X_1 Y_1 + X_2 \left(\frac{1}{\sqrt{X^\dagger X}} \right)_0$, et on obtient pour le vertex quark-gluon-quark overlap l'expression suivante :

$$V_{\mu, qqq}^{a, \text{overlap}}(p, p') = -ig_0 T^a \cdot \rho \frac{1}{\omega(p) + \omega(p')} \left[\gamma^\mu c_\mu - is_\mu + \frac{1}{\omega(p)\omega(p')} X_0(p') \left(\gamma^\mu c_\mu + is_\mu \right) X_0(p) \right]. \quad (6.68)$$

Le vertex quark-quark-gluon-gluon a une expression encore bien plus compliquée ; il est inutile de la donner, car il disparaît à la limite du continu.

Ajoutons que les règles de Feynman de l'antiquark statique sont les suivantes :

propagateur de l'antiquark lourd	$a(1 - e^{-ip_4 a} + \epsilon)^{-1}$
vertex $V_{\mu, h^{(-)}h^{(-)}g}^a(p, p')$	$ig_0 T^a \delta_{\mu 4} e^{-i(p_4 + p'_4) \frac{a}{2}}$
vertex $V_{\mu\nu, h^{(-)}h^{(-)}qq}^{ab}(p, p')$	$-\frac{1}{2} a g_0^2 \delta_{\mu 4} \{T^a, T^b\} e^{-i(p_4 + p'_4) \frac{a}{2}}$

La renormalisation des opérateurs à 4 fermions nécessaires à l'extraction de B_{B_s} implique le calcul de la self-energy du quark lourd, ce qui a été présenté dans le chapitre précédent, la self-energy du quark léger et les corrections de vertex représentés sur les diagrammes de la figure 6.4.

Pour un opérateur $O_{\Gamma_1 \Gamma_2}$ les diagrammes à une boucle font apparaître les structures tensorielles $T^a \Gamma_1 T^a \otimes \Gamma_2$ et $T^a \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 T^a$, suivant la manière dont se rattache la patte gluonique. On a triviale-

ment $T^a \Gamma_1 T^a \otimes \Gamma_2 \equiv \frac{4}{3} \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$, tandis que

$$\begin{aligned} T^a \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 T^a &= \frac{1}{2} \left((\Gamma_1)_{\alpha\beta}^{ij} (\Gamma_2)_{\gamma\delta}^{ji} - \frac{1}{3} \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left((\Gamma_1)_{\alpha\delta}^{ii} (\Gamma_2)_{\gamma\beta}^{jj} + \frac{1}{3} \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \right). \end{aligned}$$

Avec la transformation de Fierz

$$(\Gamma_1)_{\alpha\delta}^{ii} (\Gamma_2)_{\gamma\beta}^{jj} = \sum_{m,n} C_{mn} (\Gamma_1^m)_{\alpha\beta}^{ii} (\Gamma_2^n)_{\gamma\delta}^{jj} \equiv \sum_{m,n} C_{mn} \Gamma_1^m \otimes \Gamma_2^n,$$

on obtient

$$T^a \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 T^a = -\frac{1}{2} \left(\sum_{m,n} C_{mn} \Gamma_1^m \otimes \Gamma_2^n + \frac{1}{3} \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \right). \quad (6.69)$$

Une fois éliminées les divergences infrarouges, le diagramme 6.4(a) vaut

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} \left((\Gamma_1)_{\alpha\delta}^{ii} (\Gamma_2)_{\gamma\beta}^{jj} + \frac{1}{3} \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \right) &= -\frac{\alpha_s \delta}{4\pi \cdot 3} \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu L(R)}, \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = \gamma_{\mu L(R)}, \\ &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{2\delta}{3} P_{L(R)} \otimes P_{L(R)} + \frac{\delta}{4} \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu L(R)} \right], \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = P_{L(R)}, \\ &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\delta P_{L(R)} \otimes P_{R(L)} + \frac{\delta}{3} \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu R(L)} \right], \quad \Gamma_1 = \gamma_{\mu L(R)}, \Gamma_2 = \gamma_{\mu R(L)}, \\ &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{\delta}{4} \gamma_{\mu R(L)} \otimes \gamma_{\mu R(L)} + \frac{\delta}{6} P_{L(R)} \otimes P_{R(L)} \right], \quad \Gamma_1 = P_{L(R)}, \Gamma_2 = P_{R(L)}, \end{aligned} \quad (6.70)$$

où δ a été calculé au chapitre précédent. Le seul point subtil est le suivant : la transformation de Fierz de $P_{L(R)} \otimes P_{L(R)}$ est

$$(P_{L(R)} \otimes P_{L(R)})^F = \frac{1}{4} [2P_{L(R)} \otimes P_{L(R)} - \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} (1 \pm \gamma^5) \otimes \sigma_{\mu\nu} (1 \pm \gamma^5)].$$

Avec les équations du mouvement $\bar{h}^\pm \gamma_0 = \pm \bar{h}^\pm$, on a $\sigma_{\mu\nu} (1 \pm \gamma^5) \otimes \sigma_{\mu\nu} (1 \pm \gamma^5) = -4(P_{L(R)} \otimes P_{L(R)} + \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu L(R)})$, de sorte que

$$(P_{L(R)} \otimes P_{L(R)})^F = P_{L(R)} \otimes P_{L(R)} + \frac{1}{2} \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu L(R)}.$$

$$\begin{aligned} 6.4(b) + 6.4(c) + \text{symétrique} &= \left(\frac{7}{3} \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 - (\Gamma_1)_{\alpha\delta}^{ii} (\Gamma_2)_{\gamma\beta}^{jj} \right) D'_1 \\ &+ \left[\frac{3}{2} \left(\Gamma_1 \gamma_0 \otimes \Gamma_2 - \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \gamma_0 \right) + \frac{1}{2} \left((\Gamma_1 \gamma_0)_{\alpha\delta}^{ii} (\Gamma_2)_{\gamma\beta}^{jj} - (\Gamma_1)_{\alpha\delta}^{ii} (\Gamma_2 \gamma_0)_{\gamma\beta}^{jj} \right) \right] D_2. \end{aligned}$$

Le deuxième terme a comme origine l'éventuelle brisure de la symétrie chirale par l'action du quark

léger, ce qui est le cas de l'action de Wilson pure, de l'action clover, mais pas de l'action overlap. On le simplifie en identifiant $\Gamma_1 \gamma_0 \otimes \Gamma_2 - \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \gamma_0$ à une combinaison linéaire d'opérateurs plus simples en éliminant de manière appropriée la matrice γ_0 , et en appliquant comme précédemment les transformations de Fierz :

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 \gamma_0 \otimes \Gamma_2 - \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \gamma_0 &= -(2P_L \otimes P_R + 2P_R \otimes P_L + \gamma_{\mu L} \otimes \gamma_{\mu R} + \gamma_{\mu R} \otimes \gamma_{\mu L}), \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = \gamma_{\mu L(R)}, \\
&= P_L \otimes P_R + P_R \otimes P_L, \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = P_{L(R)}, \\
&= -(2P_L \otimes P_L + 2P_R \otimes P_R + \gamma_{\mu L} \otimes \gamma_{\mu L} + \gamma_{\mu R} \otimes \gamma_{\mu R}), \quad \Gamma_1 = \gamma_{\mu L(R)}, \Gamma_2 = \gamma_{\mu R(L)}, \\
&= P_L \otimes P_L + P_R \otimes P_R, \quad \Gamma_1 = P_{L(R)}, \Gamma_2 = P_{R(L)}. \tag{6.71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6.4(b) + 6.4(c) + \text{sym} &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{10D'_1}{3} \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu L(R)} \right. \\
&\quad \left. - 2(2P_L \otimes P_R + 2P_R \otimes P_L + \gamma_{\mu L} \otimes \gamma_{\mu R} + \gamma_{\mu R} \otimes \gamma_{\mu L}) D_2 \right] \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = \gamma_{\mu L(R)}, \\
&= \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\left(\frac{4}{3} P_{L(R)} \otimes P_{L(R)} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu L(R)} \right) D'_1 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3}{2} (P_L \otimes P_R + P_R \otimes P_L) + \frac{1}{4} (\gamma_{\mu L} \otimes \gamma_{\mu L} + \gamma_{\mu R} \otimes \gamma_{\mu R}) \right) D_2 \right], \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = P_{L(R)}, \\
&= \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\left(\frac{7}{3} \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{R(L)} - 2P_{R(L)} \otimes P_{L(R)} \right) D'_1 \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{3}{2} \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu L(R)} + 4P_{L(R)} \otimes P_{L(R)} \right) D_2 \right], \quad \Gamma_1 = \gamma_{\mu L(R)}, \Gamma_2 = \gamma_{\mu R(L)}, \\
&= \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\left(\frac{7}{3} P_{L(R)} \otimes P_{R(L)} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu R(L)} \otimes \gamma_{L(R)} \right) D'_1 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2} \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu L(R)} + 4P_{L(R)} \otimes P_{L(R)} \right) D_2 \right], \quad \Gamma_1 = P_{L(R)}, \Gamma_2 = P_{R(L)}. \tag{6.72}
\end{aligned}$$

