UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
SCIENCES.TECHNOLOGIE.SANTÉ GRENOBLE - ALPES

Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction

Thèse présentée par

Nathalie Gaudin

pour obtenir le titre de

Docteur de L'université Joseph Fourier – Grenoble 1

Spécialité : Environnements informatiques d'apprentissage humain et didactique des mathématiques.

Soutenue publiquement le 30 juin 2005, devant le jury composé de

Jean Della Dora, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, président
Michèle Artigue, Professeur à l'Université Paris 7, rapporteur
Maria Alessandra Mariotti, Professeur à l'Université de Pise, Italie, rapporteur.
Nicolas Balacheff, Directeur de Recherche au CNRS, Directeur de thèse
Denise Grenier, Maître de Conférence à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1, examinateur

Merci ….

… A mon directeur de thèse, Nicolas Balacheff, pour avoir accepté d'encadrer cette thèse et pour l'avoir fait avec une grande exigence

… A mes rapporteurs, Maria Alessandra Mariotti et Michèle Artigue pour leurs lectures précises et très enrichissantes pour moi

… Aux membres du jury, Jean Della Dora et Denise Grenier. Merci à Jean Della Dora pour le travail de correction de cette thèse, pour les discussions qui ont suivi et pour m'avoir permis de rencontrer les élèves ingénieurs qui ont participé aux expérimentations

… Aux élèves ingénieurs de l'ENSIMAG et aux enseignants stagiaires de l'IUFM de Grenoble pour le temps qu'ils ont consacré aux expérimentations de cette recherche et pour l'enthousiasme avec lequel ils l'ont fait

… A l'équipe did@Tic avec laquelle j'ai pris un grand plaisir à travailler, et à l'équipe des thésards du laboratoire Leibniz, auprès desquels j'ai beaucoup appris

… A ma famille, qui toujours m'a encouragée.

Table des matières :

Annexes :

Introduction

La validation est centrale en mathématiques. Elle occupe donc également une place centrale dans les questions d'apprentissage des mathématiques. Il est ainsi naturel de la trouver au cœur de la Théorie des Situations en didactique de mathématiques, qui constitue aujourd'hui l'un des fondements théoriques du domaine. Il est possible d'entrer dans les questions de validation par une problématique de la preuve, sur laquelle il existe aujourd'hui de nombreux travaux[1]. Il est possible d'entrer par les situations d'apprentissage (comme cela est proposé dans la Théorie des Situations par les situations de validation). Il est aussi possible d'entrer par une problématique des conceptions (Artigue 1990) et c'est ce choix qui a été fait ici.

Notre travail traite de deux questions : d'une part celle du contrôle de l'activité du sujet[2], et d'autre part celle des connaissances de la notion de fonction. En effet, si le fonctionnement des connaissances dans l'activité reste implicite pour le sujet, ce sont elles, en partie au moins, qui règlent les interactions du système. Ce travail mettra en lumière le fonctionnement des connaissances (de la notion de fonction) comme régulateur de l'activité.

Nous consacrerons le chapitre 1 à situer notre problématique relativement à la Théorie des Situations (Brousseau (1986)) et à la Théorie des Champs Conceptuels (Vergnaud (1991)). Nous mettrons en évidence l'importance des questions de validation dans la Théorie des Situations en montrant en particulier que l'incertitude du *jeu* pose toujours, au moins implicitement, la question de la validité. Nous situerons la place qui est donnée aux

[1] « La lettre de la Preuve », http://www.lettredelapreuve.it/, constitue un site de référence sur les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage de la preuve en mathématiques.

[2] en interaction avec un milieu

connaissances dans ce cadre. La théorie des Champs Conceptuels nous permettra de préciser ces aspects, en particulier en expliquant en quoi le concept de schème nous donne des pistes sur la façon dont est organisée la conduite de l'action du sujet en relation à la validation.

Le chapitre 2 s'appuie sur les travaux de Sfard (1992 et 1991) qui pointe un aspect particulier des connaissances de fonction : la fonction comme objet. Nous verrons que l'espace des problèmes dans lesquels « fonction » joue comme objet est un espace privilégié pour l'expression des moyens de validation régissant ce concept.

Le chapitre 3 présentera dans un premier temps l'outil de modélisation « *conception (P, R, L, Σ)* » (Balacheff 1995). Nous définirons ses éléments : Problèmes P, Opérateurs R, systèmes de représentations L et contrôles *Σ*. Nous montrerons comment cet outil nous permet de nous saisir des questions de notre problématique : ces éléments seront présentés comme rendant compte de l'organisation de l'activité du système sujet/milieu. Nous montrerons comment l'activité du système sujet/milieu, réduite à sa dimension **adidactique**, et les connaissances (de la notion de fonction) sont attachées aux différents éléments *P, R, L, Σ*. Nous présenterons un travail (Gaudin 2002) illustrant le fonctionnement de cet outil en montrant le rôle que peuvent avoir les contrôles dans la différenciation des conceptions.

Le chapitre 4 traite des *conceptions* du concept de fonction. Un étude historique, puis un état de l'art nous permettent de caractériser trois *conceptions* de fonction, dans les termes *(P, R, L, Σ)* : une conception courbe, une conception analytique, une conception objet. En particulier, nous utilisons *conception* pour analyser un texte de Baire (1905) illustrant le fonctionnement de deux conceptions, « analytique » et « objet », dans un problème traité par Baire en introduction de son cours sur les « Fonctions Discontinues ».

Le chapitre 5 présente l'analyse a priori du problème choisi pour notre expérimentation. Il s'agit d'un problème d'approximation de fonction. Nous commençons tout d'abord par présenter un aspect des questions d'approximation de fonction en mathématiques. Nous nous sommes limités à l'approximation polynomiale, qui constitue une petite partie du domaine. Cette restriction se justifie par l'étendue du champ, qui dépasse largement nos compétences, et par le fait que l'approximation polynomiale constitue un point d'entrée classique dans l'enseignement universitaire de l'approximation suffisant pour les questions qui nous intéressent. L'usage de Maple[3] a été proposé pour la résolution de ce problème, nous expliquons pourquoi et délimitons les spécificités de cet environnement intervenant dans notre

[3] Système de calcul formel de Maplesoft™, http://www.maplesoft.com.

travail. Ensuite, nous procédons à l'analyse a priori du problème, en développant les stratégies de résolutions associées aux conceptions courbe, analytique et objet.

Dans le chapitre 6 nous présentons en détail le mode expérimental et la méthodologie d'analyse que nous avons construite. Cette méthodologie est un apport important de notre travail. Nous nous sommes attachées à expliciter nos choix et les relations de ces choix à nos questions de recherche.

Le problème a été soumis à des étudiants de deuxième année de l'ENSIMAG[4] et à des stagiaires enseignants de mathématiques de l'IUFM de Grenoble. Le chapitre 7 livre les analyses de 9 binômes ayant participé à l'expérimentation. Pour chacun des binômes, nous concluons l'analyse en positionnant la (ou les) conceptions à l'œuvre relativement aux conceptions « courbe », « analytique » et « objet » et en analysant les rôles et les relations des opérateurs et des contrôles. Ces deux synthèses renvoient aux deux questions de notre problématique.

Le chapitre 8 fait la synthèse des analyses et explicite nos résultats de recherche. Il est partagé en deux volets. Le premier volet donne la caractérisation des éléments des conceptions « courbe », « analytique » et « objet ». Cela nous permet en conclusion d'avancer sur la compréhension de la conception d'une fonction comme objet. Le deuxième volet analyse les fonctionnalités des contrôles référents, des contrôles d'instrumentation et des opérateurs pour l'organisation de l'action du sujet. Nous faisons alors fonctionner cette analyse pour comprendre les disfonctionnements possibles des conceptions.

[4] École Nationale Supérieure d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble, qui est une des école de l'Institut national Polytechnique de Grenoble.

Chapitre 1 : Problématique

1. Introduction :

Nous proposons une relecture orientée vers les questions de validation des travaux de Brousseau (Théorie des Situations) et de Vergnaud (Champs Conceptuels). Ces deux champs nous permettrons d'introduire notre problématique et de dégager les questions de recherche qui nous intéressent.

2. Action, formulation et validation dans la théorie des situations :

2.1 Introduction

La théorie des situations propose une lecture systémique de la relation d'enseignement. Le jeu didactique met en relation le système enseignant, porteur de l'intention d'enseigner une connaissance, et l'élève. Ce jeu est défini par les relations qu'entretiennent trois acteurs : l'enseignant, l'élève et le milieu. Dans ce système, nous nous intéresserons aux relations du sous-système que forme le sujet avec « son » antagoniste le milieu. Pour cela, il nous faut expliquer cette réduction et dégager les relations du système qui intéressent notre travail.

2.2 Le jeu

L'instrument de la modélisation d'une situation d'enseignement dans le cade de la théorie des situations est le ***jeu*.**

> *« Modéliser une situation d'enseignement consiste à produire un jeu spécifique du savoir visé, entre différents sous-systèmes : le système éducatif, le système élève, le milieu, etc.*
>
> *(…) Au regard de la connaissance : le jeu doit être tel que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale : est-ce que connaître telle propriété est le moyen de passer de telle stratégie à telle autre ? » (Brousseau (1986) p. 75).*
> *« (…) Au regard de la situation d'enseignement : « le jeu » doit permettre de représenter toutes les situations observées dans les classes – (sinon les déroulements particuliers) – même les moins « satisfaisants » dès lors qu'elles parviennent à faire apprendre à des élèves une forme de savoir visé » (Brousseau (1986) p. 76).*

Cette modélisation avoue son objectif au travers de la citation suivante de Crozier et Friedman, reprise par Brousseau, :

> *« Si l'on peut… découvrir des stratégies suffisamment stables à l'intérieur d'un ensemble (de personnes) et si l'on peut, d'autre part, découvrir les jeux, les règles du jeu et les régulations de ces jeux à partir desquelles ces stratégies peuvent être effectivement considérées comme rationnelles, on a à la fois, la preuve effective que cet ensemble peut être considéré comme un système et des réponses déjà précises sur son mode de gouvernement » (Brousseau (1986) p. 86).*

Ainsi, la modélisation se doit de rendre compte du fonctionnement (mode de gouvernement) du système. La validité (« *preuve* ») de ce fonctionnement est assurée par la cohérence interne des stratégies identifiées : les stratégies du jeu sont rationnelles, c'est-à-dire qu'elles se réfèrent à des règles qui sont explicatives des stratégies.

Le jeu est appréhendé comme un système en interaction (actions et décisions du joueur, rétroaction du milieu), constitué du joueur et de son antagoniste, le milieu. Les interactions sont régulées du coté du joueur par ses connaissances (règles et stratégies) et du coté du milieu par les contraintes spécifiques de ce milieu.

L'observation de la réalité est la source des hypothèses qui donneront lieu à la modélisation du jeu (les règles et les régulations du jeu) :

> *« C'est seulement par un travail incessant d'analyse de la signification de nombreuses observations naturelles ou provoquées et d'exigences méthodologiques locales et globales que l'on peut relier ces observations aux hypothèses sur les jeux par rapport auxquelles elles sont rationnelles et sur le système didactique qui contient ces jeux » (Brousseau (1986) p. 85).*

2.3 Réduction de notre champ d'étude : les interactions adidactiques du système Sujet/Milieu

> *« Le jeu didactique met en relation un premier joueur : le système éducatif – le maître – porteur de l'intention d'enseigner une connaissance et un second joueur, l'élève ».*

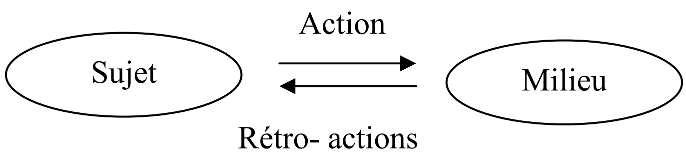
Brousseau montre la nécessité de considérer deux types de jeux distincts :

> *« Les jeux de l'élève avec le milieu adidactique, qui permettent de préciser quelle est la fonction du savoir après et pendant l'apprentissage. Ces jeux sont spécifiques de chaque connaissance ». Ces jeux « fondamentaux » et adidactiques, mettant en présence un milieu et un joueur (sont) tels que le savoir – tel savoir précis – apparaîtra comme le moyen de produire des stratégies gagnantes.*
>
> *« Les jeux du maître en tant qu'organisateur des jeux de l'élève (en tant qu'ils sont spécifiques du savoir visé) » (Brousseau (1986) p. 90).*

La nécessité de l'adidactique est imposée parce qu'il est la finalité du didactique :

> *« A la fin de l'enseignement, le système enseigné sera supposé faire face, à l'aide du savoir appris, à des systèmes dénués d'intention didactiques ».*

Nous avons choisi de nous intéresser aux jeux du sujet[5] avec le milieu adidactique, c'est-à-dire aux jeux spécifiques du savoir, dépouillés de toute intention didactique. Notre système d'étude sera donc celui du sous système :



Dans le jeu adidactique, la réponse du sujet est motivée par les nécessités de ses relations avec le milieu. Le sens d'une décision est donné par l'ensemble des choix envisagés par le sujet et (de facto) rejetés par un choix retenu, par l'ensemble des stratégies possibles envisagées et exclues, par les conditions même du jeu qui déterminent le choix retenu. Ainsi, l'adidactique

[5] Dans la réduction adidactique que nous faisons, nous nous intéressons à la dimension de sujet épistémique de l'élève, et donc nous préférerons l'appeler le sujet plutôt que l'élève.

est à la fois un moyen et une catégorie **nécessaire à l'étude de la relation didactique**. C'est sur ce jeu que portera notre travail.

2.4 Nécessité d'envisager divers types de situations adidactiques

Brousseau établit une classification des interactions du sujet avec le milieu, une classification des types d'organisations de ce milieu et une classification des types de fonctionnement d'une connaissance.

Ces classes se correspondent :

> *« Un certain type d'interaction est spécifique d'un type d'organisation sociale et matérielle, il favorise une certaine forme de connaissance et peut aussi la faire évoluer » (Brousseau (1986) p. 94).*

Nous allons expliciter ces correspondances en axant notre regard sur le fonctionnement de la connaissance, sur lequel porte notre intérêt, sans nous attacher cependant à leur donner un caractère spécifique.

<u>Les interactions du sujet avec le milieu</u> :

Les relations du sujet avec le milieu sont classées en trois grandes catégories :

- *« les échanges de jugement*
- *les échanges d'informations codées dans un langage*
- *les échanges d'informations non codées ou sans langage »* (par exemple une action sur un milieu matériel comme déplacer un objet).

Brousseau dégage trois aspects des interactions sujet/milieu, qui se distinguent par l'utilisation ou non d'informations codées d'une part, et une opposition action/jugement d'autre part. Ces deux distinctions sont de natures profondément différentes : les informations codées peuvent être utilisées pour porter un jugement ou engager une action. Ainsi, les relations sujet/milieu relèvent de l'action ou du jugement (des décisions, des affirmations de validité) et impliquent l'usage de langage codés ou non. Dans un problème de mathématiques du type de celui qui nous intéresse dans ce travail (recherche de l'approximation d'une fonction) nous pouvons nous attendre à ce que l'essentiel des échanges d'information implique l'utilisation d'un langage codé.

Différents types d'organisation du milieu :

Les différents types d'organisation du milieu sont décrits par trois schémas : celui de l'action, celui de la formulation et celui de la validation. Nous allons décrire les grandes lignes de chacun d'entre eux.

Le schéma de l'action est celui du jeu. Il répond à un critère d'adidacticité (le milieu est-il perçu comme dénué d'intentions didactiques ?). Il est problématisé par un ensemble de questions portant sur les actions et rétroactions qui caractérise le système sujet/milieu :

> *« L'élève a-t-il choisi un état parmi plusieurs possibilités ? Le sujet peut-il perdre ? Connaît-il les règles du jeu sans connaître la stratégie gagnante ? La connaissance visée est-elle nécessaire pour passer d'une stratégie de base à une stratégie meilleure ? Les contrôles de décisions sont-ils possibles ? » (Brousseau (1986) p. 102).*

Le schéma de l'action est problématisé en termes d'état du jeu, cet état prend son sens au sein des états possibles. Le jeu est adidactique, c'est-à-dire que les règles du jeu, les stratégies, les rétroactions du milieu sont sous les contraintes de la connaissance visée. Il renvoie donc aux décisions du sujet et pose ainsi la question du contrôle de ses décisions, traité par le schéma de la validation, qui implique, nous allons le voir, l'existence de celui de la communication. Le schéma de l'action est donné par l'ensemble des états effectifs et des états possibles du jeu (adidactique).

Le schéma de la formulation exposé par Brousseau est celui d'un milieu organisé pour la formulation de messages par le sujet. Pour cela, il met en jeu un nouveau joueur, récepteur de ces messages (éventuellement aussi émetteur et exécutant), par l'intermédiaire duquel le sujet agit sur le milieu.

> *« Les messages échangés sont sous le contrôle des codes linguistiques, formels ou graphiques. L'enjeu de la communication s'exprime par les rétroactions qu'exercent l'un sur l'autre les deux interlocuteurs, pour s'assurer qu'ils se sont compris. Leurs exigences porteront sur la conformité du code, l'ambiguïté, la redondance, le manque de pertinence et l'efficacité ».*

Ce schéma fournit des prescriptions pour l'ingénierie : il indique des contraintes par lesquelles il est possible d'assurer l'émergence d'interactions du système sujet/milieu nécessitant l'utilisation d'informations exprimées dans un (ou plusieurs) langage(s) avec ses (leurs) spécificités et ses (leurs) expressivités particulières. Dans le modèle, la présence d'un autre joueur B permet de questionner ces échanges d'informations. On peut remarquer qu'une situation dans laquelle un sujet doit résoudre un problème de mathématiques (engageant souvent plusieurs systèmes de représentation) nécessite l'utilisation, le contrôle, la transformation de ces systèmes.

Le schéma de la validation met en présence deux joueurs qui s'affrontent à propos d'un objet d'étude composé des messages et descriptions que le sujet a produit d'une part, et du milieu adidactique qui sert de référent à ces messages d'autre part. Les deux joueurs sont alternativement un « proposant » et un « opposant » ; ils échangent des assertions, des preuves et des démonstrations à propos de ce couple « milieu/message » (par exemple, un problème accompagné de ses tentatives de solutions). (…) Brousseau affirme que

> *« La didactique se trouve devant le défi de produire des situations qui permettront à l'élève de mettre en œuvre les savoirs et les connaissances mathématiques comme moyens effectifs de convaincre (et donc de se convaincre) tout en le conduisant à rejeter les moyens rhétoriques qui ne sont pas de bonnes preuves ou réfutations» (Brousseau (1986) p. 108).*

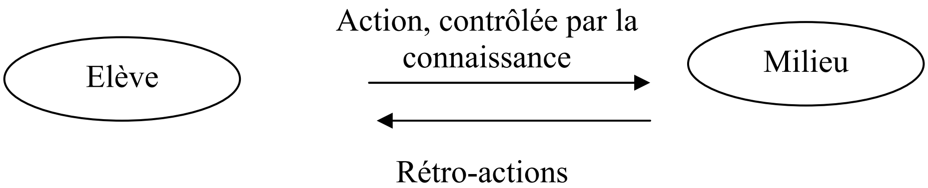
Le schéma de la validation occupe une position tout à fait privilégiée dans la théorie des situations : il est le critère de l'apprentissage, qui vise à ce que le sujet mette ses actions (qui engagent éventuellement la manipulation de systèmes langagiers) sous le contrôle de sa connaissance mathématique.

<u>Les formes de connaissances</u> :

Brousseau définit les connaissances comme les moyens, dans le jeu du sujet avec le milieu,

> *« d'appréhender les règles et les stratégies de bases, puis les moyens d'appréhender les règles et les stratégies gagnantes et obtenir le résultat recherché» (Brousseau (1986) p. 65).*

Les (formes de) connaissances sont ce qui « *contrôle les interactions du sujet* » avec le milieu :



Brousseau distingue les formes de connaissances explicites des formes implicites, ou des formes linguistiques. En cela, il nous semble que Brousseau abandonne la structure action/formulation/validation.

> *« Les formes de connaissances qui permettent de contrôler explicitement les interactions du sujet relatives à la validité de ses déclarations, sont principalement ces formes de savoir exprimables et reconnues comme telles par le milieu. Elles sont organisées en théories, en démonstrations et définitions bien déterminées sous leur forme culturelle la plus achevée. (…) Nous admettrons en première approche que les connaissances explicitables et les savoirs interviennent de façon comparable dans le contrôle des jugements de « l'élève ». Ils forment en quelque sorte le « code » à l'aide duquel il construit, justifie, vérifie et démontre ses déclarations de validité. Cette justification se réfère à la fois à la conviction profonde de l'élève et à la convention sociale acceptée. (…) Pour l'instant elles (les connaissances) restent assez inaccessibles à l'analyse scientifique et a fortiori au sujet lui-même. On peut les supposer elles aussi gérées par des représentations, des schèmes épistémologiques et cognitifs, des modèles implicites.*
>
> *(…) Un jugement est composé :*
>
> *d'une description ou modèle exprimé dans un certain langage (ou dans une certaine théorie) renvoyant éventuellement à une réalité (c'est-à-dire au dispositif du jeu en cours),*
>
> *et d'un jugement sur l'adéquation de cette description, sur son caractère de contingence ou de nécessité ou sur sa consistance au regard du sujet et du milieu. »*

Les connaissances implicites (représentations, théorèmes en actes, schèmes, savoir faire) sont difficilement accessibles.

> *« Les régularités de comportement peuvent donner accès à ce type de modèle implicite »*

(ce que la psychologie appelle des invariants de conduite qui caractérisent les schèmes).

Les connaissances permettent d'exprimer des descriptions du jeu (en cours) et des déclarations de validité de ces descriptions (« *jugements* »), d'engager des actions — sous les contraintes spécifiques du jeu. La relation qu'entretiennent les formes de connaissances avec la classification des types d'interactions et des types d'organisation du milieu reste implicite. Si les formes linguistiques se distinguent et se réfèrent clairement aux informations codées des interactions et aux situations de communication, **les notions de formes explicites et implicites de connaissances se superposent, ne se distinguent pas dans leurs fonctions relativement aux situations de validation et d'action.** Elles ne permettent donc pas de distinguer action et validation, et d'analyser les relations qui les lient. Nous proposerons dans cette thèse une autre entrée sur les connaissances, qui permettra de structurer les aspects relatifs à l'action, à la formulation et à la validation.

2.5 Conclusion

Les interactions constituent le matériau pour l'étude du sous système adidactique sujet/milieu. Dans ce jeu, les connaissances sont envisagées comme les moyens d'appréhender les règles et les stratégies gagnantes et d'obtenir le résultat recherché. L'interprétation des situations problèmes en terme de jeu justifie la correspondance entre comportement et connaissances : les interactions du système qui définissent le jeu adidactique sont sous la contrainte des connaissances.

Trois dimensions des relations du système – action, formulation, validation – structurent les interactions, les connaissances et les types de milieux adidactiques. Nous proposons d'explorer comment les connaissances répondent aux exigences d'action, de formulation et de validation.

Si le fonctionnement des connaissances dans l'activité reste implicite pour le sujet (et pour l'observateur), ce sont bien elles qui règlent l'activité du sujet. Nous avons donc beaucoup à apprendre de leur mode de fonctionnement. C'est pourquoi nous nous proposons d'orienter notre recherche sur cet aspect que nous parait fondamental : la mise en lumière du fonctionnement des connaissances comme **régulateur de l'activité**.

Dans les expressions de la connaissance, les jugements semblent fortement liés aux caractéristiques du milieu qui donne une importance à la question de savoir si une action (ou son résultat) est valide. En fait, et la métaphore du jeu nous permet de l'affirmer, l'incertitude du jeu pose toujours, au moins implicitement, la question de la validité. En effet, la dévolution du jeu à l'élève par le professeur met au centre des interactions sujet/milieu les questions de validité :

> *« L'enseignement (...) est la dévolution à l'élève de la responsabilité de l'usage et de la construction du savoir » (Brousseau (1986) p . 65),*

c'est-à-dire que le sujet fait le choix de ses actions et décide de leur capacité à résoudre un problème sous des contraintes dépourvues d'intentions didactiques et spécifiques du savoir en jeu.

Brousseau distingue parmi les jugements, ceux qui portent sur la validité syntaxique de ceux qui portent sur la validité sémantique, ou encore sur la validité pragmatique (Brousseau

(1986) p. 96). Les différentes natures de ces jugements sont fortement liées à la nature des situations : l'invitation à la production d'une preuve amène à prendre en charge des questions sur la structure de l'organisation des arguments de la preuve (Pedemonte 2002) ; un problème, comme celui que nous traitons dans ce travail, qui pose la question de construire les critères définitoires de la notion d'approximation, met l'accent sur la validité sémantique de ces critères. Quant à la validité pragmatique de l'« *appréciation sur l'efficacité d'un énoncé* » (Brousseau (1986) p. 96), elle mérite d'être précisée. Elle renvoie à la capacité du sujet à évaluer l'adéquation du résultat d'une action au résultat attendu, à lire l'information, à évaluer la validité (locale) de l'action en cours… Nous y reviendrons.

3. Le concept de schème pour la compréhension des processus de conceptualisation

3.1 Introduction

Vergnaud offre un pont entre la théorie des situations et les problématiques de conceptualisation. En rappelant l'importance des situations dans les processus de conceptualisation, il a permis à la didactique d'avancer dans la compréhension des connaissances qui guident l'activité mathématique du sujet. Les connaissances sont abordées par le concept de schème, emprunté à la psychologie et notamment à Piaget. Les invariants opératoires en sont un élément important car ils offrent un modèle de la conduite de l'activité. Si ces invariants opératoires portent leur attention sur les procédures mises en œuvre dans l'activité du sujet, nous montrerons cependant en quoi le concept de « schème » pose aussi la question des moyens de contrôles de ces procédures.

3.2 Le concept de schème

> *« C'est lui (Piaget), davantage que tout autre psychologue, qui a su dénicher les connaissances sous-jacentes à l'activité de l'enfant en situation, et les fausses connaissances qu'immanquablement cette activité engendre » (Vergnaud (2002) p. 108).*

> *« Le couple conceptuel « schème/situation » est la clef de voûte de la psychologie cognitive et de la théorie de l'activité : pour cette raison simple que, la connaissance étant adaptation, ce sont les schèmes qui s'adaptent et ils s'adaptent à des situations » (Vergnaud (2002) p. 110).*

Vergnaud signale que le travail de Piaget n'a pas pris en compte la dualité qui lie schème et situation. Il propose de préciser une définition du schème qui atteste de cette relation :

« C'est à travers des situations et des problèmes qu'un concept acquiert du sens pour un enfant. Si l'on veut prendre la mesure de la fonction adaptative de la connaissance, on doit accorder une place centrale aux formes qu'elle prend dans l'activité du sujet. La connaissance opératoire du sujet est opératoire ou n'est pas. (...) Appelons « schème » l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données. C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances en actes du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire » (Vergnaud (1990) p. 135-136 RDM[6]).

Ainsi, un schème comporte nécessairement quatre dimensions :

« un ou plusieurs buts avec leur cortège de sous buts et d'anticipations,

des règles d'action, de prise d'information et de contrôle

des invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte) permettant à la fois la prise et le traitement de l'information pertinente,

des possibilités d'inférences » (Vergnaud (2002) p. 114).

3.3 La dimension opératoire d'un schème

Les travaux de didactique qui ont fait suite à la Théorie des Champs Conceptuels ont souvent centré leur attention sur les invariants opératoires. Une raison en est que c'est dans l'invariance de la conduite que l'on va lire les caractéristiques de la connaissance. Par ailleurs, Vergnaud, dans un souci de prise en compte du caractère adaptatif de la connaissance, centre lui aussi son attention sur le caractère **opératoire** de la connaissance.

« Ce sont les situations qui donnent leur sens aux concepts par le biais de l'activité du sujet apprenant, ce sont les concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte contenus dans les schèmes qui permettent de ***traiter*** *ces situations » (Vergnaud (2002) p. 118).*

Ceci est frappant dans l'exemple du schème de la résolution des équations de la forme « ax + b = c » à propos duquel il dit :

(Nous soulignons) « La suite des écritures effectuées par les élèves montre clairement une organisation invariante, qui repose à la fois sur des habitudes apprises et sur des théorèmes comme les suivants :

« On conserve l'égalité en soustrayant b des deux côtés »

« On conserve l'égalité en divisant par a des deux côtés »

[6] Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des Mathématiques*, vol. 10 (2-3), 133-170.

> *Le fonctionnement cognitif de l'élève comporte des opérations qui s'automatisent progressivement (changer de signe quand on change de membre, isoler x d'un coté du signe d'égalité) et des décisions conscientes qui permettent de tenir compte des valeurs particulières des variables de situation. La fiabilité du schème pour le sujet repose en dernier ressort sur la connaissance qu'il a, explicite ou implicite, des relations entre l'algorithme et les caractéristiques du problème à résoudre* » *(Vergnaud (1990) p. 141).*

Ainsi, le schème est modélisé par l'explicitation des opérations rendant compte du fonctionnement du sujet et l'identification de théorèmes en acte rendant compte de l'organisation de ces opérations. L'accent est mis sur l'opérationnalité des schèmes (invariants opératoires). La description du schème comporte une explicitation des opérations invariantes.

3.4 Le contrôle associé à l'opérationnalité d'un schème

Vergnaud signale l'existence de théorèmes en acte qui justifient la légitimité des opérations de résolution des équations du premier degré (« *on conserve l'égalité…* »). Ces théorèmes (en acte) trouvent leur justification théorique du côté des mathématiques et leur justification épistémique du coté de la régularité des procédures engagées et de leur caractère explicatif dans un grand nombre de situations d'un même champ. On peut cependant interroger la valeur épistémique de ces théorèmes, en s'imposant de maintenir leur valeur explicative sur les invariants opératoires : est-ce en se garantissant de conserver l'égalité que les élèves s'autorisent à soustraire b de chaque coté de l'égalité ? Existe-t-il d'autres « raisons » à la mise en œuvre de ces opérations ? On peut supposer par exemple que ces opérations ne se réfèrent pas à la conservation de l'égalité mais à des propriétés plus locales de transformations des écritures. Bien sûr, dans cet exemple, le propos de Vergnaud n'est pas de prendre en charge ces questions, et l'association du théorème en acte aux opérations menées va en quelque sorte de soi.

Nous cherchons quant à nous à pointer que l'identification d'un théorème en acte, tel que celui de la conservation de l'égalité, implique que l'on puisse assumer une réfutation de ce théorème et sa substitution par d'autres, alors que les observables resteraient les mêmes. Cela pose donc la question des raisons qui autorisent les opérations. Il est donc essentiel d'interroger la nature des contrôles qui sont associés aux opérations.

Vergnaud souligne aussi l'importance des « *décisions* » qui permettent de tenir compte des variables de la situation (…)

> *« La définition du schème comme organisation invariante me conduit à préciser que c'est l'organisation qui est invariante, non pas l'activité ni la conduite : le schème n'est pas un stéréotype, l'algorithme non plus. Un schème engendre une diversité de conduites et d'activités selon les caractéristiques particulières des situations rencontrées. Cette fonction d'adaptation aux situations conduit à identifier dans le schème des règles SI… ALORS… qui relient les actions à des conditions ou circonstances » (Vergnaud (2002) p. 110).*

Vergnaud suggère que le schème intègre des règles qui permettent d'adapter l'organisation de l'activité aux caractéristiques particulières de la situation. Vergnaud souligne aussi l'importance de la connaissance qu'a le sujet des relations entre l'algorithme et le problème (cette connaissance étant liée à la fiabilité du schème pour le sujet).

Nous dirions – nous y reviendrons – que la mise en œuvre des invariants opératoires nécessite un « moyen » d'instrumentation des opérations en vue de leur mise en œuvre dans une situation particulière, ainsi qu'un contrôle des conditions sous lesquelles une opération est appropriée à la résolution d'un problème.

> *« La prise d'information et le contrôle sont des conditions essentielles de l'efficacité de l'action » (Vergnaud (2002) p. 120).*

Vergnaud illustre la nécessité de la prise d'information avec l'activité de dénombrement pour laquelle ont constate que certains enfants (cérébro-lésés), ne parvenant pas à organiser la séquence des regards nécessaires, échouent à assumer la correspondance biunivoque entre les objets et la suite des nombres-mots. Cet exemple montre bien l'importance de la prise d'information pour mener l'activité. Il ne développe cependant pas ce qu'il appelle « contrôle » de l'action. Nous suggérerions qu'il existe dans l'activité de dénombrement au moins un contrôle implicite de l'activité qui garantit la bonne organisation de la séquence des regards : s'assurer, par exemple, de passer en revue tous les objets est un contrôle qui garantit le bon résultat.

Il évoque cependant quelques lignes plus bas la notion de « conscience » développée par Vigotsky :

> *« Il (Vigotsky) distingue deux niveaux de conscience, celui qui permet de faire, et qui conditionne la réussite (conscience avant), et celui qui permet de revenir sur les raisons de la réussite ou de l'échec, et qui conditionne la stabilisation et l'explicitation des connaissances (conscience après). Si l'on rapproche cette analyse de celle de Piaget, on peut dire que la « conscience avant » est nécessaire pour réussir, la « conscience après » pour comprendre et débattre avec autrui des conditions de la réussite » (Vergnaud (2002) p. 121).*

Nous voyons ici la dialectique du contrôle et du faire. Dans cette dimension du contrôle, l'identification des conditions de la réussite du faire est une caractéristique essentielle de la conceptualisation. C'est elle qui permettra la construction d'une association du faire à la situation, ou les adaptations du faire aux conditions particulières d'une situation nouvelle.

3.5 Les dimensions de situations, invariants opératoires et systèmes de représentations

Vergnaud (1990) propose de modéliser un concept par un triplet de trois ensembles : C = (S, I, $\mathcal{S}$)

S : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)

I : l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié)

$\mathcal{S}$: l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés et les procédures de traitement (le signifiant)

Les invariants opératoires : ils rendent comptent du caractère nécessairement opératoire de la connaissance. Mais, comme nous l'avons souligné plus haut, les invariants opératoires (dimension opératoire des schèmes) regroupent une conduite et son organisation ; cela pose la question des raisons qui autorisent les actions, ainsi que la question des décisions qui permettent la prise en compte des variables particulières d'une situation pour la mise en œuvre de ces actions, et enfin la question de la bonne adéquation des actions au problème, c'est-à-dire la question du choix de ces actions.

Les situations : A ce sujet, Vergnaud retient deux idées principales.

Celle de variété : il existe une grande variété de situations dans un champ conceptuel donné, et les variables de situation sont un moyen de générer de manière systématique l'ensemble des classes possibles.

Celle d'histoire : les connaissances des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées et maîtrisées progressivement, notamment par les premières situations susceptibles de donner du sens aux concepts et aux procédures qu'on veut leur enseigner.

Les signifiants : Vergnaud propose une entrée fonctionnelle, en cherchant les fonctions cognitives du langage et des représentations symboliques dans l'activité mathématique. Il identifie :

- l'aide à la désignation et donc à l'identification des invariants : objets, propriétés, relations, théorèmes ;

- l'aide au raisonnement et à l'inférence ;
- l'aide à l'anticipation des effets et des buts, à la planification et au contrôle de l'action.

Vergnaud montre ainsi la nécessité de considérer conjointement les trois plans pour étudier le développement et le fonctionnement d'un concept. Notre travail suit celui de Vergnaud dans cette prise en compte.

3.6 Conclusion

> *« On ne peut théoriser sur l'apprentissage des mathématiques ni à partir du seul symbolisme, ni à partir des situations seulement. Il faut considérer le sens des situations et des symboles. La clef est de considérer **l'action du sujet en situation, et l'organisation de sa conduite**. D'où l'importance accordée au concept de schème.*
>
> *Totalité dynamique et fonctionnelle, le schème n'en appelle pas moins l'analyse. S'il **organise la conduite** du sujet, il comporte des **règles d'action** et des **anticipations**. Mais cela n'est possible que parce que fait partie intégrante du schème une **représentation implicite ou explicite du réel**[7] analysable en termes **d'objets, de catégories en acte (propriétés et relations) et de théorèmes en acte**. Ces invariants opératoires **organisent** la recherche de l'information pertinente en fonction du problème à résoudre ou du but à atteindre, et pilote les inférences. Le fonctionnement du sujet en action dépend de l'état de ses connaissances, implicites ou explicites » (Vergnaud (1990) p. 167).*

Le schème organise la conduite de l'action. Cela signifie qu'il comprend à la fois les règles d'action, et les moyens de leur mise en œuvre. Parmi ces moyens on trouvera un jugement d'adéquation de l'action et du problème (cette adéquation concerne à la fois la reconnaissance de l'appartenance du problème à une classe et la prise en compte des caractéristiques particulières du problème traité) ; l'anticipation de l'action et l'adéquation du résultat obtenu à celui attendu ; la prise d'information. Nous proposons de clarifier les dimensions d'action et de moyens de contrôle de l'action, regroupées ici sous le même concept de schème, ainsi que leurs relations très étroites. Nous différencierons donc l'action et son contrôle. Notre entrée est celle des connaissances dont dépend le fonctionnement du sujet en action. A la suite de Vergnaud, action et contrôle seront explorés en relation au problème et aux systèmes de représentation (langagiers et symboliques) engagés dans la résolution de ce problème.

[7] Dans ce travail, *réel* est caractérisé par le jeu adidactique du système sujet/milieu.

4. Notre problématique de travail

Notre objectif principal est donc d'avancer dans la mise en lumière du fonctionnement des connaissances en tant que **régulateur et organisateur de l'activité** (jeu adidactique du système sujet/milieu). Nous avons vu que dans les expressions des connaissances, les jugements sont fortement liés aux caractéristiques du milieu qui donnent une importance à la question de savoir si le choix et le résultat d'une action sont valides. **Le sujet fait le choix de ses actions et décide de leur capacité à résoudre un problème sous des contraintes dépourvues d'intentions didactiques et spécifiques du savoir en jeu**.

Nous clarifierons les dimensions d'action et de moyens de contrôle de l'action, ainsi que leurs relations très étroites. Nous différencierons donc l'action et son contrôle. Action et contrôle seront explorés en relation aux problèmes et aux systèmes de représentation (langagiers et symboliques). Ces points seront développés dans l'exposé de notre cadre théorique (modèle cK¢ (Balacheff 1995)).

Nous traiterons le cas de la résolution d'un problème mettant en jeu le concept de fonction qui a conduit les sujets à construire des critères définitoires de la notion d'approximation. Notre ambition est donc de prendre en charge les questions suivantes :

Quelles sont les relations qui lient les dimensions d'action et de contrôle des connaissances dans la conduite de l'activité du sujet ? En particulier, comment sont pris en charge les questions de reconnaissance de l'appartenance du problème traité à une classe de problèmes, de prise en compte des caractéristiques particulières du problème traité, d'anticipation de l'action, d'adéquation du résultat obtenu à celui attendu et de prise d'information ?

En quoi le concept de fonction contraint le jeu action/contrôle de la connaissance pour la résolution de problèmes ?

Nous commencerons par regarder sous cette problématique les travaux de Sfard qui nous permettront de faire des hypothèses sur les relations des contrôles et avec l'aspect « objet » du concept de fonction. Puis nous développerons le cadre théorique qui nous permettra de prendre en charge nos questions de recherche. Ce sera le propos des deux chapitres suivants.

Chapitre 2 : Fonction comme « objet » et problématique de la validation

1. Introduction

Nous proposons dans un premier temps une lecture des travaux de Sfard (1991) sur les conceptions structurelles et opératoires d'un concept mathématique, et reprenons l'illustration qu'elle en fait dans le cas du concept de fonction. Le cadre de recherche de Sfard se différencie fortement de notre problématique, qui est orientée sur l'activité du sujet. Cependant, ses travaux nous permettront d'émettre une hypothèse de travail pour notre problématique.

2. Conceptions structurelles et opératoires d'un concept

Sfard fixe son objectif : quelles spécificités du savoir mathématique faut-il prendre en compte pour en favoriser l'apprentissage ?
Elle différencie concept et conception :

> *"Two different words will be used to denote the building blocks of mathematics: the word « concept » will be mentioned whenever a mathematical idea is concerned in its "official" form – as a theoretical construct within 'the formal universe of ideal knowledge'; the whole cluster of internal representations and associations evoked by the concept – the concept's counterpart in the internal, subjective 'universe of human knowing' – will be referred to as a conception".*

Cette distinction est celle faite en France par les termes savoir et connaissance, qui atteste des natures différentes entre le savoir de référence et la connaissance d'un sujet.

Elle distingue deux natures différentes de conceptions (d'un concept) : structurelle et opératoire. La conception structurelle traite un concept comme un objet, une structure statique susceptible d'être manipulée, alors que la conception opératoire renvoie au caractère algorithmique, procédural, opératoire de ce concept. Elle dit à ce propos,

> *thus, whereas the structural conception is static, instantaneous, and integrative, the operational is dynamic, sequential, and detailed (p 4).*

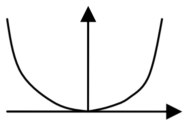
La capacité à percevoir un concept dans ses aspects structurel et opératoire est indispensable pour une bonne compréhension et un bon usage.
Sfard annonce aussi qu'il existe un saut important entre les dimensions structurelle et opératoire d'une conception qui nécessite une prise en compte pour l'apprentissage : l'opératoire précède le structurel dans la conceptualisation et cette hiérarchisation doit être prise en compte par l'enseignement. Cette affirmation est justifiée en particulier, nous le verrons plus loin, par l'analyse historique du développement du concept de fonction.

2.1 Cas du concept de fonction

2.1.1 Distinction structurel/opératoire par le mode de définition du concept de fonction :

La définition d'une fonction comme un ensemble ordonné de couples (Bourbaki 1934) est structurelle selon Sfard, alors qu'une description en termes de méthode, processus, permettant d'obtenir un ensemble à partir d'un autre est opératoire. Ainsi, c'est entre autre le caractère non opératoire de la définition bourbakiste qui définit la dimension structurelle.

Distinction structurel/opératoire par le mode de représentation du concept de fonction :
Les différents modes de représentations d'une fonction sont susceptibles de renvoyer à un caractère opératoire ou structurel. Elle donne l'exemple des trois représentations suivantes d'une fonction :

Graph	Algebraic expression	Computer program
	$y = 3x^4$	INPUT X Y = 1 FOR I = 1 TO 4 Y = Y*X NEXT I Y = 3*Y

Elle explique que

> *"the computer program seems to correspond to an operational conception rather than to a structural, since it presents the function as a computational process, not as an unified entity. In the graphic representation, on the other and, the infinitely many components of the function are combined onto a smooth line, so they can be grasped simultaneously as an integrated whole; the graph therefore encourage a structural approach. The algebraic representation can easily be interpreted both ways: it may be explained operationally, as a concise description of some computation, or structurally, as a static relation between magnitudes (this duality of interpretation corresponds to the already widely noticed and discussed dual meaning of the equality sign: "=" can be regarded as a symbol of identity, or as a "command" for executing the operations appearing at its right side" (Sfard (1991) p. 9).*

Sfard atteste donc ici de l'importance des représentations dans la caractérisation des conceptions structurelle et opératoire. Elle fait implicitement mention de l'usage qu'il est fait de ces représentations. Si celles-ci sont, semble-t-il, envisagées en soi, en dehors des problèmes dans lesquels elles sont mises en œuvre, les explications de Sfard ne donnent cependant pas une distinction opératoire/structurelle intrinsèque. Cette distinction se rapporte à des situations. Cette référence est inévitable, même si cela n'est pas attesté par Sfard. Nous avons mis en évidence, lors de l'étude des travaux de Brousseau et Vergnaud dans le chapitre précédent, l'importance des situations dans les processus de conceptualisation : les conceptions ne sont pas une propriété du sujet mais bien du système sujet/milieu. Nous nous différencions fortement de Sfard sur cet aspect.

2.1.2 Complémentarité des conceptions structurelle et opératoire

Les conceptions structurelle et opératoire de la notion de fonction se complètent plus qu'elles ne s'opposent :

> *« the terms operational and structural refer to inseparable, through dramatically different, facets of the same thing » (Sfard (1992), p.9).*

La résolution d'un problème nécessite de naviguer de l'une à l'autre. Nous allons voir comment.

2.2 Différents rôles des conceptions structurelle et opératoire d'un concept

2.2.1 Le rôle des conceptions structurelle et opératoire dans la formation (historique) des concepts

Sfard montre que, dans la formation du concept de fonction, l'opératoire précède le structurel. Elle situe l'apparition de la notion de fonction au $17^{\text{ième}}$ siècle (Leibniz, en 1692), après une longue période de recherche d'un modèle mathématique des phénomènes physiques engageant des variations. Cette apparition est liée au développement du symbolisme algébrique : la notion de fonction est associée à celle d'un processus algébrique (Euler (1747) définit la fonction comme une expression algébrique, Bernoulli (1718) appelle « fonction d'une grandeur variable une quantité composée, de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et de constantes ». Ainsi, la fonction est à la fois un processus algébrique et son résultat. Sfard signale l'attention importante qui est portée sur le concept de variable associé à celui de fonction, et cite une nouvelle définition donnée par Euler (1755) d'une fonction : une quantité peut être appelée fonction seulement si elle dépend d'une autre quantité de sorte que si cette dernière quantité change, la première change aussi. Sfard explique que cette dernière définition révèle une conception.

La suite de l'histoire de la notion de fonction est présentée comme un long processus de réification, c'est-à-dire de transition d'une conception opératoire à une conception structurelle.

La volonté de dégager la notion de variable de celle de temps est une marque importante de réification. Après les tentatives de Dirichlet de faire échapper la définition de fonction d'une approche algorithme, la définition donnée par Bourbaki comme un ensemble de couples

ordonnés est la dernière étape vers une conception structurelle. La fonction, ainsi envisagée comme un objet, permettra d'opérer de nouvelle opération sur les fonctions.
Ce processus de construction de la notion de fonction est ainsi envisagé comme représentatif d'un phénomène global :

> *« various processes had to be cobverted into compact static wholes to become the basic units of a new, higher level theory » (Sfard (1991) p.7).*

Ce phénomène est utilisé comme lecture des processus de conceptualisation d'un concept :

> *"it seems that the scheme which was constructed on the basis of historical examples can be used also to describe learning processes".*

Sfard se défend cependant de vouloir projeter l'étude historique sur le psychologique. Elle argumente en disant que beaucoup d'autres travaux vont dans le sens de l'hypothèse que l'opératoire précède le structurel. Elle cite en particulier les travaux de Piaget (1970), et à sa suite, ceux de Dubinsky (1986), Thompson (1985), Dörfler (1987, 1989).

2.2.2 Le rôle des conceptions structurelle et opératoire d'une fonction dans les processus de conceptualisation

Sfard distingue trois étapes dans le processus de conceptualisation d'un concept, qui désignent la passage d'une conception opératoire à une conception structurelle :

> *« if the conjecture on operational origins of mathematical objects is true, then first there must be a process performed on the already familiar objects, then the idea of turning this process into an autonomous entity should emerge, and finally the ability to see this new entity as an integrated, object-like whole must be acquired. We shall call these tree stages en concept development* ***interiorisation, condensation and reification****, respectively ».*

Cette lecture des trois étapes d'un processus de conceptualisation est très proche des travaux de Piaget.
Dans le cas du concept de fonction, Sfard désigne par une phase d'intériorisation, le moment où la notion de variable a été apprise, et où la capacité à utiliser une formule pour trouver les valeurs d'une variable dépendante est acquise. La phase de condensation, désigne le moment où le sujet est capable d'envisager ces processus de transformation sans regarder leurs valeurs spécifiques, éventuellement, le sujet est capable de dessiner les graphes de ces fonctions, de composer deux fonctions, ou de trouver l'inverse d'une fonction. Enfin, résoudre des équations fonctionnelles, parler des propriétés de divers processus engagés sur des fonctions

(composition ou inversion), reconnaître le caractère computable d'une fonction (alors envisagée comme un ensemble ordonné de couples) sont le signe d'une phase de réification. Une fois encore, Sfard se réfère à des situations pour définir intériorisation, condensation et réification. Mais cette référence n'est pas véritablement attestée et reste implicite.

2.2.3 Le rôle des conceptions structurelle et opératoire dans les processus cognitifs

Sfard justifie la nécessité de l'opératoire par la nature de l'activité mathématique qui nécessite d'engager du calcul. Elle dit :

> *"Theoretically it would be possible to do almost all the mathematics purely operationally: we could proceed from elementary processes to higher level processes and then to even more complex processes without ever referring to any kind of abstract objects" (Sfard (1991) p. 23).*

Cependant, tant que les processus sont appréhendés de façon opératoire, ils ne peuvent être réifié en entités abstraites susceptibles d'être traitées comme des objets. Cette capacité est présentée par Sfard comme nécessaire à l'activité mathématique.

> *"While tackling a genuinely complex problem, we do not always get far if we start with concrete operations; more often than not it would better to turn first to the structural version of our concepts. These upper-level representations provide us with a general view, so we can use our system of abstract objects just like a person looking for information uses a catalogue; or like anybody trying to get to a certain street consults a map before actually going there. In other words, in problem-solving processes the compact entities serve as pointers to more details information" (Sfard (1991) p. 27).*

L'expression "serve as pointers" mérite d'être explicitée : Sfard donne plus loin deux raisons pour lesquelles le processus de réification facilite ainsi l'activité. La première est celle du nombre limité d'informations qui peuvent être mémorisées par un sujet :

> *"the distance between advanced computational processes and the concrete material entities which are the objects of the most elementary processes (such as counting) is too much large to be grasped by us in its totality. We overcome this difficulty by creating intervening abstract objects which serve as a kind of way-stations in our intellectual journeys" (Sfard (1991) p. 29).*

La seconde est celle du sens :

> *"structural conception is probably what underlies the relational understanding, defined by Skemp (1976) as "knowing is both what and why to do" or having both rules and reasons. Purely operational approach would*

> *usually give no more than instrumental understanding, once presented by Skemp as having rules without reasons".*

Ainsi, la réification permet la construction du sens et la mémorisation.

3. Conclusion

Les conceptions structurelle et opératoire portent sur des propriétés génériques des concepts mathématiques. En effet, un concept a un versant oépratoire : le concept est identifié à un processus. Par exemple, pour le cas qui nous intéresse, la fonction est identifiée au processus qui permet le passage d'un ensemble à un autre. Les représentations algébriques jouent un rôle important, et la possibilité d'exprimer le processus par un algorithme de calcul est centrale pour cette conception. Un concept a d'un autre coté un caractère structurel : il est envisagé comme un objet, sur lequel il est possible de mettre en œuvre des opérations et de faire des déclarations. Dans ce cas, la capacité à envisager une fonction comme un ensemble ordonné de couples apparaît comme centrale chez Sfard. Les représentations graphiques jouent un rôle privilégié dans la mesure où elles donnent à voir l'objet comme un tout. Nous verrons que cela n'est pas si clair, en particulier lorsqu'il s'agit de traiter l'objet fonction à l'infini : nous proposerons un problème dans lequel les représentations graphiques se révèlent inefficaces pour traiter le comportement de la fonction à l'infini. Sfard montre la nécessité de ces deux aspects pour la conceptualisation. L'analyse en termes structurel/opératoire fournit des prescriptions pour l'enseignement, qui sont sous tendues par l'hypothèse que l'opératoire précède le structurel dans le développement des concepts. Sfard préconise donc d'abandon dans l'enseignement d'une entrée par le coté objet (comme cela est souvent le cas pour la notion de fonction qui est introduite au moyen de sa définition bourbakiste), et préconise une introduction par l'aspect processus des concepts.

Cette approche de la connaissance diffère fortement de notre problématique, qui est celle de la compréhension de l'activité du sujet en résolution de problèmes et en particulier aux relations opérateurs/contrôles dans cette activité. Cette différence est liée en particulier à la distance qui est prise relativement à l'activité du sujet par Sfard. Les conceptions structurelle et opératoire sont décrites en dehors des problèmes, bien que Sfard n'échappe pas à la nécessité de se référer à des situations pour différencier structurel et opératoire. Cela est classique dans la confrontation d'une problématique française, dont l'histoire est fortement marquée par la Théorie des Situations, à des problématiques anglo-saxones, plus proches de la psychologie. Nous allons tenter cependant de faire le lien entre notre problématique et certains aspects du travail de Sfard en vue d'émettre une hypothèse de travail.

3.1 Le rôle des représentations :

Sfard signale l'importance des représentations dans la caractérisation des conceptions. Le concept de fonction fait intervenir une variété très importante de représentations (graphique, algébrique, analytique) qui ne donnent pas à voir les mêmes aspects du concept. Sfard relie représentation graphique et conception structurelle, représentation d'un algorithme de calcul et conception opératoire. Le problème que nous analysons dans notre travail fera intervenir plusieurs systèmes de représentation des fonctions. Nous verrons aussi qu'ils prendront des places différentes selon les conceptions qui seront identifiées. Sans associer un registre particulier à une conception, nous verrons pour notre part que, dans la résolution du problème, les opérateurs et les contrôles peuvent se positionner dans des registres différents et révéler des natures différentes des conceptions.

3.2 Le rôle de la conception structurelle :

Bien que cela soit peu développé dans le travail de Sfard, **il apparaît clairement que les conceptions structurelles entretiennent des relations importantes avec les contrôles**. Sfard, en reprenant une citation de Skemp (ce chapitre, 2.2.3), lie le structurel aux raisons qui sous-tendent l'opératoire. Cela rejoint ce que nous avons pu dire des contrôles : en particulier, ils assurent la bonne adéquation opérateur/problème. Le rôle donné par Sfard aux conceptions structurelles est donc (en partie) celui de la validation de l'activité. Elle n'explicite cependant pas comment ces aspects se mettent en œuvre dans l'activité. Sa problématique est ailleurs. Sfard fournit des prescriptions pour l'enseignement. Son analyse lui permet en particulier de justifier que l'enseignement doit se garder d'une entrée sur les concepts par leur aspect objet.

3.3 Conclusion

Nous voudrions souligner que les conceptions structurelles de Sfard ne correspondent pas aux contrôles de notre modèle (de même que les conceptions opératoires ne sont pas les opérateurs). Quelles sont donc leurs relations ? Sfard annonce que l'opératoire et le structurel sont deux aspects de la connaissance nécessaires à la résolution des problèmes. Nous pouvons donc nous attendre à retrouver ces caractéristiques dans les conceptions que nous identifierons. La relation contrôles/conception structurelle est à chercher dans l'aspect objet du concept que caractérise la conception structurelle. Les situations où un concept intervient en tant qu'objet sont plus à même de mettre au centre les contrôles associés à ce concept car il ne s'agit plus alors de faire fonctionner le concept comme un processus (aspect opératoire) mais il s'agit **de porter des jugements sur l'objet, sur ses propriétés, sur sa relation au**

problème. Nous pouvons nous attendre à ce que, dans les problèmes dans lesquels seul l'aspect opératoire du concept est nécessaire, les contrôles de bonne mise en œuvre des opérations suffisent. Par exemple, un problème dans lequel il s'agit d'évaluer des valeurs d'une fonction dont on connaît une représentation algébrique est validé par des contrôles sur le bon déroulement des calculs. Nous faisons donc l'hypothèse de travail que **les problèmes où un concept joue comme objet sont un espace privilégié pour l'expression des contrôles régissant ce concept**.

Chapitre 3 : Cadre Théorique

1. Diversités épistémique et épistémologique des connaissances

1.1 Introduction

Nous reprenons ici des éléments traités par Artigue (1990) dans son article « Epistémologie et Didactique », dans lequel elle explore la notion de conception telle qu'elle est considérée en didactique française. Partant des nécessités auxquelles répond la notion de conception (que nous resteingnons à notre problématique adidactique), nous dégageons deux contraintes auxquelles doivent répondrent les conceptions : sur le versant épistémologique, la prise en compte de la diversités des points de vue possible sur le savoir et, sur le versant épistémique, la diversité des conceptions d'un (ou plusieurs) sujet(s). Nous parlerons alors de leurs relations.

1.2 La notion de conception relativement à la Théorie des Situations

« La notion de conception répond à deux nécessités distinctes :

> *mettre en évidence la pluralité des points de vue possibles sur un même objet mathématique, différencier les représentations et modes de traitement qui lui sont associés, mettre en évidence leur adaptation plus ou moins bonne à la résolution de telle ou telle classe de problèmes,*
>
> *aider le didacticien à lutter contre l'illusion de transparence de la communication didactique véhiculée par les modèles empiristes de l'apprentissage, en lui permettant de différencier le savoir que l'enseignement veut transmettre et les connaissances effectivement construites par l'élève » (Artigue (1990) p. 265).*

La notion de conception est un outil pour la modélisation de l'élève[8]. Cette représentation du sujet relève de la didactique : il ne s'agit pas de construire une représentation des processus de conceptualisation et de développement généraux, mais bien de prendre en compte la spécificité du savoir mathématique en jeu dans l'activité (le adidactique) et les processus d'enseignement (le didactique). La perspective cognitive demande que puisse être prise en compte la pluralité de points de vue possibles sur ce savoir. Dans notre problématique adidactique, cette pluralité a une manifestation épistémologique et épistémique : les manifestations du savoir (représentations, modes de traitement et de contrôles) varient avec la diversité des problèmes mathématiques d'un coté, et avec les connaissances construites par le sujet d'un autre coté.

1.3 Pluralité des manifestations d'un concept mathématique

Il est aujourd'hui classique en didactique des mathématiques d'aller chercher dans l'épistémologie et l'histoire d'un concept la pluralité des points de vue possibles sur ce concept. Artigue :

> *« l'ancrage des conceptions dans l'analyse a priori des points de vue possibles sur le savoir en jeu, sur les classes de problèmes accessibles ou bien adaptés à tel ou tel points de vue, à travers l'étude du fonctionnement actuel de ce savoir comme de son développement historique peut apparaître comme une garantie nécessaire » (Artigue (1990) p. 274)* (pour ne pas aplatir les conceptions sur les observables).

Cette étude semble constituer un garant et un référent épistémologique à l'identification des conceptions.

La théorie des champs conceptuels propose une entrée par les situations pour prendre en charge cette pluralité de points de vue sur un concept. Si l'on est attaché à la compréhension des processus de conceptualisation, un concept ne peut être réduit à sa définition. La caractérisation d'un concept nécessite que soit considéré l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés. Cette considération est liée au cognitif en associant à l'ensemble des situations un autre ensemble, celui des schèmes mis en œuvre dans la situation par le sujet.

[8] Nous parlerons en fait du sujet car notre travail porte, nous l'avons dit, sur les relations adidactiques sujet/milieu.

1.4 Multiplicité des points de vue du sujet :

Balacheff (1995), en reprenant une expression de Bourdieu, désigne par « *sphère de pratique* » les situations scindées dans le temps et identifiées par un sujet comme ayant des caractéristiques distinctes. Les sphères de pratiques attestent que la connaissance possède un domaine de validité sur lequel elle est reconnue comme un outil. Les sphères de pratique permettent de prendre en charge un paradoxe décrit par Bourdieu : celui d'un sujet qui serait observé dans des situations différentes et mettant en œuvre dans ces situations des connaissances qui peuvent apparaître contradictoires aux yeux d'un observateur, parce que cet observateur reconnaît lui des situations isomorphes (Balacheff 1995, p. 14-15).

Ainsi, la connaissance est envisagée comme une propriété du système sujet milieu : elle a un caractère révisable, et la variété des situations est l'occasion de remaniements. La connaissance est replacée dans sa mise en œuvre particulière. Elle n'a pas de caractère contradictoire ou de fausseté, elle est avant tout une adaptation optimale du système. La connaissance d'un sujet est définie par un ensemble de conceptions, ayant chacune leur cohérence interne.

1.5 Relation entre pluralités épistémique et épistémologique

La question des relations entre pluralités épistémique et épistémologique des connaissances est une question encore difficilement résolue. Elle nécessite une mise en garde. Nous évoquerons trois types de travaux, cités par Artigue (RDM), dans lesquels ces relations sont explorées.

Brousseau (RDM 1983) dit à propos de la recherche menée par Ratsimba-Rajohn portant sur deux méthodes de mesures rationnelles :

> *« La possibilité de provoquer l'acquisition de conceptions différentes est démontrée pour les rationnels, soit la commensuration, soit le fractionnement sont obtenus par la simple manipulation de variables didactiques. H Ratsimba-Rajohn observe comment deux conceptions peuvent se faire obstacle mutuellement et coexister chez un même élève ».*

Les relations entre épistémologique et épistémique sont au cœur de la Théorie des Situations. Les variables didactiques sont des commandes dans la construction des situations permettant de contraindre ces relations. Mais nous sommes ici plus du coté de la situation que du sujet. La perspective est d'étudier les leviers de l'apprentissage et d'explorer les situations permettant cet apprentissage. Il ne s'agit pas de faire un état des lieux des conceptions sur les rationnels.

La recherche d'obstacles épistémologiques[9] dans l'histoire d'un concept est justifiée parce que les obstacles sont envisagés comme des connaissances (provisoires, partielles ou erronées) constitutives du sens d'un concept. L'analyse épistémologique et historique permet l'identification d'obstacles éventuels et ainsi, d'identifier parmi les difficultés rencontrées lors de l'apprentissage, celles, réellement inévitables, parce que constitutive du développement de la connaissance.

Artigue et Robinet définissent a priori les conceptions à partir de différentes définitions du cercle (Artigue et Robinet (1982)):

> *« Ces définitions sont toutes logiquement équivalentes*[10] *et définissent donc le même objet mathématique. Mais elles correspondent à des façons différentes de percevoir le cercle, d'utiliser ses propriétés et elles mettent l'accent sur des éléments géométriques, des relations entre ces éléments, différents. C'est pourquoi nous leur associons des conceptions différentes du cercle ».*

La relation entre épistémique et épistémologique est ici clairement revendiquée. Elle est explicitée ci-dessous dans le parallèle qui est fait entre les composantes d'un concept mathématique et celles d'une conception (Artigue (1984)) :

> *« Comme on distingue dans un concept mathématique :*
>
> > *la notion mathématique telle qu'elle est définie dans le contexte du savoir savant à une époque donnée,*
> >
> > *l'ensemble des signifiants associés au concept*
> >
> > *la classe des problèmes dans la résolution desquels il prend son sens,*
> >
> > *les outils : théorèmes, techniques algorithmiques, spécifiques du traitement du concept,*
>
> *On distinguera dans les conceptions du sujets ces diverses composantes et en particulier :*
>
> > *la classe des situations problèmes qui donnent son sens au concept pour l'élève*
> >
> > *l'ensemble des signifiants qu'il est capable de lui associer, en particulier les images mentales, les expressions symboliques,*
> >
> > *les outils, les théorèmes, les algorithmes dont il dispose pour manipuler le concept ».*

---

[9] Introduit par Bachelard, les obstacles épistémologiques ont occupés de nombreux travaux de didactique (Brousseau, Cornu, Sierpinska par exemple).

[10] « logiquement équivalentes » se réfère ici à la possibilité de passer logiquement d'une définition à l'autre au sein d'une théorie mathématique.

L'étude épistémologique (et historique) des concepts est un guide pour l'identification des conceptions. Il faut cependant se départir de l'idée d'ajuster cette analyse à celle des conceptions. Une raison essentielle est que le sujet n'a pas qu'un statut épistémique et cognitif. Les contraintes didactiques déterminent aussi son comportement. Les connaissances sont liées à l'appartenance aux institutions (Chevallard 1991) dans lesquelles ces connaissances sont rencontrées. Bien que notre travail, dans un souci de réduction de notre champ d'étude, ne prenne pas en charge ces contraintes, nous aurons soin de mettre sous surveillance les relations entre notre étude épistémologique du concept de fonction et l'identification des conceptions. L'analyse épistémologique sera envisagée en terme de conceptions (les nôtres éventuellement !) et confrontée à celle des sujets que nous avons observés. De ce point de vue, le modèle des conceptions que nous utilisons est unificateur et permet de rendre compte de l'analogie des composantes d'un concept et d'une conception que donne Artigue (ci-dessus).

1.6 Conclusion

> *« En référence à un concept donné, la connaissance d'un sujet peut s'actualiser en des conceptions distinctes, selon les caractéristiques des situations*
>
> *Les éléments de définition sont…*
>
> > *Les problèmes liés à des situations*
> >
> > *Les systèmes de représentation*
> >
> > *Les moyens de traitement (actions, décisions)11 » (*Balacheff, cours de la XVIII^ième^ Ecole d'Eté de didactique des Mathématiques*).*

La variété des conceptions est relative à la variété des situations (problèmes), qui deviennent donc un élément constitutif des conceptions, au coté des systèmes de représentation et des modes de traitement engagés dans la résolution des problèmes. Ces éléments de définitions d'une conception se réfèrent à un concept donné : les variations de points de vue liées à un concept, nous l'avons dit, se trouvent dans la variété des situations.

[11] Nous retrouvons les éléments identifiés par Artigue (voir ci-dessus).

2. Conception (P, R, L, Σ)

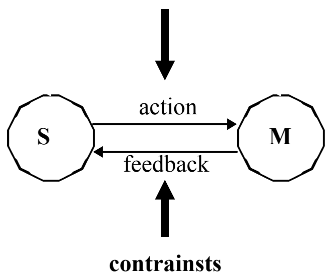
L'interprétation des interactions du sous système adidactique sujet/milieu en termes de jeu et l'interprétation des comportements comme des indications des stratégies permet de justifier la correspondance entre comportements[12] et connaissances. Dans ce jeu, les connaissances sont envisagées comme les moyens d'appréhender les règles et les stratégies gagnantes. Les interactions du système qui définissent le jeu adidactique sont sous les contraintes des connaissances.

Ainsi, les connaissances sont envisagées comme une propriété du système adidactique sujet/milieu.

Les problèmes (mathématiques) sont une perturbation du système sujet/milieu. Les connaissances peuvent alors être attestés parce qu'elles sont des outils de résolution de ce problème, c'est-à-dire en tant qu'outils permettant au système de recouvrer un équilibre (résolu).

Ainsi, dans le modèle cK¢ (Balacheff 1995),

> *« les connaissances sont caractérisées par état d'équilibre d'une boucle d'interaction, action/rétroaction, entre un sujet et un milieu sous des contraintes proscriptives de viabilité. »* (Cours EEDM13 (2003) (actes à paraître)*)*



Les interactions sont attestées par les comportements et les représentations, qui sont sous des contraintes de validité. Elles visent à trouver et à attester d'un équilibre.

Les connaissances sont donc une propriété de l'activité. Nous avons montré la nécessité de différencier actions et moyens de contrôle de l'action, ainsi que la nécessité de prendre en compte leurs relations aux problèmes et aux systèmes de représentation (langagiers et symboliques) engagés dans la résolution de ce problème.

[12] Les comportements (observés) ne sont pas donnés par la réalité mais est le résultat d'une décision de l'observateur.

Ainsi, nous appellerons « *conception C le quadruplet (P, R, L, ∑) où :*

- P est un ensemble de problèmes

- R est un ensemble d'opérateurs

- L est un ensemble de systèmes de représentations

- ∑ est une structure de contrôle (Balacheff (1995)) »

La question de la caractérisation des problèmes est difficile, et nous allons le voir, cette difficulté est liée à la question de la classification des problèmes ou des conceptions.

> *« A la façon de Vergnaud pour les structures additives, par exemple, on pourrait renvoyer à "l'ensemble des situations" qui appellent la mise en œuvre de la conception considérée. Ou, au contraire, on pourrait vouloir réduire cet ensemble à un nombre fini de problèmes définitoires, suggérant avec Brousseau que toute connaissance peut se caractériser par une (ou des) situations [adidactiques]" (Brousseau (1986) p.48). Brousseau parle de situations fondamentales) ; ces problèmes pourraient constituer un ensemble générateur. Les deux solutions occupent manifestement des positions extrêmes sur le spectre des possibles, avec des caractéristiques différentes :*
>
> *- la solution à-la-Vergnaud semble apporter une réponse simple, mais elle a le désavantage de renvoyer à un ensemble trop peu spécifique — que l'on pense par exemple à quel ensemble de problèmes renverrait le "nombre entier" ;*
>
> *- la solution à-la-Brousseau présente un avantage théorique en cherchant à associer une conception à un ensemble de problèmes spécifiques, mais la difficulté est ici de montrer la constructibilité d'un tel ensemble pour toute conception » (Balacheff (1995)).*

La notion de situation fondamentale (Brousseau (1997)), sur laquelle ont porté de nombreux travaux de didactique, illustre la difficulté posée par la caractérisation des problèmes. Une situation fondamentale est un représentant d'une classe de problèmes. Les variables didactiques de la situation sont des commandes dont dérive l'ensemble de ces problèmes. Cette représentation des problèmes est un outil théorique puissant qui a été utilisé pour l'étude des situations d'apprentissage de concepts mathématiques (voir par exemple Ratsimba-rahjon (1981) pour l'étude des rationnels). Elle n'est cependant pas opératoire pour l'étude des conceptions, pour lesquelles la question de l'existence et de l'identification d'un (ou plusieurs) représentant(s) de l'ensemble des problèmes de la conception reste ouverte. Mesa (2004) propose une entrée différente sur les problèmes. Son étude porte sur l'analyse de 24 ouvrages scolaires de la middle-school (collège) de 15 pays du continent américain. Elle utilise le modèle (P, R, L, ∑) et la notion de domaines d'application d'un concept (Biehler) pour décrire les pratiques associées au concept de fonction induites par ces ouvrages, in abstracto de leur utilisation en classe. La classification des domaines d'application de concept de fonction lui permet de classer les exercices des manuels en les regroupant en cinq catégories (« *natural laws*, *causal relations*, *constructed relations*, *descriptive relations and data reductions »* Mesa (2004) p. 7), chacune représentant un ensemble Pi de problèmes (dans les termes du quadruplet). Chacun des exercices de chacune des classes est ensuite analysé en termes d'opérateurs, de représentations et de structures de contrôles engagés dans la résolution de l'exercice. Ainsi, P est identifié à un domaine d'application d'un concept (Biehler), et la classification de ces domaines est issue, en amont, du travail de Biehler. Une autre entrée, par les conceptions, consiste à classer les conceptions[13] et à identifier pour chacune d'elle, l'ensemble des problèmes pour lesquels la conception participe à leur résolution (« *sphère de pratique »* de la conception (Balacheff 1995)). Ces deux entrées nécessitent qu'une décision soit prise par le chercheur sur les classes de problèmes ou les classes de conceptions. Balacheff propose de définir

> *« à partir d'une analyse de la genèse historique et/ou mathématique, des ensembles de problèmes significatifs pour le diagnostic et opératoires pour construire des processus didactiques. Cette définition pourrait être aussi recherchée par la caractérisation des sphères de pratiques, problème que devrait aborder l'approche ethno-mathématique dont le développement est actuellement très important dans les pays d'Amérique latine et aux Etats-Unis (cf. par exemple d'Ambrosio 1993, Lave 1988, Nuñes et al. 1983) ».*

Cette position suffit à l'étude que nous souhaitons mener : avancer dans la compréhension des relations opérateurs/contrôles pour la résolution d'un problème engageant le concept de fonction. Nous avons choisi un problème dans lequel ce concept est susceptible de faire intervenir certaines conceptions de fonction (conception *objet*[14]). Nous définirons donc en quoi le problème que nous avons choisi peut nous montrer le jeu opérateur/contrôle, et comment il est contraint par la notion de fonction. Une étude de travaux existants sur les conceptions de fonction nous permettra de le faire.

La question de la caractérisation de l'ensemble R des opérateurs est plus classique. Les opérateurs sont les outils pour l'action. Ils peuvent être des actions concrètes sur un milieu matériel, ou des actions plus abstraites comme les transformations de représentations langagières, symboliques, graphiques, ou encore être une prise d'information (par exemple sur l'interface d'un logiciel, comme cela pourra être notre cas). Nous les décrirons sous la

[13] Il existe de nombreux travaux sur les conceptions (de la notion de fonction) proposant différentes classifications, nous y reviendrons dans le prochain chapitre.

[14] Voir le chapitre sur l'étude des travaux de Sfard et Dubinsky.

forme d'expressions engageant un verbe. Par exemple : évaluer la valeur des coordonnées d'un point X sur une représentation graphique.

L'ensemble des systèmes de représentation L décrit les signifiants engagés dans les interactions du système sujet/milieu. Ces signifiants supportent l'action, les opérations et les décisions. Nous verrons que le problème que nous avons choisi et la situation expérimentale dans laquelle celui-ci s'incère font intervenir un nombre important de systèmes de représentation : échanges langagiers entre les étudiants, représentations algébriques, graphiques (à l'interface de Maple), symboliques, numériques.

Nous avons déjà avancé sur la définition des structures de contrôle ∑ à travers l'étude des travaux de Brousseau et Vergnaud. Ces travaux nous ont permis de montrer que les dimensions de choix, de décision et de jugement accompagnent l'action (sans pour autant que ces dimensions soient explicitement prises en charges). L'action implique la validation. Les travaux de Balacheff (1987) ont montré que la problématique de la validation est intrinsèquement liée aux questions de conceptualisation. Vergnaud offre des pistes, que nous avons déjà évoquées, sur la façon dont s'organisent les contrôles : ceux-ci permettent au moins d'assurer l'adéquation de l'action et du problème – cette adéquation concerne à la fois la reconnaissance de l'appartenance du problème à une classe et la prise en compte des caractéristiques particulières du problème traité – ; l'anticipation de l'action et l'adéquation du résultat obtenu à celui attendu ; la prise d'information. Nous allons montrer que les contrôles ont une organisation structurelle entretenant des relations étroites avec les opérateurs : cette structure assure la bonne adéquation et la mise en œuvre de l'action. C'est en ce sens que nous comprenons une citation, très souvent reprise, de Vergnaud : « *La connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas* » (Vergnaud (1990) p. 136). Nous définirons, au cours de notre analyse a posteriori des protocoles d'expérimentation, l'organisation structurelle des contrôles. Les contrôles sont exprimés, selon leur position dans cette organisation, sous la forme d'expressions propositionnelles ou conditionnelles « si… alors… ».

3. Etude de cas : différenciation de deux conceptions par les contrôles

Ce travail (Gaudin 2002) porte sur les conceptions de la notion de fonction. Les conceptions sont analysées par le quadruplet (P, R, L, ∑). Une étude de travaux didactiques sur les conceptions de la notion de fonction avait montré le rôle important des représentations algébriques et graphique des fonctions dans la caractérisation de ces conceptions. Notre analyse a montré que les contrôles, dans ce cas particulier, permettaient de différencier nettement les conceptions de deux binômes, dont les actions restaient cependant proches. L'exemple que nous donnons ici a ainsi pour objectif de montrer le rôle que les contrôles peuvent avoirs dans la différenciation des conceptions.

3.1 Présentation générale du travail

Nous cherchions à construire une situation mettant en jeu le concept de fonction et ses représentations et à montrer le rôle des représentations dans la différenciation des conceptions. Une analyse des travaux de Sierpinska avait révélé une distinction entre les conception graphe et courbe et nous voulions avancer sur la caractérisation de ces deux conceptions. Sierpinska montre que certains étudiants identifient la fonction avec la *ligne* qui la représente, les axes n'ont parfois pas de sens particulier pour ces élèves. La fonction est regardée comme un objet géométrique et est classée selon la forme de cet objet (parabole, sinusoïde, allure des graphes des fonctions élémentaires...). D'autres étudiants ont une vue plus analytique des représentations graphiques d'une fonction, bien qu'ils identifient eux aussi la fonction et cette représentation. La représentation est vue comme composée de points de coordonnées (x, y) de $\Re^2$ où x et y sont en relation. Cette relation peut être donnée par une équation (du système de représentation algébrique), mais la ligne (du système graphique) ne représente pas la relation, c'est la relation qui représente la ligne. La fonction est identifiée à la ligne, pas à la relation. La fonction peut aussi être identifiée à sa représentation algébrique. Sierpinska donne l'exemple de deux élèves pour qui l'expression algébrique est, en quelque sorte, le « *nom* » de la fonction. On leur demande de trouver des fonctions telles que f(2)=3 et f(3)=2. Les étudiants essaient différentes expressions algébriques de fonctions et observent sur l'écran d'un ordinateur la courbe tracée. Les paramètres de ces expressions sont alors corrigés au hasard (dans le système de représentation algébrique) et les élèves observent les changements associés sur l'écran (dans le système de représentation graphique). Ils ne considèrent pas le sens de x dans ces expressions : ils ne substituent jamais x par la valeur 2 dans l'expression de façon à obtenir 3. Pour ces élèves, la fonction est juste une certaine forme sur l'écran, l'expression algébrique ne représente pas une relation entre les coordonnées d'un point de la courbe mais est une sorte de *nom* pour la fonction. Or le graphe d'une fonction est la représentation graphique dans un système de coordonnées du lien fonctionnel entre une abscisse et une ordonnée. Et c'est l'interprétation point par point du graphe qui établit le lien entre représentation algébrique (du système de représentation algébrique) et graphique (du système de représentation graphique) d'une fonction. Les coordonnées d'un point du graphe sont de la forme (x, f(x)). A la lecture de ces travaux, nous voyons émerger une distinction possible entre deux conceptions (« courbe » et « graphe »). Cette distinction est en partie rendue possible par l'analyse des rapports différents que peuvent entretenir le système de représentation graphique et le système de représentation algébrique.

En nous plaçant dans le cadre de cK¢, nous avons décrit une conception en termes d'*opérateurs*, de *systèmes de représentation* et de *contrôles*. Les contrôles et les opérateurs intervenant dans chaque système permettent de mettre en évidence que chacun des systèmes de représentation a des propriétés différentes dans la situation (en fonction de ce qu'ils permettent ou ne permettent pas de prendre en charge dans la situation et de la validation qu'ils autorisent).

Cabri-Géomètre[15], s'est révélé être un environnement informatique privilégié pour la réalisation d'une situation répondant à notre questionnement. Il est possible dans Cabri Géomètre de construire et de manipuler des objets de la géométrie (nommés *points, droite, segment, triangle, cercle, conique...*). Les déplacements des objets construits dans Cabri et les relations entre ces objets se font en référence à des connaissances de la géométrie euclidienne et aux propriétés qui ont défini leur construction. Il est possible de demander à Cabri l'affichage des coordonnées d'un point et de l'équation d'une droite ou d'une conique qui ont été construit dans un repère. Le déplacement de ce point, de cette droite ou de cette conique dans le repère entraîne l'actualisation en temps réel des coordonnées ou des coefficients de l'équation (figure 3). La possibilité d'une manipulation directe d'objets graphiques en relation avec des représentations algébriques nous est apparue pertinente pour l'étude des rapports entre les systèmes de représentation (algébrique et graphique) de représentation des fonctions et du rôle de ces systèmes de représentation dans la caractérisation des conceptions des fonctions.

3.2 Présentation des deux situations

En situation 1, l'écran présente une parabole oblique dans un repère, une équation de cette parabole dans le repère, un point de la parabole et ses coordonnées dans le repère. Ces objets ont été construits dans Cabri-Géomètre. L'utilisateur a la possibilité de faire pivoter librement la parabole autour de son sommet sans déformations (figure 3), les coordonnées du point et l'équation de la parabole sont alors modifiées avec ces mouvements. On demande aux élèves

15 Jean-Marie Laborde et Franck Bellemain : conception et développement de Cabri-Géomètre, Imag, CNRS, Université Joseph Fourier, Grenoble.

de donner une équation de la parabole, de tracer la tangente à la parabole en un point Mo et de donner une équation de cette tangente.

Les élèves ont à leur disposition les objets de Cabri-Géomètre (*droite*, *point*, *équation d'une droite*...), une macro-construction permettant de tracer une droite dont on connaît l'équation cartésienne et une macro-construction faisant apparaître en rouge la tangente que l'on demande de tracer. Cette dernière macro-construction, appelée « *tangente vérif* », permet une validation par superposition d'un candidat tangente tracé par un élève. La macro-construction « *tangente vérif* » doit en fait être perçue par l'élève comme un indicateur visuel. Un travail préparatoire à l'expérimentation a été mené pour que les élèves acceptent que deux *droites* de Cabri visuellement superposées soient la représentation d'une même droite (le travail a en particulier porté sur les superpositions acceptables).

