Université Joseph Fourier - Grenoble I
ECOLE DOCTORALE DE PHYSIQUE

THESE

présentée pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences de l'Université Joseph Fourier

Spécialité : Cosmologie, Astrophysique des Particules

Relativité générale et champs quantiques :

quelques aspects de physique des trous noirs et de cosmologie en gravité de Lovelock, espaces de Sitter et dimensions supplémentaires

par

Julien GRAIN

Soutenue le 2 octobre 2006 devant le Jury composé de :

A. Barrau	Directeur de thèse
M. Besançon	Rapporteur
F. Bouchet	Examinateur
G. Henri	Président
R. Parentani	Examinateur
P. Peter	Rapporteur

Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, CNRS/IN2P3 - UJF

Remerciements

A la manière des écrivains surréalistes qui se lancèrent dans l'écriture spontanée, ces remerciements ne sont que l'expression, spontanée, des personnes *qui me viennent au cœur*, certains *à l'esprit*, lorsque l'on me demande de dire *merci*. A défaut d'être conventionnels, ces remerciements sont sincères, et certains même intemporels, mais garderont une certaine pudeur, à l'image de leur auteur.

Un doux euphémisme pour commencer. Je remercie mes parents, cela passe avant toute chose. Est-il vraiment nécessaire de me justifier ? Je ne me cacherai pas derrière la trop célèbre expression *il n'existe pas de mot pour exprimer ce que je ressens*. Je ne les cherche pas, tout simplement. Juste un message entre les lignes.

Je remercie ma sœur. Mon aînée, donc mon modèle. Nécessairement. Celle qui vous inspire sans vous guider, qui vous forme sans vous déformer.

Je remercie Julie, « scandaleusement belle[1] » ; scandaleusement passionée ; scandaleusement sur terre ; scandaleusement présente durant tous ces moments et aussi, bien plus évanescente que le monde qui m'entoure. Je la remercie pour être la seule à croire, qui est parfois plus important que savoir, que le meilleur physicien sur Terre n'est autre que moi.

Je remercie enfin tous ceux de ma famille qui m'ont soutenu : mes grands-parents, mes oncles, tantes, cousins, cousines et un petit bonhomme, déjà enfant-star par ces remerciements.

Merci à Aurélien, dont l'enthousiasme scientifique est certainement contagieux. Mais surtout pour se placer au-delà de ce qu'il fait, au-delà de ce qui est dit. Pour m'avoir encouragé à garder un scepticisme libre vis-à-vis des propositions sur le monde, et enfin de ne pas m'avoir *mis en cage*. Je te remercie pour ton soutien et ta bienveillance, tant professionnels qu'humains et pour m'avoir confirmé que tout scientifique se devait d'être humble et humain face au savoir qu'il découvre et produit.

Je remercie évidemment tous les membres du groupe AMS passé-CREAM présent-SKA futur-LISA avorté. Michel, un chef anti-medef dont les employés ne sont pas dans la rue, avec une énergie que je ne pouvais imaginer ; Laurent, la seule personne qui vous parle d'états quantiques intriqués à onze heures, de politique extérieure à table, de support mécanique à quinze heures et qui finalement vous sort une pile de photocopies de l'Abramowitz & Stegun sur les fonctions de Bessel avant de rentrer à la maison ; Mariane pour ses explications sur la théorie quantique des champs et enfin Kostia, pour ses lumineuses discussions sur la Mécanique Quantique et sa bienveillance ; sans oublier Marciano, Olivier et Rémy. Et bien sûr, tout cela dans une très bonne ambiance.

Je remercie les gens avec qui j'ai eu la joie de travailler : Panagiota Kanti, point de départ

[1] André Breton, *L'Amour Fou*.

d'une grande partie des travaux présentés dans cette thèse ; Stas Alexeev, qui m'a fait découvrir l'audace Russe face aux équations ressorties par MAPLE (allez on simplifie ces dix pages) ; Pierre Salati, Richard Taillet et David Maurin, grand maître de la propagation galactique ; et enfin Maxim Khlopov.

Je remercie aussi l'actuel directeur du LPSC, Johann Collot, pour m'avoir apporté son soutien dès le début de mon DEA et pour avoir toujours suivi les évolutions de cette thèse, qui a tout de même changé de titre quatre fois.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement Marc Besançon et Patrick Peter d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit, ainsi que l'ensemble des membres du jury qui m'ont fait le plaisir de considérer mes travaux de recherche. Ils ont ainsi eu la chance, et le courage, de lire la prose d'un auteur qui a eu son bac surtout grâce au sciences. Excusez-moi pour la lourdeur des tournures et merci pour le temps accordé.

Enfin, merci à toutes les personnes du LPSC avec qui ce fut un plaisir de prendre un café, discuter, échanger. La team ARCHEOPS tout d'abord : Juan, Cécile, Daniel et Jonathan (on se retrouvera bientôt). Les rencontres diverses ensuite : Julien, Giuseppe, Benjamin, Malek, Jean-Pierre, Arnaud, Sylvain et tous ceux que j'ai oublié[2].

La durée d'une thèse ne se résume pas qu'à de la science, en tout cas en ce qui me concerne. Je tiens donc à remercier tous mes amis qui font que ces travaux font aussi echo à des moments de vie, indissociables de toute production scientifique qui est, de fait, en partie personnelle. Et puis je remercie qui je veux !

Je remercie donc tout particulièrement Mehdi, Driss, Olive, Berto et Luca, pour m'avoir ouvert les portes d'un monde imaginaire, la réalité virtuelle la plus vieille du monde. Mais surtout pour un nombre incalculable d'instants d'anthologie et de bonheur. Merci à la divinement chaotique nébuleuse Hadra. Je remercie Ben, cellule psychologique au H2, premier beauf de France et adepte de la franch(ouillard)e camaraderie en terrasse : tu finiras au Panthéon. Merci à Jean & Julie ainsi qu'à Sophie pour leur soutien à distance. Un grand merci à toutes les personnes que j'ai croisées avec bonheur.

Et surtout, je remercie tous ces compagnons de tabou pour cette sincère amitié. Rendez-vous au comptoir !

Je tiens enfin à remercier le H2 qui m'a nourri pendant trois ans. Brasero-milles-feuilles, pizza-frites, beignets de calamars-riz avec salade-bar et tarte au citron meringuée : tous les challenges sont possibles dans ce lieu de culte gastronomique. Big dédicace au Saint Félicien, dernier rempart dans la course au 6.04, record mondial de la discipline.

Pr. Grain

[2]Ce qui peut éventuellement vouloir dire que ces personnes ne m'ont pas marqué, ou plus simplement que j'ai la mémoire d'un piaf.

Liste des publications

Les travaux présentés dans cette thèse ont donné lieu à plusieurs articles de recherche dont voici la liste :

Articles publiés

J. Grain & A. Barrau, Nucl. Phys. B **742** (2006) 253
A WKB Approach to Scalar Fields Dynamics in Curved Space-Time

J. Grain, A. Barrau & P. Kanti, Phys. Rev. D **72** (2005) 104016
Exact Results for Evaporating Black Holes in Squared-Curvature Lovelock Gravity : Gauss-Bonnet Greybody Factors

P. Kanti, J. Grain & A. Barrau, Phys. Rev. D **71** (2005) 104002
Bulk and Brane Decay of a (4+n)-Dimensional Schwarzschild-de Sitter Black Hole : Scalar Radiation

A. Barrau, C. Féron & J. Grain, Astrophys. J. **630** (2005) 1015
Astrophysical Production of Microscopic Black Holes in a Low Planck-Scale World

A. Barrau, J. Grain & S. Alexeyev, Phys. Lett. B **584** (2004) 114
Gauss-Bonnet Black Holes at the LHC : Beyond the Dimensionality of Space

M. Yu. Khlopov, A. Barrau & J. Grain, Class. Quantum Grav
23 (2006) 1875 *Gravitino Production by Primordial Black Hole Evaporation and Constraints on the Inhomogenity of the Early Universe*

A. Barrau, P. Salati, G. Servant, F. Donato, J. Grain, D. Maurin & R. Taillet, Phys. Rev. D **72** (2005) 063507
Kaluza-Klein Dark Matter and Galactic Antiprotons

Articles en préparation

J. Grain *et al.*, en préparation pour Physics Letters
Bulk Graviton Emission by Gauss-Bonnet Black Holes

J. Grain & A. Barrau, en préparation pour Physical Review
Quantum Bound States around Back Holes

J. Grain & A. Barrau, en préparation pour Nuclear Physics
General Formalism for Semiclassical Scalar Wave Functions in Curved Background

Table des matières

Conventions et constantes

Constantes fondamentales

Vitesse de la lumière	$c = 2.99 \times 10^{-8}$ m.s^{-1}
Constante de Planck	$\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J.s
Constante de Boltzmann	$k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1}
Constante de Newton	$G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}

Constantes et unités de Planck

Energie	1 GeV$= 1.6 \times 10^{-10}$ J
Température	1 GeV$= 1.16 \times 10^{13}$ K
Masse	1 GeV$= 1.78 \times 10^{-27}$ kg
Longueur	1 GeV$^{-1} = 1.97 \times 10^{-16}$ m
Temps	1 GeV$^{-1} = 6.65 \times 10^{-25}$ s
Masse de Planck	$M_{Pl} = (\hbar c/G)^{1/2} = 2.17 \times 10^{-8}$ kg
Longueur de Planck	$\ell_{Pl} = \left(\hbar G/c^3\right)^{1/2} = 1.61 \times 10^{-35}$ m
Temps de Planck	$t_{Pl} = \left(\hbar G/c^5\right)^{1/2} = 5.39 \times 10^{-44}$ s

Tenseurs et dérivations

Tenseur de Lorentz	$\eta_{\mu\nu}$
Tenseur métrique	$g_{\mu\nu}$
Tenseur de Riemann	$R_{\mu\nu\rho\sigma}$
Dérivation directe (1)	$\partial_\nu \Psi^\mu = \frac{\partial \Psi^\mu}{\partial x^\nu}$
Dérivation directe (2)	$\frac{d\Psi^\mu}{dp} = \frac{dx^\nu}{dp}\partial_\nu \Psi^\mu$
Dérivation covariante (1)	$\Psi^\mu_{\ ;\nu} = \frac{\partial \Psi^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\ \nu\lambda}\Psi^\lambda$
Dérivation covariante (2)	$\frac{D\Psi^\mu}{Dp} = \frac{dx^\nu}{dp}\Psi^\mu_{\ ;\nu}$

Opérateurs différentiels en espace courbe

Gradient d'un scalaire	$\Phi_{;\mu}$
Quadri-rotationnel d'un vecteur	$A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$
Quadri-divergence d'un vecteur	$A^\mu_{;\nu} = \partial_\mu A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\mu} A^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{-g}A^\mu$
Quadri-divergence d'un tenseur	$T^{\mu\nu}_{\ \ ;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{-g}T^{\mu\nu} + \Gamma^\nu_{\ \lambda\mu}T^{\mu\lambda}$

Abrévations des espace-temps

Espace (Anti)-de Sitter	$\rightarrow$	Espace (A)dS
Espace Schwarzschild-(Anti)-de Sitter	$\rightarrow$	Espace S(A)dS
Espace Schwarzschild-Gauss-Bonnet	$\rightarrow$	Espace SGB

Conventions à $D-$dimensions

Nous nous placerons généralement dans le système d'unités naturelles : $\hbar = c = k_B = G = 1$ dans le cas des théories usuelles à 4 dimensions. En ce qui concerne la constante de Newton, des précautions doivent être prises quand nous considèrerons le cas de théories avec dimensions supplémentaires.

Nous noterons systématiquement D le nombre total de dimensions (spatiales et temporelle) et $n = D-1$ le nombre de dimensions spatiales. Dans les théories à dimensions supplémentaires, la constante de Newton G peut acquérir une valeur différente de celle donnée précédemment, correspondant au cas quadri-dimensionnel. La constante de Newton G_D et la masse de Planck M_D à D dimensions sont liées l'une à l'autre via la relation $G_D = (1/M_D)^{D-2}$, où $\hbar = c = 1$. Dans le cas $4-$dimensionnel, la relation $G = (1/M_{Pl})^2$ est bien retrouvée.

Conventions pour la fonction métrique

Tout au long de ce manuscrit, nous aurons affaire à des systèmes stationnaires et à symétrie sphérique. Dans ce cas, la métrique est entièrement déterminée, en plus de la partie angulaire, par la composante deux fois temporelle g_{00} du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ qui ne dépend que de la coordonnée radiale r. Dans tous ces cas, nous dénoterons cette composante $h(r)$, en tant que fonction, et l'appellerons fonction métrique.

Introduction

« On ne sait pas que *Cela* est au delà des ténèbres
Etant à la fois la Connaissance,
L'objet de la Connaissance,
Et le chemin qui y mène :
Cela réside au coeur de l'univers. »

La Bhagavad-Gita

La physique est actuellement en croisade vers le graal d'une théorie unique, expliquant tout ce qui nous entoure. Motivée par de plus en plus de faits expérimentaux tendant à prouver que l'ensemble des théories que nous connaissons devrait converger à haute énergie, nous ne pouvons cependant ignorer qu'éprouver une hypothèse n'est pas équivalent à la démontrer. Ce monothéïsme, cette recherche d'unicité, au sein de la physique moderne proviendrait-il d'un principe déïque ? Nous pouvons nous poser la question de savoir si la physique est méta-humaine ou non. Cette théorie unique existe-t-elle en soi, quelque part dans un méta-univers que nous cherchons ? Ou bien ne sommes nous pas simplement en train de construire tout ceci ? Cela pose aussi la question de la vérité cachée derrière une théorie physique ? La physique nous renseigne-t-elle véritablement sur *l'essence* du monde, si tant est qu'il en ait une ? La physique est à mon avis un angle d'attaque pour répondre à des questions fondamentales sur le monde qui nous entoure. Un angle d'attaque qui me semble juste, que je défends, sans pour autant exclure d'autres approches (philosophiques) et ainsi éviter de me faire le chantre d'un scientisme mal venu[3]. Quelles qu'en soient les réponses, ces questions nous poussent à avancer dans cette veine d'une seule et unique théorie fondamentale afin de confirmer ou d'infirmer cette hypothèse.

Dans cette recherche d'une théorie unique, la gravitation tient une place privilégiée. Bien qu'étant probablement l'interaction la plus étudiée dans l'histoire des sciences, elle n'en reste pas moins une des plus fascinantes et mystérieuses. La révolution d'un espace-temps dynamique, introduit au début du siècle dernier par A. Einstein, a permis de faire entrer la physique dans le domaine du questionnement cosmologique, affirmant à la fois le caractère fondamental de cette interaction dans la physique, mais aussi le caractère fondamental de la physique en tant que proposition sur le monde. Pourtant la théorie de la Relativité Générale n'est peut-être pas la théorie ultime de la gravitation, car dans ce corpus théorique, cette interaction résiste toujours à l'autre grande révolution physique qu'est la Mécanique Quantique. Le problème d'une

[3]Il ne s'agit ici aucunement de « relativisme » mais bien d'une défense d'une liberté de raisonnement (voir d'un devoir de raisonner), sans pour autant passer au-delà de questions d'éthique ni d'un engagement idéologique. Il ne s'agit pas non-plus d'un soutien à la religion, la critique d'une science qui peut, dans son action politique, suivre la trace des implications politiques des religions en étant la preuve. Parole d'athée...

formulation quantique de la gravitation est donc central dans les constructions théoriques qui tentent, si ce n'est une unification totale, au moins une unification partielle des interactions fondamentales. Obtenir une théorie quantique de la gravitation nécessite de modifier soit la Relativité Générale, soit la Mécanique Quantique et probablement les deux. Parmi les nombreux modèles théoriques visant cet objectif, la théorie des cordes et la gravité quantique à boucle sont sûrement les deux voies les plus prometteuses. Elles procèdent pourtant de deux manières différentes. D'une part, la théorie des cordes ne cherche pas seulement une formulation quantique de la gravitation mais aussi à unifier l'ensemble des interactions. Son origine sociologique se trouverait plutôt du côté des *particulistes*[4] et vise essentiellement à faire émerger une théorie de la gravitation quantifiable d'une approche de type *théorie de champ*[5], conduisant souvent à des modifications du Lagrangien d'Einstein-Hilbert. D'autre part, la gravité quantique à boucle est quant à elle moins ambitieuse, son but étant uniquement d'obtenir une formulation quantique de la gravitation, et son origine sociologique serait à chercher du côté des *relativistes*. L'idée de cette formulation consiste à établir de nouvelles règles de quantification permettant une quantification non-perturbative de la Relativité Générale. D'une certaine manière, les théories des cordes tentent de faire émerger la gravitation d'une théorie quantique des champs unifiée tandis que la gravité quantique à boucle s'efforce de développer des méthodes de quantification adaptables à la Relativité Générale. Ces théories, bien que loin d'être complètes, présentent un certain nombre de réussites, parfois communes, parfois propres. Dans le jeu de la bataille théorique en physique, un des grands juges est l'expérience. Pour différencier entre modèles de gravité quantique, si une telle théorie est nécessaire, il est indispensable d'identifier des phénomènes dépendant significativement des effets de gravité quantique. Il s'agit donc d'étudier les phénomènes où un champ gravitationnel fort rencontre la Mécanique Quantique.

Face à ce défi théorique de l'unification des deux grandes théories de la physique moderne, le processus d'évaporation des trous noirs, découvert par S. Hawking dans les années soixante-dix, est un outil de choix. Avec la phénoménologie de l'Univers primordial, ce mécanisme est parmi les seuls où des effets de gravité quantique jouent un rôle important. Si aujourd'hui l'ensemble des physiciens s'accorde quant au rôle central de ce processus dans la physique future, les trous noirs ne furent pas toujours considérés à leur juste valeur. Tout comme le positon, les trous noirs sont d'abord une solution, la première qui fut trouvée, des équations d'Einstein. Mais son importance, qui doit bien valoir celle du positon, a mis bien plus de temps à s'imposer : de 1916, date de sa découverte, à la fin des années cinquante, la *solution de Schwarzschild*, fut considérée comme une aberration[6], au mieux une simple solution ne décrivant aucun phénomène existant dans la nature, des équations de la Relativité Générale, Einstein lui-même ne portant aucun crédit à cette solution[7]. A partir des années soixante, sous l'impulsion de physiciens comme Wheeler, les trous noirs accèdent tout de même à une meilleure considération, du moins d'un point de vue théorique. Ce sera durant les années soixante que ces objets acquierront réellement leurs lettres de noblesse grâce à l'observation des premiers *quasars* et autres *noyaux actifs de galaxie* dont la quantité extrême d'énergie libérée ne semble s'expliquer que par un moteur central du type trou noir : la solution de Schwarzschild, hérésie de la physique du début du vingtième siècle, se trouve en fait bien correspondre à des objets existant dans le cosmos. Les années soixante-dix furent l'âge d'or de la physique des trous noirs dont les principales propriétés furent déterminées et qui, avec la cosmologie physique, ont permis de mettre en avant toute la richesse et les mystères de la théorie d'Einstein. Depuis les années soixante, un faisceau de preuves expérimentales confirme l'existence de ces objets et leur étude présente de nombreux

[4]Les cordes ont d'ailleurs originellement été introduites afin de résoudre des problèmes liés à la spectroscopie hadronique et à l'interaction forte.

[5]La Relativité Générale peut être vue avec une approche de théorie de champ, mais elle n'est pas quantifiable, du moins avec les procédures connues.

[6]La métrique de Schwarzschild peut être utilisée pour décrire l'espace-temps autour de n'importe quel objet gravitationnel statique et à symétrie sphérique. Cependant, dans le cas d'une étoile ou une planète, la région en-deçà du rayon de Schwarzschild et l'horizon n'existent pas et c'est bien ces caractéristiques là qui posaient tant de problèmes aux physiciens du début du siècle.

[7]Il n'aura malheureusement pas le temps de se rendre compte qu'il s'agissait, peut être, de sa *deuxième plus grande erreur*.

intérêts : des intérêts astrophysiques pour l'étude des objets les plus violents du cosmos et du cœur des galaxies, en cosmologie via l'utilisation des quasars comme sonde et par la possible production de trous noirs durant les toutes premières fractions de fractions de fractions... de seconde de l'Univers, et enfin, des implications en physique *très* fondamentale, comme nous allons le voir tout au long de ce manuscrit de thèse.

Le processus d'évaporation des trous noirs, ainsi que son rôle dans l'énonciation des quatre principes de la thermodynamique des trous noirs, est certainement le mécanisme le plus spectaculaire impliquant un tel objet : un trou noir placé dans le vide va perdre de sa masse, et donc diminuer de taille, en émettant tout type de particules provenant de la brisure des fluctuations quantiques du vide compte tenu de la présence d'un horizon. Ce phénomène est une conséquence de la dynamique des champs quantiques dans un champ de gravitation intense, induisant une forte courbure de l'espace-temps : il est un archétype de la théorie quantique des champs en espace-temps courbe et ne peut avoir lieu qu'en combinant, même si cela reste semi-classique, la Mécanique Quantique et la Relativité Générale. Puisque la courbure induite par le trou noir, et plus précisément la présence d'un horizon, cause la brisure des fluctuations du vide, la forme du spectre de particules émises par ce dernier est fortement dépendante du profil précis de l'espace-temps à proximité du trou noir. Ainsi, si la théorie de la gravitation s'avère être différente de la Relativité Générale, tout en conservant la présence de trous noirs et le concept de courbure, le spectre d'émission est modifié et il peut alors être considéré comme un *regard* sur la théorie décrivant l'interaction gravitationnelle. Cette ligne de pensée guide fortement le travail présenté dans la suite : les spectres d'émission de trous noirs dans des cadres théoriques étendant la Relativité Générale seront dérivés. Ces calculs ont alors plusieurs applications : il pourront dans un premier temps permettre d'effectuer des investigations quant aux possibilités expérimentales de détection d'effets de gravitation quantique grâce au mécanisme d'évaporation des trous noirs. Dans un deuxième temps, ces résultats permetteront aussi de répondre à une question fondamentale : les principes de la thermodynamique des trous noirs, et en particulier le second principe généralisé, restent-il vérifiés dans ces cadres théoriques étendus de la Relativité Générale ? Enfin, de façon plus globale, ils s'inscrivent dans la logique d'obtention de tous les éléments nécessaires à l'élaboration d'expériences de pensée faisant intervenir la Mécanique Quantique et la gravitation.

La première partie de ce manuscrit consiste à établir le cadre théorique. Après un modeste historique de la gravitation, s'adressant aux non-spécialistes, la théorie d'Einstein de la Relativité Générale sera présentée, ainsi qu'une de ses conséquences les plus spectaculaires, et qui nous intéresse tout particulièrement : l'existence de trous noirs. Le dernier chapitre de cette partie présentera l'extension de la Relativité Générale que nous avons considérée, la théorie de Lovelock, que nous limiterons au deuxième ordre en courbure scalaire. Cette extension regroupe à la fois l'ajout d'une constante cosmologique et la prise en compte du terme de Gauss-Bonnet dans l'action gravitationnelle. Nous présenterons aussi les conséquences, et avantages, de considérer des théories ayant plus de trois dimensions spatiales ; tout d'abord car cela est nécessaire en théorie de Lovelock afin que le terme de Gauss-Bonnet devienne dynamique[8], ensuite car la théorie des cordes prévoit un nombre de dimensions égal à dix et, enfin, car l'ajout de dimensions supplémentaires permettrait d'observer l'évaporation de trous noirs microscopiques dans les années à venir tout en résolvant le problème de la hiérarchie. Enfin, notons que la théorie de Gauss-Bonnet peut aussi émergé comme la limite basse énergie de certaines théories des cordes.

La deuxième partie s'attache à la problématique de l'évaporation des trous noirs, d'un point de vue tant théorique que phénoménologique, et plus largement à celle de la propagation de particules dans un espace-temps courbe. Le premier chapitre présentera la manière dont les trous noirs de Schwarzschild émettent des particules scalaires, en suivant l'approche de Unruh, dans le cadre de la Relativité Générale. Les quatre principes de la thermodynamique des trous noirs seront aussi présentés dans ce chapitre. La problématique plus générale de la dynamique

[8]Dans un espace-temps à quatre dimensions, le terme de Gauss-Bonnet est une dérivée totale et, pour devenir dynamique, il doit alors être couplé à un champ scalaire.

d'un champ scalaire immergé dans un espace-temps statique et à symétrie sphérique est abordée dans le second chapitre de cette partie : je présenterai une méthode que j'ai mise en place se basant sur le développement semi-classique de la partie radiale de l'équation de Klein-Gordon dans l'espace de configuration à une particule ainsi que son application à quelques espace-temps concrets. Les résultats préliminaires d'une extension des méthodes semi-classiques dans l'espace de configuration de champ, utilisant la représentation de Schrödinger de la théorie des champs, seront présentés dans le chapitre suivant. Les chapitres qui suivent seront quant à eux dédiés au processus d'évaporation à proprement parler. J'aborderai d'une part la manière de calculer de façon exacte le spectre d'émission de particules scalaires, fermioniques et de spin 1 en résolvant soit analytiquement, soit numériquement les équations de champ dans une métrique de fond induite par un trou noir. Ces calculs sont indispensables afin de déterminer la probabilité qu'une particule issue d'une fluctuation du vide puisse échapper à l'attraction gravitationnelle du trou noir, appelée *facteur de corps gris*. J'insisterai sur la nécessité d'investigations numériques et présenterai le programme que j'ai réalisé permettant le calcul de ces facteurs de corps gris sur l'ensemble de la gamme énergétique. Les résultats, tant numériques qu'analytiques, que j'ai obtenus pour l'émission de particules par des trous noirs de Schwarzschild en théorie de Lovelock seront aussi présentés dans ce chapitre. D'autre part, l'avant-dernier chapitre de cette partie se focalisera sur les possibilités expérimentales de détection d'effets gravitationnels par évaporation des trous noirs : je rappellerai tout d'abord comment des trous noirs microscopiques pourraient être formés lors de collision ultra-énergétique de particules si l'échelle de Planck est de l'ordre du TeV, comme cela est possible dans les modèles *branaires* à la Arkani-Hamed, Dimopoulos & Dvali. J'en profiterai pour rappeler les résultats précurseurs obtenus grâce à cette idée si de tels trous noirs se formaient auprès d'un collisionneur comme le LHC. Puis j'aborderai la possible production de ce type de trous noirs lors de phénomènes astrophysiques : notre étude a montré que la production, et évaporation, de trous noirs microscopiques dans la galaxie ou dans l'Univers primordial n'était actuellement pas en contradiction avec les données observationnelles. Enfin, je présenterai les différentes contraintes qui seraient obtenues sur la gravitation de Lovelock en détectant les produits d'évaporation des trous noirs éventuellement formés au LHC : nous avons montré qu'il serait possible d'obtenir une information quant à la présence du terme de Gauss-Bonnet dans l'action gravitationnelle mais qu'il serait très difficile d'obtenir une information quant à la présence d'un terme d'ordre zéro, *i.e.* d'une constante cosmologique.

Finalement, la troisième partie de ce manuscrit est dédiée à l'étude de deux problématiques de cosmologie physique : celle des inhomogénéités primordiales à petites échelles de longueur et celle de la Matière Noire. Pour la première, je montrerai que si la supersymétrie s'avère être une symétrie fondamentale de la nature, alors le nombre de trous noirs primordiaux, directement lié à l'intensité des fluctuations primordiales de densité, peut être fortement contraint dans une gamme de masse jusqu'à présent peu étudiée, grâce à leur émission de gravitinos. Dans un second chapitre, je présenterai la problématique de la Matière Noire ainsi que différents candidats pour expliquer cette matière inconnue. Je me focaliserai sur un candidat proposé récemment : la particule de Kaluza-Klein la plus légère. Enfin, je montrerai une étude de détection indirecte de cette Matière Noire via sa contribution, sous forme d'antiprotons, au rayonnement cosmique.

Première partie

La gravitation dans tous ses états

Chapitre 1

De Newton à Einstein

« *'Kun?'* said the Fisherman of the Moon.
'Payah kun' said the eldest Magician. 'See now that you pull the Sea twice a day and twice a night for ever, so that the Malazy fishermen may be saved paddling.' [...]
Now listen and attend!
From that day to this the Moon has always pulled the sea up and down and made what we call the tides. »

The Crab That Played With the Sea de Rudyard Kipling

Remarque préliminaire :

Ce bref chapitre destiné au non-physicien entend replacer la génèse de certains concepts utilisés pour cette thèse dans leur perspective historique, soulignant ainsi leur caractère révolutionnaire rapidement oublié avec la pratique.

Parmi les quatre interactions fondamentales connues de nos jours, la gravitation est sans doute la plus fascinante de toutes. L'expérience quotidienne nous y confrontant, cette force est de toute évidence la première à avoir été étudiée par les hommes. Responsable de la chute des corps (et donc des grillages au troisième étage de la Tour Eiffel), mais aussi de la mécanique céleste, Aristote proposait déjà deux siècles avant notre ère un modèle du mouvement des astres à l'aide de sphères de cristal. Bien qu'admis et soutenu par une église montante, il devint nécessaire de corriger le modèle d'Aristote pour rendre compte des observations de plus en plus précises des mouvements des planètes.

Il fallut cependant attendre plusieurs siècles, quelques longues-vues, et malheureusement de nombreux brûlés vifs, et une pomme, pour qu'un *très* célèbre alchimiste énonce une théorie mathématique de la gravitation expliquant aussi bien le mouvement des boulets de canon (l'armée étant déjà intêressée par les sciences) que celui des planètes. La théorie de la gravitation selon Newton s'appuie sur un *a priori* concernant l'espace et le temps : ceux-ci sont absolus et identiques pour tous les corps présents. Autrement dit, les longueurs mesurées sont indépendantes du mouvement et le temps s'écoule de la même manière pour tout observateur. Pendant plusieurs siècles, la théorie de Newton ainsi que ses conceptions concernant l'espace *et* le temps, furent à la base de bien des triomphes scientifiques allant de l'électrostatique à la thermodynamique. Pourtant, l'histoire de la gravitation ne s'arrêta pas à Newton et les concepts fondateurs de cette théorie commencèrent à vaciller avec l'étude de l'électromagnétisme.

Si l'on en croit les prédictions de la mécanique newtonienne, la vitesse de la lumière (comme celle de n'importe quel corps en mouvement) devrait être indépendante de la direction de propagation uniquement pour un observateur au repos dans l'espace absolu. De même, si l'observateur se trouve dans le TGV en provenance de Marseille et en direction de Paris, la lumière allant vers le Sud lui paraîtra se déplacer plus rapidement que celle allant vers le Nord. A la fin du dix-neuvième siècle, cette prédiction n'avait toujours pas été vérifiée expérimentalement et il fallut l'ingéniosité d'un jeune physicien pour "combler" ce manque. Cependant, le résultat de Michelson ne fut pas celui attendu : contrairement à ce qu'énoncaient les lois de Newton, la vitesse de la lumière etait indépendante de la direction même pour un observateur en mouvement. Y-aurait-il donc une faille dans la théorie de Newton ? L'expérience de Michelson, faite en 1881, fut renouvelée en 1887, avec l'aide de Morley, pour aboutir de nouveau à cette déconcertante constatation. De grands physiciens de 1890 comme Lorentz, Poincaré et Larmor, s'attaquèrent donc au problème. La solution la plus élégante consistait alors à supposer que la longueur des objets en mouvement se contractait. Cette solution était d'autant plus intéressante qu'elle permettait d'obtenir une forme simple des équations de l'électromagnétisme de Maxwell, qui semblaient bien difficiles à accomoder avec les lois de Newton. Mais cette solution ne semblait pas si élégante que cela aux yeux des physiciens de l'époque : si l'espace absolu n'existait plus, le temps *absolu*, quant à lui, continuait d'exister. Pourquoi l'espace se contracterait-il et pas le temps ? L'élégance n'est pas une mince affaire en physique.

Bien évidemment, parler de contraction des longueurs faisait rire bon nombre de physiciens de la fin du dix-neuvième siècle. Parler de dilatation du temps relevait alors de la pure science-fiction. Et pourquoi ne pas ajouter des dimensions supplémentaires à l'espace ? Jusqu'en 1905, le problème entre électrodynamique et mécanique newtonienne ne fut pas résolu et les discussions sur la contraction des longueurs et la dilation du temps furent oubliées. C'était sans compter sur l'esprit acéré d'un jeune physicien brillant et moustachu. Albert Einstein avait trouvé la solution à l'expérience de Michelson : *L'espace absolu n'existe pas, et le temps absolu non plus. Il y a une faille dans les fondations de la physique newtonienne.* S'inspirant des travaux de Poincaré, Einstein rejetait l'espace et le temps absolus et, en conséquence, le fait que les longueurs et les durées mesurées sont identiques pour tous les observateurs et ceci quelque soit leur mouvement. De plus, la notion de mesure ne peut être que relative, puisque l'espace et le temps absolus n'existent plus. Même si de nos jours la Relativité Restreinte constitue une révolution scientifique car elle est la première *théorie de jauge*, l'avancée conceptuelle se tenait, à l'époque, dans la nouvelle *représentation*, le nouveau *paradigme*, à l'encontre de notre expérience quotidienne, que sont l'espace et le temps.

Albert Einstein ne se contenta pas de mettre le doigt sur la faille des lois de Newton, il proposa aussi les fondations d'une nouvelle théorie qui était en bien meilleur accord avec le monde observé. La théorie de la Relativité Restreinte se base historiquement sur deux principes fondamentaux :

– quelle que soit leur nature, l'espace et le temps doivent être constitués de manière à rendre la vitesse de la lumière identique dans toutes les directions et absolument indépendante du mouvement de la personne qui la mesure, c'est la constance de la vitesse de la lumière[1] ;
– quelle que soit leur nature, les lois de la physique doivent traiter tous les états du mouvement sur un pied d'égalité, c'est le principe de relativité.

Le premier principe permet, entre autres, de confirmer l'expérience de Michelson et rend enfin la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell belle et simple. Le second est un rejet absolu de l'espace *et* du temps *absolus*. La conséquence la plus extraordinaire de ces deux principes est la suivante : *si deux personnes sont en mouvement l'une par rapport à l'autre, alors l'espace de*

[1] Ce principe est historique car il a été montré que la constance de la vitesse de la lumière est une conséquence des symétries d'espace-temps imposées pour construire le groupe de Poincaré.

l'un est un mélange de l'espace et du temps de l'autre. Et il en va de même pour le temps.

Cette théorie, basée sur un méta-principe (le principe de relativité n'étant pas une loi physique), permit donc d'expliquer le mouvement des corps à grande vitesse ainsi que celui de la lumière. Elle aboutit aussi au surprenant, mais non moins célébre, résultat que la masse est de l'énergie et que rien ne peut se déplacer plus vite qu'à la vitesse de la lumière dans le vide. Cependant, tout ceci ne fonctionne qu'en l'absence de gravité et, bien que la Relativité Restreinte n'ait été vraiment acceptée qu'à partir de 1930, il devint alors naturel pour Einstein de reformuler la gravitation en accord avec les deux principes fondateurs de la Relativité Restreinte.

Albert Einstein était un personnage audacieux, renforcé d'une très grande intuition physique. Même s'il était évident que la gravitation selon Newton ne pouvait être en accord avec la Relativité Restreinte (en particulier parce que la force de gravitation selon Newton est instantanée et se propagerait donc plus vite que la lumière), il n'existait à l'époque aucune expérience ni observation plaçant la gravitation de Newton en porte-à-faux. Mais Einstein intuitait tout de même la nécessité de modifier la gravitation. De nouveau, de grands progrès conceptuels furent nécessaires à l'aboutissement d'une nouvelle théorie de la gravitation. La Relativité Restreinte n'était valable qu'en l'absence de gravitation car cette théorie faisait appel uniquement à des référentiels inertiels, par exemple le référentiel associé à une particule n'étant soumise à aucune force. Einstein réalisa cependant en 1907 que même en présence d'un corps massif, source de gravitation, il est possible de trouver des référentiels équivalents à des référentiels inertiels : « J'étais assis à mon bureau à l'Office des brevets à Berne, quand une idée me vint soudain : si une personne est en chute libre, elle ne sentira plus son propre poids » . Le fait de ne plus sentir son poids lorsque l'on est en chute libre a pour conséquence qu'un référentiel en chute libre ne ressent plus l'effet de la gravitation : *il est donc équivalent à un référentiel inertiel sans gravité dans lequel les lois de la Relativité Restreinte s'appliquent.* Ce *principe d'équivalence*, fondamental dans l'élaboration de la Relativité Générale, s'appuie sur l'égalité entre masse inertielle et masse gravitationnelle. Autrement dit c'est votre énergie au repos, *i.e* la masse, qui fait que vous êtes sensible à la force gravitationnelle mais qui intervient aussi dans votre propension à vous déplacer, *i.e* votre inertie. Il est de plus indispensable que ce référentiel en chute libre soit petit, pour ne pas être sensible aux forces de marée, permettant ainsi de définir des référentiels inertiels *locaux*.

A partir de ce principe d'équivalence, le physicien allemand formula un principe de relativité généralisé : *les lois de la physique prennent la même forme mathématique quelque soit le petit référentiel d'inertie (en chute libre) dans lequel ces lois sont exprimées.* En appliquant ce principe, les premières indications d'une théorie géométrique de la gravitation se révèlèrent, Einstein en déduisant *la dilatation gravitationnelle du temps* : lorsque l'on est au repos vis à vis d'un corps massif, le temps s'écoule d'autant plus lentement que l'on est proche de ce corps. Il semblerait donc que la présence d'un corps source de gravitation *déforme* le temps. Mais, comme le principe de relativité implique que le temps et l'espace se mélangent, la présence d'un corps gravitationnel doit donc *déformer* l'espace et le temps.

L'idée de *courbure*, terme plus adéquate que *déformation* , de l'espace et du temps s'avéra d'autant plus importante qu'elle permit à Einstein de résoudre un autre problème inhérent à la construction d'une théorie relativiste de la gravitation. Pour formuler le principe d'équivalence généralisé, il était inévitable de considérer un petit référentiel pour s'affranchir des forces de marée. Ces forces, dans la version newtonienne, proviennent de la dépendance de la force gravitationnelle avec la distance entre les deux corps en interaction. Si le référentiel en chute libre est grand, alors la force de gravitation n'est pas identique en tout point de ce référentiel et il subit un étirement dû aux forces de marée. Il était donc indispensable que toute nouvelle théorie de la gravitation puisse expliquer ces forces. Encore une fois, Einstein effectua un bond conceptuel en avant : c'est la courbure de l'espace et du temps qui sont la cause des forces de marée. Pour aboutir à un tel résultat, il fallut tout d'abord adopter le concept *d'espace-temps* introduit par Minkowski. Il ne faut plus considérer l'espace et le temps mais plutôt un espace, au sens mathématique du terme, à quatre dimensions dont trois sont spatiales et une temporelle. Ensuite, inspiré par la dilatation gravitationnelle du temps, Einstein chercha à construire une théorie en se basant sur l'idée *qu'un corps gravitationnel courbe l'espace-temps.*

La notion d'espace courbe fut introduite par le mathématicien Riemann et développé en grande partie par ce dernier et par Ricci. La courbure d'un espace change radicalement sa géométrie, qui n'est alors plus euclidienne. L'exemple le plus simple est le suivant : un plan est un espace euclidien à deux dimensions alors qu'une sphère est un espace non-euclidien à deux dimensions. D'un point de vue plus mathématique, la géométrie sur un espace courbe peut s'obtenir en s'affranchissant du cinquième postulat d'Euclide. Ce postulat énonce qu'en considérant une droite Δ et un point M en dehors de celle-ci, alors il existe une et une seule droite passant par M et parallèle à Δ. C'est en violant ce postulat que des mathématiciens comme Gauss ou Lobatchevsky ont pu construire les premiers espaces courbes présentant des propriétés très étranges, comme l'absence de droites *globalement* parallèles pour une sphère. La violation du dernier postulat d'Euclide peut se voir de différentes manières : comme l'absence de droite parallèle *ou bien* comme le fait que des parallèles peuvent se croiser. Les mathématiciens instiguateurs de la géométrie courbe définirent aussi ce qu'est une "ligne droite" sur un espace courbe : il s'agit de la plus courte distance entre deux points et ils l'appelèrent *géodésique*[2]. Par exemple, sur une sphère, une géodésique correspond à un méridien. Et comme tous les méridiens se croisent aux pôles, il n'existe pas deux droites *globalement* parallèles entre elles sur une sphère.