Enfin le diagramme 6.4(d) présente une structure tensorielle complexe qu'on se propose de présenter avec l'action de Wilson pure pour le quark léger, l'expression du diagramme étant alors moins

longue. Explicitement elle s'écrit

$$\begin{aligned}
C_{\Gamma_1 \Gamma_2} &= -g_0^2 \int_k A'' [T^a \Gamma_1 (-i \not{V} + W)(\gamma_\rho M_\rho - i N_\rho) \otimes \Gamma_2 (-i \not{V} + W)(\gamma_\rho M_\rho - i N_\rho) T^a] \\
&= -g_0^2 \int_k A'' [T^a \Gamma_1 (-i \not{V} \gamma_\rho M_\rho + W \gamma_\rho M_\rho - N_\rho \not{V} - i W N_\rho) \\
&\quad \otimes \Gamma_2 (-i \not{V} \gamma_\rho M_\rho - \not{V} N_\rho + W \gamma_\rho M_\rho - i W N_\rho) T^a] \\
&= g_0^2 \int_k A'' \left[M_\rho^2 T^a \Gamma_1 \not{V} \gamma_\rho \otimes \Gamma_2 \not{V} \gamma_\rho T^a + W \frac{\Gamma_\rho}{2} \left(T^a \Gamma_1 \not{V} \gamma_\rho \otimes \Gamma_2 T^a + T^a \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \not{V} \gamma_\rho T^a \right) \right. \\
&\quad \left. + W^2 N_\rho^2 T^a \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 T^a + W \frac{\Gamma_\rho}{2} \left(T^a \Gamma_1 \not{V} \otimes \Gamma_2 \gamma_\rho T^a + \Gamma_1 T^a \gamma_\rho \otimes \Gamma_2 \not{V} T^a \right) \right. \\
&\quad \left. - (W^2 M_\rho^2 \Gamma_1 T^a \gamma_\rho \otimes \Gamma_2 \gamma_\rho T^a + N_\rho^2 T^a \Gamma_1 \not{V} \otimes \Gamma_2 \not{V} T^a) \right] \\
&= g_0^2 \int_k A'' [M_\rho^2 \Gamma_\nu^2 T^a \Gamma_1 \gamma_\nu \gamma_\rho \otimes \Gamma_2 \gamma_\nu \gamma_\rho T^a + (W \Gamma_\rho^2 + W^2 N_\rho^2) \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 + W \Gamma_\rho^2 T^a \Gamma_1 \gamma_\rho \otimes \Gamma_2 \gamma_\rho T^a \\
&\quad - (W^2 M_\rho^2 T^a \Gamma_1 \gamma_\rho \otimes \Gamma_2 \gamma_\rho T^a + N_\rho^2 \Gamma_\nu^2 T^a \Gamma_1 \gamma_\nu \otimes \Gamma_2 \gamma_\nu T^a)] \\
&= g_0^2 \int_k A'' [(W \Gamma^2 + W^2 N^2 + \sum_\rho M_\rho^2 N_\rho^2 - 4 M_\alpha^2 \Gamma_\beta^2) T^a \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 T^a \\
&\quad + (W \Gamma_\alpha^2 - W^2 M_\alpha^2 - N^2 \Gamma_\alpha^2) T^a \Gamma_1 \gamma_\rho \otimes \Gamma_2 \gamma_\rho T^a + M_\alpha^2 \Gamma_\beta^2 T^a \Gamma_1 \gamma_\nu \gamma_\rho \otimes \Gamma_2 \gamma_\nu \gamma_\rho T^a], \quad (6.73)
\end{aligned}$$

$$A'' = \frac{1}{(\Gamma^2 + W^2)^2} \frac{1}{2W + a^2 \lambda^2}.$$

Avec les notations de [163], $C_{\Gamma_1 \Gamma_2}$ se réexprime comme

$$C_{\Gamma_1 \Gamma_2} = -\frac{\alpha_s}{4\pi} \left[K_0 T^a \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 T^a + K_1 T^a \Gamma_1 \gamma_\rho \otimes \Gamma_2 \gamma_\rho T^a + K_2^{\text{lat}} T^a \Gamma_1 \gamma_\nu \gamma_\rho \otimes \Gamma_2 \gamma_\nu \gamma_\rho T^a \right], \quad (6.74)$$

où l'exposant "lat" a été écrit pour rappeler que K_2^{lat} contient une divergence logarithmique $\ln(a^2 \lambda^2)$: $K_2^{\text{lat}} = K_2' + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi}{a\lambda}\right) - \frac{3}{8}$. Dans le cas de l'action overlap on a $K_1 = 0$. Avec $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \gamma_{\mu L(R)}$, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mu L(R)} \gamma_\nu \gamma_\rho \otimes \gamma_{\mu L(R)} \gamma_\nu \gamma_\rho &= 16 \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu L(R)}, \\
\gamma_{\mu L(R)} \gamma_\rho \otimes \gamma_{\mu L(R)} \gamma_\rho &= -4 \gamma_{\mu R(L)} \otimes \gamma_{\mu R(L)}.
\end{aligned}$$

On trouve en utilisant la relation (6.69)

$$C_{\gamma_{\mu L(R)} \gamma_{\mu L(R)}} = -\frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{K_0 + 16 K_2^{\text{lat}}}{3} \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu L(R)} - \frac{4 K_1}{3} \gamma_{\mu R(L)} \otimes \gamma_{\mu R(L)} \right]. \quad (6.75)$$

Avec $\Gamma_1 = \Gamma_2 = P_{L(R)}$, on a

$$\begin{aligned}
P_{L(R)} \gamma_\mu \gamma_\rho \otimes P_{L(R)} \gamma_\mu \gamma_\rho &= -4 \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu L(R)} \\
P_{L(R)} \gamma_\mu \otimes P_{L(R)} \gamma_\mu &= \gamma_{\mu R(L)} \otimes \gamma_{\mu R(L)},
\end{aligned}$$

$$C_{P_{L(R)}P_{L(R)}} = \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{2K_0}{3} P_{L(R)} \otimes P_{L(R)} - \frac{K_1}{3} \gamma_{\mu R(L)} \otimes \gamma_{\mu R(L)} + \left(\frac{K_0}{4} + \frac{4K_2^{\text{lat}}}{3} \right) \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu L(R)} \right]. \quad (6.76)$$

Grâce aux relations

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu L(R)} \gamma_\nu \gamma_\rho \otimes \gamma_{\mu R(L)} \gamma_\nu \gamma_\rho &= 4\gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu R(L)}, \\ \gamma_{\mu L(R)} \gamma_\rho \otimes \gamma_{\mu R(L)} \gamma_\rho &= 4P_{R(L)} \otimes P_{L(R)}, \\ P_{L(R)} \gamma_\rho \otimes P_{R(L)} \gamma_\rho &= \gamma_{\rho R(L)} \otimes \gamma_{\rho L(R)}, \end{aligned}$$

on obtient également

$$\begin{aligned} C_{\gamma_{\mu L(R)} \gamma_{\mu R(L)}} &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\left(K_0 + 4K_2^{\text{lat}} + \frac{2K_1}{3} \right) P_{R(L)} \otimes P_{L(R)} + \left(\frac{K_0 + 4K_2^{\text{lat}}}{6} + K_1 \right) \gamma_{\mu L(R)} \otimes \gamma_{\mu R(L)} \right], \\ C_{P_{L(R)} P_{R(L)}} &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\left(\frac{K_0 + 4K_2^{\text{lat}}}{6} + K_1 \right) P_{L(R)} \otimes P_{R(L)} + \left(\frac{K_0 + 4K_2^{\text{lat}}}{4} + \frac{K_1}{6} \right) \gamma_{\mu R(L)} \otimes \gamma_{\mu L(R)} \right]. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Avec les notations utilisées par [150, 165]

$$v = -(K_0 + 8 \ln \pi + 16K_2'), \quad J_1 = -(K_0 + 2 \ln \pi + 4K_2'), \quad w = -K_1,$$

et l'expression des opérateurs renormalisés dans le continu, les éléments de la matrice de renorma-

lisation s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
Z_{11} &= 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{7}{3} - \frac{v}{3} - \frac{10D'_1}{3} + \frac{\delta}{3} - \frac{4z_2}{3} - \frac{4z'_2}{3} + \frac{4w}{3} + 4 \ln(a^2 \mu^2) \right], \\
Z_{13} &= \frac{\alpha_s}{4\pi} [4D_2], \\
Z_{14} &= \frac{\alpha_s}{4\pi} [8D_2], \\
Z_{21} &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[-\frac{5}{36} + \frac{v}{36} + \frac{2J_1}{9} + \frac{D'_1}{2} - \frac{\delta}{4} - \frac{w}{3} + \frac{D'_3 - D'_1}{4} - \frac{2}{3} \ln(a^2 \mu^2) \right], \\
Z_{22} &= 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{16}{9} - \frac{2v}{9} + \frac{8J_1}{9} - \frac{4D'_1}{3} - \frac{2\delta}{3} - \frac{4z_2}{3} - \frac{4z'_2}{3} + \frac{4}{3} \ln(a^2 \mu^2) \right], \\
Z_{23} &= -\frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{D_2}{2} \right], \\
Z_{24} &= -\frac{\alpha_s}{4\pi} [3D_2], \\
Z_{31} &= \frac{\alpha_s}{4\pi} [3D_2], \\
Z_{32} &= \frac{\alpha_s}{4\pi} [8D_2], \\
Z_{33} &= 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{41}{12} + \frac{J_1}{6} - \frac{7D'_1}{3} - \frac{\delta}{6} - \frac{4z_2}{3} - \frac{4z'_2}{3} + w + \frac{7}{2} \ln(a^2 \mu^2) \right], \\
Z_{34} &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{1}{2} + J_1 + 2D'_1 - \delta + \frac{2w}{3} - 3 \ln(a^2 \mu^2) \right], \\
Z_{41} &= -\frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{D_2}{2} \right], \\
Z_{42} &= -\frac{\alpha_s}{4\pi} [4D_2], \\
Z_{43} &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{1}{8} + \frac{J_1}{4} + \frac{D'_1}{2} - \frac{\delta}{4} + \frac{w}{6} - \frac{3}{4} \ln(a^2 \mu^2) \right], \\
Z_{44} &= 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{41}{12} + \frac{J_1}{6} - \frac{7D'_1}{3} - \frac{\delta}{6} - \frac{4z_2}{3} - \frac{4z'_2}{3} + w + \frac{7}{2} \ln(a^2 \mu^2) \right],
\end{aligned}$$

où J_1 , v et w dépendent de l'action du quark léger. Remarquons que les contraintes (6.56)-(6.58) sont explicitement vérifiées. C'est également le cas si l'action du quark léger est l'action clover [150, 160], où de nouvelles constantes apparaissent dans cette matrice. Enfin la constante de matching avec l'opérateur bilinéaire axial défini dans le continu s'écrit

$$Z_A^{\overline{\text{MS}}}(\mu) = 1 + \frac{\alpha_s}{12\pi^2} \left[\frac{5}{4} - \frac{z_2 + z'_2}{2} - (D'_1 - D_2) + \frac{3}{2} \ln(a^2 \mu^2) \right]. \quad (6.78)$$

Remarquons que les rapports Z_{ii}/Z_A^2 , facteurs de proportionnalité des $\tilde{B}_i^{\overline{\text{MS}}}(\mu)$ vis à vis des $\tilde{B}_i(1/a)$, ne laissent plus apparaître les self-energy des quarks, ce qui diminue les effets de la renormalisation sur ces paramètres de sac.