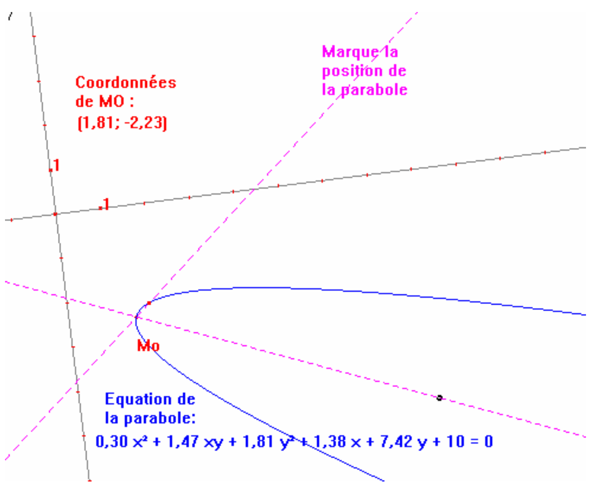


Figure 3.1

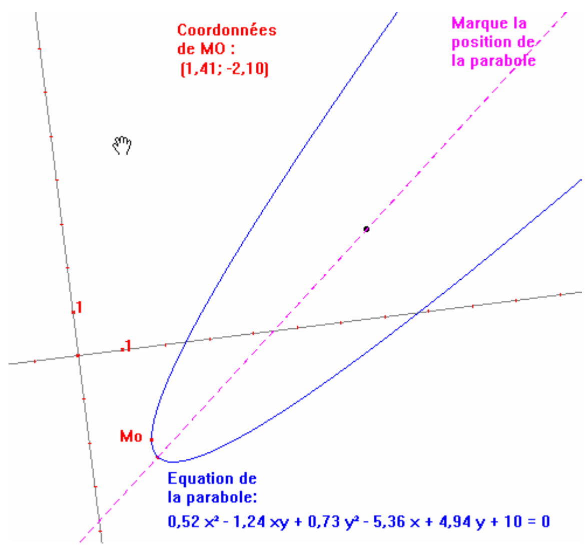
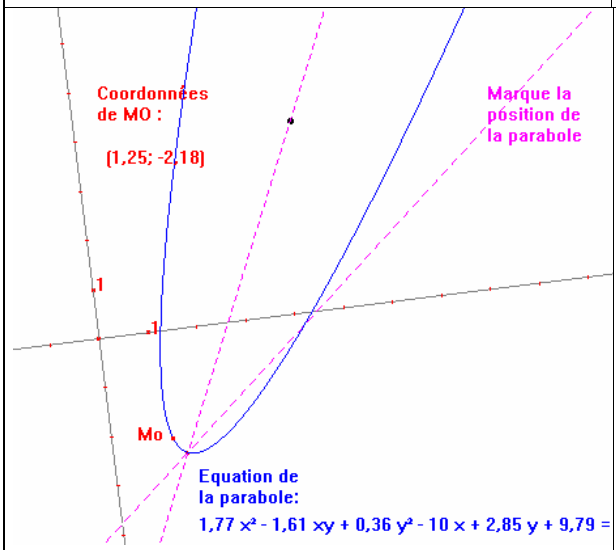


Figure 3.2



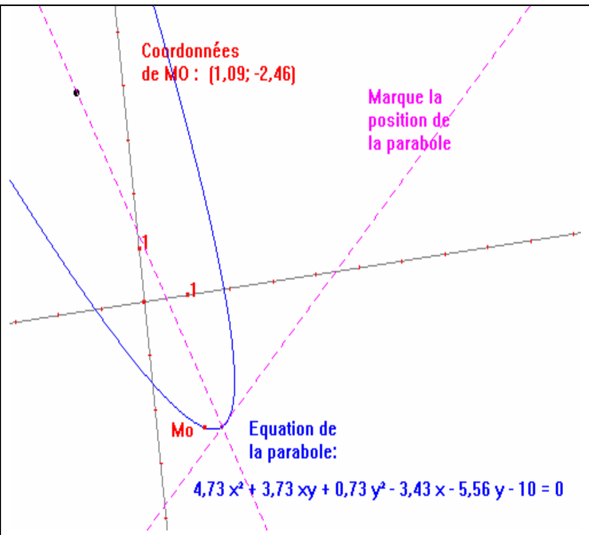


Figure 3.4

Figure 3.3

Figure 3 : Différentes positions de la parabole

En situation 2, les consignes, les objets et les macro-constructions disponibles sont les mêmes qu'en situation 1, mais cette fois, les mouvements de la parabole sont soumis à des contraintes. En particulier, ces contraintes ne permettent pas à la parabole d'atteindre la position verticale (la figure 4 indique les positions haute et basse, la parabole pouvant prendre toutes les positions intermédiaires) et d'être le graphe d'une fonction du second degré, ce qui, nous le verrons, joue un rôle essentiel dans la stratégie associée à la situation 1.

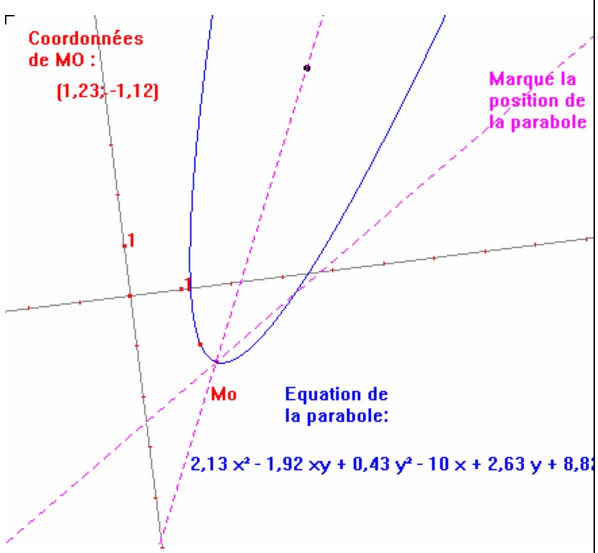


Figure 4.1

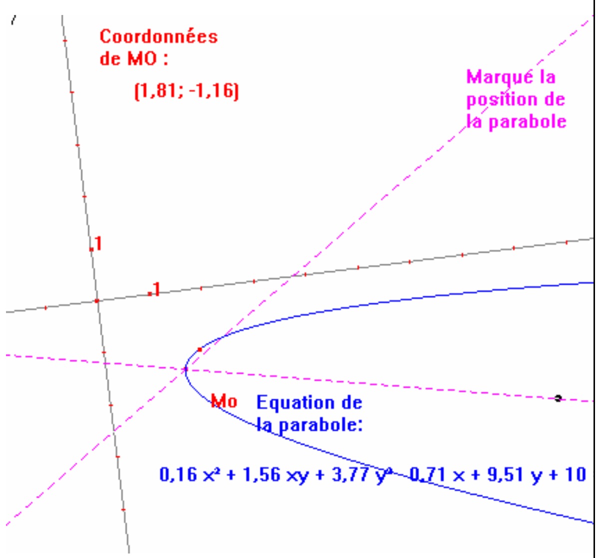


Figure 4.2

Position haute Position basse

Figure 4

Cette expérimentation doit nous permettre d'identifier les *opérateurs*, *systèmes de représentation* et *contrôles* engagés dans le problème par les élèves, en vue de caractériser les conceptions mises en jeu. Afin de pouvoir garder des traces suffisantes des comportements des élèves, ceux-ci ont travaillé en binômes, leurs conversations ont été enregistrées, ainsi que toutes les actions menées dans Cabri-Géomètre (le logiciel enregistre chacune des actions marquées par un clic de souris et permet ensuite de visionner leur enchaînement à la manière d'un magnétoscope).

Les élèves ayant participé appartiennent à une terminale S, spécialité mathématiques, d'un lycée de l'agglomération grenobloise. Ils ont suivi depuis deux ans un enseignement sur les fonctions, ont étudié les fonctions polynômes du second degré, connaissent depuis un an la propriété donnant l'équation d'une tangente au graphe d'une fonction à partir du nombre dérivé. Les chapitres sur les coniques et courbes paramétrées n'ont pas encore été abordés à ce moment de l'année.

3.4 Stratégie optimale associée à la situation et analyse a priori des conceptions mises en jeu

Parmi les stratégies que l'on peut associer à la situation, certaines stratégies du cadre géométrique permettent de trouver un candidat tangente, pour un coût raisonnable (sans utiliser l'équation de la parabole, indépendamment de la position de la parabole et de l'idée de graphe et de fonction ; les situations 1 et 2 sont alors équivalentes) :

Soit la parabole est une conique et la tangente est tracée à l'aide des propriétés géométriques et/ou algébriques (équation réduite) propres à cette conique.

Soit la tangente est définie comme la droite « limite » (MMo) lorsque M est un point de la parabole qui se rapproche de Mo.

Soit la tangente est définie comme la droite (QMo) où Q est le milieu de [OP], P est le point d'intersection de la tangente T en O à la parabole (perpendiculaire à l'axe de symétrie de la parabole) et de la perpendiculaire à T passant par Mo (figure 5).

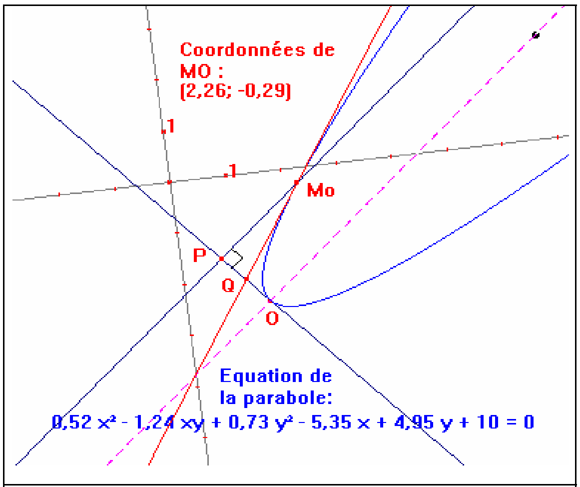


Figure 5 : une stratégie ne nécessitant pas l'équation de la parabole

Une analyse rapide des pratiques, des exercices des manuels scolaires[16] associés aux paraboles et aux tangentes à une courbe et des chapitres abordés par la classe, nous ont fait penser que ces stratégies avaient peu de chance d'être mises en œuvre par les élèves. Une stratégie « optimale » a été dégagée. Le caractère « optimal » renvoie au coût de résolution, aux moyens d'action offerts par la situation et aux outils mathématiques auxquels un élève de terminale S est supposé avoir accès (outils utilisés dans les exercices dits *d'étude de fonctions* de manuels scolaires et avec lesquels nous pensons qu'un élève de terminale, par rapport à un élève de première, est plus familier). Nous avons retenu les trois propriétés suivantes (nous rappelons, relativement aux propriétés de la parabole, que le chapitre sur les coniques n'a pas encore été abordé) :

- L'équation d'une parabole (verticale) est de la forme $y=ax^2 + bx + c$.
- Une parabole d'équation $y=ax^2 + bx + c$ est le graphe représentatif de la fonction définie par $f(x)=ax^2 + bx + c$, x réel.
- Une équation de la tangente à la courbe d'équation y=f(x) en Mo(xo,yo) est y=f'(xo)(x-xo) + f(xo), où f' est la fonction dérivée de f.

3.4.1 Stratégie optimale en situation 1 :

Il s'agit de contrôler la position de la parabole. Cela signifie placer la parabole en position verticale, afin que celle-ci soit le graphe d'une fonction. L'équation de la parabole verticale est alors $3,32x^2-10x-2,36y+1,56=0$.

[16] Dimathème TS (1994) Editions Didier et Terracher TS (1995) Editions Hachette.

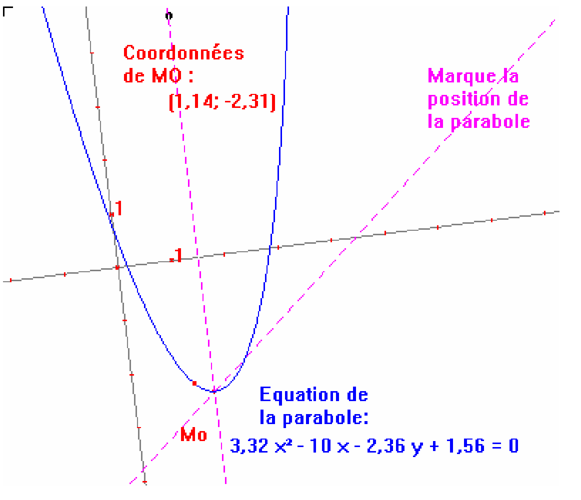


Figure 6 : la parabole en position verticale

L'équation de la parabole, écrite sous la forme y=f(x) ($y=1/(2{,}36)\times(3{,}32x^2-10x+1{,}56)$), donne une représentation algébrique de la fonction dont la parabole est une représentation graphique. L'opérateur : « si f est une fonction, alors l'équation de la tangente au point $M_0(x_0;f(x_0))$ est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ » permet d'obtenir une équation cartésienne de la tangente. L'équation de la tangente obtenue est y=-1,01x-1,17, où l'abscisse de Mo est affichée par Cabri à l'écran (1,14).

La macro-construction traçant une droite dont on connaît l'équation cartésienne permet de tracer la tangente. Cette tangente est validée par superposition avec « *tangente vérif* ».

3.4.1 Stratégie optimale en situation 2 :

Les contraintes sur les mouvements de la parabole ne lui permettent plus d'être le graphe d'une fonction dans le repère de Cabri. Cependant, la parabole en position horizontale est le graphe d'une fonction dans le repère R'(o,-j,i) (contrôle sur la position de la parabole).

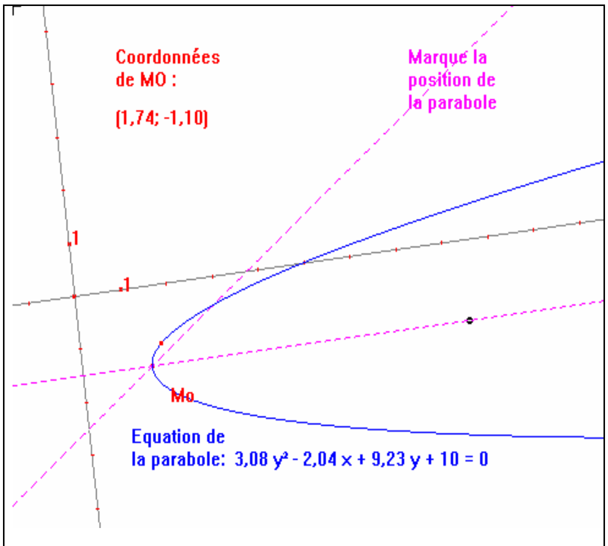


Figure 7 : la parabole en position horizontale et son équation.

Le changement de variable X=-y et Y=x, associé au changement de repère R(o,i,j) → R'(o,-j,i), permet d'obtenir une équation de la parabole dans le repère R'($3{,}08X^2-2{,}04Y-9{,}23X+10=0$), puis une représentation algébrique ($f(X)=1/(2{,}04)\times(3{,}08X^2-9{,}23X+10)$) de la fonction dont la parabole est une représentation graphique dans le repère R'.

De la même manière qu'en situation 1, l'opérateur « <u>si</u> f est une fonction, <u>alors</u> l'équation de la tangente au point $M_0(x_0;f(x_0))$ est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ » permet d'obtenir une équation cartésienne de la tangente dans R'. L'équation obtenue est Y=-1,20X+3,06, où l'abscisse de Mo est Xo=-yo (1.10).

Le changement de variable y=-X et x=Y fournit une équation cartésienne de la tangente dans R (repère par défaut dans lequel Cabri trace les droites dont on lui donne une équation cartésienne). Cette équation est x=1,20y+3,06. La macro-construction traçant une droite dont on connaît l'équation cartésienne permet de tracer la tangente.

Cette tangente est validée par superposition avec la tangente tracée par « tangente vérif ».

3.5 Analyse a priori des conceptions mises en jeu

L'analyse a priori doit établir en quoi la situation peut permettre d'accéder aux conceptions de la notion de fonction, mettre en évidence ce que peuvent être les caractéristiques de ces conceptions dans notre situation particulière et, éventuellement, leurs relations avec les conceptions dégagées par d'autres recherches. Elle vise notamment à prévoir les actions et les contrôles engagés par les élèves qui nous permettront la caractérisation des conceptions. En particulier, deux caractéristiques des situations de la parabole nous semblaient propices à révéler certaines conceptions de la notion de fonction : le jeu dynamique entre systèmes de représentation algébrique et graphique que Cabri permet, la nécessité d'engager une décision sur la position de la parabole pour permettre le traitement de sa représentation algébrique. C'est notamment pour révéler les contrôles qui sous-tendent cette décision que la situation 2 a été choisie. Nous montrons ici comment les caractéristiques des situations nous autorisent à penser que des conceptions différentes, *courbe* et *graphe*, peuvent être mises en jeu dans la résolution et comment nous espérons distinguer ces conceptions.

Mais précisons tout d'abord ce que sont les deux objets graphe et courbe pour nous. Les lignes représentées sur l'écran par Cabri dans nos situations peuvent être considérées comme des objets différents. En particulier le dessin de la parabole peut donner lieu à deux conceptualisations appelées par la suite graphe et courbe. L'analyse des différentes stratégies associées à la situation permet de penser que la stratégie optimale résulte de la reconnaissance de la parabole comme graphe d'une fonction dans certaines positions.

Un graphe est une partie du plan cartésien ; il est un sous-ensemble de points du plan cartésien définis par un couple de coordonnées (x,y) (pouvant être définies dans le système de représentation algébrique). On appelle graphe d'une fonction f, l'ensemble des points de coordonnées (x,f(x)) du plan cartésien. Notre parabole en tant que graphe est l'ensemble des points de coordonnées (x,y) tels que x et y vérifient l'équation lisible à l'écran. Elle est le graphe d'une fonction lorsqu'elle en position verticale (en situation 1 et en position verticale dans le repère R' en situation 2).

Une courbe est une entité, un objet du système de représentation graphique. Elle est le résultat d'un tracé continu obtenu par un moyen quelconque (lieu, trajectoire d'un mobile…). Ainsi, une courbe existe dans le plan indépendamment de la présence d'un système de coordonnées. Notre parabole en tant que courbe est un objet dont une représentation est visible à l'écran et qui peut être déplacé sans être déformé. L'équation visible à l'écran est une représentation dans le système de représentation algébrique de la parabole (les coordonnées d'un point de la parabole vérifient l'équation).

3.5.1 Jeu sur les système de représentations et conceptions permettant ou ne permettant pas de distinguer les objets courbe et graphe :

On peut raisonnablement penser qu'un élève va être fortement perturbé par la forme de l'équation de la parabole oblique (rarement rencontrée en classe). La stratégie optimale est opérante sur la parabole lorsqu'elle est un graphe. Pour cela la parabole doit être déplacée. Il s'agit, par ce déplacement, de distinguer les objets graphe et courbe associés tous les deux à la parabole. Ainsi, le dépassement de la perturbation liée à la forme de l'équation, relevant donc essentiellement de la centration sur le système de représentation algébrique, est rendu possible par un contrôle dans le système de représentation graphique sur la position de la parabole. Bouger la parabole est une action du système de représentation graphique contrôlée en partie dans le système de représentation algébrique (c'est au niveau de l'équation que la position graphe peut être trouvée). Le passage en continu (au sens de la manipulation dans Cabri) d'une forme algébrique à une autre, lorsque la parabole reste globalement et perceptiblement invariante, devrait permettre de mettre en lumière les rapports de l'équation avec la représentation graphique parabole (graphe ou courbe). Si la position verticale est discriminée par les élèves, cela signifie qu'ils ont mis en place des contrôles associés à la forme de l'équation et à la position de la parabole.

Nous pensons que ce jeu sur les système de représentation est pertinent pour l'étude des aspects des conceptions qui permettent ou ne permettent pas de distinguer courbe et graphe. Voici l'exemple de deux contrôles pouvant fonctionner pour le choix de la position verticale :

- « *L'équation d'une parabole (verticale) est de la forme* $y=ax^2+bx+c$ » : Ce contrôle ne nécessite pas d'identifier la parabole comme graphe. La parabole peut alors désigner une certaine forme perçue globalement dans le système de représentation graphique et reconnue parce que souvent rencontrée en classe (par exemple).
- *« Une seule image »* [10] : Dans notre cas, il peut s'agir de placer verticalement la parabole pour qu'elle remplisse la condition « *à chaque valeur de l'abscisse x, ne correspond qu'un point de la parabole* », contrôle permettant de reconnaître la parabole comme graphe.

On voit sur cet exemple comment les contrôles associés à la position de la parabole permettent de discriminer courbe et graphe.

3.5.2 Rôle de x et y :

Le rôle symétrique ou non des variables apparaît comme un critère déterminant dans la distinction courbe / graphe. Le rôle des variables x et y est symétrique dans l'équation de la courbe parabole (« les coordonnées x et y d'un point de la courbe vérifient l'équation de la courbe ») et dissymétrique pour le graphe parabole (dans le système de représentation graphique la dissymétrie peut se voir de la manière suivante : deux points du graphe ne peuvent pas avoir la même abscisse et peuvent avoir la même ordonnée).

En situation 1, le basculement d'un rôle symétrique à un rôle dissymétrique de x et de y s'opère de manière relativement « transparente » lorsque la parabole est un graphe et que son équation $ax^2+bx+cy+d=0$ est écrite $y=1/c.(ax^2+bx+d)$ (ce qui permet de montrer la dépendance de y à x, et de satisfaire les usages d'écriture). En situation 2, y ne peut plus être variable dépendant de x (les usages de la classe ne fonctionnent plus). Un contrôle dans le système de représentation graphique sur la position de la parabole dans le repère (pour un x il y deux y) permet de faire le choix d'un changement de repère dans lequel la parabole est un graphe (pour un X il y un seul Y) et son équation est la représentation algébrique d'une fonction où une variable est dépendante de l'autre (Y=f(X)). Cette contrainte apportée par la situation 2 peut permettre d'éclairer les contrôles qui sous-tendaient le choix d'un changement de position de la parabole. On peut en effet faire l'hypothèse que le jeu sur la dépendance fonctionnelle entre x et y n'est possible que si la parabole est vue comme le graphe d'une fonction et que, de ce point de vue, ce sont des contrôles sur la propriété « être un graphe » qui régissent les décisions sur les représentations graphiques (trouver un repère dans lequel la parabole est le graphe d'une fonction) et algébrique (accéder à la représentation algébrique d'une fonction).

Les contrôles et les opérateurs relatifs aux rôles de x et y permettront de distinguer les conceptions *courbe* et *graphe*.

3.6 Analyse de l'activité de deux pairs d'élèves, Sylvain/Loïc et André/Rémi

L'analyse porte sur l'enregistrement des conversations de deux binômes, Sylvain/Loïc et André/Rémi et de leurs actions menées dans Cabri. Nous avons choisi ces deux binômes en vue d'illustrer les différences entre les deux conceptions *courbe* et *graphe*. Les propos des élèves sont notés en italique ; le déroulement de la séance est présenté, à partir d'extraits, dans l'ordre chronologique.

3.6.1 Sylvain et Loïc :

Situation 1 :

1. L'équation de la parabole (en position oblique) *n'est pas une fonction* :

ACTIONS ET PROPOS DES ELEVES	COMMENTAIRES
Les élèves lisent les consignes : on demande une équation de la parabole, qui est alors en position oblique (l'équation est $1,28x^2-1,56xy+0,47y^2-8,41x+3,63y+10=0$).	
Loïc observe l'équation à l'écran, et formule : *ce n'est pas une fonction*.	Cette déclaration est motivée par l'aspect compliqué de l'équation (*elle est monstrueuse*).
Sylvain confirme : - *Ce n'est pas une fonction, … il y a deux images pour chaque...*	*« Ce n'est pas une fonction »* est contrôlé dans le système de représentation graphique (contrôle de type « vertical line test »).

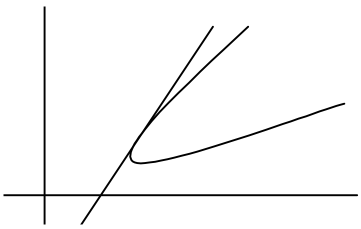
2. L'équation d'une tangente *se calcule en dérivant* :
On demande une équation de la tangente en Mo. Pour les élèves, cela signifie *dériver* l'équation de la parabole (*Il faut calculer l'équation de la tangente…Donc il faut dériver*).

3. On ne peut pas *dériver* l'équation de la parabole (en position oblique) :

ACTIONS ET PROPOS DES ELEVES	COMMENTAIRES
Sylvain propose de *dériver* l'équation ($1,28x^2-1,56xy+0,47y^2-8,41x+3,63y+10= 0$).	Pas de conflit avec le fait que l'équation *ne soit pas une fonction*.
Loïc : *Tu veux dériver ? Tu veux calculer à la main ?*	*Dériver*, c'est faire du calcul.

Ces expressions algébriques sont soumises à des contraintes qui nous permettent de préciser ce que signifie *dériver* pour les élèves :

ACTIONS ET PROPOS DES ELEVES	COMMENTAIRES
Loïc demande si l'équation ($1{,}28x^2-1{,}56xy+0{,}47y^2-8{,}41x+3{,}63y+10=0$) est *dérivable*. Sylvain : *Pour dériver, il faut mettre l'équation sous la forme y=... ou f(x) quand x.. ; on ne peut pas avoir des x et des y*.	Une pratique nouvelle (*dériver* l'équation) amène un nouveau contrôle sur la forme de l'équation (contrôle du système de représentation algébrique). Il peut s'agir pour Sylvain de faire rentrer l'équation dans la classe des objets rencontrés dans les exercices sur la *dérivation* en classe de mathématiques.
Sylvain affirme que l'équation *n'est pas une fonction* et ne peut pas être *dérivée*. Il formule un nouveau problème : *Comment on calcule une tangente quand on a pas une vraie fonction ?*	Sylvain assujetti *dériver* et *fonction* aux contrôles suivants : Pour Sylvain, les équation que l'on peut *dériver* sont de la forme « y=(expression de x) » et ces équations sont des *fonctions*. Cela sera explicité lors de la rédaction par *nous avons transformé l'équation en fonction* (décrivant l'action de placer la parabole dans une position où l'équation s'écrit y=...).
Dériver paraît difficile à Loïc : *Il faut dériver, ça me paraît chaud, quoique non en fait* (…). *Peut-on dériver quelque chose qui n'est pas une fonction ? Est-ce que c'est dérivable ce machin là ?*	Le contrôle sur l'action *dériver* est le même que celui permettant de déterminer si l'équation est une fonction : l'aspect compliqué de l'équation. Mais cela ne suffit pas à conclure pour la *dérivation*.
Loïc essaie de contourner le problème de la *dérivation* : il recherche une caractérisation géométrique de la tangente : *C'est une droite*	Loïc abandonne les pratiques du système de représentation algébrique (*dériver*) et se place dans le système de représentation graphique

qui passe par un point de la courbe. Il trace sur son brouillon le dessin suivant :  Cette stratégie n'aboutit pas et Loïc propose de déplacer la parabole : *pourquoi on la changerait pas de position, on la mettrait plus sympathique pour que l'équation elle soit mieux ?*	(où la parabole est vue comme un objet, une forme). On peut penser que les deux opérateurs (« *dériver* » et « définir la tangente comme *droite passant par un point de la parabole* ») sont respectivement associés aux deux objets graphe et courbe.

4. Discrimination d'une position particulière de la parabole :

ACTIONS ET PROPOS DES ELEVES	COMMENTAIRES
Sylvain cherche alors à rendre l'axe de symétrie de la parabole parallèle à l'axe des ordonnées. Il <u>prévoit</u> que les xy vont disparaître : *Regarde, en se débrouillant bien, regarde le xy il va disparaître*. (...) *Si on l'avait parfaitement parallèle, ça aurait été une courbe de type* x^2 (...) *il y a du x, du* x^2*, du y et de l'indépendant*. Sylvain ne parvient pas à faire disparaître les xy (le coefficient est 0,01), mais pour lui, c'est	Sylvain attribue à l'équation d'une parabole verticale la propriété de s'écrire $y=x^2$ ou $y=ax^2+bx+c$ (sans xy). Cette propriété résiste, bien que la manipulation rende difficile le positionnement vertical.

l'imprécision de la manipulation qui l'empêche de le faire : *on n'arrive pas à les faire très parallèles*. La parabole se cale en position verticale, l'équation est $2,38y=3,33x^2-10x+1,53$. Sylvain : *Tu peux dériver maintenant*. Loïc : *Elle est sympa, ça y est on a une parabole.*	Ainsi, comme cela a été dit plus haut, les expressions algébriques que l'on peut *dériver* s'écrivent « y=expression de x . Pour Loïc, par contre, le choix de la position verticale est motivé par la simplification de l'équation, la reconnaissance d'une équation connue. La position verticale est vue comme une bonne position où l'équation se simplifie

5. Les élèves obtiennent, à l'aide de l'opérateur « si f est une fonction, alors l'équation de la tangente au point $M_0(x_0;f(x_0))$ est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ », une équation de la tangente :

ACTIONS ET PROPOS DES ELEVES	COMMENTAIRES
Loïc met l'équation de la parabole sous la forme $y=3,33/2,38x^2-10/2,38x+1,53/2,38$ et calcule $f'(x)=6,66/2,38x-10/2,38$. L'équation de la tangente est *y=f'(xo)(x-xo)+f(xo)* où xo est remplacé par 1,14 et f(xo) est remplacé par $f(1,14)=3,33/2,38\times1,14^2-10/2,38\times1,14+1,53/2,38$. (1,14 est l'abscisse de Mo affichée par Cabri).	« x », dans l'expression de f, est l'abscisse d'un point (x est en relation avec le système de représentation graphique) et l'expression algébrique de f opératoire.

La tangente est tracée avec la macro-construction permettant de tracer une droite dont on connaît une équation cartésienne. Elle est validée par superposition avec « tangente vérif ».

Situation 2 :

1. Informations sur les contrôles de choix de la position verticale en situation 1 :

ACTIONS ET PROPOS DES ELEVES	COMMENTAIRES
Les élèves s'aperçoivent que la parabole ne peut plus atteindre la position verticale et que la stratégie mise en place en situation 1 ne fonctionne plus. Loïc propose de mettre la parabole en position horizontale : (…) *C'est mieux qu'une position quelconque*.	Loïc voit la position verticale comme une bonne position où l'équation se simplifie. La discrimination de certaines positions de la parabole est contrôlée dans le système de représentation algébrique au niveau de l'équation et ce contrôle ne permet pas de distinguer les situations 1 et 2.
Loïc approche la parabole de la position horizontale et Sylvain ne comprend pas que le coefficient de x^2 soit prêt de s'annuler alors que l'axe de la parabole n'est pas du tout parallèle à l'axe des ordonnées (il n'a pas remarqué que, cette fois, ce sont les x^2 et pas les y^2 qui disparaissent). Sylvain (parlant de l'équation de la parabole horizontale qui ne comporte plus de xy) : *c'est pas mieux, ça revient au même, tes y^2 t'en fait quoi* ?	Pour Sylvain, mettre la parabole en position horizontale ne permet pas de résoudre le problème comme en situation 1. La forme des expressions algébrique accessibles à la dérivation (y=expression de x) est associée à un contrôle du système de représentation graphique que ne satisfait pas la position horizontale.

2. Reconnaissance du caractère non symétrique de x et de y :

ACTIONS ET PROPOS DES ELEVES	COMMENTAIRES
La parabole se cale en position horizontale, l'équation est $3{,}08y^2-2{,}04x+9{,}23y=0$. Sylvain : (…) *Là je vois pas comment tu peux t'en sortir avec les y^2 quand même*.	La forme $x-f(y)=0$ empêche la stratégie précédente d'être opérante.
Sylvain propose un changement de repère (rotation de $-\pi/2$ autour de l'origine).	Ce changement de repère est contrôlé visuellement (avoir un repère dans lequel la parabole est verticale, tournée vers le haut). La dissymétrie des rôles de x et y est identifiée dans le système de représentation graphique (et ainsi, la parabole est reconnue comme graphe).
Loïc ne comprend pas ce qu'apporte le changement de repère. Distingue-t-il les rôles de x et de y, distingue-t-il situations 1 et 2 ?	Ce qui tend à confirmer que, pour Loïc, le critère de réussite de la situation 1 est la simplification de l'équation. La parabole est une courbe (objet autonome du système de représentation graphique). Le changement de repère ne modifie pas la nature de cette courbe (même forme).

3. Les élèves obtiennent, à l'aide de l'opérateur « si f est une fonction, alors l'équation de la tangente au point $M_0(x_0 ; f(x_0))$ est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ », une équation de la tangente :

ACTIONS ET PROPOS DES ELEVES	COMMENTAIRES
Les élèves effectuent un changement de repère correct relativement à leur intention ($X=-y$ et $Y=x$). L'équation de la parabole est calculée dans R' ($3.08X^2-2.04Y-9.23X=0$).	Le changement de repère est appliqué à Mo

Ils calculent, comme en situation 1, une équation de la tangente de la forme Y=f'(Xo)(X-Xo)+f(Xo). Un changement de repère inverse (-X=y et Y=x) permet d'obtenir l'équation de la tangente dans le repère par défaut R de Cabri.	(Xo est l'abscisse de Mo dans R'). La valeur de f(Xo) est calculée à partir de l'équation de la parabole dans R'. La tangente est tracée et validée par les élèves par superposition avec « tangente vérif ».

3.6.2 André et Rémi :

Situation 1 :

1. Une équation de tangente se calcule en dérivant :

ACTIONS ET PROPOS DES ELEVES	COMMENTAIRES
Les élèves lisent les consignes qui leurs demandent de tracer la tangente et d'en donner une équation. - *On doit calculer à la main* (parle de l'équation de la tangente),*… bon dériver alors*. - *C'est pas possible, on peut pas là… Ce qu'on peut faire, c'est changer l'équation de la parabole.* Les élèves recherchent une position pour la parabole : - Les y^2 disparaissent dans l'équation : *C'est déjà mieux*. - Le coefficient de xy diminue (0.06*)* : *C'est presque parfait*. - Il n'y plus de y^2 et de xy (l'équation est $3.39x^2$-10x-2.37y+1.55=0) : *C'est bien.* Loïc commente sur la nouvelle équation : *Je t'ai donné l'équation, je t'ai donné f(x).*	Trouver l'équation de la tangente signifie, *dériver* l'équation de la parabole Rémi exprime qu'on ne peut pas *dériver* l'équation et décide de bouger la parabole pour changer l'équation. Il parlera plus tard d'*équation arrangée*. Plus qu'une position, les élèves choisissent une équation conforme à la *dérivation.* L'équation est écrite de façon à fournir l'expression algébrique f(x) à *dériver*. *Dériver* opère sur des expressions algébriques de la forme y=(expression de x).

Rien n'indique dans le protocole que les élèves donnent un sens fonctionnel à ces expressions ou que la parabole en position verticale est reconnue comme graphe. La parabole est une courbe, dont certaines positions donnent des propriétés à l'équation (être *une équation connue,* se mettre sous la forme « y=expression de x »*,* être *dérivable*).

2. Opérateur « si f est une fonction, alors l'équation de la tangente au point $M_0(x_0 ; f(x_0))$ est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ » :

ACTIONS ET PROPOS DES ELEVES	COMMENTAIRES
Rémi et André : *L'équation* (de la tangente) *c'est f prime de a facteur de x moins a plus f de a.* Rémi : *tu fais la dérivée.* Les élèves obtiennent une équation de la tangente (*application de la tangente en a*). La tangente est tracée (utilisation de la macro). Elle est validée par superposition avec « tangente vérif ».	a et f(a) sont l'abscisse et l'ordonnée de Mo affichées à l'écran. La position verticale rend l'équation conforme à l'*application* de l'opérateur « <u>si</u> f est une fonction, <u>alors</u> l'équation de la tangente au point $M_0(x_0 ; f(x_0))$ est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ », nécessitant le traitement de la *dérivation* (*tu fais la dérivée*).

Situation 2 :

1. Informations sur les contrôles de choix de la stratégie en situation 1 :

ACTIONS ET PROPOS DES ELEVES	COMMENTAIRES
Les élèves s'aperçoivent que la parabole ne peut plus atteindre de position verticale et Rémi propose une autre position. Les élèves rapprochent assez rapidement la parabole de la position horizontale. Ils cherchent à simplifier l'équation : *On peut*	Pour André et Rémi, le contrôle de mise en œuvre de la stratégie précédente est la simplification de l'équation en vue de lui appliquer les opérations de dérivation, contrôle qui leur permet de sélectionner la position horizontale en situation 2.

virer les x. Finalement, l'équation $12y^2-8x+36y+39=0$ apparaît à l'écran. Cette équation est estimée *sympathique*, la *meilleure* qu'ils puissent obtenir, bien qu'ils semblent ne pas savoir comment la traiter.	

2. Reconnaissance du caractère non symétrique de x et y :

ACTIONS ET PROPOS DES ELEVES	COMMENTAIRES
Les élèves ne peuvent toutefois plus appliquer la stratégie précédente et Rémi propose de remplacer les x par des y et les y par des x dans l'équation $12y^2-8x+36y+39=0$: *On peut essayer de changer toutes les variables.* (…) *Les x on les remplace par des y et les y on les remplace par des x.*	Rémi cherche à obtenir une équation conforme aux calculs de la *dérivation*. Les variables x et y se distinguent par leur dissymétrie dans l'écriture des équations accessibles pour eux ces calculs (forme y=(expression de x)), sans que cette dissymétrie ne prenne de sens dans le système de représentation graphique.
Le problème de la légitimité d'un tel échange se pose aux élèves. Rémi propose alors un changement de repère (rotation de $-\pi/2$ du repère, Y=x et X=-y): *Ouais, on dit qu'on a une rotation. Après on fait (...) On dit que x égal (...) moins y et on dit que y égal (...) moins x...non ?*	La rotation permet de légitimer l'interversion des symboles x et y.

3. Interprétation de a, de f(a), de x :

ACTIONS ET PROPOS DES ELEVES	COMMENTAIRES
Relevé du brouillon des élèves : $12y^2-8x+36y+39=0$: $12X^2-8Y-36X+39=0$ $f(x)=1.5X^2-4.5X+2.87$	

f'(x)=3X–4.5 *f'(a)(x-1.74)+f(a)* *y=-1.22x–17.14* *-1.22x-y-17.14=0*	Le changement de repère n'est pas appliqué à Mo : les valeurs données à a et f(a) restent l'abscisse et l'ordonnée de Mo dans le repère initial de Cabri. L'équation de la tangente est écrite avec les variables petit x et petit y et la tangente est tracée par les élèves dans le repère de Cabri.
Les élèves travaillent avec l'équation $12X^2$-8Y-36X+39=0 comme en situation 1, dans le repère de Cabri.	L'interprétation graphique du changement de variable (rotation du repère) permet d'écrire correctement ce changement (x=Y et y=-X). Le reste du problème (opérateur «équation de la tangente ») se résout dans le système de représentation algébrique, seule l'interprétation de a et f(a) relève du système de représentation graphique. Cependant cette interprétation n'est pas adaptée : a et f(a) ne sont pas des coordonnées X et Y dans le nouveau repère, mais sont les coordonnées de Mo dans le repère de Cabri visible à l'écran.

Les élèves cherchent à obtenir une équation de la forme y=f(x) qui leur permette de traiter (au sens des règles d'écriture de la dérivation) une expression de x et d'*appliquer* l'opérateur « l'équation de la tangente au point $M_0(x_0;f(x_0))$ est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ». Sur leur brouillon, l'écriture x de f(x) et de f'(x) reste minuscule et n'est pas affectée par le changement de variable : f(x) et f'(x) sont un formalisme, une écriture symbolique qui permet d'exprimer l'expression à traiter (au sens du traitement des écritures) ; x et y ne prennent ni le sens de quantités variables, ni le sens de quantités inconnues.
Les valeurs données à X et Y sont l'abscisse et l'ordonnée d'un point de la parabole dans le repère de Cabri et ne sont pas l'abscisse et l'ordonnée d'un point de la parabole dans le

nouveau repère. La parabole est lue dans le repère à l'écran et, ainsi, ne peut pas être reconnue comme graphe.

Il y a en quelque sorte un cloisonnement des systèmes de représentations. L'opérateur « l'équation de la tangente au point $M_0(x_0;f(x_0))$ est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ » est un processus de traitements symboliques, sans relation avec le système de représentation graphique. L'équation est un « *nom* » pour la parabole : ce n'est pas la parabole qui représente une certaine relation entre x et y décrite par l'équation, mais l'équation qui désigne la parabole. Certaines positions de la parabole rendent l'équation accessible à ces traitements d'écriture.

4. La tangente est invalidée :

ACTIONS ET PROPOS DES ELEVES	COMMENTAIRES
La tangente est tracée (à l'aide de la macro permettant de tracer une droite dont on connaît une équation cartésienne) dans le repère de Cabri. La tangente est invalidée. Les élèves passent le reste de la séance à reprendre leurs calculs.	Les rétroactions du milieu ne permettent pas aux élèves de modifier leur stratégie. La tangente tracée est suffisamment proche de « tangente vérif » pour que les élèves pensent avoir fait une erreur de calcul (notamment, leur tangente passe par Mo).

3.7 Caractérisation des conceptions « graphe » et « courbe »

Pour Sylvain et Loïc, comme pour André et Rémi, trouver l'équation de la tangente à la parabole signifie *dériver* l'équation de la parabole et mettre en œuvre l'opérateur « l'équation de la tangente au point $M_0(x_0;f(x_0))$ est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ». Cependant, cet opérateur est assujetti par chacun des deux groupes à des contrôles différents, ces contrôles permettent de caractériser des conceptions différentes.

3.7.1 Conception « graphe » (le cas de Sylvain et Loïc):

Des contrôles du système de représentation graphique (reconnaître la parabole comme un graphe, lire la situation dans un nouveau repère) sont associés à des outils du système de représentation algébrique (opérateur « l'équation de la tangente au point $M_0(x_0;f(x_0))$ est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ », changement de variables). Ces relations permettent à l'activité des élèves de se référer à la parabole comme graphe d'une fonction et à x et y comme variable liées par une équation ou par un graphe. Voici la description des éléments relatifs à l'opérateur principal :

- **R :** « L'équation de la tangente à la parabole d'équation y = [expression de x] au point M0(x0 ; y0) est y = (*dérivée* de [expression de x] en x0)(x-x0) + y0 ».
- **L :** graphique et algébrique.
- ∑ sur le domaine de validité de **R** : R est opératoire lorsque la parabole est le graphe d'une fonction (à une abscisse x ne correspond qu'une seule ordonnée y) ; alors l'équation de la parabole est de la forme « y = représentation algébrique de la fonction ».

3.7.2 Conception « courbe » (le cas d'André et Rémi) :

Le contrôle associé à l'opérateur « l'équation de la tangente au point $M_0(x_0;f(x_0))$ est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ » est algébrique (équation de la forme « y=expression de x »). La parabole est un objet graphique dont l'équation est un *nom* et certaines des positions de cette parabole sont plus ou moins opérationnelles du point de vue du contrôle sur l'équation. Les transformations dans le système de représentation algébrique (changements d'écritures X=-y et Y=x) n'opèrent pas sur les objets du système de représentation graphique (le point M_0, la tangente). Et ainsi, les actions des élèves sont réduites à des manipulations symboliques. Voici la description des éléments relatifs à l'opérateur principal :

- **R :** L'équation de la tangente à la parabole d'équation y = [expression de x] au point M0(x0 ; y0) est y = (*dérivée* de [expression de x] en x0)(x-x0)+ y0.
- **L :** algébrique
- ∑ sur le domaine de validité de **R :** R est opératoire lorsque l'équation de la parabole est bien formée (y = [expression de x]).

3.8 Conclusion

L'analyse montre que les dimensions « actions », « contrôles » et « systèmes de représentation » jouent pour la différenciation des conceptions. On voit en particulier comment celles-ci peuvent se différencier au niveau des contrôles. En effet, une partie importante de l'activité des deux groupes est conduite dans le système de représentation algébrique et les procédures (ensemble des opérateurs) engagées pas les deux binômes sont très proches. Pour André et Rémi, la possibilité de mettre en œuvre l'opérateur « tangente » est assurée par un contrôle sur une bonne écriture de l'équation : l'équation est l'un des *noms* de la courbe (certains de ces *noms* sont accessibles au traitement symbolique de la *dérivation*). Pour Sylvain et Loïc, la mise en œuvre de l'opérateur tangente du système algébrique est assurée par un contrôle graphique (type « vertical line test ») garantissant la nature

fonctionnelle de la relation entre x et y. Ainsi, la parabole est reconnue par les élèves comme graphe et cela permet au calcul algébrique de se rapporter aux manipulations de relations entre variables. Cela permet en particulier la gestion du changement de variable en situation 2.
Nous rejoignons et précisons une partie du travail de Sierpinska en montrant différents types de relations pouvant se nouer entre les systèmes de représentation algébrique et graphique. Les travaux de Sierpinska nous permettaient de penser que la représentation graphique d'une fonction pouvait être conceptualisée comme une ligne, sans identification d'une relation entre abscisse x et ordonnées y ; par ailleurs, ils montraient que la représentation algébrique pouvait être vue comme un *nom* et perdre son caractère opératoire. Notre travail montre comment ces deux aspects peuvent intervenir dans la résolution d'un problème par les élèves (conception *courbe*). Il nous montre aussi que la conceptualisation *graphe* nécessite la construction d'un contrôle assurant le lien entre la relation fonctionnelle définie par le graphe et celle définie par l'expression algébrique.

Nous rejoignons et précisons une partie du travail de Sierpinska en montrant différents types de relations pouvant se nouer entre les systèmes de représentation algébrique et graphique. Les travaux de Sierpinska nous permettaient de penser que la représentation graphique d'une fonction pouvait être conceptualisée comme une ligne, sans identification d'une relation entre abscisse x et ordonnées y ; par ailleurs, ils montraient que la représentation algébrique pouvait être vue comme un *nom* et perdre son caractère opératoire. Notre travail montre comment ces deux aspects peuvent intervenir dans la résolution d'un problème par les élèves (conception *courbe*). Il nous montre aussi que la conceptualisation *graphe* nécessite la construction d'un contrôle assurant le lien entre la relation fonctionnelle définie par le graphe et celle définie par l'expression algébrique.

Chapitre 4 : Conceptions du concept de fonction

1. Jalons historiques :

1.2 Introduction :

Nous proposons dans cette partie une lecture de l'histoire du concept de fonction. Parmi la riche littérature existante sur le sujet[17], nous avons choisi d'appuyons notre analyse sur deux articles très complets de Youschkevitch (1976) et Monna (1972). Nous identifions trois périodes, qui constitueront une référence pour trois conceptions de la notion de fonction : conception courbe, conception algébrique, conception objet. Ces conceptions seront caractérisées en fin de chapitre.

Notre étude se limite à la fonction d'une variable réelle à valeurs réelles, définie par : Une fonction f de la variable réelle x est une relation entre des pairs d'éléments de deux sous ensembles X et Y de **R**, qui associe à chaque élément x de X un et un seul élément y de l'ensemble Y. Cette relation peut être définie de plusieurs manières : verbalement, par une table de valeurs (x,y), par une expression algébrique, par un graphe, etc. ; et ainsi, pourra mobiliser les différents systèmes de représentation associés.

On trouve des manifestations du concept de fonction bien avant que celui-ci ne soit nommé comme tel. Youschkevitch (1976) en identifie dans l'antiquité et au $14^{\text{ième}}$ siècle. Au $14^{\text{ième}}$ siècle (écoles de Paris et d'Oxford), les problèmes portent sur l'étude des phénomènes « naturels ». Les mathématiques sont un outil pour l'étude de ces phénomènes. Les lois quantitatives de la nature (celles de la cinématique par exemple avec les variations continues

[17] En particulier, Barbin (1995), Dhombres (1987a, 1987b, 1988, 1992, 1993, 1995, 1998)

de la vitesse, de la distance) sont envisagées comme des lois fonctionnelles (sans être nommées comme telles). Les notions générales de variable et de fonction sont exprimées sous une forme géométrique ou mécanique ; chaque cas particulier de dépendance étant défini verbalement ou par un graphe.

> *"Sure I am that the ideas of both Oxford and Paris schools of natural philosophy played a noticeable role in the making of mathematics of modern times and, in particular, in the development of the general notion of function, still I do not maintain that this role was dominant, the more so as a new interpretation of functionality came to the fore in the 17th century (Youschkevitch, 4.)".*

L'arrivée des outils de l'algèbre bouleverse considérablement le concept de fonction. Youschekitch signale qu'il est difficile de déterminer l'influence du travail sur la notion de fonction précédant l'arrivée de ces outils sur le travail qui fera suite. Nous avons donc fait le choix de commencer notre étude à partir du 17ième siècle. Cette position est en grande partie justifiée par le fait que nous cherchons à identifier les conceptions de sujets qui ont accès aux outils de l'algèbre.

1.3 Conception courbe : les travaux de Descartes puis de Leibniz et Newton.

Le développement de l'algèbre et du concept de nombre (réels et complexes) au 17^{ième} siècle donne au concept de fonction un essor important. Le travail de Viète (1651) sur les modes d'expression des variables et des paramètres (dénotés par des consonnes et des voyelles) rend possible l'écriture d'équations algébriques et d'expressions contenant des variables et leurs coefficients (arbitraires). Descartes et Leibniz, à la suite de Viète, viennent éclairer sous un nouveau jour le concept de fonction. Les problèmes sont toujours ceux de l'étude des lois de la nature envisagées comme des relations entre des valeurs numériques (représentant des quantités physiques). Une grande attention est alors portée sur la précision des mesures physiques et des instruments utilisés. L'étude de la relation entre une trajectoire curviligne et les forces qui contraignent cette trajectoire occupe particulièrement l'analyse infinitésimale qui est en train de se construire. Le concept de fonction n'est pas encore nommé comme tel. Il apparaît implicitement comme la méthode des mathématiques du moment. Les relations entre les grandeurs physiques étaient déjà depuis longtemps décrites verbalement, par des graphes ou des tables. Apparaît alors un nouveau mode d'expression relatif à la méthode analytique : celui des expressions algébriques.

Cependant, les courbes restent premières, et les expressions analytiques sont des outils permettant leur étude. Dans *La géométrie* (1637), Descartes lie, pour la première fois, courbe et une relation entre en x et y (représentant des quantités variables) de façon à permettre le calcul de valeurs d'une des variables connaissant certaines valeurs de l'autre variable [18] :

> *« Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi on aura une infinité de divers points tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrit la ligne courbe qui est demandée »[19].*

L'équation est envisagée comme un moyen pour décrire une relation entre quantités variables et permet le calcul d'une de ces quantités lorsque l'autre est connue. La référence reste cependant géométrique : c'est celle d'une relation entre les points d'une courbe et ceux d'une ligne droite. Descartes effectue d'ailleurs une classification des courbes dites *géométriques* : les courbes décrites par des équations du premier degré, par des équations du second degré, etc. Les courbes échappant à ces *genres* sont appelées *mécaniques*. Le rôle donné aux équations constitue une forme de révolution. Mais ne constitue pas un retournement complet : les expressions algébriques, avec les opérations qu'elles permettent, sont un outil d'étude des courbes : l'algébrique est au service du géométrique, qui reste premier.

La découverte des développements en séries infinies et du calcul infinitésimal apporte la possibilité d'élargir le champ des relations accessibles aux expressions analytiques. Mais la même relation entre outils de l'algèbre et courbes géométriques est présente dans les problèmes traités par Leibniz dans la deuxième moitié du 17ième siècle. Ceux-ci sont encore placés dans un cadre géométrique : les fonctions elliptiques sont des arcs de section conique ; les intégrales représentent des aires, des distances, des volumes ; les différentielles représentent des segments infiniment petits, les dérivées représentent les quotients de cotés infiniment petits de triangles ou des vitesses, etc. Par exemple, *dy* est défini par : la différentielle *dy* de l'ordonnée d'une courbe est un segment dont le quotient avec *dx*, accroissement arbitraire de l'abscisse, est égal au quotient de l'ordonnée de cette abscisse avec la sous-tangente. Le temps est un argument universel et les variables dépendantes sont interprétées comme des quantités physiques possédant une variation continue. Leibniz appelle

[18] Les citations de la partie historique sont issues de Monna et Youschkevitch (1976).
[19] *Oeuvres de Descartes*, éd. ADAM &TANNELY, t. VI, Paris 1903, p386.

fonction toutes portions de segments obtenues en construisant l'infinité de segments d'un point fixé aux points d'une courbe donnée.
Cette brève présentation nous permet de préciser certains éléments de la conception de fonction en oeuvre. Les problèmes sont ceux de l'étude des phénomènes « naturels » et des relations entre quantités physiques ou de l'étude des courbes géométriques. La résolution de ces problèmes engage donc des opérateurs liés aux mesures et à l'utilisation des instruments de mesure et des contrôles relatifs à la précision des instruments et des mesures. On trouve aussi des contrôles propres aux phénomènes étudiés. On pourra noter par exemple, des contrôles justifiant l'association des trajectoires observées aux objets géométriques alors connus (paraboles, ellipses, etc.). La géométrie offre des outils et un mode de représentation spécifiques permettant la manipulation des courbes, alors assimilées à l'idée de fonction. Ces courbes sont décrites et classées au moyen d'expressions algébriques qui permettent de faire du calcul. On trouvera donc, parmi les opérateurs, les règles de manipulations de ce système de représentation. Les contrôles qui valident les solutions des problèmes se trouvent du coté de la géométrie d'une part et dans le champ de la physique et de ses mesures d'autre part, en permettant en particulier la construction et la validation de prévisions.

1.4 Transition vers une autre conception de la notion de fonction :

Bernoulli, contemporain de Leibniz, publie en 1698[20] un article dans lequel l'entrée sur la fonction se fait par l'expression analytique. L'article propose de résoudre le problème suivant :

> *« trouver la courbe BFN telle que ses appliquées FP élevées à une puissance donnée, ou généralement telle, que les fonctions quelconques de ces appliquées PZ, exprimées par d'autres appliquées PZ… ».*

« *Fonctions quelconques* » désigne ici l'ensemble des expressions analytiques alors connues. Leibniz exprime sa satisfaction devant cet usage du terme fonction. Ce dernier engage alors avec Bernoulli une discussion sur le moyen le plus approprié de noter une fonction[21]. Ceci marque un renversement dans l'usage du terme de fonction : il prend le sens d'« expression analytique ». Cette tendance prendra toute son ampleur avec Bernoulli (1694-1718) et Euler (1748).

[20] *Opera omnia*, I-IV, Lausanae et Genevae, 1742.
[21] Ils proposeront des indices du type : $x^{|1}, x^{|2}, y^{|1}\ldots$

1.5 Conception expression analytique :

Dans un article publié en 1718[22], Bernoulli définit explicitement une fonction comme expression analytique :

> *« On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes ».*

La fonction de la variable x est alors désignée par φx. Dans cette nouvelle définition, « de quelque manière que ce soit » désigne toujours les expressions alors connues en analyse[23].
Plus tard, Lagrange (1788), dans *Mécanique analytique*, présente la mécanique comme une partie de l'analyse. L'analyse, dit-il, se distingue de la mécanique par le fait particulier qu'elle ne nécessite pas l'appel à des figures géométriques. Ainsi, les concepts du calculus perdent progressivement leurs références géométriques et mécaniques, comme cela était le cas chez Leibniz, et sont formulés algébriquement. Ils apparaissent comme des concepts indépendants.
Le concept de fonction se développe considérablement avec le travail d'Euler (élève de Bernoulli). Dans *Introductio in analysin infinitorum* volume 1 (1748), celui-ci définit le terme fonction par :

> *Une fonction d'une quantité variable est une expression analytique composée de quelque manière que ce soit à partir de cette quantité, de nombre et d'autres variables.*

Il est significatif de noter qu'Euler est alors le premier à s'interroger sur les limites du terme « expression analytique ». Ceci l'amène à énumérer les règles de construction de ces expressions. Ces règles incluent les opérations algébriques, d'autres types d'opérations (*transcendantes*) – exponentielles, logarithmiques et des transformations définies au moyen de l'intégration. Pour Euler, toute fonction s'exprime sous la forme : $Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + \ldots$, où α,β,γ sont des nombres réels. Cette idée lui permet de classer les fonctions : les fonctions *explicites* sont celles dont on connaît l'expression $Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + \ldots$, les fonctions *implicites* (définies en général comme solution d'équations fonctionnelles) sont celles dont on

---

[22] *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres*, in Mém. Acad. Roy. Sci., Paris. 1718.
[23] Bernoulli dans une lettre à Leibniz, (Leibnizens mathematische schriften, hsg. Von C. I. Gerhardt, I-VII, Berlin-halle, 1849-1863)), parle de sa découverte du développement en série infinies :

$$\int ndz = nz - \frac{1}{1.2}z.z.\frac{dn}{dz} + \frac{1}{1.2.3}z^3.\frac{ddn}{dz^2} - \ldots$$

ne connaît pas le développement. Mais Euler ne doute pas de l'existence d'un tel développement (excepté éventuellement en des points isolés). Les développements en séries, et les calculs que ceux-ci permettent, constituent alors le principal instrument d'étude des fonctions et des équations fonctionnelles et différentielles.

Les courbes ne sont cependant pas abandonnées mais arrivent en second plan. Le volume 2 de *Introductio in analysin infinitorum* est consacré à l'étude des courbes planes. Euler procède à une classification de ces courbes sous-tendue par le fait que chaque courbe plane est représentée par une fonction (c'est-à-dire une expression analytique). Ainsi les courbes *continues* sont celles qui sont désignées par une seule expression analytique, les courbes discontinues sont celles qui sont désignées part des expressions différentes sur différentes parties de leur domaine (elles sont donc composées de courbes continues). Il est à signaler que cette définition de la continuité est différente de l'acception qui en est faite aujourd'hui. Par exemple, la fonction inverse définie par $f(x)=\frac{1}{x}$ désigne une courbe continue. De même, une fonction, continue par morceaux du point de vue actuel, est discontinue selon la définition donnée par Euler. Le registre analytique devient donc la référence de classification des fonctions et est en rupture avec la représentation des courbes.

Si on trouve dans les travaux d'Euler essentiellement des fonctions dont on connaît une représentation analytique, l'importance des fonctions non analytiques est cependant reconnue. La résolution des équations fonctionnelles et différentielles oblige en effet cette reconnaissance. L'exemple de l'équation des cordes vibrantes est représentative de ce fait : la solution fait intervenir une fonction « arbitraire » dans la mesure où cette fonction dépend de la position initiale de la corde. L'évocation mentale des positions initiales possibles de la corde justifie pour Euler d'inclure, parmi les fonctions solutions, les fonctions discontinues (composées par exemple de fonctions *continues* (au sens d'Euler) par morceaux).

Le problème des cordes vibrantes est représentatif des limites de la définition d'une fonction comme expression analytique : il existe des fonctions n'ayant pas une représentation analytique qui sont solutions de problèmes centraux pour l'époque (les solutions du problème des cordes vibrantes a occupé beaucoup de mathématiciens du moment).

Voici un autre phénomène décrit par Euler lui-même, illustrant une autre limite de la définition donnée à « fonction ». Euler fournit de nombreux exemples d'une même quantité pouvant être représentée par des expressions différentes : $w=\sqrt{a^2+z^2}$ et aussi représentée par la fonction de y $w = \dfrac{a^2 + y^2}{2y}$ avec $z = \dfrac{a^2 - y^2}{2y}$; ou plus simplement $v = a^4 - 4a^3z + 6a^2z^2 - 4az^3 + z^4$ est aussi la fonction $v = y^4$ avec $a - z = y$.

Bien que l'on trouve dans les écrits d'Euler une définition[24] de fonction indépendante de la référence à l'expression analytique, celle-ci restera annexe au travail de Euler sur les fonctions effectivement mis en œuvre.

En conclusion, nous dirons que le concept de fonction, défini comme expression analytique, ne nécessite plus de référence à la géométrie ou aux champs expérimentaux de la physique ou de la mécanique. Il est étudié en soi. Les problèmes portent sur la recherche des développements en série, la résolution des équations fonctionnelles ou différentielles. Les modes de validations de ces problèmes sont relatifs aux règles de manipulation des expressions analytiques autorisées et engagent des preuves avec des règles logiques. Les problèmes de la mécanique sont alors présentés, dans l'exposé des théories, comme des applications. Il est intéressant de noter cependant que, devant les contradictions apportées par le problème des cordes vibrantes, Euler a recours à des justifications physiques de ses intuitions (existence de solutions de l'équation des cordes vibrantes non *continues*), les outils du champ de l'analyse alors disponibles ne lui permettant pas d'en trouver d'autres.

1.6 Limites d'une définition de fonction comme expression analytique : transition d'une conception expression analytique vers une conception objet

La première critique qui a été faite à Euler concerne sa classification des fonctions mixtes, c'est-à-dire des fonctions définies sur des intervalles différents par des expressions analytiques différentes. Cauchy, dans son Mémoire sur les fonctions continues (1844), fournit une critique à partir de l'exemple simple suivant : la fonction définie par $y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ est discontinue du point de vue de Euler, mais est aussi représentée par $y = \sqrt{x^2}$, elle est donc continue de ce même point de vue. Ainsi, la distinction entre fonctions continues et discontinues, justifiée par l'identification « fonction » et « expression analytique » apparaît intenable.

---

[24] Dans la préface de Institutiones calculi differentialis (1755), Euler dit (traduction du latin de Youschkevitch) *: If some quantities so depend other quantities that if the latter are changed the former undergo change, then the former quantities are called functions of the letter. This denomination is of broadest nature and comprises every method by means of which one quantity could be determined by others.*

Une autre critique est apportée par la théorie des fonctions trigonométriques. Euler niait la possibilité de représenter par une série de fonctions trigonométriques une fonction définie sur différents intervalles par différentes expressions analytiques (cela contredisait sa classification des fonctions et l'identification « fonction » et « expression analytique »). Fourier, en 1805, écrit :

> *« Il résulte de mes recherches (...) que les fonctions arbitraires même discontinues peuvent toujours être représentées par des développements en sinus ou cosinus d'arcs multiples, et que les intégrales qui contiennent ces développements sont précisément aussi générales que celles où entrent les fonctions arbitraires d'arcs multiples. Conclusion que le célèbre Euler a toujours repoussée ».*

Fourier suppose que toute fonction peut être développée en série de fonctions trigonométriques, sans pouvoir offrir d'analyse convaincante de cette intuition. Il faudra attendre le développement des outils de l'analyse par Cauchy[25] (en particulier la construction de la notion de limite, sur lesquels s'appuient les notions de continuité, d'intégrabilité, de convergence d'une série) pour exprimer les conditions permettant d'assurer le développement d'une fonction en série (entière ou de Fourier). Le domaine des fonctions ayant une représentation analytique s'étendra alors considérablement : Dirichlet[26] montre que toute fonction continue monotone sur un intervalle peut être développée en une série de Fourier convergente vers cette fonction. Weierstrass (1885) établit que toute fonction continue sur un intervalle fermé peut être représentée sur cet intervalle par une somme de séries polynomiales uniformément convergentes.

1.7 Conception objet :

1.7.1 Un exemple en introduction :

L'exemple qui suit est issu du cours de Baire intitulé « Fonctions Discontinues » (1905, Collège de France)[27]. Baire expose en introduction de son cours deux façons de montrer qu'il existe des séries convergentes de fonctions continues dont la somme est une fonction non continue. Dans cette introduction, Baire s'intéresse aux fonctions discontinues limites de

---

[25] Cauchy *Cours d'Analyse* (1821) et *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823), in *Cauchy Œuvres complètes*, 2 séries, vol III, paris 1897.

[26] Lejeune-Dirichlet (1929), *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, in Gesalmmelte Werke, Bd. I. Berlin (1989).

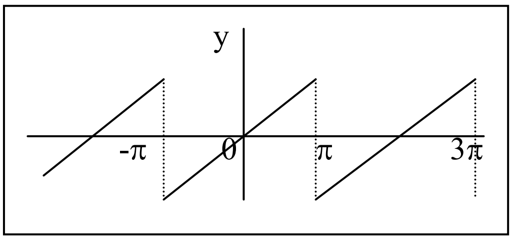
[27] réédité en 1995 par les Editions Jacques Gabay

(série de) fonctions continues. Cet exemple est illustratif de deux conceptions différentes (conception expression analytique et concept objet) en œuvre pour résoudre la même question. Nous allons montrer en quoi ces deux conceptions se différencient au moyen du quadruplet P, R, L, Σ. Si l'une des solutions au problème est qualifiée comme relevant d'une conception analytique et l'autre d'une conception objet, nous n'établissons pas de hiérarchie qualitatives entre ces deux conceptions. Il s'agit de deux solutions à une tâche donnée et non d'un quelconque rapport de Baire à la notion de fonction.

Le problème est d'exhiber une série de fonctions continues dont la limite est discontinue. Baire en propose trois solutions.

Solution 1 :

La série de fonctions continues $\sum(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$ est convergente pour tout x, mais représente une fonction discontinue. Elle est représentée *géométriquement* par une succession de segments de droites et de points isolés (qui ne sont pas marqués sur la figure, et qui, sur la figure de Baire, sont signalés par des petits cercles centrés sur (-π , 0) ; (π , 0) ; (3π , 0)) :



Preuve proposée par Baire :

Baire choisit une détermination de la fonction complexe log (1+z), dont on connaît le développement en série entière pour $|z| < 1$.

Par manipulation de la série imaginaire de log (1+z) et séparation des parties imaginaire et réelle, Baire obtient l'égalité :

$\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots$: cette série converge pour -π < x < π

Puis Baire étudie la fonction la fonction représentée par $f(x) = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots$:

- La fonction vaut $\frac{x}{2}$ pour $-\pi < x < \pi$ et tous les termes de la série sont de période 2π.

  La série **a donc une valeur connue** pour $-\pi < x < \pi$; $3\pi < x < 5\pi$ et $-\pi > x > -3\pi$, etc….
- Pour les valeurs de x égales à π ; 3π ; 5π et $-\pi$…, **la série a tous ses termes nuls** et converge donc vers 0.
- La série converge donc sur R et représente une fonction f(x) définie sur R.

La fonction f(x) discontinue. Elle est représentée *géométriquement* par une succession de segments de droites et de points.

<u>Les opérateurs R utilisés par Baire pour la solution 1 sont</u> :

- Calculer la somme $\sum_{0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$: c'est-à-dire, trouver une représentation algébrique de la fonction représentée par la série. Cette représentation est x/2 pour $-\pi < x < \pi$.
- Evaluer la série pour tout x réel :
  - La somme x/2 est une évaluation de la série pour $-\pi < x < \pi$.
  - La périodicité du terme général de la série permet l'évaluation pour tout x sauf pour $x= (2k+1)\pi$.
  - En remplaçant x par chaque valeur $(2k+1)\pi$, on peut évaluer la série (chaque terme de la série est nul).
- Tracer une représentation « *géométrique* » de la fonction définie par la série connaissant ces évaluations.

Les opérateurs sont donc essentiellement des opérateurs de manipulation d'expressions analytiques et d'évaluation de ces expressions pour certaines valeurs.

<u>Les systèmes de représentation L mobilisés sont</u> :

- les expressions analytiques

- les présentations « *graphiques* » obtenues à partir de ces expressions algébriques : graphe de points (x , f(x)).

<u>Les contrôles associés Σ sont</u> :

- des règles de raisonnement logique pour construire la solution

- une règle assurant la convergence d'une série : si on peut évaluer ou calculer la somme d'une série en x_0, alors cette série est convergente en x_0.
- des contrôles sur les problèmes de continuité :
  - Les fonctions « sommes finies de fonctions sin nx /n » sont continues.
  - Le passage à la limite peut amener des discontinuités.
  - Une fonction dont la représentation « *géométrique* » fait des sauts (des points et des segments de droites) est discontinue (cette représentation permet de mieux voir les sauts des évaluations de f).

Les contrôles sont donc mobilisable lorsque l'on sait évaluer la fonction ou que l'on connaît une représentation graphique de cette fonction.

La classe des problèmes associés :

Ces opérateurs, contrôles et systèmes de représentations permettent :

- l'étude de séries dont on connaît une expression algébrique du terme général et qu'il est possible d'évaluer.
- le diagnostique de discontinuités ponctuelles lorsqu'on connaît le graphe ou les valeurs prises par la fonction (c'est bien ce type de discontinuité que présente l'argument de log(1+z)).

Solution 2 :

Baire se donne *a priori* une fonction discontinue f et il construit une suite $(f_n)_{n\in N}$ telle que pour chaque valeur x_0 de x on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ (la suite (f_n) a pour limite f).

Baire commence par traiter un exemple. Il choisit une fonction f définie par f(x) = 0 pour $-1 \leq x \leq 1$ sauf en x = 0 où elle est égale à 1.

Il considère alors la fonction f_n est définie par :

$f_n = 0$ pour $-1 \leq x \leq -1/n$ et $1/n \leq x \leq 1$.

$f_n = 1$ pour $x = 0$.

$f_n(x) = 1 + nx$ pour $-1/n \leq x \leq 0$

$f_n(x) = 1 - nx$ pour $0 \leq x \leq 1/n$.

La fonction f_n est continue.

Et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ car :

- Si x = 0, alors quel que soit n, $f_n = 1$ et $f_n = f$.

- Si x différent de 0, il existe p, tel que pour n > p on a 1/n < |x|. A partir de ce moment, on a $f_n(x) = 0$ et comme f(x) = 0, la propriété est encore vraie.

Les opérateurs R utilisés par Baire pour la solution 1 sont :

- Définir une fonction f (ayant un point de discontinuité) par désignation des valeurs prises par la fonction.
- Définir une fonction par morceaux : par désignation des valeurs prises par la fonction ou par représentation algébrique de f(x).
- Calculer de la limite par morceaux :
  - Soit par évaluation de la suite pour tout n.
  - Soit par évaluation de la suite à partir d'un certain rang n. Pour chaque valeur de x, les termes de la suite sont tous égaux à la valeur prise par la fonction en x à partir d'un certain rang.

Les systèmes de représentation L mobilisés sont :

- La représentation analytique d'une fonction.
- Les représentations formelles :
  - Quantificateurs (pour tout x, quelque soit n, à partir d'un certain rang, il existe)
  - Majorations
  - Limites : on pourrait qualifier ce registre de registre des limites (référence à Cauchy, qui fonde son analyse sur l'idée de limite)

Les contrôles associés ∑ sont :

- Une fonction constante sur un intervalle sauf en un point est discontinue.
- Une fonction qui se raccorde par morceaux est continue.
- Sur la convergence d'une suite de fonctions vers une fonction : si, pour tout x, la suite fn(x) est égale à f(x) à partir d'un certain rang, alors la suite converge vers f .
- Si une suite (Un)n>0 tend vers 0 alors pour tout x, alors on peut trouver une valeur n telle que 1/n est plus petit que abs(x).

La classe de problèmes associés :

Ces opérateurs, contrôles et systèmes de représentations permettent de démontrer que toute fonction arbitraire discontinue en un point seulement est limite de fonctions continues. Les outils permettent de considérer une classe de fonctions définies par un comportement plus ou moins régulier (type de discontinuité) que l'on peut approcher par des fonctions continues. Cette classe de problèmes est atteinte par une généralisation de la solution 2 :

Généralisation de la solution 2 :

Soit f(x) définie pour $a \le x \le b$ et qui soit continue en tout point de cet intervalle sauf pour la valeur $x = c$.

Soit l'intervalle ($c-\alpha_n$; $c+\alpha_n$), α_n étant un nombre positif qui tend vers 0 quand n croît indéfiniment.

Soit f_n définie par :

f_n est égale à f pour toute valeur de x prise dans l'intervalle (a ; b) en dehors de l'intervalle ($c-\alpha_n$; $c+\alpha_n$) et aussi pour $x = c$.

Dans chacun des deux intervalles (c ; $c+\alpha_n$) et ($c-\alpha_n$; c), fn variera linéairement (si c est une des extrémités de (a ; b), on ne considère qu'un ce ces intervalles).

On reconnaît que la fonction f_n ainsi définie est discontinue et tend vers f.

Les opérateurs, contrôles et registres sont les mêmes que dans l'exemple 2, sauf qu'il n'est pas nécessaire de donner l'expression de fn sur le raccordement (cela n'était d'ailleurs pas nécessaire dans l'exemple 2).

Que nous apprennent ces exemples ? :

Baire dit à propos des exemples 1 et 2 (nous soulignons) :

> *« Il y a lieu d'appeler l'attention sur les deux manières différentes dont s'introduit la notion de fonction en mathématiques.*
>
> *Dans le premier exemple, on partait du procédé habituel qui consiste à définir un petit nombre de fonctions simples représentées par des notations conventionnelles et à considérer les fonctions qui s'obtiennent par combinaison de ces premières fonctions Dans le second exemple, on n'a imposé aucune restriction à la notion de fonction. On s'est attaché seulement à ce que les fonctions soient définies pour chaque valeur de x, le procédé de définition pouvant être choisi d'une manière complètement arbitraire ».*

Ainsi, ce n'est pas l'expression analytique définissant la fonction qui permet de poser efficacement le problème pour Baire. Celui-ci dit d'ailleurs que l'exemple 2 est beaucoup plus direct. C'est le type d'irrégularité (n'importe quelle fonction discontinue en un seul point) qui est la propriété intéressante à retenir de la fonction pour ce problème. Ceci marque un changement de conception : on ne s'intéressent plus à la représentation analytique de la fonction et aux opérateurs particuliers à cette représentation. **La fonction est considérée comme objet, et est caractérisée par des propriétés indépendantes de ses représentations (sa continuité). Ceci nécessite l'usage d'outils indépendants des représentations permettant de traiter ces propriétés** : quantificateurs, suites, mesure de la distance entre la fonction f et la suite f_n.

1.7.2 Retour au développement historique de la conception objet :

Cauchy donne une nouvelle définition d'une fonction et de la continuité qui permet de dépasser la contradiction que constitue l'exemple de la fonction représentée à la fois par $y=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ (discontinue du point de vue de Euler), et par $y=\sqrt{x^2}$ (continue du point de vue de Euler) :

Définition de fonction :

> *« lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elle étant donnée, on puisse en conclure la valeur de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles qui prend alors le nom de variable indépendante ; et les autres quantités au moyen de la variable indépendante, sont ce que appelle des fonctions de cette variable ».*

Définition de la continuité :

> *« Lorsque la fonction f(x) admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence f(x+i) – f(x) est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que f(x) est fonction continue de la variable x entre ces limites dont il s'agit ».*

Cette définition échappe donc à la référence à une représentation analytique. Le traitement des fonctions fait appel à de nouveaux outils (en particulier la notion de limite), engageant des représentations formelles. La continuité est une propriété locale exprimée au moyen de ces nouveaux outils. Une nouvelle analyse se développe définissant les notions de dérivabilité[28], de différents types de convergence, d'intégration. Le recours aux représentations analytiques est toujours présent et permet le calcul sur les fonctions, mais ces représentations ne sont plus identifiées au concept. De même, les représentations graphiques sont toujours utilisées, et constituent un support à l'intuition : la célèbre preuve que donne Cauchy du théorème des valeurs intermédiaires trouve une validation par l'appel à l'évidence que donne à voir le graphique.

Au tout début du 20ième siècle, à la suite de ces développements, les discussions et publications (Baire, Borel, Lebesgue), révèlent trois idées autour des fonctions.

- L'opinion qu'une fonction est définie par une expression analytique continue d'apparaître et les avis sur les moyens de définir une fonction sont controversés.
- Les fonctions discontinues et les fonctions continues sans dérivées ne sont pas considérées comme des objets mathématiques « sains ».
- Enfin, de nombreuses discussions apparaissent plus généralement sur ce que signifie « définir un objet » en mathématique.

Ces idées sont issues du développement de nouvelles questions autour de la notion de fonction, qui se distinguent de l'analyse initiée par Cauchy. La classification de Baire est représentative de ce nouveau champ. Celui-ci définit la classe 0 comme l'ensemble des fonctions continues, qui sont donc limites de fonctions représentables analytiquement (Dirichlet et Weierstrass ont établit que toute fonction continue sur [a ; b] est limite d'une série polynomiale uniformément convergente sur [a ; b]) et la classe 1 comme l'ensemble de toutes les fonctions non continues mais limites d'une série de fonctions continues. Il dit :

> *« Après avoir défini, la fonction la plus générale, on est conduit à distinguer les fonctions en différentes catégories suivant qu'elles possèdent ou ne possèdent pas telle ou telle propriété ; c'est ainsi par exemple, qu'une fonction peut être continue ou discontinue, ponctuellement ou totalement discontinue, intégrable ou non, posséder ou non une dérivée… Chacune de ces distinctions conduit à une étude particulière, et toutes ces études présentent le caractère suivant : on cherche si le fait d'imposer à la fonction la plus générale telle ou telle restriction s'exprimant par une définition simple entraîne d'autres conséquences simples. (…) On peut ainsi se proposer de constituer à coté de*

[28] De nombreuses discussions auront lieu sur les relations entre continuité et dérivabilité. Quelques « monstres sont exhibés : Weierstrass fournit l'exemple d'une fonction continue nulle part dérivable.

l'Analyse courante, une autre branche de l'Analyse, qui, bien entendu, suivra de très loin la première, en tant que quantité de résultats acquis, mais qui, en revanche, aura l'avantage de fournir des énoncés plus complets. A cette partie des mathématiques se rattachent les travaux, déjà nombreux, fait en ces quarante dernières années, sur les fonctions discontinues, les fonctions pourvues de dérivées de tout ordre, mais non développables en séries de Taylor, l'intégration des fonctions les plus générales, la définition générale de courbes fermées dans le plan… »

L'opposition entre Borel et Lebesgue à propos de la question de la définition des objets en mathématiques est également illustrative. Lebesgue (1905) explique que bien qu'on s'accorde à considérer qu'une fonction est une correspondance entre un nombre y et des nombres $x_1 \ldots x_n$ sans précision sur le procédé permettant d'établir cette correspondance, beaucoup de mathématiciens de l'époque ne considèrent comme fonctions que les correspondances définies par une expression analytique. Lebesgue remarque que dans la pratique ce ne sont que ces fonctions qu'on emploie effectivement et il cite le travail de Baire dans lequel, dès qu'il s'agit de donner des exemples, les fonctions sont représentées analytiquement. Il pose la question de savoir s'il existe des fonctions qu'on ne peut pas représenter analytiquement. Il introduit alors les classes de fonctions « finies et transfinies » (analogue à la classification de Baire). Cette classification pose deux principales difficultés : celle de prouver l'existence de fonctions dans chacune de ces classes et celle de prouver l'existence de fonctions n'appartenant à aucune de ces classes. Il fait appel au théorème de Cantor (« *l'ensemble des fonctions a une puissance supérieure à celle du continu* ») pour montrer qu'il existe des fonctions non représentables analytiquement (non sans certains doutes sur la validité de la démonstration), et introduit une nouvelle terminologie *nommer un objet, nommer une fonction* :

« Un objet est défini ou nommé lorsqu'on a prononcé un nombre fini de mots s'appliquant à cet objet et à celui là seulement ; c'est à dire quand on a nommé une propriété caractéristique de l'objet. Pour donner une fonction $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *on nomme généralement une propriété appartenant à tous les ensembles de nombres* $x_1, x_2,\ldots, x_n$ *,* $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ *et à ceux là seulement ; mais ce n'est nullement nécessaire, on peut nommer d'autres propriétés caractéristiques de la fonction. C'est ce que l'on fait par exemple, lorsqu'une*

> *fonction f(x) étant définie d'une manière quelconque, on dit que F(x) est celle des fonctions primitives de f qui s'annule pour x = 0 ».*
>
> *« On ne devra donc pas s'étonner si, dans la suite, je considère comme parfaitement définies et données des fonctions que je ne saurais calculer pour aucune valeur des variables.».*

Borel s'oppose à Lebesgue. Pour lui, définir une fonction cela veut dire que l'on puisse,

> *« par un nombre limité d'opérations, calculer avec une approximation donnée, sa valeur pour une valeur donnée de la variable ». (…)*

Il définit les notions de fonction et de nombre calculables[29].
Ces questionnements ne concernent pas directement l'analyse : celle-ci est centrée sur la construction de théorèmes permettant de classer et de caractériser les propriétés des fonctions. Les fonctions analytiques étaient en effet parallèlement étudiées avec moins de scrupules vis à vis de leur existence[30]. Les interrogations de Borel et Lebesgue sont d'une nature philosophique et sont concomitantes au développement de la théorie des ensembles. Elles portent sur la définition et l'existence des objets en mathématiques. La possibilité de créer des fonctions au moyen de définitions confronte les mathématiciens à des objets nouveaux, artificiels (très éloignés des fonctions rencontrées dans les pratiques de l'analyse), éventuellement pathologiques. Graduellement, l'idée de correspondance entre deux ensembles s'impose comme définition de la notion de fonction. Cette idée est centrale dans le travail de Cantor. Bourbaki (1939) donne le nom de fonction à une correspondance d'un ensemble E vers un ensemble F : Soient E et F deux ensembles, distincts ou non. Une relation[31] entre une variable x $\in$ E et une variable y $\in$ F est dite une relation fonctionnelle en y, ou relation

---

[29] Borel dit : « *Un nombre α est calculable lorsque, étant donné un nombre entier quelconque n, on sait obtenir un nombre rationnel qui diffère de α de moins de 1/n.*
Une fonction est calculable, lorsque sa valeur est calculable pour toute valeur calculable de la variable. En d'autres termes, si α est un nombre calculable, on doit savoir calculer la valeur f(α) à 1/n près, quel que soit n. Une fonction n'est donc calculable que si elle est continue, au moins pour les valeurs calculables de la variable ». Il ne s'agit pas de la définition d'un nombre calculable telle qu'elle a pu être construite par Turing par exemple (mobilisant la notion de machine ou d'algorithme). Il existe par exemple une difficulté dans la définition de Borel soulevée par « *on sait obtenir* ».

