



HAL
open science

Écoulements granulaires sur fond meuble

Pierre Jop

► **To cite this version:**

Pierre Jop. Écoulements granulaires sur fond meuble. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2006. Français. NNT: . tel-00106185

HAL Id: tel-00106185

<https://theses.hal.science/tel-00106185>

Submitted on 13 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

0

UNIVERSITÉ DE PROVENCE
École Polytechnique Universitaire de Marseille
IUSTI UMR CNRS 6595

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

Pierre JOP

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Provence

École doctorale Physique, Modélisation et Sciences pour l'Ingénieur

intitulée

Écoulements granulaires sur fond meuble

Soutenue le 3 Juillet 2006 devant le jury composé de :

Mme Élisabeth CHARLAIX

M. Olivier DAUCHOT Rapporteur

M. Yoël FORTERRE Directeur de thèse

M. E. John HINCH Rapporteur

M. François LEQUEUX

M. Olivier POULIQUEN Directeur de thèse

M. Emmanuel VILLERMAUX Président

Je tiens à remercier Élisabeth Charlaix, François Lequeux et Emmanuel Villermaux d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse, ainsi qu'Olivier Dauchot et John Hinch pour leur lecture de mon manuscrit et leurs commentaires.

Je remercie vivement Olivier Pouliquen d'avoir su me convaincre avec enthousiasme, autour d'une bière, d'effectuer ma thèse sur ce sujet. J'ai eu énormément de plaisir à travailler en sa compagnie et celle de Yoël Forterre. Leur grande disponibilité, leurs nombreuses idées et leur inébranlable bonne humeur m'ont toujours impressionné.

Il a été agréable de travailler trois ans au sein de l'équipe GEP dirigée par Babette et son franc parlé (que j'ai appréciés). Tous les membres de cette équipe ont contribué à créer une ambiance propice aux échanges de toutes sortes (publics ou dans la boîte jaune). Je remercie aussi Blanche et Laurence dont les éclats de rires résonnent encore, Nathalie pour les soirées jeux, Pascale pour son amitié, Maxime pour sa bonne humeur et Fred pour son aide technique. Merci encore aux thésards: Céline pour ses gâteaux et pour m'avoir dévoilé le rituel de la tamiseuse, Cyril pour les moments de détente quand la pause s'impose, Bloen pour les discussions animées de la salle café, Malika pour son naturel et Daniel pour les récits de ses aventures.

Je voudrais également remercier le laboratoire de l'IUSTI dans son ensemble: les directeurs, le personnel technique et administratif ainsi que les thésard, plus particulièrement Erwin pour son humour et mon voisin de bureau pendant ma rédaction, Timothée et sa flip-flap.

Merci à mes amis dispersés en France et ailleurs pour tous les moments partagés (chacun se reconnaîtra): la bande des scouts, les Aixois, les Chambériens, les Parisiens et les Marseillais.

Je pense aussi, pour tout ce qu'ils m'ont apporté, à mes parents, mon frère, ma soeur, toute ma famille et ma belle famille.

Merci enfin, Audrey, pour le bonheur de vivre heureux.

Table des matières

Préambule	9
Présentation	9
Plan du manuscrit	10
1 Introduction	11
1.1 Matériaux granulaires secs	11
1.2 Régimes d'écoulements granulaires	11
1.2.1 Régime rapide et dilué	12
1.2.2 Régime quasi-statique	13
1.2.3 Régime dense	15
1.3 Différentes configurations d'écoulements denses	16
1.3.1 Écoulements confinés	16
1.3.2 Écoulements sur plan incliné	17
1.3.3 Écoulements sur fond meuble	20
1.4 Modélisations des écoulements granulaires denses	25
1.4.1 Modèles intégrés sur l'épaisseur	25
1.4.2 La loi de friction locale « $\mu(I)$ »	27
1.4.3 Autres approches	30
1.5 Problématique de la thèse	31
2 Système expérimental	33
2.1 Description du dispositif	33
2.2 Matériaux granulaires	35
2.3 Techniques de mesures	36
2.3.1 Débit volumique	37
2.3.2 Inclinaison de la surface	37
2.3.3 Profils de vitesse	37
2.3.4 Épaisseur	38
3 Écoulements stationnaires sur tas	45
3.1 Procédure expérimentale	45
3.2 Régimes d'écoulement	46
3.3 Importance des parois	47
3.4 Modèle 2D de l'écoulement : parois et rhéologie « $\mu(I)$ »	49
3.5 Comparaison et lois d'échelle	51

3.6	Lien entre les configurations plan incliné et fond meuble	53
3.7	Discussion et limites du modèle	56
3.8	Copie de l'article	58
3.9	Compléments à l'article	84
3.9.1	Estimation du coefficient de friction entre les grains et la paroi μ_w	84
3.9.2	Uniformité de l'écoulement	84
3.9.3	Compatibilité avec le critère de Mohr-Coulomb	87
4	Loi constitutive tensorielle	89
4.1	Problématique	89
4.2	Extension de la rhéologie à 3D	90
4.3	Application aux écoulements sur tas	92
4.3.1	Mise en équations et lois d'échelle	92
4.3.2	Résolution numérique	94
4.3.3	Validation de la méthode	96
4.3.4	Exemples de simulations numériques	98
4.4	Résultats : comparaisons avec les expériences	102
4.5	Parois latérales rugueuses	105
4.5.1	Copie de l'article	107
4.5.2	Compléments sur les profils d'épaisseurs h	115
4.5.3	Transition gazeuse au-delà de θ_2	115
4.6	Simulation d'écoulements dans diverses configurations	118
4.6.1	Configurations traditionnelles : Couette plan sous gravité, silo et Couette cylindrique	118
4.6.2	Couette cylindrique modifié	120
4.7	Conclusion sur la loi constitutive tensorielle	123
5	Écoulements instationnaires	125
5.1	Problématique	125
5.2	Comment démarre l'écoulement : diffusion ou érosion ?	127
5.2.1	Établissement du cisaillement homogène	127
5.2.2	Établissement de l'écoulement entre deux parois	130
5.3	Expériences : déclenchement d'avalanches uniformes	131
5.3.1	Dispositif	132
5.3.2	Description qualitative de l'écoulement	134
5.4	Résultats expérimentaux	136
5.4.1	Position de la surface libre	138
5.4.2	Profils de vitesse	138
5.4.3	Définition d'une épaisseur d'écoulement ?	139
5.5	Comparaison avec les simulations numériques	143
5.5.1	Simulations	143
5.5.2	Comparaison des vitesses maximales en paroi et des débits	143
5.5.3	Profils de vitesse	146
5.5.4	Épaisseur	146
5.6	Conclusion de l'étude des régimes instationnaires	146

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	7
6 Conclusion et Perspectives	151
Écoulements stationnaires de sable	154
Bibliographie	159

Préambule

Présentation

Un matériau granulaire est un ensemble de grains. La taille des particules peut s'étendre sur une grande gamme d'échelle : depuis quelques dizaines de microns pour les poudres jusqu'à plusieurs mètres pour des rochers reposant sur les flancs d'une montagne. Leur forme peut être très différente : sphères régulières pour des billes de verres, ovales pour des pilules, formes irrégulières des grains de sable plus ou moins anguleux, anisotropes pour les graines céréalières.

Les domaines industriels impliquant la manutention de matière granulaire sont nombreux. En effet, l'industrie du bâtiment utilise de nombreux matériaux sous forme de grains. Le béton en est un exemple, les étapes de terrassement des routes comportent aussi des phases de conditionnement de matériaux granulaires. Les matériaux granulaires sont aussi omniprésents dans notre quotidien alimentaire, que ce soit dans la cuisine avec la farine, le sel, le sucre, les pois (petits ou chiches) ou dans l'industrie alimentaire dont les matières premières sont souvent sous forme de poudre.

En géophysique, une grande partie des transports de matière solide à la surface de la terre se fait par des écoulements granulaires. Certains de ces écoulements dévalent les pentes sur un fond solide (figure 1a). Dans d'autres cas, le fond statique peut au contraire être érodé par l'écoulement superficiel : une avalanche à la surface d'une dune est l'archétype des écoulements sur fond meuble (figure 1b).

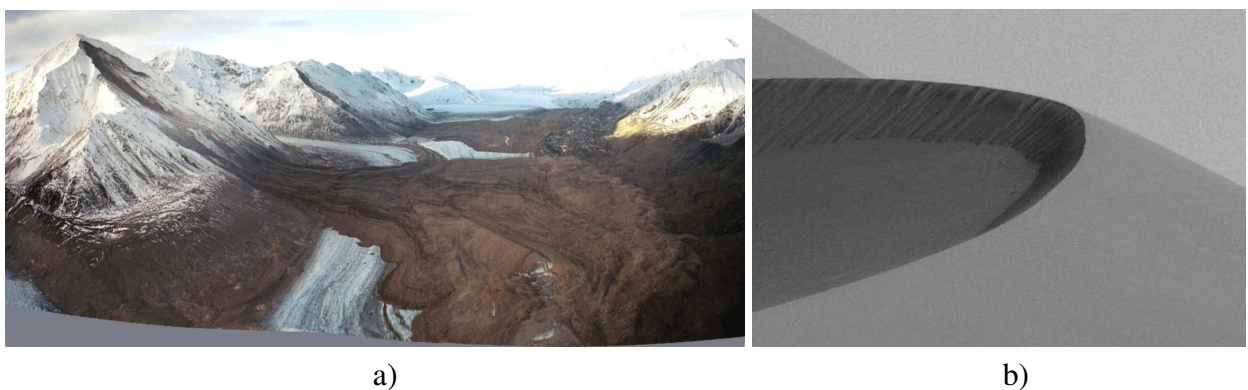


FIG. 1 – (a) *Écoulements granulaires géologiques : avalanches de rochers par-dessus le glacier Black Rapids en Alaska, suite à un séisme en novembre 2002 (Montage de photos de Dennis Trabant, USGS).* (b) *Écoulements sur fond meuble : avalanches de sable sous la crête d'une dune.*

Le problème lorsque l'on cherche à décrire ces écoulements granulaires est qu'il n'existe pas

d'équations constitutives telles les équations de Navier-Stokes pour les fluides classiques. La difficulté pour les trouver réside dans le fait qu'un matériau granulaire se comporte différemment selon les sollicitations.

Ils peuvent être empilés pour former des tas, mais une sollicitation extérieure (vibrations, intempéries, séismes) peut provoquer un écoulement. Lors d'une randonnée estivale en montagne, il est agréable (en descente) de quitter le sentier pour emprunter un pierrier. À chaque pas, le pied s'enfonce dans les cailloux et accompagne le petit éboulement qu'il vient de déclencher. L'aspect solide de la pente laisse place momentanément à une zone fluide montrant la double nature de ce matériau.

Les études des écoulements granulaires et de leurs aspects fondamentaux font l'objet de cette thèse. Plus précisément, nous allons nous intéresser à la rhéologie des matériaux granulaires en tentant d'obtenir, à partir d'expériences simples et contrôlées, des informations pertinentes sur les équations constitutives qui permettent de décrire les écoulements granulaires.

Plan du manuscrit

La configuration que nous avons choisi d'étudier est celle des écoulements de grains à la surface d'un tas. Les trois parties principales de la thèse traduisent notre progression dans la connaissance des phénomènes régissant les propriétés de ce fluide particulier.

Le premier chapitre dresse un aperçu des connaissances sur les écoulements granulaires denses. Malgré la multitude d'expériences réalisées dans la dernière décennie, nous montrerons la nécessité d'effectuer des expériences supplémentaires dans une configuration bien contrôlée.

Le deuxième chapitre sera consacré à la présentation du dispositif expérimental d'écoulement sur tas ainsi que des techniques de mesure pour étudier les caractéristiques des écoulements dans cette configuration.

Dans le chapitre 3, nous montrerons les résultats expérimentaux sur les écoulements granulaires uniformes et stationnaires confinés entre des parois latérales. Ce travail sera présenté principalement sous la forme d'un article publié dans *Journal of Fluid Mechanics*. Nous montrerons que l'influence des parois est importante sur l'écoulement dans ce système (en particulier la largeur du système). La prise en compte dans un modèle de leurs effets nous permettra de discuter de leur implication sur la rhéologie des milieux granulaires denses.

Nous montrerons dans le chapitre 4 comment étendre à trois dimensions la loi constitutive utilisée dans le chapitre précédent. Nous pourrons alors simuler des écoulements dans des configurations tridimensionnelles et les comparer avec les mesures expérimentales.

Dans le chapitre 5, afin de vérifier le bien-fondé de la rhéologie frictionnelle proposée au-delà du simple régime stationnaire, nous étudierons un régime transitoire de démarrage d'avalanches dans un système assez long pour obtenir des écoulements unidirectionnels et uniformes.

Nous terminerons ce manuscrit par un résumé des résultats obtenus au cours de cette thèse dans le chapitre 6. Nous discuterons des limites de la rhéologie proposée et des problématiques liées aux phénomènes d'arrêt et d'hystérésis.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Matériaux granulaires secs

La différence majeure entre un matériau granulaire et un fluide classique est l'absence d'énergie thermique suffisante pour agiter les grains. Dans les cas qui nous intéressent, le diamètre minimal des particules vaut quelques dizaines de microns. L'énergie thermique kT est donc négligeable devant l'énergie potentielle de pesanteur $\rho d^4 g$, où ρ est la densité des particules, d leur diamètre et g l'intensité de la gravité. Les seuls moteurs d'un écoulement peuvent alors être la gravité, le mouvement d'une paroi ou le mouvement d'un fluide environnant.

Dans la suite de ce manuscrit, nous nous restreindrons à l'étude d'un milieu granulaire sec. Cela signifie premièrement que le fluide environnant n'a pas d'effet majeur sur la dynamique des grains. Le milieu ambiant dans lequel se dérouleront les expériences sera ici l'air. Sa faible viscosité permettra de négliger son influence si les grains ne sont pas trop petits (le comportement des poudres au contraire sera fortement influencé par l'air (Duran 2000)). L'humidité peut fortement modifier les propriétés de cohésion du matériau en créant des ponts capillaires au niveau des contacts entre grains. La cohésion de l'ensemble est renforcée et dépend étroitement du degré hygrométrique de l'air (Tegzes *et al.* 2002 ; Restagno *et al.* 2004). Nous éviterons de manipuler les grains par atmosphère trop humide. Nous travaillerons donc avec des grains de taille millimétrique, de 0.5 mm à 0.8 mm, en évitant de plus l'usage de matières plastiques, les effets électrostatiques étant ainsi réduits.

1.2 Régimes d'écoulements granulaires

Une analogie peut être faite entre les états classiques de la matière et les comportements des matériaux granulaires. Selon les sollicitations extérieures et les conditions limites, les écoulements granulaires peuvent être classés en trois catégories (Jaeger *et al.* 1996). Si l'on secoue un récipient rempli de billes, elles vont rebondir les unes contre les autres. La densité est très faible comme lorsque l'on saupoudre du sable depuis une certaine hauteur (figure 1.1). Le mouvement des billes rappelle celui des molécules d'un gaz et le régime dilué est souvent assimilé à un état gazeux. Le régime quasi-statique est obtenu au contraire lorsque les grains forment un empilement qui se déforme plastiquement, c'est-à-dire très lentement sous l'effet d'une force. Il correspond à un état solide. Entre les deux, le régime d'écoulement dense est caractérisé par une densité importante et

des vitesses non négligeables devant la vitesse caractéristique de chute d'un grain, comme le sont les avalanches ou les éboulements de terrain. Ce régime est similaire à l'état liquide traditionnel (figure 1.1). Nous allons maintenant présenter brièvement les principales propriétés des deux premiers de ces états, avant de développer davantage le cas des écoulements denses au coeur de cette thèse dans le paragraphe suivant.

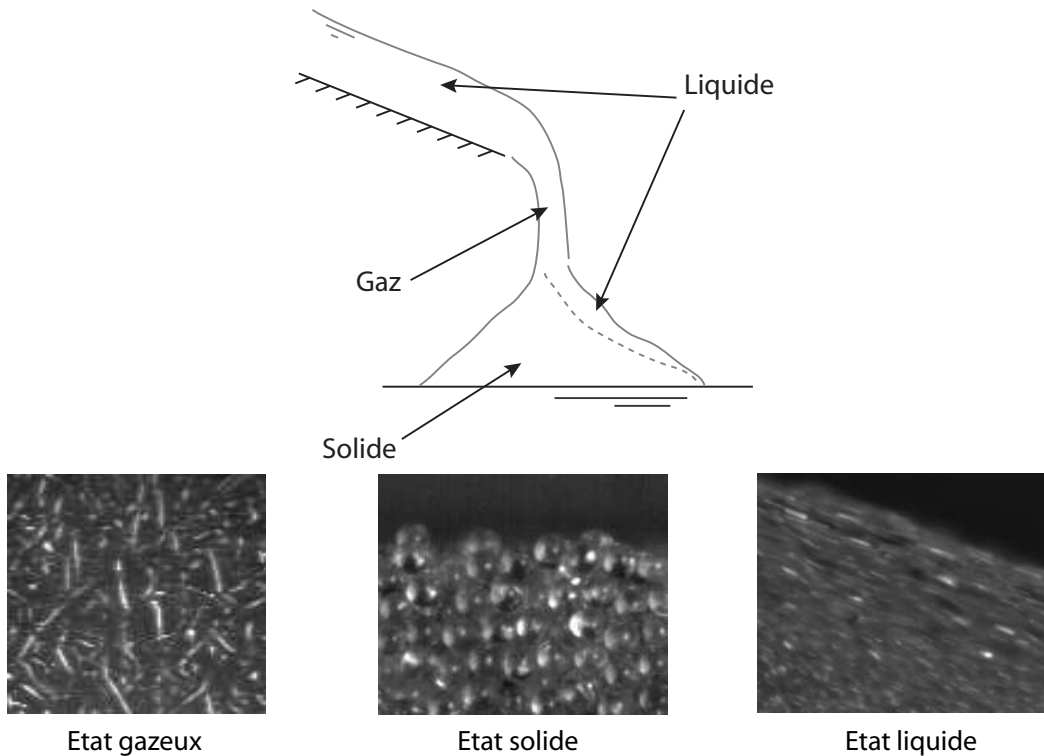


FIG. 1.1 – Les trois états de la matière granulaire : gazeux, solide et liquide.

1.2.1 Régime rapide et dilué

Le régime dilué se rencontre par exemple lorsque l'on agite très fortement des grains dans une boîte. Les grains possèdent une énergie cinétique très élevée. Les particules interagissent principalement par collisions binaires inélastiques. Du fait du coefficient de restitution $e < 1$, il est nécessaire d'apporter continuellement de l'énergie au système, car elle se dissipe un peu à chaque collision. L'analogie avec les particules d'un gaz de sphères dures a permis d'introduire une température granulaire définie à partir des fluctuations de vitesses $T_g = \langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle$. Les équations décrivant ce milieu sont composées de la conservation de la matière, de la conservation de la quantité de mouvement et d'une troisième équation traduisant un bilan énergétique. Cette théorie cinétique granulaire réussit à reproduire les propriétés statistiques des écoulements très rapides (Goldhirsch 2003), mais est inadaptée à la description d'un régime où la densité est plus importante. Par ailleurs, dûs à la dissipation d'énergie par les chocs, les grains ont tendance à développer une instabilité, brisant l'homogénéité du milieu. Si une région devient plus dense, les chocs sont plus nombreux donc l'énergie locale diminue plus rapidement et les grains vont s'agglomérer en un temps fini

(McNamara *et al.* 1996 ; Jeager *et al.* 1996). Ce phénomène appelé « effondrement inélastique » mène à des zones très denses. Cette propriété de dissipation locale d'énergie engendre des disparités de densité qui peuvent avoir des conséquences particulières notamment l'apparition d'une zone diluée sous un écoulement très rapide qui supporte un écoulement dense. Ce phénomène est à l'origine d'une instabilité de convection qui peut être observée lorsque des grains s'écoulent sur une forte pente rugueuse (figure 1.2 tirée de Forterre 2002). Il pourrait également expliquer pourquoi certains glissements de terrain se propagent sur de très grandes distances (Campbell 1989). En raison de cette grande dissipation d'énergie, les régimes collisionnels sont peu rencontrés dans les phénomènes géologiques d'éboulements, qui produisent plutôt des écoulements denses.

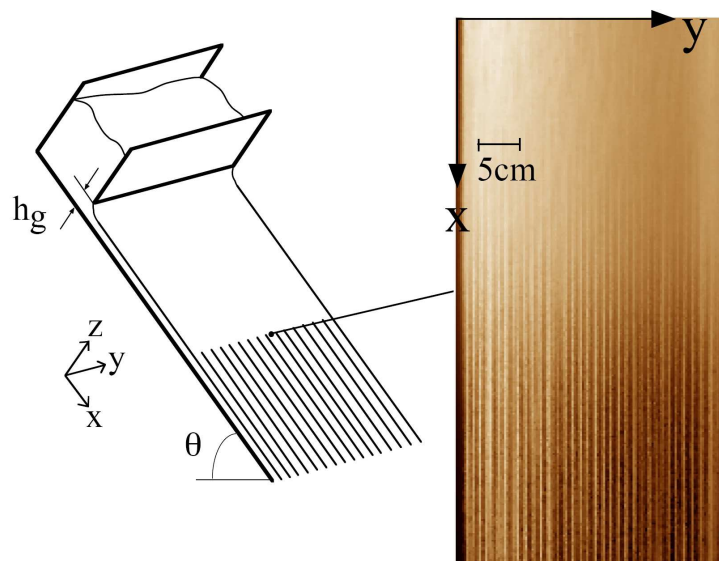


FIG. 1.2 – *Instabilité convective en rouleaux se développant dans les régimes d'écoulement très rapide sur plan incliné rugueux (Forterre 2002).*

1.2.2 Régime quasi-statique

À l'autre extrême, lorsque l'énergie cinétique des particules est quasiment nulle, les grains sont en contact avec plusieurs de leurs voisins. C'est le cas d'un empilement de ballast de voie ferrée par exemple. La friction inter-grains gère les déformations de ce milieu et les contraintes se propagent sur de grandes échelles devant la taille des grains le long de chaînes de forces (Radjai *et al.* 1996 ; Mueth *et al.* 1998). Les petites fluctuations de contraintes ne permettent pas aux particules de se déplacer individuellement, elles sont coincées dans un volume défini par leur entourage (Weeks *et al.* 2002 ; Pouliquen *et al.* 2003). Les mécaniciens des sols ont développé des outils pour étudier et modéliser le comportement plastique du milieu continu équivalent sous contrainte.

Parmi les outils permettant de mesurer les propriétés de résistance des matériaux granulaires, les tests biaxiaux constituent un exemple de procédure simple : on impose deux contraintes différentes selon des directions orthogonales sur un matériau et la différence est progressivement accentuée jusqu'à la rupture. Les seuils de mise en mouvement sont généralement modélisés par

le critère de rupture de Mohr-Coulomb qui étend le contact frictionnel entre deux solides aux milieux continus. Lorsqu'un échantillon est soumis à des contraintes principales σ_1 et σ_2 , le milieu granulaire résiste et ne se déforme pas tant que la contrainte tangentielle locale τ n'excède pas un seuil quelque part au sein du matériau :

$$\tau/\sigma_N > \tan\theta_r \quad (1.1)$$

où θ_r est l'angle de friction interne du matériau et σ_N la contrainte normale. Cet angle définit un coefficient de friction effectif du matériau $\mu_s = \tan(\theta_r)$ qui intègre la contribution du coefficient de friction inter-grains et de la géométrie des contacts.

Ce critère de rupture est représenté dans le plan τ - σ_N par la droite de pente $\tan(\theta_r)$ (figure 1.3b). Au seuil, le critère de Mohr-Coulomb prédit que les plans les plus faibles font un angle

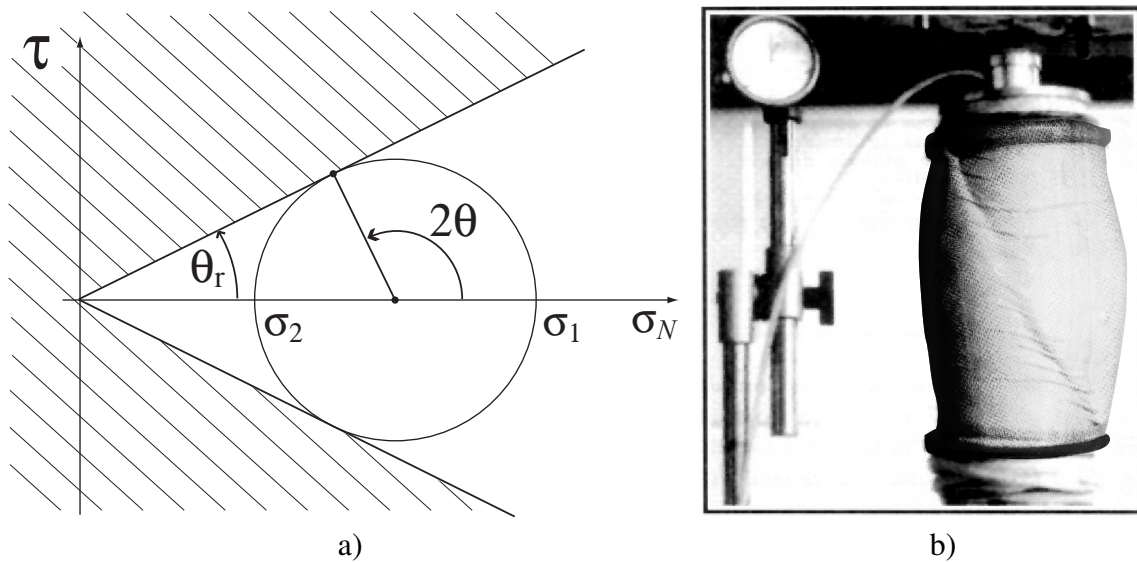


FIG. 1.3 – (a) Les points du cercle de Mohr représentent les contraintes tangentielles et normales s'exerçant sur une plaquette orientée d'un angle θ par rapport à la direction de la contrainte normale la plus faible σ_2 . Le diamètre du cercle vaut $\sigma_1 - \sigma_2$. La zone hachurée définit la zone où le matériau cède. La rupture du matériau intervient donc lorsque le cercle devient tangent à la droite et le point tangent détermine l'angle du plan de rupture θ . (b) Exemple de test triaxial cylindrique, la bande de cisaillement visible fait un angle de $\pi/4 - \theta_r/2$ par rapport à la verticale.

θ de $\pm(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_r}{2})$ par rapport à la direction de σ_1 . Dans le cas d'un tas conique libre, la direction de rupture coïncide avec la surface libre : elle fait donc un angle θ_r avec l'horizontale. Pour des billes sphériques, l'angle de friction interne est voisin de 20° , pour des matériaux plus anguleux, il tourne autour de 30° . Lors d'un test biaxial, le matériau se cisaille effectivement selon un plan avec l'angle correspondant, mais la déformation n'est pas homogène, seule une partie parallèle à la direction de rupture du matériau se déforme (figure 1.3b). Cette localisation de la rupture sur une faille n'est pas prédite dans le simple modèle de Mohr-Coulomb. La description de l'évolution de l'empilement au-delà de seuil de déformations plus importantes doit faire appel à des théories d'élasto-plasticité plus élaborées. De plus le passage de la microstructure et des propriétés de

surface aux propriétés macroscopiques n'est pas encore bien connu. Ces problèmes ont suscité d'importantes études numériques portant sur les réseaux forces de contact entre les grains.

1.2.3 Régime dense

Entre les deux régimes précédents, le régime d'écoulement dense est caractérisé à la fois par des contacts frictionnels multiples de longue durée et des réarrangements provoquant des chocs inélastiques entre particules. Ce régime est celui que l'on rencontre le plus fréquemment dans les écoulements géophysiques et dans les traitements industriels, il est donc important d'en avoir une meilleure compréhension. La modélisation d'un tel milieu n'est pas aisée car on ne peut négliger ni l'énergie cinétique ni les interactions multiples. L'existence de ces contacts fait entre autres apparaître des corrélations importantes (figure 1.4) entre les mouvements des grains voisins (Bonamy *et al.* 2002b ; Pouliquen 2004). Les simulations numériques discrètes apportent certains éclaircissements sur la relation entre les propriétés des grains et celles de l'écoulement. Cependant malgré les performances des systèmes informatiques actuels qui permettent de simuler plusieurs milliers voire dizaines de milliers de grains à la fois, une description en termes de milieu continu serait une aubaine pour la prédiction d'écoulements géologiques et les applications industrielles. De nouveau le changement d'échelle depuis le niveau du grain jusqu'au niveau de l'écoulement n'est pas encore fait. Il existe donc de nombreuses études expérimentales ou numériques accompagnées de diverses propositions de modélisation pour espérer décrire les écoulements denses par un milieu continu.

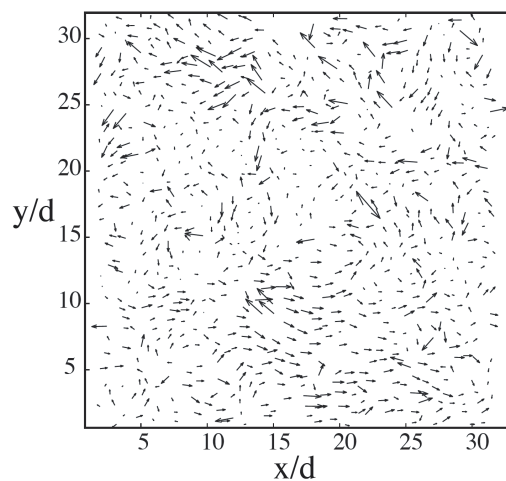


FIG. 1.4 – *Fluctuations de vitesse mesurées à la surface d'un écoulement sur plan incliné rugueux montrant les mouvements corrélés des grains (Pouliquen 2004).*

Une des difficultés concernant la compréhension de ce régime est la multitude des comportements observés en fonction de la configuration de l'écoulement (GDR MiDi 2004). Nous allons dans le paragraphe suivant décrire plus en détail les grandes classes de configurations étudiées et leurs caractéristiques.

1.3 Différentes configurations d'étude des écoulements granulaires denses

Récemment le GDR Midi (2004) a entrepris de rassembler les résultats concernant les écoulements denses dans plusieurs géométries (figure 1.5). Il s'agit des configurations de cisaillement, homogène ou cylindrique, des écoulements en silo, sur plan incliné, en tambour tournant et sur tas. Les propriétés des écoulements de ces six configurations ont été abordées dans l'article du GDR MiDi (2004). Il en ressort une grande variété de comportements et de profils de vitesse. La densité moyenne du milieu ρ varie un peu dans les zones de cisaillement et sa valeur est proche de celle d'un empilement désordonné de sphères monodisperses. À l'issue de l'analyse des données et des dernières avancées en simulation numérique, une rhéologie locale semble émerger dans un cadre cohérent pour la description des écoulements granulaires denses. Nous nous proposons dans ce paragraphe de présenter brièvement certaines configurations en résumant les connaissances que nous en avons.

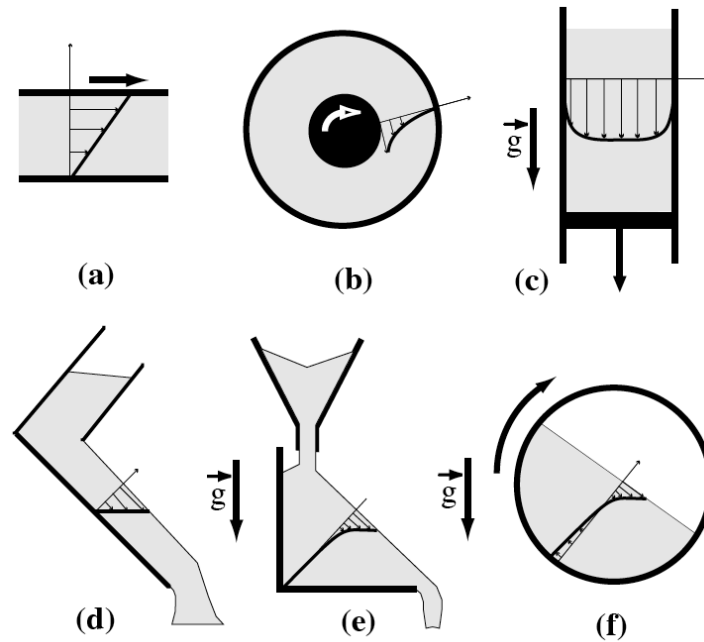


FIG. 1.5 – Six configurations différentes permettant l'étude des écoulements granulaires dans des cas modèles : (a) le cisaillement plan, (b) le cisaillement de Couette cylindrique, (c) le silo vertical, (d) le plan incliné, (e) le tas, (f) le tambour tournant (figure extraite de l'article du GDR MiDi 2004).

1.3.1 Écoulements confinés

La configuration du cisaillement homogène (figure 1.5a) est difficilement réalisable expérimentalement car les systèmes sont courts (Mueggenburg 2005) et la gravité brise la symétrie haut-bas et localise l'écoulement à la surface. Numériquement cependant, c'est la configuration

la plus simple qui peut servir de rhéomètre afin de relier les contraintes appliquées aux profils de vitesse linéaires observés (Jordanoff *et al.* 2004 ; Da Cruz *et al.* 2005). Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe 1.4.2. Pour la cellule de Couette annulaire (figure 1.5b), le cisaillement est localisé à proximité de la paroi du cylindre intérieur (Losert *et al.* 2000 ; Mueth *et al.* 2000). Cette différence pourrait venir de la dissymétrie due à la géométrie ou du fait que le régime d'écoulement est quasi-statique. Dans un silo vertical (figure 1.5c), les bandes de cisaillement sont localisées à la paroi, mais leur étendue ne dépend pas du débit (Pouliquen *et al.* 1996a ; Chevoir *et al.* 2001).

1.3.2 Écoulements sur plan incliné

Dans cette configuration (figure 1.5d), les grains s'écoulent depuis un réservoir sur un fond rigide et rugueux. Les paramètres contrôlant l'écoulement sont d'une part l'angle d'inclinaison θ du plan et le débit (ou l'épaisseur de la couche fluide) d'autre part. Cette configuration a fait l'objet de nombreuses études tant expérimentales (Daerr *et al.* 1999a ; Pouliquen *et al.* 1996b, 1999a ; Berton 2003 ; Goujon *et al.* 2003) que numériques (Prochnow *et al.* 2000, 2002 ; Ertas *et al.* 2001 ; Silbert *et al.* 2001, 2003 ; Chevoir *et al.* 2004) car le faible nombre de degrés de liberté permet de mieux cerner les phénomènes qui gèrent l'écoulement. Par ailleurs elle représente une première modélisation des éboulements de terrains sur des pentes naturelles. Selon la condition d'alimentation, deux régimes peuvent être observés : un régime dense ou un régime collisionnel pour de grandes hauteurs d'alimentation (Azanza 1998 ; Ancey 2001). Nous ne développerons pas ce dernier cas dans cette étude.

Nous décrivons dans la suite les seuils d'écoulement et les caractéristiques des écoulements dans cette configuration.

Seuils d'écoulement

Les travaux expérimentaux ont montré que pour un angle donné θ , il existe une épaisseur minimale h_{stop} de matériau pour pouvoir observer un écoulement uniforme continu. À partir d'un écoulement continu, si on diminue progressivement l'alimentation (donc l'épaisseur h), l'écoulement s'arrêtera pour une épaisseur critique : on observe alors un dépôt uniforme d'épaisseur constante $h_{stop}(\theta)$. Cette épaisseur dépend de l'inclinaison du plan : elle est importante à faible inclinaison et semble diverger à l'approche de l'angle de repos du matériau θ_s . À l'inverse, elle diminue lorsque la pente augmente jusqu'à s'annuler pour un angle θ_2 . La courbe expérimentale h_{stop} (figure 1.6) peut être ajustée par la fonction suivante (Forterre *et al.* 2003) :

$$h_{stop}(\theta) = L_0 \frac{\mu_2 - \tan(\theta)}{\tan(\theta) - \mu_s}, \quad (1.2)$$

avec $\mu_s = \tan(\theta_s)$ et $\mu_2 = \tan(\theta_2)$. Ces paramètres dépendent de la nature du matériau. Entre ces deux angles, nous pouvons observer des écoulements stationnaires et uniformes. Ils sont définis par une vitesse moyenne $\langle u \rangle$ et une épaisseur constante h . Au-delà de θ_2 l'écoulement devient accéléré. Quartier *et al.* (2000) ont étudié expérimentalement le mouvement d'une bille à une dimension sur un plan incliné rugueux et ont fait apparaître des comportements similaires en fonction de l'angle d'inclinaison. Ils relient ces angles à la perte d'énergie lors des chocs et à la profondeur du piège entre deux aspérités.

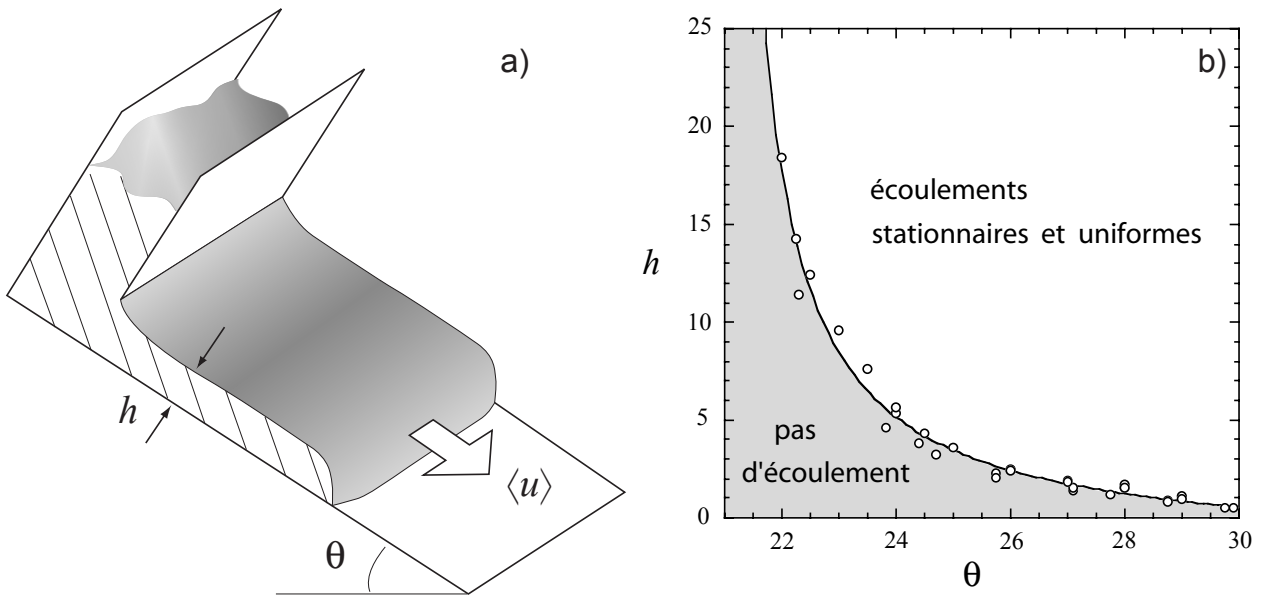


FIG. 1.6 – (a) Schéma du plan incliné rugueux et notation des variables mesurées. (b) Diagramme de phase des écoulements de billes sur plan incliné (tirée de Forterre 2002). Les symboles sont les mesures d'épaisseur de dépôt h_{stop} en fonction de l'angle d'inclinaison θ et la courbe continue ajustant les données est décrite par l'équation 1.2.

En marge de ces régimes continus, il est possible d'observer la déstabilisation d'une couche de grains par une perturbation. En effet, un dépôt uniforme ne sera remis en mouvement que si on incline le plan à un angle plus important. Ceci définit une épaisseur maximale de stabilité pour un dépôt: $h_{start}(\theta) > h_{stop}(\theta)$. Elle correspond à l'épaisseur à laquelle apparaissent spontanément des avalanches. Entre l'épaisseur d'arrêt h_{stop} et celle de démarrage h_{start} , l'empilement granulaire est métastable. Nous pouvons observer des régimes avalancheux lorsque la couche est perturbée (Daerr *et al.* 1999a): les deux comportements fluide et solide sont possibles selon l'histoire de l'empilement menant à différentes formes d'avalanches. Cette particularité est le reflet d'un phénomène d'hystérésis propre aux milieux granulaires. Les grains sont coincés dans un minimum local du paysage énergétique et une petite perturbation peut suffire à déstabiliser l'ensemble.

Un dernier aspect a été étudié: l'influence du fond rugueux sur l'écoulement. En effet, en absence de rugosité, le cisaillement est localisé proche du fond (Louge *et al.* 2001). En général, les expériences sont menées avec des aspérités du même ordre de grandeur que la taille des grains qui s'écoulent (par exemple en collant les mêmes grains sur le fond). Pouliquen *et al.* (1996b, 1999a) ont montré que les seuils, donc les courbes $h_{stop}(\theta)$, évoluaient selon la nature des rugosités. Daerr (2001) a travaillé sur de la feutrine et retrouve les mêmes comportements. Plus récemment, Goujon *et al.* (2005) ont étudié finement la friction développée par le fond sur l'écoulement en fonction du rapport entre le diamètre des billes collées sur le plan et celui des billes qui coulent. Ces résultats mettent en évidence le rôle important de l'état de surface du fond sur l'écoulement.

Profils de vitesse et de compacité

Pouliquen (1999a) a montré que la vitesse moyenne $\langle u \rangle$ et l'épaisseur h des écoulements stationnaires sur plans inclinés sont reliées par une loi d'échelle (figure 1.7a). Le nombre de Froude est une fonction affine du rapport h sur h_{stop} selon l'expression suivante :

$$Fr = \frac{\langle u \rangle}{\sqrt{gh}} = \beta \frac{h}{h_{stop}(\theta)}, \quad (1.3)$$

où β est un coefficient qui dépend du matériau que l'on considère. Par exemple pour des billes de verre $\beta = 0.136$ (Pouliquen 1999a).

Des simulations numériques 3D de dynamique moléculaire ou de dynamique de contacts ont montré une loi similaire à celle des billes de verre, tant que l'écoulement n'est pas trop mince (figure 1.7b tirée de Silbert *et al.* 2001). Les simulations donnent accès non seulement aux grandeurs moyennes, mais aussi aux profils de vitesse complets. Plusieurs auteurs ont montré que la vitesse varie avec l'altitude à la puissance 3/2. Ce profil de vitesse, appelé « Bagnold », est différent de celui qui est obtenu avec un fluide newtonien dans la même configuration (un demi Poiseuille, $V \propto h^2$). Bagnold (1954) avait dérivé cette relation dans le contexte des régimes dilués et collisionnel à partir d'un bilan de quantité de mouvement transféré par collisions.

Azanza (1998) et Dippel *et al.* (1999) ont montré que lorsque les grains ont un coefficient de restitution $e < 0.7$, alors le profil de vitesse devient indépendant de e , donc du matériau, montrant une certaine universalité des profils obtenus.

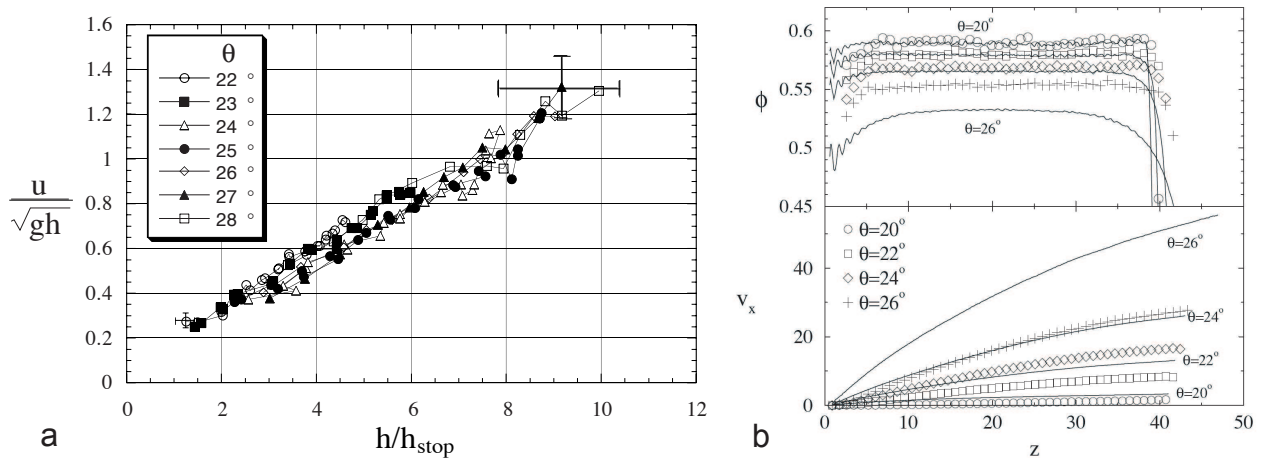


FIG. 1.7 – (a) Loi d'échelle empirique reliant les mesures du nombre de Froude moyen au rapport de l'épaisseur par l'épaisseur de dépôt pour les écoulements sur plan incliné (Pouliquen 1999a). (b) Simulations numériques 3D montrant (en haut) la fraction volumique indépendante de la profondeur et (en bas) les profils de vitesse du type bagnold (les différentes lignes correspondent à des lois de contact différentes pour les billes) (Silbert *et al.* 2001).

En parallèle de ces profils de vitesse, la densité locale de l'écoulement peut être mesurée. Les profils de densité révèlent que la fraction volumique ϕ est constante dans le cœur de l'écoulement avec une brusque diminution proche de la surface (figure 1.7bhaut). Cette valeur dépend légèrement de l'inclinaison, mais reste proche de celle d'un empilement dense désordonné.

Il est à noter que d'autres lois d'échelle sont rapportées. Par exemple pour du sable la relation entre le nombre de Froude Fr n'est plus linéaire avec l'épaisseur : il faut remplacer Fr par la différence $Fr - \alpha$ (pour un sable peu rugueux $\alpha = -0.77$ et $\beta = 0.75$ (Forterre *et al.* 2003)). Ancey *et al.* (1996) rapportent un changement de régime pour de forts débits. Le débit n'est plus proportionnel à $h^{5/2}$ mais à h . Les écoulements étudiés sont cependant à la limite du régime collisionnel. Rajchenbach (2003) a aussi réalisé des expériences bidimensionnelles et trouve que le profil de vitesse est proportionnel à h pour un angle donné, donc le débit à h^2 .

1.3.3 Écoulements sur fond meuble

Les configurations d'écoulement sur tas et en tambour tournant présentent la même particularité : l'écoulement se produit en surface au-dessus d'une zone statique. C'est la principale différence avec la configuration du plan incliné : l'écoulement ne s'étend plus sur la totalité de la couche, mais est localisé en surface. Un premier problème concerne la position de l'interface liquide-solide. Contrairement à la configuration précédente, la forme de l'écoulement n'est plus imposée par la topographie du fond. En effet la couche en mouvement peut échanger de la matière avec la zone statique pour modifier la position de l'interface. Ce phénomène d'érosion et de déposition de matière permet ainsi à l'écoulement de choisir sa morphologie et son interface. Dans ces configurations, il n'y a donc plus qu'un seul paramètre de contrôle : le débit. L'angle de la surface libre et la vitesse d'écoulement sont choisis par le système. Nous allons voir que les propriétés des écoulements changent du fait que les grains de la zone statique ne sont plus collés sur un fond fixe. Nous décrivons les caractéristiques communes aux configurations de tambour et de tas en précisant si nécessaire leur spécificité.

Seuil d'écoulement

Selon la valeur du débit imposé (alimentation depuis un réservoir Q ou rotation du tambour Ω), nous pouvons observer plusieurs écoulements. Pour un faible débit, un régime intermittent prend place, des avalanches se succèdent. Pour un débit plus important, le régime continu est obtenu (Jaeger *et al.* 1989 ; Rajchenbach 1990 ; Lemieux *et al.* 2000). La transition entre ces deux régimes s'opère à un débit critique Q_c , fixe pour le tas et de façon hystérétique pour le tambour (Jaeger *et al.* 1989 ; Rajchenbach 1990).

Dans le régime intermittent avec un débit très faible, l'empilement reste statique jusqu'à ce que la pente locale dépasse un angle maximal θ_d , appelé angle d'avalanche. L'écoulement déclenché va se poursuivre jusqu'à ce que la pente relaxe vers l'angle de repos θ_s . L'écart entre ces deux angles est de l'ordre de 3° (Dury *et al.* 1998 ; Félix 2002a ; Liu *et al.* 2005). Entre ces deux valeurs, de façon analogue à la configuration plan-incliné, une perturbation locale peut générer une avalanche. La dynamique des avalanches a fait l'objet de nombreux travaux pour comprendre la distribution des déclenchements et des tailles. Les avalanches semblent avoir une épaisseur minimale de l'ordre de dix tailles de grains.

Inclinaison de la surface

Pour un débit suffisant, dans le régime continu, la pente de la surface libre n'est plus imposée par la topographie du fond mais déterminée par l'écoulement. Dans la configuration sur tas, la surface reste plane alors qu'elle s'incurve pour former un S dans un tambour. Cette différence est notamment due à l'alimentation qui se répartit régulièrement le long du diamètre du tambour ce qui mène à une phénoménologie plus riche (Rajchenbach 1990 ; Mellmann 2001 ; Alexander *et al.* 2002). L'écoulement sera donc uniforme dans le cas du tas et pas dans le tambour : l'épaisseur et la vitesse augmentent à partir de sommet, puis diminuent après avoir dépassé le centre du cylindre. Néanmoins, dans la zone centrale, le profil de la surface présente un point d'inflexion, les propriétés de l'écoulement sont constantes devant de petits déplacements parallèles à la surface. En général les mesures sont faites dans cette zone qui est supposée refléter un écoulement uniforme.

L'inclinaison de la surface par rapport à l'horizontale, appelée angle dynamique, est en fait une fonction croissante du débit. Plusieurs lois phénoménologiques ont été rapportées. Rajchenbach 1990 a trouvé la loi d'échelle suivante $\theta - \theta_c \propto \Omega^2$ en tambour. Lemieux *et al.* 2000 ont effectué des expériences d'écoulement sur tas et ajustent leurs données grâce à la relation $Q \propto \exp(\theta - \theta_c)$. Taberlet *et al.* (2003) ont quant à eux étudié des écoulements sur tas très inclinés (à fort débit) et proposent plutôt une loi du type $\theta - \theta_c \propto Q$. Nous voyons déjà une grande diversité dans les mesures.

Profils de vitesse et de compacité

La majorité des études des régimes continus ont été effectuées dans la configuration tambour. En effet, il n'est pas nécessaire de réalimenter le réservoir pour observer l'écoulement pendant de longues périodes. Néanmoins les propriétés des profils de vitesse sont identiques dans les deux configurations. Leurs caractéristiques diffèrent de celles observées sur plan incliné. Les expériences en visualisation directe (Bonamy *et al.* 2002a ; Khakhar *et al.* 2001b ; Alexander *et al.* 2002 ; Jain *et al.* 2002) ou en RMN (Yamane *et al.* 1998 ; Seymour *et al.* 2000) montrent en effet un profil de vitesse quasiment linéaire. Un exemple de profil est donné sur la figure 1.8. De plus le gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ est pratiquement indépendant de la vitesse de rotation, des conditions d'écoulement et de la nature des particules : Bonamy *et al.* (2002a) trouve qu'il est constant et indépendant du débit alors que Rajchenbach (2003) trouve une faible dépendance de $\dot{\gamma}$ en $\sqrt{\sin(\theta)}$. La valeur de cette constante est de l'ordre de $0.5\sqrt{d/g}$ où d est le diamètre des grains. Avec cette propriété, la vitesse de surface serait donc proportionnelle à l'épaisseur, cette loi d'échelle est donc différente de celle qui est obtenue sur plan incliné ($V \propto h^{3/2}$). Ce profil linéaire de vitesse est suivi dans la profondeur par une décroissance exponentielle. Komatsu *et al.* (2001) ont montré en effet que la zone statique n'est pas totalement figée. Il existe un mouvement rampant qui s'étend profondément dans le tas. Ce fluage s'atténue exponentiellement avec la profondeur. Les figures 1.9 illustrent la vitesse non nulle même à de grandes profondeurs. La frontière entre les zones fluide et statique, située au changement de comportement de la vitesse n'est donc pas très nette (Orpe *et al.* 2004).

Enfin, concernant l'épaisseur sélectionnée par l'écoulement, peu d'études ont été réalisées. La littérature rapporte pour tous types de matériaux que l'épaisseur est généralement de l'ordre d'une dizaine de taille de grains (sauf Félix *et al.* 2002b). Par exemple, les profils mesurés par Bonamy *et al.* (2002a) de la figure 1.8 montrent des épaisseurs allant de 5 à 15 diamètres de grains.

Des données portant sur l'évolution de l'épaisseur montrent qu'elle augmente avec la vitesse

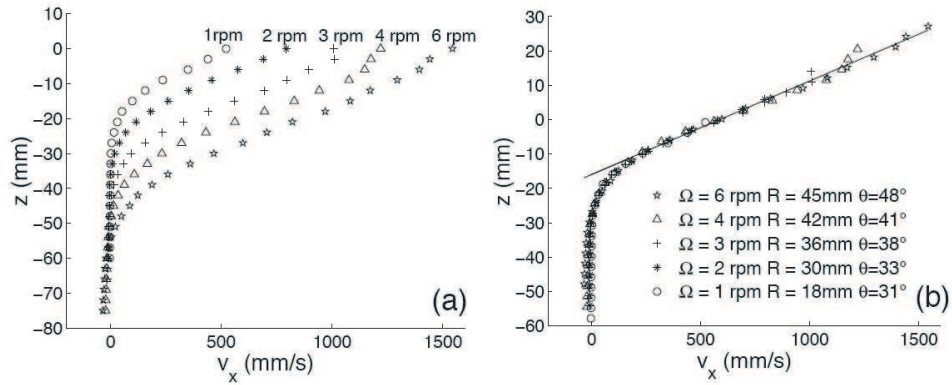


FIG. 1.8 – (a) Profils de vitesse typiques des écoulements sur fond meuble obtenus par Bonamy et al. (2002a) dans une configuration tambour tournant pour différentes vitesses de rotation. (b) Superposition des données précédentes montrant que le gradient de vitesse reste constant quelle que soit la vitesse de rotation.

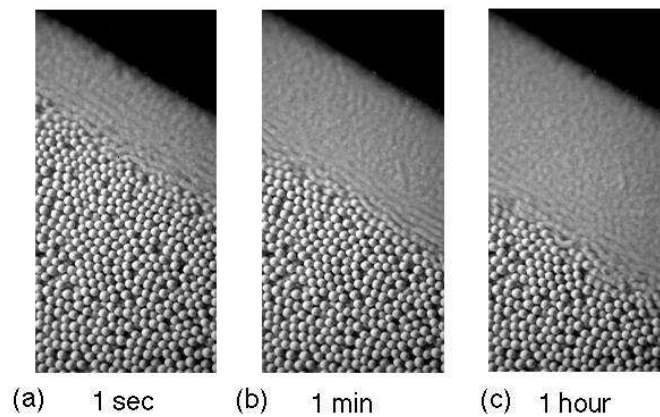


FIG. 1.9 – Photos (extraites de Komatsu et al. 2001) d'un écoulement stationnaire prises avec différents temps de pose montrant l'existence d'un fluage quasi-statique dans la profondeur du tas.

de rotation du tambour. Cependant la plupart des auteurs observent une saturation de celle-ci à grand débit (Boateng *et al.* 1997 ; Yamane *et al.* 1998 ; Félix *et al.* 2002b) pour un faible rapport de diamètres entre le tambour et les billes. En revanche Félix (2002a) rapporte de très grandes épaisseurs ($h > 50d$) pour un rapport $D/d = 1000$ en utilisant des billes de diamètre $d = 150 - 250 \mu\text{m}$. Taberlet *et al.* (2003) observent dans des expériences sur des tas très inclinés ($\theta \simeq 50^\circ$) que l'épaisseur est proportionnelle au débit.

Il est à noter que des simulations numériques de dynamique moléculaire en tambours tournants (Ristow 1996 ; Yamane *et al.* 1998) montrent des comportements similaires à ceux qui sont observés dans les expériences pour l'inclinaison de la surface, la vitesse et l'épaisseur des écoulements.

Les mesures de densité montrent qu'elle part d'une valeur proche de celle d'un empilement dense et désordonné de sphères dans la zone quasi-statique, puis elle décroît légèrement dans la zone fluide (Rajchenbach 2003 ; Bonamy 2002a ; GDR MiDi 2004 ; Taberlet 2005) avant de brusquement s'annuler à la surface libre.

Importance du confinement latéral

La plupart des expériences ou simulations numériques sont 2D ou quasi-2D. Ce choix est souvent dicté expérimentalement par la possibilité de visualiser directement l'écoulement à travers la paroi, d'utiliser moins de matériaux, mais aussi par la difficulté de déclencher de façon homogène des avalanches dans de larges systèmes. Les parois sont généralement en verre, donc lisses, et sont supposées ne pas trop modifier les propriétés de l'écoulement. Peu d'études traitent de leur influence sur les caractéristiques des écoulements granulaires. Néanmoins, nous pouvons relever dans la littérature certaines remarques.

Les expériences de Liu *et al.* (1991), Grasselli *et al.* (1997), Boltenhagen (1999) et les simulations de Zhou *et al.* (2002) ont montré que les valeurs des angles de repos et d'avalanches dépendaient de l'écartement entre les parois. Ils ont mesuré ces angles dans des systèmes de largeurs variables de tailles allant jusqu'à 100 diamètres de grains. Ils trouvent qu'ils décroissent exponentiellement avec la largeur vers une valeur asymptotique qui dépend du diamètre des grains. Félix (2002a) a confirmé ces résultats en tambour et montré que pour des systèmes homothétiques les angles de repos et d'avalanche étaient des fonctions décroissantes de la taille des particules.

Courrech du Pont *et al.* (2003a) ont étendu ces mesures à des billes de 0.2 à 2 mm dans différents milieux. Ils ont montré que la stabilisation du tas était compatible avec la prise en compte de la friction des grains sur les parois. Ils proposent un modèle qui aboutit à la relation : $\tan(\theta) = \tan(\theta_\infty) + B/W$, où W est la largeur du système et B la portée des effets des parois. Cette longueur caractéristique dépend du coefficient de redirection des contraintes normales dans le tas et des coefficients de friction inter-grains et grains-parois. La portée des effets (B) est de l'ordre d'une quinzaine de diamètres pour des billes de diamètre $d > 1$ mm et sature à 15 mm pour des billes submillimétriques.

Dans les régimes d'écoulement continu, en tambour tournant, des expériences utilisant des techniques d'IRM et des simulations numériques de dynamique moléculaire (Yamane *et al.* 1998 ; Dury *et al.* 1998) ont montré que l'angle de la surface libre est affecté près des bords. L'inclinaison de la surface varie transversalement à la direction d'écoulement et est plus importante de quelques

degrés contre la paroi qu'au centre du cylindre. Dury *et al.* (1998) concluent leur étude en définissant une longueur caractérisant l'atténuation exponentielle de ces effets de bords. Elle dépend peu du rayon des billes et semble proportionnelle au diamètre du tambour, mais elle reste toujours de l'ordre du diamètre d'un grain. Cependant les larges tambours simulés sont de petits diamètres ($D/d \sim 40$).

Les parois modifient donc les propriétés des écoulements et les auteurs doivent parfois prendre des précautions pour interpréter leurs résultats.

Pour les écoulements sur plan incliné en présence de parois latérales, Roberts (1969) a mesuré l'importance de la friction entre l'écoulement et les parois pour définir un coefficient global de friction du canal $\mu_{eff} = \mu(1 + kH/W)$, où H est la hauteur de l'écoulement (jusqu'au fond du canal) et W la largeur du canal. De même Savage (1979 et 1984) et Hutter *et al.* (1991) appliquent ce raisonnement pour expliquer la présence ou non de zone statique à la base de l'écoulement. Les écoulements sont respectivement nommés immatures ou développés. Cependant Savage (1979) ne prend pas en compte cette friction dans le développement de sa théorie et ne peut donc pas comparer les profils de vitesse obtenus expérimentalement avec les prédictions de son modèle.

Pour les systèmes bidimensionnels de disques entre plaques, Azanza *et al.* (1999) rapporte que la dynamique est changée lorsque les grains se mettent à rebondir, ou vibrer, entre les parois à cause d'un espacement trop grand. En revanche si le jeu entre les parois et les disques est suffisamment faible, cela revient à prendre une gravité modifiée. De même, Taberlet (2005) mentionne des perturbations importantes si la vitesse des disques devient trop grande.

En tambour tournant, Bonamy (2001) déduit des profils de vitesse et d'un modèle hydrodynamique pour l'écoulement, la forme de la force induite par les parois. Il propose une interprétation collisionnelle à l'expression trouvée : $F \propto \dot{\gamma}h^2$, où h est l'épaisseur de la couche mobile.

Récemment Taberlet *et al.* (2003) ont étudié des écoulements sur tas à des angles très élevés supérieurs à 60° dans plusieurs canaux étroits ($W/d = 10, 20, 40$). Ils ont montré que l'épaisseur de l'écoulement était proportionnelle à la largeur du canal. Au contraire, en tambour tournant, Orpe *et al.* (2001), Khakhar *et al.* (2001b), Jain *et al.* (2002) et Félix (2002a) trouvent que les gradients de vitesse et les épaisseurs ne varient pas lorsque l'on écarte les parois latérales pour des systèmes de largeurs comprises entre 2 et 30 billes.

Les parois modifient non seulement les propriétés moyennes des écoulements mais aussi les profils de vitesse. Lemieux *et al.* (2000) ont mesuré des profils de vitesse en parois sur tas et trouvent que l'intégrale de ces profils sur l'épaisseur ne donne que la moitié du débit mesuré. Ceci signifie que les grains ont une vitesse plus faible à la paroi mais aucune mesure précise de ces variations transverses n'a été faite dans cette configuration (Taberlet (2005) rapporte une différence de vitesse entre les bords et le centre du canal de l'ordre de 15 %).

Enfin, les résultats de Koeppel *et al.* (1998) indiquent que la largeur du système peut changer la dynamique des écoulements. Ils ont étudié le phénomène de ségrégation d'un mélange de sable (0.4 mm) et de sucre (0.8 mm) dans une configuration de tas. Ils ont systématiquement fait varier le débit et la largeur entre les vitres de 2 mm jusqu'à 10 mm. Les motifs de ségrégation laissés par les avalanches successives évoluent avec l'écartement des plaques.

Tous ces résultats paraissent disparates, mais montrent que l'influence des parois n'est pas encore bien comprise. Éclaircir le rôle que jouent les parois dans les écoulements sur tas sera le but de la première partie de cette thèse.

1.4 Modélisations des écoulements granulaires denses

Il existe de nombreuses approches théoriques essayant de reproduire les observations expérimentales décrites ci-dessus. Ceci témoigne de l'essor de l'étude des matériaux granulaires mais aussi de la difficulté de comprendre les écoulements denses. Nous décrivons d'abord les modèles moyennés dans l'épaisseur qui constituent les premières modélisations d'écoulements puis nous présenterons les dernières avancées dans la compréhension des écoulements granulaires.

1.4.1 Modèles intégrés sur l'épaisseur

Historiquement, les premières modèles pour décrire les écoulements denses utilisent des approches moyennées sur l'épaisseur (Savage *et al.* 1989). Le matériau granulaire est considéré comme un fluide homogène incompressible. Les équations de la conservation de la matière et de la quantité de mouvement sont intégrées sur l'épaisseur. L'hypothèse suivante est de considérer que les dimensions typiques des variations de l'écoulement sont grandes devant son épaisseur h . La plupart des écoulements géologiques possèdent ces caractéristiques : ils gardent une épaisseur faible (une dizaine de mètres) comparée à la longueurs de propagation (plusieurs kilomètres). Cette approximation permet de négliger certains termes dans les équations. Les contraintes normales sont données par l'hydrostatique. Nous aboutissons aux équations de « Saint-Venant » couplant l'épaisseur h et la vitesse moyenne $\langle u \rangle = \text{Débit}/h$. Pour un écoulement bidimensionnel sur un plan incliné, les équations moyennées de conservation de la matière puis celle de la quantité de mouvement sont les suivantes :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial(h\langle u \rangle)}{\partial x}, \quad (1.4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial(h\langle u \rangle)}{\partial t} + a \frac{\partial(h\langle u \rangle^2)}{\partial x} \right) = \rho gh \sin \theta - \tau(z=0) - K \rho gh \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (1.5)$$

où le facteur a contient une information sur la forme du profil de vitesse ($a = \langle u^2 \rangle / \langle u \rangle^2$) et K est le facteur de redistribution des contraintes normales dans le matériau. Les trois termes du membre de droite de l'équation 1.5 correspondent respectivement au poids d'une tranche de matériau (figure 1.10), à la force exercée par le fond sur l'écoulement et à la différence de pression due aux gradients d'épaisseur. Pour aller plus loin il faut faire des hypothèses sur les coefficients a et K . Le coefficient a est souvent supposé constant pour pouvoir fermer le système d'équation. Cela signifie que la forme du profil est homothétique et s'adapte instantanément aux variations de l'écoulement. Le coefficient K est différent de 1 pour un empilement statique, mais de récentes simulations numériques montrent que $K = 1$ lors d'un écoulement dense (Prochnow *et al.* 2000 ; Silbert *et al.* 2001 ; Renouf *et al.* 2005).

Dans ces écoulements, toute la rhéologie est cachée dans le terme $\tau(z=0)$ modélisant l'interaction entre le fond et l'écoulement. Dans les premières tentatives développées par Savage *et al.* (1989), ce terme est décrit par une force de friction du type Coulomb : la contrainte tangentielle $\tau(z=0)$ est proportionnelle à la contrainte normale : $\tau(z=0) = \mu \rho gh \cos \theta$. Ici le coefficient de friction μ est constant. Cette modélisation réussit à reproduire les distances parcourues par des écoulements lorsque la pente est importante et le fond lisse (Savage *et al.* 1989) ou sur une topographie légèrement courbe (Wieland *et al.* 1999). Dans ce cadre là, il existe plusieurs tentatives de description des écoulements résultants de rupture de barrage, lorsque les parois verticales

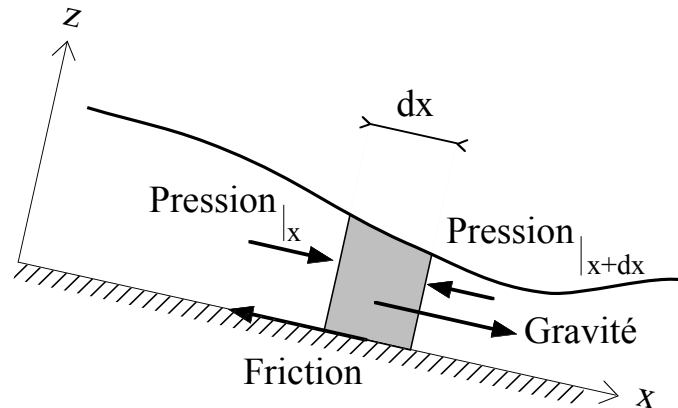


FIG. 1.10 – Bilan horizontal de quantité de mouvement sur un élément de fluide permettant l'obtention des équations moyennées dans l'épaisseur.

sont retirées (Lube et al. 2004 ; Lajeunesse et al. 2004 et 2005 ; Mangeney-Castelneau *et al.* 2005 ; Balmforth et al. 2005 ; Siavoshi et al. 2005 ; Staron *et al.* 2005).

Cette approche a été ensuite appliquée aux écoulements sur des plans inclinés de rugosité importante (de l'ordre de la taille des grains) à des angles modérés. Contrairement aux écoulements sur fond lisse, des écoulements uniformes et stationnaires peuvent être observés pour une grande gamme d'angle (Pouliquen 1999a). Ce résultat est incompatible avec la friction solide. En effet, l'équation 1.5 pour les écoulements uniformes se réduit à $\mu_b = \tan(\theta)$, où μ_b est le coefficient effectif de friction entre le fond et l'écoulement. Ce résultat indique que la friction basale dépend d'une combinaison de la vitesse moyenne et de l'épaisseur de l'écoulement. À partir des mesures expérimentales sur plan incliné rugueux, une formulation empirique peut être proposée. Grâce à l'ajustement de la courbe h_{stop} (équation 1.2) et à la loi d'échelle expérimentale (équation 1.3), nous pouvons montrer que μ_b suit l'équation suivante :

$$\mu_b(\langle u \rangle, h) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{\frac{\beta h}{FrL_0} + 1}. \quad (1.6)$$

Si les grains considérés ne sont pas des billes de verre, il faut remplacer le nombre de Froude Fr par la différence $Fr - \alpha$ (voir le paragraphe 1.3.2). Cette relation a par la suite été utilisée pour prédire l'évolution d'un écoulement de grains. Elle a notamment été testée avec succès sur les écoulements non uniformes sur fond fixe (étalement d'un volume de billes de verre sur une pente rugueuse) (Pouliquen *et al.* 2002) et pour décrire le seuil d'instabilité en ondes de surface (Forterre *et al.* 2003).

Ces approches (Savage *et al.* 1989) sont valides lorsque la totalité de la couche est en mouvement. Dans le cas d'écoulements sur tas, le matériau granulaire est divisé en deux couches : la couche mobile et la couche statique. Il faut donc de surcroît décrire la position de l'interface liquide-solide. En effet suite à des interactions entre les grains de couches différentes, la couche fluide peut soit éroder le fond soit être incorporée au tas. La première tentative de description

(Bouchaux *et al.* 1994) repose sur deux équations distinctes pour décrire l'évolution de la hauteur de chaque phase, couplées par un terme d'échange de matière. Ce modèle présente deux inconvénients. Premièrement il faut proposer une loi d'érosion-déposition heuristique, deuxièmement, la conservation de la quantité de mouvement n'est pas respectée de façon explicite. Cependant, malgré ces aspects, ce modèle a permis de reproduire certains phénomènes granulaires (dynamique d'avalanches, ségrégations) (Boutreux *et al.* 1998 ; Aradian *et al.* 2002). Les approches du type Saint-Venant permettent de pallier ce dernier défaut (Douady *et al.* 1999 ; Orpe *et al.* 2001). Cependant la rhéologie du matériau n'est pas explicitée et il est nécessaire de conserver une hypothèse supplémentaire pour utiliser le modèle, par exemple se donner la forme du profil de vitesse (souvent linéaire $a = 4/3$) ou d'utiliser une loi empirique conditionnant la contrainte tangentielle à la surface de la zone statique.

Ces modèles intégrés sont valables lorsque les variations de l'écoulement sont suffisamment lentes mais elles ne résolvent pas le problème des lois constitutives nécessaires pour décrire des écoulements sortants de ce cadre. Dans le prochain paragraphe, nous décrivons une approche prometteuse que nous utiliserons au cours de cette thèse.

