
Surfaces et invariants de type fini en dimension 3

Emmanuel Auclair

Grenoble, 26 octobre 2006

1.1. Chirurgies de Dehn sur les nœuds

$K \subset M$ nœud dans \mathbb{Z} -sphère,

$V(K)$ = voisinage tubulaire de K dans M .

$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2$, $\text{pgcd}(p, q) = 1$, courbe simple orientée $\mu_{p,q} \subset \partial V(K)$ telle que

$$\begin{cases} \ell k(K, \mu_{p,q}) = p \\ [\mu_{p,q}] = q \cdot [K] \end{cases} \quad \text{dans } H_1(V(K); \mathbb{Z}).$$

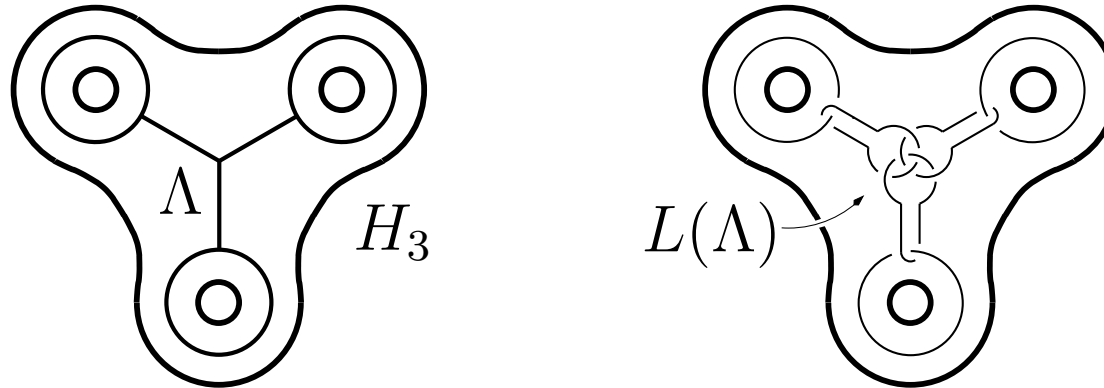
Variété obtenue à partir de M par chirurgie de Dehn de coefficient $\frac{p}{q}$ le long de K :

$$M_{(K; \frac{p}{q})} := (M \setminus \text{Int}(V(K))) \cup S^1 \times D^2.$$
$$\begin{array}{ll} \partial(V(K)) & \rightarrow S^1 \times S^1 \\ \mu_{p,q} & \mapsto \{*\} \times D^2 \end{array}$$

Pour tout entier q , $M_{(K; \frac{1}{q})}$ est une \mathbb{Z} -sphère.

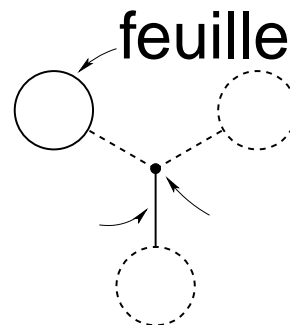
1.2. Filtration de Goussarov-Habiro: Graphes en Y

Λ = graphe trivalent plongé dans le corps en anses H_3 ,
 Λ parallélisé par un champ de vecteurs normal à la figure.
 $\rightarrow L(\Lambda) \subset H_3$ entrelacs parallélisé à 6 composantes.



Graphe en Y = plongement de H_3 dans \mathbb{Z} -sphère M
 \leftrightarrow plongement parallélisé de Λ dans M .