ρ	1.4	1.6
$z'_2(\rho)$	-17.47	-13.24
$J_1(\rho)$	2.55	3.06
$J_2(\rho)$	0.056	0.068
$D'_1(\rho, \alpha_i = 0)$	0.65	0.71
$D'_1(\rho, \text{HYP1})$	0.28	0.31
$D'_1(\rho, \text{HYP2})$	0.032	0.026

TAB. 6.4: Valeurs numériques des constantes apparaissant dans la matrice de renormalisation (6.61).

Résultats avec l'action overlap

$z'_2(\rho)$, $v(\rho)$ et $J_1(\rho)$, calculées dans [162], ont été écrites dans la table (6.4) pour $\rho = 1.4$ et 1.6 qui sont les paramètres choisis dans les simulations effectuées à $\beta = 6.0$ et $\beta = 5.85$ respectivement. Dans cette table on a également regroupé les valeurs de $D'_1{}^{\text{overlap}}$ en fonctions des ensembles (α_i) introduits au chapitre précédent. En utilisant les règles de Feynman de l'action overlap, la correction de vertex lourd-léger a l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
J_{h\gamma} &= -\frac{4}{3}g_0^2 \int_k \frac{\sum_j h_{4j}}{2iN_4 + \epsilon M_4} \frac{1}{2W} \gamma \frac{-i \not{V} + \omega + b}{2\rho(\omega + b)} \frac{\rho}{\omega + \rho} \left[\gamma_j M_j - iN_j - \frac{i \not{V} + b}{\omega} (\gamma_j M_j + iN_j) \right] \\
&= \frac{4}{3}g_0^2 \int_k \frac{1}{2W} \frac{1}{\omega + b} \frac{1}{\omega + \rho} \gamma \left[D_4 \left(M_4^2 + \frac{\omega + b}{2} \right) + \sum_j A'_j N_j^2 \left(M_j^2 + \frac{\omega + b}{2} \right) \right] \\
&\equiv \frac{4}{3}g_0^2 \gamma \left(D'_1 + \int_k \frac{1}{4W^2} \right). \tag{6.79}
\end{aligned}$$

La divergence infrarouge est soustraite à la main, car on ne peut pas ajouter de façon directe une masse au gluon comme on l'a fait précédemment.

Dans ce contexte on a

$$\begin{aligned}
Z_{11}^{\overline{\text{MS}}}(1/a) &= 1 + \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(1/a)}{4\pi} \times 20.0579, & Z_{22}^{\overline{\text{MS}}}(1/a) &= 1 + \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(1/a)}{4\pi} \times 19.6915, \\
Z_A^{\overline{\text{MS}}}(1/a) &= 1 + \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(1/a)}{4\pi} \times 11.2557, \tag{6.80}
\end{aligned}$$

et on obtient pour la simulation à $\beta = 6.0$

$$\tilde{B}_1^{\overline{\text{MS}}}(1/a) = 0.923(13), \quad \tilde{B}_2^{\overline{\text{MS}}}(1/a) = 1.592(20), \tag{6.81}$$

où on a utilisé la valeur $\alpha_s^V(3.41/a)$, reliée à la valeur moyenne de la plaquette $\langle P \rangle_{\beta=6.0} = 0.5937$ et à $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}/\Lambda_V = 0.625192$ et d'où on extrait à l'ordre de 2 boucles $\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(1/a) = 0.1998$ [166].

L'évolution de μ à m_b des opérateurs \tilde{O}_1 et \tilde{O}_2 est décrite dans le schéma $\overline{\text{MS}}$ par [153, 164]

$$\left(\begin{array}{c} \tilde{O}_1(m_b) \\ \tilde{O}_2(m_b) \end{array} \right)^{\overline{\text{MS}}} \equiv \langle \vec{\tilde{O}}(m_b) \rangle^{\overline{\text{MS}}} = W_{\text{HQET}}^{\text{T}}[\mathbf{m}_b, \mu]^{-1} \langle \vec{\tilde{O}}(\mu) \rangle^{\overline{\text{MS}}}, \tag{6.82}$$

avec

$$W_{\text{HQET}}[\mathbf{m}_b, \mu] = \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{m}_b) \tilde{\mathbf{w}}^{-1}(\mu), \quad \tilde{\mathbf{w}}(\mu) = \tilde{\mathbf{M}}(\mu) \alpha_s(\mu)^{-\tilde{\gamma}_0/2\beta_0}. \tag{6.83}$$

Les matrices de dimension anomales s'écrivent à $N_f=0$:

$$\tilde{\gamma}_0 = -\frac{8}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}(\mu) = I + \tilde{J}_{12}^{\overline{\text{MS}}} \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}, \quad (6.84)$$

$$\tilde{J}_{12}^{\overline{\text{MS}}} = \begin{pmatrix} -\frac{317}{1089} + \frac{68\pi^2}{297} & -\frac{2639}{8712} + \frac{\pi^2}{99} \\ 0 & -\frac{3181}{4356} + \frac{74\pi^2}{297} \end{pmatrix}. \quad (6.85)$$

Le courant axial évolue (à $N_f = 0$) suivant l'équation

$$\tilde{A}_0(m_b) = \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(m_b)} \right)^{-\tilde{\gamma}_A/2\beta_0} \left[1 - \left(\frac{439}{1089} - \frac{28\pi^2}{297} \right) \frac{\alpha_s(\mu) - \alpha_s(m_b)}{4\pi} \right] \tilde{A}_0(\mu), \quad (6.86)$$

avec $\tilde{\gamma}_A = -4$. Enfin le matching avec QCD se fait à l'ordre d'une 2 boucle dans la théorie des perturbations à NLO de la manière suivante :

$$B_{B_s}^{\overline{\text{MS}}} = \left(1 - \frac{26}{3} \frac{\alpha_s(m_b)}{4\pi} \right) \tilde{B}_1^{\overline{\text{MS}}}(m_b) + 5 \frac{\alpha_s(m_b)}{4\pi} \tilde{B}_2^{\overline{\text{MS}}}(m_b). \quad (6.87)$$

Dans cette équation $\alpha_s(m_b)$ a comme expression

$$\alpha_s(m_b) = \frac{\alpha_s(1/a)}{1 + \beta_0 \frac{\alpha_s(1/a)}{2\pi} \ln(am_b)}, \quad (6.88)$$

et $m_b^{\overline{\text{MS}}}(m_b) = 4.3 \text{ GeV}$ [72]. On obtient finalement

$$B_{B_s}^{\overline{\text{MS}},\text{stat}}(m_b) = 0.922(12)(25), \quad (6.89)$$

où la première erreur est statistique, tandis que la seconde est systématique et incorpore l'incertitude sur $\alpha_s(1/a)$ provenant des différentes formes de boosting possibles. Les erreurs de discrétisation y sont également contenues car la simulation à $\beta = 5.85$ a donné comme résultat avec $1/a = 1.5 \text{ GeV}$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1(1/a) &= 0.942(30), & \tilde{B}_2(1/a) &= 1.642(46), \\ \tilde{B}_1^{\overline{\text{MS}}}(1/a) &= 0.904(16), & \tilde{B}_2^{\overline{\text{MS}}}(1/a) &= 1.566(27), \\ B_{B_s}^{\overline{\text{MS}}}(m_b, 1/a = 1.5 \text{ GeV}) &= 0.904(15). \end{aligned}$$

Enfin on s'attend à ce que l'introduction de $N_f \neq 0$ dans l'évolution des opérateurs dans HQET ait un effet négligeable sur le paramètre de sac $B_{B_s}^{\overline{\text{MS}}}(m_b)$ car la dimension anomale dominante de l'opérateur \tilde{O}_1 se compense avec celle de \tilde{A}_0 , de sorte que la valeur de β_0 ne joue aucun rôle et l'effet ne se fait sentir qu'à l'ordre NLO. Il en ira bien sûr autrement pour le paramètre de sac B_2 , car cette compensation n'a pas lieu.

Si on souhaite obtenir le paramètre de sac physique $B_{B_s}^{\overline{\text{MS}},M_{B_s}}(m_b)$ en fonction de la valeur obtenue à la limite statique de HQET $B_{B_s}^{\overline{\text{MS}},\text{stat}}(m_b)$, et ainsi tenter de tenir compte des effets en $1/m_{B_s}$, on

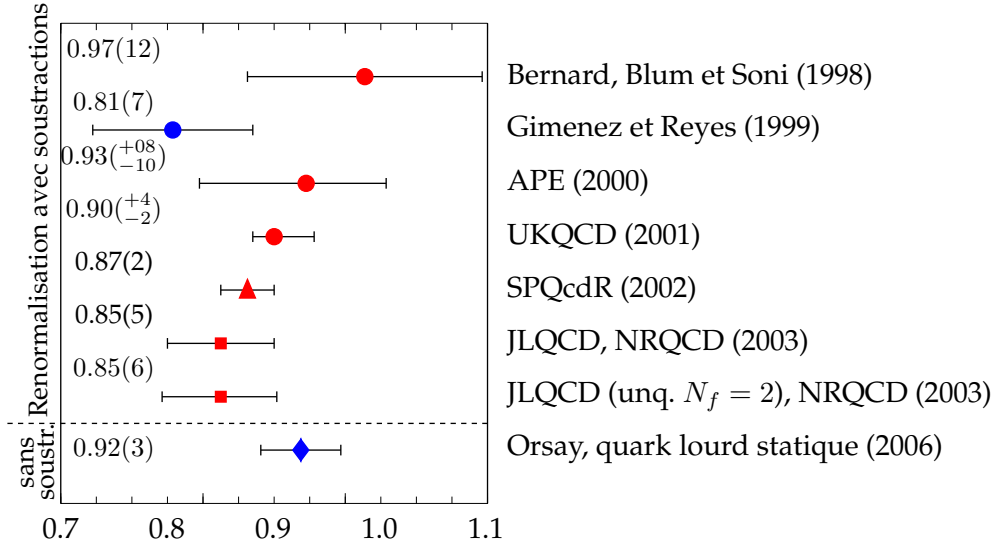


FIG. 6.5: Différentes valeurs de $B_{B_s}^{\overline{MS}}(m_b)$ obtenues après un calcul sur le réseau [149]-[155]; les symboles bleus correspondent à un calcul fait avec un quark lourd statique.

peut appliquer une interpolation linéaire vers M_{B_s} qui s'est avérée fructueuse dans le passé. On écrit simplement

$$B_{B_s}^{\overline{MS}, M_{B_s}}(m_b) = B_{B_s}^{\overline{MS}, \text{stat}}(m_b) \left(1 + \frac{C}{M_{B_s}} \right), \quad (6.90)$$

où $C = -0.24(6)$ GeV [151]. Avec $M_{B_s} = 5.37$ GeV, $B_{B_s}^{\overline{MS}, M_{B_s}} = 0.955(11) \times B_{B_s}^{\overline{MS}, \text{stat}}(m_b)$, ce qui donne avec notre simulation à $\beta = 6.0$ $B_{B_s}^{\overline{MS}, M_{B_s}} = 0.881(15)$.