1.4.2 La loi de friction locale « $\mu(I)$ »

Récemment, des simulations numériques discrètes 2D réalisées par Da Cruz *et al.* (2004) et Iordanoff *et al.* (2004) ont mis en évidence des propriétés intéressantes d'un écoulement granulaire cisailé. Ils ont étudié la configuration du cisaillement plan numériquement. L'intérêt de cette configuration est de pouvoir étudier la rhéologie des matériaux granulaires sans être perturbé par une distribution hétérogène des contraintes. Le matériau granulaire est confiné entre deux plaques rugueuses sous une pression P (figure 1.11). La plaque supérieure, libre de se déplacer verticalement, est tirée à vitesse constante V_0 et la contrainte tangentielle τ nécessaire au déplacement est mesurée. Au-delà du régime intermittent qui se manifeste pour de faibles cisaillements, l'écoulement est continu et le profil de vitesse est linéaire. Une grande gamme de paramètres macroscopiques (τ , H et P) et microscopiques (friction inter-particules, coefficient de restitution e) a été explorée. Les résultats importants sont les suivants. Premièrement, les contraintes horizontales et verticales sont égales. La pression semble isotrope comme dans un fluide traditionnel. Deuxièmement, la contrainte tangentielle est proportionnelle à la contrainte normale et le coefficient de

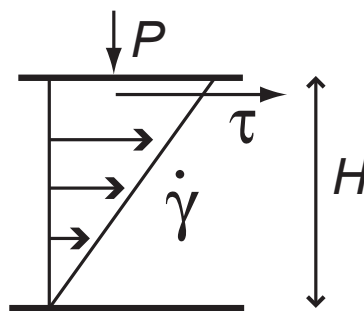


FIG. 1.11 – Cisaillement plan homogène.

ment est continu et le profil de vitesse est linéaire. Une grande gamme de paramètres macroscopiques (τ , H et P) et microscopiques (friction inter-particules, coefficient de restitution e) a été explorée. Les résultats importants sont les suivants. Premièrement, les contraintes horizontales et verticales sont égales. La pression semble isotrope comme dans un fluide traditionnel. Deuxièmement, la contrainte tangentielle est proportionnelle à la contrainte normale et le coefficient de

proportionnalité est relié au cisaillement par un paramètre sans dimension I :

$$\frac{\tau}{P} = \mu(I) \quad (1.7)$$

avec

$$I = \frac{|\dot{\gamma}|d}{\sqrt{P/\rho_s}}, \quad (1.8)$$

où ρ_s est la densité des grains, $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement et d le diamètre des grains. Ce paramètre, appelé nombre inertiel par Da Cruz *et al.* (2005), est retrouvé sous d'autres noms dans la littérature bien que son interprétation soit un peu différente : nombre de Weissenberg (Goddard 1986), nombre de Savage (Savage *et al.* 1989 ; Iverson *et al.* 1993) ou nombre de Coulomb (Ancy *et al.* 1999). Ce résultat peut se comprendre simplement dans le cadre d'une analyse dimensionnelle. Dans la limite de grains très rigides (l'échelle de temps des chocs élastiques est négligeable devant les autres) et dans l'hypothèse que la taille de la cellule ne joue aucun rôle, les seuls paramètres sans dimensions sont τ/P et I .

Ce paramètre I peut être interprété (GDR MiDi 2004) comme le rapport de deux temps caractéristiques. Un temps microscopique t_P de réarrangement de particules sous la pression de confinement (figure 1.12a) et un temps macroscopique t_γ correspondant au cisaillement global du milieu (figure 1.12b) ou au temps nécessaire à un grain pour avancer de son diamètre :

$$I = \frac{t_P}{t_\gamma} \quad \text{avec} \quad t_P = d\sqrt{\frac{\rho_s}{P}} \quad \text{et} \quad t_\gamma = \frac{1}{\dot{\gamma}}. \quad (1.9)$$

Le rapport I donne ainsi une indication sur la nature de la déformation du milieu. Pour un petit

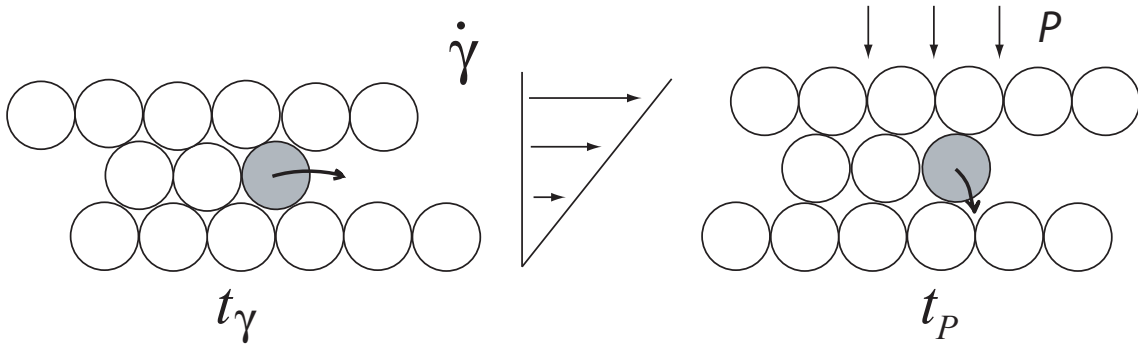


FIG. 1.12 – Interprétation du paramètre I en termes de temps caractéristiques de déformations t_γ et de réarrangement local t_P .

nombre I , nous nous situons dans la limite du régime quasi-statique : le milieu se déforme très lentement et de temps en temps des réarrangements rapides se produisent. Plus I augmente, plus les chocs deviennent nombreux, les grains restent moins longtemps piégés par leurs voisins. Dans la limite des grands nombres inertiels, le régime devient collisionnel. Da Cruz *et al.* (2004) considère que l'écoulement appartient au régime dense dans le cas où $I < 0.2$. Dans ses simulations, le coefficient de friction effectif μ varie comme sur la figure 1.13a. Ces résultats sont compatibles

avec les anciennes mesures de Savage *et al.* (1983, 1984).

L'intérêt de cette approche est qu'elle permet de retrouver les résultats des écoulements uniformes sur plan incliné rugueux. En effet, dans cette configuration, l'équilibre des contraintes locales impose que le rapport des contraintes normales et tangentielles soit fixé par l'angle du tas : $\tau/P = \tan \theta$ pour toutes profondeurs. En émettant l'hypothèse selon laquelle la loi constitutive précédente s'applique localement on trouve que $\mu(I) = \tan \theta$. Donc I est constant à travers la couche et ne dépend que de l'inclinaison. De l'expression de I on peut tirer le profil du taux cisaillement :

$$\dot{\gamma}(z, \theta) = I(\theta) \sqrt{P(z)/\rho_s}/d = I(\theta) \sqrt{\phi g (h-z) \cos \theta}/d. \quad (1.10)$$

Puis, par intégration, la vitesse à toutes profondeurs :

$$V(z, \theta) = \frac{2}{3} I(\theta) \sqrt{\phi g \cos \theta} (h^{3/2} - (h-z)^{3/2})/d. \quad (1.11)$$

La loi $\mu(I)$ prédit donc un profil de vitesse de Bagnold (GDR MiDi 2004). Notons que la loi d'échelle en puissance 3/2 est indépendante de la forme de la fonction $\mu(I)$ mais dépend seulement de l'écriture du paramètre I . Pour obtenir des informations sur la courbe $\mu(I)$, il faut revenir à la loi d'échelle de l'équation 1.3 reliant la vitesse moyenne et l'épaisseur à l'inclinaison.

En moyennant l'expression 1.11 sur la hauteur h , nous trouvons la relation entre la vitesse moyenne $\langle V \rangle$, h et $I(\theta)$:

$$\frac{\langle V \rangle}{\sqrt{gh}} = \frac{2}{5} I(\theta) \sqrt{\phi \cos \theta} \frac{h}{d}. \quad (1.12)$$

En identifiant cette expression avec la loi d'échelle expérimentale 1.3 et en utilisant l'ajustement de la courbe h_{stop} (équation 1.2), nous trouvons une relation entre I et θ dont nous pouvons déduire les équations suivantes décrivant la friction interne (Jop *et al.* 2005):

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{\frac{I_0}{I} + 1}, \quad (1.13)$$

avec

$$I_0 = \frac{5}{2} \frac{d\beta}{L_0 \sqrt{\phi \cos(\theta_0)}}. \quad (1.14)$$

La figure 1.13b représente la fonction $\mu(I)$ ajustant les données expérimentales. Nous nous apercevons que la courbe $\mu(I)$ a la même allure en cisaillement homogène et en plan incliné. Elle démarre d'une valeur seuil μ_s pour les régimes quasi-statiques ($I \rightarrow 0$). Cette valeur correspond environ à celle de l'angle de repos du matériau. Puis elle croit asymptotiquement vers une limite μ_2 pour les régimes fortement cisailés ($I \gg 1$). Nous voyons donc qu'une loi de friction $\mu(I)$ (équation 1.13) semble suffire à décrire nombres d'observations dans les configurations de cisaillement homogène plan et de plan incliné rugueux.

Limites de la rhéologie « $\mu(I)$ »

La loi $\mu(I)$ soulève cependant d'importants problèmes. Le premier concerne la configuration d'écoulements sur fond meuble. Dans cette géométrie, la distribution des contraintes est identique

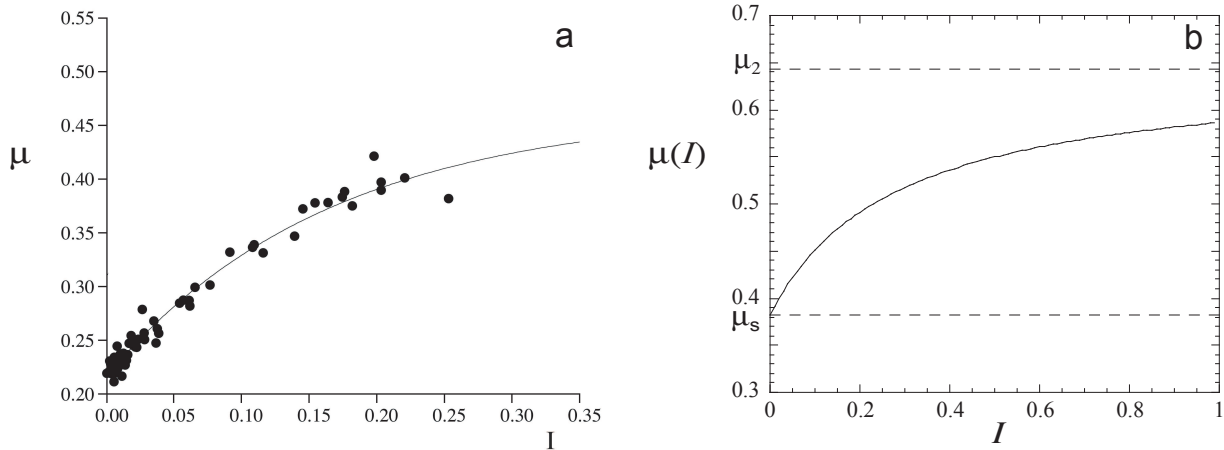


FIG. 1.13 – (a) Coefficient de friction effectif tiré des simulations numériques d'écoulement de Couette plan (Da Cruz *et al.* 2005 ; GDR MiDi 2004). (b) Allure de la courbe du coefficient de friction $\mu(I)$ ajustant les données des écoulements de billes de verre de Forterre *et al.* (2003).

à celle du plan incliné. Les conclusions auxquelles la rhéologie aboutit sont donc identiques : la vitesse devrait être proportionnelle à $h^{3/2}$ avec un profil de Bagnold. Or les expériences montrent des profils de vitesse complètement différents avec une localisation de l'écoulement à la surface. Cette approche locale semble donc incompatible avec cette configuration. Comprendre pourquoi cette modélisation ne fonctionne pas dans le cas des écoulements sur fond meuble est une des motivations de cette thèse.

Un autre problème concerne les seuils d'écoulement. La rhéologie autorise *a priori* l'écoulement de toute épaisseur de matériau sur un plan rugueux. Cette prédiction est en contradiction avec l'observation des dépôts d'épaisseur h_{stop} laissés par l'écoulement qui définissent l'épaisseur minimale pouvant s'écouler. Ce dépôt est la signature de mouvements corrélés qui prennent de l'importance à faible débit. Un peu à la façon des chaînes de forces à longue portée dans les milieux granulaires statiques, les régimes d'écoulements denses présentent des corrélations de déplacements des grains : des travaux en tambour tournant ont montré que la vitesse des grains était corrélée à l'intérieur d'agrégats de tailles variables (Bonamy *et al.* 2002b) et des mesures de vitesse en surface sur plan incliné (Pouliquen 2004) confirment la présence de corrélations qui dépendent de l'inclinaison. La rhéologie $\mu(I)$ ne tient pas compte de ces corrélations. En réponse à ce problème, il existe d'autres modèles non locaux essayant de prendre en compte des effets à longue portée responsables de ces seuils.

1.4.3 Autres approches

D'autres tentatives existent pour modéliser les écoulements granulaires denses comme un milieu continu (Aradian *et al.* 2002).

Les modèles non-locaux trouvent leur justification dans l'existence de corrélations entre les mouvements des grains et l'observation qu'une simple relation locale entre le taux de cisaillement et la contrainte tangentielle ne permet de retrouver ni la concavité, ni le gradient nul à la surface des profils de vitesse expérimentaux (Andreotti *et al.* 2001).

Mills *et al.* (1999) et Bonamy *et al.* (2003) ont proposé un modèle non local. Les deux contributions aux contraintes (statique et hydrodynamique) sont moyennées sur un noyau de longueur ξ qui caractérise la portée des corrélations.

Pouliquen *et al.* (2001) ont proposé que le taux de cisaillement, dans la limite des écoulements quasi-statiques, soit le résultat d'une intégration des impulsions produites par les chocs de grains distants. La force de ces impulsions décroît avec l'éloignement et la vitesse moyenne est le résultat d'un processus d'activation. Ce modèle permet de retrouver qualitativement l'épaisseur $h_{stop}(\theta)$ du plan incliné et l'apparition de fluage dans les zones statiques.

Le modèle (Quartier *et al.* 2000 ; Andreotti *et al.* 2001) illustre par une modélisation en couches de billes parallèles que la non-localité ajoutée à la présence de pièges (espaces entre deux billes sous-jacentes) permet de retrouver l'existence d'angles de repos, d'angle limite pour soutenir un écoulement stationnaire et de retrouver qualitativement la forme des profils de vitesse expérimentaux sur fond meuble.

Ertas *et al.* (2002) interprètent les longueurs de corrélations par la présence de paquets de grains qui s'assemblent continûment sous l'effet de l'inélasticité avec un temps caractéristique dépendant de la force de gravité et qui se désagrègent à cause du cisaillement. L'écoulement sur plan incliné se fige alors lorsque la taille des agrégats est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche.

Une autre classe de modèles décrit l'écoulement comme étant partiellement fluidisé, par l'intermédiaire d'un paramètre d'ordre p modélisant la proportion de liquide et de solide (Aranson *et al.* 2002). Ce paramètre d'ordre p vaut zéro dans la phase statique (solide), $p = 1$ dans une phase totalement fluide, et varie continûment dans la zone d'écoulement. En plus des équations de Navier-Stokes pour décrire le fluide il faut introduire une équation pour piloter l'évolution du paramètre d'ordre. Les auteurs ont choisi une équation du type Ginzburg-Landau. Cette approche permet entre autres de décrire plusieurs phénomènes ou instabilités granulaires, mais le choix de l'équation pour l'évolution de ce paramètre d'ordre reste assez arbitraire.

Mentionnons enfin les rhéologies locales développées par Ancey *et al.* (2000) ou Josserand *et al.* (2004), où les contraintes comportent à la fois des termes collisionnels et frictionnels et où le paramètre déterminant se trouve être la fraction volumique locale.

1.5 Problématique de la thèse

L'objectif de cette thèse est d'étudier précisément les propriétés des écoulements sur fond meuble et d'en déduire des conséquences à propos de la rhéologie des écoulements denses.

Premièrement, nous allons effectuer des expériences d'écoulements sur tas dans une configuration suffisamment longue pour obtenir des propriétés uniformes dans la direction de l'écoulement. En effet, la majorité des expériences ont été réalisées en tambour tournant, dans lequel l'écoulement est non uniforme. Quelles sont les relations entre la vitesse, le débit et l'épaisseur ?

Deuxièmement, nous voulons clarifier l'influence des parois. Pour cet objectif, nous allons faire varier la largeur du système. En effet, aucun travail ne porte sur les écoulements uniformes dans de larges systèmes : la majorité des expériences a été réalisée dans les canaux n'excédant pas 30 diamètres de particules. Que deviennent les caractéristiques des écoulements granulaires lorsque la taille du système devient grande devant la taille des grains ? Peut-on s'affranchir de l'influence des parois pour des systèmes très larges ? Cette influence se réduit-elle à une couche limite d'extension

finie aux bords ?

Enfin, la dernière question qui nous a motivé concerne la loi de friction $\mu(I)$. Comprendre pourquoi la rhéologie $\mu(I)$, qui est fondée sur des arguments dimensionnels simples et qui apporte des descriptions quantitatives dans d'autres configurations, ne fonctionne pas pour les écoulements sur tas. Est-ce un défaut de la rhéologie ou bien est-ce dû à un artéfact ?

Chapitre 2

Système expérimental

2.1 Description du dispositif

Nous avons choisi d'étudier les écoulements sur tas entre deux parois latérales. Cette configuration a été choisie pour plusieurs raisons. Nous pouvons disposer d'une plus grande longueur d'écoulement que dans un tambour. Elle a l'avantage de présenter des écoulements uniformes au contraire de ceux observés en tambour tournant dans lequel la vitesse et l'épaisseur de la couche mobile évoluent tout au long de l'écoulement. Ceci permet de mieux contrôler la distribution des contraintes. Ensuite, il n'existe pas d'étude expérimentale des écoulements sur tas dans de larges systèmes, notamment sur l'influence de la largeur du canal.

Les expériences ont donc été réalisées dans un canal de largeur W variable (figure 2.1). Le châssis est en profilés aluminium Bosh sur lequel sont fixées les parois latérales. Elles sont en verre d'épaisseur 6 mm, elles garantissent une bonne planéité et donc un bon parallélisme. La longueur totale utilisable est 1.2 mètre et la hauteur 25 cm. Le canal est partiellement obstrué en partie basse par une plaque métallique de 10 cm de hauteur. Celle-ci nous permettra de créer un tas statique par-dessus lequel les grains s'écouleront. Pour utiliser une quantité moindre de matériaux granulaires, le canal est incliné grâce à un cric jusqu'à un angle inférieur à l'angle de repos du matériau. Un étalonnage préalable de l'inclinaison en fonction du nombre de tours de manivelle du cric permet d'améliorer la précision de la sélection de l'angle ($\Delta\theta < 0.1^\circ$). L'épaisseur du tas est alors suffisamment grande devant les profondeurs d'écoulements pour le considérer semi-infini. Nous pouvons intercaler une plaque de verre supplémentaire pour réduire la largeur du canal. La largeur est fixée par plusieurs jeux de cales de bois stratifié et peut varier de 1 cm jusqu'à 30 cm. Le bois a été choisi pour sa facilité de mise en oeuvre et pour éviter de briser les plaques de verres lors de la fixation de la vitre intermédiaire si des grains sont bloqués entre la cale et le verre. Les plaques latérales sont généralement lisses, mais nous avons aussi utilisé des plaques rugueuses afin de changer les conditions limites aux parois. Ce point sera développé dans le chapitre 4.

Le matériau granulaire s'écoule depuis un réservoir muni d'une double porte. La première permet un réglage fin du débit, la seconde assurant seulement l'arrêt de l'écoulement (figure 2.2). L'ouverture de la porte est suffisamment faible (moins de 2 cm) pour que le débit reste constant pendant pratiquement toute la vidange du réservoir. Lorsque le canal est rempli, les grains s'écoulent par-dessus le tas et tombent dans un réservoir. Nous vérifierons de plus que le taux d'humidité (non contrôlé) reste dans la fourchette 20-40% avant d'effectuer des mesures. Enfin certaines parties en

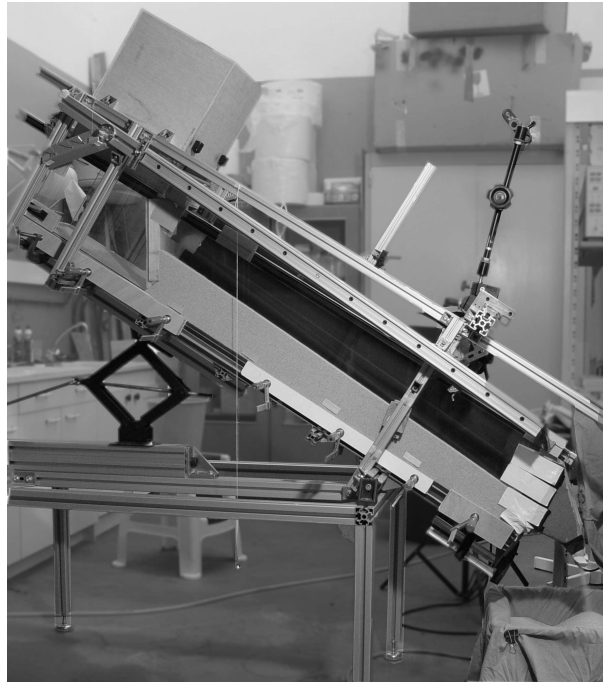


FIG. 2.1 – Écoulement sur fond meuble : dispositif expérimental.

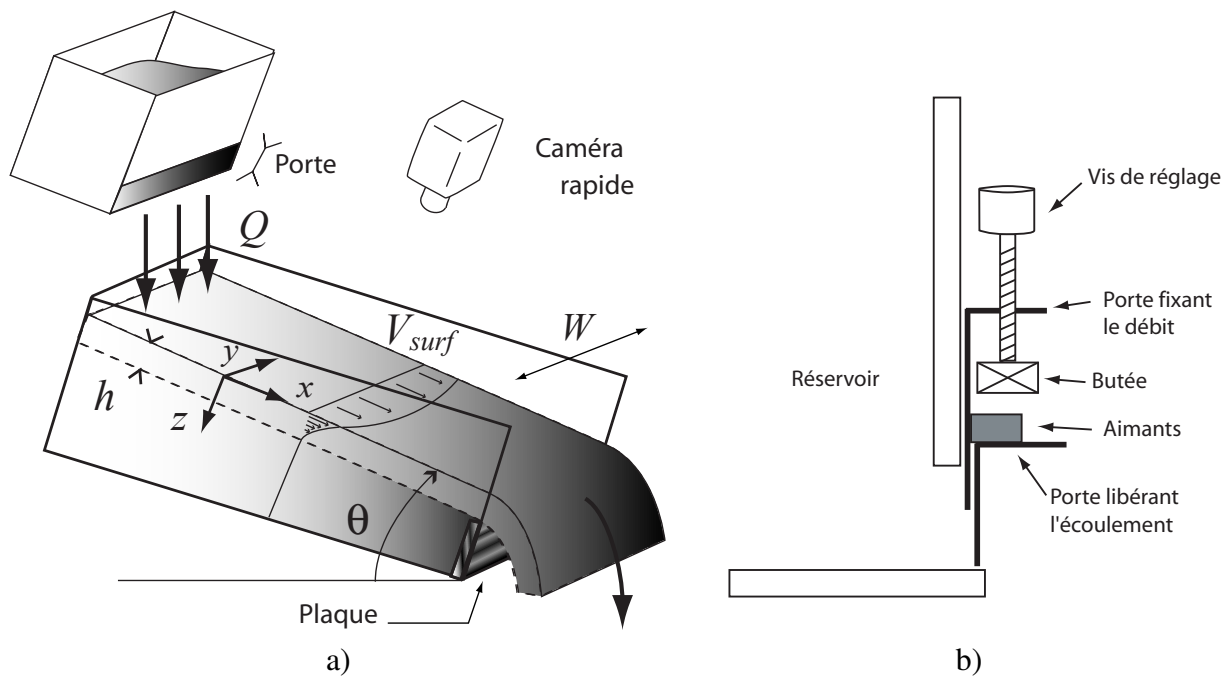


FIG. 2.2 – (a) Schéma du dispositif expérimental et définition des variables. (b) Détail de la double porte du réservoir : mécanisme de réglage du débit.

contact avec les billes seront recouvertes de papier métallique qui sera relié à la terre pour évacuer les charges électrostatiques résiduelles.

Il est à noter que la plaque de verre du fond doit être rendue rugueuse sinon le tas s'écoule. La solution consiste à coller des billes de verre sur du papier adhésif de type *Velleda* et à le déposer au fond du canal.

2.2 Matériaux granulaires

Afin de pouvoir étudier la rhéologie des milieux granulaires, il faut éviter d'utiliser des grains de tailles polydisperses. En effet, les phénomènes de ségrégation peuvent perturber l'écoulement (Pouliquen *et al.* 1999b). Nous avons utilisé principalement un matériau granulaire modèle, des billes de verre sphériques de diamètre moyen $d = 530 \pm 50 \mu\text{m}$ et de densité $\rho_s = 2450 \text{ kg/m}^3$ fournis par *Potter & Ballotini*. Ces billes sont obtenues par fusion de débris de verre et les normes de qualités étant insuffisantes, ce procédé entraîne un grand nombre de déchets : billes collées ou déformées, fragments très petits. Pour améliorer la qualité de notre lot, nous avons dû les trier. Les billes ont été tamisées entre 400 et 600 μm dans un premier temps pour éliminer les poussières très fines et les gros agrégats de billes. La sphéricité des billes restantes peut être caractérisée par le rapport des axes de l'ellipse (d_1 et d_2) qui ajuste au mieux la forme de la bille. Si le rapport d_1/d_2 est inférieur à 1.1, les billes sont considérées sphériques. Ces mesures sont faites par traitement d'image et portent sur des échantillons comprenant au moins 900 billes. Le lot de bille initial comporte seulement 74 % de billes sphériques, ce qui est très insuffisant et peut provoquer des phénomènes de ségrégation.

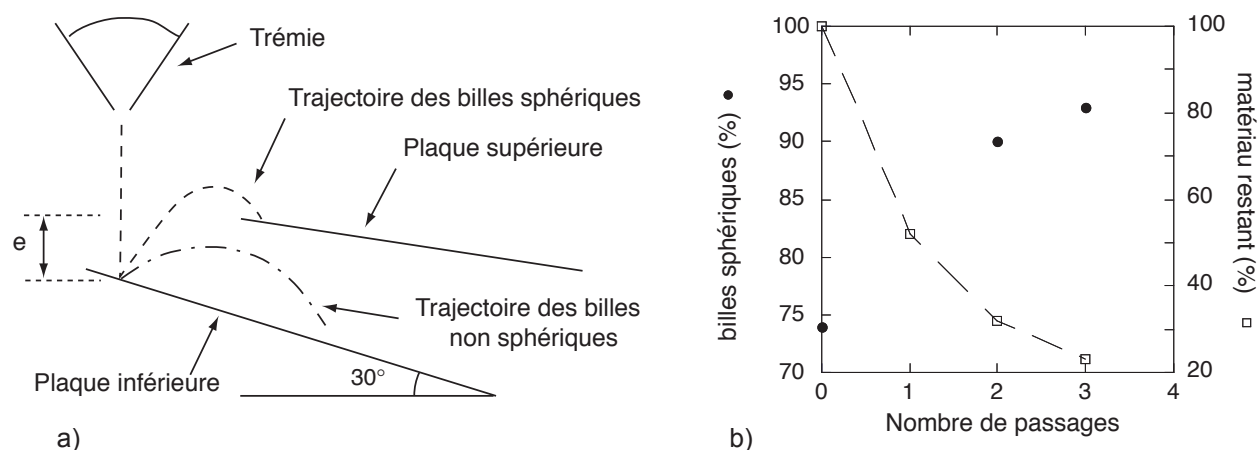


FIG. 2.3 – (a) Principe de la trieuse de billes par rebond (la *Celinette*[®] du GEP) : les billes sphériques rebondissent mieux sur la plaque inférieure et sont sélectionnées par la plaque supérieure. (b) Probabilité de sphéricité (●) et pourcentage de matériaux recueillis (□) en fonction du nombre de passages dans la trieuse. Le meilleur compromis se situe à deux passages.

Pour éliminer les particules déformées, nous avons tiré parti du rebond des billes sur une plaque de verre. Celui-ci sera différent selon la forme de la bille. Le principe du tri est schématisé sur la figure 2.3a. Les billes, lâchées d'une trémie rectiligne, rebondissent sur une plaque de verre inclinée.

Les billes sphériques ont, après le rebond, une trajectoire parabolique élevée, alors que les ovoïdes et les agrégats rebondissent mal. En ne sélectionnant que les particules possédant les trajectoires les plus hautes par une seconde plaque munie d'une arête vive nous éliminons une bonne partie des particules déformées. En effectuant plusieurs passages nous augmentons progressivement le pourcentage de billes sphériques. L'efficacité du tri nécessite de travailler avec un très faible débit afin d'éviter les collisions multiples. Pour une meilleure sélection, la plaque de verre est inclinée à 30° (C. Goujon 2004). Le réglage de l'écart e entre les plaques supérieure et inférieure permet de récupérer 50% des billes lors du premier passage.

Sur la figure 2.3*b* est tracée l'évolution du pourcentage de billes sphériques en fonction du nombre de passages dans la trieuse (ronds noirs). Après plusieurs passages, nous atteignons environ 90% de billes sphériques. Cependant la quantité totale de billes restantes diminue à chaque passage (courbe pointillée) : s'arrêter à deux passages semble un bon compromis pour avoir une quantité suffisante de billes sphériques. La figure 2.4*haut* présente un échantillon des billes finalement obtenues. La dispersion de taille est représentée sur la figure 2.4*bas*. Cette dispersion est caractérisée par le rapport de la déviation standard σ_d des diamètres sur le diamètre moyen. Elle vaut environ 6.5% : les billes sont donc considérées monodisperses ($\sigma_d/d < 10\%$). Nous avons aussi utilisé du sable de diamètre moyen $900 \mu\text{m}$ et de faible rugosité (figure 2.4).

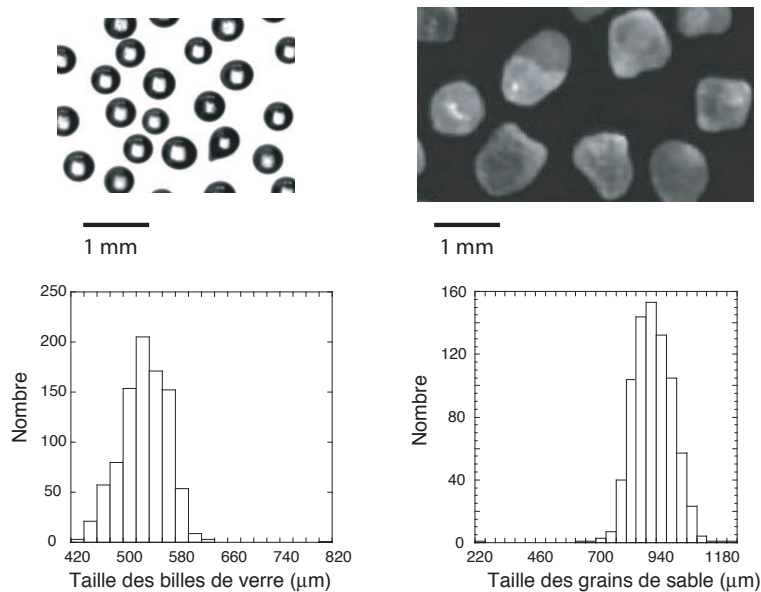


FIG. 2.4 – Matériaux utilisés (*haut*) et distribution des diamètres moyens (*bas*) : billes de verres (à gauche) et sable de faible rugosité (à droite).

2.3 Techniques de mesures

Pour caractériser les propriétés des écoulements granulaires nous mesurons plusieurs quantités que nous allons détailler dans les paragraphes suivants :

- Le débit volumique par unité de largeur Q (m^2/s).

- L'inclinaison de la surface par rapport à l'horizontale θ .
- Les profils de vitesse en surface ou en parois V_s ou V_p .
- L'épaisseur de la couche qui coule h .

2.3.1 Débit volumique

Le débit massique est mesuré en pesant la masse m sortant du canal dans le régime stationnaire pendant un certain temps T (entre 60 s et 3 s pour les débits les plus grands dans le canal le plus large). En supposant que la fraction volumique ϕ est constante et vaut 0.6, nous en déduisons un débit volumique moyen par unité de largeur : $Q = m/(TW\rho_s\phi)$.

2.3.2 Inclinaison de la surface

Les mesures de l'angle d'inclinaison se font par analyse d'images du tas prise de côté par un caméscope Canon XM2. Les grains sont éclairés par un puissant projecteur pour augmenter le contraste entre le tas et le fond sombre (figure 2.5). À l'aide du logiciel ImageJ, nous mesurons la pente de la surface par rapport à l'horizontale θ repérée grâce à un fil-à-plomb. Cette mesure a une précision de l'ordre de $\pm 0.04^\circ$.

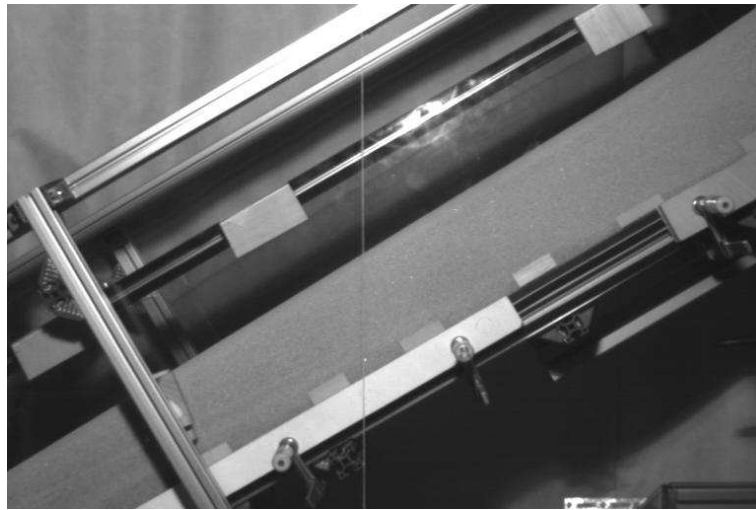


FIG. 2.5 – Vue latérale du tas servant à la mesure de l'inclinaison de la surface lors d'un écoulement stationnaire pour un canal de largeur $W = 1 \text{ cm}$ et un débit $Q = 39.4 \text{ g.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}$. Le fil à plomb permet de repérer la verticale.

2.3.3 Profils de vitesse

La vitesse des grains est mesurée à partir de films de 512 à 3000 images obtenus par une caméra rapide XVision de vitesse d'acquisition de 250 à 2000 images par secondes. L'éclairage est assuré par deux projecteurs de 800 W. Le champ de vitesse est obtenu par traitement d'image par une méthode de PIV (Vélocimétrie par Imagerie de Particules). Nous corrélons deux vignettes extraites

d'images successives, la position du maximum de corrélation détermine le déplacement du motif granulaire sur l'image. L'étalonnage pour la mesure de la vitesse en surface ne peut être fait que pendant l'écoulement car à l'arrêt la position de la surface libre est différente. Nous filmons donc une bande de papier quadrillé qui repose sur la surface libre. Dans le cas d'écoulements uniformes, nous utilisons l'invariance de la vitesse le long de l'écoulement pour augmenter la précision de la mesure : la portion d'image servant à la corrélation est allongée dans la direction de l'écoulement jusqu'à la taille maximale de l'image.

Pour les écoulements stationnaires et uniformes, nous extrayons une ligne de chaque image du film au niveau du point de mesure (figure 2.6a) afin de tracer un diagramme spatio-temporel (figure 2.6b). La pente des traces laissées par les billes nous donne alors la vitesse moyenne de l'écoulement à cette position. La pente est calculée par autocorrélation de l'image grâce à une transformée de Fourier. Nous obtenons une surface présentant des maxima alignés sur une droite (en pointillés sur la figure 2.6c). Pour chaque ligne de cette image, la position du maximum est déterminée avec une résolution inférieure au pixel par extrapolation (rond de la figure 2.6d) dont nous trouvons la pente par régression linéaire (ligne de la figure 2.6d). Les avantages de cette technique sont sa précision et la possibilité de pouvoir mesurer une grande gamme de déplacements : l'équivalent de 10 à 10^{-5} pixels entre deux images successives pour une ligne de 1000 pixels et un film de 1000 images. Les inconvénients sont d'une part que l'on n'a pas accès à l'autre composante de la vitesse (normalement négligeable) qui nécessitera un autre traitement classique, d'autre part que le réglage de la caméra doit être très précis et parfaitement aligné le bord de l'image avec la direction de l'écoulement.

2.3.4 Épaisseur

Les matériaux granulaires utilisés étant assez diffusants, ils sont rapidement opaques lorsque la taille du système augmente. Nous ne pouvons visualiser ni la profondeur h de l'écoulement ni le déplacement des billes au centre du canal avec une caméra classique. L'utilisation de scanners X et IRM (Yamane *et al.* 1998 ; Seymour *et al.* 2000) se développe pour l'étude des milieux granulaires et permet une visualisation *in situ*, mais reste rare. Cette mesure est donc délicate et pour estimer l'épaisseur de la couche fluide loin des parois, nous avons effectué plusieurs tentatives.

Nous avons mis finalement au point une technique d'érosion (figure 2.7). Une fine lame métallique, d'épaisseur 0.45 mm et de largeur 2 cm, est noircie par la flamme d'une bougie durant une minute. La lame est ensuite plongée brusquement dans l'écoulement, perpendiculairement à la surface, et est maintenue pendant vingt secondes avant d'être retirée. La lame présente alors trois zones (figure 2.8) : la partie supérieure intacte qui est restée hors de l'écoulement, une zone érodée et lustrée correspondant au passage des grains de la partie fluide et la partie inférieure un peu détériorée mais non polie correspondant au tas statique. En éclairant la lame en lumière rasante, la taille de la zone brillante le long de la lame donne une estimation de l'épaisseur h de la couche en mouvement. Nous avons vérifié que la largeur du profil de luminosité ne dépendait pas des conditions précises d'éclairage, il faut cependant éviter d'avoir des reflets qui saturent la caméra sur la zone de mesure de la lame.

Afin d'avoir une mesure systématique de l'épaisseur, le traitement des images est fait de la façon suivante : la position de la surface est fixée au niveau de la mi-hauteur du pic, et la limite entre les zones fluide et statique correspond au pied de la courbe. Nous ajustons la décroissance de la courbe par une fonction du type $c_1(\exp(-(x - c_2)^4/c_3) + \exp(-(x - c_4)^4/c_5)) + c_6$ et puis

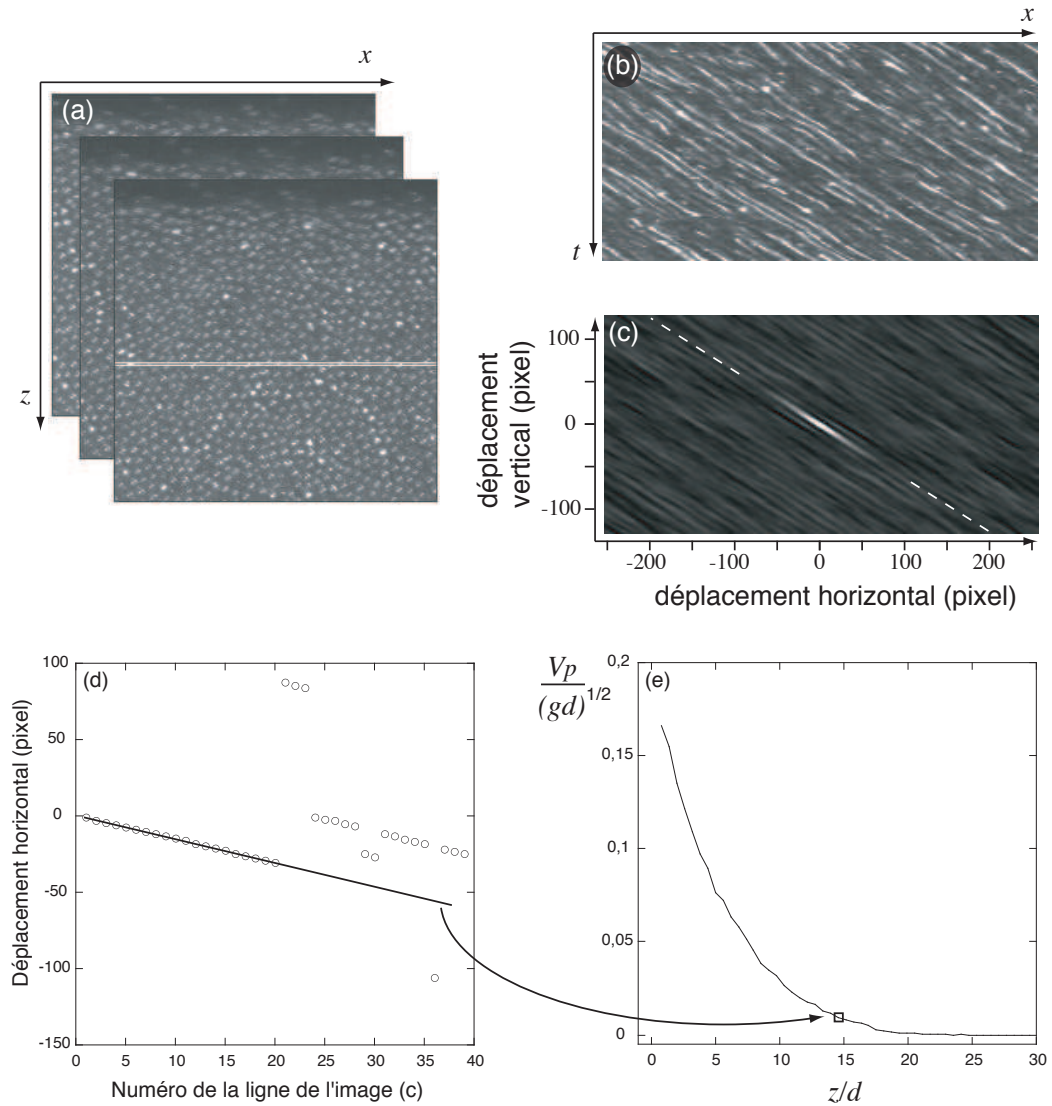


FIG. 2.6 – *Mesure de la vitesse. (a) Séquence d'images d'un écoulement stationnaire et uniforme dont nous extrayons un diagramme spatio-temporel (b) à une profondeur z repérée par les lignes blanches. (c) Autocorrélation par transformée de Fourier. Les pixels les plus clairs correspondent à des maxima de corrélation. (d) Afin de trouver la vitesse moyenne (pente de la droite pointillée), nous ajustons la position des premiers maxima (\circ) par une droite. (e) Exemple de profil de vitesse obtenu.*

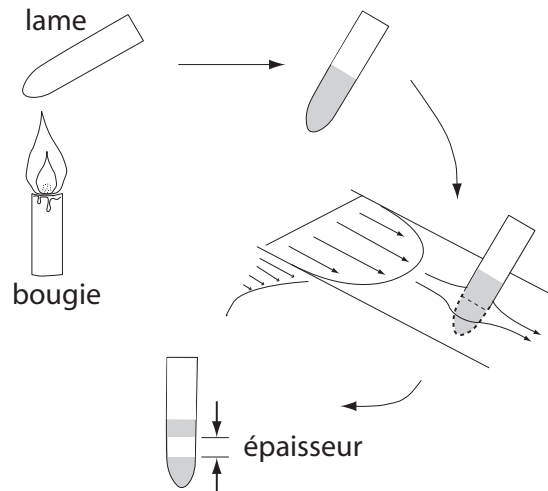


FIG. 2.7 – Estimation de la profondeur de l'écoulement : la lame métallique est noircie puis plongée dans l'écoulement pendant un temps fixe. Lorsqu'elle est retirée, elle présente une zone lustrée par les contacts des grains en mouvement. Cette zone détermine l'épaisseur de l'écoulement.

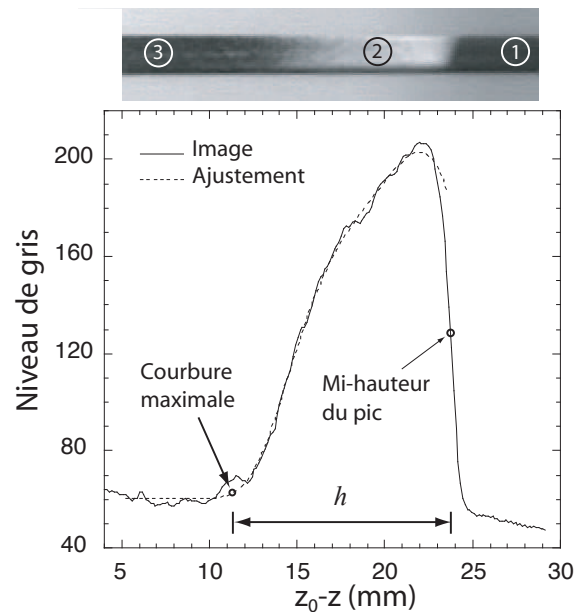


FIG. 2.8 – Exploitation de la photo d'une lame métallique en lumière rasante pour un débit $Q^* = 4.8$ et un canal de largeur $W/d = 283$. (haut) Photo de la lame. La zone 1 était au-dessus de l'écoulement, la zone 2, brillante, correspond au frottement des billes dans l'écoulement sur la lame, la zone 3 correspond à la zone statique. (bas) Courbe de niveau de gris le long de la lame (ligne continue) et l'ajustement (ligne pointillée) servant à estimer la position de l'interface liquide-solide. Les deux points marqués par des cercles déterminent l'épaisseur h de l'écoulement.

nous cherchons l'abscisse du maximum de courbure de cette fonction (figure 2.8). Cette fonction a été choisie pour deux raisons. Premièrement une gaussienne ne permet pas une décroissance suffisamment rapide dans certains cas. Deuxièmement les profils de gris sont parfois dissymétriques d'où la nécessité d'utiliser une somme de fonctions. Finalement nous ne pouvons pas obtenir un ajustement correct de l'ensemble de la courbe. Donc pour avoir un bon ajustement de la base, nous devons nous restreindre à une partie des points de la courbe seulement. Sur la figure 2.8, la zone couverte par la courbe en traits pointillés montre un exemple typique de l'étendue du profil de luminosité qui peut être ajusté.

L'inconvénient de cette technique est qu'elle est intrusive. Nous avons vérifié que cette méthode perturbe seulement légèrement l'écoulement. La figure 2.9 représente des mesures de profils de vitesse en surface, 2 cm en amont et en aval de la lame. La comparaison avec le profil de vitesse en absence de lame montre l'amplitude de la perturbation. Nous remarquons que le champ de vitesse amont est moins déformé que celui de l'aval. Ceci laisse penser que la mesure est correcte car l'écoulement garde ses propriétés jusqu'à toucher la lame. Cependant nous n'emploierons pas cette technique pour les canaux les plus étroits. Finalement, nous avons vérifié que l'immersion et le retrait rapides de la lame donnaient des résultats identiques à des mesures faites en enfouissant la lame précautionneusement avant l'écoulement et en la dégageant de même après l'arrêt de celui-ci.

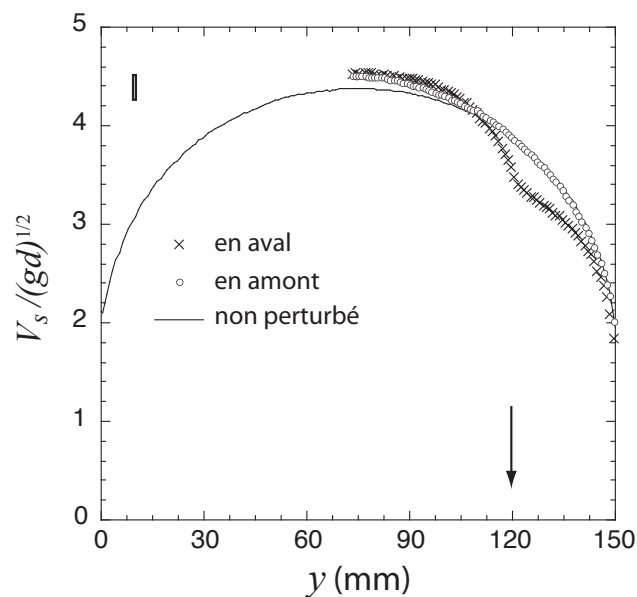


FIG. 2.9 – Perturbations du profil de vitesse en surface pour le canal de largeur $W = 15$ cm et pour un débit $Q^* = 93$. La ligne continue représente le profil de vitesse moyen sans la lame. La flèche indique la position de la lame pendant la mesure des profils de vitesse en surface. La vitesse est un faiblement perturbée 2 cm en amont de l'obstacle (cercles) alors que le profil présente un net ralentissement de l'ordre de 20 %, 2 cm en aval (croix).

Pour vérifier la pertinence de cette mesure, nous avons effectué des tests contre la paroi de verre où nous pouvons mesurer le profil de vitesse selon la profondeur puis le comparer au profil

de luminosité sur la lame. La comparaison est montrée sur la figure 2.10. Les hauteurs estimées par le profil de vitesse (à gauche) et par la technique d'érosion (à droite) sont similaires, ceci valide notre méthode. Nous n'avons cependant pas pu relier la profondeur estimée à la valeur d'une vitesse limite.

Pour tenter de pallier les défauts de notre mesure, nous avons aussi essayé les méthodes suivantes. La première idée consistait à déterminer le profil de vitesse locale au centre. Nous avons introduit deux fibres optiques parallèles jointes perpendiculairement à la surface dans l'écoulement. L'une est reliée à une diode qui émet de la lumière. L'autre, reliée à une photodiode, reçoit la lumière réfléchiée par les billes qui passent devant le couple de fibres. La lumière renvoyée est traitée par un analyseur de spectre. Nous espérions trouver la fréquence de passage des billes donc leur vitesse par l'étude de la transformée de Fourier du signal, ou au moins discriminer si, à la profondeur des fibres optiques, les grains se déplacent ou non. Les spectres obtenus ne caractérisaient pas l'écoulement. Il aurait fallu, comme Savage (1979) ou Ahn *et al.* (1991), utiliser la corrélation de signaux provenant de deux sondes alignées avec l'écoulement. De plus les dimensions du système rend la méthode est très intrusive.

Nous avons également essayé une technique photographique. Le but ici était de déterminer si les billes avaient bougé lors de l'exposition pour estimer l'épaisseur de l'écoulement. Nous avons utilisé du papier photo vierge. Ce papier est introduit dans le matériau granulaire, l'ensemble est exposé à la lumière pendant un certain temps, puis la photo est révélée. Les tests ont montré qu'il était possible de discerner des billes en mouvement de billes statiques, mais outre la difficulté de travailler dans une pièce noire, la lumière s'atténue exponentiellement depuis la surface à cause encore de la diffusion de la lumière. Ce fait, relié à la sensibilité du papier, ne nous permettait pas d'éclairer uniformément le papier introduit verticalement. Seule une mince bande n'était ni saturée ni sous-exposée. La réalisation de caches opaques de densité exponentielle pour rendre l'éclairage homogène n'a pas fonctionné. Nous avons abandonné cette méthode.

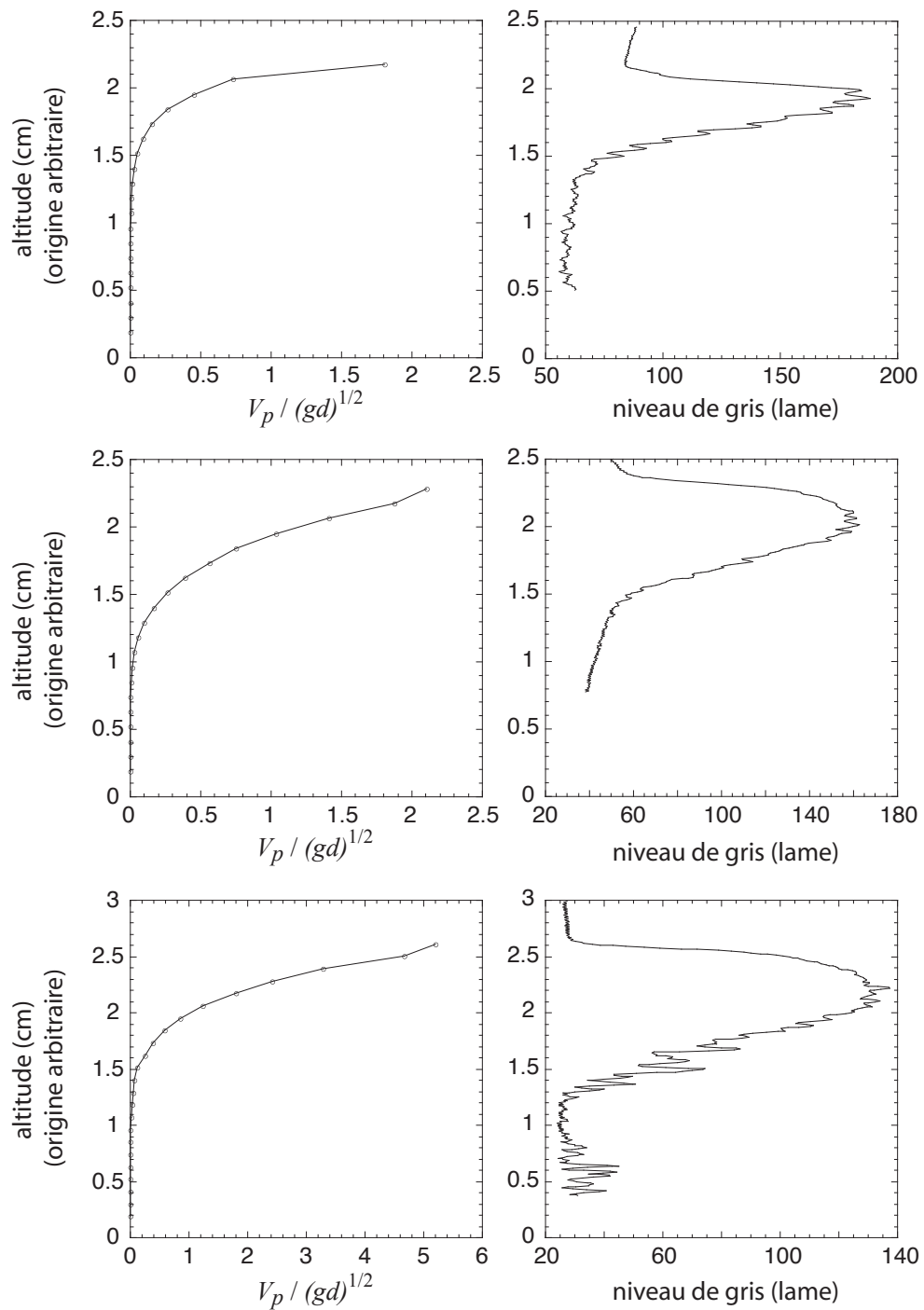


FIG. 2.10 – Validation de la méthode par comparaison entre les profils de vitesse en parois V_p et les profils d'intensité lumineuse après érosion du noir de fumée sur les lames pour trois débits différents : (haut) $Q = 7.8 \text{ g.cm}^{-1}.\text{s}^{-1}$, (milieu) $Q = 15 \text{ g.cm}^{-1}.\text{s}^{-1}$, (bas) $Q = 25.5 \text{ g.cm}^{-1}.\text{s}^{-1}$, dans le canal de largeur $W = 30 \text{ cm}$.

Chapitre 3

Écoulements stationnaires sur tas : rôle des parois

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude expérimentale d'écoulements stationnaires et uniformes sur fond meuble. Dans l'objectif d'éclaircir le rôle joué par les parois, nous avons étudié les écoulements sur tas dans un canal de largeur variable. Les mesures de vitesse et d'épaisseur effectuées pour différents débits et différentes largeurs de système montrent à quel point les parois latérales contrôlent l'écoulement. Nous proposons ensuite un modèle fondé sur la rhéologie locale $\mu(I)$ récemment développée. Nous montrons que ce modèle parvient à décrire quantitativement les grandeurs moyennes de ces écoulements. Ce chapitre s'appuie sur l'article Jop *et al.* (2005) publié dans la revue *Journal of Fluid Mechanics*. Il sera précédé d'une présentation de la configuration, d'un résumé des résultats expérimentaux puis du modèle choisi et enfin des comparaisons avec les prédictions théoriques. L'article sera suivi de compléments sur ce sujet.

3.1 Procédure expérimentale

Le montage expérimental correspond à celui qui est décrit dans le chapitre précédent et est schématisé sur la figure 3.1. Dans cette étude, nous utilisons les billes de verre.

La procédure expérimentale est la suivante. Au début d'une expérience, le canal est vidé pour éviter les effets d'un vieillissement du tas par compaction ou ségrégation par exemple et assurer ainsi la reproductibilité des expériences. En effet, pour un écoulement qui dure plusieurs dizaines de minutes, les billes de verre cassées ou déformées ont tendance à se concentrer à la base de l'écoulement ce qui peut changer les conditions d'interface (elles sont repérables car elles ont des reflets plus vifs).

Lorsque nous imposons un débit constant suffisant, les billes commencent par remplir le canal, puis débordent par-dessus la buté. Après une période transitoire, l'écoulement atteint un régime stationnaire : une couche superficielle coule sur un tas statique. Dans cet état, les propriétés de l'écoulement sont invariantes le long de l'écoulement à l'exception des zones d'accélération proches de l'alimentation et de l'évacuation.

L'énergie des grains injectés par l'alimentation au sommet du tas peut modifier la zone d'accélération (Grasselli *et al.* 1999). Afin de limiter l'influence de l'alimentation sur l'écoulement, une plaque permet de renvoyer les grains vers le fond du canal (figure 3.1) et d'éviter que les grains ne

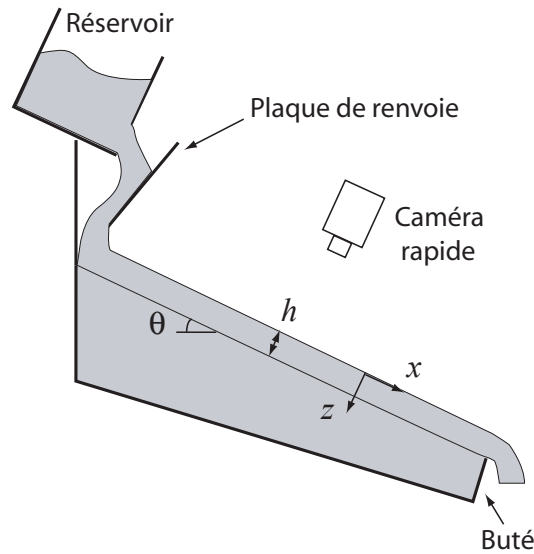


FIG. 3.1 – Schéma illustrant le principe de l'expérience. La largeur W entre les parois latérales (non représentées) peut varier de 1 cm ($19d$) à 30 cm ($570d$).

rebondissent sur la surface. Une étude plus précise de l'uniformité est décrite dans les compléments de la section 3.9.2. Les mesures seront donc effectuées à mi-chemin entre les deux extrémités.

Les propriétés des écoulements obtenus sont décrites dans la section suivante. Nous adimensionnerons les différents paramètres et variables en utilisant le diamètre des billes d et la gravité g : les longueurs $x^* = x/d$ et $W^* = W/d$, les vitesses $V^* = V/\sqrt{gd}$ et le débit par unité de largeur $Q^* = Q/d\sqrt{gd}$.

3.2 Régimes d'écoulement

Deux types de régimes peuvent être observés dans cette configuration. Pour une largeur W donnée, un faible débit par unité de largeur Q conduira à un régime intermittent (Rajchenbach 1990; Lemieux *et al.* 2000) dans lequel des avalanches de longueur variables succèdent à des phases d'accumulation. Il faut dépasser un débit critique Q_c pour obtenir un régime stationnaire. La figure 3.2 montre les mesures des débits critiques dans des canaux de différentes largeurs. Étonnamment, la valeur du débit critique dépend de la largeur du canal : il augmente lorsque nous élargissons le système. Ce résultat nous montre déjà que la largeur du canal influe sur la dynamique d'un écoulement d'une manière non-triviale : le régime continu est plus difficile à atteindre dans un large canal.

Pour un débit supérieur au débit critique Q_c , les caractéristiques de l'écoulement sont uniformes le long du tas. L'inclinaison θ de la surface par rapport à l'horizontale est constante. La surface est légèrement bombée dans la direction transverse : la différence de hauteur entre le centre du canal et la paroi est inférieure à une bille. La vitesse en surface $V_s(y)$ est pratiquement alignée avec l'axe du canal : le rapport des composantes transverses et longitudinales de la vitesse est inférieur à 1%.

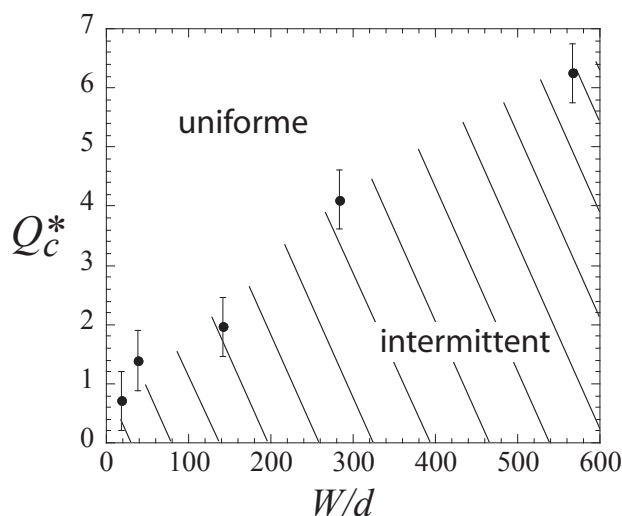


FIG. 3.2 – Régimes d’écoulement dans le plan débit-largeur du canal. Les symboles représentent le débit par unité de largeur minimum Q_c^* à imposer pour atteindre le régime d’écoulement continu et uniforme en fonction de la largeur W^* du canal. Pour un débit plus faible (dans la zone hachurée), un régime avalancheux intermittent est observé.

3.3 Importance des parois pour les écoulements stationnaires et uniformes

Dans ce régime continue nous avons mesuré systématiquement l’évolution de l’angle d’inclinaison de la surface libre, de la vitesse en surface et de l’épaisseur coulante sur la ligne médiane du canal en fonction des deux paramètres de contrôle de l’expérience : la largeur W^* et le débit Q^* .

Nous avons tout d’abord mesuré l’inclinaison de la surface libre. La figure 3.3 montre l’évolution de la tangente de l’angle de la surface libre en fonction du débit pour plusieurs largeurs. La pente augmente avec le débit, en accord avec les études précédentes. Cependant, plus le canal est large, plus les variations de l’inclinaison sont faibles. Pour le plus large canal ($W^* = 570$) elle est pratiquement constante (triangles pointe en haut sur la figure 3.3), proche de l’angle de repos du matériau. Ce résultat frappant confirme que les parois du canal jouent un rôle important.

Un second résultat important concerne la vitesse en surface maximale V_{max}^* , mesurée sur la ligne médiane. La figure 3.4a montre que, pour une largeur fixée, la vitesse augmente avec le débit. Cependant les résultats révèlent un effet surprenant : pour un même débit par unité de largeur Q la vitesse en surface est plus faible dans un large canal que dans un canal étroit. Enfin, la mesure de l’épaisseur de la couche mobile par la technique du noir de fumée confirme le rôle des parois : l’épaisseur augmente avec le débit mais aussi de façon importante avec la largeur W (figure 3.4b), sans que l’on ne décèle une saturation. Ce résultat est cohérent avec le précédent : puisque la vitesse diminue pour un même débit par unité de largeur, la conséquence de la conservation du débit est que l’épaisseur doit augmenter lorsque l’on élargit le canal.

Ce dernier résultat remet en cause une idée généralement admise dans la littérature que l’épaisseur de la couche fluide serait de l’ordre d’une dizaine de taille de grains. Dans notre grand canal,

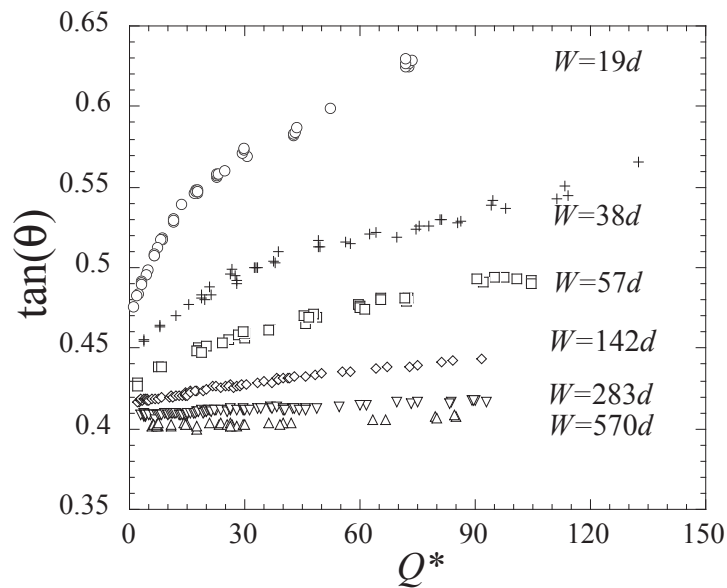


FIG. 3.3 – Inclinaison de la surface θ en fonction du débit par unité de largeur Q^* pour les différentes largeurs W^* étudiées.

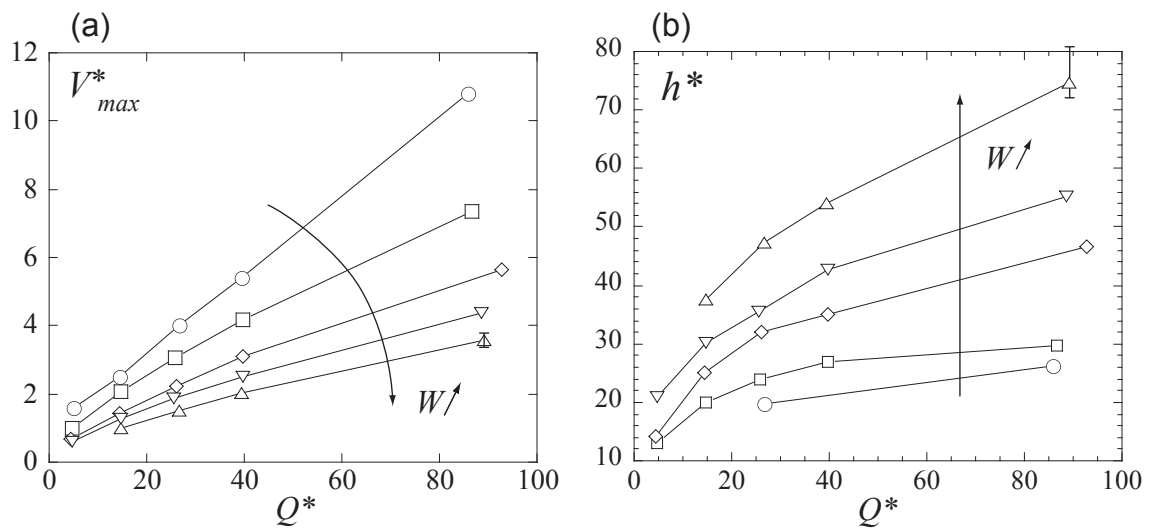


FIG. 3.4 – (a) Évolution de la vitesse maximale en fonction du débit pour les largeurs $W^* = 19, 57, 142, 283$ et 570 . (b) Évolution de l'épaisseur estimée par la méthode du noir de fumée en fonction du débit pour les mêmes largeurs que précédemment.

l'épaisseur atteint 70 diamètres de particules. Il est à noter que Félix (2002a) a trouvé en tambour tournant des épaisseurs très importantes allant jusqu'à $200d$ mais ces épaisseurs sont obtenues pour des débits adimensionnés très importants $Q^* \simeq 8000 \gg 90$ (GDR MiDi 2004). Ainsi, pour les canaux étroits, nous retrouvons les résultats décrits dans la littérature, en revanche nos mesures pour de larges systèmes montrent des comportements très différents.

À la lumière de ces résultats nous voyons que la largeur du canal conditionne complètement les caractéristiques de l'écoulement. Dès lors, dans toute tentative de modélisation, nous devons tenir compte des effets de parois pour comprendre les propriétés cinématiques de ces écoulements. En particulier, nous avons vu dans l'introduction que les lois constitutives $\mu(I)$ ne décrivaient *a priori* pas les écoulements sur tas. Toutefois l'influence des parois n'était pas considérée. Qu'advient-il donc de ce modèle lorsque la friction aux parois est ajoutée ?

3.4 Modèle bidimensionnel de l'écoulement : parois et rhéologie « $\mu(I)$ »

Afin de modéliser les écoulements stationnaires dans le cadre de la loi $\mu(I)$, nous allons formuler plusieurs hypothèses simplificatrices. Premièrement, nous supposons que la pression est isotrope. Cette hypothèse est justifiée par les simulations de Prochnow *et al.* (2000), Silbert *et al.* (2001) et Renouf *et al.* (2005) qui montrent que la contrainte normale est quasiment isotrope. Deuxièmement, les variations de la fraction volumique avec le cisaillement ou la pression seront négligées. La valeur choisie vaut 0.6 qui est proche de la fraction volumique d'un empilement compact désordonné de sphères (Da Cruz *et al.* 2005). Enfin, nous négligerons toute variation transverse de l'écoulement.

Considérons donc une tranche de matériau, qui s'étend sur toute la largeur du canal, partant de la surface jusqu'à une profondeur z dans la couche fluide (figure 3.5). Les forces s'exerçant sur cette tranche sont la gravité, les contraintes internes à la profondeur z et les deux forces latérales dues aux parois. Les forces latérales dues aux parois lisses sont modélisées par une expression simple : les grains exercent une force de friction proportionnelle à la pression du type frottement de Coulomb avec un coefficient de friction constant qui sera noté μ_w . La valeur de ce coefficient a été estimée indépendamment par une technique décrite dans la section 3.9.1. Enfin pour exprimer les contraintes internes, nous utilisons la rhéologie locale « $\mu(I)$ ». La contrainte tangentielle interne τ_{xz} est proportionnelle à la pression P par l'intermédiaire du coefficient de friction $\mu(I(z))$:

$$\frac{\tau_{xz}(z)}{P(z)} = \mu(I(z)) \quad \text{avec} \quad I = \frac{|\dot{\gamma}|d}{\sqrt{P/\rho_s}}, \quad (3.1)$$

où ρ_s est la densité des grains et $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement local et la loi de friction s'écrit :

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{\frac{I_0}{I} + 1}. \quad (3.2)$$

Les coefficients μ_s , μ_2 et I_0 sont des constantes calibrées à partir des expériences précédentes sur plans inclinés. Les valeurs des paramètres sont tirées de l'article de Forterre *et al.* (2003) : $I_0 = 0.279$, $\mu_s = \tan(20.9^\circ)$, $\mu_2 = \tan(32.76^\circ)$, il n'y a ainsi pas de paramètres ajustables dans le modèle.