30 L'étude des fonctions analytiques acceptait par exemple de définir une fonction F de la manière suivante :
Soit ϕ une fonction analytique sur C, F est définie par $F(z)=\begin{cases}\phi(z)\ si\ |z|<1\\ 0\ si\ |z|>1\end{cases}$.

[31] Une relation de source E et de but F est une propriété sur l'ensemble produit E×F, c'est-à-dire une propriété des couples (x,y) de E×F. Ainsi, une relation définit un sous-ensemble de E×F.

fonctionnelle de E vers F, si quel que soit $x \in E$, il existe un élément y de F, et un seul, qui soit dans la relation considérée avec x. On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément $x \in E$ l'élément $y \in F$ qui se trouve dans la relation donnée avec x ; on dit que y est la valeur de la fonction pour l'élément x et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée.

Nous dirons, pour conclure, que le développement des outils de l'analyse (notion de limite, de convergence, des quantificateurs), permet de qualifier les propriétés des fonctions et de classer celles-ci, en dehors des particularités de leurs représentations analytiques. L'analyse traite de la régularité des fonctions (continuité, intégrabilité, analycité, intégrabilité, etc.). Les représentations (analytiques et éventuellement graphiques) jouent encore un rôle important, parce qu'elles permettent le calcul et la résolution des problèmes, mais elles ne constituent plus la référence.

1.8 Conclusion :

Nous avons identifié trois étapes dans l'histoire du concept de fonction, qui renvoient aux conceptions « courbe », « analytique » et « objet ». Ces conceptions n'ont pas encore été qualifiées dans les termes du modèle, mais nous avons indiqué pour chacune d'elles les problèmes qui étaient traités, la place des représentations pour la résolution de ces problèmes. Nous allons dans la partie qui suit, décrire plus précisément ces trois conceptions, en nous appuyant sur les travaux existants sur les conceptions de fonction.

2. Etude des travaux de Dubinsky et Harel et de Sierpinska

2.1 Introduction

Nous étudions dans un premier temps les travaux de Harel et Dubinsky et de Sierpinska sur les conceptions du concept de fonction. Nous nous appuierons sur cette étude pour caractériser en partie les éléments des conceptions courbe, analytique et objets, déjà esquissés lors de l'analyse historique.

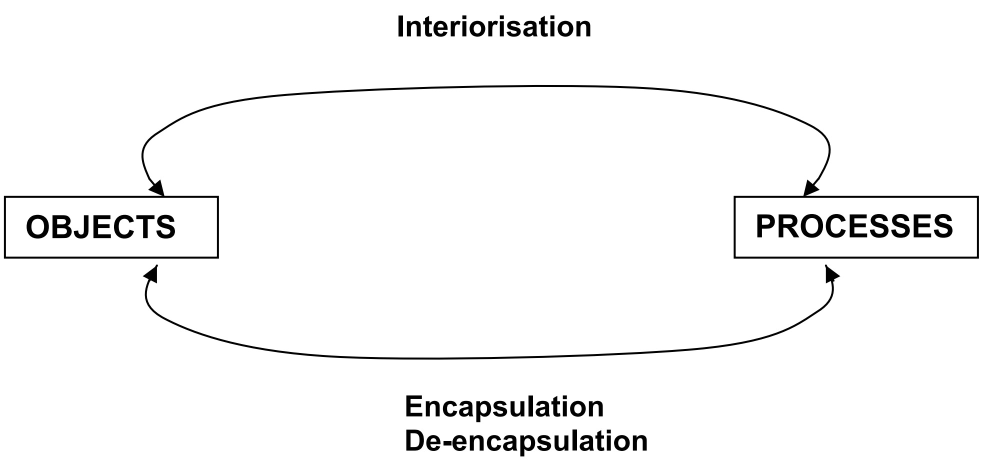
2.2 Conception process d'une fonction (Dubinsky, Harel 1992)

2.2.1 Le cadre théorique

La classification des conceptions de la notion de fonction proposée par Dubinsky et Harel est basée sur la théorie APOS, qui fournit une décomposition « génétique » d'un concept mathématique en général. Cette décomposition est issue des travaux de Piaget et décrit la structure des constructions mentales d'un individu relativement à un concept mathématique. Cette décomposition est fortement hiérarchisée. Cette position est basée sur la façon dont les auteurs envisagent l'apprentissage des mathématiques :

> *"We consider that understanding mathematical concept begins with manipulating previously constructed mental or physical objects to form actions ; actions are then interiorized to form processes which are then encapsulated to form objects. Objects can be de-encapsulated back to the processes from which they were formed. Finally, actions, processes and objects can be organized in schemas" (IME).*

Ce qui est décrit par le schéma suivant :



« *Action* », « *process* » et « *object* » sont décrits par de brèves définitions générales, et par des exemples. Nous prendrons le cas du concept de fonction :

> *Action* est une manipulation (mentale ou physique) d'« *objects* ». Cette conception, dans le cas du concept de fonction, désigne par exemple la capacité à substituer des valeurs dans une expression algébrique, et à évaluer le résultat de cette substitution.
>
> *Process* est une action que le sujet peut décrire, transformer, répéter ou inverser. Dans le cas de fonction, *process* est une transformation dynamique de quantités satisfaisant la condition : pour une même quantité on obtient toujours la même quantité.
>
> *Object* renvoie à la capacité à concevoir le *process* comme un tout, de mettre en oeuvre des actions sur le *process*, de construire de tels *process*. Une fonction est envisagée comme un objet lorsqu'il est possible de mettre en oeuvre des actions sur la fonction.

On pourra remarquer que le concept de fonction se prête bien au jeu du modèle. Le concept de fonction est d'ailleurs un des premiers concepts sur lequel la théorie a été mise en oeuvre. Maria Trigueros, lors de travaux Dirigés de la XVIIième Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques consacré à la présentation de la théorie APOS, s'accorde à dire que certains concepts résistent à la décomposition génétique du modèle (elle citait l'exemple du concept de dépendance linéaire en algèbre).

Dubinsky souligne l'importance, dans l'activité mathématique, des passages dialectiques entre *process* et *object*. L*'encapsulation* décrit l'opération mentale du passage *process* vers *object*, la *desencapsulation* celle du passage inverse. La nature d'une *process* conception d'un sujet intéresse particulièrement Dubinsky : elle est à l'origine, via l'*encapsulation*, de l'*object* conception, dont l'acquisition est présentée comme importante. L'étude menée par les auteurs cherche à évaluer les conceptions des étudiants après un enseignement qui leur a été donné sur la notion de fonction. Ils définissent un ensemble de critères qui permettent de positionner les étudiants entre les niveaux *action* et *process*. Ces critères sont évalués à partir des réponses à un test écrit et à des interviews portant sur ces tests. On demandait aux élèves d'utiliser une ou plusieurs fonctions pour décrire différentes situations. Les critères d'évaluation des conceptions étaient les suivants :

1. Présence de critères restrictifs sur ce qu'est une fonction :
    - *Manipulation restriction*. Désigne le fait que si l'élève ne parvient pas à mettre en place des manipulations explicites d'expressions algébriques,

celui-ci considère qu'il n'a pas affaire à une fonction. Ce critère est le signe d'une *action* conception.

- *Quantity restriction* : Désigne le fait que pour l'élève une fonction transforme uniquement des nombres (alors que certaines des situations du test proposaient des fonctions prenant les valeurs vrai/faux par exemple).
- *Continuity restriction* : désigne le fait que pour l'élève le graphe d'une fonction est continu

2. Sévérité du critère de restriction : Pour certains élèves, pouvoir manipuler une expression algébrique (substituer une valeur x en vue d'obtenir une valeur y) est une condition indispensable pour que l'équation définisse une fonction. Pour d'autres, la présence d'une expression est suffisante, bien qu'ils reconnaissent ne pas savoir la manipuler (par exemple l'expression $2x^3y - x\log y = 2$ est reconnue comme une fonction).

3. Capacité à construire une transformation alors que la situation n'en propose pas une explicitement. Cette capacité est le signe d'une *process* conception.

4. Confusion entre la condition « unicité de l'image » et la notion de bijection : l'auteur explique que cette confusion ne peut être résolue que par une *process* conception, qui exprime l'idée d'un unique point *final*.

Les auteurs précisent à propos de ces critères :

> *« as a result of analysing interviews of these students, we have found that the process conception of function is very complex. (...). It is composed of a number of facets or factors, many of which arose in the interviews. (...). The idea of the strength of an individual's process conception of function is thus not a reference to a linear measurement, but rather to a partially ordered measurement scale. We therefore address our question not in terms of a progress scale but rather in terms of the following four factors ».*

Dubinsky et Harel expliquent que ces critères leur permettent de décrire les actions d'un individu. Cela permet parfois de mettre en évidence une forte ou faible présence d'une process conception ; cependant, ils reconnaissent que pour beaucoup d'individus, « l'analyse n'aboutit qu'à une collection de conceptions contradictoires » (Harel et Dubinsky 1992, page 87). Les auteurs expliquent qu'une grande variété de situations est nécessaire à l'étude des conceptions d'un individu, un étudiant exprimant une certaine « notion » de fonction dans certaines situations, et ne l'exprime pas dans d'autres.

2.2.2 Positionnement des critères relativement aux conceptions courbe, algébrique et objet :

Nous allons voir que chacun des critères est susceptible de renvoyer à des conceptions différentes du concept de fonction. Harel et Dubinsky signalent que ces critères dessinent des conceptions contradictoires pour un nombre important de sujets. Nous montrerons que l'association de ces critères à des opérateurs et des contrôles pour la résolution de problèmes particuliers est déterminante dans la caractérisation de ces conceptions. Or les critères identifiés par Harel et Dubinsky sont détachés des résolutions des problèmes dans lesquels ils ont été engagés. Il nous semble aussi important de signaler que, pour un certain nombre de tâches, les étudiants n'avaient pas la possibilité de mettre en œuvre d'opérateurs de traitement. Cela constitue à notre avis une explication au caractère contradictoire des conceptions identifiées par les auteurs.

Illustration par l'étude d'une tâche :

Nous nous proposons dans un premier temps d'illustrer la difficulté à analyser les conceptions à l'œuvre en l'absence d'opérateurs engagés dans la résolution d'une tâche. Prenons le cas de la tâche suivante : « *Pouvez vous décrire par une fonction l'expression* $2x^3y - x\log y = 2$? » (Harel et Dubinsky, 1992)

Les auteurs attendaient la réponse suivante d'une process conception : on définit la fonction R^2 -> {true ; false} qui a tout couple (x,y) associe true si l'égalité est satisfaite, et false sinon. La construction de cette réponse atteste, pour les auteurs, de la capacité à construire une fonction détachée des contraintes de manipulation et ainsi, révélatrice d'un process. Peu d'étudiants ont donné cette réponse et beaucoup la refuse lorsqu'elle est suggérée en interview, bien que l'enseignement qu'ils ont suivi aient traité des exemples similaires. Ces étudiants semblaient contraints par les restrictions *manipulation* et *quantity* : refus de l'équation parce qu'on ne peut pas calculer y connaissant x et refus de la fonction de R^2 -> {true ; false} car elle prend des valeurs non numériques. La solution des auteurs, si elle permet bien de définir une fonction, ne prend cependant pas en charge la question de la nature de la relation entre x et y : fonctionnelle ou non.

Il existe cependant d'autre façon de se saisir de la question posée. L'expression $2x^3y - x\log y = 2$ désigne une relation implicite entre x et y. Il peut apparaître légitime de se demande si y (resp. x) dépend fonctionnellement de x (resp. y), c'est-à-dire si cette relation permet de définir une valeur y et une seule pour un certain ensemble de valeurs x. En l'absence d'outils (traceur, calculatrice, etc) (les étudiants ne disposaient que du papier crayon), il est difficile de répondre à cette question. Or le traitement de cette question nous parait tout à fait révélateur du point de vue du concept de fonction : quelles conditions doit remplir cette équation pour s'assurer qu'elle définit une relation fonctionnelle entre x et y. La réponse apportée par les auteurs nous apprend peu sur le concept (en particulier elle n'engage pas d'outils de traitement) et nous apparaît comme un moyen, à moindre coût, de répondre au contrat de l'expérimentation. En effet, quel sens donner au fait qu'un étudiant ne fournisse pas la réponse attendue par les auteurs ? En revanche, nous allons voir, sur des traitements hypothétiques, non exhaustifs et potentiellement accessibles à des étudiants de lycée, de la question « quelles conditions doit remplir cette équation pour s'assurer qu'elle définit une relation fonctionnelle entre x et y ? », que la résolution de cette tâche est révélatrice de conceptions de natures différentes, selon les opérateurs et les contrôles engagés.

Solution 1 d'une conception analytique :

- Opérateurs disponibles : règles de manipulation des expressions algébriques.
- Contrôles : si y est une fonction de x alors l'équation peut être transformée en une équation équivalente de la forme « y = expression de (x) ».

Les opérateurs disponibles ne permettent pas de conformer l'équation à la forme y = f(x). cela permet de conclure par : l'équation ne peut pas être rendue conforme à l'écriture « y = expression de (x) » par les règles de transformation algébriques donc y n'est pas une fonction de x. Certains étudiants ayant participé à l'expérimentation de Harel et Dubinsky ont d'ailleurs cherché à mettre en œuvre cette stratégie et ont exprimé leur perplexité devant leur incapacité à le faire.

Solution 2 d'une conception objet :

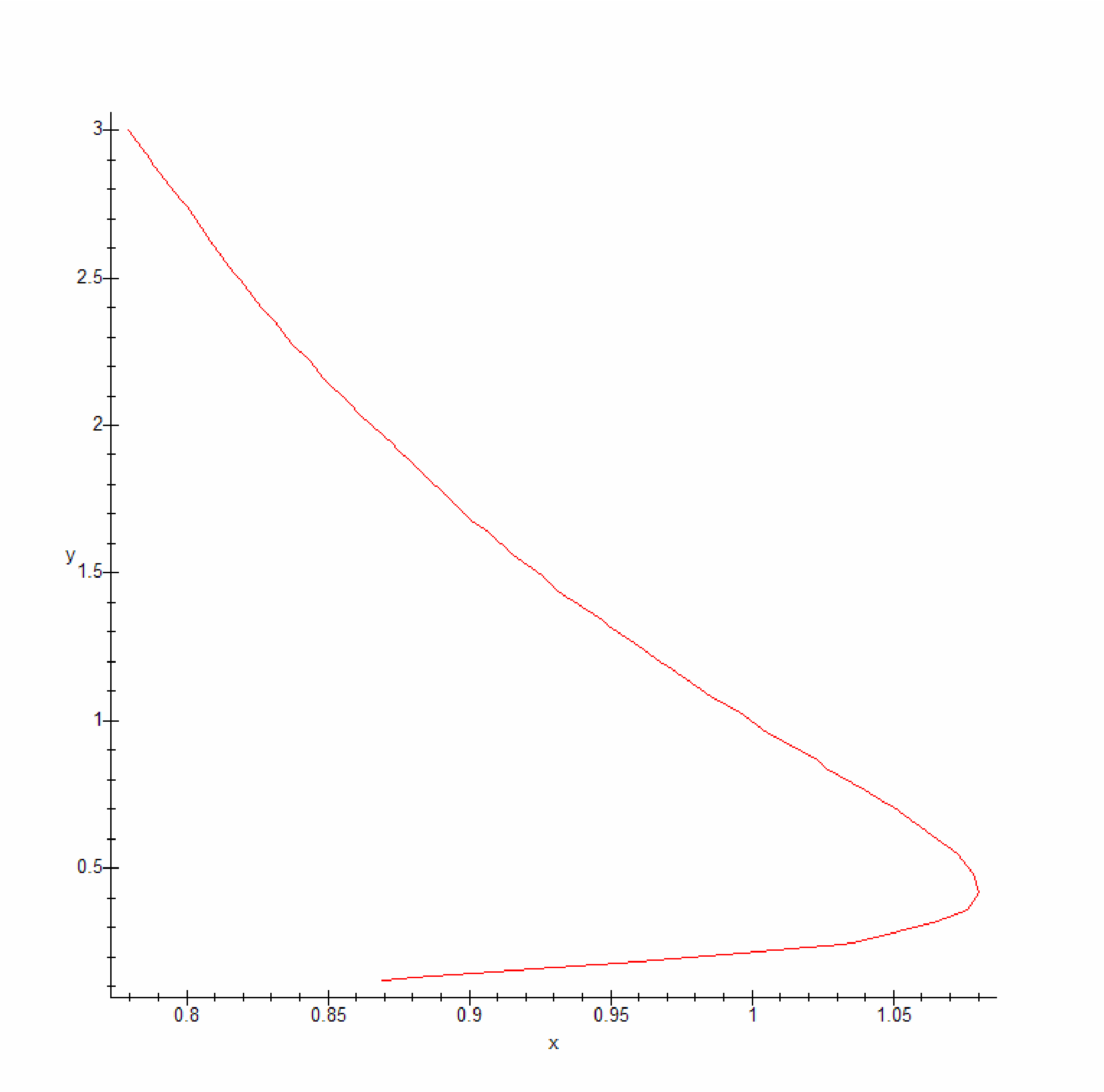
- Contrôle sur la fonction :
    - Si, pour une valeur donnée de x, la relation définit une seule valeur de y alors y est une fonction de x.
- Contrôle permettant l'instrumentation en vue de vérifier si pour une valeur donnée de x, la relation définit une seule valeur de y :
    - si l'équation liant x à y peut s'écrire sous la forme y = expression de (x) alors la relation définit une seule valeur de y pour chaque valeur donnée de x.
- Opérateurs disponibles :
    - règles de manipulation des expressions algébriques.

Les opérateurs disponibles ne permettent pas de se conformer l'équation à la forme y = f(x) ; mais les contrôles ne peuvent conclure au fait que y n'est pas une fonction de x. La conception répond qu'elle n'a pas les moyens de définir si y est une fonction de x.

Solution 3 d'une conception objet :

L'usage de Maple peut apporter des réponses aux insuffisances des opérateurs de la solution 2 :

- en traçant la représentation des couples (x,y) définie par la relation $2x^3y - x\log y = 2$ dans Maple pour x compris entre 0 et 2 et y compris entre 0 et 3 :



- ce gra^he permet d'observer que pour x=1, la relation entre x et y n'est pas fonctionnelle. Ce qui peut ensuite être démontré. .

Procédure de résolution :

- Evaluation de l'équation pour x = 1 : $2y - \log y = 2$
- Résolution de l'équation $2y - \log y = 2$ dans Maple : y=.2031878700, 1.
- Etude du nombre de solutions de l'équation $2y - \log y = 2$:
    - Variations sur]0 ; 2] de la fonction $f(y) = 2y - \log y$

y	0	1/2	2
f(y)	+∝	f(1/2) < 2	f(2) > 2

-
    - Théorème des valeurs intermédiaires : l'équation $2y - \log y = 2$ admet deux solutions
- Pour x = 1, la relation $2x^3y - x\log y = 2$ définit deux valeurs de y : il n'y a donc pas de relation fonctionnelle entre x et y sur l'ensemble de définition de cette équation

Opérateurs mis en œuvre dans cette solution :

- évaluation de l'équation pour certaines valeurs de x
- étude du nombre de solutions de l'équation en y pour une valeur donnée de x
- manipulation des représentations des points (x,y) définis par la relation $2x^3y - x\log y = 2$.
- Lecture graphique de domaines de x pour lesquels l'équation en y $2x^3y - x\log y = 2$ admet deux solutions.

Contrôles disponibles :

- Si, pour une valeur donnée de x, la relation définit une seule valeur de y alors y est une fonction de x.
- Si il existe une représentations graphique des points (x,y) (définis implicitement) ne satisfaisant pas le vertical ligne test alors y n'est pas une fonction de x.

Différenciation des deux conceptions

Les solutions 1 et 2 données par une conception analytique engagent des opérateurs de transformation de l'équation. Harel et Dubinsky associent cette stratégie à une *manipulation restriction*. Il reconnaissent qu'ils n'ont cependant pas le moyen de savoir si, pour ces étudiants, il n'est pas possible de décrire explicitement la relation y = expression de x ou si la relation fonctionnelle entre y et x n'existe pas, c'est-à-dire de distinguer les solutions 1 et 2. Or cette distinction est déterminante relativement au concept de fonction en jeu.

Ces deux solutions sont portées par des contrôles de nature très différentes : la stratégie 1 est supporté par un contrôle de bonne écriture qui est une condition nécessaire à l'existence d'une fonction. La solution 2 est portée par le contrôle : pour une valeur x on doit obtenir une seule valeur de y et peut ne pas relever exclusivement d'une conception analytique. La vérification de cette condition est instrumentée dans le système de représentation de l'équation (manipulation de l'expression en vue de l'écrire y = expression de x), mais les opérateurs ne permettent pas de conclure. La solution 3 se distingue de la solution 2 parce qu'elle a à sa disposition des opérateurs permettant de vérifier si la condition « pour une valeur x une seule valeur y » est effectivement satisfaite.

Ainsi, le critère de *manipulation restriction* apparaît comme non discriminant sur les conceptions analytique et objet.

Positionnement des critères de Harel et Dubinsky relativement aux conceptions courbe, algébrique et objet :

- *Quantity restriction* :

  Nous ne nous positionnerons pas sur ce critère car nous ne prenons en compte que les fonctions de la variable réelle à valeurs réelles.

- *Continuity restriction* :

  Ce critère est lié à la conception courbe, car il porte sur les attributs de l'objet graphique. Il explicite un contrôle sur les courbes contraignant les représentations acceptables d'une fonction pour la conception. Nous avons vu que la conception algébrique peut aussi mettre en jeu des représentations graphique, et donc mobiliser ce critère. Comme dans le cas du critère *manipulation restriction* c'est l'analyse de l'activité, en relation au problème résolu qui peut permettre l'association à une conception plutôt qu'une autre.

- *Sévérité du critère de restriction :*

  Ce critère est un affinement des différents critères de restriction. Harel et Dubinsky donnent un exemple pour le cas de la manipulation restriction : pour certains élèves, pouvoir manipuler une expression analytique (substituer une valeur x en vue d'obtenir une valeur y) est une condition indispensable pour que l'équation définisse une fonction ; pour d'autres, la présence d'une expression est suffisante, bien qu'ils reconnaissent ne pas savoir la manipuler (par exemple l'expression $2x^3y - x\log y = 2$ est reconnue comme une fonction). Cet exemple peut être rapproché de ce qui a pu être analysé dans notre travail de DEA. Dans le cas de la conception courbe, nous avons pu voir que l'équation était envisagée comme un « nom » de la courbe et sa structure interne n'était pas analysé en terme de pourvoir représenter ou non une fonction. Dans le cas de la conception analytique, la possibilité de pouvoir exprimer y en fonction de f était un critère déterminant pour le statut de l'équation de la parabole. Nous verrons ci-dessous que ce phénomène est également signalé par Sierpinska (1992).

- Capacité à construire une transformation alors que la situation n'en propose pas une explicitement :

  Ce critère nous parait très difficile à positionner relativement à nos conceptions. L'essentiel des tâches qui ont permis à Harel et Dubinsky de le déterminer ne portaient pas sur des fonctions de la variable réelle à valeurs réelles (fonctions à valeurs booléens, ou fonction dont le domaine était constitué d'éléments de situation « pseudo réelles »). On trouvait par exemple la situation suivante : « *Purdue Women's Basketball Team Wins NCAA* » !.

- Confusion entre la condition « unicité de l'image » et la notion de bijection :

  Le dépassement de cette confusion nécessite par exemple des contrôles qui peuvent être formels ou graphiques (pourvoir faire référence à la définition formelle de la notion de fonction ou mettre en oeuvre le *vertical line test* sur la représentation graphique). La représentation analytique garantie l'unicité de l'image lorsque qu'elle est sous la forme y = f(x). Le caractère bijectif de la relation est quand à lui difficile à traiter avec les seules représentations analytiques, et demande de mobiliser d'autre outils (par exemple l'étude des variations).

2.2.3 En conclusion :

Il est difficile de confronter les critères de Harel et Dubinsky aux conceptions courbe, analytique et objet. Nous avons pu mettre en évidence une des raisons à cette difficulté. Notre modèle est un modèle d'analyse de l'activité : les conceptions se différencient par les opérateurs, les registres qui leurs sont associés, et les contrôles mis en œuvre pour la résolution d'un problème. Ainsi, l'association d'un de ces critères à différents opérateurs ou contrôles sont potentiellement révélatrices de conceptions différentes. Il nous semble que nous pointons ici une des grandes difficultés signalées dans les travaux portant sur les conceptions : les éléments de caractérisation des connaissances peuvent apparaître contradictoires parce que deux mêmes éléments renvoient éventuellement successivement à des conceptions différentes. Or cette contradiction est levée lorsque ces éléments sont ramenés aux situations dans lesquelles les sujets les engagent.

2.3 Obstacles épistémologiques et actes de compréhension pour le concept de fonction (Sierpinska 1992) :

2.3.1 Cadre théorique :

Sierpinska appuie son travail sur une étude épistémologique et historique du concept de fonction, ainsi que sur l'observation de l'activité d'étudiants. Ces analyses lui permettent de dégager un certain nombre d'*obstacles épistémologiques* relatifs aux fonctions et d'actes de *compréhension*. Les *obstacles épistémologiques* et *les actes de compréhensions* sont décrits comme des connaissances. Sierpinska envisage la compréhension en mathématique au travers des sauts cognitifs nécessaires à l'apprentissage. Elle décrit ces sauts comme

> *« the important qualitative changes related to mathematical knowledge in the human mind, jumps from old way of thinking to new way of knowing ».*

A la suite de Brousseau (1983), qui a introduit l'idée d'obstacle épistémologique en didactique des mathématiques, elle retient des obstacles leur caractère inévitable, ainsi que leur apparition et leur résistance dans l'histoire et chez les élèves. Brousseau souligne en particulier que le dépassement de tels obstacles est nécessaire à la constitution du sens de la connaissance. Les actes de compréhension renvoient quant à eux au dépassement d'un obstacle épistémologique. Actes de compréhension et obstacles épistémologiques sont donc deux images complémentaires de sauts d'une ancienne vers une nouvelle connaissance. Elle identifie quatre catégories d'actes de compréhension. La première est l'*identification*, c'est-à-dire reconnaissance d'un objet mathématique comme nouvel objet d'étude parmi les autres objets déjà connus ; la *discrimination*, c'est-à-dire la distinction entre deux objets reconnus nouvellement comme ayant des propriétés différentes ; la *généralisation*, c'est-à-dire la conscience de la possibilité d'étendre des domaines d'applications (d'interprétation, de méthodes) ; la *synthèse* c'est-à-dire la perception de liens entre différents faits auparavant envisagés comme isolés.

2.3.2 Le cas du concept de fonction :

Nous allons décrire différents obstacles et actes de compréhension du concept de fonction identifiés par Sierpinska, et nous les mettrons en relation avec les conceptions courbe, analytique et objet[32].

Tableaux de valeurs d'une fonction :

Obstacles épistémologiques :

Une fonction est une suite de valeurs

Acte de compréhension :

Distinction entre les notions de fonction et de suite.

Sierpinska souligne que l'identification d'une fonction à une suite de valeurs peut par exemple mener à penser que les méthodes d'interpolation donne des valeurs exactes des fonctions entre les points interpolés. Cet obstacle est difficile à lier a priori à une des conceptions courbe, analytique et objet. Cependant nous pouvons penser que la représentation graphique d'un ensemble de valeurs d'une fonction favorise l'idée que le graphe de cette fonction est la courbe la plus « directe » passant par ces points. Et ainsi, un ensemble éventuellement fini de points caractérise la courbe d'une fonction. Nous identifions ici un contrôle de la conception courbe : la courbe d'une fonction est définie par un ensemble fini de points.

Fonction et courbe :

Obstacle épistémologique :

- Le graphe d'une fonction est un modèle géométrique d'une relation fonctionnelle. Il n'est pas nécessairement précis ; il peut contenir des points (x,y) tels que la fonction n'est pas définie en x.

Cet obstacle concerne la conception courbe. La courbe est envisagée comme un objet géométrique, un modèle de la relation fonctionnelle. A la suite de Sierpinska, nous avons vu

[32] Certains obstacles et actes de compréhension ont été laissés de coté car leurs relations aux conceptions courbe, algébrique et objet nous est apparue difficile à établir. Ces conceptions ne prétendrent pas être de bonnes représentantes de toutes les conceptions de la notion de fonction. Nous ne retenons ici que les éléments qui nous ont paru pertinents pour l'étude que nous souhaitons mener. Notre problématique porte sur la relation entre les moyens de validations et les moyens d'actions en résolution d'un problème d'approximation et sur la façon dont le concept de fonction contraint les dimensions d'action et de contrôle.

dans notre DEA que la courbe peut être associée à une équation. Pour la conception, cette équation est un nom pour la courbe et ne représente pas une relation fonctionnelle entre les coordonnées de points de la courbe. Cela rend difficile l'instrumentation de cette équation pour la résolution des problèmes.

Attraction de l'algèbre : l'expression analytique d'une fonction

Obstacles épistémologiques :

- Une grande confiance dans le pouvoir des opérations sur les expressions algébriques.
- Seule les relations que l'on peut décrire par des expressions analytiques sont susceptibles d'être appelées fonctions.

Nous retrouvons les éléments qui ont été identifiés dans notre étude du développement historique de la conception algébrique. Le deuxième obstacle décrit un phénomène identifié dans beaucoup de travaux : la représentation analytique d'une fonction est privilégiée et la fonction est identifiée à cette représentation. Le premier obstacle nous informe sur les contrôles de choix des opérateurs pour la résolution des problèmes : les opérations sur les expressions analytiques occupent une place privilégiée et sont choisies en priorité. Ce sont ces opérateurs qui sont désignés comme les plus efficaces pour la résolution des problèmes. Les règles de traitement des expressions analytiques se substituent à des jugements de preuve extérieurs à ce système de représentation pour la validation des procédures de résolution.

Acte de compréhension :

- Distinction entre une fonction et les outils analytiques utilisés pour la représenter.

Nous avons pu constater dans l'histoire du concept de fonction que le processus qui a mené à la distinction de la fonction et de la représentation analytique a été long et s'est accompagné de débats autour de la définition des objets en mathématiques. Elle a nécessité d'envisager des fonctions étranges : ne pouvant pas être représentées par un tracé, continues mais nulle part différentiable ; ces monstres étant des conséquences logiques de la définition formelle de fonction. Ceux-ci mettent en évidence la place des définitions en mathématiques : elles sont des constructions logiques et non des descriptions de certaines caractéristiques des représentations d'un objet. Sfard atteste de la difficulté conceptuelle que représente le processus de réification. La conception objet, à la différence de la conception analytique, comporte des contrôles qui permettent d'attester de la distinction fonction/représentation analytique. Elle mobilise donc des outils de manipulation de l'objet fonction qui se distinguent des manipulations données par les outils analytiques. Nous avons déjà cité les outils d'études des régularités d'une fonction (limites, convergences, continuité, intégrabilité). Nous pouvons signaler aussi les instruments permettant de qualifier des classes ou des ensembles de fonctions : par exemple la qualification des fonctions par leurs régularités, ou la mesure sur des fonctions au moyen de normes permettant l'étude d'ensembles de fonctions. Les manipulations analytiques ne sont pas exclues, mais sont envisagées comme des moyens adéquats de manipulations et de calcul pour la résolution d'un problème. Ces aspects rejoignent les actes de compréhension et obstacles épistémologiques qui suivent.

Synthèse du concept de fonction :

Obstacle épistémologique :

- Une définition est une description d'un objet par ailleurs appréhendable par les sens. Ce n'est pas la définition qui détermine l'objet, mais l'objet qui détermine la définition.

Actes de compréhension :

- Distinction entre la définition et la description d'un objet
- Synthèse du concept de fonction comme un objet.
- Discrimination entre les différents moyens de représenter une fonction et la fonction elle-même.
- Synthèse des différents moyens de représenter une fonction et de parler d'une fonction.

La conception objet comporte des opérateurs qui permettent de traiter différentes représentations d'une fonction. Elle possède des opérateurs qui permettent d'établir des relations entre ces différentes opérations et des contrôles qui attestent que ces représentations sont des représentations du même objet. La résolution de problème par la conception objet va donc engager des moyens de validation qui ne sont pas propres aux règles de conformité internes à un système de représentation particulier de la fonction.

3. Caractérisation des conceptions « courbe », « analytique » et « objet » :

3.1 Introduction :

Nous allons décrire certains éléments (P, R, L, $\sum$) des conceptions « courbe », « analytique » et « objet ». Nous positionnons dans ces descriptions les travaux de Harel et Dubinsky et de

Sierpinska. Nous avons vu que chacun des éléments des conceptions caractérisés par ces auteurs ne renvoient pas nécessairement à une seule conception. Nous avons trouvé deux raisons à cela. La première est que deux conceptions différentes peuvent comporter des éléments communs (que ce soient des opérateurs ou des contrôles). La deuxième raison est relative au modèle utilisé par Harel et Dubinsky : les critères sont envisagés en dehors des problèmes dans lesquels le sujet engage ses connaissances. Or, nous avons vu sur un exemple précis issu de leur travail, que c'est l'ensemble de différents éléments R, L, $\sum$ et la place qu'ils prennent dans la résolution d'un problème qui permet l'identification de natures différentes de conceptions. Ce point avait également été illustré dans la présentation de travaux issus de Gaudin (2002) (Chapitre 3.3).

3.2 Conception Courbe :

La conception courbe peut a priori se saisir des problèmes qui permettent l'usage des représentations graphiques. Les opérateurs concernent l'ensemble des traitements graphiques d'une courbe, comme lire des informations sur la représentation (coordonnées de points, courbure, variations), tracer des tangentes. Ces opérateurs, nous l'avons vu dans le cas de d'André et Rémi (Chapitre 3), peuvent s'associer à des opérateurs de traitement des représentations analytiques, comme associer à la courbe une représentation analytique accessible à des traitements d'écritures (Sierpinska ci-dessus), évaluer les coordonnées d'un point de la courbe au moyen de cette représentation analytique. Pour cette conception, la représentation graphique est un objet pouvant être qualifié ou étudié au moyen d'une expression analytique (Sierpinska utilise le terme de « nom de la courbe »). Un partie des **contrôles** va donc porter sur les propriétés graphiques de la courbe : on retrouvera les contrôles du type « la courbe d'une fonction est continue ou lisse ou sans trou », ainsi que des contrôles de conformité de l'allure générale de la courbe comme sa position dans le repère, son appartenance à une classe de courbe connues (paraboles, droites, ou cercle comme cela est révélées dans certains travaux (Dubinsky (1992)). Une autre partie des contrôles va porter sur les propriétés de la représentation analytique associée à la courbe. Dans l'exemple du chapitre 3.3, nous avons vu que les positions de l'objet parabole sont qualifiées par Sylvain et Loïc selon des caractéristiques spatiales (horizontale, oblique, verticale) qui permettent la construction du contrôle suivant : si la parabole est verticale alors l'équation est accessible à l'opérateur tangente. Certaines positions donnent des propriétés plus ou moins intéressantes à l'équation de l'objet graphique, à savoir être accessibles ou non aux règles connues de transformation de l'équation. Ainsi, les contrôles sur la représentation analytique ne comportent pas d'élément sur le caractère fonctionnel de la relation que cette représentation permet de définir. Les contrôles traitent la représentation comme un tout, cette représentation est une écriture sur laquelle il est possible d'effectuer des transformations. Ces contrôles permettent d'associer les propriétés graphiques de la courbe à des propriétés de la représentation analytique (de la courbe plus que de la fonction).

3.3 Conception analytique :

La conception analytique peut a priori se saisir des problèmes permettant l'usage des représentations analytiques. Les opérateurs concernent les traitements des représentations analytiques comme appliquer les règles usuelles de transformation des écritures analytiques[33], évaluer des valeurs particulières de f(x), calculer l'équation d'une tangente, appliquer les règles de dérivation d'une expression analytique. Ces opérateurs peuvent s'associer à des opérateurs de traitement de la représentation graphique comme tracer des tangentes, effectuer des lectures d'informations graphiques (coordonnées, etc…). Les contrôles vont donc en partie porter sur les propriétés de la représentation analytique. Ils vont par exemple associer la représentation analytique à une classe (par exemple polynôme, exponentielle, logarithmique, etc…) ; vérifier la bonne conformité de l'écriture de la représentation analytique ou assurer l'existence d'une représentation analytique pour toute fonction. Il existe également des contrôles qui vont permettre d'associer représentation analytique et représentation graphique, par exemple des contrôles d'association des classes de représentations analytiques avec leurs représentations graphiques (un polynôme de degré est représenté par une parabole à une parabole). Enfin, on peut s'attendre à ce qui la vérification de bonne conformité des opérateurs de traitement de la représentation analytique soit un moyen de valider les stratégies de résolution (si les règles de calculs sont valides alors le problème est bien résolu).

3.4 Conception objet :

La conception objet peut se saisir de l'ensemble des problèmes dans lesquels est engagé le concept de fonction. Bien sûr, certains problèmes ne favorisent pas l'engagement de la conception objet ou, plutôt, ne favorisent pas l'engagement d'élément déterminant de cette conception (par exemple un problème demandant le calcul des valeurs d'une fonction polynomiale dont on connaît une représentation analytique). Les opérateurs concernent l'ensemble des outils de l'analyse permettant de caractériser les propriétés d'une fonction ou de manipuler l'objet fonction : vérifier la régularité d'une fonction, évaluer une distance entre

[33] Ces règles comprennent en particulier les règles de transformation du cadre algébrique.

fonctions, etc… ces opérateurs vont éventuellement mobiliser les représentations formelles de l'analyse comme les quantificateur, les limites, les outils de mesure de fonctions (normes, intégrales, …). On trouve également les opérateurs de traitement des représentations d'une fonction (graphique et analytique). Certains contrôles porteront ainsi sur la bonne conformité des traitements des représentations des fonctions. Mais, la conception mobilise également des contrôles attestant de la distinction entre les représentations et l'objet lui-même en permettant l'expression de propriétés de l'objet/fonction indépendantes des caractéristiques particulières des représentations. En particulier, ces propriétés peuvent être un référent permettant de valider la bonne résolution offrant d'autres moyens de validation que la vérification de bonne conformité des opérateurs de traitement des représentations.

Chapitre 5 : Analyse a priori

1. Les problèmes d'approximation :

1.1 Introduction :

Voici une présentation de quelques types de problèmes d'approximation de fonctions traités par l'analyse numérique :

1) On souhaite extrapoler des valeurs y à partir d'un ensemble de données (t_i, y_i), i = 0..n relevée expérimentalement.

2) Un phénomène physique est étudié au moyen d'instruments de mesure et on décrit ce phénomène au moyen d'un modèle formel.

3) On désire approcher une solution d'un problème différentiel ou aux dérivées partielles.

Les méthodes employées pour résoudre ces problèmes dépendent du type de données auxquelles on accède (un ensemble de valeurs ou une fonctions « calculable ») et de la nature du résultat attendu. Parmi ces méthodes, nous avons choisi d'en distinguer deux, qui sont classiquement présentées dans l'enseignement lorsque l'on commence à aborder les problèmes d'approximation :

- les problèmes d'interpolation polynomiales.
- les méthodes de lissage par moindres carrés.

Nous ne prétendons pas rendre compte de l'ensemble des questions d'approximation en analyse et en analyse numérique par l'interpolation polynomiale et le lissage par moindres carrés. Les questions propres à l'analyse numérique (sur la calculabilité et la complexité par exemple) ont d'ailleurs été complètement écartées de la présentation qui va suivre.

L'interpolation polynomiale et le lissage par moindre carrés nous sont apparus pertinents et déjà suffisamment complexes pour l'analyse didactique que nous souhaitons mener dans ce travail de thèse. Elles sont historiquement premières, et restent majoritairement enseignées lorsque les premières questions sur l'interpolation sont abordées dans le premier cycle universitaire ou dans les classes préparatoires, par lesquels sont passés les étudiants qui ont participé à notre expérimentation

1.2 L'interpolation :

On connaît un ensemble de données numériques $(x_i, f_i)_{i=0..n}$ distincts. La méthode d'interpolation consiste à choisir une fonction P qui va prendre les valeurs $(f_i)_{i=0..n}$ en $(x_i)_{i=0..n}$. On peut souhaiter faire l'hypothèse (sous conditions particulières aux données) que P sera un modèle formel de la relation entre les valeurs $(f_i)_{i=0..n}$ et $(x_i)_{i=0..n}$. Il existe des théorèmes d'existence et des méthodes fournissant les fonctions d'interpolation. Par exemple, on sait qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que $P(x_i) = y_i$, i = 0..n.
Supposons que y_i est la valeur en x_i d'une fonction f, dont on ne connaît pas d'expression analytique. P sera une approximation de f. En dehors des points du support d'interpolation, P et f sont différents, il y a donc une erreur e = f - P. Si l'on fait des hypothèses (fortes…) sur la régularité de f, il est possible de contrôler l'erreur e(x), pour tout x appartenant à l'intervalle d'interpolation :
Si f appartient à $C^{n+1}([a ; b])$, pour tout x de l'intervalle d'interpolation [a ; b], il existe c (0<c<1) tel que $e(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right] f^{(n+1)}(cx)$. La valeur absolue de cette erreur peut être majorée[34], cette majoration dépend du pas $(x\text{-}x_i)$ et d'une constante majorant les $f^{(j)}$ (j=0..n+1) sur [a ; b]. Cette erreur, théoriquement contrôlée par le choix d'un pas (x-xi) « petit », reste assujettie à la précision autorisée par la « machine» qui prendra en charge les calculs numériques.

1.3 Le lissage par moindres carrés :

Lorsque l'on cherche un modèle formel d'une relation entre des valeurs $(f_i)_{i=0..n}$ et $(x_i)_{i=0..n}$ qui sont issues de mesures entachées d'erreur, l'interpolation peut se révéler mal adaptée. Par exemple, dans le cas de l'interpolation polynomiale, le degré du polynôme ou le nombre de paramètres du modèle doit être égal au nombre de points du support (moins 1…) ; ce qui

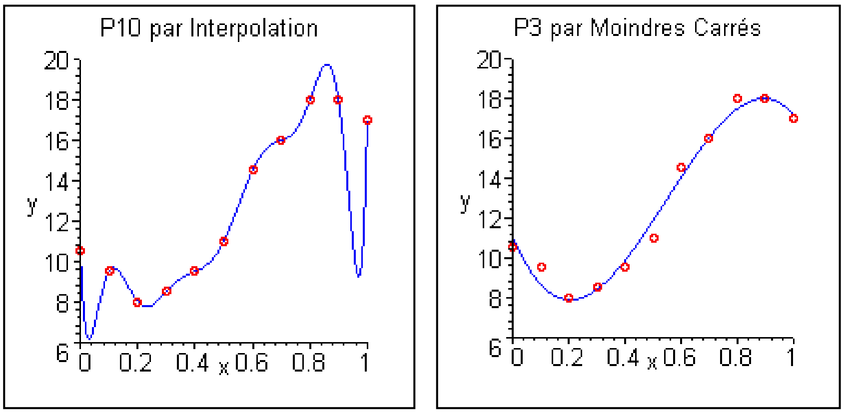
---

[34] Si $f^{(n+1)}$ est continue sur [a ; b], pour tout x de [a ; b], $|f(x) - P(x)| \leq \frac{(x - x_0)\dots(x - x_n)}{(n+1)!} \underset{x\in[a;b]}{\mathrm{Max}}\, f^{(n+1)}(x)$

conduit à un degré élevé (dans le cas où le nombre de données relevé est grand) : le polynôme comporte de nombreuses oscillations, et il peut exister des phénomènes de grandes variations aux bornes de l'intervalle d'interpolation (dans le cas où les $(x_i)_{i=0..n}$ sont équidistants par exemple).

Le lissage cherche à extraire de l'ensemble des valeurs, une information dont le bruitage par les erreurs est amoindri[35]. Ainsi, on accepte que le modèle P ne fournisse pas les valeurs de mesure fi, c'est-à-dire une erreur locale : $e_i = f_i - P(x_i)$.

La méthode des moindres carrés cherche à minimiser l'ensemble des erreurs [$\sum e_i^2$]. Le choix de la fonction P peut permettre d'annuler la valeur $\sum e_i^2$: c'est le cas de toute fonction interpolant les valeurs (x_i, f_i). Ainsi, la méthode des moindres carrés s'accompagne de contraintes sur le choix de P : ce choix dépend du contexte du problème (on sait par exemple que la fonction dont sont issues les valeurs admet une expression analytique de la forme ae^{bx}), ainsi que des contraintes imposées par l'utilisation qui sera faite de la fonction P (contraintes de calcul imposant un degré maximum à P, si P est un polynôme par exemple).



Courbe du polynôme de degré 10 interpolant 11 valeurs et courbe du polynôme de degré 3 minimisant le critère des moindres carrés sur ces 11 valeurs.

[35] Cela suppose de faire des hypothèses sur l'erreur : équirépartie ou non (dans le cas par exemple où la machine dont sont issues les valeurs yi comporte un défaut, …)

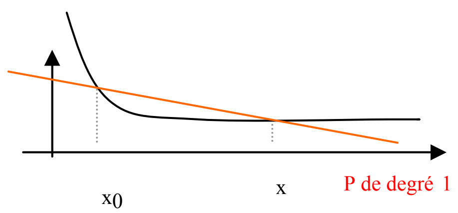
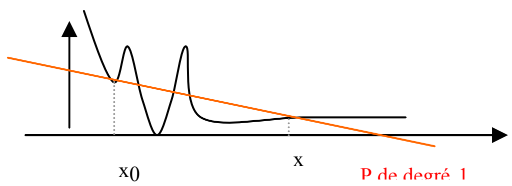
1.4 Etude de quelques problèmes « simples » d'approximation dans les termes du modèle P, R, L, ∑ :

Les questions d'approximation de fonction engagent de nombreuses méthodes et théorèmes. Ils impliquent aussi la prise en charge de moyen de contrôler les calculs des machines numériques.

Pour limiter la complexité et le nombre des éléments d'analyse à prendre en charge, nous nous sommes limités à deux méthodes simples d'approximation – l'interpolation polynomiale et le lissage – en laissant de coté les questions du calcul par des machines. Chacune de ces méthodes met en œuvre des opérateurs propres à la construction de la fonction d'approximation (procédés dits Lagrange, de Newton, de Tchébytchev pour l'interpolation et celui des moindres carrés pour le lissage …). Nous allons décrire pour ces méthodes d'approximation les éléments P, R, L, ∑.

Sans rentrer dans une description détaillée des opérateurs et contrôles de construction des approximations, nous nous intéresserons de façon précise aux contrôles et aux opérateurs assurant le **choix** d'un procédé de construction et la **qualité** de l'approximation construite.

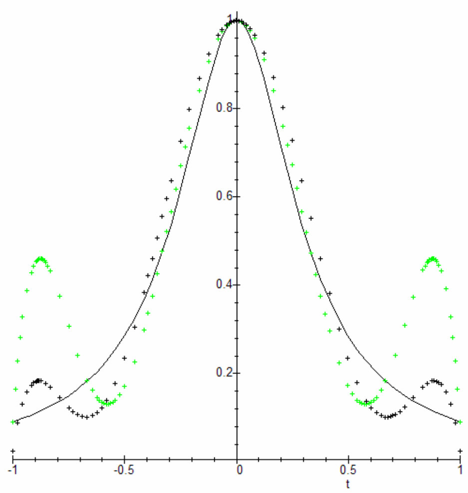
Le texte que nous présentons ci-dessous se partage en deux colonnes : la première colonne décrit, à partir de l'analyse que nous avons pu faire de manuels d'introduction à l'analyse numérique, les types de problèmes d'interpolation et de lissage associés aux questions de recherche d'une approximation. La deuxième colonne confronte à cette description les éléments P, R, L, ∑.

INTERPOLATION ET LISSAGE :	ELEMENTS DES CONCEPTIONS
Le problème d'interpolation polynomiale : Soient (n +1) couples (x_0, f_0) ….(x_n, f_n) de R^2, trouver un polynôme tel que $P(x_i) = f_i$, i = 0..n. Un tel polynôme existe, il est unique si l'on impose à son degré d'être au plus égale à n. Il existe des procédés pour le construire (ex : le polynôme de Lagrange). La résolution de ce problème nécessite la construction conjointe d'opérateurs R et de contrôles Σ permettant d'une part la construction de l'approximation et d'autre part l'évaluation de la qualité de l'approximation.	**Problème (P)** : trouver un polynôme P de degré inférieur ou égale à n tel que $P(x_i) = f_i$, i=0..n, où $(x_i, y_i)_{i=0..n}$ sont donnés. **Opérateur (R)** : procédés de construction du polynôme (ex : Polynôme de Lagrange). **Contrôle (Σ) :** choix d'un procédé de construction de l'approximation et **jugement de** qualité de l'approximation construite.
Estimation de l'incertitude : Soit f une fonction définie sur un intervalle [a ; b] et soient x_0, …, x_n appartenant à [a ; b]. Que peut-on dire de f – P si P est le polynôme d'interpolation $P(x_i) = f(x_i)$?.	Les contrôles Σ donneront des outils pour mesurer « f – P ».
<u>Exemple</u> : f_1 (définie sur]0 ; b] par $f_1(x) = 1/x$) a la même interpolation de degré 1 (en $0 < x_0 < x_1 < b$ donnés) que f_2 à qui on rajoute une « excroissance » entre x_0 et x_1.  	**L** : Le registre graphique peut être le support de contrôles sur « approximation ». L'écart des courbes, constaté visuellement, (fonction et approximation) peut être envisagé comme un indicateur de la *qualité* de cette approximation, c'est-à-dire associé à des jugements. **Σ :** si les courbes sont **perceptivement proches** alors l'approximation est de bonne qualité. Ce contrôle, perceptif, n'est en général pas

<table>
<tr>
<td></td>
<td>un outil permettant une mesure d'une distance f-P, sur lequel l'évaluation de la qualité d'approximation puisse s'appuyer. Mais il peut éventuellement constituer une réfutation de bonne approximation.</td>
</tr>
<tr>
<td>Cet exemple suggère que la qualité de l'approximation peut se référer à différents critères :
- une distance f – P
- certaines régularités de la fonction f que l'on souhaite voir prises en compte par l'approximation P (continuité, changements de variations…)
Par ailleurs, l'évaluation de l'erreur f – P doit prendre en compte de fait que l'on travaille avec une machine, et non pas sur R.</td>
<td>Σ :
- l'évaluation de la qualité de l'approximation nécessite la construction d'une distance f – P.
- peut s'appuyer sur des hypothèses sur la régularité de f : f continue (pas de sauts), peu de changements de variations (nombre de zéros de la dérivée), dérivable (pas d'angles)…
- prendre en compte le fait que l'on ne travaille pas sur f et un intervalle de R, mais sur des mesures (x_i, y_i) et avec des machines (qui ne manipulent pas des réels).</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Théorème</u> :
a. Si f est $C^{n+1}([a ; b])$:
Pour tout x sur lequel f est définie, on trouve ξ tel que, $|f(x) - P(x)| = \frac{(x - x_0)...(x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)$

b. Si $f^{(n+1)}$ est continue sur [a ; b], pour tout x de [a ; b], $|f(x) - P(x)| \leq \frac{(x - x_0)...(x - x_n)}{(n + 1)!} \underset{x \in [a;b]}{\mathrm{Max}} f^{(n+1)}(x)$:
L'erreur dépend d'une part de la fonction f et d'autre part par du max. sur [a ; b] du polynôme $(x - x_0)…(x - x_n)$. Le choix judicieux des x_i permet de trouver un meilleur polynôme pour la norme $\| \cdot \|_\infty$. Les points de Tchebychev définissent de tels polynômes sur [-1 ; 1].</td>
<td>Σ majoration : majorer $e(x) = |f(x) - P(x)|$ permet de contrôler l'erreur en chaque x.
R majoration : le théorème ci contre permet la mise en œuvre d'une majoration. Et du contrôle sur cette majoration :

Σ majoration de e(x) :
- la majoration de e(x) dépend de $\underset{x \in [a;b]}{\mathrm{Max}} f^{(n+1)}(x)$ (impose de hypothèse usr la régularité de f)
- la majoration dépend du pas $(x - x_i)$: ce pas est en particulier contraint par les possibilité de la machine qui prendra en charge les calculs numériques.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>e(x) dépend du choix des xi : mène à des opérateurs de construction du choix de ces points (par exemple, points de Tchebychev).</td>
</tr>
<tr>
<td>Exemple (phénomène de Runge) : interpolation de la fonction définie par $f(x) = 1/(1+10x^2)$ sur [-1 ; 1].
La courbe pleine représente la fonction f, la courbe en pointillés noirs représente le polynôme de Lagrange de degré 6 calculé à partir de 7 points de Tchebychev sur [-1 ; 1], la courbe en pointillés plus clairs représente le polynôme de Lagrange de degré 6 calculé à partir de 7 points équirépartis sur [-1 ; 1] : il y a une amélioration des oscillations du polynôme calculé à partir de points équirépartis aux bornes de l'intervalle.

</td>
<td>$R_{Lagrange}$: procédé de Lagrange.
Σ courbe : le contrôle graphique (distance visuelle des courbes) permet d'identifier les effets de bords (l'approximation n'est pas bonne partout).

$R_{Tchebychev}$: procédé de Lagrange à partir des points de Tchebytchev.

Ainsi la résolution du problème d'approximation implique de développer conjointement les outils (R) de construction de l'approximation et les contrôles (Σ) sur la qualité de cette approximation. Les contrôles de qualité influent le choix du procédé de construction.</td>
</tr>
</table>

Problème de meilleure approximation : Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b]. Donner une approximation P de la fonction f, où P appartient à un sous espace vectoriel de dimension n+1 de C([a ; b]). La résolution de ce problème demande de caractériser « approximation » et de définir des critères permettant de retenir une approximation comme meilleure qu'une autre : Comment calculer l'approximante ? Si elle existe, quelle est sa qualité ?	**P** : trouver un polynôme approchant au mieux un ensemble de valeurs. **R :** construction de la fonction d'approximation Σ : évaluer la qualité de l'approximation
Le problème de l'approximation linéaire : Dans l'espace vectoriel C([a ; b]) muni d'une norme $\lVert . \rVert$, on cherche une approximation de la fonction f par un polynôme de degré au plus n tel que $\lVert f-(a^0+a^1x+...+a_nx^n)\rVert$ soit le plus petit possible. Les fonctions monômes peuvent être remplacées par d'autres fonctions (trigonométriques, exponentielles…). Le problème de l'approximation admet une solution unique pour la norme uniforme (polynôme de Tchebychev), pour la norme quadratique (méthode des moindres carrés).	**P :** choisir, dans l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, une meilleur approximation de la fonction f. **Σ :** la qualité de l'approximation se mesure par une distance entre f et P **R** instrumentant la distance : la norme $\lVert f-P\rVert$ comme outil théorique pour la mesure de distances entre fonctions (Exemple de norme : convergence uniforme sur l'espace C([a ; b])). **P :** Trouver le polynôme P tel que pour tout P' de degré ≤ n, $\lVert f-P\rVert \le \lVert f-P'\rVert$. Le choix de la norme est conditionné par le critère de minimisation : - $\lVert\ \rVert_\infty$ sur C([a ; b]): assure qu'il n'existe pas de grand écart ponctuel. - $\lVert\ \rVert_2$ sur C([a ; b]): P minimise $\int_a^b \lvert f(x)-P(x)\rvert^2\,dx$, permet un « grand écart » ponctuel. - $\lVert f-P\rVert^2 = \lVert f-P\rVert_\infty^{\ 2} + \lVert f'-P'\rVert_\infty^{\ 2}$ sur C^1([a ; b]): permet de majorer les distances entre fonctions et dérivées (les distances et les déformations sont majorées). **R** : Procédé de calcul d'une représentation analytique de P

Le lissage : Dans de nombreux problèmes, les données permettant d'accéder à la fonction f (ou issues de mesures expérimentales) sont entachés d'erreurs. Ce ne sont pas ces valeurs que prendra la fonction d'approximation mais des valeurs plus « vraisemblables »[36]. Problème des moindres carrés discrets : Le critère de construction de l'approximation P est : minimiser $\Sigma(f_i- P(x_i))^2$ dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Il est possible de trouver un polynôme qui annule $\Sigma(f_i- P(x_i))^2$ lorsque le degré du polynôme (+1) égale le nombre de données expérimentales. Mais, lorsque les mesures sont « nombreuses », ce polynôme comporte beaucoup de variations et un degré élevé, ce qui peut apparaître insatisfaisant (parce que l'on peut souhaiter faire des hypothèses sur la fonction f – rendant compte de la relation entre les données expérimentales – incompatibles avec ces variations ou ce degré).	**P** : Déterminer l'expression analytique d'un polynôme P qui sera choisit comme un représentant d'une relation qui liant $(x_i)_{i=0..n}$ à $(f_i)_{i=0..n}$. Σ : - si les données sont entachées d'erreurs alors l'interpolation polynomiale ne convient pas nécessairement - le choix d'une meilleure approximation p nécessite de faire des hypothèses sur les régularités de f (continue, dérivable, à variations connues, etc.) - critère des moindres carrés : (sous hypothèses d'une erreur équirépartie), on choisit P minimisant: $e_P = \Sigma[f_i- P(x_i)]^2$ et satisfaisant les hypothèses de régularités faites sur f. **R** : **-** méthode des moindres carrés discrets.

[36] Vraisemblable renvoie en particulier aux hypothèse que l'on peut faire sur l'erreur : aléatoire équirépartie, répartie selon un « défaut » de mesure que l'on connaît…

1.5 Conclusion :

La résolution des problèmes d'approximation que nous avons présentée implique la gestion conjointe de deux contrôles :

- contrôler la distance entre la fonction f et son approximation P, instrumentée par l'outil « norme ».
- faire des hypothèse sur les régularités de f dont P doit rendre compte : conserver les propriétés locale de la dérivée de f, prendre en compte le nombre de variations de f, etc[37]…

La gestion de la distance se fait au moyen des normes. Dans le cas des problèmes de lissage, seule une « norme discrète » sur un ensemble fini de valeurs pourra être considérée.

Le registre graphique est porteur de moyens de contrôles sur l'approximation : il est un indicateur visuel de la proximité des courbe de f et P, ainsi que de leurs régularités. Il n'est cependant pas opératoire pour la construction d'une approximation et la mesure des distances, qui mobilisent le registre analytique.

La référence aux seules représentations graphique et analytique ne permet pas la résolution du problème. Le choix d'une approximation est sous tendu par la construction de critères d'approximation : ces critère ne portent pas sur les caractéristiques des représentations mais sur l'utilisation de critères de comparaison de fonctions (distances de deux fonctions) et sur les régularités des fonctions. Cette analyse montre que les problèmes d'approximation engagent des éléments de la « conception objet ».

Nous avons proposé à des étudiants un problème de lissage. Nous allons dans la partie suivante présenter ce problème ainsi qu'une analyse de sa résolution en termes de conceptions.

[37] Comme nous l'avons dit en début de ce chapitre, nous avons ici écarté les problématiques propres à l'analyse numériques qui traitent en particulier des questions de calculabilité et de complexité. Les problèmes d'approximation sont ici restreints à des questions élémentaires sur des fonctions continues sur des intervalles bornés.

2. Analyse a priori du problème de lissage

2.1 Introduction

Nous avons cherché un problème de lissage nous permettant de répondre aux deux intérêts de notre problématique. D'une part, il fallait choisir un problème discriminant pour les conceptions courbe, analytique et objet. Cela signifie que, pour chacune de ces conceptions, les décisions pour la résolution de ce problème sont différentes : soit par le choix des opérateurs, soit par la réponse donnée au problème par exemple. D'autre part, nous souhaitons proposer un problème et un mode expérimental nous permettant d'avoir des indices sur les contrôles engagés dans cette résolution et sur les relations entre ces contrôles et les opérateurs.
Nous avons tout d'abord choisi un problème dans lequel la place des représentations analytique et graphique est importante et permet ainsi une entrée par les conceptions courbe et analytique. Cela a en particulier été rendu possible par l'utilisation du logiciel Maple.
Nous avons par ailleurs choisi un problème pour lequel les conceptions courbe et analytique se révèlent non suffisantes pour répondre, celle-ci nécessitant l'engagement de contrôle dont notre analyse didactique (chapitre 4) nous permet de dire qu'ils sont propres à la conception objet.
Enfin, nous avons fait l'hypothèse, en nous appuyant sur les travaux de Sfard (chapitre 2), que les problèmes dans lesquels le concept de fonction intervient comme objet sont plus successibles de faire apparaître les contrôles portant sur ce concept. Nous pensons donc que les caractéristiques épistémologiques du problème, parce qu'elles nécessitent l'engagement de la conception objet, sont propices à révéler les contrôles. Nous avons également joué sur la nature de la question posée (faire le choix d'une fonction parmi plusieurs et justifier ce choix)) et sur le mode expérimental (travail en binômes) afin de favorise l'explicitation de ces contrôles.

Nous allons dans ce chapitre présenter en détail le problème – il s'agit de choisir parmi plusieurs fonctions une meilleure approximation à une fonction donnée – et nous décrirons les critères de choix susceptibles d'être mis en œuvre.
Nous montrerons que le problème choisi laisse une incertitude sur le choix de cette approximation dans la mesure où il n'existe pas nécessairement une seule meilleure approximation parmi les fonctions proposées. Cette incertitude, et la façon dont elle est gérée

par les étudiants, a été un élément important pour la discrimination des conceptions. Nous montrerons pourquoi.

Nous donnerons une résolution du problème par chacune des conceptions courbe, analytique et objet. En particulier, nous monterons que l'incertitude du problème ne prend pas le même sens selon la conception engagée.

2.2 Présentation du problème et identification des critères de choix de l'approximation

2.2.1 L'énoncé du problème donné aux étudiants

Nous avons distribué aux étudiants ayant participé à l'expérimentation une feuille sur laquelle ils pouvaient lire l'énoncé suivant :

Ci-dessous des valeurs y_i, entachées d'erreurs aléatoires pouvant aller jusqu'à 10 %. Ces valeurs sont issues d'un polynôme P de degré 3 de coefficients inconnus, évalué en x_i.

On propose cinq approximations de ce polynôme. Choisissez celle qui approche au mieux ce polynôme :

- *sur l'intervalle [0;20]*
- *sur $[0\ ;\ +\infty[$*

Vous expliquerez les raisons pour lesquelles vous retenez ou vous refusez chacune des approximations.

Les données *:*

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_i	1.22	1.41	1.38	1.42	1.48	1.58	1.84	1.79	2.03	2.04	2.17	2.36	2.30	2.57	2.52	2.85	2.93	3.03	3.07	3.31	3.48

Les fonctions d'approximation *:*

Proposition 1 *: polynôme de degré 2 de représentation algébrique :*

$f_1(x) = 1.2310 + 0.0752\,x + 1.789 \times 10^{-3}\,x^2$

Proposition 2 *: polynôme de degré 3 de représentation algébrique :*

$f_2(x) = 1.2429 + 0.06706\,x + 2.833\times10^{-3}\,x^2 - 3.48\times10^{-5}\,x^3$

Proposition 3 *: polynôme de degré 4, de représentation algébrique :*

$f_3(x) = 1.2712 + 0.0308\,x + 0.0115\,x^2 - 7.1626\times10^{-4}\,x^3 + 1.704\times10^{-5}\,x^4$

Proposition 4 *:*

La fonction f_4 définie par :

- *elle passe par chacun des points (x_i, y_i)*
- *sur chaque intervalle [x_i ; y_i], f_4 est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3*
- *elle est deux fois dérivable et sa dérivée seconde est continue*
- *sa représentation algébrique est la suivante (sur chaque intervalle [x_i ; y_i]) :*

  $f_{4/[0;1]} = -0.0634\, x^3 \ +0.2534\, x + 1.22$

  $f_{4/[1;2]} = 0.0971\, x^3 - 0.4816\, x^2 + 0.7350x + 1.0594$

  $f_{4/[2;3]} = -0.0350\, x^3 + 0.3115\, x^2 - 0.8512x + 2.1170$

  $f_{4/[3;4]} = -0.0068\, x^3 + 0.0573\, x^2 - 0.0888x - 1.3545$

  $f_{4/[4;5]} = 0.0824\, x^3 - 1.0134\, x^2 + 4.1946x - 4.3567$

  $f_{4/[5;6]} = -0.2027\, x^3 + 3.2644\, x^2 - 17.1950x + 31.2926$

  $f_{4/[6;7]} = 0.2587\, x^3 - 5.0433\, x^2 + 32.6515x - 68.4004$

  $f_{4/[7;8]} = -0.2322\, x^3 + 5.2671\, x^2 - 39.5216x \ + 100.0035$

  $f_{4/[8;9]} = 0.1501\, x^3 - 3.9093\, x^2 + 33.89x - 95.7614$

  $f_{4/[9;10]} = -0.0183\, x^3 + 0.6385\, x^2 - 7.0407x + 27.0315$

  $f_{4/[10;11]} = -0.1369\, x^3 + 4.1963\, x^2 - 42.6183x + 145.6237$

  $f_{4/[11;12]} = 0.2559\, x^3 - 8.7664\, x^2 + 99.9715x - 377.2058$

  $f_{4/[12;13]} = -0.3067\, x^3 + 11.4889\, x^2 - 143.0930x + 595.0525$

  $f_{4/[13;14]} = 0.3210\, x^3 - 12.9950\, x^2 + 175.1989x - 784.2127$

  $f_{4/[14;15]} = -0.2774\, x^3 + 12.1434\, x^2 - 176.7401x + 858.1695$

  $f_{4/[15,16]} = 0.1588\, x^3 - 7.4923\, x^2 + 117.7970x - 614.5163$

  $f_{4/[16,17]} = -0.0879\, x^3 + 4.3574\, x^2 - 71.7991x + 396.6630$

  $f_{4/[17,18]} = 0.1131\, x^3 - 5.9000\, x^2 + 102.5777x - 591.4725$

  $f_{4/[18,19]} = -0.1045\, x^3 + 5.8522\, x^2 - 108.9627x + 677.7704$

  $f_{4/[19,20]} = 0.0349\, x^3 - 2.0940\, x^2 + 42.0168x - 278.4334$

Proposition 5 *: f_5 est le polynôme de degré inférieur ou égal à 3, prenant les quatre valeurs $f_5(0) = 1,22$; $f_5(6) = 1,84$; $f_5(13) = 2,57$ et f_5 $(20)=3,48$:*

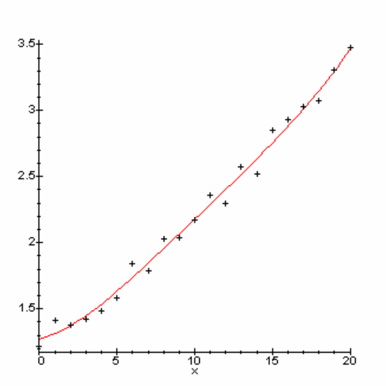
$f_5(x) = 8,817\times10^{-5}x^3 - 0.00160x^2 + 0.10977x + 1.2200$

Vous pouvez *:*

- *Evaluer f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 en tout x réel. (ouvrir dans Maple le fichier ("lissage.mws") et taper la commande "> `fi(valeur);`" avec i=1..5 pour évaluer f_i pour i=1..5"*

- *Avoir une représentation graphique (conjointement ou non) d'une ou plusieurs fonctions f_i et des données (x_i ,y_i). Par exemple, pour avoir une représentation graphique des données représentées par des points, et de la fonction f_3, taper la commande :*

  ```
  > with(plots):
  > A:=plot(xiyi,style=point):
  > B:=plot(f3,0..20):
  > display({A,B});
  ```
  "on obtient la figure" :

  "

- *Faire toute opération de votre choix dans Maple. Expliquez alors ce que vous faites et vos raisons.*

2.2.2 Maple

L'énoncé du problème suggère aux étudiants d'utiliser le logiciel Maple. Il donne des indications sur le type d'opérations qu'il leur est possible d'effectuer dans Maple. La littérature sur les environnements informatiques d'algèbre et de calcul formel atteste de leurs effets stimulant auprès des étudiants par les feed-back qu'ils permettent (Dreyfus and Hillel, 1998) et parce qu'ils permettent aux étudiants de développer des intuitions visuelles avant de mettre en œuvre les outils formels d'une théorie (Tall, 2000a). Par ailleurs, l'usage de tels environnements permet d'effectuer des calculs et de donner à voir des représentations auxquelles il aurait été difficile d'accéder dans un temps raisonnable pour une expérimentation sans l'usage d'un logiciel permettant du « calcul » sur les représentations d'une fonction. Le choix particulier de Maple a été fait parce qu'il permettait la mise en œuvre des outils nécessaires à l'expérimentation et qu'il avait déjà été utilisé par la majorité du public participant à l'expérimentation.

La littérature donne aussi des avertissements concernant de tels usages. Les processus d'instrumentation (c'est-à-dire comment l'outil devient un instrument pour l'activité mathématique) se révèlent complexes (Artigue, 2001). Nous verrons au cours de l'analyse certaines difficultés qui ont pu apparaître liées aux spécificités de Maple (en particulier, pour les représentations graphiques des fonctions sur [0 ; +∝[. Ces difficultés ont parfois pu être intéressantes car révélatrices de la capacité qu'ont eu ou non les étudiants à dépasser les contraintes de Maple. Cependant, nous ne mènerons pas d'analyse prenant systématiquement en charge ces spécificités, celles-ci ne nous étant pas apparues déterminantes pour les éléments d'analyse retenus dans les protocoles : d'une part parce que Maple (ses outils de calcul formel et numérique) était familier aux étudiants ayant participé à l'expérimentation, d'autre part parce que les questionnements de notre problématique, qui ont guidé l'analyse, ne nous sont pas apparus comme significativement perturbés par ces spécificités.

2.2.3 Quelques remarques sur les caractéristiques de ce problème

Tout d'abord, pourquoi annoncer que les valeurs yi sont issues d'un polynôme de degré 3 ? Cela permet de fermer en partie le problème relativement à la notion d'approximation. Cela présentait différents avantages. Tout d'abord, nous ne cherchions pas une situation adidactique relativement aux questions d'approximation, mais bien relativement à la notion de fonction. Annoncer que P est un polynôme de degré 3 permet de fermer beaucoup de questions autour de la nature de l'approximation. Cependant, la situation nécessite tout de même de qualifier les propriétés de l'approximation, et en cela donnait accès à la manière dont l'objet P est défini. En cela, la situation permettait de savoir comment la fonction était qualifiée par les conceptions des sujets, au travers des propriétés données à l'approximation.
Il parait également légitime de se demander pourquoi ne pas proposer de fonction polynôme de degré 1, ce que nous avions prévu initialement. Or nous avons pu constater, au cours d'un pré expérimentation, que la présence d'un polynôme de degré 1 n'apportait rien de plus à celle d'un polynôme de degré 2 dans la construction des critère de choix d'une meilleure approximation, car tous deux étaient traités sous le même critère de choix, à savoir être un polynôme de degré inférieur à 3.
Nous pouvons aussi questionner le choix de points équidistants. Nous avons également pu constater que la présence de points non équidistants était un élément fortement perturbateur pour les étudiants. Nous avons décidé de ne pas introduire de discussion sur la répartition des points afin de ne pas rendre la situation trop complexe à gérer pour l'analyse didactique, sans avoir pour autant de gain qualitatif sur les critères de choix et de qualité de l'approximation.

Nous avons fait le choix de l'intervalle [0 ; 20] car il constitue un intervalle fermé, d'une amplitude « raisonnable », c'est-à-dire dans l'échelle des amplitudes rencontrées dans les problèmes usuels des manuels d'introduction à l'analyse numérique.

Enfin, il est important de remarquer que les représentations analytiques de f_4 ne sont pas nécessaires, puisque la régularité et le fait de passer par les points xiyi suffisent à définir f_4. D'ailleurs, les coefficients des représentations analytiques données dans l'énoncé sont des valeurs approchées des coefficients de f_4. Alors, pourquoi proposer ces représentations (monstrueuses…) ? Il y a plusieurs raisons à cela. D'une part, Maple donne à voir ces représentations dès que l'on définie f4 comme une spline C^2 reliant les points xiyi. D'autre part, notre pré expérimentation montrait que la proposition 4 était déconsidérée car non définie analytiquement. Or nous souhaitions que d'autres critères soient construits à son propos. L'analyse a priori montre en particulier que la conception analytique valide f4, ce qui n'apparaissait pas en l'absence des représentations analytiques (voir ci-dessous).

2.2.4 Critères de choix de l'approximation [0 ; 20]

Il est nécessaire, pour décider du choix d'une meilleure approximation de P sur [0 ; 20], de construire un critère de meilleure approximation, qui désignera les propriétés de l'approximation. Un critère classique, nous l'avons vu lors de l'étude des problèmes d'approximation, consiste d'une part à minimiser l'écart aux données en faisant le choix d'une mesure discrète aux données et d'autre part à assurer que l'approximation ait la régularité souhaitée (par exemple, le polynôme dont sont issues les données étant de degré 3, on peut demande à l'approximation d'être un polynôme de degré 3, ce qui permet en particulier d'assurer que l'approximation ne comporte pas trop de variations entre les valeurs xi). P étant inconnu, il n'est pas possible de décider entre f1, f2, f3 et f5, laquelle de ces fonction est une meilleure approximation (au sens où elle minimise la mesure discrète $(fi - P(xi)_{i=0\ldots20})$. La conscience de cette incertitude, constitue un critère de validation de la solution choisie.

Nous faisons ci-dessous une liste des critères de choix de l'approximation susceptibles d'apparaître, sans donner de résolution du problème. Puis, dans un second temps, nous proposons une résolution du problème par chacune des conceptions courbe, analytique et objet. Nous verrons que ces conceptions se saisissent d'un ou plusieurs des critères listés en amont.

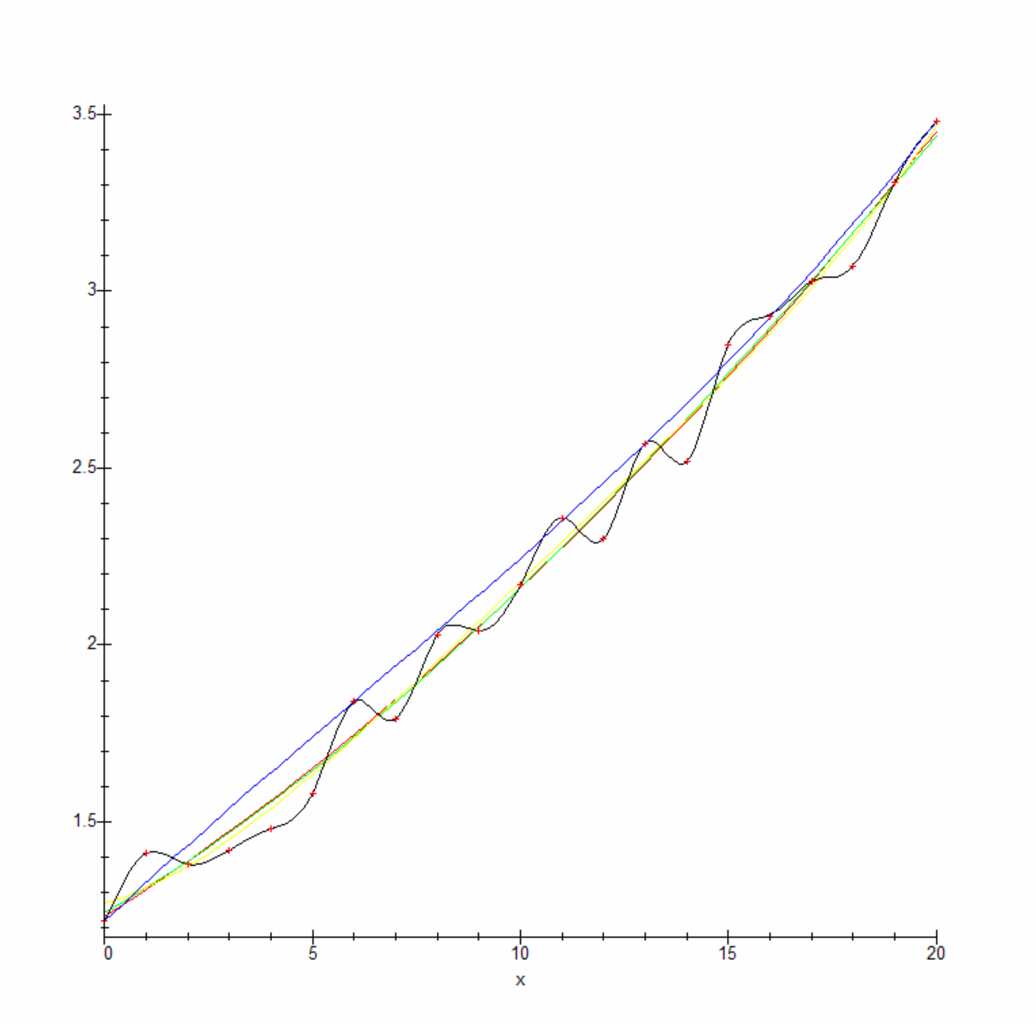
Critère de proximité aux points :

"Proximité graphique des points xiyi et de la courbe" :

Les représentations graphiques permettent d'évaluer visuellement la proximité des fonctions f_i aux points. Elles se révèlent inefficaces pour distinguer une meilleure approximation parmi f_1, f_2, f_3 car les courbes sont visuellement très proches. Elles permettent d'identifier f_5 (en bleu) comme la seule fonction laissant toutes les données en dessous de la représentation graphique, ce qui peut laisser présager que f_5 n'est pas un minorant de la mesure discrète aux données yi. Le registre graphique permet de vérifier que f_4 passe par tous les points.

- *Voici la procédure de tracé des courbes dans Maple et le résultat du tracé :*

```
> A:=plot(xiyi,style=point):
> B:=plot(f1(x),x=0..20,color=red):
> C:=plot(f2(x),x=0..20,color=green):
> E:=plot(f3(x),x=0..20,color=yellow):
> F:=plot(f4(x),x=0..20,color=black):
> G:=plot(f5(x),x=0..20,color=blue):
> display({A,B,C,E,F});
```



Mesures discrètes : le critère est minimiser la somme des écarts ei = $\left|f_i(x_j)-y_j\right|$

- *soit* e1= $\sum_{j=0..20} \left| f_1(x_j) - y_j \right| \approx 0.09503$; e2= $\sum_{j=0..20} \left| f_2(x_j) - y_j \right| \approx 0.0942$; e3≈0.0893 ; e4=0 ; e5 ≈ 0.1835.

  f4 annule l'écart, et f3, qui est le polynôme de plus haut degré minimise la les autres écarts.

  - Voici la procédure de calcul de e1 dans Maple :

```
> M:=map(f1,xi):
> d1:=zip((x,y)->abs(x-y),M,yi):
> add(i,i=d1);
```

- Autre mesure possible des écarts avec e1=$\sum_j \left[f_1(x_j) - y_j \right]^2 \approx 1.1863$; e2=$\sum_j \left[f_2(x_j) - y_j \right]^2 \approx 1.1821$; e3≈1.1653 ; e4≈1.4619.

  De même, f4 annule l'écart, et f3, qui est le polynôme de plus haut degré minimise les autres écarts.