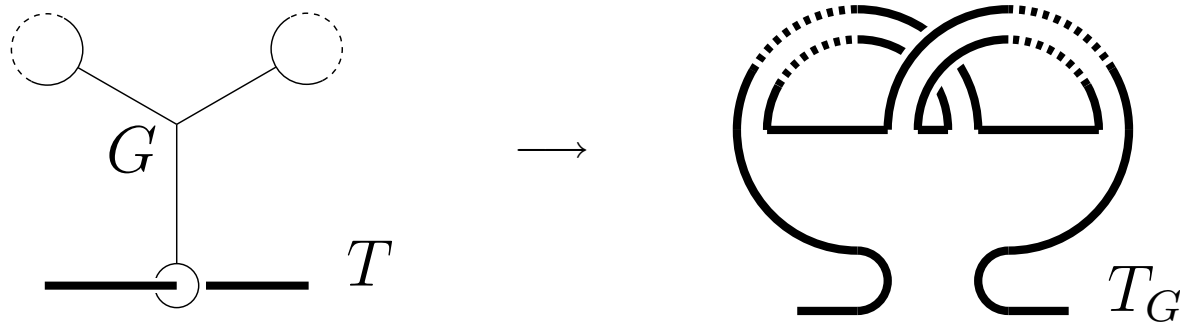
$G \subset M$ graphe en Y , la variété obtenue par chirurgie en Y sur G est $M_G := M_{L(G)}$.



1.2. Filtration de Goussarov-Habiro: Chirurgies en Y

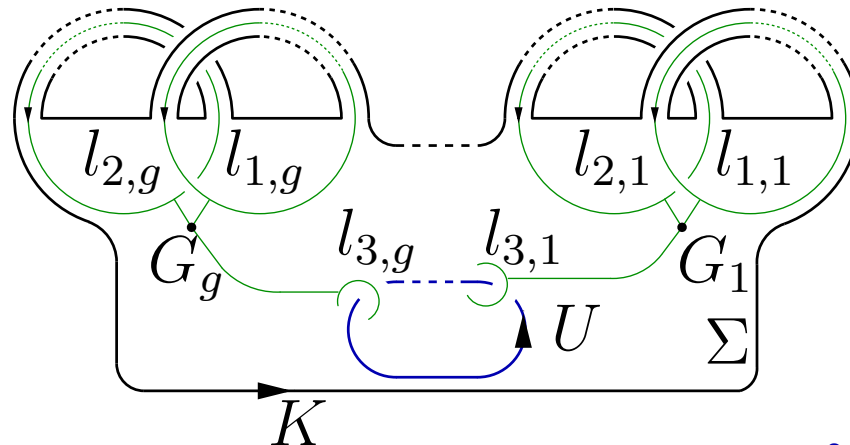
Après chirurgie en Y sur une \mathbb{Z} -sphère, on obtient une \mathbb{Z} -sphère. $G \subset M$ graphe en Y avec une feuille *triviale* (borde un disque D plongé dans $M \setminus G$) 0-parallélisée, alors $M_G \simeq M$.

Si un graphe T (composantes de chirurgie, ...) intersecte D , alors $(M_G, T) \simeq (M, T_G)$.



Une chirurgie en Y permet de “réaliser une surface de genre 1”.

$K \subset M$ réalisé à partir du nœud trivial par chirurgie sur un entrelacs en Y .



1.2. Filtration de Goussarov-Habiro: Définition

$$\mathcal{M} := \{\mathbb{Z} - \text{sphères de dimension } 3\} / \text{homéo}^+$$

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{M \in \mathcal{M}} \mathbb{Q}.M$$

Filtration de Goussarov-Habiro: $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \supset \dots \supset \mathcal{F}_n \supset \dots$

$G = G_1 \cup \dots \cup G_n$ entrelacs en Y à n composantes dans \mathbb{Z} -sphère M ,

$$[M; G] := \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#J} M_{G(J)} \in \mathcal{F},$$

où $G(J) = \cup_{j \in J} G_j$. Alors

$$\mathcal{F}_n := \langle [M; G]; M \in \mathcal{M}, G \subset M \text{ à } n \text{ composantes} \rangle \subset \mathcal{F}.$$

(n -congruence: $x \stackrel{n}{=} y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{F}_{n+1}$.)

Un invariant numérique $\nu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{Z}$ (\mathbb{Q} ou \mathbb{R}) est de degré au plus n si $\nu|_{\mathcal{F}_{n+1}} = 0$.

1.3. Filtration de Goussarov-Habiro: Diagrammes de Jacobi

([GGP]): Exprime $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n+1}$ comme un espace finiment engendré par des graphes trivalents (diagrammes de Jacobi), et $\mathcal{F}_{2n+1} = \mathcal{F}_{2n+2}$.