Albert Einstein comprit alors qu'en courbant l'espace-temps, il est alors possible d'expliquer les forces de marée tout en conservant le principe de relativité généralisé. Pour cela, imaginons tout d'abord un espace-temps sans corps massif, les particules libres vont alors suivre des trajectoires correspondant à des lignes droites et ceci quelque soit le référentiel considéré, en vertu du principe de relativité. Plaçons alors un corps gravitationnel dans notre espace-temps. Conserver le principe de relativité généralisé comme dogme fondamental du mouvement libre signifie qu'une particule se propageant librement dans cet espace-temps *en présence de gravité* doit suivre une ligne droite dans chaque référentiel d'inertie. Or ces référentiels d'inertie en présence de gravité ne sont autres que les petits référentiels en chute libre. Supposons maintenant que le corps gravitationnel courbe effectivement l'espace-temps, alors la particule libre en présence de gravité suit une géodésique puisqu'elles doit suivre une ligne droite dans un espace courbe[3] en vertu du principe de relativité généralisé. Considérons maintenant deux particules test qui tombent sur le corps gravitationnel que nous venons de placer, pourquoi pas la Terre. Ces deux particules test, en supposant qu'elle puissent traverser la Terre, vont se rencontrer au centre de notre planète sous l'influence des forces de marée. En d'autres termes, leurs trajectoires se croisent. Un tel comportement s'interprète aisément en terme d'espace courbe : les deux particules suivent chacune une géodésique (ce qui correspond bien à une particule libre dans un référentiel en chute libre) pouvant se croiser en vertu de la courbure de l'espace. Cette découverte constitue un argument très solide en faveur d'une courbure de l'espace-temps due à la présence d'un objet gravitationnel :

– toute particule se propageant librement en présence de gravité suit une géodésique de l'espace-temps, assurant ainsi la parfaite application du principe de relativité généralisé;
– les forces de marée sont une manifestation de la courbure de l'espace-temps.

Bien que le plus gros progrès fut relatif à ces considérations géométriques, il restait pourtant un lourd travail à mener afin de déterminer la manière dont un objet massif peut courber l'espace-temps. Pour cela, Einstein dut se plonger dans les calculs tensoriels et la géométrie différentielle introduite par Riemann. Avec l'aide de son ami mathématicien Marcel Grossmann, il réussit finalement en 1915, après de nombreuses tentatives, à établir une loi qui permet de lier un objet mathématique appelé *tenseur de coubure de Riemann*, objet décrivant la courbure d'un espace, à un autre tenseur appelé *tenseur énergie-impulsion* qui permet de décrire la source

[2]Nous appelerons maintenant *géodésique* les lignes droites dans un espace courbe et *ligne droite* les lignes droites dans un espace euclidien...

[3]...une exception à la note précédente.

gravitationnelle, en supposant la forme la plus simple, la proportionnalité [4]. Bien évidemment, à la limite des faibles champs de gravitation, il est possible de retrouver les lois de Newton à partir des *équations d'Einstein*.

La Relativité Générale passa alors avec succès tous les tests expérimentaux et observationnels. Elle est à la source de la cosmologie physique moderne, et de la compréhension de bien des phénomènes astrophysiques. Mais la plus grande contribution de la Relativité Générale et Restreinte est sans doute la révolution conceptuelle qui fut nécessaire à l'avènement d'une telle description de l'espace-temps qui devient alors une entité dynamique et non une toile de fond sur laquelle nous nous déplaçons. Cette révolution reste d'autant plus marquante qu'elle fut le fruit de pratiquement un seul homme. Pourtant aujourd'hui encore, à la lueur de la Mécanique Quantique, la gravitation n'est toujours pas bien comprise et il semblerait qu'un nouveau changement de paradigme soit nécessaire à la mise en place d'une nouvelle progression quant à la compréhension du monde qui nous entoure. Tout comme la théorie de Newton, il semblerait que celle d'Einstein possède probablement ses limites.

Le début du vingtième siècle faisait face à deux questions : celle de l'électrodynamique des corps, résolue par la Relativité Restreinte, et celle de l'infiniment petit, abordée par des physiciens comme Bohr, Planck et Einstein. De nouveau, la mécanique newtonienne n'était plus apte à expliquer les mouvements des particules et des atomes. Mais, la conception d'espace et de temps absolus n'était pas en cause comme pour l'expérience de Michelson. Cette fois-ci c'était la notion de déterminisme et de localisation qui devait être remise en question et il fallut les efforts combinés de nombreux théoriciens comme Heisenberg ou Schrödinger pour aboutir à une autre théorie fondamentale : *la Mécanique Quantique*. Les concepts de la Mécanique Quantique sont tout aussi révolutionnaires que ceux de la Relativité Générale et Restreinte, mais ils ne s'appliquent pas du tout aux mêmes domaines. Pourtant, dès les premiers pas de la Mécanique Quantique, les physiciens essayèrent d'incorporer la relativité dans cette nouvelle théorie. Mais ce travail s'avèrera, et s'avère toujours, beaucoup plus difficile qu'il n'y paraît.

Actuellement, et après les travaux de physiciens tel Feynman, trois des forces fondamentales sont décrites par la théorie quantique des champs qui a pu unifier la Mécanique Quantique et la Relativité Restreinte. Mais appliquer les schémas de quantification usuels à la Relativité Générale n'aboutit qu'à une impasse. En effet, quantifier une théorie peut se faire en deux étapes : on recherche tout d'abord les solutions classiques, *i.e* non quantiques, des équations du mouvement des champs *libres* puis on applique une règle de commutation qui permet d'exprimer le champ en terme d'opérateurs agissant sur un espace de Hilbert décrivant les états physiques du système. Une fois les champs quantifiés, il est alors possible de prédire les probabilités d'interaction entre les particules élémentaires en introduisant de manière perturbative les interactions entre champs. Pourtant, en appliquant ce schéma à la Relativité Générale, les calculs aboutissent systématiquement à l'infini, et aucune méthode ne peut remédier à ce problème. De plus les principes même de la Mécanique Quantique et de la Relativité Générale mènent à des paradoxes dans leurs conjonctions. Partons d'un corps dont la masse est égale à celle de Planck, environ 2×10^{-8} kg, et confinons le dans une sphère de rayon égal à la longueur de Planck, environ 1.6×10^{-35} m. La Relativité Générale nous apprend alors que ce corps n'a d'autre choix que de s'effondrer pour former un trou noir. Toute la matière se retrouve donc localisée dans la singularité centrale. Que nous dit alors la Mécanique Quantique ? La longueur de Compton associée à la masse de Planck n'est autre que la longueur de Planck. Donc la matière ne doit pas être localisée à mieux que cette longueur. Nous nous trouvons donc face à un paradoxe : la matière est-elle localisée ou non ? Deux théories nous fournissent deux réponses différentes.

Aujourd'hui la physique fait de nouveau face à un problème majeur : comment obtenir une théorie quantique de la gravitation ? Car, même si la quantification perturbative de la Relativité Générale ne mène à rien, la compréhension du monde qui nous entoure dans le langage de la physique semble devoir passer par une unification de la Mécanique Quantique

[4] Quelques jours avant Einstein, le mathématicien Hilbert, dériva aussi les équations d'Einstein, mais l'idée de courbure et les principes fondateurs de la Relativité Générale sont le fruit des reflexions du physicien uniquement.

et de la Relativité Générale, au sens large du terme. Et depuis près de trente ans, nombre de physiciens brillants travaillent sur de possibles solutions comme la théorie des cordes ou la gravité quantique à boucle. Il faudra sûrement beaucoup d'audace et probablement une nouvelle révolution scientifique. Car trouver cette nouvelle théorie ne consiste sûrement pas seulement à unifier les principes de la Mécanique Quantique à ceux de la Relativité Générale, mais aussi à transcender ces principes pour en définir de plus fondamentaux.

Le but de cette thèse n'est pas de trouver une telle théorie, mais d'apporter un certain éclairage sur la gravitation selon Einstein ainsi que sur certaines pistes d'investigation d'une théorie quantique de la gravitation. Ce projet est certes plus modeste, mais des Albert ne naissent pas tous les jours. Ne m'en veuillez donc pas trop de ne poser qu'une petite brique à l'édifice plutôt que les fondations.

Chapitre 2

La Relativité Générale et quelques conséquences

« `The revolution will not be televised` »

`Gil Scott Heron`

La Relativité Générale est actuellement la théorie la plus aboutie décrivant l'interaction gravitationnelle. Le but de ce chapitre est de présenter les principes fondamentaux de cette théorie ainsi qu'une de ses conséquences, confirmant une prédiction vieille de deux siècles [2] : l'existence de *trous noirs*.

Nous adopterons les conventions suivantes dans ce chapitre : les unités naturelles $\hbar = c = k_B = 1$ seront utilisées à l'exception de quelques cas où nous utiliserons les unités du système international. Par ailleurs, les indices tensoriels seront en lettres latines $(i, j, k \cdots)$ pour les coordonnées spatiales et en lettres grecques $(\mu, \nu, \rho \cdots)$ pour des coordonnées spatio-temporelles. De plus, la coordonnée temporelle sera systématiquement indexée par l'indice 0 ou t.

2.1 Les principes de la Relativité Générale

Ce chapitre à pour but de donner une introduction rapide de la théorie de la Relativité Générale en tâchant de souligner le sens physique de cette démarche plutôt que ses aspects techniques. Dans un premier temps, nous postulerons les deux principes fondamentaux de cette théorie. Nous décrirons ensuite les objets mathématiques nécessaires à sa construction puis nous établirons les équations d'Einstein. Enfin, nous reviendrons sur quelques ingrédients essentiels de la Relativité Générale en insistant sur l'interpétation géométrique de ces derniers.

2.1.1 Les principes de relativité et d'équivalence

La théorie de la gravitation d'Einstein se base sur deux principes fondamentaux : *le principe d'équivalence*, déjà utilisé dans la théorie de Newton et *le principe de relativité généralisé*, qui est une extension du principe de relativité en présence d'un champ gravitationnel.

Le principe d'équivalence

Si l'on suppose que la masse inertielle m_i est égale à la masse gravitationnelle m_g, alors un corps en chute libre ne ressent pas la gravitation et un référentiel localement inertiel peut être associé à ce corps.

En effet, en supposant $m_i = m_g$ et en se plaçant dans le référentiel en chute libre suffisamment petit pour que le champ reste constant, la force d'inertie va compenser la force gravitationnelle et les équations du mouvement ne font plus apparaître le champ gravitationnel. Un observateur en chute libre ne peut déterminer s'il est soumis ou non à un tel champ extérieur. De manière générale, il est toujours possible de définir en tout point un référentiel *localement inertiel* dans lequel les équations du mouvement ne font plus intervenir le champ gravitationnel[1].

Le principe de relativité générale

Dans la mesure où il n'existe pas d'espace-temps absolu et donc pas de référentiel privilégié, les lois de la physique doivent être indépendantes du référentiel inertiel choisi. Les équations fondamentales de la physique doivent donc revêtir la même forme mathématique dans tous les référentiels inertiels. Il est alors nécessaire d'obtenir une formulation *covariante* des équations.

En présence de gravitation, les référentiels en chute libre sont des référentiels localement inertiels. L'existence de ces référentiels est essentiel : la gravitation étant une interaction de portée infini, il ne peut exister de référentiels globalement inertiels. Cependant, compte tenu du principe d'équivalence, il existe toujours des référentiels localement inertiels. Ces deux principes fondamentaux, par ailleurs testés expérimentalement, sont à la base de la formulation géométrique covariante de la Relativité Générale : le principe de relativité généralisée impose une écriture covariante des lois de la physique, qui sont identiques pour tout référentiel, et le principe d'équivalence que ces lois sont localement lorentzienne dans les référentiels en chute libre.

2.1.2 Tenseurs

Comme il a été vu dans le chapitre 1, une description géométrique de la gravitation requiert de passer d'un espace plat à un espace courbe. Un tel passage implique l'utilisation d'un système de coordonnées qui, *a priori*, n'est pas cartésien. Cela se comprend aisément sur l'exemple d'une sphère : il est impossible de créer un système cartésien de coordonnées sur cet espace et on utilise à la place les deux coordonnées *longitude* et *latitude*. Cherchons à déterminer la distance entre deux points A et B, il est alors nécessaire de calculer l'intégrale suivante :

$$L = R \int_A^B \sqrt{d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2}, \tag{2.1}$$

où R est le rayon de la sphère et (θ, φ) la latitude, à $\frac{\pi}{2}$ près, et la longitude. Cette relation peut s'écrire de manière contractée en appelant x^i les différentes coordonnées et en introduisant un tenseur de rang 2 g_{ij} :

$$L = \int_A^B \sqrt{|g_{ij} dx^i dx^j|}. \tag{2.2}$$

Cette nouvelle classe d'objets mathématiques que sont les *tenseurs* est très commode en Relativité Générale. Ils peuvent être vus comme une généralisation des vecteurs, un vecteur étant un tenseur de rang 1, et suivent la loi de transformation suivante par changement de coordonnées globales $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$:

$$S^{\mu'}{}_{\nu'\rho'} = (\partial_\mu x^{\mu'})(\partial_{\nu'} x^\nu)(\partial_{\rho'} x^\rho) S^\mu{}_{\nu\rho}, \tag{2.3}$$

[1] En termes mathématiques, *localement* signifie jusqu'au premier ordre inclu.

où $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ correspond à la dérivée partielle par rapport à la coordonnée x^μ. A partir d'un tenseur de rang n, un tenseur de rang $(n-2)$ peut être construit en prenant une *contraction* sur deux indices :

$$S^\mu{}_\nu = S^{\mu\rho}{}_{\nu\rho}, \tag{2.4}$$

et la contraction d'un tenseur de rang 2 est appelée *trace*.

Un exemple de tenseur extrêmement important en Relativité Générale est le *tenseur métrique* $g_{\mu\nu}$ que nous avons déjà introduit dans l'exemple de la sphère. Ce tenseur, symétrique, est défini à partir de l'intervalle d'espace-temps :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{2.5}$$

et permet donc de calculer les distances dans un espace courbe[2]. Si l'espace-temps est Minkowskien, le tenseur métrique est alors diagonal avec $g_{tt} = 1$ et $g_{ii} = -1$. Lorsque l'on passe à un référentiel non galiléen, le tenseur métrique prend une forme plus complexe et dépend généralement de la valeur des coordonnées.

Il semble alors possible de construire différents tenseurs qui pourront nous être utiles, en particulier ceux faisant intervenir les dérivées partielles ∂_μ. On peut regarder comment se transforme l'objet de rang 1 $\partial_\mu\phi$ et celui de rang 2 $\partial_\mu\psi^\nu$ par changement de coordonnées, ϕ étant un scalaire et ψ un vecteur :

$$\begin{aligned} \partial_{\mu'}\phi &= (\partial_{\mu'}x^\mu)\partial_\mu\phi & (2.6)\\ \partial_{\mu'}\psi^{\nu'} &= (\partial_{\mu'}x^\mu)(\partial_\nu x^{\nu'})\partial_\mu\psi^\nu + (\partial_{\mu'}x^\mu)(\partial_\nu\partial_\mu x^{\nu'})\psi^\nu. & (2.7)\end{aligned}$$

Même si l'application de la dérivation partielle sur un scalaire suit bien la loi de transformation des tenseurs, ceci n'est plus le cas pour la dérivation d'un vecteur. Il est alors nécessaire d'introduire une *dérivée covariante* ∇_μ qui élimine le deuxième terme de l'équation (2.7). Ainsi la dérivée covariante $\nabla_\mu\psi^\nu$, que l'on écrira par la suite $\psi^\nu{}_{;\mu}$, est un tenseur de rang 2 et s'écrit :

$$\psi^\nu{}_{;\mu} = \partial_\mu\psi^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\psi^\lambda, \tag{2.8}$$

où Γ est le *coefficient de connexion*, qui n'est pas un tenseur. La loi de transformation des coefficients de connexion est particulière et permet d'assurer que l'objet ∇S, où S est un tenseur de rang n, est lui aussi un tenseur, dont le rang est $n+1$. De manière générale, un terme $+\Gamma$ est ajouté pour chaque indice haut du tenseur dont on prend la dérivée covariante alors qu'un terme $-\Gamma$ est ajouté pour chaque indice bas :

$$\nabla_\mu S^{\nu_1\cdots\nu_n}{}_{\rho_1\cdots\rho_k} = \partial_\mu S^{\nu_1\cdots\nu_n}{}_{\rho_1\cdots\rho_k} + \sum_{i=1}^{n}\Gamma^{\nu_i}{}_{\mu\lambda}S^{\nu_1\cdots\lambda\cdots\nu_n}{}_{\rho_1\cdots\rho_k} - \sum_{i=1}^{k}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho_i}S^{\nu_1\cdots\nu_n}{}_{\rho_1\cdots\lambda\cdots\rho_k}. \tag{2.9}$$

Ces coefficients de connexion peuvent être exprimés en fonction du tenseur métrique et ils sont alors appelés *symbole de Christoffel* lorsqu'écrit sous cette forme :

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right). \tag{2.10}$$

Définis ainsi, les coefficients de connexion assurent que les dérivées covariantes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et de son inverse[3] $g^{\mu\nu}$ sont nulles.

L'information de la courbure d'un espace est contenue dans le *tenseur de Riemann* qui est de rang 4 et peut être construit à partir des symboles de Christoffel :

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\nu\beta} - \partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} - \Gamma^\mu{}_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha}. \tag{2.11}$$

[2]En Relativité Générale, il s'agit d'un espace-temps, il est alors plus approprié de parler d'intervalle entre deux événements.

[3]on a la relation $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_\mu{}^\nu$.

Bien que construit avec des éléments non-tensoriels, le tenseur de Riemann est bien un tenseur qui possède la propriété d'avoir *toutes ses composantes nulles si et seulement si l'espace est plat*. Il est utile d'ajouter à ce tenseur deux de ses contractions :

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}, \tag{2.12}$$

$$R = R^{\lambda}{}_{\lambda}, \tag{2.13}$$

qui sont respectivement le tenseur et le scalaire de Ricci.

La Relativité Générale utilise un langage tensoriel pour décrire la gravitation car les équations faisant intervenir des tenseurs sont covariantes, assurant ainsi le respect du principe de relativité.

2.1.3 Equation des géodésiques et équations d'Einstein

Equation des géodésiques

En espace euclidien, la trajectoire d'une particule libre entre deux points A et B est donnée par la ligne droite qui joint ces deux points, la ligne droite correspondant à la courbe de plus petite longueur. Déterminer la trajectoire d'une particule sous l'effet de la gravitation suit une démarche identique à la précédente : il s'agit de chercher la trajectoire d'une particule *libre* dans un espace-temps courbe, la courbure étant fixée par le champ gravitationnel. La trajectoire de cette particule, appelée *géodésique* sera donnée par la courbe d'intervalle extrémal entre les événements A et B.

Pour obtenir l'équation des géodésiques, la distance fonctionnelle $L = \int ds$ doit être extrémisée. En paramétrisant la trajectoire par p, l'intervalle est donné par l'intégrale suivante :

$$L = \int \sqrt{\left| g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dp} \frac{dx^{\nu}}{dp} \right|} dp. \tag{2.14}$$

Extrémiser cette grandeur fonctionnelle L revient à maximiser le temps propre τ de la particule considérée et aboutit à l'équation suivante :

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{dp^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} \frac{dx^{\nu}}{dp} \frac{dx^{\rho}}{dp} = 0. \tag{2.15}$$

Il s'agit d'une équation tensorielle qui est donc indépendante du système de coordonnées. Evidemment cette équation correspond à l'équation $\vec{F} = m\vec{a} = \vec{0}$ en mécanique newtonienne et donne la trajectoire d'une particule dans un espace-temps courbe, donc soumis à la gravitation qui n'est plus une force dans cette théorie.

Cependant, cette équation ne nous apprend pas comment l'espace-temps est courbé en présence d'objets gravitationnels. Elle nous permet seulement de connaître le comportement des particules une fois la courbure connue.

Equations d'Einstein

La courbure de l'espace-temps étant une manifestation de la gravitation, les équations d'Einstein font le lien entre matière-énergie et courbure. Il existe deux méthodes pour dériver ces équations et nous présenterons ici celle développée par Einstein.

L'équation d'Einstein est une équation tensorielle qui suppose que la courbure de l'espace-temps est proportionnelle au contenu énergétique :

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{2.16}$$

où G est un tenseur lié à la courbure, appelé tenseur d'Einstein, et T le tenseur énergie-impulsion.

On peut comprendre assez aisément l'origine de ces deux tenseurs : T doit prendre en compte la densité d'énergie, la quantité de mouvement ainsi que les contraintes mesurées par un observateur au point considéré. Le tenseur énergie-impulsion contient donc toutes les informations suivantes :

- la quadri-impulsion par unité de volume $\frac{dp^\mu}{dV}$, il s'agit du quadri-vecteur $T^{\mu 0}$ à un facteur multiplicatif près ;
- la projection de la quadri-impulsion $n_\mu \frac{dp^\mu}{dV}$;
- la densité d'énergie ρ, il s'agit de la composante T^{00} ;
- les différentes composantes des contraintes suivant différentes directions linéairement indépendantes de l'espace, ce qui correspond aux composantes T^{jk}.

Ce tenseur T symétrique est par conséquent l'objet géométrique indépendant du référentiel choisi qui nous renseigne sur le contenu énergétique du système considéré et agit donc comme source de gravitation. Il doit être de divergence nulle afin de préserver la conservation de l'énergie :

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{2.17}$$

Comme on cherche une relation de proportionnalité entre la courbure et le contenu énergétique, le tenseur G doit posséder les propriétés suivantes :

- G doit être symétrique et de rang 2 ;
- G doit être nul en espace plat[4] ;
- G est fonction uniquement du tenseur de Riemann, ses contractions et du tenseur métrique ;
- G doit être linéaire en tenseur de Riemann ;
- G doit être à divergence nulle.

Il est important d'apporter un certain éclairage quant à la dernière condition vérifiée par le tenseur d'Einstein. La condition $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ ne découle pas de la condition $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, mais d'une condition *d'invariance de jauge* provenant de l'identité de Bianchi[5]. En effet, la géométrie de l'espace-temps est décrite par dix fonctions $g_{\mu\nu}$. Les équations d'Einstein ayant pour vocation de prédire l'évolution de la géométrie de l'espace-temps, il semble nécessaire de préciser dix conditions initiales. Cependant, le principe de relativité impose que les lois physiques ne dépendent pas du système de coordonnées choisi : le choix des coordonnées est l'affaire des physiciens et non de la physique et le système de coordonnées ne doit pas être déduit des équations d'Einstein. Le tenseur énergie-impulsion et le tenseur d'Einstein étant symétriques, il existe 10 équations d'Einstein. Cependant, l'identité de Bianchi, équivalente à $\nabla G = 0$, réduit le nombre d'équations indépendantes à six : les quatres degrés de liberté qui disparaissent par application de cette identité mathématique correspondent à la liberté du choix du système de coordonnées, *i.e.* la liberté du choix de jauge.

Einstein a montré que le seul tenseur qui possédait l'ensemble des propriétés citées ci-dessus est :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \tag{2.18}$$

Il reste maintenant à déterminer la constante de proportionnalité qui lie G à T. Ceci s'obtient en exigeant que la limite en champ faible de la Relativité Générale donne la mécanique newtonienne, ce qui fixe la valeur de cette constante κ à $\frac{8\pi G}{c^4}$ en unité du système international.

Une approche lagrangienne peut aussi être développée pour dériver les équations d'Einstein. L'action doit être une quantité scalaire vis-à-vis d'un changement global de coordonnées imposant une densité lagrangienne fonction de la courbure scalaire. Cette densité, pour la Relativité Générale, est alors assez simple puisqu'il s'agit du terme d'ordre 1 courbure scalaire :

$$S_{RG} \propto \int d^4x \sqrt{-g} R. \tag{2.19}$$

La densité tensorielle $\sqrt{-g}$, la racine carrée de la valeur absolue du déterminant du tenseur métrique, est introduite afin d'assurer que la quantité $d^4x\sqrt{-g}R$ est un scalaire, compensant

[4]Nous verrons plus tard que cette condition peut être relachée.

[5]Il a été montré que cette identité mathématique est équivalente à $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$

exactement la transformation de l'élément infinitésimal d^4x, étant lui aussi une densité tensorielle, lors d'un changement de coordonnées. Les équations d'Einstein découlent alors de l'application du principe variationnel de moindre action par rapport au tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ sur l'action $S = S_{RG} + S_{mat}$:

$$\frac{\delta S_{RG}}{\delta g_{\mu\nu}} \to G_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \frac{\delta S_{mat}}{\delta g_{\mu\nu}} \to T_{\mu\nu}. \tag{2.20}$$

2.1.4 Interprétation géométrique

La Relativité Générale peut être interprétée de manière géométrique. Nous allons essayer dans ce court chapitre de reprendre quelques ingrédients essentiels de la théorie d'Einstein et de les étudier à la lumière de la géométrie Riemannienne.

Le principe d'équivalence énonce que tout référentiel en chute libre est localement inertiel : il existe alors un système de coordonnées ξ^α tel que les équations de la physique prennent une forme localement lorentzienne. L'équation du mouvement d'une particule s'écrit alors $\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$, où τ est le temps propre défini par $d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$. Lors d'un changement de coordonnées quelconque $\xi^\alpha \to x^\mu$, l'équation du mouvement devient alors exactement l'équation des géodésiques (2.15) avec le symbole de Christoffel ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$ et le temps propre devient $d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ avec $g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$. Bien qu'étant une quantité purement géométrique, le symbole de Christoffel peut être interprété comme une accélération induite par l'interaction gravitationnelle. De plus, comme le symbole de Christoffel est lié aux dérivées du tenseur métrique, ce dernier peut donc s'interpréter comme le potentiel gravitationnel. A partir du principe d'équivalence, il est donc possible de construire deux quantités géométriques, ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$, qui caractérisent l'interaction gravitationnelle. Cela souligne de nouveau le fait que la gravitation, en vertu du principe d'équivalence, peut être vue comme un effet géométrique de l'espace dans lequel les particules se meuvent.

La dérivation covariante s'explique elle aussi très bien en termes géométriques. En effet, l'espace-temps étant courbé, les coordonnées vont, de manière générale, varier le long d'une trajectoire. Si cette trajectoire est décrite par un paramètre p et que l'on s'intéresse à la variation d'un vecteur A_μ suivant cette trajectoire, on va naïvement calculer sa dérivée $\frac{dA_\mu}{dp} = \frac{dx^\nu}{dp} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$. En faisant ce calcul direct, on prend en compte la variation intrinsèque de A_μ ainsi que celle du système de coordonnées. Pour avoir la variation intrinsèque du vecteur, il est nécessaire de compenser la variation du système de coordonnées suivant la trajectoire. On va donc chercher un opérateur différentiel qui ne prend en compte que cet effet. Il est montré que cet opérateur est la dérivation covariante par rapport à p : $\frac{DA_\mu}{Dp} = \frac{dx^\nu}{dp} A_{\mu;\nu}$[6]. La dérivation covariante, outil indispensable de la Relativité Générale, prend sa source dans la géométrie courbe : elle assure une formulation covariante de la dérivation car elle compense les variations du système de coordonnées et permet de sonder les variations intrinsèques d'un tenseur.

Avec cette interprétation géométrique de la dérivation covariante, il est alors aisé de construire les équations de la physique en espace courbe. L'équation des géodésiques signifie que la variation intrinsèque de l'impulsion est nulle le long d'une géodésique. Il est alors montré que l'équation (2.15) est la conséquence de l'équation $\frac{D^2 x^\mu}{Dp^2} = 0$ traduisant l'invariance dans la quadri-vitesse en espace-courbe. De manière générale, les équations de la physiques en espace-temps courbe sont identiques à celle en espace-temps Minkowskien en remplaçant les dérivations usuelles par des dérivations covariantes.

2.1.5 Dérivation de Lie et vecteur de Killing

On présente dans ce court chapitre quelques aspects de la Relativité Générale, sans prétendre à l'exhaustivité, qui seront utiles dans la suite de ce mémoire.

[6]Evidemment, il s'agit de la définition même, dans le cadre de la géométrie riemanienne, de la dérivation covariante, la définition présentée dans le chapitre 2.1.2 étant plus une propriété de cet opérateur.

Dérivation de Lie

Si la dérivation covariante permet de sonder les variations intrinsèques d'un tenseur, il reste nécessaire de créer un outil permettant de sonder la transformation d'un tenseur lors d'un changement de position. Cet objet, appelé *dérivation de Lie* et noté $\pounds_\varepsilon$, prend en compte deux effets : la variation du tenseur ainsi que celle du système de coordonnées lors d'un changement de position infinitésimale. Ces deux effets doivent être combinés pour pouvoir évaluer la valeur d'un champ de tenseur *en un point donné* après un tel changement de position infinitésimale. Pour construire cet objet, prenons l'exemple de l'effet d'une transformation infinitésimale du système de coordonnées sur un tenseur deux fois contravariant :

$$\begin{array}{rcl} x^\mu & \to & x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu(x) \\ A^{\mu\nu}(x) & \to & A'^{\mu\nu}(x'). \end{array} \tag{2.21}$$

Afin d'exprimer le tenseur dans le nouveau système de coordonnées, on procède d'abord à un développement limité

$$A'^{\mu\nu}(x) = A'^{\mu\nu}(x' + dx) = A'^{\mu\nu}(x) + \frac{\partial A'^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}\varepsilon^\lambda, \tag{2.22}$$

puis on transforme le tenseur pour passer de A' à A en appliquant la loi de transformation (2.3), tout en se limitant au premier ordre,

$$\begin{array}{rcl} A'^{\mu\nu} & = & \left(\delta^\mu{}_\lambda - \frac{\partial\varepsilon^\mu}{\partial x^\lambda}\right)\left(\delta^\nu{}_\rho - \frac{\partial\varepsilon^\nu}{\partial x^\rho}\right) A^{\lambda\rho} \\ & = & A^{\mu\nu} - \frac{\partial\varepsilon^\nu}{\partial x^\rho}A^{\mu\rho} - \frac{\partial\varepsilon^\mu}{\partial x^\lambda}A^{\lambda\nu}. \end{array} \tag{2.23}$$

En combinant les deux équations ci-dessus, toujours en se limitant au premier ordre, le tenseur dans le nouveau système de coordonnées apparaît comme la somme du tenseur *au même point* et d'un terme, linéaire en dérivation, exprimant le changement infinitésimal de coordonnées :

$$\begin{array}{rcl} A'^{\mu\nu}(x) & = & A^{\mu\nu}(x) - \frac{\partial\varepsilon^\nu}{\partial x^\lambda}A^{\mu\lambda}(x) - \frac{\partial\varepsilon^\mu}{\partial x^\lambda}A^{\lambda\nu}(x) + \frac{\partial A^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}\varepsilon^\lambda \\ & = & A^{\mu\nu}(x) + \pounds_\varepsilon A^{\mu\nu}(x). \end{array} \tag{2.24}$$

C'est cet opérateur linéaire que l'on identifie à la dérivation de Lie et il a été montré que cette dérivation peut s'écrire aussi bien avec les dérivations directes qu'avec les dérivations covariantes :

$$\begin{array}{rcl} \pounds_\varepsilon A^{\mu\nu}(x) & = & -\frac{\partial\varepsilon^\nu}{\partial x^\lambda}A^{\mu\lambda}(x) - \frac{\partial\varepsilon^\mu}{\partial x^\lambda}A^{\lambda\nu}(x) + \frac{\partial A^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}\varepsilon^\lambda \\ & = & -\varepsilon^\nu{}_{;\lambda}A^{\mu\lambda}(x) - \varepsilon^\mu{}_{;\lambda}A^{\lambda\nu}(x) + \varepsilon^\lambda A^{\mu\nu}{}_{;\lambda}(x). \end{array} \tag{2.25}$$

Dans la suite, la direction de la dérivation de Lie ne sera plus systématiquement définie par un champ de vecteur infinitésimal car un champ de vecteur tangent à la direction souhaitée est suffisant. Nous pourrons par exemple utiliser des vecteurs unitaires définies à partir du vecteur infinitésimal par $\varepsilon^\mu = u^\mu d\lambda$.

A titre d'exemple, nous allons considérer une courbe γ le long de laquelle les coordonnées x^i restent constantes. Un déplacement infinitésimal le long de cette courbe se traduit par le vecteur $\gamma^\mu = \delta^\mu{}_0$, exprimé dans ce système de coordonnées. Les termes $\frac{\partial\gamma^\nu}{\partial x^\lambda}$ sont alors nuls et le terme $\frac{\partial A^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}$ se limite à la dérivation suivant la coordonnée x^0 uniquement. La dérivation de Lie est ainsi grandement simplifiée, prenant la forme suivante :

$$\pounds_\gamma A^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A^{\mu\nu}(x)}{\partial x^0}. \tag{2.26}$$

Si de plus, le tenseur est invariant le long de la courbe γ, *i.e.* $\pounds_\gamma A^{\mu\nu}(x) = 0$, alors cela signifie que le tenseur ne dépend pas de la coordonnée x^0. Autrement dit, si la dérivation de Lie est nulle suivant une direction, il est possible de trouver un système de coordonnées tel que le tenseur considéré ne dépende pas d'une des coordonnées, x^0 par exemple. Réciproquement, si un tenseur, dans un système de coordonnée donné, ne dépend pas d'une des des coordonnées, par exemple x^0, alors la dérivation de Lie suivant la direction x^0 est nulle.

Il est intéressant de comparer la dérivation de Lie à la dérivation covariante. La dérivation covariante permet de sonder les variations intrinsèques d'un champ tensoriel en s'affranchissant de la variation du système de coordonnées alors que la dérivation de Lie permet de sonder la transformation d'un champ tensoriel évalué en un point fixé lors d'un changement infinitésimal de position, en s'affranchissant donc de la variation du champ lors de ce changement de position. D'une certaine manière, la dérivation covariante donne la propagation du champ alors que la dérivation de Lie donne la manière dont un champ apparaît lorsqu'un observateur se déplace.

Vecteur de Killing

Considérons un espace-temps décrit par le tenseur métrique $g^{\mu\nu}$ ne dépendant pas de la coordonnée x^0. Compte tenu des résultats précédents, on peut construire un champ de vecteur $\xi^\mu = \delta^\mu_{\ 0}$ tel que la dérivation de Lie du tenseur métrique suivant cette direction est nulle $\pounds_\xi g^{\mu\nu} = 0$. Ce champ de vecteur est alors appelé *vecteur de Killing*. La condition $\pounds_\xi g^{\mu\nu} = 0$ permet de montrer qu'un vecteur de Killing doit vérifier la condition $\xi_{\mu;\lambda} + \xi_{\lambda;\mu} = 0$. L'intérêt de la dérivation de Lie est donc d'avoir accès aux symétries du problème : ces symétries sont données par les direction suivant lesquelles la dérivation de Lie du tenseur métrique est nulle.

Les vecteurs de Killing permettent de trouver les constantes associées à un mouvement le long d'une géodésique. Considérons une géodésique décrite par le paramètre affine λ et de vecteur tangent u^μ, ainsi qu'un vecteur de Killing ξ^ν. Il est alors possible de construire une grandeur scalaire $G = u^\mu \xi_\mu$ qui reste constante le long de la géodésique :

$$\begin{aligned} \tfrac{D}{D\lambda}\left(u^\mu \xi_\mu\right) &= \underbrace{\frac{dx^\nu}{d\lambda}}_{u^\nu} \left(u^\mu \xi_\mu\right)_{;\nu} \\ &= \underbrace{u^\mu_{\ ;\nu} u^\nu}_{\frac{Du^\mu}{D\lambda}} \xi_\mu + u^\mu u^\nu \xi_{\mu;\nu} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.27}$$

le premier terme s'annulant car il correspond à l'équation des géodésiques et le second car le tenseur $u^\mu u^\nu$ est symétrique alors que le tenseur $\xi_{\mu;\nu}$ est antisymétrique. Par exemple, si le système est décrit par une métrique ne dépendant pas du temps, le vecteur $\xi^\mu_{(t)}$ défini par $\xi^\mu_{(t)} \partial_\mu = \partial_t$ est un vecteur de Killing et permet de définir comme quantité conservée, qui peut s'interpréter comme l'énergie, $E = -\xi^\mu_{(t)} u_\mu$.

2.2 Les trous noirs : résultats fondamentaux

Malgré la complexité des équations d'Einstein, une solution en a été trouvée dès 1916 par Karl Schwarzschild. Cette métrique concerne uniquement les systèmes statiques et à symétrie sphérique. La conséquence la plus spectaculaire de cette métrique, et probablement de la théorie de la Relativité Générale, est la prédiction d'un nouvel objet : les trous noirs, dont les preuves tangibles d'existence n'ont été observées qu'au début des années soixante. Cependant, et même si les objets qui nous intéressent ici sont bien les trous noirs, la métrique de Schwarzschild permet de décrire l'espace-temps autour de n'importe quel objet gravitant, statique et à symétrie sphérique comme le Soleil ou la Terre.

La solution de Schwarzschild ne permet de décrire que les trous noirs sans charge ni moment angulaire et, bien que les métriques prenant en compte ces effets soient connues, nous nous limiterons au cas des trous noirs de Schwarzschild. Dans un premier temps nous présenterons cette métrique dans le cadre de la Relativité Générale. Une discussion quant aux propriétés de ce type d'espace-temps sera présentée dans un deuxième chapitre dans lequel la *véritable* nature de l'horizon est abordée. Finalement, nous anticiperons sur les parties suivantes en présentant la métrique décrivant les trous noirs de Schwarzschild dans le cadre de théories de la gravitation allant au delà de la Relativité Générale.