  - procédure de calcul de cet écart dans Maple :

```
> M:=map(f3,xi):
> d2:=zip((x,y)->(x-y)^2,M,yi):
> add(i,i=d2);
```

Nous verrons que f4 ou f3 peuvent être choisis selon le critère des écarts aux yi selon que ce critère s'associe ou non à un critère de régularité de la courbe de l'approximation.

Critères sur les régularités de l'approximation :

Critère « l'approximation est un polynôme » :

L'approximation choisie sera un polynôme, c'est-à-dire une fonction d'expression analytique $\Sigma a_k x^k$. Ce critère invalide f4.

Critère « nombre de variations » :

L'approximation est une fonction dont les variations sont représentatives de celles de f. Le registre graphique permet d'observer que la courbe f_4 passe par toutes les points donnés et comporte donc de nombreuses oscillations, ce qui est différent du comportement prévu de la courbe de P. Le registre graphique permet en revanche de valider les variations des autres fonctions fi.

Critère "l'approximation est un polynôme de même degré que f"

L'approximation est un polynôme de degré 3, c'est-à-dire une fonction dont l'expression analytique est de la forme ax^3+bx^2+cx+d. Ce critère fait le choix de f_2 et f_5.

Critère "l'approximation est un polynôme de degré minimum" :

Ce critère fait le choix de f_1, qui est le polynôme de degré le plus faible (à moindre coût de calcul pour des estimations des valeurs f(x) pour x appartenant à [0 ; 20]).

Contrôles sur l'incertitude du problème :

Le problème a un caractère « mal défini ». La notion d'approximation n'est pas absolue mais relative à un contexte qui rend légitime le choix d'un critère ou plusieurs. Les sujets ont à leur charge de fixer ces critères. Dans notre problème particulier, les contraintes du savoir mathématique en jeu laissent ouverts les choix d'une meilleure approximation[38]. Cette incertitude offre l'avantage de favoriser les discussions, parce que les choix sont ouverts. Par ailleurs cette incertitude ne prend pas le même sens selon la conception engagée : il nous semblait intéressant de voir si les étudiants étaient conscients de cette incertitude, et les cas échéant, de déterminer la manière dont ils la contrôlaient. En revanche, **la situation manque de régulation externe par le milieu et cela peut favoriser l'apparition de rapports d'autorité ou des comportements contingents des étudiants**.

2.3 Choix d'une meilleure approximation sur [0 ; 20] par les conceptions courbe, analytique et objet

Nous allons décrire les résolutions du problème d'approximation par les conceptions courbes, analytique et objet. Ces résolutions se saisissent d'un ou plusieurs des critères listés plus haut.

2.3.1 Résolution par la conception courbe

Contrôles sur l'approximation :

- L'approximation de P a un graphe qui est perceptivement proche des points xiyi.
- L'approximation de P est un objet graphique conforme à la courbe d'un polynôme de degré 3 : continue, comportant au plus deux changements de variations.

Opérateurs permettant l'évaluation des contrôles sur l'approximation :

[38] Nous aurions pu définir par exemple comme meilleure approximation la fonction constante égale à y_j (j choisit entre 0 et 20), qui représente le choix le moins coûteux en termes de calcul pour la construction d'une approximation.

- Tracer les courbes des fonction fj et les points xiyi sur [0 ; 20] dans l'environnement de Maple.
- Evaluer visuellement l'écart des courbes aux points xiyi : invalide f5.
- Evaluer visuellement les variations des courbes : invalide f4

Gestion de l'incertitude et choix de l'approximation :

- Contrôle sur l'incertitude : il existe trois choix équivalents (les trois fonctions satisfont les critères de meilleures approximation). Au sens de la conception courbe, l'incertitude du problème signifie qu'il existe plusieurs fonctions équivalentes du point de vue de l'approximation.

2.3.2 Résolution par la conception analytique

Contrôles sur l'approximation :

- L'approximation de P minimise la valeur $\sum_i \left[f_j(x_i) - y_i \right]^2$.
- L'approximation de P est un polynôme de degré 3 d'expression analytique ax3+bx2+cx+d.

Opérateurs :

- Evaluer les expressions analytiques des fonction fi et leur conformité à l'expression ax3+bx2+cx+d : valide les expression de f2 et f5.
- Evaluer $\sum_i \left[f_j(x_i) - y_i \right]^2$ pour j = 2 et 5 : valide f2.

Gestion de l'incertitude et choix de l'approximation :

- Contrôle sur l'incertitude : le problème ne comporte pas d'incertitude, f2 est la meilleure approximation de P sur [0 ; 20].

2.3.3 Résolution par la conception objet

Contrôles sur l'approximation :

- L'approximation de P minimise l'écart (fj – P) j=1..5.
- L'approximation rend compte de certaines régularités de P, il faut faire le choix de ces régularités. Ce choix dépend de l'usage que l'on souhaite faire de l'approximation.

Contrôles pour l'instrumentation :

- Contrôle permettant l'évaluation de l'écart $(fj\text{-}P)_{j=1..5}$: si seules les valeurs $(xi,yi)_i$ sont connues alors évaluer pour chacune des fonctions fj les mesures discrètes $(fj(xi)\text{-}P(xi))_{i=0..20}$.
- Si les données xiyi sont entachées d'erreurs alors la meilleure approximation n'est pas nécessairement celle qui minimise la mesure discrète.
- Faire le choix d'un type de régularité parmi les régularités possibles : degré 3 ; nombre de variations sur [0 ; 20] ; degré minimum etc

Opérateurs :

- Evaluer $\sum_i \left[f_j(x_i) - y_i \right]^2$ pour j = 1..5.
- Confronter les fj au critère de régularité choisi : f4 ne permet pas de rendre compte des variations de P ni d'une valeur de la dérivée de P ; les fj pour j = 1, 2, 3, 4 et 5 sont équivalentes du point de vue des valeurs de P(x) pour x appartenant à [0 ; 20] mais la valeurs de $\sum_i \left[f_j(x_i) - y_i \right]^2$ laisse penser que les estimation de f3(x) sont de moins bonne qualité ; les fj pour j = 1, 2, sont équivalentes pour une estimation des valeurs de f'(x) sur [0 ; 20] ; f3 est plus contrainte par les erreurs sur les valeurs yi et donne donc éventuellement de moins bonnes estimations de f'(x) sur [0 ; 20].

Gestion de l'incertitude et choix de l'approximation :

Contrôle sur l'incertitude : il n'existe pas de meilleure approximation. Le choix de la meilleure approximation dépend du critère de régularité que l'on souhaite privilégier. Le problème n'impose pas de contraintes sur ce choix. Mais f1 et f2 sont des fonctions équivalentes du point de vue de l'écart aux données et qui permettent de satisfaire le plus de contraintes de régularité. Si le coût de calcul des estimations de f(x) importe alors choisir le polynôme de plus petit degré. Ainsi l'incertitude est relative à la particularité du problème : la priorité à donner aux critères d'approximation dépend de l'usage qui sera fait de l'approximation.

2.3.4 Conclusion

La résolution du problème nécessite la construction de critères définitoires de l'approximation : elle est de ce point de vue révélatrice des contrôles sur la fonction P au travers des propriétés attribuées à son approximation. Pour cela, les conceptions courbes et analytiques mettent en œuvre des contrôles sur les représentations graphique et analytique de l'approximation qui contraignent les critères d'écart aux données et de régularité : être visuellement proche des points xiyi et avoir une allure global conforme à la courbe d'un polynôme de degré 3 pour la conception courbe ; minimiser l'opérateur $\sum_j \left[f_i(x_j)-y_j\right]^2$ et avoir une expression analytique de la forme ax^3+bx^2+cx+d pour la conception analytique. La fonction objet met en œuvre deux contrôles : sur la mesure discrète $\sum_j \left[f_i(x_j)-y_j\right]^2$ et sur le choix d'une régularité[39].

La gestion de l'incertitude du problème prend un sens différent selon la conception à l'œuvre. Les fonctions f1, f2, f3 sont équivalentes pour la conception courbe. Le problème comporte une solution unique pour la conception analytique. La conception objet atteste que les contraintes de la situation font qu'il n'est pas possible de faire le choix d'une meilleure approximation unique mais qu'il est possible d'assurer le plus de régularité à cette approximation par le choix de f1 et f2. Elle établit également que la validité de ce choix dépend de l'usage qu'il sera fait de l'approximation et n'est pas intrinsèque au problème.

[39] Comme nous l'avons signalé dans la première partie de ce chapitre, il peut exister d'autres critères qui ne sont pas pris en considération ici.

Critère de choix de l'approximation	**Conception courbe**	**Conception analytique**	**Conception objet**
Mesure discrète	Σ : proximité visuelle de la courbe de f et des points xiyi R : tracer les courbes des fj et les points	Σ : minimiser l'opérateur $\sum_j \left[f_i(x_j) - y_j \right]^2$, j = 2, 5 R : évaluer $\sum_j \left[f_i(x_j) - y_j \right]^2$, j = 2, 5	Σ : minimiser l'écart (f – P) R : évaluer $\sum_j \left[f_i(x_j) - y_j \right]^2$, j = 1…5
Régularités de l'approximation	Σ : continuité, nombre de variations ≤ 2 R : tracer les courbes des fj et les points	Σ : conformité de f(x) à l'expression ax^3+bx^2+cx+d R : évaluer les expressions fj(x), j=1…5	Σ : faire le choix des régularités de l'approximation R : évaluer les régularités des fj
Incertitude	f1, f2 et f3 sont des approximations équivalentes relativement aux critères	f2 est la meilleure approximation	Pas de meilleure approximation sans définir l'usage de celle-ci, mais f1 et f2 assurent le plus de régularité

L'usage de Maple et l'indication qui est donnée dans l'énoncé sur la procédure pour tracer les représentations graphiques suggèrent de faire le tracé des courbes et donc la construction de critères propres à la conception courbe. Cependant, la proximité des courbes ne permet pas à ces critères d'être discriminants pour le choix d'une meilleure approximation. Nous attendons donc qu'une discussion s'engage sur les moyens de préciser les critères d'approximation.

2.4 Choix d'une meilleure approximation sur [0 ; +∞[par les conceptions courbe, analytique et objet

2.4.1 Explications sur le choix de cette question

La demande d'une meilleure approximation sur [*0 ; +∝* [peut apparaître illégitime. En effet, il n'est pas possible de garantir le comportement de P en dehors de l'intervalle [0 ; 20].
L'évocation de l'infini dans la question nous semblait permettre de révéler les moyens qu'avaient les étudiants de porter un regard critique sur la comparaison de deux fonctions sur un intervalle « grand », sur ce qu'ils pensaient des moyens de contrôler P en dehors de [0 ; 20]. Il nous semblait que le niveau du public visé (étudiants ayant réussi le Capes de mathématiques et étudiants de deuxième année d'école d'ingénieur à l'INPG) devait permettre aux étudiants de se prononcer sur le sens de cette question.
Enfin, l'absence d'information sur P, n'empêche pas le traitement des « possibles » de P. Nous souhaitions savoir comment les sujets qui avaient engagé une conception courbe se saisissaient de la question de l'approximation à l'infini, et voir quels étaient les critères construits par les conceptions analytiques et objet.

2.4.2 Résolution par la conception courbe

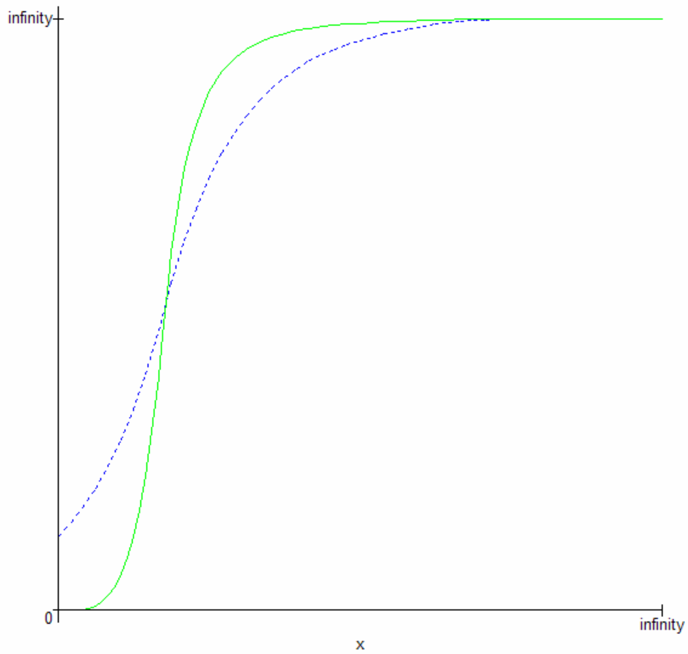
On peut attendre de la conception courbe qu'elle construise un critère de proximité perceptive de la courbe de l'approximation à celle de P. mais le fait qu'il n'y ait pas de moyen de connaître le comportement de la courbe de P après 20 empêche la vérification de ce critère.

Remarque préliminaire sur la gestion des représentations graphiques à l'infini par Maple

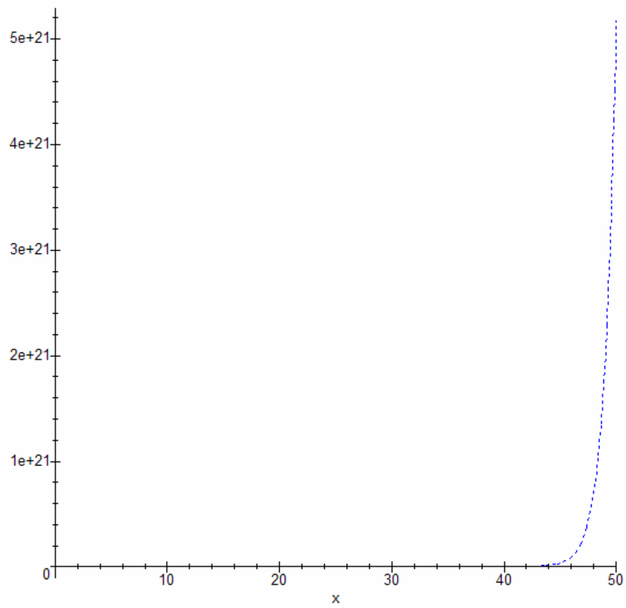
Nous dirons, en analyse a priori, que même si une représentation de P était disponible, la conception courbe ne dispose pas d'outils pour traiter ces représentations en terme de qualité d'approximation. Elle ne permet donc pas de traiter la question du choix d'une meilleure approximation à l'infini, en invalidant la légitimité d'une telle question notamment.
Ceci est associé la particularité des représentations graphiques de Maple des trois courbes de f1, f2 et f3 à l'infini : le logiciel ne gère pas de différentiation des représentations graphiques à l'infini. La raison essentielle est que le registre graphique ne permet pas cette gestion. Nous allons illustrer cela par quelques exemples de représentations sur [0 ;+∝ [dans Maple.

- Représentation des fonctions f : x-> e^x (ligne pointillée) et f : x-> x^4 sur [0 ;+∝ [(ligne pleine) :

La représentation donne à voir une croissance de la fonction exponentielle « moins rapide » que du monôme de puissance 4.



- Représentations des fonctions f : x-> e^x (ligne pointillée) et f : x-> x^4 sur [0 ;50 [(ligne pleine, non visible) :



La représentation donne à voir à voir une croissance « plus rapide » de la fonction exponentielle que celle du monôme de puissance 4, dont les représentations n'apparaissent pas car l'échelle ne permet pas de voir apparaître les valeurs de u monôme qui sont trop petites.

Ces exemples montrent comment Maple gérait les représentations de deux fonctions dont l'ordre de grandeur de e^x est plus grand que celui de x^4 en plus l'infini, c'est-à-dire que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^4} = +\infty$. Les représentations graphiques sur [0 ; $+\propto$ [et sur [0 ; 50] peuvent mener à des interprétations contradictoires sur l'ordre de grandeur des deux fonction pour des valeurs de x « grandes ».

Cas 2, Recherche d'une meilleure approximation sur [0 ; $+\propto$ [

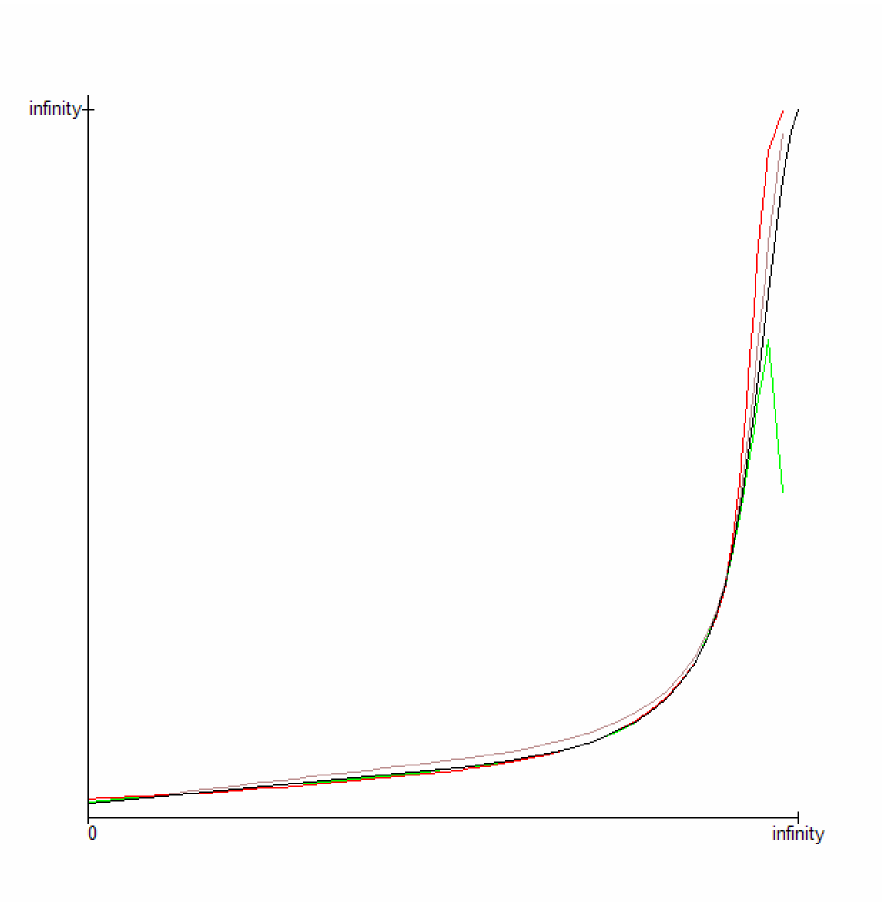
Contrôle perceptif sur l'écart des courbes de l'approximation et de P :

- Les courbes de P et de son approximation sont perceptivement proches sur [0 ; $+\propto$ [

Opérateur :

- tracer les fonction fj, j=1, 2, 3, 5 sur [0 ; $+\propto$ [:

```
with(plots):
> A:=plot(xiyi,style=point):
> B:=plot(f1,0..infinity,color=black):
> E:=plot(f3,0..infinity,color=red):
> F:=plot(f5,0..infinity,color=pink):
> C:=plot(f2,0..infinity,color=green):
> display({B,C,E,F});
```



Contrôle sur les représentations graphiques des fonctions fj, j = 1,2, 3 et 5 sur [0 ; +∝ [

- On peut prévoir que la représentation de f2 (dont la courbe semble signifier une décroissance) peut être associée à un contrôle sur la représentation analytique du type : si le coefficient de plus haut degré est négatif alors la courbe décroît en plus l'infini), qui permet de régler la question de « cassure vers le bas ».
- Pour ce qui concerne les autres courbes, la représentation ne permet pas de comparer les courbes entre elles, de les comparer à la courbe de P, qui n'est pas accessible pour les étudiants.

Décision : pas de choix de meilleure approximation possible.

2.4.3 Résolution par la conception analytique

Contrôle sur l'approximation :

- Si deux polynômes sont de même degré et ont des coefficients de plus haut degré de même signe alors ils sont de bonnes approximations à l'infini.

Critère de choix de l'approximation :

- l'approximation de P est un polynôme de même degré que P et dont le coefficient de plus haut degré est du même signe que celui de P.

Opérateur :

- évaluation du degré des représentations analytiques des fj.

Contrôles sur l'incertitude sur le problème :

- tous les polynômes de degré 3 et dont le coefficient de plus haut degré est du signe de celui de P sont de bonnes approximations de P à l'infini.

Cette conception valide f2 ou f5 : la connaissance du signe du coefficient de plus haut degré de P permettrait de lever l'incertitude.

2.4.4 Résolution par la conception objet

Propriétés de l'approximation :

- On ne peut pas connaître le comportement de P après 20.
- La meilleure approximation de P minimise une distance (f , P) sur [0 ; +∝[
  - si f = P, cette distance est nulle
  - sinon, cette distance est en général (avec les distances usuelles entre fonctions) non bornée car fj et p sont des polynômes.

Décision :

On ne peut pas décider d'une meilleure approximation.

2.4.5 Conclusion

Les conceptions courbe, analytique et objet ne permettent pas de se positionner sur la question de l'approximation sur [0 ; +∝[. Mais les trois conceptions ont des positions sensiblement

différentes. La connaissance du signe du coefficient de plus haut degré de P permettrait à la conception analytique de choisir une meilleure approximation, puisque pour cette conception, un polynôme est caractérisé à l'infini par son degré et le signe de son coefficient de plus haut degré (alors que la différence de deux polynôme de degré 3 diverge en général à l'infini). La conception courbe ne peut décider en l'absence de possibilité de visualiser la courbe de P sur $[0 ; +\infty[$. Cependant, l'accès à cette représentation graphique ne permettrait pas nécessairement à la conception de faire le choix d'une meilleure approximation (en particulier à cause des difficultés de représentation graphiques à l'infini), ce que la conception ne contrôle pas forcément. La conception objet permet de contrôler que me^me en connaissant P, le différence f-P diverge à l'infini si f-P≠constante.
Nous pouvons nous attendre à ce que cette question soit difficile à traiter pour les étudiants, en particulier par ce qu'il faut porter un regard critique sur la question qui est posée (et la formulation de cette question pourrait inciter à penser qu'il existe un meilleure approximation). Nous espérons cependant que les étudiants prennent conscience qu'on ne peut pas prévoir le comportement de P à l'infini.

2.5 Conclusion de l'analyse a priori

La construction de moyens d'estimer un écart entre f et P et la construction de critères de régularités que doit satisfaire l'approximation sont deux éléments importants de la résolution. Leurs gestions se révèlent différentes selon qu'elles sont prises en charge par les conceptions courbe, analytique et objet. Par ailleurs, l'incertitude laissée par le problème prend un sens significativement différent selon la conception engagée. Nous pouvons donc attendre de ce problème qu'ils permettent de distinguer les conceptions courbe, analytique et objet.
La nature de la tâche demande l'expression de propriétés caractérisant l'approximation, et en cela, est révélatrice des contrôles que les conceptions engagent sur le polynôme P à approcher, au travers des propriétés attribuées à son approximation. On trouve également une forte interaction contrôle/opérateurs dans le problème : les opérateurs sont assujettis aux critères définitoires de l'approximation.
La question de l'approximation sur $[0 ; + \infty[$ est difficile. Elle a un caractère « piège » dans la mesure où le contrat expérimental peut pousser les étudiants à chercher à tout prix une meilleure approximation. Nous pouvons tout de même attendre qu'elle permette de montrer si les étudiants sont conscients qu'ils ne peuvent pas décider du comportement de P après 20 et peuvent mettre en œuvre une lecture critique des représentations graphiques à l'infini.

Chapitre 6 : Méthodologie des analyses

1. Introduction : rappel des hypothèses que nous cherchons à valider et du positionnement du problème de l'expérimentation relativement aux hypothèses

Nous cherchons à nous positionner relativement à deux d'hypothèses : la première concerne les conceptions courbe, analytique et objet, qui on été identifiées lors de l'analyse historique et de l'analyse des travaux de Dubinsky et Sierpinska ; la deuxième concerne le rôle et les relations entre opérateurs et contrôles dans l'activité d'un sujet en résolution de problème.

Notre analyse a priori a montré que le problème choisi était susceptible de voir émerger les conceptions courbe, analytique et objet. En particulier, la conception courbe, si elle ne permet pas de résoudre le problème, permet d'entrer dans le problème, et donc, la dévolution du problème aux étudiants. Nous cherchons d'une part à valider la mise en oeuvre des conceptions courbe, analytique et objet et d'autre part à préciser leurs éléments.

L'analyse des travaux de Brousseau et de Vergnaud sous l'angle des questions de validation a montré que l'activité du sujet comportait un versant contrôle et un versant opératoire. Notre cadre théorique prend en charge de façon explicite ces deux versants. L'étude des textes Vergnaud (1990, 2002) nous a permis d'avancer des hypothèses sur les fonctionnalités du versant contrôle de la connaissance : les contrôles permettent au moins d'assurer l'adéquation de l'action et du problème – cette adéquation concerne à la fois la reconnaissance de l'appartenance du problème à une classe et la prise en compte des caractéristiques particulières du problème traité – ; l'anticipation de l'action et l'adéquation du résultat obtenu à celui attendu ; la prise d'information. Ces fonctionnalités mettent en évidence la forte interaction entre contrôles et opérateurs. Nous chercherons à préciser dans les analyses les relations entre contres et opérateurs et quelles fonctionnalités se construisent dans l'activité du sujet. Enfin, Sfard, en reprenant Skemp, insiste sur l'importance de la « construction du sens » dans l'activité mathématique et lie cette construction à une conception « objet » de la fonction. Nous chercherons à avancer sur la signification de « construction du sens ». L'analyse a priori montre que le problème choisi était favorable à l'émergence des contrôles, en particulier parce que sa résolution nécessite la construction des propriétés de l'approximation.

Nous mènerons ainsi deux types d'analyse :

- l'identification des éléments R, L, Σ mis en œuvre par les étudiants dans le problème d'approximation et leur positionnement par rapport aux conceptions courbe, analytique et objet.
- L'interrogation des fonctionnalités des contrôles dans l'activité et leurs relations aux opérateurs.

2. Mode expérimental

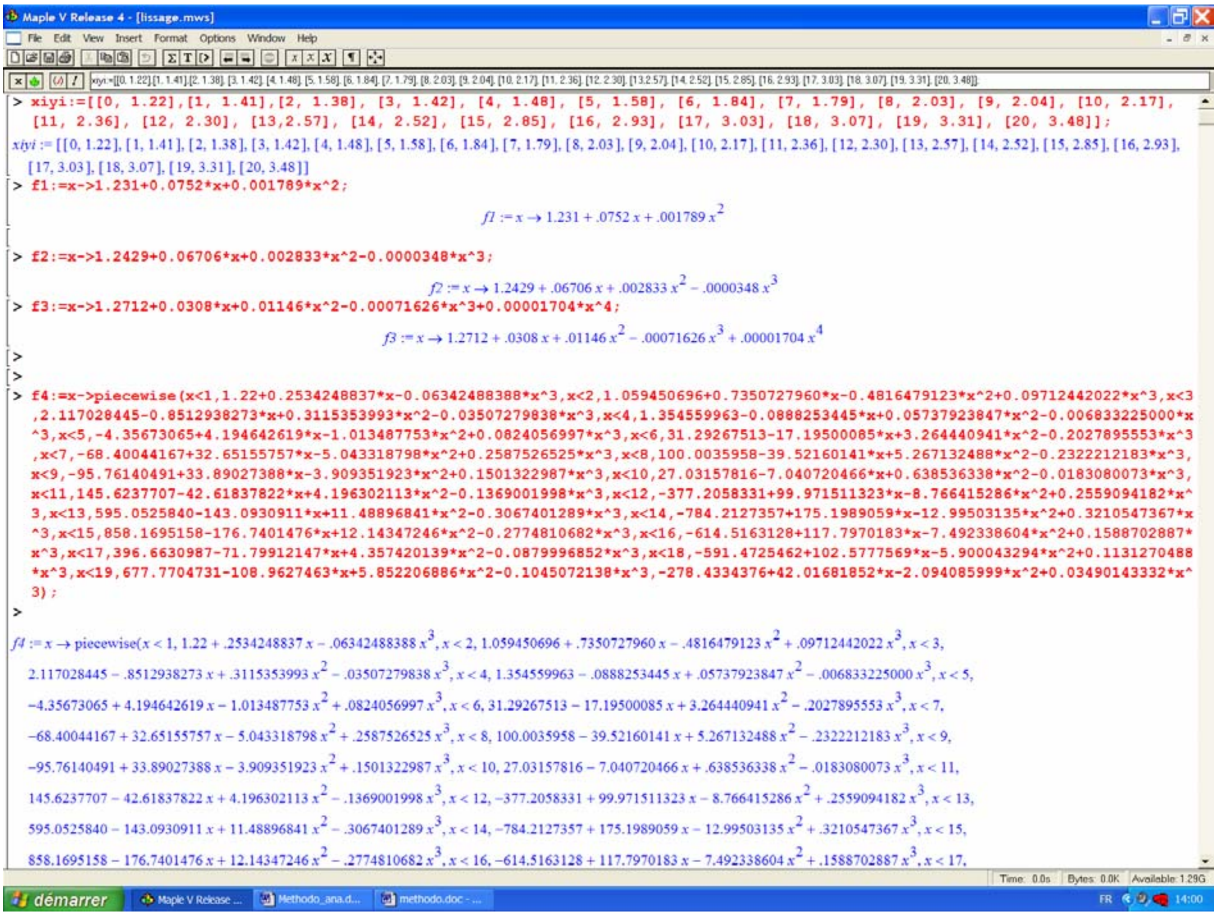
2.1 Le public ayant participé

Les étudiants participant à l'expérimentation devaient avoir la possibilité de se saisir du problème d'approximation de fonctions. En particulier, l'enseignement qu'ils avaient suivi devait leur avoir donné accès aux notions de distance entre fonctions, du critère des moindres carrés, et aux différents outils identifiés dans l'analyse a priori. Nous avons pour cela choisi des étudiants en formation initiale à l'IUFM de Grenoble ayant réussi le CAPES de mathématiques, et des étudiants en deuxième année d'école d'ingénieur Ensimag de Grenoble. Les étudiants capésiens avaient tous au moins une licence de mathématiques. Les étudiants de l'Ensimag de Grenoble sont tous passés par une classe préparatoire scientifique, puis ont suivi un enseignement de mathématique en première année d'école d'ingénieur. Ces enseignements autorisent à penser qu'ils ont au cours de leur cursus été amenés à utiliser les outils mathématiques identifiés dans l'analyse a priori. Comme nous l'avons déjà précisé, notre analyse se place dans un cadre adidactique et ne prend pas en charge l'influence de l'appartenance institutionnelle des étudiants dans leurs réponses au problème. Nous pourrons cependant ponctuellement signaler des références explicites à des enseignements que les étudiants ont pu suivre.

Enfin, dans chaque binôme ayant participé, au moins un des étudiants connaissait le fonctionnement général de Maple.

2.2 Le contrat expérimental

Les étudiants fonctionnaient en binômes et avaient pour consignes de se mettre d'accord sur leurs actions avant de les mettre en oeuvre. S'il ne parvenaient pas à un consensus, chacun pouvait mettre en œuvre sa stratégie en expliquant ses choix. Ils avaient à leur disposition l'énoncé du problème (tel qu'il est donné dans le chapitre « Analyse a Priori », 2.2.1), du papier et des crayons, un ordinateur dans lequel le logiciel Maple était ouvert. Nous avions défini dans la page de Maple les données (xi,yi) sous la forme d'un ensemble de couples et les fonctions fj définies par leurs expressions analytiques. Voici la page qui apparaissait :



Ils disposaient de deux heures. Nous avons été parfois amenés à intervenir dans les échanges en les incitant à prendre une décision ou à expliquer cette décision. Ces intervenions ont été imposées par des contraintes de temps : certains binôme ont engagés des discussions très longues (cela était lié à l'incertitude du problème révélée dans l'analyse a priori), et nos incitations avait pour but qu'ils parviennent à une décision avant la fin du temps imparti. Voici le type de formulation que nous avons pu faire : *Quel est votre choix ? Pourquoi avez-vous choisi f_j ? Pourquoi pas f_k ?* Ces invocations ont pu avoir pour conséquence de précipiter un choix et d'arrêter les discussions.

Nous avons également indiqué aux étudiants qu'ils pouvaient solliciter l'observateur pour l'utilisation de fonctionnalités spécifiques de Maple s'ils ne les connaissaient pas. Nous les incitions également à utiliser l'aide de Maple, ce qui a toujours été fait par les étudiants. Dans ces cas, l'observateur veillait à ce que la demande des étudiants soit suffisamment précise pour minimiser la part d'interprétation. Ces demandes ont été essentiellement les suivantes :

- comment attribuer des couleurs aux courbes
- comment changer le style d'affichage d'un point
- comment faire un zoom sur une représentation graphique
- comment relier des points sur le graphe
- comment effectuer le calcul de $\sum_{i=0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$: on demandait alors d'écrire sur un papier l'expression exacte à évaluer.

2.3 Les données recueillies

Les conversations des binômes ont été enregistrées puis retranscrites. Les analyses ont été menées à partir de ces retranscriptions, nous décrirons plus bas comment. Nous avons également relevé les brouillons des étudiants.

Ces informations ont pu être complétées par les notes prises par l'observateur du binôme (chaque binôme a été observé individuellement).

Enfin, nous avons enregistré un « film » de Maple : ce film peut être déroulé en temps réel, ou accéléré, et permet de voir l'évolution de la page de Maple affichée à l'écran au cours du déroulement de la situation. Ces images ont été utilisées lorsque les conversations des binômes sont ambiguës : en particulier, les courbes des fonctions sont souvent désignées par des couleurs et pas par leur nom, ou bien les fonctions sont désignées par un autre nom qui est celui choisi par les étudiants dans Maple. Par exemple, l'ensemble des 21 valeurs f_1(xi) est nommé « C1 » par les étudiants et les conversations enregistrées ne permettent pas de comprendre ce que désigne C1 lorsqu'il est évoqué. Cela devient aisé avec l'accès à l'image de Maple.

3. Méthodes d'analyse

Les conversations des binômes ont été très riches. Les protocoles comportaient entre 8 et 16 pages de conversations. Les étudiants ont joué le jeu des échanges, mais il nous a fallu trouver une méthodologie permettant de traiter ce support et trouver une granularité adéquate relativement à la problématique. Nous avons mis en place une procédure d'analyse qui a été appliquée à chaque protocole. Nous allons en détailler ci-dessous chacune des étapes en expliquant la raison de leur mise en place.

3.1 Atomisation

Chaque transcription a été découpée en atomes, chacun de ces atomes a été numéroté. L'objectif de ce découpage était de garder des éléments suffisamment fins des échanges, de différencier ces éléments et de différencier le travail de chacun des membres du binôme. Le numérotage permet de repérer rapidement chacun des éléments identifiés dans l'ensemble du protocole. Un atome correspond à :

- Une action qui est menée (soit identifiée dans les propos d'un membre du binôme, soit identifiée dans le film de Maple)
- Un énoncé à propos d'une action
- Un énoncé sur un fait

Voici un extrait du protocole de Olivier et Rémi (Ensimag) ayant subi une atomisation : chaque atome est encadré par des crochets « […] » suivi d'une numérotation de la forme A(numéro). Nous traitons dans cet exemple l'intégralité de la recherche d'une approximation sur [0 ; 20], car le reste de l'analyse nécessitera de prendre en compte l'ensemble des éléments atomiques relatifs à cette partie.

> ***[****Bruits de clavier.*
>
> ***OLIVIER :*** *Il trace bien C ouais.*
>
> ***RÉMI :*** *Il y a P max…*
>
> ***OLIVIER :*** *Hop là et voilà.**]*** ***A25***
>
> ***[RÉMI :*** *Donc le polynôme est quelque part là dedans.] A26*
>
> ***[OLIVIER :*** *Ouais. La meilleure approximation a le droit d'en sortir.] A27 a. [donc on est pas bien avancé] A27 b.*
>
> ***[RÉMI :*** *Ca dépend comment on définit meilleure. Ca dépend si tu considères un point sort c'est pas bien ou si c'est une moyenne… si c'est l'ensemble des point qui soit bien…] A28 [Tu vois ce que je veux dire. On essaie de retracer les polynômes si tu vois ce que je veux dire ? On les trace toute.*

OLIVIER : *Toutes en même temps ?] A29*

[RÉMI : *Je sais pas si on va y voir grand-chose mais on peut essayer. Ou sinon on met des bonnes couleurs.*

OLIVIER : *Tu te rappelleras que c'est vert la première ? Tu peux noter ? Alors vert… bleu, il faut choisir les couleurs, rouge. On va peut être éviter jaune. Essaie teal. C'est la meilleure couleur qui existe, je connais pas le nom en français.] A30*

R tape au clavier

A25 désigne l'action de tracer un certain nombre d'éléments dans Maple (ici il s'agit de tracer des points (définis dans Maple par C qui sont des points appelés max d'où le terme P max).

A26 est un énoncé de Rémi sur un fait.

A27 a est un énoncé d'Olivier sur un fait. A 27b est un énoncé sur un fait (A27 a et b représentaient au départ un seul atome, puis a été découpé en deux sous atomes car il désigne deux énoncés distincts).

A28 est un énoncé sur un fait.

A29 est un énoncé sur une action.

A30 est un énoncé sur une action.

3.2 Agrégation : identification des éléments issus de l'atomisation

Ces éléments ont été traités, indépendamment, pour chacun des membres du binôme. Nous avons dans un premier temps parcouru l'ensemble des atomes du protocoles et nous les avons rassemblés lorsqu'il se référaient à :

- une même action (geste, discours sur…)
- une même prise d'information, jugement, évaluation portée sur les images, représentations, ou actions.

Cela permet de lister l'ensemble des actions et permettra d'aboutir à l'identification d'opérateurs. On liste également l'ensemble des prises d'information, des affirmations, des jugements, qui pourront mener à l'identification des contrôles. Chaque atome ne correspond pas à une action, ou à un jugement. En fait, le déroulement de la résolution montre que plusieurs atomes (éventuellement espacés dans le protocole) peuvent désigner la même action, ou le même jugement, etc… sur lesquels le binôme revient ou qu'il complète. Ces éléments sont classés en fonction du système de représentation auquel ils se réfèrent ou en terme de décision sur le choix de l'approximation.

Exemple

Voici l'exemple de l'agrégation du protocole de Samir et Laurent (Ensimag) pour la question de l'approximation de P sur [0 ; 20]. L'intégralité du protocole est disponible en annexe.

Samir

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation analytique	
L'approximation f minimise ∑(abs(fj(xi) – yi))/21, A27, A57, A66, A182, A183, A189, A200: invalide f5 A80, valide f1, f2 et f3	***[SAMIR :*** *On peut faire l'écart type A27.* ***SAMIR :*** *En tout cas moi je peux dire que l'écart type des deux premier c'est assez proche] A57.* ***[SAMIR :*** *Sur l'écart type c'est le polynôme de degré quatre qui se rapproche le plus sur zéro vingt] A66.* ***[SAMIR :*** *Elle s'en écarte beaucoup.* ***LAURENT :*** *Logique donc la cinq déjà elle est pas bonne] A80.* ***[SAMIR :*** *D'accord, donc la grise c'est presque celle dont on peut espérer qu'elle irait chercher] A181… [Zéro il est là ? Après comment tu penses ? On revient sur l'écart type] A182 ?* ***[LAURENT :*** *Je pense c'est pas une mauvaise idée.* ***SAMIR :*** *c'est pas mal ouais] A183.* ***[SAMIR :*** *Regarde celles là elles sont à 49 toutes les deux et celle là elle est à 29. Ah non d'accord il y a 6] A189 [De toute façon ça se voit c'est celle (f3) qui a un écart plus faible] A200.*

Evaluation des ∑(abs(fj(xi) – yi))/21, A37, A45	*[Pour ajouter les termes d'une liste il faut les extraire ?* ***SAMIR :** On peut le faire à la main.* ***LAURENT :** On prend la liste. On va la réécrire en mettant des plus.* *Bruits de clavier.* ***LAURENT :** Tu comptes le nombre toi pendant ce temps comme ça on saura par quoi diviser.* ***SAMIR :** Normalement il devrait y en avoir 21.* ***LAURENT :** ah oui logique.* *Bruits de clavier] A37.* *[Nathalie : Vous faites la somme des deux listes c'est cela ?* ***LAURENT :** On veut faire la somme de la différence des deux listes.* ***SAMIR :** Enfin l'écart type.* *Nathalie : Donc la somme de tous ces termes là.* ***LAURENT :** En valeur absolue parce que…* *Bruit de clavier.* *Quelques échanges avec Nathalie sur les commandes (dont zip) à taper pour obtenir ce calcul. Les commandes tapées ne marchent pas. Ils décident de taper ce qu'ils appèlent les écarts types à la main.* *Bruits de clavier] A45.*
Si on ne met pas abs dans ∑(abs(fj(xi) – yi))/21 alors la mesure est invalide pour choisir l'approximation : ne permet pas de connaître la dispersion autour des valeurs yi. A41 => Contrôle implicite sur ∑(abs(fj(xi) – yi))/21 : mesure les écarts aux valeurs yi	***[SAMIR :** Je sais pas si c'est mieux de faire une moyenne ou l'écart type] A38.* ***[SAMIR :** Si la moyenne des différences c'est zéro, le (inaudible) de dispersion c'est pas la même chose] A41.* ***[LAURENT :** Oui c'est vrai ou la moyenne en valeur absolue] A42. [Là j'aurai pas du mettre des plus partout j'ai été un peu bête].* ***[SAMIR :** Tu remets tous les moins].*

Si les valeurs yi sont entachées d'erreur alors f(xi) ≠ yi où f est la meilleure approximation A59: invalide f4 et f5 A174 Associé à un contrôle graphique sur l'allure générale de fj : A60 Si les valeurs yi sont entachées d'erreur alors représentation analytique du poly d'interpolation des yi ≠ représentation analytique de P A33, A43.	***SAMIR :*** *[Alors ça peut peut-être nous aider, parce que si les points sont entachés d'erreur c'est peut être pas important d'être très proches de ces points] A59. [Ce qui est peut être important c'est plutôt l'allure générale. On peut déjà éliminer le polynôme de degré quatre] A60.* ***[SAMIR :*** *Moi elle me semble pas top quand même la cinq. Parce qu'elle est basée sur quatre points où tu sais qu'il y a dix pour cent d'erreur] A174.* ***[SAMIR :*** *Ca nous donne pas la formule exacte à la base. C'est sûr ça va passer par tous tes points mais] A33…* ***[SAMIR :*** *Ouais mais cela ne donne pas le polynôme de degré trois exact] A43.*
Evaluation des différences yi – yi+1 : A6 Si yi-yi+1>0, i = j..k-1 alors P croit de yi à yk A1, A6 Valide si les différences yi-yi+1 sont suffisamment importantes Invalidation car erreurs sur les yi A3, A5, A123, A125	***[SAMIR :*** *tu vois la fonction elle croit et décroît] A1.* ***(SAMIR :*** *c'est vrai que ça monte pas mal. Ben oui voilà on peut dire que ça monte de là à ici, là on peut pas vraiment dire que ça redescend, là ça continu à remonter et par contre là ça redescend et là ça remonte]. A6.* ***[SAMIR :*** *il faut faire attention à l'erreur de dix pour cent parce que… Par exemple là les deux chiffres ils sont vachement proches] A3.* ***[SAMIR :*** *Elle monte, c'est pas vraiment une redescente ça c'est un point qui peut foirer.* ***LAURENT :*** *C'est un point foireux.* ***SAMIR :*** *Là] A123…* ***[SAMIR :*** *Ouais, je pense que dix pour cent déjà… On peut rien dire je pense, on peut pas vraiment dire qu'il y a des variations sur] … A125*
Relation entre les variations des yi et le degré de P, A2	***[SAMIR :*** *tu vois la fonction elle croit et décroît] A1. [Ca peut déjà nous aider à trouver le degré du polynôme] A2,*

Pas de relation entre variations des points (xi,yi) et le degré des fj A7	*[SAMIR : Donc là on a un degré deux, ça nous avance pas à grand-chose] A7.*
Eléments du système de représentation graphique	
Si fj est l'approximation de P alors elle a au plus deux changements variations A48, A49, A60 A131, A137,: invalide f4 A134, A164: invalide f4 ? A164	***[SAMIR :*** *Ca va passer par tous les points mais ça a pas inaudible du polynôme de degré trois qu'on veut] A48.* ***[LAURENT :*** *Ouais, il aura pas une forme caractéristique ou* ***SAMIR :*** *Il aura pas vraiment une tête de polynôme de degré trois quoi.* ***LAURENT :*** *Ouais ça c'est sûr] A49 ;* ***[SAMIR :*** *Alors ça peut peut-être nous aider, parce que si les points sont entachés d'erreur c'est peut être pas important d'être très proches de ces points] A59. [Ce qui est peut être important c'est plutôt l'allure générale. On peut déjà éliminer le polynôme de degré quatre] A60.* ***[SAMIR :*** *mais c'est vrai que ça ne donne pas l'allure d'une polynôme de degré trois, c'est ça le problème] A131.* *[Bruits de clavier.* ***SAMIR :*** *Elle passera par tous les points, elle risque d'avoir des bonnes variations entre tous ces point] A134.* ***[LAURENT :*** *Voilà elle passe par tous les points.* ***SAMIR :*** *Ouais donc là ça donne pas du tout l'allure d'un polynôme de degré trois.* ***LAURENT :*** *c'est pas un polynôme de degré trois du tout] A136.* ***[SAMIR :*** *Disons que tout les autres sont bon] A137,* ***[SAMIR :*** *Il faut faire par élimination déjà sur les cinq. Celui là déjà le quatre on le vire il a rien à voir avec un polynôme de degré trois] A164.*

Tracé des courbes sur [0 ; 20] : A102	*[**SAMIR** Peut être qu'on pourrait essayer de le voir sur zéro vingt tu crois pas] A102 ?*
Evaluation de la position des courbes dans les points : au dessus, au milieu. Cet opérateur ne donne pas lieu à un critère de discrimination (pinaillage A109) A104, A105, A107, A108	*[**SAMIR :** Mais d'ailleurs c'est pas… même si la cinq est que sur trois points qui sont assez écartés, elle a pas une allure dégueux] A104. [Mais elle en laisse passer quand même pas mal] A105.* *[**LAURENT :** Elle pas vraiment au dessus des autres. Genre que deux trois points qui sont en dessus de la courbe et tout les reste est en dessous] A106.* *[**SAMIR :** Ouais parce que s'ils ont une erreur de dix pour cent ils peuvent très bien se retrouver celui là je sais pas en bas, tous en bas quoi] A107. [Alors que les autres comme elles passent un peu au milieu] A108… [bon c'est un peu du pinaillage] A109.*
Critère de centration dans les points sur [0 ; 20] A178: valide f1, f2 et f3	*[**SAMIR :** Bon déjà elles passent toutes au milieu des points. C'est déjà pas mal] A178.*
Critère de proximité aux points A196, A197, A199, associé en A200 au critère « écart type »	*[**SAMIR :** Est-ce qu'une réponse possible c'est de dire on a trois courbes, on trouve que sur zéro vingt elles se rapprochent bien du polynôme, un mieux que les autres mais qu'on peut pas vraiment déterminer à cause des dix pour cent d'erreur] A197.* *[Nathalie : Donc sur zéro vingt vous trouvez que f1, f2 et f3 sont satisfaisantes. Avec plutôt f3 pourquoi ?] A198* *[**SAMIR :** Parce que elle suit un peu plus les points de la courbes et la courbe est plus souvent proches des points, ce qui fait que même avec dix pour cent d'erreur si les points ont tendance à remonter ou à baiser, disons ben il y aura pas une plus grosse erreur que par rapport aux autres. Donc c'est celle qui sera avantagée] A199. [De*

	toute façon ça se voit c'est celle qui a un écart plus faible] A200.
Eléments du système de représentation analytique	
Evaluation des zéros des dérivées des f1, f2 et f3 A110, A116: non opératoire sur f4 A115, non mise œuvre sur f5 A113, A114 => Contrôle associé : l'approximation a les mêmes variations que P sur [0 ; 20] (implicite).	***[SAMIR :** On essaie de voir un peu les points où s'annulent les dérivées des fonctions] A110 ?* ***[LAURENT :** Ca je te laisse faire je sais pas dériver une fonction sous Maple.* ***SAMIR :** je crois que c'est diff. (à Nathalie) C'est diff ? Majuscule ou pas ? ca veut pas dire la même chose.* *Il cherche dans l'indexe.* ***SAMIR :** Ouais c'est div sans majuscule.* *Bruits de clavier] A111.* ***[SAMIR :** Lesquelles on fait ? On les fait toutes] A112 ?* ***[LAURENT :** A priori que f5 on peut en laisser] A113.* ***[SAMIR :** elle aura de toute façon pas une forme…* ***LAURENT :** A priori à l'allure.* ***SAMIR :** Ca donnera rien de bon. Donc f5 on la laisse] A114. [On a qu'à laisser aussi celle là car de toute façon on peut pas faire la dérivée sur] A115… [Donc on fait un, deux trois et on va voir où sont les zéro] A116. Bon alors diff de f1.*
Evaluation des variations des yi A121	***[SAMIR :** Ouais et est-ce que tu es d'accord comme quoi la fonction, là déjà on voit qu'elle monte, là on peut pas dire qu'elle redescend] A121…*
Abandon de cet opérateur : les variation de P ne sont pas valides à cause de l'erreur sur les yi A123, A125, A127, A128, A130, A131	***[SAMIR :** Elle monte, c'est pas vraiment une redescente ça c'est un point qui peut foirer.* ***LAURENT :** C'est un point foireux.* ***SAMIR :** Là] A123…*

	***[LAURENT :** Il faut qu'on se mette d'accord sur les points foireux] A124.* ***[SAMIR :** Ouais, je pense que dix pour cent déjà… On peut rien dire je pense, on peut pas vraiment dire qu'il y a des variations sur] A125…* ***[LAURENT :** genre un ou deux points qui sortent vraiment du tas] A126.* ***[SAMIR :** C'est ça l'embêtant, je sais pas si ça va nous servir vachement de faire les variations de la fonction si on peut pas déterminer qu'elle… attends quand même là on peut dire qu'elle fait quelque chose. Tu vois ce que je veux dire autrement là elle continuera à monter] A127. [Le problème c'est l'écart de 10 pour cent d'erreur. Ca doit être fait exprès d'ailleurs] A128. [Donc sur zéro vingt ce qui défini le mieux le polynôme c'est certainement la quatre. Il n'y a pas à chercher] A129. [Parce que si… on peut pas dire qu'il y a vraiment de variations parce que comme il y a des erreurs] A130, [mais c'est vrai que ça ne donne pas l'allure d'une polynôme de degré trois, c'est ça le problème] A131.*
Décisions	
Le critère sur le nombre de variations invalide f4. Le critère sur la centration dans les points (et ne pas prendre les valeurs yi) valide f1, f2 et f3 A166, A167, A176, A197 et invalide f5	***SAMIR :** [C'est toujours un problème de l'erreur. Le problème c'est qu'on peut toujours pas savoir, les erreur de dix pour cent elle ramène à se coller presque à ce polynôme] A166. [Il nous reste un polynôme de degré deux, un polynôme de degré trois] A167.* ***[SAMIR :** Est-ce qu'une réponse possible c'est de dire on a trois courbes, on trouve que sur zéro vingt elles se rapprochent bien du polynôme, un mieux que les autres mais qu'on peut pas vraiment déterminer à cause des dix pour cent d'erreur] A197.*

	***[SAMIR :** Il nous en reste trois] A176.*
Le critère « écart type » (A182, A183) valide f3 A190, A191. Mais de façon timide car les différences d'écart sont faibles : estimé peu significatif relativement à l'erreur A193, A201, A202. Contrôle sur la choix de f3 : hypothèses sur les erreurs pour évaluer si le critère de centration est un bon critère. A 196, A199	***[SAMIR :** D'accord, donc la grise c'est presque celle dont on peut espérer qu'elle irait chercher] A181… [Zéro il est là ? Après comment tu penses ? On revient sur l'écart type] A182 ?* ***[LAURENT :** Je pense c'est pas une mauvaise idée.* ***SAMIR :** c'est pas mal ouais] A183.* ***[SAMIR :** Regarde celles là elles sont à 49 toutes les deux et celle là elle est à 29. Ah non d'accord il y a 6] A189. [Donc c'est ces deux là donc à priori on vire celle là. C'est la deux non B ?] A190* *[L marmonne : … écart type….* ***SAMIR :** Ouais c'est la plus petite, c'est la quatre. C'est la trois le polynôme de degré quatre] A191.* ***[LAURENT :** On va regarder avec l'allure sachant qu'elles ont à peu près le même écart type] A192.* ***[SAMIR :** Le problème c'est qu'un écart type avec des différences aussi petites sur des points qui ont dix pour cent d'erreur, cela me parait pas énorme] A193.* ***[SAMIR :** Est-ce que c'est toujours le cas. Parce que là par exemple c'est pas le cas.* ***LAURENT :** C'est plus souvent le cas en tout cas] A196.* ***[SAMIR :** Parce que elle suit un peu plus les points de la courbes et la courbe est plus souvent proches des points, ce qui fait que même avec dix pour cent d'erreur si les points ont tendance à remonter ou à baisser, disons ben il y aura pas une plus grosse erreur que par rapport aux autres. Donc c'est celle qui sera avantagée] A199. [De toute façon ça se voit c'est celle qui a un écart plus faible] A200. [Mais c'est vraiment pas énorme parce que l'écart type il est] A201…*

Résumé des éléments identifiés pour Samir

Système de représentation analytique :

- L'approximation f minimise ∑(abs(fj(xi) – yi))/21, A27, A57, A66, A182, A183, A189, A200: invalide f5 A80, valide f1, f2 et f3
- Evaluation des ∑(abs(fj(xi) – yi))/21, A37, A45
- Si on ne mets pas abs dans ∑(abs(fj(xi) – yi))/21 alors la mesure est invalide pour choisir l'approximation : ne permet pas de connaître la dispersion autour des valeurs yi. A41
    - Contrôle implicite sur ∑(abs(fj(xi) – yi))/21 : mesure les écarts aux valeurs yi A41.
- Si les valeurs yi sont entachées d'erreur alors f(xi) ≠ yi où f est la meilleure approximation A59: invalide f4 et f5 A174
    - Associé à un contrôle graphique sur l'allure générale de fj : A60
    - Si les valeurs yi sont entachées d'erreur alors représentation analytique du poly d'interpolation des yi ≠ représentation analytique de P A33, A43.
- Evaluation des différences yi – yi+1 : A6
- Si yi-yi+1>0, i = j..k-1 alors P croit de yi à yk A1, A6
    - Valide si les différences yi-yi+1 sont suffisamment importantes
    - Invalidation car erreurs sur les yi A3, A5, A123
- Relation entre les variations des yi et le degré de P, A2
    - Pas de relation entre variations des yi et degré des fj A7

Système de représentation graphique :

- Si fj est l'approximation de P alors elle a au plus deux changements de variation A48, A49, A60 A131, A137,: invalide f4 A134, A164
- Tracé des courbes sur [0 ; 20] : A102
- Evaluation de la positions des courbes dans les points et de l'allure des courbes : au dessus, au milieu. Cet opérateur ne donne pas lieu à un critère de discrimination (pinaillage A109) A104, A105, A107, A108
- Critère de centration dans les points sur [0 ; 20] A178: valide f1, f2 et f3
- Critère de proximité aux points A196, A197, A199, associé en A200 au critère « écart type »

Système de représentation analytique :

- Evaluation des zéros des dérivées des f1, f2 et f3 A110, A116: non opératoire sur f4 A115, non mise œuvre sur f5 A113, A114
- Contrôle associé : l'approximation a les mêmes variations que celles données par les yi sur [0 ; 20] (implicite).
- Evaluation des variations des yi A121
- Abandon de cet opérateur : les variation de P ne sont pas valides à cause de l'erreur sur les yi A123, A125, A127, A128, A130, A131

Décisions :

- Le critère sur le nombre de variations invalide f4. Le critère sur la centration dans les points (et ne pas prendre les valeurs yi) valide f1, f2 et f3 A166, A167, A168, A176, A197 et invalide f5.
- Le critère « écart type » (A182, A183) valide f3 A190, A191. Mais de façon timide car les différences d'écart sont faibles : estimé peu significatif relativement à l'erreur A193, A201, A202.
  - Contrôle sur la choix de f3 : hypothèses sur les erreurs pour évaluer si le critère de centration est un bon critère. A 196, A199

Laurent

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation analytique	
L'approximation interpole les valeurs yi A30, A32, A44: valide f4	***[LAURENT :*** *Elle (f4) passe par chacun des points. Ca c'est pas mal] A30.* ***[SAMIR :*** *C'est une interpolation par morceaux] A31.* ***[LAURENT :*** *C'est certainement ce qui sera le mieux] A32.* ***[LAURENT :*** *A priori l'interpolation de la dernière elle est pas mal] A44.*

Référence à Lagrange A20 : l'approximation d'une fonction f est le polynôme d'interpolation des valeurs f(xi). • Le degré (polynôme d'interpolation) = nombre de valeurs interpolées A21, A22 • Plus le nombre de valeurs interpolées est grand meilleure est l'approximation, A23, A30, A32 (valide f4), A44 (valide f5), A70, A93, A165	***[LAURENT :*** *...et puis on doit déterminer celui qui a... c'est quoi déjà ? Celui qui approche le mieux le polynôme sur l'intervalle zéro vingt. Là aussi on peut essayer de faire un polynôme de Lagrange ou dans ce genre] A20.* *[Silence.* ***LAURENT :*** *On peut toujours essayer de faire ça mais le problème c'est qu'avec vingt valeurs on va arriver à un degré vingt en fait] A21. [Autrement un degré quatre... un degré deux on peut l'avoir avec seulement deux valeurs, un degré...] A22* ***[LAURENT :*** *A priori c'est quand même le degré le plus grand qui s'approchera le mieux] A23* ***[LAURENT :*** *Ah oui c'est vrai il y a f4] A29 ? [(lisant) Elle passe par chacun des points. Ca c'est pas mal] A30.* ***[LAURENT :*** *C'est certainement ce qui sera le mieux] A32.* ***[LAURENT :*** *Ouais c'est sûr dans un sens c'est une approximation qu'on cherche donc ce sera la meilleure] A44...* ***[LAURENT :*** *Mais a priori elle se rapprochera pas hyper bien non plus parce qu'elle prend que trois points et sur tout l'intervalle] A70.* ***[LAURENT :*** *Tu vois le truc c'est qu'on fait avec le cinq et le cinq il passe que par cinq points] A93.* ***[LAURENT :*** *Le cinq il interpole pas vraiment] A165.*
Evaluation dans Maple des valeurs fj(xi) A13	***[LAURENT :*** *Les fonctions elles sont rentrées] A12. [(à Nathalie) Il y a un outil je crois sur Maple pour lancer une fonction sur un intervalle d'entiers] A13.*
Evaluation des ∑(abs(fj(xi) – yi))/21 (non associé à un contrôle sur ce que ce critère a de discriminant sur l'approximation A28, A40) A25, A27, A37, A45	***[LAURENT :*** *Ce qu'on peut faire c'est par rapport à la liste des yi c'est soustraire et voir la différence qu'il y a, la moyenne de la meilleure différence, c'est peut être le mieux] A25. [On peut faire des*

Contrôle sur cet opérateur : mettre abs si non invalide A42, A43	*soustractions dix par dix non sous Maple ?]* *[Nathalie : Essayez.* ***SAMIR :** C'est yi…* *Bruits de clavier.* ***LAURENT :** Ouais c'est pas top ça.* *Ils rentrent des choses dans Maple. Echangent des choses inaudibles] A26.* ***[SAMIR :** On peut faire l'écart type] A27.* ***[LAURENT :** Ce qu'on peut faire après, on sait le faire pour toutes les listes (parle de la différence termes à termes) et additionner tous les termes de la liste et diviser par leur nombre] A27. [On aura… Mais ça dépend ce qu'on entend par meilleure approche. Si c'est A28]…* *(…)* *[**LAURENT**. On va déjà voir comme ça pour voir la moindre différence] A36 ? [(à Nathalie) Pour ajouter les termes d'une liste il faut les extraire ?* ***SAMIR :** On peut le faire à la main.* ***LAURENT :** On prend la liste. On va la réécrire en mettant des plus.* *Bruits de clavier.* ***LAURENT :** Tu comptes le nombre toi pendant ce temps comme ça on saura par quoi diviser.* ***SAMIR :** Normalement il devrait y en avoir 21.* ***LAURENT :** ah oui logique.* *Bruits de clavier A37].* ***[SAMIR :** Je sais pas si c'est mieux de faire une moyenne ou l'écart type] A38.* ***[LAURENT :** Comme tu préfères là on est sur la moyenne des différences] A39 donc… [Le problème c'est vrai c'est qu'on risque d'arriver au même truc au bout sur les trois] A40.* ***[SAMIR :** Si la moyenne des différences c'est zéro, le inaudible de dispersion c'est pas la même chose] A41.*

	***[LAURENT :** Oui c'est vrai ou la moyenne en valeur absolue] A42. [Là j'aurai pas du mettre des plus partout j'ai été un peu bête.* ***LAURENT :** Ah priori l'interpolation de la dernière elle est pas mal] A44.* ***[SAMIR :** Ouais mais cela ne donne pas le polynôme de degré trois exact.* ***LAURENT :** Ouais c'est sûr dans un sens c'est une approximation qu'on cherche donc ce sera la meilleure] A44…* *[Nathalie : Vous faites la somme des deux listes c'est cela ?* ***LAURENT :** On veut faire la somme de la différence des deux listes.* ***SAMIR :** Enfin l'écart type.* *Nathalie : Donc la somme de tous ces termes là.* ***LAURENT :** En valeur absolue parce que…* *Bruit de clavier.* *Quelques échanges avec Nathalie sur les commandes (dont zip) à taper pour obtenir ce calcul. Les commandes tapées ne marchent pas. Ils décident de taper ce qu'ils appèlent les écarts types à la main.* *Bruits de clavier] A45.*
L'approximation renvoie une petite valeur à Σ(abs(fj(xi) – yi))/21 : invalide f5 A80, valide f4 A81; associé à un contrôle graphique A168 • associé à un contrôle graphique en A67	***[LAURENT :** Logique donc la cinq déjà elle est pas bonne] A80. [Donc pour l'écart type la mieux c'est la quatre] A81.* ***[SAMIR :** Sur l'écart type c'est le polynôme de degré quatre qui se rapproche le plus sur zéro vingt] A66.* ***[LAURENT :** Ce qui est logique parce qu'il bouge plus donc il arrive plus à récupérer les points] A67.* ***[LAURENT :** On fait pas l'écart type, c'est le mieux que je peux voir] A168.*

Eléments du système de représentation graphique	
Le nombre de variations d'un polynôme caractérise son degré : deux changements de variations = polynôme de degré 3 A8	***[LAURENT :*** *Un degré trois. Si ça monte ça redescend et ça remonte c'est un degré trois] A8.*
L'approximation est continue A34, A35	***[LAURENT :*** *Ouais mais tu dois pouvoir le recoller, s'il passe par tous tes points comme là c'est des intervalles qui tapent les entiers il y a des recollements] A34. [Donc elles seront certainement pas dérivables mais elles seront continues A35].*
L'approximation a le même nombre de variation qu'un poly de degré 3 A49, A55, A56, A82, A98 : invalide f4 A47, A136 Contrôle sur ce critère : si l'intervalle d'interpolation est de faible amplitude alors un poly de degré 2 satisfait ce critère A55, A56, A61, A78	***[LAURENT :*** *En fait j'étais en train de penser à un truc c'est qu'une bonne représentation du polynôme c'est pas nécessairement la proposition quatre. Ca représentera pas bien le] A47…* ***[SAMIR :*** *Ca va passer par tous les points mais ça a pas inaudible du polynôme de degré trois qu'on veut] A48.* ***[LAURENT :*** *Ouais, il aura pas une forme caractéristique ou* ***SAMIR :*** *Il aura pas vraiment une tête de polynôme de degré trois quoi.* ***LAURENT :*** *Ouais ça c'est sûr] A49 ;* ***[LAURENT :*** *Mais c'est vrai que ce qu'on a vu c'est que ça pouvait être un polynôme de degré deux, enfin l'allure] A55. [Parce qu'il avait que deux variations] A56.* ***[LAURENT :*** *Ouais parce que déjà c'est un degré trois et qu'on est sur un petit intervalle] A61…* ***[LAURENT :*** *Et pour zéro vingt le problème c'est que c'est pas forcément un polynôme de degré trois parce que] A78…* ***[LAURENT :*** *Voilà elle passe par tous les points.* ***SAMIR :*** *Ouais donc là ça donne pas du tout l'allure d'un polynôme de degré trois.* ***LAURENT :*** *c'est pas un polynôme de degré trois du tout] A136.*

Evaluation de la proximité aux points xiyi : Plus le degré de fj est grand plus il est proche des points xiyi A67	*[**LAURENT :** Ce qui est logique parce qu'il bouge plus donc il arrive plus à récupérer les points] A67*
Evaluation visuelle des variations des points xiyi A99 Les variations de xiyi fournissent les variations de P A99 Contrôle sur cet opérateur : ne pas tenir compte des points isolés A123, A124, A126 Evaluation visuelle des variations de f5 A99	*[**LAURENT :** Je serais bien tenté de voir où sont les zéros des dérivées là sur les deux] A97. [Parce que une interpolation comme ça, ça veut pas du tout dire pour la cinq qu'elle aura les même variations] A98. [D'ailleurs ça se voit elle est assez plane tandis que l'autre elle monte là elle descend elle remonte. Enfin non elle ne descend pas d'ailleurs… si un peu] A99.* *[**LAURENT :** Il faut qu'on se mette d'accord sur les points foireux] A124.* *[**SAMIR :** Ouais, je pense que dix pour cent déjà… On peut rien dire je pense, on peut pas vraiment dire qu'il y a des variations sur] A125…* *[**LAURENT :** genre un ou deux points qui sortent vraiment du tas] A126.*
Nombre de variations (approximation) = nombre de variations de P : invalide f5 (plane) A99, A113, A114	*[**LAURENT :** A priori que f5 on peut en laisser] A113.* *[**SAMIR :** elle aura de toute façon pas une forme…* ***LAURENT :** A priori à l'allure.* ***SAMIR :** Ca donnera rien de bon. Donc f5 on la laisse] A114*
Tracé de f4 A133, A135	*[**LAURENT :** Elle passera par tous les points en faisant des trucs comme ça. On peut essayer, je la rajoute] A133.* *[**SAMIR :** Elle passera par tous les points, elle risque d'avoir des bonnes variations entre tous ces points] A134. [Quoi que c'est pas des coefficients énormes] A135.* *Bruits de clavier.*

Eléments du système de représentation graphique	
Evaluation des zéros de la dérivée des fj A65, A97 Les zéros de la dérivée d'une fonction déterminent ses changements de variation A98	***[LAURENT :*** *Quoi que ça dépend il faut regarder aussi où sont les zéro des polynômes, ça peut être pas mal] A65.* ***[LAURENT :*** *Je serais bien tenté de voir où sont les zéros des dérivées là sur les deux] A97. [Parce que une interpolation comme ça, ça veut pas du tout dire pour la cinq qu'elle aura les même variations] A98.*
Décisions	
Les critères sont allure et minimiser l'écart type, ils permettent de discriminer f1, f2, f3 sur [0 ; 20] ; reviennent au critère écart type A183. Laurent juge la différence de valeur peu significative A192, A202. Il s'engage peu sur la fin.	***[SAMIR :*** *D'accord, donc la grise c'est presque celle dont on peut espérer qu'elle irait chercher A181… Zéro il est là ? Après comment tu penses ? On revient sur l'écart type] A182 ?* ***[LAURENT :*** *Je pense c'est pas une mauvaise idée.* ***SAMIR :*** *c'est pas mal ouais] A183.* ***[LAURENT :*** *On va regarder avec l'allure sachant qu'elles ont à peu près le même écart type] A192.* ***[LAURENT :*** *Ca se joue à très peu. Ca se joue à la troisième décimale.* *S (rit) : ah ouais, ça se joue au millième] A202.*

Résumé des éléments identifiés pour Laurent

Système de représentation analytique

- L'approximation interpole les valeurs yi A30, A32, A44: valide f4
- Référence à Lagrange A20 : l'approximation d'une fonction f est le polynômes d'interpolation des valeurs f(xi).
  - Le degré (polynôme d'interpolation) = nombre de valeurs interpolées A21, A22
  - Plus le nombre de valeurs interpolées est grand meilleure est l'approximation, A23, A30, A32 (valide f4), A44 (valide f5), A70, A93, A165
- Evaluation dans Maple des valeurs fj(xi) A13,

- Evaluation des ∑(abs(fj(xi) – yi))/21 (non associée à un contrôle sur ce que ce critère a de discriminant sur l'approximation A28, A40) A25, A27, A37, A45
    - Contrôle sur cet opérateur : mettre abs si non invalide A42, A43
- L'approximation renvoie une petite valeur à ∑(abs(fj(xi) – yi))/21 : invalide f5 A80, valide f4 A81; A168
    - associé à un contrôle graphique en A67

Système de représentation graphique

- Le nombre de variations d'un polynôme caractérise son degré : deux changements de variations = polynôme de degré 3 A8,
- L'approximation est continue A34, A35
- L'approximation a le même nombre de variation qu'un poly de degré 3 A49, A55, A56, A82, A98 : invalide f4 A47, A136
    - Contrôle sur ce critère : si l'intervalle d'interpolation est de faible amplitude alors un poly de degré 2 satisfait ce critère A55, A56, A61, A78
- Evaluation de la proximité aux points xiyi : Plus le degré de fj est grand plus il est proche des points xiyi A67
- Evaluation visuelle des variations des points xiyi A99
- Les variations de xiyi fournissent les variations de P A99
    - Contrôle sur cet opérateur : ne pas tenir compte des points isolés A123, A124, A126
- Evaluation visuelle des variations de f5 A99
- Nombre de variations (approximation) = nombre de variations de P : invalide f5 (plane) A99, A113, A114
- Tracé de f4 A133, A135

Système de représentation analytique

- Evaluation des zéros de la dérivée des fj A65, A97
- Les zéros de la dérivée d'une fonction déterminent ses changements de variation A98

Décisions

- Les critères sont allure et minimiser l'écart type, ils permettent de discriminer f1, f2, f3 sur [0 ; 20] ; reviennent au critère écart type A183.

Laurent juge la différence de valeur peu significative A192, A202. Il s'engage peu sur la fin.

Conclusion

Cette analyse n'identifie souvent pas contrôles et opérateurs. Elle constitue une synthèse des éléments importants de la résolution et permet de resituer rapidement ces éléments dans le contexte du protocole. C'est un outil de travail pour l'étape suivante, qui formule et différencie opérateurs et contrôles. L'utilisation de ce document nécessite cependant une mémoire du déroulement temporel de la résolution de la part de la personne qui l'utilise, car sa présentation désordonne la séquence.

La densité du protocole nécessite de maintenir un niveau de granularité satisfaisant. Dans les discussions, les étudiants engagent beaucoup d'hypothèses, souvent rapidement abandonnées et la finesse de notre analyse ne les prend pas toutes en charge. La granularité des éléments identifiés doit nous permettre de manipuler un ensemble d'éléments qui ne soit pas trop important, tout en permettant de restituer la stratégie mise en place en vue de la positionner relativement aux conception courbe, analytique et objet et en vue d'identifier le jeu opérateurs/contrôles. C'est l'objectif de l'étape suivante.

3.4 Analyse de la cohérence interne des éléments

3.4.1 Formalisation des éléments, différenciation contrôles et opérateurs

Nous chercherons à écrire chaque élément de l'agrégation sous une des formes suivantes :

- expression verbale pour désigner une action
- si<>alors<> pour désigner un contrôle
- forme propositionnelle décrivant un jugement de vérité ou de valeur

L'expression verbale a été choisie pour désigner les actions, l'utilisation d'un verbe se révélant la plus adéquate.

Le choix de la structure « si<>alors<> » permet de donner une structure conditionnelle aux contrôles. Nous reprenons Vergnaud (2002), que nous avions déjà cité au chapitre 1 (c'est nous qui soulignons en gras) :

> *« Un schème engendre une diversité de conduites et d'activités selon les caractéristiques particulières des situations rencontrées. Cette fonction d'adaptation aux situations conduit à identifier dans le schème* ***des règles SI… ALORS… qui relient les actions à des conditions ou circonstances*** *» (p110).*

Vergnaud suggère que le schème intègre des règles qui permettent d'adapter l'organisation de l'activité aux caractéristiques particulières de la situation. La structure « si<>alors<> » permet d'exprimer les conditions sous lesquelles le choix d'une action ou le résultat d'une action sont validés. Le protocole fourni beaucoup d'expressions propositionnelles, presque pas d'expressions conditionnelles « si<>alors <> ». Le recoupement des informations données par le protocoles peut permettre de reconstruire les éléments de la structure « si<>alors <> ». Dans ce cas, les éléments correspondant sont écrits sous la forme « si<>alors <> ». Lorsque cela n'est pas possible, les éléments sont écrits sous une forme propositionnelle qui renvoie la plupart du temps à un jugement de vérité ou de valeur. Nous voudrions aussi signaler ici la difficulté inhérente au caractère implicite des contrôles, dont l'explicitation peut venir d'un contexte de débat ou d'une problématique de validation, et est favorisée par le travail en binôme.

3.4.2 Identification des contrôles référents, des contrôles pour l'instrumentation, des opérateurs et des systèmes de représentation

La séquence des opérateurs mis en œuvres pour la résolution et l'expression des contrôles qui valident le choix et le résultat d'une action peuvent permettre de rendre compte de la stratégie (du jeu adidactique). L'hypothèse adidactique d'un sujet rationnel en interaction avec un milieu, justifie que l'on cherche la cohérence interne de l'ensemble des éléments identifiés dans l'étape précédente. Cela ne s'est pas toujours révélé possible, et nous en détaillerons un exemple. Dans le cas où cette cohérence existe, nous en avons rendu compte par l'expression de contrôles. **Ce sont des contrôles qui expriment les propriétés définitoires données à l'approximation et qui permettent de stabiliser les décisions : ils permettent de régler l'anticipation de l'action et l'adéquation du résultat obtenu au résultat attendu. Ces contrôles ont été appelés « contrôles référents ».** Leur expression n'est pas opératoire, c'est-à-dire qu'elle ne règle pas la question du choix des opérateurs. Ils sont exprimés par des formes propositionnelles.

L'adéquation entre les contrôles référents et les opérateurs est assurée par des contrôles permettant l'instrumentation : cette adéquation est exprimée par la structure si<>alors <>.

On trouvera aussi des contrôles plus locaux, qui garantissent la bonne mise en œuvre d'un opérateur.

Nous chercherons donc à identifier :

- La séquence des opérateurs mis en œuvre, chaque opérateur est exprimé par une expression verbale. Les opérateurs peuvent être associés à des contrôles locaux assurant leur bonne mise en œuvre.
- Les propriétés attribuées à l'approximation rendant compte de la cohérence des décisions, de l'anticipation de l'action et de la validité du résultat obtenu. Ce sont les contrôles référents, exprimés par des formes propositionnelles
- Les contrôles permettant l'instrumentation, ils assurent la bonne adéquation des contrôles référents et des opérateurs, ils sont exprimés sous la structure si<>alors <>.

Samir

La suite des opérateurs mis en œuvre par Samir est la suivante :

Opérateurs :

- Evaluer des $\sum(abs(fj(xi) - yi))/21$.
    - Contrôle sur cet opérateur : si « abs » est absent dans $\sum(abs(fj(xi) - yi))/21$ alors on ne mesure pas l'écart aux yi
- Evaluer des variations de P : Si yi-yi+1>0, i = j..k-1 alors P croit de yi à yk. Il existe des contrôles de validité de cet opérateur :
    - Variations des yi = variations de P
    - Si il existe une erreur sur yi alors l'opérateur est invalide
- Tracer les courbes sur [0 ; 20]
- Evaluer les variations de P (perçues visuellement sur les variations des points xiyi).
- Evaluer visuellement les variations des représentations graphiques des fj
- Evaluer les zéros des dérivées de f2 et f5
- Evaluer les positions des courbes dans les points :
    - Contrôle associé (centration des points) : si le nombre de points au dessus de la courbe de fj est égale au nombre de points en dessous alors la courbe est centrée dans les points xiyi.

Contrôles référents :

Les opérateurs portent, d'une part, sur l'évaluation de la position des valeurs des fonctions relativement aux valeurs yi et, d'autre part, sur l'évaluation des variations de P et des fonctions fj. La stratégie est justifiée par les propriétés suivantes données à l'approximation, qui définissent les contrôles référents :

- Les valeurs f(x) de l'approximation f d'une fonction P sont proches des valeurs f(x) : Valeur de l'approximation en (xi) = P(xi) + εi = yi + ε'i, avec εi petit
- L'approximation a les mêmes variations que P

Contrôles d'instrumentation :

Deux contrôles permettent d'instrumenter la proximité des valeurs de P et de son approximation :

- Si les valeurs de f et de son approximation sont proches alors la meilleure approximation minimise ∑(abs(fj(xi) – yi))/21
- Si les valeurs de p et de son approximation sont proches alors la courbe de f est visuellement proche des points (xi,yi)

Un contrôle permet d'instrumenter le contrôle référent sur les variations :

- Si fj est l'approximation de P alors variations de fj = variations de P

Discussion sur les systèmes de représentation :

Le système de représentation analytique occupe une place importante dans une première moitié de la résolution: il permet d'exprimer un contrôle référent (Approximation (xi) = P(xi) + εi) et il est le lieu d'expression de l'opérateur ∑(abs(fj(xi) – yi))/21 mesurant l'écart des valeurs fj(xi) aux valeurs yi. Il est aussi le lieu d'instrumentation du deuxième critère sur l'approximation concernant les variations. Les représentations analytiques permettent l'instrumentation de deux des critères de discrimination de l'approximation. Cependant, ces deux critères conduisent à deux choix contradictoires : « fj minimise ∑(abs(fj(xi) – yi))/21 » ne permet pas de satisfaire « variation de fj = variations de P ». **Les représentations graphiques permettent de sortir de cette contradiction. Elles hiérarchisent les deux critères référents, en privilégiant celui concernant les variations. Cela semble illustrer la forte valeur heuristique des représentations graphiques dans ce problème**. Cela permet l'invalidation de f4 (qui minimisait ∑(abs(fj(xi) – yi))/21). Les représentations graphiques permettent également de mettre en place un critère de centration dans les points xiyi qui élimine f5, et de faire des hypothèses sur l'erreur entachant les valeurs yi.

Laurent

Les opérateurs mis en œuvre par Laurent sont les suivants :

Opérateurs :

- Evaluer des ∑(abs(fj(xi) – yi))/21
  - Contrôle sur cet opérateur : si abs absent alors opérateur invalide
- Evaluer des variations de P :
  - polynôme de degré 3 = deux changements de variations
  - variations d'un poly d°2 = variation de P sur un intervalle borné
  - Variations de xiyi = variations de P. Contrôle sur cet opérateur : ne pas tenir compte des points isolés
- Evaluer visuelle des variations des points xiyi
- Tracé des fj
- Evaluer visuelle des variations de f5 et de f4
- Evaluer des zéros de la dérivée des fj

Systèmes de représentation :

Pendant la première partie de la résolution, les opérateurs et les contrôles s'expriment dans le dans le système analytique : l'approximation est un polynôme d'interpolation d'un ensemble de valeurs numériques ; il est fait allusion à un mode opératoire de construction de ce polynôme (Lagrange) ; des contrôles sur la qualité de l'approximation en fonction du nombre de valeurs numériques sont exprimés. Ces éléments valident f4 comme meilleure approximation.

Puis l'évocation du registre graphique permet l'activation d'un autre contrôle référent sur la conformité des variations de l'approximation à celles de P. Le premier contrôle référent est alors abandonné, au profit d'un contrôle du système de représentation graphique graphique (où l'approximation est essentiellement déterminée par ses variations, en association à des propriétés des représentations analytiques) ; qui valide f1, f2 et f3.

Le critère « minimiser ∑(abs(fj(xi) – yi))/21 » n'est pas véritablement contrôlé ; puis il est associé au nombre de variations de la courbe permettant d'ajuster les points yi (ce qui confirme le critère qui associe degré et nombre de variations). Laurent ne le prend d'ailleurs pas en compte pour discriminer f1, f2 et f3 en fin de résolution.