→ $(\mathcal{F}/\mathcal{F}_{n+1})^*$ de dimension finie

→ pas d'invariants de degré impair

Exemples 0.1.

● $\mathcal{F}_1 = \langle M_1 - M_2; (M_1, M_2) \in \mathcal{M}^2 \rangle$

→ invariants de degré 0 = invariants constants.

● Invariants de degré 2 : $a_0 + a_1 \lambda_1$, avec λ_1 invariant de Casson, a_0 et a_1 constantes.

Diagramme de Jacobi = graphe trivalent sans boucle avec sommets orientés par ordre cyclique des arêtes.

$$\mathcal{A}_k := \left(\bigoplus_{\Gamma} \mathbb{Q} \cdot \Gamma \right) / AS, IHX$$

où Γ parcourt l'ensemble des diagrammes de Jacobi à $2k$ sommets.

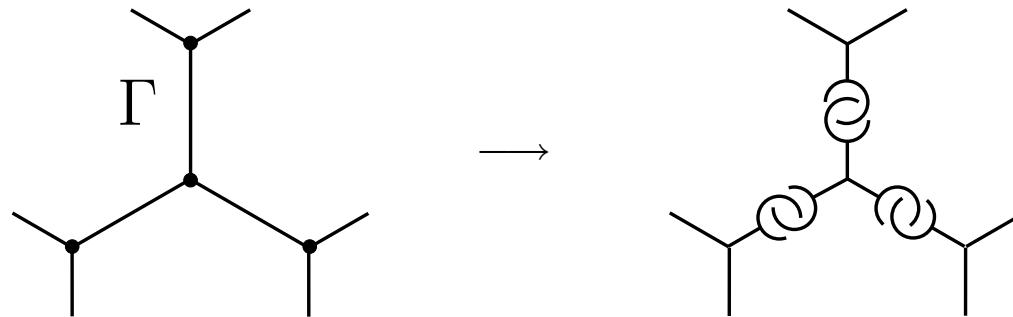
1.3. Filtration de Goussarov-Habiro: Diagrammes de Jacobi

Théorème 1 ([GGP]). *Il existe une application linéaire surjective*

$$\Psi_n : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{F}_{2n} / \mathcal{F}_{2n+1}.$$

De plus, $\mathcal{F}_{2n+1} / \mathcal{F}_{2n+2} = 0$.

(Utilise calcul de claspers= relations de n -congruence sur entrelacs en Y à n composantes)



Théorème 2 ([Le]). Ψ_n est bijective.

(Utilise l'invariant LMO pour exhiber un inverse)

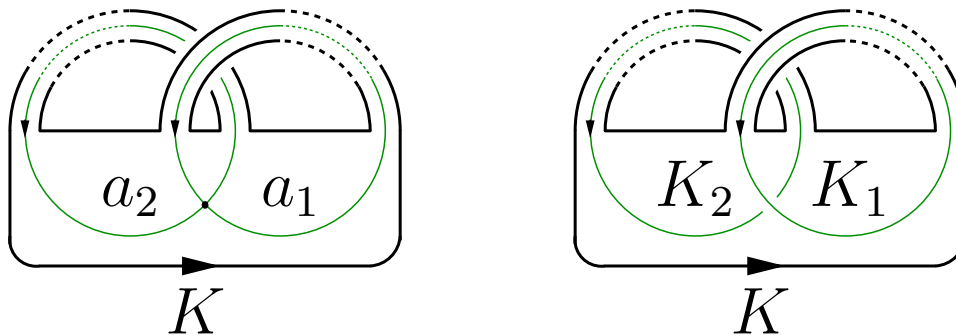
2.1. Formule de chirurgie sur les nœuds

$K \subset M$ nœud dans \mathbb{Z} -sphère,

Formule de chirurgie géométrique pour $\nu =$ expression de $\nu(M_{(K; \frac{1}{q})}) - \nu(M)$ en fonction d'invariants géométriques sur une surface de Seifert de K .

Exemple 0.2. Pour l'invariant de Casson, si Σ est de genre 1, $\ell := lk(K_1, K_2)$ et $p_i := lk(K_i, (K_i)_{//})$, alors

$$\lambda_1(M_{(K; \frac{1}{q})}) - \lambda_1(M) = q(p_1 p_2 - \ell(\ell - 1)).$$



2.1. Objectifs

But: Donner une formule de chirurgie géométrique pour les invariants de degré 4 .