2.2.1 La métrique de Schwarzschild

Forme de la métrique statique et à symétrie sphérique

Cherchant à décrire l'espace-temps autour d'un objet statique et à symétrie sphérique, la métrique de Schwarzschild ne doit dépendre que des quantités $\vec{r}\vec{r}$, $d\vec{r}d\vec{r}$ et $\vec{r}d\vec{r}$ ainsi que de dt. Il existe alors un système de coordonnées (τ, x_1, x_2, x_3) tel que la métrique ne dépende que de ces trois quantités et prenne nécessairement la forme suivante :

$$ds^2 = F(r)d\tau^2 - C(r)d\vec{r}d\vec{r} - D(r)\left(\vec{r}d\vec{r}\right)^2 - 2E(r)\vec{r}d\vec{r}d\tau. \tag{2.28}$$

Compte tenu de la symétrie sphèrique, il convient de se placer dans le système de coordonnées sphériques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & r\sin\theta\cos\varphi \\ x_3 & = & r\sin\theta\sin\varphi \\ x_2 & = & r\cos\theta. \end{array}\right. \tag{2.29}$$

Dans ce système de coordonnées, la métrique adopte alors une forme séparée en une partie radiale, temporelle et angulaire :

$$ds^2 = F(r)d\tau^2 - 2E(r)rdrd\tau - D(r)r^2dr^2 - C(r)\left(dr^2 + r^2d\Omega^2\right), \tag{2.30}$$

où $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ est l'élément infinitésimal d'angle solide. La liberté de jauge de la Relativité Générale permet de re-synchroniser le temps τ, et ce en chaque point, à l'aide d'une fonction $\Phi(r)$ telle que :

$$dt = d\tau + \frac{\partial\Phi}{\partial r}dr, \tag{2.31}$$

et

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}F(r) + E(r)r = 0. \tag{2.32}$$

C'est bien evidemment l'invariance de jauge de la théorie de la Relativité Générale qui permet non-seulement de re-synchroniser le temps mais aussi de choisir cette nouvelle synchronisation en imposant la forme de la fonction Φ par la relation ci-dessus. Cette relation a été choisie car elle permet d'annuler les termes de type $drdt$, la métrique s'écrivant alors :

$$ds^2 = F(r)dt^2 - G(r)dr^2 - C(r)\left(dr^2 + r^2d\Omega^2\right). \tag{2.33}$$

Il reste encore un degré de liberté de jauge qui va permettre “d'éliminer” la fonction C en cherchant une coordonnée radiale r' telle que $C(r') = 1$. En imposant que cette nouvelle coordonnée vérifie ${r'}^2 = C(r)r^2$, alors

$$dr = \frac{r'dr'}{\frac{r^2}{2}\frac{dC}{dr} + rC(r)}, \tag{2.34}$$

et il s'ensuit une métrique du type

$$ds^2 = B(r')dt^2 - A(r')d{r'}^2 - {r'}^2d\Omega^2. \tag{2.35}$$

On reconnaît très bien sous cette forme la symétrie sphérique via la partie angulaire ainsi que l'invariance temporelle puisqu'aucun des facteurs de cette métrique ne dépend de la variable de type temps. Dans ce système de coordonnées, le tenseur métrique est diagonal et ses éléments valent :

$$\begin{array}{ll} g_{tt} = B(r'), & g_{\theta\theta} = -{r'}^2 \\ g_{r'r'} = -A(r'), & g_{\varphi\varphi} = -{r'}^2\sin^2\theta. \end{array} \tag{2.36}$$

Cette forme diagonale est générale à tout espace-temps isotrope et statique et sera appellée, de manière générique, *métrique de Schwarzschild* ou *métrique de type Schwarzschild*. Cette forme de métrique ne préjuge en rien de la distribution radiale de la source de gravitation et s'applique donc à une grande variété d'objets.

Le cas des trous noirs

Plaçons maintenant une masse ponctuelle M dans l'espace-temps en la position radiale $r = 0$. Afin d'alléger l'écriture, la coordonnée radiale est maintenant notée r. Cet objet vérifiant les conditions de stationnarité et de symétrie sphérique, l'espace-temps autour de cette masse sera décrit par la métrique de Schwarzschild. Il reste cependant à déterminer les fonctions A et B. Pour cela, il est nécessaire de calculer explicitement les composantes non-nulles du tenseur d'Einstein dans la métrique de Schzwarzschild et ainsi que celle du tenseur énergie-impulsion et résoudre les équations d'Einstein, afin de déterminer les fonctions A et B. En ce qui concerne le tenseur énergie-impulsion, le calcul est très simple : toutes ses composantes sont nulles en tout point de l'espace sauf en celui où se trouve la masse ponctuelle où elles deviennent infinies. Pour le tenseur d'Einstein, il faut tout d'abord calculer les coefficients de connection puis les composantes du tenseur de Ricci, qui sont données dans l'équation ci-dessous :

$$\begin{aligned}
&R_{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mu \neq \nu \\
&R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{1}{4}\frac{B'}{B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{1}{r}\frac{A'}{A} \\
&R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A}\left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{A} \\
&R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta} \\
&R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{1}{4}\frac{B'}{A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{1}{r}\frac{B'}{A}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

La notation prime signifie la dérivation par rapport à la coordonnée radiale.

Les équations d'Einstein consistent simplement à annuler les composantes du tenseur d'Einstein sauf au point où se trouve la masse ponctuelle. La résolution des quatre équations s'effectue en exprimant tout d'abord la fonction B en fonction de la fonction A. La condition $R_{tt}/B + R_{rr}/A = 0$ est équivalente à $\ln(AB) = cste$ et conduit donc à

$$A = \frac{cste}{B}. \tag{2.38}$$

L'espace étant asympotiquement plat, les fonctions métriques A et B doivent tendre vers 1 quand $r \to +\infty$ fixant la constante ci-dessus égale à 1. En exprimant R_{rr} et $R_{\theta\theta}$ en fonction de B et de ses dérivées, les composantes purement radiale et purement zenithal du tenseur de Ricci sont liée l'un à l'autre par :

$$R_{rr} = \frac{R'_{\theta\theta}}{2rB}. \tag{2.39}$$

Résoudre l'équation $R_{\theta\theta} = 0$, qui prend la forme $(rB)' - 1 = 0$ quand elle est exprimée en fonction de B, est donc suffisant. La fonction B prend la forme alors la forme :

$$B(r) = 1 + \frac{cste}{r}. \tag{2.40}$$

La constante se trouve grâce aux conditions asymptotiques : loin de la masse ponctuelle, le champ est faible et la composante temporelle du tenseur métrique g_{tt}, qui n'est autre que la fonction B, s'exprime en fonction du potentiel newtonien Φ par $g_{tt} = 1 - 2\Phi$. Le potentiel Newtonien étant donné par $\Phi = GM/r$ pour une masse ponctuelle, la fonction B s'écrit

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r}, \tag{2.41}$$

et la métrique finale

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} - r^2 d\Omega^2. \tag{2.42}$$

2.2.2 Singularité, horizon et systèmes de coordonnées

Singularité

La métrique, bien qu'extrêmement simple, présente deux points singuliers en $r = 0$ et $r = 2GM$. Tout d'abord, la singularité à l'origine est une singularité essentielle, indépendante du système de coordonnées. Cette singularité est une propriété intrinsèqe de l'espace-temps, et ce de par sa construction même : le système gravitationnel étant une masse ponctuelle en $r = 0$, le tenseur énergie-impulsion diverge en ce point entraînant cette singularité. La singularité en $r = 2GM$ est quant à elle une singularité de coordonnées et elle disparaît dans des systèmes de coordonnées différents, mais décrivant le même espace-temps, comme le système de Painlevé. En effet, le scalaire de Ricci est régulier en $r = 2GM$: cette singularité n'est donc pas une propriété intrinsèque de l'espace-temps comme l'est la première.

Horizon

Il se passe pourtant quelque chose de particulier en $r = 2GM$. En effet, les composantes g_{tt} et g_{rr} changent de signe en cette position. Ainsi la signature $(+ - --)$ initiale, $r > 2GM$, du tenseur métrique devient $(- + --)$ pour $r < 2GM$. Or, la coordonnée de type temps est celle affiliée au signe $+$, donc la coordonnée de type temps au delà de $2GM$ devient de type espace en deçà de cette distance radiale et inversement pour la coordonnée radiale r. Cela s'interprète de la manière suivante : en deçà de $r = 2GM$, l'espace devient dynamique et s'effondre sur lui même. D'une certaine manière, l'espace s'écoule dans cette région. Cela signifie que l'espace-temps autour d'une masse ponctuelle est globalement dynamique et donc dépendant du temps. Ce comportement n'est pas sans conséquence : la distance radiale $r = 2GM$ définit un horizon d'évènements puisque, d'une part, si une masse, même non ponctuelle, est confinée dans une région de taille plus petite que $2GM$, alors elle doit s'effondrer sur elle-même et, d'autre part, tout objet, matière ou rayonnement, ne peut que tomber dans la singularité centrale s'il se trouve en-deçà de la distance radiale $r = 2GM$. Cet horizon d'évènement, qui prend l'apparence d'une sphère de rayon, appelé *rayon de Schwarzschild*, $r_H = 2GM$ délimite deux zones d'espace-temps causalement déconnectées l'une de l'autre : aucune information ne peut aller d'un observateur en-deça de l'horizon vers un observateur au-delà, l'horizon ne pouvant être franchi que dans le sens des r décroissants. Cet horizon définit un objet appelé trou noir, en l'occurence de Schwarzschild car il est sans moment angulaire ni charge.

Nous renvoyons le lecteur au chapitre 6.4 de la référence [5] pour une plus ample description qualitative de la métrique de Schwarzschild.

La véritable nature de l'horizon : coordonnées de Kruskal

Il existe un système de coordonnées dans lequel le caractère globalement dynamique de l'espace-temps de Schwarzschild est illustré. Ce système, déterminé par Kruskal, est défini par :

$$\begin{cases} \rho^2 - \tau^2 = \left(\frac{r}{r_H} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{r_H}\right) \\ \frac{2\rho\tau}{\rho^2+\tau^2} = \tanh\left(\frac{t}{r_H}\right). \end{cases} \tag{2.43}$$

Dans ce système de coordonnées, la métrique devient explicitement dynamique, *i.e.* le tenseur métrique dépend de τ, mais la singularité de coordonnées en r_H disparaît :

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r(\rho,\tau)} \exp\left(-\frac{r}{r_H}\right) \left(d\tau^2 - d\rho^2\right) - r^2(\rho,\tau) d\Omega^2. \tag{2.44}$$

Dans le système de Kruskal, les coordonnées restent toujours du même type sur l'ensemble de l'espace-temps, excepté en $r = 0$ puisqu'il s'agit de la singularité essentielle : τ est de type temps et ρ de type espace partout.

Le système de coordonnées de Kruskal peut être étendu vers des valeurs de ρ négative [6]. Le demi-plan $\rho < 0$ est une extension de l'espace-temps de Schwarzschild car le système de coordonnées de Schwarzschild coïncide uniquement avec le demi-plan $\rho > 0$. L'étude ci-dessous se limitera au cas $\rho > 0$, son but étant de permettre une meilleure compréhension de l'espace-temps décrivant un trou noir et non une description exhaustive des extensions possible vers d'autres Univers [6].

Dans ce système de coordonnées, les trajectoires à rayon fixé sont décrites par des hyperboles $\rho^2 - \tau^2 = cste(r)$ dont les asymptotes sont les deux bissectrices du plan (ρ, τ), la constante dépendant de la position r considérée. Ainsi, les trajectoires en dehors de l'horizon apparaîtront, dans le système de coordonnées de Kruskal, comme des sphères, compte tenu de l'extension angulaire, se propageant à une vitesse inférieure à celle de la lumière, autorisant un observateur à rester sur cette surface. Pour $r = r_H$, l'équation de l'hyperbole devient $\rho^2 - \tau^2 = 0$, il s'agit donc des deux bissectrices du plan (ρ, τ) et l'horizon devient une sphère se propageant à la vitesse de la lumière. La singularité centrale se présente quant à elle comme une hyperbole d'équation $\rho^2 - \tau^2 = -1$. Pour $r < r_H$, les trajectoires sont des surfaces se propageant à une vitesse plus grande que celle de la lumière. Il est alors impossible pour un observateur en-deçà de l'horizon de rester à une distance fixe de la singularité car il ne peut se propager plus vite que la lumière : les surfaces de rayon inférieur le rattrapent l'observateur dont la position décroît pour finalement atteindre la singularité centrale. Les trajectoires physiquement permises sont celles qui se trouvent dans le cône de lumière défini en n'importe quel point d'espace-temps (ρ_0, τ_0) par les équations $(\rho - \rho_0) \pm (\tau - \tau_0) = 0$, le signe $+$ correspondant à un photon émis vers l'extérieur du trou noir et le signe $-$ à un photon émis vers l'intérieur. Les lignes de photons seront donc soit parallèles, soit perpendiculaires à la ligne décrivant l'horizon. La pente des trajectoires $r = cste$ se trouve dans le cône pour $r > r_H$ et en dehors pour $r < r_H$, illustrant la vitesse des trajectoires selon leur position radiale. De plus, pour $r > r_H$, le photon émis vers l'extérieur s'éloignera du trou noir tandis que celui émis vers l'intérieur traversera l'horizon puis atteindre la singularité centrale. Cependant, pour $r < r_H$, les deux photons émis rencontreront la singularité centrale. Ceci est évident pour le photon émis en direction de la singularité et, pour celui émis vers l'extérieur, vient du fait qu'il ne peut rattraper l'horizon, qui se déplace à la vitesse de la lumière et qu'il sera rattrapé par la singularité qui se déplace plus rapidement que le photon. L'ensemble de ces explications sont représentées graphiquement sur la figure 2.1.

2.2.3 Trous noirs au delà de la Relativité Générale

De nombreuses observations signent la présence de trous noirs dans l'Univers. Il est nécessaire que les extensions envisagées de la théorie d'Einstein prédisent elles-aussi l'existence de ces objets. Cependant, et bien que les caractéristiques essentielles d'un trou noir (horizon et singularité centrale) doivent apparaître, le profil de courbure induit par le trou noir est *a priori* différent d'une théorie à l'autre. Pour les trous noirs de Schwarzschild, la métrique conservera la forme donnée par l'équation (2.35) avec la fonction A égale à l'inverse de la fonction B. Ainsi, la métrique décrivant un trou noir de Schwarzschild, et ce dans n'importe quelle extension de la Relativité Générale prédisant l'existence de tels objets, prendra la forme suivante :

$$ds^2 = h(r)dt^2 - \frac{dr^2}{h(r)} - r^2 d\Omega_{D-2}^2. \tag{2.45}$$

La métrique est écrite pour un espace-temps de dimension D, qui peut être différent de 4. La partie angulaire est donc simplement donnée par l'élément infinitésimal sur une sphère de rayon r et de dimension $D-2$, $d\Omega_{D-2}^2$ représentant l'élément infinitésimal d'angle solide dans un espace à $D-1$ dimensions. Dans cette approche, l'ensemble des $D-1$ dimensions spatiales ainsi que la dimension temps sont supposées être étendues.

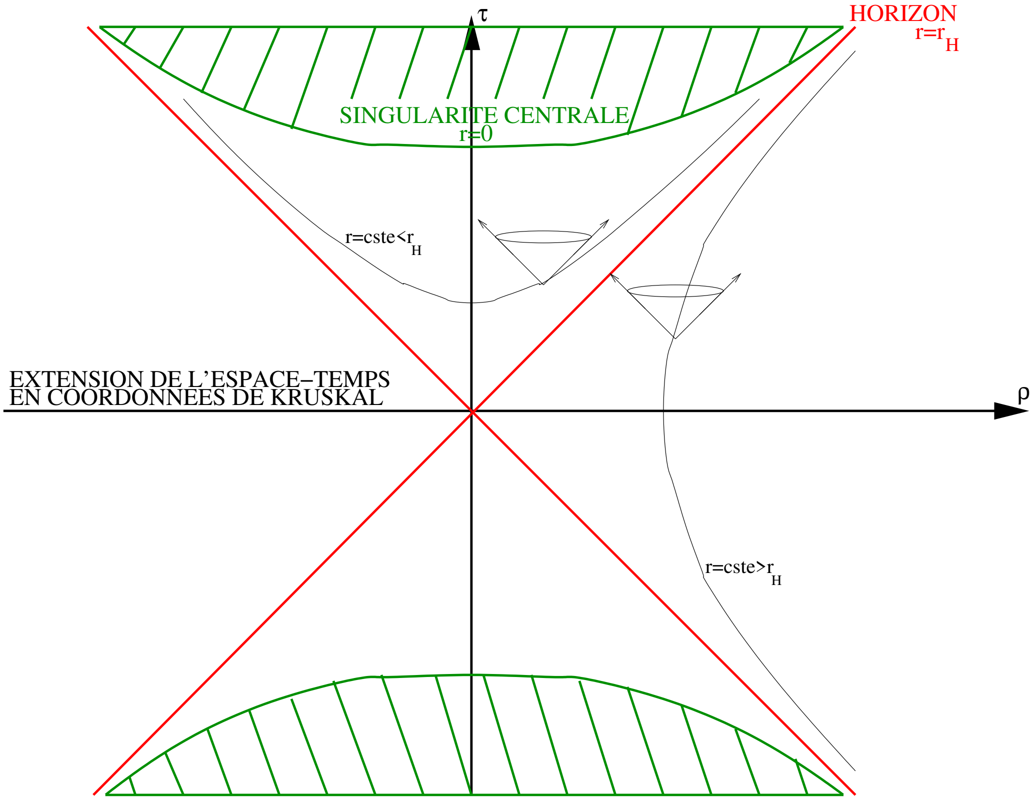


Fig. 2.1 – Diagramme de Kruskal pour un espace-temps de Schwarzschild. Dans ce plan (ρ, τ), l'horizon est représenté par les bissectrices $\rho \pm \tau = 0$ (lignes rouges) et la singularité centrale (courbes vertes) par l'hyperbole $\rho^2 - \tau^2 = -1$. Les trajectoires à $r = cste$ (courbes noires) sont aussi des hyperboles d'asymptote l'horizon avec $\rho > \tau$ pour $r > r_H$, en dehors du trou noir, et $\rho < \tau$ pour $r < r_H$, dans le trou noir. Les cônes de lumière pour les deux exemples de trajectoires sont aussi représentés.

Relativité Générale à D dimensions

Nous pouvons tout d'abord généraliser à un nombre de dimensions quelconque la métrique dérivée dans le chapitre précédent. Le résultat obtenu décrira l'espace-temps autour d'un trou noir plongé dans un Univers à D dimensions avec comme théorie sous-jacente de la gravitation, la Relativité Générale :

$$S_{grav} \propto \int d^D x \sqrt{-g} R. \tag{2.46}$$

La généralisation $D-$dimensionnelle de la métrique de Schwarzschild suit une démarche identique au calcul à quatre dimensions [7]. Les équations d'Einstein impliquent que :

$$h(r) = 1 - \frac{cste}{r^{D-3}}, \tag{2.47}$$

la constante d'intégration, qui n'est autre que le rayon de Schwarzschild r_H, se trouvant en exigeant que la masse Arnowitt, Deser & Misner (ADM) [8, 9, 10] soit la masse du trou noir [7] :

$$r_H = \left[\frac{16\pi G M}{(D-2)\Omega_{D-2}} \right]^{\frac{1}{D-2}}, \tag{2.48}$$

Ω_{D-2} étant l'angle solide total dans un espace à $D-1$ dimensions, c'est à dire l'aire d'une sphère unitaire à $D-2$ dimensions donnée par :

$$\Omega_{D-2} = \frac{(2\pi)\pi^{\frac{D-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}, \tag{2.49}$$

où Γ est la fonction factorielle d'Euler.

Théorie de Gauss-Bonnet

Il existe aussi des solutions de type trous noirs de Schwarzschild en théorie de Gauss-Bonnet qui sont obtenues en injectant la métrique (2.45) dans les équations d'Einstein, données dans le chapitre 3.3. Cette solution a tout d'abord été obtenue dans la référence [33] et a été étendue à différentes topologies par [124, 125]. La fonction métrique prend alors la forme suivante :

$$h(r) = k + \frac{r^2}{2\alpha(D-3)(D-4)}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{64\pi\alpha(D-3)(D-4)GM}{(D-2)\Omega_{D-2}r^{D-1}}}\right), \tag{2.50}$$

α étant la constante de couplage de Gauss-Bonnet. Il a été montré dans la référence [33] que ce type d'espace-temps possédait deux branches, correspondant chacune au signe $(+)$ ou $(-)$. La branche $(+)$ représente un trou noir plongé dans un univers de type Anti-de Sitter avec un paramètre de masse négatif tandis que la branche $(-)$ correspond à un trou noir dans un Univers asymptotiquement plat avec un paramètre de masse positive. Il a cependant été montré que dans les deux, l'énergie ADM restait positive [11]. L'extension à différentes topologies est obtenue en changeant la valeur du paramètre k : la topologie est elliptique si $k=1$, plate si $k=0$ et hyperbolique si $k=-1$. Par la suite, nous ne considèrerons que la branche $(-)$ et une topologie elliptique car cela correspond au trou noir de Schwarzschild usuel. Le paramètre k sera donc systématiquement choisi égal à 1 et le signe $(+)$ ne sera plus mentionné.

L'horizon du trou noir s'obtient en annulant la fonction métrique $h(r)$. A la différence de la Relativité Générale, une expression explicite de la taille de l'horizon r_H en fonction du paramètre de masse ne peut être trouvée. Dans le cas général, c'est la masse qui s'exprime explicitement en fonction du rayon de Schwarzschild :

$$M = \frac{(D-2)\Omega_{D-2}r_H^{D-3}}{16\pi G}\left(1 + \frac{\alpha(D-3)(D-4)}{r_H^2}\right). \tag{2.51}$$

A titre indicatif, nous donnons ici l'action décrivant la théorie de Gaus-Bonnet afin de pouvoir comparer rapidement à la Relativité Générale :

$$S_{grav} \propto \int d^D x\sqrt{-g}\left[R + \alpha\left(R^2 - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}\right)\right]. \tag{2.52}$$

Cette action sera expliquée plus en détail dans le chapitre suivant.

Espace avec constante cosmologique

La solution décrivant un trou noir de Schwarzschild plongé dans un Univers ayant une courbure constante a été trouvé par [12]. La fonction métrique pour un tel espace-temps prend la forme

$$h(r) = 1 - \frac{\mu}{r^{D-3}} - \frac{2\Lambda r^2}{(D-1)(D-2)}, \tag{2.53}$$

Λ étant la constante cosmologique qui peut être soit positive, soit négative selon la courbure de l'Univers. Le paramètre μ se lie directement à la masse du trou noir par

$$\mu = \frac{16\pi GM}{(D-2)\Omega_{D-2}}. \tag{2.54}$$

Le deuxième terme dans la fonction métrique représente l'influence de la masse du trou noir sur l'espace-temps tandis que le troisième terme représente le terme de courbure constante. Comme pour les trous noirs en théorie de Gauss-Bonnet, la masse s'exprime explicitement, via le paramètre μ, en fonction du rayon de Schwarzschild, mais cette relation n'est pas inversible :

$$\mu = r_H^{D-3}\left(1 - \frac{2\Lambda r_H^2}{(D-1)(D-2)}\right). \tag{2.55}$$

Mentionnons aussi l'action de la Relativité Générale avec constante cosmologique comme outils de comparaison :

$$S_{grav} \propto \int d^D x \sqrt{-g}\,[R - 2\Lambda]. \tag{2.56}$$

Chapitre 3

Au delà de la théorie d'Einstein

« Votre théorie est folle, mais pas assez pour être juste »

Niels Bohr

La Relativité Générale d'Einstein a passé de nombreux tests expérimentaux avec succès et cette théorie est maintenant acceptée comme *la* théorie de l'interaction gravitationnelle. Il existe cependant trois autres interactions fondamentales qui sont, elles, décrites par la Mécanique Quantique : l'interaction électromagnétique, l'interaction nucléaire forte et l'interaction nucléaire faible. Le corpus théorique de la Mécanique Quantique est nécessaire à la compréhension de ces trois interactions et a finalement abouti au modèle standard de la physique des particules basé sur une théorie quantifiée des champs. Ce modèle incorpore avec succès la Relativité Restreinte à la Mécanique Quantique et, en plus d'une compréhension fine des particules et de leurs interactions, prédit les phénomènes, par ailleurs mesurés expérimentalement, avec une précision sans précédent. Il permet de plus l'unification de l'interaction nucléaire faible à l'interaction électromagnétique.

Pourtant, comme toute belle histoire, il y a des zones d'ombre : le modèle standard de la physique des particules, tout d'abord, souffre de nombreux problèmes tant d'un point de vue théorique qu'expérimental. En effet, l'unification électro-faible introduit une symétrie chirale qui est violée par les termes de masse dans le lagrangien. Pour pouvoir rendre les particules massives, et elles le sont, un mécanisme de brisure spontanée de symétrie a été introduit conduisant à l'apparition d'une particule scalaire fondamentale : le boson de Higgs. Bien que cette particule n'ai toujours pas été détectée, les contraintes indirectes actuelles indiquent qu'elle devrait être observable, si cette particule existe, au Large Hadron Collider (LHC) qui entrera en service en 2007. D'un point de vue théorique, le succès de l'unification électro-faible semble indiquer que l'ensemble des interactions s'unifie en une unique au-delà d'une certaine échelle d'énergie. Cependant, dans le cadre du modèle standard, les couplages électromagnétique, faible et fort ne convergent pas en un point. Bien que ce problème puisse être résolu, notamment grâce à la supersymétrie, la question de l'unification reste problématique lorsque l'on prend en compte la gravitation. En effet, une quantification perturbative de la gravitation aboutit à une théorie non-prédictive car elle est non-renormalisable.

Ce choix d'obtenir une théorie ultime qui décrirait l'ensemble de la physique constitue la principale motivation pour dépasser le cadre de la Relativité Générale. Cependant, comme nous le verrons dans la première partie de ce chapitre, les observations cosmologiques justifient déjà d'étudier des extensions de la Relativité Générale. Dans un deuxième temps, les différentes modifications que nous avons plus particulièrement étudiées, à savoir l'ajout d'une constante cosmologique et du terme de Gauss-Bonnet, seront présentées plus en détail. Ces extensions ont pour avantage de s'insérer naturellement à la fois dans le cadre d'une théorie de la gravitation basée sur un développement en puissance de la courbure scalaire ainsi que dans le cadre des théories avec dimensions supplémentaires, qui seront présentées dans une dernière partie.

3.1 Mais pourquoi ?

La recherche d'une théorie unique permettant de décrire l'ensemble des phénomènes présents dans l'Univers nécessite évidemment la construction d'une théorie quantique de la gravitation, et donc une modification de la Relativité Générale et/ou de la Mécanique Quantique. Cependant, indépendamment de l'attrait esthétique d'une telle unification et au vu de nombreuses observations récentes et de différentes impasses théoriques, une modification de la Relativité Générale devient une voie d'investigation prometteuse.

Les observations cosmologiques de précision [15, 16] indiquent que l'Univers, d'un point de vue énergétique, est essentiellement composé de trois ingrédients : le rayonnement, nettement sous-dominant, la matière, environ 30%, et finalement une forme d'énergie inconnue appelée *Energie Noire*, qui est dominante à hauteur de 70%. Cette forme d'énergie, qui possède une pression négative, entraîne une expansion accélérée de l'Univers qui est très bien prédite par l'ajout d'une constante cosmologique positive dans les équations d'Einstein. Mais, bien que de nombreux modèles de microphysique comme les champs de quintessence ou les fluctuations quantiques du vide tentent de l'expliquer, le mystère de l'origine de la constante cosmologique reste tout entier et l'utilisation d'une telle constante se justifie essentiellement dans une approche phénoménologique du problème de l'énergie noire. De plus, les observations combinées du fond diffus cosmologique [16] et des courbes de rotation des galaxies [18] indiquent que la majeure partie de la matière est non-baryonique et, tout comme l'énergie noire, de type inconnu [19]. Cette *Matière Noire* peut être expliquée à l'aide de modèles de microphysique incorporant de nouvelles particules, comme la supersymétrie [20, 21] ou les théories de Kaluza-Klein [22, 23, 24]. Dans les théories supersymétriques, les nouvelles particules sont les partenaires superpsymétriques des particules du modèle standard alors que dans les théories de Kaluza-Klein, il s'agit des excitations d'ordre supérieur dues à la présence de dimensions supplémentaires. Cependant, une alternative aux modèles de type microphysique est envisageable puisque le comportement "anormal" des courbes de rotation des galaxies, tout comme l'expansion accélérée actuelle de notre Univers, peuvent être vus comme une déviation du potentiel gravitationnel à grande distance ; déviation qui nécessite donc une modification de la Relativité Générale [25, 26] par l'ajout de termes supplémentaires dans le Lagrangien.

D'un point de vue théorique, la principale difficulté quant à la construction d'une théorie quantique de la gravitation vient de la non-renormalisibilité de la Relativité Générale. Pour remédier à cette difficulté et pouvoir quantifier la gravitation comme une théorie de champs, il est possible de modifier la théorie d'Einstein en ajoutant, de nouveau, des termes d'ordre supérieur en courbure scalaire. Ces nouvelles théories sont alors renormalisables et possèdent la particularité d'être asymptotiquement libres. Par ailleurs, les développements limités de certaines théories des cordes à basse énergie montrent que des termes d'ordre supérieur s'ajoutent au terme d'ordre 1 de la Relativité Générale. Finalement, les théories des cordes permettent de résoudre de nombreux problèmes théoriques, à la fois dans le secteur de la gravitation et dans le secteur du modèle standard de la physique des particules, comme celui de la Hiérarchie : les conséquences phénoménologiques de ces théories sont donc de grande importance.

3.2 Espace avec constante cosmologique

La construction originelle de la Relativité Générale s'appuie sur le fait que l'impulsion-énergie courbe l'espace-temps. L'hypothèse, faite par Einstein, que l'espace-temps est asymptotiquement plat semble donc tout à fait naturelle. Il est cependant possible de s'affranchir de cette hypothèse et de construire une théorie dans laquelle l'espace-temps possède une courbure constante, même en l'absence d'objet gravitationnel. C'est ce que fit Einstein en introduisant la fameuse constante cosmologique Λ dans son équation de la gravitation, ce qui revient à prendre en compte un terme d'ordre zéro en courbure scalaire[1] :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{3.1}$$

L'ajout de cette constante suscite un grand intérêt d'un point de vue théorique depuis la découverte de la correspondance entre les théories de champs conformes et les théories sur espace avec constante cosmologique [13, 14]. Elle entraîne aussi de nombreuses conséquences cosmologiques ; la plus importante étant que, prise positive, elle permet de rendre compte de l'accélération de l'Univers [15]. En effet, suivant le signe de la constante cosmologique, deux types d'Univers peuvent être obtenus en résolvant les équations d'Einstein : si cette dernière est positive, il s'agit d'un espace dit de *de Sitter* (dS), et si elle est négative, il s'agit d'un espace *Anti-de Sitter* (AdS).

Ces deux types d'espace s'obtiennent en résolvant les équations d'Einstein sans source[2]. Mais ces espaces peuvent aussi se construire avec une approche géométrique : Les espaces (A)dS à D dimensions seront des hypersurfaces de courbure constante dans un espace à $D+1$ dimensions ; l'espace dS ayant une courbure positive et l'espace AdS une courbure négative [27, 6]. Deux métriques sont principalement utilisées pour décrire les espaces (A)dS : tout d'abord la métrique de Robertson et Walker, qui est d'intérêt cosmologique. Dans un espace vide à quatre dimensions, elle prend la forme suivante :

$$ds^2 = d\tau^2 - a_0^2 e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\tau}\left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right). \tag{3.2}$$

Un espace de Sitter décrit donc un univers en expansion accélérée -ou bien inflationnaire, si on adopte le langage de l'Univers primordial- alors qu'un espace Anti-de Sitter correspond à un Univers oscillant qui débute par un *Big Bang* et finit par un *Big Crunch*.

Il existe aussi une métrique statique qui permet de décrire les espaces (A)dS et qui est utilisée afin d'étudier des systèmes gravitationnels évoluant dans un tel Univers. Toujours en se plaçant dans le cas à quatre dimensions, cette métrique s'écrit ainsi :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)} - r^2 d\Omega^2. \tag{3.3}$$

La transition de la métrique de Robertson et Walker à la métrique statique s'obtient en posant $\tau = t + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\ln\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)$ et $\rho = \frac{re^{-\frac{\Lambda}{3}t}}{\sqrt{1-\frac{\Lambda}{3}r^2}}$ [28, 29]. De nouveau, des propriétés différentes apparaissent suivant le signe de la constante cosmologique : un espace de Sitter présentera un horizon en $R_{dS} = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ masquant à tout observateur situé à l'origine des coordonnées spatiales la région définie par $r > R_{dS}$ (cet observateur est comme *entouré* par un trou noir). En espace Anti-de Sitter, un tel horizon n'est pas présent mais les trajectoires des particules sont fermées.

3.3 Théorie de Lovelock de la gravitation

La théorie de la Relativité Générale n'étant pas renormalisable, une description quantique de la gravitation se basant sur une quantification perturbative de cette dernière est donc vouée à

[1] L'action prenant alors la forme $S = \int d^4x\sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda)$.

[2] C'est la constante cosmologique qui peut être vue comme source de courbure.

l'échec. Il existe essentiellement deux constructions théoriques tentant d'obtenir une description quantique de l'interaction gravitationnelle : la gravité quantique à boucle qui propose une quantification non-perturbative de la Relativité Générale [30] et la théorie des cordes [31] qui incorpore la supersymétrie et agit dans un espace-temps à 10 dimensions[3].

3.3.1 Terme de Gauss-Bonnet : un premier pas vers la théorie de Lovelock

Une conséquence des théories des cordes est d'aboutir à des théories effectives de la gravitation incluant des termes d'ordre supérieur en courbure scalaire de l'espace-temps. La Relativité Générale est décrite par l'action suivante :

$$S = \frac{M_D^{D-2}}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} R. \tag{3.4}$$

Une approche phénoménologique consiste à considérer l'action précédente comme le terme d'ordre 1 d'un développement limité d'une théorie plus générale. Ce terme d'ordre 1, bien que dominant dans la plupart des cas, peut devenir insuffisant dans les régions de forte courbure où l'ajout d'un terme d'ordre 2 deviendrait indispensable. Une telle extension de la gravité est alors décrite par l'action suivante :

$$S = \frac{M_D^{D-2}}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} \left(R + \alpha \left(\alpha_1 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + \alpha_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \alpha_3 R^2 \right) \right) \tag{3.5}$$

où α est une constante de couplage de dimension (longueur)^2. Afin que la théorie ne contienne pas de particules fantômes [32], le triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ doit être pris égal à $(1, -4, 1)$. Ce terme quadratique, appelé terme de *Gauss-Bonnet*, modifie le spectre du graviton (le médiateur de l'interaction gravitionnelle) en espace plat [33] et il apparaît naturellement en théorie des cordes hétérotiques [34, 35]. Il est cependant important de noter une propriété fondamentale de ce terme : il s'agit d'un invariant topologique dans un espace-temps à quatre dimensions et il ne contribue donc pas à la dynamique de la gravitation car il est de divergence nulle. Dans une théorie à quatre dimensions, il est nécessaire de coupler ce terme à un champ scalaire pour le rendre dynamique (voir [43] ainsi que les références citées). Pour rendre ce terme dynamique, il est aussi possible de considérer, comme nous le verrons ultérieurement, des théories avec dimensions supplémentaires : l'espace-temps devenant $D-$dimensionnel avec $D > 4$, le terme de Gauss-Bonnet n'est plus une dérivée totale et contribue alors aux équations de champs.

La prise en compte de ce terme de Gauss-Bonnet a permis de nombreuses investigations en cosmologie et en physique des trous noirs. Il permet par exemple d'apporter des éléments de réponse au problème de la constante cosmologique [36, 37, 38, 39], en particulier dans les modèles de type Randall-Sundrum [40] bien que ce terme conduise à des instabilités [41], ou bien de proposer une solution au problème de la fin de vie des trous noirs [44, 45, 46], en imposant par exemple une masse minimale [42, 43].

3.3.2 Théorie de Lovelock : généralisation aux ordres supérieurs

Une telle approche de la gravitation s'inscrit dans un cadre plus général consistant à considérer un lagrangien sous la forme d'un développement en puissance de la courbure scalaire ; autrement dit avec des dérivées d'ordre supérieur de la métrique. L'une de ces théories la plus prometteuse est la théorie de la gravitation de Lovelock [47, 48] où chaque terme additionnel, de puissance n en courbure scalaire, prend la forme suivante :

$$\mathcal{L}_n = 2^{-n} \, \delta^{a_1 b_1 \cdots a_n b_n}_{c_1 d_1 \cdots c_n d_n} \, R^{c_1 d_1}{}_{a_1 b_1} \cdots R^{c_n d_n}{}_{a_n b_n}, \tag{3.6}$$

[3] La M-théorie en prévoyant 11.

et

$$S = \frac{M_D^{D-2}}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} \sum_{n=0}^{m} \lambda_n \mathcal{L}_n, \tag{3.7}$$

où λ_n est une constante et $\mathcal{L}_n$ est appelé *densité eulerienne* d'ordre n en puissance de la courbure scalaire et correspond donc à un ordre $2n$ en dérivation de la métrique. Le tenseur δ est une extension du tenseur de Kronecker totalement antisymétrique vis à vis des indices en haut et des indices en bas. Cette théorie de la gravitation est remarquable à différents points de vue : tout d'abord elle contient la Relativité Générale, et la redonne en posant $\lambda_n = 0$ pour tout $n \neq 1$, ainsi que la Relativité Générale avec constante cosmologique et la gravitation de Gauss-Bonnet ; les densités euleriennes d'ordre 0 et d'ordre 2 correspondant respectivement à une constante cosmologique (imposant $\lambda_0 \equiv \Lambda$) et au terme de Gauss-Bonnet (imposant $\lambda_2 \equiv \alpha$). Il a de plus été montré qu'un développement de la métrique, autour d'un espace plat, d'une telle théorie n'introduit aucune particule fantôme [32] et que, bien que le lagrangien fasse intervenir des dérivées d'ordre maximal $2m$, les équations d'Euler-Lagrange se limitent à des dérivées de la métrique au plus d'ordre 2 [47, 48], tout comme les équations d'Einstein. L'ordre maximal des densités euleriennes nécessaires à la construction de la théorie de Lovelock est fortement contraint par le nombre de dimensions : tout comme pour le terme de Gauss-Bonnet la densité eulerienne d'ordre n est à divergence nulle dans un espace-temps à $2n$ dimensions et celles d'ordre supérieur sont rigoureuseument nulles. Autrement dit, dans un espace-temps à D dimensions, seules les densités euleriennes d'ordre inférieur ou égal, si D impair, ou bien strictement inférieur, si D pair, à $\lfloor D/2 \rfloor$ auront une contribution dynamique aux équations de champs et, à moins d'un espace-temps ayant une infinité de dimensions, la théorie de Lovelock sera toujours une somme finie de densités euleriennes. Par exemple, pour un espace temps à 10 dimensions, comme il l'est prévu par les théories des cordes, le lagrangien de Lovelock s'arrêtera au terme d'ordre 5 en courbure scalaire.