Nous identifions donc deux contrôles référents, qui sont concurrentiels. Le premier, qui identifie interpolation et approximation, guide les décisions sur la première partie de la résolution. Le deuxième, sur les variations et la proximité aux points xiyi, guide les décisions sur la deuxième partie de la résolution et vient remplacer le critère d'interpolation.

Contrôles référents :

- L'approximation d'une fonction f est le polynôme d'interpolation des valeurs f(xi) : valide f4. Contrôles associés :
    - Le degré du polynôme d'interpolation = nombre de valeurs interpolées
    - La meilleure approximation est celle qui interpole le plus de valeurs.
- L'approximation d'une fonction P est définie par une courbe ayant les mêmes variations de celle de P.
- L'approximation de P a une courbe visuellement proche des points xiyi.

L'opérateur ∑(abs(fj(xi) – yi))/21 semble être associé à l'idée de proximité graphique de la courbe de fj aux points (en fin de résolution, les valeurs de l'opérateur sont mises en relation avec la capacité de la courbe à s'approcher des points).

Contrôles d'instrumentation :

- si la courbe de l'approximation fj est proche des points xiyi alors fj minimise ∑(abs(fj(xi) – yi))/21 :
    - si le degré de fj est grand alors sa courbe a des variations qui l'approche des points xiyi et alors ∑(abs(fj(xi) – yi))/21 est petit
- Si fj est l'approximation de P alors variations de fj = variations de P

4. Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet

Nous interrogerons chaque analyse en termes d'opérateurs de contrôles référents et de contrôles d'instrumentation, en nous demandant quelles caractéristiques nous permet ou non de positionner la stratégie du binôme relativement aux conceptions courbe, analytique, objet. Le tableau de l'analyse a priori, résumant les éléments principaux des conceptions courbe, analytique et objet pour la résolution du problème d'approximation sert de référence.

4.1 Exemple du cas de Samir et Laurent

Les éléments des analyses de Samir et de Laurent se différencient au niveau des contrôles référents.

Pour Samir, l'analyse montre qu'il met en place des contrôles à deux niveaux. Un de ces contrôles porte sur les variations de la fonction d'approximation qui doivent être conformes à celles d'un polynôme de degré trois. Ce critère est instrumenté par les représentations graphiques, qui donnent à voir les variations. L'autre contrôle permet une gestion des valeurs yi : l'approximation doit prendre des valeurs proches des valeurs yi, sans toutefois prendre exactement les valeurs yi parce que celles-ci sont entachées d'erreur. L'évaluation de la proximité aux valeurs yi est instrumentée à la fois par l'opérateur $\sum$(abs(fj(xi) – yi))/21, et par la centration graphique des courbes dans les points xiyi. Ainsi, les contrôles référents portent sur des propriétés de la fonction d'approximation qui ne sont pas dépendantes des caractéristiques des représentations graphiques. Cela permet de hiérarchiser les opérateurs : évaluation des variation, évaluation des valeurs $\sum$(abs(fj(xi) – yi))/21, évaluation de la centration des courbes sur les points xiyi, et de faire le choix de la fonction f3. Cependant ce choix est nuancé par la faible différence des valeurs $\sum$(abs(fj(xi) – yi))/21 pour j=1, 2, 3 et par le fait que les trois fonctions f1, f2, f3 satisfont les critères de variation et de centration. Cette gestion de l'incertitude est celle de la conception objet (caractérisée dans l'analyse a priori). La comparaison de cette stratégie avec d'autres stratégies mises en place par d'autres étudiants, nous le verrons, viendra à conforter cette analyse.

L'analyse de Laurent est proche de celle de Samir. En effet, les étudiants parviennent à un consensus en fin de résolution. Les contrôles référents identifiés diffèrent cependant. Pour Laurent les contrôles ne sont pas les mêmes pour la première et la deuxième partie de la résolution. Dans la première partie, l'approximation est identifiée à la fonction d'interpolation des valeurs yi. Des contrôles sont mis en place sur la qualité de cette interpolation en fonction du nombre de points interpolés. La visualisation des représentations graphiques mène à l'abandon de ce critère, et permet la construction de deux nouveaux contrôles : la proximité de la courbe de l'approximation aux points xiyi et la conformité des variations de l'approximation à celle d'un polynôme de degré trois. Cette différence nous parait significative en terme de conceptions : les contrôles référents portent sur des attributs des représentations graphiques. Certes, la proximité de la courbe aux points xiyi est instrumentée, mais il est difficile de mesurer en quoi elle est liée aux contrôles référents. Le critère d'interpolation est abandonné parce que la représentation graphique de la fonction d'interpolation (f4) n'est pas conforme à celle d'un polynôme de degré 3. Samir se réfère à un autre critère qui invalide f4 : l'erreur qui entache les valeurs yi impose que l'approximation ne prenne pas les valeurs yi. Laurent semble mettre en œuvre une conception plus proche de la conception courbe, mais les discussions avec Samir lui permettent d'instrumenter la proximité aux points avec l'opérateur $\sum$(abs(fj(xi) – yi))/21 et donc de construire une autre conception. Il ne met cependant pas en œuvre pendant la première partie de la résolution de contrôle permettant de lier l'opérateur $\sum$(abs(fj(xi) – yi))/21 à l'approximation, cette relation sera établie plus tard à partir des représentations graphiques (relation entre la proximité aux points et la faible valeur de ∑(abs(fj(xi) – yi))/21). Il fait cependant preuve de peu de confiance dans le critère en fin de résolution et s'engage peu pour différencier les fonction f1, f2 et f3, qui lui semblent équivalentes. Pour la conception de Samir, l'opérateur ∑(abs(fj(xi) – yi))/21 est un instrument de mesure de l'écart ε'i aux valeurs yi ou aux points xiyi. Il est un critère de discrimination de f1, f2 et f3 en fin de résolution.

5. Discussion sur les relations contrôles / opérateurs

Intérêt d'identifier deux niveaux de contrôles

La nécessité de différencier opérateurs et contrôles a été démontrée au chapitre 1. Nous souhaitons revenir ici sur l'intérêt que nous avons trouvé à identifier parmi les contrôles, des contrôles référents, des contrôles pour l'instrumentation et des contrôles locaux de bonne mise en œuvre des opérateurs. Cet intérêt a été révélé par les analyses, et constitue un des résultats de notre travail.

Vergnaud nous a permis de penser qu'il existe différentes fonctionnalités des contrôles : les contrôles permettent au moins d'assurer l'adéquation de l'action et du problème – cette adéquation concerne à la fois la reconnaissance de l'appartenance du problème à une classe et la prise en compte des caractéristiques particulières du problème traité – ; l'anticipation de l'action et l'adéquation du résultat obtenu à celui attendu ; la prise d'information.

Les contrôles référents expriment les propriétés définitoires de l'approximation. En cela, ils reconnaissent le problème comme un problème de choix d'une approximation, et expriment sous quels critères ce choix est fait. Ces critères permettent de valider la réponse au problème. Ainsi, les contrôles référents participent à la reconnaissance de l'appartenance du problème à une classe, la classe des problèmes d'approximation de fonction (en qualifiant les objets du problème par des propriétés) et permettent de vérifier l'adéquation du résultat attendu à celui obtenu. Les contrôles référents se construisent tout au long de la résolution. Ils sont une propriété émergente des interactions du sujet avec le milieu : les décisions du sujet se stabilisent à la suite d'un processus d'actions et rétroactions. Leur expression rend compte des conditions sous lesquelles l'équilibre a été obtenu.

La mise en œuvre des opérateurs de traitement nécessite que les caractéristiques particulières du problème soient prises en compte. Dans notre cas, il s'agit de la prise en compte des données disponibles, des fonctions fj proposées et du mode par lequel ces fonctions sont définies, des outils et des informations disponibles (Maple, papier crayon). L'instrumentation, qui signifie pour nous la mise en œuvre des opérateurs de traitement, est rendue possible par l'adéquation de l'opérateur aux contrôles référents et la prise en compte des particularités du problème. Cette adéquation est exprimée par les contrôles pour l'instrumentation.

Il s'est révélé important de distinguer ces deux niveaux de contrôles (référents et pour l'instrumentation) car le sujet peut engager des contrôles référents sans parvenir à c onstruire decontrôle d'instrumentation. Cela a été le cas de certains binômes, nous le verrons dans les analyses développées dans le chapitre suivant.

La mise en œuvre des opérateurs peut nécessiter des contrôles locaux sur le bon déroulement des actions qui sont en cours ou sur des moyens de vérifier que l'action menée l'a été de façon adéquate. Cela est plus classique.

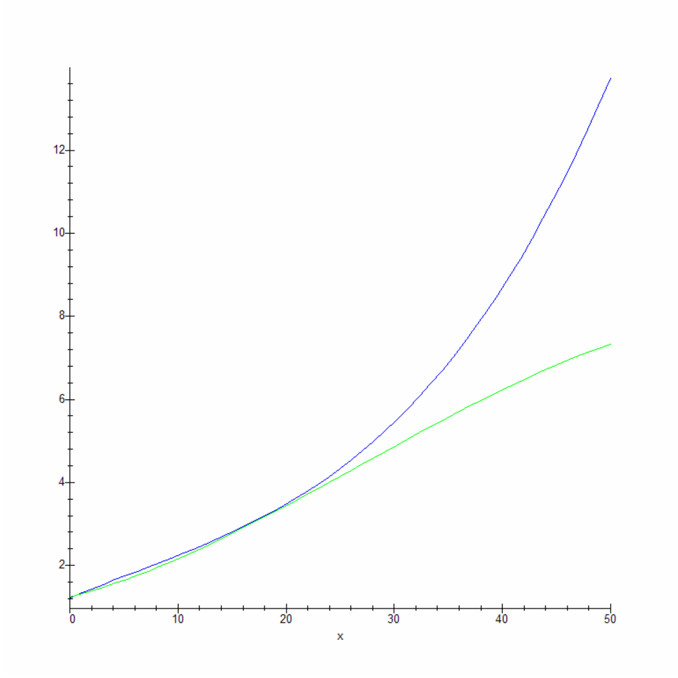
6. Analyse du protocole de Samir et Laurent pour la recherche d'une meilleure approximation sur [0 ; +∝[

6.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; +∝[

6.1.1 Samir :

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Atomes ou contexte du protocole**
Eléments du système de représentation analytique	
L'approximation à l'infini est du degré de P : A75, A144 => opérateur ne donnant pas lieu à une expression verbale : Evaluation du degré des fj.	***[LAURENT :*** *Ouais c'est vrai. Sur l'intervalle zéro plus l'infini on va dire que c'est réglé que c'est… soit la deux soit la cinq] A74.* *Bruits de clavier.* ***[SAMIR :*** *Il faudra se mettre d'accord si c'est la deux ou la cinq. C'est déjà moins facile] A75* ***[SAMIR :*** *Pareil sur zéro plus l'infini il faut que ce soit un polynôme de degré trois] A144.*
Eléments du système de représentation graphique	
Tracé des courbes de f2 et f5 sur [0 ; 50]. A87, A89	***[LAURENT :*** *Tu veux pas qu'on voit sur zéro plus l'infini. Zéro plus l'infini ça va être embêtant à voir.*

	***SAMIR :** On essaie sur genre zéro cinquante] A87.* ***[SAMIR :** Ouais on fait que la deux et la cinq.* *Ils rentrent les commandes dans Maple. Nathalie précise qu'on peut mettre des couleurs] A89.* *Ci-dessous f2 en vert et f5 en bleu :* 
Observation de la position des points, de l'allure globale, de la position des courbes par rapport aux points : pas de mise en place de critère de discrimination de l'approximation, A90, A92, A95	***[SAMIR :** Alors effectivement c'est pas la même courbe déjà] A90.* ***[SAMIR :** Il semble qu'à ce niveau les points ont une bonne dispersion] A92.* ***[LAURENT :** Tu vois le truc c'est qu'on fait avec le cinq et le cinq il passe que par cinq points] A93. [Donc visiblement ce serait plutôt la courbe rouge] A94…* ***[SAMIR :** Le bleu il passe un peu plus près des points] A95.*
Critère de cohérence entre [0 ; 20] et l'infini A87: l'approximation a la même courbure sur [0 ; 20] et à l'infini.	
Critère de cohérence entre [0 ; 20] et l'infini A141 : la centration sur les points sur [0 ; 20] garantit le bon comportement à l'infini: invalide f5 A148, A161, valide f2 A149	***[SAMIR :** … quand on te donne vingt points c'est pas forcé que sorti de ces vingt tu sors d'une forme linéaire et que le polynôme soit obligé… Donc sur zéro plus l'infini c'est pas les polynômes qui divergent vachement, c'est plutôt ceux qui continuent plus ou moins à suivre la*

	courbe au moins sur quelques trucs] A141. ***[SAMIR :** comment il est construit déjà le deux ? Il passe pas trop loin des points. Déjà ce qu'on peut se dire c'est que le quatre il est pas construit comme un polynôme qui… C'est pas en prenant que trois points d'une fonction que t'arrive forcément à bien] A148…* ***[LAURENT :** Le cinq ?* ***SAMIR :** Le trois on a rien sur comment il est formé et pourquoi le 2 ? Et on sait qu'il se rapproche déjà pas mal de ces points là. Donc a priori sur zéro plus l'infini c'est proposition deux] A149.* ***[SAMIR :** On va dire le deux alors] A160.* ***[SAMIR :** Il est de degré trois. On ne sait pas comment il a été formé mais on sait qu'il l'autre est formé qu'à partir de trois points sur un intervalle assez restreint donc a priori il décrit pas bien sur zéro plus l'infini] A161.*
Décisions	
Le critère sur le degré invalide f1, f3 (f4 n'est pas définie après 20) A144 Le critère sur la centration dans les points sur [0 ; 20] valide f5 A148, A160, A161, valide f2 A149, A160	Voir ci-dessus.

Résumé des éléments issus de l'atomisation

Système de représentation analytique :

- L'approximation à l'infini est du degré de P : A74, A144
- Evaluation du degré des fj (implicite).

Système de représentation graphique :

- Tracé des courbes de f2 et f5 sur [0 ; 50]. A87
- Observation de la position des points, de l'allure globale, de la position des courbes par rapport aux points : pas de mise en place de critère de discrimination de l'approximation, A90, A92, A95

- Critère de cohérence entre [0 ; 20] et l'infini : A141
    - centration sur les points sur [0 ; 20] garantit le comportement à l'infini : invalide f5 A148, A161, valide f2 A149

Analyse de la cohérence interne des éléments

Opérateurs :

- Evaluer des degrés des polynômes fj, j = 1, 2, 3, 5.
- Tracer des courbes des fonctions fj sur [0 ; 50], j = 2, 5.
- Evaluer centration des courbes des fonctions fj sur les points xiyi.

Contrôles référents :

- L'approximation d'un polynôme à l'infini est un polynôme de même degré.
- Une bonne approximation d'une fonction P à l'infini a une courbe ayant visuellement la même courbure que la courbe de P.

Contrôles d'instrumentation :

- Degré (approximation) = degré P
- Si la courbe de fj est centrée sur les points xiyi (au sens défini plus haut) alors fj a la même courbure que P à l'infini.

Systèmes de représentation :

La représentation analytique des fonctions fj offre un premier critère de choix qui assure que le contrôle référent sur le degré est satisfait.

Le critère de cohérence de courbure mobilise les représentations graphiques.

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet

Les deux fonctions candidates sont f2 et f5, parce qu'elles sont toutes deux des polynômes de degré 3. Ce critère est celui d'une conception analytique, qui identifie fonction et représentation analytique.

Samir construit un critère de cohérence de comportement de l'objet graphique sur [0 ; 20] et à l'infini pour discriminer les deux polynômes : si la courbe est bien contrainte sur [0 ; 20], alors sont comportement à l'infini est conforme à celui de P. Ce critère pourrait être attribué à une conception courbe, traitant la fonction comme un objet graphique. Il révèle une difficulté à envisager et à traiter les comportements possibles des polynômes au-delà de [0 ; 20]. Nous avons cependant des difficultés à mesurer la consistance de cet argument : résisterait-il en cas d'objection ? La construction de ce critère graphique peut répondre à un effet du contrat expérimental, envisagé comme une injonction à donner une seule solution.

Quoi qu'il en soit, la réponse de Samir révèle que ses conceptions ont des contrôles très limités pour traiter la question de l'approximation à l'infini : la fonction et son comportement à l'infini sont caractérisés soit par le degré de l'expression analytique, soit par la visualisation d'un objet graphique déterminé par sa position sur [0 ; 20].

6.1.2 Laurent

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation analytique	
L'approximation à l'infini est du degré de P A62, A63 A74, A139, A142 : invalide f3 et f1	*[**LAURENT :** Ah oui on doit le faire sur deux intervalles, zéro vingt et zéro plus l'infini. Donc déjà que zéro plus l'infini ce qui représentera bien le polynôme c'est un polynôme de degré trois] A62.* *[**LAURENT :** Que ce soit celui là ou celui là] A63* *[**LAURENT :** Ouais c'est vrai. Sur l'intervalle zéro plus l'infini on va dire que c'est réglé que c'est… soit la deux soit la cinq] A74* *Pour A142 voir ci-dessous.*
Eléments du système de représentation graphique	
Tracer les courbes sur [0 ; 50] : A76 Evaluation visuelle de la vitesse de croissance des courbes A103, A143 Evocation des dérivées pour évaluer la « courbure » des courbes A97 critère implicite : « courbure » de la courbe de l'approximation égale « courbure » de la courbe de P : invalide f3 L'interpolation ne garantit pas l'égalité des pente après 20 : A98 Indication montrant que Laurent n'est pas sûr	*[**SAMIR :** Il faudra se mettre d'accord si c'est la deux ou la cinq. C'est déjà moins facile] A75* *[**LAURENT :** Ca je pense qu'on peut essayer de le voir avec les courbes. On va les tracer ça nous coûte rien]. A76* *[**LAURENT :** Je serais bien tenté de voir où sont les zéros des dérivées là sur les deux] A97.[Parce que une interpolation comme ça, ça veut pas du tout dire pour la cinq qu'elle aura les même variations A98. D'ailleurs ça se voit elle est assez plane tandis que l'autre elle monte là elle descend elle remonte. Enfin non elle ne descend pas*

de la pente de P A146	*d'ailleurs… si un peu] A99.* **(…)** ***[LAURENT :*** *En fait c'est à partir de vingt C3 (courbe de f3) commence à diverger] A103.* **(…)** ***[LAURENT :*** *Ouais donc déjà on peut écarter f3 sur plus l'infini] A142. [Mais ça se voyait tout à l'heure la courbe elle montait bien] A143.* ***[LAURENT :*** *Là il faut qu'on se mette d'accord aussi comment ça croit] A146*
Décisions	
Le degré invalide f1 et f3	Voir ci-dessus
Samir tranche pour f2, Laurent approuve : A149, A150	***[SAMIR :*** *Le trois on a rien sur comment il est formé et pourquoi le 2 ? Et on sait qu'il se rapproche déjà pas mal de ces points là. Donc à priori sur zéro plus l'infini c'est proposition deux] A149.* ***[LAURENT :*** *la plus probable]A150*

Résumé des éléments issus de l'atomisation

Système de représentation analytique :

- L'approximation à l'infini est du degré de P A62, A74, A139, A142 : invalide f3 et f1
- Evaluation des degrés des fj, j = 1, 2, 3, 5

Outils du registre graphique :

- Evaluation visuelle des pentes des courbes de f1, f2, f3 et f5 : A103, A143
- « courbure » de la courbe de l'approximation égale « courbure » de la courbe de P : invalide f3
- Indication montrant que Laurent n'est pas sûr de la pente de P A146

Analyse de la cohérence interne des éléments

Opérateurs :

- Evaluer les degré des fj, j = 1, 2, 3, 5
- Evaluer visuellement les pentes des courbes de f1, f2, f3 et f5 sur [0 ; 50]

Contrôles référents :

- L'approximation d'un polynôme à l'infini est un polynôme de même degré.
- Une bonne approximation d'une fonction P à l'infini a une courbe ayant visuellement la même courbure que la courbe de P.

Contrôles pour l'instrumentation :

- Degré (approximation) = degré P
- Laurent ne construit pas de contrôle pour instrumenter le critère sur la courbure des courbes de P et de l'approximation.

Systèmes de représentation :

Pour Laurent aussi les représentations analytiques des fonctions fj offrent un premier critère de choix qui assure= que le contrôle référent sur le degré soit satisfait. Cependant, les représentations graphiques ne lui permettent pas de rendre opératoire le critère sur les courbures.

6.2 Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet

Comme pour Samir, les deux fonctions candidates sont f2 et f5, parce qu'elles sont toutes deux des polynômes de degré 3. Ce critère est celui d'une conception analytique, qui identifie fonction et représentation analytique.

Laurent commence à mettre en place un contrôle référent sur les courbures de P et de son approximation à l'infini, mais ce contrôle ne s'instrumente pas et c'est Samir qui tranche. Il n'est pas possible de se prononcer sur la nature de la connaissance en jeu (conception ou pas ?), car elle n'engage pas d'opérateur qui permette à Laurent de prendre une décision.

6.3 Discussion sur les relations contrôles / opérateurs

Afin de discriminer f2 et f5, Samir et Laurent construisent tous les deux des contrôles référents portant sur les représentations graphiques. Ces contrôles portent sur les courbures, évaluées visuellement, des courbes de l'approximation et de P. En l'absence de possibilité de visualisation de la courbe de P, Laurent ne parvient pas à construire de contrôle permettant d'instrumenter la contrainte sur les courbures : comment assurer que la courbure des courbes de P et de son approximation sont conformes ? Finalement, cette impossibilité d'instrumenter le contrôle référent le désengage de la discussion, et ce n'est pas lui qui tranchera sur le choix de f2, mais Samir. Samir construit quant à lui un contrôle d'instrumentation : la centration sur les points xiyi garantit que la courbure de f2 sera conforme à celle de P. Cela lui permet de faire le choix de f2 comme meilleure approximation à l'infini.

Cette analyse montre l'intérêt de différencier contrôles référents et contrôles pour l'instrumentation. Lorsque le contrôle pour l'instrumentation n'est pas disponible, nous voyons que cela peut mener à l'abandon du contrôle référent. **La conception de Laurent ne parvient pas à se former et laisse de fait la place à celle qui est la plus solide. La solidité désigne ici la capacité à instrumenter les contrôles**.

7. Conclusion

Cette grille d'analyse, illustrée avec l'exemple de Samir et Laurent, a été appliquée à l'ensemble des protocoles. Nous allons, dans la partie qui suit, donner le détail de chacune de ces analyses, en concluant pour chacune d'elle par une mise en relation avec les conceptions courbe, analytique et objet, et par une discussion sur les relations contrôles / opérateurs.

Chapitre 7 : Analyse a posteriori

Nous présentons dans ce chapitre les analyses de 9 binômes ayant participé à l'expérimentation. Parmi eux, il y avait

- 3 binômes de stagiaires de l'IUFM de Grenoble, en formation en deuxième année après avoir réussi le Capes de mathématiques,
- 6 binômes d'étudiants en début de $2^{ième}$ année (mois d'octobre) à l'Ensimag (école d'ingénieur de l'INPG).

Comme cela a été expliqué au chapitre 6, nous présenterons pour chacun d'eux :

- l'agrégation, c'est-à-dire les éléments issus de l'atomisation,
- la formalisation en termes de contrôles référents, contrôles pour l'instrumentation et opérateur, rendant compte de la cohérence interne des éléments,
- la mise en relation avec les conceptions courbe, analytique et objet,
- une discussion sur les relation opérateurs / contrôles.

1. Olivier et Elie

Olivier et Elie sont deux étudiants d'Ensimag 2ième année.

1.1 Elie

1.1.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20]

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation graphique	
Tracer (non conjointement) chacune des représentations graphiques des fj avec les points xiyi : A2	***Elie :*** *on a qu'à les tracer, on a qu'à les faire A2*
Si f est une approximation de P alors la courbe de f passe par les points xiyi A7, A20, A26, A66, A72, A74, A96, A97 : valide f4	***Elie :*** *proposition quatre ça doit être la meilleure non A7* *(...)* ***Olivier*** *: la quatre c'est la meilleure A20* ***Elie :*** *c'est normal le but c'est d'interpoler avec tous ces points A26* *(...)* ***Elie :*** *C'est bien parce que ça interpole tous les points. Si tu veux tous les points A66…* *(...)* ***Elie :*** *Ouais vingt et un points A72.* ***Olivier :*** *C'est sur zéro vingt que ça interpole le mieux. C'est pas en vingt points c'est sur zéro vingt A73.* ***Elie :*** *Le problème c'est que c'est celle là la mieux mais sur zéro vingt A74…* *(...)* ***Elie :*** *f4 c'est super bien sur zéro vingt si tu veux que les points A96 et après sur l'intervalle… je*

	pense que sur l'intervalle le mieux c'est f5 parce qu'au moins tu as quatre points sûrs A97
Eléments du système de représentation analytique	
Si f(xi) = P(xi) alors f est une bonne approximation de P A67 : valide f4	***Elie :*** *C'est bien parce que ça interpole tous les points. Si tu veux tous les points A66… T'es sûr que le polynôme à xi t'as les valeurs c'est les mêmes ici A67*
Eléments du système de représentation graphique	
Si f est une approximation de P alors la courbe de f a les propriétés d'une courbe de poly de degré 3 (lisse, peu de variations, …) A77, A79, A78	***Elie :*** *Si tu as plein de points ta fonction elle ressemble de plus en plus à la fonction. Si tu remets des points de plus en plus près, ta fonction elle se lisse comme ça et ça va devenir un truc qui va monter comme ça A77 ; Donc le polynôme il va être là à peu près A78. Déjà on voit bien qu'il ya des erreurs de toute manière parce qu'un polynôme il peut pas passer par tous ces trucs c'est pas possible A79*
Gestions du conflit entre « passer par les points » et « avoir l'allure d'un poly de degré 3 »	
Indentification d'un conflit entre deux critères : « passer par les points » et « avoir l'allure d'un poly de degré 3 » A31, A32, A69, A146 l'argument sur le nombre de points cherche à les réconcilier A76, A78. => modification du critère « passer par les points » : la courbe de l'approximation est proche des points et a l'allure d'un poly de degré 3 A87, A92 : (valide f1, f2 A103, A104, A142, A154, A157, non évalué avec f3) qui sont perceptivement proches des points ; invalide f5 A92, A148	***Elie :*** *Il faut savoir ce que tu veux. Si tu veux un polynôme de degré trois qui interpole pas mal c'est f2 A31. Si tu veux un truc qui est pas un polynôme mais qui interpole plus A32…* *(…)* ***Olivier :*** *ouais mais en gros ta fonction elle ressemble pas du tout à ça A68. (parle de la courbe de f4)* ***Elie :*** *ouais voilà c'est ça A69* *(…)* ***Elie :*** *Ca c'est le un… Ah le un il est pas mal, il passe par ce point, ce point… ouais en fait ils passent tous par ces points à peu près A87* *(…)* ***Elie :*** *On est coincés parce que en fait c'est ça, quand tu as plein de points tu regardes la moyenne des points ou tu regardes quatre points*

	particuliers ? Tu fais quoi pour que ce soit le plus précis possible ? Tu prends la moyenne, tu regardes tous les points et tu fais une moyenne. Et la moyenne c'est bien ce polynôme là, c'est f2. Et ça c'est tu prends juste quelques points A92 *(...)* ***Elie :** celle là elle passe plus par la vraie truc de la courbe A103. Montre si tu mets f1 par rapport à f2, c'est la meilleure on va dire f2 A104* *(...)* ***Elie :** Donc sur zéro vingt il y a f1 et f2 A142* *(...)* ***Elie :** La bleue elle parfaite si tu veux les points mais elle est pas parfaite si tu veux une courbe qui ressemble à peu près à la réalité A146* *(...)* ***Elie :** Celle qui est là la red... c'est quoi ça c'est pink, c'est f5, ouais f5 elle interpole les points du haut en fait, donc c'est pas terrible non plus A148* *(...)* ***Elie :** Voilà elle ressemble à peu près à la vraie courbe A154* *(...)* ***Elie :** Si on veut juste les vingt points là c'est f4 qu'il faut prendre mais bon si on veut l'intervalle zéro vingt que ça ressemble il faut prendre f1 ou f2 ou f2 à peu près A157*

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation graphique :

- Tracer (non conjointement) chacune des représentations graphiques des fj avec les points xiyi : A2
- Si f est une approximation de P alors la courbe de f passe par les points xiyi A7, A20 A26, A28, A32, A66, A72, A74, A96, A97, A146 : valide f4;

Système de représentation analytique :

- Si f(xi) = P(xi) alors f est une bonne approximation de P A67 : valide f4

Système de représentation graphique :

- Si f est une approximation de P alors la courbe de f a les propriétés d'une courbe de poly de degré 3 (lisse, peu de variations) A77, A79, A78

Système de représentation graphique :

Gestion du conflit entre les deux critères du registre graphique « passer par les points xiyi » et « avoir l'allure d'un poly de degré 3 » :

- Indentification d'un conflit entre deux critères : « passer par les points » et « avoir l'allure d'un poly de degré 3 » A31, A32, A69, A146.
- L'argument sur le nombre de points cherche à les réconcilier A76, A78.
- => modification du critère « passer par les points » : la courbe de l'approximation est proche des points et a l'allure d'un poly de degré 3 A87, A92 : (valide f1, f2 A103, A104, A142, A154, A157, non évalué avec f3) qui sont perceptivement proches des points ; invalide f5 A92, A148Evaluation perceptive de la proximité à chacun des points
- Evaluer perceptivement la position des courbes relativement aux points xiyi.

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents :

- l'approximation est proche des points xiyi

Pourquoi ne pas inclure le critère « allure d'un poly de degré 3 » dans les contrôles référents, bien que Elie l'intègre dans les critères pris en compte pour un choix final ?

Le registre graphique révèle un conflit entre les deux critères d'approximation « proximité aux points » et « allure d'un polynôme de degré 3 ». Le contrôle référent mis en œuvre par Elie (proximité aux points xiyi) valide f4. Le tracé de f4 n'invalide pas f4 comme bonne approximation et confirme que le critère de proximité aux points est satisfait. Cependant, Olivier refuse la validation de f4 comme bonne approximation car sa courbe n'est pas conforme à celle d'un polynôme de degré 3. Finalement Elie acceptera d'intégrer ce critère comme nouveau critère d'approximation. Cela passera en particulier par l'évocation d'une évolution provisoire du critère « passer par les points xiyi » en évoquant la possibilité d'appliquer ce critère à plus de points, ce qui permettrait de définir une courbe conforme au critère invoqué par Olivier. La représentation de la fonction f1permet de sortir de ce conflit : elle est visuellement proche des chacun des points xiyi (et ainsi en accord avec le contrôle référent sur la proximité à chacun des points xiyi) et permet de satisfaire le critère sur l'allure de la courbe que revendique Olivier.

Cependant, il y a une faible stabilité de ce nouveau critère, car f4 et f5 sont de nouveau validés plus loin sur le critère « passer par les points xiyi (A96, A97, A146, A157 (conclusion)), ce qui nous incite à penser que le contrôle référent pour Elie est un contrôle sur la proximité de chacun des points xiyi à la courbe de l'approximation.

Contrôles pour l'instrumentation :

- si f est une approximation de P alors la courbe de f est perceptivement proche de chacun des points xiyi : $\forall$i, le point (xi, f(xi)) est proche du point (xi, yi) : valide f1, f2, f4 et invalide f5
- si f est une approximation de P alors la courbe de f est continue, comporte peu de variations : invalide f4

Opérateurs :

- tracer les représentations graphiques des points xiyi et des fonctions fj sur [0 ; 20]
- estimer perceptivement les distances d[(xi, fj(xi)) ; (xi, yi)]
- estimer l'allure globale de la courbe des chacune des fj

Systèmes de représentations :

Les contrôles référents et les opérateurs portent sur les représentations graphiques. Le critère sur l'égalité des valeurs f(xi) et P(xi) (où f est l'approximation de P), laisse penser que la proximité courbe / points est évaluée en chaque point xiyi.

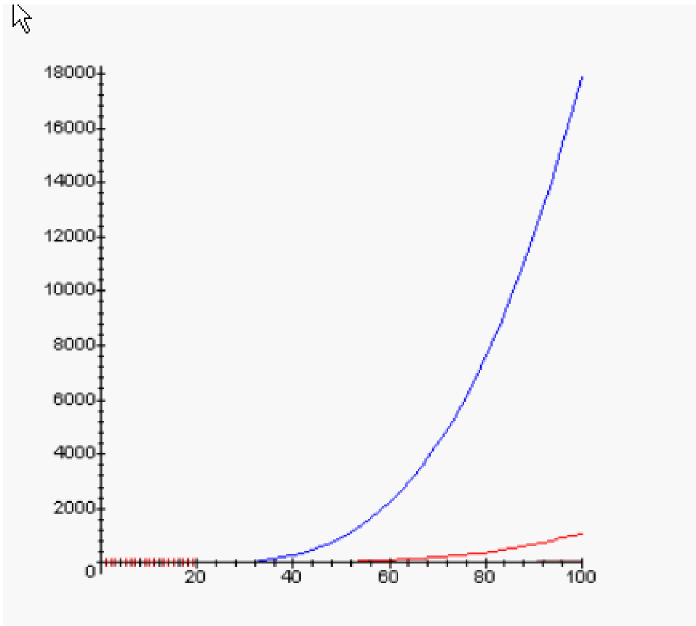
Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

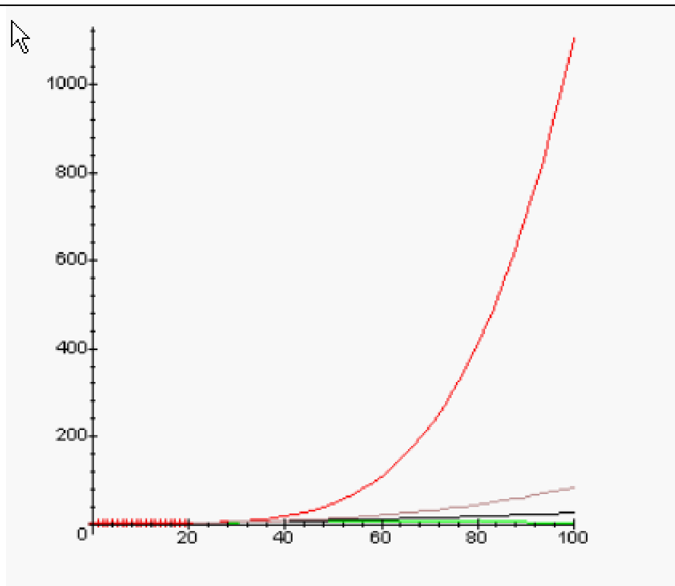
Les représentations graphiques permettent peu d'instrumentation et ne permettent pas de discriminer f1 et f2 (f3 a été occultée sans raison explicitée), qui sont équivalentes du point de vue des critères d'approximation de l'a conception. On retrouve en cela une caractéristique de la conception courbe, identifiées dans l'analyse a priori. Cependant, ici les critères ne portent pas sur une propriété globale de l'objet graphique que constituent les courbes de l'approximation. Il porte sur une évaluation, plutôt locale, de la proximité courbe / points xiyi. La conception envisage la courbe d'une fonction comme un objet défini par les points par lesquels il passe plutôt que par sa forme globale.

1.1.2 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; +∝[

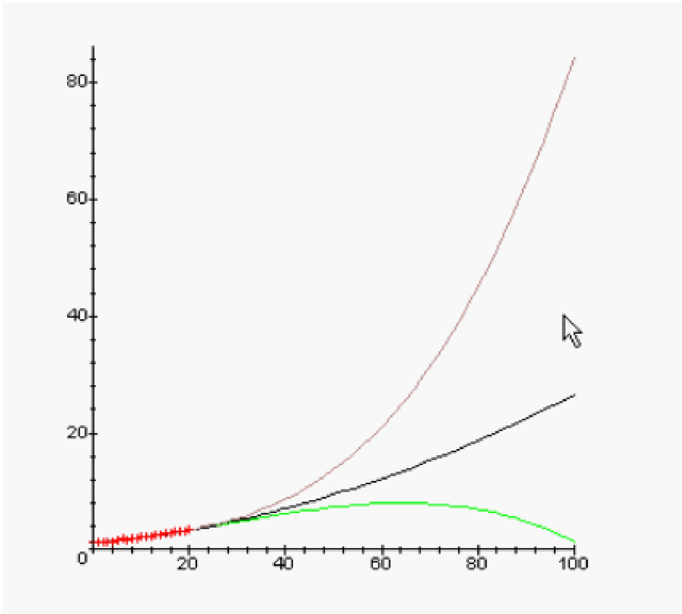
Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation analytique	
Si f est une approximation de P alors f est de degré 3 A54, A90, A95, A119, A120 : valide f2 et f5, puis f4	***Elie :*** *Le truc c'est qu'on a deux polynômes de degré trois. On a f5 et f2. On considère que f1 comme c'est pas un polynôme de degré trois ça interpole moins bien. Même si on voit pas trop la différence quand même A54* *(…)* ***Elie :*** *Ouais sur l'infini il faut que ce soit de degré trois OK.* ***Olivier :*** *Degré trois donc c'est celle-ciA90* *(…)* ***Elie :*** *Bon f1, f3 c'est foutu. Ils sont pas du même degré A95* *(…)* ***Elie :*** *Oui sur plus l'infini c'est foutu A119. Sur plus l'infini il faut quelque chose qui se comporte à peu près comme ce qu'on cherche A120*
Evaluation des limites de f2 et f5 à l'infini : si coefficient de plus haut degré < 0 (resp. > 0) alors limite de f à l'infini vaut moins l'infini (resp. plus l'infini). A129,	***Elie :*** *Degré trois elle est différente des autres ? elle va vers moins l'infini le degré trois A129*
Evaluation de l'ordre de grandeur des f2 et f5(x) pour x proche de 100 => associé à l'ordre de grandeur des	***Elie :*** *f5… ah ouais c'est normal elle est à 10 moins 5 A116* ***(…)***

coefficients de degré 3 des fj : A116, A122, A131	***Elie :*** *degré deux elle part comme ça, ça va juste à vingt cinq ça va pas très haut A122.* ***Elie :*** *Ils sont petits les coefficients ou pas là ? moins cinq, moins cinq, moins troisA131…*
Eléments du système de représentation graphique	
Tracer d'abord non conjointement, puis conjointement des courbes de f1, f2, f3, f4 et f5 sur [0 ; 100] A106, A123 (vu sur le film)	***Elie :*** *mais après comment on fait pour tester zéro plus l'infini ?* ***Olivier :*** *ben tu mets zéro cent.* *Bruits de clavierA106* *(…)* ***Elie :*** *Si on faisait un gros graphe où on les mettrait tous A123* *Courbes de f1, 2, 3, 4, 5 sur [0 ; 100] :*  *Courbes de f1, 2, 3, 5 sur [0 ; 100] :*

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Courbes de f1, f2 et f5 sur [0 ; 100] :



</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2" align="center">Décisions</td>
</tr>
<tr>
<td>Le critère sur le degré valide f2, f5 et f4
Si on ne connaît pas le comportement de P à l'infini (courbure, limite) alors on ne peut pas discriminer f2, f5 et f4 : A114, A132, A140, A144, A155</td>
<td>Elie : Ben x trois ouais. En même temps on sait pas où ça va après donc A114
(…)
Elie : Sur plus l'infini moi je pense on peut rien dire parce que là on a que vingt points, sur zéro vingt on peut dire des trucs mais sur zéro plus l'infini on sait pas ça peut partir comme ça, ça peut partir comme là, on sait rien A132
(…)
Elie : Ouais mais le polynôme aussi qu'on cherche à approximer il peut faire ce qu'il veut il peut faire comme</td>
</tr>
</table>

	f4 aussi on ne sait pas A140 *(…)* ***Elie :*** *Non tu peux rien dire car comme tout interpole bien. Même f4 sur zéro cinq tu le vois pas qu'elle fait plus de petits gri gri là A144* *(…)* ***Elie :*** *Elles partent toutes dans des coins différents on peu rien dire sur la fonction… On sait pas comment il se comporte le polynôme à approcher A155*

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation analytique :

- Si f est une approximation de P alors f est de degré 3 A54, A90, A95, A119, A120 : valide f2 et f5, puis f4
- Evaluation des limites de f2 et f5 à l'infini : si coefficient de plus haut degré < 0 (resp. > 0) alors limite de f à l'infini vaut moins l'infini (resp. plus l'infini). A129,
- Evaluation de l'ordre de grandeur des coefficients de degré 3 de f2 et f5 : A116, A131

Système de représentation graphique :

- Tracer séparément puis conjointement selon différentes associations f1, f2 et f5 sur [0 ; 100] A106, A123

Décisions :

- Le critère sur le degré valide f2, f4 et f5
- Si on ne connaît pas le comportement de P à l'infini (courbure, limite) alors on ne peut pas discriminer f2, f5 et f4 : A114, A132, A140, A144, A155

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Opérateurs :

- Evaluation des degrés des fj
- Tracer différentes associations de courbes de fonctions fj sur [0 ; 100]

Contrôles référents :

- L'approximation est du même degré que P.
- P et son approximation ont des courbes ayant la même courbure à l'infini (la courbure est défini par la limite, la vitesse de croissance, l'ordre de grandeur des valeur f(x) pour x grand)

Contrôles pour l'instrumentation :

Degré (approximation) = degré (P)

Systèmes de représentation :

Les représentations analytiques permettent de construire un premier critère de discrimination portant sur le degré. La recherche d'autres critères portant sur les représentations graphiques n'aboutit pas.

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Le contrôle sur le degré, qui relève de la conception analytique, permet de discriminer f2, f4 et f5 comme de bons candidats. Cependant une partie importante de l'activité porte ensuite sur les représentations graphiques sur [0 ; 100]. Elie conclue qu'il n'est pas possible d'établir de choix entre f2, f4 et f5. Cette décision est motivée par le fait que P peut avoir des comportements très différents après vingt. La conception met donc en œuvre un contrôle qui autorise une grande variété de comportement à la courbe de P à près vingt, ce qui n'était pas le cas du binôme précédant. Encore une fois, il est difficile de se prononcer sur la conception à l'œuvre.

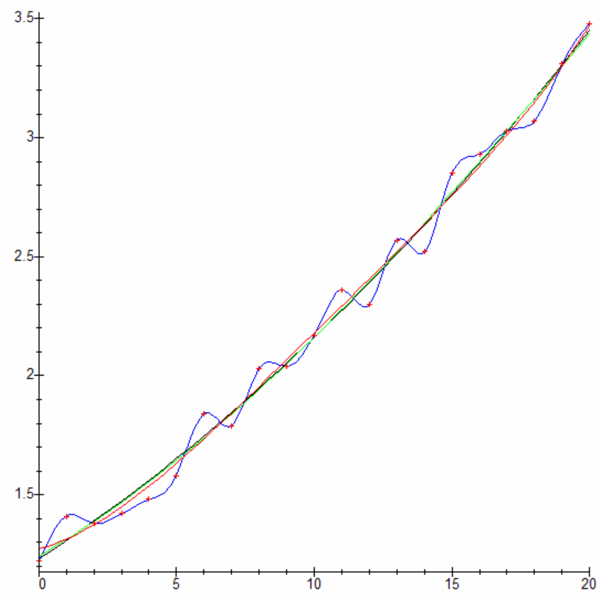
1. 2 Olivier

1.2.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20]

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation graphique	
Tracer les fonctions fj Si f est l'approximation de P alors la courbe de f est continue, comporte peu de variations : invalide f4 A24, A25, A30, A71, A156, valide f1, f2 et f3 A80	***Olivier*** *: Ah c'est pas beau. C'est pas du tout ça (parle de la courbe de f4) A24. Il faut voir en fait ça vient d'où ça ? D'un polynôme, ça ressemble pas du tout à un polynôme ça A25.* *(…)* ***Olivier*** *: … c'est pas très beau (parle de la courbe de f4). Moi je vote pas pour ça A30.* *(…)*

	Olivier : *Donc ce qu'on veut c'est une approximation, mais de toute façon il y aura des erreurs sur l'approximation puisqu'on a dix pourcent à la base A70. Mais là (parle de la courbe de f4) ça ressemble pas du tout à ce qu'on cherche A71* *(…)* ***Olivier :*** *Ca se lisse mais là aussi, c'est déjà lisse A80* *(…)* ***Olivier :*** *Par contre f4 sur zéro vingt elle est pas bien parce qu'on prend des points et ces points ils ont des erreurs de dix pourcent.* *Nathalie : sur zéro vingt vous éliminez f4* ***Olivier :*** *parce que cela ressemble pas du tout à une fonction du troisième degré A156*
Si f est l'approximation de P alors le nombre de points xiyi au dessus de la courbe de f est égal au nombre de points en dessous (nous dirons critère « centré » dans les points xiyi) A102 : valide f1, f2 et f3 A105, A150-A153 ; invalide f5 A148	***Olivier :*** *Franchement celle-ci elle est un peu mieux parce qu'elle fait bien attention aux quatre points qui sont en bas, celle là elle… tu vois la f2 elle est mieux parce que celle-ci elle prend des points qui sont tous en haut, par contre il faudrait changer les points quoi A102.* ***Elie :*** *celle là elle passe plus par la vraie truc de la courbe A103. Montre si tu mets f1 par rapport à f2, c'est la meilleure on va dire f2 A104.* *Bruits de clavier.* ***Olivier :*** *C'est quasiment pareil. C'est même pareil. Donc là vraiment on les mets ensemble sur zéro vingt A105.*



(…)

Olivier : *la bleue (parle de la courbe de f4) elle est bonne pour rien du tout A148*

(…)

Olivier : *Là on a une bonne moyenne la noir et la verte, c'est à peu près au milieu elles se ressemblent vachement, et la rouge elle descend un peu plus bas c'est-à-dire qu'elle prend plus en compte ces quatre points là ce qui est pas mal non A150 ? Celles-ci elle sont un peu bas celles là A151…*

Elie : *la courbe c'est bon elle doit être comme ça là ça marche.*

Olivier : *voilà on dit ça.*

Elie : *On dit quoi ? Celle qui approxime le mieux…*

Olivier à Nathalie : Sur zéro vingt on va… Enfin vu l'image qu'on a sur le graphique on va dire que c'est a peu près équivalent pour la degré un et la degré trois.

Elie : *Pour f1 et f2 en fait.*

Nathalie : Sur zéro vingt d'accord.

Olivier : *On les met ensemble parce que c'est à peu près pareil A152 et parce que ça passe au milieu de chaque point A153.*

Positionnement du critère « centration dans les points » par rapport au critère « passer par quatre points » : A99	***Olivier :*** *Oui mais c'est toujours pareil là tu fixes juste quatre valeurs et donc tu t'en fiches de la moyenne. Alors que l'autre polynôme de degré trois il regarde la moyenne A99*
Evaluation perceptive de la position des courbes des fj par rapport à chacun des points xiyi : A18, A19, A23	***Olivier*** *: Ouais cela prend un peu plus les trois points là A18. C'est le premier point qui est pas terrible A19.* *(…)* ***Olivier*** *: juste au début ça part un peu… ça rétrécit… c'est à peu près la même chose A23*
Si les yi sont entachés d'erreur alors l'approximation f ne prend pas les valeurs yi aux xi. : invalide f4 A63, A65, A75, A147, A156, invalide f5 A93, A148	***Olivier :*** *la quatre je la trouve mauvaise A62. Parce qu'elle te prend plus un polynôme de degré trois sur deux valeurs avec la dérivée A63…* ***Elie :*** *tu prends la dérivée, tu as quatre valeurs donc tu prends la polynôme de degré trois A64.* ***Olivier :*** *Elle prend un polynôme sur deux valeurs en plus il faut que ce soit bon donc ça c'est vraiment pas bon, donc ça c'est vraiment pas bon c'est nul partout A65.* *(…)* ***Olivier :*** *Nous on cherche sur zéro vingt, c'est-à-dire que celle là elle est bonne mais entre là et là ça se trouve il y a plus de dix pourcent d'erreur hein. Même sur zéro vingt celle-ci elle est pas forcément meilleure. Parce que tu vois bien comment ça bouge, ça fait une super descente, si ça c'est un peu plus bas et ça c'est un peu plus bas… non ça c'est un, peu plus haut et ça c'est un peu plus bas, par rapport au point d'origine il peut y avoir une grosse erreur A75* *(…)* ***Olivier :*** *donc on ne sais pas ça peut très bien partir… si tu prend quatre exceptions ça peut très bien avoir.. tu peux très bien tomber sur une fonction qui vaut pas ça A93* *(…)* ***Olivier :*** *Et oui mais comme les points ils sont pas parfait*

	on s'en fout un peu d'avoir une courbe parfaite qui touche les points A147. ***Elie :*** *C'est pas con ça.* ***Olivier :*** *la bleue elle est bonne pour rien du tout A148* *(…)* ***Olivier :*** *Par contre f4 sur zéro vingt elle est pas bien parce qu'on prend des points et ces points ils ont des erreurs de dix pourcent.* *Nathalie : sur zéro vingt vous éliminez f4* ***Olivier :*** *parce que cela ressemble pas du tout à une fonction du troisième degré A156*
Eléments du système de représentation formel	
Tentative d'estimation de l'erreur f(x) – P(x), si f est un polynôme d'interpolation de yi comportant 10% d'erreur, abandonné rapidement en partie par une difficulté d'instrumentalisation pour mettre en œuvre le critère, A56, A59, A61 => $y_i \neq P(x_i)$	***Olivier :*** *f5 il prend quatre points qui sont sûrs, donc il peut y avoir un erreur qui va jusqu'à dix pourcent sur zéro plus l'infini A56.* ***(…)*** ***Olivier :*** *et si on détermine un polynôme à partir de trois valeurs qui ont des erreurs de dix pourcent on a des erreurs de combien après sur les autres valeurs des autres polynômes , c'est un truc de degré trois A59 ?* ***Elie :*** *C'est trop compliqué ça A60.* ***Olivier :*** *On va avoir des erreurs de au maximum dix pourcent au cube A61.*
Décisions	
Relation entre le degré de l'approximation et la qualité de l'approximation : degré de l'approximation f ≥ degré de P, sinon f(x) – P(x) > 10% de P(x) A11, A33. Ccette prévision sera contredite par la représentation graphique de f1 (A21,	***Olivier*** *: Le un on va trouver… enfin on peut toujours regarder hein. On peut toujours regarder mais à mon avis cela dépasse les dix pourcent puisque c'est de degré deux A11* *(…)* ***Olivier*** *: la quatre c'est la meilleure A20 mais par rapport, quand tu compares ces deux là. Là tu as le point*

A41, A85) Critères sur l'allure globale de la courbe et sur la centration dans les points xiyi valident f1 et f2 (f3 n'est pas évaluée sur ces critères : s'agit-il d'un oubli ?)	*premier, deuxième. En fait là c'était degré deux et degré trois on voit pas trop la différence A21.* *(...)* ***Olivier :** attends on a fait laquelle là. Ah mais en fait c'était trois et quatre c'est pour ça qu'il a pas une grande différenceA33* *(...)* ***Olivier :** Tu vois ça ressemble A41 (parle des courbes de f1, f2 et f3* *(...)* ***Olivier :** Et l'autre c'est un deux et l'autre c'est un quatre A84. Sur les... sur zéro vingt finalement un polynôme de degré deux, trois et quatre ça se ressemble vachement, d'accord ? Donc on peut pas à voir si on a vraiment un ou deux qui sont mieux A85.*

Résumé des éléments issus de l'atomisation

Système de représentation graphique :

- tracer les courbes des fj
- si f est l'approximation de P alors la courbe de f est continue, comporte peu de variations : invalide f4 A24, A25, A30, A71, A156, valide f1, f2 et f3 A80
- Si f est l'approximation de P alors le nombre de points xiyi au dessus de la courbe de f est égal au nombre de points en dessous (nous dirons critère « centré » dans les points xiyi) A102 : valide f1, f2 et f3 A105, A150-A153 ; invalide f5 A148
- Positionnement du critère « centration dans les points » par rapport au critère « passer par quatre points » : la centration permet de minimiser l'erreur qui entâche les valeurs yi A99.
- Evaluation perceptive de la position des courbes des fj par rapport aux points xiyi : A18, A19, A23
- Si les yi sont entachés d'erreur alors l'approximation f ne prend pas les valeurs yi aux xi. : invalide f4 A63, A65, A75, A147, A156, invalide f5 A93, A148

Contrôles et outils sur l'erreur dans le registre formel :

- Tentative d'estimation de l'erreur f(x) – P(x), si f est un polynôme d'interpolation de yi comportant 10% d'erreur, abandonné rapidement en partie par une difficulté d'instrumentalisation pour mettre en œuvre le critère, A56, A59, A61

=> yi ≠ P(xi

Décisions :

- Relation entre le degré de l'approximation et la qualité de l'approximation : degré de l'approximation f ≥ degré de P, sinon f(x) – P(x) > 10% de P(x) A11, A33.Cette prévision sera contredite par la représentation graphique de f1 (A21, A41, A85)
- Les critères sur l'allure globale de la courbe et sur la centration dans les points xiyi permettent de valider f1 et f2 (f3 n'est pas évaluée sur ces critères : s'agit-il d'un oubli ?).

Analyse de la cohérence interne des éléments

Opérateurs :

- Tracer les fonctions fj et les points xiyi
- Evaluation perceptive de la position des courbes des fj par rapport aux points xiyi

Contrôles référents :

- L'approximation a une courbe continue, comportant peu de variations
- L'approximation a une courbe proche des points xiyi

Critère de discrimination des fonctions :

- Si f est l'approximation de P alors vérifier que la courbe de f est continue, comporte peu de variations : invalide f4
- Si le nombre de points xiyi au dessus de la courbe de f est égal au nombre de points en dessous (nous dirons critère « centré » dans les points xiyi) alors la proximité de la courbe de l'approximation aux points xiyi est satisfaisante : valide f1, f2 et f3 ; invalide f5
- Positionnement du critère « centration dans les points » par rapport au critère « passer par quatre points » : la centration permet de minimiser l'erreur qui entache les valeurs yi A99.
    - Conforté par le contrôle : Si les yi sont entachés d'erreur alors l'approximation f ne prend pas les valeurs yi aux xi

Systèmes de représentation :

Les contrôles et les opérateurs portent sur les représentations graphiques.

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet

Les éléments identifiés sont ceux d'une conception courbe, et les fonctions f1, f2 et f3 sont des approximations équivalentes du point de vue de la conception.

1.2.2 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; +∝[

L'analyse du problème d'approximation sur [0 ; +∝[conduit aux même conclusion que celle de Elie.

1.3 Discussion sur les relations contrôles / opérateurs

La résolution est peu instrumentée, en particulier la conception ne permet ne permet pas la construction de contrôles permettant de gérer les déséquilibres apportés par la situation :

- Olivier tente d'établir une relation entre l'erreur qui entache les valeurs yi et l'erreur qui entache f5(x) pour x appartenant à [0 ; +∝] : la difficulté que représente l'instrumentation du critère et l'absence de contrôle sur sa validité mènent à un abandon.
- La contradiction apportée par la représentation graphique de la courbe de f1 qui est proche des points xiyi, bien que ce soit un polynôme de degré 2 (contraire à la prévision d'Olivier), n'est pas contrôlée.

Les contrôles référents diffèrent pour Laurent et Elie. Le fait que ces contrôles portent sur les représentations graphiques nous semble favoriser le consensus, malgré leurs différences : parce qu'ils portent sur les mêmes représentations et parce que ces contrôles sont peu précisés, donnent lieu à des opérateurs d'appréciations visuelles qui autorisent l'écart des contrôles référents sans révéler de contradiction.

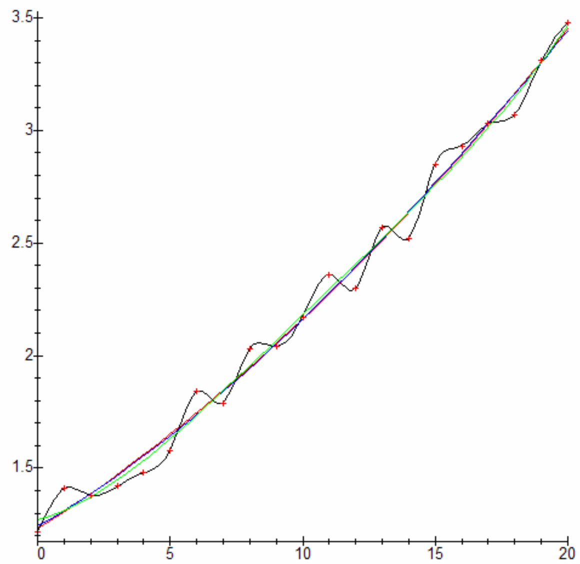
2. Mathilde et Cécile :

Mathilde et Cécile sont deux stagiaires PLC2 mathématiques de l'IUFM de Grenoble.

2.1 Mathilde :

2.1.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20]

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	Contextes du protocole
Eléments du système de représentation graphique	
Tracer les représentations graphiques des fj et des points xiyi A5, A6	***Mathilde :*** *Ah non non, je voulais comparer ça et ça. A4Et puis après… donc f1 et ça, tes valeurs là.* ***Cécile :*** *Hum, hum.* ***Mathilde :*** *En faisant comme ça avec le dessin du… ça A5* ***Cécile :*** *D'accord* ***Mathilde :*** *Et le mettre juste après f1 A6* 
L'approximation de P a courbe une continue avec peu de changements de	***Mathilde :*** *Ah d'accord. Tu vois ils vont tous être bien. Je trouve qu'ils ont même la même tête A27.*

variations A27, A97, A123 : valide f1, f2, f3 et f5 et invalide f4 A54	*(…)* ***Mathilde :*** *Oui mais c'est pas un polynôme de degré trois A54.* ***Cécile :*** *Ouais, je veux dire* ***(…)*** ***Mathilde :*** *Moi tu vois déjà la f4 elle a pas la gueule d'un polynôme de degré trois, rien que pour ça je la supprimerais. Parce que quand même c'est une approximation quoi A97* *(…)* ***Mathilde :*** *Ca représente pas du tout un polynôme de degré trois. A123.*
Estimation de la proximité des courbes aux points xiyi : l' approximation de P est centrée dans les points (nombre de points xiyi en dessous de la courbe = nombre de points xiyi en dessus de la courbe) et dans la courbe de f4 A100, A106, A107, A189, A190 : invalide f5, puis ce critère est remis en cause (pas de raison invoquée) A235	***Mathilde :*** *Mais alors dans ces conditions si tu trouves que la noire (il s'agit de la coure de f4) elle te donne un truc un peu mieux ça veut dire que celles qui sont au milieu là… tu vois comme elles sont … enfin moi je le vois comme ça, elle passent par le milieu de la noire, elles forment une meilleure approximation que la jaune là, f5 A100* *(…)* ***Mathilde :*** *Pourquoi je pense ? c'est peut être pas la vérité. Ben en fait on disait que… on trouvait que la noire là f4, f4 vu qu'il passe par tous les points il donne à peu près une idée de comment va passer la courbe A106. Donc en fait du fait que la jaune elle soit pas au milieu elle soit plutôt au dessus de la noire, on se disait qu'elle représentait moins la courbe que A107* *(…)* ***Mathilde :*** *Oui pourquoi on l'a pas enlevée ? Ah oui la cinq on avait dit qu'elle était un peu trop au dessus A189.* ***Cécile :*** *Ah la cinq c'est la jaune.* ***Mathilde :*** *Ouais. Vu qu'on disait que la noire était là pour conduire A190* *(…)* ***Mathilde :*** *Ben moi je dis que sur zéro vingt quand*

	même, on a bien facilement supprimé la quatre, mais à part la quatre, la cinq on a dit qu'elle était louche par rapport aux autres mais si ça se trouve c'est la seule qui est bonne A235.
Sur un intervalle des polynômes de degrés différents peuvent avoir des courbes qui se superposent (même nombre de variation, proximité visuelle) A39 A40 : valide f1 et f3 comme de bons candidats à l'approximation	***Cécile :*** *Ouais mais il est sensé approcher un polynôme de degré trois alors qu'il est de degré quatre A38.* ***Mathilde :*** *Ouais mais regarde le polynôme de degré deux, il est de degré deux et pourtant il l'approchait bien A39.* *Silence.* ***Mathilde :*** *C'est ça le problème c'est qu'on est sur zéro vingt A40*
La qualité de l'approximation se mesure sur l'ensemble de l'intervalle [0 ; 20] et pas uniquement aux points xiyi A57, A60, A87, A89 : invalide le critère « passer par les points xiyi » ;	***Mathilde :*** *Ben non parce que celle là passe par vingt points OK mais il y a l'infinité qui reste A57.* ***Cécile :*** *On est sur l'intervalle zéro vingt A58…* *(…)* ***Mathilde :*** *Non mais même il y a une infinité de points sur l'intervalle zéro vingt A60.* *(…)* ***Mathilde :*** *Est-ce que c'est ça qui est intéressant dans une approximation ? Est-ce que c'est intéressant… je veux dire t'as vingt points au hasard, ta courbe si ça se trouve elle passe pas par ces vingt points là mais après elle va passer par cinq cent mille points qui sont pas dessinés qui appartiennent à la courbe. Tu vois ce que je veux dire A87 ?* ***Cécile :*** *Ouais on a pas tout A88.* ***Mathilde :*** *On a pas tout, donc c'est pas parce qu'elle coïncide pas avec ces vingt points là que ça veut pas dire qu'elle coïncide pas ailleurs A89*
Si les yi sont entachée d'erreur alors l'approximation de P ne passe pas nécessairement par xiyi A55, A67, A69, A155 : invalide f4 A73	***Mathilde :*** *celle là je la supprimerais en plus elle passe par tous les points donc A55* *(…)* ***Mathilde :*** *Elles sont pas bonnes, elles peuvent avoir dix pourcent d'erreur donc A67…*

	Cécile : *C'est énorme.* ***Mathilde :*** *ouais ben ouais carrément A68, puis ça passe par tous les points alors sachant que les points ils ont dix pourcent d'erreur, encore plus moi je la rejette la proposition quatre A69* *(…)* ***Mathilde :*** *moi celle là elle me plait pas du tout. Mais alors vraiment pas du tout A73* *(…)* ***Mathilde :*** *Mais c'est pas forcément bien A154…Surtout si les points ce sont pas vraiment les vrais pointsA155.*
Comparaison des courbure de f1, f2, f3 A255, A280 : courbure de f1>courbure (f2, f3) : invalide f1	***Mathilde :*** *En fait je suis pas une pro des courbures mais… moi je conserverais plutôt la verte… euh la bleue ou la rouge, donc la un ou la deux.* ***Cécile :*** *La un ou la deux.* ***Mathilde :*** *Ouais, sur zéro vingt bien sûr.* ***Cécile :*** *Hum on est d'accord, sur zéro vingt A255* *(…)* ***Mathilde :*** *Enfin déjà f trois moi je l'ai supprimée parce que j'ai pas aimé la courbure au départ A280.*
Comparaison visuelle des distances $d(x_0,f1(0), x_0y_0)$, $d(x_0,f2(0), x_0y_0)$, $d(x_0,f3(0), x_0y_0)$, $d(x_{20},f1(20), x_{20}y_{20})$, $d(x_{20},f2(20), x_{20}y_{20})$, $d(x_{20},f3(20), x_{20}y_{20})$ => Si f1 minimise $d(x_0,fj(0))$ et $d(x_{20},fj(20), x_{20}y_{20})$ pour j = 1, 2, 3 alors choisir f1. A163, A271, A279	***Mathilde :*** *Par exemple (rire) la verte elle est moins précise en zéro. Enfin la verte c'était quoi, c'était trois A163 ?* ***(…)*** ***Mathilde :*** *Mais bon c'est comme ça quoi parce que… j'ai pas vraiment de raison A270. Parce que là, à la rigueur, elle est plus près du point, du dernier point et elle est plus près du premier point. Et partout ailleurs c'est presque la même chose A271* ***(…)*** ***Mathilde :*** *Ben parce qu'en fait je savais pas quoi choisir entre f un, f deux et f trois parce que toutes les trois elles ont l'air pas mal A278. Et en fait j'ai*

	comparé par rapport aux valeurs A279…
Eléments du système de représentation analytique	
Evaluation de 1,22+10%*x0 et f2(0) Comparaison de 1,22+10%*x0 et f2(0) : f2(0)> 1,22+10%*x0 A165-A176	***Mathilde :*** *Ah ben oui ça se trouve A165…* ***Cécile :*** *C'est l'intersection de la verte avec A166 …* ***Mathilde :*** *Attends, fais voir, dix pourcent de un virgule vingt deux.. ça fait A167…* ***Cécile :*** *Attends des valeurs entachées d'erreurs aléatoires pouvant aller jusqu'à dix pourcent A168.* ***Mathilde :*** *Là c'est 1 virgule A169…* ***Cécile :*** *… C'est carrément rien, enfin si sur le dessin quand même ça fait beaucoup A170.* ***Mathilde :*** *Ouais mais là ça fait beaucoup quand même, à mon avis ça fait plus de dix pourcent. Ca fait presque zéro virgule zéro cinq A171.* ***Cécile :*** *Un et demi… pourquoi un et demi ? Ah parce que là c'est un A172.* ***Mathilde :*** *Là c'est un virgule deux.* ***Cécile :*** *Et là c'est un virgule un et même deux, non c'est un virgule un.* ***Mathilde :*** *Le petit noir c'est un virgule deux.* ***Cécile :*** *D'accord un virgule deux oui.* ***Mathilde :*** *Et là ce serait presque un virgule vingt huit.* ***Cécile :*** *Ouais. A173* ***Mathilde :*** *Donc ça voudrait dire qu'il y a zéro virgule zéro six… Ca fait pas énorme A174…* ***Cécile :*** *Ouais en fin de compte A175.* ***Mathilde :*** *Mais dix pourcent de un virgule vingt deux ça fait zéro virgule zéro un…* ***Cécile :*** *Hum…* ***Mathilde :*** *Donc zéro virgule zéro six c'est pas dix pourcent A176,*
Si f est une approximation de P alors f(0) ≤ 1,22+10%*x0 A177: invalide f2, puis un nouveau calcul montrera que f2(0) = 1,22+10%*x0 A181-A183	***Mathilde :*** *donc c'est sûr qu'en zéro la verte elle est moins précise A177.* *(…)* ***Cécile :*** *Ah mince il est de degré quatre le vert. C'est f3 A181. Hum, hum…Ah ben tu vois ben d'ailleurs il est à*

	un vingt sept. On aurait du regarder avant A182. ***Mathilde :*** *Ah ben ouais on est trop con. Un vingt deux, un vingt trois, un vingt quatre, un vingt sept. D'accord A183*
Degré (approximation) = degré (P) A180 : valide f2 A143 puis le critère est abandonné (ce qui peut signaler que ce critère ne se réfère pas à un contrôle ancré dans une conception mais est contingent à la situation A144)	***Mathilde :*** *Ben c'est pas possible elle est de degré quatre A180* *(…)* ***Mathilde :*** *On choisirait deux parce que deux c'est un polynôme de degré trois d'accord A143. Et que nous on cherche un polynôme de degré trois mais enfin bon… C'est pas très valable comme raison. Enfin si c'en est une mais A144…*
Décisions	
Référence à une pratique identifiée A149, A151 : en physique on approche un nuage de points par une courbe qui ne passe pas par les points et s'ajuste entre les points. Valide : l'approximation de P est une courbe centrée dans les points xiyi.	***Mathilde :*** *Oui ça c'est pas grave parce les approximations c'est bien connu que A149…* ***Cécile :*** *Si ça se trouve elles ont été approchées correctement A150.* ***Mathilde :*** *Ouais, ouais, je sais pas si tu te souviens mais quand on faisait expérience en physique on avait des points et on traçait, ça passait pas toujours par… enfin moi c'est ce dont je me souviens quoi A151…*
Faible conviction dans les raisons invoquées pour départager f1, f2 et f3 (degré, minimiser le distance à x_0y_0 et $x_{20}y_{20}$) Le critère principal porte sur la forme de la représentation graphique (continue, peu de variations, centration dans les points). Puis, Mathilde n'a pas d'instrument pour discriminer ces trois représentations relativement à la qualité d'approximation A187, A267, A268, A270, A271, A278.	***Mathilde :*** *Moi je suis d'accord de la supprimer la proposition trois si on est d'accord toutes les deux il n'y a pas de soucis A186.* ***Cécile :*** *Ouais mais on a pas vraiment de raison valable.* ***Mathilde :*** *Non mais comment tu veux départager des courbes qui sont presque identiques sur zéro vingt A187* *(…)* ***Mathilde :*** *Ben moi je choisirais plutôt la rouge A267. Mais c'est quif quif A268.* ***Cécile :*** *La rouge c'est laquelle ?* ***Mathilde :*** *C'est la prem…* ***Cécile :*** *C'est la première A269.*

	Mathilde : *Mais bon c'est comme ça quoi parce que… j'ai pas vraiment de raison A270. Parce que là, à la rigueur, elle est plus près du point, du dernier point et elle est plus près du premier point. Et partout ailleurs c'est presque la même chose A271* *(…)* ***Mathilde :*** *Ben parce qu'en fait je savais pas quoi choisir entre f un, f deux et f trois parce que toutes les trois elles ont l'air pas mal A278*

Résumé des éléments issus de l'atomisation

Système de représentation graphique :

- Tracer les représentations graphiques des fj et des points xiyi A5, A6, A22
- La courbe de l'approximation a une allure conforme à celle d'un polynôme de gré 3 (continue, peu de variations) A27, A97, A123 : valide f1, f2, f3 et f5 et invalide f4 A54, A55
- La proximité de la courbe aux points xiyi est estimée : Si f est une approximation de P alors nombre de points xiyi en dessous de la courbe = nombre de points xiyi en dessus de la courbe A32, A100, A106, A107, A189, A190 : invalide f5
- Sur un intervalle des polynômes de degrés différents peuvent avoir des courbes qui se superposent (même nombre de variation, proximité visuelle) A40 : valide f1 et f3 comme de bons candidats à l'approximation
- La qualité de l'approximation se mesure sur l'ensemble de l'intervalle [0 ; 20] et pas uniquement aux points xiyi A57, A60, A87, A89 : invalide le critère « passer par les points xiyi »
- Si les yi sont entachés d'erreur alors la courbe de l'approximation de P ne passe pas nécessairement par les points xiyi A55, A67, A69, A155 : invalide f4 A73
- Evaluation des la position des courbes par rapport aux points xiyi A236-A254 : très allusif (bien, pas mal, etc…)
- Comparaison des courbure de f1, f2, f3 A255, A280 : courbure de f1>courbure (f2, f3) : n'aboutit pas
- Comparaison visuelle des distances $d(x_0,f1(0), x_0y_0)$, $d(x_0,f2(0), x_0y_0)$, $d(x_0,f3(0), x_0y_0)$, $d(x_{20},f1(20), x_{20}y_{20})$, $d(x_{20},f2(20), x_{20}y_{20})$, $d(x_{20},f3(20), x_{20}y_{20})$:

- Si f1 minimise d(x_0,fj(0)) et d(x_{20},fj(20), $x_{20}y_{20}$) pour j = 1, 2, 3 alors choisir f1. A163, A271, A279, puis abandonnée

Système de représentation analytique :

- Evaluation de 1,22+10%*x0 et f2(0)
- Comparaison de 1,22+10%*x0 et f2(0) : f2(0)> 1,22+10%*x0 A165-A176
- Si f est une approximation de P alors f(0) ≤ 1,22+10%*x0 A177: invalide f2, puis un nouveau calcul montrera que f2(0) = 1,22+10%*x0 A181-A183
- Degré (approximation) = degré (P) A180 : valide f2 A143 puis le critère est abandonné A144.

Décisions :

- Référence à une pratique identifiée A149, A151 : en physique on approche un nuage de points par une courbe qui ne passe par les points et s'ajuste entre les points. Valide l'affirmation suivante : l'approximation de P est une courbe centrée dans les points xiyi.
- Faible conviction dans les raisons invoquées pour départager f1, f2 et f3 (degré, minimiser la distance à x_0y_0 et $x_{20}y_{20}$).
- Le critère principal porte sur la forme de la représentation graphique (continue, peu de variations, centrée dans les points). Pas de critère de discrimination des trois fonction A187, A267, A268, A270, A271, A278.

Analyse de la cohérence interne des éléments

Opérateurs :

- Tracer les représentations graphiques des fj et des points xiyi
- Estimation perceptive de la position des courbes par rapport aux points xiyi

Contrôles référents :

- L'approximation est une courbe conforme à celle d'un polynôme de degré 3 (continue, avec peu de variations)
- L'approximation a une courbe centrée dans les points xiyi (autant de points en dessus et en dessous de la courbe).
    - Contrôle associé : La qualité de l'approximation se mesure sur l'ensemble de l'intervalle [0 ; 20] et pas uniquement aux points xiyi

Contrôles pour l'instrumentation :

- Si f est une approximation de P alors vérifier que la courbe de f est continue avec peu de changement de variations
- Si f est une approximation de P alors nombre de points xiyi en dessous de la courbe de f = nombre de points xiyi en dessus de la courbe de f

On peut penser que les autres opérateurs et contrôles identifiés plus haut tels que l'évaluation de la position des courbes par rapports aux points x_0y_0 et $x_{20}y_{20}$, l'évaluation perceptive des courbures ont un caractère contingents à la situation : Mathilde cherche à discriminer f1, f2 et f3 (pour répondre à un effet de contrat ?) mais nous trouvons des indices d'une faible conviction en ces arguments et ils sont abandonnées en fin de protocole.

Système de représentation :

Les opérateurs et contrôles portent sur les représentations graphiques.

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet

Les contrôles caractérisant l'approximation portent sur les caractéristiques des représentations graphiques. Les fonctions f1, f2 et f3 sont des approximations équivalentes du point de vue de ces contrôles référents. Mathilde cherche à mettre en œuvre d'autres opérateurs (évaluation de la position des courbes par rapports aux points x_0y_0 et $x_{20}y_{20}$, évaluation perceptive des courbures) pour discriminer les courbes des fonctions f1, f2 et f3. Mais cela n'aboutit à aucune décision. Nous en avons rendu compte par l'absence de contrôle référent permettant de lier ces opérateurs aux propriétés de l'approximation. le conception relève d'une conception courbe.

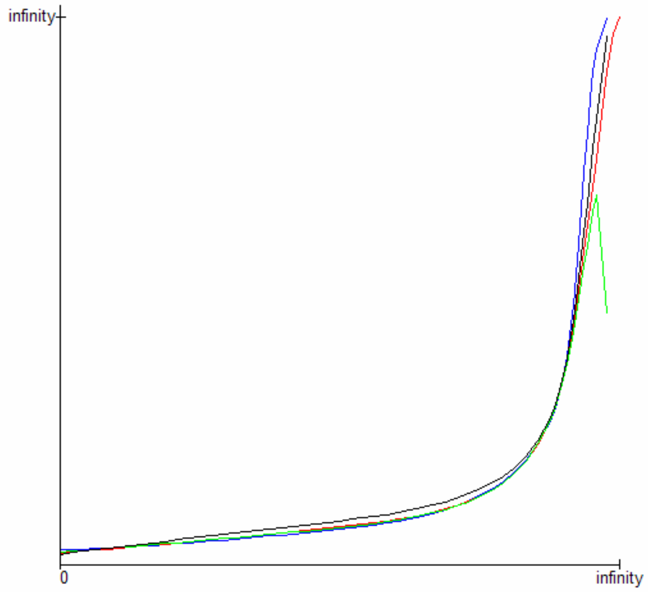
La mobilisation des représentations algébriques seules rend difficile la communication entre les Cécile et Mathilde sur les décisions, car celles-ci sont exprimées en langue naturelle dans des termes qui autorisent différentes interprétations. On le voit pas exemple lors des échanges qui qualifient ce qui est observé à l'écran ou, nous le verrons ci-dessous, lors de la discussion autour du conflit apporté par les représentations dans Maple des courbes de f1, f2 et f3 à l'infini.

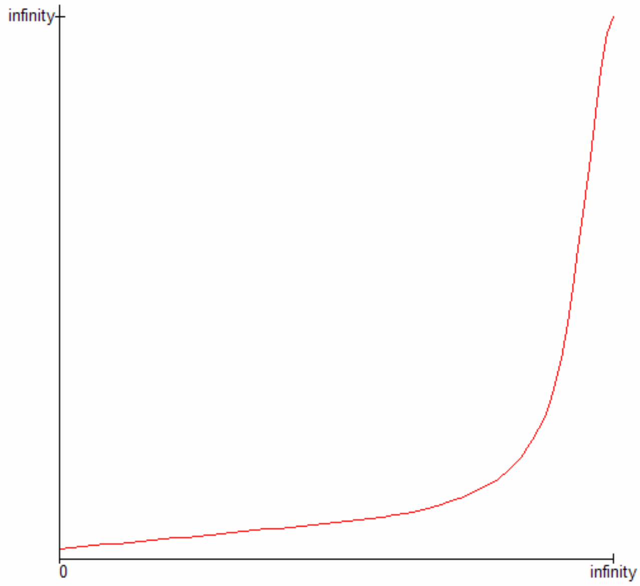
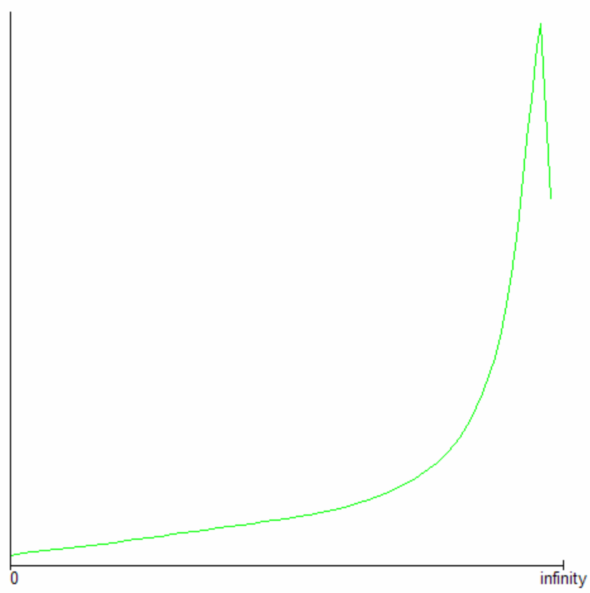
L'expression des contrôles référents et des contrôles pour l'instrumentation est la même. Cela est lié à la nature des contrôles référents : ils portent sur des caractéristiques des représentations graphiques, et les opérateurs peuvent être engagés directement car ils consistent à évaluer visuellement ces caractéristiques sur les représentations.