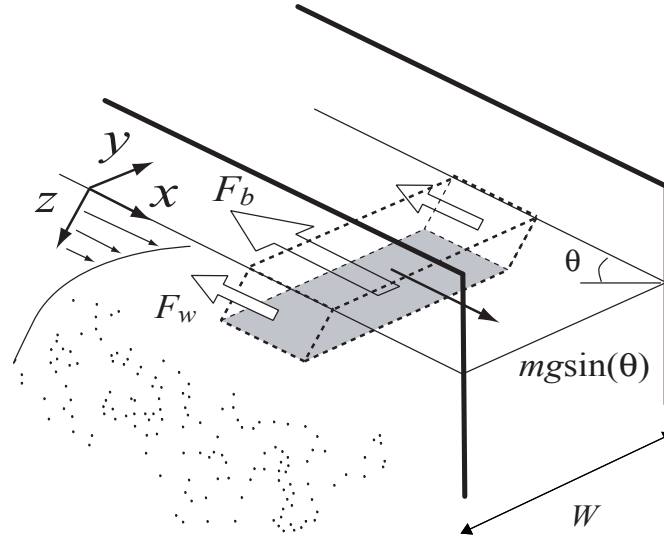


FIG. 3.5 – Modélisation bidimensionnelle d'un écoulement stationnaire, à un angle θ , confiné entre deux parois latérales. L'écoulement est supposé être uniforme sur la largeur W .

Pour un écoulement stationnaire uniforme, l'accélération de l'élément de volume est nulle. L'équilibre des forces induit que la pression interne est égale à la pression hydrostatique. Ce résultat est corrélé par le fait que les grains évoluent perpendiculairement à l'axe z , donc il n'y a pas d'effet du type Janssen pour écranter la pression. La projection des contraintes parallèlement à la surface nous donne l'équation suivante :

$$0 = \rho g \sin(\theta) z W - \rho g \cos(\theta) \mu_w z^2 - \rho g \cos(\theta) z W \mu(I(z)), \quad (3.3)$$

où le premier terme correspond à la force de gravité, le second aux forces de friction des parois et le troisième à la contrainte interne. Cette expression se simplifie comme suit :

$$\mu(I(z)) = \tan(\theta) - \mu_w \frac{z}{W}. \quad (3.4)$$

Nous pouvons donc calculer la valeur de $\mu(I)$ à toute profondeur z dans la zone fluide. La première remarque que nous pouvons formuler concerne l'évolution du coefficient de friction. Plus on s'enfonce dans le tas (z augmente), plus les forces de friction latérales deviennent importantes. Le coefficient μ diminue donc, jusqu'à atteindre la borne inférieure μ_s . À cette profondeur, la gravité n'est plus suffisante pour cisailer le matériau, les grains ne bougent plus, nous définissons ainsi l'épaisseur de la couche en écoulement ($z = h$) :

$$\frac{h}{W} = \frac{\tan(\theta) - \mu_s}{\mu_w}. \quad (3.5)$$

Ce premier résultat nous montre que la localisation de l'écoulement en surface est due aux parois. De plus, l'épaisseur d'un écoulement granulaire uniforme à un angle θ donné est proportionnelle à la largeur W . Ce résultat a déjà été dérivé dans d'autres travaux (Roberts 1969 ; Savage 1979 ; Taberlet *et al.* 2003), mais nous pouvons formuler deux remarques. Premièrement, dans le cadre

de cette description, la contrainte tangentielle à la frontière liquide-solide d'un écoulement stationnaire et uniforme est toujours égale à $\mu_s P$, quel que soit l'angle d'écoulement contrairement aux hypothèses qu'utilisent d'autres modèles (Khakhar *et al.* 2001a). Deuxièmement, grâce à la loi constitutive locale, nous pouvons calculer analytiquement $I(z)$ en inversant la relation $\mu(I)$ (équation 3.2), puis remonter au cisaillement $\dot{\gamma}$ et au profil de vitesse $V(z)$ (Les expressions de ces fonctions sont détaillées dans l'article qui suit ce paragraphe). La figure 3.6 montre des exemples de profils de vitesse pour différentes largeurs mais pour un même débit. Ils correspondent qualitativement à ceux qui sont rapportés dans la littérature : la concavité est globalement inversée par rapport aux profils de vitesse sur plan incliné. De plus nous voyons que la vitesse en surface diminue lorsque la largeur augmente conformément aux résultats expérimentaux.

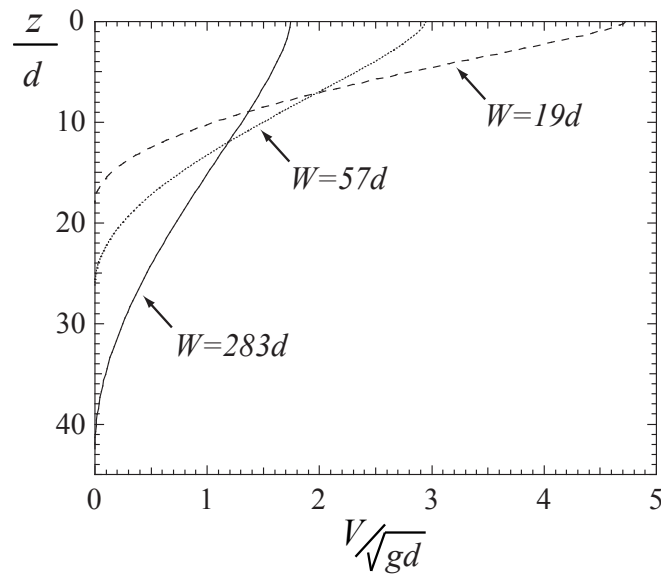


FIG. 3.6 – Profil de vitesse 2D pour un débit par unité de largeur $Q^* = 31.5$ et trois largeurs différentes $W/d = 19, 57, \text{ et } 283$.

Nous comparons dans le paragraphe suivant les prédictions théoriques de ce modèle avec les résultats expérimentaux.

3.5 Comparaison et lois d'échelle

Une première remarque porte sur les lois d'échelle qui découlent de l'utilisation du nombre inertiel I . Pour éliminer le paramètre W des équations du mouvement et des conditions aux limites, il convient de diviser toutes les longueurs par la largeur (par exemple $\tilde{z} = z^*/W^*$). Ce faisant, l'expression de I (équation 3.1) impose que le cisaillement soit proportionnel à la racine carrée de la largeur $W^{*1/2}$. Par intégrations successives, nous trouvons donc les lois d'échelle non-triviales suivantes pour les variations du débit et de la vitesse :

$$\frac{V^*(z^*, \theta)}{W^{*3/2}} = G\left(\frac{z^*}{W^*}, \theta\right) \quad \text{et} \quad \frac{Q^*(\theta)}{W^{*5/2}} = K(\theta), \quad (3.6)$$

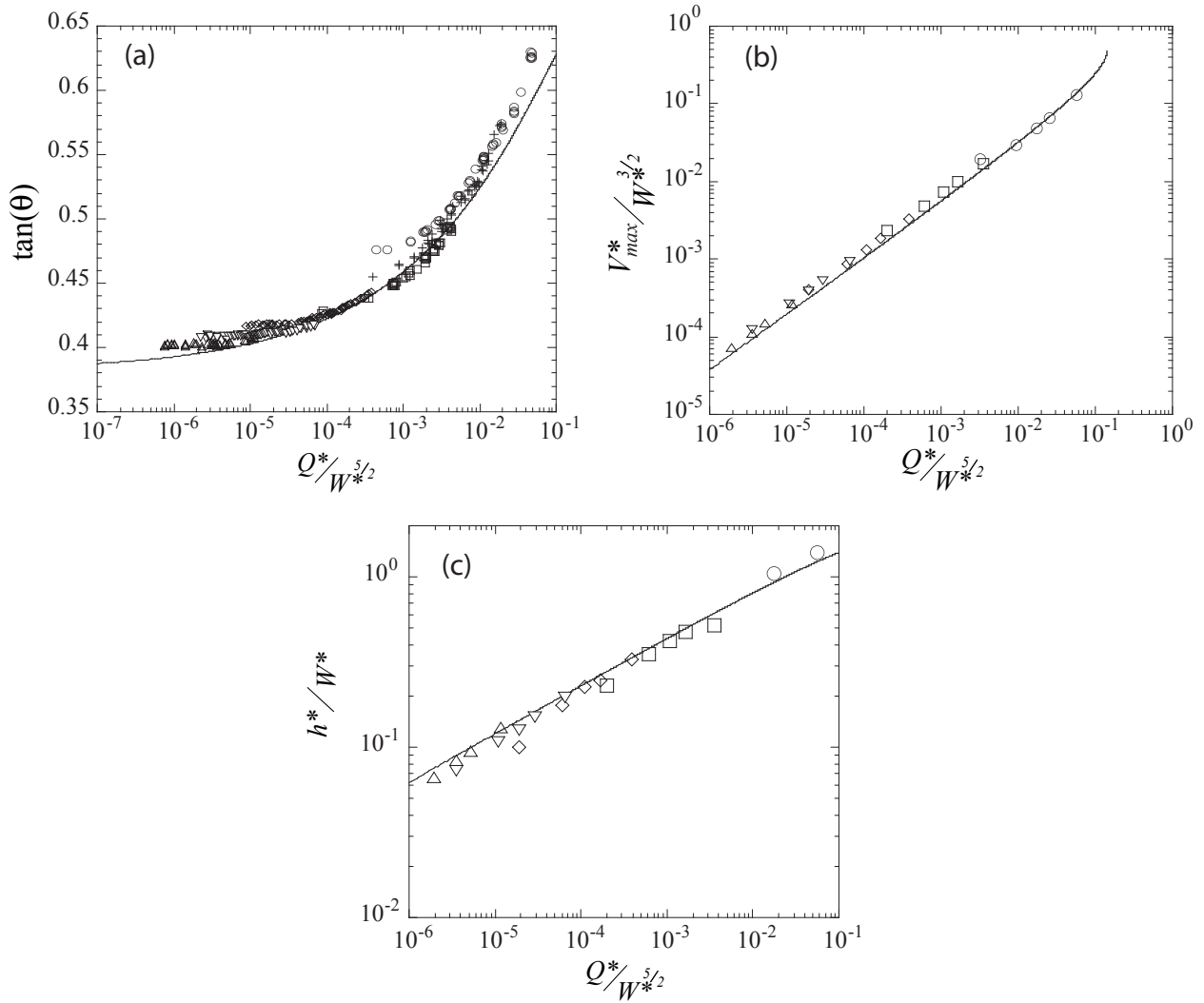


FIG. 3.7 – Vérification des lois d'échelle et comparaison entre les points expérimentaux (symboles) et les prédictions du modèle 2D (lignes). Évolution, en fonction du nouveau débit $Q^*/W^{*5/2}$ pour différentes largeurs de (a) l'inclinaison de la surface $\tan(\theta)$, (b) la vitesse en surface sur la ligne médiane du canal $V_{max}^*/W^{*3/2}$ et (c) de l'épaisseur h^*/W^* . $W^* = 19(\circ), 28(+), 57(\square), 142(\diamond), 283(\triangle)$ et $570(\nabla)$, les données sont identiques à celles des figures 3.3, 3.4a et b. Le rassemblement des données sur une même courbe valide notre approche.

Les figures 3.7 montrent les données expérimentales pour l'inclinaison, la vitesse maximale en surface et l'épaisseur (identiques à celles des figures 3.3 et 3.4), tracées en utilisant les nouvelles lois d'échelle. Nous remarquons tout d'abord que les points de mesures pour toutes les largeurs se rassemblent sur des courbes uniques. Les lois d'échelle sont donc vérifiées. Ceci valide déjà l'utilisation du paramètre I , qui est à l'origine de la forme des lois d'échelle. Nous remarquons aussi que les accords avec les prédictions du modèle (les lignes sur les figures 3.7) sont quantitatifs pour tous les paramètres. Il est nécessaire de souligner que dans ce modèle, tous les paramètres ont été déterminés à partir d'expériences antérieures, sauf μ_w qui a dû être mesuré. L'accord entre les prédictions et les mesures en est plus frappant. Ces résultats soutiennent donc fortement la modélisation utilisée. Le simple fait d'inclure le rôle des parois dans le bilan de quantité de mouvement suffit à prédire la localisation de l'écoulement à la surface. La loi constitutive utilisée permet aussi de prédire l'évolution des grandeurs moyennes de l'écoulement stationnaire et uniforme. Nous pouvons donc conclure de ce résultat que la configuration d'écoulement sur tas peut elle aussi être décrite dans le cadre de la rhéologie locale $\mu(I)$.

3.6 Lien entre les configurations plan incliné et fond meuble

Maintenant que nous avons compris l'origine de la localisation en surface des écoulements sur tas, nous pouvons comprendre le lien entre les configurations de plan incliné et de fond meuble. Afin de mieux comprendre la transition entre ces deux configurations, nous considérons un plan incliné à un angle θ_b muni de parois latérales. Examinons, dans le cadre du modèle, les différents profils de vitesse prédits pour un même débit par unité de largeur en fonction de la largeur du canal. Nous remarquons que pour un système très large voire illimité, les grains coulent jusqu'au fond parallèlement à l'angle fixé par le plan (figure 3.8a). Le profil de vitesse est celui de Bagnold ($V \propto h^{3/2}$). Pour une largeur toujours importante, mais où les effets des parois ne sont plus négligeables par rapport à l'épaisseur qui s'écoule, le fond rugueux détermine toujours l'angle de coulée, cependant le profil de vitesse est modifié (figure 3.8b). Enfin, pour un canal plus étroit, un tas statique est présent (figure 3.8c)

La distinction entre les configurations d'écoulements sur plan incliné et sur tas n'est donc qu'apparente. En effet pour réaliser une expérience d'écoulement uniforme sur un plan incliné à un angle θ_b , il est obligatoire d'ajouter des parois latérales. Dès lors il faut en tenir compte dans le bilan des forces agissant sur la couche en écoulement. Nous pouvons cependant distinguer deux cas. Si le débit imposé Q est très inférieur à celui qui correspond à un écoulement sur tas pour le même angle $Q(\theta_b, W)$ (équation 3.6), alors nous pouvons négliger l'influence des parois, le profil de vitesse est du type Bagnold. Au contraire, dès que le débit Q est supérieur à ce débit $Q(\theta_b, W)$, alors la transition vers la formation d'un tas s'opère et il apparaît une zone statique triangulaire sous la couche fluide. Ceci permet d'interpréter l'existence des écoulements immatures (Savage 1979) et des résultats de Taberlet *et al.* (2003).

Cette évolution des profils de vitesse permet de proposer une explication pour les formes des profils observés expérimentalement. La différence avec un profil de type Bagnold ne provient pas d'un défaut de la rhéologie mais plutôt de l'influence des parois.

Nos mesures expérimentales nous permettent de faire un autre lien entre les écoulements sur

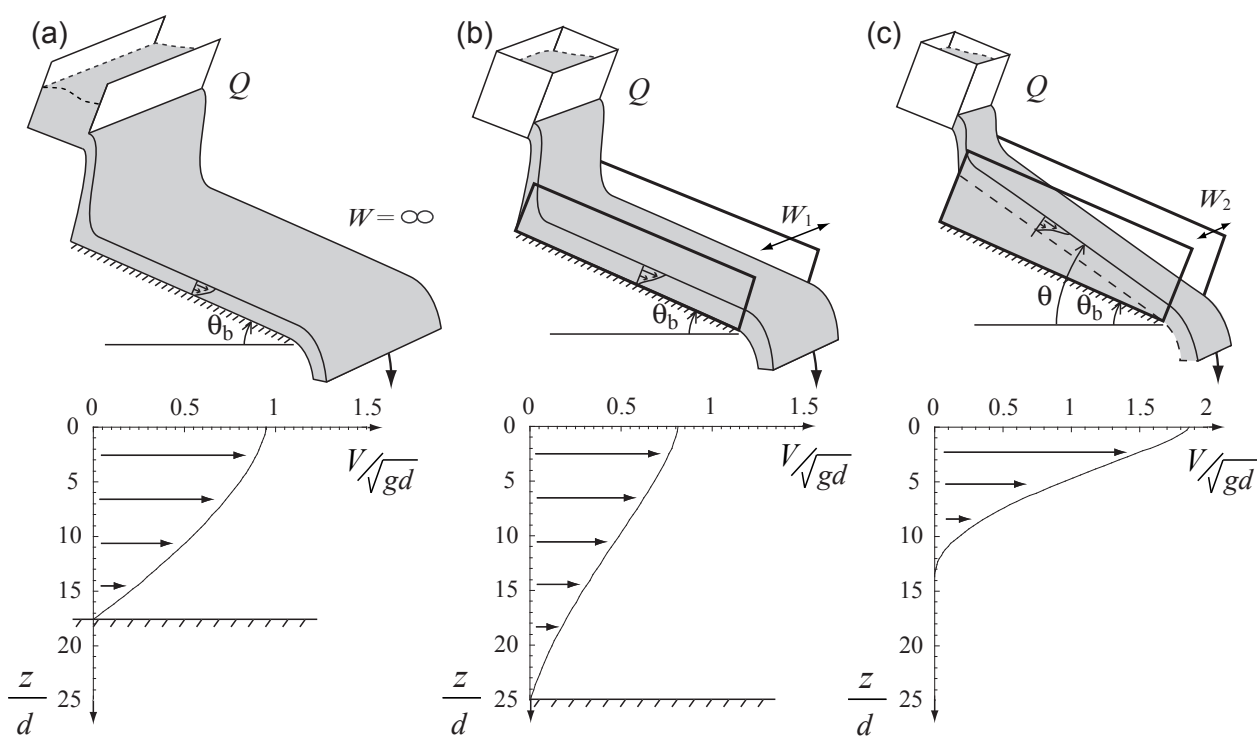


FIG. 3.8 – Évolution du profil de vitesse verticale en fonction de la largeur W du système pour un même débit par unité de largeur ($Q^* = 10$) et un même angle de fond ($\theta_b = 22^\circ$). (a) plan incliné sans bords, $\theta = \theta_b$, (b) $W^* = 260d$, $\theta = \theta_b$, (c) $W^* = 20d$, $\theta = 26.9^\circ$.

plan incliné et sur fond meuble à propos des seuils d'écoulement. Nous avons montré l'existence de débits critiques Q_c permettant l'observation de régimes d'écoulement continu et montré qu'ils dépendent de la largeur du canal. L'existence de cette transition n'est pas prédite par le modèle, où nous pouvons calculer un régime stationnaire pour des débits aussi faibles que l'on veut tant que l'inclinaison θ est supérieure à θ_s . Cependant cette transition rappelle l'existence d'une épaisseur minimale $h_{stop}(\theta)$ pour l'observation d'écoulement stationnaire sur plan incliné. Nous avons donc cherché à comparer ces deux phénomènes.

Pour une largeur W fixée, lorsque le débit diminue, l'épaisseur diminue aussi. Nous pouvons donc interpréter l'existence de ce débit critique par l'existence d'une épaisseur critique h_c . Cependant, les couples de valeurs épaisseur et angle d'inclinaison critiques n'ont pas été mesurés au seuil du régime d'écoulement continu. Or nous avons vu que le modèle permettait de prédire avec un accord quantitatif les relations entre le débit, l'angle et l'épaisseur d'un écoulement. Ainsi, pour chacune des largeurs W , connaissant la valeur expérimentale du débit critique Q_c , nous pouvons calculer par le modèle l'inclinaison critique θ_c et l'épaisseur critique h_c correspondantes. Sur la figure 3.9, les droites représentent les relations $h(\tan\theta)$ pour différentes largeurs. Pour une largeur donnée, lorsque le débit diminue nous parcourons la droite vers l'origine (de la droite vers la gauche), jusqu'à ce qu'on atteigne le débit critique marqué par un point noir. Les points représentent donc la position de la transition entre le régime intermittent et le régime continu. Nous avons reporté sur le même graphique la courbe $h_{stop}(\theta)$ (en pointillés sur la figure 3.9) issue des expériences sur plan incliné de Forterre *et al.* (2003). Elle représente la frontière entre les zones d'écoulement et d'arrêt sur plan incliné. Nous voyons que les points séparant le régime avalancheux du régime continu sur tas coïncident avec cette frontière. Ce résultat montre que les phénomènes mis en jeu aux seuils d'écoulement dans ces deux configurations sont identiques.

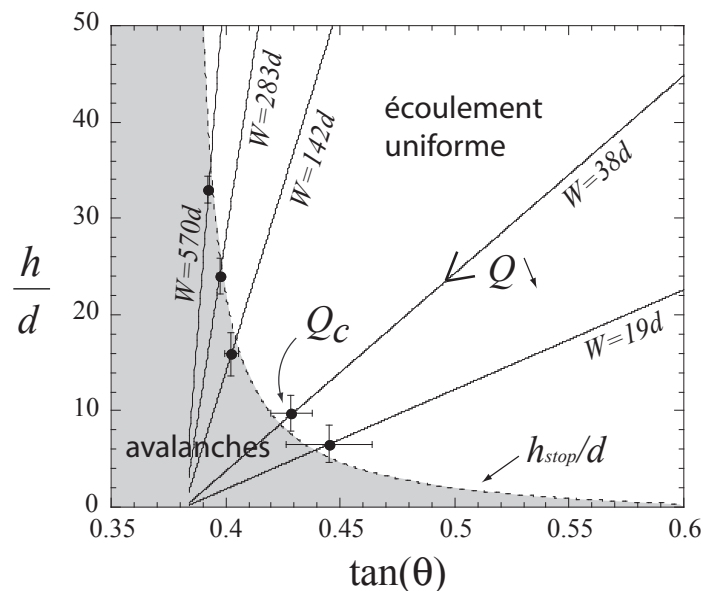


FIG. 3.9 – Comparaison des domaines d'existence des écoulements stationnaires et uniformes dans les écoulements sur tas (points) et sur plan incliné (ligne pointillée tirée de Forterre *et al.* 2003). Les droites correspondent aux relations linéaires entre l'épaisseur h et l'inclinaison $\tan(\theta)$ pour différentes largeurs W lorsque le débit Q varie.

3.7 Discussion et limites du modèle

En étudiant les écoulements stationnaires et uniformes dans des canaux très larges, nous avons apporté des éclaircissements sur l'importance des parois dans les écoulements à surface libre et sur le type de rhéologie apte à décrire les écoulements granulaires denses. Nous avons montré que la largeur du canal conditionne les valeurs des paramètres des écoulements granulaires stationnaires et uniformes sur fond meuble telles l'inclinaison, la vitesse en surface et l'épaisseur de l'écoulement. Pour un même débit par unité de largeur, lorsque la largeur du système augmente, l'épaisseur de l'écoulement augmente, les variations de l'inclinaison de la surface sont amoindries et la vitesse en surface est plus faible. Les parois jouent donc un rôle très important dans cette configuration. Loin d'être négligeables, elles contrôlent les propriétés de l'écoulement. De plus leurs effets ne sont pas confinés à des couches limites le long des bords, mais s'étendent à la totalité de l'écoulement : on ne peut pas s'en affranchir en augmentant la largeur du tas.

D'autre part, en modélisant les forces que les parois induisent par une force de friction solide, et en intégrant les contraintes sur la largeur du canal, nous avons montré plusieurs résultats importants. Premièrement l'utilisation de la rhéologie locale $\mu(I)$ permet de prédire la localisation de l'écoulement à la surface du tas. Ce résultat montre que la sélection d'une faible épaisseur n'est pas intrinsèque au matériau. Deuxièmement les profils de vitesse en paroi calculés analytiquement grâce au modèle ont des caractéristiques compatibles avec celles qui sont rapportées dans la littérature. Troisièmement, l'utilisation de la rhéologie locale prédit des lois d'échelle non-triviales pour tous les paramètres mesurés. Elles sont vérifiées pour de grandes variations de débit et de largeur de canaux. Elles montrent notamment que la profondeur de l'écoulement est proportionnelle à l'écartement des parois pour ce système. Finalement nous observons un accord quantitatif entre les prédictions données par le modèle et les résultats expérimentaux dès que les paramètres de la rhéologie sont calibrés à partir d'expériences sur plan incliné. Cette rhéologie permet donc de décrire dans un cadre théorique unique les écoulements granulaires dans trois configurations bidimensionnelles différentes : le cisaillement plan homogène, le plan incliné et maintenant les écoulements uniformes et stationnaires sur fond meuble.

Cependant cette modélisation présente certaines limites. Premièrement l'existence d'un débit critique pour l'observation d'un régime stationnaire n'est pas prédite. Cette limitation existe aussi dans la configuration sur plan incliné où une épaisseur minimale d'écoulement est observée mais non prédite. La conséquence de ceci est que, proche du seuil, les mesures s'écartent des courbes théoriques. Néanmoins nous avons montré qu'il s'agissait du même phénomène en comparant les angles et les épaisseurs au niveau du seuil dans les deux configurations. Ce problème pourrait être abordé en considérant des phénomènes non-locaux qui deviennent importants proche du seuil ou proche des parois.

Deuxièmement, les phénomènes de déclenchement d'écoulement et d'arrêt font apparaître des comportements hystérétiques. Sur plan incliné par exemple cela se traduit par l'existence à la fois d'une épaisseur de dépôt et d'une épaisseur de démarrage spontané d'avalanche. Là encore ces effets ne sont pas présents dans la modélisation.

Troisièmement, la vitesse en surface n'est plus homogène dans la largeur mais dépend de la distance à la paroi (coordonnée y). La figure 3.10 montre des profils de vitesse en surface expérimentaux. Pour de faibles largeurs, l'écoulement est pratiquement homogène sur toute la largeur.

En revanche, lorsque le canal est élargi, le profil de vitesse se courbe : la vitesse au centre est plus importante que la vitesse de glissement contre la paroi. Ce phénomène devient très important pour les grandes largeurs. Les déformations deviennent donc tridimensionnelles et un cisaillement est présent dans la direction transverse. Ce simple modèle bidimensionnel fondé sur une rhéologie scalaire doit être étendu à trois dimensions pour rendre compte de ce comportement et espérer modéliser des écoulements plus complexes.

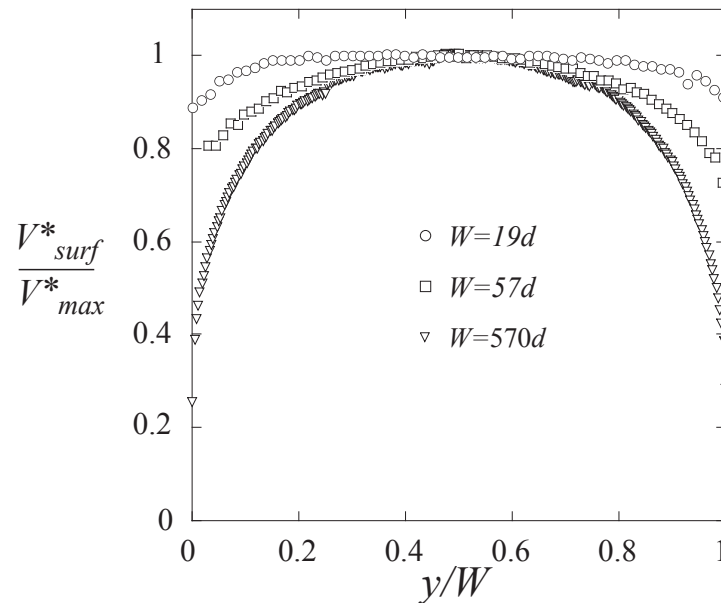


FIG. 3.10 – Profil de vitesse en surface V^*_{surf} pour un même débit $Q^* = 89$ dans des canaux de différentes largeurs. Les profils de vitesse ont été normés par la vitesse maximale V^*_{max} mesurée au centre ($y/W = 1/2$)

En dépit de l'existence des limitations d'application proches des seuils évoqués plus haut et du fait qu'elle ne rende pas compte des phénomènes d'hystérésis liés aux déclenchements et aux arrêts des écoulements, cette théorie semble très prometteuse pour décrire un écoulement granulaire sur fond meuble.

3.8 Copie de l'article

Crucial role of sidewalls in granular surface flows: consequences for the rheology

By PIERRE JOP, YOËL FORTERRE
AND OLIVIER POULIQUEN

IUSTI, Université de Provence, CNRS UMR 6595, 5 rue Enrico Fermi,
13453 Marseille cedex 13, France

(Received 4 November 2004 and in revised form 15 March 2005)

In this paper we study the steady uniform flows that develop when granular material is released from a hopper on top of a static pile in a channel. More specifically, we focus on the role of sidewalls by carrying out experiments in set-up of different widths, from narrow channels 20 particle diameters wide to channels 600 particle diameters wide. Results show that steady flows on pile are entirely controlled by sidewall effects. A theoretical model, taking into account the wall friction and based on a simple local constitutive law recently proposed for other granular flow configurations, gives predictions in quantitative agreement with the measurements. This result gives new insights into our understanding of free-surface granular flows and strongly supports the relevance of the constitutive law proposed.

1. Introduction

Grains avalanching on a sand heap are often presented as the archetype of granular flows. In this situation both the liquid and solid behaviours of granular material coexist. The flow is confined in a thin layer of grains, typically few grain diameters, flowing at the free surface of a pile formed by static grains. Despite the apparent simplicity of the configuration, its description still represents a serious challenge as it gathers in a single flow all the difficulties specific to granular material. How can we describe the transition between the liquid and the solid behaviour? How is the thickness of the flowing layer selected? What kind of constitutive laws can describe the flow characteristics? These questions have motivated many experimental works in the ten last years. Two different configurations have been used to create surface granular flows: the flow on a heap and the rotating drum (figure 1). In the first one, the granular material is released from a hopper on top of a pile. The control parameter is the flow rate. The second one is a cylinder half-filled with the granular material. In this case, the control parameter is the rotation speed that indirectly controls the flow rate of the flowing layer. In both configurations, the flow characteristics are similar and can be summarized as follow:

(i) A minimum flow rate (or rotation rate in the rotating drum) exists below which the flow is intermittent and proceeds as successive avalanches. Above this threshold, a steady regime is observed (Rajchenbach 1990; Lemieux & Durian 2000).

(ii) In the steady regime, the free-surface inclination, sometimes called the dynamical angle of friction, increases when increasing the flow rate (Ancey 2001; Khakhar *et al.* 2001a; Taberlet *et al.* 2003; GDR MiDi 2004).

(iii) In the steady regime, the velocity profile (often measured at the sidewall) is localized at the free surface, with a linear profile at the top followed by an exponential tail (Komatsu *et al.* 2001; GDR MiDi 2004). The shear rate in the flowing region is of order $\sqrt{g/d}$ where g is the gravity and d the particle diameter, this shear rate being weakly dependent on the flow rate (Rajchenbach 1990; Khakhar *et al.* 2001*b*; Bonamy, Daviaud & Laurent 2002).

Based on these observations, several theoretical approaches have been proposed. Some are based on the analysis of individual grain motions, showing that a linear profile localized at the free surface could be explained by the dissipative nature of collisions (Andreotti & Douady 2001; Rajchenbach 2003; Hill, Gioia & Tota 2003). Others are hydrodynamic descriptions based on different rheological constitutive laws (Elperin & Vikhanski 1998; Khakhar *et al.* 2001; Bonamy *et al.* 2002; Josserand, Lagrée & Lhuillier 2004). In all these attempts to describe free-surface flows, the influence of sidewalls is neglected. The experimental measurements are interpreted as if the sidewalls, often with smooth surfaces, do not play a major role in the flow dynamics.

However, this assumption is far from being straightforward and in our opinion warrants more investigation. Some signs exist in the literature showing that sidewalls could have a crucial role in the dynamics of surface granular flows. The most striking evidence concerns the inclination angle of the free surface with respect to horizontal. In the intermittent avalanching regime, experimental works have shown that angles at which avalanches start or stop strongly depend on the width between lateral walls (Grasselli & Herrmann 1997; Zhou *et al.* 2002). In the continuous flow regime, experiments carried out in long rotating drums have shown that the surface inclination is a few degrees higher close to the wall than in the middle of the drum (Dury *et al.* 1998; Yamane *et al.* 1998). Some studies of flow on a heap have revealed the existence of surprisingly steep piles at high flow rates in narrow channels (Taberlet *et al.* 2003). This angle made by the free surface with the horizontal controls the stress distribution in the material. As a consequence, if sidewalls have a strong influence on the inclination, it is legitimate to wonder to what extent they do not dramatically also modify the flow characteristics, such as the flow thickness and the velocity profiles. However, most of the experiments are carried out in narrow devices, with a gap of less than 30 particle diameters between sidewalls. Few studies are made in the wide rotating drum configuration and none in the wide heap configuration. What happens in the case of a large system? Are flow characteristics going to change? Does the influence of sidewalls disappear for a large enough system?

Answering these questions on the role of sidewalls for granular surface flows represents the first goal of this study. Once we know whether sidewalls can be neglected or not and what their influence is, it will be possible to use the surface flow configuration properly to test constitutive equations for dense granular flows. The second goal of this study is to test an empirical rheology recently proposed for other configurations.

In a recent collective work (GDR MiDi 2004), data from different configurations and from different research groups have been collected. A local rheology has been proposed, which was able to unify results numerically obtained on plane shear (Chevoir *et al.* 2004; Iordanoff & Khonsari 2004; Da Cruz *et al.* 2004) and results obtained both in experiments and in simulations for flows down inclined planes (Pouliquen 1999; Chevoir *et al.* 2001; Pouliquen & Forterre 2002; Forterre & Pouliquen 2003; Silbert, Landry & Grest 2003). The rheology is written as a friction law, i.e. the shear stress is proportional to the normal stress, with a coefficient of friction depending on a dimensionless shear rate. Although this local approach suffers from several

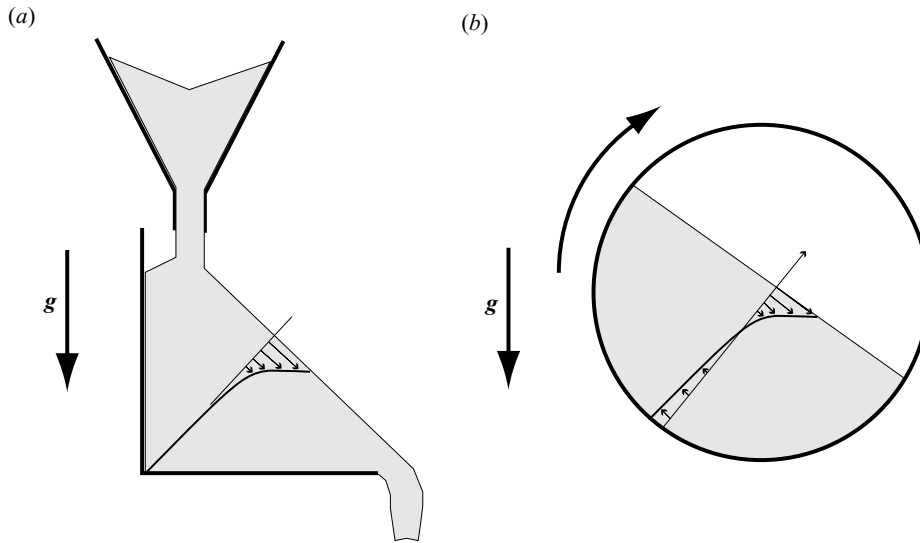


FIGURE 1. The two configurations leading to granular surface flows. (a) Flow on a heap; (b) rotating drum.

limits which are discussed in GDR MiDi (2004), the fact that a single law correctly describes two different configurations, the plane shear and the inclined plane, is in our opinion very encouraging and deserves a deeper study with other flow configurations. In that sense, granular surface flows represent a severe test for this local rheology as they exhibit peculiar flow characteristics, e.g. localized velocity profiles, that strongly contrast with those observed in plane shear or inclined plane configurations.

The aims of this study are then, (i) to clarify the role of sidewalls for granular surface flows, and (ii) to test the local constitutive law proposed recently in GDR MiDi (2004). The configuration we choose is the flow on a heap (figure 1a). This choice rather than the rotating drum configuration is motivated by the fact that steady uniform flows, i.e. with a flow thickness independent of the distance to the hopper, can be obtained for heap flows whereas in rotating drums the thickness varies along the flow. For this configuration we systematically investigate the role of sidewalls by experimenting with channels of different widths from a quasi two-dimensional configuration (20 particle diameters) to a very wide situation (600 particle diameters). We then compare our measurements of the free-surface inclination, the free-surface velocity and the flow thickness in the steady uniform regime to the prediction of the local rheology.

The paper is organized as follows. The experimental set-up and measurement methods are presented in §2. The influence of the channel width on the steady uniform flow properties is presented in §3. The theoretical approach based on the local rheology proposed recently in GDR MiDi (2004) is described in §4, and the predictions are compared with measurements in §5. A discussion and conclusions are given in §§6 and 7.

2. Experimental method

2.1. Experimental set-up

The experimental set-up is sketched in figure 2. We use glass beads of diameter $d = 0.53 \pm 0.05$ mm as granular material. The box is 1.5 m long, made of a rough bottom plate and two smooth lateral glass walls. The gap W between the sidewalls can be

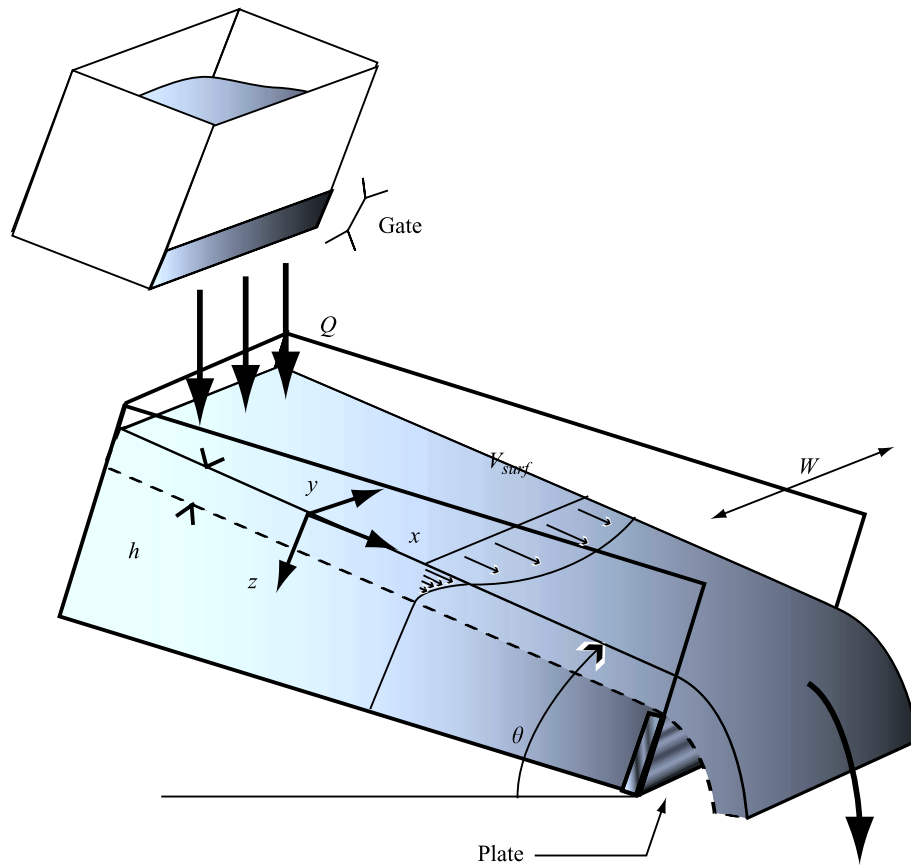


FIGURE 2. Experimental set-up.

changed from 1 cm ($19d$) up to 30 cm ($570d$). The box is closed at the bottom end by a 10 cm height plate. In order to use less granular material, the whole set-up is inclined at an angle less than the angle of repose of the material, so that, when the box is filled, the static layer is everywhere thicker than 10 cm ($190d$). On top of this static layer, we release particles from a hopper placed at the top of the channel. The flow rate is controlled by the opening of the gate. The experimental procedure is the following. At the beginning of each experiment the box is empty. When opening the gate of the hopper, the beads first fill the box before flowing over the end plate when the box is full. For high enough flow rates, a steady regime then develops with a layer of grains flowing on top of a static pile. All the measurements presented in the following are done in the steady regime.

In this regime, far from the entrance and the exit, the flow is uniform along the x -direction. The free surface makes a constant angle θ with the horizontal and is almost flat in the transverse direction (its variations between the wall and the middle are less than 2 grain diameters). The free-surface velocity is aligned along the x -direction, the transverse velocity being less than 1% of the longitudinal one. The free-surface velocity is also uniform along the x -direction however it varies in the transverse y -direction: the flow is faster in the middle of the channel. The thickness of the flowing layer also varies in the y -direction and is larger in the middle than at the walls. In order to characterize the flow, four quantities are measured: the mean flow rate per unit of width Q ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$) (in the following we simply call Q the 'flow rate'), the inclination of the free surface with the horizontal θ , the thickness of the flowing

layer h measured at the centreline of the channel, and the free-surface velocity field $V_{surf}(y)$. It must be emphasized that, in this configuration, the only control parameter is the mean flow rate Q fixed by the aperture of the hopper. The thickness h , the velocity V_{surf} and the inclination θ are chosen by the system. It should be noticed that the control parameter Q is a flow rate averaged over the channel. The local flow rate is not uniform and is smaller close to the wall than in the middle of the flow.

2.2. Measurement methods

In order to measure Q , we weigh the mass m flowing out of the channel during a finite time T (between 30 s and 3 s) once the steady regime is reached. Q is then computed knowing the density of the beads $\rho_s = 2450 \text{ kg m}^{-3}$ and assuming the volume fraction of beads during the flow to be $\phi = 0.6$: $Q = m/(TW\rho_s\phi)$. The inclination of the free surface θ is measured from a picture taken from the side and analysed using image processing (software ImageJ available from the internet at <http://rsb.info.nih.gov/ij/>). The measurement precision is about $\pm 0.04^\circ$. Velocity profiles are computed from movies recorded by a fast camera taken at rate between 250 and 1000 frames per second. The velocity profile is then obtained using a modified particle imaging velocimetry (PIV) method. The precision is about $\pm 3 \text{ mm s}^{-1}$. Finally, we have to measure the flow thickness.

Since the granular material is opaque, we cannot measure h in the bulk using a camera. In order to estimate the flow thickness far from the walls, we have developed a weakly intrusive method based on erosion measurements. A thin metal blade, 0.45 mm thick and 2 cm wide, is blackened with the flame of a candle. The blade is then suddenly immersed in the flow, perpendicular to the free surface and held at a fixed position for 20 s before we remove it (figure 3a). We have checked that the upstream flow is hardly perturbed by the intrusion of the thin blade. Once the blade is removed, we observe that the black soot has been eroded in the region where the grains were flowing, but not in regions where grains were static. In order to test the method, we have put the blade close to the wall, where we can compare the erosion pattern with the depth velocity profile along z measured using PIV. A typical result is shown in figure 3(b)(ii) which shows the eroded blade lighted at a low incidence angle. The bright part corresponds to the region eroded by the flow. Figure 3(b)(iii) is the intensity profile of the blade averaged over the width. For comparison, we have plotted on the same figure the corresponding velocity profile (figure 3b(i)). The correlation of the erosion pattern and the velocity profile is good, showing that the erosion method gives a good estimate of the flow thickness h (see legend of figure 3).

3. Influence of the sidewalls on steady uniform flows

In order to understand precisely the influence of the sidewalls on granular surface flows, measurements are made for channel widths varying from 19 particle diameters to 570 particle diameters. For each width, the inclination θ , the thickness h and the free-surface velocity V_{surf} have been measured as a function of the flow rate Q . The results presented in the following are expressed in terms of dimensionless variables using the particle diameter d and the gravity g . The dimensionless flow rate is $Q^* = Q/d\sqrt{gd}$, the dimensionless thickness is $h^* = h/d$, the dimensionless width is $W^* = W/d$ and the dimensionless velocities are $V^* = V/\sqrt{gd}$.

3.1. Existence of steady uniform flows

The first observation is that a minimum flow rate Q_c is necessary to obtain a steady flow (Rajchenbach 1990; Lemieux & Durian 2000). Below this critical value, the flow is

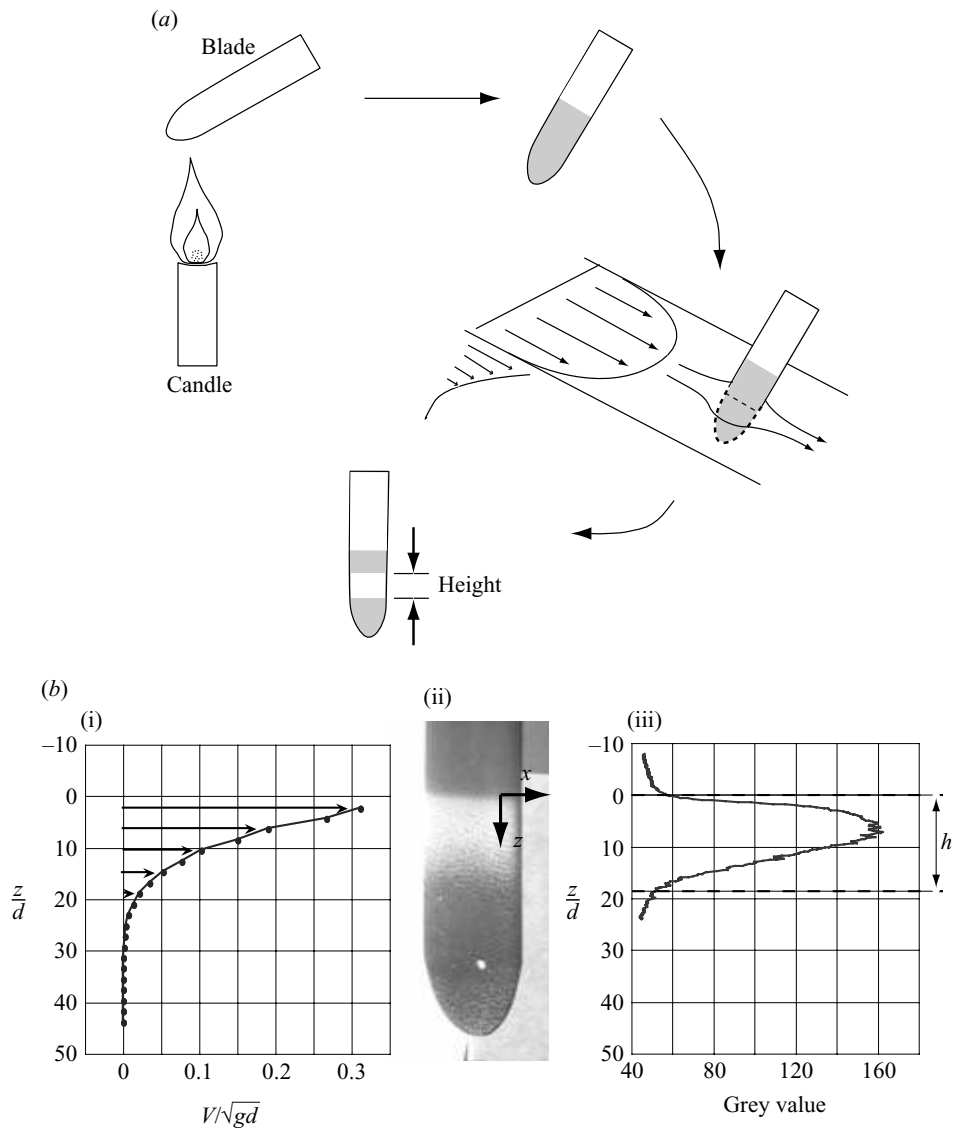


FIGURE 3. (a) Thickness measurement method. (b) Calibration of the erosion method. (i) Velocity profile at sidewall. (ii) Black soot on the blade eroded by the flow. (iii) Grey value along the blade. The flow thickness h is estimated as follows: the top part of the curve is fitted by two straight lines and the bottom part is fitted by a modified Gaussian. h is defined as the distance between the intersection of the lines and the point of maximum curvature of the fitted curve.

intermittent and occurs by successive avalanches. Above this value, a steady regime is reached, where the outlet flow rate is constant and equal to the inlet flow rate. We show here that Q_c depends on the width of the channel W (figure 4). For wide channels, we must supply more grains per second and per unit of width to reach a stationary flow.

In the stationary regime, the spatial variation of the flow along the slope is as follows. The grains falling from the hopper first accelerate at the top of the pile, before reaching a steady velocity. About 10 cm from the outlet, they accelerate again and fall over the end plate. In between the entrance and the outlet regions, the flow is then uniform, independent of the x position. All the measurements presented below were made in this steady and uniform regime.

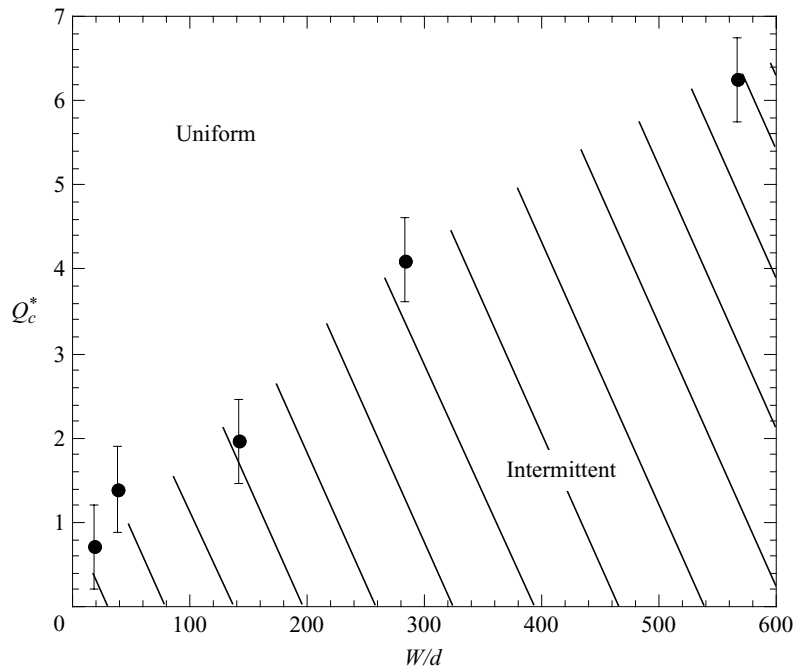


FIGURE 4. The critical flow rate per unit of width, Q_c^* , separating the intermittent regime and the stationary flow as a function of W/d .

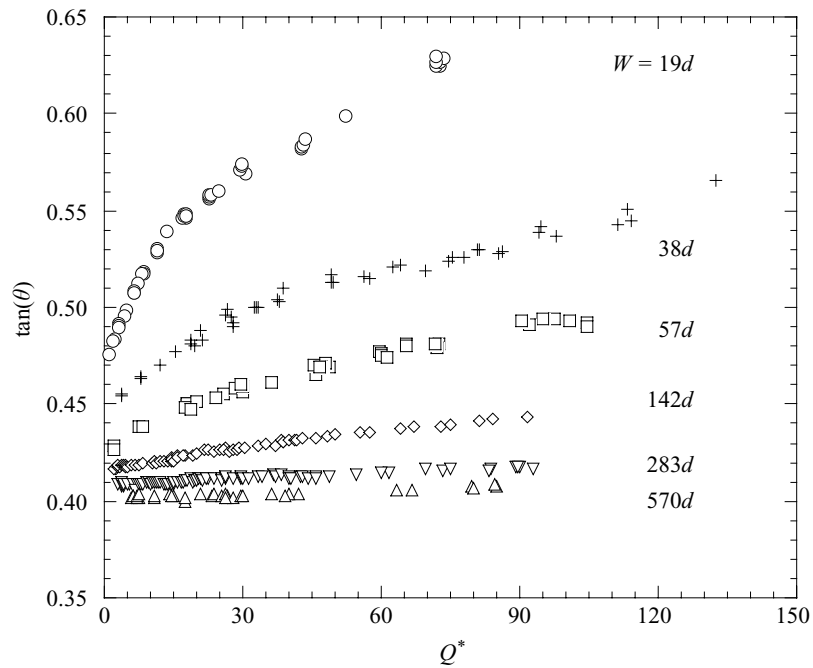


FIGURE 5. Surface slope θ as a function of the dimensionless flow rate Q^* for different widths.

3.2. Free-surface inclination

As observed in previous studies (Rajchenbach 1990; Dury *et al.* 1998; Yamane *et al.* 1998; Grasselli & Herrmann 1999; Lemieux & Durian 2000; Khakhar *et al.* 2001a), the angle between the free surface and the horizontal increases when increasing the flow rate, as shown in figure 5. However, although this effect is important for narrow

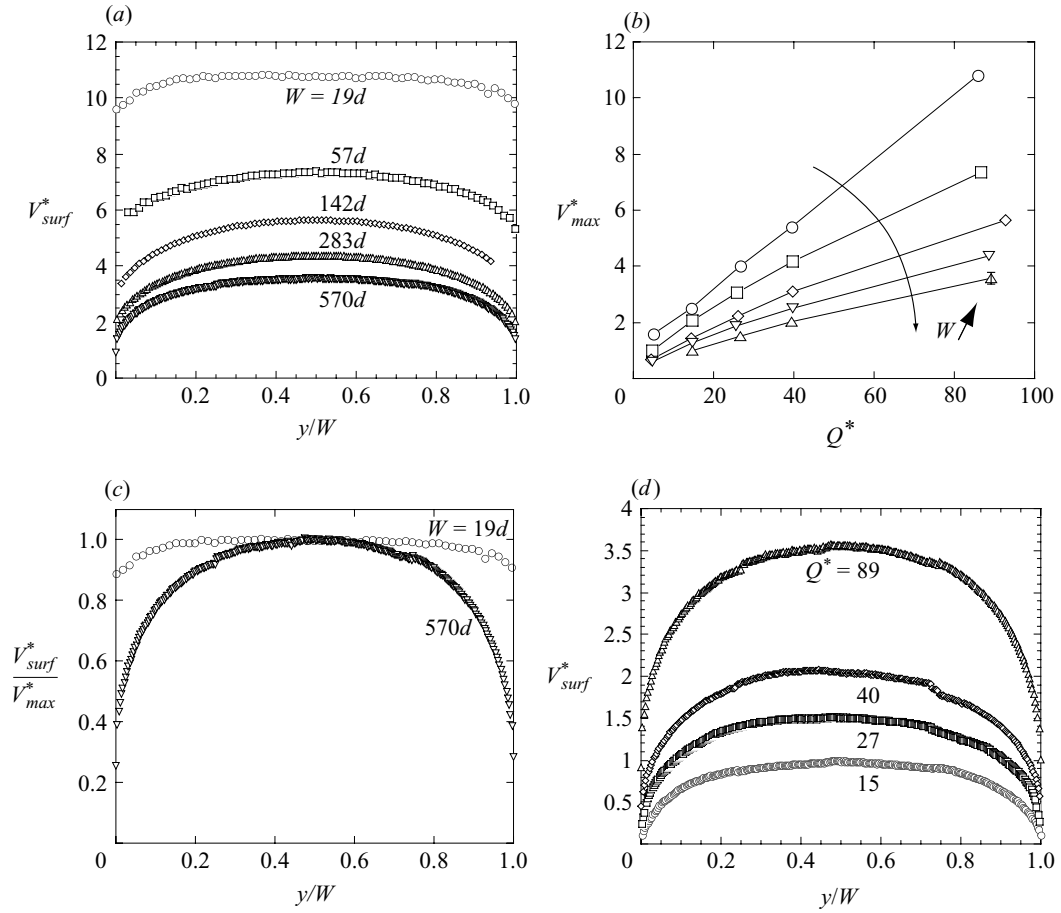


FIGURE 6. (a) Dimensionless surface velocity profile $V_{surf}^*(y)$ as a function of y/W ; for different widths W^* at a given flow rate $Q^* = 89$. (b) Maximum surface velocity $V_{max}^* = V_{surf}^*(W/2)$ as a function of Q^* . Symbols as for figure 5. (c) Normalized velocity profiles V_{surf}^*/V_{max}^* for $W^* = 19$ and 570 . (d) $V_{surf}^*(y)$ versus y/W for different Q^* for the widest channel $W^* = 570$.

channels, it almost disappears for the widest channel we have investigated. For $W/d = 570$, the surface slope remains almost constant close to the angle of repose of our material. This clearly shows that the increase of the slope with flow rate is due to the additional friction induced by the sidewalls as mentioned in several previous studies (Taberlet *et al.* 2003; Courrech du Pont *et al.* 2003; GDR MiDi 2004).

3.3. Free-surface velocity

In order to investigate the influence of the channel width on the free-surface velocity, we first perform experiments keeping the same flow rate per unit of width Q , but changing the gap W between the sidewalls. Figure 6(a) shows the transverse surface velocity profiles $V_{surf}^*(y)$ for $Q^* = 89$. In these figures, the transverse direction y is rescaled by the channel width. The striking result is that the wider the channel, the slower the flow. By increasing the width from $19d$ to $570d$, the velocity is divided by a factor three. This effect is observed for all the flow rates as shown in figure 6(b). In this figure, the velocity V_{max}^* in the centreline ($y/W = 0.5$) is plotted as a function of the flow rate Q^* for the different widths. The velocity increases with respect to the flow rate, but decreases when increasing the width. The last important remark about the surface velocity profile is that profiles are less and less uniform in the transverse

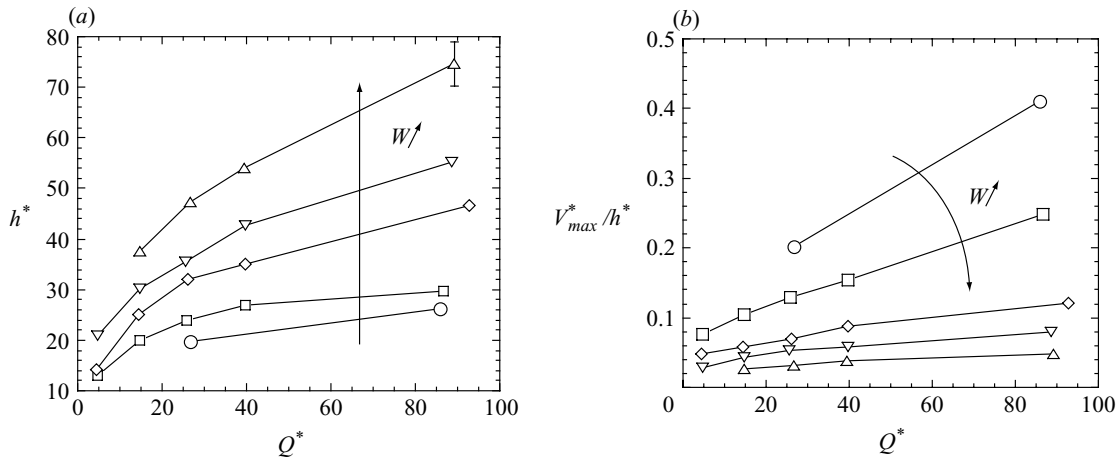


FIGURE 7. (a) Flow thickness h^* measured in the centreline of the channel as a function of Q^* for different widths. (b) Estimated shear rate V_{max}^*/h^* as a function of Q^* for different widths. Symbols as for figure 5.

direction when enlarging the channel. Whereas for $W^* = 19$ a plug region with a constant velocity exists far from the walls, this is no longer the case for $W^* = 570$ (figure 6c). In this widest channel, the profile is curved all across the channel whatever the flow rate is (figure 6d). Therefore enlarging the channel does not eliminate wall effects, contrary to what one would expect.

3.4. Thickness of the flow

We have seen above that, for a given flow rate per unit of width, the flow velocity decreases when enlarging the channel. Because of mass conservation this implies that the flow should be thicker. This is verified by our measurements of the thickness in the middle of the channel ($y/W = 0.5$) using the erosion method. In figure 7(a), we have plotted how the thickness h varies as a function of the flow rate for different channel widths W . The flow thickness increases with the flow rate, but as expected from the velocity measurements, it also increases with W . For the widest channel the flow thickness reaches unusually high values about 75 grain diameters, much higher than the classical 10 or 20 particle diameters usually reported in the literature (GDR MiDi 2004). Concerning the variations of h along y , no systematic measurement of the profile has been made. However, we have noticed that the transverse thickness profile behaves like the free-surface velocity profile. For narrow channels, the flow thickness is uniform across the width, whereas for wide channels, variations are observed: h is smaller close to the wall than in the centre part. For example, for $W = 142d$ and $Q^* = 16.5$, $h = 26.5d$ in the centreline of the channel, but is only $17.5d$ at the wall.

3.5. Discussion

Whereas for narrow channels we replicate results presented in the literature, e.g. increase of inclination with flow rate, flowing layer about ten particle diameters thick, our measurements in wide channels dramatically contrast with the previous studies. The major difference is that the flow occurs on, much thicker layer and at a much lower velocity in wide channels than in narrow channels. This contradicts the result commonly admitted for free-surface flows that the shear rate in the flowing region is of order of $0.6\sqrt{g/d}$ and weakly depends on the flow rate (Khakhar *et al.* 2001b; Bonamy *et al.* 2002; Rajchenbach 2003; GDR MiDi 2004). This is clearly shown in figure 7(b) where we have plotted an estimate of the shear rate V_{max}^*/h^* as a function

of the flow rate Q^* . Although for narrow channels the shear rate is of order $0.3\sqrt{g/d}$, it is almost 10 times lower in the widest channel. Moreover, figure 7(b) shows that the shear rate is not constant and obviously depends both on the flow rate Q and on the channel width W .

This systematic study in channels of different widths therefore shows that sidewalls play a crucial role in the dynamics of granular flows on a pile. It seems impossible to eliminate them by enlarging the system. This observation suggests that it is essential to take into account sidewalls if we want to model granular surface flows, at least in the steady regime. In the following, we derive a theoretical model based on an empirical rheology recently proposed to describe dense granular flows, which takes into account additional wall friction, and compare the predictions with our experimental results.

4. Theoretical model

4.1. Choice of the rheology

In order to describe our surface flows, we need first to know the material rheology. Although the question of constitutive equations for dense granular flows is still a matter of debate, recent works in different configurations seem to converge and allow a simple empirical rheology to be proposed (GDR MiDi 2004).

The first information comes from the inclined-plane configuration, when a granular layer flows down an inclined bumpy surface. The study of the steady uniform flows, for which scaling laws have been observed (Pouliquen 1999; Silbert *et al.* 2003), allows an empirical friction law to describe the shear stress that develops at the interface between the flowing layer and the rough surface to be proposed. This law stipulates that the shear stress is proportional to the weight of the layer multiplied by a friction coefficient which depends on both the layer thickness h and the mean depth-averaged velocity $\langle V \rangle$. Based on the experimental measurements, the following form has been proposed for the basal friction coefficient $\mu_b(\langle V \rangle, h)$ (Pouliquen & Forterre 2002):

$$\mu_b(\langle V \rangle, h) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{\frac{h\sqrt{gh}\beta}{\langle V \rangle d L_0} + 1}, \quad (4.1)$$

where d is the particle diameter, g the gravity and μ_s , μ_2 , β and L_0 are constants that depend on the material. This law has been successfully applied in the framework of depth-averaged equations to predict quantitatively the spreading of a granular mass (Pouliquen & Forterre 2002) and the development of instabilities (Forterre & Pouliquen 2003). However, it cannot be considered as a constitutive law since it applies only at the base of the layer.

The link with the rheology has been made only recently (GDR MiDi 2004), when comparing these results with numerical studies in the configuration of the plane shear cell (Da Cruz *et al.* 2004; Iordanoff & Khonsari 2004). In this configuration, a granular layer is confined between two rough plates under a confining pressure P and sheared at a shear rate $\dot{\gamma}$. The numerical simulations reveal that the shear stress τ verifies a friction law and that the friction coefficient depends on a single dimensionless parameter I . I can be interpreted as the ratio between the time scale given by the shear rate and the time scale related to the confining pressure (GDR MiDi 2004). The relation between shear stress and shear rate is then written in the following form:

$$\left| \frac{\tau}{P} \right| = \mu(I) \quad \text{with} \quad I = \frac{|\dot{\gamma}|d}{\sqrt{P/\rho_s}}, \quad (4.2)$$

where d is the particle diameter and ρ_s is the particle density.

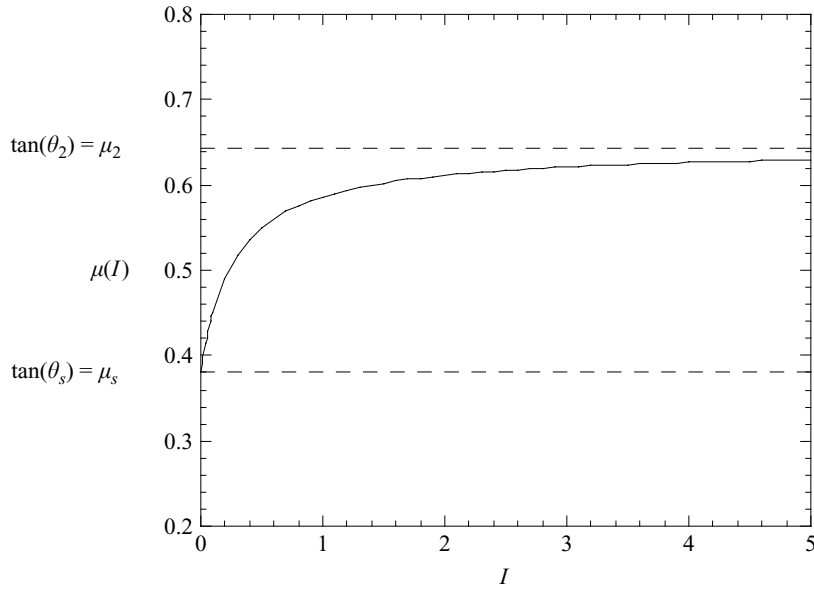


FIGURE 8. Friction coefficient μ as a function of the dimensionless parameter I ($\mu_s = \tan(20.9^\circ)$, $\mu_2 = \tan(32.76^\circ)$, $I_0 = 0.279$).

The interesting result arises when comparing this relation with the one obtained on the inclined plane for the basal friction law (4.1). If we assume that the material is everywhere defined by the local constitutive law given by (4.2), predictions can be made for flows on inclined planes (see Appendix A). We can then show that the predictions are compatible with the basal friction law (4.1) issued from experimental measurements only if we choose for the function $\mu(I)$ the following form:

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{I_0/I + 1} \quad \text{with} \quad I = \frac{|\dot{\gamma}|d}{\sqrt{P/\rho_s}}. \quad (4.3)$$

The coefficients μ_s and μ_2 are the same as in (4.1) and the constant I_0 is related to the coefficient L_0 and β in (4.1) (see Appendix A). According to this law, the friction coefficient goes from a minimum value μ_s for very low I up to an asymptotical value μ_2 when I increases, as sketched in figure 8.

By interpreting the basal friction law found in inclined-plane experiments in the framework of the constitutive law found in plane shear, we are then able to propose a simple local rheology. The next step is to ask whether this rheology, which correctly describes plane shear and flows on inclined planes, can also predict surface flows on heaps. In the following, we apply (4.2) and (4.3) to heap flows taking into account the friction with sidewalls, and we compare the predictions with the experimental results presented in the previous section. In order to do so, we must quantitatively determine the coefficients of the constitutive law (4.3). The glass beads used in our study being the same as those used by Forterre & Pouliquen (2003) in an inclined-plane experiment, we can easily compute the coefficients of the relation $\mu(I)$ from the coefficients that have been measured for the basal friction law. We found that $\mu_s = \tan(20.9^\circ)$, $\mu_2 = \tan(32.76^\circ)$ and $I_0 = 0.279$ (see Appendix A). This choice implies that there is no fit parameter in our constitutive law. In other words, the idea adopted here is to calibrate the constitutive law on previous experiments on an inclined plane, and check if quantitative predictions can be made for surface flows on heaps.

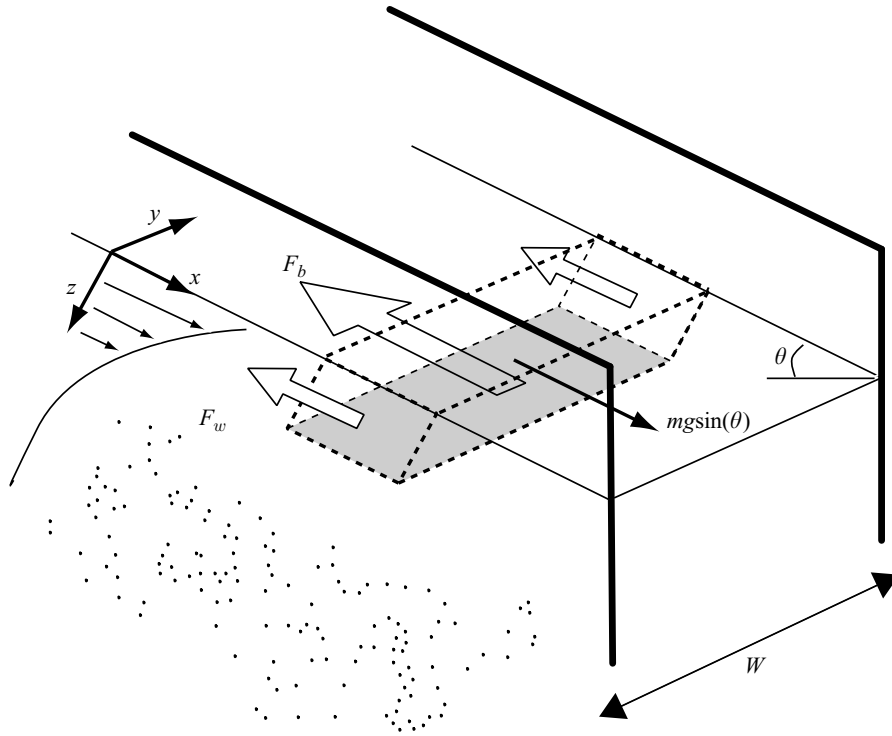


FIGURE 9. Force balance on an elementary slice of material.

4.2. Model including wall effects

Knowing the rheology, it is then possible to write the momentum balance for a granular layer flowing on a heap. Let us consider a semi-infinite granular medium sandwiched between two smooth plates. We assume that the flow is uniform in the x -direction, the free surface making an angle θ with horizontal. In addition we neglect the variations of the velocity and the thickness in the y -direction. This simplification will be discussed in § 6.1. We can then write the force balance for a slice of material of length dx , thickness z and width W (figure 9). Four forces apply on the elementary slice.