A partir des résultats indiqués sur la figure 6.5 on constate que la valeur que l'on obtient pour $B_{B_s}^{\overline{MS}, \text{stat}}$ est un peu plus élevée que celle obtenue par [150]. Cette différence est soit due à l'utilisation de l'action de Neuberger pour le quark léger (pas de soustractions dans la renormalisation), soit à celle de liens HYP pour le propagateur statique, soit à une combinaison des deux. Pour tenter de vérifier cela le même calcul a été effectué avec un quark léger de Wilson. Il faut alors calculer les rapports $R_3(t_i, t)$ et $R_4(t_i, t)$

$$R_3(t_i, t) = \frac{\tilde{C}_{VV-AA}^{(3)}(t_i, t)}{-\frac{4}{3}Z_A^2 \tilde{C}_{AA}^{(2)+}(t_i) \tilde{C}_{AA}^{(2)-}(t)} \xrightarrow{t_i-t \gg 0} \frac{v \langle \overline{B}_s | \tilde{O}_3 | B_s \rangle_v}{-\frac{4}{3} \langle 0 | \tilde{A}_0^- | B_s \rangle_v^2} \equiv \tilde{B}_3(a),$$

$$R_4(t_i, t) = \frac{C_{SS-PP}^{(3)}(t_i, t)}{2Z_A^2 \tilde{C}_{AA}^{(2)+}(t_i) \tilde{C}_{AA}^{(2)-}(t)} \xrightarrow{t_i-t \gg 0} \frac{v \langle \overline{B}_s | \tilde{O}_4 | B_s \rangle_v}{2 \langle 0 | \tilde{A}_0^- | B_s \rangle_v^2} \equiv \tilde{B}_4(a). \quad (6.91)$$

Sans amélioration du propagateur de quark statique, les constantes de renormalisation s'écrivent

$$\begin{aligned} Z_{11} &= 1 - \frac{\alpha_s^{\overline{MS}}(1/a)}{4\pi} \times 67.1229, & Z_{13} &= -\frac{\alpha_s^{\overline{MS}}(1/a)}{4\pi} \times 28.8998, \\ Z_{22} &= 1 - \frac{\alpha_s^{\overline{MS}}(1/a)}{4\pi} \times 55.7046, & Z_{23} &= \frac{\alpha_s^{\overline{MS}}(1/a)}{4\pi} \times 3.6125, \\ Z_A &= 1 - \frac{\alpha_s^{\overline{MS}}(1/a)}{4\pi} \times 40.4724, \end{aligned} \quad (6.92)$$

et on trouve

$$\begin{aligned}\tilde{B}_1(1/a) &= 0.980(15), & \tilde{B}_2(1/a) &= 1.580(20), \\ \tilde{B}_3(1/a) &= 1.968(27), & \tilde{B}_4(1/a) &= 1.316(17), \\ \tilde{B}_1^{\overline{\text{MS}}}(1/a) &= 0.741(14), & \tilde{B}_2^{\overline{\text{MS}}}(1/a) &= 1.689(22), \\ B_{B_s}^{\overline{\text{MS}}}(m_b) &= 0.765(14),\end{aligned}\tag{6.93}$$

ce qui est compatible avec les résultats donnés par [150], bien que leur calcul ait été effectué avec l'action clover.

Si on applique la procédure HYP, les constantes de renormalisation s'écrivent avec l'ensemble de paramètres ($\alpha_i = \text{HYP1}$)

$$\begin{aligned}Z_{11} &= 1 - \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(1/a)}{4\pi} \times 33.6767, & Z_{13} &= -\frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(1/a)}{4\pi} \times 14.7880, \\ Z_{22} &= 1 - \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(1/a)}{4\pi} \times 30.9724, & Z_{23} &= \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(1/a)}{4\pi} \times 1.8485, \\ Z_A &= 1 - \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(1/a)}{4\pi} \times 20.4977,\end{aligned}\tag{6.94}$$

et on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{B}_1(1/a) &= 0.988(5), & \tilde{B}_2(1/a) &= 1.603(5), \\ \tilde{B}_3(1/a) &= 1.998(9), & \tilde{B}_4(1/a) &= 1.335(4), \\ \tilde{B}_1^{\overline{\text{MS}}}(1/a) &= 0.867(6), & \tilde{B}_2^{\overline{\text{MS}}}(1/a) &= 1.606(9), \\ B_{B_s}^{\overline{\text{MS}}}(m_b) &= 0.873(5).\end{aligned}\tag{6.95}$$

HYP réduit les mélanges entre opérateurs, car on constate qu'à l'ordre d'une boucle $Z_{13}(\text{HYP1})$ est deux fois plus petit que $Z_{13}(\alpha_i = 0)$. Par ailleurs $[Z_{ii} - Z_A^2](\text{HYP1})$ est plus proche de 1 que $[Z_{ii} - Z_A^2](\alpha_i = 0)$. On pourrait tirer comme conclusion que cette procédure a un effet similaire à l'action overlap... avec un coût en temps de calcul nettement moins élevé! Toutefois elle introduit des incertitudes supplémentaires : en effet d'une part on ne connaît pas les constantes de renormalisation aux ordres plus élevés dans la théorie des perturbations. On constate d'autre part que dès $\mathcal{O}(\alpha_s)$ la dépendance de ces constantes est forte par rapport aux paramètres α_i , comme on peut le visualiser dans les tables 5.4 et 5.5, et n'est pas compensée par la théorie nue car les paramètres de sac nus $\tilde{B}_i(\alpha_i = 0)$ et $\tilde{B}_i(\text{HYP1})$ sont étonnamment proches, même si les signaux des premiers sont nettement moins bons que ceux des seconds qui ont en outre des erreurs statistiques nettement plus petites. Or on obtient avec notre simulation effectuée avec les paramètres HYP1 les rapports

$$\frac{\langle \tilde{O}_3 \rangle}{\langle \tilde{O}_1 \rangle} = -1.011(1), \quad \frac{\langle \tilde{O}_4 \rangle}{\langle \tilde{O}_1 \rangle} = 1.013(2),\tag{6.96}$$

de sorte que l'incertitude sur les constantes aura des effets importants sur les paramètres de sac $B_i^{\overline{\text{MS}}}(m_b)$. Ecrivons encore une fois que le calcul effectué avec les fermions overlap ne souffre pas de ces effets.

Pour clore cette discussion écrivons quelques mots sur les effets du quenching : la collaboration JLQCD a montré que ceux-ci semblent être petits [154, 155], mais ceci doit être confirmé par un calcul unquenched de l'amplitude du mélange $B_s - \overline{B}_s$ dans les mêmes conditions que nous l'avons fait. Ceci pourrait être réalisé dans un futur relativement proche, car cette même collaboration a débuté le développement de codes et d'algorithmes afin de construire à l'aide d'une machine BlueGene un ensemble de configurations unquenched avec des quarks de la mer overlap.

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire on s'est efforcé de présenter l'étude de quelques aspects phénoménologiques de la physique du B par le biais de simulations numériques de la QCD sur un réseau. Rappelons que depuis quelques années les tests fins du Modèle Standard occupent une place importante dans la communauté des physiciens des particules, théoriciens comme expérimentateurs. Du côté expérimental les mesures ont atteint un niveau de précision remarquable et on peut envisager de détecter les effets de la physique au-delà du Modèle Standard dans le secteur des saveurs : les détecteurs CDF, D0, LHCb et les usines à B détiennent une position importante dans ce projet, car le méson B est une particule qui se prête bien à ce genre d'étude. Toutefois le confinement des quarks et des gluons dans les hadrons par l'interaction forte masque ce qui se passe au niveau le plus intime de la matière et l'exploitation des résultats expérimentaux nécessite le calcul théorique des éléments de matrice hadroniques, *et celui-ci souffre encore d'erreurs systématiques importantes*. La simulation sur un réseau de la QCD est l'approche la plus réaliste pour effectuer ces calculs, puisqu'elle consiste à évaluer directement les fonctions de Green de la théorie à partir de l'intégrale fonctionnelle. Les nouvelles générations d'ordinateurs, qui développent une capacité de calcul de plusieurs TFlops soutenus, ainsi que les progrès algorithmiques, permettront sans doute d'atteindre un niveau de précision théorique comparable à la précision expérimentale. Cette meilleure précision rendra possible une exploitation plus approfondie des données expérimentales, une diminution des erreurs sur les paramètres fondamentaux du Modèle Standard, et, éventuellement, la mise en évidence d'une nouvelle physique.

Le cadre théorique dans lequel on s'est placé est la Théorie Effective des Quarks Lourds et seuls les effets dominants en $1/m_b$ ont été pris en compte. Dans ce contexte le quark b constitue une source statique de couleur, son propagateur étant composé d'une ligne de Wilson améliorée afin de réduire le bruit statistique qu'elle engendre à grand temps.