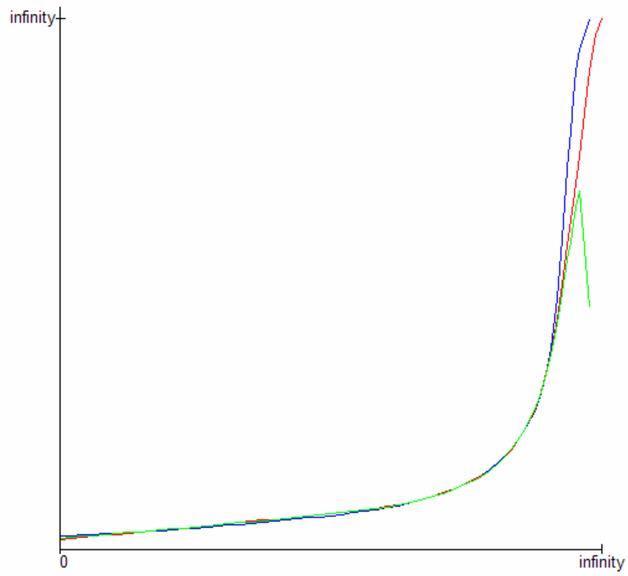
2.1.2 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; +∝[

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

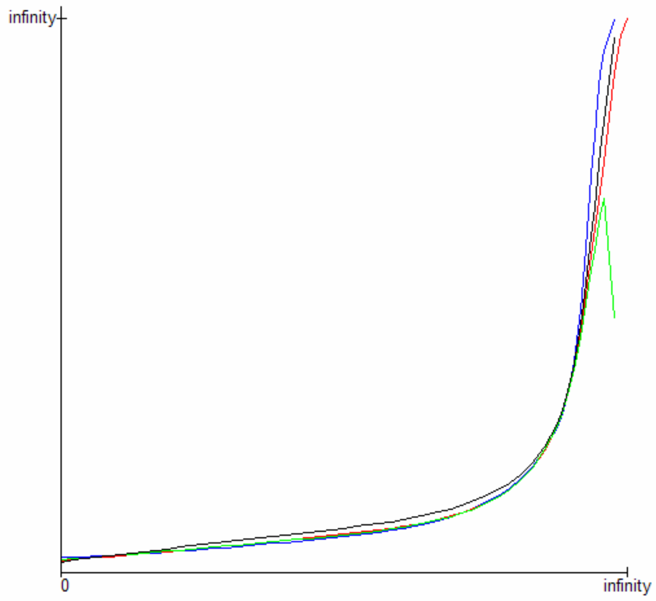
Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation analytique	
L'approximation est un polynôme du degré de P A125, A127, A198 : invalide f1 et f3, valide f2 et f5	***Mathilde :*** *… déjà sur zéro plus l'infini moi j'enlèverais le degré deux et le degré quatre parce que sur un intervalle aussi grand je pense pas que ça puisse coïncider avec un degré trois A125.* ***Cécile :*** *Ca c'est parce que… peut être il y a une vitesse de convergence à l'infini qui est pas pareil A126.* ***Mathilde :*** *Ben un petit peu. Même. Si on pouvait avoir avec un polynôme de degré trois un polynôme de degré quatre ou avec un degré deux un degré trois ça se saurait quoi A127* *(…)* ***Mathilde :*** *Ben déjà pour moi c'est plus facile zéro plus l'infini. Pour zéro plus l'infini, moi je retiendrais la deux et la cinq parce que en deux et en cinq on a des polynômes de degré trois A198.* *(…)*
L'approximation de P à l'infini est définie après vingt A119 : invalide f4	***Mathilde :*** *Déjà la f4 rien que sur zéro vingt c'est pas un polynôme de degré trois. Donc sur zéro plus l'infini encore moins A118* ***Cécile :*** *Ah non ça c'est sûr. Enfin disons qu'elle (parle de f4) est pas définie.* ***Mathilde :*** *Oui d'accord elle est pas définie. A119*
Evaluation des limites à l'infini de f1, f2, f3 et f5 : si le coeff de plus haut degré du polynôme fj est positif (resp. négatif) alors limite = +∝ (resp.	***Mathilde :*** *Et puis en plus j'avais pas regardé, oui les coefficients A130 alors là ça va tendre vers moins l'infini, celui là il va tendre vers plus l'infini, celui là il va tendre vers plus l'infini… et celui là il va tendre vers plus l'infini, ah non c'est pas celui là A131*

négatif). A130, A131	
Si coeff de x3 de P > 0 alors f5 est la meilleure approximation sinon f2 est la meilleure approximation approximation. A135	***Mathilde :*** *On sait pas notre polynôme qu'est-ce qu'il fait. Déjà on pourra pas choisir entre la proposition deux et la proposition cinq A134. Il nous faudrait une donnée supplémentaire A135*
Eléments du système de représentation graphique	
Tracé des courbes de f1, f2, f3 et f5 sur zéro l'infini.	
Il n'existe pas de un critère de cohérence de comportement des courbes sur [0 ; 20] et à l'infini A192 : le choix de l'approximation sur [0 ; 20] ne détermine pas le choix de l'approximation à l'infini A193	***Mathilde :*** *En tout cas moi le choix que je ferais sur zéro plus l'infini, le choix que je ferai sur zéro vingt, ce sera sûrement pas les mêmes A192. Parce que sur zéro plus l'infini ta courbe elle peut très bien être bien partout à partir de vingt. Bien partout c'est à dire bien approchée partout à partir de vingt et pas du tout avant vingt A193*

Traitement de la représentation de f1 seule : Il est souvent fait évocation des courbures à l'infini. On peut penser que ce critère évoque les représentations des fonctions usuelles x^2, x^3 et x^4. Cela est suggéré par la surprise de Mathilde devant la représentation de f1 sur zéro l'infini (la courbe monte tard…A211). Cette perturbation est rééquilibré par le contrôle : si le coefficient de x^2 est petit alors la croissance de la courbe est tardive A213	 ***Mathilde :*** *Fait voir comment il est ? Un polynôme qui a cette tête là A211 ?* ***Cécile :*** *Très écrasé A212…* ***Mathilde :*** *Ouais les coefficients sont riquiqui A213*
Traitement de la représentation f2 seule : la cassure de la courbe est validé car f2 tend vers moins l'infini à l'infini A217	 ***Mathilde :*** *C'est quoi cette affaire ? Ah ben oui il descend vers moins l'infini.* ***Cécile :*** *Hum.* ***Mathilde :*** *D'accord A217*

<table>
<tr>
<td>Traitement des représentations conjointes des courbes de f1, f2 et f3 : perturbation apportée par le fait que les courbes ont sensiblement les même courbure (elles sont presque confondues) A223.
Rééquilibré par l'évocation d'une effet d'échelle A224, A225 : zoomer fait apparaître des différences de comportement.
Effet important de mode de représentation des courbes par Maple à l'infini (voir analyse a priori) A261, A263</td>
<td>

Mathilde : ... ça m'étonne que ce soit pas la même chose quand même. Je suis blasée. Euh que ce soit la même chose A223.
Cécile : Hum
Mathilde : Non que ça paraisse la même chose. Puisque bon quand même vu l'échelle A224. Enfin par exemple là tu vois à mon avis si tu fais un zoom il y a une grosse différence A225
(...)
Mathilde : Ben il va jouer après je pense, parce que tu vois elle, elle va partir comme ça et puis celle là elle va partir comme ça A261.
Cécile : La bleue... Ouais mais tu vois sur Maple ça se voit pas bien A262.
Mathilde : Non mais ça se verra bien nulle part.
Cécile : Attends la noire...
Mathilde : Maple il fait un trait à l'infini aussi.
Cécile : C'est vrai. A263</td>
</tr>
</table>

Traitement des représentations conjointes de f1, f2 f3 et f5 A229, A230 : f5 est jugée différentes mais Mathilde n'a pas d'outil pour qualifier ou traiter cette différence et elle ne sera pas liée à un critère de discrimination de l'approximation. Mathilde invoque un argument qui ne fait pas référence à la connaissance en jeu : valider f2 parce qu'elle apparaît différente des autres	 ***Mathilde :*** *Alors le noir il est carrément différent.* ***Cécile :*** *Le noir c'est quoi ?* ***Mathilde :*** *C'est f5.* ***Cécile :*** *f5 ?* ***Mathilde :*** *Ben il est carrément, carrément différent quoi A229. Jusque là il va bien mais après il est carrément au dessus quoi A230*
Décisions	
Le critère sur le degré valide f2 et f5	*Voir ci-dessus*
Invocation d'un argument d'autorité A258, A259, A266, A285: f2 est la seule fonction parmi f1, f2, f2, f4 et f5 qui tend vers moins l'infini à l'infini donc invalider f2	***Mathilde :*** *Mais moi je pense ce sera la cinq, à choisir entre les deux ce sera plutôt la cinq parce que il n'y en a qu'une seule qui repart vers moins l'infini A258…* ***Cécile :*** *Attends la cinq c'était…ah ouais c'était celle qui…* ***Mathilde :*** *Tu vois ? Ah mince elles sont où ? Là il n'y en a qu'une seule qui repart vers moins l'infini c'est la deux. D'accord ? Toutes les autres elles continuent vers plus l'infini et dans plus l'infini, zéro plus l'infini, on avait dit soit la deux soit la cinq. Donc ça veux dire qu'en fait ce sera la cinq quoi A259* *(…)* ***Mathilde :*** *Si on devait choisir une seule sur zéro vingt on choisirait…*

	Cécile : *On fait le pari qu'il a le coefficient positif !* ***Mathilde :*** *Ouais A266* ***Mathilde :*** *Alors au début on hésitait entre f2 et f5.* ***Cécile : O****uais les deux de degré trois.* ***Mathilde :*** *Les deux de degré trois. Et puis en fait on s'est rendu compte que toutes elles partaient en plus l'infini sauf… en plus l'infini elles partaient toutes vers plus l'infini sauf f2 donc du coup on a supprimé f2 et on a gardé donc f5 A285*

Résumé des éléments issus de l'atomisation

Système de représentation analytique :

- L'approximation est un polynôme du degré de P A125, A127, A198 : invalide f1 et f3, valide f2 et f5
- L'approximation de P à l'infini est définie après vingt A119 : invalide f4
- Evaluation des limites à l'infini de f1, f2, f3 et f5 : si le coeff de plus haut degré du polynôme fj est positif (resp. négatif) alors limite = +∝ (resp. négatif). A130, A131
- Si coeff de x3 de P > 0 alors f5 est la meilleure approximation sinon f2 est la meilleure approximation. A135

Système de représentation graphique :

- Tracé des courbes de f1, f2, f3 et f5 sur zéro l'infini.
- Il n'existe pas de un critère de cohérence de comportement des courbes sur [0 ; 20] et à l'infini A192 : le choix de l'approximation sur [0 ; 20] ne détermine pas le choix de l'approximation à l'infini A193
- Traitement de la représentation de f1 seule :
- Traitement des courbures à l'infini. On peut penser que ce critère évoque les représentations des fonctions usuelles x^2, x^3 et x^4. Cela est suggéré par la surprise de Mathilde devant la représentation de f1 sur zéro l'infini (la courbe monte tard…A211). Cette perturbation est rééquilibrée par le contrôle : si le coefficient de x^2 est petit alors la croissance de la courbe est tardive A213
- Traitement de la représentation f2 seule : la cassure de la courbe est validée car f2 tend vers moins l'infini à l'infini A217
- Traitement des représentations conjointes des courbes de f1, f2 et f3 : perturbation apportée par le fait que les courbes ont sensiblement les mêmes courbures(elles sont

presque confondues) A223. Rééquilibré par l'évocation d'une effet d'échelle A224, A225 : zoomer fait apparaître des différences de comportement. Effet important de mode de représentation des courbes par Maple à l'infini (voir analyse a priori) A261, A263

- Traitement des représentations conjointes de f1, f2 f3 et f5 A229, A230 : f5 est jugée différentes mais Mathilde n'a pas d'outil pour qualifier ou traiter cette différence et elle ne sera pas liée à un critère de discrimination de l'approximation. Mathilde invoque un argument qui ne fait pas référence à la connaissance en jeu : valider f2 parce qu'elle apparaît différente des autres

Décisions :

- Le critère sur le degré valide f2 et f5
- Invocation d'un argument d'autorité A258, A259, A266, A285: f2 est la seule fonction parmi f1, f2, f3, f4 et f5 qui tend vers moins l'infini à l'infini donc invalider f2

Analyse de la cohérence interne des éléments

Opérateurs :

- Tracer les représentations graphiques des fj sur [0 ; $+\infty$[
- Estimation visuelle des « courbures » à l'infini
- Evaluation des limites de f1, f2, f3 et f5
- Evaluation des degrés de f1, f2, f3, f5

Contrôles référents :

- l'approximation est un polynôme du même degré que P et de même limite que P
- l'approximation a la même courbure que P a l'infini.
  - Contrôle associé : les représentations graphiques des fonctions usuelles (x^2, x^3, x^4…). Hypothèse : les fonctions sont classées par type (exp, ln, polynômes de degré n).

Contrôles d'intrumentation :

- Degré(approximation) = degré(P)
- Limite à l'infini de P = limite à l'infini de l'approximation
- Si degré (Polynôme 1) > degré (Polynôme 2) alors courbure (courbe de P1) > courbure (courbe de P2)

- Courbure (approximation) = courbure d'un poly de degré3

Registres :
Les représentations analytiques permettent de valider f2 et f5. Ce contrôle est associé au résultat de l'évaluation visuelle des courbures des représentations graphiques. Cette association résiste aux représentations de Maple qui ne sont pas conformes (les courbure sont sensiblement les mêmes), ce qui suggère un contrôle très stabilisé dans les pratiques de Mathilde.

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet

L'approximation est définie à l'infini par son degré (et le signe de son coefficient de plus haut degré). Elle est également contrôlée au niveau des représentations analytiques par la courbure à l'infini. Mais le contrôle qualifiant la fonction par son degré résiste à la contradiction révélée au niveau des représentations graphiques (même courbure pour des degrés différents). Le critère sur le degré n'est cependant pas abandonné, sans que la contradiction ne soit contrôlée (évocation d'un effet de l'usage de Maple, de la possibilité de faire un zoom). La conception fait le choix de f2 ou de f5. L'absence d'information sur le signe du coefficient de plus haut degré de P permettrait de trancher entre f2 et f5. Cette décision relèverait d'une conception analytique.

2.2 Le cas de Cécile

2.2.1 Absence de la cohérence interne des éléments

L'analyse du protocole de Cécile n'a pas mené à l'identification de contrôles et d'opérateurs. En effet, nous n'avons pas pu identifier de cohérence interne dans l'ensemble des éléments issus de l'agrégation.
La liste des éléments donnée ci-dessus ne rend compte que d'une partie du discours de Cécile décrivant les représentations graphiques. Ces descriptions des phénomènes graphiques observés dans Maple occupent une grande partie de la résolution et ne mènent pas à la construction de critères de choix d'une meilleure approximation, ni à une décision. La grille d'analyse que nous avons adoptée pour les précédents protocoles nous donne des indices sur les raisons de cette difficulté :

- le niveau de description des phénomènes observés autorise des divergences d'interprétation sur une même représentation

- les critères ne sont pas liés à l'approximation par des contrôles référents et ainsi ne permettent pas le choix, et/ou la stabilisation des phénomènes identifiés
- le mode d'expression des descriptions rend difficile l'instrumentalisation (construction de contrôles d'instrumentation).

Nous développons ces trois points ci-dessous.

Eléments issus de l'atomisation

- Evaluation visuelle de la proximité aux points : valide f3 (f4 avait été invalidée, il y a un critère implicite possible sur l'allure d'un polynôme)
- $\forall$ i, le point (xi, f (xi)) (où f est l'approximation) doit appartenir au disque de centre xiyi et de rayon 0,01×yi : valide f4 ; puis invalidé par Mathilde (qui modifie le critère en : être centré dans la zone définie par la courbe de f4), Cécile ne reviendra plus sur ce critère.
- Tracé des courbes fj et des points xiyi conjointement
- Evaluation du nombre de points xiyi en dessus et en dessous des courbes
- La courbe de f5 passe par x_0y_0, x_6y_6, $x_{13}y_{13}$, $x_{20}y_{20}$
- Evaluation graphique de yi ± 0,01×yi
- Evaluer fj(0) et des $y_0 \pm 0{,}01 \times y_0$
- Si fj est une bonne approximation alors fj(0) < yi + 0,01×yi
- Evaluation des degrés des fj
- Degré (approximation) < degré (P) : invalide f3

L'expression des descriptions des phénomènes observés autorise des divergences d'interprétation sur une même représentation

Voici différents exemples d'échanges verbaux montrant la divergence des interprétations de ce qui est observé dans le registre graphique par Mathilde et Cécile. On remarque que Mathilde et Cécile qualifient ce qu'elles observent à l'écran sans ne parvenir à un échange et à partager leurs critères.

- **Mathilde :** Pour moi c'est pareil. Je ne vois pas de différence en fait A243.
  Cécile : Ben moi je vois plein de choses de différentes, tu cherches les différences justement A244.
- **Mathilde :** J'aime pas comment elle part la verte. A247
  Cécile : J'aime bien la verte mais pourtant j'aime pas les degrés quatre A248.
  Mathilde : Ben moi la verte j'aime pas comment elle part A249.

Cécile : C'est très contradictoire comme avis A250. T'aime pas comment elle part A251… ouais c'est celle qui est la plus éloignée du point zéro A252.

Mathilde : Et puis même la courbure elle est pas la même là. Par rapport à là A253.

Cécile : C'est quif quif A254.

- **Mathilde :** … ça m'étonne que ce soit pas la même chose quand même. Je suis blasée. Euh que ce soit la même chose A223.

  Cécile : Hum

  Mathilde : Non que ça paraisse la même chose. Puisque bon quand même vu l'échelle A224. Enfin par exemple là tu vois à mon avis si tu fais un zoom il y a une grosse différence A225.

  Cécile : Ouais. Mais moi je pensais que ça partirait vachement différemment A226.

  Mathilde : Ben ils partent vachement différemment A227.

  Cécile : Ouais mais quand même ils sont proches A228.

Cela conduit à une difficulté à construire des contrôles d'instrumentation pour traiter ce qui est observé.

L'expression des descriptions rend difficile la construction de contrôles d'instrumentation

Voici les exemples d'expressions verbales décrivant les représentations graphiques :

- le degré deux je le trouve pas mal A21 : Il n'y a pas d'opérateur disponible pour évaluer « pas mal » (portant sur la représentation de f2)
- une route en zig zag à dix pourcent A72 : Il n'y a pas d'opérateur disponible permettant de qualifier la fonctionnalité de la représentation de f4 pour le choix de l'approximation.

- **Mathilde :** Alors le noir il est carrément différent.

  Cécile : Le noir c'est quoi ?

  Mathilde : C'est f5.

  Cécile : f5 ?

  Mathilde : Ben il est carrément, carrément différent quoi A229. Jusque là il va bien mais après il est carrément au dessus quoi A230.

  Cécile : Ouais il se démarque toujours des autres A231.

  Mathilde : Moi je parie que ça va être le noir.

  C rit.

  Mathilde : Ouais parce qu'il est carrément différent. C'est la petite feinte A232.

  Cécile : Ouais ils sont tous pareils A233.

Il y a une prise d'information sur les représentations graphiques. L'appréciation de cette information est perceptive, sans instrumentation analytique. Cette approche est empirique. Elle implique des contrôles sensoriels et non formels, dont la langue naturelle sert à rendre compte en invoquant le sens commun.

Les critères ne sont pas liés à l'approximation par des contrôles référents et ainsi ne permettent pas le choix, l'instrumentation ou la stabilisation d'une stratégie

Indice d'absence de contrôle référent sur l'approximation

Au niveau du traitement des représentations graphiques :

- *Enfin il est moins bien… Il est pas pareil que les autres* : Cécile parle de f5
- Evaluation du nombre de points xiyi en dessus et en dessous des courbes. Ce critère n'est pas lié à la qualité d'approximation. Il ne sera plus pris en compte dans la suite du protocole.
- Passer par les points xiyi est-il un bon critère d'approximation ? Cécile n'a pas de contrôle qui permette d'en juger. Son comportement n'est pas stable vis-à-vis de ce critère qui est alternativement choisi en faveur ou en défaveur du choix de l'approximation
  - En plus elles passent par aucun des points, mais ça encore c'est pas trop une tare A148 **(…)**
  - Elle a quoi de différentA152… Ah celle ci la f5 elle passe par des points… Mais c'est pas forcément bien…
  - Ca dépend par quoi tu entends approxime le mieux. Si pour toi approche c'est passe par le plus grand nombre de points donnés celle là gagne A56.
  - Ouais mais déjà il sont pas… je les trouve pas… vu que les trois autres elles passent déjà pas par les points, même si elles sont vraiment proches des points A84.

Au niveau du traitement des représentations analytiques :

Degré (approximation) < degré (P) : peu de confiance en ce critère, il est abandonné.

- Je sais pas ça paraît pas logique de chercher un polynôme de degré plus grand A41
- Moi ça m'embête d'approcher du degré trois avec du degré quatre A184. **Mathilde :** Mais ça t'embête pas d'approcher du degré trois avec du degré deux. **Cécile :** Non.**Mathilde :** Et pourquoi ?**Cécile :** Je sais pas A185.

Elles manquent d'outils pour différencier les représentations graphiques :

- **Mathilde :** Moi je suis d'accord de la supprimer la proposition trois si on est d'accord toutes les deux il n'y a pas de soucis A186. **Cécile :** Ouais mais on a pas vraiment de raison valable. **Mathilde :** Non mais comment tu veux départager des courbes qui sont presque identiques sur zéro vingt A187

Nous avons vu la difficulté à expliciter des critères de traitement du registre graphique suffisamment précis pour être partagés. Par ailleurs ces critères (comme la courbure, la proximité aux points) sont peu contrôlés (le milieu est celui de phénomènes graphiques non reliés à des connaissances instrumentales ou de contrôles qui peuvent traiter ce qui est observé). Cela s'observe bien dans la gestion du conflit que semble créer chez Cécile l'observation de représentations graphiques « proches » (sur [0 ; 20] et à l'infini) de polynômes de degrés différents :

- La perturbation vient du contrôle « si deux polynômes ont des degrés différents alors les représentations graphiques sont visuellement distantes (A138) », ce qui n'est visuellement pas le cas dans la représentation dans Maple (les courbes sont proches). Mathilde invoque l'effet d'échelle et le fait que Maple ne donne pas bien à voir la distance entre les fonctions. Cependant Cécile reste peu convaincue.

Pour sortir de ces difficulté, Cécile fait appel à des d'arguments « d'autorité » :
Exemple en fin de protocole :

- **Cécile :** J'aime bien la verte mais… C'est justement parce qu'elle se démarque des autres A273.

Au niveau des propriétés définitoires de l'approximation :

- Ca veut dire quoi pour toi approcher A25,
- Ca dépend par quoi tu entends approxime le mieux. Si pour toi approche c'est passe par le plus grand nombre de points donnés celle là gagne A56.
- Non mais je suis d'accord elle est pas belle mais elle te donne un peu une idée de … Elle raccorde un peu mieux A98. Je sais pas moi je vois mieux que quand je vois que les points dispersés. (parle de la représentation graphique de f4).

Au niveau de l'absence de contrôle d'instrumentation conduisant à l'abandon d'un critère référent en construction :

- $\forall$i, le point (xi, Approximation(xi)) appartient au disque ((xiyi), 0,01×yi)) : le passage par les points xiyi garantit une proximité aux vraies valeurs P(xi) (qui appartiennent à une boule autour du points xiyi, au centre du tube) ; pour les autres fonctions cette proximité n'est pas garantie, abandon (en A93) de ce critère car difficulté à l'instrumenter :
    - **Cécile :** Ben moi je prends l'approximation des physiciens quoi A63. C'est quoi pour toi approcher A64 ? (…) **Cécile :** Ouais tu encadres… Tu te donnes une marge d'erreur par rapport à la vérité A66

2.3 Conclusion : rôles et relations contrôles / opérateurs

Il y a une difficulté au terme de l'analyse à qualifier la conception de Cécile, en particulier parce qu'une large part des composants reste implicite : le discours en rend mal compte ; l'action est très empirique et est inscrite dans un rapport perceptif aux représentations graphiques, son accompagnement verbal est allusif.

Le rapport perceptif aux représentations graphiques évoque la mobilisation d'une conception de sens commun de la proximité qui ne parvient pas à être opérationnelle (par construction des contrôles d'instrumentation pertinents). Les courbes tracées par Maple (très proches) ne permettent pas à la conception d'être opérationnelle, elles exigent des constructions que ces élèves ne parviennent pas à réaliser. Cela se manifeste par une instabilité des décisions. Cette instabilité est signifiée par l'absence de contrôle référent sur l'approximation autre qu'un sens commun de la proximité perceptive et, ainsi, par l'absence de contrôle d'instrumentation.

3. Olivier et Rémi

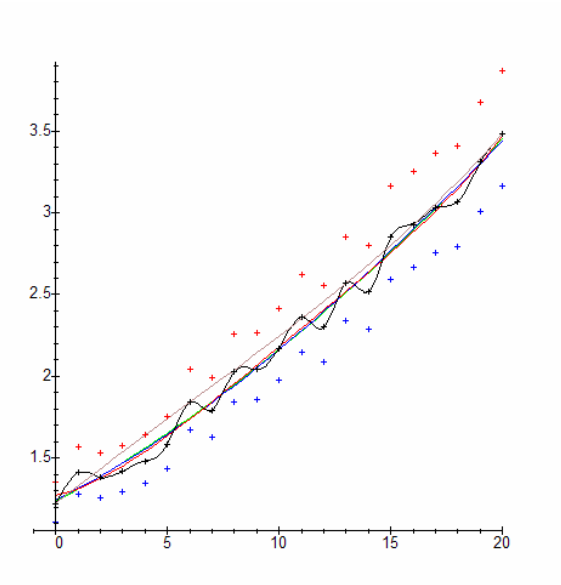
Olivier et Rémi sont deux étudiants d'Ensimag 2ième année.

3.1 Olivier

3.1.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20]:

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation graphique	
La courbe de l'approximation est perceptivement proche des points xiyi : A1, A62, A63, A99-A100 Contrôlé par : les ordonnées y des points de la courbe de l'approximation vérifient yimin = yi – 10%=ymin < y < yimax = yi+10%	***[OLIVIER :** Bon ben voilà on va toutes les tracer déjà pour voir à l'œil comment ça marche. A1]* *(...)* ***[OLIVIER :** Bon ben il n'y a pas de croix jaune. En fait elle doit être sur l'axe, et pas de chance l'axe il est tracé après la croix jaune. Donc il est en plein dessus. Sinon on fait les dix pourcent ça doit pas être trop compliqué. Ouais elle doit être là-dessus en fait. A62 Donc cela ne change pas grand-chose en fait. Pas de défaut. A63 Après c'est totalement arbitraire selon moi. A64]* *(...)* *[**RÉMI :** Au début on l'avait pas éliminé le…* ***OLIVIER :** Si parce qu'on avait fait avec les min et max.* ***RÉMI :** Ah ouais donc il est dedans en fait.* ***OLIVIER :** Donc il est aussi valide que l'autre. A99 Pas plus parce que l'autre passe aussi presque par les points. Il passe par plus de points si on veut. Mais ça compte pas de toute façon. A100]*
Construire l'ensemble des points (xi, yimin) et et (xi, yimax), dans la suite cet ensemble est	***[OLIVIER :** Voilà, et puis ce qu'on peut tracer aussi c'est les marges de dix pourcent. Genre les xi*

appelé « tube » A6 Nécessite l'évaluation des yimin et yimax : de A7 à A20	*plus dix pourcent et moins dix pourcent. A6]* *Les courbes des fonctions fj, les points xiyi et les points (xi, yimin) et (xi, yimax) définissant le « tube » :*  *(…)* *de A7 à A20 : échange sur la mise en œuvre du tracé des points (xi, ximin) et (yi, yimin) dans Maple.*
La courbe de l'approximation est centrée dans le « tube » A33, A43, A99, A160-A163 Contrôlé par l'évaluation de f(j(xi) – yimin) et (fj(xi)-yimax) : A103, A104, A105, A106, A107	***[OLIVIER :** globalement ouais. Alors celle là est-ce que en gros… Bon celle là on oublie parce qu'elle est pas vraiment centrée (parle de f5) A33]* *(…)* ***[OLIVIER :** Bon on va dire que c'est ça alors. Donc tu vois il est pas bien ce polynôme car on sait qu'il sort donc on sait qu'il est pas bon. Alors que les autres ils sont justes. (parle de f5) A43]* *(…)* ***RÉMI :** Au début on l'avait pas éliminé le…* ***OLIVIER :** Si parce qu'on avait fait avec les min et max.* ***RÉMI :** Ah ouais donc il est dedans en fait.* ***OLIVIER :** Donc il est aussi valide que l'autre. (parle de f5) A99* *(…)*

	[RÉMI : *Ca se trouve il passe au dessus quand même. Il faudrait évaluer là et voir ce que ça fait. Je sais pas comment on fait.* ***OLIVIER :*** *Facile je pense. Tu tape f je sais pas combien, c'est cinq.* *Bruits de clavier.* ***RÉMI :*** *Comment il fait pour additionner f5 et un vecteur ?* ***OLIVIER :*** *Ah c'est positif donc elle passe au dessus. A103 Mais zéros vingt cinq cela me parait beaucoup. A104 On va afficher les deux ce sera vraiment plus sûr. A104 Elle aussi elle passe au dessus. A105* ***RÉMI :*** *De tant que ça ? T'es sûr que c'est le cinquième point ?* ***OLIVIER :*** *Non je suis pas sûr c'est peut être le troisième. Non c'est le quatrième.* ***RÉMI :*** *Non c'est le cinquième le premier il est sur, ah mais ça commence à zéro.* ***OLIVIER :*** *Ce serait sympa que ce soit indéxé pareil. Enfin non… Ah alors cinq…* ***RÉMI :*** *Ah mais c'est le max qu'il faut voir, c'est xi max. voilà.* ***OLIVIER :*** *Donc au point cinq…* ***RÉMI :*** *Là t'es au point six.* ***OLIVIER :*** *Non cinq parce que c'est indexé sur un. Mais l'abscisse c'est cinq.* ***RÉMI :*** *Mais t'es au point six quand même.* ***OLIVIER :*** *Ouais mais on connaît pas les numéros des points quand on regarde la courbe. Mais bon de toute façon c'est le quatre qu'on veut, oui c'est celui qui est en quatre. Ah pas de chance il est au-dessous.* ***RÉMI :*** *Et en cinq il est au-dessous aussi ?* ***OLIVIER :*** *Je crois… Ah ben ouais A106 on peut rien dire. A107]*

	(…) ***[OLIVIER :** Voilà toutes les autres sont correctes, acceptables.* ***NATHALIE** : C'est-à-dire f1, f2, f3?* ***OLIVIER :** et f5 oui. A160* ***RÉMI :** On avait éliminé laquelle tout à l'heure.* ***OLIVIER :** f5 parce qu'elle passait au dessus là mais finalement elle passe plus au dessus. A161* ***NATHALIE** : Donc f1, f2, f3 et f5 toutes aussi correctes sur zéro vingt. A162* ***OLIVIER :** Avec f5 qui est à la limite de pas être correcteA163]*
La courbe de l'approximation est visuellement conforme à celle d'un polynôme de degré 3 : continue, au plus deux changements de variations A51, A115-A117, A124-125	***OLIVIER :** Pas quatre parce que c'est pas crédible pour un polynôme de degré trois la forme. (parle de f4) A51* ***(…)*** ***[RÉMI :** Quand on a un truc comme ça, on est sûr que le polynôme il passait pas par… vu la forme d'un degré trois on est sûr que le polynôme passait pas par là. A115* ***OLIVIER :** Ca dépend. Si ouais je pense. De toute façon cela ne nous aide pas beaucoup parce qu'on regarde sur des degré trois donc… donc si ils sont bon sur ces points ils seront bons là aussi. A116 C'est le même raisonnement sauf que ça se fait tout seul. Par contre cela peut faire un argument valable pour éliminer l'autre. La je sais pas combien… quatre.A117]* *(…)* ***OLIVIER :** Ouais il faut choisir les points quoi. A123 Je pense qu'on peut enlever la noire à vue d'œil sur cet argument. (parle de f4) A124 Par là quoi, parce que je vois mal un truc de degré trois quoi passerait pas là . A125*

Eléments du système de représentation analytique	
Référence à l'opérateur $\sum$ $[f(xi)-yi]^2$, mais déclaré non opératoire car les yi sont entachés d'erreurs. A35, A36, A52	***OLIVIER :*** *Ben on peut essayer. On fait somme des machin au carré là, pour voir l'erreur. A35 Ah non puisqu'il y a dix pourcent d'erreur. A36* *(...)* *[**OLIVIER :** Pas quatre parce que c'est pas crédible pour un polynôme de degré trois la forme. (parle de f4) A51 Il y a moins de chance disons. Peut être que l'erreur sera plus faible mais moi je pense qu'on peut pas savoir. A52]*
Décisions	
Ces critères sont reconnus comme non discriminants sur f1, f2, f3 et f5 car toutes les courbes appartiennent au tube (A64, A160). Ils permettent l'élimination de f4 : n'a pas la forme d'un polynôme de degré trois (non lisse)	*[**OLIVIER :** Bon ben il n'y a pas de croix jaune. En fait elle doit être sur l'axe, et pas de chance l'axe il est tracé après la croix jaune. Donc il est en plein dessus. Sinon on fait les dix pourcent ça doit pas être trop compliqué. Ouais elle doit être là-dessus en fait. A62 Donc cela ne change pas grand-chose en fait. Pas de défaut. A63 Après c'est totalement arbitraire selon moi. A64]*
Eléments du système de représentation graphique	
Réduction du tube A119, A140, A149 Contrôlé par : Si l'erreur au total est nulle les valeurs extrêmes yi sont peu probables A197	*[**OLIVIER :** Ca dépend. Si ouais je pense. De toute façon cela ne nous aide pas beaucoup parce qu'on regarde sur des degré trois donc… donc si ils sont bon sur ces points ils seront bons là aussi. A116 C'est le même raisonnement sauf que ça se fait tout seul. Par contre cela peut faire un argument valable pour éliminer l'autre. La je sais pas combien… quatre.A117 Parce qu'à priori elle a rien de mal celle là. On a très bien le droit d'approximer par cela si on veut. Sauf par là peut être. Pour arriver à coller une courbe qui passe… c'est fou ça.* ***RÉMI :*** *Quoi.* ***OLIVIER :*** *Qui passe là, tac tac tac tac tac et qui coupe ça. Pareil au dessus. Non au dessus ça a pas*

	l'air. A118 On peut essayer de virer les points… A119] *(…)* ***OLIVIER :** Il faudrait arriver à prouver que c'est pas possible de mettre deux polynômes, tous les deux dans la bande qu'on a définie qui encadre l'autre. Bon alors ça va. Il faut pas juste prouver qu'il y en a un qui marche pas. A140* *(…)* ***[OLIVIER :** Justement c'est pas tous. Pour chaque… tu auras pas un minorant. Ce sera pas un polynôme le minorant, si tu veux tracer l'enveloppe… En fait si tu as un point… genre la noire là… pour faire ça il faut à tout prix passer au-dessous et après repasser là. Bon la noire à mon avis elle est cramée mais bon. Imaginons t'en a une genre la grise, tu passes là tu longe là et puis tu passes un peu au-dessus d'elle. Il se peut qui ait la bleue qui repasse au dessus des deux donc ce serait un autre max pour la bleue. A149]* *(…)* ***[OLIVIER :** Oui donc ça va la faire descendre de plus en plus, ça tend vers le négatif et ça a pas l'air d'avoir cette tête. A196 En utilisant le principe que l'erreur moyenne elle est a peu prêt nulle. A197]*
Identification d'une forme du tube A143, A166, A198 : part vers le haut ; visualisation d'un point d'inflexion A144	***[OLIVIER :** Alors moi je dirais qu'on va essayer de se dire que l'erreur moyenne est nulle. Donc qu'en regardant de bien loin ça a la même forme.* ***RÉMI :** Je ne comprends pas.* ***OLIVIER :** Si tu regardes de loin tu fais une moyenne des erreurs, ça a à peu près la forme que ça a donc…* ***RÉMI :** Du bleu tu veux dire.* ***OLIVIER :** Tout, le tube. A143 On est tenté de voir un point d'inflexion par là, un truc qui remonte.*

	A144] *(...)* ***RÉMI :** Il faut se mettre de loin et…* ***OLIVIER** (il s'adresse à Nathalie)**:** L'argument est purement intuitif et visuel.* ***RÉMI :** Au vu de la forme, de l'espèce de tube qu'on a…* ***NATHALIE** : Alors c'est la forme de f2 ou la forme de f5 que vous préférez ?* ***RÉMI :** La bleue c'est donc f2. C'est par rapport à la forme du bandeau défini par le min et le max. mais Bon… A166*
Eléments du système de représentation analytique	
Recherche des points d'inflexion de f2 et f5 A171, A172, A176 : f5 a un point d'inflexion dans le tube (en x = 6) A179, A180	*[**RÉMI :** Le point d'inflexion sur un polynôme de degré trois il est où ?* ***OLIVIER :** Il est au centre là. Il sera peut être pas aussi marqué. A177 Alors…* *Bruits de clavier. A178* ***OLIVIER :** Six ! A179 C'est cool. A180]*
Décisions	
Si f5 a un point d'inflexion dans le tube et la forme du tube fait visuellement apparaître un point d'inflexion alors valider f5. Invalidé par : grande dépendance de la forme du tube à la répartition de l'erreur sur les yi, A145, A199	*[**OLIVIER :** Tout, le tube. A143 On est tenté de voir un point d'inflexion par là, un truc qui remonte. A144 Mais c'est juste une tentation parce qu'il suffit de redescendre celui là et c'est bon, on a autant de chance de pouvoir redescendre celui là que de remonter celui là. A145]* *(...)* ***OLIVIER :** Voilà, bien qu'elle reste dans la bande, mais la forme il faut pas la négliger je pense. A198 Sauf si l'erreur a été faite exprès. A199*
f2 et f5 sont implicitement validé, cela semble lier à la recherche simultanée d'une approximation sur [0 ; 20] et à l'infini. Olivier ne tranche pas entre f2 et f5	

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation graphique :

- La courbe de l'approximation est perceptivement proche des points xiyi : A1, A62, A63, A99-A100
  - Contrôlé par : les ordonnées y des points de la courbe de l'approximation vérifient yimin = yi – 10%=ymin < y < yimax = yi+10%
- Construire l'ensemble des points (xi, yimin) et et (xi, yimax), dans la suite cet ensemble est appelé « tube » A6
  - Nécessite l'évaluation des yimin et yimax : de A7 à A20
- La courbe de l'approximation est centrée dans le « tube » A33, A43, A99, A160-A163
  - Contrôlé par l'évaluation de f(j(xi) – yimin) et (fj(xi)-yimax) : A103, A104, A105, A106, A107
- La courbe de l'approximation est visuellement conforme à celle d'un polynôme de degré 3 : continue, au plus deux changements de variations A51, A115-A117, A124-125
- Identification, perçue visuellement, d'une forme du tube A143, A166, A198 : part vers le haut ; visualisation d'un point d'inflexion A144

Réduction du tube A119, A140, A149

- Contrôlé par : Si l'erreur au total est nulle les valeurs extrêmes yi sont peu probables A197

Système de représentation analytique :

- Référence à l'opérateur $\sum$ $[f(xi)-yi]^2$, mais déclaré non opératoire car les yi sont entachés d'erreurs. A35, A36, A52
- Recherche des points d'inflexion de f2 et f5 A171, A172, A176 : f5 a un point d'inflexion dans le tube (en x = 6) A179, A180

Décisions :

- Les critères sur l'appartenance au tube et la forme d'un polynôme de degré 3 sont reconnus comme non discriminants sur f1, f2, f3 et f5 car toutes les courbes appartiennent au tube (A64, A160). L'un des critères élimine f4 qui n'a pas la forme d'un polynôme de degré trois (nombre de variations trop important)
- Si f5 a un point d'inflexion dans le tube et la forme du tube fait visuellement apparaître un point d'inflexion alors valider f5.

    - Invalidé par : grande dépendance de la forme du tube à la répartition de l'erreur sur les yi, A145, A199
- f2 et f5 sont implicitement validé, cela semble lier à la recherche simultanée d'une approximation sur [0 ; 20] et à l'infini.
- Olivier ne tranche pas entre f2 et f5

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents

- L'approximation a une courbe conforme à celle d'un polynôme de degré 3
- L'approximation a une courbe proche des points xiyi, cette proximité est définie par l'erreur de 10% sur les valeurs yi

Contrôles pour l'instrumentation

- Si la courbe de l'approximation est conforme à celle d'un polynôme de degré 3 alors cette courbe est continue et comporte au plus deux changements de variations
- Si la courbe de l'approximation a une proximité acceptable aux xiyi alors cette courbe appartient à la zone graphique définie par les points (xi, yi+10%=yimax) et (xi, yi-10%=yimin).
- si f est une approximation de P alors f(xi) < (yi+10%) et fj(xi) > (yi – 10%), pour tout i.

Opérateurs

- Construire les points (xi, yimax) et (xi, yimin)
- Evaluer visuellement de la position des courbes dans la zone définie par les points yimax-yimin
- Evaluer fj(xi) – (yi+10%) ou de fj(xi) – (yi – 10%) lorsque l'évaluation visuellement est ambiguë
- Evaluer visuellement les variations des courbes des fj

Systèmes de représentation

- Graphique et analytique.

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Les contrôles de proximités aux points et sur la conformité de la courbe de l'approximation à celle d'un polynôme de degré 3 se rapportent à des propriétés des représentations graphiques.

Lorsque l'évaluation visuelle est ambiguë, l'évaluation de la proximité aux points yi est instrumentée dans le registre analytique par l'évaluation de certaines valeurs yi – fj(xi). Ils se révèlent non discriminants sur f1, f2, f3 et f5 parce que les courbes sont trop proches. Mais ils permettent l'élimination de f4, dont l'allure de la courbe est non conforme à celle d'un polynôme de degré 3.

Ainsi les représentations graphiques sont le lieu des décisions et de l'expression des contrôles référents. Ceux-ci ne permettent pas de décision sur le choix de f1, f2, f3 et f5. Ces éléments caractérisent une conception courbe.

Olivier cherche à modifier les éléments de la conception afin de les rendre plus discriminants sur les fonctions f1, f2, f3 et f5.

Tout d'abord, un contrôle référent sur l'erreur se construit : les valeurs de P(xi) sont centrée dans le tube. Ce contrôle référent autorise de réduire l'amplitude du « tube » défini par les points (xi, yimax) et (xi, yimin). Mais ne réduction du tube ne parvient pas à s'instrumenter autrement qu'en « regardant de loin ».

Ensuite, un autre contrôle apparaît : si le tube comporte un point d'inflexion (donné à voir visuellement (« *Olivier : on est tenté de voir un point d'inflexion par là* ») alors l'approximation possède un point d'inflexion. Or, le calcul dans sur la représentation analytique de f5 permet d'identifier que f5 possède un point d'inflexion en x = 6. Mais ce contrôle est rapidement abandonné. Il est invalidé par la grande dépendance de la forme du tube aux erreurs qui entache yi : une faible variation des points xiyi modifie « l'allure » du tube ». L'abandon des contrôles sur la forme du tube et son amplitude nous a conduit à ne pas introduire à ne pas les prendre en compte dans l'ensemble contrôles référents ou d'instrumentation. Cependant, nous pouvons dire que parce qu'ils portent sur des attributs des représentations graphiques, ils ne viennent pas déstabiliser la conception courbe à l'œuvre dans la première partie de la résolution.

3.1.2 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; +∝[:

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	Contextes du protocole
Eléments du système de représentation analytique	
Degré de l'approximation = degré de P A74, A81, A83, A86, A163 Associé à l'idée de pente et d'asymptote A163	*[**RÉMI :** De toute façon à l'infini c'est pas un degré deux…* ***OLIVIER :** Ca c'est sûr c'est pas un degré pair. A74]* *(…)* *[**RÉMI :** On sait qu'il existe un polynôme là dedans de degré trois dans l'intervalle. A79* ***OLIVIER :** Alors sur zéro plus l'infini.* ***RÉMI :** Alors déjà pas le degré deux parce qu'il va exploser en plus l'infini. A80* ***OLIVIER :** Pas le degré quatre. A81* ***RÉMI :** Localement… Attends est-ce qu'une degré quatre il explose forcément ?* ***OLIVIER :** Ben pareil.* ***RÉMI :** Oui pareil. A82* ***OLIVIER :** Donc ils sont pas solvables parce qu'en l'infini il y aura forcément un problème, ça marchera pas.* ***RÉMI :** Entre le degré deux et le degré quatre ?* ***OLIVIER :** Ouais donc c'est sur pas un et pas trois. Même pas besoin de les regarder. A83]* *(…)* *[**RÉMI :** Elle est définie plus loin ?* ***NATHALIE** : Ce que fait Maple, il prolonge le dernier… La dernière expression.* ***RÉMI :** Ouais donc on suppose qu'elle est pas définie quoi si c'est Maple.*

	***OLIVIER :** Ouais c'est Maple qui prolonge ou … La question elle porte sur les quatre aussi ?* ***NATHALIE** : Ce que trace Maple… f4 il est défini sur exactement comme vous l'avez sur la feuille. Ce que vous voyez c'est que Maple continue à tracer la dernière fonction.* ***RÉMI :** C'est pas définie donc…* ***OLIVIER :** Au moins on est sur que c'est pas quatre. A86 Il reste plus que deux et cinq. A87]* *(…)* ***[OLIVIER :** f4 est pas définie. A163 Les deux polynômes de degré deux ils sont de degré deux donc… ils sont pas du même degré.* ***RÉMI :** Degré deux et degré quatre. C'est pas du même degré donc ça va exploser dans un sens ou dans l'autre.* ***OLIVIER :** Ce sera pas la même pente en fait, la même asymptote quoi A164]*
Eléments du système de représentation graphique	
Critère de cohérence entre la forme du tube et le comportement à l'infini A111: la visualisation d'un point d'inflexion dans le tube permet de penser que P tend vers moins l'infini en plus l'infini, ce qui valide f5 A167-A172, A186-188	***[RÉMI :** Donc en fait là on est revenu sur zéro vingt. A110* ***OLIVIER :** C'est un peu les deux en même temps car il faut savoir ce qu'elle fait entre zéro et vingt pour savoir où elle va partir. A111]* *(…)* ***OLIVIER :** C'est bizarre ça veut dire qu'elle va partir vers le bas au final…* ***RÉMI :** Qui ça ?* ***OLIVIER :** f2.* ***RÉMI :** Non.* ***OLIVIER :** Ben si à l'infini elle va partir vers le bas* ***RÉMI :** Elle va faire ça. A167* ***OLIVIER :** Ben non elle part vers le bas à l'infini. A168*

	RÉMI : *Ah c'est peut être trompeur. C'est possible hein. A169* ***OLIVIER :*** *Finalement je suis pour f5. A170* ***RÉMI :*** *Pourquoi ?* ***OLIVIER :*** *Ah non pas de raison. Ben je sais pas. Attends A171 ça se trouve f5 a déjà un point d'inflexion là. Non ? A172* *(…)* ***[OLIVIER :*** *En fait si on trouve le point d'inflexion dans l'intervalle, genre en zéro par exemple, qu'elle est en train de remonter… on aura une idée. On pourrait faire l'une ou l'autre quoi. Ca se trouve il y en a une qui est incohérente. A176]* *(…)* ***OLIVIER :*** *On va le refaire vite fait… C'est les mêmes solutions ça me rassure. A186 Bon ben c'est des solutions complexes. Ca veut dire quoi ?* ***RÉMI :*** *Ca veut dire que la dérivée…* ***OLIVIER :*** *Ne s'annule jamais.* ***RÉMI :*** *Donc que c'est toujours strictement positif.* ***OLIVIER :*** *Donc il y a pas de baisse vu qu'il y a un point d'inflexion qui est en combien… En un virgule sept… non en six. Il fini en l'infini.* ***RÉMI :*** *Donc ça fait un truc comme ça quoi. A187* ***OLIVIER :*** *Ouais moi je vote pour f5. A188*
Décisions	
Le critère sur le degré invalide f1, f3 et valide f2 ou f5, A89 F4 est invalidée car n'est pas définit après 20.	***[OLIVIER :*** *Au moins on est sur que c'est pas quatre. A86 Il reste plus que deux et cinq. A87* ***RÉMI :*** *le degré trois et le degré trois. A88* ***OLIVIER :*** *Entre les deux… Je sens qu'il y en a un qui est pas valide entre zéro vingt. A89]*
Le critère de cohérence est invalidé car la	***RÉMI :*** *l'autre il est comment, tu as regardé ?*

courbe de f2 suit le tube sur [0 ; 20] bein qu'elle tende vers moins l'infini en plus l'infini, A189-A191	***OLIVIER :*** *l'autre il part vers le bas déjà et il faut demi tour en deux cent soixante et onze. A189* ***RÉMI :*** *Pas sûr. Pourquoi il repartirait vers le bas ?* ***OLIVIER :*** *Parce qu'à l'infini il est vers le bas. A190* ***RÉMI :*** *Ah ouais. Donc voilà.* ***OLIVIER :*** *Donc les deux sont valides. A191*
Olivier déclare ne pas pourvoir faire de choix entre f2 et f5, mais a une préférence pour f2 après avoir eu une préférence pour f5 !	

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation analytique :

- o Degré de l'approximation = degré de P A74, A81, A83, A86, A163
  - Associé à l'idée de pente et d'asymptote A163

Système de représentation graphique :

- o Critère de cohérence entre la forme du tube et le comportement à l'infini A111: la visualisation d'un point d'inflexion dans le tube permet de penser que P tend vers moins l'infini en plus l'infini, ce qui valide f5 A167-A172, A186-188

Décisions :

- o Le critère sur le degré invalide f1, f3 et valide f2 ou f5, A89
- o f4 est invalidée car n'est pas définit après 20.
- o Le critère de cohérence est invalidé car la courbe de f2 suit le tube sur [0 ; 20] bein qu'elle tende vers moins l'infini en plus l'infini, A189-A191
- o Olivier déclare ne pas pourvoir faire de choix entre f2 et f5, mais a une préférence pour f2 après avoir eu une préférence pour f5 !

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôle référent :

Degré de P = degré de l'approximation

Opérateur :

Evaluation des degrés des fj

Système de représentation :

Analytique

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Le contrôle sur le degré relève d'une conception analytique.

Puis Olivier construit une critère portant sur les représentations graphique, cherchant à établir une cohérence de comportement sur [0 ; 20] et à l'infini. Comme nous l'avons signalé pour la recherche de l'approximation sur [0 ; 20] ce critère ne résiste pas et sont abandonnés : la courbe de f2 est visuellement conforme à « forme du tube » sur [0 ; 20] et tend vers moins l'infini en plus l'infini. D'ailleurs, dans la deuxième partie du protocole, lors de la construction des critères de cohérence, la recherche des approximation sur [0 ; 20] et à l'infini sont souvent confondues et sont menées conjointement. Il est souvent difficile de les distinguer.

3.2 Rémi

3.2.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20] :

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	Contextes du protocole
Eléments du système de représentation graphique	
L'approximation est une courbe située dans le tube : A97, A142 plus ou moins proche des points A37 (mais ce n'est pas un critère nécessaire A101, A112, A113) Associé à l'évaluation ponctuelle de la position de la courbe dans le tube : A106	***[RÉMI :** Ouais tu sais pas où il est le polynôme. C'est ça qui est chiant, tu sais que le polynôme il se trouve quelque part là dedans.* ***OLIVIER :** Tant que tu es dedans tu peux pas dire que c'est pas bien.* ***RÉMI :** Ouais parce que tu sais pas où il est, A37]* *(…)* ***RÉMI :** Alors est-ce qu'on peut déduire ? Visuellement ce sera compliqué mais est ce que… A95* ***OLIVIER :** Je pense pas en fait. A96* ***RÉMI :** ben les deux sont dedans. A97 (parle de f2*

	et f5 qui sont tous les deux dans le tube) *(…)* ***[OLIVIER :** Donc il est aussi valide que l'autre. A99 Pas plus parce que l'autre passe aussi presque par les points. Il passe par plus de points si on veut. Mais ça compte pas de toute façon. A100* ***RÉMI :** Ca veut rien dire. A101]* *(…)* ***RÉMI :** Mais vu que c'est aléatoire, il y a autant de chance que le polynôme passe très près des points qu'il passe au milieu ou passe … A112 (parle de P)* ***RÉMI :** L'erreur elle est choisie indépendamment pour chaque point. A113*
Cette courbe a certaines propriété graphique : lisse, deux bosses, une certaine rigidité A38, A115, A123 (ne peut pas prendre les valeurs les plus extrêmes) A129, plus ou moins centrées	***RÉMI :** Ouais parce que tu sais pas où il est, (parle de P) A37 mais par contre tu sais que c'est un polynôme de degré trois donc tu sais qu'il a une certaine forme donc tu sais que si il est à un endroit après il peut pas être n'importe où quoi. A38* *(…)* ***RÉMI :** Quand on a un truc comme ça (parle de f4), on est sûr que le polynôme il passait pas par… vu la forme d'un degré trois on est sûr que le polynôme passait pas par là. A115* *(…)* ***RÉMI :** Pour l'instant on se demander si on va tracer un polynôme de degré trois qui collerait les point de l'intervalle… Enfin min max.* ***NATHALIE** : Au min et au max ?* ***RÉMI :** Au plus petit du max et au plus du max. Enfin éliminer les points qui mous paraissent… Pour nous donner un intervalle plus probable pour le polynôme. Là il y a des points dans les minima qui sont bien trop haut. Et on sait que le polynôme vu qu'il est de degré trois il ne pourra pas faire…*

	On voulait tracer u polynôme de degré trois qui passerait par quatre points les plus… Qu'on jugerait plus bas de l'intervalle max mais je sais pas comment. C'est pour nous donner un intervalle plus plausible pour le polynôme de degré trois. Pour préciser l'intervalle parce que pour l'instant on est à min max mais c'est pas… pour lisser en quelque sorte. Mais en fait on veut essayer d'interpoler les deux machins par un polynôme de degré trois. *(…)* ***RÉMI :*** *Ca me parait peu plausible qu'il y ait un polynôme de degré trois qui fasse ça, ça (parle de f4). Parce que déjà le polynôme de degré trois sa bosse si elle était là ça serait pas possible quoi. Il a deux bosses le polynôme de degré trois… enfin deux point d'inflexion… la dérivée s'annule deux fois. A129*
Le nombre des courbes satisfaisant ces propriétés est limité A139 : elles ont un minorant (une plus basse que les autres, une plus haute que les autres A124, A148) ; P est un de ces polynômes. A26, A37	***RÉMI :*** *Donc le polynôme est quelque part là dedans. A26 (parle de la zone graphique délimitée par les points xiyimin et xiyimax)* *(…)* ***[RÉMI :*** *Ouais tu sais pas où il est le polynôme. C'est ça qui est chiant, tu sais que le polynôme il se trouve quelque part là dedans.* ***OLIVIER :*** *Tant que tu es dedans tu peux pas dire que c'est pas bien.* ***RÉMI :*** *Ouais parce que tu sais pas où il est, A37]* ***(…)*** ***RÉMI :*** *C'est pour nous donner un intervalle plus plausible pour le polynôme de degré trois. Pour préciser l'intervalle parce que pour l'instant on est à min max mais c'est pas… pour lisser en quelque sorte. Mais en fait on veut essayer d'interpoler les deux machins par un polynôme de degré trois. A124*

	(...) ***OLIVIER :*** *Non c'est inverser la cause et l'effet là je pense. C'est si il est impossible de placer un polynôme de degré trois là dedans tel que tous les points sont au dessus et un autre tel que tous les points sont au dessous. A138* ***RÉMI :*** *Ou un polynôme entre le jaune et le noir. A139* *(...)* ***RÉMI :*** *Il faudrait essayer de tracer un polynôme… tu reprends l'idée de tracer un polynôme qui semble être un minorant de tous les polynômes de degré trois compris dans le truc là et puis… A148*
Opérateurs de réduction du tube : la forme d'un P de degré 3 ne permet pas de prendre les valeurs les plus extrêmes => éliminer ces valeurs pour réduire le tube (se distingue d'Olivier pour qui éliminer les valeurs extrêmes est contrôlé par sa conception de l'erreur) A123	*Voir ci-dessus*
Eléments du système de représentation analytique	
Recherche des zéros de la dérivée, des variations et du point d'inflexion pour contrôler l'allure des courbes A181, A182, A187 => permettent d'éliminer f4	***RÉMI :*** *On veut savoir où était le point d'inflexion de… On regarde les deux polynômes de degré trois, leur point d'inflexion A181 pour savoir comment… quelle tête ils avaient. Il y en a un qui fait ça et l'autre le point d'inflexion il est à droite…* ***OLIVIER :*** *On va calculer les zéro aussi comme ça on saura… A182* ***(…)*** ***OLIVIER :*** *On va le refaire vite fait… C'est les mêmes solutions ça me rassure. A186 Bon ben c'est des solutions complexes. Ca veut dire quoi ?* ***RÉMI :*** *Ca veut dire que la dérivée…*

	OLIVIER : *Ne s'annule jamais.* ***RÉMI :*** *Donc que c'est toujours strictement positif.* ***OLIVIER :*** *Donc il y a pas de baisse vu qu'il y a un point d'inflexion qui est en combien… En un virgule sept… non en six. Il fini en l'infini.* ***RÉMI :*** *Donc ça fait un truc comme ça quoi. A187*
Opérateur de construction d'une approximation : Interpolation de quatre points de [0 ; 20] par un polynôme de degré trois : conforme aux propriétés « forme dans le tube » et à ce qui a été fait en TD A22. L'interpolation dépend du choix des points A23. Il manque à cet opérateur un critère de choix de ces points. A132, A133	***RÉMI :*** *Donc ça pourrait être intéressant de tracer un polynôme de degré trois pour voir comment il se comporte en prenant trois point dans l'intervalle. Voir comment ça se comporte si… A 22 Bon ça va dépendre vachement de où on place nos points. A23* *(...)* ***OLIVIER :*** *Attends essayer de tracer un polynôme… Je sais pas.* ***RÉMI :*** *On peut essayer de tracer le polynôme de degré trois qui passe par…* ***OLIVIER :*** *On peut essayer.* ***RÉMI :*** *Mais quels points choisir et comment interpoler ? ou comment interpoler et quels points choisir plutôt. Une moyenne sur un quart un quart un quart.* ***OLIVIER :*** *Je sais pas si ça marchera. A132* ***RÉMI :*** *Non c'est pas bien alors dans le cours d'interpolation justement on avait un truc là-dessus qu'il valait mieux choisir… Il donnait les points à choisir pour que ce soit le mieux. Et c'était un illustre monsieur qui a fait ça mais je connais pas son nom. A133*
Décisions	
Ces critères ne permettent pas de discriminer f1, f2, f3 et f5. Ils éliminent f4	Voir ci-dessus

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation graphique :

- L'approximation est une courbe située dans le tube : A97, A142 plus ou moins proche des points A37 (mais ce n'est pas un critère nécessaire A101, A112, A113)
  - Associé à l'évaluation ponctuelle de la position de la courbe dans le tube : A106
- Cette courbe a certaines propriété graphique : lisse, deux bosses, une certaine rigidité A38, A115, A123 (ne peut pas prendre les valeurs les plus extrêmes) A129, plus ou moins centrées
- Le nombre des courbes satisfaisant ces propriétés est limité A139 : elles ont un minorant (une plus basse que les autres, une plus haute que les autres A124, A148) ; P est un de ces polynômes. A26, A37
- Opérateurs de réduction du tube : la forme d'un P de degré 3 ne permet pas de prendre les valeurs les plus extrêmes => éliminer ces valeurs pour réduire le tube (se distingue d'Olivier pour qui éliminer les valeurs extrêmes est contrôlé par sa conception de l'erreur) A123

Système de représentation analytique :

- Recherche des zéros de la dérivée, des variations et du point d'inflexion pour contrôler l'allure des courbes A181, A182, A187 => permettent d'éliminer f4
- Opérateur de construction d'une approximation : Interpolation de quatre points de [0 ; 20] par un polynôme de degré trois : conforme aux propriétés « forme dans le tube » et à ce qui a été fait en TD A22. L'interpolation dépend du choix des points A23. Il manque à cet opérateur un critère de choix de ces points. A132, A133

Décisions :

- Ces critères ne permettent pas de discriminer f1, f2, f3 et f5. Ils éliminent f4

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents :

- La courbe de l'approximation de P est conforme à celle d'un polynôme de degré 3
- La courbe de l'approximation est n'importe où dans une zone autour des points xiyi, cette zone est définie par l'erreur de 10% sur les valeurs yi
- L'interpolation (de n valeurs P(xi) est une fonction d'approximation de P

Contrôles pour l'instrumentation :

- Si la courbe de l'approximation est conforme à celle d'un polynôme de degré 3 alors cette courbe est continue et comporte au plus deux changements de variation
  - validé par le contrôle « si P est un polynôme de degré 3 alors le nombre de changement de signe de sa dérivée est inférieur à 2 »
- Si les valeurs yi sont issues des valeurs P(xi) avec une erreur de 10% alors l'approximation est n'importe où dans la zone définie par les points xi, (yi+10%) et xi, (yi –10%) nous appellerons yimax-yimin cette zone)
- Si f est le polynôme de degré 3 interpolant quatre valeurs xiyi (satisfaisant des propriétés non définies) alors f est une bonne approximation de P : cet opérateur d'instrumentation est incomplet car il ne définit pas comment choisir les points d'interpolation

Opérateurs :

- Construire les points (xi, yimax) et (xi, yimin)
- Tracer les représentations graphiques des fj
- Evaluer visuellement de la position des courbes dans la zone définie par les points yimax-yimin
- Evaluer fj(xi) – (yi+10%) ou de fj(xi) – (yi – 10%) lorsque l'évaluation visuellement est ambiguë
- Evaluer visuellement les variations des courbes des fj et par le calcul des zéros des dérivées.
- Construire le polynôme d'interpolation de quatre points xiyi : il manque à cet opérateur un contrôle d'instrumentation permettant le choix des points d'interpolation

Systèmes de représentation :

- Graphique

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Les éléments identifiés chez Rémi dessinent des décisions stables sur le choix de l'approximation sur [0 ; 20. Ils mobilisent des contrôles sur les représentations graphiques. Le premier est « être dans le tube », qui délimite la zone dans laquelle peut se trouver P, et donc dans laquelle on peut attendre que se trouve l'approximation. Le second est « avoir les propriétés graphiques d'un polynôme de degré trois : lisse, au plus deux « bosses », une certaine rigidité qui empêche notamment la possibilité d'atteindre toutes les valeurs yi (c'est ce contrôle qui motive la tentative, qui n'aboutira pas, d'élimer certains valeurs yi moins probables que d'autres). La conception semble permettre d'envisager un nombre limité de polynômes dans le tube satisfaisant ces propriétés graphiques. La caractérisation propriétés graphiques de la courbe d'un polynômes particulier sont est rendue possible par des outils analytiques qui distinguent les différents cas qui peuvent se présenter (c'est-à-dire les changements de variations sont-elles avant, dans ou après l'intervalle [0 ; 20] ?) : calcul des points où la dérivée est nulle, recherche des points d'inflexion. La centration dans le tube n'est pas prioritaire (puisque P peut se trouver n'importe où dans le tube).

Il existe un opérateur de construction d'une approximation qui permet de satisfaire les contrôles référents sur les propriétés graphiques de la courbe de l'approximation et qui d'autre part est identifié comme un opérateur étudié précédemment lors de Travaux Dirigés. Cet opérateur est l'interpolation de quatre points (xi, yi). L'absence d'outils de choix des points d'interpolation (alors que Rémi sait qu'ils existent) mène à l'abandon de l'interpolation.

La conception permet d'éliminer f4 comme un bon candidat à l'approximation. Par contre, elle ne permet pas de discriminer les autres fonctions, puisque sur [0, 20] les courbes sont toutes conformes à un polynôme de degré 3 et toutes situées dans le tube. Cependant, en cours de résolution, la préférence se porte sur f2 ou f5, et cela est lié à la recherche conjointe de l'approximation sur [0 ; 20] et en plus l'infini (leur attention se focalise sur ces deux polynômes, sans que f1, f3 aient été explicitement éliminée sur [0 ; 20] mais uniquement à l'infini).

L'approximation est envisagée comme un objet du registre graphique nous l'associerons à la conception courbe.

3.2.2 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; +∝[:

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation graphique	
Degré de P = Degré de l'approximation de P A80, A88	***[RÉMI :*** *Alors déjà pas le degré deux parce qu'il va exploser en plus l'infini. A80]* *(...)* ***[OLIVIER :*** *Au moins on est sur que c'est pas*

	quatre. A86 Il reste plus que deux et cinq. A87 ***RÉMI :** le degré trois et le degré trois. A88]*
Comparaison des ordre de grandeurs des valeurs des fi(x) pour x grand. A80, A164	*[**RÉMI :** Degré deux et degré quatre. C'est pas du même degré donc ça va exploser dans un sens ou dans l'autre. A164]*
Décisions	
Les critères sont non discriminants sur f2 et f5 : A165	*[**OLIVIER :** Et ben entre les deux de degré trois…* ***RÉMI :** C'est philosophique. A165]*
Tentative de prise en compte de nouveaux critères (A166 « forme du tube »), Rémi ne semble pas tenir à l'argument	*[**RÉMI :** La bleue c'est donc f2. C'est par rapport à la forme du bandeau défini par le min et le max. Mais bon… A166]*
Rémi ne parvient pas à trancher => il fait des commentaires sur ce qui est attendu : « faut-il choisir une seule réponse ? » A90 Finalement Rémi ne tranche pas entre f2 et f5. A194	*[**RÉMI :** On est obligé de proposer une réponse à la fin ou on peut proposer un ensemble de réponses ? A90]* *(…)* *[**OLIVIER :** Ca c'est la rose, ouais c'est celle là. Donc c'est là. Donc là il a fait son point d'inflexion et il est en train de monter et il s'arrête plus, A192 ça pose pas de problème. A193* ***RÉMI :** Moi je pense qu'on peut pas dire. A194]*

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation analytique :

- Degré de P = Degré de l'approximation de P A80
- Comparaison des ordre de grandeurs des valeurs des fi(x) pour x grand. A80, A164

Décisions :

- Les critères sont non discriminants sur f2 et f5 : A165
- Tentative de prise en compte de nouveaux critères (A166 « forme du tube »), Rémi ne semble pas tenir à l'argument
- Rémi ne parvient pas à trancher => il fait des commentaires sur ce qui est attendu : « faut-il choisir une seule réponse ? » A90
- Finalement Rémi ne tranche pas entre f2 et f5. A194

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôle référent :

Degré de P = degré de l'approximation

Opérateur :

Evaluation des degrés des fj

Système de représentation :

Analytique

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Le contrôle sur le degré relève d'une conception analytique. Rémi reste peut convaincu par la recherche d'un critère de cohérence du comportement de l'approximation et de p sur [0 ; 20] et à l'infini menée par Olivier, sans toutefois énoncer de contre exemple où construire de contrôle lui permettant de l'invalider.

3.3 Discussion sur les relations contrôles / opérateurs

Les contrôles référents sont proches pour les conceptions de Rémi et Olivier. Ils se rapporte à une conception courbe, cependant pour Olivier la qualité de l'approximation est évaluée par la proximité à chacun des points xiyi alors que pour Rémi la fonction est vue comme un objet graphique global situé n'importe où dans une zone autour de xiyi. Il est intéressant de noter que ces contrôles aboutissent cependant à la mise en œuvre des mêmes opérateur : évaluer les variations des courbes de fj et tracer les points xiyimin, xiyimax. La convergence des opérateurs nous semble favoriser le fait qu'il n'y a pas de discussion qui s'engage entre les deux étudiants sur la divergence des leurs contrôles sur position de la courbe de l'approximation.

Cette analyse montre aussi qu'il n'y a pas de contrôle sans moyen d'instrumentation. En effet, l'absence d'outils permettant d'instrumenter le contrôle référent sur l'interpolation conduit à son abandon.

Le changement de registre constitue un mode de confirmation : f4 est d'abord invalidée par un contrôle graphique sur le nombre de variation ; cette invalidation est confirmée par le nombre de changement de signe de sa dérivée, ce qui confirme la décision d'invalider f4, alors que cette information n'apporte pas d'éléments supplémentaire favorisant l'invalidation de f4.

Les étudiants, dans leur volonté de discriminer f2 ou f5 comme meilleure approximation, décider d'affiner leurs critères. Ils cherchent pour cela à attribue une forme au « tube » qui rendrait compte de propriétés supplémentaires de P. Hors, l'action « regarder de loin le tube pour identifier sa forme » est tour à tour valider, puis invalidée. Tout d'abord, l'identification visuelle d'un point d'inflexion dans le tube et d'un point d'inflexion pour f5 en x = 6 semble valider l'action « regarder de loin » : si f5 a un point d'inflexion, alors il fallait bien voir un point d'inflexion dans le tube ! Il s'agit ici d'un argument que l'on pourrait qualifier « d'opportuniste ». Puis, l'identification d'une forte dépendance du résultat « regarder de loin » à la répartition de l'erreur invalide « regarder de loin ». L'instabilité de ce comportement nous montre que la recherche d'une « forme du tube » relève d'une pratique contingente à la situation et n'est pas révélateur d'une conception.

Enfin, les motivations qui conduisent les étudiants à réévaluer les critères de discrimination de l'approximation sur [0 ; 20] nous paraissent révéler un effet du contrat expérimental. Les critères de discrimination des fonctions sont réévalués car non discriminants : Le fait qu'il soi non discriminants aurait pu conduire au choix de f1, f2, f3 et f5 car elles sont des approximation équivalente. Cette décision est permise si la conception peut valider que les contrôles sur l'approximation sont les seuls autorisés par la situation et qu'il n'est pas possible d'en construire d'autre valide. Ce n'est pas le cas des conceptions de Olivier et Rémi. Nous avons d'ailleurs vu que ce ne pouvait pas être le cas de la conception courbe, qui ne peut pas choisir entre f1, f2, f3 et f5. Nous pensons donc que la recherche d'autres critère est en partie motivée par un effet de contrat, dans lequel les étudiants penses qu'on attend d'aux de ne choisir qu'une seule approximation.

4. David et Imène

David et Imène sont deux étudiants d'Ensimag 2ième année.

4.1 David

4.1.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20]:

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation graphique	
Tracer les représentations graphiques des courbes de f1, f2 et f3 et des points xiyi : A3	*[**DAVID :** Déjà on peut les tracer pour voir déjà… On va éliminer celles qui ne sont pas bien A3]*
Contrôle sur ces représentations graphiques de f1, f2 et f3 : équivalentes du points de vue de l'approximation A7, A10	*[**DAVID :** vas-y agrandi un petit peu la figure pour les comparer quoi. C'est dur à voir, c'est un peu la même chose A7]* *(…)* *[**DAVID :** le graphique ça a pas l'air très satisfaisant. Je crois qu'il vaut mieux calculer la norme.* ***IMÈNE :** Oui A10]*
Eléments du système de représentation analytique	
Evaluer $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ pour j=1…5 (utilisation de la fonction N2 de Maple) A14, A29 • vérifier que fj est continue en xi pour mettre en œuvre $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ A15, A16	*[**DAVID :** calculer avec les trois premiers c'est facile à faire. Enfin c'est facile, on prend la norme des f de xi moins yi, on la calcule… et après on va les comparer A14. Mais par contre pour f4, non ça marche aussi pour f4. Pour f4, par exemple sur zéro un, pour zéro il n'y a pas de problème il n'y a qu'une seule réception mais pour un il y en a deux, peut être qu'elles doivent coïncider en un. Il faudrait savoir A15.* ***IMÈNE :** je crois qu'elle est… sa dérivée seconde*

	est continue donc... ***DAVID :*** *Ah oui elle est continue.* ***IMÈNE :*** *Elle est continue.* ***DAVID :*** *Donc a priori ça vaut la même chose. Donc là aussi il n'y a pas de problèmes A16.]* *(…)* ***A29 :*** *voir échange long sur la mise en oeuvre de la procédure dans l'annexe.*
Si yi = P(xi) + εi avec εi < 10% P(xi) alors l'opérateur $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ n'évalue pas la distance aux valeurs P(xi) : A19, A23, A47	***[DAVID :*** *En fait ce qui me gêne un peu c'est qu'on prend pas en compte les dix pourcent A19]* *(…)* ***[DAVID :*** *Voilà c'est les dix pourcent c'est gênant, parce que là j'ai évalué une erreur par rapport à des trucs qui sont aléatoires. Il y a une erreur déjà là-dessus et après je vais calculer une erreur… fin tu vois A23]* *(…)* ***[DAVID :*** *C'est vrai que j'ai du mal à voir… faire un calcul sur des valeurs qui sont déjà fausses A47]*
La meilleure approximation f de p minimise $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ A33, A35: invalide f5 A62	***[DAVID :*** *Je sais pas moi a priori je voulais comparer les deux trucs, je voulais voir laquelle était la plus petite. On aurait pu dire c'était celle là la mieux A33.* ***(…)*** ***DAVID :*** *Ah parce qu'en plus ils sont proches, c'est cool.* *Bruits de clavier.* ***DAVID :*** *celui là il est déjà mieux, et le troisième A35…]* *(…)* ***[DAVID :*** *Donc celui là a priori on peut élimer sur zéro vingt le cinquième sûr. Zéro quatre c'est beaucoup. A62]*

$\sum_0^{20}(f_4(xi)-yi)^2 \neq 0$ parce que Maple fait des erreurs d'arrondis, • Si la courbe de f4 passe par les points xiyi alors $\sum_0^{20}(f_4(xi)-yi)^2 = 0$ A39, A68 • Vérification des valeurs f(xi) – yi dans Maple A46, A70, A71: f4(11) – y11 ≠ 0, valide l'hypothèse d'erreurs d'arrondis	***[DAVID :** Ca peut être qu'une erreur machine a priori. Oui. C'est vrai que c'est étonnant. Silence A39] (…) **[DAVID :** Ca ? Si tu regardes les valeurs, c'est toujours dix puissance moins six A45. Il y a qu'une seule valeur par rapport aux autres qui est grande c'est celle là A46.] (…) **[DAVID :** non on l'a pas tracée mais on sait ce que ça va donner, on sait que ça va passer par A68… **IMÈNE :** Je ne sais pas si ça va donner ça. Le vecteur qui calcul l'erreur il doit être nul A69. **DAVID :** Les premiers ils sont à zéro, il y a une seule valeur et elle se retrouve ici, il fait la somme il met au carré et il fait la racine A70. Je me demande à quoi ça correspond cette valeur. C'est la combien-t-ième ? Un deux… la douzième. Vas savoir pourquoi. C'est f de 11. A priori il y a pas plus de raison A71]*
P(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ A53 : invalide f1 A55 Expression de P dans le registre algébrique A54 : Trouver l'approximation de P c'est trouver a, b, c, d	***[DAVID :** Elles sont entachées d'erreurs. C'est la valeur de P en xi entachée d'erreur. Je pense. A priori ça devrait être ça A52. En fait ce qu'on cherche à déterminer… (il écrit) On a P qui vaut a x cube, plus b x carré plus c x plus d A53. Ce qu'on veut c'est a, b, c d et on a les valeurs P de xi qui sont égales à P de xi plus epsilon i A54. Le premier déjà elle me parait un peu… approximer un polynôme de degré trois par un polynôme de degré deux c'est un peu A55…]*
Degré (approximation) = degré de P : critère évoqué mais non validé A60	***DAVID :** a priori ça doit dépendre de l'intervalle. C'est sur que sur zéro plus l'infini, le polynôme de degré trois, enfin celui de degré deux c'est pas une bonne approximation parce qu'il aura pas la bonne limite, quelque chose comme ça A56. Celui de degré deux c'est une parabole en plus l'infini,*

	moins l'infini. Alors que celui de degré trois il aura moins l'infini, enfin deux différents A57. Donc déjà celui là sur zéro plus l'infini on peut l'enlever, pareil pour f3 puisque c'est de degré quatre A58. Et f5 c'est de degré trois. Donc déjà sur zéro plus l'infini c'est sûr que f1 et f3 ne sont pas bonnes A59. Après sur zéro vingt c'est autre chose quoi A60
Eléments du système de représentation formel	
yi = P(xi) + εi avec εi < 10%P(xi) A41	***[DAVID** lisant : les erreurs elles sont aléatoires. En fait finalement on a P de xi qui vaut yi plus epsilon i, et ce epsilon i il est pas plus grand que dix pourcent de ça. En plus ils sont tous aléatoires A41.]*
Si yi = P(xi) + εi avec εi < 10%P(xi) alors Erreur sur (f(xi) – yi) = [Erreur (f(xi) – P(xi)) + Erreur (P(xi) – yi)(= 5%P(xi) + 10%P(xi)) > 10%P(xi)] : invalide $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ A42, A43	***[DAVID** : (…) Donc en fait… C'est ça parce que c'est pas suffisant de calculer l'erreur entre les f de xi et les yi parce que si ça se trouve ça va l'augmenter A42. Tu vois par exemple s'il y a une erreur entre f1 de xi et yi qui est je sais pas de cinq pourcent par hasard on sait pas si elle est de cinq pourcent en dessus ou de cinq en dessous, on peut aller jusqu'à quinze. On ne peut pas savoir A43.]*
Décisions	
Un ensemble de contrôle sur l'erreur qui porte sur yi invalide l'opérateur $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ car il ne permet pas d'évaluer la distance aux valeurs P(xi)	
Puis, l'opérateur est validé en invoquant qu'il n'est pas possible de faire d'autres calculs : choix de f4 comme meilleure approximation sur [0 ; 20] A99, A100-A102	***[DAVID :** Et sur zéro vingt on a pas trouvé. Sur zéro c'est f4, enfin c'est quasiment sûr que c'est f4.* ***IMÈNE :** oui A99.* ***DAVID :** Comment mesurer l'erreur entre deux polynômes ? Je prends un échantillon de points, je mesure l'erreur de ces deux polynômes si je prends un polynôme qui coïncide en tous les points A100. Je ne vais pas obtenir quelque chose de meilleur*

	avec l'autre rien qu'en ces points là A101. Sur zéro vingt j'aurai dit f4 A102]

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation graphique :

- Tracer les représentations graphiques des courbes de f1, f2 et f3 et des points xiyi : A3
- Contrôle sur ces représentations graphiques de f1, f2 et f3 : équivalentes du points de vue de l'approximation A7, A10

Système de représentation analytique :

- Evaluer $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ pour j=1…5 (utilisation de la fonction N2 de Maple) A14, A29
  - Contrôle sur la mise en œuvre de l'opérateur : vérifier que fj est continue en xi A15, A16
- Si yi = P(xi) + εi avec εi < 10% P(xi) alors l'opérateur $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ n'évalue pas la distance aux valeurs P(xi) : A19, A23, A47
- Si f minimise $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ alors f est une meilleure approximation de P A33, A35: invalide f5 A62
- Si $\sum_{0}^{20}(f_4(xi)-yi)^2 \neq 0$ alors Maple fait des erreurs d'arrondis,
  - contrôle associe : si le courbe de f4 passe par les points xiyi alors $\sum_{0}^{20}(f_4(xi)-yi)^2 = 0$ A39, A68
  - Vérification des valeurs f(xi) – yi dans Maple A46, A70, A71: f4(11) – y11 ≠ 0, valide l'hypothèse d'erreurs d'arrondis
- P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d A53 : invalide f1 A55
- Expression de P dans le registre algébrique A54 : Trouver l'approximation de P c'est trouver a, b, c, d
- Degré (approximation) = degré de P : critère évoqué mais non validé A60

Système de représentation formel :

- Sur les valeurs yi : yi = P(xi) + εi avec εi < 10%P(xi) A41

  - Si yi = P(xi) + εi avec εi < 10%P(xi) alors erreur sur (f(xi) – yi) = erreur (f(xi) – P(xi)) + erreur (P(xi) – yi)(= 5%P(xi) + 10%P(xi)) > 10%P(xi) : invalide l'opérateur $\sum_0^{20}(fj(xi)-yi)^2$ A42, A43

Décisions :

- Un ensemble de contrôle sur l'erreur qui porte sur yi invalide l'opérateur $\sum_0^{20}(fj(xi)-yi)^2$ car il ne permet pas d'évaluer la distance aux valeurs P(xi).
- Puis, l'opérateur est validé en invoquant qu'il n'est pas possible de faire d'autres calculs : choix de f4 comme meilleure approximation sur [0 ; 20] A99, A100-A102.

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents

- L'approximation de P minimise la distance aux valeurs P(xi)

Contrôles pour l'instrumentation

- Si f est l'approximation de P alors la courbe de f est proche des points xiyi
- Si f est l'approximation de P alors f minimise $\sum_0^{20}(fj(xi)-P(xi))^2$

  Contrôle associé :

  - Si les valeurs P(xi) ne sont pas connues alors évaluer $\sum_0^{20}(fj(xi)-yi)^2$.

Opérateurs

- Evaluer les valeurs $\sum_0^{20}(fj(xi)-yi)^2$, j = 1, 2, 3, 4, 5
- Tracer les courbes des fonctions fj

Systèmes de représentation :

Le choix de l'approximation s'instrumente au moyen des représentations analytiques ($\sum_0^{20}(fj(xi)-yi)^2$). Il se réfère à un contrôle de distance des valeurs f(xi) aux valeurs P(xi) qui s'instrumente «également au moyen des représentation graphiques. Mais les représentations graphiques ne permettent pas d'être discriminantes. C'est donc l'instrumentation analytique qui conduit à un choix de meilleure approximation.