The gravity: $dxW\rho gz \sin(\theta)$, where $\rho = \rho_s\phi$.

The two lateral friction forces due to the sidewalls $F_w = -2 dx \int_0^z \mu_w \rho g z' \cos(\theta) dz'$. Here two assumptions are made: first we assume that the beads slip against the sidewalls and we write the induced stress as a pure solid friction with a constant coefficient of friction μ_w . Measurement of glass beads sliding on glass walls gives $\mu_w = \tan(10.4 \pm 0.3^\circ)$. Secondly, the pressure P is assumed to be isotropic. This last assumption seems to be verified in simulations (Prochnow, Chevoir & Albertelli 2000; Silbert *et al.* 2001).

The force F_b that develops on the bottom face of the element due to the shear inside the material. According to our choice of the rheology (4.2), this force is $F_b = -dxW\mu(I(z))\rho gz \cos(\theta)$, where $I(z) = |\dot{\gamma}(z)|/\sqrt{\phi gz \cos\theta}$.

The balance of the three forces leads to the following equation:

$$0 = \tan(\theta) - \mu_w \frac{z}{W} - \mu(I(z)). \quad (4.4)$$

For a given inclination θ , the parameter $I(z)$ and thus the shear rate $\dot{\gamma}(z)$ are then obtained from (4.3) and (4.4) and then integrated to give the velocity profile. Before computing the velocity profile, a first remark can be made about the selection of the

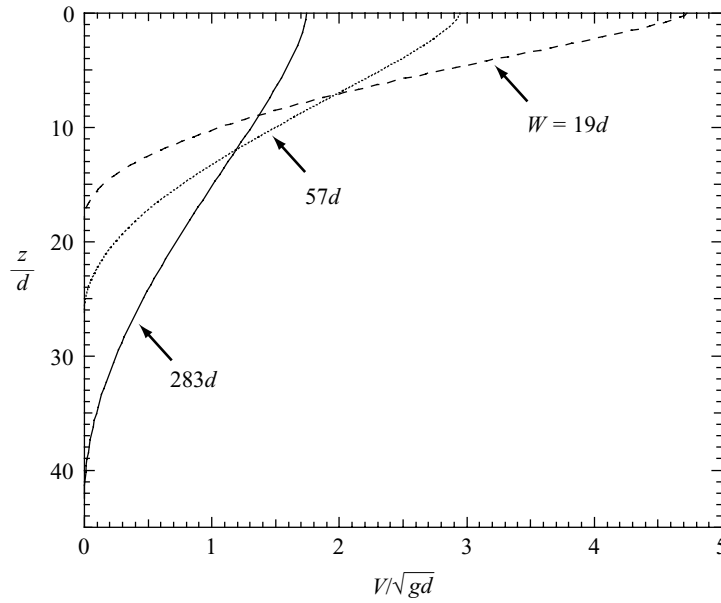


FIGURE 10. Predicted velocity profiles along z for a given flow rate and for different widths: $Q^* = 31.5$ for $W = 19d$ (dashed line), $W = 57d$ (dotted line) and $W = 283d$ (solid line).

flow thickness. When going deeper in the pile – increasing z –, the friction term due to the walls – the second term in (4.4) – increases. Consequently, the force balance implies that $\mu(I(z))$ decreases. However, the internal friction cannot be less than the critical value μ_s reached when I goes to zero, i.e. when the material is not sheared (figure 8). As a consequence, there exists a critical depth h below which the gravity, being screened by the lateral friction, is too weak to induce a shear in the material. The flow thickness is then given by the following relation:

$$\frac{h}{W} = \frac{\tan(\theta) - \mu_s}{\mu_w}. \quad (4.5)$$

This linear relation between the flow thickness and the channel width has been previously obtained by other authors (Roberts 1969; Savage 1979; Taberlet *et al.* 2003). However, in our description where a local rheology is introduced, we can go further and analytically derive from (4.3) and (4.4) all the flow properties: the velocity profile and the variations with the flow rate of the inclination, of the surface velocity and of the thickness. The exact analytical expressions are given in Appendix B. Examples of predicted velocity profiles are shown in figure 10. The flow is localized close to the free surface with a profile that looks like those experimentally observed.

Beyond the analytical results given in Appendix B, interesting scaling laws arise from the expression of the dimensionless parameter I . It is easy to show from (4.4) that the shear rate can be written as follows:

$$\frac{\dot{\gamma}^*(z^*, \theta)}{W^{*1/2}} = \sqrt{\frac{z^*}{W^*}} F\left(\frac{z^*}{W^*}, \theta\right), \quad (4.6)$$

where the function F is given in Appendix B. By successive integrations, we then obtain the following scaling laws for the velocity V^* and flow rate Q^* :

$$\frac{V^*(z^*, \theta)}{W^{*3/2}} = G\left(\frac{z^*}{W^*}, \theta\right), \quad \frac{Q^*(\theta)}{W^{*5/2}} = K(\theta), \quad (4.7)$$

where

$$G(x, \theta) = \int_{h^*/W^*}^x \sqrt{Z} F(Z, \theta) dZ, \quad K(\theta) = \int_0^{h^*/W^*} G(Z, \theta) dZ. \quad (4.8)$$

In all these expressions, the inclination θ plays the role of the control parameter. Since in our experiments we control the flow rate and not the inclination, it is convenient to rewrite (4.5) and (4.7) choosing Q as a control parameter instead of θ . The scaling laws can then be written as follow:

$$\tan(\theta) = f_1\left(\frac{Q^*}{W^{*5/2}}\right), \quad \frac{V^*(z^*, Q^*)}{W^{*3/2}} = f_2\left(\frac{z^*}{W^*}, \frac{Q^*}{W^{*5/2}}\right), \quad \frac{h^*}{W^*} = f_3\left(\frac{Q^*}{W^{*5/2}}\right), \quad (4.9)$$

where the functions f_1 , f_2 and f_3 can be linked to the functions F , G and K (see Appendix B). In terms of dimensional variables, the scaling laws are given by:

$$\tan(\theta) = f_1\left(\frac{dQ}{\sqrt{g}W^{5/2}}\right), \quad \frac{dV(z, Q)}{\sqrt{g}W^{3/2}} = f_2\left(\frac{z}{W}, \frac{dQ}{\sqrt{g}W^{5/2}}\right), \quad \frac{h}{W} = f_3\left(\frac{dQ}{\sqrt{g}W^{5/2}}\right), \quad (4.10)$$

Let us underline that these scaling laws do not depend on the real shape of $\mu(I)$, (4.3), but derive from the expression of the dimensionless number I . Only the functions f_i are related to the exact expression of $\mu(I)$.

Finally, we can show from the forces balance, (4.4), and the shape of the friction coefficient $\mu(I)$, (4.3), that steady uniform solutions are possible only for a finite range of surface inclinations given by $\mu_s < \tan \theta < \mu_2$. The lower limit corresponds to $h = 0$, i.e. the flow rate vanishes when $\theta \rightarrow \theta_s = \arctan(\mu_s)$. The upper limit corresponds to the maximal angle $\theta_2 = \arctan(\mu_2)$ that can be balanced by the internal friction. Above this flow rate the flow accelerates along the pile. From Appendix B (B 5), we can show that this maximal angle corresponds to a maximum flow rate $Q^*(\theta_2)$ for which steady flows are predicted:

$$\frac{Q^*(\theta_2)}{W^{*5/2}} = \frac{4}{15} I_0 \sqrt{\phi \cos(\theta_2)} \left(\frac{\mu_2 - \mu_s}{\mu_w} \right)^{5/2}. \quad (4.11)$$

5. Comparison with experimental measurements

5.1. Scaling laws

In order to check the validity of the theoretical model, we first compare all our experimental measurements carried out for different widths and different flow rates with the predicted scaling laws (4.9). To this end, we have plotted in figures 11, 12 and 13 our measurements in terms of the three quantities $\tan(\theta)$, $V_{surf}^*/W^{*3/2}$ and h^*/W^* as a function of $Q^*/W^{*5/2}$, the scaling predicted by (4.9). The striking result is that, in the three cases, all the data obtained from different channel widths collapse on a single curve, showing that the predicted scalings correctly capture the influence of both the flow rate and the channel width. The collapse is perhaps less accurate in figure 11 for the inclination, where each set of data obtained for different W seems to converge to a different angle for $Q^* = 0$.

The second main result is that, not only do the experimental data collapse, but they also quantitatively follow the theoretical predictions, as shown in figures 11, 12 and 13, where the solid lines correspond to predictions. The agreement between the model and the experimental data is quantitatively good, although we can see that the predictions for the surface velocity are 15–20% below the measurements and those for the thickness h are 10–15% above the measurements. Another quantitative test consists of studying the asymptotic behaviour at low flow rates. Power laws can be

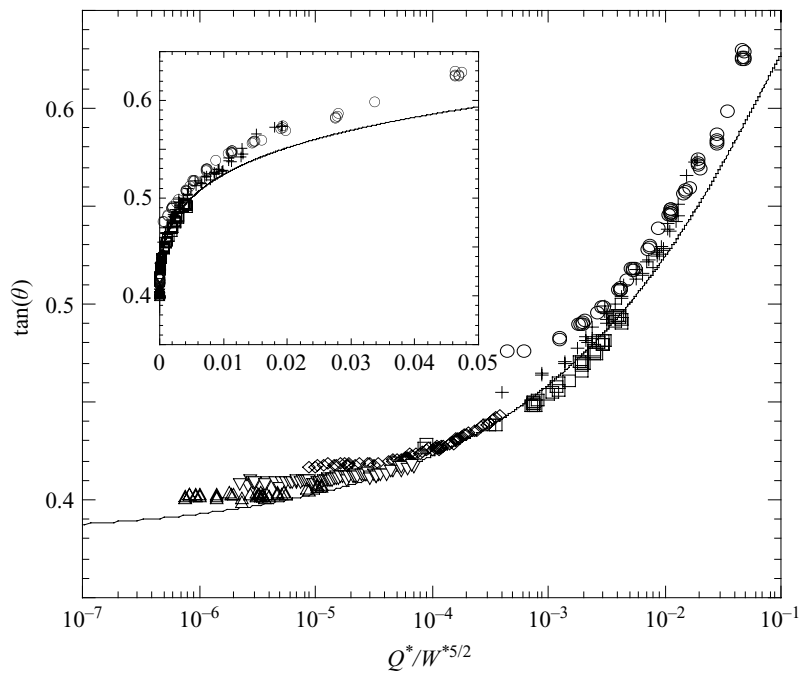


FIGURE 11. $\tan(\theta)$ as a function of $Q^*/W^{5/2}$ for different widths (W^* from 19 to 570), same data as in figure 5. Inset: same plot in linear-linear axis. The solid line is the prediction of the model (4.9).

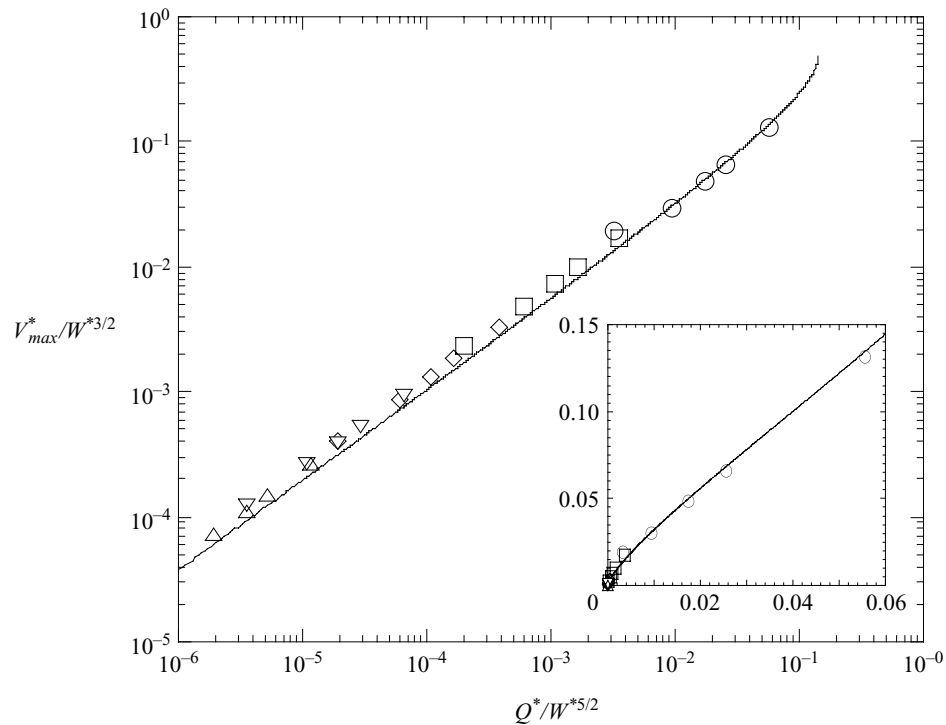


FIGURE 12. The rescaled maximum surface velocity $V_{max}^*/W^{3/2}$ as a function of $Q^*/W^{5/2}$ for different widths. Inset: same plot in linear-linear axis. The solid line is the prediction of the model (4.9).

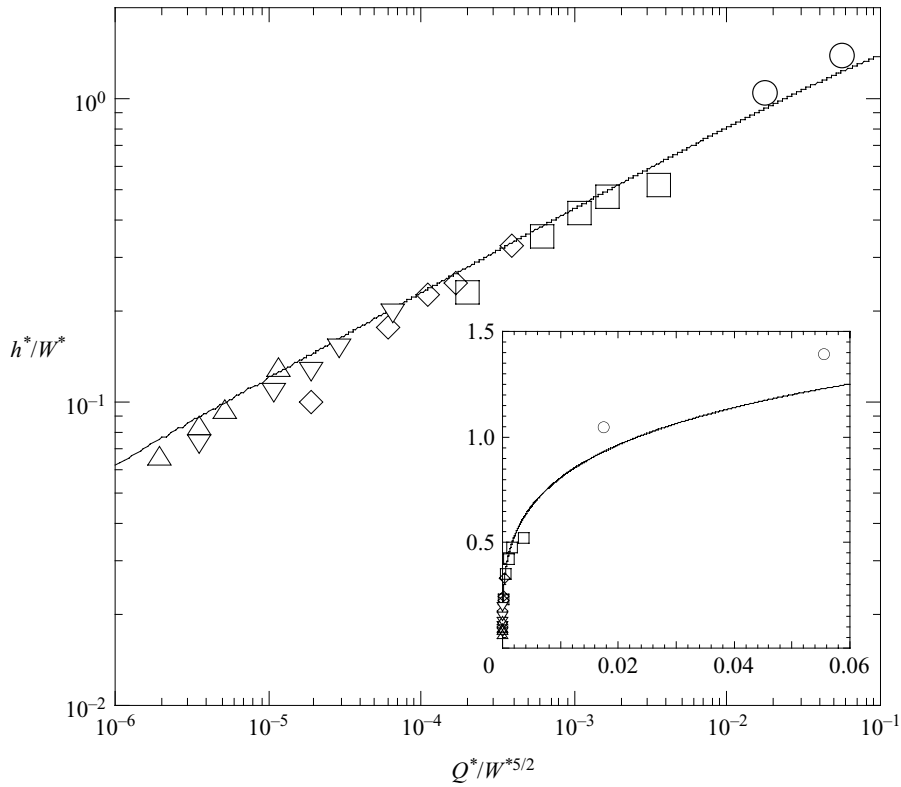


FIGURE 13. Rescaled flowing thickness h^*/W^* as a function of $Q^*/W^{*5/2}$. Inset: same plot in linear-linear axis. The solid line is the prediction of the model (4.9).

predicted by developing (4.9) for small flow rates, as shown in the Appendix C. We find the following relations:

$$\frac{V_{surf}^*}{W^{*3/2}} \approx \left(\frac{Q^*}{W^{*5/2}} \right)^{5/7}, \quad \frac{h^*}{W^*} \approx \left(\frac{Q^*}{W^{*5/2}} \right)^{2/7} \quad \text{when} \quad \left(\frac{Q^*}{W^{*5/2}} \ll 1 \right). \quad (5.1)$$

When comparing with the experimental measurements, the agreement is good. The fit of our data gives for the surface velocity an exponent equal to 0.722 to be compared with $5/7 \approx 0.714$, and for the thickness an exponent equal to 0.295 to be compared to $2/7 \approx 0.286$.

The last prediction that can be checked is the relation between the thickness h/W and the angle θ , (4.5), coming from the force balance. The model predicts a linear variation of the thickness with the tangent of the inclination. Figure 14 shows that our measurements are in good agreement with the theoretical results. The experimental data obtained for different widths collapse onto a single straight line, with a slight departure from linearity observed at low flow rates. A good quantitative agreement is again obtained.

This analysis then shows that the characteristics of steady uniform flows on a heap are predicted well by our model based on the rate-dependent friction law coupled with wall effects. It is important to keep in mind that in this analysis no parameter is fitted. The parameters of the rheological law $\mu(I)$ have been chosen from the previous study by Forterre & Pouliquen (2003) who used the same granular material. The same rheology is therefore able to describe quantitatively flows on a rough inclined plane and surface flows on a heap.

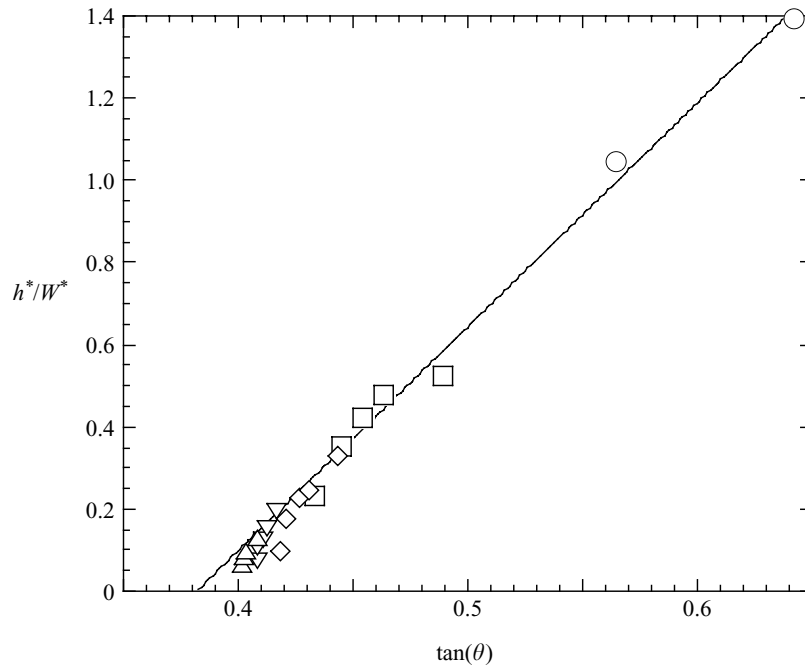


FIGURE 14. Rescaled thickness h^*/W^* as a function of $\tan(\theta)$ for different widths $W^* = 19$ (\circ), 57 (\square), 142 (\diamond), 283 (∇), 570 (\triangle). The solid line is the prediction of the model (4.5).

In the next section, we try to go further and discuss the domain of existence of steady uniform flows, by comparing the range of flow rates where they are observed with the prediction of the theory.

5.2. Minimum flow rate

In §4.2, we have seen that the model predicts that steady uniform flows are possible for a range of flow rates going from zero, when the thickness vanishes and $\theta \rightarrow \theta_s$, to a maximum value when $\theta \rightarrow \theta_2$. We have not been able in our experiment to reach high enough flow rates to confirm the existence or not of a maximum flow rate. However, our measurements clearly demonstrate the existence of a minimum flow rate for steady uniform flows, below which the flow is intermittent. This minimum flow rate depends on the channel width, as shown in figure 4.

This transition between steady flows and intermittent flows is not predicted by the model. However, it is interesting to compare this situation with results about the flow threshold obtained in the inclined-plane configuration. It has been shown that, when a granular layer flows down a rough plane inclined at an angle θ without any sidewall, no flow is possible if the layer thickness is less than a critical thickness $h_{stop}(\theta)$ (Pouliquen 1999; Daerr 2001; Silbert, Landry & Grest 2003). The existence of a critical thickness seems to be linked to the existence of correlations in the grain motions (Ertas & Halsey 2002; GDR MiDi 2004; Pouliquen 2004). Explaining the flow threshold of granular material is far beyond the scope of this study. However, it is interesting to wonder if a connection exists between the minimum thickness observed in the inclined-plane configuration and the minimum flow rate we observe for flows on heap. When decreasing the flow rate on a heap, the flow thickness decreases. The critical flow rate can then be interpreted as a critical thickness. How does it compare with the minimum thickness $h_{stop}(\theta)$ observed on an inclined plane?

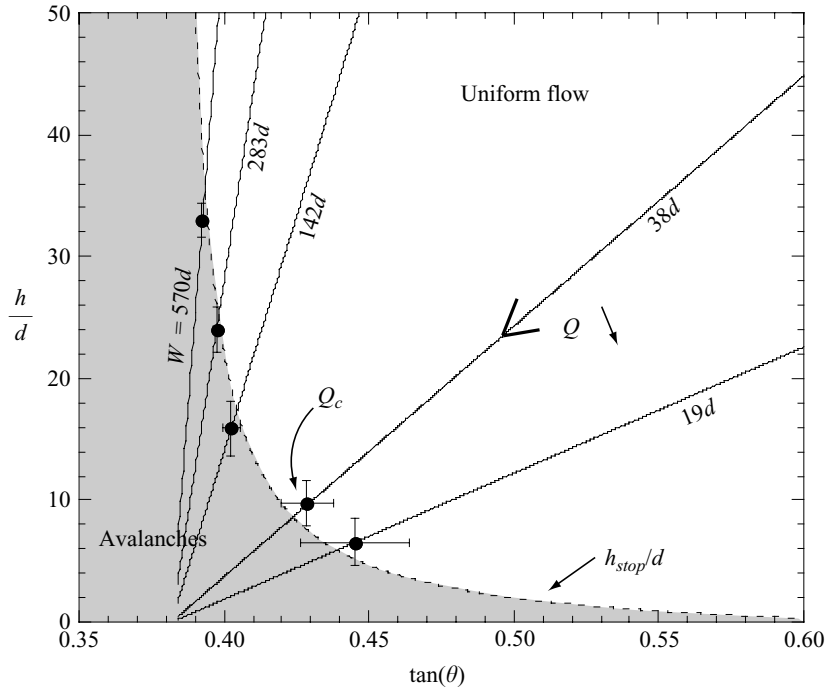


FIGURE 15. Comparison of the domain of steady uniform flows between flows on a heap (black dots, same data as in figure 4) and flows on inclined plane (dashed line, function h_{stop}/d from Forterre & Pouliquen 2003). The continuous straight lines indicate how h/d and $\tan \theta$ vary in the heap flow configuration when varying the flow rate Q at a fixed channel width W .

In order to answer this question, we consider a flow on a pile in a channel of width W . For a given flow rate Q , the inclination of the free surface θ and the thickness h are given in our model by (4.9). They are related by the linear relation (4.5) such that in the plane $(\tan \theta, h/d)$ the system follows a straight line when varying Q . In figure 15, five such lines are drawn corresponding to five different channel widths. In the model, each point of the lines corresponds *a priori* to a flow. However, experimentally this is not the case. Because there exists a critical flow rate below which the flow is intermittent, only the upper part of the lines in figure 15 can be reached. Our measurement of the critical flow rate $Q_c(W)$ then gives a critical thickness $h_c(W)$ and a critical inclination $\theta_c(W)$, which are plotted in figure 15 for five widths. The striking results comes from the comparison between the positions of the points $(\tan \theta_c(W), h_c(W))$ and the flow threshold $h_{stop}(\theta)$ observed on the inclined plane. In figure 15, we have plotted as a dashed line the frontier between flow and no flow $h_{stop}(\theta)/d$ coming from the inclined plane experiments by Forterre & Pouliquen (2003) using the same glass beads. We observe that the transition points $(\theta_c(W), h_c(W))$ between steady and intermittent flows on a heap coincide with the frontier $h_{stop}(\theta)$ between flow and no flow on an inclined plane. This result shows that the two *a priori* different conditions to form steady uniform flows in both configurations, heap flow and inclined plane flows, are quantitatively the same.

6. Discussion

6.1. Limits of the model

The theoretical model, which takes into account both the specificity of the granular rheology and the influence of lateral walls, gives good quantitative predictions for

the steady uniform flows observed on a heap. However, although the major features are captured, some discrepancies exist which give information about the limits of the approach.

The first limit is that we have written the forces balance assuming the flow to be uniform across the channel. This choice, which simplifies the theoretical description, does not allow us to describe the velocity variations experimentally observed across the channel. To capture these three-dimensional effects, we have to take into account shear in the transverse direction. It is then necessary to write a generalization of the constitutive law (4.2) for fully three-dimensional deformations.

A second limit concerns the use of the local rheology written as a simple rate-dependent friction law. As discussed in GDR MiDi (2004), this local approach is probably no longer valid close to the flow threshold or close to the boundaries. This limit is indeed observed in our case and gives rise to several discrepancies between the prediction and the measurements. The first one concerns the flow threshold. The local rheology is not able to predict the critical flow rate observed experimentally below which intermittent flows occur. We have been able to understand the existence of this minimum flow rate only by stipulating *a priori* that the flow cannot occur below a critical thickness, by analogy to the case of flows on inclined planes. The second discrepancy concerns the velocity profiles. The predicted profile presents a zero shear rate at the free surface and a static region with zero velocity deep inside the pile. Experimentally, the velocity profile exhibits a non zero shear rate at the surface and an exponential tail deep in the pile (GDR MiDi 2004). One possible explanation for the limit of the local rheology is that close to the flow threshold or close to boundaries, non-local phenomena must be taken into account. Grain motions are correlated on lengths which become comparable to the flow thickness or to the distance to the boundaries (Ertas & Halsey 2002; GDR MiDi 2004; Pouliquen 2004). The precise understanding of this limit and the development of constitutive laws taking into account the non-local effects are still a challenge.

The last limit of our model lies in the description of the interaction of the flowing layer with the sidewalls. The stress that develops between the material and the glass wall is described in our model as a simple Coulomb friction. Whereas it is reasonable for slow flows, for fast flows collisions between particles and wall could occur and become predominant, leading to a rate-dependent wall stress. This limitation could affect the maximum inclination predicted in our theory. According to our model, no steady uniform flow on a pile can occur above the angle θ_2 . This value is typically between 30° and 40° , depending on the material used (Forterre & Pouliquen 2003). Experiments by Taberlet *et al.* (2003) report much higher slopes up to 60° in narrow channels and at high flow rates. A plausible explanation for such high inclinations could be that the stress at the wall becomes collisional. Our model should then be modified to take into account a rate-dependent wall friction.

6.2. Transition between flow on an inclined plane and flow on a pile

In the theory presented in §4.2, the medium is considered as semi-infinite in order to model flows on a pile. However, flows of a finite layer corresponding to inclined-plane experiments carried out in narrow channels can be described using the same approach. We just have to stipulate that the velocity should vanish at a given depth z_b in order to reproduce the no-slip condition on a rough surface. If the bottom plate is located deeper than the critical thickness predicted in the semi-infinite case, the bottom does not introduce any modification. The flow is made of a static layer close to the rough surface with a flowing region on top of it (figure 16b). However, when the bottom plate

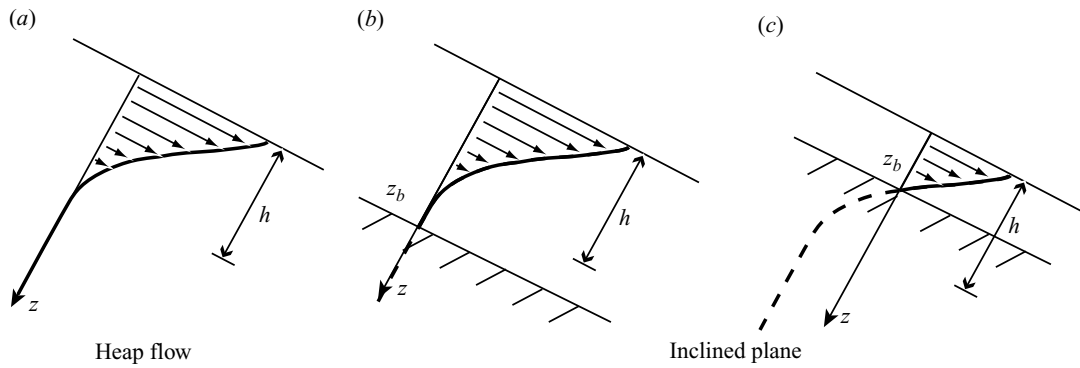


FIGURE 16. Modification of the velocity profile when a rigid bottom is introduced in the model for a given angle. (a) No bottom. (b) The rough bottom is deeper than the zero velocity level $z_b > h$. (c) $z_b < h$. The dashed lines correspond to the velocity profile in the case of semi-infinite flow.

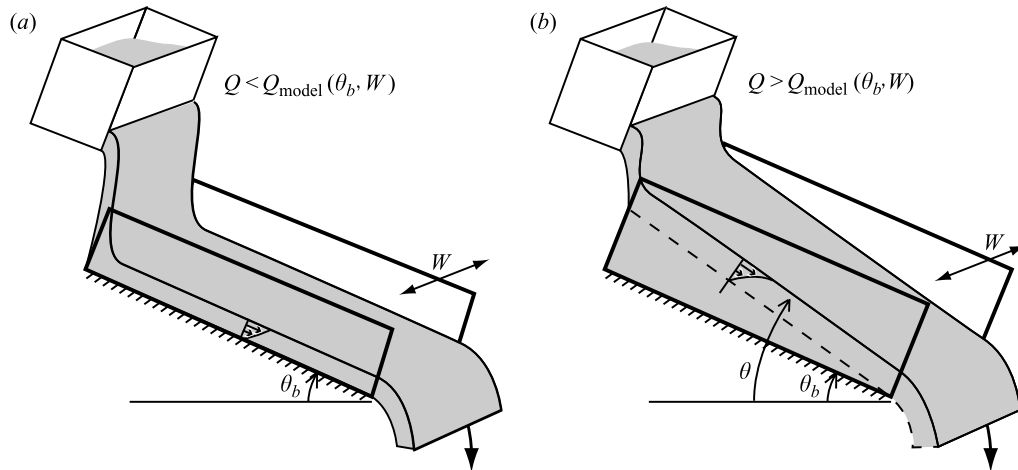


FIGURE 17. Sketch of the transition between (a) flow on rough inclined plane and (b) heap flow when increasing the flow rate.

is close to the free surface, the model predicts that the whole granular layer is flowing. The velocity profile is therefore given by the upper part of the velocity profile for an infinite heap (figure 16c). This simple observation allows us to understand better the formation of static piles observed in experiments on inclined planes in narrow channels. Savage (1979), Ancy (2001) and Taberlet *et al.* (2003) have shown that when the inclination is low or the flow rate is high, the material does not flow down to the bottom plate, but a static pile develops. A transition is then observed between flow on a plane and flow on a pile. This can be understood as follows. In an inclined-plane experiment, the two control parameters are the inclination of the plane and the flow rate. For a given inclination, if the flow rate is less than the flow rate predicted in the case of a semi-infinite pile at this angle, we are in the case of figure 16(c). The flow extends over the whole granular layer, the free-surface being parallel to the bottom plane (figure 17a). However, when increasing the flow rate, the thickness increases and the friction with the wall becomes more and more important. Eventually, the only way for the system to overcome the sidewall friction is to increase the free-surface inclination at an angle higher than the bottom inclination θ_b (figure 17b). The formation of a static pile in confined inclined planes is thus controlled by the sidewalls.

This explains why in very wide set-ups (Pouliquen 1999), or in molecular dynamic simulations using periodic boundary conditions (Chevoir *et al.* 2001; Silbert *et al.* 2003), no static layer was ever observed, as soon as the inclination of the plate is above the repose angle of the material.

7. Conclusion

In this paper, steady uniform flows obtained when granular material is released at the top of a pile have been investigated. The influence of the sidewalls on these surface flows has been carefully studied, and a theoretical model has been proposed. From the experimental and theoretical analysis, two main conclusions emerge.

The first conclusion is that steady uniform flows on a pile are entirely controlled by sidewall effects. The characteristics of flows in wide channels differ notably from those observed in narrow channels. For the same flow rate per unit of width, the flow is thicker and slower in a wide channel than in a narrow channel, thicknesses up to 70 particle diameters being observed. These observations contrast dramatically with the picture commonly accepted that the flowing zone is necessarily thin with a shear rate roughly constant. It means that precautions have to be taken when interpreting experimental results in narrow channels to find information about the intrinsic flow rheology.

The second result concerns the constitutive law for dense granular flows. Using the local rheology proposed in GDR MiDi (2004) and taking into account the friction due to the lateral walls, we have been able to reproduce the major characteristics of granular heap flows. In particular, the localization of the flow at the free surface is predicted, but appears to be a consequence of the wall friction and is not an intrinsic property of the rheology. Our analysis therefore dispels the difficulty raised in GDR MiDi (2004), that flows on inclined planes and flows on a heap are not compatible when sidewall effects are neglected. We have shown here that both configurations can be unified in the same framework choosing the rheology $\mu(I)$. The unification is not only qualitative, but also quantitative. The flow thickness, the velocity and the free-surface inclination measured for flow on a heap are predicted within 15 %, when the friction law is calibrated based on measurements for flows on inclined planes. The comparison also extends to the flow threshold, which appears to be the same in both configurations once the critical flow rate observed in heap flows is interpreted in terms of a critical thickness. Of course, a number of limits exist that have been identified and related to the fact that the proposed constitutive law is local. However, we believe that this approach is a serious candidate for a constitutive law for dense granular flows, as it is able to describe in the same framework three different configurations: Couette flows, inclined planes and flows on a heap.

This study, which contrasts with previous results on surface flows, raises many questions. The first one concerns the generalization of the constitutive law to three-dimensional deformations. We have seen that the approach proposed in this paper does not allow us to describe the deformation observed in the transverse direction. What kind of constitutive law has to be written to capture this variation?

The second question concerns the role of the channel length. We have seen that in the steady uniform regime the flow thickness is controlled by the width of the channel. What would happen for very wide channels, when the width of the flow becomes comparable to the total length of the flow? Is the flow length in this case the new relevant length scale of the problem?

Another question concerns unsteady and non-uniform flows. What will happen for transient flows, for example, when avalanches are triggered on top of a pile? Do the

sidewalls still play an important role in this case? To describe the complex dynamics of avalanches, several models have been proposed based on depth-averaged hydrodynamics equations (Bouchaud *et al.* 1994; Boutreux, Raphaël & de Gennes 1998; Douady, Andreotti & Daerr 1999; Khakhar, Orpe & Ottino 2001*b*; Aradian, Raphaël & de Gennes 2002). What is the link between these approaches and the model presented here? Is a deeper insight into these models possible, now that we have more information about the internal rheology suitable for dense granular flows? These questions represent work for future investigations.

Finally, a last but fundamental issue concerns the physical origin of the constitutive law. Up to now the proposed rheology rests on an empirical ground. Attempts to link the observed macroscopic behaviour to the microscopic grain motion exist (Mills, Loggia & Tixier 1999; Pouliquen, Forterre & Le Dizes 2001; Ertas & Halsey 2002; GDR MiDi 2004) which are based on the idea that grains experience correlated or cluster-like motions. Experiments seem to support this idea (Choi *et al.* 2004; Pouliquen 2004), but the derivation of constitutive laws from microscopic bases remains an open challenge.

The authors thank Bruno Andreotti for enlightening discussions and advice on the PIV method and Frédéric Ratouchniak for technical support.

Appendix A. Rheological law

In this Appendix we show how the local constitutive law $\mu(I)$, (4.3), can be obtained from the expression of the basal friction law obtained in experiments on inclined planes (Pouliquen & Forterre 2002; Forterre & Pouliquen 2003).

To this end we consider a granular layer of thickness h flowing on a plane inclined at an angle θ . On one hand, the experiments on steady uniform flows have shown that the bottom friction can be expressed in term of the thickness h and the depth-averaged velocity $\langle V \rangle$ as follow:

$$\mu_b(\langle V \rangle, h) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{\frac{\beta h \sqrt{gh}}{\langle V \rangle L_0} + 1}, \quad (\text{A } 1)$$

where μ_s , μ_2 , β and L_0 are constants. On the other hand, if we assume that the material is described by the constitutive law $\mu(I)$ with $I = |\dot{\gamma}|d/\sqrt{P/\rho_s}$, the force balance in the bulk implies $\mu(I(z)) = \tan(\theta)$. This implies that the parameter I is constant across the layer, independent of z , depending only on the inclination of the plane. As a consequence, from the definition of I , we obtain the velocity profile (GDR MiDi 2004):

$$\frac{V(z)}{\sqrt{gd}} = \frac{2}{3}I(\theta)\sqrt{\phi \cos(\theta)} \frac{(h^{3/2} - z^{3/2})}{d^{3/2}}. \quad (\text{A } 2)$$

From this equation we can compute the depth-averaged velocity:

$$\frac{\langle V \rangle}{\sqrt{gh}} = \frac{2}{3}I(\theta)\sqrt{\phi \cos(\theta)} \frac{h}{d}. \quad (\text{A } 3)$$

From this result, we can then rewrite the basal friction coefficient (A 1) in terms of the parameter I as follow:

$$\mu_b(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{\frac{5\beta d}{2L_0 I \sqrt{\phi \cos \theta}} + 1}. \quad (\text{A } 4)$$

For consistency reason, the friction law $\mu(I)$ is then given by:

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{\frac{I_0}{I} + 1}, \quad (\text{A } 5)$$

with

$$I_0 = \frac{5}{2} \frac{d\beta}{L_0 \sqrt{\phi \cos(\theta)}}. \quad (\text{A } 6)$$

In the constitutive law I_0 should be a constant, whereas it depends on θ through the term $\sqrt{\cos(\theta)}$. However, this term does not vary much in the experimental range, such that one can think that it is missing in the expression (A 1) coming from the experimental data. Finally, from experimental measurements, Forterre and Pouliquen (2003) give $L_0/d = 1.65$, $\beta = 0.136$, $\mu_s = \tan(20.9^\circ)$, $\mu_2 = \tan(32.76^\circ)$. Taking $\phi \approx 0.6$ and an average value of 25° for θ , we obtain $I_0 = 0.279$. The parameters μ_s , μ_2 and I_0 then quantitatively define the constitutive law.

Appendix B. Analytical expressions for velocity profiles and for flow rate

Here we derive the expressions of the velocity profile and the flow rate as a function of the angle θ and of the depth z . The local friction law, (4.3), and the forces balance equation, (4.4), give the following equation for the shear rate:

$$\frac{\dot{\gamma}^*(z^*)}{W^{*1/2}} = -I_0 \sqrt{\frac{z^*}{W^*} \phi \cos(\theta)} \left(\frac{\tan(\theta) - \mu_w \frac{z^*}{W^*} - \mu_s}{\mu_2 - \tan(\theta) + \mu_w \frac{z^*}{W^*}} \right) \equiv \sqrt{\frac{z^*}{W^*}} F \left(\frac{z^*}{W^*}, \theta \right). \quad (\text{B } 1)$$

The minus sign before I_0 comes from the sign of the shear stress in our configuration. To simplify the expressions, we define:

$$\frac{h^*}{W^*} = \frac{\tan(\theta) - \mu_s}{\mu_w}, \quad \frac{h_2^*}{W^*} = \frac{\mu_2 - \tan(\theta)}{\mu_w}, \quad \text{and} \quad \Delta\mu = \mu_2 - \mu_s, \quad (\text{B } 2)$$

which leads to:

$$\frac{\dot{\gamma}^*(z^*)}{W^{*1/2}} = -I_0 \sqrt{\frac{z^*}{W^*} \phi \cos(\theta)} \left(\frac{h^* - z^*}{h_2^* + z^*} \right). \quad (\text{B } 3)$$

Integrating (B 3) with the boundary condition $V^* = 0$ at $z^* = h^*$, we find:

$$\begin{aligned} \frac{V^*(z^*, \theta)}{W^{*3/2}} &= 2I_0 \sqrt{\phi \cos(\theta)} \left[\frac{\Delta\mu}{\mu_w} \left(\sqrt{\frac{h^*}{W^*}} - \sqrt{\frac{z^*}{W^*}} - \sqrt{\frac{h_2^*}{W^*}} \left(\arctan \sqrt{\frac{h^*}{h_2^*}} - \arctan \sqrt{\frac{z^*}{h_2^*}} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{h^*}{W^*} \right)^{3/2} + \frac{1}{3} \left(\frac{z^*}{W^*} \right)^{3/2} \right] \\ &\equiv G \left(\frac{z^*}{W^*}, \theta \right) \\ &\equiv G_2 \left(\frac{z^*}{W^*}, \frac{h^*(\theta)}{W^*} \right). \end{aligned} \quad (\text{B } 4)$$

Integrating the previous equation from the bottom of the flowing layer ($z^* = h^*$) to the free surface yields:

$$\begin{aligned} \frac{Q^*(\theta)}{W^{*5/2}} &= \frac{V_{surf}^*(\theta)}{W^{*3/2}} \frac{h^*}{W^*} + 2I_0 \sqrt{\phi \cos(\theta)} \left(\frac{h_2^*}{W^*} \right)^{3/2} \\ &\times \left\{ \frac{2}{15} \frac{h_2^*}{W^*} \left(\frac{h^*}{h_2^*} \right)^{5/2} - \frac{2}{3} \frac{\Delta\mu}{\mu_w} \left(\frac{h^*}{h_2^*} \right)^{3/2} + \frac{\Delta\mu}{\mu_w} \left[\left(\frac{h^*}{h_2^*} + 1 \right) \arctan \sqrt{\frac{h^*}{h_2^*}} - \sqrt{\frac{h^*}{h_2^*}} \right] \right\} \\ &\equiv K(\theta) \\ &\equiv K_2 \left(\frac{h^*(\theta)}{W^*} \right). \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

where V_{surf} is the velocity at the free surface ($z^* = 0$). Equations (B2-left), (B4) and (B5) can be rewritten with the following form:

$$\tan(\theta) = f_1 \left(\frac{Q^*}{W^{*5/2}} \right), \quad \frac{V^*(z^*, Q^*)}{W^{*3/2}} = f_2 \left(\frac{z^*}{W^*}, \frac{Q^*}{W^{*5/2}} \right), \quad \frac{h^*}{W^*} = f_3 \left(\frac{Q^*}{W^{*5/2}} \right), \quad (\text{B6})$$

where,

$$f_1(X) = \tan(K^{-1}(X)), \quad f_2(X, Y) = G_2(X, K_2^{-1}(Y)), \quad f_3(X) = K_2^{-1}(X). \quad (\text{B7})$$

Appendix C. Asymptotic expressions at low flow rates

In this Appendix we give the asymptotic relations between the parameters for low flow rate, *i.e.* $Q^*/W^{*5/2} \rightarrow 0$, $h^*/W^* \rightarrow 0$ and $\theta \rightarrow \theta_s$. Then (B4) and (B5) at the lower order give:

$$\frac{V_{surf}^*}{W^{*3/2}} \approx \frac{4}{15} I_0 \sqrt{\phi \cos(\theta_s)} \frac{\mu_w}{\Delta\mu} \left(\frac{h^*}{W^*} \right)^{5/2}, \quad (\text{C1})$$

$$\frac{Q^*}{W^{*5/2}} \approx \frac{4}{35} I_0 \sqrt{\phi \cos(\theta_s)} \frac{\mu_w}{\Delta\mu} \left(\frac{h^*}{W^*} \right)^{7/2}, \quad (\text{C2})$$

which can be rewritten as follow:

$$\frac{V_{surf}^*}{W^{*3/2}} \approx \frac{4}{15} \left(\frac{35}{4} \right)^{5/7} \left(I_0 \sqrt{\phi \cos(\theta_s)} \frac{\mu_w}{\Delta\mu} \right)^{2/7} \left(\frac{Q^*}{W^{*5/2}} \right)^{5/7}, \quad (\text{C3})$$

$$\frac{h^*}{W^*} \approx \left(\frac{4}{35} I_0 \sqrt{\phi \cos(\theta_s)} \frac{\mu_w}{\Delta\mu} \right)^{-2/7} \left(\frac{Q^*}{W^{*5/2}} \right)^{2/7}. \quad (\text{C4})$$

REFERENCES

- ANCEY, C. 2001 Dry flows down an inclined channel: Experimental investigations on the frictional-collisional regimes. *Phys. Rev. E* **65**, 011304.
- ANDREOTTI, B. & DOUADY, S. 2001 Selection of velocity profile and flow depth in granular flows. *Phys. Rev. E* **63**, 031305.
- ARADIAN, A., RAPHAËL, E., DE GENNES, P-G. 2002 Surface flows of granular materials: a short introduction to some recent models. *C. R. Physique* **3**, 187-196.
- BONAMY, D., DAVIAUD, F. & LAURENT, L. 2002 Experimental study of granular surface flows via a fast camera: a continuous description. *Phys. of Fluids* **14**, 1666-1673.
- BOUCHAUD, J. P., CATES, M., PRAKASH, J. R. & EDWARDS, S. F. 1994 A model for the dynamics of sandpile surfaces. *J. Phys. France I* **4**, 1383-1410.

- BOUTREUX, T., RAPHAËL, E. & DE GENNES, P. G. 1998 Surface flows of granular material: a modified picture for thick avalanches. *Phys. Rev. E* **58**, 4692–4700.
- CHEVOIR, F., DA CRUZ, F., PROCHNOW, M., ROGNON, P. & ROUX, J.-N. 2004 Dense granular flows: friction and jamming. In *Proc. 17th ASCE Engng Mech. Conf.*, June 13–16, 2004, University of Delaware, Newark, DE.
- CHEVOIR, F., PROCHNOW, M., JENKINS, J. T. & MILLS, P. 2001 Dense granular flows down an inclined plane. In Y. Kishino, (ed.), *Powders and Grains*, pp. 373–376. Lisse, Swets and Zeitlinger, Tokyo.
- CHOI, J., KUDROLLI, A., ROSALES, R. R. & BAZANT M. Z. 2004 Diffusion and mixing in gravity-driven dense granular flows. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 174301.
- COURRECH DU PONT, S., GONDRET, P., PERRIN, B. & RABAUD, M. 2003 Wall effects on granular heap stability. *Europhys Lett.* **61** (4).
- DA CRUZ, F., CHEVOIR, F., ROUX, J.-N. & IORDANOFF, I. 2004 Macroscopic friction of dry granular materials. In *Transient Processes in Tribology, Proc. 30th Leeds–Lyon Symp. on Tribology* (Tribology and Interface Engineering, vol. 43, ed. A. Lubrecht & G. Dalmaz Elsevier).
- DAERR, A. 2001 Dynamical equilibrium of avalanches on a rough plane. *Phys. Fluids* **13**, 2115–2124.
- DOUADY, S., ANDREOTTI, B. & DAERR, A. 1999 On granular surface flow equations. *Eur. Phys. J. B* **11**, 131–142.
- DURY, C. M., RISTOW, G. H., MOSS, J. L. & NAKAGAWA, M. 1998 Boundary effects on the angle of repose in rotating cylinders. *Phys. Rev. E* **57** (4).
- ELPERIN, T. & VIKHANSKI, A. 1998 Granular flow in a rotating cylindrical drum. *Europhys. Lett.* **42**, 619–623.
- ERTAS, D. & HALSEY, T. C. 2002 Granular Optgravitational collapse and chute flow. *Europhys. Lett.* **60**, 931–937.
- FORTERRE, Y. & POULIQUEN, O. 2003 Long-surface-wave instability in dense granular flows. *J. Fluid Mech.* **486**, 21–50.
- GDR MIDI 2004 On dense granular flows. *Eur. Phys. J. E* **14**, 341–365.
- GRASELLI, Y. & HERRMANN, H. J. 1997 On the angles of dry granular heaps. *Physica A* **246**, 301–312.
- GRASELLI, Y. & HERRMANN, H. J. 1999 Shapes of heaps and silos. *Euro. J. Phys. B* **10**, 673–679.
- HILL, K. M., GIOIA, G. & TOTA V. V. 2003 Structure and kinematics in dense free surface granular flow. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 064302.
- IORDANOFF, I. & KHONSARI, M. M. 2004 Granular lubrication: toward an understanding between kinetic and uid regime. *ASME J. Tribol.* **126**, 137–145.
- JOSSERAND, C., LAGRÉE, P.-Y. & LHUILLIER, D. 2004 Stationary shear flows of dense granular materials: a tentative continuum modelling *Eur. Phys. J. E* **14**, 127–135.
- KHAKHAR D. V., ORPE, A. V., ANDERSEN, P. & OTTINO, J. M. 2001a Surface flow of granular materials: model and experiments in heap formation. *J. Fluid Mech.* **441**, 255–264.
- KHAKHAR D. V., ORPE, A. V. & OTTINO, J. M. 2001b Surface granular flows: two related examples. *Adv. Comput. Syst.* **4**, 407–417.
- KOMATSU, T. S., INAGAKI, S., NAKAGAWA, N. & NASUMO, S. 2001 Creep motion in a granular pile exhibiting steady surface flow. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1757–1760.
- LEMIEUX, P.-A. & DURIAN, D. J. 2000 From avalanches to fluid flow: a continuous picture of grain dynamics down a heap. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4273–4276.
- MILLS, P., LOGGIA, D. & TIXIER, M. 1999 Model for a stationary dense granular flow along an inclined wall. *Europhys. Lett.* **45**, 733–738.
- POULIQUEN, O. 1999 Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Phys. Fluids* **11**, 542–548.
- POULIQUEN, O. 2004 Velocity correlations in dense granular flows. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 248001.
- POULIQUEN, O., FORTERRE, Y. & LE DIZES S. 2001 Slow dense granular flows as a self-induced process *Adv. Complex Syst.* **4**, 441–450.
- POULIQUEN, O. & FORTERRE, Y. 2002 Friction law for dense granular flows: application to the motion of a mass down a rough inclined plane. *J. Fluid Mech.* **453**, 133–151.
- PROCHNOW, M., CHEVOIR, F. & ALBERTELLI, M. 2000 Dense granular flows down a rough inclined plane. In *Proc. XIIIth Intl Congress on Rheology, Cambridge, UK*.
- RAJCHENBACH, J. 1990 Flows in powder: from discrete avalanches to continuous regime. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2221–2224.

- RAJCHENBACH, J. 2003 Dense, rapid flows of inelastic grains under gravity. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 144302.
- ROBERTS, A. W. 1969 An investigation of the gravity flow of noncohesive granular materials through discharge chutes. *Trans. ASME, J. Engng Indust.* **91**, 373–381.
- SAVAGE, S. B. 1979 Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels. *J. Fluid Mech.* **92**, 53–96.
- SILBERT, L. E., LANDRY, J. W. & GREY, G. S. 2003 Granular flow down a rough inclined plane: transition between thin and thick piles. *Phys. Fluids* **15**, 1–10.
- SILBERT, L. E., ERTAS, D., GREY, G. S., HALSEY, T. C., LEVINE, D. & PLIMPTON, S. J. 2001 Granular flow down an inclined plane: Bagnold scaling and rheology. *Phys. Rev. E* **64**, 051302.
- TABERLET, N., RICHARD, P., VALANCE, A., DELANNAY, R., LOSERT, W., PASINI, J. M. & JENKINS, J. T. 2003 Super stable granular heap in thin channel. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 264301.
- YAMANE, K., NAKAGAWA, M., ALTOBELLI, S. A., TANAKA, T. & TSUJI, Y. 1998 Steady particulate flows in a horizontal rotating cylinder. *Phys. Fluids* **10**, 1419–1427.
- ZHOU, Y. C., XU, B. H., YU, A. B. & ZULLI, P. 2002 An experimental and numerical study of the angle of repose of coarse spheres. *Powder Technol.* **125**, 45–54.

3.9 Compléments à l'article

3.9.1 Estimation du coefficient de friction entre les grains et la paroi μ_w

La valeur du coefficient de friction sur les parois de verre a été mesurée de façon indépendante. La méthode utilisée pour cette mesure est celle qui permet une estimation d'un coefficient de friction entre deux matériaux : déposer un objet sur une plaque de verre que l'on incline jusqu'à ce qu'il commence à glisser. La tangente de l'angle est alors le coefficient de frottement statique.

L'inconvénient de cette technique repose ici dans le fait que les billes commenceront à rouler bien avant de glisser. Une première solution consisterait à observer le glissement d'un amas de billes collées entre elles. Cependant la rotation et les réarrangements sont alors bloqués. Roberts (1969) a mesuré la friction des grains sur les parois d'un canal en retenant une quantité de grains à l'intérieur de son canal par un système de cales légères. En mesurant l'angle pour lequel l'ensemble commence à glisser en fonction du rapport hauteur de grains bloqués sur la largeur du canal, il en déduit le coefficient de friction grains-parois. Pour avoir une situation plus proche de réalité, j'ai donc préféré mesurer le coefficient de frottement global d'un ensemble de billes confinées sous un récipient sur une plaque de verre. La figure 3.11 illustre le dispositif. Le récipient retourné est une boîte de Pétri en verre de 1 cm de profondeur ($19d$) et de 9.5 cm de diamètre. La difficulté principale est alors d'éviter le contact entre le récipient et la plaque de verre. Pour que la mesure soit pertinente, il est nécessaire que seuls les grains frottent contre la plaque, sinon le bilan de force est incomplet. Les billes doivent donc soutenir le récipient. La compaction éventuelle du tas avant son démarrage peut être alors problématique. Nous avons donc préféré ne pas utiliser de volume trop haut. Par ailleurs, un récipient plastique qui aurait un poids plus faible ne convient pas : à cause de l'électricité statique, les résultats sont systématiquement plus grands. Dans tous les cas nous négligeons les effets de la périphérie du récipient. La valeur moyenne trouvée pour les billes est $\mu_w = \tan(10.4 \pm 0.3^\circ)$.

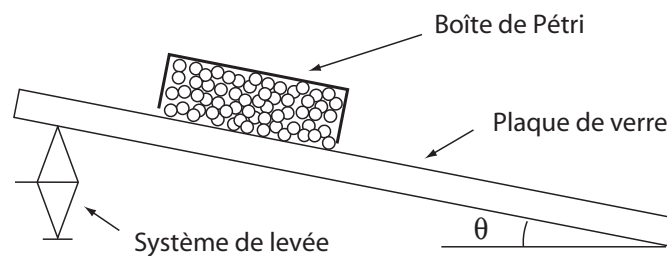


FIG. 3.11 – Technique de mesure du coefficient de friction d'un ensemble de billes sur les plaques de verre. L'angle θ auquel l'ensemble commence à glisser définit le coefficient de friction μ_w .

3.9.2 Uniformité de l'écoulement

Nous avons analysé les écoulements stationnaires et uniformes pour en tirer des renseignements sur les contraintes internes. Avant cela nous avons dû nous assurer que les propriétés des écoulements étaient invariantes sur une longueur suffisante. Des mesures de profils de vitesse ont donc été effectuées en plusieurs positions le long du canal (de longueur totale $L = 120$ cm). La

figure 3.12 montre la superposition de quatre profils de vitesse mesurés à une distance de 20, 40, 90 et 110 cm depuis l'alimentation pour un débit de $15.2 \text{ g.cm}^{-1}.\text{s}^{-1}$. Les profils se superposent très bien prouvant que les longueurs des régimes transitoires sont faibles dans ce cas. Il est à noter cependant que la vitesse en surface n'est pas tout à fait la même pour la mesure à 20 cm depuis l'entrée, où nous nous situons encore dans la phase d'accélération.

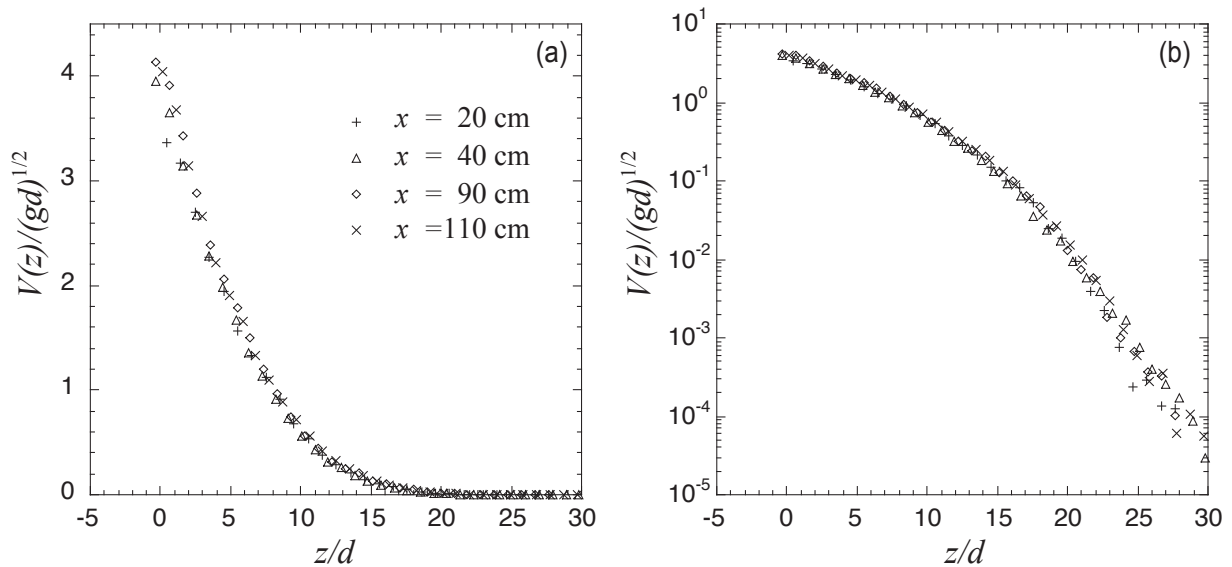


FIG. 3.12 – Superposition de plusieurs profils de vitesse mesurés en parois à différentes positions dans le canal : à 20, 40, 90 et 110 cm de l'alimentation. (a) Échelle linéaire pour les vitesses. (b) Mêmes données avec une échelle logarithmique.

Une mesure similaire a été effectuée pour les largeurs de 15 cm et 30 cm. Cette fois-ci, nous avons filmé la surface de l'écoulement et nous reportons l'évolution du maximum de vitesse au centre du canal. Pour limiter la dispersion des points expérimentaux, nous avons effectué les différentes mesures de vitesses lors d'une même expérience. Pour y arriver, la caméra rapide a été montée sur un rail longeant le canal et incliné de telle sorte à être parallèle à la surface libre de l'état stationnaire. Les figures 3.13a et b montrent l'évolution de la vitesse le long du canal pour une largeur $W^* = 283$ avec un débit de $8 \text{ g.cm}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et une largeur $W^* = 570$ avec $Q = 12.6 \text{ g.cm}^{-1}.\text{s}^{-1}$. Les barres représentent la dispersion des points de mesures.

Nous voyons que pour le canal de 15 cm (figure 3.13a), la zone uniforme est relativement grande. En revanche, pour le canal le plus large (figure 3.13a), nous n'observons pas de zone où la vitesse est vraiment stationnaire. Cependant la variation dans la zone centrale est faible. Nous effectuerons donc les mesures au milieu du canal en gardant en mémoire que l'écoulement n'est peut-être pas entièrement développé pour les débits les plus grands dans le canal le plus large.

Par ailleurs nous avons remarqué que l'écoulement n'était pas homogène dans la largeur du canal. Il existe de forts gradients de vitesse en surface. Pour la largeur la plus faible $W^* = 19d$, l'écoulement est quasiment homogène selon la dimension transverse y . En revanche, pour un même débit linéique, plus la largeur du canal augmente, plus le profil de vitesse est cisailé. Nous perdons ainsi le caractère homogène de l'écoulement. Ce changement ne fait pas apparaître de bande de

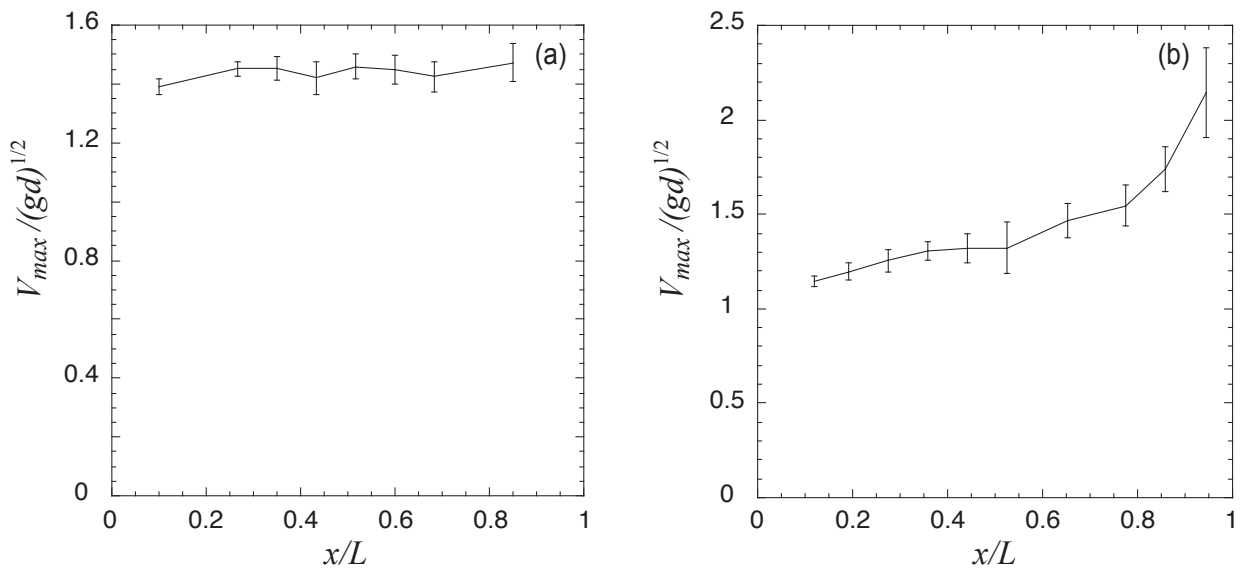


FIG. 3.13 – Uniformité de l'écoulement le long du canal ($L = 120 \text{ cm}$): évolution de la vitesse maximale au centre pour deux largeurs. (a) $W/d = 283$ et $Q = 8 \text{ g.cm}^{-1}.\text{s}^{-1}$. (b) $W/d = 570$ et $Q = 12.6 \text{ g.cm}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

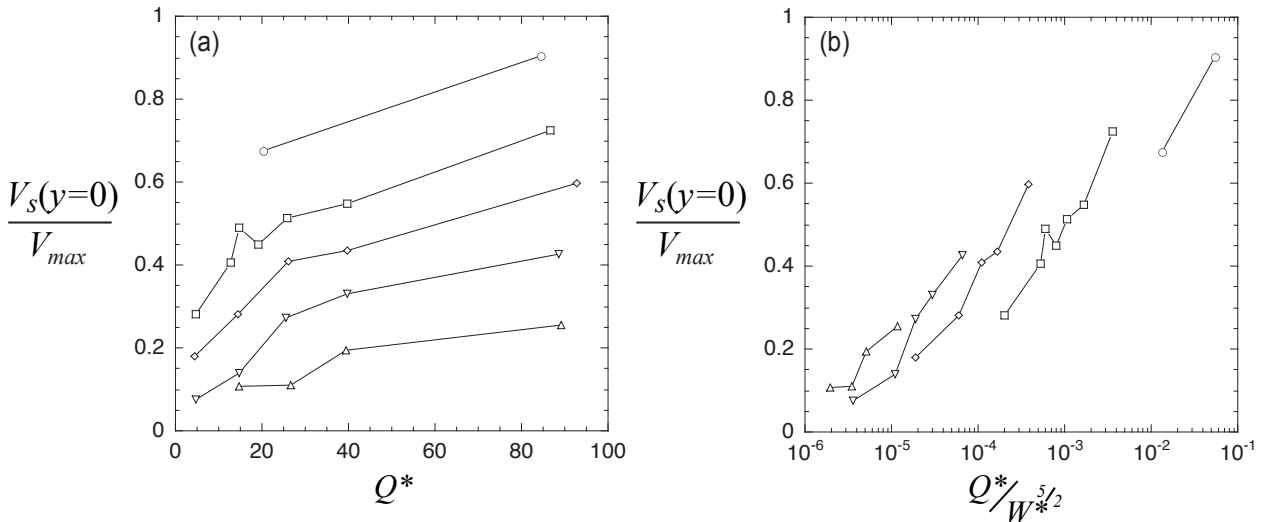


FIG. 3.14 – (a) Évolution du rapport entre la vitesse de glissement et la vitesse maximale au centre du canal. (b) Mêmes données que précédemment mais en utilisant la loi d'échelle. $W^* = 19(\circ), 28(+), 57(\square), 142(\diamond), 283(\triangle)$ et $570(\nabla)$.

cisaillement localisée proche des parois mais le milieu est au contraire cisailé de façon régulière. Nous remarquons aussi, qu'à largeur fixée, la courbure relative des profils de vitesse (courbure du profil de vitesse normé) diminue lorsque le débit augmente. En comparaison, des fluides newtoniens en écoulement de Poiseuille exhibent toujours un profil parabolique : la courbure relative est donc constante. Pour analyser cette tendance nous avons extrait, des profils de vitesse en surface, la vitesse de glissement à la paroi notée $V_s(y=0)$ et la vitesse maximale au centre notée V_{max} . Nous n'avons pas trouvé de courbes simples ajustant parfaitement les données expérimentales, nous reportons donc la vitesse minimale $V_s(y=0)$ trouvée par la PIV. Les figures 3.14 montrent l'évolution du rapport de la vitesse de glissement par la vitesse maximale pour différents débits et largeurs. Nous formulons les mêmes conclusions que précédemment : le rapport des vitesses est plus proche de 1 pour les canaux étroits et les forts débits. L'écoulement est donc moins homogène pour des faibles débits ou des grandes largeurs. Ces mesures limitent donc la portée du modèle actuel bidimensionnel.

3.9.3 Compatibilité avec le critère de Mohr-Coulomb

Nous avons examiné la compatibilité entre les équations que nous avons écrites pour la partie fluide et l'équilibre mécanique de la partie statique sous-jacente. Notamment, est-ce que la continuité des contraintes à l'interface entre les deux phases est cohérente avec la cohésion du tas ? Pour étudier la stabilité du milieu granulaire, nous avons exprimé la condition de rupture du matériau à l'aide de la méthode du cercle de Mohr. Sur une facette orientée par sa normale \vec{n} , la contrainte tangentielle τ et la contrainte normale déterminent un point du cercle (figure 3.15).

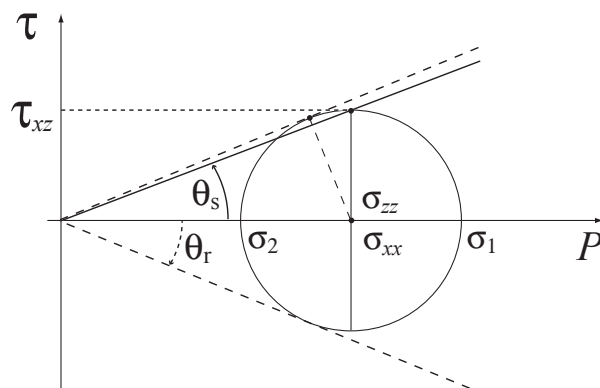


FIG. 3.15 – Cercle de Mohr montrant l'état des contraintes à la frontière liquide-solide. La définition du minimum de friction (pente de la droite continue) est donc légèrement différente de l'angle de friction interne (pente des pointillés).

En nous plaçant juste sous l'interface solide-liquide et en supposant que les contraintes sont continues, la pression reste isotrope donc $\sigma_{zz} = \sigma_{xx} = P(h)$. Nous sommes au centre du cercle de Mohr. Au niveau de l'interface, la pression P et la contrainte de cisaillement τ_{xz} sont reliés par $\tau_{xz} = \mu_s P$ où μ_s est la valeur seuil du coefficient de friction $\mu(I)$. Nous voyons que la droite en trait plein, passant par l'origine et le sommet du cercle, est sécante au cercle de Mohr. Nous en déduisons que si l'angle entre cette droite et l'axe des abscisses $\theta_s = \arctan(\mu_s)$ correspond

à l'angle de friction interne du matériau θ_r , alors le tas ne peut être stable selon le critère de Mohr-Coulomb : il existerait en effet plusieurs angles pour lesquels la contrainte tangentielle serait trop grande ($\tau/P > \tan(\theta_r)$) provoquant le cisaillement du tas. À la limite, nous pouvons supposer que la droite définie par l'angle de friction interne est tangente au cercle (traits tiretés). Nous obtenons géométriquement une relation entre les deux angles θ_s et θ_r : pour que la stabilité du tas statique selon le critère de Mohr-Coulomb et la rhéologie « $\mu(I)$ » soient compatibles, il faut que $\sin(\theta_r) \geq \tan(\theta_s)$.

Chapitre 4

Loi constitutive tensorielle pour les écoulements granulaires

4.1 Problématique

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la prise en compte des contraintes exercées par les parois permet de comprendre les propriétés des écoulements sur fond meuble. La rhéologie utilisée donne de très bons résultats pour décrire les grandeurs moyennes des écoulements unidirectionnels et uniformes, telles les variations de la vitesse au centre du canal, de l'inclinaison de la surface et de l'épaisseur typique de l'écoulement en fonction du débit moyen. Cependant nous avons vu que l'écoulement n'était plus bidimensionnel. Les mesures de vitesse en surface révèlent un profil de vitesse inhomogène en travers du canal que le modèle ne peut décrire correctement. Nous devons donc poursuivre le raisonnement pour aller au-delà de cette première approche 2D et proposer une description tridimensionnelle.

En effet, la plupart des applications industrielles de mélange, stockage ou conditionnement de matériaux granulaires fait intervenir des récipients de géométrie complexe. Les écoulements qui en résultent ne sont donc plus uniformes ni stationnaires. Les figures 4.1 illustrent quelques exemples d'écoulements non-uniformes. La géométrie de base peut être complexe et entraîner des écoulements tridimensionnels comme à la surface d'un tas conique (figure 4.1a). Les grains se répandent sur la surface du tas, le débit local diminue donc progressivement. L'écoulement peut parfois faire apparaître des inhomogénéités, voire se localiser sur une partie seulement du tas (Altshuler *et al.* 2003). Un autre exemple est représenté par les écoulements en tambour tournant (figure 4.1b). Tout en étant bidimensionnel et stationnaire, l'écoulement n'est plus uniforme. Au sommet les grains accélèrent et la couche fluide s'épaissit puis, après avoir dépassé le centre du tambour, ralentissent et sont réintégrés à la zone quasi-statique. De plus la surface ne reste pas plane mais se courbe, une bonne modélisation devra donc prendre en compte les deux composantes de la vitesse, ce qui n'est pas le cas du modèle précédent. Enfin un dernier exemple porte sur des instabilités qui peuvent se développer à partir d'un écoulement uniforme sur plan incliné (figure 4.1c). Une modélisation intégrée sur l'épaisseur permet de décrire les seuils d'instabilité (Forterre *et al.* 2003). La vitesse des grains dans ces ondes présente deux composantes (verticale et longitudinale), donc les variations de l'écoulement se font maintenant dans les deux directions. Une rhéologie tridimensionnelle permettrait d'affiner la description de ces ondes de surface.