On a effectué une première estimation unquenched ($N_f = 2$) des couplages pioniques \hat{g} et \tilde{g} faisant partie des paramètres du Lagrangien chirale effectif qui décrit la physique des mésons lourd-légers. Après extrapolation chirale on trouve $\hat{g} = 0.4 \div 0.6$ et $\tilde{g} = -0.1 \div -0.3$. Il faudra réduire ces intervalles en effectuant une simulation avec des masses de quark se rapprochant davantage encore de leur valeur physique. Cette évaluation a nécessité le calcul de la constante de renormalisation du courant axial $\bar{q}\gamma_\mu\gamma^5 q$, ce qui s'est fait de façon non perturbative en utilisant les identités de Ward chirales.

La détermination unquenched ($N_f = 2$) de la masse du quark étrange a été entreprise, une procédure de renormalisation non perturbative (schéma RI-MOM) ayant été employée. On trouve, en faisant le raccordement avec le schéma $\overline{\text{MS}}$, $m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 101 \pm 8_{-0}^{+25} \text{ MeV}$.

On a abordé le problème d'isoler correctement les états fondamentaux des excitations orbitales des mésons lourd-légers : la méthode proposée consiste à construire une matrice de corrélateurs, les indices matriciels courant sur la séparation entre les deux quarks de valence composant le méson lourd-léger et sur les différentes représentations subduites $D^{(J)} \downarrow O_h$ auxquelles appartient le champ interpolant du méson. De cette manière on espère construire un champ interpolant qui supprime efficacement le couplage avec les excitations radiales, et ainsi extraire plus facilement les éléments de matrice hadroniques auxquels on s'intéresse. Dans ce contexte une première estimation quenched des fonctions d'Isgur-Wise associées aux transitions semi-leptoniques $B \rightarrow D^{**}$ a été effectuée. On trouve $\tau_{\frac{1}{2}}(1) = 0.3 \div 0.5$ et $\tau_{\frac{3}{2}}(1) = 0.5 \div 0.7$. Les constantes de renormalisation appropriées ont été calculées perturbativement. Un travail supplémentaire est exigé afin d'améliorer cette estimation, car les fluctuations statistiques sont encore trop importantes pour que ces valeurs soient véritablement convaincantes, et pour pouvoir étudier les effets du quenching. De ce point de vue les propagateurs "all-to-all" semblent très prometteurs, et il serait intéressant de les inclure dans les futurs programmes d'analyse.

Enfin le paramètre de sac B_{B_s} de l'amplitude du mélange $B_s - \overline{B}_s$ a été calculé dans l'approximation quenched. On trouve $B_{B_s} = 0.92(3)$. La particularité de cette évaluation est qu'elle a été accomplie avec l'action overlap pour le quark léger, cette dernière étant invariante sous les transformations chirales, même à maille finie du réseau. La conséquence essentielle est qu'on réduit nettement les erreurs systématiques car le matching des opérateurs à 4 fermions avec leur homologue dans le continu n'implique pas de mélange spurieux entre opérateurs de chiralité différente.

Les corrections en $1/m_Q$ aux différents processus considérés peuvent être envisagées de deux façons. Tout d'abord se maintenir dans le cadre de QCD pour décrire le quark c dans l'étude des transitions $B \rightarrow D^{**}$: en ayant recours aux conditions aux bords "twistées" [167] on donne une impulsion quelconque $p = \theta$ au quark et on s'affranchit de la quantification sur le réseau des impulsions $p_n = 2\pi n/L$; cela permet d'effectuer de manière plus satisfaisante qu'auparavant l'extrapolation vers le recul nul des facteurs de forme paramétrant ces transitions. Quant aux corrections en $1/m_b$ de la théorie effective, elles proviennent soit des courants de QCD $\bar{b}\Gamma q$ exprimés en termes des courants J_i de HQET de dimension $3 + i$, soit du Lagrangien d'ordre $1/m_b$ \mathcal{L}_1 (1.5) et ceux d'ordre supérieurs. Ainsi au premier ordre en $1/m_b$, la valeur moyenne d'un opérateur O^{QCD} défini dans QCD s'écrira

$$\langle O^{\text{QCD}} \rangle = C_0 \langle O_0^{\text{HQET}} \rangle + C_0 \langle O_0^{\text{HQET}} \mathcal{L}_1 \rangle + C_1 \langle O_1^{\text{HQET}} \rangle,$$

où les C_i sont les coefficients de matching de O^{QCD} avec les opérateurs O_i^{HQET} . C'est par exemple cette approche qui a été utilisée pour calculer sur le réseau les premières corrections en $1/m_b$ à la masse du quark b [168].

Enfin les conditions aux bords twistées permettront sans doute de reprendre avec un regard nouveau l'étude très importante phénoménologiquement de la transition semi-leptonique $B \rightarrow \pi l \nu$ au-delà de l'approximation quenched, menant à l'extraction exclusive de V_{ub} .

Annexe

κ_s	κ_{v_1}	κ_{v_2}	M_P	M_V	$m_{v_{12}}^{\text{AWI}}(a)$
0.1560	0.1560	0.1560	0.441(5)	0.541(6)	0.0669(4)
	0.1560	0.1575	0.398(6)	0.513(8)	0.0548(5)
	0.1560	0.1580	0.383(7)	0.503(8)	0.0509(5)
	0.1575	0.1575	0.351(7)	0.482(9)	0.0430(5)
	0.1575	0.1580	0.334(8)	0.471(10)	0.0392(6)
	0.1580	0.1580	0.317(9)	0.459(10)	0.0355(6)
0.1575	0.1560	0.1560	0.379(3)	0.456(8)	0.0515(4)
	0.1560	0.1575	0.333(4)	0.417(13)	0.0394(4)
	0.1560	0.1580	0.316(4)	0.403(16)	0.0355(4)
	0.1575	0.1575	0.280(4)	0.374(21)	0.0276(3)
	0.1575	0.1580	0.261(4)	0.357(27)	0.0238(3)
	0.1580	0.1580	0.241(4)	0.340(35)	0.0200(3)
0.1580	0.1560	0.1560	0.368(3)	0.468(11)	0.0466(4)
	0.1560	0.1575	0.324(5)	0.443(15)	0.0348(4)
	0.1560	0.1580	0.308(6)	0.436(18)	0.0311(4)
	0.1575	0.1575	0.271(7)	0.419(21)	0.0234(5)
	0.1575	0.1580	0.250(9)	0.419(27)	0.0199(5)
	0.1580	0.1580	0.227(11)	0.424(37)	0.0164(5)

TAB. 5: Masse des mésons légers vectoriel et pseudoscalaire, ainsi que les masses nues de quark $m_{v_{12}}^{\text{AWI}}(a) = \frac{1}{2}[m_{v_1}(a) + m_{v_2}(a)]^{\text{AWI}}$ obtenues en utilisant les identités de Ward chirales; $V \times T = 16^3 \times 48$, $\beta = 5.6$

κ_S	κ_{v_1}	κ_{v_2}	M_P	M_V	$m_{v_{12}}^{AW1}(a)$
0.1535	0.1535	0.1535	0.262(4)	0.348(8)	0.0333(6)
	0.1535	0.1538	0.252(5)	0.341(8)	0.0306(6)
	0.1535	0.1540	0.245(5)	0.336(9)	0.0289(6)
	0.1535	0.1541	0.241(5)	0.334(9)	0.0280(6)
	0.1538	0.1538	0.241(5)	0.333(9)	0.0280(6)
	0.1538	0.1540	0.233(5)	0.329(9)	0.0263(6)
	0.1538	0.1541	0.229(5)	0.326(9)	0.0254(6)
	0.1540	0.1540	0.226(5)	0.324(9)	0.0246(6)
	0.1540	0.1541	0.222(5)	0.322(10)	0.0237(6)
	0.1541	0.1541	0.218(5)	0.319(10)	0.0228(6)
0.1538	0.1535	0.1535	0.258(3)	0.335(4)	0.0314(2)
	0.1535	0.1538	0.247(3)	0.328(4)	0.0287(2)
	0.1535	0.1540	0.240(3)	0.323(5)	0.0269(2)
	0.1535	0.1541	0.236(4)	0.321(5)	0.0261(2)
	0.1538	0.1538	0.236(4)	0.321(5)	0.0260(2)
	0.1538	0.1540	0.228(4)	0.316(6)	0.0243(2)
	0.1538	0.1541	0.224(4)	0.314(6)	0.0234(2)
	0.1540	0.1540	0.220(4)	0.311(6)	0.0226(2)
	0.1540	0.1541	0.216(5)	0.309(7)	0.0217(2)
	0.1541	0.1541	0.212(5)	0.306(7)	0.0208(2)
0.1540	0.1535	0.1535	0.258(2)	0.345(5)	0.0303(3)
	0.1535	0.1538	0.247(2)	0.338(6)	0.0277(3)
	0.1535	0.1540	0.240(3)	0.333(7)	0.0259(3)
	0.1535	0.1541	0.236(3)	0.331(7)	0.0250(3)
	0.1538	0.1538	0.236(3)	0.331(7)	0.0250(3)
	0.1538	0.1540	0.228(3)	0.326(8)	0.0233(3)
	0.1538	0.1541	0.225(3)	0.324(8)	0.0224(3)
	0.1540	0.1540	0.221(3)	0.321(9)	0.0215(4)
	0.1540	0.1541	0.217(3)	0.319(9)	0.0207(4)
	0.1541	0.1541	0.212(3)	0.316(10)	0.0198(4)
0.1541	0.1535	0.1535	0.234(6)	0.318(10)	0.0286(3)
	0.1535	0.1538	0.222(6)	0.311(11)	0.0259(3)
	0.1535	0.1540	0.213(6)	0.307(11)	0.0242(3)
	0.1535	0.1541	0.209(6)	0.304(11)	0.0233(3)
	0.1538	0.1538	0.209(6)	0.304(11)	0.0233(3)
	0.1538	0.1540	0.200(7)	0.300(12)	0.0215(3)
	0.1538	0.1541	0.196(7)	0.298(12)	0.0206(3)
	0.1540	0.1540	0.191(7)	0.295(12)	0.0198(3)
	0.1540	0.1541	0.187(7)	0.293(13)	0.0189(3)
	0.1541	0.1541	0.182(7)	0.291(13)	0.0180(4)