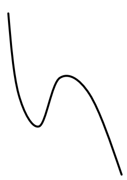
Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

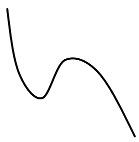
Le contrôle référent sur l'approximation porte sur la distance aux valeurs P(xi). Il s'instrumente graphiquement et analytiquement : un contrôle d'instrumentation qui porte sur la distance de la courbe d'approximation aux points xiyi et un contrôle d'instrumentation qui porte sur la valeur de $\sum_0^{20}(fj(xi)-yi)^2$. Le contrôle sur les représentations graphiques se révèle peut discriminant, et c'est le contrôle sur l'opérateur $\sum_0^{20}(fj(xi)-yi)^2$ qui est retenu et permettra de valider la fonction f4. Il n'y a pas d'incertitude dans le choix de l'approximation, qui est unique. On reconnaît les éléments de la conception analytique, qui se réfère à contrôle sur la distance des valeurs f(xi) aux valeurs P(xi). Notons que $\sum_0^{20}(fj(xi)-yi)^2$ ne permet pas d'évaluer la distance aux valeurs P(xi), mais celle aux valeurs yi. Cette difficulté est reconnue par la conception par le contrôle « *Si yi = P(xi) + εi avec εi < 10%P(xi) alors erreur sur (f(xi) – yi) égale erreur (f(xi) – P(xi)) + erreur (P(xi) – yi) égale 5%P(xi) + 10%P(xi)) et est supérieur à 10%P(xi)* ». L'opérateur $\sum_0^{20}(fj(xi)-yi)^2$ est invalidé pendant un moment de la résolution. Cependant, la conception ne parvient pas à contrôler cette difficulté et l'opérateur $\sum_0^{20}(fj(xi)-yi)^2$ est choisi « faute de mieux ».

4.1.2 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; +∞[:

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation analytique	
Degré (approximation) = degré de P A56, A58, A59, A76, A78, A79: invalide f1 et f3, valide f2 et f5	*[DAVID : … approximer un polynôme de degré trois par un polynôme de degré deux c'est un peu A55… a priori ça doit dépendre de l'intervalle. C'est sur que sur zéro plus l'infini, le polynôme de degré trois, enfin celui de degré deux c'est pas une*

	bonne approximation parce qu'il aura pas la bonne limite, quelque chose comme ça A56. Celui de degré deux c'est une parabole en plus l'infini, moins l'infini. Alors que celui de degré trois il aura moins l'infini, enfin deux différents A57. Donc déjà celui là sur zéro plus l'infini on peut l'enlever, pareil pour f3 puisque c'est de degré quatre A58. Et f5 c'est de degré trois. Donc déjà sur zéro plus l'infini c'est sûr que f1 et f3 ne sont pas bonnes A59.] *(...)* *[**DAVID :** Sur zéro plus l'infini ? Ouais on en élimine deux A76.* ***IMÈNE :** mais après on peut pas conclure A77.* ***DAVID :** Ben f4 sur zéro plus l'infini, déjà il est pas défini, ça va pas, on l'élimine aussi A78, il nous en reste deux et a priori entre f2 et f5, savoir lequel est mieux sur zéro plus l'infini c'est pas évident. Je ne vois pas comment on pourrait mesurer ça A79]*
Si p1 polynômes de degré 2 et p2 polynôme de degré 3 alors limite de P1 ≠ limite de P2 A56 ○ Contrôlé dans le registre graphique par l'évocation de la représentation graphique d'un polynôme de degré 2 (parabole) et des deux représentations possibles d'un polynôme de degré 3 A57:  ou 	*Voir ci-dessus*
Evaluation des limites de f2 et de f5 : si coefficient de $x^3 > 0$ (resp. <0) alors limite = $+\infty$ (resp. $-\infty$)	*Voir ci-dessus*

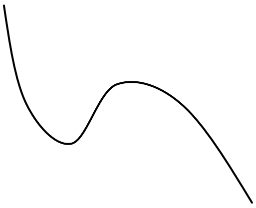
Eléments du système de représentation graphique	
f est un polynôme de degré 3, si coefficient de $x^3 > 0$ alors la représentation de f est A57, A81, A85, A90, A91 : identifie f5  si coefficient de $x^3 > 0$ alors la représentation de f est A81, A85, A90, A91 : identifie f2  Le comportement de P est caractérisé par un des deux comportements possibles d'un polynôme de degré 3 ci-dessus A83, A88-A95, A105, A108, A110.	*[**DAVID :** C'est vrai peut être que f5 il est pas bon sur cet intervalle mais qu'après il est bien A80. Parce qu'en plus c'est pas du tout les mêmes. C'est vraiment des coefficients complètement différents A81.* ***IMÈNE :** On peut les tracer tous les deux avec les points A82.* ***DAVID :** Ah si c'est du même ordre. Mais on va les tracer et qu'est ce que ça va faire de les tracer parce que finalement on connaît pas P A83.* ***IMÈNE :** Oui on ne connaît pas les valeurs mais pour voir les tendances A84.* ***DAVID :** mais en fait les tendances, c'est marrant, la tendance elle est là. Parce que le coefficient devant les x puissances trois ici il est négatif alors que f5 il est positif A85]* *(…)* *[**DAVID :** Il faudrait savoir… Mais P on peut pas savoir ce qu'il va faire en plus ou moins l'infini A88. Là sur zéro vingt il est en train de croître A89. Donc je dirais qu'en plus l'infini… est-ce qu'il peut faire ça, parce que là il est en train de faire ça. On sait ce qu'on va avoir à peu près. On va avoir un truc comme ça. Pour f2 sa limite en moins l'infini, plus l'infini, donc ça va faire un truc comme ça, elle s'annule trois fois A90. Et l'autre c'est l'inverse. C'est un truc que va ressembler à ça A91. J'aurais dit que c'était f5 qui s'approche le plus puisque P il a tendance à A92 … oui mais ça veut rien dire ça peut être complètement décalé oui je suis d'accord avec toi A93. C'est dur de voir la fonction en plus l'infini. On a réussit à en éliminer trois mais entre les deux je sais pas A94. Si on avait les valeurs inaudible ce serait sympa, mais on a pas A95]* *(…)*

	[DAVID : *Oui après sur zéro plus l'infini, on a pas mal restreint les choses, on a quand même le choix entre f2 et f5 et franchement je vois pas tellement comment on peut faire. Pas évident A105]* ***[[DAVID :*** *Ouais voilà mais on sait pas comment il fait P. Imagine P il est comme f5 son coefficient devant x trois il est positif, alors f2 c'est même pas la peine d'essayer A108].* ***(…)****.* *[Nathalie : D'accord et sur zéro plus l'infini ?* ***DAVID :*** *Ben on a le choix une chance sur deux entre f2 et f5 A110]*
Décisions	
Le critère sur le degré perme d'invalider f1, f3 et f4	Voir plus haut
Si on ne connaît pas la catégorie de P alors on ne peut pas choisir la meilleure approximation de P (f2 ou f5)	Voir plus haut

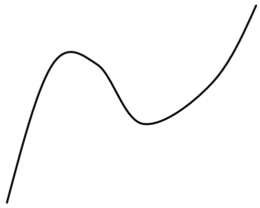
Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation analytique :

- Degré (approximation) = degré de P A56, A58, A59, A76, A78: invalide f1 et f3, valide f2 et f5
- F4 non définie après 20 : invalide f4
- si p1 polynômes de degré 2 et p2 polynôme de degré 3 alors limite de P1 ≠ limite de P2 A56
    - Contrôlé dans le registre graphique par l'évocation de la représentation graphique d'un polynôme de degré 2 (parabole) et des deux représentations possibles d'un polynôme de degré 3 A57:



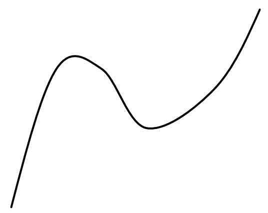
ou



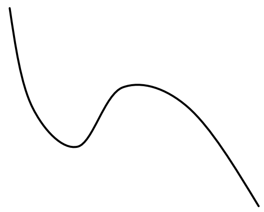
- Evaluation des limites de f2 et de f5 : si coefficient de $x^3 > 0$ (resp. <0) alors limite = $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Système de représentation graphique :

- f est un polynôme de degré 3, si coefficient de x3 > 0 alors la représentation de f est A81, A85, A90, A91 : identifie f5



- si coefficient de x3 > 0 alors la représentation de f est A81, A85, A90, A91 : identifie f2



- Le comportement de P est caractérisé par un des deux comportements possibles d'un polynôme de degré 3 ci-dessus.
- Si on ne connaît pas la catégorie de P alors on ne peut pas choisir la meilleure approximation de P (f2 ou f5) A83, A88, A95, A105, A108, A110.

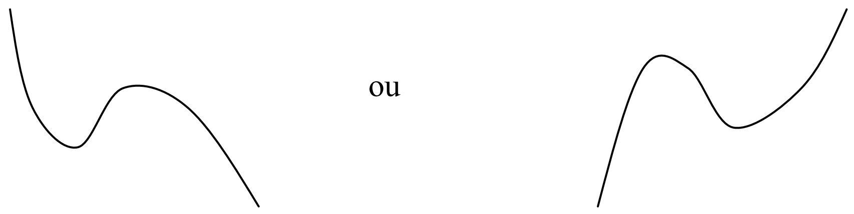
Décisions :

- Le critère sur le degré perme d'invalider f1, f3 et f4
- Si on ne connaît pas la catégorie de P alors on ne peut pas choisir la meilleure approximation de P (f2 ou f5)

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents :

- Un polynôme à l'infini est défini par son degré, le signe de son coefficient de plus haut degré
- Un polynôme de degré trois est caractérisé à l'infini par une des deux allures ci-dessous :



Contrôles d'instrumentation :

- Degré de P = degré approximation
- Signe du coefficient de plus haut degré que P = signe du coefficient de plus haut degré de l'approximation
- Allure de la représentation graphique de l'approximation = allure de la représentation graphique de P

Opérateurs :

- évaluer les degrés des fj
- évaluer les signe des coefficients de plus haut degré de f2 et f5
- dessiner les allures des deux types de courbes des polynômes de degré 3

Systèmes de représentation :

Les représentations analytique et graphique des fonctions sont toutes deux fortement mobilisées par la conception à l'œuvre, qui permettent une classification des polynômes.

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Les polynômes sont caractérisés à l'infini par le degré et le signe du coefficient de plus haut degré. Cette classification est confortée par l'évocation des courbes : les polynômes de degré deux sont caractérisés par une parabole, les polynômes de degré trois sont caractérisés par deux courbes dépendant du signe du coefficient de plus haut degré. Cette conception est analytique dans la mesure où elle se réfère aux caractéristique de la représentation analytique de P : être de degré trois, qui permet de discriminer f2 et f5 comme de potentielles bonnes approximations. La conception permet d'affirmer qu'il existe parmi f2 et f5 une bonne approximation : c'est la connaissance du signe de plus haut degré de P qui permettrait de discriminer f2 ou f5. La conception est encore analytique pour la discrimination de f2 ou f5. L'évocation des allures possibles des courbes d'un polynôme de degré 3 vient de nouveau conforter le critère.

4.2 Imène

4.2.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20] et sur [0 ; +∞[:

Imène s'engage peu dans le choix d'une meilleure approximation sur [0 ; 20]. Elle acquiesce aux propositions de David, oppose peu d'objections. Elle valide le critère « minimiser l'opérateur $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ » pour le choix sur [0 ; 20] et le critère « degré (approximation) = degré de P » à l'infini. Elle évoque un critère de cohérence sur [0 ; 20] et à l'infini (« si l'approximation n'est pas bonne sur [0 ; 20] alors elle n'est pas bonne à l'infini » qui invaliderait f5). Mais elle n'insiste pas (David objecte en faisant l'hypothèse suivante sur P : P a pour limite plus l'infini en plus l'infini, qui invalide le choix de f5 sous le critère de cohérence proposé par Imène).

4.3 Discussion sur les relations contrôles / opérateurs

4.3.1 Gestion d'incohérence entre le contrôle référent et contrôle pour l'instrumentation :

Le contrôle d'instrumentation « *Si f est l'approximation de P alors f minimise* $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ » n'est pas conforme au contrôle référent « *L'approximation de P minimise la distance aux valeurs P(xi)* ». En effet l'opérateur $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ permet d'évaluer la distance des valeurs f(xi) aux valeurs yi, mais pas la distance des valeurs f(xi) aux valeurs P(xi). Cette difficulté est reconnue par David. La première issue pour la conception de David est d'invalider l'opérateur $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ comme pertinent pour le problème. Cependant, devant l'absence d'autre contrôle d'instrumentation accessible, l'opérateur $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ est validé. Ainsi le choix du contrôle d'instrumentation, qui désigne l'opérateur, est invalidé, mais l'opérateur est tout de même mis en œuvre pour la résolution. Ce qui constitue une incohérence. Nous pouvons faire une hypothèse expliquant cette incohérence : la conception contrôle (sans que cela soit explicité dans le protocole) que les valeurs yi sont proches des valeurs yi et donc que l'opérateur $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ fournit une estimation correcte de la distance des valeurs f(xi) aux valeurs P(xi). Ainsi, la conception accepte un opérateur non conforme au contrôle référent parce que cet opérateur effectue une estimation proche de l'opérateur $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-P(xi))^2$.

4.3.2 Gestion d'une perturbation :

Imène invoque un critère de cohérence de comportement de l'approximation sur [0 ; 20] et à l'infini : « si l'approximation n'est pas bonne sur [0 ; 20] alors elle n'est pas bonne à l'infini ». La conception de David rejette le critère au moyen d'une hypothèse sur P qui permet d'invalider la le critère de cohérence énoncé par Imène.

4.3.3 Utilisation de deux systèmes de représentation :

Pour le choix de l'approximation à l'infini, l'évocation de l'allure de la courbe d'un polynôme de degré 3 vient conforter le critère sur le degré et le signe du coefficient de plus haut degré. Ces deux critères aboutissent au même traitement du problème : indentification de f2 et f5 comme une des deux approximations. La connaissance du signe du coefficient de plus haut degré de P ou de la limite de P à l'infini permettrait de discriminer f2 ou f5. Ils sont sémantiquement congruents. Ces deux expressions des contrôles référents ne sont pas nécessaires, puisqu'elles sont indépendantes et conduisent à la même résolution. La possibilité de mobiliser deux systèmes de représentation pour l'expression de contrôles référents sémantiquement congruents constitue peut être un mode de validation des contrôles référents.

5. Colin et Yann

Colin et Yann sont deux étudiants d'Ensimag 2ième année.

5.1 Colin

5.1.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20]:

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation numérique	
Les valeurs f(xi) de l'approximation f sont proches des valeurs yi. A3, A4, A5	***[COLIN :*** *On peut évaluer chacun des polynômes en chacun des xi pour déjà voir si il y en a qui… A2* ***YANN :*** *si il y en a qui se soient proche ? A3* ***COLIN :*** *plus que d'autres.] A4*
Evaluation des fj(xi). A2, A8	*A2 : voir ci-dessus* *A8 : échange sur la mise en œuvre de l'évaluation des fj(xi).*
Eléments du système de représentation analytique	
L'approximation minimise $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ A11, A27, A34-A38	***[COLIN :*** *On peut faire yi moins…. A10* ***YANN :*** *mets une norme quoi* ***COLIN :*** *une valeur absolue tu veux ?* ***YANN :*** *une norme, une norme de vecteur…, une norme 2 pas exemple.* ***COLIN :*** *Une norme 2] A11* *(…)* ***[COLIN :*** *Oui mais ce que je veux dire c'est prendre le max des… non le min des normes entre les différents]A27* *(…)* ***[COLIN :*** *Et bien voilà.* ***YANN :*** *Ouais c'est bon. A34*

	COLIN : *Il y a moyen de rappeler le dernier truc que tu as fait comme ça.* ***YANN :*** *Je ne sais pas.* ***COLIN :*** *Parce que là en fait ça entre quand tu fais ça.* ***YANN :*** *Bon f2 ?* ***COLIN :*** *Ouais. A35* *C tape puis ils rient. C continue de taper.* ***YANN :*** *f4 ?* ***COLIN :*** *f4 A36* ***YANN :*** *f4 c'est vachement bien.* ***COLIN :*** *Il n'y a pas photo. A37* ***YANN :*** *Donc ça en fait c'est sur [0 ; 20], on choisit f4 quoi.* ***COLIN :*** *Ouais A38]*
L'opérateur $\underset{i=0..20}{Sup}\left\|fj(xi)-yi\right\|$ ne permet pas d'identifier la meilleure approximation car ne tient pas compte de la distance de toutes les valeurs fj(xi) à toutes les valeurs yi A19	***[COLIN :*** *Sinon il faut définir une fonction norme A16. Inaudible* ***YANN :*** *Pour moi la norme infinie c'est 0,1. C'est celle là la plus grosse valeur. A17* ***COLIN :*** *0,1. On fait la même chose pour…* ***YANN :*** *avec f2.* ***COLIN :*** *on a pas le bidule chouette pour… Faut tout retaper ?* *Ils tapent des commandes dans Maple. A18* ***COLIN :*** *Il faudrait regarder en moyenne parce que…* ***YANN :*** *Ouais* ***COLIN :*** *celui-là ça va être plus grand mais ça se trouve… A19]* *(…)*
Décisions	
Le critère sur la norme 2 valide f4 comme meilleure approximation	Voir ci-dessus

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation numérique :

- Les valeurs f(xi) de l'approximation f sont proches des valeurs yi. A3, A4, A5
- Evaluation des fj(xi). A2, A8

Système de représentation analytique :

- L'approximation minimise $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ A11, A27, A34-A38
- L'opérateur $\underset{i=0..20}{Sup}\left|fj(xi)-yi\right|$ ne permet pas d'identifier la meilleure approximation car ne tient pas compte de la distance de toutes les valeurs fj(xi) à toutes les valeurs yi A19

Décisions :

- Validation de f4

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents :

- Les valeurs f(xi) de l'approximation sont proches des valeurs P(xi)

Contrôles pour l'instrumentation :

- Si f est l'approximation de P alors f minimise $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$

Opérateurs

- Evaluation des valeurs fj(xi), j=1..5
- Evaluation des valeurs $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$, j=1..5

Systèmes de représentation :

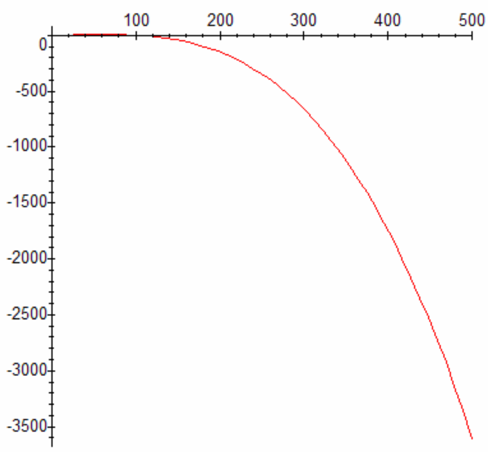
- Numérique et analytique.

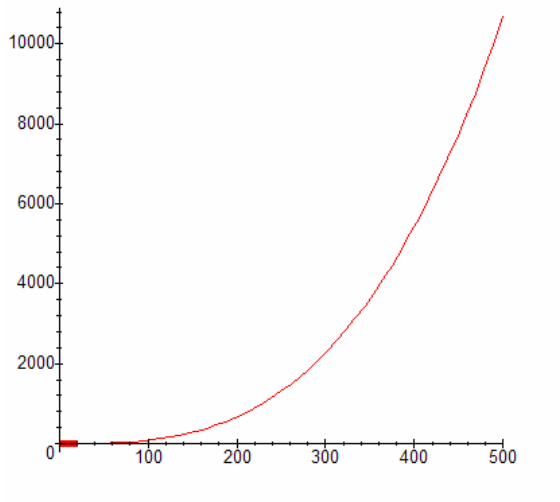
Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

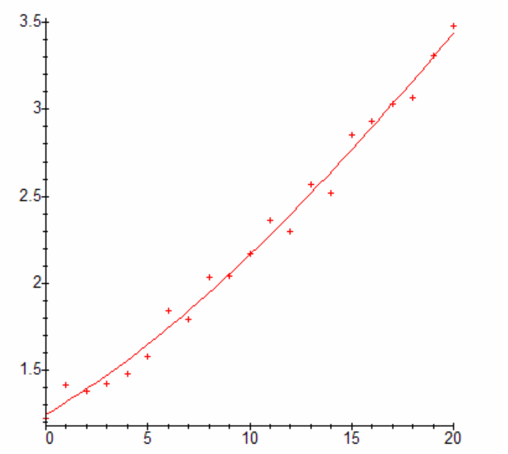
La conception mobilise les systèmes de représentation numérique et analytique. Le contrôle référent prote sur la proximité des valeurs de l'approximation f en xi aux valeurs P(xi). Cette proximité est évaluée au moyen de la norme discrète $\sum_{0}^{20}(f(xi)-yi)^2$. Il n'y a pas d'incertitude sur le choix de l'approximation, f4 est désigner comme meilleure approximation de P sur [0 ; 20]. Ces éléments sont ceux d'une conception analytique.

5.1.2 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; +∝[:

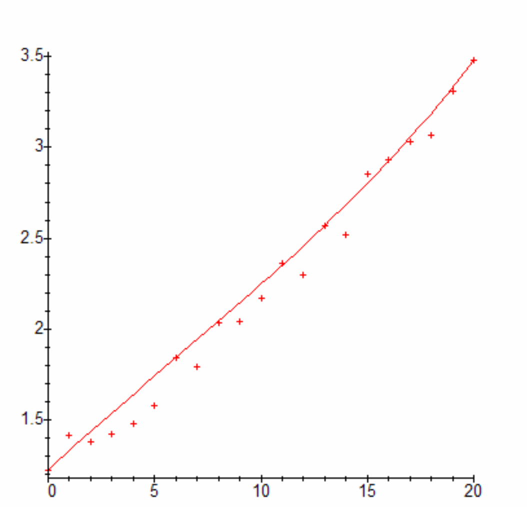
Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation analytique	
Degré de l'approximation = degré de P A54, A56-A58	*[**COLIN :** Ah oui ils sont issus d'un polynôme de degré 3 en fait A54. Ah ouais donc il ne faut pas prendre f3 en fait A55.* ***YANN :** Il vaut mieux prendre f2* ***COLIN :** Ouais il faut prendre f2 A56.* ***YANN :** Attends f5 c'est quoi A57 ?* ***COLIN :** f5 c'est degré 3 aussiA58]*
Eléments du système de représentation graphique	
Tracer les courbes de f2 et f5 sur [0 ; 500]	Courbe de f2 sur [0 ; 500]  Courbe de f5 sur [0 ; 500] :

	
Décisions	
f4 est invalidée comme meilleure approximation à l'infini car elle est non définie après 20. Les fonctions f1, f3 sont invalidées car elles ne sont pas de degré 3.	Voir ci-dessus
L'absence d'information sur les variations de P à l'infini empêche de trancher entre f2 et f5. A87 à A89 Colin va chercher un critère de discrimination entre f2 et f5	*[**COLIN :** Ah ouais ça a plus rien a voir.* ***YANN :** donc ça, ça doit être…* ***COLIN :** Donc celui qui monte c'est…* ***YANN :** Celui qui descend c'est euh…* ***COLIN :** f3, non f2* ***YANN :** f2 et celui qui monte c'est f5 A87.* ***COLIN :** C'est assez logique A88. Mais je veux dire a part ça comment tu fais pour savoir, comment tu dis que… il y en a un qui serait mieux que l'autre A89]*
Eléments du système de représentation graphique	
Tracer les représentations graphiques de f2 et f5 sur [0 ; 20]	Courbe de f2 sur [0 ; 20] :

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Courbe de f5 sur [0 ; 20] :



</td>
</tr>
<tr>
<td>
Construction d'un critère de cohérence entre le comportement de l'approximation sur [0 ; 20] et en +∝, ce critère est porté par l'observation dans Maple des courbes de f2 et f5 sur [0 ; 20] A92, A93:
f2 est validé car prend en compte l'ensemble des valeurs yi sur [0 ; 20]
Associé au contrôle : l'erreur est répartie autour de zéro et les « vraies valeurs » sont centrées dans les xiyi. A100
f5 est invalidé car interpole des point sur les quelles il existe une erreur A97
</td>
<td>
[COLIN : ouais regarde f5 il y a des points où il est vachement proche A92 et… Mais je pense qu'il vaut mieux prendre f2 quand même A93]
(…)
[COLIN : Je suis d'accord avec f2 parce que c'est vrai que c'est lui qui passe, si tu prend un truc en moyenne c'est clair que A97…
YANN : Il est meilleur, il est meilleurs en moyenne A98 ; f5 il est pas très mauvais non plus mais… A99
COLIN : Si il y a des erreurs dans le … « entachées d'erreurs aléatoire pouvant aller jusqu'à 10 % » et si tu regarde la répartition des trucs A100]
</td>
</tr>
</table>

Décisions	
f2 validée mais Colin manque cependant de conviction sur le choix de f2 : l'absence d'information sur P après semble rendre peu légitime le choix de f2 A104, A105	***[COLIN :*** *A priori pour les points qui sont au dessus de 20, on sait pas du tout le polynôme qu'on va interpoler A104.* ***YANN :*** *ouais c'est vrai.* ***COLIN :*** *mais par contre quand on voit f2, on a pas fait le calcul, mais c'est plausible que ça interpole un truc où il y a des erreurs sur les points A105]*

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation analytique :

Degré de l'approximation = degré de P A54, A56-A58

Système de représentation graphique :

- Tracer les courbes de f2 et f5 sur [0 ; 500]
- Tracer les courbes de f2 et f5 sur [0 ; 20]
- Construction d'un critère de cohérence entre le comportement de l'approximation sur [0 ; 20] et en $+\infty$, ce critère est porté par l'observation dans Maple des courbes de f2 et f5 sur [0 ; 20] A92, A93:
  - f2 est validé car prend en compte l'ensemble des valeurs yi sur [0 ; 20]
    - Associé au contrôle : l'erreur est répartie autour de zéro et les « vraies valeurs » sont centrées dans les xiyi. A100
  - f5 est invalidé car interpole des point sur les quelles il existe une erreur A97

Décisions :

- f4 est invalidée comme meilleure approximation à l'infini car elle est non définie après 20.
- Les fonctions f1, f3 sont invalidées car elles ne sont pas de degré 3.
- L'absence d'information sur les variations de P à l'infini empêche de trancher entre f2 et f5. A87 à A89. Colin va chercher un critère de discrimination entre f2 et f5
- f2 validée mais Colin manque cependant de conviction sur le choix de f2 : l'absence d'information sur P après semble rendre peu légitime le choix de f2 A104, A105

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents :

- Degré de l'approximation = degré de P

Opérateur :

- Evaluer les degrés des fonctions fj

Système de représentation :

- Analytique

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Le contrôle sur le degré qui valide f2 et f5 comme une des deux approximations relève d'une conception analytique. Puis Colin construit un contrôle qui permet de valider f2 et d'invalider f5 comme meilleure approximation. Ce contrôle s'appuie sur les représentations graphiques de f2 et f5 sur [0 ; 20], et établit un critère de cohérence entre l'approximation sur [0 ; 20] et sur [0 + ∝[: la qualité d'approximation sur [0 ; 20] (évaluée par la centration dans les points xiyi) garantit une qualité d'approximation après 20. ce critère peut être associé à une conception courbe, où l'approximation et P sont envisagés comme des objets graphiques, qui s'ils sont visuellement proche sur [0 ; 20] seront encore visuellement proche après 20. il est cependant difficile d'apporter un crédit important à ce critère. La première raison est l'effet de contrat expérimentale dont nous avons parlé en analyse a priori et qui pousse au choix d'une approximation « à tout prix ». La seconde raison est la faible conviction de Colin visible dans ses propos.

5.2 Yann

5.2.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20] :

L'analyse est identique à celle de Colin.

5.2.2 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; +∝[:

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Système de représentation analytique	
f5 est invalidée car est un polynôme d'interpolation. Yann se réfère à au contrôle suivant : les polynômes d'interpolation sont de bonnes approximation locale (sur l'intervalle d'approximation) mais ne sont plus de bonnes approximation en dehors de l'intervalle. A86, A95, A102	***[COLIN :*** *Ouais donc il faut tout faire sur [0 ; 500] A84. Par contre on aura pas nos points sur [0 ; 500] A85.* ***YANN :*** *C'est pas grave c'est normal. Parce que le problème des polynômes d'interpolation c'est que souvent ils sont bien localement mais après ils partent complètement A86]* *(…)* ***YANN :*** *Moi j'ai plus confiance en f2 parce que f5 c'est vraiment uniquement un polynôme d'interpolation et a priori s'il va à un endroit ça veut vraiment pas dire qu'il va aller ailleurs A95* *(…)* ***YANN :*** *Moi j'hésitais parce que f5 c'était juste… C'étais un polynôme d'interpolation en trois points et donc ça donnait quelque chose de bon c'est sûr sur ces trois points, mais les polynômes d'interpolation ils peuvent très mal se comporter ailleurs que sur les points en question A102*
Décisions	
f2 et f5 sont discriminés comme par Colin parce qu'ils sont de degré 3. Puis Yann construit un critère de discrimination de f2 et f5, qui diffère de celui de Colin et qui ne se	Voir ci-dessus

réfère pas à un système de représentation particulier, mais au mode de construction de f5 (polynôme d'interpolation de degré 3 de quatre valeurs yi = f5(xi) sur [0 ; 20]. Validation de f2	

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation analytique :

Degré de l'approximation = degré de P

Décision :

Invalidation de f5 parce qu'il est un polynôme d'interpolation sur [0 ; 20], ce qui valide f2.

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents :

- o Degré de l'approximation = degré de P

Opérateur :

- o Evaluer les degrés des fonctions fj

Système de représentation :

- o Analytique

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Comme pour Colin, le choix de f2 et f5 est contrôlé avec le degré et relève d'une conception analytique. Puis Yann utilise ce que nous pourrions appeler un « argument d'autorité ». Il invoque le fait que les polynômes d'interpolation sont de bonnes approximations sur l'intervalle d'interpolation et de mauvaises approximations en dehors de l'intervalle. Cela peut évoquer un phénomène classique des polynômes d'interpolation, qui, lorsque les contraintes d'interpolation sont fortes sur l'intervalle, donnent à voir de fortes variations en dehors de l'intervalle (appelées « effets de bords »[40]). Une fois encore, il ne nous parait pas légitime d'associer ce critère à une conception particulière.

[40] Voir la présentation générale des problèmes d'approximation dans le chapitre 5, dans laquelle ce phénomène est évoqué.

5.3 Discussion sur les relations contrôles / opérateurs

Il est intéressant de noter dans ce protocole la divergence des contrôles engagés par Colin et Yann pour la discrimination de f2 ou f5 comme meilleure approximation sur [0 ; $+\propto$[. Les contrôles diffèrent, cette divergence est avérée par Colin et Yann, mais cela ne révèle pas de conflit ou de contradiction. Pour quelle raison ?

La première est que la divergence des critères leur permet tout de même de valider f2 : ils donnent la même réponse.

Il nous semble qu'il existe une deuxième raison intéressante. Colin est d'accord avec la validité épistémique du contrôle de Yann (à savoir, nous le rappelons, les contrôles d'interpolation sont de mauvaises approximation en dehors de l'intervalle d'interpolation). Ce qu'il remet en question c'est sa valeur logique pour invalider f5 : ne connaissant pas le mode de construction de f2, Colin refuse d'invalider f5 sur son mode de construction. De même, Yann n'invalide pas la valeur épistémique du contrôle de Colin (à savoir, la qualité d'approximation sur [0 ; 20] (évaluée par la centration dans les points xiyi) garantit une qualité d'approximation après 20). On peut penser que si Yann avait eu les moyens d'invalider le contrôle de Colin alors une discussion autour de la validité de ce contrôle aurait pu émerger. Par exemple l'hypothèse possible « $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ » est contradictoire avec l'argument de Colin qui valide f2. On voit ici que deux contrôles différents sont explicités par Colin et yann. Les propos de ceux-ci attestent qu'ils reconnaissent cette divergence. Mais leurs conceptions ne parviennent pas à construire d'éléments qui leur permettent de s'engager sur la validité épistémique de ces contrôles.

6. Romaric et Benjamin

David et Imène sont deux étudiants d'Ensimag 2ième année.

6.1 Romaric

6.1.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20]:

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation graphique	
Tracer les représentations graphiques des fj et des points xiyi. A1	*[**ROMARIC** : Je propose de regarder d'abord les têtes des…* ***BENJAMIN** : des fonctions ? Ouais je suis d'accord.* ***ROMARIC** : Ouais] A1*
L'approximation a une courbe conforme à celle d'un polynôme de degré 3 : continue, peu de variations A20, A24, A88 : invalide f4 A89	*[**ROMARIC** : De toute façon f4 il ressemble pas du tout à un polynôme de degré trois quoi]A20* *(…)* *[**ROMARIC** : Enfin nous ce qu'on cherche c'est une approximation de ce polynôme de degré trois donc…* ***BENJAMIN** : Oui…* ***ROMARIC** : Mais ça convient pas parce que même si ça passe par tous les points] A24* *(…)* *[**ROMARIC** : Ouais mais il faut le justifier. Moi le f3 ça me conviens je pense. C'est … ça a une tête de polynôme, c'est un polynôme c'est normal. Après en utilisant les calculs qu'on a fait on obtient le meilleur résultat. A88* ***NATHALIE** : Sur zéro vingt ?* ***BENJAMIN** : Sur zéro vingt on a choisi f3.*

	NATHALIE *: parce que c'est le meilleur du point de vue de votre critère moindre carré c'est ça ?* ***BENJAMIN*** *: oui c'est celle qui minimise la distance aux échantillons.* ***ROMARIC*** *: En oubliant celle qui passe par tous les points et qui a vraiment pas une tête de polynôme] A89*
Des polynômes de degrés différents de 3 peuvent avoir des représentations graphiques conformes à celle d'un polynôme de degré 3. A51, A74-A77	*[**ROMARIC** : Ben là en fait on reste sur zéro vingt donc il n'y a pas de* ***BENJAMIN*** *: de grosse différence.* ***ROMARIC*** *: Il n'y a pas de gros écarts ouais] A51* *(…)* *[**BENJAMIN** : D'accord. C'est marrant la forme qu'elle a je trouve A73.* ***ROMARIC*** *: Ben ça reste un polynôme A74.* ***BENJAMIN*** *: Donc on garde la f3 ou pas. Est-ce qu'il y a d'autres arguments qui pourraient faire balancer en faveur d'une autre A75 ? La trois est un polynôme de degré quatre aussi, enfin on a dit que ce n'était pas génant en travaillant sur zéro vingt, un intervalle borné A76.* ***ROMARIC*** *: c'est une approximation de toute façon A77]*
Eléments du système de représentation analytique	
Evaluations dans Maple des valeurs $\sum_{i=0}^{20}(f_j(xi)-yi)^2$ j=1, 2, 3, 5. A43-A48	*[**ROMARIC** : la c'est pas très compliqué il suffit de regarder en les points communs la différence entre le point de la courbe qui approxime le polynôme de degré trois et l'erreur… l'échantillon] A43* *(…)* *[**ROMARIC** : Oui c'est une somme, il faut lui donner l'indice. Le problème c'est qu'on a un tableau. Comment on fait ça ?* ***BENJAMIN*** *: De zéro à vingt ou de zéro à 19.* ***ROMARIC*** *: De toute façon il y a que vingt points. Non c'est une somme donc il faut lui dire de faire*

<table>
<tr><td></td><td>varier… Ah ben oui… Comment est-ce qu'on fait pour…
Bruits de clavier] A48</td></tr>
<tr><td>L'approximation minimise l'opérateur $\sum_{i=0}^{20}(f(xi)-yi)^2$ A88, A89

Contrôlé sur les représentations graphiques par :
L'opérateur $\sum_{i=0}^{20}(f(xi)-yi)^2$ mesure la distance de la courbe de f aux points xiyi A66, A87-88
L'opérateur $\sum_{i=0}^{20}(f(xi)-yi)^2$ est validé parce qu'il est identifié comme savoir institutionnel A38, A39)</td><td>Voir ci-dessus pour A88, A89
(…)
[ROMARIC : Ben qu'est ce qu'on appelle une approximation au mieux du polynôme de degré troisA37 ? Un truc qui ressemble à un polynôme de degré trois ça suffit pas quoi A38. Il faut quelque chose de légèrement plus mathématique quand mêmeA39.
BENJAMIN : la méthode des moindres carrés ça permettrait d'avoir déjà une sorte de A40]
(…)
[ROMARIC : ben disons il suffit de regarder sur le dessin quoi. Tu regarde sur le dessin tu vois il y en a deux qui sont quasiment confondus donc c'est a peu près normal qu'on trouve le même résultat quoi A66]
(…)
BENJAMIN : oui du coup elle est assez éloignée des échantillons, d'ailleurs c'est la plus éloignée A85. Mais c'est vrai que c'est celle qui dispose du moins d'information. Dons en fait je sais pas si c'est la meilleure courbe A86. Ca dépend en fait des moyens qu'on peut se donner. Qu'on veut bien se donner. Il faut bien faire un choix à un moment donné A87.

ROMARIC : Ouais mais il faut le justifier. Moi le f3 ça me conviens je pense. C'est … ça a une tête de polynôme, c'est un polynôme c'est normal. Après en utilisant les calculs qu'on a fait on obtient le meilleur résultat. A88</td></tr>
</table>

Décisions	
Les critères sur la conformité de la représentation graphique à celle d'un polynôme de degré trois invalide f4 et valide f1, f2, f3 et f5	Voir ci-dessus
L'opérateur $\sum_{i=0}^{20}(f(xi)-yi)^2$ offre un critère de discrimination des courbes de f1, f2 et f3, qui sont perceptivement très proche.	Voir ci-dessus

Résumé des éléments issus de l'atomisation pour Romaric :

- *Système de* représentation graphique :
- L'approximation a une courbe conforme à celle d'un polynôme de degré 3 : continue, peu de variations A20, A24, A88 : invalide f4 A89
- Tracer les représentations graphiques des fj et des points xiyi. A1

Système de représentation analytique :

- Evaluations dans Maple des valeurs $\sum_{i=0}^{20}(f_j(xi)-yi)^2$ j=1, 2, 3, 5. A43-A48, A53-A67
- L'approximation minimise l'opérateur $\sum_{i=0}^{20}(f(xi)-yi)^2$ A88
  - Contrôlé sur les représentations graphiques par : L'opérateur $\sum_{i=0}^{20}(f(xi)-yi)^2$ mesure la distance de la courbe de f aux points xiyi
  - L'opérateur $\sum_{i=0}^{20}(f(xi)-yi)^2$ est validé parce qu'il est identifié comme savoir institutionnel A38, A39)

Décisions :

- Les critères sur la conformité de la représentation graphique à celle d'un polynôme de degré trois invalide f4 et valide f1, f2, f3 et f5
- L'opérateur $\sum_{i=0}^{20}(f(xi)-yi)^2$ offre un critère de discrimination des courbes de f1, f2 et f3, qui sont perceptivement très proche.

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents

- La représentation graphique de l'approximation est conforme à celle d'un polynôme de degré 3
- La courbe de l'approximation est la plus proche des points xiyi

Contrôles pour l'instrumentation

- Si la courbe de l'approximation est conforme à celle d'un polynôme de degré 3 alors celle-ci est continue et comporte au plus deux changements de variations
- Si la courbe de l'approximation est la plus proche des points xiyi alors l'approximation minimise l'opérateur $\sum_{i=0}^{20}(f(xi)-yi)^2$

Opérateurs :

- Evaluer perceptivement sur les représentations graphiques les variations et la continuité des courbes
- Evaluer $\sum_{i=0}^{20}(f_j(xi)-yi)^2$ pour j = 1…5

Systèmes de représentation :

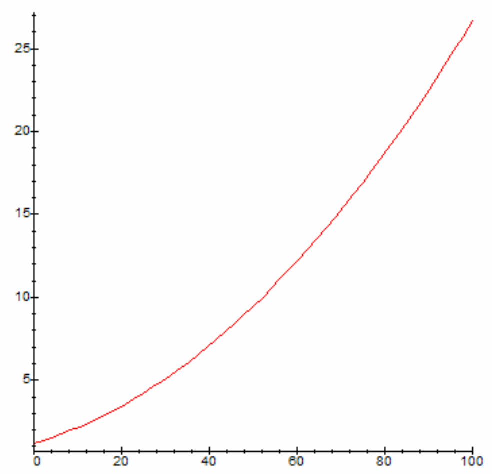
La stratégie engage les représentations graphiques et analytiques.

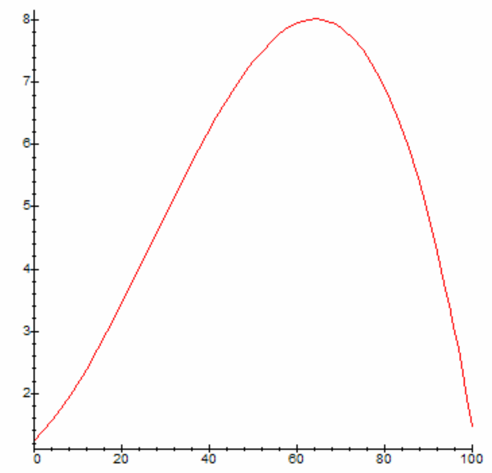
Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Les contrôles référents se rapportent aux représentations graphiques. Le contrôle sur la forme de la courbe de l'approximation permet l'invalidation de f4, dont la représentation graphique est perceptivement en inadéquation avec ce contrôle. Le contrôle sur la proximité aux points s'instrumentalise dans le registre analytique, ce qui permet d'aboutir au choix de f3. Il n'y a pas d'incertitude dans le choix de la meilleure approximation, mais les contrôles engagés autorise que f1 et f2 soit également considérés comme de bonnes approximation, relativement à f5 et f4. On retrouve ici les éléments de la conception objet : les représentations graphiques et analytiques sont au service de la conception pour la construction de contrôles et d'opérateurs permettant le choix d'une meilleure approximation.

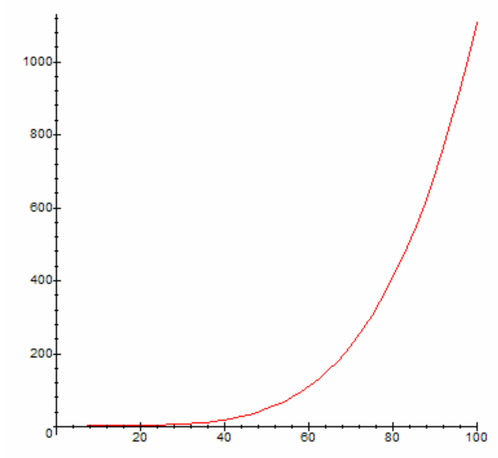
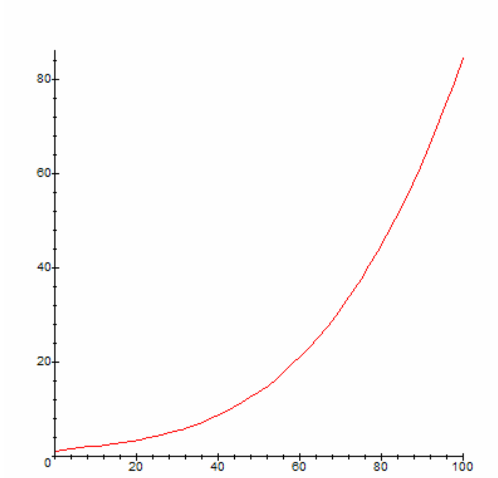
6.1.2 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; +∝[:

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

<table>
<tr><th>Eléments issus des atomes</th><th>Contextes du protocole</th></tr>
<tr><td colspan="2">Eléments du système de représentation graphique</td></tr>
<tr><td>Tracer (non conjointement) des représentations de f1, f2, f3 et f5sur [0 ; 100]</td><td>Coubre de f1 sur [0 ; 100] :


Courbe de f2 sur [0 ; 100] :


Courbe de f3 sur [0 ; 100] :</td></tr>
</table>

	 Courbe de f5 sur [0 ; 100] : 
Estimation perceptive sur les représentations graphiques des valeurs de f1, f2, f3 et f5 en 100 : f1(100) ≈ 20 ; f2 décroît en 100 ; f3(100) ≈ 1000 ; f5(100) ≈ 80 A115	*[**ROMARIC** : Tiens on pourrait regarder l'ordre de grandeur en fait. Tiens regarde l'ordre de grandeur. Celle là elle reste confinée entre zéro et quatre vingt. Celle elle part entre zéro et mille. Celle là elle redescend et elle part dans l'autre sens]A115*
Critère de cohérence des comportement des courbe sur [0 ; 20] et sur un intervalle non défini après vingt A111: si la croissance des xiyi est faible sur [0 ; 20] alors la croissance de l'approximation est faible après vingt A118, A148, A150, A167 : valide f2 A152, invalide	*[**ROMARIC** : ouais mais disons que c'est sur zéro vingt, là tu as vingt points. Déjà tu regardes le comportement entre zéro et cent c'est plus du tout la même chose.* ***BENJAMIN** : oui mais justement* ***ROMARIC** : les fonctions d'approximation on nous indique pas comment elles ont été calculées*

f4 (défini par un polynôme qui ne tiens compte que de l'intervalle [19 ; 20] A136, A138)	*mais à chaque fois cela doit être plus ou moins en fonction des données. Donc comment est-ce que tu peux essayer d'obtenir des informations sur]A111…* *(…)* ***[ROMARIC** : non mais après je sais pas si tu calcules une pseudo dérivée pour voir aux alentours de vingt comment d'après les données qu'on a ça va continuer à grimper un peu A117. Si tu prend ^par exemple f4, non pas f4 on a dit que ça marchait pas. Si tu prends celui là… ça… à non la dérivée est assez plate, ça grimpe que beaucoup plus tard A118.]* *(…)* ***[ROMARIC** : Ouais mais disons que là en fait je sais pas comment elle est construite donc s'il utilise juste le dernier polynôme c'est vraiment A136…]* *(…)* ***[ROMARIC** : Oui il utilise le dernier et pourquoi celui là et pas un autre quoi ? Tu regardes la différence en le dis huit dix neuf et le dix neuf vingt, il y en a un qui va tendre vers moins l'infini celui juste après il va tendre vers plus l'infini A138]* *(…)* ***[ROMARIC** : Non mais après ce qu'on peut aussi faire c'est un espèce d'ordre des grandeurs des variations A148. Parce que celle là f5…* ***BENJAMIN** : zéro quatre vingt* ***ROMARIC** : Et l'autre ?* ***BENJAMIN** : Et l'autre elle reste collée entre un intervalle, enfin suivant un intervalle qui est relativement pas gros A149.* ***ROMARIC** : Et bon quand tu regardes cela au départ tu as une croissance qui est quand même assez lente.* ***BENJAMIN** : Ah oui ! Ah cela c'est vrai.*

	ROMARIC *: le problème c'est que là c'est une croissance assez lente, et dans le même ordre d'idée ça jusqu'ici ça grimpe pas de beaucoup, ça passe… c'est un coefficient quoi… entre le point vingt et le point quarante c'est multiplié par deux quoi pas plus.* ***BENJAMIN*** *: Cinq dix quinze… ouais ça doit être ça.* ***ROMARIC*** *: Bon après si je dis entre zéro et vingt il y a un faible accroissement donc cela va continuer à croître faiblement A150…* ***BENJAMIN*** *: c'est de l'extrapolation* ***ROMARIC*** *: Ouais c'est de l'extrapolation… A151* ***BENJAMIN*** *: Et donc tu choisirais laquelle ?* ***ROMARIC*** *: Moi je choisirais plutôt f2 mais bon A152…]*
Evaluation visuelles des pentes de courbes f1, f2, f3, et f5 A122: ce opérateur est invalidé par Benjamin qui invoque le mode de représentation dans Maple Evaluation de la croissance des points xiyi sur zéro vingt : y20 – y0	*[**ROMARIC** : Ben disons là si tu regardes pour f2 la pente elle est plus marquée quoi. Enfin bon, c'est vrai après c'est des problèmes d'ordre de grandeur]A122*
Evaluation de la croissance de f2 : f2(0)-f2(60) ≈ petit A149 Evaluation de la croissance de f5 : f5(0)-f5(100) ≈ 80 A149	***ROMARIC*** *: Parce que celle là f5…* ***BENJAMIN*** *: zéro quatre vingt* ***ROMARIC*** *: Et l'autre ?* ***BENJAMIN*** *: Et l'autre elle reste collée entre un intervalle, enfin suivant un intervalle qui est relativement pas gros A149.*
Comparaison des croissances de f2 et f5 après vingt : si f2(40) < f5(40) et f2, f5 sont croissance sur [20 ; 40] alors croissance de f2 < croissance de f5 A150	***ROMARIC*** *: Et bon quand tu regardes cela au départ tu as une croissance qui est quand même assez lente.* ***BENJAMIN*** *: Ah oui ! Ah cela c'est vrai.* ***ROMARIC*** *: le problème c'est que là c'est une croissance assez lente, et dans le même ordre*

	d'idée ça jusqu'ici ça grimpe pas de beaucoup, ça passe… c'est un coefficient quoi… entre le point vingt et le point quarante c'est multiplié par deux quoi pas plus. ***BENJAMIN** : Cinq dix quinze… ouais ça doit être ça.* ***ROMARIC** : Bon après si je dis entre zéro et vingt il y a un faible accroissement donc cela va continuer à croitre faiblement A150…*
Comparaison de la vitesse de croissance en fonction du degré (grimper) en évoquant le registre graphique A133	***ROMARIC** : Ben disons que là après c'est un problème d'ordre de grandeur. Celle là elle va d'un point de vue accroissement c'est un polynôme d'ordre deux. Ca c'est un polynôme d'ordre trois cela va grimper plus vite.* ***BENJAMIN** : Donc est-ce qu'on grade ou on garde pas ?* ***ROMARIC** : Ben a priori je garderais pas parce qu'à priori en plus l'infini le comportement va…* ***BENJAMIN** : Va diverger* ***ROMARIC** : va être divergent A133*
Eléments du système de représentation analytique	
Evaluation des limites en plus l'infini de f1, f2, f3 et f5 A95, A97	***ROMARIC** : De toute façon là le premier il part vers plus l'infini ; cela c'est moins l'infini, plus l'infini. Celui là il est pas défini au-delà de A95…* ***BENJAMIN** : celui là on l'avait déjà écarté au départ sur zéro vingt et si tu veux passer sur tous les échantillons c'est quand même pénible. Je pense que celui là est beaucoup trop coûteux, beaucoup… il veut trop bien faire du coup tu perds A96. Et vas-y f5 ?* ***ROMARIC** : f5 il part en plus l'infini aussi. Donc on en a trois qui… ces trois là qui A97*
Limite de P à l'infini = limite de l'approximation à l'infini	
Degré de P = degré approximation : invalide f1 et f3 A134	*[**BENJAMIN** : Donc déjà on prend ni la un ni la trois alors ?*

	***ROMARIC** : ouais parce que là c'est aussi un polynôme de degré quatre. Et là on se retrouve avec les deux polynômes de degré trois]A134*
Décisions	
Invalidation de la représentation graphique sur zéro comme bon représentant de l'allure de la courbe à l'infini : Romaric invoque qu'on n'est pas garanti d'avoir tous les changements de variation et contrôle cette affirmation en évoquant la représentation graphique de f2 sur [0 ; 60] qui ne montre pas la décroissance à l'infini A125	***ROMARIC** : Ouais. Un mauvais point pour Maple. De toute façon en plus là c'est pareil on a choisit de les représenter entre zéro et cent A125…*
Cette difficulté est dépassée par l'évaluation des limites à l'infini à partir des représentations algébrique et qui permet de garantir que les représentation sur [0 ; 100] indiquent un comportement satisfaisant A127 et abouti à un choix de f2 avec une faible conviction A167.	***ROMARIC** : Ben celle là tu la représentait entre zéro et soixante tu voyaiS plus tellement la différence quoi A127* *(…)* *[**ROMARIC** : Enfin bon pour ce que cela vaut A165.* ***BENJAMIN** : c'est par pire que… par défaut je prendrai la fonction f2 A166.* ***NATHALIE** : d'accord. Donc si j'ai bien suivi, vous avez éliminé toutes les autres après vous avez hésité entre f2 et f5 et finalement vous choisissez f2…* ***ROMARIC** : C'est sur un critère assez subjectif de croissance lente au vu des courbes qu'on a avec Maple A167]*

Résumé des éléments issus de l'atomisation pour Romaric:

Système de représentation graphique :

- Tracer (non conjointement) des représentations de f1, f2, f3 et f5sur [0 ; 100]
- Estimation perceptive sur les représentations graphiques des valeurs de f1, f2, f3 et f5 en 100 : f1(100) ≈ 20 ; f2 décroît en 100 ; f3(100) ≈ 1000 ; f5(100) ≈ 80 A115

- o Critère de cohérence des comportement des courbe sur [0 ; 20] et sur un intervalle non défini après vingt A111: si la croissance des xiyi est faible sur [0 ; 20] alors la croissance de l'approximation est faible après vingt A118, A148, A150, A167 : valide f2 A152, invalide f4 (défini par un polynôme qui ne tiens compte que de l'intervalle [19 ; 20] A136, A138)
- o Evaluation visuelles des pentes de courbes f1, f2, f3, et f5 A122: ce opérateur est invalidé par Benjamin qui invoque le mode de représentation dans Maple
- o Evaluation de la croissance des points xiyi sur zéro vingt : y20 – y0
- o Evaluation de la croissance de f2 : f2(0)- f2(60) ≈ petit A149,
- o Evaluation de la croissance de f5 : f5(0)- f5(100) ≈ 80 A149,
- o Comparaison des croissances de f2 et f5 après vingt : si f2(40) < f5(40) et f2, f5 sont croissance sur [20 ; 40] alors croissance de f2 < croissance de f5 A150
- o Comparaison de la vitesse de croissance en fonction du degré (grimper) en évoquant le registre graphique A133

Système de représentation analytique :

- o Evaluation des limites en plus l'infini de f1, f2, f3 et f5 A95, A97
- o Limite de P à l'infini = limite de l'approximation à l'infini
- o Degré de P = degré approximation : invalide f1 et f3 A134

Décisions :

- o Invalidation de la représentation graphique sur zéro comme bon représentant de l'allure de la courbe à l'infini : Romaric invoque qu'on n'est pas garanti d'avoir tous les changements de variation et contrôle cette affirmation en évoquant la représentation graphique de f2 sur [0 ; 60] qui ne montre pas la décroissance à l'infini A125.
- o Cette difficulté est dépassée par l'évaluation des limites à l'infini à partir des représentations algébrique et qui permet de garantir que les représentation sur [0 ; 100] indiquent un comportement satisfaisant A127

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents :

- o L'approximation de P est un polynôme de degré 3
- o L'approximation de P a la même limite à l'infini que P.

- La courbe de l'approximation de P à l'infini a la même courbure est celle de P

Contrôles pour l'instrumentation :

- Degré de P = degré approximation
- Limite de P à l'infini = limite de l'approximation à l'infini
- Si la courbe de f est tracée sur un intervalle grand alors elle donne une bonne représentation de la courbure de la courbe de f
- Si la croissance des xiyi est faible sur [0 ; 20] alors la croissance de l'approximation est faible après vingt
- Si fj(100) > fk(100) alors courbure de fj > courbure de fk

Opérateurs

- Evaluation des limites en plus l'infini des fj
- Evaluation des degrés des fj
- Tracer les représentation graphique des fj sur [0 ; 100]
- Evaluation visuelle des valeurs fj(100)

Systèmes de représentation :

La conception mobilise les représentations analytique et graphique, mais il n'existe pas de contrôle liant les propriétés des deux types de représentations.

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Les représentations analytiques, dans lequel s'exprime un classement des représentations des fonctions par le degré des polynômes, permet l'invalidation de f1, f3 et f4. Si la limite de P était connue, le registre analytique permettrait certainement un choix entre f2 et f5 selon le critère « Limite de P à l'infini = limite de l'approximation à l'infini ». Ce n'est pas le cas, et l'on voit se mettre en place la construction d'opérateurs de traitement du registre graphique, guidé par le contrôle référent sur la courbure de la fonction. En particulier, un critère de cohérence entre la courbure de la représentation sur [0 ; 20] et à l'infini se met en place, sans une grande conviction des élèves. Ces critères sont contingents aux représentations graphiques choisies par les élèves (évaluations ponctuelles sur les courbes sur [0 ; 100] et courbes sur [0 ; 20]) et ne se réfèrent pas un contrôle qui les valident. Le contrôle sur la courbure de la représentation graphique à l'infini s'instrumente difficilement et ne permet pas d'aboutir à un choix. Il mène à un choix de f2, avec peu de conviction. On voit en oeuvre les critères de la conception analytique qui mène au choix de f2 ou f5. L'incertitude sur f2 ou f5 est trachée au moyen des contrôles portants sur les représentations graphiques dont il est difficile d'évaluer s'ils sont le signe d'une conception courbe, en raison de la faible conviction donnée au choix de f2 que ces éléments permettent de faire.

6.2 Benjamin

6.2.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20] :

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation graphique	
Tracer les courbes des fj sur [0 ; 20] A1	*[**ROMARIC** : Je propose de regarder d'abord les têtes des…* ***BENJAMIN** : des fonctions ? Ouais je suis d'accord.* ***ROMARIC** : Ouais A1]*
La courbe de l'approximation a une allure conforme à celle d'un polynôme de degré 3 : invalide f4 A15, A25, A32	*[**BENJAMIN** : mais c'est un comportement qui est assez chaotique quand même enfin]A15* *(...)* *[**BENJAMIN** : Surtout t'essaie d'avoir un comportement qui serait assez similaire d'une courbe de degré trois. Donc a priori tu peux déjà l'éviter] A25* *(...)* *[**BENJAMIN** : la proposition quatre inaudible parce que c'est pas un comportement de polynôme de degré trois] A32*
Eléments du système de représentation analytique	
Etre du degré de P : A6 Ce critère est invalidé par l'allure de la représentation graphique de f1 qui est conforme à celle d'un polynôme de	*[**BENJAMIN** : Ouais. Approximer un polynôme de degré trois avec un polynôme de degré deux je sais pas c'est marrant] A6* *(...)* *[**BENJAMIN** : On peut peut-être discuter dans*

degré 3 A33-A35, A49-A50 Gestion de ce conflit : Relation entre les valeurs des coefficients et l'allure des courbes A52 Ce critère est en conflit avec le choix de f3 : A78	*l'ordre quand même. Un polynôme de degré deux qui représente un polynôme de degré trois A33.* ***ROMARIC** : C'est lequel, c'est le rouge.* ***BENJAMIN** : Le problème c'est qu'on voit pas bien. Si le rouge c'est celui là non ?* ***ROMARIC** : Attends on va remonter, si le rouge c'est celui-là A34.* ***BENJAMIN** : Alors… son comportement a pas l'air aberrant comparé à A35]* *(...)* ***BENJAMIN** : C'est marrant parce qu'à première vue j'aurai immédiatement rejeté la proposition f1 et f3. Parce que c'était pas des polynômes de degré trois A49. Mais quand tu regardes la représentation graphique en fait tu te rends compte que c'est super proche A50* *(...)* *[**BENJAMIN** : ouais donc du coup sur un intervalle c'est pas suffisant… Ah oui je suis d'accord sur un petit intervalle le degré il a pas suffisamment de poids vis-à-vis du coefficient qui lui est attribué je pense, à chaque fois. Du coup les coefficients lui permettent sur zéro vingt de limiter ses dégâts. Effectivement A52]* *(...)* *[**BENJAMIN** : mais c'est assez bizarre de… ouais.* ***ROMARIC** : de vouloir approximer…* ***BENJAMIN** : Un polynôme de degré trois par un polynôme de degré quatre. Ah priori si on avait pris un polynôme de degré cinq on aurait peut être pu avoir quelque chose de mieux A78]*
Critère minimiser $\sum_{i=0}^{20}(f_j(xi)-yi)^2$ A8, A40 : valide f4 A17 Ce critère est identifié comme un outil	*[**BENJAMIN** : La méthode qui a l'air de s'imposer c'est des moindres carrés quand même A8]* *(...)* *[**ROMARIC** : Donc maintenant tu veux qu'on fasse*

institutionnel : A46 Contrôle : l'opérateur mesure la distance aux points : A58, permet d'anticiper la valeur nulle que renvoie l'opérateur pour f4 A63, invalide f5 A85	*la somme des différences au carré A45.* ***BENJAMIN*** *: Ouais. Je sais pas on a un outil alors autant l'utiliser A46]* *(...)* ***[BENJAMIN*** *Enfin ce que tu cherches à faire c'est une distance circulaire, c'est-à-dire sur un cercle tous les points sont à la même distance A58]* *(...)* ***[BENJAMIN*** *: oui du coup elle est assez éloignée des échantillons, d'ailleurs c'est la plus éloignée A85]*
Evaluation des $\sum_{i=0}^{20}(f_j(xi)-yi)^2$, j= 1..5	
Décisions	
Validation de f3 qui a une allure conforme et qui minimise l'opérateur $\sum_{i=0}^{20}(f_j(xi)-yi)^2$ A68, A89	***[BENJAMIN*** *: Et le dernier c'est zéro dix huit le cinq A67. Donc apparemment d'après ce qu'on a dit, si on reste cohérent avec ce qu'on a dit, en ayant éliminé à cause de sa forme la fonction f4 on garde la fonction f3 qui elle semble avoir une forme potable. Elle a d'abord une forme potable et dont l'erreur par la méthode des moindres carrés minimise le résultat des erreur A68]* *(...)* ***[BENJAMIN*** *: Sur zéro vingt on a choisi f3.* ***NATHALIE*** *: parce que c'est le meilleur du point de vue de votre critère moindre carré c'est ça ?* ***BENJAMIN*** *: oui c'est celle qui minimise la distance aux échantillons.* ***ROMARIC*** *: En oubliant celle qui passe par tous les points et qui a vraiment pas une tête de polynôme A89]*

Résumé des éléments issus de l'atomisation

Système de représentation graphique :

- Tracer les courbes des fj sur [0 ; 20] A1
- Critère « passer par tous les points xiyi A2

- La courbe de l'approximation a une allure conforme à celle d'un polynôme de degré 3 : invalide f4 A16, A25, A32

Système de représentation analytique :

- Etre du degré de P : A6,
  - Ce critère est en conflit avec le choix de f3 : A78
  - Ce critère est invalidé par l'allure de la représentation graphique de f1 qui est conforme à celle d'un polynôme de degré 3 A33-A35, A49-A50
  - Gestion de ce conflit : Relation entre les valeurs des coefficients et l'allure des courbes A52
- Critère minimiser $\sum_{i=0}^{20}(f_j(xi)-yi)^2$ A8, A40 : valide f4 A17
  - Ce critère est identifié comme un outil institutionnel : A46
  - Contrôle : l'opérateur mesure la distance aux points : A58, permet d'anticiper la valeur nulle que renvoie l'opérateur pour f4 A63, invalide f5 A85
- Evaluation des $\sum_{i=0}^{20}(f_j(xi)-yi)^2$, j= 1..5

Décisions :

- Validation de f3 qui a une allure conforme et qui minimise l'opérateur $\sum_{i=0}^{20}(f_j(xi)-yi)^2$ A68, A89

Analyse de la cohérence interne des éléments :

On retrouve les mêmes éléments que ceux de la conception de Romaric, nous ne les réécrirons pas ici. La différence ici est l'apparition d'un **contrôle référent** portant sur le degré :

- l'approximation est du degré de P.

Ce contrôle est en conflit avec le choix imposé par les contrôles sur l'allure de la courbe et la proximité aux points. On voit donc ce construire des contrôles de gestion de ce conflit, s'appuyant sur le constat que les représentations graphiques de f1, f2 et f3, qui sont de degré différents, sont visuellement très proches sur [0 ; 20] :

- Sur un intervalle de faible amplitude, sur la valeur des coefficients de plus haut de deux polynômes de degré différents peuvent permettre à ces polynômes d'être de bonnes approximations l'un de l'autre.

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Les commentaires faits pour la conception objet de Romaric sont les même pour la conception de Benjamin. On voit par ailleurs apparaître dans la conception de Benjamin un conflit entre le choix de la fonction f3, qui est de degré 4, et le fait de P soit de degré 3. On peut faire l'hypothèse que cela est la manifestation d'un contrôle d'une conception analytique ayant suffisamment de force pour s'opposer au choix de f3 donnée par des contrôles de la conception objet. Ce conflit est résolu parce que les représentations graphique de f2 (de degré 3) et f3 (de degré 4) donnent à voir des courbes très proches sur [0 ; 20].

6.2.2 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; +∝[:

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation analytique	
Evaluation des limites à l'infini : A93, A99 Critère implicite : limite de l'approximation = limite de P : ne permet pas de conclure en l'absence d'information sur la limite de P A99	***[BENJAMIN*** *: Alors déjà t'en a une qui se barre à moins l'infini et l'autre à plus l'infini. Zioup et zioup. Donc là ça a plus rien à voir A93]* *(...)* ***[BENJAMIN*** *: sachant aussi que le polynôme que tu cherches c'est un polynôme degré trois A98. Il y en a un qui part à plus l'infini et l'autre qui part à plus l'infini. Donc t'as un comportement qui est déjà… c'est complètement inversé. C'est dur, cela dépend des hypothèses que l'on fait sur les données, c'est super difficile. Il y a pas A99]*
Etre de degré 3 : A98, valide implicitement f2 ou f5 (contre f1, f2 et f3), A132, A134	*Voir ci-dessus*
Eléments du système de représentation graphique	
Tracer les représentations graphiques sur [0 ; 100] : A100	***[BENJAMIN*** *: On va les dessiner sur un intervalle plus grand A100 ?]*
Si P croit sur [0 ; 20] alors P croit à l'infini :	***[BENJAMIN*** *: Je sais pas moi je ferais une supposition comme quoi les données seraient*

A110, A112, Critère implicite : Croissance de l'approximation = croissance de P , valide f5 A143-A145	*représentatives de la courbe A110].* ***(…)*** ***[BENJAMIN*** *: Comme pour les sondages tu fais la supposition que le comportement de la courbe sur zéro vingt… enfin il va bien falloir faire une supposition à un moment donné sur comment se comporte la courbe après et on saura jamais parce qu'on l'a que sur zéro vingt. Enfin moi ce que je penserais, mais après c'est peut être complètement faux, mais c'est que la courbe se comporte à peu près de la même méthode si elle croit elle croîtra encore A112]* *(…)* ***[BENJAMIN*** *: Personnellement je Prendrais la fonction f5. A143* ***ROMARIC*** *: Parce que tu pense que la fonction elle va continuer à croître et à tendre vers plus l'infini ?* ***BENJAMIN*** *: Ouais mais c'est complètement arbitraire comme choix A144. C'est vrai qu'à part cela je vois pas très bien comment je pourrai trouver autre chose. Mais à ce moment là tu peux essayer de me prouver pourquoi est-ce que A145]…*
Evaluation de croissances : A124	***[BENJAMIN*** *: D'ailleurs c'est pas vrai parce que enfin… On te dit que c'est plus aplati parce que l'échelle est complètement disproportionnée donc après il faut faire gaffe au visuel. Là tout est représenté à la même taille mais ce n'est pas du tout à la même échelle A124]*
Décisions	
Le critère sur le degré valide f2 ou f5 comme une des meilleures approximations	
Le critère de croissance à l'infini valide f5	
Puis benjamin accepte de critère de Romaric sur la comparaison des courbure : Valide f2	***[BENJAMIN*** *: Ouais je pense que je vais changer d'avis je vais peut être prendre la fonction f2*

A164, mais faible conviction A166	*finalement avec une histoire de croissance qui doit être plus faible A164.* ***ROMARIC** : Enfin bon pour ce que cela vaut A165.* ***BENJAMIN** : c'est par pire que… par défaut je prendrai la fonction f2 A166]* ***BENJAMIN** : Ouais je pense que je vais changer d'avis je vais peut être prendre la fonction f2 finalement avec une histoire de croissance qui doit être plus faible A164.* ***ROMARIC** : Enfin bon pour ce que cela vaut A165.* ***BENJAMIN** : c'est par pire que… par défaut je prendrai la fonction f2 A166*

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation analytique :

- Evaluation des limites à l'infini : A93, A99
- Critère implicite : limite de l'approximation = limite de P : ne permet pas de conclure en l'absence d'information sur la limite de P A99
- Etre de degré 3 : A98, valide implicitement f2 ou f5 (contre f1, f2 et f3), A132, A134

Système de représentation graphique :

- Tracer les représentations graphiques sur [0 ; 100] : A100
- Si P croit sur [0 ; 20] alors P croit à l'infini : A110, A112,
  - Critère implicite : Croissance de l'approximation = croissance de P , valide f5 A143-A145
- Evaluation de croissances : A124

Décisions :

- Le critère sur le degré valide f2 ou f5 comme une des meilleures approximations Le critère de croissance à l'infini valide f5
- Puis benjamin accepte de critère de Romaric sur la comparaison des courbure : Valide f2 A164, mais faible conviction A166

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents :

- L'approximation de P est un polynôme de degré 3
- L'approximation de P a la même limite à l'infini que P.
- Croissance de l'approximation = croissance de P

Contrôles pour l'instrumentation :

- Degré de P = degré approximation
- Limite de P à l'infini = limite de l'approximation à l'infini
- Si les points xiyi croissent sur [0 ; 20] alors P croit à l'infini

Opérateurs

- Evaluation des limites en plus l'infini des fj
- Evaluation des degrés des fj
- Tracer les représentation graphique des fj sur [0 ; 100]
- Evaluation visuelle de la croissance des xiyi

Systèmes de représentation :

La conception mobilise les représentations analytique et graphique, mais il n'existe pas de contrôle liant les propriétés des deux types de représentations.

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Les critères sur le degré et les limites sont ceux d'une conception analytique. Comme pour Romaric, l'incertitude conséquente à l'absence d'information sur la limite de P à l'infini ne permet de trancher entre f2 ou f5. Benjamin construit un critère de cohérence entre le comportement des points xiyi sur [0 ; 20] et le comportement de P à l'infini : si les points xiyi croissent sur [0 ; 20] alors P croit à l'infini. Ce contrôle signale un champ très restreint des représentations graphiques possible d'un polynôme sur [0 ; +∝[lorsque l'on connaît sa représentation sur [0 ; 20]. Il existe cependant une faible conviction en ce critère, et Benjamin se rallie à un autre critère de Romaric au dernier moment. Il est ici difficile de faire la part entre la manifestation d'un contrôle solide et un effet de contrat expérimental poussant au choix d'une seule approximation « à tout prix ».

6.3 Discussion sur les relations contrôles / opérateurs

Pour le choix de l'approximation sur [0 ; 20] on voit comment les contrôles référents et les contrôles pour l'instrumentation se réfèrent respectivement au système de représentation graphique et au système de représentation analytique. Les représentations analytiques permettent aux contrôles référents de s'instrumentation et de leur offrir ainsi une solidité.

Il est intéressant d'observer, chez Benjamin, la gestion d'un conflit entre un contrôle sur le degré, qui relève d'une conception analytique, et les contrôles de la conception objet qui mènent au choix d'une approximation qui n'est pas du degré de P. Ce conflit est gérer tout d'abord dans le système de représentation graphique qui donne à voir des polynômes de degré différents ayant des représentations très proches : ce fait pourrait mener à l'abandon du critère sur le degré. Ce n'est pas le cas. En fait, Benjamin gère cela au niveau des représentations analytique en faisant l'hypothèse que la valeur des coefficients peut permettre « une compensation ». Ce qui permet de ne pas remettre en question la validité du critère sur le degré, et d'admettre la proximité visuelle des courbes de polynômes de degré différents. Cela peut être la marque que le critère sur le degré, que l'on peut rapprocher d'un critère d'identification de la fonction à sa représentation analytique, est résistant.

7. Christophe et Olivier

Christophe et olivier sont deux étudiants PLC2 mathématiques de l'IUFM de Grenoble.

7.1 Christophe

7.1.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20]

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation graphique	
L'approximation est centrée dans le nuage des points xi,yi et comporte peu de variations. A95, A129, A192 Contrôlé par la visualisation d'une allure de la courbe de P : A93, A94, A192	*[**Christophe :** Ah oui parce qu'en fait la question c'est justement pas approcher ces vingt valeurs. C'est approcher le plus près possible. C'est à dire que ces vingt valeurs on sait qu'il y a une erreur en plus. Donc c'est retrouver le truc en pointillé… C'est avoir la fonction qui… C'est pas parce qu'on fait passer A93…* ***Olivier :** C'est pas ça qu'on demande. C'est juste de choisir laquelle…* ***Christophe :** Oui mais on demande celle qui approche le mieux le truc que tu as justement bien fait que tu as tracé en pointillé ici.* ***Olivier :** Ah oui effectivement, A94 et c'est pas c'est toujours ton problème de…* ***Christophe :** Et donc le fait de faire passer… comme tu dis c'est à 10 pourcent… Le fait de faire passer quelque chose au plus près de tes petites croix et ben ça va peut être quand même assez loin du polynôme de départ.A95* *(…)* *[**Christophe :** … Avec un truc qui passe genre par exemple j'ai mes deux points je vais passer au*

	milieu…Et je suis sûr qu'il y a une fonction qui fait ça quoi, et elle est beaucoup plus précise que la fonction qui passe au dessus et en dessous] A129 *(…)* ***[Christophe :*** *Ouais elle va en dessus en dessous, le problème c'est qu'au lieu d'avoir une courbe qui passerait bien… disons que ça va… on a pas montré ça mais je pense que les aire, enfin si on calculait les aires, je sais plus on l'a fait tout à l'heure, entre deux points, si il y en a un au dessus un en dessous les aires par rapport à la vraie… la pointillée c'est P, les aires seraient plus grandes que une qui pas bien au milieu] A192*
Eléments du système de représentation analytique	
L'approximation minimise la distance aux points. A26, A27, A41, A72, A192 Ce minimum dépend de la norme choisie, A61, A67, A102 Plus le degré est grand plus le polynôme est proche des points A74, A177, A194	***[Christophe :*** *En fait je voudrais carrément une fonction que j'appellerais phi, comment ça pourrait être… A25 Ah oui non de toute façon oui, non mais c'est bête, de toute façon il faut que ça approche au mieux les vingt points donc forcément que c'est discret.* ***Olivier :*** *Ouais A26* ***Christophe :*** *Mais donc faut trouver la fonction f qui minimiserait cette fonction phi. A27]* ***(…)*** ***[Christophe :*** *De toute façon vu qu'on doit avoir celui qui minimise… enfin qui soit le plus petit possible, il suffit de le tester sur 1, 2, 3, 4, 5. A41]* *(…)* ***[Christophe :*** *Avec une autre norme ? Ah oui est-ce que c'est ça qui mesure le mieux ? A61]* *(…)* ***[Christophe :*** *On peut déjà changer de distance déjà pour voir si ça donne… A67]* *(…)* ***[Christophe :*** *T'es d'accord avec moi qu'il va bien falloir calculer justement les écarts, c'est ça qui va*

	être important. A72] *(…)* ***[Christophe :** Non mais c'est-à-dire que plus… si on savait pas que c'était une fonction du… si on savait pas que c'était un polynôme. Plus tu prends un polynôme, plus tu prends un polynôme qui approche plus tu as un degré qui est grand…] A74* *(…)* ***[Christophe :** On peut regarder la valeur absolue maintenant.* ***Olivier :** Ouais.* ***Christophe :** Pour voir si… On va retrouver à peu près les mêmes valeurs je pense.* ***Olivier :** Ouais il y a des chances A101.* ***Christophe :** On va peut être avoir une surprise hein. A102]* *(…)* *[**Christophe :** Ouais elle va en dessus en dessous, le problème c'est qu'au lieu d'avoir une courbe qui passerait bien… disons que ça va… on a pas montré ça mais je pense que les aire, enfin si on calculait les aires, je sais plus on l'a fait tout à l'heure, entre deux points, si il y en a un au dessus un en dessous les aires par rapport à la vraie… la pointillée c'est P, les aires seraient plus grandes que une qui pas bien au milieu A192. Et puis sinon, ouais et puis on a toujours aussi l'idée intuitive de se dire que plus un polynôme…* ***Olivier :** Un polynôme de degré trois il oscille pas autant que ce qu'on a vu… A193* ***Christophe :** Quand on a juste un nuage de points sans savoir que… qu'on a juste un nuage de points sans savoir que ça vient d'un polynôme, plus on prend un polynôme qui approxime, enfin plus grand est son degré, plus grande est… je pense qu'aussi ça joue ça A194]*

Opérateurs d'évaluation de la distance aux points : $\sum [f(xi)-yi]^2$ et $\sum \lvert f(xi)-yi \rvert$ A14, A20, A69, valide f4 A105	***[Christophe :** Oui alors… Attends ce qui approche…. Oui mais est-ce que tu veux que ça approche… Comment tu veux mesurer déjà ça ? Est-ce que tu veux faire les écarts par exemple yi moins… Enfin, on va dire par exemple ici. A14]* *(…)* *A69 : long échange sur la mise en œuvre de l'évaluation des distances dans Maple* *(…)* *[**Christophe :** Et un virgule quarante six. Bon.* ***Olivier :** OK, bon a priori ça serait f4.* ***Christophe :** On serait tenté de dire ça A105]*
Eléments du système de représentation numérique	
Comparaison des évaluations numériques de distances $\sum [f(xi)-yi]^2$, A80, A82	***[Christophe :** Le deux on obtient zéro virgule zéro, neuf, quatre, trois.* ***Olivier :** Attends, zéro virgule zéro, neuf, quatre, deux, sept. Bon je m'arrête là A80.* ***Christophe :** Ensuite le troisième… C'est mieux encore, zéro virgule zéro, huit, neuf, trois, huit, cinq. A81* ***Olivier :** OK, … neuf, trois, huit, cinq ?* ***Christophe :** Euh, la quatrième… C'est super précis la quatrième… Ouh là, oui.* ***Olivier :** Ah oui, d'accord, c'est ça c'est zéro cinq dix moins neuf ? A82]*
Evaluation des ordres de grandeur des écarts f(xi)-yi. A78	***[Christophe :** Donc là on va regarder ce que ça donne. Donc là, OK il donne toutes les valeurs des écarts, donc ça va c'est des nombres pas trop grands A78]*
Décisions	
Le critère proximité aux points désigne f4. Mais, le critère sur l'allure de l'approximation invalide f4	Voir ci-dessus
La prise en compte conjointe des critères	***[Christophe :** Et après comment on été obtenues les autres, je pense qu'elles ont été obtenues… le*

proximité aux points et être un polynôme permettent le choix de f3 comme meilleure approximation sur [0 ; 20], A156, A157, A159, A180	*polynôme de degré 2, 3 et 4 ça a été obtenu comment à ton avis A155 ? La 5 pour moi elle n'est pas précise. A156 Entre la 5 et la trois par exemple je suppose que la 3 elle a été faite pour être plus précise et puis même quand on a mesuré les écarts, c'était plus précis A157.* ***Olivier :** Ouais mais regarde notre écart il est foireux par ce que quand il est super petit… A158* ***Christophe :** Pour la 4 oui mais les autres elles on pas été construites comme ça aussi. Autant la quatre ce qu'on a fait c'est chaque petit bout de faire un truc, mais une fois elle passe au dessus une fois elle passe en dessous, alors que les autres on a essayé d'avoir un polynôme déjà A159]* *(…)* ***[Christophe :** Tu les as les écarts, ils sont en dessus.* ***Olivier :** De quoi ?* ***Christophe :** Les écarts.* ***Olivier :** Les écarts ils sont là.* ***Christophe :** Ouais alors regarde la troisième, t'as vu.* ***Olivier :** La troisième entre quoi et quoi ? Attends tu compares quoi là ?* ***Christophe :** Euh par rapport ben donc là c'était la somme des carrés et là c'est la somme des valeurs, c'est celle qui était quand même le plus petite si on oublie celle là.* ***Olivier :** Ouais OK, donc la trois sur zéro vingt quoi.* ***Christophe :** Ouais ça te dit comme ça ? A180]*

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation graphique :

- L'approximation est centrée dans le nuage des points xi,yi et comporte peu de variations. A95, A129, A193

- Contrôlé par la visualisation d'une allure de la courbe de P tracé au brouillon : A93, A94,

Système de représentation analytique :

- L'approximation minimise la distance aux points. A26, A27, A41, A72, A192
  - Ce minimum dépend de la norme choisie, A61, A67, A102
  - Plus le degré est grand plus le polynôme est proche des points A74, A177, A194
- Opérateurs d'évaluation de la distance aux points : $\sum$ [f(xi)-yi]^2 et $\sum$ |f(xi)-yi| A14, A20, A69, valide f4 A105

Système de représentation numérique :

- Comparaison des évaluations numériques des distances $\sum$ [f(xi)-yi]2, A80, A82
- Evaluation des ordres de grandeur des écarts f(xi)-yi. A78

Décisions :

- Le critère proximité aux points désigne f4. Mais, le sur l'allure de l'approximation invalide f4
- La prise en compte conjointe des critères proximité aux points et être un polynôme permettent le choix de f3 comme meilleure approximation sur [0 ; 20], A156, A157, A159, A180

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents :

- L'approximation de p minimise la distance aux points xiyi
- La courbe de l'approximation de P est conforme à celle d'un polynôme de degré 3

Contrôles pour l'instrumentation

- Si f est l'approximation de P alors f minimise $\sum$ [f(xi)-yi]^2 ou $\sum$ |f(xi)-yi|
- Si la courbe de l'approximation est conforme à celle d'un polynôme de degré 3 alors vérifier qu'elle comporte au plus deux changements de variation, continue

Opérateurs :

- Evaluer $\sum_{i=0}^{20}(yi - fj(xi))^2$ pour j = 1..5
- Evaluer $\sum_{i=0}^{20}\left|(yi - fj(xi))\right|$ pour j = 1..5
- Tracer dans Maple les courbes des fonctions fj, j=1..5
- Evaluer visuellement la continuité et les variations

Systèmes de représentation :

- Les opérateurs et les contrôles mobilisent les représentations graphique et analytique.