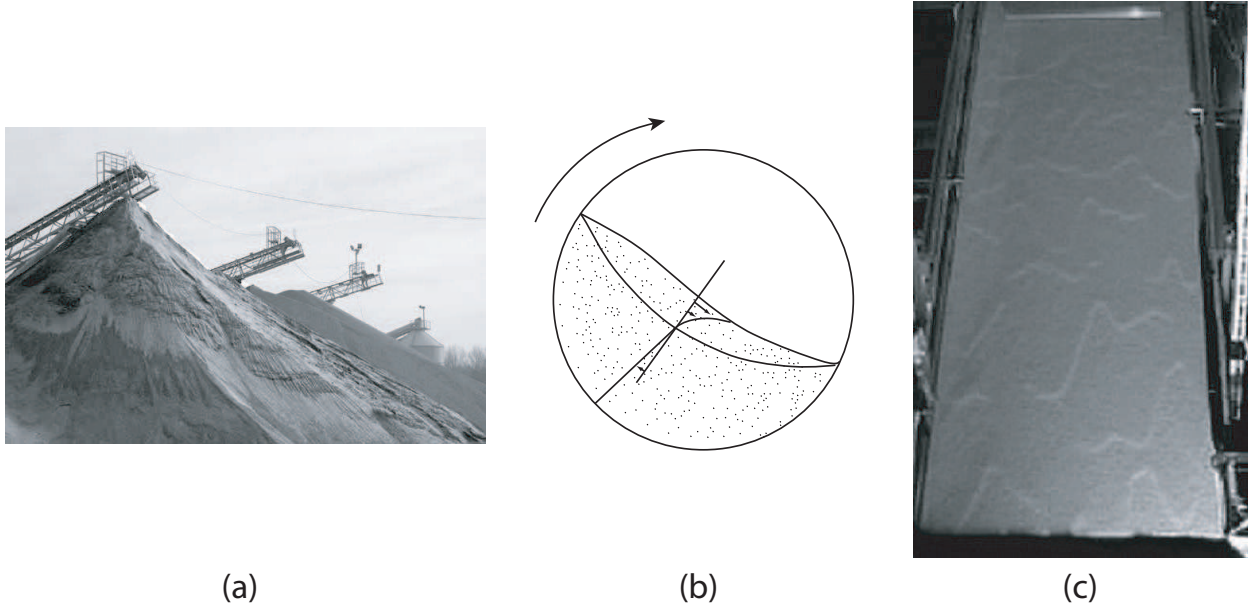


FIG. 4.1 – Exemples d’écoulements complexes : (a) Extraction de matériaux dans une gravière. (b) Écoulement dans un tambour tournant. (c) Ondes de surface, instabilité étudiée par Forterre et al. (2003) pour des écoulements sur plans fortement inclinés.

Comment généraliser à trois dimensions les résultats du chapitre précédent ? Devant le succès de la rhéologie bidimensionnelle « $\mu(I)$ », nous choisissons de l’étendre à trois dimensions.

Ce chapitre est consacré à la proposition d’une formulation de la rhéologie tridimensionnelle. Cette nouvelle description sera testée sur la configuration d’écoulements sur fond meuble. Les prédictions d’un modèle numérique seront confrontées aux résultats expérimentaux.

4.2 Extension de la rhéologie à 3D

Dans le cas d’un cisaillement plan, nous choisissons d’étendre les lois constitutives de la façon suivante. La contrainte tangentielle τ_{xz} (équation 3.1) peut se réécrire formellement comme suit :

$$\tau_{xz} = \frac{\mu(I)P}{|\dot{\gamma}_{xz}|} \dot{\gamma}_{xz} \quad (4.1)$$

où $|\dot{\gamma}_{xz}|$ est la valeur absolue du gradient de vitesse local. Cette écriture fait apparaître le produit du taux de cisaillement par une viscosité effective $\eta = \mu(I)P/|\dot{\gamma}_{xz}|$. Cette viscosité $\eta(I,P)$ possède des caractéristiques particulières. Premièrement elle est une fonction de la pression. La plupart des fluides non-newtoniens incompressibles présentent des relations complexes entre la contrainte et le taux de cisaillement, mais elles ne font que rarement intervenir la pression. Cette dépendance atypique provient de l’origine frictionnelle de la rhéologie. Deuxièmement, la viscosité diverge lorsque le cisaillement diminue. Cette divergence n’est pas répercutée sur la contrainte car elle est compensée par le produit du gradient de vitesse qui tend vers zéro. Cet aspect assure donc l’existence d’un seuil de contrainte pour que le matériau se déforme, nous gardons donc la condition

$\tau_{xz} > \mu_s P$ lorsque le milieu est cisailé.

Cette description en terme de viscosité effective est similaire à celle que l'on trouve pour la modélisation des fluides de Bingham ou Herschel-Bulkley¹. Afin d'étendre cette écriture scalaire, nous devons choisir une formulation tensorielle. Nous nous inspirons du passage à trois dimensions traditionnellement fait pour la modélisation des fluides de Bingham (Balmforth *et al.* 2004). En suivant cette démarche nous proposons la modélisation suivante. Premièrement, le milieu granulaire est modélisé par un fluide incompressible de densité ρ . Nous négligeons ainsi toute variation de la fraction volumique ϕ . Deuxièmement, le tenseur des contraintes internes est décomposé en une partie symétrique et une partie déviatorique :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}. \quad (4.2)$$

Nous supposons toujours que, dans la partie fluide de l'écoulement, la pression P est isotrope et nous proposons d'écrire le déviateur des contraintes sous cette forme :

$$\tau_{ij} = \frac{\mu(I)P}{|\dot{\gamma}|} \dot{\gamma}_{ij}, \quad (4.3)$$

où le second invariant du tenseur est donné par l'équation suivante :

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}}. \quad (4.4)$$

Dans cette rhéologie, $\dot{\gamma}_{ij}$ représente le tenseur du taux de déformation. De la même façon que précédemment, nous pouvons faire apparaître une viscosité effective η_{eff} qui possède des propriétés identiques :

$$\tau_{ij} = \eta_{eff}(I,P) \dot{\gamma}_{ij} \quad \text{avec} \quad \eta_{eff}(I,P) = \frac{\mu(I)P}{|\dot{\gamma}|}, \quad (4.5)$$

Le milieu granulaire est alors vu comme un fluide non-newtonien.

L'existence d'un seuil d'écoulement est maintenue : en effet, en prenant le second invariant de l'équation 4.3, la norme du tenseur des contraintes est égale à $\mu(I)P$ lorsque le matériau s'écoule. Donc elle est bornée par la valeur inférieure du coefficient de friction :

$$|\tau| \geq \mu_s P \quad \text{avec} \quad |\tau| = \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij}}. \quad (4.6)$$

Si la contrainte interne globale est inférieure à la valeur seuil alors le matériau n'est pas cisailé. La contrainte au seuil est fonction de la pression locale. Nous retrouvons de nouveau cette dépendance en pression qui est différent des fluides à seuil traditionnels (la contrainte seuil est une constante). Ce critère de rupture correspond à une généralisation du critère de Mohr-Coulomb à une dimension, nous aboutissons donc naturellement sur le critère de Drücker-Prager.

Dans le cadre de ce modèle, nous comprenons que des effets subtils peuvent apparaître. En effet, supposons qu'il existe un écoulement dont le cisaillement principal est vertical dû à une forte contrainte. La valeur de la viscosité sera dominée par ce terme. De ce fait, dans la direction

1. Bingham : $\tau = \tau_c + k\dot{\gamma}$, Herschel-Bulkley : $\tau = \tau_c + k\dot{\gamma}^n$, où τ_c est la contrainte seuil

transverse, même une faible contrainte, peut-être inférieure à la valeur $\mu_s P$, entraîne un cisaillement orthogonal. Si le seuil global (équation 4.6) est dépassé localement, alors le milieu peut être déformé dans toutes les directions même pour de faibles contraintes.

Nous pouvons donc considérer que le fluide équivalent à l'écoulement granulaire est un fluide non-newtonien à seuil particulier. Nous allons utiliser cette description hydrodynamique pour modéliser les écoulements granulaires sur fond meuble. La première étape sera de créer un code numérique capable d'intégrer ces équations.

4.3 Application aux écoulements sur tas

Afin de vérifier la pertinence de cette généralisation à trois dimensions, nous allons la tester sur les écoulements granulaires sur fond meuble étudiés dans le chapitre précédent : un écoulement granulaire uniforme à un angle déterminé θ et confiné entre deux parois. Nous espérons ainsi capturer les effets tridimensionnels observés et non prédits précédemment : les cisaillements transverses et les variations transverses d'épaisseur.

4.3.1 Mise en équations et lois d'échelle

L'équation de Cauchy pour un élément de matériau granulaire de densité moyenne ρ s'écrit :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \quad (4.7)$$

Considérons un écoulement uniforme, stationnaire et dirigé selon l'axe x : la vitesse ne dépend que des coordonnées y et z . Le milieu granulaire, semi-infini dans les directions x et z , est confiné entre deux parois verticales (figure 4.2).

Pour un tel écoulement, l'équation de la conservation de la masse ($\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$) est automatiquement vérifiée. Dans ces conditions, le tenseur des contraintes pour cette configuration se réduit à la matrice ci-dessous :

$$\sigma = \begin{pmatrix} -P & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -P & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & -P \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Les termes τ_{xx} et τ_{yz} sont nuls ici car il n'y a pas de gradient de vitesse selon x et les vitesses selon y et z sont nulles (d'après l'équation 4.5). Une fois l'équation de Cauchy projetée sur les deux axes, les équations du mouvement à résoudre pour trouver l'état stationnaire sont les suivantes :

$$0 = \rho g \sin(\theta) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (4.9)$$

et

$$0 = \rho g \cos(\theta) - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (4.10)$$

où τ_{ij} est défini par l'équation 4.3.

Nous définissons maintenant les conditions aux limites. À la surface libre les contraintes normales et tangentielles s'annulent : en $z = 0$, $\tau_{xz}(y,0,t) = 0$ et $P(y,0,t) = 0$. Au fond, la vitesse

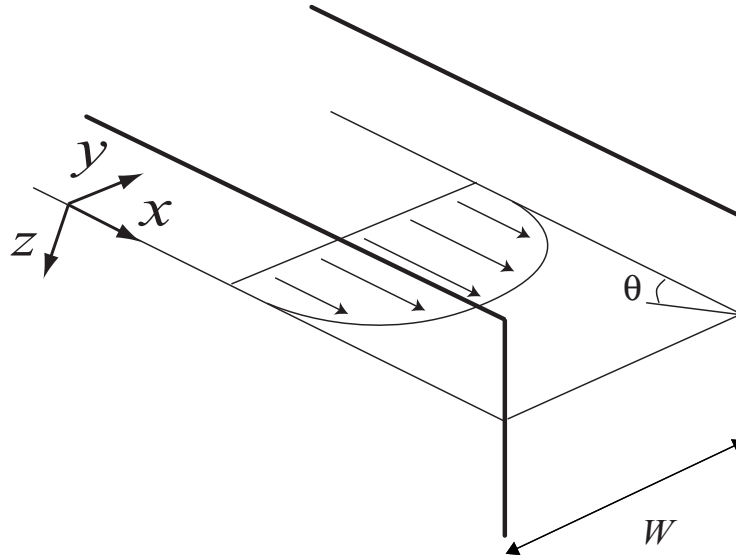


FIG. 4.2 – Modélisation 3D de l'écoulement granulaire sur fond meuble.

s'annule : $u(y, z \rightarrow \infty, t) = 0$. Il reste à modéliser les conditions aux parois. Dans la suite, nous utiliserons deux types de conditions aux limites. La première correspond au cas où les parois sont lisses. L'interaction entre l'écoulement et la paroi sera du type friction solide de Coulomb : en $y = 0$ et W , $\tau_{xy}(z, t) = \mu_w P$. La seconde condition aux parois que nous utiliserons sera une condition de non-glissement ($u(z, t) = 0$) lorsque les parois seront rugueuses.

De l'équation 4.10, nous déduisons immédiatement que la pression est hydrostatique :

$$P(y, z, t) = \rho g z \cos \theta.$$

Pour s'affranchir de la largeur du canal dans les équations précédentes, nous pouvons définir de nouvelles variables : $\tilde{y} = y/W, \tilde{z} = z/W$. La pression s'écrit alors $P = \rho_s \phi g W \tilde{z} \cos \theta$, et l'équation du mouvement 4.9 devient :

$$0 = \tan \theta + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\frac{\mu(I) \tilde{z}}{|\dot{\gamma}|} \dot{\gamma}_{ij} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\mu(I) \tilde{z}}{|\dot{\gamma}|} \dot{\gamma}_{ij} \right) \quad (4.11)$$

avec

$$I = \frac{|\dot{\gamma}| d}{\sqrt{\phi g W \tilde{z} \cos \theta}}.$$

Les conditions aux limites deviennent :

- aux parois en $\tilde{y} = 0$ et 1 : $\frac{\mu(I) \tilde{z}}{|\dot{\gamma}|} \dot{\gamma}_{ij} = \mu_w \tilde{z}$ ou $u = 0$ selon l'état de surface des parois.
- à la surface en $\tilde{z} = 0$: $\frac{\mu(I) \tilde{z}}{|\dot{\gamma}|} \dot{\gamma}_{ij} = 0$.
- au fond en $\tilde{z} \rightarrow \infty$: $u = 0$.

Nous voyons que la largeur du canal peut être éliminée des équations si le tenseur de déformation est redéfini comme suit : $\tilde{\dot{\gamma}}_{ij} = \dot{\gamma}_{ij} d / g^{1/2} W^{1/2}$. Par des intégrations successives, la vitesse adimensionnée est donnée par $\tilde{u} = u d / g^{1/2} W^{3/2}$ et le débit par unité de largeur adimensionné par

$\tilde{Q} = Qd/g^{1/2}W^{5/2}$. Nous nous apercevons que, dans le cadre de ce modèle, les lois d'échelle trouvées dans la configuration bidimensionnelle sont toujours valides pour les écoulements 3D.

Les équations sont enfin réécrites en adimensionnant les variables à l'aide de g l'intensité de la gravité, d le diamètre des particules et ρ la densité moyenne :

$$x^* = x/d, \quad y^* = y/d, \quad z^* = z/d, \quad V^* = V/\sqrt{dg}, \quad Q^* = Q/(d\sqrt{dg}),$$

$$P^* = P/(\rho dg), \quad \tau_{ij}^* = \tau_{ij}/(\rho dg), \quad \dot{\gamma}_{ij}^* = \dot{\gamma}_{ij}/\sqrt{d/g}.$$

avec $\tau_{ij}^* = \mu(I)P^*\dot{\gamma}_{ij}^*/|\dot{\gamma}^*|$ où $I = |\dot{\gamma}^*|/\sqrt{\phi P^*}$.

4.3.2 Résolution numérique

Afin de calculer l'écoulement dans le canal, il suffit de résoudre l'équation 4.10 sur une section du canal (figure 4.3a). Autant à deux dimensions, nous pouvions intégrer analytiquement l'équation pour obtenir la forme du profil de vitesse, maintenant nous ne le pouvons plus. Pour trouver l'écoulement stationnaire, nous résoudrons donc numériquement l'évolution temporelle du système en le laissant évoluer jusqu'à l'équilibre. L'équation (en variables adimensionnées) décrivant l'évolution de la couche fluide uniforme est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sin \theta + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}. \quad (4.12)$$

Compte tenu de la géométrie imposée (la surface libre est plane et les parois sont verticales) l'écoulement sera donc calculé sur une grille rectangulaire régulière. Les équations sont discrétisées sur cette grille et les variables sont évaluées au niveau des points de la figure 4.3b.

Les vitesses $U^{k,l}$ sont évaluées au centre des cellules et les gradients de vitesse sur les bords par différences finies : $\dot{\gamma}_{xy}^{kl} = \frac{U^{k,l} - U^{k,l-1}}{dy}$ et $\dot{\gamma}_{xz}^{kl} = \frac{U^{k,l} - U^{k-1,l}}{dz}$, où dz et dy sont les dimensions de la cellule exprimées en diamètres de billes. La pression $P^{k,l} = \phi k dz$ correspond à la pression entre les cellules (k,l) et $(k+1,l)$ due au poids de toutes les cellules au-dessus. Nous utiliserons cette même valeur sur les bords verticaux de la cellule. Cette approximation influe très peu sur les résultats et permet de calculer plus rapidement par la suite. Les contraintes tangentielles entre les cellules sont calculées sur les bords des cellules à partir des gradients de vitesse $\dot{\gamma}_{ij}^{kl}$. Nous avons besoin pour cela de calculer la norme du taux de déformation $|\dot{\gamma}|^{k,l}$. Celle-ci fait intervenir les deux composantes du taux de cisaillement. Afin de l'évaluer, nous choisissons une définition commune pour le calcul des contraintes verticales et horizontales : les contraintes τ_{xy}^{kl} et $\tau_{xz}^{k+1,l}$ utilisent la définition suivante pour le taux de déformation :

$$|\dot{\gamma}|^{k,l} = \sqrt{\left(\dot{\gamma}_{xy}^{k,l}\right)^2 + \left(\dot{\gamma}_{xz}^{k+1,l}\right)^2}. \quad (4.13)$$

La viscosité est calculée aux mêmes endroits par la formule :

$$\eta_{eff}^{k,l} = \mu(I)P^{k,l}/|\dot{\gamma}|^{k,l}. \quad (4.14)$$

Nous aboutissons donc aux relations suivantes pour les contraintes verticales et horizontales :

$$\tau_{xy}^{k,l}(t) = \dot{\gamma}_{xy}^{k,l}(t)\eta_{eff}^{k,l}(t) \quad \text{et} \quad \tau_{xz}^{k+1,l}(t) = \dot{\gamma}_{xz}^{k+1,l}(t)\eta_{eff}^{k,l}(t). \quad (4.15)$$

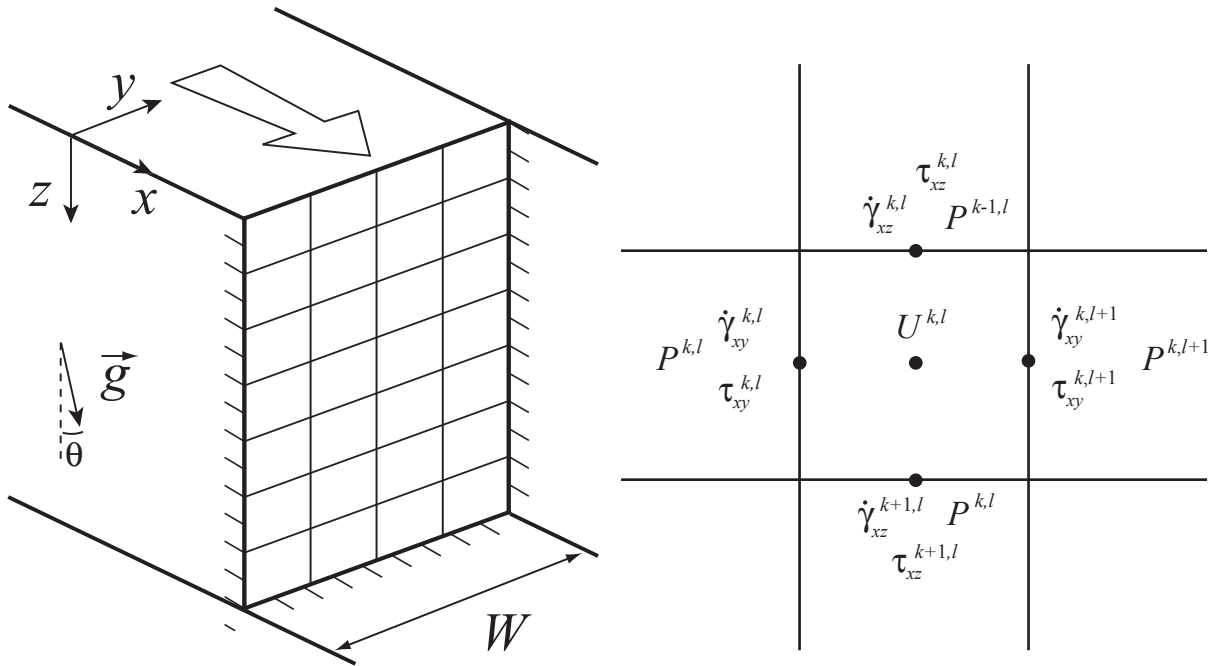


FIG. 4.3 – (a) Schéma de la position de la grille de calcul par rapport au canal. (b) Illustration de la position des paramètres calculés sur cette grille.

Il est à noter que le choix de cette écriture pour la viscosité implique une dissymétrie gauche-droite et haut-bas. Ce choix nous permet de gagner un temps précieux dans les simulations. Nous avons vérifié que des définitions différentes conduisent aux mêmes résultats dans la limite de pas d'espace très petits et que l'erreur commise est du même ordre que celle introduite par la discrétisation.

Les conditions aux limites discrétisées sur la grille sont les suivantes. À la surface libre, nous aurons $\tau_{xz}^{1,l} = 0$. Sur les côtés, selon les conditions que nous voulons simuler, nous imposons soit $\tau_{xy}^{k,bord} = \mu_w P^{k,bord}$ (parois lisses), soit $U^{k,bord} = 0$ (parois rugueuses). Enfin sur le fond, nous imposons $U^{fond,l} = 0$. En utilisant la symétrie plane de l'écoulement, nous nous contenterons de simuler la moitié du canal seulement en imposant une contrainte tangentielle nulle au niveau du plan médian : $\tau_{xy}^{k,1} = 0$.

Pour l'évolution temporelle, nous utilisons un schéma d'Euler explicite, choisi pour sa simplicité de mise en oeuvre. Nous reviendrons sur ce point dans la section suivante. L'équation du mouvement pour la cellule (k,l) , en différences finies, est donc :

$$\frac{U^{k,l}(t + \Delta t) - U^{k,l}(t)}{\Delta t} = \sin(\theta) + \frac{\tau_{xy}^{k,l+1}(t) - \tau_{xy}^{k,l}(t)}{dy} + \frac{\tau_{xz}^{k+1,l}(t) - \tau_{xz}^{k,l}(t)}{dz} \quad (4.16)$$

Enfin nous devons choisir les conditions initiales des simulations numériques : les profils de vitesse initiaux peuvent être quelconques mais nous évitons qu'il y ait un gradient nul sur la grille, cela pouvant poser des problèmes au code.

4.3.3 Validation de la méthode

Convergence numérique

Nous avons testé la convergence des états stationnaires simulés en fonction du nombre de points contenus dans la grille. La figure 4.4a montre l'écart relatif entre la valeur de la vitesse maximale dans le cas d'une simulation 2D et la valeur analytique, en fonction du nombre de points de calculs sur la verticale. Nous voyons que dû à la méthode des différences finies, avec une centaine de points, la valeur de la vitesse théorique est approchée à 4% par les simulations. Nous avons aussi

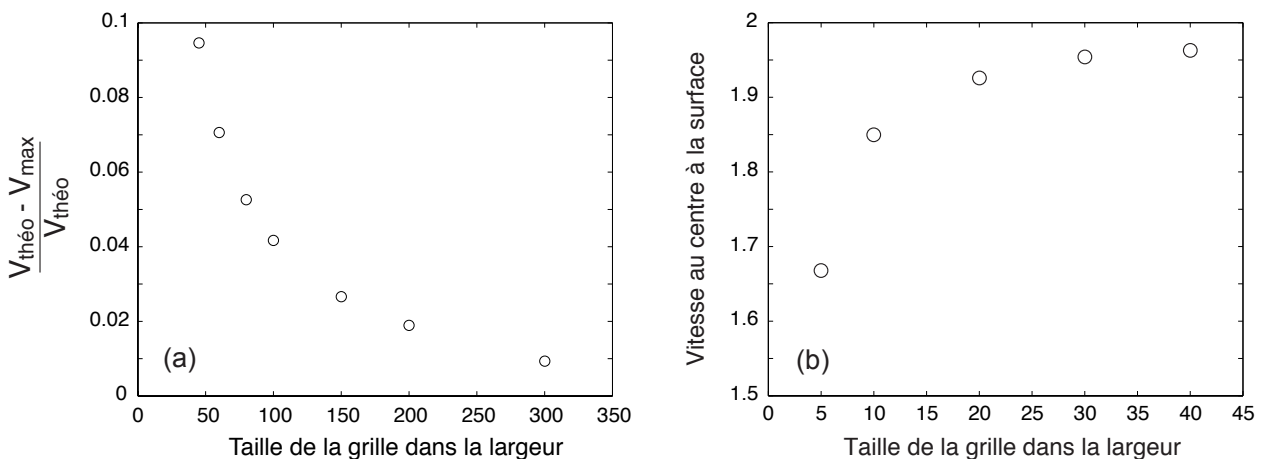


FIG. 4.4 – Convergence des simulations par diminution du pas de la grille. (a) Pour des simulations 2D, écarts relatifs entre la vitesse en surface et la valeur théorique en fonction du nombre de cellules. (b) Pour des simulations 3D ($W/d = 120$, $\theta = 22.75^\circ$), convergence de la vitesse maximale en $y/W = 1/2$ en fonction du nombre de points dans la largeur du canal, le pas vertical restant constant.

testé la convergence de la vitesse lorsque nous augmentons la résolution dans la direction transverse de l'écoulement. En fixant le nombre point dans la direction verticale, nous avons simulé un écoulement dans un canal large $W/d = 120$ en faisant varier le nombre de cellules de calcul dans la largeur de 5 à 40. La valeur de la vitesse maximale donnée par les simulations semble saturer. Le nombre de 40 points sera retenu. Compte tenu de la capacité de l'ordinateur, pour simuler dans un temps raisonnable les écoulements une grille de 71x40 points sera utilisée dans la suite pour le demi canal.

Gestion de la zone statique.

Dans nos simulations, nous initialisons l'écoulement avec un profil de vitesse $U(y,z)$ très faible dans lequel tout coule jusqu'au fond. Or dans l'état final, l'écoulement est divisé en deux zones : seule une couche superficielle est en mouvement, le reste étant à l'arrêt. La zone supérieure va donc accélérer alors que dans la zone inférieure, la vitesse décroîtra pour atteindre une vitesse nulle. Arriver à arrêter un milieu géré par des forces de friction s'avère délicat. Nous pouvons le comprendre sur l'exemple d'un patin frottant lancé à une vitesse initiale V_0 .

Pour cela considérons un patin glissant sur un plan incliné dont la tangente de l'angle d'inclinaison est inférieure au coefficient de friction patin-plan ($\tan\theta < \mu_s$). Le patin initialement lancé à la vitesse V_0 va s'arrêter et il est facile de prévoir la distance parcourue avant son immobilisation. Nous pouvons traiter ce problème en utilisant le schéma numérique précédent : la force exercée par le plan vaut $\vec{F} = -\mu_s \vec{V}/|V|$ et la vitesse est incrémentée par la méthode d'Euler : $V(t + \Delta t) = V(t) + \Delta t(F/m + g \cos\theta)$. La figure 4.5 illustre le mouvement intégré numériquement du patin. Au pas de temps suivant l'instant de l'arrêt théorique, la vitesse du patin devient négative,

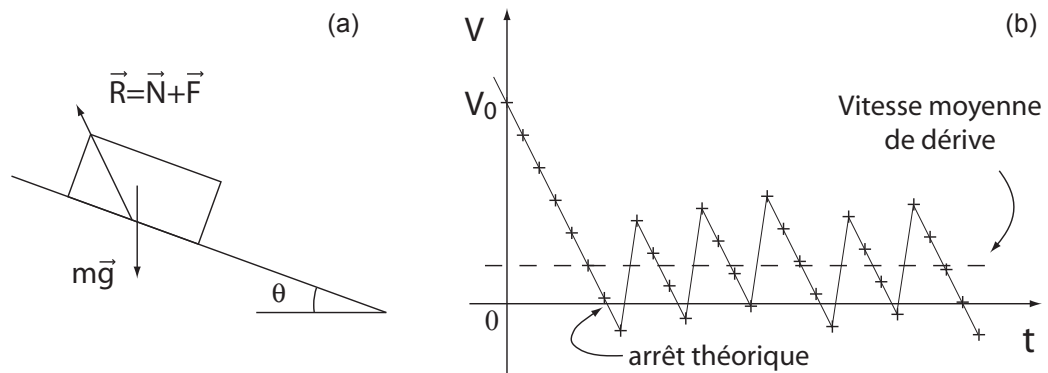


FIG. 4.5 – Exemple numérique de l'arrêt par frottement. (a) Le problème du patin frottant. (b) Évolution de la vitesse en fonction du temps. À chaque pas de temps (+), la vitesse est incrémentée selon le signe de la force totale.

la force de frottement s'inverse et propulse le patin plus bas avec une vitesse positive et le cycle de freinage recommence. Le saut de vitesse est proportionnel à Δt . Il en résulte une vitesse moyenne de dérive qui est proportionnelle à Δt . Plus le pas de temps sera faible, plus le mouvement simulé sera proche de l'arrêt. Une façon rigoureuse de traiter ce problème serait de tester le moment où la vitesse change de signe et de fixer alors sa valeur à 0.

Dans le cas qui nous intéresse, la zone statique est constituée d'un empilement de cellules en contacts frottants. Cet effet va donc être amplifié. À trois dimensions, ce défaut est encore plus contraignant. Que devient alors la partie « statique » ? La figure 4.6 montre plusieurs simulations bidimensionnelles de profils de vitesse pour des pas de temps d'intégration différents. La limite de la zone statique devrait correspondre environ à $z/d = 13$. Nous observons que les simulations aboutissent à une vitesse moyenne non-nulle dans la partie « solide ». Elle correspond à un fluage d'origine numérique. Notamment, la vitesse de fluage semble dépendre linéairement du pas de temps d'intégration du code. Sur la figure 4.6, le fluage le plus grand est obtenu pour $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4} \sqrt{d/g}$, puis $5 \cdot 10^{-5}$ et $5 \cdot 10^{-6}$.

Comme nous ne traitons pas la zone statique différemment du reste de l'écoulement, pour obtenir des profils de vitesse convenables, il est donc nécessaire de travailler avec des pas de temps très faibles. De plus, Δt doit diminuer quand on augmente le nombre de cellules : Δt vaut typiquement entre 10^{-5} et $10^{-6} \sqrt{d/g}$. Ceci nous mène à des simulations de 10^7 à 10^8 pas de temps. Les simulations les plus longues dureront jusqu'à une semaine.

Un dernier point concernant la technique de simulation des équations différentielles mérite

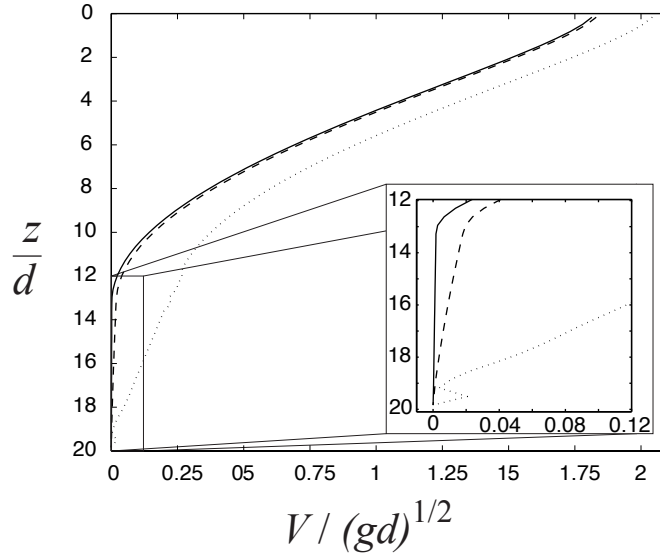


FIG. 4.6 – Profils de vitesse 2D obtenus avec des pas de temps d'intégration différents : $\Delta t / \sqrt{d/g} = 5.10^{-4}$ (\dots), 5.10^{-5} ($---$) et 5.10^{-6} ($-$) (pour $\theta = 27^\circ$, $W/d = 19$). L'interface entre les phases fluide et solide se situe vers $z/d = 13$. L'encart montre un agrandissement de la zone de fluage pour $z/d > 13$.

d'être éclairci. La méthode d'intégration temporelle d'Euler est connue pour son manque de précision. D'autres méthodes lui sont souvent préférées : les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 ou 4 par exemple. Nous avons testé la pertinence de l'utilisation de l'une ou l'autre dans le cas de l'arrêt d'une colonne de patins sur un plan incliné. La figure 4.7 montre l'évolution temporelle de la vitesse de chaque patin avec les deux méthodes pour un pas de temps identique. Contrairement à nos attentes, la méthode d'Euler induit une vitesse de dérive plus petite que les méthodes de Runge-Kutta. Nous avons donc choisi de travailler avec la première méthode qui a aussi l'avantage d'être 2 à 4 fois plus rapide, en essayant de réduire au maximum le nombre de cellules dans la partie statique.

Après quelques tentatives infructueuses, nous avons donc décidé de ne rien faire de particulier pour gérer la zone statique. Malgré le fluage, nous pouvons définir la zone statique en considérant un seuil sur la valeur du coefficient de friction qui est plus précise qu'un seuil sur la valeur de la vitesse.

4.3.4 Exemples de simulations numériques

Nous avons tout d'abord testé le code sans effets de bords ($\mu_w = 0$). Le profil de vitesse doit être bidimensionnel : l'écoulement est invariant selon y . De plus, dans ces conditions, l'écoulement atteint le fond fixe (il n'y a pas de zone statique). Le résultat de la simulation numérique a été comparé au profil de Bagnold théoriquement attendu. Comme le montre la figure 4.8, un accord très satisfaisant est obtenu entre la simulation (la grille grise) et le profil de Bagnold (la ligne noire).

Si maintenant nous remettons la friction sur les parois, le profil de vitesse devient tridimen-

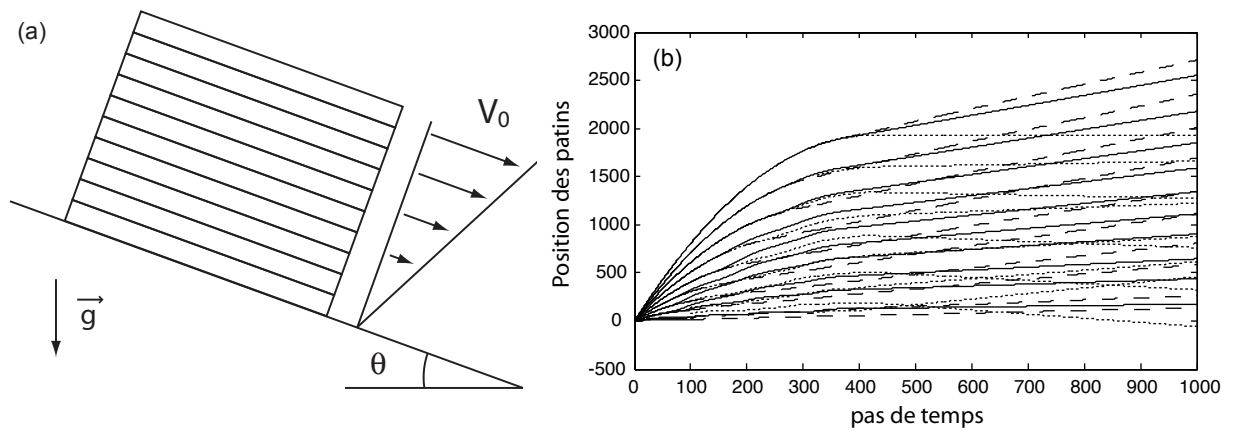


FIG. 4.7 – Évolution temporelle d'une colonne de 10 patins (a) lancés avec des vitesses différentes. (b) La position de chaque patin est marquée par une ligne. Les lignes continues représentent l'intégration par la méthode d'Euler, les lignes pointillées celle par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 et les lignes tiretées par un schéma de Runge Kutta d'ordre 4. La pente finale des droites montre la vitesse de dérive de chaque patin.

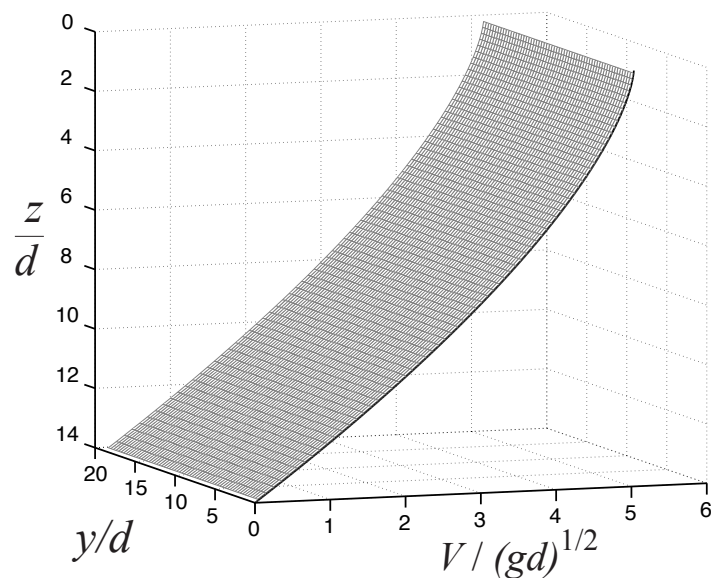


FIG. 4.8 – Écoulement stationnaire simulé en l'absence de friction sur les parois, l'écoulement est bien bidimensionnel ($\theta = 26.1^\circ$, $W = 19d$). La courbe en trait noir épais représente le profil théorique de Bagnold.

sionnel (figure 4.9). Nous observons premièrement que la vitesse tend vers zéro avant le fond de la grille. Il existe donc une zone statique sous la couche en mouvement. Celle-ci s'étend d'un bord à l'autre, mais n'est pas uniforme : la profondeur est plus importante au centre que contre les parois. Deuxièmement, le profil de vitesse est cisailé dans les deux directions. Ce modèle est donc peut-être apte à décrire les variations transverses observées dans les canaux pour les écoulements granulaires stationnaires.

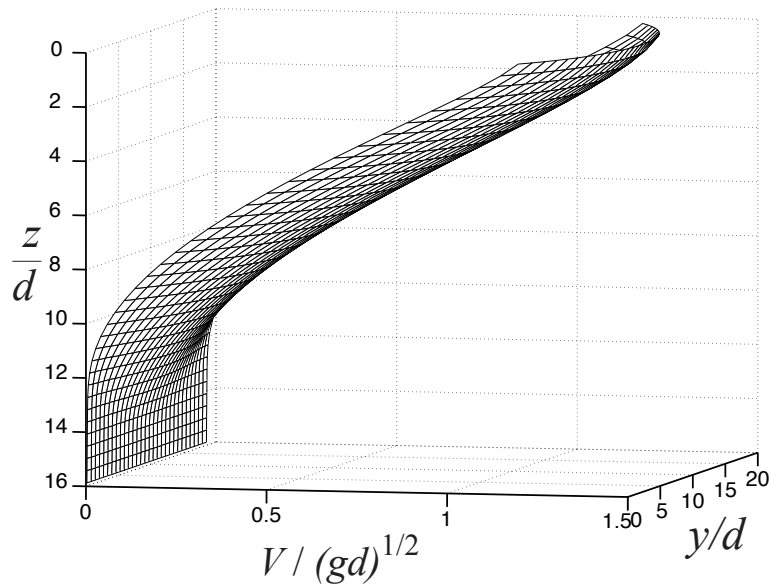


FIG. 4.9 – Exemple d'écoulement stationnaire simulé en présence de frottement sur les parois ($\mu_w = \tan 10.4^\circ$), l'écoulement est tridimensionnel ($\theta = 26^\circ$, $W = 19d$). Seuls 1/4 des points de la grille ont été représentés pour plus de clarté.

Un exemple typique de simulation numérique est montré sur les figures 4.10(a,b,c,d). Nous avons tracé les valeurs des différentes fonctions incluses dans la rhéologie sur une section du canal pour un écoulement à un angle donné. Le profil de vitesse est cisailé dans les deux directions (figure 4.10a). La viscosité correspondante est tracée sur la figure 4.10b avec une échelle logarithmique. La divergence est visible lorsque le cisaillement diminue. Cependant elle reste finie par la méthode de calcul. La démarcation entre les deux parties de l'écoulement n'étant pas très marquée, nous utiliserons les valeurs du coefficient de friction pour déterminer l'épaisseur de la couche fluide (figure 4.10c). En effet, lorsque l'écoulement est très peu cisailé, la valeur de μ tend vers la valeur minimale μ_s . Enfin, le paramètre inertiel I (figure 4.10d) montre que l'écoulement est plus cisailé proche de la surface et des bords. Même dans ce cas, les valeurs de I sont faibles et nous restons bien dans le régime d'écoulement dense. Les valeurs maximales de I explorées sont de l'ordre de 5 pour les profils les plus cisailés.

Finalement nous pouvons simuler différentes configurations d'écoulements en jouant sur l'inclinaison θ et la largeur W .

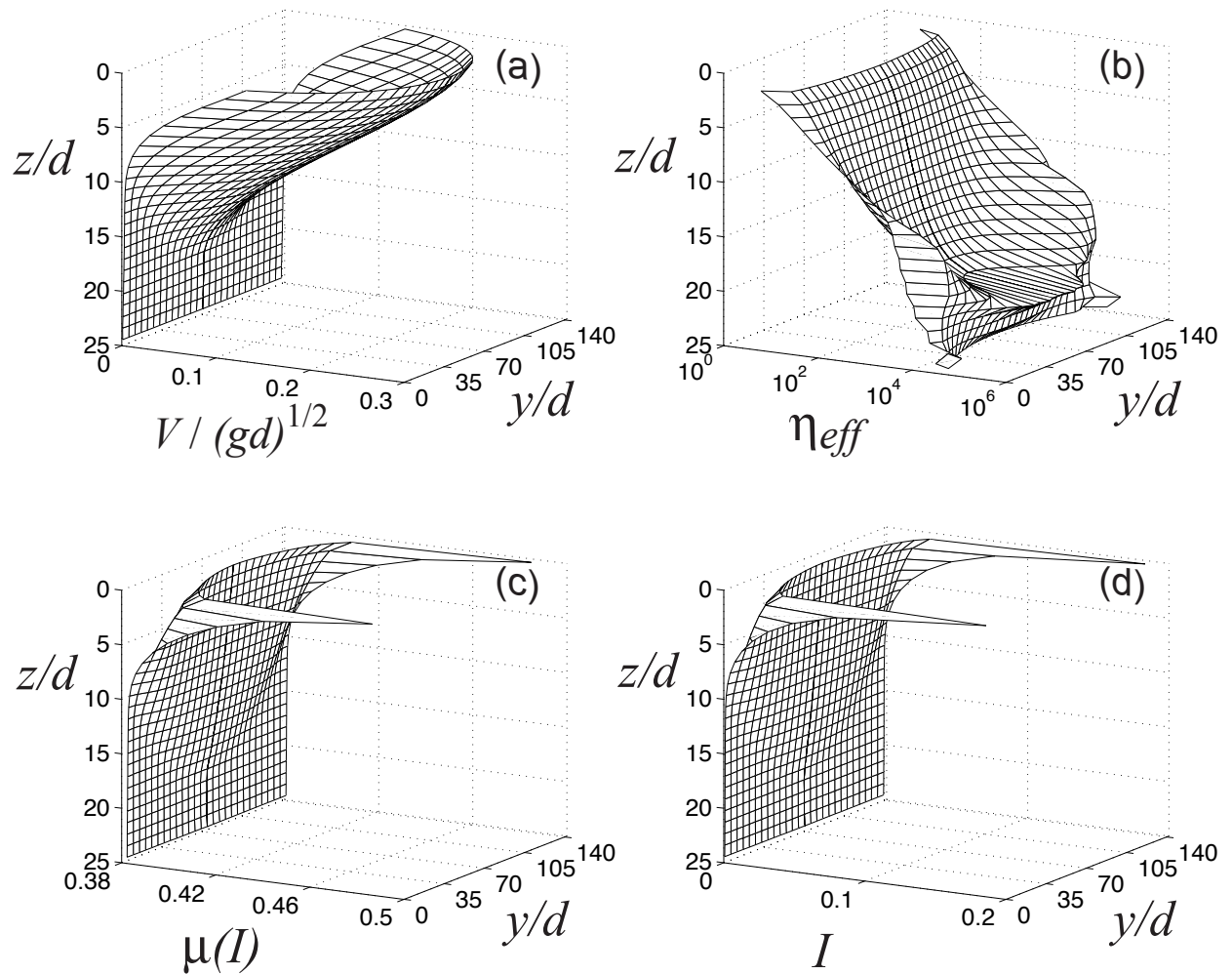


FIG. 4.10 – (a) Profil de vitesse pour $\theta = 21.5^\circ$, $W/d = 142$. (b) Viscosité effective η_{eff} calculée à partir du profil de vitesse. L'échelle logarithmique montre la divergence de la viscosité dans la zone statique. (c) Valeur du coefficient de friction $\mu(I)$ intervenant dans la définition de la rhéologie. (d) Valeurs explorées par le paramètre inertiel I sur la section du canal. Les faibles valeurs rencontrées illustrent le fait que l'écoulement est dense.

4.4 Résultats pour les parois lisses: comparaisons avec les expériences

Nous possédons maintenant un outil qui nous permet de simuler les écoulements granulaires uniformes sur tas. Nous avons donc cherché à tester ce modèle en comparant les profils de vitesse obtenus expérimentalement aux prédictions des simulations numériques. Dans les expériences mentionnées au chapitre précédent, une fois la largeur du canal W fixée, le paramètre de contrôle de l'écoulement est le débit puis nous mesurons l'inclinaison du tas dans le régime stationnaire. En revanche, dans les simulations nous contrôlons l'angle de l'écoulement et calculons *a posteriori* le débit par intégration du profil de vitesse sur la grille. Ainsi pour comparer quantitativement les expériences et les simulations numériques nous choisissons d'adapter l'angle de l'écoulement dans les simulations pour approcher la valeur du débit expérimental.

Nous avons comparé les profils de vitesse en surface et à la paroi, ainsi que l'évolution de l'épaisseur de la zone fluide en travers du canal. Les figures 4.11 représentent les comparaisons entre les propriétés des écoulements expérimentaux (les symboles) et celles des écoulements simulés (les lignes) pour le canal de 7.5 cm ($W/d = 142$).

Sur la première figure (4.11*a*), nous remarquons tout d'abord que l'ordre de grandeur des vitesses est le bon. De plus la forme des profils numériques est similaire à celle des profils expérimentaux : la vitesse est plus importante au centre du canal que sur les bords. Cependant nous pouvons noter que les simulations ne reproduisent pas une courbure aussi prononcée que dans les expériences. De ce fait, l'écoulement au centre du canal est un peu plus lent et la vitesse de glissement plus grande que dans les expérimentations. La figure 4.11*b* reproduit certains profils de vitesse selon la profondeur au niveau des parois. Ils exhibent des portions quasi-linéaires proche de la surface qui sont assez bien reproduites par les simulations. Les mêmes profils tracés en échelle logarithmique sur la figure 4.11*d* montrent la transition vers le régime rampant décrit par Komatsu *et al.* (2001) dans la zone quasi-statique. Les profils de vitesse numériques devraient tendre vers zéro au niveau de l'interface, mais montrent le fluage numérique décrit dans la section précédente. Nous observons néanmoins que la délimitation entre les régimes fluide et statique intervient aux mêmes profondeurs. Afin de caractériser la forme de cette interface en travers du canal, nous avons mesuré en plusieurs positions l'épaisseur de la couche mobile par la méthode du noir de fumée. Ces données sont représentées sur la figure 4.11*c*. Nous retrouvons le fait que l'épaisseur augmente avec le débit et qu'elle n'est pas homogène sur une section du canal. Les simulations indiquent systématiquement une épaisseur plus importante. Cependant l'évolution de la forme semble similaire, l'interface est plus courbée pour de faibles débits.

Dans le but de comparer plus en avant les propriétés des écoulements simulés, nous avons cherché à caractériser la forme des profils de vitesse en surface. En effet, ces profils de vitesse présentent des cisaillements transverses qui peuvent être plus ou moins importants selon les valeurs du débit et de la largeur. Afin d'apprécier l'évolution de la forme des profils de vitesse, nous comparons les variations du rapport des vitesses de glissement (à la paroi) et des vitesses maximales (au centre du canal). Ce rapport est tracé pour les simulations et les expériences sur la figure 4.12.

Cette mesure confirme que plus le canal est large, plus le profil expérimental est courbé. Nous remarquons de plus que plus le débit augmente, plus la vitesse est homogène sur la largeur. Les

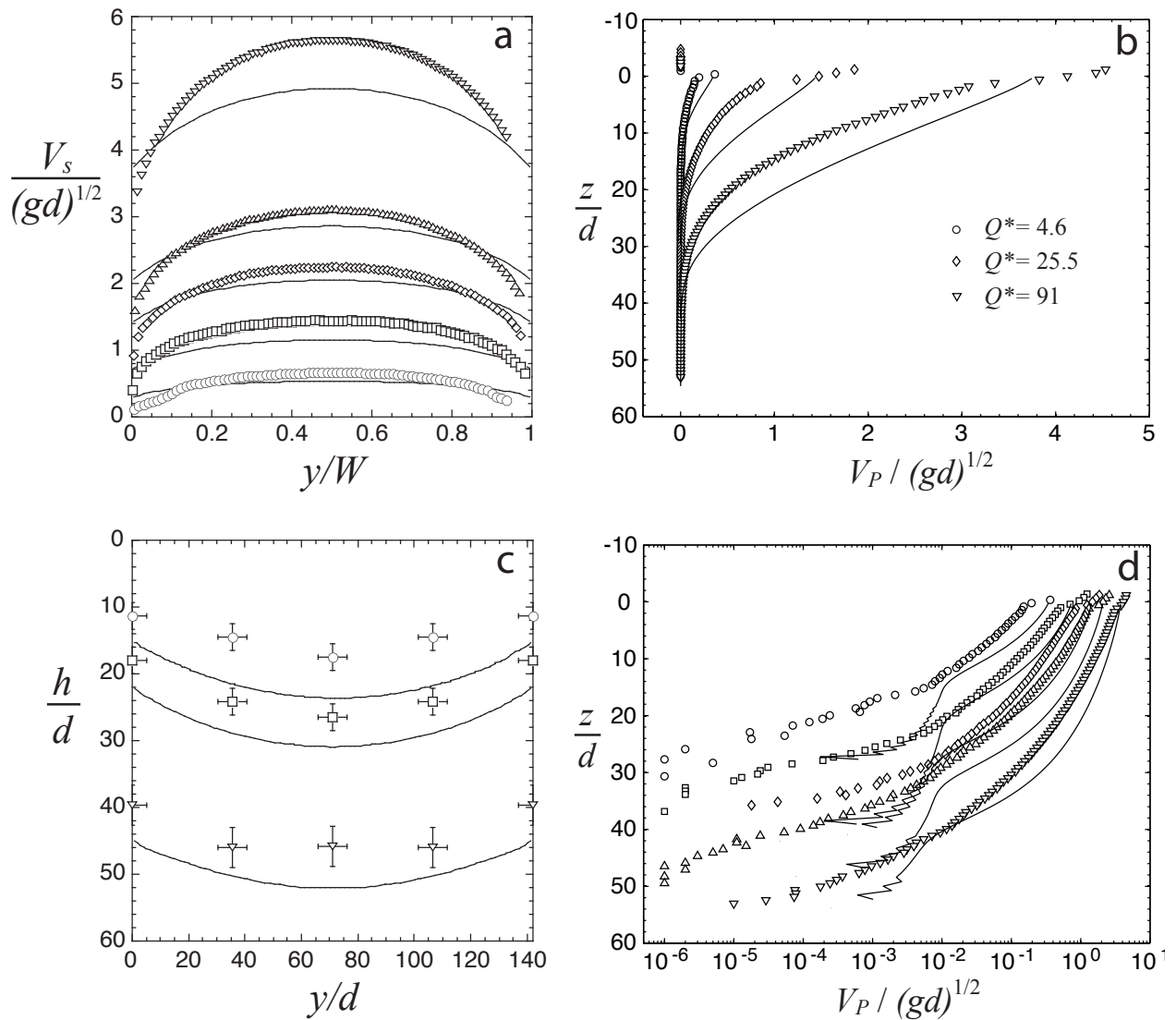


FIG. 4.11 – Comparaison des profils de vitesse entre les expériences (symboles) et les simulations numériques (lignes) pour le canal de 7.5 cm de large ($W/d = 142$) et pour différents débits : $Q/d\sqrt{gd} = 4.4$ (\circ), 15 (\square), 25.5 (\diamond), 40 (\triangle), 91 (∇), les débits des simulations sont similaires à 10% près. (a) Profils de vitesse en surface. (b) Profils de vitesse en parois en échelle linéaire. (c) Variations de l'épaisseur dans une section du canal. (d) Profils de vitesse en parois en échelle logarithmique

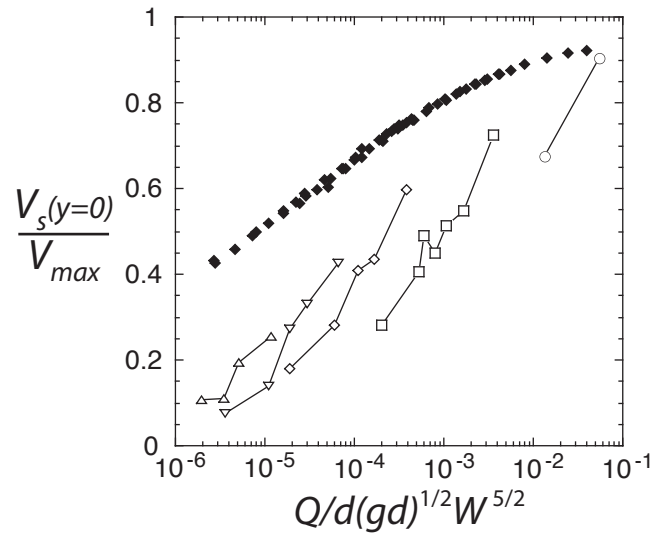


FIG. 4.12 – Comparaison des rapports des vitesses de glissement sur les vitesses maximales pour toutes les largeurs en fonction du débit. Les symboles noirs correspondent aux simulations et les blancs aux expériences $W = 19$ (\circ), 57 (\square), 142 (\diamond), 283 (∇) et 570 (\triangle).

écoulements simulés présentent aussi ces deux caractéristiques. La rhéologie tridimensionnelle est donc capable de reproduire cet effet subtil : la vitesse de glissement est d'autant faible que le canal est grand ou que le débit est faible. Cependant, le rapport des vitesses est systématiquement moins prononcé dans les simulations que dans les expériences.

Les conclusions de cette étude sont tout d'abord que les simulations reproduisent qualitativement les profils de vitesse. Ces comparaisons montrent un bon ordre de grandeur des vitesses. Ensuite les formes des profils de vitesse sont similaires : les vitesses de glissement évoluent dans le même sens. Cependant la courbure transversale est systématiquement sous-estimée dans les simulations. Nous pouvons *a priori* penser que les désaccord entre les profils expérimentaux et simulés puissent avoir deux origines. Premièrement, la rhéologie proposée pourrait ne pas être adaptée à la description de ces écoulements. Deuxièmement, la condition aux limites de paroi lisse ne serait peut-être pas correctement modélisée. En effet, les grains d'un écoulement granulaire contre une paroi lisse ne se contentent pas de glisser mais peuvent rebondir contre celle-ci. Les collisions peuvent alors engendrer des transferts de la quantité de mouvement d'une autre nature que la friction ou changer le coefficient de friction.

Dans l'optique d'apporter un éclairage à ce problème, nous avons cherché à reproduire la courbure prononcée des expériences en modifiant arbitrairement le coefficient de friction à la paroi. Nous avons calculé un profil de vitesse pour le débit $Q^* = 40$ (précis à 2% près) avec un coefficient $\mu_w = \tan(17.1^\circ)$ au lieu des 10.4° mesurés. Les profils de vitesse en surface et latéral sont représentés sur les figures 4.13a,b. Cette fois ci, la courbure est suffisante, un accord quantitatif est observé en surface ; enfin, le profil de vitesse est mieux ajusté en paroi.

Ce résultat tend à montrer que la modélisation des conditions aux parois est peut-être responsable des écarts observés. Cependant, nous n'expliquons pas l'écart entre la valeur du paramètre μ_w qu'il faut choisir et celle que nous avons déterminée expérimentalement. Afin d'éliminer l'incertitude sur ce paramètre, nous avons choisi d'imposer une condition aux limites bien contrôlée

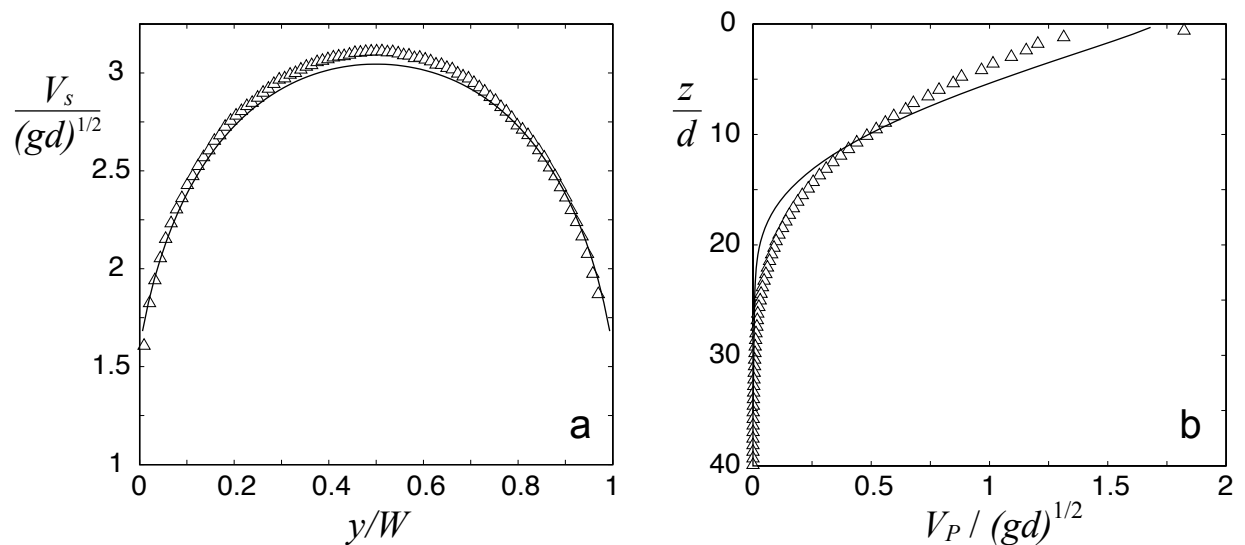


FIG. 4.13 – Comparaison entre expérience et simulation après ajustement du paramètre de friction μ_w sur les profils de vitesse mesurés en surface (a) et en paroi (b) pour une largeur $W = 142d$ et un débit $Q^* = 40$.

de glissement nul à la paroi, en collant une couche de bille sur les plaques de verre.

4.5 Parois latérales rugueuses

Afin de réaliser cette nouvelle condition aux limites les plaques de verre latérales ont été rendues rugueuses en collant à leur surface une couche de billes identiques à celles de l'écoulement par un adhésif double face. De nouvelles expériences ont été menées sur le même principe que les précédentes. L'inclinaison de la surface libre, les profils de vitesse en surface et l'épaisseur de l'écoulement ont été mesurés en fonction du débit et de la largeur du canal.

Nous nous sommes intéressés aux écoulements stationnaires et uniformes. Dû à la présence de parois rugueuses, les profils de vitesse seront davantage cisailés dans la direction transverse puisque la vitesse à la paroi sera nulle. Cet aspect renforce ainsi le caractère tridimensionnel des écoulements. Les résultats ont été confrontés aux prédictions des nouvelles simulations, dans lesquelles nous imposons une vitesse nulle à la paroi et nous contrôlons l'inclinaison afin d'obtenir des débits numériques et expérimentaux égaux à 2.5% près. Les figures 4.14a-c montrent la comparaison entre les profils de vitesse en surface expérimentaux et numériques. Les symboles correspondent aux profils mesurés et les lignes aux profils simulés. Nous observons cette fois-ci un accord quantitatif. La superposition des courbes est d'autant plus marquante que, dans cette configuration, il n'y a pas de paramètre ajustable. Nous observons cependant pour la plus faible largeur ($W = 16.5d$) un petit écart. Il est à noter que le modèle continu donne des prédictions correctes même pour une si faible largeur. Sur la figure 4.14d sont reportées les mesures d'épaisseur $h(y)$ dans une section du canal pour plusieurs débits. Dans les simulations et les expériences, la profondeur de l'écoulement est plus faible au niveau des parois qu'au centre du canal. Les simulations reproduisent le bon ordre de grandeur mais elles surestiment toujours les valeurs expérimentales.

Ainsi, par rapport aux parois lisses nous obtenons un bien meilleur accord. Ces résultats confirment donc que la modélisation des conditions aux limites frictionnelles était responsable des écarts observés dans le chapitre précédent. Cette étude semble donc montrer la pertinence de cette rhéologie pour la description d'écoulements granulaires denses dans des géométries complexes. Après cette brève introduction, nous présentons les résultats en détail sous la forme d'un article accepté pour publication dans la revue *Nature*.

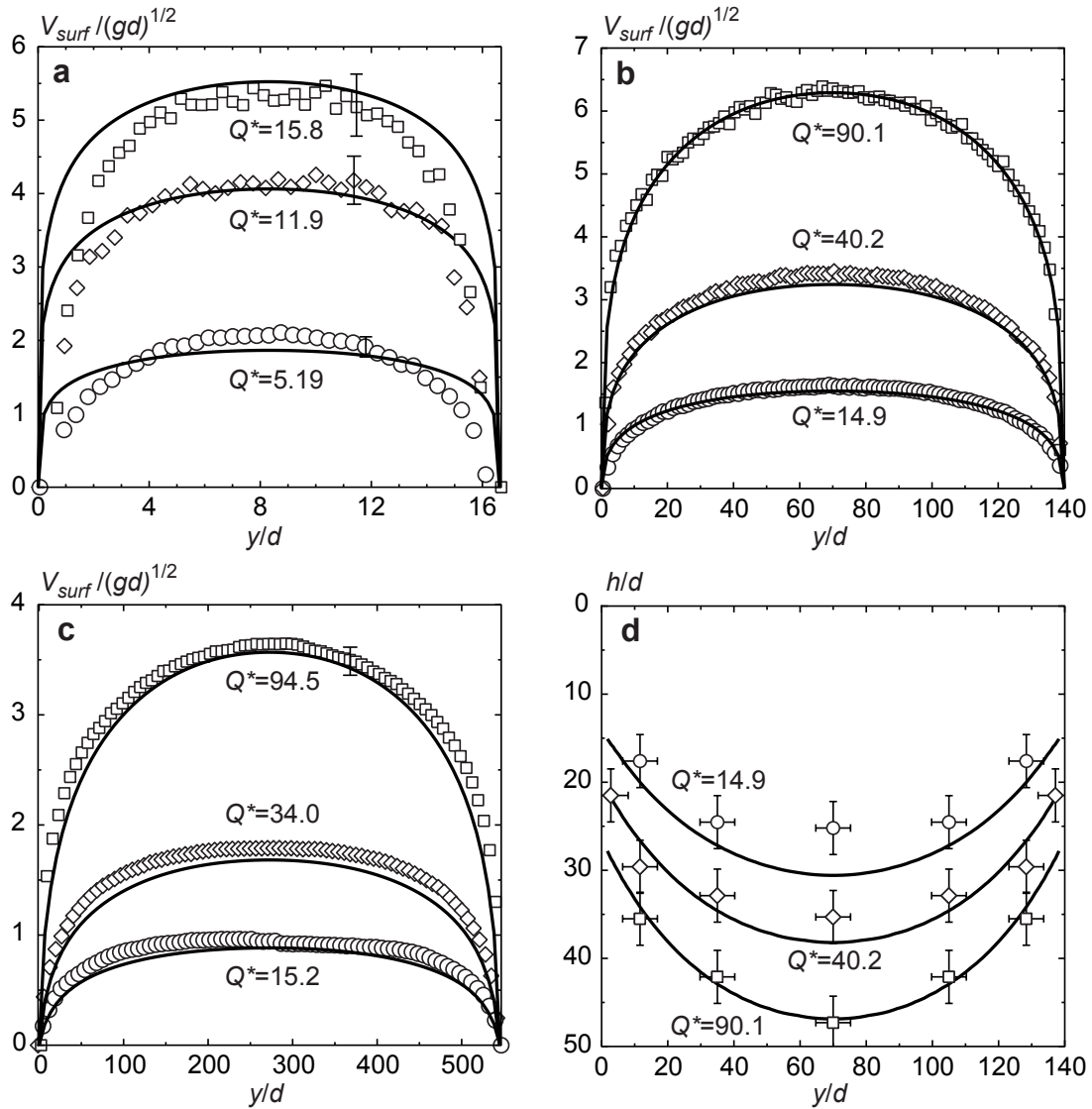


FIG. 4.14 – Comparaison entre les simulations 3D (lignes) et les résultats expérimentaux (symboles) à plusieurs débits $Q^* = Q/d\sqrt{gd}$. (a,b,c) Profils de vitesse en surface pour trois largeurs : $W = 16.5d$ (a), $140d$ (b) et $546d$ (c). (d) Position de l'interface liquide-solide $h(y)$ en travers du canal pour trois débits ($W = 140d$). Pour chaque comparaison, les débits simulés ont été ajustés aux débits expérimentaux avec un écart inférieur à 2.5%.

4.5.1 Copie de l'article

A constitutive law for dense granular flows

Pierre Jop¹, Yoël Forterre¹ & Olivier Pouliquen¹

IUSTI, CNRS UMR 6595, Université de Provence, 5 rue Enrico Fermi, 13453 Marseille Cedex 13, France.

A continuum description of granular flows would be of considerable help in predicting natural geophysical hazards or in designing industrial processes. However, the constitutive equations for dry granular flows, which govern how the material moves under shear, are still a matter of debate¹⁻¹⁰. One difficulty is that grains can behave¹¹ like a solid (in a sand pile), a liquid (when poured from a silo) or a gas (when strongly agitated). For the two extreme regimes, constitutive equations have been proposed based on kinetic theory for collisional rapid flows¹², and soil mechanics for slow plastic flows¹³. However, the intermediate dense regime, where the granular material flows like a liquid, still lacks a unified view and has motivated many studies over the past decade¹⁴. The main characteristics of granular liquids are: a yield criterion (a critical shear stress below which flow is not possible) and a complex dependence on shear rate when flowing. In this sense, granular matter shares similarities with classical visco-plastic fluids such as Bingham fluids. Here we propose a new constitutive relation for dense granular flows, inspired by this analogy and recent numerical^{15,16} and experimental work¹⁷⁻¹⁹. We then test our three-dimensional (3D) model through experiments on granular flows on a pile between rough sidewalls, in which a complex 3D flow pattern develops. We show that, without any fitting parameter, the model gives quantitative predictions for the flow shape and velocity profiles. Our results support the idea that a simple visco-plastic approach can quantitatively capture granular flow properties, and could serve as a basic tool for modelling more complex flows in geophysical or industrial applications.

Advances in our understanding of dense granular flows have been recently made by comparing different flow configurations¹⁴. The simplest configuration from a rheological point of view is the one sketched in Fig. 1. A granular material confined under a normal stress P in between two rough planes is sheared at a given shear rate $\dot{\gamma}$ by applying a shear stress τ . In refs 15 and 16, for stiff particles the shear stress is shown, using dimensional arguments and numerical simulations, to be proportional to the normal stress, with a coefficient of proportionality that is a function of a single dimensionless number, called the inertial number I :

$$\tau = \mu(I)P \quad \text{with} \quad I = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{P/\rho_s}} \quad (1)$$

where $\mu(I)$ is the friction coefficient, d is the particle diameter and ρ_s is the particle density. They found that the volume fraction Φ of the sample is also a function of I but varies only slightly in the dense regime. The inertial number, which is the square root of the Savage number²⁰ or of the Coulomb number²¹ introduced previously in the literature, can be interpreted as the ratio between two time scales, a macroscopic deformation time scale ($1/\dot{\gamma}$) and an inertial time scale $\sqrt{d^2\rho_s/P}$. By confronting results from the simple shear test with experimental measurements of granular flows on rough inclined planes^{17,22}, it can be shown that the friction coefficient $\mu(I)$ has the shape given in Fig. 1. It starts from a critical value μ_s at zero shear rate and converges to a limiting value μ_2 at high I . The following friction law can then be proposed, compatible with the experiments¹⁹:

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{I_0/I + 1} \quad (2)$$

where I_0 is a constant. Very recently, this simple description of granular flows has been successful in predicting two-dimensional configurations, capturing velocity profiles on inclined planes^{14,23} and important features of flows on a pile¹⁹. However, the simple scalar law (equation (1)) cannot be applied in more complex flows where shear in different directions is present and where a full three-dimensional rheology is needed.

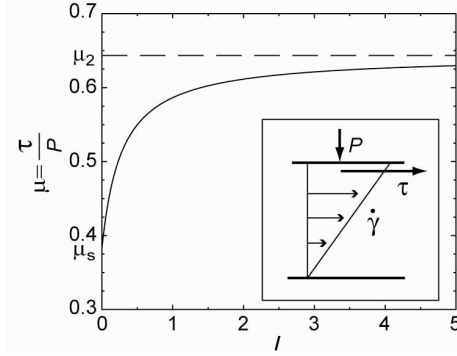


Figure 1: Friction coefficient μ as a function of the dimensionless parameter I ($\mu_s = \tan(20.9)$, $\mu_2 = \tan(32.76)$ and $I_0 = 0.279$). Inset, definition of the pressure P , the shear stress τ , and the shear rate $\dot{\gamma}$ in the simple plane shear configuration.