TAB. 6: Mêmes quantités que dans la table précédente, mais à $V \times T = 24^3 \times 48$ et $\beta = 5.8$

Bibliographie

- [1] S. W. Herb *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 252 (1977)
- [2] E. Eichten et K. Gottfried, *Phys. Lett. B* **66**, 286 (1977) ; J. Ellis, M. K. Gaillard, D. V. Nanopoulos et S. Rudaz, *Nucl. Phys. B* **131**, 285 (1977)
- [3] D. Andrews *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 219 (1980) ; G. Finocchiaro *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 222 (1980) ; S. Behrends *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 881 (1983)
- [4] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22**, 579 (1961) ; S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967) ; A. Salam dans *Elementary Particle Theory*, ed. Svartholm, Almquist et Wiksells (1968)
- [5] D. J. Gross et F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973) ; H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346 (1973)
- [6] B. Aubert *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 091801 (2001) ; K. Abe *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 091802 (2001)
- [7] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch et R. Turlay, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 138 (1964) ; E. Alavi-Harati *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 22 (1999) ; V. Fanti *et al*, *Phys. Lett. B* **465**, 335 (1999)
- [8] B. Aubert *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 131801 (2004) ; Y. Chao *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 191802 (2004)
- [9] R. Fleischer, hep-ph/0505018
- [10] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 531 (1963) ; M. Kobayashi et T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49**, 52 (1973)
- [11] P. Bacilieri *et al*, Amsterdam Computer Conf 1985 : 0330
- [12] N. Isgur et M. B. Wise, *Phys. Lett. B* **232**, 113 (1989) ; *Phys. Lett. B* **237**, 257 (1990) ; H. Georgi, *Phys. Lett. B* **240**, 447 (1990) ; M. Neubert *Phys. Rep.* **245**, 259 (1994) ; A. V. Manohar et M. B. Wise, "Heavy Quark Physics", Ed. T. Ericson and P. V. Landshoff (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, 2000)
- [13] M. E. Luke et A. V. Manohar, *Phys. Lett. B* **286**, 248 (1992)
- [14] A. F. Falk, H. Georgi, B. Grinstein et M. B. Wise, *Nucl. Phys. B* **343**, 1 (1990)
- [15] N. Isgur et M. B. Wise, *Phys. Rev. D* **43**, 819 (1991)
- [16] M. Neubert, *Phys. Lett. B* **264**, 455 (1991)
- [17] R.F. Streater et A.A. Wightman, *TCP, spin & statistics and all that* (Benjamin, New York, 1964)
- [18] K. Osterwalder et R. Schrader, *Comm. Math. Phys.* **31**, 83 (1973) ; *Comm. Math. Phys.* **42**, 281 (1975)
- [19] L. Maiani et M. Testa, *Phys. Lett. B* **245**, 585 (1990) ; L. Lellouch et M. Lüscher, *Commun. Math. Phys* **219**, 31 (2001)

- [20] K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **10**, 2445 (1974)
- [21] Y. Iwasaki, *Nucl. Phys. B* **258**, 141 (1985)
- [22] K. Symanzik, *Nucl. Phys. B* **226**, 187 (1983) ; *Nucl. Phys. B* **227**, 205 (1983)
- [23] B. Shekholeislami et R. Wohlert, *Nucl. Phys. B* **259**, 572 (1985)
- [24] J. B. Kogut et L. Susskind, *Phys. Rev. D* **11**, 395 (1975) ; J. B. Kogut, D. K. Sinclair et L. Susskind, *Nucl. Phys. B* **114**, 198 (1976)
- [25] T. DeGrand, *Int. J. Mod. Phys. A* **19**, 1337 (2004)
- [26] B. Bunk, M. Della Morte, K. Jansen et F. Knechtli, *Nucl. Phys. B* **697**, 343 (2004) ; Y. Shamir, *Phys. Rev. D* **71**, 034509 (2005) ; C. Bernard *et al*, hep-lat/0509176
- [27] H. B. Nielsen et M. Ninomiya, *Phys. Lett. B* **105**, 219 (1981)
- [28] P. H. Ginsparg et K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **25**, 2649 (1982)
- [29] P. Hasenfratz, *Nucl. Phys. B. Proc*, **53**, 63 (1998)
- [30] C. G. Callan et J. A. Harvey, *Nucl. Phys. B* **250**, 427 (1986) ; Y. Shamir, *Nucl. Phys. B* **405**, 90 (1993) ; V. Furman et Y. Shamir, *Nucl. Phys. B* **439**, 54 (1993)
- [31] R. Narayanan et H. Neuberger, *Phys. Lett. B* **302**, 62 (1993) ; *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3251 (1993) ; *Nucl. Phys. B* **412**, 1574 (1994) ; *Nucl. Phys. B* **443**, 305 (1995)
- [32] H. Neuberger, *Phys. Lett. B* **417**, 141 (1998) ; *Phys. Rev. D* **57**, 5417 (1998) ; *Phys. Lett. B* **427**, 353 (1998)
- [33] M. Lüscher, *Phys. Lett. B* **428**, 342 (1998)
- [34] F. Niedermayer, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **73**, 105 (1999)
- [35] G. P. Lepage et B. A. Thacker, *Phys. Rev. D* **43**, 196 (1991)
- [36] E. Eichten et F. L. Feinberg, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1205 (1979) ; *Phys. Rev. D* **23**, 2724 (1981) ; E. Eichten, *Nucl. Phys. B. (Proc. Suppl)*, **4** 170 (1988) ; E. Eichten et B. Hill, *Phys. Lett. B* **234**, 511 (1990)
- [37] E. Eichten et B. Hill, *Phys. Lett. B* **240**, 193 (1990)
- [38] Y. Saad, "Iterative methods for sparse linear systems
- [39] T. Kalkreuter et H. Simma, *Comput. Phys. Commun* **93**, 33 (1996)
- [40] F. Berruto, N. Garron, C. Hoelbling, L. Lellouch, C. Rebbi et N. Shoresh, hep-lat/0310006
- [41] H. Neff. *et al*, *Phys. Rev. D* **64**, 114509 (2001)
- [42] J. Foley, K. J. Juge, A. Ò Cais, M. Peardon, S. M. Ryan et J.-I. Skullerud, *Comput. Phys. Commun.* **172**, 145 (2005)
- [43] W. Wilcox, "Numerical challenges in Lattice Gauge Theories", ed. par A. Frommer *et al*, "Lecture Notes in Computational Science and Engineering", Vol. 15, pp 127-141, Berlin, 2000, Springer [hep-lat/9911013]
- [44] S. Duane, A. D. Kennedy, B. J. Pendleton et D. Roweth, *Phys. Lett. B* **195**, 216 (1987)

- [45] M. Creutz, *Phys. Rev. D* **38**, 1228 (1988) ; A. D. Kennedy, dans *"Probabilistic Methods in Quantum Field Theory and Quantum Gravity*, ed. Damgaard, Hüffel et Rosenblum (Plenum Press, New York), p 209 (1990) ; R. Gupta, G. W. Kilcup et S. R. Sharpe, *Phys. Rev. D* **38**, 1278 (1988) ; C. F. Baillie, R. Gupta, G. Guralnik, G. W. Kilcup, A. Patel et S. R. Sharpe, *Phys. Rev. D* **40**, 2072 (1989) ; R. Gupta, S. Irbäck, F. Karsch et B. Petersson, *Phys. Lett. B* **242**, 437 (1990)
- [46] B. Efron, *SIAM Review* **21**, 460 (1979) ; S. Gottlieb, P. B. Mackenzie, H. B. Thacker et D. Weigarten, *Nucl. Phys. B* **263**, 704 (1986) ; R. Gupta, G. Guralnik, G. W. Kilcup, S. R. Sharpe et T. Warnock, *Phys. Rev. D* **36**, 2813 (1987)
- [47] M. Guagnelli, R. Sommer et H. Wittig, *Nucl. Phys. B* **535**, 389 (1998)
- [48] R. Sommer, *Nucl. Phys. B* **411**, 839 (1994)
- [49] C. R. Allton *et al*, *Nucl. Phys. B* **489**, 427 (1997)
- [50] D. Bećirević, B. Blossier, Ph. Boucaud, V. Gimenez, V. Lubicz, F. Mescia, S. Simula et C. Tarantino, *Nucl. Phys. B* **734**, 138 (2006)
- [51] C. Olson, M. G. Olsson et K. Williams, *Phys. Rev. D* **45**, 4307 (1992) ; M. G. Olsson, *Phys. Rev. D* **55**, 4579 (1997) ; T. J. Allen, M. G. Olsson et S. Veseli, *Phys. Lett. B* **434**, 110 (1998)
- [52] C. B. Lang et C. Rebbi, *Phys. Lett. B* **115**, 137 (1982)
- [53] A. Hasenfratz et F. Knechtli, *Phys. Rev. D* **64**, 034504 (2001)
- [54] B. Orth, T. Lippert et K. Schilling, *Phys. Rev. D* **72**, 014503 (2005)
- [55] R. Casalbuoni, A. Deandrea, N. Di Bartolomeo, F. Feruglio, R. Gatto et G. Nardulli, *Phys. Rep.* **281**, 145 (1997)
- [56] M. B. Wise, *Phys. Rev. D* **45**, 2188 (1992) ; G. Burdman et J. F. Donoghue, *Phys. Lett. B* **280**, 287 (1992)
- [57] T.-M. Yan *et al*, *Phys. Rev. D* **46**, 1148 (1992)
- [58] M. Gell-Mann et M. Lévy, *Nuovo Cimento* **16**, 705 (1960)
- [59] S. Coleman, J. Wess et B. Zumino, *Phys. Rev.* **177**, 2239 (1969) ; C. G. Callan, S. Coleman, J. Wess et B. Zumino, *Phys. Rev.* **177**, 2247 (1969)
- [60] S. Ahmed *et al* [CLEO collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **87**, 251801 (2001) ; A. Anastassov *et al*, *Phys. Rev. D* **65**, 032003 (2002)
- [61] J. F. Amundson, C. G. Boyd, E. Jenkins, M. Luke, A. V. Manohar, J. L. Rosner, M. J. Savage et M. B. Wise, *Phys. Lett. B* **296**, 415 (1992)
- [62] L. Randall et E. Sather, *Phys. Lett. B* **303**, 345 (1993) ; E. Jenkins, *Nucl. Phys. B* **412**, 181 (1994) ; T.-M. Yan, H.-Y. Cheng, C.-Y. Cheung, G.-L. Lin, Y.C. Lin et H.-L. Yu, *Phys. Rev. D* **49**, 2490 (1994)
- [63] N. Di Bartolomeo, F. Feruglio, R. Gatto et G. Nardulli, *Phys. Lett. B* **347**, 405 (1995)
- [64] M. A. Nowak, N. Rho et I. Zahed, *Phys. Rev. D* **48**, 4370 (1993) ; W. Bardeen, E. Eichten, et C. Hill, *Phys. Rev. D* **68**, 054024 (2003)
- [65] K. Abe *et al* [Belle Collaboration], *Phys. Rev. D* **69**, 112002 (:) ; J. M. Link *et al* [Focus Collaboration], *Phys. Lett. B* **586**, 11 (2004)