Invariants de degré 4 : $a_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_1^2 + a_3\lambda_2$, avec λ_2 invariant primitif de degré 4 , a_i des constantes.

Il existe des invariants de nœuds $\alpha_i(M; K; n)$ tels que, dans $\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_5$,

$$M_{(K; \frac{1}{q})} - M = \alpha_0(M; K; q) \cdot [M; \Theta] + \alpha_1(M; K; q) \cdot [\Theta^2] + \alpha_2(M; K; q) \cdot [T],$$

où $\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_3 = \langle \overline{[M; \Theta]} \rangle$ et $\mathcal{F}_4/\mathcal{F}_5 = \langle [\Theta^2], [T] \rangle$.

$$\alpha_0(M; K; q) = \frac{1}{2}q\lambda(K)$$

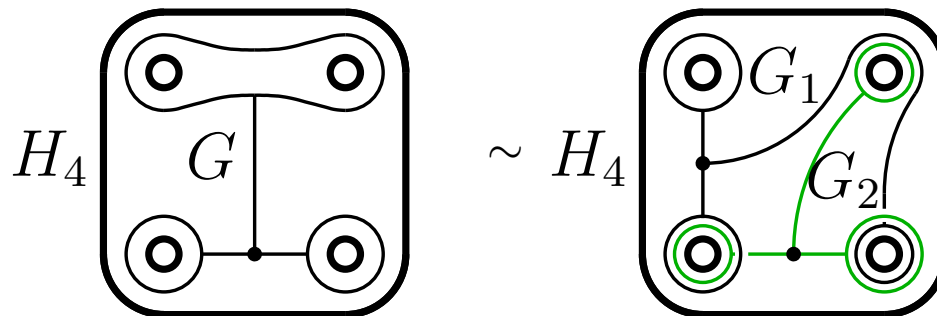
$$\alpha_1(M; K; q) = \frac{1}{8}q^2\lambda^2(K) - \frac{1}{4}q\lambda(K)$$

$$\alpha_2(M; K; q) = ???$$

NB: Les techniques utilisées permettent également d'étudier les invariants de degré $2n + 2$ sur \mathcal{F}_{2n} .

2.2. Idée de preuve de Goussarov

Relations de n -congruence obtenues à partir d'équivalences de chirurgie en Y .



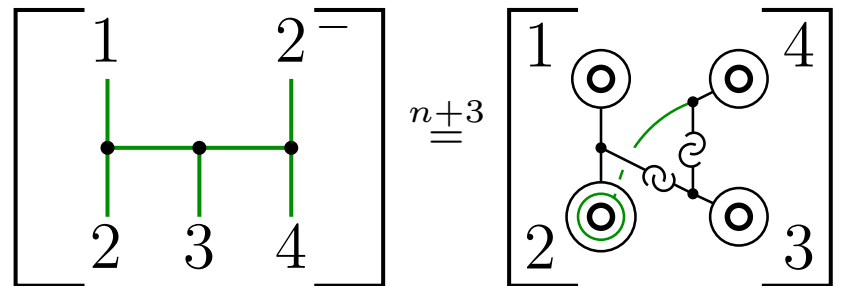
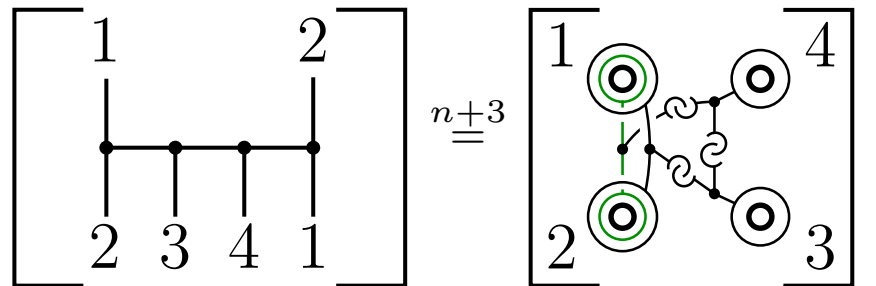
→ si $H_4 \subset M$ et si $G_{(n-1)} \subset (M \setminus H_4)$ entrelacs en Y à $n - 1$ composantes, alors