We therefore propose the following 3D generalization of the friction law for a granular material. The basic assumption consists in neglecting the small variation of the volume fraction observed in the dense regime. The granular material is then described as an incompressible fluid with the internal stress tensor given by the following relations:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad \text{and} \quad \tau_{ij} = \eta(|\dot{\gamma}|, P)\dot{\gamma}_{ij}$$

$$\text{with} \quad \eta(|\dot{\gamma}|, P) = \frac{\mu(I)P}{|\dot{\gamma}|} \quad \text{and} \quad I = \frac{|\dot{\gamma}|d}{\sqrt{P/\rho_s}} \quad (3)$$

where $\dot{\gamma}_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ is the strain rate tensor and $|\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ij}}$ is the second invariant of $\dot{\gamma}_{ij}$. In this rheology, P represents an isotropic pressure, and $\eta(|\dot{\gamma}|, P)$ is an effective viscosity, which definition is related to the friction coefficient $\mu(I)$ (equation (2)). An important property of the proposed constitutive law is that the effective viscosity diverges to infinity when the shear rate goes to zero. This divergence ensures that a yield criterion exists. Looking at equation (3) in the limit of $|\dot{\gamma}|$ going to zero, we can show that the material flows only if the following condition is satisfied:

$$|\tau| > \mu_s P \quad \text{where} \quad |\tau| = \sqrt{\frac{1}{2}\tau_{ij}\tau_{ij}} \quad (4)$$

The yield criterion takes then the form of a Drucker-Prager like criterion²⁴. Below the threshold, the medium behaves locally as a rigid body. It is interesting to note that within this framework, the granular media can be viewed as a visco-plastic fluid²⁵. The specificity compared to classical Bingham or Herschel-Bulkley fluids is that the effective viscosity depends both on the shear rate and on the local pressure. This property is linked to the frictional nature of stresses in granular media.

To test this rheology we performed experiments of granular flows on a heap as sketched in Fig. 2. This set-up is similar to our previous study¹⁹ except that here sidewalls are made rough by gluing one layer of beads on them. This imposes a well-defined no-slip boundary condition at the walls. This configuration represents a severe test for the model, since it gathers in a single configuration several specificities of granular flows. First, when grains are released from the hopper, a steady regime is reached with a strongly sheared layer flowing on top of a static zone. The slope and the thickness of the flowing layer are selected by the system. Second, owing to the rough sidewalls used here, a significant shear exists also in the transverse direction, the flow pattern being thus fully three-dimensional. The experiments are carried out using glass beads 0.53 mm in diameter and the two control parameters are the width W of the channel and the flow rate per unit of width Q . The present study focuses on the steady and uniform regime characterized by a constant slope and a velocity aligned along the x -direction and invariant along the flow (a tiny y -component can be observed close to the wall, which remains 20 times smaller than the stream-wise velocity). We performed systematic measurements of the free-surface inclination θ , of the free-surface-velocity profile $V_{surf}(y)$ using particle-imaging velocimetry, and we get estimates of the thickness of the flowing layer $h(y)$ using an erosion method¹⁹.

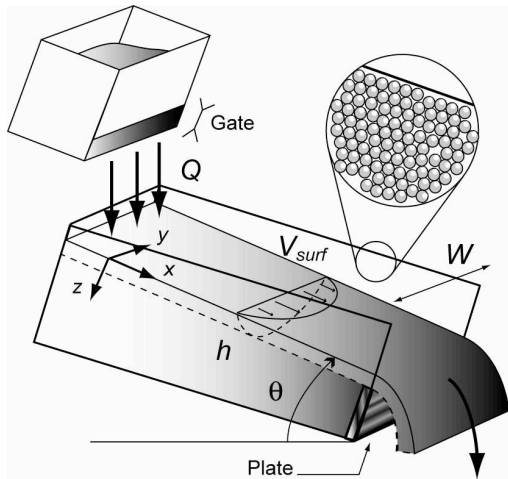


Figure 2: Experimental set-up of granular flows on a pile between rough sidewalls.

The channel is partially closed at the bottom end to create a static pile on top of which the grains flow¹⁹. The sidewalls are made rough by gluing one layer of beads on them. The channel is 120 cm long and the width W varies from 0.9cm ($16.5d$) up to 28.9 cm ($546d$).

To compare the experimental results with the predictions of the local rheology, we perform numerical simulations of a granular fluid described by the constitutive law equation (3) and flowing in an inclined U-shaped channel with a no-slip boundary condition at the three walls. The velocity $u(y,z)$ is assumed to be aligned with x and to depend only on y and z . To get the 3D steady velocity profile, we solve the incompressible Navier-Stokes equations with the internal stress being given by equation (3) using a finite difference scheme. For the rheological parameters μ_s , μ_2 and I_0 coming into play in equation (2), we choose the values given by the experimental data of flows on inclined planes¹⁸ where the same particles were used (see ref. 19 for how to compute these parameters): $\mu_s = \tan(20.9)$, $\mu_2 = \tan(32.76)$ and $I_0 = 0.279$. This choice means that no fitting parameter will exist when we compare results from the simulations to the experimental data. A typical velocity profile obtained by the model is shown in Fig. 3. We first observe that a static zone develops at the base of the channel. The limit of the static zone varies across the channel, the flowing layer being larger in the centre than close to the walls. The second observation is that the velocity profile is truly 3D and sheared in both y and z directions.

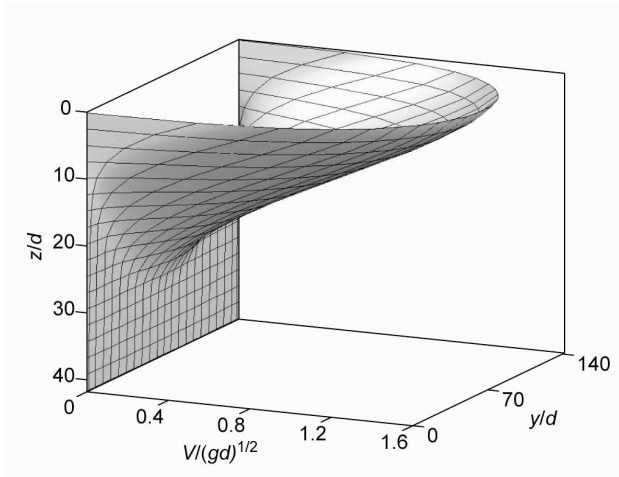


Figure 3: Typical 3D velocity profile predicted by the rheology ($W=142d$, $\theta=22.6^\circ$, $Q/d^{3/2}g^{1/2}=15.2$). For clarity only one quarter of the lines of the 71×80 computational grid is plotted.

We then tried to quantitatively compare the velocity profiles predicted by the simulations with the ones measured experimentally. In the simulation we impose the inclination and compute the flow rate *a posteriori*, whereas in the experiments, the flow rate is controlled and the inclination is measured. Figures 4a-c show the free-surface velocity profiles obtained in the experiments and simulations for different widths and different flow rates. The experimental data are the symbols and the continuous lines are the prediction of the 3D rheology. The agreement is good and quantitative. A slight deviation between experiment and model is observed in the narrower channel, 16.5 particle-diameters wide. In Fig. 4d, we also compare the prediction of the theory for the thickness of the flowing layer. In both theory and experiments, the flowing layer is thicker in the centre than at the walls. A quantitative agreement is again observed, although the simulation systematically overestimates the flowing layer thickness. This could be due to the not-very-precise erosion method used for estimating the thickness. All these results show that the proposed rheology gives quantitative predictions for this complex 3D flow, a striking success for a model that has been entirely calibrated based on a different flow configuration.

We have systematically carried out experiments for a wide range of flow rates and channel widths, and within 15% a quantitative agreement is always observed. To compare experiments and simulations in a systematic way, it is interesting to notice that simple scalings can be predicted from the rheology proposed. It is easy to show analytically that one can get rid of the width of the channel in the equations of motion by using the following dimensionless variables: $\tilde{z} = z/W$, $\tilde{y} = y/W$, $\tilde{V} = Vd/g^{1/2}W^{3/2}$ and $\tilde{Q} = Qd/g^{1/2}W^{5/2}$ (see Supplementary Information). It follows that the inclination of the pile θ , the maximum velocity in the centreline of the channel \tilde{V}_{\max} , and the maximum flowing thickness \tilde{h}_{\max} should all depend only on \tilde{Q} . In Fig. 5, we show that the experimental measurements follow the predicted scaling and that the numerical simulations (continuous lines in Fig. 5) give quantitative predictions. One interesting result of this scaling analysis is that the thickness h scales with the width W , meaning that neither the thickness of the flowing layer nor the shear rate are intrinsic properties of the granular media but are controlled by the width of the channel and the flow rate.

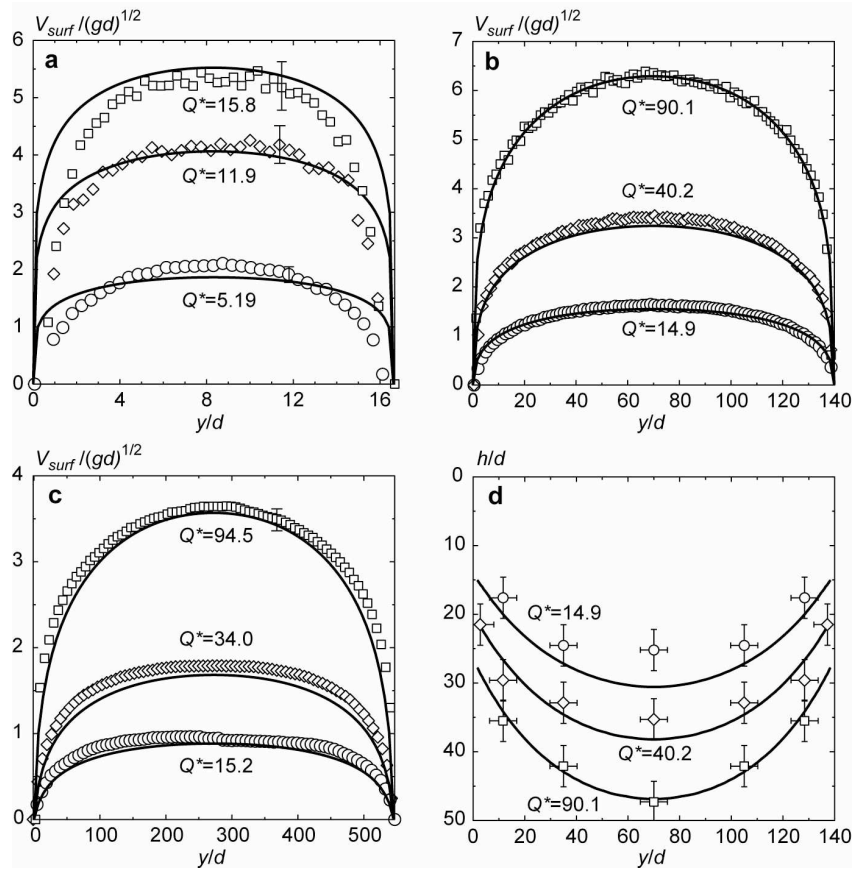


Figure 4: Comparison of 3D simulations (lines) and experimental results (symbols) for different flow rates ($Q^*=Q/d^{3/2}g^{1/2}$). a, b, c, Free-surface velocity profiles for channel width $W=16.5d$ (a), $W=140d$ (b) and $W=546d$ (c). d, Depths of the flowing layer across the channel for $W=140d$. The experimental and computational flow rates are equal within 2.5%. The error bars represent the dispersion of the measurements for different experiments.

We conclude that the simple visco-plastic constitutive law proposed seems to describe dense granular flows very well. Once calibrated on the inclined plane configuration, the model quantitatively captures the complex 3D sheared flow observed when grains flow in between two rough walls. Limits of the approach exist that mainly concern the yield criterion. Within the proposed constitutive law, the flow threshold is simply described by a Coulomb criterion. However, the transition between solid-like and liquid-like behaviour in granular matter seems much more complex, involving shear bands^{26,27}, intermittent flows²⁸ and hysteretic phenomena^{29,30}. Such features still should be included in a more comprehensive rheology. However, we believe that the simple visco-plastic rheology presented here represents a minimal model that quantitatively captures the basic features of granular flows important in many applications. We think this model could help to take into account more accurately the complex yield features specific to granular matter.

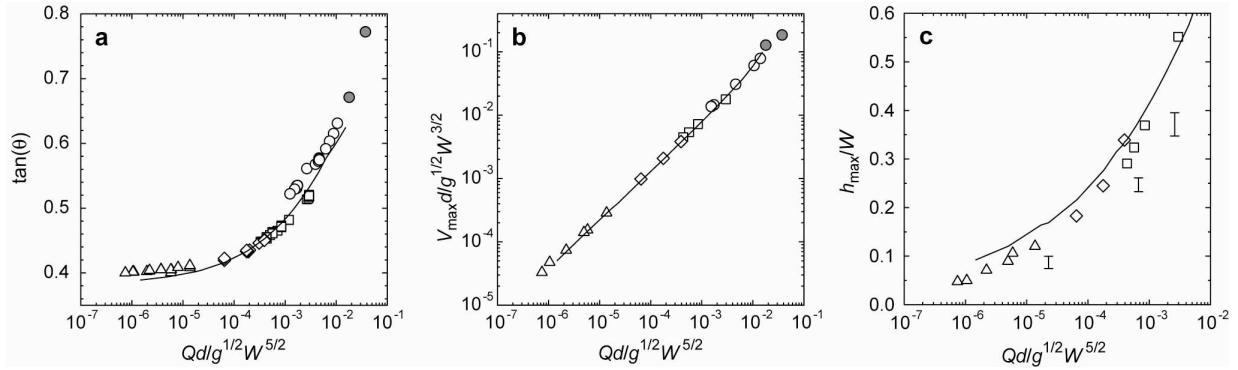


Figure 5: Scaling laws for the experimental measurements (symbols) compared to the predictions of the model (lines). Free-surface inclination $\tan(\theta)$ (a), rescaled maximum free-surface velocity \tilde{V}_{\max} (b) and maximum flowing thickness h_{\max}/W (c), as a function of the rescaled flow rate \tilde{Q} . Data collapse onto single curves for all flow rates and all widths: $W=16.5d$ (circles), $W=55d$ (squares), $W=140d$ (diamonds), $W=546d$ (triangles). In c, the error bars refer to the dispersion of the measurements for each width (the dispersion are smaller than the size of the symbols in a and b). The grey circles (a, b) refer to measurements above the critical angle $\theta_2 = \arctan \mu_2$. In this case, no steady uniform flow is predicted by the model. Experimentally, we observe a transition to a collisional regime (see Supplementary Information and Supplementary Movies).

Supplementary Information accompanies the paper on www.nature.com/nature.

Acknowledgements This work was supported by grants from CEFIPRA and from the French ANR (PIGE project).

Author Contributions P.J. performed all experimental work and numerical simulations, P.J., Y.F. and O.P. analyzed results and co-wrote the paper.

Competing interests statement The authors declare that they have no competing financial interests.

Author Information Reprints and permissions information is available at npg.nature.com/reprintsandpermissions. The authors declare no competing financial interests. Correspondence and requests for materials should be addressed to P.J. (Pierre.Jop@polytech.univ-mrs.fr).

References

1. Savage, S.B. Analysis of slow high-concentration flows of granular materials. *J. Fluid Mech.* **377**, 1–26 (1998).
2. Mills, P., Loggia, D. & Texier, M. Model for stationary dense granular flow along an inclined wall. *Europhys. Lett.* **45**, 733–738 (1999).
3. Aranson, I. S. & Tsimring, L. S. Continuum description of avalanches in granular media, *Phys. Rev. E*, **64**, 020301 (2001).
4. Pouliquen, O., Forterre, Y. & Le Dizes, S. Slow dense granular flows as a self-induced process. *Adv. Complex Syst.* **4**, 441–450 (2001).
5. Bocquet, L., Losert, W., Schalk D., Lubensky T. C. & Gollub, J. P. Granular shear flow dynamics and forces: Experiment and continuous theory. *Phys. Rev. E* **65**, 011307 (2002).

6. Ertas, D. & Halsey, T. C. Granular gravitational collapse and chute flow. *Europhys. Lett.* **60** (6), 931–937 (2002).
7. Lemaître, A. Origin of a repose angle: kinetics of rearrangement for granular materials. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 064303 (2002).
8. Mohan L. S., Rao K. K. & Nott P. R. A frictional cosserat model for the slow shearing of granular materials. *J. Fluid Mech.* **457**, 377–409 (2002).
9. Jossierand, C., Lagrée, P.-Y. & Lhuillier, D. Stationary shear flows of dense granular materials: a tentative continuum modelling, *Euro. Phys. J. E* **14**, 127–135 (2004).
10. Kumaran, V. Constitutive relations and linear stability of a sheared granular flow, *J. Fluid Mech.* **506**, 1–43 (2004).
11. Jaeger, H. M., Nagel, S. R. & Behringer, R. P. Granular solids, liquids, and gases. *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1259–1273 (1996).
12. Goldhirsch, I. Rapid granular flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **35**, 267–293 (2003).
13. Nedderman, R. M. *Static and kinematics of granular materials*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1992).
14. GDR MiDi group. On dense granular flows. *Euro. Phys. J. E* **14**, 341–365 (2004).
15. Da Cruz, F., Emam, S., Prochnow, M., Roux, J.-N. & Chevoir, F. Rheophysics of dense granular materials: Discrete simulation of plane shear flows. *Phys. Rev. E* **72**, 021309 (2005).
16. Iordanoff, I. & Khonsari, M. M. Granular lubrication: toward an understanding between kinetic and fluid regime. *ASME J. Tribol.* **126**, 137–145(2004).
17. Pouliquen, O. & Forterre, Y. Friction law for dense granular flows: application to the motion of a mass down a rough inclined plane. *J. Fluid Mech.* **453**, 133–151 (2002).
18. Forterre, Y. & Pouliquen, O. Long-surface-wave instability in dense granular flows. *J. Fluid Mech.* **486**, 21–50 (2003).
19. Jop, P., Forterre, Y. & Pouliquen, O. Crucial role of sidewalls in dense granular flows: consequences for the rheology. *J. Fluid Mech.* **541**, 167–192 (2005).
20. Savage, S.B. The mechanics of rapid granular flows. *Adv. Appl. Mech.* **24**, 289–366 (1984).
21. Ancey, C., Coussot, P. & Evesque, P. A theoretical framework for very concentrated granular suspensions in a steady simple shear flow. *J. Rheol.* **43**, 1673–1699 (1999).
22. Pouliquen O. Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Phys. Fluids* **11**, 542–548 (1999).
23. Silbert, L. E. *et al.* Granular flow down an inclined plane: Bagnold scaling and rheology. *Phys. Rev. E* **64**, 051302 (2001).
24. Drucker D.C. & Prager W. Soil mechanics and plastic analysis of limit design, *Quart. Applied Math.* **10**, (2), 157– 175 (1952).
25. Tanner, R. I. *Engineering Rheology*. (Clarendon Press, Oxford, USA, 1985).
26. Mueth, D. M. *et al.* Signature of granular microstructure in dense shear flows. *Nature* **406**, 385–389 (2000).

27. Fenistein, D. & Van Hecke, M. Wide shear zones in granular bulk flow. *Nature* **425**, 256 (2003).
28. Howell, D., Behringer, R. P. & Veje, C. Stress Fluctuations in a 2D Granular Couette Experiment: A Continuous Transition *Phys. Rev. Lett.* **82**, 5241-5244 (1999).
29. Daerr, A. & Douady, S. Two types of avalanche behaviour in granular media. *Nature* **399**, 241-243 (1999).
30. Börzsönyi, T., Halsey, T. C. & Ecke, R. E. Two scenarios for avalanche dynamics in inclined granular layers. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 208001 (2005).

4.5.2 Compléments sur les profils d'épaisseurs h

Nous avons étudié l'évolution de la forme de l'interface liquide-solide en fonction du débit et de la largeur. Étant donné les lois d'échelle trouvées, un grand débit est équivalent à un canal étroit du point de vue des courbures des profils de vitesse. Nous avons donc regardé deux cas extrêmes : le canal le plus étroit permettant l'utilisation de la technique du noir de fumée $W/d = 54$ pour un débit relativement élevé et à l'inverse le canal le plus large $W/d = 546$ pour un débit assez faible. Les figures 4.15a-b montrent les résultats des mesures d'épaisseur et les hauteurs extraites des simulations numériques correspondant aux mêmes débits. Au regard de ces figures, nous pouvons formuler deux conclusions. Premièrement, un accord qualitatif est obtenu : l'écoulement dans le canal étroit est quasiment homogène au contraire de l'épaisseur en canal large. Deuxièmement, pour un écoulement lent, un écart important est observé proche des seuils (figure 4.15b).

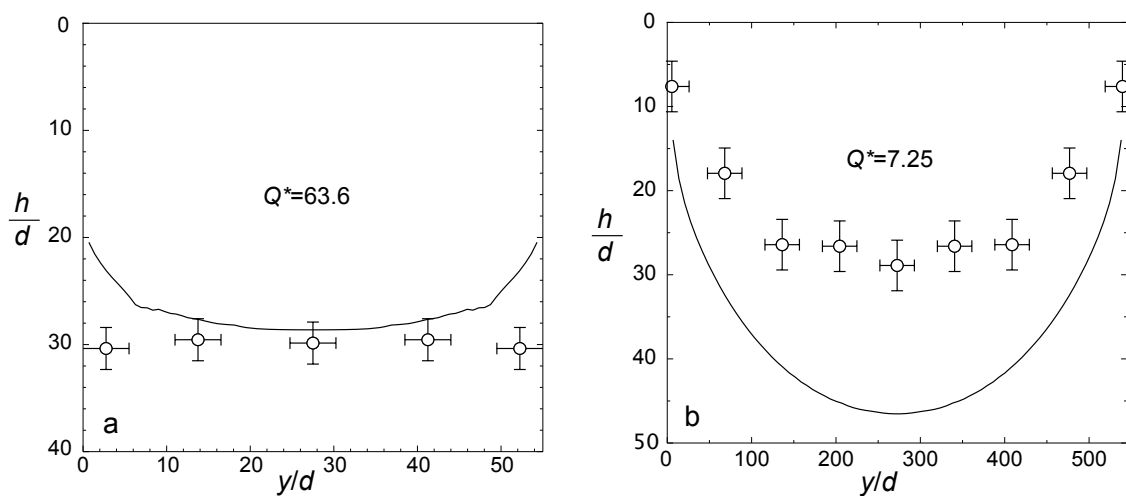


FIG. 4.15 – Forme de la frontière entre les zones fluides et statiques dans les deux cas d'inclinaisons extrêmes. (a) La largeur du canal vaut $W/d = 54$ et le débit $Q^* = 63.6$. Expérimentalement nous ne mesurons pas de variations significative d'épaisseur. Numériquement, le profil trouvé est aussi peu courbé. (b) La largeur vaut $W/d = 546$ et le débit $Q^* = 7.25$. Dans ce cas, le profil de l'épaisseur est beaucoup plus courbé tant expérimentalement que numériquement, cependant nous remarquons que la simulation trouve une épaisseur maximale beaucoup trop grande.

4.5.3 Transition gazeuse au-delà de θ_2

Expérimentalement, grâce à la rugosité des parois, nous avons observé des écoulements pour des angles très élevés, jusqu'à 40° dans le canal le plus étroit ($W/d = 16$). Or la théorie utilisée prévoit l'existence d'un angle maximal pour l'observation d'écoulements stationnaires et uniformes. En effet, la friction moyenne développée entre les grains ne peut excéder la valeur asymptotique μ_2 de la fonction $\mu(I)$. Pour des inclinaisons supérieures à l'angle $\theta_2 = \arctan \mu_2$, les forces de friction internes ne peuvent plus équilibrer la force de gravité. Dès lors, si l'on impose un angle θ supérieur à θ_2 , le modèle prédit que l'écoulement se divise en deux parties : une partie supérieure qui accélère continuellement surmontant une partie plus profonde qui continue de s'écouler à vitesse constante. Dans le cas des écoulements entre parois lisses, le modèle bidimensionnel permet d'obtenir analytiquement l'évolution de l'épaisseur des deux couches en fonction de l'angle d'inclinaison.

Dans le cas des parois rugueuses, nous avons simulé l'évolution temporelle d'un écoulement à un angle de 36° , supérieur à $\theta_2 = 32.76^\circ$ pour la rhéologie des billes de verre utilisées. La figure 4.16b montre le profil de vitesse obtenu après un temps d'intégration correspondant à $10^5 \sqrt{d/g}$. Nous voyons que la partie supérieure de l'écoulement présente une vitesse beaucoup plus grande que le reste contrairement au profil stationnaire observé à une inclinaison de 32° (figure 4.16a). Afin de mieux percevoir la séparation entre les deux couches fluides, l'évolution de la vitesse dans le temps est tracée pour différentes profondeurs sur la figure 4.16c. Un faisceau de courbe (en trait continu) atteint une vitesse limite montrant l'existence d'un état stationnaire à ces profondeurs ($z/d > 2.5$). En revanche les courbes supérieures (en traits pointillés) ne cessent d'augmenter avec une accélération quasiment constante. Cet écoulement présente donc trois zones distinctes : une zone où le fluide accélère en surface, une zone de vitesse stationnaire en profondeur et une zone statique au fond.

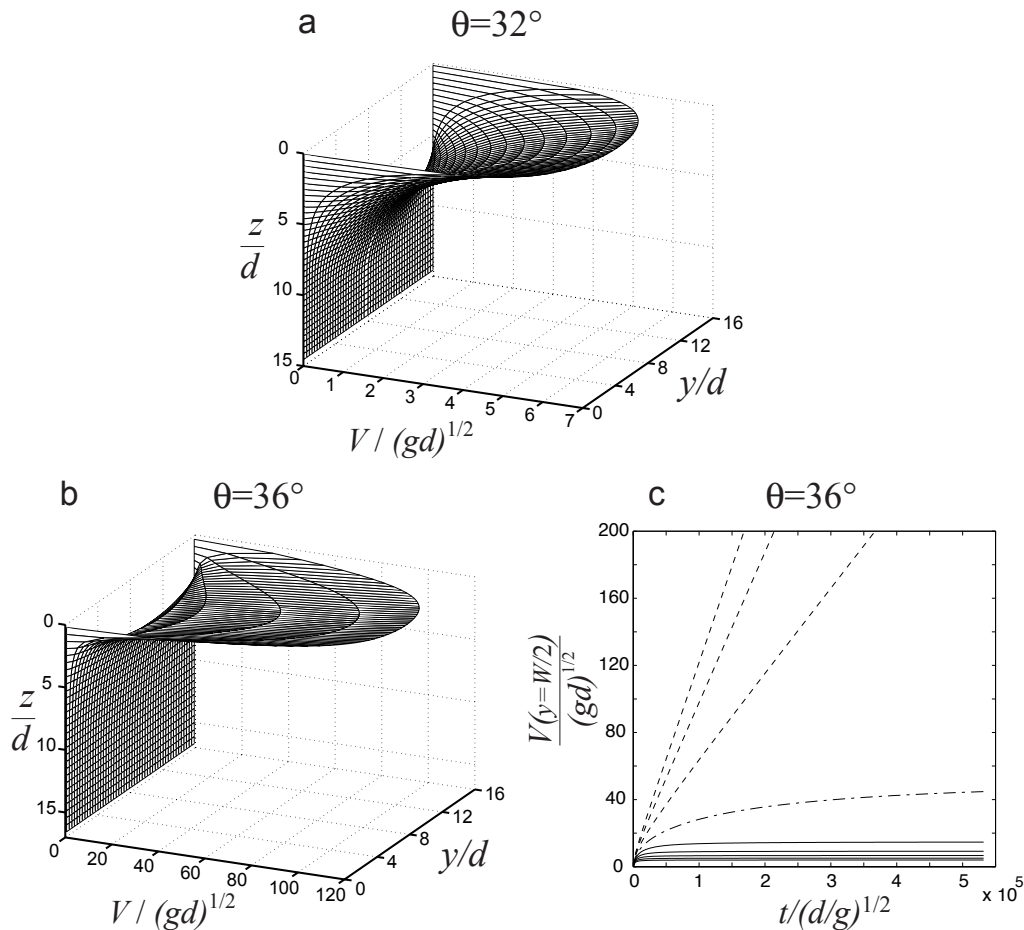


FIG. 4.16 – Simulations d'écoulements au voisinage de l'angle $\theta_2 = 32.76^\circ$. (a) Profil de vitesse stationnaire pour un angle d'inclinaison 32° . (b) Profil de vitesse pour un angle d'inclinaison 36° à $t/\sqrt{d/g} = 10^5$. Cette seconde simulation ne converge pas dans le temps vers un profil stationnaire car les couches supérieures accélèrent. (c) Évolution temporelle des vitesses au centre du canal à différentes profondeurs. Les 9 courbes correspondent à des profondeurs réparties entre $z = 0$ et $z = 5d$. Les plus profondes (—) atteignent une vitesse limite stationnaire alors que les trois couches superficielles (- -) accélèrent presque uniformément.

Nous avons cherché à mettre en évidence expérimentalement les accélérations prédites. Pour cela un dispositif utilisant des miroirs a été monté devant la caméra rapide. Il nous permet de filmer simultanément deux zones distinctes espacées de 50 cm le long de l'écoulement. Malgré la grande gamme de débit explorée qui permet d'accéder à de fortes inclinaisons, nous n'avons pas été en mesure de déceler une accélération de l'écoulement. Il semble rester uniforme, la vitesse augmentant régulièrement avec le débit et donc avec la pente de la surface libre.

Cependant, nous avons observé un changement d'aspect de la surface libre. La figure 4.17(a) montre des images du canal vu de haut, prises lors du passage d'un bout de papier pour des écoulements à différentes inclinaisons. Le morceau de papier est lâché proche de l'alimentation et celui-ci glisse sur la surface des grains. Pour les angles inférieurs à θ_2 , le papier est au-dessus des grains. À l'approche de l'angle critique, des billes surmontent occasionnellement le papier et roulent par-dessus celui-ci. Au-delà de $\theta_2 = 32.76^\circ$ les grains commencent à rebondir plus fréquemment et nous voyons apparaître un nuage de billes au-dessus du morceau de papier. L'existence de cette zone diluée a été confirmée par des visualisations latérales de l'écoulement à travers une lucarne pratiquée dans la paroi rugueuse. Les figures 4.17(b) montrent que l'écoulement est dense et la surface libre bien délimitée pour $\theta < \theta_2$. En revanche pour des angles supérieurs, une zone diluée se développe à la surface. Les interactions entre les billes deviennent complètement collisionnelles. Les mouvements transverses d'une bille sont alors totalement décorrélés de ceux ses voisines. À la surface libre, l'écoulement a donc subi une transition vers un régime gazeux. Cette couche très

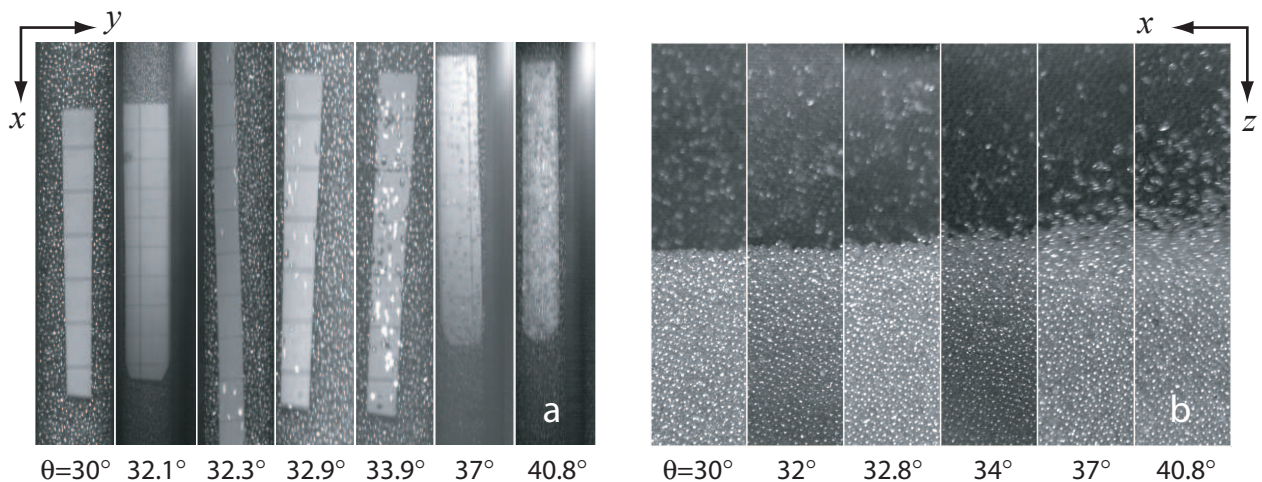


FIG. 4.17 – Transition vers un régime collisionnel à fort débit. État de la surface des écoulements à différentes inclinaisons. (a) Photos prises perpendiculairement à la surface, une bandelette de papier glisse sur la surface libre permettant de visualiser les billes qui rebondissent. (b) Prises de vues latérales dans le repère de la surface libre. Au voisinage de l'angle critique θ_2 , les billes commencent à sauter et à quitter le lit dense. L'écoulement dense est surmonté d'une couche gazeuse pour des inclinaisons plus grandes.

diluée surmontant un écoulement dense a été mise en évidence expérimentalement par des mesures densimétriques par Taberlet (2005) pour des écoulements très rapides et confinés. Dans cette zone diluée, la rhéologie ne peut plus s'appliquer. Les contraintes développées par les collisions, notamment avec les parois, peuvent alors augmenter jusqu'à contrebalancer la gravité. Cette hypothèse permet de proposer une explication à l'uniformité apparente de l'écoulement. Notamment,

Taberlet *et al.* (2003) avaient étudié des écoulements confinés uniformes jusqu'à des inclinaisons très fortes, de l'ordre de 60° . La phase gazeuse jouerait donc un rôle non-négligeable dans ce cas-là, en particulier en imposant une contrainte normale suffisamment importante pour stabiliser l'écoulement dense sous-jacent.

4.6 Simulation d'écoulements dans diverses configurations

4.6.1 Configurations traditionnelles : Couette plan sous gravité, silo et Couette cylindrique

La configuration d'écoulement sur tas a servi à tester quantitativement la loi rhéologique « $\mu(I)$ ». Nous pouvons aussi l'appliquer à d'autres configurations d'écoulement pour trouver quel écoulement stationnaire sera prédit et en tirer d'autres informations. Nous développons ici trois configurations de base.

Couette plan sous gravité

Considérons premièrement l'écoulement de cisaillement plan sous gravité. Le matériau est confiné entre deux plaques horizontales sous une pression P_0 et la gravité g . La plaque supérieure est tirée avec une contrainte constante τ_0 (figure 4.18a). Contrairement au cas homogène, la gravité fait apparaître une dissymétrie entre le haut de la cellule et le bas. D'après l'équilibre des contraintes, la pression est hydrostatique et la contrainte tangentielle est constante égale à τ_0 . Le coefficient de friction étant borné inférieurement, l'écoulement se localise proche de la plaque sur une épaisseur $h_c/d = P_0(\mu_0 - \mu_s)/(\rho g d \mu_s)$, où μ_0 est le rapport des contraintes normales et tangentielles. Ce résultat ne dépend pas de la forme explicite de $\mu(I)$, mais seulement de la valeur seuil. Da Cruz (2004) a déduit de ses simulations de dynamique des contacts un comportement identique (en imposant la vitesse de la plaque supérieure), mais la loi constitutive $\mu(I)$ proposée est un peu différente. La vitesse de la plaque et des grains, en revanche, peut procurer un test supplémentaire de la rhéologie puisque pour un rapport de contraintes imposé, la vitesse en $z/H = 1$ adimensionnée par \sqrt{gd} doit être proportionnelle à $(P_0/\rho g d)^{3/2}$ lorsqu'il y a localisation (pour un demi plan infini, c'est la seule échelle de longueur du système). La figure 4.18b montre l'évolution du profil de vitesse lorsqu'on augmente le paramètre $P_0/\rho g d$ à μ_0 et P_0 constants. Ces prédictions demandent à être testées expérimentalement. En revanche, le modèle prédit que l'épaisseur tend vers zéro avec la vitesse, or expérimentalement, il existe au contraire toujours une localisation de l'écoulement sur une extension non-nulle correspondant au régime quasi-statique.

Le silo vertical

Le silo vertical a de nombreuses applications industrielles, nous nous intéressons ici aux écoulements denses et rapides. Nous supposons que le silo est bidimensionnel et infini, ses parois sont rugueuses, et que la pression à l'intérieur est constante et égale à P_0 . L'écoulement stationnaire uniforme est donné par l'équilibre des contraintes suivant : $\rho g y = P_0(\mu(0) - \mu(y))$, où μ_0 est le coefficient de friction à la parois du cisaillement. Cette relation n'est valable que dans la région cisailée. La valeur minimale de μ impose donc l'existence d'une bande de cisaillement localisée à

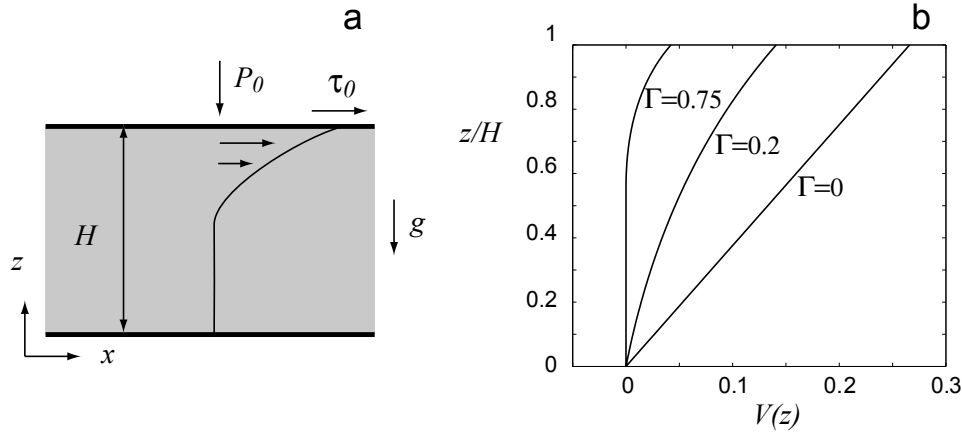


FIG. 4.18 – (a) Configuration du cisaillement plan sous gravité. (b) Différents profils de vitesse pour un même rapport de contrainte μ_0 pour trois valeurs différentes du paramètre $\Gamma = \rho g d / P_0$. Plus Γ augmente plus la gravité est importante, l'écoulement se localise à la surface. Le fait que le cisaillement au niveau de la plaque supérieure reste constant provient du fait que nous imposons μ_0 et P_0 constants.

la paroi : $l_c = L(1 - \mu_s/\mu(0))/2$. En inversant la relation $\mu(I)$ puis en intégrant le gradient de vitesse selon le même principe que pour les écoulements sur tas, nous trouvons les relations entre profils de vitesse, débit, et largeur de bande de cisaillement. La figure 4.19a montre un exemple de profil de vitesse. Le centre s'écoule en bloc, seuls les bords sont cisailés. La largeur de ces zones dépend du débit global, elle augmente à partir de zéro avec le débit et tend vers une asymptote lorsque $\mu(0) = \mu_2$. Leur évolution est tracée en fonction du débit sur la figure 4.19b. Remarquons enfin une dépendance originale de la vitesse avec l'écartement des parois : dû au paramètre I , pour un coefficient de friction à la paroi fixé, la vitesse au centre du silo est proportionnelle à $L^{3/2}$ et non pas à \sqrt{L} comme le laisserait croire un raisonnement dimensionnel trop rapide.

La rhéologie prédit donc que le cisaillement est localisé près des parois, la largeur des bandes de cisaillement dépendant du débit. Ce résultat est en contradiction avec les résultats expérimentaux de Pouliquen *et al.* (1996a) qui trouvent une largeur constante indépendante du débit. Cependant, les régimes étudiés sont quasi-statiques. Les expériences à forts débits se sont généralement concentrées sur des régimes dilués et collisionnels entre des parois lisses. Ceux-ci présentent parfois des ondes de densité, mais il n'existe pas pour le moment d'étude des régimes d'écoulements denses dans des silos à parois rugueuses, pouvant être confrontée à ces prédictions.

Le cylindre de Couette

La cellule de cisaillement de Couette cylindrique a beaucoup été étudiée car elle permet d'appliquer facilement un cisaillement à un matériau granulaire. La principale hypothèse consiste à négliger les variations de pressions dues à la force centrifuge. En effet, les vitesses de rotation sont généralement très faibles. Les équations du mouvement imposent ici que $r^2\tau_{r\theta}$ soit constant. Une bande de cisaillement localisée près du cylindre intérieur est encore prédite. Son extension est relativement faible : $R_c = R_1\sqrt{\mu(R_1)/\mu_s}$. Les profils de vitesse trouvés ne s'étendent pas assez loin comparés à ceux mesurés expérimentalement. Ceci montre une limite de la rhéologie locale : elle

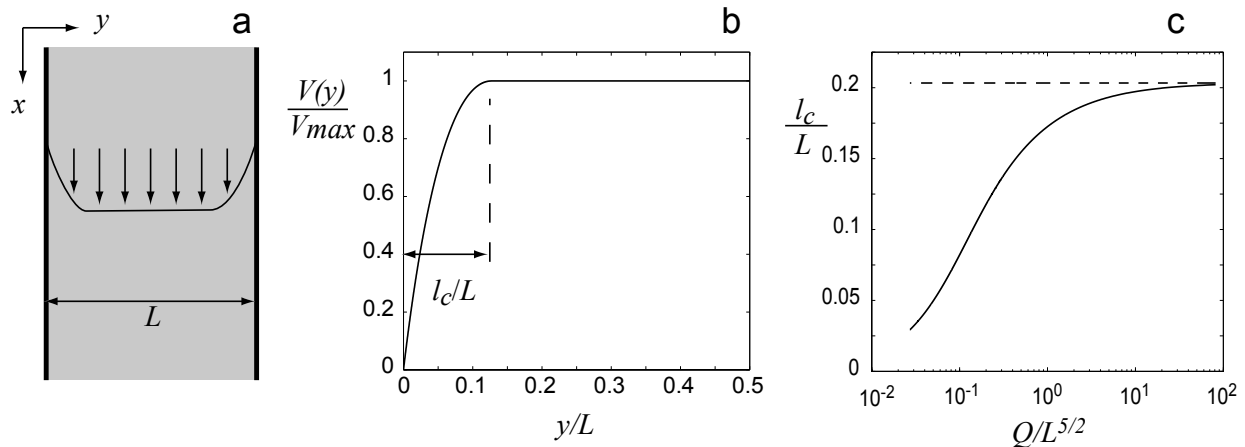


FIG. 4.19 – (a) Écoulement en silo bidimensionnel. (b) Exemple de profil de vitesse normé pour un coefficient de frottement à la paroi $\mu(0) = \tan(27^\circ)$. (c) Évolution de la largeur de la bande de cisaillement avec le débit d’après le modèle. La ligne pointillée indique la largeur maximale de cette bande dont la valeur dépend des paramètres rhéologiques μ_2 et μ_s .

ne semble pas capable de reproduire les bandes de cisaillement observés dans les zones d’écoulements quasi-statiques.

4.6.2 Couette cylindrique modifié

Une expérience astucieuse a été développée par Fenistein *et al.* (2003) afin de tester la robustesse des bandes de cisaillement observées dans les configuration de Couette cylindrique. Ils ont modifié le dispositif expérimental traditionnel comme le monte la figure 4.20a : le cylindre intérieur a été supprimé mais le fond est découpé en deux partie concentriques. La périphérie du socle est solidaire du cylindre extérieur alors que le disque central peut tourner librement. En imposant une lente rotation Ω au disque, ils ont ainsi mesuré les déformations du milieu à l’intérieur de l’empilement pour différentes hauteurs de remplissage H et différents rayons R_s .

Pour de faibles hauteurs H (4.20b), le milieu granulaire est divisé en deux parties concentriques, chacune tournant à la vitesse angulaire imposée par la partie du récipient qu’elle recouvre. En revanche, pour des hauteurs importantes (4.20c), la majorité du milieu granulaire forme un bloc avec le cylindre extérieur et une petite calotte s’appuyant sur le disque central tourne avec ce dernier. Le paramètre important est le rapport entre l’épaisseur H et le rayon du disque R_s . La transition, assez brutale, s’opère autour de la valeur 0.7. Leur étude a aussi porté sur la largeur des bandes de cisaillement dans ces régimes. D’autres équipes se sont lancées dans l’étude de cette configuration atypique : Cheng *et al.* (2006) ont réalisé des visualisations par IRM et des simulations numériques de dynamique moléculaire, Unger *et al.* (2004) ont modélisé l’écoulement par deux blocs rigides frottant selon les lois de Coulomb où l’interface est déterminée par une minimisation du couple et de l’énergie dissipée. Les premiers observent une transition continue alors que les seconds prédisent une transition brutale avec hystérésis.

Nous avons voulu tester notre code numérique sur cette géométrie. Nous nous sommes seulement intéressés à la forme des parties en rotation. En particulier comme les deux parties ne sont

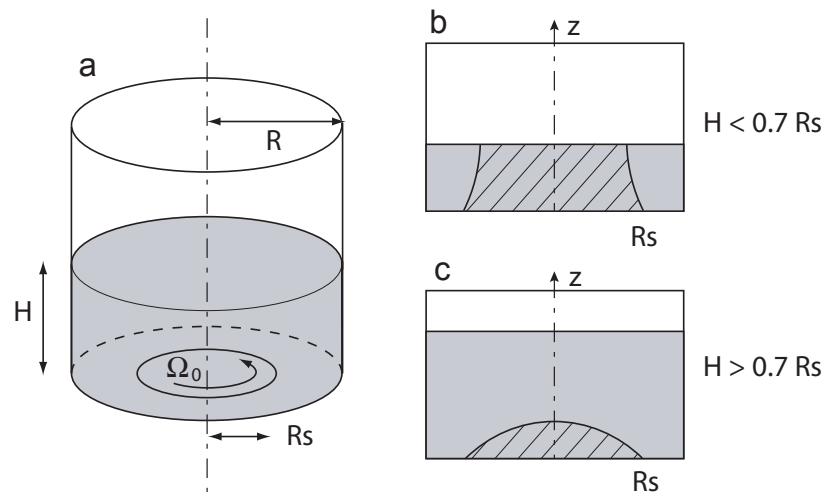


FIG. 4.20 – (a) Géométrie de Couette utilisée par Fenistein *et al.* (2003). Le fond est scindé en deux parties, le centre peut tourner indépendamment du reste. Les grains contre les parois sont immobiles et la partie centrale, animée d'un mouvement de rotation solide à la vitesse angulaire Ω , adopte l'une des deux géométries sélectionnées selon le degré de remplissage H : elle atteint la surface (b) ou est confinée à une calotte au fond du récipient (c).

que très faiblement déformées, elles doivent correspondre à des contraintes sous le seuil de cisaillement. Il s'agit donc de tester si la condition aux limites de cisaillement introduite dans notre modèle suffit à prédire les positions correctes de ces zones cisailées dont la forme varie de façon plus complexe que la simple interface entre les écoulements gravitaires sur tas. Nous avons choisi de modéliser une demi-section verticale du cylindre pour un écoulement de symétrie cylindrique pour différentes conditions de remplissage. Les valeurs numériques des paramètres géométriques ont été calquées sur celles des expériences de Fenistein *et al.* (2004). Le diamètre du cylindre (ici $200d$) ne joue aucun rôle, nous avons fixé la valeur du rayon du disque à $R_s/d = 179.2$. La vitesse de rotation du fond doit être très faible pour pouvoir négliger les phénomènes d'inertie. Les équations différentielles du mouvement projetées verticalement nous donne la pression hydrostatique. Les conditions aux limites sont une adhérence parfaite sur toutes les surfaces solides et l'annulation des contraintes à la surface. La vitesse angulaire du fond est imposée et constante : $\Omega(z = 0) = \Omega_0$ si $r < R_s$ et 0 pour $r > R_s$. Enfin nous résolvons le mouvement par intégration temporelle jusqu'à l'obtention de l'état stationnaire.

Les figures 4.21a-c représentent la vitesse angulaire sur une section axiale du cylindre en fonction des coordonnées radiales et verticales. Pour une hauteur $H/d = 105$ ($H/R_s = 0.59$), la partie centrale en rotation débouche à la surface du matériau granulaire (figure 4.21a). En revanche pour $H/d = 130$ ($H/R_s = 0.73$) sur la figure 4.21c, la zone en rotation est réduite à une calotte proche du disque. Ces résultats sont conformes aux études précédentes. La figure 4.21d montre l'évolution de la frontière délimitant les différentes zones pour différents rapports d'aspects. Nous voyons clairement la transition (de coordonnées (r_c, z_c)) entre le régime ouvert et le régime fermé. La ligne pointillée, correspondant à la position de la frontière à la surface (dans le système ouvert) tirée des expériences de Fenistein *et al.* (2004), est en assez bon accord avec les extrémités des courbes. Cependant, alors que Unger *et al.* (2004) prévoient une transition hystérétique entre les deux formes,

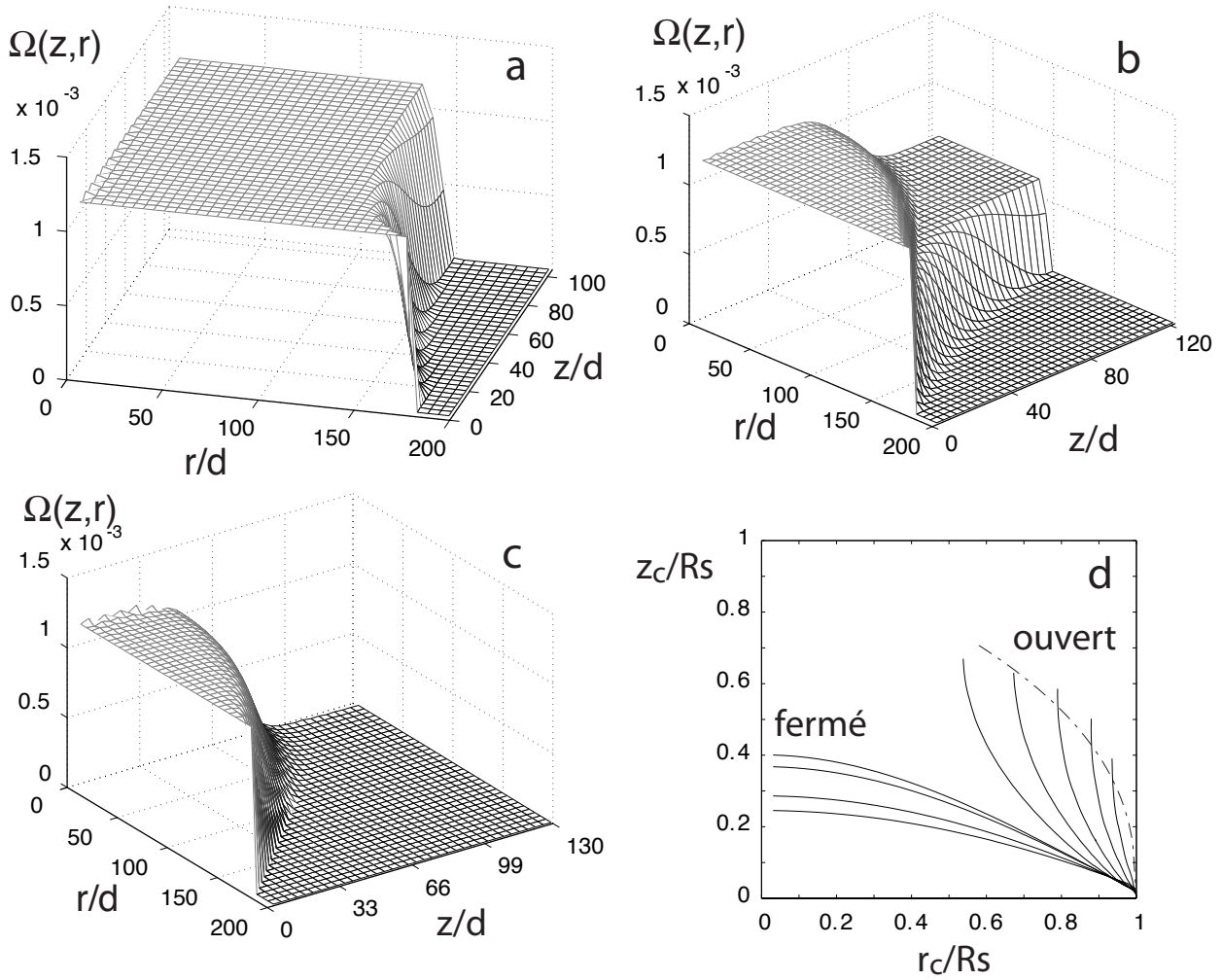


FIG. 4.21 – (a-c) Profils de vitesse angulaire stationnaire sur une section du cylindre. (a) $H/R_s = 0.59$, le système est dit «ouvert» car la zone en rotation débouche à la surface. (b) $H/R_s = 0.68$, dans le régime transitoire. (c) $H/R_s = 0.73$, le système est dit «fermé» seule une portion enfouie près du fond est en rotation. (d) Évolution du profil de la zone cisailée pour différents rapports d'aspect (de droite à gauche) : $H/R_s = 0.39, 0.5, 0.59, 0.63, 0.67$, (systèmes ouverts), $0.7, 0.73, 0.84, 0.95$ (systèmes fermés). La ligne mixte correspond à la position de la zone cisailée à la surface $r_c(z_c = H)$ tirée des expériences de Fenistein *et al.* (2004).

nos simulations révèlent plutôt un régime où les deux régions de cisaillement sont présentes. La figure 4.21b montre un tel exemple $H/R_s = 0.68$. Au fond, un coeur est entraîné à la vitesse Ω_0 , les bords sont à l'arrêt, mais la partie centrale supérieure tourne avec une vitesse constante mais plus petite qu' Ω_0 . Cette vitesse de précession du centre de la surface a été observée expérimentalement très récemment (Fenistein *et al.* 2006). Pour caractériser son importance, l'écart relatif avec la rotation du fond est tracé en fonction du rapport H/R_s sur la figure 4.22. La transition entre les deux états ouvert et fermé apparaît alors continue comme le propose Fenistein *et al.* (2006), au contraire de ce qu'avancent les auteurs Unger *et al.* (2004).

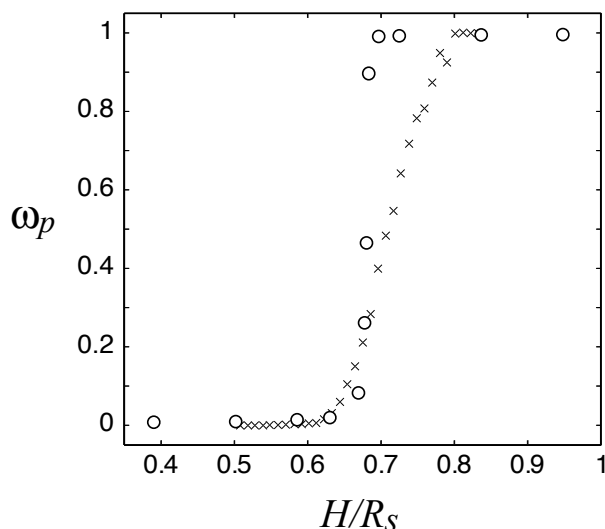


FIG. 4.22 – *Précession de la zone centrale en surface. Écart relatif de vitesse de rotation entre le centre à la surface et au fond $\omega_p = (\Omega_0 - \Omega(z = H, r \rightarrow 0))/\Omega_0$. Les ronds correspondent à nos simulations numériques et les croix aux résultats expérimentaux de Fenistein et al. (2006). La transition a lieu sur une plage de paramètres très restreinte mais les profils de vitesse angulaire évoluent de façon continue en passant d'une géométrie à l'autre.*

Nous avons pu reproduire ces phénomènes grâce à notre code numérique en imposant une vitesse de rotation très lente. De ce fait la rhéologie précise de l'écoulement n'intervient pas, seule la relation définissant le seuil compte. Ces résultats montrent donc que la position des bandes de cisaillement dans ce cas est déterminée en première approximation par la friction de Coulomb et l'équation $|\tau| < \mu_s P$ prédit correctement les contours des zones non-déformées. Cependant l'écriture en termes de viscosité permet de résoudre facilement le problème d'un point de vue de la mécanique des fluides. En revanche la largeur des bandes de cisaillement n'est pas du tout discutée car le régime de déformations quasi-statiques sort du cadre de la rhéologie proposée.

4.7 Conclusion sur la loi constitutive tensorielle

Nous avons proposé une généralisation à trois dimensions de la rhéologie « $\mu(I)$ », en faisant apparaître une viscosité effective. Dans ce cadre, le matériau granulaire est décrit comme un fluide à seuil particulier, où à la fois le seuil et la viscosité dépendent de la pression. Nous avons montré que cette loi constitutive permet de reproduire quantitativement les variations transverses observées dans nos écoulements sur tas entre parois. Même pour des parois rugueuses qui induisent de forts cisaillements transversalement, l'accord est toujours valide.

Notons que dans les expériences et les simulations numériques, une grande gamme de nombre inertiel I a été explorée. Ceci semble confirmer que $\mu(I)$ est une fonction qui croît avec I vers une asymptote. Nous avons vérifié l'existence de la valeur asymptotique μ_2 au-delà de laquelle l'écoulement sort du domaine d'application de la rhéologie car une transition vers un régime collisionnel

(non-prédit) est observé proche de la surface.

Cependant il existe certaines limitations. Premièrement, les mouvements rampants de la zone quasi-statique ne sont toujours pas reproduits. Pour des écoulements à fort débit, cette faible contribution reste négligeable, en revanche lorsque l'on s'approche du seuil d'écoulement, une part importante de l'écoulement intervient par un fluage exponentiellement amorti. Il s'agit d'un défaut général des rhéologies locales. D'autres configurations présentant des bandes de cisaillement mettent à l'épreuve le modèle. Celui-ci réussit à situer correctement les frontières entre les discontinuités de régime, mais l'étendue des bandes de cisaillement reste un problème ouvert à ce jour. Une piste possible serait d'introduire une certaine non-localité qui ne deviendrait importante que proche des limites de domaines. À l'inverse, la théorie actuelle ne décrivant que les écoulements denses, elle ne donne aucun renseignement sur la surface des écoulements à forte inclinaison au-delà de la transition gazeuse. Un lien avec la théorie cinétique pourrait permettre par exemple d'obtenir une description complète de l'écoulement. Finalement nous ne prenons toujours pas en compte les phénomènes d'hystérésis responsables des processus de démarrage et d'arrêt des avalanches.

À ce point là de l'étude, seuls les régimes stationnaires ont été étudiés pour lesquels la rhéologie proposée a montré quelques succès. Qu'en est-il des écoulements accélérés ? Une avalanche qui accélère et grossit en entraînant du matériau initialement statique peut-elle être décrite par ces lois constitutives. Afin d'éclairer la nature des phénomènes d'érosion par un écoulement granulaire sur un fond meuble, nous avons mené de nouvelles expériences en nous focalisant sur le caractère instationnaire des écoulements. Le chapitre suivant est consacré à cette étude.

Chapitre 5

Écoulements instationnaires

5.1 Problématique

Les résultats des chapitres précédents ont montré que la rhéologie proposée était adaptée à la description quantitative des écoulements stationnaires. Nous nous intéressons maintenant aux phénomènes mis en jeu dans les régimes instationnaires. Le profil de vitesse et la position de l'interface liquide-solide peuvent évoluer lors d'un régime transitoire. Comment s'effectuent les processus de dépôt et d'érosion dans les écoulements granulaires denses ? Ces questions n'ont pas encore de réponses définitives.

Plusieurs configurations expérimentales ont permis l'étude des écoulements transitoires. Citons par exemple les études du type «rupture de barrage», dans lesquelles les grains sont confinés latéralement entre des parois que l'on retire rapidement. Selon le rapport d'aspect initial du tas, l'écoulement peut présenter dans un premier temps une phase d'effondrement puis d'étalement. Plusieurs groupes (Lube *et al.* 2004 ; Lajeunesse *et al.* 2004 et 2005 ; Balmforth *et al.* 2005 ; Siavoshi *et al.* 2005) ont récemment étudié ce régime transitoire dans des géométries cylindriques ou bidimensionnelles, cependant l'écoulement est fortement inhomogène. Leurs travaux sont concentrés sur l'évolution temporelle de la forme du tas : des lois d'échelles sont proposées pour les dimensions finales de l'empilement, mais la description des profils de vitesses pendant ce régime transitoire reste succincte. Il semble néanmoins que les auteurs retrouvent des profils de vitesse linéaire à la surface de l'écoulement dont la pente vaut environ $0.3\sqrt{g/d}$ (Lajeunesse *et al.* 2005 ; Siavoshi *et al.* 2005), parfois surmontés d'une partie où la vitesse est constante (Lube *et al.* 2005).

Une deuxième configuration est celle des déclenchements d'avalanches dans les tambours tournants. Récemment, Courrech du Pont *et al.* (2003b ; 2005) ont étudié l'évolution d'avalanches en tambour tournant, dont la vitesse de rotation est négligeable devant la dynamique de l'avalanche. Ils ont mesuré les vitesses en surface et en paroi au cours du temps ainsi que l'évolution de l'inclinaison. Ils ont mis en évidence que, dans ce régime, le profil de vitesse en paroi (et en volume par extrapolation du débit) est exponentiel avec une longueur de décroissance $\lambda \simeq 2d$ constante sur toute la durée de l'avalanche.

Une dernière configuration a fait l'objet d'étude sur les régimes instationnaires : le plan incliné. Daerr *et al.* (1999a ; 2001) ont étudié la dynamique d'avalanches dans la zone de métastabilité d'une couche mince de billes de verre sur de la feutrine ($h_{stop} < h < h_{start}$). Ils ont mesuré la vitesse de propagation des fronts et leur épaisseur à partir d'une perturbation locale. Selon l'écart au

seuil, deux types d'avalanches sont observés (avalanches triangulaires pour $h \gtrsim h_{stop}$ et avalanches se propageant vers l'amont pour $h \lesssim h_{start}$). L'épaisseur maximale est environ le double de l'épaisseur de dépôt. Malloggi (2005a) a étudié dans la même configuration la déstabilisation d'un front d'avalanche homogène. Enfin Barbolini *et al.* (2005) ont étudié des écoulements sur plan incliné dont une partie est remplacée par une couche susceptible d'être érodée. Ils mesurent la progression horizontale du front de mise en mouvement lorsqu'un écoulement recouvre cette zone et ont montré deux mécanismes de mise en mouvement : un premier est du type « labourage », l'écoulement plonge dans la zone statique et la repousse, le second est du type « abrasion », l'écoulement incorpore des grains à l'interface fluide-solide.

Du point de vue géophysique, en ce qui concerne l'érosion d'un lit de matériau granulaire par un écoulement, la majorité des études concerne les avalanches de neige. La plupart des écoulements granulaires naturels prennent la forme de détachement soudain d'une masse importante qui accélère et entraîne éventuellement davantage de matériau. La masse totale de l'avalanche ou du glissement de terrain augmente progressivement, rendant ces écoulements encore plus dangereux. Des mesures de terrain ont montré que la masse d'une avalanche naturelle augmente en moyenne d'un facteur 4 (Sovilla *et al.* 2001 ; Sovilla 2004). Comment cette masse est-elle incorporée à l'écoulement est une question encore ouverte pour les matériaux granulaires. Certaines simulations numériques d'évènements naturels montrent des différences sur les vitesses atteintes et les distances parcourues si on néglige ou non l'érosion du fond par l'écoulement (figure 5.1 et Pitman *et al.* 2003). En effet, sa dynamique est ralentie par la nécessité d'incorporer et d'accélérer du matériau initialement à l'arrêt, mais cela mène à une plus grande masse finale en mouvement.

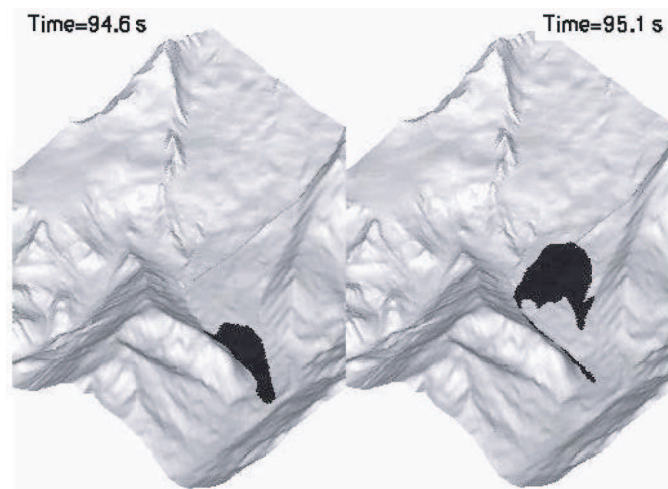


FIG. 5.1 – Exemples de simulations numériques sur une topographie réelle tirées de Pitman *et al.* (2003) montrant la différence de propagation d'un éboulement selon la nature de l'interaction avec le support : (à gauche) une simulation sans érosion et (à droite) avec une érosion calibrée empiriquement.

Ces expériences révèlent que les mécanismes sous-jacents gérant l'interface entre une phase fluide et une phase statique ne sont pas encore bien compris. Les questions sondées correspondent à la fois à l'aspect transitoire de l'écoulement et aux phénomènes d'érosion : Comment les grains initialement au repos sont-ils mis en mouvement ? Comment évolue l'interface entre les deux phases ?

Que valent les contraintes se développant à l'interface ?

Certains travaux théoriques ont tenté d'apporter des éclaircissements à ces phénomènes, notamment les modèles du type BCRE (Bouchaud *et al.* 1994 ; de Gennes 1995). Ces modèles phénoménologiques traitent le transfert de matière entre les phases statique et fluide par l'ajout un terme d'échange. Des modèles plus physiques fondés sur les équations du type Saint-Venant (Douady *et al.* 1999 ; Khakhar *et al.* 2001a ; Gray 2001 ; Naaim *et al.* 2003) sont contraints de faire des hypothèses supplémentaires, sur le profil de vitesse par exemple, pour traiter la dynamique et les phénomènes d'érosion des écoulements granulaires.

De notre côté, nous n'avons pas introduit de relation particulière pour gérer l'érosion d'un fond meuble : seul le seuil de contrainte de mise en mouvement est inclus (équation 4.6). Nous pouvons nous demander si la rhéologie « $\mu(I)$ » permet aussi de décrire de tels régimes instationnaires. Que peut prédire cette rhéologie dans ce cas ? Comment l'écoulement démarre-t-il ? Comment accélère-t-il ? Est-ce que la couche en mouvement varie dans le temps ? Si oui, par quel mécanisme les grains sont-ils incorporés à l'écoulement ?

Afin de comprendre le comportement instationnaire d'un écoulement granulaire, nous avons réalisé des expériences de déclenchement d'avalanches uniformes. Nous apporterons ainsi des éclairages expérimentaux sur un phénomène d'érosion, tout en comparant les résultats aux prédictions de la rhéologie tridimensionnelle.

5.2 Comment les grains se mettent en mouvement : diffusion ou érosion ?

La mise en mouvement des grains peut se faire de plusieurs façons. Une vision souvent admise dans les modèles est que la contrainte à l'interface est initialement sous le seuil de rupture des contacts. Les grains sont par la suite incorporés progressivement au fur et à mesure que l'intensité de la force augmente avec l'accélération et le grossissement de l'avalanche. Il existe donc à un instant donné, entre les grains déjà en mouvement et ceux qui sont à l'arrêt, une frontière qui se propage vers le bas. Mais il faut être prudent car nous pouvons avoir un autre mécanisme. À l'instar des fluides newtoniens mis en mouvement par la translation d'une paroi, nous pouvons avoir l'impression de voir une épaisseur de fluide en mouvement grandir dans le temps alors qu'il s'agit d'un phénomène diffusif dans lequel tout le fluide se déplace.

Afin d'illustrer ces différents mécanismes, nous allons étudier, dans le cadre de notre modèle, les régimes transitoires dans deux configurations d'écoulements granulaires : une cellule de cisaillement homogène et un écoulement 2D sur fond meuble.

5.2.1 Établissement du cisaillement homogène

Considérons la configuration de cisaillement plan sans gravité : deux plaques horizontales distantes de H_0 confinent un milieu granulaire sous une pression P_0 . À l'instant initial, on applique une vitesse constante V_0 à la plaque supérieure, l'autre étant maintenue à une position fixe. D'après la rhéologie $\mu(I)$, le profil de vitesse atteint dans le régime stationnaire est linéaire (Da Cruz 2004). La question que l'on peut se poser concerne la façon dont ce profil de vitesse s'établit. La première

possibilité simple est que la friction propage progressivement le mouvement aux couches inférieures. Selon l'autre scénario, l'ensemble des grains se met à couler en même temps et le gradient de vitesse évolue sur toute la hauteur jusqu'à atteindre le régime stationnaire.

Nous avons réalisé des simulations numériques de cet écoulement en nous intéressant à son évolution temporelle. La figure 5.2 montre l'évolution temporelle du profil de vitesse selon la profondeur. La courbe pointillée représente le profil de vitesse dans l'état stationnaire. À première vue, nous avons l'impression que la zone en écoulement semble se développer progressivement. Cependant, en examinant le profil de vitesse plus attentivement, nous remarquons que toute l'épaisseur H est en mouvement dès le début, car à toute profondeur, la contrainte est supérieure au seuil d'écoulement ($\tau(z) > \tau_c$). Ces profils ressemblent à ceux de l'expérience de Couette plan avec un fluide newtonien, quand la vitesse d'une plaque est brutalement imposée. Il est donc intéressant de comparer leur comportement. Lorsque la diffusion de la quantité de mouvement est pilotée par une viscosité cinématique constante ν les profils de vitesse résultants sont autosimilaires du type $V_0(1 - \text{erf}(z/\sqrt{\pi\nu t}))$. Nous avons donc normé les profils de vitesse et adimensionné la profondeur de telle sorte que le gradient à la surface soit égal à 1 : $z/(V_0/\gamma(0,t))$. Cette démarche est valable tant que la vitesse au fond est très faible pour considérer que le milieu est semi-infini.