- [66] D. Bećirević, S. Fajfer et S. Prelovsek, *Phys. Lett. B* **599**, 55 (2004)
- [67] J. L. Richardson, *Phys. Lett. B* **82**, 272 (1979)
- [68] E. E. Salpeter, *Phys. Rev.* **87**, 238 (1952)
- [69] P. Colangelo, F. De Fazio et G. Nardulli, *Phys. Lett. B* **334**, 175 (1994)
- [70] P. N. Bogolioubov, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol VIII - 2, 163 (1968)
- [71] M. Susuki, *Phys. Rev. D* **37**, 239 (1988)
- [72] S. Eidelman *et al* (Particle Data Group), *Phys. Lett. B* **592**, 1 (2004)
- [73] D. Bećirević et A. Le Yaouanc, *JHEP* **9903**, 21 (1999)
- [74] Pour une excellente introduction au vaste sujet que constitue les règles de somme de QCD, consulter P. Colangelo et A. Khodjamirian, “*At the frontier of particle physics*”, vol. 3, 1495-1576
- [75] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein et V. I. Zakharov, *Nucl. Phys. B* **147**, 385 (1979)
- [76] Ph. Boucaud, A. Le Yaouanc, J. P. Leroy, J. Micheli, O. Pène et J. Rodriguez-Quintero, *Phys. Rev. D* **63**, 114003 (2001)
- [77] S. J. Brodsky et G. P. Lepage, *Phys. Lett. B* **87**, 359 (1979) ; *Phys. Rev. D* **22**, 2157 (1980) ; *Phys. Rev. D* **24**, 1808 (1981) ;
- [78] A. Khodjamirian, R. Ruckl, S. Weinzierl et O. I. Yakovlev, *Phys. Lett. B* **457**, 245 (1998)
- [79] D. Bećirević, J. Charles, A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène et J. C. Raynal, *JHEP* **0301**, 009 (2003)
- [80] F. S. Navarra, M. Nielsen et M. E. Bracco, *Phys. Rev. D* **65**, 037502 (2002) ; A. Khodjamirian, eConf **C0304052**, WG504 (2003)
- [81] P. Colangelo et F. De Fazio, *Eur. Phys. J. C* **4**, 503 (1998)
- [82] G. M. de Divitis *et al* [UKQCD collaboration], *JHEP* **9810**, 010 (1998)
- [83] A. Abada *et al*, *Phys. Rev. D* **66**, 074504 (2002)
- [84] A. Abada *et al*, *JHEP* **0402**, 016 (2004)
- [85] D. Bećirević, B. Blossier, Ph. Boucaud, J. P. Leroy, A. Le Yaouanc et O. Pène, hep-lat/0510017
- [86] P. Boyle, *J. Comput. Phys* **179**, 349 (2002)
- [87] G. Curci, *Phys. Lett. B* **167**, 425 (1986)
- [88] M. Bocchicchio, L. Maiani, G. Martinelli, G. C. Rossi et M. Testa, *Nucl. Phys. B* **262**, 331 (1985)
- [89] M. Crisafulli, V. Lubicz et A. Vladikas, *Eur. Phys. J C* **4**, 145 (1998)
- [90] A. Ali Khan *et al* [CP-PACS collaboration], *Phys. Rev. D* **65**, 054505 (2001) ; Erratum-ibid. *D* **67**, 059901 (2003)
- [91] S. Aoki *et al* [JLQCD collaboration], *Phys. Rev. D* **68**, 054502 (2003)
- [92] T. Ishikawa *et al* [CP-PACS collaboration], *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **140**, 225 (2005) ; C. Aubin *et al* [HPQCD collaboration], *Phys. Rev. D* **70**, 031504 (2004)
- [93] M. Göckeler *et al*, [QCDSF et UKQCD collaboration], hep-ph/0409312
- [94] G. Martinelli, C. Pittori, C. T. Sachrajda, M. Testa et A. Vladikas, *Nucl. Phys. B* **445**, 81 (1994) ; D. Bećirević *et al*, *JHEP* **0408**, 022 (2004)

- [95] K. G. Chetyrkin et A. Retey, *Nucl. Phys. B* **583**, 3 (2000)
- [96] G. P. Lepage et B. P. Mackenzie, *Phys. Rev. D* **48**, 2250 (1993)
- [97] S. Capitani, *Phys. Rep.* **382**, 113 (2003)
- [98] C. W. Bernard et M. F. L. Golterman, *Phys. Rev. D* **49**, 486 (1993) ; S. R. Sharpe, *Phys. Rev. D* **56**, 7052 (1997) [Erratum-ibid. *D* **62** 099901 (2000)]
- [99] K. G. Chetyrkin, *Phys. Lett. B* **404**, 161 (1997) ; T. van Ritbergen, J. A. M. Vermaseren et S. A. Larin, *Phys. Lett. B* **400**, 379 (1997) ; J. A. M. Vermaseren, S. A. Larin et T. van Ritbergen, *Phys. Lett. B* **405**, 327 (1997) ; K. G. Chetyrkin, B. A. Kniehl et M. Steinhauser, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2184 (1997)
- [100] M. Della Morte *et al.* [ALPHA Collaboration], *Nucl. Phys. B* **713**, 378 (2005) ; M. Gockeler *et al.*, *Phys. Rev. D* **73**, 014513 (2006)
- [101] M. Della Morte *et al.* [ALPHA collaboration], *Nucl. Phys. B* **729**, 117 (2005)
- [102] F. Di Renzo *et al.*, hep-lat/0509158.
- [103] I. Bigi, B. Blossier, A. Le Yaouanc, L. Oliver, A. Oyanguren, O. Pène, J. C. Raynal et P. Roudeau, hep-ph/0512270
- [104] O. Buchmüller et H. Flücher, hep-ph/0507253
- [105] B. Bakamijan et L. H. Thomas, *Phys. Rev.* **92**, 1300 (1953) ; A. Le Yaouanc *et al.*, *Phys. Lett. B* **365**, 319 (1996) ; *Phys. Lett. B* **386**, 315 (1996) ; *Phys. Rev. D* **56**, 5668 (1998) ; *Phys. Rev. D* **58**, 114019 (1998)
- [106] S. Godfrey et N. Isgur, *Phys. Rev. D* **32**, 189 (1985)
- [107] V. Morénas, A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène et J.C. Raynal, *Phys. Rev. D* **56**, 5668 (1997)
- [108] A. Oyanguren, présentation faite à EPS '05, Lisbonne.
- [109] G. Altarelli, N. Cabbibo, G. Corbo, L. Maiani, G. Martinelli, *Nucl. Phys. B* **208**, 365 (1982)
- [110] A. Le Yaouanc, L. Oliver et J. C. Raynal, *Phys. Rev. D* **67**, 114009 (2003)
- [111] J. D. Bjorken, séminaire donné aux Rencontres de la Vallée d'Aoste, La Thuile, SLAC-PUB-5278 (1990)
- [112] N. Uraltsev, *Phys. Lett. B* **501**, 86 (2001)
- [113] M. Dorsten, *Phys. Rev. D* **70**, 096013 (2004)
- [114] I. Bigi, A. Grozin, M. Shifman, N. Uraltsev et A. Vainshtein, *Phys. Lett. B* **339**, 160 (1994) ; I. Bigi, M. Shifman et N. Uraltsev, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **47**, 591 (1997)
- [115] M. Voloshin, *Phys. Rev. D* **46**, 3062 (1992)
- [116] F. Jugeau, A. Le Yaouanc, L. Oliver et J. C. Raynal, *Phys. Rev. D* **71**, 054031 (2005)
- [117] A. Le Yaouanc, D. Melikhov, V. Morénas, L. Oliver, O. Pène et J. C. Raynal, *Phys. Lett. B* **480**, 119 (2000)
- [118] ALEPH collab, *Z. Phys. C* **73**, 601 (1997)
- [119] P. Abreu *et al.* [DELPHI Collaboration], *Phys. Lett. B* **475**, 407 (2000) ; J. Abdallah *et al.* [DELPHI Collaboration], *Eur. Phys. J. C* **45**, 35 (2006)