$$[M; G_{(n-1)} \cup G] \stackrel{n}{=} [M; G_{(n-1)} \cup G_1] + [M; G_{(n-1)} \cup G_2].$$

$$([M; G_{(n-1)} \cup G] = [M; G_{(n-1)} \cup G_1] + [M; G_{(n-1)} \cup G_2] - [M; G_{(n-1)} \cup G_1 \cup G_2]).$$

2.3. Relations de $(n + p)$ -congruence: Conventions

$$H_4 \subset M, G_{(n-1)} \subset (M \setminus H_4)$$



2.3. Relations de $(n + p)$ -congruence: Couper une feuille

Lemme 1.

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{c} \overline{1} \text{---} \text{---} \overline{4} \\ (n) \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \overline{2} \text{---} \text{---} \overline{3} \end{array}} \\
 \end{array}
 \stackrel{n+2}{=}
 \begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ (n) \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}}
 +
 \boxed{\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ (n) \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}} \\
 +
 \boxed{\begin{array}{c} \overline{1} \quad \overline{4} \\ \text{---} \text{---} \\ \overline{2} \quad \overline{3} \end{array}}
 -
 \boxed{\begin{array}{c} \overline{1} \quad \overline{4} \\ \text{---} \text{---} \\ \overline{2^+} \quad \overline{3^+} \quad \overline{2} \quad \overline{3} \end{array}} \\
 -
 \boxed{\begin{array}{c} \overline{1} \quad \overline{4} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \overline{2} \quad \overline{3} \quad \overline{2} \end{array}}
 -
 \boxed{\begin{array}{c} \overline{1} \quad \overline{4} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \overline{3} \quad \overline{2} \quad \overline{3} \end{array}}
 -
 \boxed{\begin{array}{c} \overline{1^+} \quad \overline{4} \quad \overline{1} \quad \overline{4} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \overline{2} \quad \overline{3} \quad \overline{2} \quad \overline{3} \end{array}} .
 \end{array}$$

2.3. Relations de $(n + p)$ -congruence: feuilles spéciales

Théorème 3.

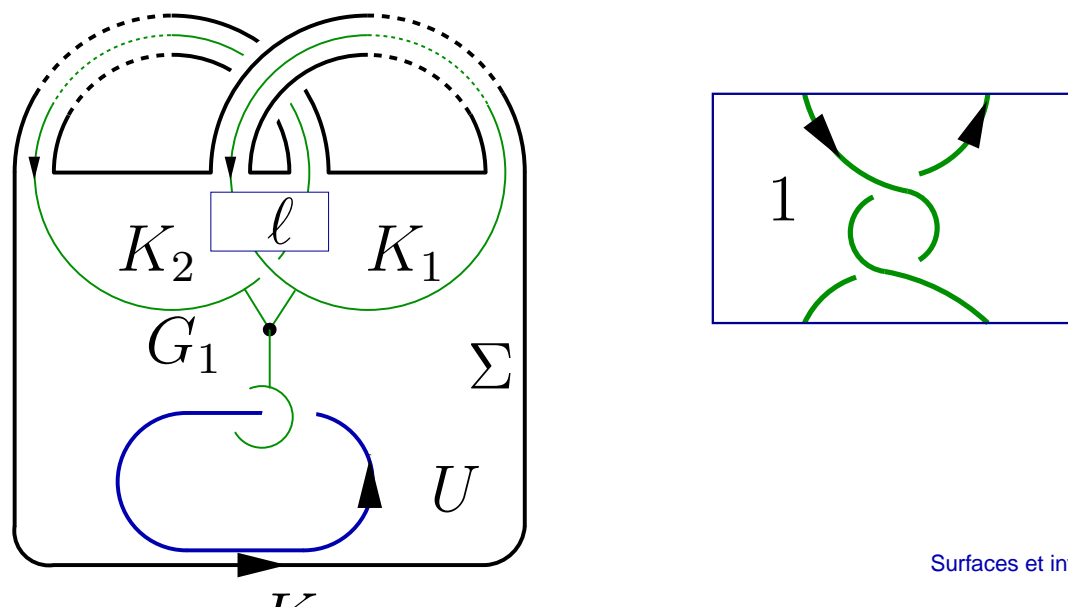
$$\begin{aligned}
 & 8 \left[\begin{array}{c} (n) \\ \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{arc} \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowright \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{arc} \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowright \end{array} \right] \\
 & - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diag} \\ 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{square} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 8 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{triangle} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] \\
 & - 3 \left[\begin{array}{c} \text{arc} \quad \text{arc} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \text{arc} \quad \text{H} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{H} \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