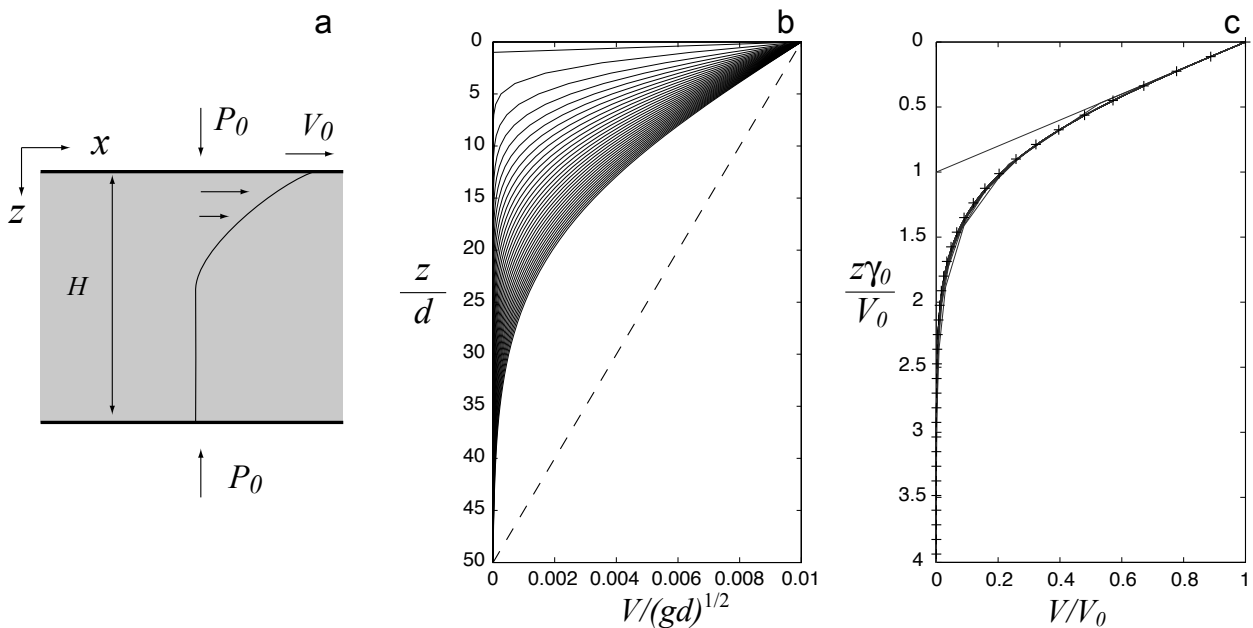


FIG. 5.2 – Évolution temporelle de la vitesse dans une cellule de Couette Plan représentée en (a). La plaque supérieure est entraînée à une vitesse constante V_0 . (b) Profils de vitesse verticaux à différents instants réguliers entre $0 < t < 100\sqrt{d/g}$. La ligne pointillée indique le profil de vitesse stationnaire. (c) Mêmes profils que précédemment, lorsque la coordonnée verticale est normée pour faire correspondre les gradients de vitesse supérieurs. Les croix représentent le profil de vitesse obtenu pour un fluide newtonien : $1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{erf}(\tilde{z})$.

Sur la figure 5.2, nous remarquons que toutes les courbes se superposent pour $3 < t < 100\sqrt{d/g}$. De plus nous avons tracé la courbe $(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{erf}(z))$ en traits tiretés. Elle se superpose aux autres courbes nous confirmant donc que l'établissement de ce profil de vitesse est du type diffusif. La

viscosité correspondante peut être trouvée à partir de l'évolution du gradient de vitesse proche de la plaque en mouvement. La quantité $(V_0^*/\dot{\gamma}^*(0,t))^2$ est une fonction linéaire du temps dans un processus diffusif, la pente de la droite obtenue vaut $\pi\nu$. La figure 5.3 montre l'évolution de cette quantité : nous obtenons une droite dont la pente est égale à 3.781 (courbe pleine). Dans cette simulation, le nombre inertiel de l'état final vaut $I = 0.00022$, le régime d'écoulement est donc proche de la limite quasi-statique. Nous pouvons donc approximer les contraintes dans la limite des petits nombres inertiels :

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = P_0 \frac{\partial\mu(z)}{\partial z} = \frac{P_0 I_0 (\mu_2 - \mu_s)}{(I_0 + I)^2 \sqrt{\phi} P_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \simeq \frac{\sqrt{P_0} (\mu_2 - \mu_s)}{I_0 \sqrt{\phi}} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5.1)$$

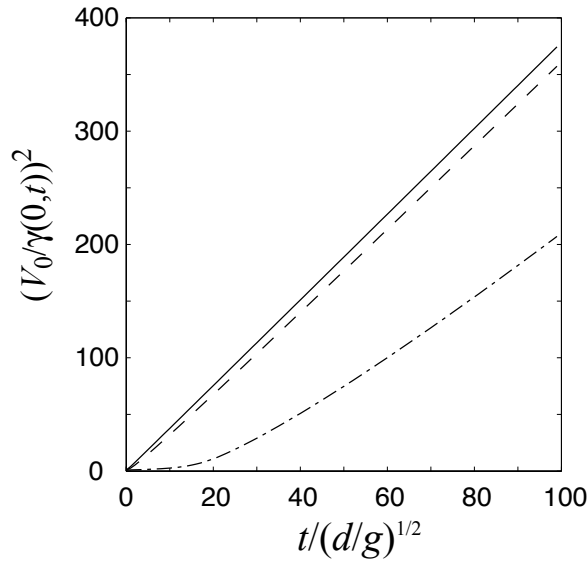


FIG. 5.3 – Évolution temporelle de la quantité $V_0^*/\dot{\gamma}^*(0,t)$ pour $t < 100\sqrt{d/g}$. La ligne continue correspond aux profils de la figure précédente. Le phénomène est complètement diffusif. Les autres courbes correspondent à des vitesses imposées plus grandes $V_0^* = 0.1$ (courbe tiretée) et $V_0^* = 1$ (courbe mixte). Les nombres inertiels correspondant sont plus importants, donc le comportement s'écarte de celui d'un fluide newtonien (la viscosité n'est plus constante).

La viscosité cinématique effective est égale à $\nu = \frac{\sqrt{P_0}(\mu_2 - \mu_s)}{I_0 \sqrt{\phi}} = 1.206$. Cette valeur est proche de $\nu = \text{pente}/\pi = 1.203$ extraite de la simulation, la mise en mouvement du milieu est donc ici un phénomène diffusif. Dans le cas d'un nombre inertiel I plus grand, la diffusion devient anormale du fait des relations constitutives non linéaires. La viscosité n'est donc plus constante dans le matériau, néanmoins tout le matériau coule instantanément entre les deux plaques. Les autres lignes de la figure 5.3 (ligne tiretée et mixte) correspondent à des simulations où la vitesse est plus importante (viscosité non-linéaire).

Si dans le cisaillement homogène le mécanisme de mise en mouvement est diffusif, dans le cadre des écoulements sur fond meuble, nous allons montrer que les phénomènes d'érosion sont à l'oeuvre au niveau du démarrage d'un écoulement.

5.2.2 Établissement de l'écoulement entre deux parois

Considérons un écoulement 2D, unidirectionnel, uniforme à une inclinaison θ , confiné entre deux plaques de verre. Nous avons montré théoriquement que l'épaisseur h_s atteinte dans le régime stationnaire vaut :

$$\frac{h_s}{W} = \frac{\tan \theta - \mu_s}{\mu_w}. \quad (5.2)$$

Nous pouvons nous intéresser maintenant au démarrage d'un tel écoulement. L'inclinaison θ étant imposée, laissons évoluer l'écoulement depuis une vitesse nulle vers le régime stationnaire. Résoudre le mouvement transitoire analytiquement est difficile, néanmoins nous pouvons regarder la partie de l'écoulement qui est instable aux premiers instants. La modélisation 2D du chapitre 3 suppose qu'au seuil du démarrage, la contrainte appliquée par les parois soit à sa valeur de rupture donnée par la friction de Coulomb. L'équation 5.3 exprime localement l'accélération initiale d'un élément de matériau :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho g \sin \theta - \frac{\partial(\mu(I)P)}{\partial z} - 2\mu_w \frac{P}{W}, \quad (5.3)$$

avec $P = \rho g z \cos \theta$. Si nous considérons les premiers instants suivant la rupture, la partie fluide du milieu granulaire est décrite par la rhéologie $\mu(I)$, mais le cisaillement est extrêmement faible donc $\mu(I) \simeq cst \simeq \mu_s$. Nous pouvons considérer que cette approximation est valable juste après que l'avalanche se déclenche. L'équation 5.3 se réécrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \sin \theta - \mu_s g \cos \theta - 2\mu_w g \cos \theta \frac{z}{W}. \quad (5.4)$$

En regardant le signe du second membre, nous voyons que pour des couches très proche de la surface, l'accélération est positive (puisque $\theta > \theta_s$). Elle n'est pas constante car en s'enfonçant dans le tas, son amplitude diminue. Il existe donc une profondeur h_0 à laquelle l'accélération locale initiale s'annule :

$$\frac{h_0}{W} = \frac{\tan \theta - \mu_s}{2\mu_w}. \quad (5.5)$$

Nous remarquons que la valeur de la profondeur h_0 à laquelle l'accélération locale vaut initialement zéro est la moitié de l'épaisseur h_s de l'écoulement 2D stationnaire. Toute la partie supérieure accélère instantanément, alors que les couches plus profondes doivent attendre que la contrainte tangentielle dépasse le seuil d'écoulement pour se mettre en mouvement. La figure 5.4 montre l'évolution de l'épaisseur roulante sur un exemple de simulation numérique bidimensionnelle où les effets des parois sont pris en compte sous la forme de friction. Les données numériques prévoient une épaisseur dans l'état stationnaire de $h_s/d = 34.8$ et une épaisseur sur laquelle se déclenche l'écoulement $h_0/d = 17.4$. Du fait de la faible discrétisation de cette simulation, nous observons un faible écart avec les valeurs prédites, néanmoins dès les premiers pas de temps, la valeur de la profondeur de l'écoulement vaut environ la moitié de celle de l'état stationnaire. Par la suite l'écoulement ne se produit pas instantanément sur le reste de l'épaisseur finale.

L'avalanche va donc graduellement augmenter son épaisseur par érosion, jusqu'à atteindre le régime stationnaire. Cette érosion est intrinsèque à la rhéologie et ne nécessite pas l'introduction d'une loi d'échange particulière entre les deux phases. Lorsque l'écoulement accélère, le gradient de vitesse augmente, donc le nombre inertiel aussi. Ainsi la contrainte tangentielle augmente et le

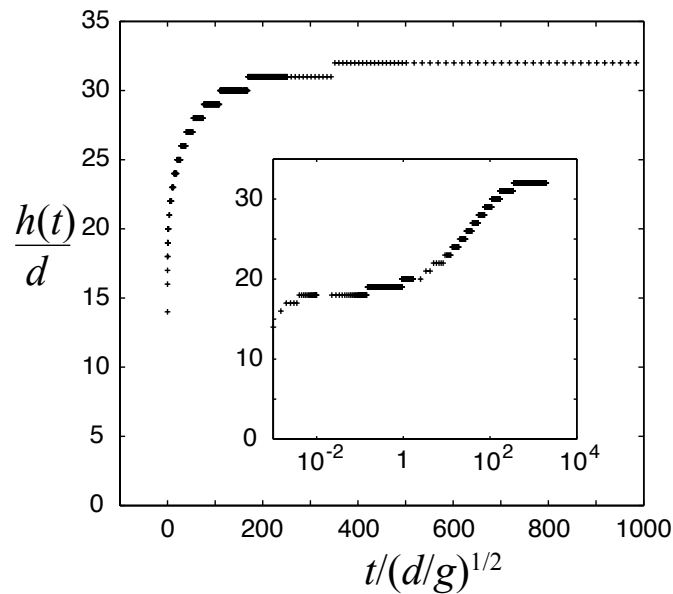


FIG. 5.4 – Évolution de l'épaisseur d'un écoulement 2D uniforme au cours du régime transitoire. L'inclinaison vaut $\theta = 27^\circ$ et la largeur $W/d = 50$. Dans l'encart, la figure est identique mais l'échelle temporelle est logarithmique. L'écoulement démarre sur une épaisseur $h_0/d = 14$, puis le fond se creuse jusqu'à atteindre la valeur du régime stationnaire $h_s/d = 32$.

seuil d'écoulement est franchi progressivement repoussant la frontière liquide-solide vers le bas.

Aux vues des deux comportements possibles, diffusif ou d'érosion, il est intéressant d'étudier plus en détail les démarrages d'écoulements sur fond meuble. Nous allons réaliser des expériences portant sur le régime transitoire d'un écoulement uniforme sur tas. Les résultats seront comparés aux prédictions de simulations numériques 3D utilisant la rhéologie locale « $\mu(I)$ ».

5.3 Expériences : déclenchement d'avalanches uniformes

Dans le but d'explorer les phénomènes d'érosion, nous allons étudier le démarrage d'un écoulement dans une configuration particulière. En effet, l'évolution d'une avalanche localisée est caractérisée non seulement par un régime instationnaire, mais aussi par une propagation spatiale de l'information. Nous voulons pour le moment éviter cette superposition d'effets. De plus, dans le cas où un empilement est progressivement incliné jusqu'à ce qu'une avalanche se déclenche, l'écoulement se produit dans une région proche du seuil de mise en mouvement. Or nous savons que notre rhéologie a déjà quelques difficultés à décrire les écoulements stationnaires proches des débits critiques. Nous voulons donc étudier les régimes transitoires loin du seuil d'écoulement. L'idée principale de l'expérience est donc de laisser évoluer un tas long, de surface plane, mais dont l'inclinaison est au-dessus de l'angle de repos du matériau θ_s . Nous nous attendons à observer, loin des bords, le déclenchement d'un écoulement uniforme.

5.3.1 Dispositif

Nous allons étudier le démarrage d'un écoulement uniforme en suivant l'évolution de la vitesse dans la profondeur. L'écoulement restera ainsi parallèle à la surface initiale jusqu'à l'établissement du régime stationnaire.

La figure 5.5 représente le dispositif expérimental. Nous nous limitons à l'étude des avalanches dans des canaux étroits ($W = 1$ cm) pour que ce qui est visible en parois soit représentatif de l'écoulement en volume. La préparation du tas se fait par l'intermédiaire d'une cale en L qui peut pivoter autour d'un axe. Initialement, la cale est en position basse et nous injectons les grains sous celle-ci. À $t = 0$, nous lâchons les grains en soulevant rapidement la cale. Les images de l'écoulement ont été acquises à des taux entre 500 et 2000 images par secondes par la caméra rapide. Elle aura au préalable été alignée avec soin à la surface libre.

Puisque la largeur W est fixée à 1 cm, le seul paramètre de contrôle est l'inclinaison θ de la surface. La procédure consiste donc à lâcher les billes du tas et à filmer l'accélération des grains au niveau de la surface libre plane. Nous en tirons l'évolution du profil de vitesse $V(z,t)$ par PIV.

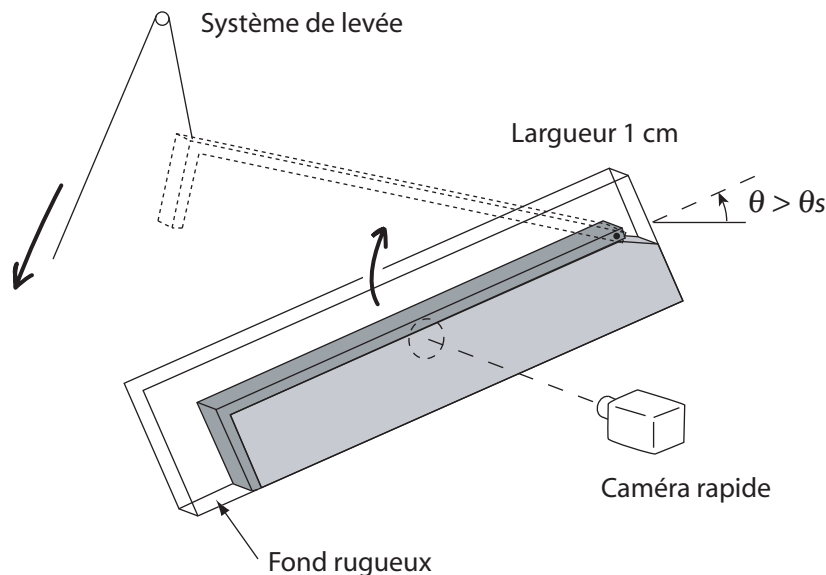


FIG. 5.5 – Schéma de l'expérience de déclenchement d'avalanches uniformes. Deux plaques de verres et une cale en L pivotante confinent une couche de matériau d'une dizaine de centimètres d'épaisseur que l'on libère brusquement.

Afin de garantir une reproductibilité des expériences, nous devons prendre des précautions expérimentales.

Premièrement, il est nécessaire de libérer le tas rapidement pour ne pas gêner son évolution ultérieure. Cependant il ne faut pas aller trop vite non plus : nous avons essayé de relever la cale en lâchant une masse reliée au fil de levée. Cette technique s'est avérée trop brutale. En effet, la cale obstruant complètement la partie supérieure du canal, elle crée une dépression en se soulevant. Cette dépression peut être suffisante pour que le mouvement de l'air à travers le tas entraîne des billes de verre ($d = 530 \mu\text{m}$). La figure 5.6 montre ce phénomène. Ces grains mis en suspension vont par la suite acquérir des vitesses plus importantes et venir frapper la surface. Nous voulons

éviter ce processus. La levée de la cale sera donc faite à la main ce qui assure un démarrage plus doux tout en étant assez rapide : l'extrémité de la cale se soulève totalement en 0.2 secondes ce qui est du même ordre de grandeur que le temps nécessaire à l'effondrement de l'avant du tas (0.1 s). Cependant, la zone qui nous intéresse est au milieu du canal, la cale se soulève d'un diamètre de grain en 4 ms, ce qui reste court devant le temps de chute d'un grains sous l'effet de la gravité ($\sqrt{2d/g} = 10$ ms).

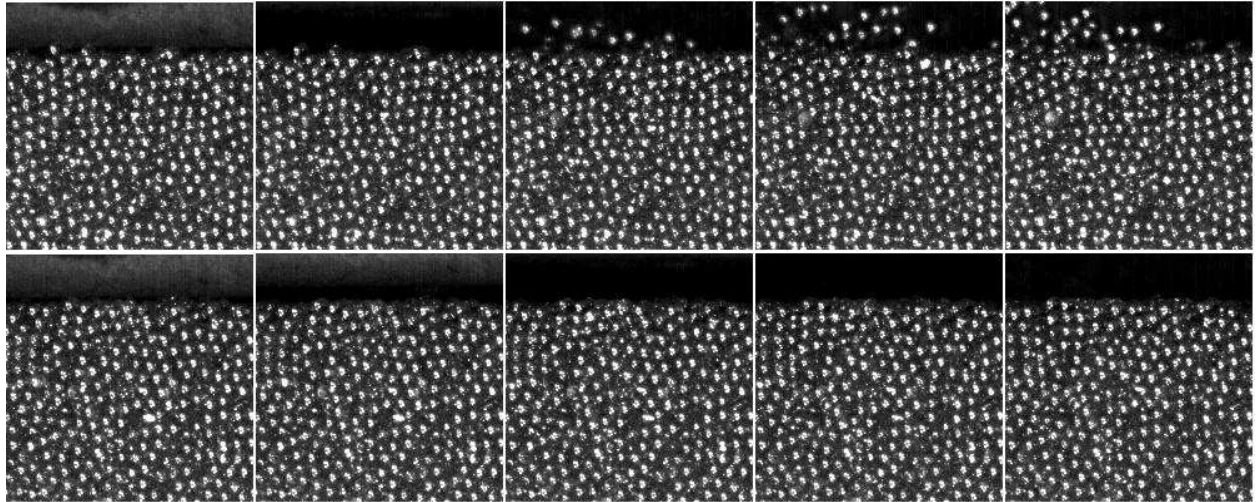


FIG. 5.6 – Déclenchement de l'écoulement, pour deux vitesses de retrait de la cale différentes à $\theta = 29.5^\circ$. Les images sont espacées de 10 ms. (haut) Pour une vitesse de la cale élevée, les grains à la surface sont projetés hors du tas par l'écoulement d'air accompagnant la cale. (bas) Pour une vitesse de retrait de la cale deux fois plus lente, les grains ne sont pas perturbés par le départ de la cale et la surface reste plate.

La deuxième précaution porte sur l'état initial de l'empilement. Lors de la préparation du tas, le remplissage s'effectue par une alimentation continue. Cependant vue la grande dimension du tas, des avalanches vont se succéder. Ce mode d'écoulement peut amener une structuration particulière du tas (Vanel *et al.* 1999 ; Daerr *et al.* 1999b). Nous observons notamment, proche de la cale, une variation de la hauteur de la surface due aux impacts des avalanches. La figure 5.7 montre un exemple de l'état de la surface après remplissage. L'ensemble est éclairé par l'arrière faisant apparaître des interstices lumineux. Pour ne pas être gênés par d'éventuels défaut de planéité de la surface nous faisons vibrer le support de l'expérience en tapant doucement cinq fois sur un des montants métalliques. Ceci provoque des écoulements le long de la cale et a donc pour effet de tasser le tas tout en reconstituant une surface parallèle à la cale.

Sur la figure 5.8a sont tracées les évolutions de la vitesse à une hauteur constante au cours du temps pour une inclinaison $\theta = 28.85^\circ$. La courbe épaisse représente le résultat moyen pour cet angle et la courbe fine celui d'une expérience sans avoir tassé l'empilement. La comparaison de mesures effectuées en tassant un peu ou pas ne révèle aucune différence. La figure 5.8b montre les résultats bruts issus de dix expériences individuelles. Le bruit des mesures a une amplitude similaire à celui de la courbe « non tassée ». La superposition tant temporelle qu'en amplitude montre la bonne reproductibilité des expériences et la robustesse des résultats obtenus. Ainsi les profils

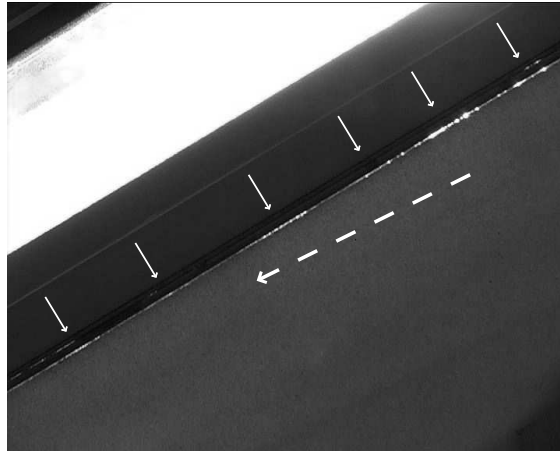


FIG. 5.7 – Image de l'empilement juste après avoir formé le tas par des avalanches successives. Les flèches blanches montrent les positions des creux laissés par les impacts des avalanches sur la cale. La flèche discontinue indique la direction de l'écoulement lors du remplissage. La verticale de l'image coïncide avec la pesanteur.

de vitesse expérimentaux $V(z,t)$ présentés seront le résultat de la moyenne de dix expériences. L'évolution de la vitesse est donc peu sensible aux conditions initiales.

5.3.2 Description qualitative de l'écoulement

Lorsque la cale est retirée, la partie aval du tas, « en surplomb », s'effondre sous l'effet de la gravité. Simultanément, étant donné que l'inclinaison θ du tas est supérieure à un angle θ_{min} , l'écoulement s'initie de façon uniforme sur toute la surface du tas.

L'interface entre la zone statique et la zone fluide est schématisée par la ligne pointillée sur la figure 5.9a. L'écoulement peut être scindé en trois parties. En bas, la zone aval présente une pente plus forte que la moyenne donc le débit y est plus important. Cet écoulement grignote progressivement le tas, le front d'érosion se propage donc vers l'arrière (flèche blanche sur la figure 5.9). Au sommet du tas, les billes ne sont pas réapprovisionnées donc la pente locale diminue en même temps que la hauteur. La conséquence directe est que le débit local s'affaiblit et un front de vidange se propage vers le bas. Entre ces deux zones, la pente reste parallèle à la surface initiale, l'écoulement se développe comme s'il était à la surface d'un tas infiniment long. La vitesse des billes est quasiment alignée avec la pente du tas et les propriétés sont invariantes le long de l'écoulement. C'est à cette zone invariante par translation et en accélération que nous allons nous intéresser par la suite.

La figure 5.10 est le résultat de la différence entre deux images espacées de 40 ms. La trace fine et blanche en aval correspond au recul du tas, et les zones claires correspondent à la partie en écoulement. Nous voyons ainsi l'écoulement uniforme au centre, l'augmentation de l'épaisseur vers l'aval du tas et la diminution de l'épaisseur à l'arrière de l'écoulement.

Des expériences ont été réalisées à plusieurs inclinaisons. Afin d'estimer la durée des mesures pendant laquelle la zone centrale reste inaltérée par les deux fronts, nous avons mesuré l'épaisseur

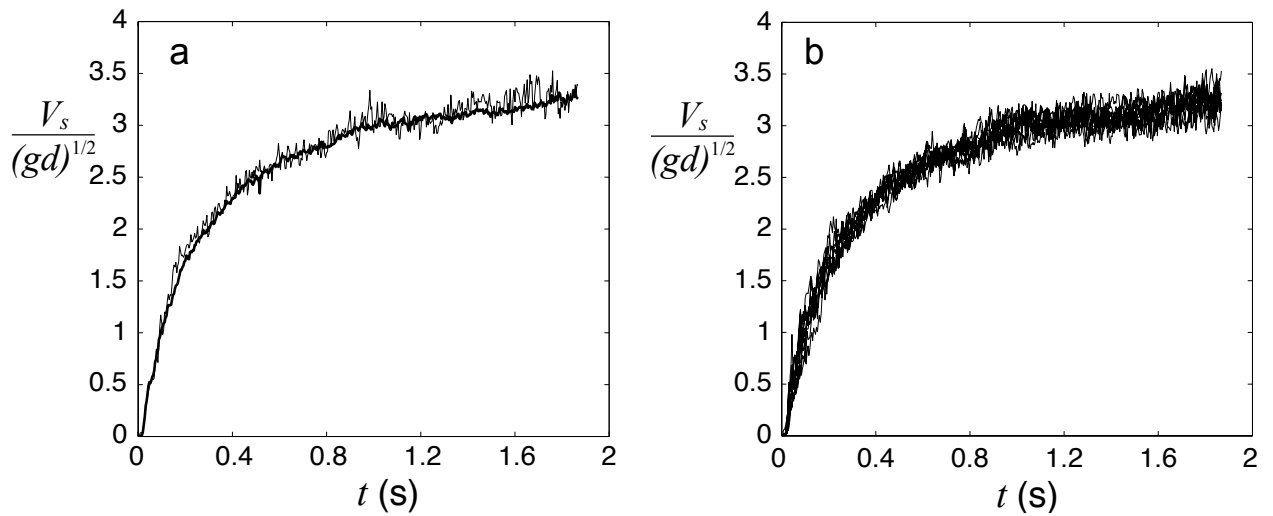


FIG. 5.8 – Sensibilité des mesures aux conditions expérimentales. (a) Comparaison de la vitesse de surface moyennée sur 10 expériences (ligne épaisse) avec le résultat d'une expérience sans tasser l'empilement entre le remplissage et le déclenchement de l'écoulement (ligne fine). (b) Superposition des vitesses en surface pour 10 expériences.

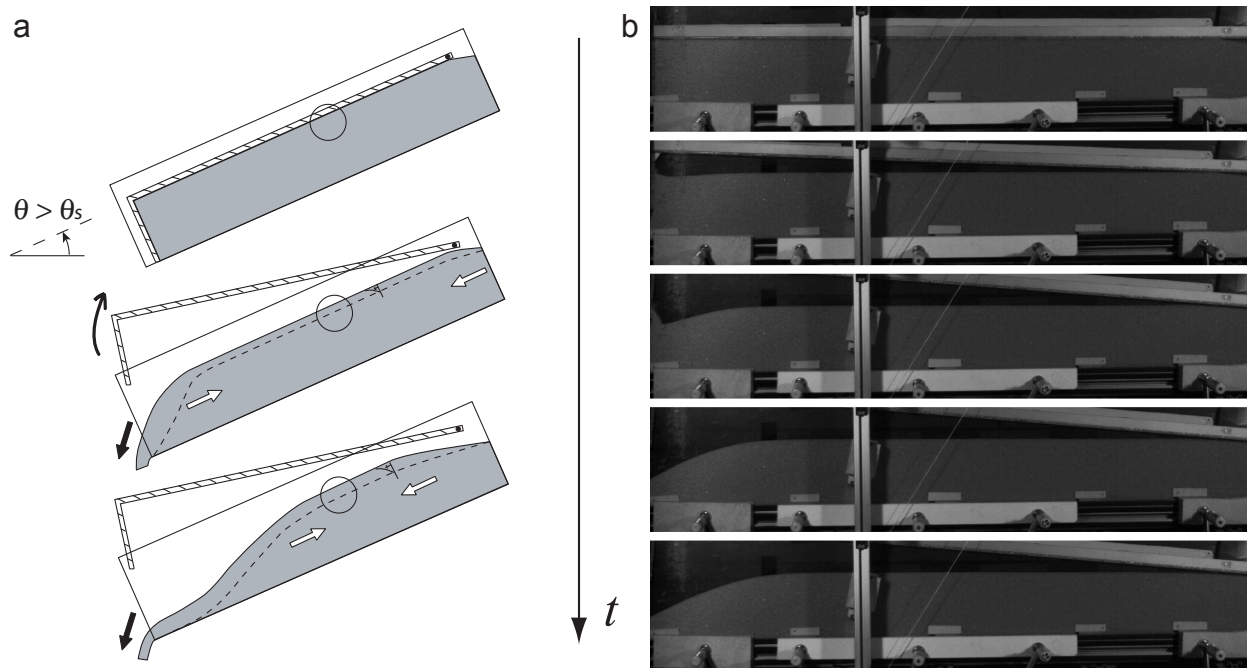


FIG. 5.9 – Évolution de l'empilement sous l'effet de la gravité. (a) Schéma illustrant la propagation des fronts amont et aval ainsi que le développement de l'écoulement. Les mesures seront faites dans la zone uniforme marquée d'un cercle tant que les deux fronts ne se sont pas rejoints. (b) Séquences d'images prises toutes les 100 ms, $\theta = 32.15^\circ$. Le fil-à-plomb présent devant le canal indique la direction de la pesanteur et permet de vérifier la valeur de l'inclinaison.

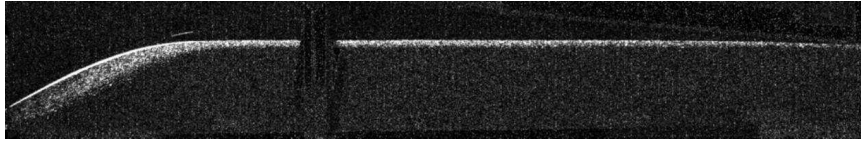


FIG. 5.10 – Différence d'images espacées de 40 ms, montrant la partie du tas en écoulement (grisée) par rapport à la zone statique. Au centre, l'écoulement est parallèle à la surface et uniforme.

du tas par traitement d'images. Les figures 5.11 montrent l'évolution temporelle de la position de la surface. Chaque courbe représente la hauteur du tas dans le repère incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale à des instants différents. La première figure correspond à une expérience à un angle de 26.1° . Nous observons clairement le plateau de la hauteur initiale qui diminue lorsque le front remonte. Pour une inclinaison importante ($\theta = 32.15^\circ$), le débit est tel que l'arrière du tas se vide rapidement et son épaisseur diminue (figure 5.11b). Ces graphiques permettent de choisir correctement la position des mesures de champ de vitesse. La caméra rapide sera placée à l'endroit où la surface reste le plus longtemps à sa hauteur initiale : pratiquement au milieu du canal, un peu plus en amont.

Dans cette zone centrale, les vitesses maximales évoluent en fonction du temps de la façon suivante (figure 5.12). Dans le cas d'une inclinaison faible, nous voyons que l'écoulement atteint le régime stationnaire ; au contraire pour un angle important, nous n'observons qu'une accélération continue. Par exemple, la figure 5.12a correspond à un angle $\theta = 26.1^\circ$. Les grains en surface accélèrent, puis leur vitesse se stabilise, enfin la nouvelle accélération à partir de $t = 2.5$ s est due à l'arrivée du front aval. La vitesse d'un écoulement à $\theta = 31.20^\circ$ est tracée sur la figure 5.12b. Cette fois-ci les grains accélèrent pendant toute la durée de la mesure, au-delà les fronts perturbent l'écoulement. La durée maximale permettant d'observer un écoulement uniforme dépend donc de l'inclinaison et varie de 1 à 2.5 secondes.

Maintenant que nous avons déterminé la position de la zone à étudier ainsi que la durée pendant laquelle l'écoulement reste uniforme, nous allons mesurer systématiquement l'évolution du profil de vitesse que nous comparerons avec les prédictions de la rhéologie.

5.4 Résultats expérimentaux

Pour une inclinaison fixée, nous avons mesuré dans la zone centrale du tas, où l'écoulement est uniforme, l'évolution des profils verticaux de vitesse des billes en fonction du temps à partir de films réalisés proche des parois : l'image couvre typiquement une zone de 1.5×6 cm. L'uniformité de l'écoulement permet de traiter par PIV toute la largeur de l'image (1200 pixels) d'un coup. Cette possibilité améliore la précision dans la direction de l'écoulement, ce qui est nécessaire car nous ne pouvons plus moyenniser les mesures dans le temps. Les images de chaque couple sont séparées d'une durée de 0.7 à 2 ms afin de garder une bonne résolution temporelle.

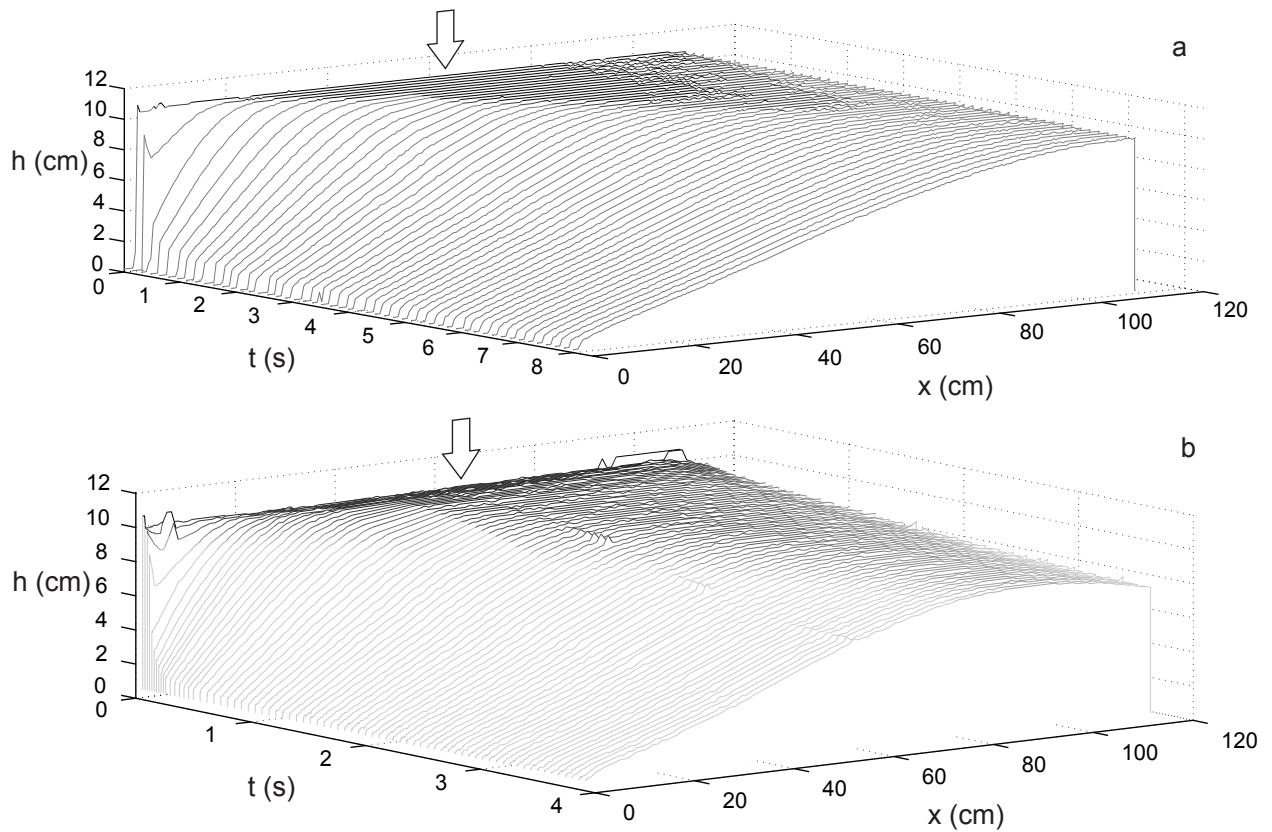


FIG. 5.11 – Évolution temporelle de la surface du tas pour deux inclinaisons différentes : (a) $\theta = 26.1^\circ$, (b) $\theta = 32.15^\circ$. Pour la forte inclinaison, la durée de l'expérience est plus courte. L'origine de l'axe x le long du tas est placée ici à l'extrémité basse de la cale. Noter que l'échelle verticale est dilatée par rapport à l'échelle horizontale. Les flèches indiquent l'endroit où la surface reste le plus longtemps à son niveau initial, les mesures de vitesse se feront à cette position.

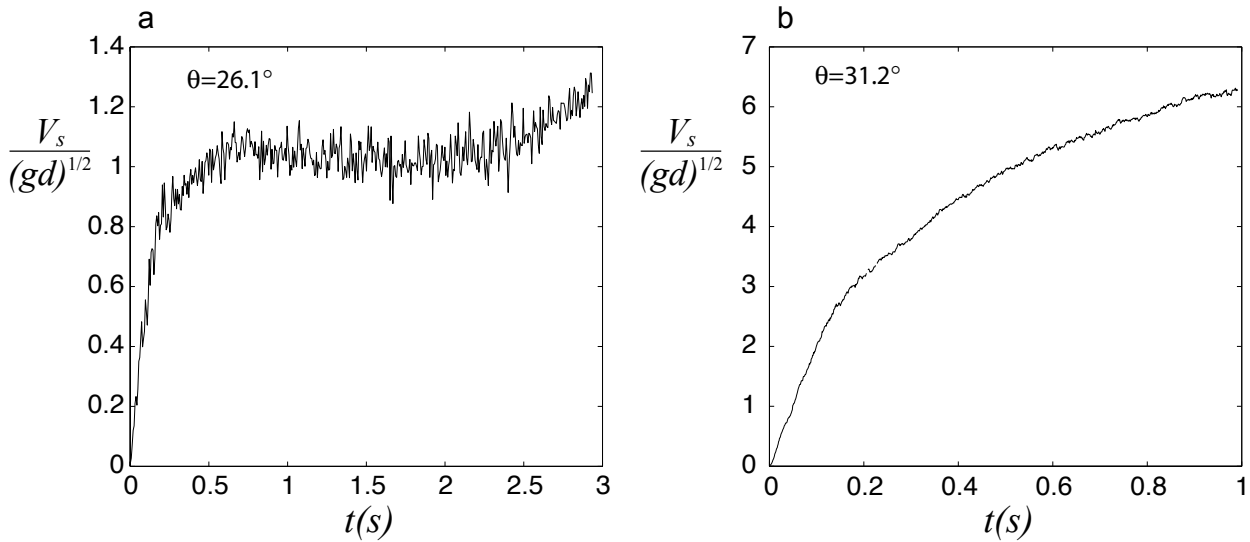


FIG. 5.12 – Variations de la vitesse de surface mesurée en paroi au cours du temps. (a) $\theta = 26.10^\circ$. (b) $\theta = 31.20^\circ$. Selon l'inclinaison, la durée d'acquisition avant que le front aval ne perturbe l'avalanche permet d'atteindre une saturation de l'écoulement, comme s'il était déclenché sur un tas semi-infini.

5.4.1 Position de la surface libre

Nous avons tout d'abord mesuré la position moyenne de la surface dans le repère lié à la pente. L'intensité lumineuse d'une image est moyennée le long de l'écoulement, la zone occupée par les billes définit un plateau d'intensité (figure 5.13a). La surface coïncide avec le milieu du saut d'intensité. Cette mesure est nécessaire pour déterminer correctement la vitesse à la surface. En effet la PIV est pratiquée en des positions fixes sur toutes les images du film d'une expérience. Nous extrapolons donc linéairement la vitesse à la surface à partir des données brutes. Nous appelons «vitesse de surface V_s » la vitesse de ces points. Cette définition permet de ne pas prendre en compte la vitesse des billes qui dépasseraient occasionnellement la surface moyenne. La figure 5.13b montre le résultat brut d'une mesure par PIV du profil de vitesse selon la profondeur correspondant à l'image de gauche.

Ce procédé de suivi d'interface nous permet de mettre en évidence un phénomène de dilatance bien connu depuis Reynolds (1885) : lorsqu'un milieu granulaire est déformé, il peut se dilater si la fraction volumique initiale est suffisamment grande. La figure 5.15e montre un exemple de variation de la position de la surface libre au cours d'une expérience : au début du régime transitoire, le volume du tas augmente un peu, il se dilate sous l'effet du déplacement des grains. Dans toute la suite, nous prendrons la position de la surface comme origine de l'axe orthogonal z .

5.4.2 Profils de vitesse

Les figures 5.14 montrent un résultat typique de l'évolution de la vitesse. Les courbes représentées correspondent à un échantillonnage de 30 ms sur une durée totale de 1.8 s. Sur la figure 5.14a, nous observons l'accélération du profil de vitesse : les grains accélèrent rapidement pendant

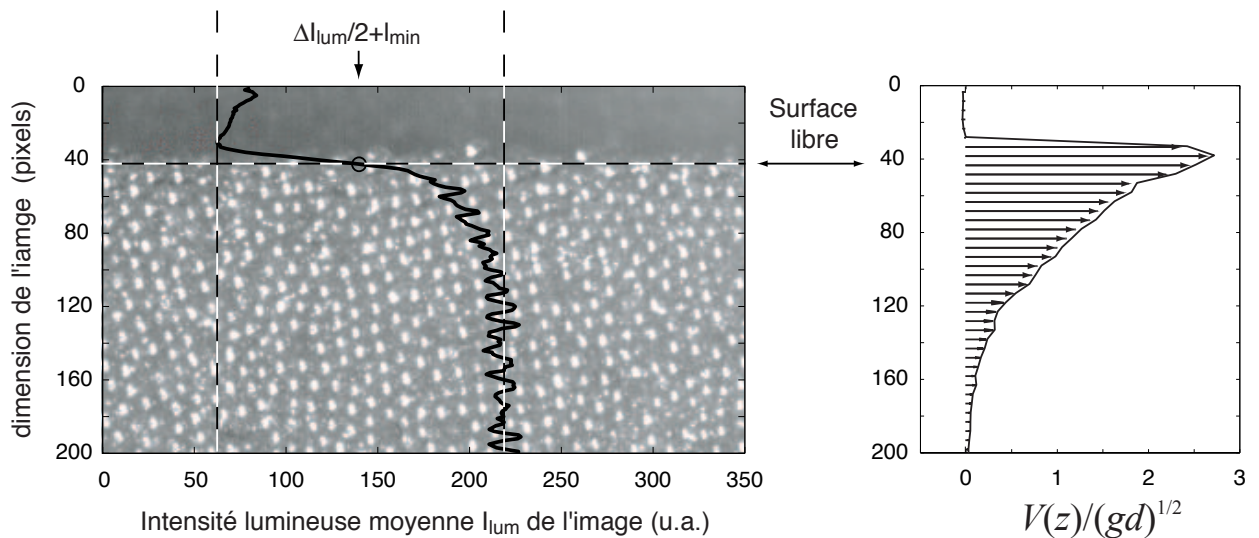


FIG. 5.13 – Exemple de traitement de l'image pour trouver la position de la surface. (a) Profil de luminosité moyenné sur la largeur (en noir) superposé à la photo. L'altitude de la surface (ligne pointillée horizontale) correspond au point à mi-hauteur de la courbe (cercle). (b) Exemple de profil de vitesse instantané trouvé par la PIV pour une expérience à $\theta = 28.0^\circ$.

le régime transitoire. Puis la vitesse sature, ceci est visible lorsque les courbes se superposent. Le profil de vitesse semble atteindre une épaisseur importante rapidement puis il continue de se développer. La figure 5.14b représente les mêmes profils avec une échelle logarithmique. Nous pouvons premièrement distinguer, dans le régime saturé, la partie exponentielle profonde de la partie supérieure de l'écoulement. Ce résultat est en accord avec les travaux de Komatsu *et al.* (2001), Bonamy *et al.* (2002a) et Courrech du Pont *et al.* (2003b, 2005) sur le mouvement rampant de la zone statique. Une sélection de profils de vitesse est visible sur la figure 5.14c afin de mettre en évidence la zone quasi-statique. Chaque segment correspond à un ajustement exponentiel de la partie profonde de l'écoulement. Cette partie exponentielle semble être prépondérante au début du régime transitoire. Cependant il n'est pas aisé de le voir directement sur ces figures.

Afin d'avoir une description plus précise de l'évolution de la vitesse des billes, nous avons extrait plusieurs données de ces profils. Nous traçons dans un premier temps les variations de la vitesse en surface V_s en fonction du temps (figure 5.15a) ainsi que celles du débit instantané Q correspondant à l'intégration du profil de vitesse sur la hauteur z (figure 5.15b). Nous remarquons que ces grandeurs évoluent pendant un temps relativement court puis atteignent des valeurs stables. Les évolutions temporelles de la vitesse et du débit sont similaires, la durée du régime transitoire semble être la même : le régime stationnaire est atteint au bout d'une seconde environ.

5.4.3 Définition d'une épaisseur d'écoulement ?

À partir de ces profils de vitesse, peut-on définir une épaisseur d'écoulement afin de clarifier l'existence d'un processus d'érosion ? Aux vues de l'allure des profils de vitesse exponentiels à faible vitesse, nous ne pouvons pas trouver une profondeur à laquelle $V = 0$. Nous pouvons

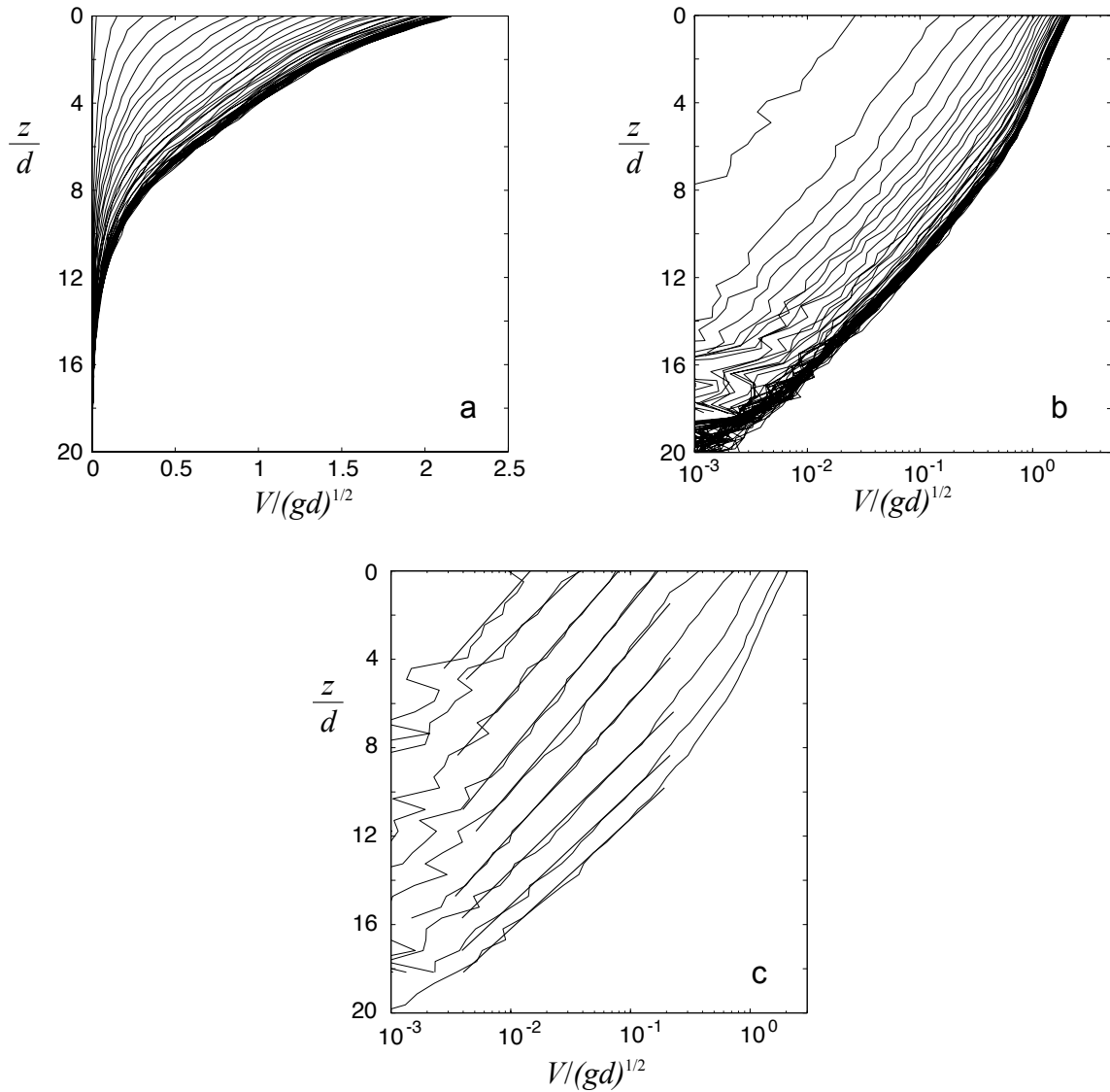


FIG. 5.14 – Évolution du profil de vitesse en paroi (a) en échelle linéaire et (b) en échelle log-lin, pour une expérience à $\theta = 28.0^\circ$. Ces données résultent de la moyenne de dix expériences identiques. Les courbes sont représentées à des intervalles de temps réguliers de $\Delta t = 30$ ms. La zone de superposition correspond à la saturation du profil de vitesse. (c) Ajustement exponentiel de la partie profonde des profils de vitesse pour $t(\text{ms}) = 3, 7, 16, 36, 69, 136, 270, 536$ et 1800 ms. L'extension des traits correspond à la zone ajustée.

néanmoins définir deux longueurs caractéristiques :

- La première est la longueur caractéristique de l'atténuation exponentielle du profil de vitesse notée λ .
- La seconde est une épaisseur moyenne $\langle h \rangle$ définie à partir du rapport du débit et de la vitesse en surface : $\langle h \rangle = Q/V_s$.

Pour un profil de vitesse purement linéaire, $\langle h \rangle$ serait égal à la moitié de l'épaisseur réelle de l'écoulement. Au contraire, pour un profil vertical de vitesse purement exponentiel, $\langle h \rangle$ est alors égal à la longueur d'atténuation λ de cette exponentielle. Les figures 5.15c et d montrent l'évolution temporelle de ces deux longueurs.

L'épaisseur moyenne $\langle h \rangle$ démarre à partir d'une valeur non nulle, contrairement au débit et à la vitesse en surface. Ensuite, elle augmente pour atteindre sa valeur limite dans le régime saturé (figure 5.15c).

Nous avons aussi mesuré la longueur de décroissance de l'exponentielle. La figure 5.15e montre l'évolution de la longueur caractéristique de la partie profonde de l'écoulement. Nous remarquons qu'elle diminue rapidement au cours du temps pour atteindre une valeur seuil. Cette évolution était appréciable sur la figure 5.14c. La longueur de décroissance de cette exponentielle vaut environ $\lambda \simeq 2.1d$. Cette valeur est plus grande que celle de Komatsu *et al.* (2001), qui travaillent en régime continu avec des billes d'aluminium $\lambda \simeq 1.35d$, mais est similaire à celle qu'ont trouvée Bonamy *et al.* (2002a), en tambour tournant avec des billes métalliques ($\lambda \simeq 2.5d$) en régime continu, et celle qui est mesurée par Courrech du Pont *et al.* (2003b ; 2005) qui ont étudié les déclenchements d'avalanches spontanées de billes de verre en tambour tournant ($\lambda \simeq 2.5d$). Étant donné le peu de points accessibles pour ajuster l'exponentielle aux temps courts, l'analyse de la décroissance de λ nécessite des précautions, toutefois, cette tendance est confirmée dans toutes les expériences. Ce résultat diffère de celui de Courrech du Pont *et al.* (2005) qui trouvent que λ est constant dès les premiers instants, leurs données sont cependant assez bruitées pour $t < 0.1$ s. Après cette courte décroissance, λ est relativement constant. Nous avons reporté cette valeur en fonction des inclinaisons des écoulements sur la figure 5.15f. Elle a été mesurée dans le régime saturé, lorsqu'il existe, sinon en fin de mesure. Nous constatons qu'elle ne semble pas dépendre non plus de l'inclinaison. Ce dernier résultat est compatible avec ceux de Bonamy *et al.* (2002a) et de Courrech du Pont *et al.* (2005).

Finalement, quelle que soit la définition d'épaisseur que nous retenons, cette épaisseur évolue au cours du régime transitoire. Le profil expérimental ne correspond à aucun des deux régimes extrêmes présenté plus haut : il n'est ni purement exponentiel ni purement linéaire. Néanmoins, d'après la discussion ci-dessus, le fait que $\langle h \rangle$ soit différent de zéro dès le début signifie que l'écoulement s'initie sur une profondeur non nulle. L'épaisseur moyenne $\langle h \rangle$ combine à la fois l'évolution de la profondeur de l'écoulement et la forme du profil. Son évolution ne reflète donc pas directement celle de l'épaisseur réelle. Enfin le profil de vitesse n'est exponentiel que dans la partie profonde de l'écoulement contrairement à Courrech du Pont *et al.* (2005) qui n'ont observé que des profils purement exponentiels, cependant toutes leurs expériences concernent des avalanches naturelles déclenchées au seuil d'écoulement.

Nous avons mesuré de façon systématique toutes ces quantités en faisant varier l'inclinaison de la surface du tas dans la gamme d'angle qui nous permet d'obtenir des régimes stationnaires

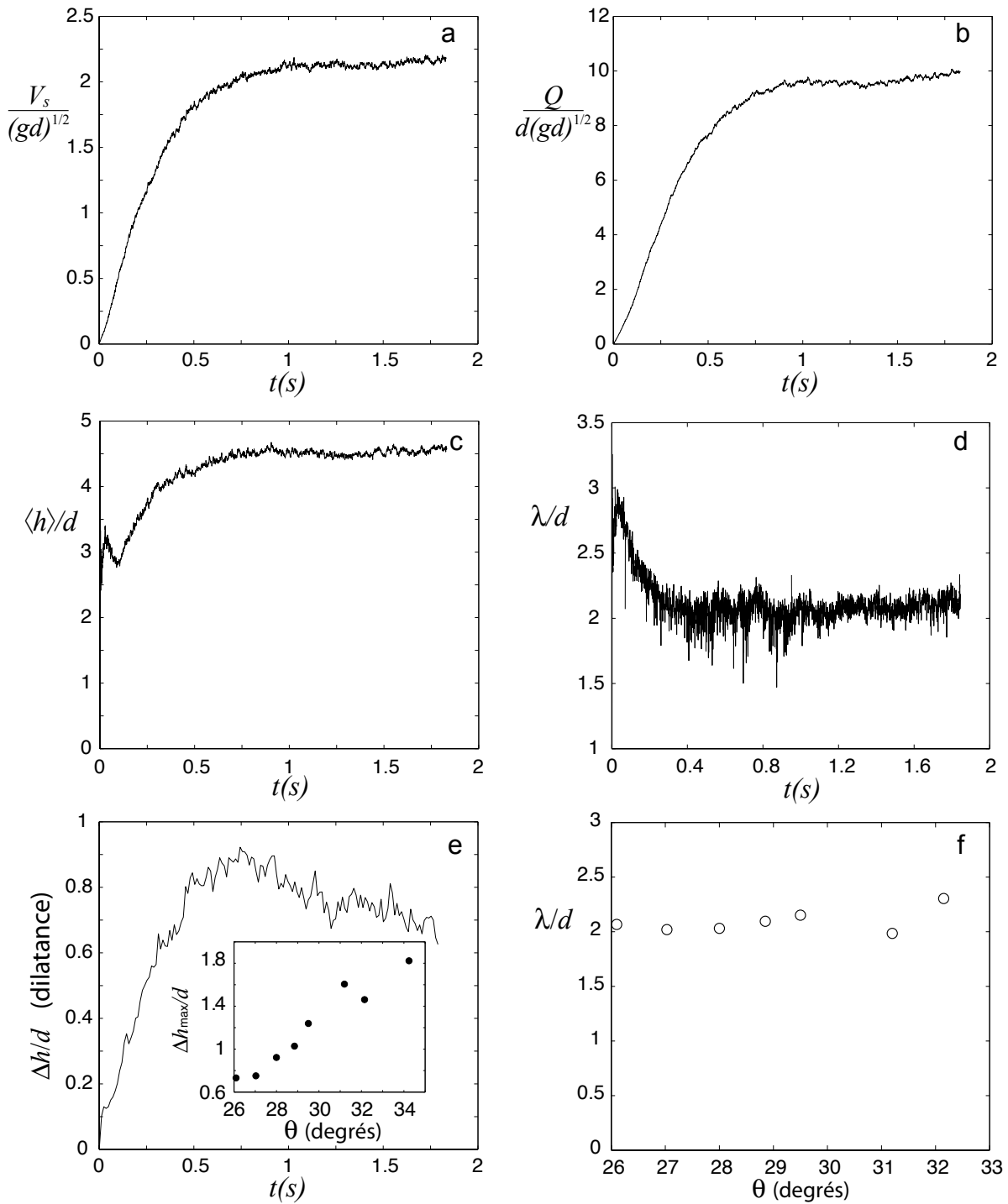


FIG. 5.15 – Données tirées des profils de vitesse expérimentaux pour $\theta = 28.0^\circ$. (a) Vitesse en surface $V_s(t)$. (b) Débit linéique Q obtenu par intégration du profil de vitesse $V(z)$. (c) Épaisseur moyenne de l'écoulement $\langle h \rangle = Q/V_s$. (d) Longueur d'atténuation de la partie exponentielle du profil de vitesse λ . (e) Dilatance : évolution de l'altitude de la surface Δh , à partir de sa position à $t=0$. Insert : amplitude maximale de la dilatance en fonction de l'inclinaison. (f) Longueur caractéristique du profil de vitesse exponentiel en fonction de θ , mesurée dans le régime saturé lorsqu'il est atteint ou lors de l'arrêt des acquisitions.

et uniformes en alimentation continue pour un canal de 1 cm de largeur ($25.5^\circ < \theta < 32.72^\circ$, voir le chapitre 3). Nous avons vérifié que pour une expérience réalisée à un angle d'inclinaison $\theta = 24.10^\circ$ aucun grain ne bouge tant que l'effondrement aval n'a pas atteint les billes en amont : cet angle est supérieur à l'angle de repos $\theta_s = 20.9^\circ$ mais inférieur à $\theta_{min} = 25.5^\circ$. En revanche pour une expérience à $\theta = 25.7^\circ$, l'écoulement démarre immédiatement tout le long de l'empilement. Dans la suite, nous allons confronter ces résultats aux prédictions de la rhéologie « $\mu(I)$ ».

5.5 Comparaison avec les simulations numériques

5.5.1 Simulations

Nous allons comparer maintenant les résultats expérimentaux à ceux de simulations numériques. Nous utilisons la rhéologie 3D « $\mu(I)$ » pour modéliser l'écoulement et nous imposons la condition limite de parois lisses. À l'instant initial, nous laissons évoluer librement le tas sous l'effet de la gravité à partir d'une vitesse très faible (inférieure au bruit numérique).

La figure 5.16 montre une séquence temporelle de l'évolution d'un tel écoulement. Nous pouvons voir que, peu de temps après le début de la simulation, l'écoulement se fait sur une profondeur de l'ordre de 6 tailles de grains (figure 5.16a), alors qu'en fin de simulation, l'écoulement stationnaire a atteint environ une profondeur de 11 diamètres de grains (figure 5.16d). Nous remarquons aussi que l'écoulement reste tridimensionnel même pour une si faible largeur ($W/d = 19$). De ces simulations, nous pouvons extraire le profil de vitesse en paroi et le comparer à ceux que nous observons expérimentalement.

Contrairement aux études des chapitres précédents, le paramètre de contrôle expérimental est maintenant l'angle de la surface par rapport à l'horizontal. De même dans les simulations numériques nous fixons l'angle d'inclinaison et laissons évoluer l'écoulement. La situation est donc claire : pour comparer les résultats des expériences à ceux des simulations numériques, nous devons fixer le même angle. Cependant la modélisation fait intervenir un coefficient de friction billes-parois μ_w . Afin de comparer avec plus d'exactitude les profils expérimentaux et numériques en se concentrant sur l'aspect instationnaire, nous choisissons d'ajuster sa valeur à $\mu_w = \tan(13.1^\circ)$ à partir des courbes angles-débit moyen des écoulements stationnaires dans le canal de 1 cm (chapitre 3). Une fois ce choix fait, il ne reste pas de paramètres ajustables dans le modèle.

5.5.2 Comparaison des vitesses maximales en paroi et des débits

Les évolutions des vitesses en surface sont représentées sur la figure 5.17 pour les différentes inclinaisons étudiées. Les simulations numériques sont tracées en traits pointillés. Nous observons tout d'abord un accord raisonnable entre les amplitudes des vitesses mesurées et simulées. Cependant, la valeur est un peu sous-estimée lorsque l'angle est faible (proche du seuil d'écoulement). Nous remarquons également que le temps caractéristique d'évolution est bien représenté : plus l'inclinaison est importante, plus le temps d'établissement du profil de vitesse est long. Cette tendance est clairement visible pour les plus grandes inclinaisons même si le système ne permet pas d'étendre les mesures du régime uniforme au-delà de $180\sqrt{d/g}$.

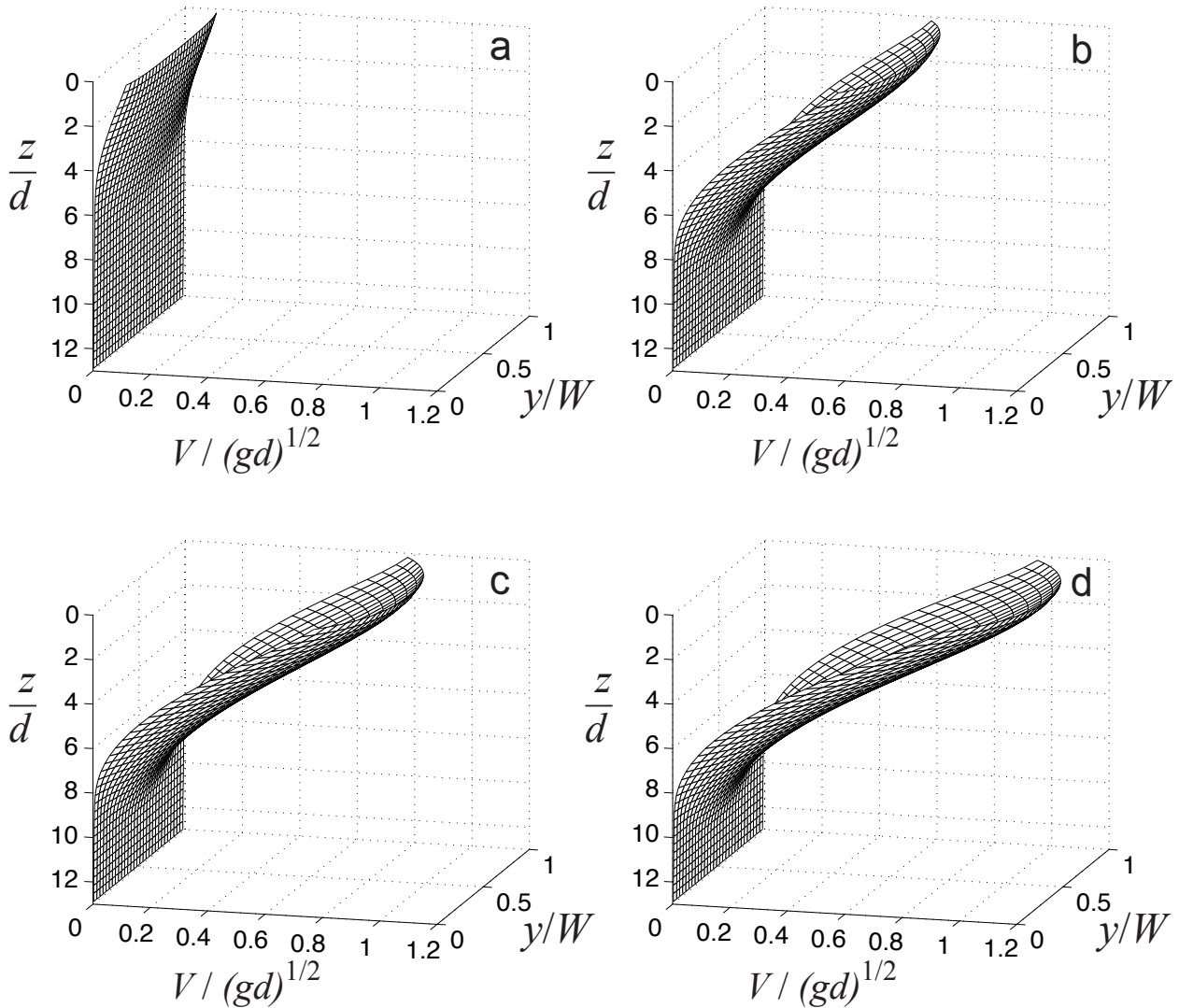


FIG. 5.16 – Simulation du déclenchement d'un écoulement à un angle $\theta = 26.1^\circ$ dans un canal de largeur $W/d = 19$. (a-d) Séquence temporelle du régime transitoire : $t/\sqrt{d/g} =$ (a) 1.5, (b) 15, (c) 29.5, (d) 200. Le profil de vitesse contre la paroi sera comparé aux profils expérimentaux. La courbure transverse du profil de vitesse nous impose des simulations 3D malgré la faible largeur du canal. Nous utiliserons des grilles de dimensions réduites (71×30) pour simuler le demi-canal.

Concernant les débits (figure 5.18), nous pouvons formuler des remarques similaires. Nous n'atteignons le régime saturé que pour les angles faibles, montrant ainsi que le temps d'établissement du profil en entier se fait avec le même temps caractéristique que la vitesse en surface. Là encore, un meilleur accord entre les simulations et les résultats expérimentaux est observé pour les angles plus élevés.

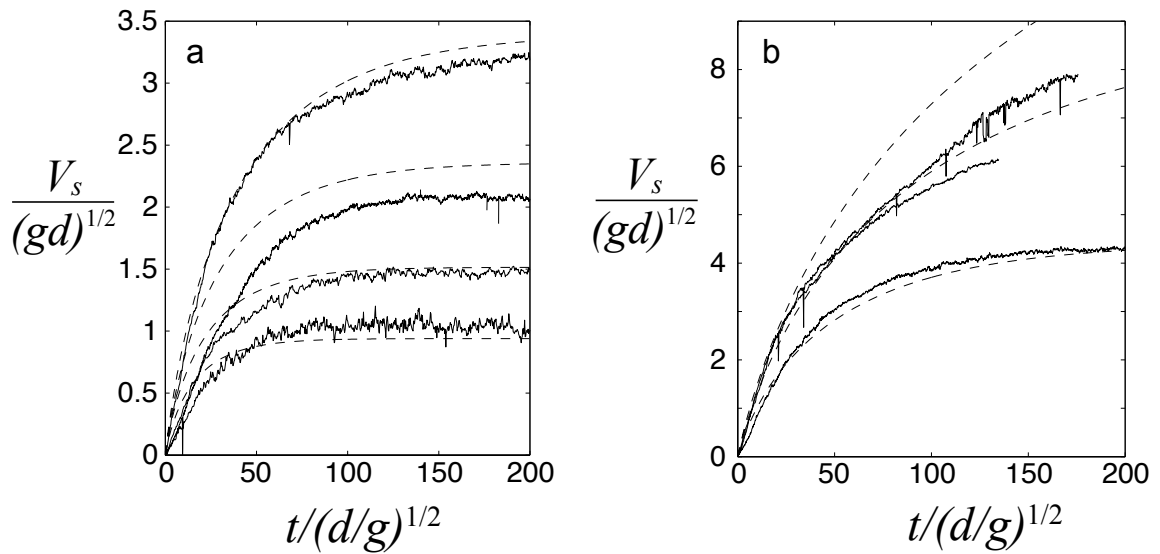


FIG. 5.17 – Évolution de la vitesse en surface à la paroi V_s . Comparaisons entre les données expérimentales (courbes continues) et les simulations numériques (courbes en pointillés) pour différents angles d'inclinaison : (a) de la plus basse à la plus haute $\theta = 26.1^\circ, 27.03^\circ, 28.0^\circ, 28.85^\circ$ et (b) $29.5^\circ, 31.2^\circ, 32.15^\circ$.

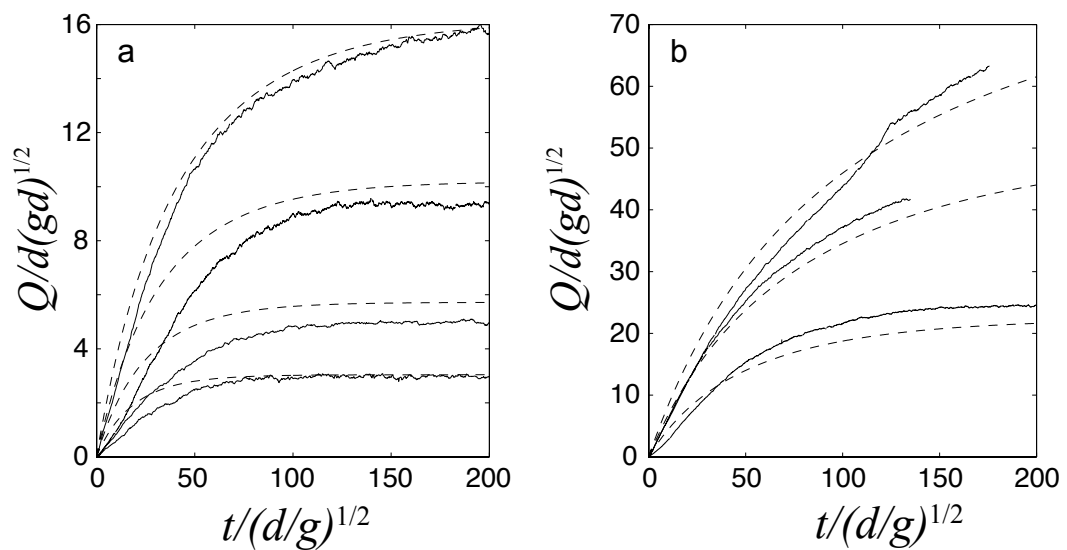


FIG. 5.18 – Évolution de l'intégrale du profil de vitesse $Q/d\sqrt{gd}$. Comparaisons entre les données expérimentales (courbes continues) et les simulations numériques (courbes en pointillés) pour différents angles d'inclinaison : (a) de la plus basse à la plus haute $\theta = 26.1^\circ, 27.03^\circ, 28.0^\circ, 28.85^\circ$ et (b) $29.5^\circ, 31.2^\circ, 32.15^\circ$.