Cependant, bien que cette théorie ne fasse intervenir qu'une somme finie de densités euleriennes, les équations de champs, et *a fortiori* leur résolution, deviennent très rapidement extrêmement compliquées. Les équations de champs pour une théorie de Gauss-Bonnet sans source prennent la forme suivante :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \alpha \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(R_{\rho\beta\gamma\delta} R^{\rho\beta\gamma\delta} - 4 R_{\rho\beta} R^{\rho\beta} + R^2 \right) \\ -2 R R_{\mu\nu} + 4 R_{\mu\rho} R^{\rho}{}_{\nu} \\ +4 R_{\rho\beta} R^{\rho}{}_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu} - 2 R_{\mu\rho\beta\gamma} R_{\nu}{}^{\rho\beta\gamma} \end{array} \right]. \tag{3.8}$$

Il est important de noter que l'ensemble de ces théories avec ordres supérieurs en courbure scalaire modifie uniquement la dynamique gravitationnelle et le lagrangien décrivant le comportement de la matière n'est pas modifié. Ainsi, si une source de gravitation est présente, le terme habituel $8\pi T_{\mu\nu}$ apparaîtra dans les équations de champs. De plus, les champs, soit de matière soit de jauge, ne se coupleront toujours qu'à une seule métrique afin de préserver le principe d'équivalence.

3.4 Théorie avec dimensions supplémentaires

Comme nous l'avons précisé précédemment, les théories des cordes ainsi que la M-théorie sont des théories avec dimensions spatiales supplémentaires, six pour la théories des cordes et sept pour la M-théorie. Cependant, ces dimensions supplémentaires ne sont pas rigoureuseument identiques aux trois dimensions usuelles. En effet ces dernières sont dites étendues, alors que les dimensions supplémentaires sont refermées sur elles-même. Plus particulièrement, elles sont dites compactifiées de manière à obtenir une taille suffisamment petite pour qu'elles n'aient pu être observées à l'heure actuelle : leur rayon de compactification peut par exemple être choisi de l'ordre de la longueur de Planck. Bien que compactifiées, ces dimensions supplémentaires ne sont pas forcément courbées[4] : prenons l'exemple d'une unique dimension supplémentaire

[4]Non-courbé signifiant ici que le tenseur métrique ne dépend pas de la coordonnée associée à cette dimension.

qui prend la forme d'un cercle de rayon R, alors cette dimension est bien compactifiée car elle se referme sur elle-même mais elle présente bien une géométrie plate car sa contribution à l'intervalle ds^2 sera $R^2 d\theta^2$, où θ est l'angle polaire.

Rajouter des dimensions supplémentaires, indispensables à la cohérence des théories des cordes, ouvre tout un panel de possibilités quant à la propagation des champs dans les dimensions supplémentaires. Il existe d'un côté les modèles de types *Universal Extra-Dimensions*, dits UED [49], dans lesquels tous les champs sont autorisés à se propager dans l'ensemble des dimensions. A l'opposé de ces modèles, se trouvent ceux de type *Arkani-Hamed, Dimopoulos & Dvali*, dits ADD, [50, 51, 52] dans lesquels uniquement la gravitation peut se propager dans les dimensions supplémentaires (communément appelé *bulk*), alors que les champs du modèle standard sont confinés sur notre espace-temps à $(3 + 1)-$dimensions (communément appelé *brane*). A la lisière de ces deux modèles se trouvent des modèles intermédiaires dans lesquels uniquement les champs de jauges peuvent se propager dans le bulk [53, 54, 55]. Dans les modèles UED et ADD, la géométrie des dimensions est généralement choisie plate, il existe cependant des modèles à dimensions supplémentaires dans lesquels la géométrie des dimensions supplémentaires n'est plus plane mais prend une géométrie de type AdS. Dans ces modèles de type Randall-Sundrum [40], que nous dénommerons par les initiales RS ou l'anglicisme *warpé*, les géométries sur la brane et dans les dimensions supplémentaires sont de plus enchevêtrées l'une à l'autre et plusieurs configurations existent dans lesquelles un plus ou moins grand nombre de champs peuvent se propager dans les dimensions supplémentaires.

3.4.1 La tour de Kaluza-Klein

Une des particularités des théories de Kaluza-Klein est l'apparition de toute une zoologie de particules correspondant aux excitations des champs, qui peuvent être ceux du modèle standard, dans les dimensions supplémentaires : à chaque particule est associé un spectre discret de particules, appelé *tour de Kaluza-Klein*, dû uniquement à la présence des dimensions supplémentaires.

Pour comprendre ce point, prenons l'exemple très simplifié d'une particule scalaire, de masse m se propageant dans un espace-temps avec 1 dimension spatiale étendue x et une dimension temporelle t. La propagation de cette particule est décrite par l'équation de Klein-Gordon

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + m^2\psi \tag{3.9}$$

dont le spectre en énergie est donné par $E^2 = p^2 + m^2$ où E et p sont l'énergie et l'impulsion, valeurs propres des opérateurs $i\partial_t$ et $i\partial_x$. Ajoutons maintenant une dimension spatiale compactifiée y à ce modèle et supposons, toujours par souci de simplification, que cette dimension est un cercle de rayon R. L'équation de Klein-Gordon prend alors la forme suivante

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + m^2\psi \tag{3.10}$$

dont la résolution devra faire intervenir l'énergie E et l'impulsion p_x suivant la dimension étendue ainsi que p_y suivant la dimension compactifiée. Or, la compactification de la dimension y implique des conditions aux limites périodiques quant à la fonction d'onde $\psi(y) = \psi(y + 2\pi R)$ et l'impulsion p_y est donc quantifiée de manière à respecter les conditions aux limites : $p_y = n/R$ avec $n \in \mathbb{N}$. Le spectre en énergie se décompose en une partie continue, *i.e.* la partie du modèle standard, et une partie discrète, *i.e.* la tour de Kaluza-Klein, $E^2 = p_x^2 + n^2/R^2 + m^2$. La particule du modèle standard correspond alors à l'excitation d'ordre 0 de la tour de Kaluza-Klein, et donc de masse m, tandis que les particules de Kaluza-Klein sont les excitations d'ordre supérieur et auxquelles une masse $m_{KK} = \sqrt{m^2 + n^2/R^2}$ est associée. Ces excitations d'ordre supérieur à 0 apparaissent bien comme des particules de masse m_{KK} et non comme une particule du modèle standard avec une impulsion $p_y = n/R$ suivant la dimension supplémentaire, tout d'abord car un détecteur de particule ne sera pas sensible à la composante extra-dimensionnelle de l'impulsion, apparaissant donc comme une énergie de masse ; ensuite, comme nous le verrons dans le chapitre 10, pour des raisons de symétrie qui interdisent les transitions de ces excitations vers la particule du modèle standard correspondante.

La taille caractéristique des dimensions supplémentaires devant être bien inférieure aux échelles de longueur sondées par les collisionneurs les plus énergétiques, il est raisonnable de se donner comme ordre de grandeur pour R le TeV^{-1} ou le dixième de TeV^{-1}. Avec une telle taille caractéristique, l'énergie associée est de l'ordre de $1/R \sim$TeV et le terme de masse initiale m, au maximum de l'ordre de grandeur de l'échelle électro-faible, devient négligeable : la masse des particules de Kaluza-Klein est donc approximativement $m_{KK} \simeq n/R \sim$TeV. Avec une telle masse, ces particules n'ont pu être détectées auprès des collisionneurs, mais, comme nous le verrons dans les chapitres suivants, leurs caractéristiques peuvent être contraintes par des observations cosmologiques. Cependant, cet ordre de grandeur reste extrêmement approximatif et ce pour différentes raisons : nous supposons ici que tous les champs, et en particulier ceux du modèle standard, peuvent se propager dans l'ensemble des dimensions supplémentaires, ce qui entraîne une très forte contrainte sur leur taille caractéristique. De plus, le modèle précédent ne comporte qu'une seule dimension supplémentaire avec une géométrie très simple et ne se soucie pas d'une construction cohérente d'une théorie des particules avec dimensions supplémentaires prenant en compte l'ensemble des interactions connues. Finalement, la condition $R < \mathrm{TeV}^{-1}$ a été choisie car cela correspond à l'échelle de longueur associée à l'énergie dans le centre de masse proton/antiproton du Tévatron, ce qui est bien supérieur à l'énergie dans le centre de masse parton/parton, qui est celle qui a du sens pour déterminer l'échelle de longueur sondée. L'intérêt de ce *petit* modèle réside donc essentiellement dans sa simplicité et sa capacité à établir clairement le principe des théories de Kaluza-Klein.

3.4.2 Le modèle ADD et le problème de la Hiérarchie

Il existe de nombreux modèles avec dimensions supplémentaires et ce paragraphe, comme une grande partie du travail présenté par la suite, se limite à ceux de type ADD car ils permettent d'une part de résoudre géométriquement le problème de la hiérarchie et offent d'autre part une riche phénoménologie des trous noirs. En effet si l'on se place dans le cadre du modèle standard de la physique des particules, il existe deux échelles d'énergie à prendre en compte : l'échelle électro-faible $M_{EW} \simeq 100$ GeV correspondant à l'unification électro-faible et l'échelle de Planck à quatre dimensions $M_{Pl} \simeq 10^{19}$ GeV, correspondant à l'échelle à laquelle la gravitation s'unifie aux autres interactions fondamentales. S'il est possible d'unifier l'ensemble des interactions fondamentales, il ne semble pas esthétiquement naturel que ces deux échelles soient séparées de dix-sept ordres de grandeur. De plus, les divergences apparaissant dans le calcul perturbatif à une boucle de la masse du Higgs sont quadratiques, voir quartiques dans certains modèles, en échelle de coupure ultra-violette. Une stabilisation de cette masse à des ordres perturbatifs plus élevés requiert donc un ajustement fin de l'échelle à haute énergie, qui n'a donc *a priori* aucune raison d'être prise égale à l'échelle de Planck [56]. Enfin, supposer que cette échelle est bien une échelle fondamentale de la nature revient à supposer que l'interaction gravitationnelle reste identique sur 33 ordres de grandeur : la gravitation n'a été testée expérimentalement que jusqu'à l'échelle du centimètre $\sim 10^{33}\ell_{Pl}$, ce qui n'est pas le cas de l'interaction électro-faible qui est testée expérimentalement jusqu'à l'échelle électro-faible. Ce problème, dit de hiérarchie, peut être résolu en définissant un mécanisme qui abaisse l'échelle de Planck à une valeur proche de celle de l'échelle électro-faible.

Les modèles ADD se basent sur cette approche : le fait que l'échelle de Planck soit si élevée provient du fait que l'interaction gravitationnelle possède une faible intensité en comparaison des autres interactions, *i.e.* la constante de Newton G est très faible. Cependant, si la gravitation seule peut se propager dans l'ensemble des dimensions, nous avons accès à l'échelle de Planck uniquement sur le brane alors que nous avons accès à l'échelle électro-faible dans son ensemble puisque les champ du modèle standard sont confinés sur le brane. Autrement dit, la constante de Newton est si faible parce que nous ne mesurons que sa projection à quatre dimensions, mais l'échelle de Planck doit être donnée en utilisant la constante de Newton sur l'ensemble des dimensions. Notons D le nombre total de dimensions, M_D l'échelle de Planck à $D-$dimensions et V le volume des dimensions supplémentaires compactifiées, il est possible de relier M_D à M_{Pl} via le théorème de Gauss [50] :

$$M_D = \left(\frac{M_{Pl}^2}{V}\right)^{\frac{1}{D-2}}. \tag{3.11}$$

Dans un tel modèle, selon le nombre de dimensions supplémentaires et leur taille, *i.e* leur rayon de compactification, il est possible d'abaisser l'échelle de Planck $D-$dimensionnelle à l'ordre du TeV, pour $D \geq 6$, sans être en contradiction avec les données expérimentales. En supposant que toutes les dimensions supplémentaires ont une géométrie plane et sont de même taille, cela aboutit, en fonction du nombre de dimensions, à des rayons de compactification allant de quelques fermis à une fraction de millimètre. Ces modèles, bien que résolvant le problème de la hiérarchie de façon élégante, supposent qu'il est possible de confiner les champs du modèle standard sur le brane. Trouver un tel mécanisme représente la partie non triviale [50, 51, 52] et, d'une certaine manière, le problème de la hiérarchie se retrouve transposé sur un problème de dimensionnalité : pourquoi l'Univers a-t-il, par exemple, 8 dimensions de la taille du nanomètre[5] ?

[5]Solution à tous les problèmes de financement.

Deuxième partie

Mécanique Quantique et trous noirs : au-delà de la Relativité Générale

Chapitre 4

Les trous noirs s'évaporent

Lorsque la Mécanique Quantique se mêle à la Relativité Générale, les trous noirs ne sont pas si noirs. En effet, c'est en 1974 que Stephen Hawking montra que ces objets émettent un flux de particules et que, par conservation de l'énergie, ils perdent également de la masse. Ceci conduisit Hawking à conclure que les trous noirs s'évaporent [57, 58].

Il existe plusieurs façons de dériver le flux d'émission des trous noirs : le calcul exact [59], ou semi-classique [60, 61, 62], de la densité d'états à l'infini du trou noir ; le calcul semi-classique de la probabilité tunnel de traverser l'horizon de l'intérieur vers l'extérieur [63] ; l'existence d'un instanton dans l'extension euclidienne de la géométrie de Schwarzschild [64] ou encore la détermination du bruit du vide sur un détecteur non-inertiel [65]. Quelque soit la méthode utilisée, le phénomène fait appel au comportement particulier de la Mécanique Quantique en espace-temps courbe. Dans ce chapitre, la méthode développée par Unruh permettant d'obtenir le flux à l'infini pour un trou noir éternel [66] est revisitée et les étapes usuellement passées sous silence décrites. Nous nous pencherons ensuite sur la loi d'évaporation ainsi que sur la thermodynamique des trous noirs.

Par souci de simplicité, nous nous contenterons du cas de particules scalaires de masse nulle émises par un trou noir de Schwarzschild. Les constantes fondamentale $\hbar$, c, k_B et G seront prises égales à un.

4.1 Quantification du champ scalaire

La théorie quantique des champs en espace courbe est une théorie semi-classique. En effet, il s'agit quantifier tous les champs présents sauf le champ gravitationnel. Cependant, tous les champs se déplaceront dans un espace courbé par la présence d'objets gravitationnels comme un trou noir.

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il existait plusieurs systèmes de coordonnées ayant un sens physique et permettant de décrire la physique d'un trou noir. Le choix des coordonnées est un point essentiel lors de la quantification car un état vide différent peut être associé à chaque système considéré et parmi ces différents vides, un seul correspondra à l'état fondamental. Dans le cas de l'évaporation des trous noirs, les coordonnnées de Schwarzschild joue un rôle puisque la variable temporelle est aussi le temps propre d'un observateur infiniment loin du trou noir. Par ailleurs, le système de Kruskal joue lui aussi un rôle car il est régulier sur l'ensemble de l'espace-temps de Schwarzschild.

Avant de justifier quel système de coordonnées sera préférentiellement utilisé, les différents critères permettant de choisir l'état fondamental parmi les différents états vides ainsi que quelques considérations de symétrie seront présentés. Puis la quantification du champ pour un observateur lointain et pour un observateur en chute libre sera abordée.

4.1.1 Choix de l'état vide en théorie quantique des champs en espace courbe

Une particularité de la théorie quantique des champs en espace courbe est l'apparition d'états vides différents selon l'observateur considéré. En effet, à un changement d'observateur, non-inertiel, correspond un changement, non-lorentzien, du système de coordonnées, en particulier de la coordonnée de type temps, et donc une nouvelle manière de définir les excitations d'énergie positive du champ. Ainsi, l'état fondamental, vide d'excitation, va changer d'un observateur à un autre et il n'existe pas d'état vide canonique comme dans un espace-temps Minkowskien. Cette particularité amène à se poser toujours la même question lorsque l'on aborde le comportement d'un champ quantique en espace courbe : quel état vide correspond à l'état fondamental ?

Plusieurs critères existent pour répondre à cette question. Tout d'abord, si l'espace présente un vecteur de Killing de type temps global, il est aisé d'utiliser un système de coordonnées ayant comme coordonnée temporelle celle associé au vecteur de Killing pour définir les énergies positives et négatives et par conséquent appliquer aisément la procédure de seconde quantification, qui se fait sur des *tranches* à temps fixé. Cependant, dans un espace-temps donné, il n'est pas toujours possible de définir un vecteur de Killing de type temps partout. Dans ce cas, il faut alors chercher un système de coordonnées relatif à un vecteur de Killing dans une région donnée de l'espace-temps considéré : un vecteur de Killing sur l'horizon d'un trou noir par exemple, ou bien, pour un espace-temps asymptotiquement plat, le sytème de coordonnées pour un observateur à l'infini dont le temps donnera un vecteur de Killing de type temps à l'infini. Il est aussi possible de choisir l'état fondamental en exigeant qu'il soit invariant sous certaines transformations, en particulier les isométries de l'espace-temps considéré. Enfin, il est aussi adéquat de se donner des critères permettant d'exclure les états vides comme état fondamental. Par exemple, il faudra que le tenseur énergie-impulsion sur l'état choisi ne diverge en aucun point régulier de l'espace-temps. Ce dernier point est particulièrement bien illustré dans le cas des trous noirs : en choisissant l'état fondamental comme l'état vide relatif à un observateur à l'infini du trou noir, le tenseur énergie-impulsion diverge à l'horizon, qui n'est pourtant pas une région singulière. Il faut donc choisir un autre état vide, qui s'avère être celui de l'observateur en chute libre, pour définir l'état fondamental.

4.1.2 Quelques considérations de symétrie

Quantifier un champ scalaire libre se propageant dans un espace courbe nécessite tout d'abord de bien étudier les symétries de l'espace-temps considéré afin d'obtenir une décomposition judicieuse du champ scalaire. Cette décomposition judicieuse consiste à écrire le champ sous forme d'états propres dont les valeurs propres associées sont les constantes du mouvement, données par les vecteurs de Killing du problème. A ces constantes du mouvement, correspond un ensemble d'opérateurs.

Pour un trou noir de Schwarzschild, il existe plusieurs vecteurs de Killing qui permettent de définir les quantités conservées correspondant à des observables physiques pour un observateur infiniment loin du trou noir. Tout d'abord, nous pouvons considérer le vecteur de type temps $\xi^{\mu}_{(t)}$ tel que $\xi^{\mu}_{(t)}\partial_{\mu} = \partial_t$ qui permet de définir des fréquences normales qui seront l'énergie des particules pour un observateur lointain. S'ajoutent à ce vecteur les vecteurs $\xi^{\mu}_{(\varphi)}$ ainsi que les vecteurs $\xi^{\mu}_{(1)}$ et $\xi^{\mu}_{(2)}$ définis respectivement par $\xi^{\mu}_{(\varphi)}\partial_{\mu} = \partial_{\varphi}$, $\xi^{\mu}_{(1)}\partial_{\mu} = \sin\varphi\partial_{\theta} + \cot\theta\cos\varphi\partial_{\varphi}$ et $\xi^{\mu}_{(2)}\partial_{\mu} = -\cos\varphi\partial_{\theta} + \cot\theta\sin\varphi\partial_{\varphi}$, permettant de définir le moment angulaire [4]. Il est alors possible de décomposer le champ sous forme d'état propre de fréquence normale $e^{-i\omega t}$ et de moment angulaire $Y^{\ell}_{m}(\theta, \phi)$.

Cependant, il existe un autre vecteur de type temps η^{μ} qui est un vecteur de Killing sur l'horizon passé du trou noir. Il est alors possible de définir des fréquences normales, différentes des précédentes, à partir de ce vecteur de Killing défini par $\eta^{\mu}\partial_{\mu} = \partial_{U_K}$, où U_K est la coordonnnées de type lumière de Kruskal [66]. Ces fréquences normales sont celles mesurées par un observateur en chute libre.

4.1.3 Quantification pour un observateur lointain

Le champ Φ va être quantifié suivant les états propres d'énergie mesurés par un observateur à l'infini. Ils faut donc résoudre l'équation de Klein-Gordon dont les solutions $\Phi_{\omega,\ell,m}(t,r,\Omega)$ seront les états propres d'énergie :

$$\Phi^{;\mu}_{\ ;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi_{\omega,\ell,m}(t,r,\Omega)\right) = 0. \tag{4.1}$$

Le système étant à symétrie sphérique, les solutions se décomposent naturellement suivant les harmoniques sphériques $\Phi_{\omega,\ell,m}(t,r,\Omega) \propto R_{\omega,\ell}(r)Y^\ell_m(\Omega)e^{-i\omega t}$, la partie radiale vérifiant[1] :

$$\left[\frac{h(r)}{r^2}\frac{d}{dr}r^2h(r)\frac{d}{dr} + \omega^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\ell\,(\ell+1)}{r^2}\right]R_{\omega,\ell}(r) = 0. \tag{4.2}$$

En négligeant le potentiel effectif $V^2_{\text{eff}} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$, les fonctions d'ondes sont alors des ondes sphériques $R_{\omega,\ell,m}(r)e^{-i\omega t} \propto \frac{e^{-i\omega u}}{r} + \frac{e^{-i\omega v}}{r}$. Le mode u représente les ondes sortant du trou noir (*outgoing mode*) alors que le mode v représente les ondes entrantes (*ingoing mode*).

Pour un observateur lointain, le champ scalaire peut donc être quantifié ainsi :

$$\Phi \propto \sum_{\ell,m}\int d\omega Y^\ell_m(\Omega)\left[b_{\omega,\ell,m}\Phi^{outgoing}_{\omega,\ell,m} + d_{\omega,\ell,m}\Phi^{ingoing}_{\omega,\ell,m} + \text{H.C.}\right]. \tag{4.3}$$

Ce qui permet de définir un premier état vide par : $b_{\omega,\ell,m}\left|0_{\mathcal{M}}\right\rangle = d_{\omega,\ell,m}\left|0_{\mathcal{M}}\right\rangle = 0$ ($b_{\omega,\ell,m}$ et $d_{\omega,\ell,m}$ étant les opérateurs d'annihilation).

Lors de cette quantification, les fréquences ω sont définies par la dérivée partielle $\partial_t\Phi_\omega = -i\omega\Phi_\omega$, où t est le temps défini dans la métrique de Schwarzschild. *Ces fréquences représentent donc les fréquences positives pour un observateur placé à l'infini du trou noir.* Cependant, cette quantification présente plusieurs problèmes [66] :

- un détecteur en chute libre ne sera pas sensible à ces fréquences mais à celles définies par la dérivée ∂_τ, où τ est le temps propre du détecteur ;
- un mode s'échappant d'une étoile en effondrement gravitationnel n'aura pas une fréquence positive définie vis à vis de ∂_t ;
- la dérivée du propagateur de Feynman sera singulière au niveau de l'horizon conduisant à une divergence du tenseur énergie-impulsion dans cette région d'espace-temps..

4.1.4 Quantification pour un observateur en chute libre

La quantification du champ scalaire pour un observateur à l'infini présente des difficultés et il est donc nécéssaire de choisir un autre système de coordonnées dans lequel la quantification ne présentera pas tous ces inconvénients. *Compte-tenu du principe d'équivalence, il semble naturel que le référentiel le plus adapté pour décrire la physique de ce champ soit le référentiel de l'observateur en chute libre.*

Les fréquences positives sont donc définies par la dérivée partielle par rapport aux coordonnées de Kruskal : $\partial_{U_K}\Phi^K_{\omega_K} = -i\omega_K\Phi^K_{\omega_K}$. Et le champ scalaire est quantifié de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Phi \quad \propto \quad & \sum_{\ell,m}\int d\omega_K\left[a_{\omega_K,\ell,m}Y^\ell_m(\Omega)\frac{e^{-i\omega_K U_K}}{r} + a^\dagger_{\omega_K,\ell,m}{Y^\ell_m}^\dagger(\Omega)\frac{e^{i\omega_K U_K}}{r}\right] \\ & +ingoing\ modes,\end{aligned} \tag{4.4}$$

définissant un nouvel état vide par : $a_{\omega_K,\ell,m}\left|0_{\mathcal{U}}\right\rangle = 0$, qui est différent de celui présenté dans le paragraphe précédent.

[1] La dérivation complète de cette équation, qui n'est pas indispensable dans ce chapitre, est donnée dans le chapitre 5.1.1.

Cette quantification ne présente aucun des désavantages relatifs à la quantification vis à vis de l'observateur lointain et de nombreux arguments plaident en sa faveur : les modes Φ^K sont des modes propres de l'opérateur ∂_{U_K} sur l'horizon passé, *i.e.* la surface décrivant les modes sortant au niveau de l'horizon du trou noir, et ils définissent les fréquences positives auxquelles sera sensible un détecteur en chute libre ainsi qu'un état vide invariant par translation dans le temps. *Pour toutes ces raisons, l'état fondamental $|0_{\mathcal{U}}\rangle$ sera choisi comme état de base du champ plutôt que l'état $|0_{\mathcal{M}}\rangle$.*

4.2 Le spectre d'émission d'un trou noir

Le fait que les trous noirs émettent un flux de particules tient essentiellement dans la relativité des opérateurs de création/annihilation. En effet, ces derniers permettent la création ou la destruction d'une excitation à une fréquence donnée. Or ces fréquences ω sont définies comme la variable conjuguée d'une coordonnée temporelle x^0 : elles sont les valeurs propres de l'opérateur $i\partial_0$. En décomposant le champ suivant une base de fréquences normales données, ces dernières ne décrirons l'énergie d'une particule que pour un observateur dont le temps propre coïncide avec la coordonnée x^0. Les opérateurs de création/annihilation d'excitations du champ à une énergie donnée, *i.e.* à une fréquence normale donnée, sont alors relatives au système de coordonnées choisi. En ce qui concerne la radiation de Hawking, un observateur à l'infini sera sensible aux excitations par rapport au temps de Schwarzschild t. Pourtant, l'état fondamental est défini comme vide d'excitations par rapport au temps de Kruskal, c'est à dire par rapport aux fréquences auxquelles un observateur en chute libre est sensible. Ainsi, il se peut que l'état fondamental ne soit pas vide d'excitations auxquelles un observateur à l'infini est sensible.

Dans cette partie, nous décrirons tout d'abord comment obtenir ce flux puis nous détaillerons ensuite la méthode développée par Unruh. Comme nous nous intéressons ici aux particules émises par le trou noir, seuls les modes sortants sont à prendre en considération. Nous omettrons donc les indices *ingoing* et *outgoing*.

4.2.1 Définition de ce spectre

Nous venons de voir que l'état fondamental devait être l'état vide relatif à un observateur en chute libre $|0_{\mathcal{U}}\rangle$. Pourtant un détecteur placé à l'infini sera sensible aux quanta de fréquence positive définie par la dérivée partielle par rapport à son temps propre ∂_τ. Autrement dit, un détecteur placé à l'infini sera sensible aux quanta obtenus par application des opérateurs $b_{\omega,\ell,m}$ et $b^\dagger_{\omega,\ell,m}$ (que nous appellerons quanta de Minkowski).

Pour connaître le flux de particules, il convient alors de déterminer le nombre de quanta de Minkowski présents dans l'état fondamental $|0_{\mathcal{U}}\rangle$:

$$\frac{dN}{d^3k dt} = \langle 0_{\mathcal{U}}| \, b^\dagger_{\omega,\ell,m} b_{\omega,\ell,m} \, |0_{\mathcal{U}}\rangle \, , \tag{4.5}$$

où $\vec{k}$ représente l'impulsion de la particule émise. Pour un champ scalaire sans masse, le terme d'espace de phase sera $d^3k = 4\pi\omega^2 d\omega$.

4.2.2 La transformation de Bogoljubov

Pour calculer le flux, il est necessaire de déterminer le lien entre les opérateurs création/annihilation $b_{\omega,\ell,m}$ et les opérateurs $a_{\omega_K,\ell,m}$. La tâche est délicate car un mode $\Phi^K_{\omega_K,\ell,m}$ de fréquence positive ω_K est une combinaison des modes $\Phi_{\omega,\ell,m}$ pour des valeurs de ω positives et négatives.

Unruh a développé une méthode permettant de quantifier le champ vis à vis d'un observateur en chute libre mais suivant une base de fréquence ω et non ω_K. Cette méthode consiste à imposer une quantification à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de l'horizon. Soient les fonctions :

$$_{out}\Phi_{\omega,\ell,m} = \Phi_{\omega,\ell,m}\Theta(r-2M) \quad \text{et} \quad {}_{in}\Phi_{\omega,\ell,m} = \Phi_{\omega,\ell,m}\Theta(2M-r), \tag{4.6}$$

où M est la masse du trou noir. ${}_{out}\Phi_{\omega,\ell,m}$ est donc nulle à l'intérieur de l'horizon et ${}_{in}\Phi_{\omega,\ell,m}$ à l'extérieur de l'horizon.

Pour un observateur lointain, le champ se quantifie donc de la manière suivante :

$$\Phi \propto \sum_{\ell,m} \int d\omega \left[{}_{out}b_{\omega,\ell,m}\ {}_{out}\Phi_{\omega,\ell,m} + {}_{in}b_{\omega,\ell,m}\ {}_{in}\Phi_{\omega,\ell,m} + \text{H.C.}\right] \tag{4.7}$$

et l' état $|0_{\mathcal{M}}\rangle$ est annulé par les opérateurs ${}_{out}b_{\omega,\ell,m}$ et ${}_{in}b_{\omega,\ell,m}$.

Il peut être montré [66] que la fonction $\widehat{\Phi}_{\omega,\ell,m}$, définie par

$$\widehat{\Phi}_{\omega,\ell,m} = \frac{e^{2\pi M\omega}{}_{out}\Phi_{\omega,\ell,m} + e^{-2\pi M\omega}{}_{in}\Phi_{\omega,\ell,m}}{\sqrt{2\sinh\left(4\pi M\omega\right)}}, \tag{4.8}$$

est une combinaison linéaire des fonctions $\Phi^K_{\omega_K,\ell,m}$ pour les fréquences ω_K strictement positives. Le champ peut donc être quantifié suivant les modes $\widehat{\Phi}_{\omega,\ell,m}$ mais tout en restant une quantification vis à vis d'un observateur en chute libre :

$$\Phi \propto \sum_{\ell,m} \int d\omega \left[\widehat{a}_{\omega,\ell,m}\widehat{\Phi}_{\omega,\ell,m} + \widehat{a}^{\dagger}_{\omega,\ell,m}\widehat{\Phi}^{*}_{\omega,\ell,m} + \text{H.C.}\right], \tag{4.9}$$

avec l'état fondamental $|0_{\mathcal{U}}\rangle$ annulé par l'opérateur $\widehat{a}_{\omega,\ell,m}$.

On obtient donc la transformation de Bogoljubov suivante :

$$\widehat{a}_{\omega,\ell,m} = \begin{cases} p(\omega)_{out}b_{\omega,\ell,m} + p(-\omega)_{in}b_{\omega,\ell,m} & \text{pour} \quad \omega > 0 \\ p(\omega)_{out}b^{\dagger}_{\omega,\ell,m} + p(-\omega)_{in}b^{\dagger}_{\omega,\ell,m} & \text{pour} \quad \omega < 0, \end{cases} \tag{4.10}$$

avec les coefficients $p(\omega)$ donnés par la projection de $\widehat{\Phi}_{\omega,\ell,m}$ sur ${}_{out}\Phi_{\omega,\ell,m}$ et ${}_{in}\Phi_{\omega,\ell,m}$, soit $p(\omega) = e^{2\pi M\omega}/\left(2\sinh\left(4\pi M\omega\right)\right)^{1/2}$. Sachant que pour un champ scalaire $a_\omega = -a^{\dagger}_{-\omega}$, la transformation de Bogoljubov inverse est la suivante :

$${}_{out}b_{\omega,\ell,m} = \frac{1}{p^2(\omega) - p^2(-\omega)}\left[p(\omega)\widehat{a}_{\omega,\ell,m} + p(-\omega)\widehat{a}^{\dagger}_{\omega,\ell,m}\right]. \tag{4.11}$$

Le spectre d'émission du trou noir se déduit alors directement de la transformation de Bogoljubov

$$\frac{dN}{d^3k dt} = \frac{p^2(-\omega)}{\left(p^2(\omega) - p^2(-\omega)\right)^2}\langle 0_{\mathcal{U}}|\,\widehat{a}_{\omega,\ell,m}\widehat{a}^{\dagger}_{\omega,\ell,m}\,|0_{\mathcal{U}}\rangle = \frac{1}{e^{8\pi M\omega} - 1} \tag{4.12}$$

et *suit une loi de corps noir à une température* $T_H = \frac{1}{8\pi M}$.

De manière plus rigoureuse, la loi d'émission d'un trou noir est une loi de corps gris car nous avons négligé le potentiel effectif V_{eff}. La loi de corps noir est donc multipliée par un facteur de corps gris $\Gamma(\omega, M)$ dépendant de l'énergie et du spin des particules émises et de la masse du trou noir : $\frac{d^2N}{d\omega dt} = \frac{\Gamma(\omega,M)}{e^{8\pi M\omega}-1}$. D. Page a calculé la valeur de ce facteur pour des champs scalaires, bispinoriels et vectoriels [67, 68, 69] pour des trous noirs de Schwarzschild, de Kerr et de Reisner-Nordström. Une étude détaillée de ces facteurs de corps gris et leur calcul exact sont les objets principaux de cette thèse et seront donc abordés dans la suite de ce manuscrit.

Il est important de noter que la présence d'un horizon est nécessaire pour que ce processus de radiation ait lieu. Autrement dit, la Terre ou même des étoiles supermassives n'émettent pas de particules par ce processus.

4.3 L'état quantique

La transformation de Bogoljubov permet, en plus de définir le spectre d'émission d'un trou noir, de trouver le lien entre l'état vide $|0_{\mathcal{U}}\rangle$, que nous appelerons vide de Unruh, et l'état vide de Minkowski $|0_{\mathcal{M}}\rangle$.

La relativité des opérateurs création/annihilation permet de construire deux bases orthonormées distinctes de l'espace des états physiques. La première s'obtient par l'application des opérateurs $\widehat{a}_{\omega,\ell,m}$ sur l'état vide de Unruh et la seconde par application des opérateurs ${}_{in}b_{\omega,\ell,m}$ et ${}_{out}b_{\omega,\ell,m}$ sur l'état vide de Minkowski.

L'état vide de Unruh peut donc se décomposer sur la base des quanta de Minkowski $|0_{\mathcal{U}}\rangle = \prod\limits_{\omega_{out},\omega_{in}} \sum\limits_{n,m} \alpha_{n,m} \left|{}_{out}n_{\omega_{out}}, {}_{in}m_{\omega_{in}}\right\rangle$. En appliquant l'opérateur $\widehat{a}_{\omega,\ell,m}$ sur $|0_{\mathcal{U}}\rangle$ et en tirant parti de la transformation de Bogoljubov, on obtient la relation suivante :

$$0 = \left\{ \begin{array}{c} \sum\limits_{n,m} \Big[p(\omega)\sqrt{n}\alpha_{n,m} \left|{}_{out}(n-1)_{\omega}, {}_{in}m_{-\omega}\right\rangle \\ -p(-\omega)\sqrt{m+1}\alpha_{n,m} \left|{}_{out}n_{\omega}, {}_{in}(m+1)_{-\omega}\right\rangle \Big], \end{array} \right. \tag{4.13}$$

sachant que ${}_{in}b_{\omega,\ell,m} = -\, {}_{in}b^{\dagger}_{-\omega,\ell,m}$. Comme il s'agit d'une base orthonormée, nous aboutissons à la relation de récurrence suivante :

$$p(\omega)\sqrt{n+1}\alpha_{n+1,m} - p(-\omega)\sqrt{m}\alpha_{n,m-1} = 0, \tag{4.14}$$

ce qui, plus généralement, donne :

$$\text{pour tout } (n_0, m_0) \qquad \alpha_{n_0+n,m_0+n} = e^{-n4\pi M\omega}\alpha_{n_0,m_0}. \tag{4.15}$$

Les termes $\alpha_{n,0}$ sont de la forme :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } n = 0 & \alpha_{1,1} = e^{-4\pi M\omega}\alpha_{0,0}, \\ \text{pour tout } n \neq 0 & \alpha_{n,0} \left|{}_{out}(n-1)_{\omega}, {}_{in}0_{\mathcal{M}}\right\rangle = 0, \end{array} \tag{4.16}$$

donnant $\alpha_{n,0} = 0$, pout tout n non-nul. Compte tenu de la relation de récurrence (4.14), seuls les termes diagonaux $\alpha_{n,n}$ seront non-nuls. Après normalisation, l'état quantique se décompose donc ainsi :

$$|0_{\mathcal{U}}\rangle = \prod_{\omega}\sum_{n} e^{-n\frac{\omega}{2T_H}} \left|{}_{out}n_{\omega}, {}_{in}n_{-\omega}\right\rangle, \tag{4.17}$$

avec T_H la température de Hawking définie dans le chapitre 4.2. L'état quantique correspond bien à un état thermique. Cependant, il n'y a pas de thermalisation explicite des particules mais plutôt une *polarisation* du vide qui prend l'apparence d'un état thermique. Le rôle des fluctuations du vide apparaît très clairement sur cet état quantique : à un nombre n de particules d'énergie positive à l'extérieur du trou noir correspond toujours un même nombre de particules d'énergie négative à l'intérieur. L'énergie totale est donc bien nulle mais l'énergie est positive à l'extérieur du trou noir et négative, sans compter la masse du trou noir, à l'intérieur.

4.4 L'évaporation des trous noirs

Nous venons de voir que pour un observateur lointain, un trou noir émet un flux thermique de particules scalaires de masse nulle à une température $T_H = \frac{1}{8\pi M}$. Ce résultat se généralise à tout type de particule (bispinorielle, vectorielle...) tant que la masse de la particule est plus petite que la température du trou noir. Un trou noir va donc émettre toutes les particules élémentaires avec le spectre thermique suivant :

$$\frac{dN_s}{d\omega dt} = \frac{g_s\Gamma(\omega, M, s, \mu)}{e^{\frac{\omega}{T_H}} - (-1)^{2s}}, \tag{4.18}$$

où s est le spin de la particule ; μ sa masse ; g_s son nombre de degrés de liberté interne et $\Gamma(\omega, M, s, \mu)$ le facteur de corps gris. Lorsque l'on passe d'un type de particule à un autre, le facteur de corps gris change peu, la radiation des trous noirs est donc *démocratique*, dans le sens où la probabilité d'émission est presque identique pour toutes les particules au nombre de dégrés de liberté interne près. Par exemple, la probabilité d'émission d'un électron est le double de celle d'un neutrino car l'électron possède deux états d'hélicité alors que le neutrino n'en présente qu'un.

Cependant, un trou noir ne va pas émettre indéfiniment des particules. En effet lors du processus d'émission, la masse du trou noir diminue. Considérons un trou noir isolé de masse initiale M_i et donc de température initiale $T_i = \frac{1}{8\pi M_i}$: ce trou noir va émettre par exemple un photon d'énergie ω et le système atteint un état final $\{$trou noir+photon$\}$. L'énergie étant conservée dans tout système isolé, la masse du trou noir après l'émission du photon doit nécessairement diminuer de ω. Ce trou noir est donc dans un état final avec une masse $M_f = M_i - \omega$ et une température $T_f = \frac{1}{8\pi M_f}$ qui est supérieure à T_i. *Les trous noirs s'évaporent donc en émettant tous les types de particules élémentaires.*

L'évaporation des trous noirs est un processus *explosif.* Un trou noir s'évaporera d'autant plus vite que sa température est élevée. Or la température d'un trou noir évolue comme l'inverse de sa masse. Ces objets s'évaporeront donc de plus en plus vite au cours du temps puisque leur température augmentera au fur et à mesure que leur masse diminue. A titre d'exemple, un trou noir de la masse d'une montagne (soit environ 10^{16} g) a un temps de vie $\tau \simeq 10^{21}$ s, ce qui est supérieur à l'age de l'univers, alors qu'un trou noir de la masse d'une colline (environ 10^9 g) s'évapore totalement en $\tau \simeq 1$ s.