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

On retrouve les mêmes éléments que dans le protocole de Romaric et Benjamin. Les éléments sont, pour les mêmes raisons, ceux d'une conception objet.

7.1.2 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; +∝[:

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation analytique	
Degré de l'approximation égale le degré de P A172 Associé à la vitesse de croissance A189	*[**Christophe :** Déjà, si on part effectivement sur zéro plus l'infini, entre x 4, x carré, il vaut mieux prendre celle là c'est clair. (parle de f2 ou de f5)* ***Olivier :** Ouais il y a pas photo. Bon ben on est d'accord. Donc déjà c'est un truc de degré trois.] A172* *(…)* *[**Christophe :** Ouais c'est à dire qu'à l'infini même si le coefficient de x3 il est… bon il y a forcément une petite erreur dessus, il sera moins grave que être en x4 et puis avoir une croissance qui est beaucoup plus rapide A189]*
Décisions	
Le critère sur le degré valide f2 ou f5 F2 et f5 sont discriminé par un critère de cohérence sur [0 ; 20] et [0 + ∝[: le manque de qualité de l'approximation sur [à ; 20[n'autorise par une qualité d'approximation à l'infini. A172-A175	*[**Christophe :** Parce que le cinq… c'est le polynôme de degré trois qui passe par les… non c'est trop aléatoire. Elle passe par zéro…* ***Olivier :** Quoi aléatoire ?* ***Christophe :** Mais si regarde zéro, six, treize et vingt. Il suffit que…* ***Olivier :** (lit) f est le polynôme de degré trois*

	prenant les valeurs f de zéro est égale à un virgule vingt deux… ***Christophe :*** *C'est à dire un virgule vingt deux ici, ce nombre là.* ***Olivier :*** *Ouais OK.* ***Christophe :*** *Un virgule quatre vingt quatre ce nombre là, d'accord ?* ***Olivier :*** *Ah oui donc en fait ils ont pris des points comme ça au milieu, il en ont pris quatre et puis A174…* ***Christophe :*** *Imagine que manque de pot ce zéro il soit très loin, il soit à huit ou neuf pourcent d'erreur, celui là il soit à huit ou neuf pourcent d'erreur* ***Olivier :*** *Ouais, ouais, ouais.* ***Christophe :*** *Imagine que les quatre soient par exemple complètement au dessus.* ***Olivier :*** *Oui, oui, je suis d'accord.* ***Christophe :*** *Donc c'est beaucoup trop aléatoire, celle là elle est approximée sur quatre points.* ***Olivier :*** *Pris à des intervalles différents mais…* ***Christophe :*** *Ouais mais après c'est une question de chance on peut pas…* ***Olivier :*** *Ouais je suis d'accord] A175*

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Eléments du système de représentation analytique :

- Degré de l'approximation égale le degré de P A172
- Associé à la vitesse de croissance A189

Décisions :

Le critère sur le degré valide f2 ou f5

F2 et f5 sont discriminé par un critère de cohérence sur [0 ; 20] et [0 + ∝[: le manque de qualité de l'approximation sur [0 ; 20[n'autorise par une qualité d'approximation à l'infini. A172-A175

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôle référent :

Degré de l'approximation = degré de P.

Opérateur :

Evaluation des degrés des fj

Système de représentation :

Analytique.

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Il y a très peu d'éléments qui sont ici identifié. La décision se réfère à un contrôle sur le degré, et renvoie visiblement à une conception analytique, qui valide f2 ou f5. Ce critère semble supporté par l'idée d'une vitesse de croissance : cela évoque la propriété qui dit que la limite à l'infini d'un polynôme est celle du coefficient de plus haut degré. Christophe cherche à discriminer f2 et f5, et invoque un critère de cohérence du comportement sur [0 ; 20] et sur [0 ; +∝[. Il est difficile ici de mesurer la part de l'effet de contrat qui pousserait à ne choisir qu'une seule approximation (voir analyse a priori).

7.2 Olivier

7.2.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20] :

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation analytique	
L'approximation minimise la distance aux valeurs yi, A12 Ce minimum dépend de la norme choisie A58, A60, A64, A65, A66 Opérateurs d'évaluation de cette distance : ∑	***[Olivier :*** *A ce moment là on peut te demander, OK. Bon, ben il va falloir se donner une distance, je sais pas un truc.A12]* ***(…)*** ***[Olivier :*** *Ouais donc du coup tu… Ouais donc en fait c'est ça. Tu as tes points.*

$[f(xi)-yi]^2$ et $\sum \|f(xi)-yi\|$ A18, A20, A21, A69	***Christophe :*** *Oui mais là on va le faire point par point.* ***Olivier :*** *Ouais je suis d'accord. A18]* ***[Christophe :*** *Oui mais est-ce que c'est forcément…* ***Olivier :*** *Oui ça peut marcher en ces points là et tu peux avoir des trucs qui merdent complètement… A19* ***Christophe :*** *Oui alors dans ce cas là… En fait on va créer une fonction. On va créer la fonction… à chaque fois la fonction associée ça pourrait être phi…* ***Olivier :*** *De quoi de l'écart ?* ***Christophe :*** *Ouais la fonction de l'écart.* ***Olivier :*** *Donc phi de xi. A20* ***Christophe :*** *Ouais donc par exemple on l'appellera phi 1 pour la première.] A21* *(…)* ***[Olivier :*** *Ce qu'il y a c'est que l'histoire de meilleure approximation ça dépend aussi de la distance que tu te donnes quoi. A58 Et puis l'espace des polynômes aussi. A59* ***Christophe :*** *Hum. Donc f4 c'est…* ***Olivier :*** *Donc on prend aussi avec une autre norme, style je sais pas la somme des valeurs absolues, quelque chose comme ça A60]* *(…)* *[**Olivier :** Non mais on a vu ça là … Ah mais non t'étais pas là toi en stat. Il y a une histoire que la moyenne… quand tu fais tu sais entre la moyenne et la médiane. En fait la moyenne elle minimise ça là…* ***Christophe :*** *Oui voilà ouais…* ***Olivier :*** *C'est cette distance là et la médiane elle minimise pour la somme des écarts comme ça là yi moins f de xi avec les valeurs absolues. A64*

	Christophe : *D'accord.* ***Olivier :*** *Donc a priori, moyenne et médiane ça a rien à voir A65 et puis euh tu vois bien qu'en changeant de distance tu changes de minimum. A66]* *(...)* *A69 : échanges sur la mise en œuvre des évaluations des distances 1 et 2 dans Maple.*
La proximité aux valeurs yi garantit une certaine proximité à P(xi), A34	***Olivier*** *: Hop, là t'as yi, puis là t'as un truc moins 10 pourcent et puis après t'as tes f1 de xi. A33 Alors je sais pas ta fonction ça peut être n'importe quoi... f1. Et donc l'idée c'est de mesurer la distance entre ça et puis le point qu'on avait là quoi. Je sais pas si tu arrives à voir sur mon dessin. A34*
La qualité de l'approximation dépend de la proximité des données yi aux valeurs P(xi) A132, A133	***[Christophe :*** *Je pense qu'il faudra passer... Je pense qu'il faudrait passer à l'intégrale quelque part mais je sais pas... A131 mais vu qu'on connaît toujours pas P... A132* ***Olivier :*** *... ouais l'intégrale...* *Silence.* ***Christophe :*** *P de zéro... euh...Alors attends c'est plus ou moins 10 pourcent.* ***Olivier :*** *C'est ça quoi t'as des portes enfin...Tu sais que ta fonction elle est là dedans, tu sais qu'il est là, après tu sais qu'elle est là ... (montre un schéma à C).* ***Christophe :*** *D'accord.* ***Olivier :*** *Tu sais qu'elle est là... Mais après comme tu dis prendre le point milieu entre lui et lui, tu vois si mon point il est là et puis il est là, mon point milieu il est vachement bas par rapport à la porte que j'ai quoi.] A133*
Eléments du système de représentation graphique	
La distance aux points ne permet pas de contrôler la qualité de l'approximation entre	***[Olivier :*** *Oui ça peut marcher en ces points là et tu peux avoir des trucs qui merdent complètement...*

les points. A19, A36, A37	*A19]* *(…)* *[**Olivier :** Voilà c'est ça, celle là on sait pas quoi. P on connaît pas A36. Et effectivement là on va avoir une mesure discrète et tu peux avoir des big problèmes entre deux points.A37]* ***(…)***
La distance aux valeurs yi est contrôlée par la proximité graphique aux points xiyi A73	***Olivier :** Oui, oui, oui, mais on aurait pu faire premier jet. Comme ça s'il y avait une fonction qui partait à coté tu l'élimines d'emblée quoi. Tu vois sans forcément donner une distance…* ***Christophe :** Oui c'est vrai, tout à fait.* ***Olivier :** Mais bon… A73*
Décisions	
Evaluation du critère distance aux valeurs yi : on ne peut pas faire mieux car on prend en compte toutes les données connues. A124	***Olivier :** Ben si c'est elle qui approche le mieux (parle de f4) A123. Après ce qu'il y a c'est qu'il y a c'est qu'en fait on a mesuré une distance qui est discrète quoi donc il y a plein de trucs dont on ne tient pas compte.* ***Christophe :** Ouais* ***Olivier :** Mais on peut pas faire mieux parce qu'on a pas, entre deux points t'as aucune donnée. Donc tu peux pas… Là tu vois entre deux points consécutifs, tu sais rien. Donc ce qui serait bien c'est de savoir si effectivement… enfin on peut pas faire mieux que ça. Enfin sur quoi on va se baser quoi A124*
Le critère distance valide f4 comme meilleure approximation A105 • Perturbé par Christophe que invalide l'allure de la courbe de f4 qui est non conforme à celle d'un polynôme de degré 3 A143, A152, A193 • Cela mène à l'invalidation du critère de distance aux valeurs yi	***Christophe :** Et un virgule quarante six. Bon.* ***Olivier :** OK, bon a priori ça serait f4.* ***Christophe :** On serait tenté de dire ça A105* *(…)* ***Olivier :** Ouais tu sais juste qu'entre le point 5 et le point 6 elle aura globalement monté, mais entre temps elle peut faire fut fut fut A142. Enfin bon c'est de degré trois donc il y a peu de chance que ça fasse beaucoup de vagues entre deux points*

Ensuite, Olivier ne s'engage plus et adhère aux propositions de Christophe (choix de f3 sur les critères de Christophe)	*mais A143…* *(…)* ***[Christophe :** pour moi la 4 finalement je reviens dessus quoi. Le fait de passer en dessus en dessous en dessus en dessous.* ***Olivier :** Ouais je suis d'accord, elle passe par les points mais elle approche pas bien le polynôme A152]* *(…)* ***Olivier :** Un polynôme de degré trois il oscille pas autant que ce qu'on a vu… A193*

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation analytique :

- L'approximation minimise la distance aux valeurs yi, A12
- Ce minimum dépend de la norme choisie A58, A60, A64, A65, A66
- Opérateurs d'évaluation de cette distance : $\sum [f(xi)-yi]^2$ et $\sum |f(xi)-yi|$ A18, A20, A21, A69
- La proximité aux valeurs yi garantit une certaine proximité à P(xi), A34
- La qualité de l'approximation dépend de la proximité des données yi aux valeurs P(xi) A132, A133

Système de représentation graphique :

- La distance aux points ne permet pas de contrôler la qualité de l'approximation entre les points. A19, A36, A37
- La distance aux valeurs yi est contrôlée par la proximité graphique aux points xiyi A73

Décisions :

- Le critère distance valide f4 comme meilleure approximation A105
  - Perturbé par Christophe que invalide l'allure de la courbe de f4 qui est non conforme à celle d'un polynôme de degré 3 A143, A152, A193
  - Cela mène à l'invalidation du critère de distance aux valeurs yi
- Ensuite, Olivier ne s'engage plus et adhère aux propositions de Christophe (choix de f3 sur les critères de Christophe)

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents :

- L'approximation minimise la distance aux valeurs P(x), x appartenant à [0 ; 20]

Contrôles d'instrumentation :

- Si l'approximation minimise la distance aux valeurs yi alors cela garantit la proximité aux valeurs P(xi)
- Si f est l'approximation de P alors f minimise $\sum_{i=0}^{20}(yi - fj(xi))^2$ ou $\sum_{i=0}^{20}\left|(yi - fj(xi))\right|$, j = 1..5
- Si f est l'approximation de P alors la courbe de f est visuellement proche des points xiyi

Opérateurs :

- Evaluer $\sum_{i=0}^{20}(yi - fj(xi))^2$ pour j = 1..5
- Evaluer $\sum_{i=0}^{20}\left|(yi - fj(xi))\right|$ pour j = 1..5

Systèmes de représentation :

Analytique et graphique.

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Le contrôle référent porte sur la proximité des valeurs f(x) de l'approximation f aux valeurs P(x) du polynôme à approcher. Ce contrôle est potentiellement celui d'une conception objet. En effet, ce critère peut être instrumenté par l'évaluation d'une distance (f, P) sur [0 ; 20], ce que nous avons identifié comme un contrôle d'une conception objet dans l'analyse a priori. Or, les caractéristiques du problème ne permettent d'évaluer que la distance des valeurs f(xi) aux valeurs yi, qui ne sont pas celle de P(xi). La distance des f(x) aux valeurs P(xi) est contrôlée par le fait que P est un polynôme de degré 3, et que donc son comportement est contraint entre chaque xi : des variations importantes entre chaque xi ne sont pas autorisées. Hors ce dernier contrôle ne semble pas disponible pour la conception de Olivier. En effet, le choix de l'opérateur $\sum_{i=0}^{20}(yi - fj(xi))^2$ ou de l'opérateur $\sum_{i=0}^{20}\left|(yi - fj(xi))\right|$ valide f4. C'est

Christophe qui invalide f4, parce que sa courbe est non conforme à celle d'un polynôme de degré 3. Olivier adhère alors à ce point de vue. Ainsi, la conception de Olivier est une conception objet, mais on voit le rôle important des interactions entre Christophe et Olivier pour la construction de la conception d'Olivier dans ce problème.

7.2.2 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; $+\infty$[:

Les éléments identifiés sont les mêmes que ceux de la conception de Christophe. On peut cependant signaler que olivier fait un commentaire que laisse penser que les contrôles permettent de donner une validité sémantique au choix, mais ne sont pas considérés comme logiquement prouvés :

> « **Olivier** (*écrit*) : … croissance à l'infini A182… et puis l'histoire du choix des points pour f5 là. Donc choix des points A183 (*écrit*).
>
> **Christophe** : Ouais. Mais bon ce qui est franchement frustrant c'est que comment tu veux essayer de démontrer ça c'est… A184
>
> **Olivier :** Ben ouais, mais il y a pas marqué qu'il faut le démontrer il y a juste indiqué choisissez A185 »

7.3 Discussion sur les relations contrôles / opérateurs :

La possibilité du choix de deux opérateurs de distance aux points (Normes discrètes 1 et 2) montre bien la différence entre contrôle référent et contrôle pour l'instrumentation : le contrôle référents est le même (minimiser la distance aux valeurs yi) mais il existe deux contrôles d'instrumentation, un pour chaque norme.

Par ailleurs, il manque à la conception d'Olivier dans la première partie de la résolution un contrôle référent sur la conformité de la courbe de l'approximation à celle d'un polynôme de degré 3. Ainsi, la conception d'Olivier valide dans un premier temps f4. Mais les interactions avec Christophe permettent de construire ce contrôle référent, et ainsi, d'invalide f4 et de valider f3.

8. Tiziana et Séverine

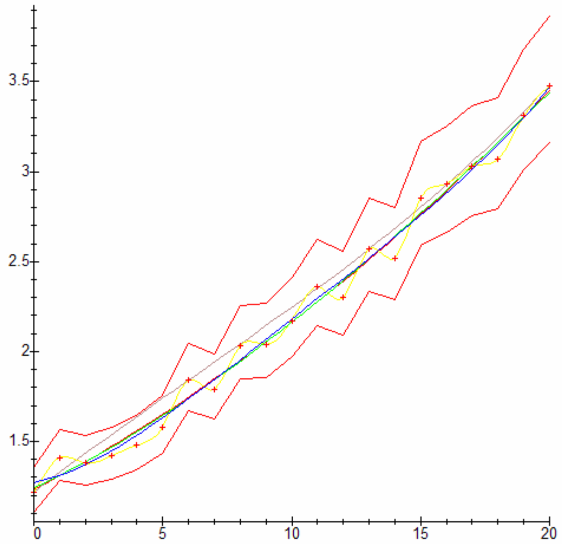
Tiziana et Séverine sont deux étudiantes PLC2 mathématiques de l'IUFM de Grenoble.

8.1 Tiziana

8.1.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20]:

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation graphique	
L'approximation a une courbe conforme à celle d'un polynôme A37, A153	***TIZIANA :*** *c'est f4, ça fait pas vraiment un polynôme de degré trois A35 (elle observe la courbe de f4)* *(…)* ***[TIZIANA :*** *Voilà la jaune elle passe par tous les points mais en même temps elle a pas du tout l'allure d'un polynôme (parle de f4) A153]*
Proximité graphique du polynôme et de son approximation A71, A115 Contrôlé par : Etre dans la zone des (yi+10%) / (yi–10%) A129, A139 Tracé des points xiyi + 10% reliés et tracé des points xiyi – 10% reliés (voir figure ci-contre)	***[TIZIANA :****oui maximum A69, et on peut connaître les f de xi A70. Et nous ce qu'on cherche à évaluer c'est que f de xi et p de xi soient proches A71]* *(…)* ***[TIZIANA :*** *Ouais mais en même temps elle passe près de beaucoup de points par rapport aux autres mais… c'est toujours le problème de savoir A115…**]*** ***(…)*** ***TIZIANA :*** *Est-ce qu'on peut faire tracer quelque chose qui nous donnerait…* ***SÉVERINE :*** *Un polynôme de degré trois…* ***TIZIANA :*** *Non justement entre quelle et quelle valeur. Une sorte de tuyau A129* *(…)* ***TIZIANA :*** *Je pense qu'on peut les faire relier.* ***SÉVERINE :*** *Oui mais tu sais pas si en vrai ils sont*

<table>
<tr><td></td><td>reliés.
TIZIANA : mais c'est pour faire un tuyau comme tu disais, dans lequel se situe P de xi. Enfin les P de xi A139
(…)
Les courbes des fj et le « tube » :
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Eléments du système de représentation analytique</td></tr>
<tr><td>Outils de calcul de la distance des fj(xi) aux valeurs yi : moindres carrés, norme infinie A7, A19, A76, A79, A81, A83, A92
Ces distances sont invalidées comme de bons outils de choix de l'approximation parce qu'une erreur qui entache les valeurs yi : A61, A65, A87, A146, A155</td><td>[TIZIANA : Il faut choisir en quel sens on va approcher la fonction. Tu vois si c'est avec des valeurs absolues, si c'est au sens des moindres carrés ou des choses comme ça A7]
(…)
[TIZIANA : Même tu connais pas… je pense que tu peux faire par exemple soit le maximum des valeurs absolues entre ce point là et le point qui est en dessous verticalement. Pour tous les points tu fais le maximum des valeurs absolues ou alors tu fais la somme des carrés des distances A19]
(…)
TIZIANA : Oui si on était sûr des yi déjà A61.
SÉVERINE : parce que dix pourcent sur trois quarante huit c'est trois dixième quand même A62 Du</td></tr>
</table>

	coup… Alors que là elles passent toutes par…Donc ça se trouve le point… ***TIZIANA :*** *Oui ça se trouve le point est pas bon mais A63…* *(…)* ***TIZIANA :*** *Oui parce qu'il y a deux choses il y a approche par rapport si c'était des valeurs vraiment sûres et puis il y a encore l'histoire des dix pourcents A65* *(…)* ***[TIZIANA :*** *ouais c'est partout A74 mais avec quelle convention pour la distance entre les deux. C'est quoi la distance A75 ?* ***TIZIANA :*** *En norme infini c'est max… des valeurs absolue des f de xi A76]* *(…)* ***[TIZIANA :*** *C'est x appartient… si on le fait sur zéro vingt pour l'instant. Donc P de x A78 sinon on a encore ça… Ca s'appelle comment ? C'est la somme des f de xi A79…]* *(…)* ***[TIZIANA :*** *ben c'est des distances différentes simplement il faut savoir laquelle on choisit. T'as les moindres carrés A81.* ***SÉVERINE :*** *Là c'est pareil il prend pour xi A82.* ***TIZIANA :*** *Oui c'est pour cela que je voulais faire xi au départ. Donc là c'est sur i égal de zéro à vingt. Et là c'est les xi A83]* *(…)* ***[TIZIANA :*** *Non ça sert à rien A91. Peut être qu'on peut déjà faire calculer ça par Maple avec toutes nos fonctions A92]* ***(…)*** ***[TIZIANA :*** *Mis à part que P est un polynôme de degré trois A86. Donc ça c'est ce qu'on cherche mais nous les P de xi on les connaît même pas on connaît*

	les yi A87] ***(…)*** ***[TIZIANA :** Selon moi il faudrait définir selon quel critère on dit que la fonction approche le polynôme. Et vue qu'on arrive pas trop à définir… Du fait qu'on ait des valeurs discrètes ça c'est une chose A145.* ***TIZIANA :** En plus qui sont fausses A146]* ***(…)*** ***TIZIANA :**Les autres elles ont plus l'allure d'un polynôme de degré trois mais la distance aux points A154… Oui vu qu'on sait pas vraiment où sont les points en fait A155*
Eléments du système de représentation formel	
L'approximation minimise la distance à P A58, A59, A107	***[TIZIANA :** moi je trouve que de toute façon le tracé donne pas beaucoup de chose A57. Je pense qu'il vaudrait mieux calculer la distance entre le polynôme et les fonctions qu'on nous donne A58. Maintenant il faut choisir la distance A59]* *(..)* ***[TIZIANA :** De toute façon on dispose de pas bien d'autres moyens pour évaluer la distance entre la fonction et le polynôme, même si c'est pas exactement ça qu'on évalue A107].*
Proximité des valeurs f(xi (où f désigne l'approximation) et des valeurs P(xi) A71	***[TIZIANA :** on peut connaître les f de xi A70. Et nous ce qu'on cherche à évaluer c'est que f de xi et p de xi soient proches A71]*
Encadrement des valeurs P(xi) par les valeurs connues yi, A132, A135	***[TIZIANA :** Oui, yi c'est compris entre 1,1 P de xi et zéro virgule neuf P de xi, donc tu peux bien trouver entre quoi et quoi est compris P de xi par rapport à yi. P de xi c'est plus grand que yi sur 1 virgule un A132]* *(…)* ***TIZIANA :** Non parce que là du coup tu as un vrai encadrement de P de xi A135*

Décisions	
f4 est reconnue comme minimisant le critère distance aux points et est invalidé car ne satisfait pas le critère « avoir la forme d'un polynôme » A97, A154	***[TIZIANA :*** *mais on dit choisissez la fonction qui approche au mieux ce polynôme. On ne demande pas que ce soit un polynôme A95]* *(…)* ***SÉVERINE :*** *je suis d'accord mais c'est que même si ça passe par les points là toi vu que ta fonction ce sera un polynôme elle peut pas avoir cette forme là A96.* ***TIZIANA :*** *Oui elle peut pas avoir cette forme là mais…A97* *(…)* ***TIZIANA :*** *Voilà la jaune elle passe par tous les points mais en même temps elle a pas du tout l'allure d'un polynôme A153. Les autres elles ont plus l'allure d'un polynôme de degré trois mais la distance aux points A154*
Tiziana essaie de dépasser cette contradiction. Elle met en place le critère spacio-graphique « être dans la zone des (yi+10%) / (yi-10%) » qui se révèle non discriminant car aucune fonction n'en sort.	
Tiziana décide finalement qu'elle ne peut pas choisir de meilleure approximation sur [0 ; 20]. A147	***TIZIANA :*** *Selon moi il faudrait définir selon quel critère on dit que la fonction approche le polynôme. Et vue qu'on arrive pas trop à définir… Du fait qu'on ait des valeurs discrètes ça c'est une chose A145.* ***TIZIANA :*** *En plus qui sont fausses A146.* ***TIZIANA :*** *Ben c'est qu'on ne sait pas plutôt. On dit pas qu'il y en a aucune, on dit qu'on sait pas A147*

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation graphique :

- L'approximation a une courbe conforme à celle d'un polynôme A37, A153
- Critère de proximité visuelle de la courbe du polynôme et de celle de l'approximation A71, A115

    - Contrôlé par : Etre dans la zone des (yi+10%) / (yi–10%) A129, A139
- Tracé des points xiyi + 10% reliés et tracé des points xiyi – 10% reliés

Système de représentation formel :

- L'approximation minimise la distance à P A58, A59, A107
    - Associé à la proximité des valeurs f(xi (où f désigne l'approximation) et des valeurs P(xi) A71
- Encadrement des valeurs P(xi) par les valeurs connues yi, A132, A135

Système de représentation analytique :

- Outils de calcul de la distance des fj(xi) aux valeurs yi : moindres carrés, norme infinie A7, A19, A76, A79, A81, A83, A92
- Ces distances sont invalidées comme de bons outils de choix de l'approximation parce qu'une erreur qui entache les valeurs yi : A61, A65, A87, A146, A155

Décisions :

- f4 est reconnue comme minimisant le critère distance aux points et est invalidé car ne satisfait pas le critère « avoir la forme d'un polynôme » A97, A154
- Tiziana essaie de dépasser cette contradiction. Elle met en place le critère spacio-graphique « être dans la zone des (yi+10%) / (yi-10%) » qui se révèle non discriminant car aucune fonction n'en sort.
- Tiziana décide finalement qu'elle ne peut pas choisir de meilleure approximation sur [0 ; 20]. A147

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents :

- L'approximation f de P minimise la distance (f, P)
- Les valeurs f(xi) de l'approximation f de P sont proches des valeurs f(xi)
- L'approximation de P a une courbe conforme à celle d'un polynôme de degré 3

Contrôles pour l'instrumentation :

La conception de Tiziana ne parvient pas à construire de contrôles pour l'instrumentation permettant l'évaluation de la distance (f, P) :

- l'opérateur de distance discrète des f(xi) au yi est invalidé car l'erreur sur les yi ne permet d'évaluer la distance des valeurs f(xi) aux valeurs P(xi)

- la construction du « tube », qui aurait pu garantir une proximité des valeurs fj(xi) aux valeurs P(xi) ne dépassant pas l'erreur sur les yi, se révèle non discriminante sur les fonction fj
- le critère sur l'allure d'un polynôme de degré 3, qui s'instrumente à partir des représentations graphiques des courbes des fj, est non discriminant sur f1, f2, f3 et f5

Opérateurs :

- Tracer les courbes des fj
- Tracer le « tube »
- Evaluer l'allure des courbes (variations et continuité)
- Encadrer les valeurs P(xi) au moyen des valeurs connues issues des valeurs yi.

Systèmes de représentation :

Graphique, analytique et formel.

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Les contrôles référents pourraient être ceux d'une conception objet. Mais la conception ne parvient pas à instrumenter ces contrôles et donc ne permet pas de choix d'une meilleure approximation. La conception décide qu'il n'est pas possible de choisir une meilleure approximation. Mais cette décision ne reflète pas que la conception a les moyens de valider que parmi les fonctions fj il n'existe pas de meilleure approximation de P, cette décision est la conséquence d'une impossibilité d'instrumenter les contrôles référents. Ainsi, le problème ne fait pas partie des problèmes accessibles aux conceptions de Tiziana et le système S<->M ne parvient pas à un équilibre « résolu ».

8.1.2 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; +∝[:

Agrégation : Identification des éléments issus de l'atomisation

Eléments issus des atomes	**Contextes du protocole**
Eléments du système de représentation analytique	
Limite de l'approximation à l'infini = limite de P à l'infini A126	***TIZIANA :*** *Parce que ça veux rien dire, comment tu peux savoir si ton polynôme il va partir en moins l'infini ou plus l'infini. A126.*
Degré de l'approximation = degré de P	*Implicite, les limites ne sont évaluées que sur les deux polynômes de degré 3*
Eléments du système de représentation graphique	
P peut avoir -∝ et +∝ en plus l'infini : contrôlé sur la représentation graphique probable de P sur [0 ; 20] : on ne sait pas quand la courbe de P coupe l'axe des abscisse et on ne peut pas garantir sont comportement à l'infini A127, A159	***TIZIANA :*** *Tu ne sais pas comment il coupe l'axe. Il y a des points positifs de toute façon. Eventuellement s'il avait coupé plusieurs fois l'axe, trois fois l'axe A127* *(…)* ***TIZIANA :*** *On a aucune idée de l'endroit où il coupe l'axe, enfin des endroits où il coupe l'axe. A159*
Décisions	
Les critères se révèlent non discriminants sur f2 et f5, car l'absence d'information sur le comportement de P en +∝ empêche leur mise en œuvre A 158, A159	***TIZIANA :*** *On sait même pas son comportement en plus l'infini, on sait même pas si ça va être positif ou négatif A158* *(…)* ***TIZIANA :*** *On a aucune idée de l'endroit où il coupe l'axe, enfin des endroits où il coupe l'axe. A159*
Tiziana décide qu'elle ne peut pas choisir de meilleure approximation à l'infini.	

Résumé des éléments issus de l'atomisation :

Système de représentation analytique :

- Limite en +∝ de l'approximation = limite en +∝ de P A126
- Degré de l'approximation = degré de P

Système de représentation graphique :

- P peut avoir -∝ et +∝ en plus l'infini : contrôlé sur la représentation graphique probable de P sur [0 ; 20] : on ne sait pas quand la courbe de P coupe l'axe des abscisse et on ne peut pas garantir sont comportement à l'infini A127, A159

Décisions :

- Les critères se révèlent non discriminants sur f2 et f5, car l'absence d'information sur le comportement de P en +∝ empêche leur mise en œuvre A 158, A159
- Tiziana décide qu'elle ne peut pas choisir de meilleure approximation à l'infini.

Analyse de la cohérence interne des éléments :

Contrôles référents :

- Degré de l'approximation = degré de P
- Limite en +∝ de l'approximation = limite en +∝ de P

Contrôles d'instrumentation :

- Si on ne connaît P que sur [0 ; 20] et si la courbe P est croissants sur [0 ; 20] alors on ne peut pas garantir la limite de P à l'infini (elle peut être + ou -∝).

Opérateurs :

- Evaluation des degrés des fj.

Systèmes de représentation :

- Analytique pour la construction des contrôles référents ; graphique pour le contrôle d'instrumentation

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Les contrôles référents sont ceux d'une conception analytique. Les éléments de l'analyse laisse penser que la connaissance du signe du coefficient de plus haut de gré de P permettrait de trancher sur le choix de f2 ou de f5 comme meilleure approximation. La conception établit cependant qu'il n'est pas possible de décider entre f2 ou f5, et les représentation graphiques jouent ici un rôle important pour envisager que la limite de P peut être + ou -∝.

8.2 Séverine :

8.2.1 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; 20] :

Analyse de la cohérence interne des éléments :

L'analyse permet de mettre en évidence, comme pour Tiziana, que la résolution est portée par les deux contrôles référents :

Contrôles référents :

- L'approximation f de P minimise la distance (f, P)
- L'approximation de P a une courbe conforme à celle d'un polynôme de degré 3

Encore comme dans l'analyse de Tiziana, l'analyse montre que la conception de Séverine ne parvient pas à instrumenter les contrôles référents. Les trois raisons données pour la conception de Tiziana restent valables :

- l'opérateur de distance discrète des f(xi) au yi est invalidé car l'erreur sur les yi ne permet d'évaluer la distance des valeurs f(xi) aux valeurs P(xi)
- la construction du « tube », qui aurait pu garantir une proximité des valeurs fj(xi) aux valeurs P(xi) ne dépassant pas l'erreur sur les yi, se révèle non discriminante sur les fonction fj
- le critère sur l'allure d'un polynôme de degré 3, qui s'instrumente à partir des représentations graphiques des courbes des fj, est non discriminant sur f1, f2, f3 et f5

On voit apparaître une autre raison qui pousse la conception de Séverine à invalide l'opérateur de distance discrète des f(xi) au yi comme un opérateur pertinent pour le choix d'une meilleure approximation : cet opérateur ne permet pas de prendre en compte la distance (f, p) entre les valeurs xi :

> « **TIZIANA :** ben c'est des distances différentes simplement il faut savoir laquelle on choisit. T'as les moindres carrés A81.
>
> **SÉVERINE :** Là c'est pareil il prend pour xi A82.
>
> **TIZIANA :** Oui c'est pour cela que je voulais faire xi au départ. Donc là c'est sur i égal de zéro à vingt. Et là c'est les xi A83.
>
> **SÉVERINE :** Ca me parait quand même bizarre de le faire qu'en xi A84 »

La seule connaissance des valeurs yi suggère de mesurer la distance aux points par un opérateur du type $\sum_{0}^{20}\left|f(xi)-yi\right|$.

Ces contraintes amènent des tentatives de modification de l'opérateur « distance aux points » : une prise en charge de l'erreur sur les yi suggère la transformation de $\sum_{0}^{20}\left|f(xi)-yi\right|$en $\sum_{0}^{20}\left|f(xi)-yi+0,34\right|$où 0,34 est le maximum de l'erreur possible. Finalement cette tentative est abandonnée car elle ne permet tout de même pas de contrôler la distance à P en dehors des points.

« **TIZIANA :** De toute façon on dispose de pas bien d'autres moyens pour évaluer la distance entre la fonction et le polynôme, même si c'est pas exactement ça qu'on évalue A107.

SÉVERINE : Ou alors tu peux rajouter l'erreur P(xi) yi A108.

TIZIANA : Oui tu fais une inégalité triangulaire. Genre ce que tu veux évaluer c'est ce qu'on disait là, là dedans.

SÉVERINE : Tu introduis le yi au milieu A109.

TIZIANA : Donc ça on sait le calculer et ça on sait qu'il y a une erreur de dix pourcent.

SÉVERINE : Oui mais le dix pourcent ça va dépendre de ton P de xi.

TIZIANA : Donc au mieux t'as une majoration de…

SÉVERINE : Au mieux t'as la majoration de zéro trente quatre. Dix pourcent de ça quoi A110.

TIZIANA : Bon tu veux calculer ces trucs là ou quoi ?

SÉVERINE : je sais pas.

Silence.

SÉVERINE : bon pour f4 c'est pas la peine.

TIZIANA : Pour f4 c'est pas la peine A111.

SÉVERINE : Pour f5 il faut le faire pour la moitié des points, enfin plus A112.

TIZIANA : Ce qui me gène c'est qu'on demande une fonction qui approche sur l'intervalle zéro vingt et c'est vrai que là…

SÉVERINE : Ouais onn'approche pas du tout sur l'intervalle.

TIZIANA : disons qu'on le fait en des points A113 »

Positionnement relativement aux conceptions courbe, analytique et objet :

Voir Tiziana ci-dessus.

8.2.2 Problème : choix d'une approximation sur [0 ; +∝[:

L'analyse est la même que pour Tiziana.

8.3 Discussion sur les relations contrôles / opérateurs :

Cette analyse met en évidente l'importance conjointe, pour la résolution d'un problème, des contrôles référents et de la possibilité d'instrumenter ces contrôles. Ici, les contrôles référents disponibles sont proches de ceux d'une conception courbe : contrôle sur la distance (f, P) et contrôle sur l'allure de la courbe de l'approximation. Cependant, la conception ne parvient pas à prendre en compte les caractéristiques particulières du problème en vue d'instrumenter les contrôles référents. Cette difficulté d'instrumentation aboutit à une faible confiance dans les critères construits, et à une décision d'abandon.

Chapitre 8 : Synthèses et résultats

Cette synthèse porte sur les deux questionnements de notre problématique.

Le premier volet donne la caractérisation des éléments des conceptions courbe, analytique et objet. Cela nous permet en conclusion d'avancer sur la compréhension de la conception d'une fonction comme objet.

Le deuxième volet analyse les places des contrôles référents, des contrôles d'instrumentation et des opérateurs dans l'organisation de l'action du sujet. Nous faisons alors fonctionner cette analyse pour comprendre les disfonctionnements possibles des conceptions.

1 Caractérisation des conceptions courbe, analytique et objet

1.1 Caractérisation des conceptions pour la recherche d'une approximation sur [0 ; 20]

Nous dressons dans le tableau ci-dessous le bilan des conclusions des analyses en termes des conceptions identifiées :

Binômes	Conception courbe	Conception analytique	Conception objet	Conception non déterminée
Olivier	●			
Elie	●			
Mathilde	●			
Cécile				●
Olivier	●			
Rémi	●			
David		●		
Imène		●		
Colin		●		
Yann		●		
Samir			●	
Laurent	○		○[41]	
Romaric			●	
Benjamin		○	●	
Christophe			●	
Olivier			●	
Tiziana				●
Séverine				●

Nous avons repris pour chacun des binômes les éléments « contrôles référents », « contrôles d'instrumentation », « opérateur » et « systèmes de représentation » afin d'établir une caractérisation des conceptions courbe, analytique et objet (le détail de ce bilan est disponible en annexe 10).

Pour les trois cas (Cécile, Tiziana, Séverine) où la conception reste indéterminée, nous donnerons une explication de la place des contrôles et des opérateurs dans l'organisation de la conduite : dans le cas de Cécile, nous montrerons que l'indétermination de la conception est

[41] Les puces claires signalent un changement de conception au cours de la résolution.

expliquée par l'absence de contrôle référent ; dans le cas de Tiziana et Séverine, l'indétermination est expliquée par l'absence de moyen d'instrumentation des contrôles référents.

Voici dans le tableau ci-dessus les contrôles des trois conceptions.

Eléments de la conception	**Courbe**	**Analytique**	**Objet**
Nature des contrôles référents (CR)	$CR1_{courbe}$: Allure globale de la courbe de l'approximation $CR2_{courbe}$: Proximité de la courbe de l'approximation aux points xiyi	$CR1_{ana}$: proximité des valeurs f(xi) de l'approximation aux valeurs yi ou proximité des points (xi, f(xi)) aux points xiyi	$CR1_{objet}$: Allure globale de la courbe de l'approximation $CR2_{objet}$: proximité des valeurs f(xi) de l'approximation aux valeurs yi ou proximité des points (xi, f(xi)) aux points xiyi
Nature des contrôles d'instrumentation (CI)	$CI1_{courbe}$: $CR1_{courbe}$ instrumenté par les représentations graphiques des courbes des fj $CR2_{courbe}$ non instrumenté	$CI1_{ana}$: $CR1_{ana}$ instrumenté par $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-P(xi))^2$	$CI1_{objet}$: $CR1_{objet}$ instrumenté par les représentations graphiques des courbes des fj $CI2_{objet}$: $CR2_{objet}$ instrumenté par $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-P(xi))^2$
Systèmes de représentation	Graphique	Analytique et graphique	Analytique et graphique

Dans la conception analytique, le contrôle référent porte sur la proximité des valeurs f(xi) de l'approximation aux valeurs P(xi) de P ou à un contrôle perceptif de la proximité de la courbe de l'approximation aux points xiyi. Ces contrôles s'instrumentent tous deux par l'évaluation, dans Maple, de l'opérateur $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-yi)^2$ au moyen des représentations analytiques.

La conception courbe se réfère à un contrôle sur l'allure de la courbe de l'approximation, qui doit être conforme à celle d'un polynôme de degré 3. Ce contrôle est associé à un autre portant sur la proximité de la courbe de l'approximation aux points xiyi. Cette proximité prend deux significations possibles. Elle peut se rapporter à une proximité globale de la courbe dans l'ensemble des points et s'instrumente par une vérification de la centration de la courbe dans les points ou par la vérification que la courbe de l'approximation est située dans une zone acceptable (au sens inférieur à l'erreur de 10%) autour des points xiyi. La proximité peut aussi porter sur une proximité ponctuelle de chacun des points (xi, f(xi)) de la courbe d'approximation aux points xiyi. Elle s'instrumente par une évaluation ponctuelle de cette proximité soit visuellement à partir des représentations dans Maple, soit en s'appuyant sur les évaluations $(f(xi), yi)_i$ permises par les représentations analytiques et mises en œuvre dans Maple.

La conception objet permet la gestion conjointe de deux contrôles référents, qui sont « concurrentiels ». D'une part, elle engage un contrôle référent sur l'allure globale de la courbe. D'autre part, elle engage un contrôle sur la proximité aux valeurs xiyi. L'évaluation de cette proximité s'instrumente par l'évaluation de mesures des écarts aux données yi dans Maple, ce qui est possible parce que les représentations analytiques des fj sont disponibles. Mais les deux contrôles référents sont concurrentiels : alors que l'évaluation des distances valide f4, le contrôle sur l'allure de la courbe invalide f4. Il s'agit pour la conception de hiérarchiser les critères afin d'autoriser une décision.

1.2 Conception de fonction comme objet

Les travaux de Sfard nous ont permis de dire qu'une conception de la fonction comme objet permettait de mettre en œuvre des opérations sur les représentations d'une fonction, mais aussi de faire des déclarations à propos de l'objet fonction – porter des jugements sur l'objet, sur ses propriétés, sur sa relation au problème (voir le chapitre 2 « Fonction comme objet et problématique de la validation »). L'analyse que nous venons de mener nous permet de montrer ce que cela signifie pour la résolution la résolution d'un problème particulier. Pasn ce problème, la conception objet se différencie notamment par les décisions qu'elle permet.

La conception courbe rend compte d'une identification de la fonction à la courbe, et donc l'approximation est définie par les propriétés graphiques de cette courbe. Cela ne permet pas d'instrumenter la proximité aux points.

Pour la conception analytique, les décisions sont permises par des évaluations effectuées sur les représentations analytiques. L'approximation est caractérisée par le fait de minimiser les valeurs d'un opérateur analytique. Cela ne permet pas de confronter cette propriété à d'autres propriétés de la fonction. Plus précisément, ces calculs ne permettent de prendre en compte des valeurs de l'approximation qu'en vingt points seulement. La conception ne mobilise pas de contrôle référent permettant de prendre en compte les propriétés de l'approximation sur l'ensemble de l'intervalle [0 ; 20]. Les représentations analytiques ne permettent pas à la conception de positionner le choix de f4 relativement à de telles propriétés.

Dans le cas de la conception objet, l'instrumentation des deux contrôles référents, nous l'avons dit plus haut, mène à des décisions contradictoires : d'un coté la validation de f4, de l'autre l'invalidation de f4. Le choix d'une approximation est rendue possible par une hiérarchisation des contrôles référents : d'abord préserver l'allure globale de la courbe, puis minimiser la distance aux points. Ainsi, l'approximation est un objet qualifié au moyen de différentes propriétés des représentations. Mais la gestion conjointe de deux contrôles référents concurrentiels montre que la fonction n'est pas identifiée aux propriétés de ces représentations. **L'objet existe au delà des différentes représentations, de leurs propriétés et des calculs sur ces représentations. Ces représentations sont au service des décisions (parce qu'elle permettent du contrôle ou la construction d'opérateurs). Cela permet la prise en compte de propriétés de l'approximation éventuellement concurrentielles en les hiérarchisant**, notamment parce que ces propriétés se réfèrent à des contrôles qui ne sont pas spécifiques d'une représentation particulière.

1.3 Conceptions identifiées pour la recherche d'une approximation sur [0 ; +∝[

Les analyses ont montré que les étudiants engageaient une conception analytique pour la recherche d'une meilleure approximation sur [0 ; + ∝[. La conception est dans ce cas caractérisée par un contrôle référent portant sur le degré de l'approximation – qui doit être celui de P. Ce contrôle est souvent associé à l'évocation des allures des courbes d'un polynôme de degré trois. Nous avons par ailleurs observé que beaucoup d'étudiants cherchent à gérer l'incertitude laissée par le fait qu'ils ne connaissent pas le signe du coefficient de plus haut degré. Il est probable qu'il y ait ici un effet de contrat expérimental, incitant à donner une réponse.

1.3.1 Conception analytique

Le contrôle référent de la conception analytique caractérise un polynôme à l'infini par son degré et le signe du coefficient de plus haut degré. Ainsi, l'ensemble des polynômes de degré trois admet deux représentants à l'infini. Ces représentants peuvent être représentés dans les systèmes analytique ou graphique (voir description du contrôle référent dans l'annexe 10).

1.3.2 Gestion de l'incertitude laissée par la conception analytique

L'incertitude laissée par l'absence d'information sur le signe de plus haut degré de P conduit certains des binômes, à construire différents types de contrôles.

- D'une part des contrôles sur les courbures des courbes des fonctions fj. Ces contrôles n'aboutissent pas à une décision, puisqu'ils ne peuvent pas se confronter à P, sur lequel il n'y a pas d'information après 20.
- D'autres part, les étudiants construisent des contrôles sur une cohérence de comportement des fonctions sur [0 ; 20] et à l'infini. Les uns tentent d'établir un critère de cohérence de comportement entre [0 : 20] et en $+\propto$, les autres valident qu'il n'existe pas de critère de cohérence.

(Voir l'annexe 11 pour le détails des contrôles sur les courbures et l'existence ou non d'un critère de cohérence).

1.3.3 Conclusion

Nous souhaitions savoir comment les sujets qui avaient engagés une conception courbe se saisissaient de la question de l'approximation à l'infini, et quels étaient les critères construits par les conceptions analytique et objet.

Nous pouvons en premier lieu constater une faible conscience qu'il n'est pas possible de connaître de comportement de P après 20.

Le contrôle référent, issu d'une conception analytique, est un contrôle sur le degré pour chacun des binômes. Cela semble marquer la grande importance de l'utilisation de la comparaison des degrés pour l'étude des fonctions à l'infini. On peut faire l'hypothèse que ce contrôle constitue une difficulté parce qu'il ne permet pas de considérer la différence de l'approximation et de P.

Les contrôles établissant un critère de cohérence sont souvent faiblement instrumentés. Ils sont accompagnés de signes montrant une faible conviction des étudiants. Cela laisse penser que la construction de ces contrôles est contingente à la situation et répond à un effet de contrat expérimental (voir analyse a priori).

2 Place des contrôles référents, des contrôles d'instrumentation et des opérateurs dans l'organisation de l'action

2.1 Introduction

Nous avons rappelé dans le chapitre 1 que le schème (Vergnaud 1990) rend compte de l'organisation de la conduite de l'action. Cette organisation nécessite des règles d'action, et des moyens de leur mise en œuvre. Nous avons plus précisément identifié que, parmi ces moyens, on trouve l'adéquation de l'action et du problème – cette adéquation concerne à la fois la reconnaissance de l'appartenance du problème à une classe et la prise en compte des caractéristiques particulières du problème traité – ; l'anticipation de l'action et l'adéquation du résultat obtenu à celui attendu ; la prise d'information.

Nous allons montrer comment les analyses que nous avons menées rendent compte de cette organisation, au moyen des contrôles référents, des contrôles pour l'instrumentation et des opérateurs.

2.2 La place des contrôles référents dans l'organisation de l'action

2.2.1 Les contrôles référents

Reprenons les contrôles référents identifiés dans nos analyses :

ELEMENTS DE LA CONCEPTION	Courbe	Analytique	Objet
Contrôles référents	CR1 : Allure globale de la courbe de l'approximation CR2 : Proximité de la courbe de l'approximation aux points xiyi	CR1 : proximité des valeurs f(xi) de l'approximation aux valeurs yi ou proximité des points (xi, f(xi)) aux points xiyi	CR1 : Allure globale de la courbe de l'approximation CR2 : proximité des valeurs f(xi) de l'approximation aux valeurs yi ou proximité des points (xi, f(xi)) aux points xiyi

Ces contrôles expriment les propriétés de l'approximation. Ainsi, le problème est reconnu comme un problème d'approximation, où l'approximation est caractérisée par ses propriétés. Les décisions sont réglées relativement à ces propriétés, dont elles sont le référent. Bien sûr, les propriétés de l'approximation retenues sont fortement dépendantes du problème particulier qui est traité. Ici, les informations disponibles ne permettent pas à la conception de prendre en compte toutes les propriétés d'une approximation éventuellement disponibles. Dans le cas de notre problème, nous avons pu voir émerger trois contrôles référents : sur l'allure globale de la courbe, sur la proximité des valeurs f(xi) aux valeurs yi, sur la position de la courbe de l'approximation dans les points xiyi. L'analyse des problèmes d'approximation menée au chapitre 5, montre qu'il existe d'autres contrôles référents disponibles : en particulier des contrôles sur les régularités de la fonction à approcher et de l'approximation et sur l'usage de l'approximation.

En conclusion, les contrôles référents identifient les objets du problème en les caractérisant par des propriétés. Ils permettent en cela à la conception de reconnaître le problème.

Lorsque la conception ne parvient pas à construire de contrôles référents, la conduite de l'action n'est pas possible : même si des actions sont menées, il n'existe pas de moyens d'évaluer et donc de valider l'action et donc de prendre de décision quand à la bonne résolution du problème. Dans ce cas, peuvent se substituer au contrôle référent d'une conception des contrôles liés au contrat, de l'action spéculative, etc.

2.2.2 Exemple de l'absence de contrôle référent : le cas de Cécile, pas de décision possible

Nous avons montré dans l'analyse du protocole de Mathilde et Cécile (Chapitre 7.2) comment l'absence de contrôle référent chez Cécile empêchait l'action, et la stabilité des décisions. Il est également intéressant de noter que l'absence de contrôle référent, qui permettrait au discours de ce référer à des propriétés mathématiques des objets visibles à l'écran de Maple, empêche l'échange d'information entre Mathilde et Cécile et les décisions : ces objets restent qualifiés en des termes « naïfs », c'est-à-dire ne permettant pas d'être traités par des opérateurs mathématiques et ne permettant pas aux deux étudiantes d'échanger sur ces objets. Finalement, en fin d'expérimentation, Cécile ne se prononce pas sur le choix d'une meilleure approximation. Notre analyse concluait que la conception engagée par Cécile restait indéterminée, ce qui est expliqué par l'absence de contrôle référent et l'absence de décision (voir dans ce chapitre, la synthèse 8.1.1).

2.3 La place des contrôles d'instrumentation dans l'organisation de l'action

2.3.1 Les contrôles d'instrumentation

Reprenons les contrôles référents identifiés dans nos analyses :

Contrôles d'instrumentation (CI)	$CI1_{courbe}$: $CR1_{courbe}$ instrumenté par les représentations graphiques des courbes des fj $CR2_{courbe}$ non instrumenté	$CI1_{ana}$: $CR1_{ana}$ instrumenté par $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-P(xi))^2$	$CI1_{objet}$: $CR1_{objet}$ instrumenté par les représentations graphiques des courbes des fj $CI2_{objet}$: $CR2_{objet}$ instrumenté par $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-P(xi))^2$

Les contrôles d'instrumentation expriment l'adéquation des contrôles référents à l'action – c'est-à-dire à la mise en œuvre d'un opérateur ou d'une séquence d'opérateurs. Cela nécessite que les caractéristiques particulières de la situation soient prises en compte pour permettre l'action. Il est possible que la conception mette en oeuvre des contrôles référents sans que l'action ne soit possible, parce que les caractéristiques particulières du problème ne permettent pas de construire de contrôle d'instrumentation.

2.3.2 Exemples de l'absence de contrôle d'instrumentation : le cas de Mathilde et Tiziana, pas de décision possible

Nous avons pu identifier dans les échanges le fait que, dans la conception de Tiziana, (Chapitre 7.8) les contrôles référents sont relatifs à une conception objet ou à une conception courbe (« minimiser la distance aux points l'approximation et le polynôme » et « avoir allure conforme à un polynôme de degré 3 »). Mais, il n'existe pas dans la conception de moyens permettant d'instrumenter ces contrôles. Ainsi, la distance discrète est invalidée car elle ne permet d'évaluer la distance (f, P) qu'en 20 points et le contrôle référent porte sur une distance (f, P) sur [0 ; 20]. Tiziana décide qu'il n'est pas possible de choisir une meilleure approximation. Cette décision ne reflète pas le fait que la conception a des moyens de valider que, parmi les fonctions fj, il n'y pas de meilleure approximation de P. Cette décision est la conséquence d'une impossibilité d'instrumenter les contrôles référents. Ainsi, le problème ne fait pas partie des problèmes accessibles aux conceptions de Tiziana et le système S<->M ne parvient pas à un équilibre « résolu ». L'impossibilité d'instrumenter les contrôles référents ne permet donc pas de faire d'hypothèse sur la conception à l'œuvre (voir dans ce chapitre, la synthèse 8.1.1).

2.3.3 Exemples de l'absence de contrôle d'instrumentation : abandon du contrôle référent

La conception attribuée à Rémi (chapitre 7.3) comporte trois contrôles référents :

- La courbe de l'approximation de P est conforme à celle d'un polynôme de degré 3
- La courbe de l'approximation est n'importe où dans une zone autour des points xiyi, (cette zone est définie par l'erreur de 10% sur les valeurs yi)
- L'interpolation (de n valeurs P(xi)) est une fonction d'approximation de P

L'opérateur de construction du polynôme d'interpolation de 4 valeurs yi permettrait d'obtenir une fonction d'approximation de P qui satisfait les trois contrôles référents : celui concernant l'interpolation, mais aussi celui sur la conformité à la courbe d'un polynôme de degré 3 et celui sur la proximité aux points xiyi. Cependant, l'absence d'outils de choix des points d'interpolation (alors que Rémi sait que ces outils existent, parce que cela a été étudié lors d'un TD récent) conduit à l'abandon du contrôle référent sur l'interpolation. La suite des décisions se réfèrent aux deux autres contrôles, et nous a conduit à identifier une conception courbe.

2.4 La place des opérateurs dans l'organisation de l'action

Les opérateurs représentent les actions qui sont mises en œuvre sur les objets du problème. **Ils sont directement reliés aux contrôles d'instrumentation, qui désignent l'opérateur**.

La mise en œuvre d'un opérateur peut présenter des difficultés. C'est le cas par exemple lorsque les calculs algébriques présentent une complexité que nous qualifierons de « technique ». En règle générale, les opérateurs mobilisent des contrôles « locaux » de bonne mise en œuvre. Nous signifions par « locaux » le fait que ces contrôles n'ont pas de relation aux contrôles référents ou aux contrôles d'instrumentation, mais se réfèrent à la bonne mise en œuvre de l'opérateur. Nous avons pu noter dans différentes analyses la présence de ces contrôles locaux lorsque ceux-ci étaient explicités par les étudiants – par exemple, plusieurs binômes valident les évaluations par Maple de l'opérateurs $\sum_{i=0}^{20}(f(xi)-yi)^2$ en vérifiant que chaque évaluation $(f(xi)-yi)^2$ était positive et d'un petit ordre de grandeur ; dans ce cas particulier, le contrôle local se réfère en partie à un contrôle référent de proximité des valeurs yi et f(xi). Si ces opérateurs locaux ne permettent pas de mettre en œuvre l'opérateur, il est possible que le choix de l'opérateur soit modifié : soit en reconsidérant le contrôle d'instrumentation pour sélectionner un autre opérateur, soit en reconsidérant le contrôle référent.

Nous n'avons pas d'exemple de conception ne parvenant pas à mettre en œuvre l'opérateur associé, dans le cas où des contrôles référents et des contrôles d'instrumentation ont été construits. Notre modèle nous permet cependant de penser que cette situation est à envisager. Cela s'explique en partie par le fait que l'exécution des principaux opérateurs (tracer les courbes, évaluer $\sum_{i=0}^{20}(f(xi)-yi)^2$) était à la charge de Maple (lorsque l'opérateur était décrit mathématiquement par les étudiants, nous avions pris le parti de leur indiquer comment l'exécuter dans Maple si le besoin s'en faisait ressentir).

2.5 La place des systèmes de représentation dans l'organisation de l'action

Les systèmes de représentation sont présents à tous les niveaux de l'organisation de l'action. Ils permettent la prise d'information, l'expression des contrôles et des opérateurs.

2.6 En conclusion

La bonne conduite de l'action (pour la conception du sujet) peut rencontrer des difficultés au niveau des contrôles référents, des contrôles d'instrumentation ou des opérateurs :

- Lorsque les contrôles référents sont absents : les propriétés pertinentes des objets du problème ne sont pas reconnues et la décision n'est pas possible.
- Lorsque les contrôles d'instrumentation sont absents : les objets mathématiques et leurs propriétés sont reconnus, mais l'absence de contrôle d'instrumentation ne permet pas de sélectionner d'opérateur permettant de vérifier les décisions impliquées par les contrôles référents. Dans ce cas, soit les décisions ne sont pas possibles et la résolution du problème s'arrête, soit le contrôle référent doit être modifié.
- Lorsque la mise en œuvre de l'opérateur désigné par le contrôle d'instrumentation est mise en échec (difficulté technique, pas de contrôle sur les moyens de mise en œuvre de l'opérateur).

Cela révèle l'étroite dépendance des contrôles et des opérateurs : il n'y pas d'action possible sans contrôle référant à l'action parce que celle-ci ne peut pas être validée et il y a difficilement de contrôle sur le problème (au sens où un critère de décision est identifié) si les opérateurs permettant de confronter le critère de décision aux objets particuliers du problème ne sont pas disponibles.

Conclusion

Notre problématique est ancrée dans la théorie des situations. Nous nous intéressons au fonctionnement des connaissances en tant que régulateur de l'activité que nous envisageons comme le jeu adidactique du système sujet/milieu. Nous avons en particulier interrogé dans ce jeu, la validation – s'il y a action du sujet (et lecture des rétroactions du milieu par le sujet) alors il y a choix des actions, éventuellement anticipation du choix de ces actions, décisions pour la mise en œuvre de ces actions dans un problème particulier, décisions sur la validité du résultat de ces actions – laissant ainsi apparaître l'activité comme une structure organisée. Comment rendre compte de cette organisation ? Nous sommes entrés par les connaissances pour le faire, en distinguant différentes dimensions de la connaissance. C'est au moyen des *conceptions* (Artigue 1990) que nous l'avons fait. En effet, celles-ci, permettent d'assumer les dimensions action et validation dont nous venons de parler au moyen des opérateurs et des contrôles[42] (Balacheff 1995 et chapitre 3). Ainsi, rendre compte de l'organisation de l'activité signifie, pour nous, interroger d'une part les fonctionnalités des contrôles et des opérateurs relativement à cette organisation, et d'autre part d'interroger les relations entretenues par opérateurs et contrôles.

Nous avons choisi de nous intéresser aux conceptions de la notion de fonction. Une étude de l'état de l'art et de l'histoire du concept a fait dégager trois conceptions de fonction : conception courbe, conception analytique, conception objet (voir chapitres 4.1 et chapitre 4.2). La conception objet nous semblait entretenir une relation particulière à la question de la

[42] Les nécessités de l'exposé nous font écarter (provisoirement) les systèmes de représentation, qui permettent l'expression des opérateurs et des contrôles…

validation. Sfard en effet, explique que le processus de réification (permettant d'appréhender un concept comme un objet) permet de construire du sens sur ce concept. Nous comprenions qu'il y avait là une relation à notre travail sans pour autant parvenir à expliciter cette relation : qu'est ce qu'une conception objet de fonction ? Qu'est-ce que construire du sens sur fonction ? Cela a-t-il à voir avec les contrôles disponibles pour la conception ?
Voilà ce sur quoi notre travail a cherché à avancer. Nous allons tout d'abord présenter dans cette conclusion les résultats de cette recherche concernant les deux axes – conception de fonction comme objet ; rôles et relations opérateurs/contrôles dans l'organisation de l'activité.
Nous parlerons également de l'apport que constitue à nos yeux notre travail méthodologique.
Enfin nous ouvrirons quelques pistes de travail en nous interrogeant sur l'usage de notre démarche diagnostique pour des décisions didactiques.

Fonction comme objet

Dubinsky (1992) signale l'importance de l'acquisition des processus d'encapsulation et de desencapsulation[43] dans l'apprentissage du concept de fonction. De la même manière, Sfard parle de l'importance de construire une conception structurelle d'une fonction pour qu'un sujet parvienne à construire du sens sur ce concept et accède à la résolution de certains types de problèmes. Notre propre caractérisation de la conception objet montre que cette conception permet de prendre des décisions sur l'objet dépassant les contingences des différentes représentations, des propriétés et des calculs sur ces représentations. Décrivons plus précisément ce que cela a signifié dans le problème particulier que nous avons analysé. Pour la conception objet, l'approximation est qualifiée aux moyens d'une propriété de la représentation graphique de l'approximation et d'une propriété de la représentation analytique. Ces deux propriétés définissent deux contrôles référents qui se révèlent concurrentiels (voir chapitre 8.1) parce que chacun conduit à un choix d'approximation différent. Mais les étudiants parviennent à gérer conjointement ces deux contrôles référents en les hiérarchisant[44] et montrent ainsi que la fonction n'est pas identifiée aux propriétés de ces représentations. L'objet existe au delà des différentes représentations, de leurs propriétés et des calculs sur ces représentations. Et les moyens de représentations restent au service des décisions parce qu'elles permettent au sein de chaque système de représentation du contrôle ou la construction d'opérateurs. Donner du sens au concept dans ce cas particulier, ne signifie

[43] Passage d'une conception process à une conception objet d'un concept (voir chapitre 4.2).
[44] On satisfait d'abord le contrôle sur la représentation graphique, puis le contrôle engagenat la représentation anlytique.

pas seulement exprimer des propriétés dans un système de représentation et mettre en œuvre des opérateurs dans ce système de représentation. Mais cela signifie aussi pouvoir hiérarchiser des propriétés (éventuellement concurrentielles) s'exprimant au moyen de représentations différentes.

Rôle et relations des contrôles et des opérateurs dans l'organisation de l'action

Le travail d'analyse, avec la construction méthodologique et l'appui sur le cadre théorique qu'il nécessite, nous a conduit à distinguer deux types de contrôles : les contrôles référents et les contrôles d'instrumentation (chapitre 6).

Les contrôles référents permettent d'identifier certains objets du problème en les caractérisant par des propriétés. Ils rendent compte, en cela, de la façon dont le problème est reconnu : quels sont les objets mathématiques en jeu et quelles sont les propriétés de ces objets. Les contrôles référents sont pour nous explicatifs de la stratégie dans la mesure où les décisions sont réglées relativement aux propriétés exprimées par ces contrôles. Ces propriétés constituent le référent des décisions. Par exemple, dans le cas de la conception courbe, l'approximation est définie par les caractéristiques de sa courbe[45]. La stratégie consistera en une confrontation des représentations des fonctions candidates à ces propriétés.

Les contrôles d'instrumentation établissent une relation entre les contrôles référents à l'action – c'est-à-dire à la mise en œuvre d'un opérateur ou d'une séquence d'opérateurs. L'action nécessite d'une part une conformité aux contrôles référents et d'autre part la prise en compte des caractéristiques particulières de la situation : existe-t-il un outil permettant de vérifier les conditions exprimées par le contrôle référent et fonctionnant dans ce problème particulier ?

Les opérateurs représentent les actions qui sont mises en œuvre sur les objets du problème. Ils sont directement reliés aux contrôles d'instrumentation, qui déterminent le choix de l'opérateur. En règle générale, les opérateurs mobilisent des contrôles « locaux » de bonne mise en œuvre[46].

L'organisation en contrôles référents, contrôles d'instrumentation et opérateurs (mobilisant un ou plusieurs systèmes de représentation) nous a permis d'interroger et d'expliquer les disfonctionnements, du point de vue du sujet, de la conduite de l'action. Lorsqu'il n'y a pas de construction de contrôle référent, même si des actions sont menées, il n'existe pas pour le sujet de moyens d'évaluer (donc éventuellement de valider) l'action. Ainsi, pour ce sujet, il

[45] Conformités à certaines caractéristiques de la courbes d'un polynôme de degré 3 et proximité perceptive au nuage de points xiyi.

[46] Nous signifions par « locaux » le fait que ces contrôles n'ont pas nécessairement de relation aux contrôles référents ou aux contrôles d'instrumentation, mais se référent à la bonne mise en œuvre de l'opérateur.

n'est pas possible de prendre de décision quand à la bonne résolution du problème (cas de Cécile chapitre 7.2). Il est également possible que des contrôles référents aient été construits sans que l'action ne soit possible, parce que les caractéristiques particulières du problème ne permettent pas de construire de contrôle d'instrumentation. C'est le cas de Tiziana qui construit un contrôle référent (évaluer « une distance » entre la fonction candidate et le nuage de points), mais ne parvient pas à identifier d'opérateur lui permettant de vérifier les conditions exprimées par ce contrôle (voir chapitre 7.9). Dans ce cas, la résolution du problème peut s'arrêter, ou le contrôle référent peut être reconsidéré et modifié. Enfin, lorsque les contrôles locaux ne suffisent pas à la bonne mise en œuvre d'un opérateur, il est possible que le choix de l'opérateur soit modifié : soit en reconsidérant le contrôle d'instrumentation pour sélectionner un autre opérateur, soit en reconsidérant le contrôle référent.

Cette analyse démontre l'interdépendance forte des opérateurs et des contrôles, qui ne semblent pas pouvoir fonctionner l'un sans l'autre. Cela justifie en partie la position théorique qui est prise sur les connaissances : opérateurs et contrôle sont deux dimensions internes aux connaissances. Nous voudrions positionner ce choix relativement aux méta connaissances, décrites par Robert et Robinet (1996) :

> *« Des informations constitutives de la connaissance mathématique (méthode, structure, organisation)*
>
> *Des informations constitutives de l'accès à la connaissance mathématique, accès à un individu donné ou plus général (jeu de cadre, rôles des questionnements, des exemples et des contre exemple, et aussi rôle de la réflexion épistémologique pour apprendre)*
>
> *Des informations sur les modes de productions et le fonctionnement mathématique (contrôle, guidage) ». (Robert et Robinet (1996))*

Les contrôles tels qu'ils sont défini dans notre travail, entretiennent de fortes relations avec les méta connaissances, bien qu'ils ne prétendent pas prendre en charge la totalité de l'ensemble désigné par Robert et Robinet ci-dessus. En particulier, les contrôles ne prennent pas en charge les connaissances sur les mathématiques en général, le rôle des questionnements, l'heuristique, le rôle d'une réflexion épistémologique. Les contrôles référents et d'instrumentalisation parlent de l'organisation de la conduite du sujet, et en cela constituent des informations sur les modes de productions des mathématiques et le fonctionnement des mathématiques, sur l'organisation des mathématiques[47]. Cependant, dans notre cadre théorique, ils ne sont pas des méta connaissances : les conceptions ont été présentées et traitées comme des structures complexes, dont les contrôles sont un élément constitutif et n'ont donc pas dans ce cadre de position « méta » relativement aux connaissances. Les contrôles se différentient entre eux et des autres éléments par leurs fonctionnalités dans l'organisation de la conduite du sujet pour la résolution de problèmes.

Apport méthodologique :

Cette thèse constitue un des premiers travaux utilisant le modèle (P, R, L,Σ) des conceptions pour l'analyse du travail d'étudiants. Elle propose une méthodologie. La confrontation du corpus de l'expérimentation au modèle et à la problématique de recherche a nécessité de nombreux allers et retours entre ces trois axes[48]. Ce va et vient a entraîné des décisions concernant le traitement du corpus, la définition des outils théoriques (contrôles et opérateurs). La construction d'une grille commune à chacune des 9 analyses qui ont été conduites. Dans le chapitre 6, nous avons explicité ces décisions et la méthodologie associée – chaque étape de traitement du corpus est définie. Cet effort nous parait particulièrement important parce que la méthodologie permet un procès de preuve sur l'analyse qui est menée. Les questions autour des méthodologies d'analyse propres à la didactique des mathématiques sont ouvertes et sujettes à débat aujourd'hui. Notre effort d'explicitation permet à notre méthodologie de s'exposer à la discussion scientifique et à la transmission de ses méthodes et des décisions associées.

Insertion dans un système didactique plus large

Le travail de cette thèse est diagnostique. Il porte sur un petit nombre d'étudiants, sur un problème spécifique, dans un temps court, sur des sujets réduits à leur dimension adidactique. La question de l'insertion des résultats dans un système didactique plus large se pose légitimement. Il semble raisonnable de s'interroger sur l'apport de notre analyse des conceptions en termes d'organisation de l'activité pour la décision didactique. Nous pensons en particulier aux Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain. Ce sont, de ce point de vue, les pistes ouvertes par le caractère explicatif de notre analyse sur les

[47] En particulier, les contrôles référents, en caractérisant les objets d'un problème par des propriétés, sont susceptibles d'insérer ces objets dans une théorie mathématique ; les contrôles d'instrumentation fournissent les outils du fonctionnement mathématique.

[48] Nous avions en particulier pris des décisions permettant de définir le niveau de granularité des analyses (comme cela est courant dans la discipline) : qu'est qu'un contrôle, qu'est-ce que opérateur ?

dysfonctionnements de l'activité des étudiants qui nous apparaît la plus fructueuse. Cette question ne saurait légitimement être réglée en quelques lignes. Elle soulève en particulier des questions méthodologiques importantes. Nous souhaitons avoir l'occasion de nous pencher sur ces questions, qui sont au cœur de certaines problématiques de recherches grenobloises.

Références bibliographiques

Artigue Michèle (1990), *Epistémologie et didactique,* Recherche en didactique des mathématiques, Vol 10.2.3, 241-246

Artigue Michèle (1992), *Cognitive difficulties and teaching practice,* The concept of Function, Aspect of epistemology and Pedagog*y*, MAA notes n°25.

Artigue Michèle (1993), *Enseignement de l'Analyse et Fonctions de Référence*, Repères IREM n°11.

Artigue Michèle (1996), *L'Enseignement des Débuts de l'Analyse : Problèmes Epistémologiques, Cognitifs et Didactiques*, 25Anos de Matematicas en la Universidad de la Laguna.

Artigue Michèle (1998), *L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse*, Recherches en didactique des mathématiques, Vol.18.2, 231-262

Asiala M., Brown A., Devries D. J., Dubinsky E., Mathews D., Thomas K. (1996), *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education,* CBMS Issues in Mathematics Education, Vol. 6.

Baire René (1905), *Leçons sur les fonctions discontinues (professées au Collège de France)*, Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions, publiée sous la direction de M. Borel Emile

Baker B., Cooley L., Trigueros M. (2000), *A Calculus Graphing Schema*, Journal for Research in Mathematic Education Vol.31, n°5, 557-578

Balacheff Nicolas (1987), *Processus de preuve et situations de validation*, Educational Studies in Mathematics 18, 147-176

Balacheff Nicolas (1995), *Conception, connaissance et concept*, Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-95

Balacheff Nicolas (2000), *A modelling challenge : untangling learner's knowing*, in Journées internationales d'Orsay sur les Sciences Cognitives.

Balacheff Nicolas (2000), *Les connaissances, pluralité de conceptions, le cas des mathématiques*, in Tchounikine, Actes de la conférence Ingénuieurie de la Connaissance, Toulouse, p 83-90

Barbin Evelyne (1995), *La notion de rectification de concept. La construction historique des concepts de courbe et de fonction*, Séminaire de didactique des mathématiques, Pontificia Universidade de Sao Paulo

Belhoste Bruno (1985), *Cauchy, un mathématicien légitimiste au XIXe siècle*, Collection "Un savant, une époque", Belin

Bloch Isabelle (2000), *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*, Thèse de l'université de Bordeaux 1

Brousseau Guy (1986), *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 7.2, 33-115

Castela Corine (1995), *Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures ; un exemple concret, celui de la tangente*, recherches en didactiuqes des mathématiques, vol 15.1, 7-47

Chauvat Gérard (1999), *Courbes et fonctions au collège*, "petit x" n°51, 23-44

Deledicq André (1996), *Est-il Possible d'Enseigner l'Analyse Aujourd'hui ?* , Repères IREM n° 24

Dhombres Jean (1987 a), *Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle*, Historia Scientarum, no 33, The History of Science Society of Japan.

Dhombres Jean (1987 b), *Sur un texte d'Euler relatif à une équation fonctionnelle. Archaïsme, pédagogie et style d'écriture*, Revue d'Histoire des Sciences, XL/2

Dhombres Jean (1988), *Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18è siècle*, Cahier du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, université Pierre et Marie Curie

Dhombres Jean (1992), *Le rôle des équations fonctionnelles dans l'analyse algébrique de Cauchy*, Revue d'Histoire des Sciences XLV/1

Dhombres Jean (1993), *Is one proof enough ? Travels with a mathematician of the Baroque period,* Educational Studies in Mathematics 24

Dhombres Jean (1998), *Une histoire de l'objectivité scientifique et le concept de postérité*, Des Sciences et des Techniques : un débat, Cahier des Annales 45, EHESS, Paris.

Dorier Jean-Luc (1995), *Meta Level in the Teaching of Unifying and generalizing Concepts in Mathematics*, Educational Studies in mathematics, Vol. 29, no.2

Douady Régine (1986), *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Recherches en didactique de mathématiques, Vol. 7.2, 5-31

Dubinsky Ed (1991), Chapter 6. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, Advanced Mathematical Thinking (D Tall, ed.), Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, pp 231-250

Dubinsky Ed (1997), *A reaction to "a critique of the selection of "mathematical objects" as central metaphor for advanced mathematical thinking" by Confrey and Costa*, International Journal of Computers for mathematical Learning 2.

Dubinsky Ed and Harel Guershon (1992), *The nature of the process conception of function*, The concept of Function, Aspect of epistemology and Pedagogy, MAA notes n°25, pp85-106.

Dubinsky Ed and Lewin Philip (1986), *Reflectiv abstraction and mathematics education : the genetic decomposition of induction and compactness*, The Journal of Mathematical Behavior5, 55-92

Duval Raymond (1988), *Graphiques et équations : l'articulation de deux registres*, Annales de didactique et de sciences cognitives 1, 235-253

Duval Raymond (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Editions Peter Lang

Eisenberg Theodore (1992*), On the developpement of a sense for functions*, The concept ofFunction, Aspect of epistemology and Pedagogy, MAA notes n°25, pp 153-174.

Gaudin Nathalie (2002), *Conceptions de fonction et registres de représentation: étude de cas au lycée*, For the learning of Mathematics, Vol 22.2, 35-47

Goldenberg Paul, Lewis Philip, O'Keefe James (1992), *Dynamic representation and the development of a process understanding of function*, The concept of Function, Aspect of epistemology and Pedagogy, MAA notes n°25, pp235-260.

Kaput james (1992), *Patterns in students' formalisation of quantitatiove patterns*, The concept of Function, Aspect of epistemology and Pedagogy, MAA notes n°25, 290-317

Lakatos Imre (1963-1964), *Preuves et Réfutations, Essai sur la Logique de la Découverte Mathématique*, Hermann Editeurs des Sciences et des Arts, Edition française de 1984.

Lerouge Alain (2000), *La notion de cadre de rationalité à propos de la droite au collège*, Recherches en Didactique des Mathématiques Vol 20.2

Monna A. F. (1972), *The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to Discutions between Baire, Borel and Lebesgue*, Archive for History of Exact Sciences, Vol.9 n°1

Mesa Vilma (2004), *Characterizing Practices Associated with Functions in Middle School Textbooks: An Empirical Approach*, Educational Studies of Mathematics, Vol 56 N. 3, 255-286

Monk Steve (1992), *Students' understanding of a function given by a physical model*, The concept of Function, Aspect of epistemology and Pedagogy, MAA notes n°25, pp 175-194.

Robert Aline (1982), *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*, Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol3,3, 307-341

Robert Aline (1992), *Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques*, Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 12.1, 35-58

Robert Aline, Robinet Jacqueline (1996), *Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16.2, 145-176

Ruiz-Higueras Luisa (1995), *Conceptions des élèves du secondaire sur la notion de fonction : analyse épistémologique et didactique*, Actes de la VIII ième école d'été de didactique des mathématiques

Scheid Francis (1986*), Analyse Numérique, Cours et Problèmes, 775 problèmes résolus*, Série Schaum, Mac Graw Hill

Schwartz Laurent (1997), *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Editions Odile Jacob

Schwartz and Dreyfus (1995), *New Actions upon Old Objects : A New Ontological Perspective on Functions*, in Educational Studies in mathematics, Vol 29, no.3

Schwartz and Rina Hershlowitz (1999), *Prototypes: brakes and levers in learning the function concept ? The role of computer tool*s, Journal for reseach in Mathematics Education.

Schwingendorf K., Hawks J., Beineke J. (1992), *Horizontal and vertical growth of the students' conception of function*, The concept of Function, Aspect of epistemology and Pedagogy, MAA notes n°25, 133-152

Searle R. John (2001), *Rationality in action*, The Massachusetts Institute of Technology Press Cambridge.

Sfard Anna (1991), *On the dual nature of mathematical conceptions : reflexions on processes and objects as differents sides of the same coin*, Educational Studies of mathematics 22, 1-36

Sfard Anna (1992), *Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification. The case of function*, The concept of Function, Aspect of epistemology and Pedagogy, MAA notes n°25, pp 59-84

Sierpinska Anna (1992), *On understanding the notion of function*, The concept of Function, Aspect of epistemology and Pedagogy, MAA notes n°25, 25-59.

Sinaceur Hourya (1992), *Cauchy, Sturm et les racines des équations*, Revue d'Histoire des Sicences

Tall David, Bakar MdNor (1992), *Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs*, International Journal of Mathematics Education in Sciences and Technology, 23 1, 39-50.

Tall David, DeMarois Phil (1996), *Facets and Layers of the Function Concept*, Proceedings of PME 20, Vol 2, p 297-304.

Tall David (1996), *Functions and calculus*, chap.8, International Handbook of mathematics Education

Tall David (1997), *Metaphorical Objects in advanced Mathematical Thinking*, International journal of Computers for Mathematical Leraning 2

Tall David (1999), *Function : Organizing Principle or Cognitive Root*, Proceedings of the 23rd Conference of PME, 2, p 257-254

Tall david, Akkoç Hatice (2002), *The simplicity, complexity and complication of the function concept*, Proceedings of the 26th Conference of PME, 2, p 25-32

Théodor R. (1982,1989), *Initiation à l'analyse numérique*, CNAM Cours A, Editions Masson

Toulmin E. S. (1993), *The use of arguments*. Cambridge : University Press 1958; Traduction française par De Brabanter P. Les usages de l'argumentation, Presses universitaires de France

Trouche (2003), *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations*, Habilitation à Diriger des Recherches, editions de l'IREM, Université de Montpellier II

Vergnaud (1991), *La théorie des champs conceptuels*, in Recherches en Didactique des Mathématiques, 10/2.3

Vergnaud (2002), *Piaget visité par la didactique*, in Intellectica 2001/2, 33.

Vinner Shlomo (1989), *Images and definitions of the concept of function*, Journal for Research in mathematics education, vol.20, 336-366

Vinner Shlomo (1992), *The function concept as a prototype for problems in mathematics learning*, The concept of Function, Aspect of epistemology and Pedagogy, MAA notes n°25, pp195-214.

Vinner Shlomo, Karsenty Ronnie (2202), *Functions, many years after school: what do adults remember ?*, Proceedings of the 26th Conference of PME, 3, p 185-192

Youschkevitch A. P. (1976), *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*, Archives for History of Exact Sciences, Vol. 16 n°1