5.5.3 Profils de vitesse

Nous avons vu que la vitesse maximale et le débit prédits étaient en assez bon accord avec les mesures expérimentales. Nous comparons maintenant les profils de vitesse verticaux. Les figures 5.19 montrent deux exemples typiques d'évolution temporelle du profil de vitesse pour les deux extrémités de la gamme d'inclinaisons explorées. Nous avons reporté les vitesses en des temps égaux dans la simulation (lignes) et l'expérience (symboles). Pour une inclinaison de $\theta = 26.1^\circ$, nous observons premièrement que le profil théorique est en avance sur le profil expérimental, ce qui confirme le résultat du paragraphe précédent. Nous remarquons de plus que la forme globale du profil de vitesse n'est pas reproduite correctement : expérimentalement, ils sont plus courbés près de la surface. En traçant ces profils en échelle logarithmique la différence majeure apparaît : à une inclinaison $\theta = 26.1^\circ$, le profil de vitesse est quasiment exponentiel sur une grande hauteur. L'écoulement quasi-statique est donc important dans ce cas-là. Lorsque l'inclinaison augmente, cette partie prend moins d'importance. Nous observons en effet que, pour $\theta = 32.15^\circ$, un meilleur accord est obtenu.

Finalement, la forme des profils de vitesse n'est pas très bien reproduite par la rhéologie. Ce résultat n'est pas étonnant car en régime stationnaire nous avons déjà des difficultés pour décrire les écoulements proches des seuils, lorsque les phénomènes non locaux prennent plus d'importance.

5.5.4 Épaisseur

Expérimentalement, les figures 5.19*a,b* suffisent à convaincre que l'évolution des profils de vitesse se fait sur une épaisseur h croissante au cours du temps. Dans le modèle, il existe un point où la vitesse est égale à zéro, l'épaisseur est donc bien définie. À l'instant initial, la profondeur de l'écoulement vaut environ la moitié de celle de l'état stationnaire, puis l'écoulement creuse son lit jusqu'à l'état stationnaire. Dans les expériences la vitesse ne s'annule jamais rigoureusement. De ce fait nous allons comparer les épaisseurs moyennes $\langle h \rangle$. La figure 5.20 montre leur évolution en fonction du temps pour différentes inclinaisons. Le premier résultat est que dès le départ de l'écoulement, l'épaisseur moyenne est finie dans les deux cas. Deuxièmement, l'amplitude de l'évolution de l'épaisseur coulante est similaire dans les expériences et les simulations. Pour l'angle le plus petit, elle évolue très peu. Plus l'angle augmente, plus la variation de l'épaisseur entre le début et la fin du régime transitoire est grande. Les simulations sous-estiment ces variations d'épaisseur pour les angles élevés. Enfin, le temps d'érosion est similaire dans les simulations et les expériences. Nous remarquons que ces temps d'évolutions sont plus courts que les temps d'établissement des profils de vitesse. Ceci peut signifier que l'épaisseur finale est atteinte assez rapidement.

Ces trois résultats confirment que la rhéologie permet de reproduire qualitativement l'évolution de l'épaisseur d'un écoulement uniforme, mais nous n'obtenons pas d'accord quantitatif entre les prédictions de la rhéologie et les résultats expérimentaux.

5.6 Conclusion de l'étude des régimes instationnaires

Nous avons mis en place un procédé expérimental permettant d'étudier un phénomène instationnaire dans les écoulements granulaires : le déclenchement d'un écoulement uniforme sur un tas d'inclinaison fixe. Le caractère uniforme de l'écoulement nous a permis de simuler facilement ces

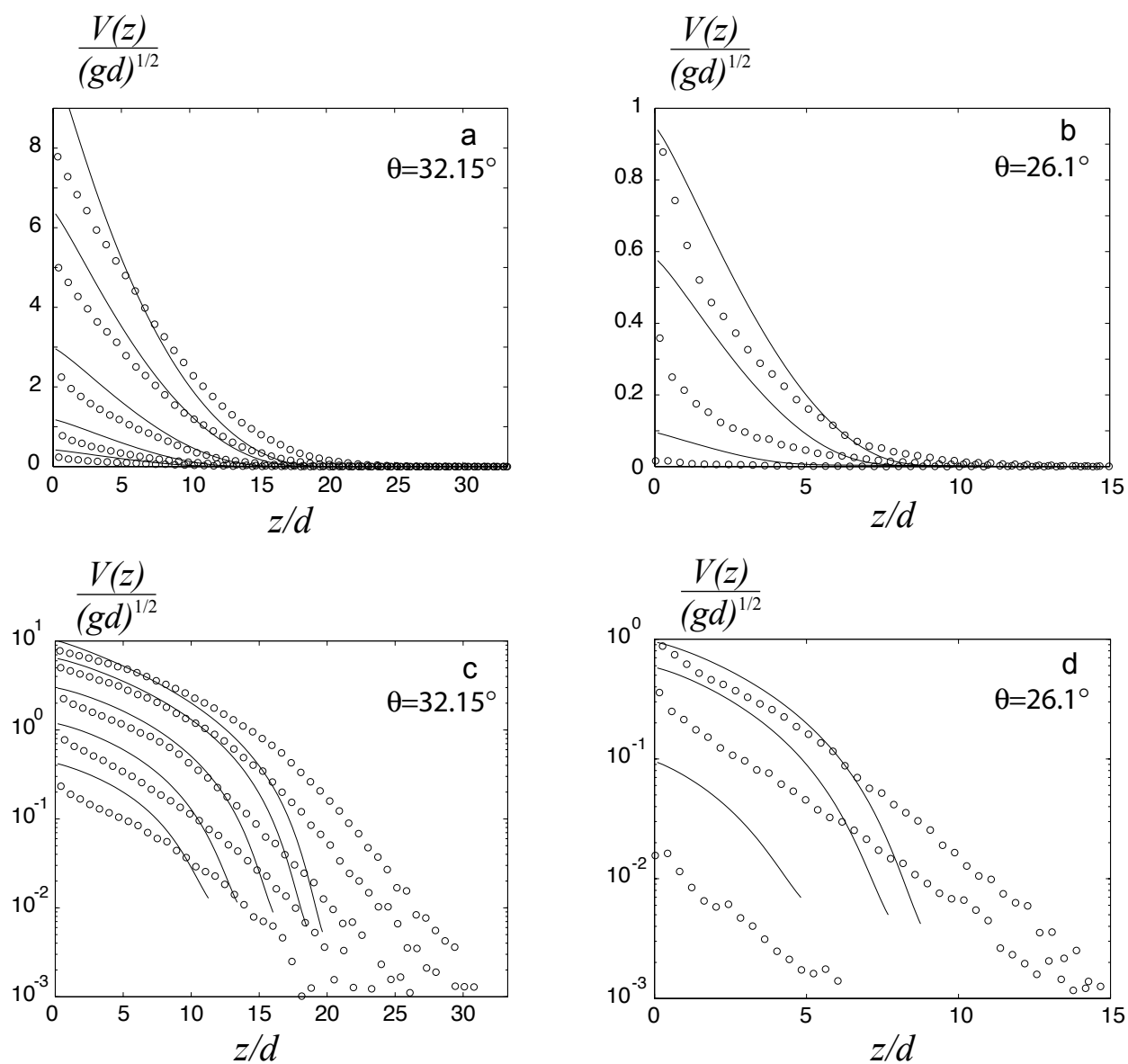


FIG. 5.19 – Vitesse en paroi pour les deux inclinaisons extrêmes (a) $\theta = 32.15^\circ$ et (b) $\theta = 26.1^\circ$ à différents instants. Les symboles correspondent aux profils expérimentaux et les lignes aux profils prédits. (a) $t/\sqrt{d/g} = 2.3, 7.5, 24.2, 77.8$ et 200. (b) $t/\sqrt{d/g} = 1.2, 15.1$ et 166.1. (c) et (d) sont identiques à (a) et (b) en échelle logarithmique. Les profils de vitesse numériques ont été interrompus au niveau du fluage numérique.

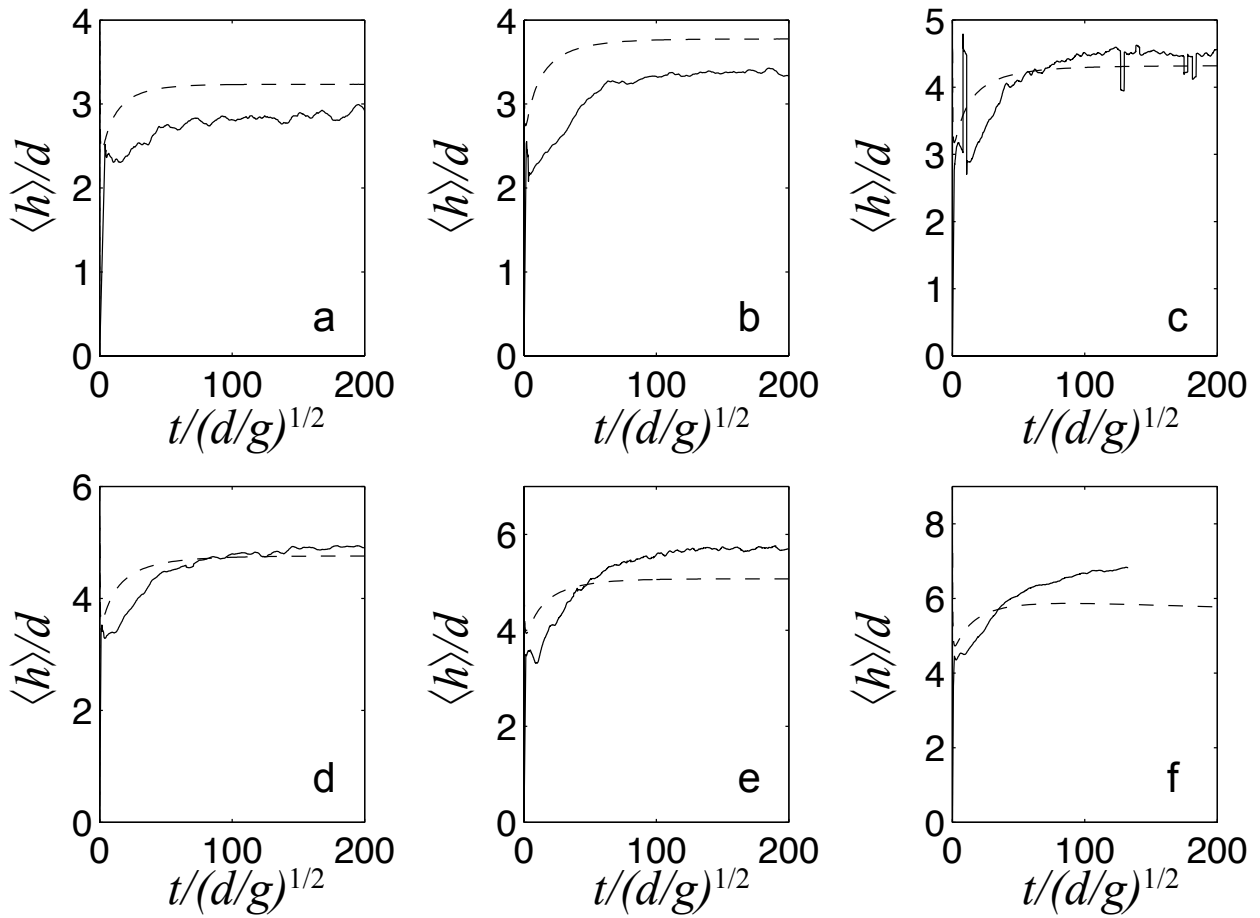


FIG. 5.20 – Évolution de l'épaisseur caractéristique de l'écoulement, Q/dV_s , au cours du temps. Comparaisons entre les simulations (lignes en pointillés) et les données expérimentales (lignes continues) pour $\theta =$ (a) 26.10° , (b) 27.03° , (c) 28.0° , (d) 28.85° , (e) 29.50° et (f) 31.2° .

régimes transitoires et de les comparer aux données expérimentales. Plusieurs caractéristiques ont été mesurées : les temps caractéristiques des évolutions et l'amplitude des paramètres de l'écoulement. Une fois la friction contre les parois ajustée, la rhéologie proposée permet de prédire avec une bonne précision l'évolution de l'avalanche.

Premièrement, les temps caractéristiques d'évolution des grandeurs sont similaires. Pour des inclinaisons faibles, le temps d'établissement est plus court que pour des angles proches de la limite θ_2 . Cette propriété est bien reproduite par le modèle. Le régime transitoire est donc très court dans cette configuration pour des matériaux granulaires sec.

Deuxièmement, l'accord entre les simulations et les expériences est quantitatif. Cet accord concerne aussi bien l'amplitude que l'aspect temporel. Toutefois, pour les angles proches du seuil d'écoulement stationnaire ($\theta \simeq \theta_{min} = 25.5^\circ$ pour une largeur $W/d = 19$), pour lesquels les phénomènes non-locaux (notamment le mouvement rampant de la zone quasi-statique) deviennent importants, nous observons un écart entre les valeurs des prédictions théoriques et les valeurs mesurés, alors que l'analyse temporelle reste correcte.

Enfin nous avons montré expérimentalement que les profils de vitesse s'établissaient progressivement dans la profondeur du tas. Nous ne pouvons pas définir avec certitude une interface entre la partie fluide et solide, cependant deux zones sont distinctes : une zone profonde présentant une décroissance exponentielle de la vitesse se distingue de la partie supérieure. La longueur caractéristique d'atténuation de l'exponentielle est approximativement constante et apparaît dès les premiers mouvements de billes.

Bien que la modélisation numérique utilisée ne reproduise pas le fluage de la partie solide, nous avons montré que l'établissement du régime stationnaire s'accompagne de l'augmentation progressive de l'épaisseur correspondant à un phénomène d'érosion. L'amorce de l'écoulement se fait sur une épaisseur proche de la demi-profondeur finale puis les couches profondes sont entraînées. Cette érosion ne fait pas intervenir d'équation supplémentaire ni d'hypothèse particulière pour piloter l'évolution de la hauteur de l'écoulement contrairement au cas d'une modélisation du type Saint-Venant. Elle est intrinsèque à la rhéologie et dépend de l'écoulement au-dessus de l'interface. Le déclenchement de l'écoulement sur la demi-hauteur n'a pas pu être vérifié expérimentalement. Il se produit d'une part à des temps très bref ($t < 7$ ms) et le fluage exponentiel peut éventuellement le masquer.

Chapitre 6

Conclusion et Perspectives

Nous avons étudié les écoulements granulaires denses sur fond meuble dans des canaux rectilignes. La particularité de tels écoulements est la coexistence de deux phases, liquide et solide, dont l'interface est sélectionnée librement par le système. Dans ce travail de thèse, les problèmes auxquels nous nous sommes attachés concernent la nature des contraintes qui se développent dans les milieux granulaires en écoulement ainsi que les phénomènes d'érosion à la frontière entre la zone coulante et la partie statique. Nous nous sommes intéressés aux écoulements stationnaires et uniformes afin de limiter les degrés de liberté du système. En jouant sur la largeur du canal et la nature des parois nous avons proposé et validé une rhéologie tridimensionnelle capable de reproduire quantitativement les propriétés des écoulements uniformes et stationnaires de billes de verre.

Écoulements stationnaires

En mesurant de façon systématique la vitesse de surface, l'inclinaison et l'épaisseur des écoulements stationnaires et uniformes dans des canaux très larges, nous avons apporté des éclaircissements sur l'importance des parois dans les écoulements à surface libre et sur le type de rhéologie apte à décrire les écoulements granulaires denses. Nous avons montré que la largeur du canal conditionne les écoulements granulaires stationnaires et uniformes sur tas. Les parois jouent donc un rôle très important dans cette configuration. En élargissant le tas, au contraire d'un écoulement sur plan incliné (à un angle fixé) pour lequel les parois perdent progressivement de leur influence, l'angle de la surface libre « s'ajuste » de telle sorte que les forces développées en parois soient toujours du même ordre de grandeur que la force de gravité. De ce fait, l'importance de la gravité diminue (avec l'inclinaison) au même rythme que l'effet des parois. Nous ne pouvons pas nous en affranchir en augmentant la largeur du tas. De plus leurs effets ne sont pas confinés à des couches limites le long des bords, mais s'étendent à la totalité de l'écoulement.

Ce constat important nous a permis de progresser dans la compréhension de la rhéologie des écoulements denses. Beaucoup d'observations ont pu être ainsi interprétées dans le cadre de la rhéologie frictionnelle quand nous avons pris en compte la friction contre les parois.

Premièrement, nous avons montré que la localisation de l'écoulement à la surface du tas n'est pas une propriété intrinsèque au matériau, mais résulte de l'équilibre entre la gravité, la friction

interne et la friction latérale. Elle est notamment proportionnelle à la largeur du canal. Deuxièmement les profils de vitesse en paroi calculés analytiquement grâce au modèle ont des caractéristiques compatibles avec celles qui sont rapportées dans la littérature. Ils possèdent un point d'inflexion et ressemblent à une portion de profil linéaire. Nous levons ainsi le paradoxe sur la différence de forme entre les profils de vitesse des écoulements sur plan incliné et sur fond meuble. Troisièmement, l'utilisation de la rhéologie locale prédit des lois d'échelle non-triviales pour tous les paramètres mesurés. Elles sont vérifiées pour de grandes variations de débit et de largeur de canal. L'accord entre les prédictions données par le modèle et les résultats expérimentaux n'est pas seulement qualitatif et dimensionnel, mais aussi quantitatif dès que les paramètres de la rhéologie sont calibrés à partir d'expériences sur plans inclinés.

Tous ces résultats nous ont permis de mettre en évidence les similarités qui relient les configurations de plan incliné et d'écoulement sur tas : une rhéologie unique peut décrire des écoulements aux propriétés très différentes.

L'autre résultat important de cette thèse est l'extension à trois dimensions de la rhéologie locale. Le milieu granulaire est décrit comme un fluide non-newtonien particulier : sa viscosité dépend de la pression et d'une moyenne des taux cisaillements et le seuil de rupture est décrit par le critère de Drucker Prager. Les propriétés du fluide dépendent du paramètre inertiel I . Cette description permet de simuler et reproduire les profils de vitesse tridimensionnels observés dans les canaux. Ces lois constitutives sont donc les premières à pouvoir décrire dans un cadre théorique unique les écoulements granulaires dans trois configurations différentes : le cisaillement plan homogène, le plan incliné et maintenant les écoulements uniformes et stationnaires sur tas.

Phénomènes instationnaires

Dans la dernière partie de la thèse, nous avons sondé les phénomènes d'érosion en étudiant le développement d'un écoulement à la surface d'un tas mis hors équilibre. Nous avons dissocié les phénomènes transitoires temporels et spatiaux pour tester plus particulièrement la dynamique de l'établissement du régime stationnaire.

Nos mesures montrent premièrement que le modèle prédit des durées de régimes transitoires correctes ainsi que le bon ordre de grandeur des vitesses. Nous avons aussi montré que l'écoulement s'établissait à partir d'une épaisseur finie. Ce résultat est important pour les applications géophysiques, puisque la dynamique d'un éboulement sera différente selon le mode d'érosion. Étant donné que l'épaisseur d'un écoulement unidirectionnel est proportionnelle à la largeur et que l'épaisseur de démarrage semble être une fraction de l'épaisseur finale, les glissements de terrains peuvent démarrer sur de grandes profondeurs à la surface d'une montagne.

Bien que nous puissions décrire correctement, au premier ordre, ces écoulements denses par la rhéologie « $\mu(I)$ », il reste certaines zones d'ombres.

Limites

La rhéologie locale a permis d'avancer dans la compréhension des écoulements granulaires, cependant nous avons mis en évidence certaines limites de ce modèle.

La première est la non-description des seuils d'écoulements observés sur plan incliné ou sur fond meuble. Ce problème provient de l'existence de corrélations entre les mouvements des grains lorsqu'ils sont peu cisailés. Afin d'espérer les comprendre, il est nécessaire d'incorporer des ingrédients non-locaux à la rhéologie locale. Cette non-localité se manifeste aussi chaque fois que nous sommes proches d'obstacles. La prise en compte de ces phénomènes permettrait peut-être la description de la partie exponentielle prolongeant les profils de vitesse à l'intérieur du tas.

Ensuite, la description des écoulements granulaires denses bute sur les phénomènes d'hystérésis en liens avec les démarrages et les arrêts d'écoulements. Nous avons choisi des configurations où ils n'étaient pas importants, mais les déclenchements d'avalanches proches des seuils de mise en mouvement s'effectuent toujours dans la zone hystérétique. Ces phénomènes peuvent modifier le comportement de l'écoulement.

Le rôle de la densité n'est pas discuté dans cette thèse. Nous avons supposé qu'elle était constante (ce qui est correct en première approximation), cependant elle pourrait avoir une influence lorsque l'on regarde les détails des écoulements. Le problème est de savoir si la fraction volumique est une variable esclave de l'écoulement ou bien si elle est couplée aux autres.

Les écoulements granulaires commencent à dévoiler leurs propriétés et les différents résultats sont progressivement connectés les uns aux autres. Nos résultats renforcent la pertinence du nombre inertiel I dans la description des écoulements granulaires denses et ouvrent la voie à des simulations plus élaborées ou à l'incorporation de phénomènes non-locaux.

Perspectives

En poursuivant sur le succès de cette rhéologie, il serait intéressant d'incorporer ces lois constitutives dans un code numérique performant pour simuler des écoulements plus complexes, notamment dans la configuration en tambour tournant. Est-ce que ce modèle reproduira les propriétés de ces écoulements inhomogènes? Une autre configuration qui peut servir de test est celle des ruptures de barrage. Dans ce cas, le transfert de quantité de mouvement vertical dans la direction horizontale s'effectue brutalement sur un volume restreint et nous pouvons nous demander si la rhéologie locale sera adaptée à cette configuration. Enfin la suite logique est de tester ce modèle développé pour les billes de verre avec d'autres matériaux comme le sable (une étude préliminaire est présentée dans la partie suivante), des matériaux anisotropes ou des matériaux polydisperses.

Du point de vue de l'amélioration de la modélisation, la première étape serait d'incorporer les phénomènes non-locaux et d'hystérésis dans le cadre de cette théorie. Ainsi les avalanches étudiées par Malloggi *et al.* (2005b) ou Borzsonyi *et al.* (2005) par-dessus la couche de dépôt semblent un moyen d'approfondir notre connaissance de ces processus, ces travaux pourraient être complétés par une étude similaire sur fond meuble : des solitons peuvent-ils se propager à la surface d'un tas? Les mécanismes d'instabilités peuvent servir aussi à sonder plus finement la rhéologie des écoulements granulaires. Dans cette optique, Forterre (2006) a récemment comparé les prédictions de la rhéologie pour les fréquences de coupure d'une l'instabilité de « roll waves » se développant

sur plan incliné pour des billes de verre.

Par ailleurs, faire le lien avec les modèles du type Saint-Venant qui permettent de rendre compte, à moindre coût, d'une partie de la phénoménologie des écoulements granulaires serait intéressant. Cela permettrait notamment de mieux comprendre les paramètres phénoménologiques introduits dans les descriptions des processus de dépôt et d'érosion.

Écoulements stationnaires de sable

Les résultats présentés dans ce paragraphe proviennent principalement du travail de Mickaël Pailha effectué lors de son stage de Master II au sein de notre équipe. Ils illustrent une certaine universalité des résultats trouvés pour les billes de verre, le sable possédant toutefois des comportements spécifiques.

Les études présentées au cours des chapitres précédents ont été réalisées avec un matériau modèle : des billes de verre. Pour vérifier que les résultats obtenus représentent des propriétés générales des écoulements granulaires et qu'ils sont robustes vis-à-vis de la nature des grains utilisés, nous avons réalisé des expériences portant sur des écoulements stationnaires de sable. Nous avons mesuré l'inclinaison, la vitesse en surface ainsi que le débit pour trois largeurs différentes : $W/d = 25, 93$ et 375 . Les résultats sont présentés sur les figures 6.1*a,b,c*. Nous retrouvons un comportement général similaire à celui des écoulements de billes de verre :

- L'inclinaison augmente avec le débit, mais les variations sont très atténuées pour la grande largeur.
- La vitesse en surface diminue lorsque le canal est élargi pour un même débit par unité de largeur.
- L'épaisseur augmente en conséquence.

Lois d'échelle

Bien que nous ne puissions pas adapter directement la rhéologie valable pour les billes aux écoulements de sable, nous avons voulu vérifier si les lois d'échelle prédites par la rhéologie « $\mu(I)$ » étaient valides dans ce cas. Les figures 6.1*b,d,f* montrent les mêmes données en adimensionnant les longueurs par W , les vitesses par $W^{3/2}$ et les débits par $W^{5/2}$.

Nous voyons que les lois d'échelle restent valides. L'origine des exposants atypiques provient de l'écriture du nombre inertiel I . Ce résultat montre que même pour ces écoulements, le nombre inertiel I est un paramètre sans dimension pertinent. Cependant nous ne pouvons pas proposer de loi constitutive pour ce matériau.

En effet les données de Forterre *et al.* (2003) sur les écoulements stationnaires sur un plan incliné rugueux montrent que le nombre de Froude est une fonction affine du rapport h/h_{stop} pour le sable et linéaire pour les billes de verre (figure 6.2*a*). De ce fait, le coefficient effectif de frottement n'est plus une fonction unique du nombre inertiel, mais dépend aussi de l'épaisseur de l'écoulement. La figure 6.2 montre les variations du coefficient de friction effectif en fonction du rapport Fr/h (analogue du nombre inertiel pour les billes). Les données sont très dispersées, montrant qu'au moins un autre paramètre est en jeu pour contrôler les propriétés des écoulements.

Adapter la rhéologie actuelle pour tenir compte de cette loi d'échelle particulière représente un enjeu important de la compréhension des milieux granulaires.

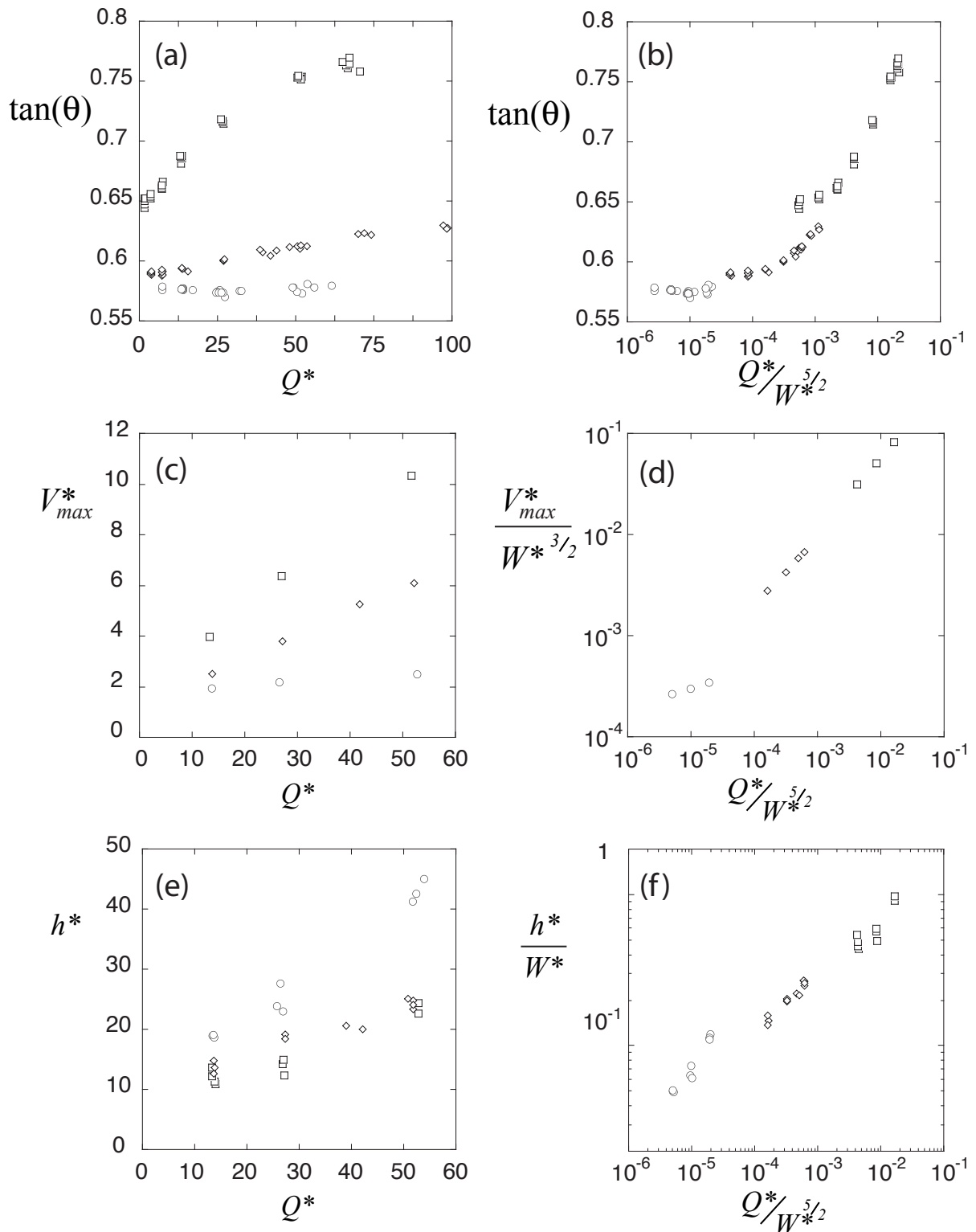


FIG. 6.1 – Évolution de (a) l'inclinaison $\tan\theta$, (c) la vitesse maximale V_{max}^* et (e) l'épaisseur h^* au centre du canal en fonction du débit Q^* . Les figures (b, d, f) représentent les mêmes données en utilisant les lois d'échelle.

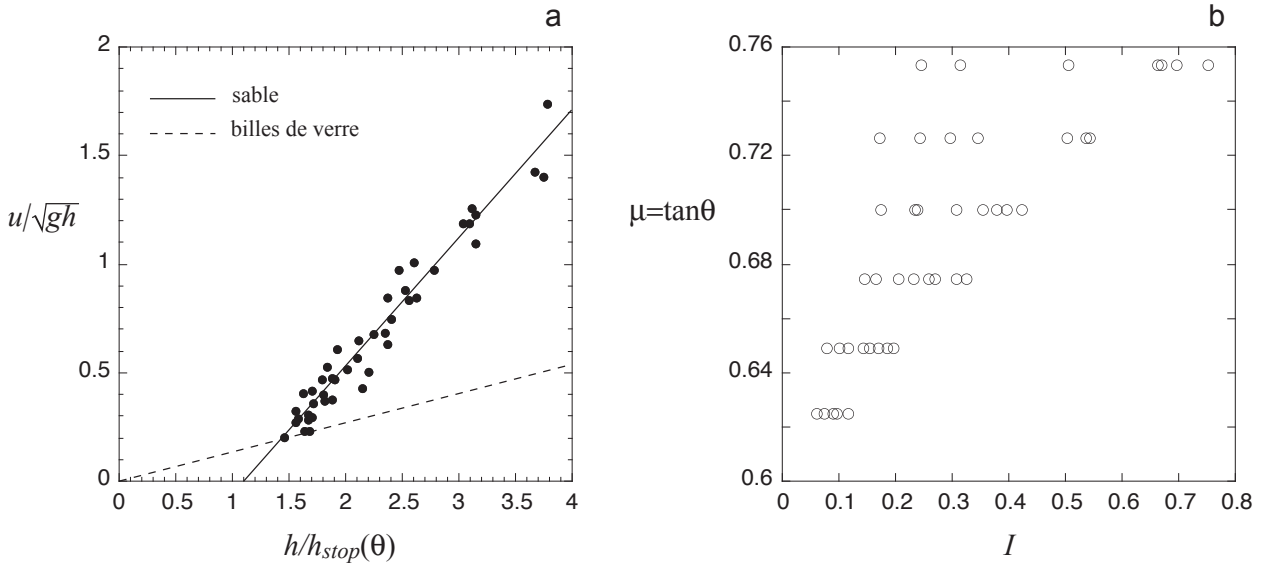


FIG. 6.2 – Mesures de la vitesse moyenne u et de l'épaisseur h pour des écoulements stationnaires sur plans inclinés, tirées de Forterre et al. (2003). (a) Les données se rassemblent lorsque l'on trace le nombre de Froude u/\sqrt{gh} en fonction du rapport $h/h_{stop}(\theta)$. Les pointillés représentent la loi d'échelle pour les billes de verre. (b) Coefficient de friction effectif $\mu = \tan\theta$ en fonction du nombre inertiel $I = \frac{5}{2}ud/h\sqrt{gh\cos\theta}$.

Instabilités observées avec le sable

Les écoulements de sable sur fond meubles ont donné lieu à des instabilités. Premièrement, au niveau de l'alimentation, l'écoulement n'est pas régulier. Alors que pour les billes de verre, nous observons un léger ressaut stable, celui du sable oscille de façon irrégulière créant une zone d'accumulation. Ceci entraîne l'apparition d'ondes à la surface de l'écoulement qui se propage vers le bas. Les figures 6.3a, b montrent une vue de côté du tas, nous apercevons les ondulations de la surface. Bien que nous n'ayons pas étudié de manière approfondi ce phénomène, nous n'avons pas observé d'amplification de ces ondes lors de leur propagation. En revanche elles sont plus visibles (la fréquence des ondes est plus faible) dans les canaux plus larges.

La figure 6.3c représente la vitesse des grains à la surface moyennée dans le temps pour deux débits différents d'un facteur 4. Nous remarquons premièrement que la vitesse moyenne présente un minimum au centre du canal. Ceci est dû aux ondes qui sont des zones bouchons où la vitesse est plus faible. Les parties latérales sont moins affectées par celles-ci. Deuxièmement l'écart entre les vitesses au centre pour ces deux débits est relativement faible, signifiant que l'écoulement doit se faire sur une épaisseur assez importante dans la zone bouchon. Enfin nous remarquons que la vitesse pour le plus faible débit s'annule avant d'avoir atteint les bords du canal.

Dans ce cas, le débit est à peine suffisant pour alimenter de façon continu le canal, nous nous trouvons au voisinage du seuil d'écoulement. Pour des débits légèrement plus faibles, nous observons après le passage de plusieurs avalanches qu'un régime stationnaire s'établit, mais l'écoulement n'occupe pas toute la largeur du canal, seul un écoulement central persiste. La figure 6.4a montre un exemple pour un débit moyen $Q = 8.5 \text{ g.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}$. L'éclairage en lumière rasante fait

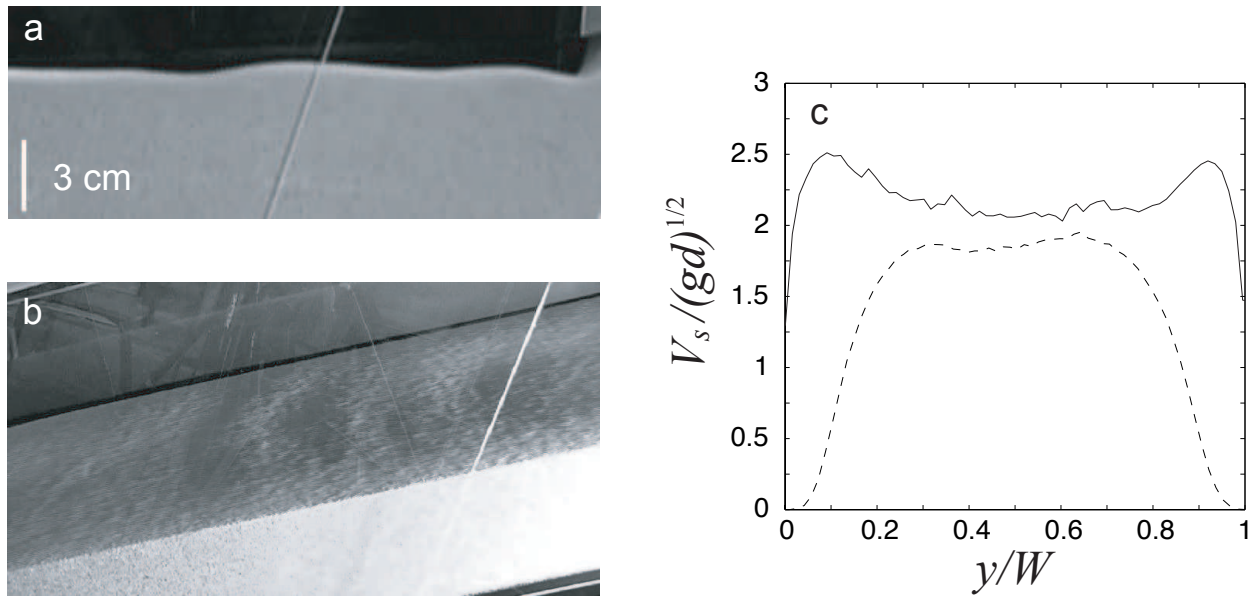


FIG. 6.3 – (a) Vue latérale du tas montrant l’amplitude des ondes proche de l’alimentation, pour un débit $Q = 30 \text{ g.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}$ dans le canal $W = 30 \text{ cm}$ (l’échelle verticale a été doublée). (b) Vue du même écoulement par le dessus montrant la courbure des ondes. (c) Profils de vitesse moyens en surface pour la largeur $W = 30 \text{ cm}$, pour un débit $Q = 60 \text{ g.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}$ (ligne continue) et $Q = 15 \text{ g.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}$ (pointillés).

apparaître les variations transverses de la surface. Nous voyons nettement les grains à l’arrêt sur les bords. L’écoulement semble stationnaire en partie basse du canal, mais la longueur de celui-ci peut éventuellement influencer ce phénomène, ce qui n’a pas été étudié. Ce phénomène n’avait pas été observé avec les billes de verre. Une explication peut être la taille de la zone d’hystérésis, plus grande pour le sable. Il est à noter qu’il s’agit d’un processus lent : il faut plusieurs avalanches pour structurer la surface et atteindre un régime permanent. Cette focalisation de l’écoulement rappelle celle qui est observée sur les plans inclinés par Félix *et al.* (2004) et Deboeuf (2005). Nous n’avons pas étudié en détail ce phénomène, mais nous reportons sur la figure 6.4b les mesures de la largeur en bout de canal en fonction du débit moyen d’alimentation Q . Pour les débits les plus faibles, l’auto-focalisation n’a pas lieu, nous l’avons forcée en diminuant fortement la section du canal, puis en laissant l’écoulement évoluer.

Bien que nous ne puissions proposer de rhéologie complète pour les écoulements de sable, les lois d’échelle montrent la pertinence du paramètre inertiel I . Cette étude préliminaire révèle aussi des instabilités qui pointent les limites de la rhéologie, mais qui peuvent servir de point de départ à d’autres études.

Ainsi en dépit de l’existence des limitations d’application à cause des seuils d’écoulements et des phénomènes d’hystérésis liés aux déclenchements et aux arrêts des écoulements, cette théorie semble très prometteuse pour décrire la partie fluide de l’écoulement granulaire et peut servir de base à des développements futurs. Plus généralement, les régimes d’écoulements denses peuvent

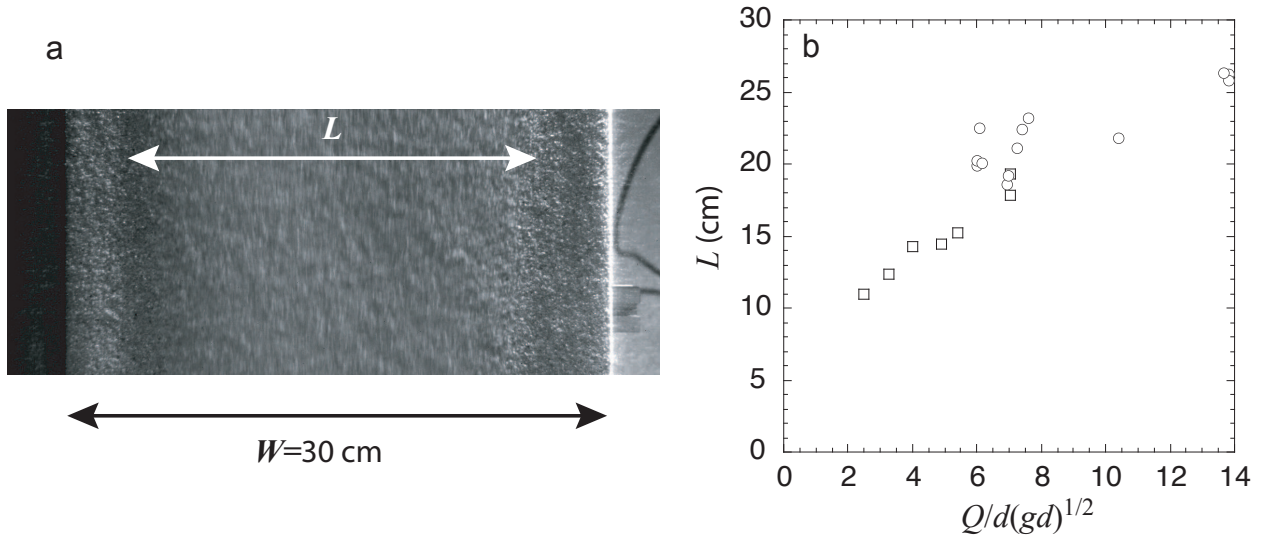


FIG. 6.4 – (a) Image d'un écoulement auto-focalisé à faible débit ($Q = 8.5 \text{ g.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}$) éclairé en lumière rasante. (b) Évolution de la largeur de la zone en écoulement en fonction du débit d'alimentation. Les ronds correspondent aux écoulements auto-focalisés après plusieurs passages. Pour les carrés, nous avons forcé l'écoulement à passer par une porte de 8 cm de large, avant de le laisser s'élargir librement. L'estimation de la largeur est faite par traitement d'images en prenant des poses longues de l'écoulement.

coexister avec des régimes quasi-statiques (notamment sur fond meuble) ou gazeux (comme pour la transition gazeuse de surface observée à grande). Pouvoir décrire la transition de l'un à l'autre de façon continue (dans le même cadre) représente encore un défi.

Bibliographie

- AHN, B., BRENNEN, C. E. & SABERSKY, R. H. 1991. Measurements of velocity, velocity fluctuation, density and stresses in channel flows of granular materials. *Trans. ASME* **58**, pp. 792–803.
- ALTSHULER, E., RAMOS, O., MARTINEZ, E., BATISTA-LEYVA, A. J., RIVERA, A. & BASSLER, K. E. 2003. Sandpile formation by revolving rivers. *Phys. Rev. Lett.* **91** (1), 014501.
- ALEXANDER, A., SHINBROT, T. & MUZZIO, F. J. 2002. Scaling surface velocities in rotating cylinders as a function of vessel radius, rotation rate, and particle size. *Powder Technology* **65**, pp. 174–190.
- ANCEY, C., EVESQUE, P. & COUSSOT, P. 1996. Examination of the possibility of a fluid-mechanics treatment. *Mech. Cohesive-Frictional Mat.* **1**, pp. 385–403.
- ANCEY, C., COUSSOT, P. & EVESQUE, P. 1999. A theoretical framework for very concentrated granular suspensions in a steady simple shear flow. *J. Rheol.* **43**, pp. 1673–1699.
- ANCEY, C. & EVESQUE, P. 2000. Frictional-collisional regime for granular suspension flows down an inclined channel. *Phys. Rev. E* **62**, pp. 8349–8360.
- ANCEY, C. 2001. Dry flows down an inclined channel: Experimental investigations on the frictional-collisional regimes. *Phys. Rev. E* **65**, 011304.
- ANDREOTTI, B. & DOUADY, S. 2001. Selection of velocity profile and flow depth in granular flows. *Phys. Rev. E* **63**, 031305.
- ARADIAN, A., RAPHAËL, E., DE GENNES, P.-G. 2002. Surface flows of granular materials: a short introduction to some recent models. *C. R. Physique* **3**, pp. 187–196.
- ARANSON, I. S. & TSIMRING, L. S. 2002. Continuum description of avalanches in granular media. *Phys. Rev. E* **64**, 020301.
- AZANZA, E. 1998. Écoulements granulaires bidimensionnels sur un plan incliné. *Thèse de doctorat de l'École des Ponts et Chaussées*, Marne la Vallée, France.
- AZANZA, E., CHEVOIR, F. & MOUCHERONT, P. 1999. Experimental study of collisional granular flows down an inclined plane. *J. Fluid Mechanics* **400**, pp. 199–277.
- BALMFORTH, N. J. & LIU, J. J. 2004. Roll waves in mud. *J. Fluid Mech.* **519**, pp. 38–54.
- BALMFORTH, N. J. & KERSWELL, R. R. 2005. Granular collapse in two dimensions. *J. Fluid Mech.* **538**, pp. 399–428.
- BARBOLINI, M., BIANCARDI, A., CAPPABIANCA, F., NATALE, L. & PAGLIARDIA, M. 2005. Laboratory study of erosion processes in snow avalanches. *Cold Reg. Sci. Tech.* **43**, pp. 1–9.

- BOATENG, A.A. & BARR, P.V. 1997 Granular flow behaviour in the transverse plane of a partially filled rotating cylinder. *J. Fluid Mech.* **300**, pp. 233–249
- BOLTENHAGEN, P 1999 Boundary effects on the maximal angle of stability of a granular packing. *Eur. Phys. J. B* **12**, pp. 75–78.
- BONAMY, D. 2001. Phénomènes collectifs dans les matériaux granulaires. Écoulements de surface et réarrangements internes dans des empilements modèles. *Thèse de doctorat de l'université Paris XI - Orsay*, France.
- BONAMY, D., DAVIAUD, F. & LAURENT, L. 2002a Experimental study of granular surface flows via a fast camera: a continuous description. *Phys. Fluids* **14**, pp. 1666–1673.
- BONAMY, D., DAVIAUD, F., LAURENT, L., BONETTI, M. & BOUCHAUD, J. P. 2002b, Multi-scale clustering in granular surface flows. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 034301.
- BONAMY, D. & MILLS, P. 2003 Diphasic non-local model for granular surface flows. *Europhys. Lett.*, **63**, pp. 42–48.
- BORZSONYI, T., HALSEY, T. C. & ECKE R. E. 2005 Two scenarios for avalanche dynamics in inclined granular layers. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 208001.
- BOUCHAUD, J. P., CATES, M., PRAKASH, J. R. & EDWARDS, S. F. 1994 A model for the dynamics of sandpile surfaces. *J. Phys. France I* **4**, pp. 1383–1410.
- BOUTREUX, T., RAPHAËL, E. & DE GENNES, P. G. 1998 Surface flows of granular material: a modified picture for thick avalanches. *Phys. Rev. E* **58**, pp. 4692–4700.
- BERTON, G., DELANNAY, R., RICHARD, P. & TABERLET, N. & VALANCE, A. 2003 Two-dimensional inclined chute flows: Transverse motion and segregation. *Phys. Rev. E*, **68** (5 1), 051303.
- CAMPBELL, C.S. 1989 Self-lubrication for long runout landslides. *J. Geol.* **97**, pp. 653–665.
- CHENG, X., LECHMAN, J.B., BARBERO, A.F., GREY, G.S., JAEGER, H.M., KARCZMAR, G.S., MÖBIUS, M.E. & NAGEL, S.R. 2006, Three-dimensional shear in granular flow. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 038001.
- CHEVOIR, F., PROCHNOW, M., JENKINS, J.T. & MILLS, P. 2001 Dense granular flows down an inclined plane. in Y. Kishino, editor, *Powders and Grains*, pp. 373–376, Tokyo, 2001. Lisse, Swets and Zeitlinger.
- CHEVOIR, F., DA CRUZ, F., PROCHNOW, M., ROGNON, P. & ROUX, J.-N. 2004 Dense granular flows : friction and Jamming. in *Proceeding of the 17th ASCE Engineering Mechanics Conference*, June 13–16, 2004, University of Delaware, Newark, DE.
- CHOI, J., KUDROLLI, A., ROSALES, R. R. & BAZANT M. Z. 2004 Diffusion and Mixing in Gravity-Driven Dense Granular Flows. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 174301.
- COURRECH DU PONT, S., GONDRET, P., PERRIN, B. & RABAUD, M. 2003a Wall effects on granular heap stability. *Europhys. Lett.* **61** (4), pp. 492–498.
- COURRECH DU PONT, S. 2003b Avalanches granulaires en milieu fluide. *Thèse de doctorat de l'université Paris XI*, France.
- COURRECH DU PONT, S., FISCHER, R., GONDRET, P., PERRIN, B. & RABAUD, M. 2005 Instantaneous velocity profiles during granular avalanches. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 048003.

- DA CRUZ, F. 2004. Écoulements de grains secs : frottement et blocage. *Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées*, France.
- DA CRUZ, F., CHEVOIR, F., ROUX, J.-N. & IORDANOFF, I. 2004 Macroscopic friction of dry granular materials, in *transient processes in tribology, proceedings of the 30th Leeds-Lyon Symposium on tribology* (tribology and interface Engineering, **43**, A. Lubrecht, G. Dalmaz (eds) (Elsevier, Amsterdam, 2004).
- DA CRUZ, F., SACHA, E., PROCHNOW, M., ROUX, J.-N. & CHEVOIR, F. 2005 Rheophysics of dense granular materials: Discrete simulation of plane shear flows. *Phys. Rev. E* **72**, 021309.
- DAERR, A. & DOUADY, S. 1999a Two types of avalanche behaviour in granular media. *Nature* **399**, pp. 241-243.
- DAERR, A. & DOUADY, S. 1999b Sensitivity of granular surface flows on preparation. *Europhys. Lett.* **47** (3), pp. 324-330.
- DAERR, A. 2001 Dynamical equilibrium of avalanches on a rough plane. *Phys. Fluids* **13**, pp. 2115-2124.
- DEBOEUF, S. 2005 Transitions et coexistence solide-liquide dans les matériaux granulaires. *Thèse de doctorat de l'Institut de Physique du Globe de Paris*, France.
- DIPPEL, S. & WOLF, D. 1999 Rapid granular flow on a rough onclined. *Computer Communication* **121**, pp. 284-289.
- DOUADY, S., ANDREOTTI, B. & DAERR, A. 1999 On granular surface flow equations. *Eur. Phys. J. B* **11**, pp. 131-142.
- DURAN, J. 2000. Ripples in tapped or blown powder. *Phys. Rev. Lett.* **84** (22), pp. 5126-5129.
- DURY, C. M., RISTOW, G. H., MOSS, J. L. & NAKAGAWA, M. 1998 Boundary effects on the angle of repose in rotating cylinders. *Phys. Rev. E* **57** (4).
- ELPERIN, T. & VIKHANSKI, A. 1998 Granular flow in a rotating cylindrical drum. *Europhys. Lett.* **42**, pp. 619-623.
- ERTAS, D., GREST, G. S., HALSEY, T. C., LEVINE, D. & SILBERT, L. E. 2001. Gravity-driven dense granular flows. *Europhys. Lett.*, **56** (2), pp. 214-220.
- ERTAS, D. & HALSEY, T. C. 2002. Granular gravitational collapse and chute flow. *Europhys. Lett.*, **60** (6), pp. 931-937.
- FÉLIX, G. 2002a. Écoulement de milieux granulaires en tambour tournant. Études de quelques transitions de régime. Application à la ségrégation. *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine*, Nancy, France.
- FÉLIX, G., FALK, V. & D'ORTONNA, O. 2002b. Segregation of dry granular material in rotating drum: experimental study of the flowing zone thickness. *Powder Technology* **128**, pp. 314-319.
- FÉLIX, G. & THOMAS, N. 2004. Relation between dry granular flow regimes and morphology of deposits: formation of levées in pyroclastic deposits. *Earth Planet. Sci. Lett.* **221**, pp. 197-213.
- FENISTEIN, D. & VAN HECKE, M. 2003. Wide shear zones in granular bulk flow. *Nature* **425**, p. 256.

- FENISTEIN, D., VAN DE MEENT, J.W. & VAN HECKE, M. 2004, Universal and wide shear zones in granular bulk flow . *Phys. Rev. Lett.* **92**, 094301.
- FENISTEIN, D., VAN DE MEENT, J.W. & VAN HECKE, M. 2006. Core Precession and Global Modes in Granular Bulk Flow. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 11800.
- FORTERRE, Y. 2002. Instabilités dans les écoulements granulaires. *Thèse de doctorat de l'Université de Provence, Aix-Marseille 1*, France.
- FORTERRE, Y. & POULIQUEN, O. 2003 Long-surface-wave instability in dense granular flows. *J. Fluid Mech.* **486**, pp. 21-50.
- FORTERRE, Y. 2006. Kapiza waves give support for three-dimensional granular flow rheology. soumis à *J. Fluid Mech.*
- GDR MiDI 2004 On dense granular flows. *Eur. Phys. J. E* **14**, pp. 341-365.
- DE GENNES P.-G. 1995, Dynamique superficielle d'un matériau granulaire. *C.R. Acad. Sci. Paris série II-b* **321**, pp. 501-506.
- GODDARD, J. 1986 Dissipative materials as constitutive models for granular media. *Acta Mechanica* **63**, pp. 3-13.
- GOLDHIRSCH, I. 2003 Rapid granular flows. *Annual Rev. Fluid Mech.* **35**, pp. 267-293.
- GOUJON, C., THOMAS, N. & DALLOZ-DUBRUJEAUD, B. 2003 Monodisperse dry granular flows on inclined planes: role of roughness. *Eur. Phys. J. E* **11**, pp. 147-157.
- GOUJON, C. 2005. Écoulements granulaires bidisperses sur plans inclinés rugueux *Thèse de doctorat de l'Université de Provence*, France.
- GRASSELLI, Y. & HERRMANN, H. J. 1997 On the angles of dry granular heaps. *Physica A*, **246**, pp. 301-312.
- GRASSELLI, Y. & HERRMANN, H. J. 1999 Shapes of heaps and silos. *Eur. Phys. J. B*, **10**, pp. 673-679.
- GRAY, J.M.N.T. 2001 Granular flow in partially filled slowly rotating drums. *J. Fluid Mech.*, **441**, pp. 1-29.
- HILL, K. M., GIOIA, G. & TOTA V. V. 2003 Structure and kinematics in dense free surface granular flow. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 064302.
- HUTTER, K. & KOCH, T. 1991. Motion of a granular avalanche in an exponentially curved chute: experiments and theoretical predictions. *Phil. Trans.: Phys. Sc. Eng.* **334** (1633), pp. 98-138.
- ImageJ, RASBAND, W.S., U. S. National Institutes of Health, Bethesda, Maryland, USA, <http://rsb.info.nih.gov/ij/>, 1997-2006.
- IORDANOFF, I. & KHONSARI, M. M. 2004 Granular lubrication : toward an understanding between kinetic and fluid regime. *ASME J. of Tribology* **126**, pp. 137-145.
- IVERSON, R. M. & LAHUSEN, R. G. 1993 Friction in debris flows: Inferences from large-scale flume experiments. *Hydraulic Engineering '93* (Proceedings of the 1993 Conference of the Hydraulics Division of the American Society of Civil Engineers), **2**, pp. 1604-1609, Am. Soc. of Civ. Eng., New York.

- JAEGER, H. M., LIU, C.-H. & NAGEL, S. R. 1989, Relaxation at the angle of repose. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 40.
- JAEGER, H. M. NAGEL, S. R. & BEHRINGER, R. P. 1996. Granular solids, liquids, and gases. *Rev. Modern Phys.* **68** (4), pp. 1259-1273.
- JAIN, N., OTTINO, J. M. & LUEPTOW, R. M. 2002, An experimental study of the flowing granular layer in a rotating tumbler. *Phys. Fluids* **14**, pp. 572-582.
- JOP, P., FORTERRE, Y. & POULIQUEN, O. 2005. Crucial role of sidewalls in granular surface flows: consequences for the rheology *J. Fluid Mech.* **541**, pp. 167-192.
- JOSSERAND, C., LAGRÉE, P.-Y. & LHUILLIER, D. 2004. Stationary shear flows of dense granular materials : a tentative continuum modelling *Eur. Phys. J. E.* **14**, pp. 127-135.
- KHAKHAR D. V., ORPE, A. V., ANDERSEN, P. & OTTINO, J. M. 2001a. Surface flow of granular materials: model and experiments in heap formation. *J. Fluid Mech.* **441**, pp. 255-264.
- KHAKHAR D. V., ORPE, A. V. & OTTINO, J. M. 2001b. Surface granular flows: two related examples. *Adv. in Comp. Syst.*, **4**, pp. 407-417.
- KOEPPE, J. P., ENZ, M. & KAKALIOS, J. 1998, Phase diagram for avalanche stratification of granular media. *Phys. Rev. E* **58**, 58, pp. 4104–4107.
- KOMATSU, T. S., INAGAKI, S., NAKAGAWA, N. & NASUMO, S. 2001 Creep motion in a granular pile exhibiting steady surface flow. *Phys. Rev. Lett.* **86**, pp. 1757-1760.
- LAJEUNESSE, E., MANGENEY-CASTELNAU A. & VILOTTE J. P. 2004. Spreading of a granular mass on an horizontal plane. *Phys. Fluids* **16**, pp. 2371-2381.
- LAJEUNESSE, E., MONNIER, J. B. & HOMSY G. M. 2005. Granular slumping on a horizontal surface. *Phys. Fluids* **17**, 103302.
- LEMIEUX, P.-A. & DURIAN, D. J. 2000. From avalanches to fluid flow: A continuous picture of grain dynamics down a heap. *Phys. Rev. Lett.* **85**, pp. 4273-4276.
- LIU, C., JEAGER, H. M. & NAGEL, S. R. 1991, Finite-size effects in a sandpile. *Phys. Rev. A* **43** (12), pp. 7091-7092.
- LIU, X. Y., SPECHT, E. & MELLMANN, J. 2005, Experimental study of the lower and upper angles of repose of granular materials in rotating drums. *Powder Tech.* **154**, pp. 125-131.
- LOSERT, W., BOCQUET, L., LUBENSKY, T. C., & GOLLUB, J. P. 2000. Particle dynamics in sheared granular matter. *Phys. Rev. Lett.* **85** (7), pp. 1428-1431.
- LOUGE, M. Y. & KEAST, S. C. 2001. On dense granular flows down flat frictional inclines. *Phys. Fluids* **13** (5), pp. 1213-1233.
- LUBE, G., HUPPERT, H. E., SPARKS, R. S. J. & HALLWORTH, M. A. 2004. Axisymmetric collapses of granular columns. *J. Fluid Mech.* **508** (5), pp. 175-199.
- LUBE, G., HUPPERT, H. E., SPARKS, R. S. J. & FREUNDT, A. 2005. Collapses of two-dimensional granular columns. *Phys. Rev. E* **72**, 041301.
- MALLOGGI F. 2005a. Études expérimentales d'avalanches granulaires - Ondes érosives. *Thèse de doctorat de l'Université Paris 7, France.*

- MALLOGGI, F., LANUZA, J., ANDREOTTI, B. & CLÉMENT É. 2005b. Erosion waves: transverse instabilities and fingering. cond-mat/0507163.
- MANGENEY-CASTELNAU, A., BOUCHUT, F., VILOTTE, J. P., LAJEUNESSE, E., AUBERTIN, A. & PIRULLI, M. 2005. On the use of Saint-Venant equations for simulating the spreading of a granular mass. *J. Geophys. Res.* **110**, B09103.
- MCMANARA, S. & YOUNG, W. 1996. Dynamics of a freely evolving two-dimensional granular medium. *Phys. Rev. E* **53**, pp. 5089-5100.
- MELLMANN, J. 2001, The transverse motion of solids in rotating cylinders—forms of motion and transition behavior. *Powder Tech.* **118**, pp. 251–270.
- MILLS, P., LOGGIA, D. & TIXIER, M. 1999 Model for a stationary dense granular flow along an inclined wall. *Europhys. Lett.* **45**, pp. 733-738.
- MUEGGENBURG, N. W. 2005 Behavior of granular materials under cyclic shear. *Phys. Rev. E* **71**, 031301.
- MUETH, D. M., JAEGER, H. & NAGEL, S. R. 1998 Force distribution in a granular medium. *Phys. Rev. E* **57**, pp. 3164-3169.
- MUETH, D. M., DEBREGEAS, G. F., KARCZMAR, G. S., ENG, P. J., NAGEL, S. R. & JAEGER, H. M. 2000 Force distribution in a granular medium. *Nature* **406**, pp. 385-389.
- NAAIM, M., FAUG, T. & NAAIM-BOUVET, F. 2003, Dry granular flow modelling including erosion and deposition. *Surv. Geophys.* **24** (5-6), pp. 569-585.
- ORPE, A. V. & KHAKHAR, D. V. 2001, Scaling relations for granular flow in quasi-two-dimensional rotating cylinders. *Phys. Rev. E* **64**, 031302.
- ORPE, A. V. & KHAKHAR D. V. 2004 Solid-fluid transition in a granular shear flow. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 068001.
- PITMAN, E. B., NICHITA, C.C., PATRA, A. K., BAUER, A. C., BURSİK, M. & WEBER, A. 2003, A model of granular flows over an erodible surface. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B.* **3** (4), pp. 589–599.
- POULIQUEN, O. & GUTFRAIND, R. 1996a, Stress fluctuations and shear zones in quasi-static granular chutes flows. *Phys. Rev. E* **53**, pp. 552-561.
- POULIQUEN, O. & RENAUT, N. 1996b, Onset of granular flows on an inclined rough surface: dilatancy effects. *J. Phys. II France* **6**, pp. 923-935.
- POULIQUEN, O. 1999a Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Phys. Fluids* **11**, pp. 542-548.
- POULIQUEN, O. & VALLANCE, J. W. 1999b Segregation induced instabilities of granular fronts. *Chaos* **9**, pp. 621-630.
- POULIQUEN, O., FORTERRE, Y. & LE DIZES S. 2001 Slow dense granular flows as a self-induced process *Adv. in Complex Syst.*, **4**, pp. 441-450.
- POULIQUEN, O. & FORTERRE, Y. 2002 Friction law for dense granular flows: application to the motion of a mass down a rough inclined plane. *J. Fluid Mech.* **453**, pp. 133-151.
- POULIQUEN, O., BELZONS, M. & NICOLAS, M. 2003, Fluctuating particle motion during shear induced granular compaction. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 014301.

- POULIQUEN, O. 2004, Velocity correlations in dense granular flows. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 248001.
- PROCHNOW, M., CHEVOIR, F. & ALBERTELLI, M. 2000 Dense granular flows down a rough inclined plane. In *Proceedings, XIIIth International Congress on Rheology, Cambridge, UK (2000)*
- PROCHNOW, M. 2002 Écoulements denses de grains secs. *Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Marne la vallée, France.*
- QUARTIER, L., ANDREOTTI, B., DOUADY, S. & DAERR, A. 2000 Dynamics of a grain on a sandpile model. *Phys. Rev. E* **62**, pp. 8299-8307.
- RADJAI, F., JEAN, M., MOREAU, J. J. & ROUX, S. 1996 Force distribution in dense two dimensional granular systems. *Phys. Rev. Lett.* **77**, pp. 274-277.
- RAJCHENBACH, J. 1990 Flows in powder: from discrete avalanches to continuous regime. *Phys. Rev. Lett.* **65** (18), pp. 2221-2224.
- RAJCHENBACH, J. 2003 Dense, rapid flows of inelastic grains under gravity. *Phys. Rev. Lett.* **90**: 144302.
- RENOUF, M., BONAMY, D., DUBOIS, F. & ALART, P. 2005 Numerical simulation of two-dimensional steady granular flows in rotating drum: On surface flow rheology. *Phys. Fluids* **17**, 103303.
- RESTGANO, F., BOCQUET, L. & CHARLAIX, É. 2004. Where does a cohesive heap break? *Euro. Phys. J. E* **14**, pp. 177-183.
- REYNOLDS, O. 1885 On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact, with experimental illustrations. *Philosophical Mag.*, **20**, pp. 469-481.
- RISTOW, G. H. 1996 Dynamics of granular materials in a rotating drum. *Europhys. Lett.* **34** (4), pp. 263-268.
- ROBERTS, A. W. 1969 An investigation of the gravity flow of noncohesive granular materials through discharge chutes. *Trans. A.S.M.E., J. Engin. Indus.* **91**, pp. 373-381.
- SAVAGE, S. B. 1979 Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels. *J. Fluid Mech.* **92**, pp. 53-96.
- SAVAGE, S. B. 1983 Granular flows down rough inclines - Review and extension. *Mechanics of granular materials: new models and constitutive relations*. édité par JENKINS, J. T. & SATAKE, M., Elsevier Science Publisher B.V., Amsterdam. pp. 261-282.
- SAVAGE, S. B. 1984 The mechanics of rapid granular flows. *Adv. Appl. Mech.* **24**, pp. 289-366.
- SAVAGE, S. B. & SAYED, M. 1984 Stresses developed by dry cohesionless granular materials sheared in an annular shear cell. *J. Fluid Mech.* **142**, pp. 391-430.
- SAVAGE, S. B. & HUTTER, K. 1989 The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *J. Fluid Mech.* **199**, pp. 177-215.
- SEYMOUR, J. D., CAPRIHAN, A., ALTOBELLI, S. A. & FUKUSHIMA, E. 2000, Pulsed gradient spin echo nuclear magnetic resonance imaging of diffusion in granular flow. *Phys. Rev. Lett.* **84** (2), pp. 266-269.
- SIAVOSHI, S. & KUDROLLI, A. 2001. Failure of a granular step. *Phys. Rev. E* **71**, 051302.

- SILBERT, L. E., ERTAS, D., GREY, G. S., HALSEY, T. C., LEVINE, D. & PLIMPTON, S. J. 2001 Granular flow down an inclined plane: Bagnold scaling and rheology. *Phys. Rev. E* **64**, 051302.
- SILBERT, L. E., LANDRY, J. W. & GREY, G. S. 2003 Granular flow down a rough inclined plane: transition between thin and thick piles. *Phys. Fluids* **15**, pp. 1-10.
- SOVILLA, B. 2004, Field experiments and numerical modelling of mass entrainment and deposition process in snow avalanches. Ph.D. Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Switzerland.
- SOVILLA, B., SOMMAVILLA, F. & TOMMASELLI, A. 2001, Measurements of mass balance in dense snow avalanche events. *Ann. Glaciol.* **32**, pp. 230–236.
- STARON, L. & HINCH, E. J. 2005, Discrete simulation of the collapse of granular columns. *J. Fluid Mech.* **545**, pp. 1-27.
- TABERLET, N., RICHARD, P., VALANCE, A., DELANNAY, R., LOSERT, W., PASINI, J.M. & JENKINS, J. T. 2003 Super stable granular heap in thin channel. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 264301.
- TABERLET, N. 2005. Écoulements granvitaires de matériaux granulaires. *Thèse de doctorat de l'Université de Rennes 1*, France.
- UNGER, T., TÖRÖK, J., KERTÉSZ, J. & WOLF, D.E. 2004 Shear band formation in granular media as a variational problem. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 214301.
- TEGZES, P., VICSEK, T. & SCHIFFER, P. 2002 Avalanche dynamics in wet granular materials. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 094301.
- VANEL, L., HOWELL, D., CLARK, D., BEHRINGER, R. P. & CLÉMENT, E. 1999 Memories in sand: experimental test of construction history and stress distribution under a sand-pile. *Phys. Rev. Lett.* **60**, R5040.
- WEEKS, E. R. & WEITZ, D. A. 2002 Properties of cage rearrangements observed near the colloidal glass transition. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 095704.
- WIELAND, M., GRAY, J. M. N. T. & HUTTER, K. 1999 Channelized free-surface flow of cohesionless granular avalanches in a chute with shallow lateral curvature. *J. Fluid Mech.* **392**, pp. 73–100.
- YAMANE, K., NAKAGAWA, M., ALTOBELLI, S. A., TANAKA, T. & TSUJI, Y. 1998 Steady Particulate Flows in a Horizontal Rotating Cylinder. *Phys. Fluids* **10**, pp. 1419-1427.
- ZHOU, Y.C., XU, B.H., YU, A.B., ZULLI, P. 2002 An experimental and numerical study of the angle of repose of coarse spheres. *Powder Tech.* **125**, pp. 45-54.

Écoulements granulaires sur fond meuble

Résumé - Bien qu'assez répandus dans le milieu naturel et dans diverses activités industrielles, les écoulements granulaires denses possèdent des caractéristiques particulières qui semblent dépendre fortement des géométries observées. Lorsque le fond qui supporte la coulée peut être érodé, les mécanismes déterminant la position de l'interface liquide-solide ou la vitesse à laquelle la pente est dévalée ne sont pas encore bien compris. Ceci provient du manque de connaissance de la rhéologie des écoulements granulaires et constitue le coeur de cette thèse.

Ce travail s'articule principalement en trois parties. Premièrement, dans le but de fournir une description détaillée des écoulements sur tas, une étude expérimentale systématique des écoulements stationnaires a été menée dans un canal. Nous avons ainsi pu mettre en évidence l'importance des parois latérales du système dans le cadre des écoulements à la surface d'un tas : les propriétés de l'écoulement sont complètement contrôlé par la largeur du canal. Ce constat nous a ensuite conduit à la proposition d'une modélisation fondée sur une rhéologie récemment développée. Cette rhéologie a été ensuite étendue à trois dimensions et appliquée à notre configuration. Des simulations numériques permettent de reproduire correctement les propriétés des écoulements stationnaires. Nous avons enfin étudié un phénomène transitoire particulier afin de comprendre la manière dont l'épaisseur coulante évolue. Malgré la présence de certaines limitations, ce travail montre qu'une description locale des écoulements granulaire est appropriée et que la rhéologie proposée ouvre la voie à des modélisations plus complète des écoulements granulaires denses.

Mots-clés : matériaux granulaires, écoulements denses, fond meuble, rhéologie locale, influence des parois, écoulements de surface, modèle tridimensionnel.

Granular flows on erodible ground

Abstract - Dense granular flows, which are common in nature and industry, have peculiar characteristics that seem to strongly depend on geometries. When the bottom, which supports the flow, can be eroded, the mechanisms determining the position of the liquid-solid interface or the velocity of the grains down the slope are not yet well understood. This case underlines the lack of knowledge about the rheology of dense granular flows. The experimental study of flows on heap is the central part of this thesis.

In order to provide a detailed description of flows on heap, we first carried out an experimental study of the stationary flows in a channel. Systematic measurements allowed us to highlight the important role of sidewalls in such systems: the flow properties are completely controlled by the width of the channel. According to this result, we proposed a model based on a recent rheology. This rheology has been then extended to three dimensions and was applied to our configuration. Numerical simulations quantitatively reproduce the properties of steady flows . We finally studied a peculiar avalanche in order to understand the exchange between the flowing layer and the bottom by following the flowing-thickness during the transient regime. In spite of some limits, this work shows the relevance of a local rheology, which opens the way to more complete model of the dense granular flows.

Keywords : granular media, dense flows, erodible bottom, local rheology, sidewalls effect, surface flows, tridimensional model.