4.5 Thermodynamique des trous noirs

La découverte par Stephen Hawking du rayonnement thermique des trous noirs invita les spécialistes à rechercher une relation entre la thermodynamique et les trous noirs. Le résultat de ces études se résument en quatre principes de la thermodynamique des trous noirs ; principes largement inspirés de ceux de la thermodynamique classique, d'où leur nom.

4.5.1 Vers la thermodynamique des trous noirs

Avant la découverte du rayonnement des trous noirs, il existait déjà des indications allant dans le sens d'un lien entre thermodynamique et trou noir. Wheeler fut le premier à remarquer que pour que le second principe de la thermodynamique reste valable, il était nécessaire d'attribuer une entropie au trou noir. En effet, si un corps, possédant une certaine entropie, est absorbé par un trou noir, l'information est alors perdue et pour un observateur lointain l'entropie diminue. *Pour "restaurer" le second principe de la thermodynamique, il est nécessaire d'attribuer une entropie propre au trou noir.* De plus, un corps absordé par un trou noir transmet, en plus de sa masse, sa charge et son moment angulaire, son entropie, augmentant celle du trou noir d'au moins la quantité emportée par le corps.

Bekenstein remarqua que l'aire d'un trou noir $\mathcal{A}$ se comporte de manière similaire à l'entropie. En effet, d'après le théorème de l'aire énoncé par Hawking, cette quantité ne diminue dans aucun processus classique. Plus précisément, un trou noir à l'équilibre est décrit par trois paramètres : sa masse M, sa charge Q et son moment angulaire J ; et son aire est fonction de ces trois paramètres :

$$\mathcal{A} = 4\pi \left(2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} \right). \tag{4.19}$$

Ainsi, lorsque le trou noir passe d'un état stationnaire à un autre, son aire, son moment angulaire et sa charge variant respectivement de $d\mathcal{A}$, dJ et dQ, sa masse, *i.e.* son énergie interne, varie de :

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} d\mathcal{A} + \Omega dJ + \Phi dQ, \tag{4.20}$$

où $\kappa = 4\pi \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}{\mathcal{A}}$ est la gravité de surface à l'horizon du trou noir, $\Omega = \frac{4\pi J}{M\mathcal{A}}$ sa vitesse angulaire et $\Phi = 4\pi Q \frac{\left(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}\right)}{\mathcal{A}}$ son potentiel électrique.

Cette relation est à comparer au premier principe de la thermodynamique, qui s'énonce de la manière suivante :

$$dE = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ, \tag{4.21}$$

où E représente l'énergie interne du système, T sa température et S son entropie. Les deux derniers termes représentent quant à eux la variation d'énergie de rotation et celle d'énergie électrique. La loi de radiation des trous noirs nous permettant de faire le lien entre la gravité de surface et la température $T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$, les relations (4.20) et (4.21) sont équivalentes si on pose le lien suivant entre l'aire du trou noir et son entropie :

$$S_{BH} = \frac{\mathcal{A}}{4}. \tag{4.22}$$

Cette entropie est communément appelée *entropie de Bekenstein-Hawking*.

Pour un trou noir décrit par sa masse M, sa charge Q et son moment angulaire J, il est alors possible de définir les trois grandeurs thermodynamiques que sont la température, l'énergie interne et l'entropie. Elle sont définies dans le tableau 4.5.1, dans lequel les constantes fondamentales $\hbar$, c, k_b et G sont ré-introduites.

température	$T_H = (\hbar\kappa) / (2\pi k_B c)$
énergie interne	$E_H = Mc^2$
entropie	$S_H = \left(\mathcal{A}c^3\right) / (4\hbar G)$

TAB. 4.1 – Variables thermodynamiques pour un trou noir de masse M, de charge Q et de moment angulaire J

4.5.2 Les quatre principes de la thermodynamique des trous noirs

En se basant sur l'analogie entre trou noir et thermodynamique, Bardeen, Carter et Hawking [70] formulèrent les quatre principes de la thermodynamique des trous noirs :

Principe zéro

La gravité de surface κ d'un trou noir stationnaire est constante sur toute la surface de l'horizon.

L'équilibre thermodynamique n'autorisant pas que différentes parties du système soient à des températures différentes, ce principe postule l'existence d'un état d'équilibre thermodynamique et de température pour un trou noir.

Premier principe

Lorsqu'un système contenant un trou noir passe d'un état stationnaire à un autre, sa masse change de :

$$dM = T_H dS_H + \Omega dJ + \Phi dQ + \delta q, \tag{4.23}$$

où δq est la contribution à la variation de la masse totale due au changement de la distribution stationnaire de matière à l'extérieur du trou noir, les autres termes étant identiques à ceux de la formule (4.20).

Second principe

Dans tout processus classique, l'aire d'un trou noir $\mathcal{A}$, et par conséquent son entropie S_H, ne diminuent pas :

$$\Delta S_H \geq 0. \tag{4.24}$$

Cette loi découle du théorème de l'aire et souligne l'irreversibilité inhérente au système dans son ensemble, définissant ainsi la direction de la flèche du temps. Ce principe signifie que la partie de l'énergie interne du trou noir qui ne peut être extraite augmente nécessairement avec le temps et l'entropie quantifie l'information concernant la structure interne du trou noir que l'on ne peut extraire.

Troisième principe

Il est impossible, quelle que soit la procédure, de réduire la température d'un trou noir à zéro en une série finie d'opérations.

Cela rejoint le troisième principe de la thermodynamique tel que Nernst l'avait énoncé : il est impossible de diminuer la température de tout système jusqu'à la température du zéro absolu en un nombre fini d'opérations. Cependant Planck proposa une version plus forte de ce principe : l'entropie de tout système tend vers une constante qui peut être prise égale à zéro quand la température tend vers zéro. Il est amusant de noter que pour un trou noir, l'entropie tend vers l'infini quand la température tend vers zéro et réciproquement.

4.5.3 Second principe généralisé

Si l'on retourne au processus d'évaporation des trous noirs, il apparaît que le second principe est violé puisque l'aire du trou noir diminue lors de l'évaporation quantique. Cependant, l'évaporation des trous noirs génère un flux thermique de particules en dehors du trou noir et donc une élévation de l'entropie dans l'espace environnant. Il est donc possible que l'entropie *généralisée*, quant à elle, vérifie bien le second principe.

En posant S_m et S_H, l'entropie de la matière environnant le trou noir et celle du trou noir, l'entropie généralisée n'est autre que la somme de ces deux contributions $S = S_m + S_H$. Lors de l'évaporation du trou noir, S_m varie de $dS_m > 0$ et S_H varie de $dS_H < 0$. Zurek et Page ont alors montré la relation suivante [71, 72] :

$$R = -\frac{dS_m}{dS_H} = \frac{4}{3} B_s, \tag{4.25}$$

où B_s est toujours supérieur à $\frac{3}{4}$ et il s'ensuit $\Delta S \geq 0$ lors de l'évaporation du trou noir. Il a aussi été montré que s'il existe une radiation de corps noir à la température T_{rad} à l'extérieur du trou noir, alors l'entropie généralisée augmente encore, excepté dans le cas $T_{rad} = T_H$ où l'accrétion compense exactement l'évaporation. Dans ce cas, l'entropie généralisée reste constante.

Ces résultats constituent une base solide pour postuler un second principe généralisé de la thermodynamique des trous noirs :

Second principe généralisé

Dans tout processus physique concernant un trou noir, l'entropie généralisée S ne diminue pas :

$$\Delta S = \Delta S_m + \Delta S_H \geq 0, \tag{4.26}$$

De nouveau, nous retrouvons ce lien très fort entre "degrés de chaos" de la matière que nous fournit S_m et géométrie du trou noir fournie par S_H. Un tel lien prend sa source dans les équations d'Einstein qui relient les caractéristiques physiques de la matière aux propriétés géométriques de l'espace-temps.

Entropie et paradoxe

La découverte par Bekenstein et Hawking qu'une entropie peut être associée à un trou noir est un thème central de la physique moderne car elle aboutit à deux paradoxes : l'interprétation de la formule de l'aire et la violation de l'unitarité lors de l'évaporation.

Tout d'abord, la formule de l'aire signifie qu'approximativement un degré de liberté se trouve par unité de surface de Planck ℓ_{Pl}^2. Compte tenu de l'extrême petitesse de la valeur de la longueur de Planck, n'importe quel trou noir, exceptés ceux de quelques masses de Planck, possèderait un nombre de degrés de liberté interne immense. Or la Relativité Générale ne prévoit aucun degré de liberté interne aux trous noirs. Deuxièment, le processus d'évaporation des trous noirs remplace petit à petit un trou noir par un bain thermique de particules complètement décohérent[2] : l'état quantique final est un état mélangé. Cependant, lors de l'effondrement gravitationnel donnant naissance au trou noir, l'état initial peut être pur : le processus de Hawking entraînerait la transition d'un état quantique qui peut être pur vers un état quantique nécessairement mélangé, violant ainsi l'unitarité de la théorie quantique.

Ces deux paradoxes jouent un rôle central dans les nouvelles constructions théoriques, qui tentent d'ailleurs d'en fournir une explication. Il semble de plus en plus admis que le processus d'évaporation des trous noirs constitue une expérience de pensée incontounable pour tester la cohérence des nouvelles propositions théoriques. La théorie des cordes et la gravité quantique à boucle arrivent chacune à expliquer l'entropie des trous noirs, du moins dans des cas particuliers, et ce avec des approches complètement différentes. La réussite de la théorie des cordes [73] sur ce sujet est cependant plus aboutie : dans le cas de la gravité quantique à boucle, il est nécessaire d'ajuster la valeur du paramètre de Immirzi pour obtenir le coefficient 1/4 dans la formule de Bekenstein-Hawking[3]. En ce qui concerne le paradoxe de l'information, il est communément admis que l'informations cachées se trouvent dans les corrélations quantiques (à la manière de la cryptographie dont l'information est cachée dans les corrélations entre la clé et le message reçu), qui ne sont malheureusement pas prises en compte dans la description semi-classique usuelle du mécanisme d'évaporation. Il a cependant été montré qu'à un niveau élémentaire de gravité quantique, les processus successifs de formation puis d'évaporation d'un trou noir dans un univers asymptotiquement Anti-de Sitter ne perdent pas d'information, ni de cohérence quantique [74] : en décrivant la gravité à un niveau quantique par une intégrale de chemin, la formation et l'évaporation d'un trou noir peuvent être vues comme un processus de diffusion, qui est unitaire dans un univers AdS.

4.6 Résumé ou comment rendre les chapitres précédents *presque* inutiles

L'évaporation des trous noirs vient du mélange de deux principes fondamentaux de la physique moderne : les fluctuations quantiques du vide, qui proviennent du principe d'incertitude

[2]La cohérence quantique entre les particules issues des fluctuations du vide est perdue.

[3]L'argument peut tout de même être retourné : la relation de Bekenstein-Hawking permet de déterminer le paramètre de Immirzi.

de Heisenberg, et les forces de marées qui illustrent la courbure de l'espace temps engendrée par la présence d'un corps gravitationnel. Il est alors concevable que dans une région de l'espace-temps, les forces de marée soient importantes au point de fournir un travail suffisant pour matérialiser une paire particule/antiparticule issue d'une fluctuation du vide.

Au niveau de l'horizon d'un trou noir, les forces de marée sont très intenses (*i.e.* l'espace est très courbé) et la matérialisation des paires particule/antiparticule est alors possible. Cependant, rien ne prouve que c'est précisément la particule d'énergie positive qui s'échappe pour atteindre un observateur lointain tandis que celle d'énergie négative tombe dans le trou noir[4]. Les études détaillées de ce processus menées par Hawking ont montré qu'il s'agit effectivement de la particule d'énergie négative qui tombe dans le trou noir et de celle d'énergie positive qui s'en échappe pour atteindre l'infini. Mais elles ont aussi montré que la présence d'un horizon est une condition nécessaire pour que ce processus de radiation apparaisse. Enfin, le spectre d'émission des trous noirs a pu être calculé : ce spectre suit une loi de corps gris avec une température $T_H = \frac{1}{8\pi M}$ associée au trou noir. Donc plus le trou noir est léger, plus il est chaud. Ceci se comprend très bien dans la mesure où l'espace-temps au niveau de l'horizon est d'autant plus courbé que le trou noir est léger.

Il est donc maintenant évident qu'un trou noir émet une radiation. Mais, lors de ce processus de radiation, le trou noir absorbe une particule d'énergie négative ; c'est-à-dire que le trou noir perd de l'énergie. Or la masse d'un trou noir étant sa seule source d'énergie, il est nécessaire que le trou noir perde de sa masse en émettant des particules. Autrement dit, un trou noir s'évapore et ce processus est explosif puisque plus le trou noir est léger plus il émet de particules et donc plus il s'évapore vite.

Pour conclure, contrairement à l'adage usuel de la Relativité Générale, les trous noirs pourraient émettre des particules : ils seraient même d'autant plus chaud et lumineux que leur masse est faible. Les principes de la thermodynamique s'appliquent alors aux trous noirs en supplantant la gravité de surface à la température, l'aire à l'entropie et la masse à l'énergie interne.

[4] C'est ici que le *presque* du titre se justifie.

Chapitre 5

Méthodes semi-classiques : application à la théorie de champ en espace courbe

Etudier la propagation de particules sous l'influence d'un champ de gravitation implique de résoudre les équations de la Mécanique Quantique en espace-temps courbe. Dans la plupart des cas, il est impossible de résoudre ces équations de manière analytique et des investigations numériques sont nécessaires. Il est cependant possible d'appliquer certaines méthodes d'approximation afin d'obtenir des résultats, certes approchés, mais permettant néanmoins de déterminer quelques caractéristiques du système. Les méthodes semi-classiques, appelées aussi WKB, font partie de ces techniques couramment utilisées en Mécanique Quantique et nous verrons dans ce chapitre qu'elles peuvent être facilement étendues afin d'étudier la propagation de particules dans un espace-temps de type Schwarzschild, *i.e.* statique et à symétrie sphérique. Dans un premier temps nous expliciterons l'interprétation semi-classique de la partie radiale de l'équation de Klein-Gordon. Puis, dans une deuxième partie, la résolution semi-classique ainsi que le calcul de la probabilité tunnel et du spectre d'énergie, dans cette approche, seront présentés. Finalement, nous appliquerons ces résultats au comportement d'une particule scalaire dans des espace-temps Anti-de Sitter (AdS) et Schwarzschild-Anti-de Sitter (SAdS), *i.e.* trou noir de Schwarzschild avec constante cosmologique négative, afin de dériver, dans le cas AdS, le spectre en énergie des états stationnaires et, dans le cas SAdS, le spectre en énergie des résonances ainsi que leur largeur de bande. Dans ce chapitre, nous ne considèrerons que des particules scalaires.

5.1 Etude dans l'espace de configuration à une particule [110]

5.1.1 Equation d'onde radiale

La dynamique d'un champ scalaire couplé à la gravitation est régie par la généralisation de l'équation de Klein-Gordon en espace-temps courbe. Cette extension s'effectue en remplaçant les dérivations usuelles par rapport aux coordonnées en dérivations covariantes, ce qui donne pour un champ sans masse :

$$\partial^\mu \partial_\mu \Phi \to \Phi^{;\mu}_{\ ;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \right) , \tag{5.1}$$

Dans le cas d'un espace-temps de type Schwarzschild, la métrique de fond prend la forme générale suivante :

$$ds^2 = h(r)dt^2 - \frac{dr^2}{h(r)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2, \tag{5.2}$$

le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et son inverse $g^{\mu\nu}$ s'écrivant, de façon matricielle :

$$g = \begin{pmatrix} h(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h^{-1}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

et

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} h^{-1}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2}(\theta) \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Le déterminant vaut donc $-g = r^4 \sin^2 \theta$. Puisque le tenseur métrique, dans le système de coordonnées de Schwarzschild, est diagonal, l'équation de Klein-Gordon se décompose en une partie temporelle, une partie radiale et une partie angulaire :

$$\left[\frac{r^2 \sin(\theta)}{h} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} r^2 h \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right] \Phi = 0. \tag{5.5}$$

La résolution de l'équation ci-dessus est simplifiée grâce aux symétries des espaces de type Schwarzschild permettant une séparation des variables : les solutions se décomposent en le produit d'états stationnaires, d'états propres de moment angulaire et d'une partie radiale. Les états stationnaires, *i.e.* les états propres de l'opérateur $(\partial_t)^2$, et les états propres de moment angulaire, *i.e.* les états propres de la partie angulaire du laplacien, sont respectivement donnés par les fonctions $e^{-i\omega t}$ et les harmoniques sphériques Y_m^ℓ. En divisant l'équation par $r^2 \sin(\theta)/h$, l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ainsi que la partie angulaire Δ_Ω du Laplacien apparaissent :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{h}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 h \frac{\partial}{\partial r} - \frac{h(r)}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{h(r)}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right] \Phi = 0. \tag{5.6}$$

L'ansatz $\Phi(t, r, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} Y_m^\ell(\theta, \varphi) R(r)$ est alors introduit dans l'équation de Klein-Gordon qui se sépare alors en une équation temporelle, une équation angulaire et une équation radiale. Les solutions *temporelles* sont les états stationnaires et les solutions *angulaires* sont les harmoniques sphériques. Enfin les solutions *radiales* sont données par la fonction R satisfaisant :

$$\frac{h(r)}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 h(r) \frac{dR(r)}{dr} + \left(\omega^2 - h(r) \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) R(r) = 0. \tag{5.7}$$

Dans cette équation, la quantité ω est la valeur propre de la partie temporelle et représente la fréquence normale de l'onde vis-à-vis de la coordonnée t et la quantité $\ell(\ell+1)$ est la valeur propre de l'équation angulaire où ℓ est le nombre quantique de moment orbital.

Les états stationnaires et les harmoniques sphériques étant bien connus, toute la dynamique sera déterminée une fois la partie radiale de l'équation de Klein-Gordon résolue. Ecrite sous la forme (5.7), l'interprétation de chaque terme n'est pas évidente. Cette équation différentielle peut cependant être rendue plus limpide. En effet, en posant $U(r^\star) = rR(r)$ et en introduisant la nouvelle coordonnée radiale *tortoise* $r^\star$, définie telle que $dr^\star = h^{-1}(r)dr$ [1], l'équation précédente

[1] Dans tous les espace-temps que nous considèrerons par la suite, la fonction liant $r^\star$ à r sera une bijection croissante, du moins sur une région causalement connectée. Par exemple, la fonction $f : r \to r^\star = f(r)$ sera une bijection croissante de $[r_H, +\infty[$ dans $]-\infty, +\infty[$ pour des trous noirs de Schwarzschild en espace asymptotiquement plat ou bien une bijection croissante de $[r_H, r_{dS}[$ dans $]-\infty, +\infty[$ pour des trous noirs de Schwarzschild avec constante cosmologique positive ; r_H étant l'horizon du trou noir et r_{dS} l'horizon de Sitter.

prend la forme d'une équation de Schrödinger :

$$-\frac{d^2U}{dr^{\star 2}} + h(r)\left(\frac{\ell\,(\ell+1)}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{dh(r)}{dr}\right)U(r^\star) = -\omega^2 U(r^\star). \tag{5.8}$$

La coordonnée tortoise permet de repousser l'horizon du trou noir en $r^\star \to -\infty$, limitant ainsi l'espace accessible à l'extérieur du trou noir.

Ecrire la partie radiale de l'équation de Klein-Gordon sous cette forme présente quelques avantages. Tout d'abord, elle permet une interprétation physique plus aisée des différents ingrédients : le premier terme du membre de gauche correspond au carré de l'opérateur impulsion, le deuxième terme de ce même membre est un terme de type potentiel et enfin, le membre de droite correspondrait à l'énergie totale. Cependant, on trouve dans la littérature deux interprétations de ce terme de type potentiel. D'une part, il va être interprété comme un potentiel $V(r) = h(r)\left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{dh(r)}{dr}\right)$ et, d'autre part, comme le carré du potentiel $V^2(r) = h(r)\left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{dh(r)}{dr}\right)$. Ce point sera traité plus en détail dans le paragraphe suivant où je donnerai l'interprétation choisie dans la suite de ce travail. Deuxièmement, puisqu'elle prend l'apparence d'une équation de Schrödinger, il sera possible d'adapter les méthodes utilisées en Mécanique Quantique non-relativiste pour résoudre cette équation. En particulier, il est possible d'adapter les approches semi-classiques, qui constitue un outil puissant et relativement simple à mettre en place, pour étudier la propagation de particule dans des potentiels compliqués.

5.1.2 Interprétation semi-classique de l'équation de Klein-Gordon

Nous venons de voir qu'après un changement de variable adéquat, la partie radiale de l'équation de Klein-Gordon dans un espace-temps de type Schwarzschild prenait la forme d'une équation de Schrödinger stationnaire, qui s'écrit sous la forme générale suivante :

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + p^2(\xi)U = 0 \tag{5.9}$$

où p représente l'impulsion et ξ une variable spatiale. Dans le cas d'un problème de Mécanique Quantique non-relativiste, cette fonction s'écrit

$$p^2(\xi) = 2m\left(\omega - V(\xi)\right), \tag{5.10}$$

ω représentant l'énergie de la particule, m sa masse et V le potentiel dans lequel cette dernière évolue. Dans ce cas, la relation de Hamilton-Jacobi non-relativiste, que l'on appellera aussi relation de dispersion pour des problèmes stationnaires, $\mathcal{H} = p^2/2m + V$, $\mathcal{H}$ représentant l'hamiltonien, est bien retrouvée sous forme d'opérateurs.

Pour une particule se propageant dans un espace-temps de type Schwarzschild, l'impulsion revêt la forme suivante

$$p^2(\xi) = \omega^2 - \mathcal{M}(\xi), \tag{5.11}$$

la fonction $\mathcal{M}$ faisant intervenir le moment orbital ainsi que la fonction métrique et sa dérivée première. La similitude avec le cas non-relativiste suggère d'interpréter la fonction $\mathcal{M}$ comme le potentiel effectif vu par la particule scalaire : $\mathcal{M}(\xi) = V_\ell(\xi)$, ℓ étant le nombre quantique de moment orbital. Cette convention est largement adoptée dans l'ensemble des travaux concernant la propagation de champ scalaire en espace-temps de type Schwarzschild, que ce soit pour l'étude des facteurs de corps gris [105, 106] ou celle des modes quasi-normaux des trous noirs (nous renvoyons le lecteur aux références [75, 76] ainsi que celles citées dans ces articles pour une discussion sur les modes quasi-normaux). Il est cependant possible d'interpréter différemment cette fonction sans introduire de modifications quant aux résultats impliquant cette équation différentielle. Cette interprétation « alternative » relève autant d'un souci esthétique que du souhait d'obtenir une relation de dispersion homogène. En effet, nous proposons ici d'interpréter la fonction $\mathcal{M}$ comme le carré du potentiel effectif et non comme le potentiel effectif lui-même, ce qui aboutit à la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 = p^2 + V_\ell^2. \tag{5.12}$$

La relation ci-dessus est donc homogène et se rapproche davantage de la relation de Hamilton-Jacobi pour une particule relativiste, libre et massive, donnée par $\mathcal{H}^2 = p^2 + m^2$. Une interprétation identique est faite pour l'étude du mouvement classique radial d'une particule-test donné par l'équation suivante

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + h(r)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = E^2, \tag{5.13}$$

où E et L représentent respectivement l'énergie et le moment angulaire. La variable τ correspond au temps propre défini par $d\tau^2 = ds^2$. Le second terme du membre de gauche, $h(r)(1+\frac{L^2}{r^2})$, est alors interprété comme le potentiel au carré [116].

Cependant, le choix que nous faisons ne correspond pas à la relation de Hamilton-Jacobi pour une particule relativiste sans masse se propageant dans un potentiel ne dépendant que de l'espace. En effet, la propagation d'une particule massive dans un potentiel purement spatial est décrite par le Lagrangien

$$\mathcal{L}\left(\xi, \dot{\xi}\right) = -m\sqrt{1 - \left(\dot{\xi}\right)^2} + V(\xi), \tag{5.14}$$

aboutissant à la relation de dispersion

$$\mathcal{H} = \dot{\xi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} - \mathcal{L} = \sqrt{p^2 + m^2} + V(\xi), \tag{5.15}$$

où la notation $\dot{\xi}$ signifie la dérivatoin par rapport au temps t. En prenant la masse égale à zéro, le comportement quantique de cette particule devrait alors être décrit par l'équation différentielle

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial \xi} + V(\xi)\right)\psi(\xi, t) = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}(\xi, t). \tag{5.16}$$

L'équation différentielle (5.9) modélisant l'évolution d'un champ scalaire en espace-temps de type Schwarzschild n'est donc pas la version quantique, *i.e.* sous forme d'opérateurs, de la relation de Hamilton-Jacobi (5.15). Pour trouver la déclinaison classique de notre problème, il faut intégrer le fait que ce que nous avons défini comme étant le potentiel, peut être vu comme une masse dépendant de la position. La propagation d'une particule scalaire sans masse dans un espace courbe se ramène, d'un point de vue classique, à celle d'une particule libre, massive et dont la masse dépend de la position. Le Lagrangien classique s'écrit alors en remplaçant le terme de masse par le potentiel :

$$\mathcal{L}\left(\xi, \dot{\xi}\right) = -V(\xi)\sqrt{1 - \left(\dot{\xi}\right)^2}, \tag{5.17}$$

ce qui aboutit à la relation de Hamilton-Jacobi désirée (5.12). L'équation quantique correspondant à cette relation classique est une équation de Klein-Gordon à une dimension dans laquelle la masse dépend de la position

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + V^2(\xi)\right)\psi(\xi, t) = -\hbar^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\xi, t). \tag{5.18}$$

Il peut être vérifié que pour des états stationnaires, *i.e.* $-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(\xi, t) = \omega^2\psi(\xi, t)$, la relation de dispersion (5.12) est bien retrouvée. Si l'on veut se ramener au cas d'un champ scalaire se propageant dans un espace-temps de type Schwarzschild, alors la coordonnée temporelle t de l'équation ci-dessus correspondra au temps de Schwarzschild tandis que la coordonnée spatiale ξ correspondra à la coordonnée tortoise $r^\star$.

Il est important de noter que l'interprétation de la fonction $\mathcal{M}$ ne modifie en rien la résolution de l'équation (5.9), et donc les quantités physiques calculées par la suite comme les sections efficaces d'absorption ou le spectre des modes quasi-normaux, car c'est la fonction $\mathcal{M}$, provenant de la métrique sous-jacente, qui dicte la forme du potentiel et non l'inverse. Il s'agit ici d'une alternative d'interprétation qui permet une meilleure compréhension de l'évolution d'un champ scalaire dans un espace-temps courbe de type Schwarzschild. Par exemple, la fonction $\mathcal{M}$ devient négative en-deça de l'horizon d'un trou noir et le potentiel imaginaire pur, signifiant que l'horizon est un absorbeur parfait.

5.1.3 Resolution semi-classique, spectre en énergie et probabilité tunnel

Ansatz semi-classique et équation du mouvement

La partie radiale de l'équation de Klein-Gordon pouvant s'écrire sous la forme d'une équation de Schrödinger, il est alors possible d'adapter facilement les méthodes semi-classiques quant à la résolution de ce type d'équations au cas de la propagation d'un champ scalaire dans des espaces-temps de type Schwarzschild. Ces méthodes ont déjà permis de nombreuses investigations pour la théorie quantique des champs en espace courbe. D'une part, les méthodes WKB ont été adaptées par Schutz & Will [77] et Iyer & Will [78], puis étendues par Konoplya [79], afin de déterminer le spectre des modes quasi-normaux, *i.e* les résonances, d'une grande variété de trous noirs. D'autre part, ces méthodes ont aussi été utilisées avec succès pour retrouver le spectre de fluctuations primordiales aussi bien dans le cas d'une inflation en espace de Sitter que d'une inflation en loi de puissance [80]. Il est cependant important de garder à l'esprit que l'approche semi-classique reste une approximation et ne fournit donc que des résultats approchés, bien que leur précision puisse être tout à fait suffisante dans un certain nombre de cas. De plus, même si la précision de cette approche peut être améliorée en augmentant l'ordre semi-classique, comme cela a été fait par Konoplya [79] pour le cas des modes quasi-normaux ou par les auteurs des références suivantes [81, 82, 83] pour le cas des fluctuations primordiales, il a été montré [84] que cette méthode implique une série divergente, du moins dans le cas des fluctuations primordiales, et que la précision ne peut être améliorée au delà d'un certain ordre. L'approximation semi-classique doit tout d'abord être vue comme un outil d'investigation adéquat afin d'obtenir, relativement facilement, un ordre de grandeur des phénomènes mais elle ne doit pas, exceptés les cas où le potentiel est proche d'un potentiel quadratique, être considérée comme un outil de précision.

Pour résoudre de manière semi-classique l'équation (5.18), il nous faut supposer, dans une approche de type intégrale de chemins, que les chemins classiques sont dominants comparés aux autres chemins. Il est possible d'introduire l'ansatz semi-classique $\tilde{\psi}$ suivant pour le propagateur

$$\tilde{\psi}(\mathcal{F},\mathcal{I}) = \sum_n F_n(\mathcal{F},\mathcal{I}) e^{i\frac{S_n(\mathcal{F},\mathcal{I})}{\hbar}}, \tag{5.19}$$

où $\mathcal{I}$ et $\mathcal{F}$ symbolisent respectivement l'état initial et l'état final, et $S_n(\mathcal{F},\mathcal{I})$ correspond à l'action classique. Puisque nous ne considérons que les chemins classiques, une fois l'ansatz précédent introduit dans l'équation (5.18), un développement limité au premier ordre en constante de Planck réduite $\hbar$ est effectué, ceci aboutissant à l'équation semi-classique suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar\left(2\frac{\partial S}{\partial \xi_f}\frac{\partial F}{\partial \xi_f} + \frac{\partial^2 S}{\partial {\xi_f}^2}F\right) \\ + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial \xi_f}\right)^2 + V^2\right)F \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} i\hbar\left(2\frac{\partial S}{\partial t_f}\frac{\partial F}{\partial t_f} + \frac{\partial^2 S}{\partial {t_f}^2}F\right) \\ + \left(\frac{\partial S}{\partial t_f}\right)^2 F \end{array} \right\}, \tag{5.20}$$

où l'indice f signifie *événement final.* L'indice n a été omis par simplicité d'écriture, l'équation ci-dessus s'appliquant à chaque chemin classique. La signification physique d'une telle équation est claire : l'ordre zéro correspond à l'équation de Hamilton-Jacobi classique alors que le premier ordre correspond à la première correction quantique sur la solution classique. L'action classique étant connue (voir l'équation (5.17)), la solution complète semi-classique du problème sera donc donnée en déterminant la fonction F qui doit être solution de l'équation aux dérivées partielles

$$2\frac{\partial S}{\partial \xi_f}\frac{\partial F}{\partial \xi_f} + \frac{\partial^2 S}{\partial {\xi_f}^2}F = 2\frac{\partial S}{\partial t_f}\frac{\partial F}{\partial t_f} + \frac{\partial^2 S}{\partial {t_f}^2}F. \tag{5.21}$$

L'équation du mouvement semi-classique (5.20) se réduit bien à cette dernière puisque l'action classique vérifie nécessairement la relation de Hamilton-Jacobi conduisant à un terme d'ordre zéro en constante de Planck réduite nulle. Plutôt que de résoudre l'équation (5.21), nous pouvons chercher une équation pour le module carré de la fonction F. En multipliant l'équation ci-dessus par le complexe conjugué $F^\dagger$ de la fonction F, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_f}\left(|F|^2\frac{\partial S}{\partial \xi_f}\right) - \frac{\partial}{\partial t_f}\left(|F|^2\frac{\partial S}{\partial t_f}\right) = 0. \tag{5.22}$$

Tout comme en Mécanique Quantique non-relativiste, l'équation ci-dessus peut être vue comme une équation de continuité puisqu'il est possible de définir un quadri-vecteur courant covariant $\tilde{j}_\mu$ semiclassique

$$\tilde{j}_\mu = |F|^2\frac{\partial S}{\partial x^\mu}, \tag{5.23}$$

tel que l'équation (5.22) ne soit autre que la conservation du quadri-courant $\tilde{j}_\mu$:

$$\partial_\mu \tilde{j}^\mu = 0. \tag{5.24}$$

De plus, l'énergie et l'impulsion classique étant données par

$$p_f = \frac{\partial S}{\partial \xi_f} \quad \text{et} \quad E_f = -\frac{\partial S}{\partial t_f}, \tag{5.25}$$

l'écriture contravariante du courant semi-classique devient alors

$$\tilde{j}^\mu = -|F|^2\,\mathbf{p}^\mu, \tag{5.26}$$

où $\mathbf{p}^\mu = (E_f, p_f)$ est le quadri-vecteur impulsion classique.

Cas des systèmes stationnaires

<u>Solution sous forme de fonction de Green :</u>

Si le système considéré est soumis à un potentiel purement spatial, les fonctions d'ondes seront stationnaires et la partie temporelle de l'ansatz semi-classique sera donnée par les fonctions $e^{-i\omega t}$. En introduisant cette forme de solution dans l'équation différentielle (5.18), nous avons à traiter une équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$\left(\frac{d}{d\xi^2} + \underbrace{\omega^2 - V^2(\xi)}_{p^2(\xi)}\right)\psi(\xi) = 0. \tag{5.27}$$

Pour ce genre d'équation, l'approximation semi-classique devient, dans la limite des phases stationnaires, l'approximation WKB et la fonction d'onde semi-classique est donnée par la fonction d'onde WKB :

$$\tilde{\psi}(\xi) = \frac{A}{\sqrt{|p(\xi)|}}\exp\left(i\int_{\xi_0}^{\xi} p(x)dx\right). \tag{5.28}$$

Selon la valeurs relatives de l'énergie et du potentiel, la fonction p sera soit réelle soit imaginaire pure. Revenons quelque peu à l'approche semi-classique : pour un système stationnaire, il est plus judicieux de considérer des chemins à énergie fixée. Cette transformation s'obtient en cherchant la fonction de Green associée au propagateur semi-classique :

$$G\left(\xi_i, \xi_f, \omega\right) = \int_0^\infty \tilde{\psi}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) e^{i\omega t}. \tag{5.29}$$

La contribution dominante au propagateur vient des chemins dont l'action est minimale. Ainsi, uniquement les chemins dont le temps est égal au temps classique mis pour joindre ξ_i à ξ_f à l'énergie ω, contribueront de façon significative à la fonction de Green ci-dessus[2]. Ces temps classiques $\bar{t}$ sont donnés par l'équation :

$$-\left.\frac{\partial S}{\partial t}\right|_{\bar{t}} = \omega \tag{5.30}$$

et l'action est alors développée autour de $\bar{t}$. Cette condition est appellé *condition des phases stationnaires* car la phase du propagateur varie peu le long des chemins conservés. Sous cette hypothèse, l'équation (5.22) donnant la fonction F se résoud directement et donne :

$$F(\mathcal{F}, \mathcal{I}) = \sqrt{\frac{p(\xi_i)}{p(\xi_f)}}. \tag{5.31}$$

Par ailleurs, la phase s'écrit :

$$\varphi(\mathcal{F}, \mathcal{I}) = S(\mathcal{F}, \mathcal{I}) + \omega t, \tag{5.32}$$

ce qui devient au voisinage d'un extremum, c'est à dire d'un chemin classique :

$$\varphi(\mathcal{F}, \mathcal{I}, \omega) \simeq \int_{\xi_{cl}, t_{cl}} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial S}{\partial t} dt\right) + \omega t, \tag{5.33}$$

où l'intégration se fait suivant un chemin classique. Puisque le système suit une trajectoire classique, les quantités $\partial S/\partial\xi$ et $\partial S/\partial t$ sont respectivement égales à l'impulsion classique $p(\xi) = \sqrt{\omega^2 - V^2(\xi)}$ et à l'opposé de l'énergie ω. La phase prend alors la forme suivante

$$\varphi(\mathcal{F}, \mathcal{I}, \omega) \simeq \int_{\xi_{cl}} p(\xi) d\xi. \tag{5.34}$$

La fonction de Green semi-classique, dans l'approximation des phases stationnaires, revient bien donc à la solution WKB

$$G\left(\xi_i, \xi_f, \omega\right) = \sum_n \sqrt{\frac{p_n(\xi_i)}{p_n(\xi_f)}} \exp\left(i \int_{\xi_n^{(cl)}} p_n(\xi) d\xi\right). \tag{5.35}$$

Dans ce résultat, la phase acquise à chaque point tournant n'est pas prise en compte, ce point étant abordé dans le paragraphe suivant.

Validité de l'approximation et raccordement aux points tournants :

La méthode WKB étant une approximation, il est nécessaire de déterminer son domaine de validité. Pour cela il suffit de dériver deux fois par rapport à la variable spatiale la fonction

[2] En passant dans le temps complexe, le terme $\exp(i\tilde{S})$ devient $\exp(-\tilde{S})$. Si à une énergie ω, le temps ne correspond pas à un temps classique, alors la valeur de $\tilde{S}$ sera élevée et sa contribution à la fonction de Green exponentiellement supprimée.

d'onde WKB, ce qui permet de déterminer l'équation différentielle dont la fonction d'onde WKB est une solution exacte :

$$\left(\frac{d}{d\xi^2} + p^2(\xi)\right)\tilde{\psi}(\xi) = \left(\frac{3}{4p^2}\left(\frac{dp}{d\xi}\right)^2 - \frac{1}{2p}\frac{d^2p}{d\xi^2}\right)\tilde{\psi}(\xi). \tag{5.36}$$

L'approche WKB sera une bonne approximation de la solution exacte si la condition suivante est vérifiée :

$$\left|p^2\right| \gg \left|\frac{3}{4p^2}\left(\frac{dp}{d\xi}\right)^2 - \frac{1}{2p}\frac{d^2p}{d\xi^2}\right|. \tag{5.37}$$

Si l'impulsion est linéaire en ξ, le membre de droite de l'équation ci-dessus est nul[3] et l'approximation WKB donnera des résultats exacts, l'équation de Schrödinger se ramenant à celle d'un oscillateur harmonique. Dans les autres cas, les résultats à l'ordre WKB seront d'autant plus précis que le carré de l'impulsion est dominée par son terme d'ordre 2 dans un développement limité.