2.4. Formule de chirurgie: Cas du genre 1

Théorème 4. Soit $K \subset M$ un nœud bordant une surface Σ de genre 1. Alors

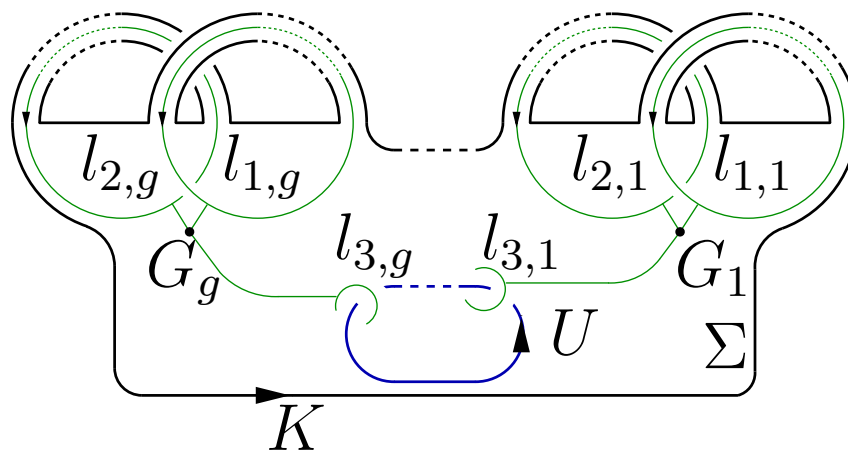
$$\begin{aligned} (M_{(K; \frac{1}{q})} - M) &\stackrel{4}{=} \frac{q}{2} \lambda(K) \cdot [M; \Theta] + \frac{q}{8} \lambda(K) (q\lambda(K) - 2) \cdot [\Theta^2] \\ &+ \left(\frac{q}{2} (2\ell - 1) (\lambda(K_1 \#_b K_2) - \lambda(K_1) - \lambda(K_2)) - qp_1 \lambda(K_2) - qp_2 \lambda(K_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3q}{2} SL(K_1, K_2) + \frac{q}{4} Q(p_1, p_2, \ell) + \frac{q^2}{4} (-1 + 7\lambda(K)) \lambda(K) \right) \cdot [T], \end{aligned}$$

où $\lambda(K) = p_1 p_2 - \ell(\ell - 1)$ invariant de Casson, $SL(K_1, K_2)$ invariant de Sato-Levine et $Q(p_1, p_2, \ell) = (p_1 p_2 - 2\ell(\ell - 1))(p_1 + p_2) - \ell(\ell - 1)(2\ell - 1)$.



2.4. Formule de chirurgie: Genre quelconque

$$[M; K] \stackrel{4}{=} \sum_{i=1}^g [M; G_i] - \sum_{i,j} [M; G_i \cup G_j] + \sum_{i,j,k} [M; G_i \cup G_j \cup G_k] - \sum_{i,j,k,l} [M; G_i \cup G_j \cup G_k \cup G_l]$$



$$\alpha_2(M; K; q) = q \cdot \beta(M; K) + \frac{q^2}{4} \left(7\lambda(K) + 9\lambda^2(K) - \frac{5}{12} \Delta_K^{(4)}(1) \right)$$