- [120] V. M. Abazov *et al.* [D0 Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **95**, 171803 (2005)
- [121] N. Uraltsev, hep-ph/0409125
- [122] BELLE Collaboration, *Phys. Rev. D* **72**, 051109 (2005)
- [123] D. Acosta *et al.*, *Phys. Rev. D* **71**, 051103 (2005)
- [124] N. Uraltsev, *Phys. Lett. B* **545**, 337 (2002) ; *Phys. Lett. B* **585**, 253 (2004)
- [125] P. Lacock, C. Michael, P. Boyle et P. Rowland [UKQCD Collaboration], *Phys. Rev. D* **54**, 6997 (1996)
- [126] A. Duncan, E. Eichten, J. Flynn, B. Hill, G. Hockney et H. Thacker, *Phys. Rev. D* **51**, 5101 (1995)
- [127] C. Michael et J. Peisa, *Phys. Rev. D* **58**, 034506 (1998) ; A. M. Green, J. Koponen, P. Pennanen et C. Michael, *Eur. Phys. J. C* **28**, 79 (2003)
- [128] C. Allton *et al.*, *Phys. Rev. D* **47**, 5128 (1993)
- [129] A. M. Green, J. Koponen, C. Mc Neile, C. Michael et G. Thompson, *Phys. Rev. D* **69**, 094505 (2004)
- [130] U. Aglietti, *Nucl. Phys. B* **421**, 191 (1994)
- [131] A. K. Leibovich, Z. Ligeti, I. W. Stewart et M. B. Wise, *Phys. Rev. D* **57**, 308 (1998)
- [132] D. Bećirević B. Blossier, Ph. Boucaud, G. Herdoiza, J. P. Leroy, A. Le Yaouanc, V. Morénas et O. Pène, *Phys. Lett. B* **609**, 298 (2005)
- [133] B. Blossier, A. Le Yaouanc, V. Morénas et O. Pène, *Phys. Lett. B* **632**, 319 (2006)
- [134] T. DeGrand, *Phys. Rev. D* **67**, 014507 (2003)
- [135] W. Lee and S. Sharpe, *Phys. Rev. D* **68**, 054510 (2003)
- [136] W. Lee, *Phys. Rev. D* **66**, 114504 (2002), [hep-lat/0208032].
- [137] M. Della Morte, A. Shindler et R. Sommer [ALPHA Collaboration], *JHEP* **0508**, 51 (2005)
- [138] A. Hasenfratz, R. Hoffmann et F. Knechtli, *Nucl. Phys. Proc Suppl* **106**, 418 (2001)
- [139] N. Uraltsev, in *Boris Ioffe Festschrift "At the frontier of Particle Physics - Handbook of QCD"*, Ed. M. Shifman (World Scientific, Singapore, 2001), Vol.3, p. 1577
- [140] P. Colangelo, F. de Fazio et N. Paver, *Phys. Rev. D* **58**, 116005 (1998)
- [141] G. Martinelli et Y.-C. Zhang, *Phys. Lett. B* **123**, 433 (1983)
- [142] C. Jarlskog et R. Stora, *Phys. Lett. B* **208**, 268 (1988)
- [143] A.J. Buras, M. Jamin, et P.H. Weisz, *Nucl. Phys. B* **347**, 491 (1990) ; J. Urban, F. Krauss, U. Jentschura et G. Soff, *Nucl. Phys. B* **523**, 40 (1998)
- [144] M. Bona *et al* [UTfit Collaboration], hep-ex/0509219 ; J. Charles *et al* [CKMfitter Group], *Eur. Phys. J. C*, **41**, 1 (2005)
- [145] A. Abazov *et al* [D0 Collaboration], hep-ex/0603029
- [146] A. Abulencia *et al* [CDF Collaboration], hep-ex/0606027
- [147] T. Inami et C.S. Lim, *Prog. Theor. Phys.* **65**, 297 (1981)
- [148] D. Bećirević, B. Blossier, Ph. Boucaud, J. P. Leroy, A. Le Yaouanc et O. Pène, hep-lat/0509165

- [149] C.W. Bernard, T. Blum et A. Soni, *Phys. Rev. D* **58**, 014501 (1998)
- [150] V. Gimenez et J. Reyes, *Nucl. Phys. B* **545**, 576 (1999)
- [151] D. Bećirević *et al*, *Nucl. Phys. B* **618**, 241 (2001)
- [152] L. Lellouch et C. J. Lin, *Phys. Rev. D* **64**, 094501 (2001)
- [153] D. Bećirević *et al*, *JHEP* **0204**, 25 (2002) et *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **106**, 385 (2002) [hep-lat/0110091].
- [154] S. Aoki *et al*, *Phys. Rev. D* **67**, 014506 (2003)
- [155] S. Aoki *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 212001 (2003)
- [156] L. Giusti, C. Hoelbling et C. Rebbi, *Phys. Rev. D* **64**, 114508 (2001); Erratum-ibid *Phys. Rev. D* **65**, 079903 (2002)
- [157] P. Hernandez, K. Jansen, L. Lellouch et H. Wittig, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **106**, 766 (2002)
- [158] D. Bećirević et J. Reyes, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **129**, 435 (2004)
- [159] D. J. Broadhurst et A. G. Grozin, *Phys. Rev. D* **52**, 4082 (1995); V. Gimenez, *Nucl. Phys. B* **582**, 375 (1992); X. Ji and M. J. Musolf, *Phys. Lett. B* **409**, 257 (1991).
- [160] M. Di Piero et C. T. Sachrajda, *Nucl. Phys. B* **534**, 373 (1998)
- [161] Y. Kikukawa Y. et A. Yamada, *Phys. Lett. B* **448**, 265 (1999)
- [162] C. Alexandrou *et al*, *Nucl. Phys. B* **580**, 394 (2000); S. Capitani et L. Giusti, *Phys. Rev. D* **62**, 114506 (2000)
- [163] C. Bernard, A. Soni et T. Draper, *Phys. Rev. D* **36**, 103224 (1987)
- [164] M. Ciuchini, E. Franco, V. Lubicz, G. Martinelli, L. Scimanti et L. Silvestrini, *Nucl. Phys. B* **523**, 501 (1998); A. J. Buras, M. Misiak et J. Urban, *Nucl. Phys. B* **586**, 397 (2000)
- [165] J. Flynn, O. Hernandez et B. Hill, *Phys. Rev. D* **43**, 113709 (1991)
- [166] G. P. Lepage *et al*, *Nucl Phys. Proc. Suppl* **106**, 12 (2002)
- [167] G. de Diviis, R. Petronzio et N. Tantalo, *Phys. Lett. B* **595**, 408 (2004); J. Flynn, A. Juttner et C. T. Sachrajda, *PLB* **632**, 313 (2006)
- [168] M. Della Morte, N. Garron, M. Papinutto et R. Sommer, hep-lat/0509084

Résumé

Quelques aspects de la physique des mésons B ont été étudiés par la simulation numérique de la Chromodynamique Quantique sur réseau, qui est une approche non perturbative - basée sur les principes premiers de la Théorie Quantique des Champs - de calculer les fonctions de Green de la théorie. Les couplages \hat{g} et \tilde{g} paramétrant le Lagrangien chirale effectif qui décrit les interactions entre mésons lourd-légers et pions mous ont été calculés au-delà de l'approximation quenched (à $N_f = 2$). L'opérateur $\bar{q}\gamma_\mu\gamma^5 q$ a été renormalisé non perturbativement en utilisant les identités de Ward chirales. On trouve $\hat{g} = 0.4 \div 0.6$ et $\tilde{g} = -0.1 \div -0.3$. La masse du quark étrange a été estimée par une simulation unquenched (à $N_f = 2$) : elle a été renormalisée dans le schéma non perturbatif RI-MOM. On obtient en faisant le raccordement avec le schéma $\overline{\text{MS}}$ $m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 101 \pm 8_{-0}^{+25}$ MeV. Une méthode a été proposée pour évaluer sur le réseau les facteurs de forme associés aux transitions semileptoniques à recul nul $B \rightarrow D^{**}$ décrites dans le cadre de la Théorie Effective des Quarks Lourds. La constante de renormalisation de l'opérateur $\bar{h}\gamma_i\gamma^5 D_j h$ a été calculée à l'ordre d'une boucle de la théorie des perturbations. On trouve $\tau_{\frac{1}{2}}(1) = 0.3 \div 0.5$ et $\tau_{\frac{3}{2}}(1) = 0.5 \div 0.7$. Enfin le paramètre de sac associé à l'amplitude de mélange $B_s - \overline{B}_s$ a été évalué, en choisissant une action pour le quark étrange qui vérifie la symétrie chirale à maille a du réseau finie. De cette manière les erreurs systématiques, provenant des mélanges de chiralité, sont nettement réduites lors de la renormalisation de l'opérateur à 4 fermions $\bar{h}\gamma_{\mu L} q \bar{h}\gamma_{\mu L} q$. On obtient dans l'approximation quenched $B_{B_s} = 0.92(3)$.

Abstract

We have studied some phenomenological aspects of the B meson physics by using lattice QCD, which is a non perturbative method (based on the first principles of Quantum Field Theory) of computing Green functions of the theory. Pionic couplings \hat{g} and \tilde{g} , parameterizing the effective chiral Lagrangian which describes interactions between heavy-light mesons and soft pions, have been computed beyond the quenched approximation (at $N_f = 2$). We have renormalised the operator $\bar{q}\gamma_\mu\gamma^5 q$ non perturbatively by using chiral Ward identities. We obtain $\hat{g} = 0.4 \div 0.6$ and $\tilde{g} = -0.1 \div -0.3$. We have estimated from an unquenched simulation (at $N_f = 2$) the strange quark mass : the non perturbative renormalisation scheme RI-MOM has been applied. After the matching in the $\overline{\text{MS}}$ scheme the result is $m_s^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 101 \pm 8_{-0}^{+25}$ MeV. We have proposed a method to calculate on the lattice the Heavy Quark Effective Theory form factors of the semileptonic transitions $B \rightarrow D^{**}$ at zero recoil. The renormalisation constant of the operator $\bar{h}\gamma_i\gamma^5 D_j h$ has been computed at one-loop order of the perturbation theory. We obtain $\tau_{\frac{1}{2}}(1) = 0.3 \div 0.5$ and $\tau_{\frac{3}{2}}(1) = 0.5 \div 0.7$. Eventually the bag parameter B_{B_s} associated the $B_s - \overline{B}_s$ mixing amplitude in the Standard Model has been estimated in the quenched approximation by using for the strange quark an action which verifies the chiral symmetry at finite lattice spacing a . Thus systematic errors are significantly reduced in the renormalisation procedure because the spurious mixing of the four-fermion operator $\bar{h}\gamma_{\mu L} q \bar{h}\gamma_{\mu L} q$ with four-fermion operators of different chirality is absent. The result is $B_{B_s} = 0.92(3)$.

Keywords : lattice QCD, Heavy Quark Effective Theory, Chiral Lagrangian, heavy-light mesons, orbital excitations, CP violation, perturbative and non perturbative renormalisation