Au vu, d'une part, de la condition de validité ci-dessus et, d'autre part, de la fonction d'onde WKB (5.28), il est évident que l'approximation n'est plus valide à proximité des points tournants, qui sont les points où p^2 s'annule. Puisqu'à ces points, p devient nulle, la fonction d'onde $\tilde{\psi}$ ainsi que le membre de droite de l'équation (5.37) divergent. Il est donc nécessaire, afin de déterminer ce qu'il se passe en ces points, et en particulier pour joindre les fonctions d'onde WKB définies de part et d'autre de ce type de points, de trouver une méthode de régularisation qui s'obtient en linéarisant la fonction p^2

$$p^2(\xi) \simeq -\lambda(\xi - \xi_1), \tag{5.38}$$

où ξ_1 correspond au point tournant. La solution exacte de l'équation de Schrödinger avec une impulsion linéaire en ξ est donnée par les fonctions de Airy

$$\psi(\xi) = B_1\mathbf{Ai}\left(\lambda^{\frac{1}{3}}(\xi - \xi_1)\right) + B_2\mathbf{Bi}\left(\lambda^{\frac{1}{3}}(\xi - \xi_1)\right). \tag{5.39}$$

Joindre les fonctions d'onde WKB de part et d'autre du point tournant revient donc à identifier, à proximité de celui-ci, les fonctions WKB aux fonctions de Airy. Pour cela, supposons que la fonction p^2 est positive pour $\xi < \xi_1$ et négative pour $\xi > \xi_1$. On procède tout d'abord un développement limité des fonctions de Airy au voisinage de ξ_1 :

$$\psi(\xi) = \begin{cases} \frac{\lambda^{-\frac{1}{12}}}{2\sqrt{\pi}}\left|\xi - \xi_1\right|^{-\frac{1}{4}}\left[(B_2 - iB_1)\exp\left(i\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\left|\xi - \xi_1\right|^{\frac{3}{2}} + i\frac{\pi}{4}\right)\right. & \\ \left. +(B_2 + iB_1)\exp\left(-i\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\left|\xi - \xi_1\right|^{\frac{3}{2}} - i\frac{\pi}{4}\right)\right] & \text{pour } \xi < \xi_1 \\ & \\ \frac{\lambda^{-\frac{1}{12}}}{\sqrt{\pi}}\left|\xi - \xi_1\right|^{-\frac{1}{4}}\left[\frac{B_1}{2}\exp\left(-\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\left|\xi - \xi_1\right|^{\frac{3}{2}}\right)\right. & \\ \left. +B_2\exp\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\left|\xi - \xi_1\right|^{\frac{3}{2}}\right)\right] & \text{pour } \xi > \xi_1. \end{cases} \tag{5.40}$$

A gauche du point tournant, la fonction d'onde WKB sera la somme de modes oscillants décrivant des ondes se propageant vers les ξ positifs et d'amplitude A_{out} ainsi que des ondes se propageant vers les ξ négatifs et d'amplitude A_{in}. A droite de ce point, la fonction d'onde WKB sera la somme d'une onde évanescente d'amplitude A_{eva} et d'une onde exponentiellement divergente d'amplitude A_{div}. En remplaçant la fonction p^2 par sa forme linéarisée dans la

[3]Ce résultat se vérifie aisément pour $p^2(\xi) = \lambda\xi^2$. Pour tous les autres cas du type $p^2(\xi) = \lambda\xi^2 + \mu\xi + \nu$, un changement d'origine permet de se ramener au cas précédent.

solution WKB, nous obtenons :

$$\tilde{\psi}(\xi) = \begin{cases} \lambda^{-\frac{1}{4}} \left|\xi - \xi_1\right|^{-\frac{1}{4}} \left[A_{out} \exp\left(-i\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\left|\xi - \xi_1\right|^{\frac{3}{2}}\right)\right. \\ \left. +A_{in} \exp\left(i\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\left|\xi - \xi_1\right|^{\frac{3}{2}}\right)\right] & \text{pour } \xi < \xi_1 \\ \\ \lambda^{-\frac{1}{4}} \left|\xi - \xi_1\right|^{-\frac{1}{4}} \left[A_{eva} \exp\left(-\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\left|\xi - \xi_1\right|^{\frac{3}{2}}\right)\right. \\ \left. A_{div} \exp\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\left|\xi - \xi_1\right|^{\frac{3}{2}}\right)\right] & \text{pour } \xi > \xi_1. \end{cases} \tag{5.41}$$

En identifiant la fonction d'onde WKB à la solution faisant intervenir les fonctions de Airy, il est possible d'exprimer les amplitudes à gauche en fonction des amplitudes à droite :

$$\begin{pmatrix} A_{eva} \\ A_{div} \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{out} \\ A_{in} \end{pmatrix}. \tag{5.42}$$

La détermination finale s'obtient en appliquant certaines conditions aux limites qui dépendront du problème considéré. Par exemple, si la fonction d'onde fait face à une barrière de potentiel infinie, alors le coefficient A_{div} doit être nul et tous les autres coefficients peuvent être exprimés en fonction du coefficient A_{out}

$$A_{in} = e^{-i\frac{\pi}{2}} A_{out} \quad \text{et} \quad A_{eva} = e^{-i\frac{\pi}{4}} A_{out}. \tag{5.43}$$

Ecrites sous cette forme, les conditions de jonction des solutions montrent qu'au point tournant, une phase est ajoutée. En particulier, dans un puits de potentiel, l'onde réfléchie acquierera une phase de $-\pi/2$ à chaque point tournant et la fonction de Green prendra alors la forme suivante

$$G\left(\xi_i, \xi_f, \omega\right) = \sum_n \sqrt{\frac{p_n(\xi_i)}{p_n(\xi_f)}} \exp\left(i \int_{\xi_{n\,cl}} p_n(\xi) d\xi - i q_n \pi/2\right), \tag{5.44}$$

où q_n représente le nombre de points tournants rencontrés sur la trajectoire classique $\xi_{n\,cl}$.

Spectre en énergie et effet tunnel

Spectre d'énergie :

Si le système quantique considéré se trouve dans un puits de potentiel infini, alors le spectre d'énergie doit être discret. Cette propriété doit se retrouver au niveau semi-classique. Puisque pour un système stationnaire, l'équation de Klein-Gordon prend la forme d'une équation de Schrödinger, le spectre d'énergie, à l'ordre semi-classique, doit être donné par la règle de Bohr-Sommerfeld

$$\oint p(\xi) d\xi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \qquad n \in \mathbb{N}\ . \tag{5.45}$$

L'intégration se fait sur une trajectoire classique, que nous spécifierons plus tard, nécessairement fermée compte-tenue de la forme du potentiel.

Pour déterminer le spectre en énergie d'un système quantique plongé dans un puits de potentiel infini, il faut rechercher les pôles de la densité d'états $g(\omega)$ donnée par la trace de la fonction de Green. Dans l'approche semi-classique, la trace de la fonction de Green consiste à sommer la contribution de tous les chemins classiques qui reviennent à leur point de départ ξ. En appelant ξ_1 et ξ_2 les deux points tournants se plaçant chacun de chaque côté du puits, ces chemins seront les multiples des deux chemins "élémentaires" suivants $\{\xi \to \xi_1 \to \xi \to \xi_2 \to \xi\}$ et $\{\xi \to \xi_2 \to \xi \to \xi_1 \to \xi\}$. La densité d'états devient alors

$$g(\omega) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{\frac{p_n(\xi)}{p_n(\xi)}} d\xi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(2ni \int_{\xi_1}^{\xi_2} p_n(\xi) d\xi - in\pi\right). \tag{5.46}$$

Une fois l'intégrale ainsi que la somme calculées, la densité d'états prend la forme suivante

$$g(\omega) = (\xi_2 - \xi_1)\,\frac{1 - \exp\left(2i\displaystyle\int_{\xi_1}^{\xi_2} p_n(\xi)d\xi\right)}{1 + \exp\left(2i\displaystyle\int_{\xi_1}^{\xi_2} p_n(\xi)d\xi\right)}. \tag{5.47}$$

Les pôles de la densité d'états fournissent alors une condition sur l'impulsion classique, ce qui donne, en remplaçant p par son expression en fonction de l'énergie :

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{\omega^2 - V^2(\xi)}d\xi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad n \in \mathbb{N}\ . \tag{5.48}$$

Cette condition est bien évidemment la règle de Bohr-Sommerfeld, la trajectoire classique devant être celle qui joint les deux points tournants.

Effet tunnel :

L'effet tunnel peut être aussi retrouvé à un ordre semi-classique. Il est cependant nécessaire d'autoriser, à un niveau classique, que les trajectoires des particules puissent s'étendre sous les barrières de potentiel. Ceci peut être effectué de différentes manières, soit en autorisant l'action classique à devenir imaginaire pure, soit en transformant le temps en imaginaire pure, inversant ainsi le potentiel, les barrières devenant des puits. La première méthode a déjà été utilisée pour déterminer les conditions de jonction aux points tournants tandis que la seconde méthode correspond à la méthode des instantons. Dans le cas de la Mécanique Quantique non-relativiste, la probabilité tunnel à l'ordre semi-classique le plus bas prend la forme suivante :

$$T = \exp\left(-2\int_{\xi_1}^{\xi_2} p_n(\xi)d\xi\right), \tag{5.49}$$

les points ξ_i correspondant aux deux points tournants. Nous devons donc retrouver cette même relation dans notre cas.

Considérons la propagation d'une particule de $-\infty$ vers $+\infty$ et faisant face à une barrière de potentiel. Supposons aussi que le potentiel soit nul aux infinis. Nous pouvons faire cette hypothèse sans perdre en généralité car nous cherchons uniquement la transmission sur une unique barrière de potentiel. A gauche de la barrière, la fonction d'onde sera donnée par la superposition de modes sortants, *i.e.* se propageant vers les ξ positifs, et de modes rentrants, *i.e.* se propageant vers les ξ négatifs, tandis qu'elle sera uniquement composée de modes sortants à droite de la barrière. Enfin, puisqu'aucune source de particules n'est présente à droite de la barrière, la fonction d'onde sera uniquement composée d'une onde évanescente sous la barrière de potentiel.

$$\tilde{\psi}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(\xi)}}\left(A_{in}e^{-i\int_{\xi_1}^{\xi} p(u)du} + A_{out}e^{i\int_{\xi_1}^{\xi} p(u)du}\right) & \text{pour } \xi < \xi_1 \\ \frac{1}{\sqrt{|p(\xi)|}}A_{eva}e^{-\int_{\xi_1}^{\xi}|p(u)|du} & \text{pour } \xi_1 < \xi < \xi_2 \\ \frac{1}{\sqrt{p(\xi)}}B_{out}e^{i\int_{\xi_2}^{\xi} p(u)du} & \text{pour } \xi_2 < \xi. \end{cases} \tag{5.50}$$

En appliquant la procédure de jonction au premier point tournant, et en imposant $A_{div} = 0$, nous obtenons les conditions déjà énoncées précédemment dans l'équation (5.43) :

$$A_{in} = e^{-i\frac{\pi}{2}}A_{out} \quad \text{et} \quad A_{eva} = e^{-i\frac{\pi}{4}}A_{out}. \tag{5.51}$$

La procédure de jonction en ξ_2 est facilement déduite de la procédure précédente de la manière suivante : la fonction d'onde sous la barrière est tout d'abord écrite en faisant explicitement intervenir la profondeur de pénétration : $\tilde{\psi}(\xi) = |p(\xi)|^{-1/2} A_{eva} e^{-\tau} \exp\left(-\int_{\xi_2}^{\xi} |p(u)|\, du\right)$ avec $\tau = \int_{\xi_1}^{\xi_2} |p(u)|\, du$. Ensuite, un changement de variable $\xi \to \xi' = -\xi$ est effectué. Avec de telles transformations, il est possible d'appliquer directement les conditions données par l'équation (5.42) en effectuant, dans le cas général, les remplacement suivants :

$$\begin{array}{ccc} A_{eva} & \to & e^{\tau} A_{div} \\ A_{div} & \to & e^{-\tau} A_{eva} \\ A_{out} & \to & B_{in} \\ A_{in} & \to & B_{out}. \end{array} \tag{5.52}$$

Cela donne finalement la relation suivante $B_{out} = e^{-\tau} e^{i\frac{\pi}{4}} A_{eva}$. Il est maintenant possible de relier l'amplitude des ondes sortantes à droite de la barrière en fonction de celle des ondes sortantes à gauche de cette barrière. La probabilité tunnel sera alors donnée par

$$T = e^{-2\tau} = \exp\left(-2\int_{\xi_1}^{\xi_2} p_n(\xi) d\xi\right), \tag{5.53}$$

qui est bien le résultat attendu. Il est cependant important de noter que l'amplitude des ondes réfléchies au premier point tournant est exactement égale à celle des ondes incidentes. Ainsi, à l'ordre semi-classique, la réflexion sur une barrière de potentiel, même finie, est totale. Ce comportement provient bien évidemment de cette approche qui, se basant sur la solution classique, n'autorise pas la traversée d'une barrière de potentiel à moins de permettre à l'action classique de prendre des valeurs complexes. De plus, la probabilité tunnel à l'ordre semi-classique ne sera qu'une bonne approximation pour de grandes barrières de potentiel. En effet, on peut voir que le résultat ci-dessus est égal à la limite de la probabilité tunnel exacte quand la barrière est infiniment haute. De plus, compte tenu de la réflexion totale au premier point tournant, le flux de particules n'est pas conservé. En appelant R le coefficient de réflexion, nous avons

$$T + R = 1 + e^{-2\tau} > 1. \tag{5.54}$$

Cet écart vis-à-vis des lois de conservation fondamentales ne sera pas dramatique si la transmission est très faible, c'est-à-dire pour une barrière de potentiel soit grande, soit épaisse. Dans un problème de diffusion, il y aura un domaine de validité d'utilisation d'une telle expression de la probabilité tunnel comme amplitude de diffusion. Cette approximation ne sera plus valable dans un domaine d'énergie que nous qualifierons d'intermédiaire, en comparaison à la barrière de potentiel : cette approximation n'est évidemment pas valable à proximité du maximum de la barrière, les deux points tournants devenant infiniment proches. Ce domaine d'invalidité s'étend pour des énergies inférieures et supérieures à ce maximum. Sous la barrière de potentiel, il est nécessaire que l'énergie soit suffisamment faible pour que la barrière puisse être considérée comme grande, définissant une limite à *basse énergie* en-deçà de laquelle l'approximation WKB est justifiée. Pour des énergies supérieurs au potentiel, l'approximation WKB prédit une transmission totale, $T = 1$, ce qui surestime la transmission exacte et définit une énergie au-delà de laquelle l'approximaion WKB est suffisamment précise. Ces limites à basse et haute énergies dépendent de la forme du potentiel.

L'ensemble des résultats précédents s'applique à la propagation d'un champ scalaire dans tout espace-temps statique et à symétrie sphérique. A l'aide de ces résultats, nous allons pouvoir, dans un premier temps, déterminer le spectre d'énergie pour un champ scalaire se propageant dans un Univers AdS et, dans un deuxième temps, les caractéristiques fondamentales, à savoir position en énergie et largeur de bande, d'états quasi-stationnaires, *i.e* des résonances, pour la propagation autour d'un trou noir de Schwarzschild immergé dans un Univers AdS. Ces espaces-temps étant statiques et à symétrie sphérique, un champ scalaire pourra être étudié en séparant la partie radiale de la partie angulaire, donnée par les harmoniques sphériques, et de la partie temporelle, donnée par les fonctions $e^{-i\omega t}$. Dans la suite, nous nous focaliserons donc uniquement sur la partie radiale du champ.

5.2 Application aux espaces-temps à courbure négative [110]

5.2.1 Spectre en énergie dans un Univers AdS : résultats et précision de l'approche

Un espace AdS correspond à un espace vide contenant une constante cosmologique Λ négative. Ce type d'espace peut aussi être vu comme les hypersurfaces de dimension D, ayant une courbure négative constante, d'un espace de dimension $D+1$ [27]. Le rayon de courbure R_{AdS} d'une telle hypersurface peut s'exprimer en fonction de la constante cosmologique et du nombre de dimensions par :

$$R_{AdS} = \sqrt{\frac{(D-1)(D-2)}{2\,|\Lambda|}}. \tag{5.55}$$

La métrique décrivant cet espace-temps s'exprime alors aisément en fonction de ce rayon de courbure :

$$ds^2 = \left(1+\frac{r^2}{R_{AdS}^2}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{R_{AdS}^2}} - d\Omega_{D-2}^2. \tag{5.56}$$

Nous rappelons que Ω_{D-2}^2 désigne l'angle solide de dimension $D-2$.

Résultats exacts

Dans le cas d'un couplage minimal, l'équation de Klein-Gordon est résolue dans le système de coordonnées suivant [27] :

$$\tau = \frac{t}{R_{AdS}}, \tag{5.57}$$

$$\rho = 2\arctan\left(\frac{r}{R_{AdS}} + \sqrt{1-\frac{r^2}{R_{AdS}^2}}\right) - \frac{\pi}{2}, \tag{5.58}$$

les coordonnées angulaires ne changeant pas. Dans ce système, la métrique revêt la forme :

$$ds^2 = \frac{R_{AdS}^2}{\cos^2(\rho)}\left(d\tau^2 - d\rho^2 - \sin^2(\rho)d\Omega^2\right), \tag{5.59}$$

et l'ansatz $\Psi(\tau,\rho,\Omega) = e^{-i\nu\tau}Y_\ell^m(\Omega)R(\rho)$ peut être utilisé pour résoudre l'équation de Klein-Gordon[4]. La fonction d'onde radiale $R(\rho)$ est alors solution de l'équation différentielle ci-dessous :

$$\frac{\cos^2(\rho)}{\sin^2(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\sin^2(\rho)}{\cos^2(\rho)}\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(\nu^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{\sin^2(\rho)}\right)R = 0, \tag{5.60}$$

qui peut être résolue de manière exacte en remplaçant la fonction inconnue ainsi que l'argument de cette dernière par :

$$z = \cos(2\rho) \tag{5.61}$$

$$R(\rho) = \sin^\ell(\rho)\cos^\beta(\rho)P(\rho). \tag{5.62}$$

Avec une telle transformation, l'équation (5.60) prend la forme d'une équation de Jacobi [87] :

$$(1-z^2)\frac{d^2P}{dz^2} + (b-a-(a+b+2)z)\frac{dP}{dz} + n(n+a+b+1)P(z) = 0, \tag{5.63}$$

[4]Puisque la métrique dans ce nouveau système de coordonnées est toujours statique et à symétrie sphérique, la séparation de variable utilisée pour la résolution dans le système de coordonnées de Schwarzschild s'applique aussi dans ce cas.

imposant les quatre contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} a+b+2 &= \ell+1+\beta, && (5.64)\\ b-a &= \beta-2-\ell, && (5.65)\\ \beta(\beta-3) &= 0, && (5.66)\\ n(n+a+b+1) &= \frac{1}{4}\left(\nu^2-(\ell+\beta)^2\right). && (5.67) \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (5.63) sont les polynômes de Jacobi $P_n^{(a,b)}(z)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a > -1$ et $b > -1$. La solution finale de l'équation de Klein-Gordon s'exprime alors en fonction de ces polynômes :

$$R(\rho) = \sin^\ell(\rho)\cos^3(\rho) P^{(\ell+1/2,3/2)}_{(\nu-\ell-3)/2}(\cos(2\rho)), \tag{5.68}$$

avec $\beta = 3$ afin de respecter $b > -1$.

La résolution de la partie radiale de l'équation de Klein-Gordon impose que la quantité $(\nu-\ell-3)/2$ soit un entier naturel. Cette conditon permet de déterminer le spectre des fréquences propres ν, valeurs propres de l'opérateur $i\partial_\tau$,

$$\left\{\nu_{n,0}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2n+\ell+3\}_{n\in\mathbb{N}}. \tag{5.69}$$

Pour un observateur placé à l'origine des coordonnées de Schwarzschild, les fréquences propres du champ ne seront pas les fréquences ν mais les fréquences ω, valeurs propres de l'opérateur $i\partial_t$. Le lien entre ces deux fréquences propres s'obtient par la relation entre le temps de Schwarzschild t et le temps τ. Puisque $\partial_\tau = R_{AdS}\partial_t$, le spectre de fréquences propres pour un observateur à l'origine des coordonnées de Schwarzschild est alors :

$$\left\{\nu_{n,0}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{(2n+\ell+3)\, R_{AdS}^{-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}. \tag{5.70}$$

Ainsi, le spectre des fréquences propres d'un champ scalaire se propageant dans un espace-temps AdS et minimalement couplé à la gravité, permettant de définir les états d'énergie positive et négative pour un observateur à l'origine des coordonnées, est discret et présente une énergie de point zéro. En anticipant sur le paragraphe à venir, l'apparition d'une telle énergie de point zéro est naturelle dans la mesure où l'ajout d'une constante cosmologique négative peut s'interpréter comme un potentiel ne s'annulant jamais. Dans le cas d'un couplage conforme, le spectre en énergie présente, qualitativement parlant, les mêmes caractéristiques. Cependant, la résolution de l'équation de Klein-Gordon pour un tel couplage utilise les polynômes de Gegenbauer [87] et le spectre en énergie prend alors la forme suivante [88]

$$\left\{\nu_{n,0}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{(n+\ell+1)\, R_{AdS}^{-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \tag{5.71}$$

ℓ étant toujours le moment orbital.

La comportement d'un champ scalaire en espace-temps AdS a aussi été étudié dans les références [89, 90] pour un couplage minimal à la gravité et dans la référence [88] pour un couplage conforme. Ces études aboutissent aussi à un spectre discret des fréquences normales du champ.

Résultats à l'ordre semi-classique

Pour la résolution semi-classique, nous travaillerons de nouveau dans le système de coordonnées de type Schwarzschild car c'est à partir de ce système que le potentiel est déterminé. La fonction métrique h étant donnée par $h(r) = 1 + r^2/R_{AdS}^2$, la coordonnée tortoise $r^\star$ et le potentiel peuvent être explicitement exprimés en fonction de la coordonnée r pour le premier et de la coordonnée $r^\star$ pour le second :

$$r^\star = R_{AdS}\arctan\left(\frac{r}{R_{AdS}}\right), \tag{5.72}$$

et

$$V_\ell{}^2(r^\star) = \frac{1}{R_{AdS}^2 \cos^2(r^\star/R_{AdS})}\left[\frac{\ell(\ell+1)}{\tan^2(r^\star/R_{AdS})} + 2\right]. \tag{5.73}$$

La fonction permettant de passer de r à $r^\star$ est une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[0, R_{AdS}\pi/2[$ et le potentiel, représenté sur la figure (5.1), est stationnaire et prend la forme d'un puits pour toutes les valeurs du moment angulaire excepté le cas $\ell = 0$. Pourtant, pour ce cas précis, en autorisant $r^\star$ à appartenir à l'intervalle $]-R_{AdS}\pi/2, R_{AdS}\pi/2[$, ce potentiel V_0 reste un puits de potentiel, symétrique par rapport à $r^\star = 0$. De plus, puisque les particules doivent être confinées dans l'intervalle $[0, R_{AdS}\pi/2[$ afin d'assurer que la coordonnée r reste positive, une barrière de potentiel infinie peut être ajoutée, arbitrairement, dans le potentiel V_0. Le potentiel vu par un champ scalaire est alors un puits de potentiel pour toutes les valeurs du moment orbital, imposant ainsi un spectre discret des fréquences propres du champ, spectre qui peut être déterminé à l'ordre semi-classique.

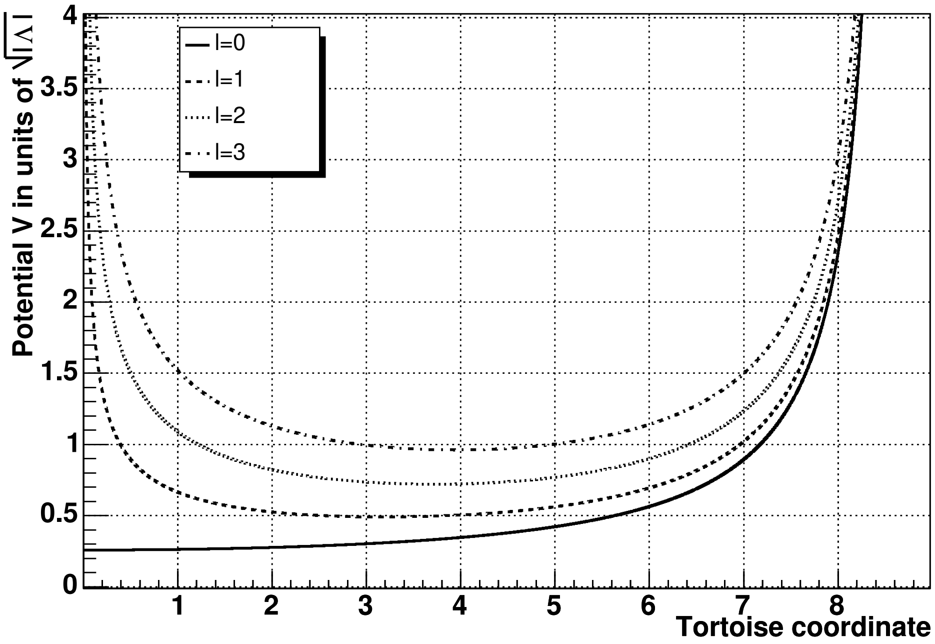


FIG. 5.1 – Potentiel vu par un champ scalaire se propageant dans un Univers AdS à quatre dimensions, en fonction de la coordonnée tortoise $r^\star$. Le potentiel est exprime en unité de $\sqrt{|\Lambda|}$.

La question de l'interprétation physique des fréquences propres, particulièrement en termes d'énergie de particules, se pose en espace courbe. En effet, en espace plat, ces fréquences permettraient de définir les énergies positives et négatives des particules. Cependant, dans le cas des espaces courbes, ces fréquences propres ne pourront définir les énergies positives et négatives que pour un observateur placé en $r = 0$, la fonction métrique h et sa dérivée étant respectivement égale à un et nulle en ce point. Autrement dit, en déterminant le spectre des fréquences propres de l'opérateur $i\partial_t$, il sera possible de déduire le spectre en énergie tel qu'il sera vu par un observateur en $r = 0$: l'interprétation du spectre de fréquence en énergie de particule est donc relative à un observateur. Une deuxième question se pose : comment le cas $\ell = 0$ va-t-il être traité ? D'une part, le spectre en $\ell = 0$ peut être déterminé en prolongeant le potentiel dans les $r^\star$ négatifs et, de façon intuitive, diviser le résultat par deux. Cependant cette approche ne prend pas en compte le comportement singulier du potentiel. En effet, ce dernier peut être vu comme une fonction de deux variables : la position $r^\star$ et le moment angulaire ℓ, considéré comme continu. Cette fonction de deux variables n'est alors pas continue au point $(r^\star, \ell) = (0, 0)$ puisque, si $\ell = \varepsilon$ infiniment petit, le potentiel tend vers l'infini quand $r^\star \to 0$ tandis que si $\ell = 0$, alors le potentiel tend vers $\sqrt{2}/R_{AdS}$ quand $r^\star \to 0$. Il est donc plus judicieux de rajouter un mur réfléchissant en $r^\star = 0$ pour le cas $\ell = 0$, le potentiel devenant ainsi une fonction continue des deux variables $(r^\star, \ell)$.

<u>Moment orbital nul :</u>

Pour ce cas, une barrière de potentiel infinie, et infiniment pentue, est ajoutée en $r^\star = 0$ afin de s'assurer que les particules de moment orbital nul se propagent uniquement dans l'intervalle $r \in [0, +\infty[$. Cependant, rajouter une telle barrière modifie la règle de Bohr-Sommerfeld puisque la pente infinie de la barrière en $r^\star = 0$ impose de nouvelles conditions aux limites se traduisant par une nouvelle phase dans la fonction d'onde WKB[5] [85]. Cette nouvelle phase prise en compte, la règle de Bohr-Sommerfeld devient

$$\oint p(r^\star)dr^\star = \left(n + \frac{3}{4}\right)\pi \qquad n \in \mathbb{N} . \tag{5.74}$$

Compte tenu de la réflexion totale en $r^\star = 0$, le potentiel, impliqué dans l'impulsion classique p, prend la forme suivante :

$$V_\ell^2(r^\star) = \frac{1}{R_{AdS}^2 \cos^2(r^\star/R_{AdS})}\left[\delta\left(r^{\star 2}/R_{AdS}^2\right) + 2\right], \tag{5.75}$$

où la distribution de Dirac remplace le terme $\ell(\ell+1)/\tan^2(r^\star/R_{AdS})$ afin de simuler ce mur infini. Ce choix permet en effet d'assurer que le potentiel tend toujours vers l'infini quand $r^\star$ tend vers zéro pour toutes les valeurs du moment orbital.

Introduire une distribution de Dirac dans le potentiel impose une légère modification de l'intégration sur le chemin classique. Dans ce cas, les deux points tournants $r^\star_\pm$ sont donnés par

$$r^\star_- = 0 \quad \text{et} \quad r^\star_+ = R_{AdS} \arctan\left(\sqrt{\frac{\omega^2 R_{AdS}^2}{2} - 1}\right). \tag{5.76}$$

L'intégrale intervenant dans la règle de Bohr-Sommerfeld doit être traité avec précaution aux bornes : tout d'abord, la distribution de Dirac fera intervenir, une fois la primitive trouvée, une distribution de Heavyside $\Theta\left(r^{\star 2}/R_{AdS}^2\right)$ et ensuite la primitive conduit à une fonction dont l'argument tend vers l'infini quand $r^\star$ tend vers $r^\star_+$, cette fonction admettant cependant une valeur finie en ce point. L'intégration ne peut donc pas être directement effectuée de $r^\star_-$ à $r^\star_+$ et il est plus judicieux d'écrire la règle de Bohr-Sommerfeld ainsi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r^\star_- + \varepsilon}^{r^\star_+ - \varepsilon} p(r^\star)dr^\star = \left(n + \frac{3}{4}\right)\pi \qquad n \in \mathbb{N} . \tag{5.77}$$

[5] La dérivation de la densité d'états dans le chapitre précédent utilisait les conditions de jonction en supposant que, sous le potentiel, la fonction d'onde était une onde évanescente, conduisant à un déphasage de $-\pi/2$ pour l'onde réfléchie. Ceci n'est plus valide dans le cas d'un mur totalement réfléchissant puisque la fonction d'onde doit être strictement nulle dans la région "derrière" le mur, ici $r^\star < 0$.

L'intégration sur le chemin classique vaut $\pi(\omega R_{AdS} - \sqrt{2})$, permettant de déduire le spectre en énergie à cet ordre d'approximation :

$$\left\{\omega_{n,0}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left(2n + \sqrt{2} + 3/2\right) R_{AdS}^{-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}. \tag{5.78}$$

Les fréquences propres ont pour unité naturelle l'inverse du rayon de courbure de l'univers considéré et une énergie de point zéro $\omega_{0,0} = \left(\sqrt{2} + 3/2\right) R_{AdS}^{-1}$ apparaît.

Moment orbital non-nul :

Dans le cas d'un nombre quantique orbital non-nul, la définition usuelle de la règle de Bohr-Sommerfeld peut être appliquée puisque le puits de potentiel ne présente aucune barrière de pente infinie. En posant $y = \tan(r^\star/R_{AdS})$, les points tournants sont donnés par les solutions de l'équation algébrique suivante :

$$2y^4 + \left(2 + \ell(\ell+1) - \omega^2 R^2\right) y^2 + \ell(\ell+1) = 0, \tag{5.79}$$

issue de l'équation $\omega^2 = V^2(r^\star)$. Afin d'obtenir deux racines qui soient à la fois différentes et positives, il est nécessaire que les trois contraintes ci-dessous soient vérifiées :

$$\begin{aligned} 0 &\geq 2 + \ell(\ell+1) - \omega^2 R^2, && (5.80)\\ 0 &\leq \left(2 + \ell(\ell+1) - \omega^2 R^2\right)^2 - 8\ell(\ell+1), && (5.81)\\ 0 &\leq 8\ell(\ell+1), && (5.82) \end{aligned}$$

la dernière d'entre elles étant systématiquement vérifiée puisque $\ell \in \mathbb{N}$. Les deux points tournants $r^\star_\pm$ sont alors déduits des deux racines positives de l'équation quartique ci-dessus :

$$y_\pm = \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2 R_{AdS}^2 - 2 - \ell(\ell+1) \pm \sqrt{(2 + \ell(\ell+1) - \omega^2 R_{AdS}^2)^2 - 8\ell(\ell+1)}}, \tag{5.83}$$

avec $r^\star_\pm = R_{AdS} \arctan(y_\pm)$. Finalement, les niveaux d'énergie seront donnés en résolvant l'équation algébrique suivante :

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \int_{y_-(\omega_{n,\ell})}^{y_+(\omega_{n,\ell})} \frac{R_{AdS}}{1+y^2}\sqrt{\omega_{n,\ell}^2 - V^2(y)}dy = 0, \tag{5.84}$$

(n, ℓ) étant considéré comme un couple de paramètre et ω étant l'inconnue, dépendant de ces paramètres.

A la différence du cas $\ell = 0$, l'intégrale de l'impulsion classique ne peut être trouvée de manière analytique. La règle de Bohr-Sommerfeld est en conséquence inversée de manière numérique pour chaque valeur du couple de paramètres (n, ℓ), le cas $\ell = 0$ inclus. Les résultats pour les différentes fréquences propres, en unité de R_{AdS}^{-1}, sont représentés sur la figure 5.2. La partie de gauche montre ces fréquences en fonction du nombre n avec le moment angulaire comme paramètre alors que la partie de droite correspond à la situation inverse : ℓ devient la variable et n le paramètre. Ces résultats indiquent qu'à l'ordre semi-classique, les niveaux d'énergies varient linéairement avec ℓ et n. Plus particulièrement, il est assez aisé de voir que, sur l'ensemble des valeurs de n et ℓ considérées, le spectre en énergie est retrouvé à l'ordre semi-classique avec une grande précision : $\omega_{sc}(n,\ell) \simeq (2n + \ell + 3)\, R_{AdS}^{-1}$, l'indice (sc) dénotant le résultat semi-classique.

Précision des résultats semi-classiques

Puisque le spectre exact est connu, il est possible de déterminer l'erreur relative des résultats précédents :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \left|\frac{\omega_{sc} - \omega}{\omega}\right|, \tag{5.85}$$

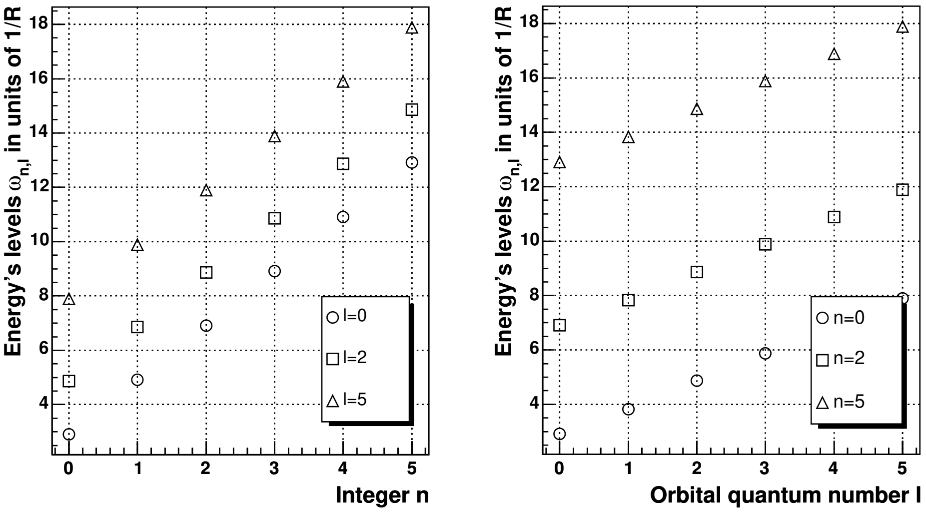


FIG. 5.2 – Niveaux d'énergie à l'ordre semi-classique en unité de R_{AdS}^{-1}, pour un champ scalaire se propageant dans un Univers AdS. *Gauche :* Niveaux d'énergie en fonction de l'entier n avec le moment orbital ℓ comme paramètre. *Droite :* Niveaux d'énergie en fonction du moment orbital ℓ avec l'entier n comme paramètre.

dont la valeur, en fonction des paramètres (n, ℓ), est représentée sur les courbes de la figure 5.3. Tout comme la figure précédente, la partie de gauche correspond à l'erreur relative en fonction de l'entier n alors que la partie de droite correspond à l'erreur relative en fonction du moment orbital ℓ. Les valeurs prises par cette erreur, au maximum de quelques pourcents, confirment que l'estimation semi-classique des niveaux d'énergie fournit des résultats très précis. Cependant, il est nécessaire de séparer les erreurs dues à l'inversion numérique de la règle de Bohr-Sommerfeld des erreurs inhérentes à la méthode semi-classique.

Les erreurs numériques ont deux origines : la précision de la résolution de l'équation algébrique (5.84) d'une part et, d'autre part, l'évaluation de l'intégrale impliquée dans cette équation. La première source d'erreur est de l'ordre de 10^{-7}. En ce qui concerne l'estimation numérique de l'intégrale W entrant dans la règle de Bohr-Sommerfeld, un algorithme simple (méthode des trapèzes) a été utilisé. L'erreur relative sur la détermination de ω, due à cette estimation approchée, vaut :

$$\left.\frac{\Delta\omega}{\omega}\right|_W \simeq \frac{\epsilon(\omega)}{\omega}\frac{dW}{d\omega}, \tag{5.86}$$

$\epsilon(\omega)$ étant l'erreur relative de l'intégration numérique dont une formule exacte est donnée dans la référence [123]. Prenant en compte la taille du pas d'intégration, cette erreur relative reste plus petite que 10^{-10} et ce sur une large gamme de valeurs de ω. Ainsi, l'erreur relative sur la détermination semi-classique des fréquences propres induite par les approximations numériques reste de l'ordre de 10^{-7}. Or, l'erreur relative totale varie de 0.1 % à quelques pourcents dans la gamme de paramètres (n, ℓ) étudiée. L'erreur due aux approximations numériques est donc négligeable et l'erreur représentée sur la figure 5.3 donne donc, avec une très grande précision, l'erreur due à la méthode semi-classique elle-même.