2.4. Formule de chirurgie: Genre quelconque

$$\begin{aligned}
 \beta(M; K) = & \frac{1}{2} \sum_i (2L_i - 1)(\lambda(K_{1,i} \#_b K_{2,i}) - \lambda(K_{1,i}) - \lambda(K_{2,i})) \\
 & - \sum_i (p_{1,i} \lambda(K_{2,i}) + p_{2,i} \lambda(K_{1,i})) - \frac{3}{2} \sum_i SL(K_{1,i}, K_{2,i}) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i < j, r, s} (-1)^{r+s} S_{r,i}^{s,j} (\lambda(K_{r+1,i} \#_b K_{s+1,j}) - \lambda(K_{r+1,i}) - \lambda(K_{s+1,j})) \\
 & + \sum_{i \neq j, s} (-1)^s (S_{1,i}^{s,j} - S_{2,i}^{s+1,j}) \mu(K_{1,i}, K_{2,i}, K_{s+1,j}) \\
 & + \sum_{i \neq j, s} \mu(K_{s+1,i}, K_{1,j}, K_{2,j}) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i < j} I(K_{1,i}, K_{2,i}, K_{1,j}, K_{2,j}) \\
 & + R(p_{s,i}, L_{r,i}, S_{r,i}^{s,j}).
 \end{aligned}$$

où $R =$ polynôme explicite

$\mu =$ invariant de Milnor (intersection triple)

$$I(K_{1,i}, K_{2,i}, K_{1,j}, K_{2,j}) =$$

$$2\ell_k(S_{1,i} \cap S_{2,i}, S_{1,j} \cap S_{2,j}) - \ell_k(S_{1,i} \cap S_{1,j}, S_{2,i} \cap S_{2,j}) + \ell_k(S_{1,i} \cap S_{2,j}, S_{1,j} \cap S_{2,i}).$$

3.1. Chirurgies de Torelli

Processus de chirurgie: $(M, D) \rightarrow M_D$

- Chirurgie sur les nœuds parallélisés: $D = (K, \mu) \subset M$
- Chirurgie de Torelli: $D = (\Sigma \subset M, \varphi \in \text{Homéo}(\Sigma))$

But: Si ν invariant de degré n , exprimer $\nu(M_D) - \nu(M)$ en fonction

- système de poids de ν (valeurs sur générateurs de Jacobi)
- invariants géométriques ou topologiques sur D .

Première partie: Formule de chirurgie sur les nœuds pour invariants de degré 4 à partir de surface de Seifert.

(évaluation invariants de degré $2n + 2$ sur éléments de \mathcal{F}_{2n})

Deuxième partie:

ν de degré $2n$, $\varphi = [\varphi_1, [\varphi_2, [\dots, \varphi_{2n}]]] \in (\mathcal{T}_{g,1})_{2n}$, alors

$$\nu(M_{(\Sigma, \varphi)}) - \nu(M) = F_{\nu, \Sigma}(\tau_1(\varphi_i)).$$

3.1. Chirurgies de Torelli

$$\Sigma_{g,1} = \Sigma_g \setminus D, \quad H = H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbb{Z})$$

$$\mathcal{T}_{g,1} = \{\varphi \in \text{Homéo}(\Sigma_g) \mid \varphi|_D = \text{Id}_D \text{ et } H_1(\varphi) = \text{Id}_H\} / (\text{isot. rel. à } D)$$

$\Sigma =$ plongement de Σ_g dans M \mathbb{Z} -sphère, $M = M_- \cup (-M_+)$, $\partial(M_{\pm}) = \Sigma$

$$\forall \varphi \in \mathcal{T}_{g,1}, \quad M_{(\Sigma, \varphi)} := M_- \bigcup_{\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma} (-M_+) \in \mathcal{M}.$$

Série centrale descendante $G_1 = G$, $G_{n+1} = [G_n, G]$

$$G_{(n)} = \{g \in G \mid \exists r \neq 0, g^r \in G_n\}$$

$$([\text{GL}], [\text{GGP}]) \quad \varphi \in (\mathcal{T}_{g,1})_{(n)} \implies M_{(\Sigma, \varphi)} - M \in \mathcal{F}_n.$$

Problème: Exprimer coordonnées de $M_{(\Sigma, \varphi)} - M$ sur système générateur donné par diagrammes de Jacobi.