En ce qui concerne l'erreur d'origine théorique, elle représente l'anharmonicité de l'impulsion au carré $p^2(r^\star)$ provenant de la forme compliquée du potentiel. Une estimation quantitative de cette anharmonicité requiert un développement limité de l'impulsion au carré. Cependant, le comportement général de l'erreur relative d'origine théorique peut se comprendre

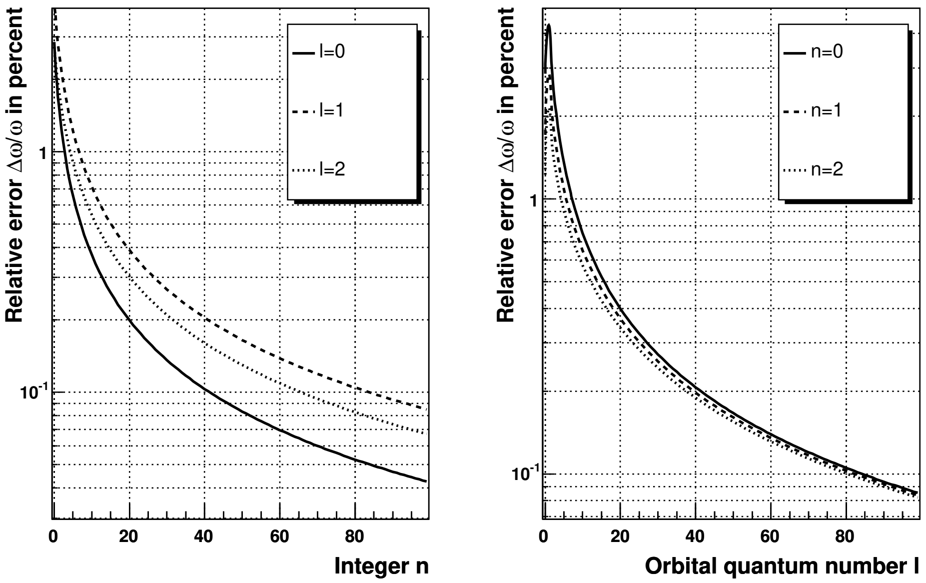


FIG. 5.3 – Erreur relative $\Delta\omega/\omega$ de l'estimation semi-classique des niveaux d'énergie. *Gauche :* Erreur relative en fonction de l'entier n avec le moment orbital ℓ comme paramètre. *Droite :* Erreur relative en fonction du moment orbital ℓ avec l'entier n comme paramètre.

qualitativement sans faire appel à un tel calcul. Premièrement, lorsque l'entier n augmente, l'énergie de la particule augmente elle-aussi. Une particule à haute énergie se rapproche du comportement classique et donc l'erreur relative doit diminuer pour des entiers n plus élevés. Deuxièmement, l'énergie ainsi que le minimum du potentiel augmentent avec le moment orbital ℓ. Cependant, en considérant la quantité $(\omega(\ell) - V_{min}(\ell))$ comme une fonction de ℓ, avec $V_{min}(\ell) = (\sqrt{2} + \sqrt{\ell(\ell+1)})R_{AdS}^{-1}$, cette quantité décroît quand le nombre quantique orbital ℓ augmente. Autrement dit, les niveaux d'énergie se rapprochent du minimum du potentiel pour les valeurs élevées du moment orbital, réduisant ainsi l'influence de l'anharmonicité.

5.2.2 Etats quasi-stationnaires en espace SAdS : position et largeur de bande

Potentiel dans un tel espace

Un espace-temps de type Schwarzschild-Anti-de Sitter correspond à un trou noir de Schwarzschild plongé dans un univers AdS. La métrique pour un tel système est donc donnée par celle présentée dans la section 2.2, dont nous rappelons ici l'expression, en nous limitant au cas d'une constante cosmologique négative et en l'écrivant en fonction du rayon caractéristique R_{AdS} des univers AdS :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mu}{r^{D-3}} + \frac{r^2}{R_{AdS}^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\mu}{r^{D-3}} + \frac{r^2}{R_{AdS}^2}} - d\Omega_{D-2}^2. \tag{5.87}$$

Cette étude se limite au cas $D = 4$. Cependant, les résultats présentés restent généraux et peuvent être qualitativement étendus à des espaces-temps de dimension plus élevée. De plus, le rayon caractéristique des univers AdS R_{AdS} ainsi que le rayon de Schwarzschild du trou noir r_H seront choisis comme paramètres caractéristiques de l'espace-temps SAdS. Le rayon de

Schwarzschild étant l'unique valeur de r réelle et positive, pour laquelle la fonction métrique s'annule, le paramètre μ peut alors être exprimé en fonction de r_H et R_{AdS} :

$$\mu = r_H \left(1 + \frac{r_H^2}{R_{AdS}^2}\right). \tag{5.88}$$

En partant de la fonction métrique, la coordonnée tortoise et le potentiel vu par une particule scalaire sont donnés, en fonction de r, par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} r^\star &= R_{AdS}^2 \left[\frac{r_H}{3r_H^2 + R_{AdS}^2} \ln\left(\frac{r - r_H}{\sqrt{r^2 + r r_H + r_H^2 + R_{AdS}^2}}\right)\right. \\ &\left. + \frac{3r_H^2 + 2R_{AdS}^2}{(3r_H^2 + R_{AdS}^2)\sqrt{3r_H^2 + 4R_{AdS}^2}} \arctan\left(\frac{2r + r_H}{\sqrt{3r_H^2 + 4R_{AdS}^2}}\right)\right], \end{aligned} \tag{5.89}$$

et

$$V_\ell^2(r) = \left(1 - \frac{\mu}{r} + \frac{r^2}{R_{AdS}^2}\right)\left(\frac{\ell\,(\ell+1)}{r^2} + \frac{\mu}{r^3} + \frac{2}{R_{AdS}^2}\right), \tag{5.90}$$

où le paramètre μ a été conservé dans le potentiel afin d'alléger l'écriture. De plus, le potentiel ne peut être explicitement écrit comme une fonction de la coordonnée tortoise car la relation $r^\star = f(r)$ n'est pas inversible.

Premièrement, la fonction métrique $h(r)$ étant positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction f passant de r à $r^\star$ sera une bijection croissante[6]. Lorsque r tend vers 0, la coordonnée tortoise tend vers $-\infty$ tandis que lorsque r tend vers l'infini, elle tend vers un rayon maximum $r^\star_{SAdS}$ donné par

$$r^\star_{SAdS} = \frac{\pi R_{AdS}^2 (3r_H^2 + 2R_{AdS}^2)}{2(3r_H^2 + R_{AdS}^2)\sqrt{3r_H^2 + 4R_{AdS}^2}}. \tag{5.91}$$

Donc $r^\star$, en tant que fonction, sera une bijection croissante de $[0, +\infty[$ dans $]-\infty, r^\star_{SAdS}]$. En ce qui concerne le potentiel, sa forme générale dépendra du rapport de taille η, défini par $\eta = r_H/R_{AdS}$, entre la taille de l'horizon du trou noir et la taille caractéristique de l'Univers AdS : si $\eta \ll 1$, alors le trou noir est petit en comparaison du rayon de l'Univers AdS et la courbure proche de l'horizon du trou noir est principalement dictée par le trou noir. Dans le cas contraire, *i.e.* $\eta \gg 1$, le trou noir a une taille plus grande que le rayon R_{AdS} et la courbure est dominée par la contribution de la constante cosmologique même très proche de l'horizon du trou noir. Malgré cette dépendance avec la hiérarchie de taille, le comportement asymptotique de ce potentiel reste inchangé quelle que soit la valeur de η. En effet, quand r tend vers l'infini, le potentiel tend aussi vers l'infini car dominé par la contribution de la constante cosmologique alors que le potentiel tend vers zéro quand r tend vers r_H puisque la fonction métrique s'annule à l'horizon du trou noir. De tels comportements asymptotiques ne peuvent dépendre du rapport η car ils proviennent de propriétés fondamentales des espace-temps SAdS. La figure 5.4 représente ce potentiel en fonction de la coordonnée tortoise pour un rapport $\eta \ll 1$. Quelle que soit la valeur du nombre quantique orbital ℓ, ce potentiel exhibe une barrière finie correspondant au potentiel gravitationnel du trou noir[7]. Le potentiel est alors caractérisé par deux extrema locaux, un maximum V_{max} en $r^\star_{max}$ et un minimum V_{min} en $r^\star_{min}$, tout deux dépendant du moment orbital. De plus, la barrière finie avec la barrière infinie en $r^\star_{SAdS}$ délimite un puits de potentiel local. Dans le cas d'un rapport η plus grand que l'unité, le barrière de potentiel finie va disparaître tant que le moment angulaire sera plus petit qu'une valeur critique ℓ_c. Pour $\ell < \ell_c$, le potentiel sera une fonction monotone croissante entre 0 et $+\infty$ tandis que pour $\ell > \ell_c$ le potentiel reprendra la forme donnée par la figure 5.4. Ce comportement est

[6] Nous rappelons que, par définition de la coordonnée tortoise, $\frac{dr^\star}{dr} = h^{-1}(r) = f'(r)$, qui est donc toujours positive.

[7] Il sera montré dans la section suivante que cette barrière finie est responsable des facteurs de corps gris car elle conditionne la possibilité pour une particule d'échapper ou non au potentiel gravitationnel.

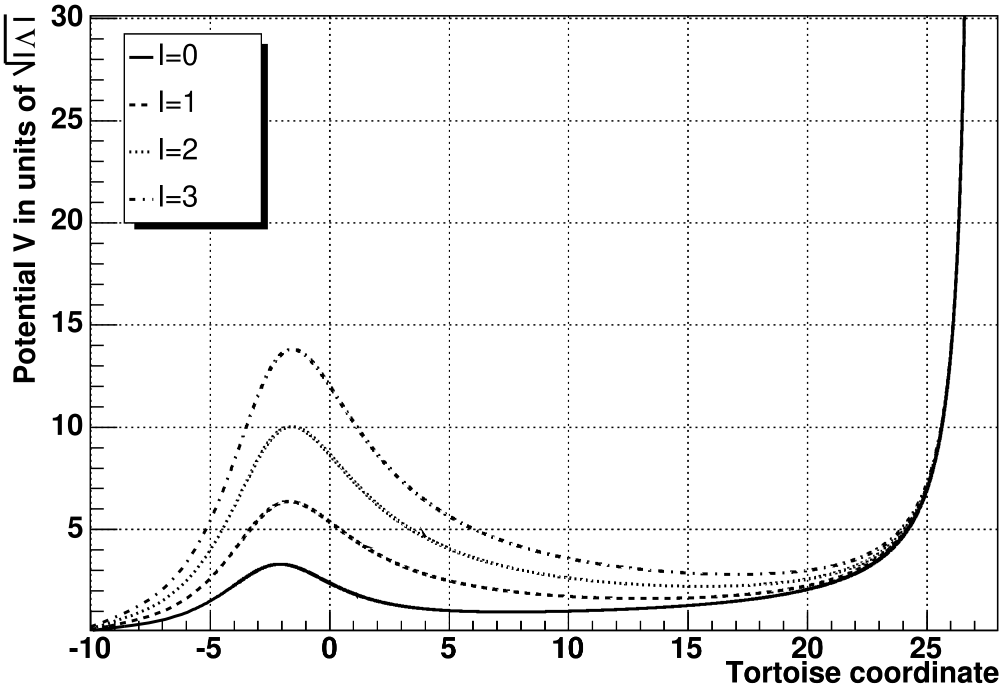


FIG. 5.4 – Potentiel en espace-temps SAdS vu par une particule scalaire, en unité de $\sqrt{|\Lambda|}$, en fonction de la coordonnée tortoise et pour un rapport $\eta \ll 1$ (voir texte pour une définition de η).

une conséquence du fait que pour $\eta > 1$, la courbure à proximité de l'horizon est dominée par la constante cosmologique. Cependant, pour des valeurs suffisamment élevées du moment angulaire, le potentiel centrifuge devient assez important pour faire émerger de nouveau cette barrière de potentiel finie, puisque la probabilité d'échapper au trou noir est accrue pour des moments angulaires plus élevés. La valeur du moment angulaire permettant l'apparition de la barrière de potentiel dépend fortement de la hiérarchie de taille : pour $\eta = 1$ le moment angulaire critique ℓ_c vaut environ 10 alors que pour $\eta = 2$, la valeur critique est déjà de l'ordre du million. Le potentiel, pour ces deux cas, est représenté sur la figure 5.5.

Solution stationnaire à l'ordre WKB

Adoptant un point de vue semi-classique, les fonctions d'onde radiales devront être séparées, selon le nombre de points tournants, en deux classes : d'une part les fonctions d'onde avec une énergie les plaçant dans le puits de potentiel, et affichant trois points tournants, et, d'autre part, les autres, affichant un seul point tournant. Cette caractétristique est en effet primordiale pour l'étude WKB car elle fixe le nombre de zone de jonction, et donc de zone où l'approximation n'est plus valable. La première classe de fonctions d'onde sera donnée pour les énergies comprises dans l'intervalle $[V_{min}, V_{max}]$ et la deuxième classe pour les énergies en dehors de cet intervalle, mais positives. Finalement, toutes les fonctions d'onde seront déterminées en appliquant deux conditions aux limites : premièrement, la valeur de la fonction d'onde doit tomber à zéro en $r^{\star}_{SAdS}$, puisqu'il s'agit d'une barrière de potentiel infinie, et deuxièmement le système est décrit

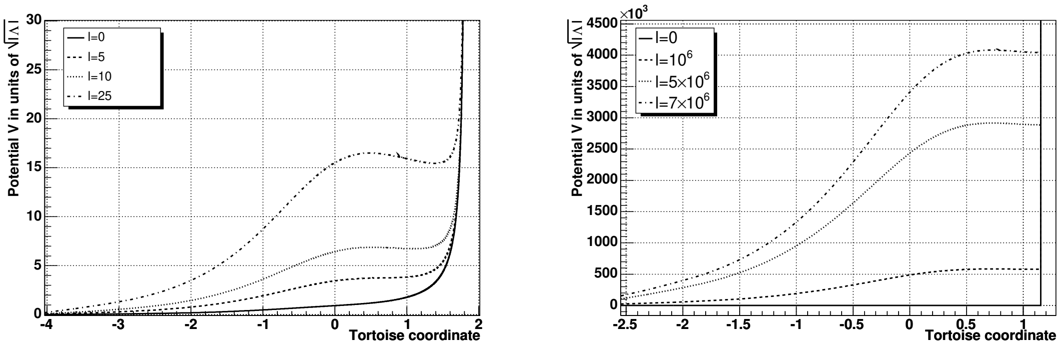


FIG. 5.5 – Potentiel scalaire en espace-temps SAdS en unité de $\sqrt{|\Lambda|}$ en fonction de la coordonnée tortoise $r^\star$ et ce pour différentes valeurs du moment orbital ℓ et deux valeurs du rapport de hiérarchie de taille : $\eta = 1$ à gauche et $\eta = 2$ à droite.

par des ondes planes en $r^\star \to -\infty$ car le potentiel s'annule dans cette région :

$$\tilde{\psi}(r^\star) \to \begin{cases} \frac{A_{in}}{\sqrt{\omega}} e^{-i\omega r^\star} + \frac{A_{out}}{\sqrt{\omega}} e^{i\omega r^\star} & \text{quand } r^\star \to -\infty \\ 0 & \text{quand } r^\star \to r^\star_{\mathrm{SAdS}}. \end{cases} \tag{5.92}$$

En toute généralité, les fonctions d'ondes WKB dans le cas d'un seul point tournant, que nous noterons $r_0^\star$, prennent la forme suivante :

$$\tilde{\psi}(r^\star) = \begin{cases} \frac{A_{out}}{\sqrt{p(r^\star)}} e^{i\int_{r_0^\star}^{r^\star} p(x)dx} + \frac{A_{in}}{\sqrt{p(r^\star)}} e^{-i\int_{r_0^\star}^{r^\star} p(x)dx} & \text{pour } r^\star < r_0^\star \\ \frac{A_{div}}{\sqrt{|p(r^\star)|}} e^{\int_{r_0^\star}^{r^\star} |p(x)|dx} + \frac{A_{eva}}{\sqrt{|p(r^\star)|}} e^{-\int_{r_0^\star}^{r^\star} |p(x)|dx} & \text{pour } r^\star > r_0^\star. \end{cases} \tag{5.93}$$

Les conditions aux limites seront vérifiées si $A_{div} = 0$ et les conditions de jonction sont identiques à celles présentées comme exemple dans la section précédente. La solution finale dans le cas d'un unique point tournant est alors entièrement décrite à l'aide d'une seule amplitude (nous choisirons A_{out}) :

$$\tilde{\psi}(r^\star) = \begin{cases} \frac{A_{out}}{\sqrt{p(r^\star)}} \left(e^{i\int_{r_0^\star}^{r^\star} p(x)dx} - ie^{-i\int_{r_0^\star}^{r^\star} p(x)dx} \right) & \text{pour } r^\star < r_0^\star \\ \frac{A_{eva}}{\sqrt{|p(r^\star)|}} e^{-i\frac{\pi}{4} - \int_{r_0^\star}^{r^\star} |p(x)|dx} & \text{pour } r^\star > r_0^\star. \end{cases} \tag{5.94}$$

Dans le cas de trois points tournants, la fonction d'onde WKB, toujours en toute généralité, s'ecrira cette fois :

$$\tilde{\psi}(r^\star) = \begin{cases} \frac{A_{out}}{\sqrt{p(r^\star)}} e^{i\int_{r_1^\star}^{r^\star} p(x)dx} + \frac{A_{in}}{\sqrt{p(r^\star)}} e^{-i\int_{r_1^\star}^{r^\star} p(x)dx} & \text{pour } r^\star < r_1^\star \\ \frac{A_{div}}{\sqrt{|p(r^\star)|}} e^{\int_{r_1^\star}^{r^\star} |p(x)|dx} + \frac{A_{eva}}{\sqrt{|p(r^\star)|}} e^{-\int_{r_1^\star}^{r^\star} |p(x)|dx} & \text{pour } r_1^\star < r^\star < r_2^\star \\ \frac{B_{out}}{\sqrt{p(r^\star)}} e^{i\int_{r_2^\star}^{r^\star} p(x)dx} + \frac{B_{in}}{\sqrt{p(r^\star)}} e^{-i\int_{r_2^\star}^{r^\star} p(x)dx} & \text{pour } r_2^\star < r^\star < r_0^\star \\ \frac{B_{div}}{\sqrt{|p(r^\star)|}} e^{\int_{r_0^\star}^{r^\star} |p(x)|dx} + \frac{B_{eva}}{\sqrt{|p(r^\star)|}} e^{-\int_{r_0^\star}^{r^\star} |p(x)|dx} & \text{pour } r^\star > r_0^\star. \end{cases} \tag{5.95}$$

Les conditions aux limites sont, comme dans le cas à un seul point tournant, statisfaites en $-\infty$ et seront satisfaites en $r^\star_{SAdS}$ si $B_{div} = 0$. Pour obtenir la solution finale pour la fonction d'onde

WKB, la jonction s'effectue en premier lieu au point tournant $r_0^\star$, car nous avons une condition sur B_{div} puis en $r_2^\star$ et finalement en $r_1^\star$. Le résultat final est alors le suivant :

$$\tilde{\psi}(r^\star) = \begin{cases} \frac{A_{out}}{\sqrt{p(r^\star)}} \left(e^{i\int_{r_1^\star}^{r^\star} p(x)dx} - ie^{-i\int_{r_1^\star}^{r^\star} p(x)dx} \right) & \text{pour } r^\star < r_1^\star \\ \frac{A_{out}}{\sqrt{|p(r^\star)|}} e^{-i\frac{\pi}{4} - \int_{r_1^\star}^{r^\star} |p(x)|dx} & \text{pour } r_1^\star < r^\star < r_2^\star \\ \frac{A_{out}e^{-\tau}}{2\sqrt{p(r^\star)}} \left(e^{i\int_{r_2^\star}^{r^\star} p(x)dx} - ie^{-i\int_{r_2^\star}^{r^\star} p(x)dx} \right) & \text{pour } r_2^\star < r^\star < r_0^\star \\ \frac{A_{out}e^{-\tau}}{2\sqrt{|p(r^\star)|}} e^{-\int_{r_0^\star}^{r^\star} |p(x)|dx} & \text{pour } r^\star > r_0^\star, \end{cases} \tag{5.96}$$

avec $\tau = \int_{r_1^\star}^{r_2^\star} |p(x)|\, dx$. Bien que le comportement général d'une telle solution soit cohérent, il reste un phénomène qui ne peut être retrouvé au premier ordre WKB. En effet, puisqu'il y a une réflexion totale sur la barrière infinie en $r_0^\star$, il est possible de considérer qu'il y a une source de particule à droite de la barrière de potentiel finie. Ainsi le coefficient A_{div} devrait être différent de zéro. Or, au premier ordre WKB, cette amplitude est nulle et les particules restent piégées dans le puits.

A partir des solutions précédentes, nous pouvons calculer la densité de probabilté de présence d'une particule scalaire dans un tel espace temps. Cependant, cette densité de probabilité reste à l'ordre WKB et ne sera pas valide dans certaines régions, en particulier à proximité des points tournants. Cette densité de probabilité ρ est définie ainsi :

$$\begin{aligned} \rho(r^\star) &= i\left[\psi_r(r^\star)e^{-i\omega t}\partial_t\left(\psi_r^\dagger(r^\star)e^{i\omega t}\right) - \psi_r^\dagger(r^\star)e^{i\omega t}\partial_t\left(\psi_r(r^\star)e^{-i\omega t}\right)\right] \\ &= 2\omega\psi_r^\dagger(r^\star)\psi_r(r^\star), \end{aligned} \tag{5.97}$$

ce qui aboutit, dans le cas de trois points tournants, à :

$$\tilde{\rho}(r^\star) = 2\omega\left|A_{out}\right|^2 \begin{cases} \frac{2}{p(r^\star)}\left[1+\cos\left(2\int_{r_1^\star}^{r^\star} p(x)dx + \frac{\pi}{2}\right)\right] & \text{pour } r^\star < r_1^\star \\ \frac{1}{|p(r^\star)|}\exp\left(-2\int_{r_1^\star}^{r^\star}|p(x)|\,dx\right) & \text{pour } r_1^\star < r^\star < r_2^\star \\ \frac{e^{-2\tau}}{2p(r^\star)}\left[1+\cos\left(2\int_{r_2^\star}^{r^\star} p(x)dx + \frac{\pi}{2}\right)\right] & \text{pour } r_2^\star < r^\star < r_0^\star \\ \frac{e^{-2\tau}}{4|p(r^\star)|}\exp\left(-2\int_{r_0^\star}^{r^\star}|p(x)|\,dx\right) & \text{pour } r^\star > r_0^\star, \end{cases} \tag{5.98}$$

et, dans la gamme d'énergie correspondant à un point tournant, à :

$$\tilde{\rho}(r^\star) = 2\omega\left|A_{out}\right|^2 \begin{cases} \frac{2}{p(r^\star)}\left[1+\cos\left(2\int_{r_0^\star}^{r^\star} p(x)dx + \frac{\pi}{2}\right)\right] & \text{pour } r^\star < r_0^\star \\ \frac{1}{|p(r^\star)|}\exp\left(-2\int_{r_0^\star}^{r^\star}|p(x)|\,dx\right) & \text{pour } r_0^\star < r^\star. \end{cases} \tag{5.99}$$

Dans les zones où l'énergie est supérieure au potentiel, la densité de probabilité est donnée par l'interférence entre deux ondes de même amplitude en quadrature alors que, lorsque l'énergie est plus faible que le potentiel, elle décroît avec la profondeur traversée. Cette densité de probabilité est représentée sur la figure 5.6 dans le cas d'un moment orbital $\ell = 6$ pour trois valeurs caractéristiques de l'énergie : une énergie plus petite que le minimum du potentiel, l'unique point tournant $r_0^\star$ étant à gauche de la barrière de potentiel finie ; une énergie telle que la particule tombe dans le puits local, *i.e.* $V_{min} < \omega < V_{max}$, le système présentant cette fois-ci trois points tournants ; et une énergie plus grande que le maximum local du potentiel, le point tournant $r_0^\star$ étant dans ce cas à droite de la barrière finie. L'échelle verticale représente à la fois une échelle en énergie, permettant de cibler la position énergétique de chaque cas, mais aussi en densité de probabilité : pour chaque énergie considérée, le zéro de la densité de probabilité est symbolisé par la ligne horizontale placée à l'énergie considérée. De plus, l'unité de densité de probabilité est identique pour les trois cas, permettant de comparer directement les amplitudes les unes par rapport aux autres. Finalement, la partie à gauche du maximum local n'est pas clairement représentée. Cependant, le potentiel retombant rapidement à zéro lorsque $r^\star \to -\infty$, la densité de probabilité est donnée avec assez de précision par l'interférence d'ondes planes à la fréquence ω :

$$\lim_{r^\star \to -\infty} \rho(r^\star) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(2\omega r^\star + \frac{\pi}{2}) + \varphi\right)\right], \tag{5.100}$$

la phase φ prenant en compte la borne inférieure de l'intégration. Les divergences apparaissant à chaque point tournant illustre la non validité de l'approximation WKB dans de telles régions.

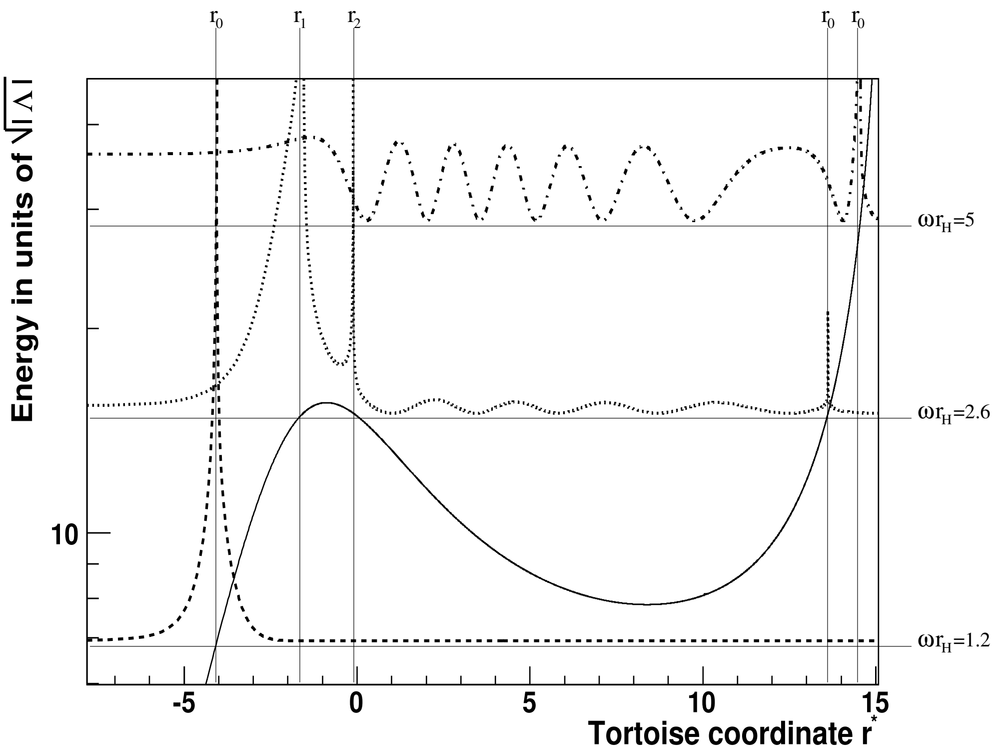


FIG. 5.6 – Densité de probabilité de présence en fonction de la coordonnée tortoise $r^\star$ juxtaposée au potentiel (trait plein) pour un moment orbital $\ell = 6$ et pour $\eta = 0.1$: la ligne en tiret représente le cas $\omega < V_{min}$ case, la ligne en pointillé au cas $V_{min} < \omega < V_{max}$ et la ligne alternée tiret-pointillé au cas $\omega > V_{max}$. Chaque densité de probabilité est placée à la hauteur de son énergie, la ligne horizontale symbolisant le zéro de cette densité. Les différents points tournants sont aussi représentés et l'énergie de chaque cas peut être déterminée, soit en unité de $\sqrt{|\Lambda|}$ sur l'échelle de gauche, soit en unité de r_H^{-1} à droite.

Spectre et largeur de bande des résonances

La présence d'un puits de potentiel local entraîne l'apparition d'états quasi-stationnaires dans la gamme d'énergie se trouvant entre le minimum et le maximum local du potentiel. Ces états quasi-stationnaires correspondent à des résonances dans la densité d'états entièrement caractérisées par leur position en énergie et leur largeur de bande, ces deux quantités étant respectivement données par la partie réelle et la partie imaginaire des fréquences propres complexes. Compte tenu de la forme compliquée du potentiel, il est évident que les caractéristiques des résonances ne peuvent être déterminées analytiquement. Il est alors possible de déterminer ces quantités soit de manière exacte à l'aide d'investigations numériques soit de manière approchée en utilisant les résultats semi-classiques présentés précédemment, permettant ainsi une première estimation des caractéristiques des résonances. A l'ordre semi-classique, les parties réelles et imaginaires des fréquences propres se calculent séparement : la partie réelle correspond aux fréquences de résonance dans le puits et sera donc donnée par la règle de Bohr-Sommerfeld tandis que la partie imaginaire représente le nombre de particules par unité de temps qui traverse la barrière de potentiel finie par effet tunnel et sera donc donnée par la probabilité tunnel T à l'ordre WKB multipliée par le nombre de collisions de particules unité de temps. La fréquence complexe $\nu = \omega - i\Gamma$ est déterminée, dans l'approximation semi-classique, grâce aux deux relations suivantes :

$$\int_{r_2^\star}^{r_0^\star} \sqrt{\omega_{n,\ell}^2 - V^2(r^\star)}dr^\star = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \tag{5.101}$$

$$\Gamma_{n,\ell} = \omega_{n,\ell} \times T. \tag{5.102}$$

La probabilité tunnel à l'ordre WKB peut être calculée grâce à la formule (5.53). Cependant, cette expression n'est valable que pour des barrières élevées en comparaison à l'énergie considérée. Or, dans ce cas précis, les énergies, c'est à dire la partie réelle des fréquences propres, seront souvent comparables au maximum local du potentiel et la formule (5.53) n'est alors plus valable car l'effet tunnel aura lieu proche du seuil. Le problème de la diffusion près du seuil à l'ordre WKB a été traité dans les références [77, 78] où une méthode valide, que l'énergie soit plus faible ou plus élevée que le maximum du potentiel, est proposée. Avec une telle méthode, la probabilité tunnel est alors donnée par :

$$T = \frac{1}{1+e^{2i\pi(\mu+1/2)}}, \tag{5.103}$$

avec

$$\mu + 1/2 = ip^2(r^\star_{max})\left[2\left.\frac{d^2p^2(r^\star)}{dr^{\star 2}}\right|_{r^\star_{max}}\right]^{-1/2}. \tag{5.104}$$

La dérivée seconde de p^2 étant négative en $r^\star_{max}$, la quantité $\mu+1/2$ sera un imaginaire pur et la probabilité T sera bien réelle.

Le calcul explicite des fréquences propres dans le cas de la propagation dans un espace-temps SAdS requiert de prendre certaines précautions. En particulier, ne pouvant inverser la relation $r^\star = f(r)$, il est donc impossible d'exprimer explicitement le potentiel comme une fonction de $r^\star$. Cependant, comme le passage de r à $r^\star$ est une bijection croissante, nous pouvons utiliser directement la coordonnée radiale de Schwarzschild r plutôt que $r^\star$. Ainsi, les positions r_{min} et r_{max} des extrema seront données en résolvant l'équation $\frac{dV^2}{dr} = 0$ et les points tournants r_i en résolvant l'équation $V^2(r) = \omega^2$. Une fois passées dans le système de coordonnées de Schwarzschild, les parties réelle et imaginaire des fréquences propres se déduisent des deux relations ci-dessous :

$$\int_{r_2}^{r_0} \sqrt{\omega_{n,\ell}^2 - V^2(r)}\frac{dr}{h(r)} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \tag{5.105}$$

$$\Gamma_{n,\ell} = \frac{\omega_{n,\ell}}{1+e^{2i\pi(\mu+1/2)}}, \tag{5.106}$$

avec

$$\mu + 1/2 = ip^2(r_{max})\left[2\frac{d}{dr}\left.\left(h(r)\frac{d}{dr}\left(h(r)p^2(r)\right)\right)\right|_{r_{max}}\right]^{-1/2}. \tag{5.107}$$

Pour déterminer les valeurs de $\omega_{n,\ell}$ et de $\Gamma_{n,\ell}$ des calculs numériques sont pourtant indispensables, tout d'abord afin de déterminer la position des extrema du potentiel ainsi que les points tournants r_2 et r_0, ensuite pour résoudre l'équation algébrique que constitue la règle de Bohr-Sommerfeld et aboutir à $\omega_{n,\ell}$. Une fois la partie réelle déterminée, il est aisé de calculer la largeur de bande puisque l'expression de $\mu + 1/2$ peut se calculer analytiquement en fonction de $\omega_{n,\ell}$ et r_{max}. Les fréquences propres $\nu_{n,\ell}$ peuvent être considérées comme des fonctions de quatre variables : l'entier n, le moment orbital ℓ et les deux échelles de grandeur caractéristiques des espace-temps SAdS r_H et R_{AdS}. Les études numériques à l'ordre WKB tendent à montrer que l'influence des paramètres (n, ℓ) peut être découplée de celle des paramètres (r_H, R_{AdS}). Plus particulièrement, ces fréquences propres peuvent toujours s'exprimer en unité de R_{AdS}^{-1} et se sépareront en produit de deux fonctions, une dépendant du couple (n, ℓ) et l'autre du rapport $\eta = r_H/R_{AdS}$:

$$\begin{aligned} \omega_{n,\ell} &= g_1(n,\ell) \times g_2(\eta) \times R_{AdS}^{-1}, && (5.108)\\ \Gamma_{n,\ell} &= g_3(n,\ell) \times g_4(\eta) \times R_{AdS}^{-1}. && (5.109) \end{aligned}$$

La décomposition ci-dessus n'est cependant pas mathématiquement prouvée et n'est probablement valable qu'à l'ordre semi-classique. Les résultats seront présentés en unité de R_{AdS}^{-1} pour quatre valeurs du rapport η de hiérarchie de taille, $\eta = \{0.0005, 0.001, 0.01, 0.1\}$, correspondant tous à des cas où la barrière de potentiel finie est présente à tous les ordres multipolaires. L'ensemble des résultats est présenté dans les tableaux 5.1 à 5.4. Les traits apparaissant dans le tableau 5.4 pour certaines valeurs du couple (n, ℓ) signifient que ces modes de résonance ne sont pas autorisés car ils correspondraient à une énergie supérieure à V_{max}.

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\ell=0$	$2.49 - i0.24$	$4.51 - i0.44$	$6.52 - i0.63$	$8.53 - i0.83$
$\ell=1$	$3.82 - i0.02$	$5.82 - i0.04$	$7.82 - i0.05$	$9.82 - i0.07$
$\ell=2$	$4.86 - i1.6\ 10^{-3}$	$6.86 - i2.3\ 10^{-3}$	$8.86 - i3.0\ 10^{-3}$	$10.85 - i3.7\ 10^{-3}$
$\ell=3$	$5.88 - i9.0\ 10^{-5}$	$7.88 - i1.2\ 10^{-4}$	$9.88 - i1.5\ 10^{-4}$	$11.87 - i1.8\ 10^{-4}$
$\ell=4$	$6.88 - i4.6\ 10^{-6}$	$8.88 - i6.0\ 10^{-6}$	$10.88 - i7.3\ 10^{-6}$	$12.88 - i8.7\ 10^{-6}$
$\ell=5$	$7.89 - i2.3\ 10^{-7}$	$9.89 - i2.9\ 10^{-7}$	$11.88 - i3.5\ 10^{-7}$	$13.88 - i4.1\ 10^{-7}$

TAB. 5.1 – Fréquences propres complexes $(\nu_{n,\ell} \times R_{AdS})$ pour $\eta = 5 \times 10^{-4}$ en fonction du nombre quantique orbital ℓ et de l'entier n impliqué dans la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld.

Lorsque le rapport η tend vers zéro, cela signifie que l'espace-temps devient purement AdS et les états quasi-stationnaires doivent tendre vers les états stationnaires obtenus dans un univers AdS. Excepté pour le cas $\ell = 0$, nous voyons que la partie imaginaire de $\nu_{n,\ell}$ tend bien vers zéro et la partie réelle vers $(2n + \ell + 3)R_{AdS}^{-1}$ quand $\eta \to 0$. Cependant, dans le cas $\ell = 0$ la partie réelle ne tend pas vers la fréquence propre obtenue dans le cas AdS, valant à l'ordre semi-classique, $(2n + \frac{3}{2} + \sqrt{2})R_{AdS}^{-1}$, mais vers le résultat suivant :

$$\lim_{\eta \to 0} (\omega_{n,0}) = \left(2n + 1 + \sqrt{2}\right) R_{AdS}^{-1}, \tag{5.110}$$

qui correspond au résultat qui aurait été obtenu si le fait que le puits de potentiel dans un univers AdS présente un mur infiniment pentue en $r^\star = 0$ et $\ell = 0$ n'avait pas été pris en compte. Pourtant cette précaution n'a pas à être considérée pour un espace-temps SAdS, la

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\ell=0$	$2.51-i0.24$	$4.54-i0.44$	$6.55-i0.64$	$8.56-i0.83$
$\ell=1$	$3.83-i0.027$	$5.82-i0.042$	$7.82-i0.057$	$9.81-i0.071$
$\ell=2$	$4.86-i1.6\ 10^{-3}$	$6.86-i2.3\ 10^{-3}$	$8.86-i3.0\ 10^{-3}$	$10.85-i3.7\ 10^{-3}$
$\ell=3$	$5.88-i9.0\ 10^{-5}$	$7.87-i1.2\ 10^{-4}$	$9.87-i1.5\ 10^{-4}$	$11.87-i1.8\ 10^{-4}$
$\ell=4$	$6.88-i4.6\ 10^{-6}$	$8.88-i6.0\ 10^{-6}$	$10.88-i7.4\ 10^{-6}$	$12.88-i8.7\ 10^{-6}$
$\ell=5$	$7.89-i2.3\ 10^{-7}$	$9.89-i2.9\ 10^{-7}$	$11.89-i3.5\ 10^{-7}$	$13.88-i4.1\ 10^{-7}$

TAB. 5.2 – Fréquences propres complexes ($\nu_{n,\ell} \times R_{AdS}$) pour $\eta = 10^{-3}$ en fonction du nombre quantique orbital ℓ et de l'entier n impliqué dans la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld.

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\ell=0$	$2.61-i0.26$	$4.64-i0.47$	$6.63-i0.70$	$8.62-i0.97$
$\ell=1$	$3.82-i0.028$	$5.79-i0.044$	$7.77-i0.060$	$9.74-i0.079$
$\ell=2$	$4.85-i1.7\ 10^{-3}$	$6.83-i2.4\ 10^{-3}$	$8.81-i3.2\ 10^{-3}$	$10.78-i4.1\ 10^{-3}$
$\ell=3$	$5.87-i9.2\ 10^{-5}$	$7.85-i1.2\ 10^{-4}$	$9.83-i1.6\ 10^{-4}$	$11.80-i2.0\ 10^{-4}$
$\ell=4$	$6.88-i4.8\ 10^{-6}$	$8.86-i6.2\ 10^{-6}$	$10.84-i7.7\ 10^{-6}$	$12.82-i9.3\ 10^{-6}$
$\ell=5$	$7.88-i2.4\ 10^{-7}$	$9.87-i3.0\ 10^{-7}$	$11.85-i3.7\ 10^{-7}$	$13.83-i4.4\ 10^{-7}$

TAB. 5.3 – Fréquences propres complexes ($\nu_{n,\ell} \times R_{AdS}$) pour $\eta = 10^{-2}$ en fonction du nombre quantique orbital ℓ et de l'entier n impliqué dans la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld.

barrière de potentiel n'étant pas infiniment pentue, ni à gauche ni à droite, et ce pour tous les ordres multipolaires. Autrement dit, à l'ordre WKB, il existe une transition singulière entre les espaces-temps SAdS et un univers AdS. Il peut cependant être conjecturé qu'un tel comportement persiste à un ordre purement quantique puisque le potentiel SAdS ne semble pas tendre continûment vers le potentiel AdS lorsque le rapport η tend vers zéro. Il reste tout de même à se poser la question de savoir si une telle transition d'un espace-temps SAdS vers un Univers AdS peut avoir lieu car cela signifierait qu'un trou noir puisse s'évaporer totalement sans laisser de singularité nue. Il est aussi important de noter que dans un Univers où le nombre total de dimensions serait strictement supérieur à 4, alors la discontinuité du potentiel en espace AdS en $(r^\star, \ell) = (0, 0)$ disparaît : quel que soit l'ordre multipolaire, le potentiel AdS diverge quand $r^\star \to 0$. Ainsi la transition singulière entre espace-temps SAdS et AdS disparaît elle aussi.