3.2. Homomorphisme de Johnson

$$\tau_1 : \mathcal{T}_{g,1} \rightarrow \Lambda^3 H$$

Mesure action de φ sur π/π_3 , où $\pi := \pi_1(\Sigma_{g,1})$.

$$\begin{array}{lcl} \pi & \rightarrow & \pi_2/\pi_3 \\ \gamma & \mapsto & \varphi(\gamma)\gamma^{-1} \end{array} \rightsquigarrow \tau_1(\varphi) \in \Lambda^3 H \subset (H \wedge H \otimes H).$$

($H \simeq H^*$ par intersection algébrique \langle , \rangle)

$\tau_1 =$ forme d'intersection triple dans $H_2((\Sigma_{g,1} \times [0, 1])/\varphi; \mathbb{Z})$.

3.3. Chirurgies lagrangiennes

A \mathbb{Z} -corps en anses, $\mathcal{L}_A = \ker(H_1(\partial A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(A; \mathbb{Z}))$: *lagrangien de A*

$A \subset M$ et B tel que $\partial A \simeq \partial B$ avec $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_B$, alors

$$M\left(\frac{A}{B}\right) := (M \setminus \text{Int}(A)) \bigcup_{\partial A \rightarrow \partial B} B \in \mathcal{M}.$$

→ généralise chirurgie en Y et chirurgie de Torelli.

Si $\sqcup_{i=1}^n A_i \subset M$, et (A_i, B_i) paire de chirurgie lagrangienne,

$$[M; (A_i, B_i)_{i=1}^n] := \sum_J (-1)^{\#J} M\left(\frac{A_j}{B_j}\right)_{j \in J}.$$

([AL]) $\mathcal{F}_n^L = \mathcal{F}_n$, et système de coordonnées explicites de $[M; (A_i, B_i)_{i=1}^{2n}] \in \mathcal{F}_{2n} / \mathcal{F}_{2n+1}$ sur générateurs de Goussarov en fonction

- formes triples d'intersection $\mathcal{I}(A_i, B_i) \in \Lambda^3(H_2(A_i \cup (-B_i)))^* \simeq \Lambda^3 \mathcal{L}_{Z_i}$
- formes d'enlacement $\ell k : \mathcal{L}_{Z_i} \times \mathcal{L}_{Z_j} \rightarrow \mathbb{Z}$, où $Z_i = M \setminus \text{Int}(A_i)$.

3.2.Chirurgies lagrangiennes

Chirurgie de Torelli sur φ réalisée par chirurgie lagrangienne sur $N = (\Sigma_{g,1} \times [0, 1]) \subset M$.
Via identification de $\mathcal{L}_{M \setminus \text{Int}(N)}$ avec $H = \mathcal{L}_{M_-} \oplus \mathcal{L}_{M_+}$,

$$\tau_1(\varphi) = \mathcal{I}(N, N^\varphi)$$

Formes d'enlacement réalisées par forme d'intersection sur H et par projection sur les lagrangiens \mathcal{L}_{M_-} et \mathcal{L}_{M_+} .

→ si $\varphi = [\varphi_1, [\varphi_2, [\dots, \varphi_{2n}]]] \in (\mathcal{T}_{g,1})_{2n}$, alors

$$\nu(M_{(\Sigma, \varphi)}) - \nu(M) = F_{\nu, \mathcal{L}_{M_\pm}}(\tau_1(\varphi_i)).$$

3.3. Applications

$$\mathcal{K}_{g,1} := \ker(\tau_1) = (\mathcal{T}_{g,1})_{(2)}$$

- $n = 1$: Invariant de Casson, $\psi \in \mathcal{K}_{g,1}$,

$$\lambda_1(M_{(\Sigma,\psi)}) - \lambda_1(M) = q_{\mathcal{L}} \circ \tau_2(\psi) + d(\psi)$$

- Si $\psi = [\psi_1, [\psi_2, \dots, \psi_n]] \in (\mathcal{K}_{g,1})_n$, ν de degré $2n$ avec système de poids sans Θ , alors

$$\nu(M_{(\Sigma,\psi)}) - \nu(M) = F_{\nu, \mathcal{L}_{M_{\pm}}}(\tau_2(\psi_i)).$$