5.2.3 Conclusion

Il a été montré dans ce chapitre que la propagation de particules scalaires dans un espace-temps de type Schwarzschild peut être facilement abordée à l'ordre semi-classique. Pour cela, j'ai démontré que l'ensemble des résultats semi-classiques connus en Mécanique Quantique se retrouvait dans le cas relativiste grâce à un developpement du propagateur quantique autour du chemin classique. Cela requiert cependant de garder à l'esprit que la relation de dispersion n'est plus donnée par la loi de Hamilton-Jacobi non-relativiste mais par la relation de dispersion qu'aurait une particule relativiste dont la masse dépend de la position. L'apparition de cette masse effective dépendant de l'espace correspond à l'effet commun du potentiel gravitationnel et du potentiel centrifuge.

Ce formalisme semi-classique a alors été appliqué dans le cas de la propagation de particules scalaires dans des espaces-temps Anti-de Sitter et Schwarzschild-Anti-de Sitter. J'ai montré dans le premier cas que le spectre de fréquences normales du champ doit être discret. Les valeurs de ces fréquences sont déterminées à l'ordre semi-classique mais aussi de manière exacte,

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\ell=0$	$2.65-i0.75$	/	/	/
$\ell=1$	$3.6-i0.12$	$5.4-i0.95$	/	/
$\ell=2$	$4.74-i8.6\ 10^{-3}$	$6.52-i0.055$	$8.22-i0.459$	$9.81-i3.42$
$\ell=3$	$5.77-i5.5\ 10^{-4}$	$7.58-i2.8\ 10^{-3}$	$9.34-i0.019$	$11.03-i0.15$
$\ell=4$	$6.79-i3.4\ 10^{-5}$	$8.62-i1.5\ 10^{-4}$	$10.41-i8.2\ 10^{-4}$	$12.15-i5.5\ 10^{-3}$
$\ell=5$	$7.80-i2.0\ 10^{-6}$	$9.65-i8.3\ 10^{-6}$	$11.46-i3.9\ 10^{-5}$	$13.23-i2.2\ 10^{-4}$

TAB. 5.4 – Fréquences propres complexes ($\nu_{n,\ell} \times R_{AdS}$) pour $\eta = 10^{-1}$ en fonction du nombre quantique orbital ℓ et de l'entier n impliqué dans la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld.

permettant une évaluation *empirique* de la précision du développement WKB en espace AdS : l'erreur relative sur le spectre de fréquences normales, à l'ordre WKB, n'excède pas quelques pourcents et tombe très rapidement en-dessous du pourcent pour des fréquences plus élevées.

Une telle précision suggère d'appliquer cette approximation au cas des espaces-temps SAdS pour lesquel aucun résultat exact, analytique ou numérique, n'est connu. J'ai pu alors montrer que des résonances dans la densité d'états apparaissent puisque le potentiel affiche un puits local. Les caractéristiques de ces résonances, spectre en fréquence normale et temps de vie, ont été évaluées à l'ordre semi-classique. Cette étude soulève un point particulier des espaces-temps AdS et SAdS : pour un nombre de dimensions égal à 4, le spectre en énergie des résonances monopolaires subit une transition singulière lors du passage d'un espace SAdS à un espace AdS. Ce point est doublement intéressant : il touche d'une part à la fin de vie des trous noirs (si le trou noir ne disparaît pas, alors la transition singulière ne peut avoir lieu) et d'autre part, il n'apparaît que si l'espace-temps est quadri-dimensionnel (pour $D > 4$, le potentiel en espace AdS est un puits de potentiel à *tous* les ordres multipolaires).

Différentes pistes peuvent alors être envisagées pour étendre ces études semi-classiques. La première voix, présentée dans le chapitre qui suit, consiste à effectuer ce développement autour des solutions classiques dans l'espace des configurations de champs, $\Phi(\vec{x}, t)$, plutôt que dans l'espace de configuration à une particule, (ξ^α). La deuxième voix, en cours d'investigation [91], consiste quant à elle à généraliser l'approximation semi-classique à n'importe quel type d'espace-temps afin d'obtenir une expression WKB du propagateur décrivant la dynamique d'une particule scalaire. Les résultats préliminaires suivant cette seconde piste soulignent d'une part une analogie entre le propagateur pour des particules se déplaçant en espace courbe et le propagateur à énergie fixée en Mécanique Quantique non-relativiste ; la masse de la particule dans le cas relativiste jouant un rôle similaire à l'énergie dans l'étude non-relativiste. D'autre part, les équations du mouvement semi-classiques pour la propagation dans une métrique de fond quelconque se ramènent à une équation de conservation du quadri-courant d'amplitude de probabilité, défini à l'ordre semi-classique ; une extension naturelle du résultat obtenu dans ce chapitre pour la propagation en espaces de type Schwarzschild.

Chapitre 6

Développement semi-classique dans l'espace de configuration du champ : quelques perspectives

Les méthodes semi-classiques peuvent être étendues au-delà de la résolution approchée de l'équation de Schrödinger. En théorie quantique des champs, il est possible de définir deux types d'espaces de phase : l'espace de phase à une particule (ξ, p), avec $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}$, et l'espace de phase du champ (Φ, Π), avec $\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}}$. L'étude semi-classique précédente se tenait dans l'espace de phase à une particule mais elle pourrait être menée dans l'espace de phase des champs eux-mêmes. Cette extension de l'approximation semi-classique pourrait trouver des applications prometteuses pour la propagation de champs en espaces courbes à la fois dans le domaine de la prédiction (possibilité de calculer l'évolution du champ dans des métriques de fond compliquées) et dans celui de l'interprétation (évolution de l'amplitude de probabilité d'être dans une configuration de champ donnée).

Dans ce chapitre, les préliminaires d'un formalisme semi-classique dans l'espace de configuration du champ seront abordés. Pour cela, la représentation de Schrödinger de la théorie quantique des champs [92], dont nous rappellerons dans un premier temps les principes fondamentaux, sera adoptée. Après avoir clairement défini le propagateur semi-classique, cette méthode d'approximation sera appliquée à l'étude d'un champ libre se propageant dans un espace-temps Minkowskien et dans un espace-temps de type de Sitter. Les prémices d'une règle de quantification *à la* Bohr-Sommerfeld en théorie des champs seront aussi présentés. Enfin, les limites d'une telle méthode seront mises en exergue dans une dernière partie, dans laquelle les motivations de ce formalisme seront aussi rappelées.

Les développements semi-classiques présentés dans ce chapitre ne sont qu'à un stade préliminaire. Il ne faut donc pas voir l'ensemble de ces calculs comme des résultats définitifs mais comme une première estimation des possibilités semi-classiques dans l'espace de configuration du champ, la rigueur mathématique n'étant pas toujours au rendez-vous.

6.1 Représentation de Schrödinger en théorie des champs

La version la plus populaire de la théorie quantique des champs consiste en une interprétation en terme de particules basée sur une procédure de seconde quantification dans une approche de type Heisenberg. La théorie quantique des champs peut cependant aussi être abordée dans une vision de type Schrödinger : les états quantiques évoluent avec le temps et il est possible de définir un système d'états physiques décrivant la probabilité d'être dans une configuration de champs donnée. Cette représentation de Schrödinger se base sur une approche Hamiltonienne et fait appel au calcul fonctionnel.

Mon objectif étant de formuler le développement semi-classique dans l'espace de configuration de champ, la formulation de Schrödinger de la théorie quantique des champs est indispensable : elle permet une correspondance directe entre l'espace de configuration à une particule ($\vec{x}$) de la Mécanique Quantique non-relativiste avec l'espace du champ ($\Phi(\vec{x})$) de la théorie quantique des champs. C'est dans cette formulation qu'il est possible d'investiguer les chemins quantiques suivis par le champ et d'effectuer un développement perturbatif autour du chemin classique.

6.1.1 Equation fonctionnelle de Schrödinger

L'idée maîtresse de cette représentation est de définir l'équivalent de la fonction d'onde utilisée en Mécanique Quantique non-relativiste : la fonctionnelle de Schrödinger qui sera une fonctionnelle des configurations de champs. Il est assez simple de déterminer une analogie directe entre cette représentation et la Mécanique Quantique non-relativiste. Les quantités dynamiques de la Mécanique Quantique et leur analogue pour la théorie de champs, ainsi que les espaces de Hilbert associés à ces quantités dynamiques, sont représentés dans le tableau 6.1. Tout

Mécanique Quantique	Théorie Quantique des Champs
$\hat{x}$	$\hat{\Phi}(\vec{x})$
$\|x\rangle$ tel que $\hat{x}\,\|x\rangle = \vec{x}\,\|x\rangle$	$\|\Phi\rangle$ tel que $\hat{\Phi}\,\|\Phi\rangle = \Phi(\vec{x})\,\|\Phi\rangle$
$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$	$\hat{\Pi}(\vec{x}) = -i\hbar\frac{\delta}{\delta\Phi(\vec{x})}$
$\psi(\vec{x},t)$	$\Psi\left[\Phi(\vec{x}),t\right]$
$\|\psi(t)\rangle$ tel que $\langle x\|\psi(t)\rangle = \psi(\vec{x},t)$	$\|\Psi(t)\rangle$ tel que $\langle\Phi\|\Psi(t)\rangle = \Psi\left[\Phi(\vec{x}),t\right]$

TAB. 6.1 – Opérateurs canoniques et fonction d'onde en représentation de Schrödinger de la Mécanique Quantique et leur équivalent en théorie quantique des champs.

comme en mécanique quantique, il est possible de définir un espace de Hilbert $|\Psi(t)\rangle$, dont les vecteurs de base évoluent avec le temps et renseignent sur la densité de probabilité pour que le système soit dans une configuration de champ donnée. Les valeurs moyennes des quantités observables sont obtenues en moyennant leur opérateur associé sur l'état quantique dans lequel le système se trouve. Enfin, il est facile de vérifier que la règle de commutation canonique, $[\Phi(\vec{x}),\Pi(\vec{x}')] = i\hbar\delta(\vec{x}-\vec{x}')$, tient toujours grâce à la définition de l'opérateur impulsion. Notons que cet opérateur se définit comme la dérivation fonctionnelle par rapport au champ Φ considéré comme fonction des seules variables spatiales puisque l'approche Hamiltonienne supprime la dépendance en temps des opérateurs $\hat{\Phi}$ et $\hat{\Pi}$. La notation $\frac{\delta}{\delta\Phi(\vec{x})}$ dénote la dérivation fonctionnelle définie par [93] :

$$\frac{\delta G\left[f(\vec{x})\right]}{\delta f(\vec{y})} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{G\left[f(\vec{x})+\varepsilon\delta^3(\vec{y}-\vec{x})\right]-G\left[f(\vec{x})\right]}{\varepsilon}\right\}. \tag{6.1}$$

Dans la définition ci-dessus, la dérivation fonctionnelle se fait par rapport à des fonctions qui seront considérées comme des fonctions des seules variables d'espace. Une telle définition aboutit à la relation $\frac{\delta f(\vec{x})}{\delta f(\vec{y})} = \delta^3(\vec{y}-\vec{x})$.

Enfin, l'évolution des états quantiques s'obtient en résolvant l'équation de Schrödinger appliquée à la fonctionnelle d'onde $\Psi\left[\Phi(\vec{x}),t\right]$. Pour cela, il faut écrire la version quantique de l'équation de Hamilton-Jacobi, exprimée à l'aide des variables canoniques de l'espace de phase qui, pour un champ soumis à un potentiel, prend la forme suivante :

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + V(\Phi)\right], \tag{6.2}$$

l'opérateur ∇ n'agissant que sur les trois dimensions spatiales et V représentant le potentiel. L'équation d'évolution de la fonctionnelle d'onde, qui est donc une équation fonctionnelle, procède de manière identique à la Mécanique Quantique en remplaçant l'Hamiltonien et les deux variables canoniques par leurs opérateurs respectifs :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi\left[\Phi(\vec{x}),t\right] = \int d^3x \left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\delta^2}{\delta\Phi(\vec{x})^2} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + V(\Phi)\right]\Psi\left[\Phi(\vec{x}),t\right]. \tag{6.3}$$

La constante de Planck, excepté dans les cas mentionnés, sera prise égale à 1 par la suite. En multipliant l'équation ci-dessus par $\Psi^\dagger$, une équation fonctionnelle de continuité est obtenue

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left[\Phi(\vec{x}),t\right] + \int d^3x \frac{\delta}{\delta\Phi(\vec{x})}J\left[\Phi(\vec{x}),t\right] = 0, \tag{6.4}$$

avec la densité de probabilité ρ et la densité de courant de probabilité J données par :

$$\rho\left[\Phi(\vec{x}),t\right] = \Psi\left[\Phi(\vec{x}),t\right]\Psi^\dagger\left[\Phi(\vec{x}),t\right] \tag{6.5}$$

$$J\left[\Phi(\vec{x}),t\right] = \frac{i}{2}\left[\Psi^\dagger\left[\Phi(\vec{x}),t\right]\frac{\delta}{\delta\Phi(\vec{x})}\Psi\left[\Phi(\vec{x}),t\right] - \text{H.C.}\right]. \tag{6.6}$$

L'opérateur $\int d^3x \frac{\delta}{\delta\Phi(\vec{x})}$ n'est autre que la généralisation à un nombre de degrés de liberté infini et continu de l'opérateur divergence assurant que l'équation fonctionnelle ci-dessus est bien une équation de continuité.

6.1.2 Espace de Fock en représentation de Schrödinger

Il est possible de trouver la représentation de Schrödinger de l'espace de Fock pour un champ libre. Puisque les vecteurs de base de cet espace correspondent aux états propres de l'Hamiltonien, la fonctionnelle de Schrödinger décrivant un tel état sera un état stationnaire d'énergie E : $\Psi\left[\Phi(\vec{x}),t\right] = \psi\left[\Phi(\vec{x})\right] \times e^{-iEt}$. Une fois cette séparation de variable effectuée, l'équation de Schrödinger prend la forme suivante :

$$E\Psi\left[\Phi(\vec{x}),t\right] = \frac{1}{2}\int d^3x \left[-\frac{\delta^2}{\delta\Phi(\vec{x})^2} + (\nabla\Phi)^2 + m^2\Phi^2\right]\Psi\left[\Phi(\vec{x}),t\right]. \tag{6.7}$$

Puisque le champ est libre, nous pouvons tout aussi bien travailler dans l'espace de Fourier, les opérateurs $\hat{\Phi}$ et $\hat{\Pi}$ prenant la forme suivante :

$$\hat{\Phi} \to \hat{\phi} \quad \text{tel que} \quad \Phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\phi(\vec{k})e^{-\vec{k}\vec{x}} \tag{6.8}$$

$$\hat{\Pi} \to \hat{\pi} \quad \text{tel que} \quad \frac{\delta}{\delta\Phi(\vec{x})} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{k})}e^{-\vec{k}\vec{x}}. \tag{6.9}$$

Une définition de la dérivation fonctionnelle dans l'espace de Fourier est alors déduite et, si appliquée à la fonctionnelle identité dans l'espace de Fourier, donne $\frac{\delta F(\vec{k})}{\delta F(\vec{q})} = (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{q})$. Cela permet d'écrire l'équation de Schrödinger dans l'espace de Fourier, et donc de se débarrasser des termes du type $\partial_i\Phi$:

$$E\Psi\left[\phi(\vec{k}),t\right] = \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[-\frac{\delta^2}{\delta\phi(\vec{k})\delta\phi(-\vec{k})} + \omega_k^2\left|\phi\right|^2\right]\Psi\left[\phi(\vec{k}),t\right], \tag{6.10}$$

avec $\omega_k^2 = k^2 + m^2$. Il sera montré ultèrieurement que le terme $\partial_i \Phi$ peut s'interpréter comme un couplage du champ en un point avec ce même champ en un second point, infiniment proche du premier. Dans l'espace réel, ce couplage n'est pas évident à traiter tandis que dans l'espace de Fourier, ce terme devient un couplage quadratique simple.

Pour trouver la fonctionnelle de Schrödinger pour chaque vecteur de base de l'espace de Fock, il suffit d'adapter la méthode utilisée pour un oscillateur harmonique : i) les opérateurs de création/annihilation $a_k/a_k^\dagger$, sont exprimés en fonction des opérateurs canoniques de champs Φ/Π, ii) l'état fondamental étant vide de particule, impose que l'application de l'opérateur a_k sur sa fonctionnelle donne zéro et iii) les états excités sont construits en appliquant les opérateurs $a_k^\dagger$ sur la fonctionnelle fondamentale. Dans l'espace de Fourier, les opérateurs de création/annihilation s'écrivent :

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\omega_k} \phi(\vec{k}) + \frac{i}{\sqrt{\omega_k}} \frac{\delta}{\delta \phi(\vec{k})} \right], \tag{6.11}$$

$$a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\omega_k} \phi(-\vec{k}) - \frac{i}{\sqrt{\omega_k}} \frac{\delta}{\delta \phi(-\vec{k})} \right], \tag{6.12}$$

où l'opérateur impulsion est directement écrit comme la dérivation fonctionnelle par rapport à la configuration de champ. Puisque le champ est réel dans l'espace direct, sa transformée de Fourier vérifie $\phi^\dagger(\vec{k}) = \phi(-\vec{k})$. En appliquant cette condition sur les opérateurs de création/annihilation, il est montré que $a_k^\dagger = a_{-k}$. Autrement dit, la création d'une particule d'impulsion $\vec{k}$ est équivalente à la destruction d'une particule d'impulsion $-\vec{k}$[1]. En appliquant l'opérateur a_k à l'état fondamental, nous obtenons l'équation fonctionnelle suivante pour la fonctionnelle de Schrödinger ψ_0 de l'état vide [94] :

$$\left[\frac{\delta}{\delta \phi(\vec{k})} + \omega_k \phi(\vec{k}) \right] \psi_0 \left[\phi(\vec{k}) \right] = 0, \tag{6.13}$$

dont la solution est donnée par une gaussienne centrée en zéro et d'écart-type $\omega_k^{-1/2}$:

$$\psi_0 \left[\phi(\vec{k}) \right] = N \exp \left(-\frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_k \left| \phi(\vec{k}) \right|^2 \right). \tag{6.14}$$

Dans l'espace réel, cette fonctionnelle s'écrit [94] :

$$\psi_0 \left[\Phi(\vec{x}) \right] = N \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^3 x \Phi(\vec{x}) \sqrt{m^2 - \nabla^2} \Phi(\vec{x}) \right). \tag{6.15}$$

Nous n'avons plus qu'à appliquer les opérateurs création sur la fonctionnelle ci-dessus pour obtenir l'ensemble des vecteurs de bases. Pour simplifier les calculs, nous travaillerons dans une approximation discrète dans l'espace de Fourier : $\int d^3k/(2\pi)^3 \to \sum_k$. La fonctionnelle fondamentale prend alors la forme suivante :

$$\psi_0 \left[\phi(\vec{k}) \right] = N \prod_k \exp \left(-\frac{1}{2} \omega_k \left| \phi(\vec{k}) \right|^2 \right). \tag{6.16}$$

Il suffit maintenant d'appliquer successivement les opérateurs création à une impulsion k donnée pour obtenir les états à plusieurs particules, le résultat attendu devant être similaire à celui des états excités d'un oscillateur harmonique. Plus précisément, la fonctionnelle à plusieurs particules sera, par extension de la fonctionnelle ci-dessus, le produit tensoriel de différents oscillateurs harmoniques, chaque fréquence correspondant à l'énergie de la ou des particules, la

[1] Mentionnons que dans la décomposition du champ, particules et antiparticules sont identiques.

variable de position x étant remplacée par la valeur du champ $\phi(\vec{k})$ à l'impulsion considérée. Commençons par l'état à une particule à l'énergie ω_q :

$$\psi_{1_q}\left[\Phi(\vec{x})\right] = a_q^\dagger \psi_0\left[\phi(\vec{k})\right] = \sqrt{2\omega_q}\phi(-\vec{q})\psi_0\left[\phi(\vec{k})\right]. \tag{6.17}$$

Dans cette expression, on voit clairement que cet état correspond bien au produit tensoriel d'une excitation d'un oscillateur harmonique à la fréquence ω_q, *i.e.* une particule à l'énergie ω_q, avec une infinité d'oscillateurs harmoniques non-excités, *i.e.* vide de particules, ayant une énergie différente de ω_q. En appliquant n fois l'opérateur $a_q^\dagger$ avec les constantes de normalisation, qui sont de fait rigoureusement égales à celles d'un oscillateur harmonique, nous obtenons pour l'état $|n_q\rangle$ la fonctionnelle ci-dessous :

$$\psi_{n_q} = \left(\frac{\omega_q}{\pi}\right)^{1/4} \frac{H_{n_q}\left(\sqrt{\omega_q}\phi(-\vec{q})\right)}{\sqrt{2^{n_q} n_q!}}\psi_0\left[\phi(\vec{k})\right]. \tag{6.18}$$

La fonction H_{n_q} dénote le polynôme de Hermite d'ordre n_q. Nous pouvons maintenant construire n'importe quel état $|..., n_k, ...\rangle$ ayant plusieurs particules à des énergies différentes qui prendra donc l'apparence du produit tensoriel de plusieurs oscillateurs harmoniques à différents degrés d'excitation :

$$\psi_{...,n_k,...}\left[\phi(\vec{k})\right] = \mathcal{N}\left\{\prod_k \left(\frac{\omega_k}{\pi}\right)^{1/4} \frac{H_{n_k}\left(\sqrt{\omega_k}\phi(-\vec{k})\right)}{\sqrt{2^{n_k} n_k!}} e^{-\frac{1}{2}\omega_k\left|\phi(\vec{k})\right|^2}\right\}. \tag{6.19}$$

L'énergie d'un tel état s'obtient finalement en injectant cette solution dans l'équation de Schrödinger (6.10). L'énergie vaut alors :

$$E_{...,n_k,...} = \sum_k \omega_k\left(n_k + \frac{1}{2}\right), \tag{6.20}$$

qui est, heureusement, égale à l'énergie obtenue dans l'approche standard. Enfin, dans l'approximation d'un spectre discret, les vecteurs de base de l'espace de Fock ont la représentation de Schrödinger suivante :

$$\begin{aligned}\Psi_{|...,n_k,...\rangle}\left[\phi(\vec{k}), t\right] \quad &= \quad \mathcal{N}\left\{\prod_k \left(\frac{\omega_k}{\pi}\right)^{1/4} \frac{H_{n_k}\left(\sqrt{\omega_k}\phi(-\vec{k})\right)}{\sqrt{2^{n_k} n_k!}}\right. \\ &\qquad \left.\times \exp\left(-i\omega_k\left(n_k + \frac{1}{2}\right)t - \frac{1}{2}\omega_k\left|\phi(\vec{k})\right|^2\right)\right\},\end{aligned} \tag{6.21}$$

qui correspond bien au produit tensoriel d'excitations d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques, non-couplés les uns aux autres puisque le champ est libre.

La représentation de Schrödinger de l'espace de Fock pour un champ scalaire libre avait aussi été déterminée par les auteurs de la référence [95] à l'aide de deux méthodes. La première consiste à résoudre directement l'équation de Schrödinger pour des états stationnaires en cherchant les solutions sous forme gaussienne. La seconde procède de manière identique à celle exposée ci-dessous mais généralisée au cas d'un spectre continu dans l'espace de Fourier. Dans ce cas ci, une généralisation à un nombre de degrés de liberté continu des polynômes de Hermite intervient dans la fonctionnelle :

$$\Psi_n\left[\phi(\vec{k}), t\right] = \mathcal{N}e^{-iE_n t} H_n\left[..., \phi(\vec{k}_i), ...; ..., \vec{k}_i, ...\right]\psi_0\left[\phi(\vec{k})\right], \tag{6.22}$$

dont une expression explicite est fournie dans la référence [95]. Une construction de l'espace de Fock en représentation de Schrödinger dans l'espace réel et dans l'espace de Fourier, se trouve dans la référence [92]. La méthode est identique à celle présentée ici en appliquant les opérateurs création exprimés dans l'espace réel sur la fonctionnelle de l'état fondamental donnée par l'expression (6.15).

6.1.3 Propagateur quantique

Définition et équation d'évolution

A partir de cette approche de Schrödinger, il est possible de définir un propagateur quantique donnant la probabilité que le système présente la configuration Φ à un instant t, celui-ci étant dans la configuration Φ_0 à un instant initial t_0. Ce propagateur s'exprime naturellement en fonction de l'opérateur évolution $\hat{U}(t,t_0)$:

$$K\left[\Phi,t,\Phi_0,t_0\right] = \langle\Phi,t|\Phi_0,t_0\rangle = \langle\Phi|\,\hat{U}(t,t_0)\,|\Phi_0\rangle\,\Theta(t-t_0). \tag{6.23}$$

Puisque les états $|\Psi(t)\rangle$ forment une base de l'espace des états physiques, nous pouvons exprimer ce propagateur en fonction des fonctionnelles de Schrödinger à l'instant initial et final :

$$\begin{aligned} K\left[\Phi,t,\Phi_0,t_0\right] &= \int\mathcal{D}\left[\Psi\right]\langle\Phi|\,\hat{U}(t,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle\,\langle\Psi(t_0)|\Phi_0\rangle\,\Theta(t-t_0) \qquad (6.24)\\ &= \int\mathcal{D}\left[\Psi\right]\Psi\left[\Phi,t\right]\Psi^\dagger\left[\Phi_0,t_0\right]\Theta(t-t_0), \end{aligned}$$

avec la mesure du champ donnée par $\mathcal{D}\left[\Psi\right] = \prod_x d\Phi(\vec{x})$. L'évolution du propagateur s'obtient en lui appliquant l'opérateur $i\frac{\partial}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}K\left[\Phi,t,\Phi_0,t_0\right] &= i\int\mathcal{D}\left[\Psi(t_0)\right]\Psi^\dagger\left[\Phi_0,t_0\right]\frac{\partial}{\partial t}\Psi\left[\Phi,t\right]\Theta(t-t_0) \qquad (6.25)\\ &\quad +i\int\mathcal{D}\left[\Psi(t_0)\right]\Psi^\dagger\left[\Phi_0,t_0\right]\Psi\left[\Phi,t\right]\delta(t-t_0), \end{aligned}$$

qui devient ,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K\left[\Phi,t,\Phi_0,t_0\right] = \hat{H}K\left[\Phi,t,\Phi_0,t_0\right] + i\hbar\delta(\Phi-\Phi_0)\delta(t-t_0), \tag{6.26}$$

puisque Ψ est solution de l'équation de Schrödinger $i\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi$. La constante de Planck a été de nouveau introduite dans l'équation ci-dessus car cette dernière représente l'équation centrale de l'évolution du propagateur.

Propagateur pour un champ libre

Grâce à la représentation de Schrödinger de l'espace de Fock pour un champ libre, le propagateur quantique peut être explicitement dérivé. Les états $|...,n_k,...\rangle$ formant une base orthonormée, ce dernier sera le produit sur chaque mode de Fourier $\vec{k}$ du propagateur d'un unique oscillateur harmonique :

$$\begin{aligned} K\left[\phi,t;\phi_0,t_0\right] &= \sum_{...,n_k,...}\Psi_{...,n_k,...}\left[\phi(\vec{k}),t\right]\Psi^\dagger_{...,n_k,...}\left[\phi_0(\vec{k}),t_0\right] \qquad (6.27)\\ &= \prod_k\sum_{n_k}\Psi_{(n_k)}\left(\phi(\vec{k}),t\right)\Psi^\dagger_{(n_k)}\left(\phi_0(\vec{k}),t_0\right). \qquad (6.28) \end{aligned}$$

La fonction $\Psi_{(n_k)}$ correspond à la fonction d'onde d'un état excité d'ordre n_k d'un oscillateur harmonique de fréquence ω_k dont les arguments sont la valeur du champ ϕ en $\vec{k}$ et le temps. Puisque Φ est réel, $\phi^\dagger(\vec{k}) = \phi(-\vec{k})$. Nous prendrons comme convention pour le calcul du propagateur que $\phi\equiv\phi(\vec{k})$ et $\phi^\dagger\equiv\phi(-\vec{k})$ ainsi que Δt pour l'intervalle de temps $(t-t_0)$ afin d'alléger les écritures.

Pour effectuer la somme sur l'entier n, nous utilisons la règle de somme des polynômes de Hermite qui s'écrit [96], pour des arguments réels :

$$e^{-(x^2+y^2)}\sum_{n=0}\frac{z^n}{2^n n!}H_n(x)H_n(y)=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2-2xyz}{1-z^2}\right). \tag{6.29}$$

Cette somme apparaît dans le propagateur quantique pour un champ libre, une fois les fonctions $\Psi_{(n_k)}$ explicitement écrites, avec des arguments complexes :

$$\begin{aligned}K\left[\phi,t;\phi_0,t_0\right] &= \prod_k\sum_{n_k}\sqrt{\frac{\omega_k}{\pi}}\frac{H_{n_k}\left(\sqrt{\omega_k}\phi^\dagger\right)H_{n_k}\left(\sqrt{\omega_k}\phi_0\right)}{2^{n_k}n_k!} \\ &\quad\times\exp\left(-i\omega_k\left[n_k+\frac{1}{2}\right]\Delta t-\frac{1}{2}\omega_k\left[|\phi|^2+|\phi_0|^2\right]\right).\end{aligned} \tag{6.30}$$

Une fois la règle de somme étendue au cas d'arguments complexes, le propagateur prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}K\left[\phi,t;\phi_0,t_0\right] &= \prod_k\sqrt{\frac{\omega_k}{2i\pi\sin\left(\omega_k\Delta t\right)}}\exp\left(\frac{\omega_k}{2}\left[|\phi|^2+|\phi_0|^2\right]\right) \\ &\quad\times\exp\left(\left[\frac{i\omega_k}{2\sin\left(\omega_k\Delta t\right)}\right]\left[\left(|\phi|^2+|\phi_0|^2\right)e^{i\omega_k\Delta t}-2\mathrm{Re}\left[\phi^\dagger\phi_0\right]\right]\right).\end{aligned} \tag{6.31}$$

Finalement, l'expression du propagateur ci-dessus se simplifie en combinant les deux exponentielles pour donner l'expression suivante :

$$\begin{aligned}K\left[\phi,t;\phi_0,t_0\right] &= \prod_k\sqrt{\frac{\omega_k}{2i\pi\sin\left(\omega_k\Delta t\right)}}\exp\left(\left[\frac{i\omega_k}{2\sin\left(\omega_k\Delta t\right)}\right]\right. \\ &\quad\left.\times\left[\left(|\phi|^2+|\phi_0|^2\right)\cos\left(\omega_k\Delta t\right)-2\mathrm{Re}\left[\phi^\dagger\phi_0\right]\right]\right).\end{aligned} \tag{6.32}$$

Il est de nouveau retrouvé qu'un champ libre est un ensemble d'oscillateurs harmoniques non-couplés puisque son propagateur est donné par le produit tensoriel des propagateurs de chaque oscillateur harmonique à la fréquence propre ω_k [97].

6.2 Développement semi-classique

6.2.1 Propagateur à l'ordre semi-classique

Expression générale

Le propagateur quantique en théorie de champ peut aussi s'écrire comme une intégrale de chemin sur l'ensemble des configurations de champ liant l'état initial à l'état final, l'amplitude de probabilité d'être sur un chemin donné étant fournie par l'action :

$$K\left[\Phi,t;\Phi_0,t_0\right]=\int_{\Phi_0(t_0)}^{\Phi(t)}\mathcal{D}\left[\bar{\Phi}\right]\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\left[\bar{\Phi},\bar{t}\right]\right). \tag{6.33}$$

La notation $\bar{\Phi}$ signifie tous les chemins que suit le champ. Le propagateur est ici écrit en faisant apparaître la constante de Planck en vue du développement semi-classique qui consiste à ne considérer, comme dans l'espace de phase à une particule, que les premières corrections quantiques autour du chemin classique. Pour cela, nous effectuons un développement limité au deuxième ordre de l'action autour de sa valeur sur le chemin classique. En écrivant $\bar{\Phi} = \tilde{\Phi} + \delta\bar{\Phi}$[2], ce développement prend la forme :

$$S\left[\bar{\Phi}, \bar{t}\right] = S_0\left[\bar{\Phi}, \bar{t}\right] + S_1\left[\bar{\Phi}, \bar{t}\right] + S_2\left[\bar{\Phi}, \bar{t}\right] + \mathcal{O}\left(\delta\bar{\Phi}^3\right), \tag{6.34}$$

avec

$$S_0\left[\bar{\Phi}, \bar{t}\right] = \tilde{S}\left[\tilde{\Phi}, t\right] \tag{6.35}$$

$$S_1\left[\bar{\Phi}, \bar{t}\right] = 0 \tag{6.36}$$

$$S_2\left[\bar{\Phi}, \bar{t}\right] = \frac{1}{2}\int dt d^3x \left[\left(\partial_t \delta\bar{\Phi}\right)^2 - \left(\nabla\delta\bar{\Phi}\right)^2 - \left.\frac{\delta^2 V}{\delta\Phi^2}\right|_{\tilde{\Phi}} \left(\delta\bar{\Phi}\right)^2\right]. \tag{6.37}$$

Le terme d'ordre zéro correspond à l'action classique. Celui du premier ordre est évidemment nul en vertu du principe de moindre action $\frac{\delta S}{\delta\Phi(\vec{x},t)} = 0$. Enfin, le terme d'ordre 2 décrit l'action d'un champ quantique de masse effective m^2 donnée par la courbure du potentiel autour du chemin classique. Tout comme dans l'espace de phase à une particule, l'approximation semi-classique revient donc à se limiter au terme d'ordre deux dans le potentiel et cette approximation fournira donc des résultats exacts si le potentiel est quadratique. Le propagateur, à l'ordre semi-classique, prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{K}\left[\Phi, t; \Phi_0, t_0\right] &= \exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{S}\left[\Phi, t; \Phi_0, t_0\right]\right) \\ &\quad \times \int_{\delta\phi_0(t_0)=0}^{\delta\phi(t)=0} \mathcal{D}\left[\delta\bar{\Phi}\right] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_2\left[\delta\bar{\Phi}, \bar{t}\right]\right). \end{aligned} \tag{6.38}$$

Le terme quantique dans le membre de droite de l'équation ci-dessus dépend des configurations initiale et finale du champ via la dérivée seconde du potentiel qui est une fonction de $\tilde{\Phi}$, donc de ses valeurs limites. La partie quantique du propagateur peut alors s'écrire comme une fonctionnelle des configurations de champ initiale et finale :

$$\tilde{K}\left[\Phi, t; \Phi_0, t_0\right] = F\left[\Phi, t; \Phi_0, t_0\right] \exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{S}\left[\Phi, t; \Phi_0, t_0\right]\right). \tag{6.39}$$

Expression des premières contributions quantiques

Il reste à déterminer l'expression de la fonctionnelle F qui prend en compte les premières corrections quantiques. Pour cela il est nécessaire d'étendre à un nombre de degrés de liberté infini les résultats obtenus par C. Morette concernant le propagateur semi-classique dans le cas d'un système à quatre degrés de liberté [99]. Il est montré dans la référence précédente que le propagateur semi-classique dans l'espace de configuration à une particule $\left(x^\mu(\tau)\right)_{\mu=0,..,D-1}$, τ étant le temps propre et D le nombre de dimensions d'espace-temps, prend la forme suivante :

$$\tilde{K}\left[x^\mu(\tau); x_0^\mu(\tau_0)\right] = (2i\pi\hbar)^{-\frac{D}{2}} \left|\det_{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial x^\mu \partial x_0^\nu}\right]\right|^{\frac{1}{2}} \times \exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{S}\left[x^\mu(\tau); x_0^\mu(\tau_0)\right]\right). \tag{6.40}$$

Dans cette expression le nombre de dimensions intervient car il représente le nombre de degrés de liberté. Dans le cas du propagateur semi-classique dans l'espace de configuration de champ, les degrés de liberté seront les valeurs du champ prises en chaque point d'espace, le temps étant ici un paramètre équivalent au temps propre dans l'espace de phase à une particule. L'amplitude

[2]Toute quantité A évaluée sur le chemin classique sera notée par la suite $\tilde{A}$.

due aux contributions quantiques dans le propagateur semi-classique devrait être donnée par :

$$F\left[\Phi,t;\Phi_0,t_0\right] \equiv \left|\det_{\vec{x}\vec{y}}\left[(2i\pi\hbar)\,\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta\Phi(\vec{x})\delta\Phi_0(\vec{y})}\right]\right|^{\frac{1}{2}} \tag{6.41}$$
$$\equiv \prod_{\vec{x}}\left|(2i\pi\hbar)\,\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta\Phi(\vec{x})\delta\Phi_0(\vec{x})}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Le passage de la première à la seconde ligne se fait aisément puisque nous ne considérons que des théories dont la densité lagrangienne n'implique la valeur du champ et de ses dérivées qu'en un unique point d'espace-temps. Le déterminant est alors diagonal et peut se simplifier en un produit infini sur tous les points d'espace. Puisque le calcul de la référence [99] est valide pour un nombre arbitraire de degrés de liberté, la généralisation ci-dessus est légitime. Il est cependant préférable de vérifier que ce résultat est bien exact, la fonctionnelle F se calculant en deux étapes : son module carré est d'abord déterminé par une propriéte d'unitarité du propagateur, puis la phase par le fait que le processus est markoffien[3].

Détermination du module carré $|F|^2$:

En faisant tendre t vers t_0, la configuration de champ finale doit tendre vers la configuration de champ initiale. Le propagateur étant une amplitude de probabilité, cette condition d'unitarité se traduit par :

$$\int \mathcal{D}\left[\Phi\right] K^\dagger\left[\Phi,t;\Phi_0',t_0\right] K\left[\Phi,t;\Phi_0,t_0\right] = \delta\left(\Phi_0-\Phi_0'\right). \tag{6.42}$$

Pour simplifier le calcul de l'intégrale ci-dessus, nous allons supposer un trajet infinitésimal : $t \equiv t_0+\delta t$ et $\Phi \equiv \Phi_0+\delta\Phi$. L'action peut alors être développée autour de sa valeur en Φ, le temps t étant ici un paramètre :

$$\tilde{S}\left[\Phi,t;\Phi_0,t_0\right] \simeq \tilde{S}\left[\Phi,t;\Phi,t_0\right] + \int d^3x\, \left.\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\Phi_0(\vec{x})}\right|_{\Phi} \left(\Phi_0(\vec{x})-\Phi(\vec{x})\right). \tag{6.43}$$

Ce développement est alors injecté dans la condition d'unitarité pour donner :

$$\delta\left(\Phi_0-\Phi_0'\right) = \int \mathcal{D}\left[\Phi\right] F\left[\Phi,t;\Phi_0,t_0\right] F^\dagger\left[\Phi,t;\Phi_0',t_0\right] \tag{6.44}$$
$$\times \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int d^3x\left(\Phi_0(\vec{x})-\Phi_0'(\vec{x})\right)\times\left.\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\Phi}\right|_{\Phi}\right).$$

Comme il l'est montré dans l'annexe A, la quantité $\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\Phi} = \tilde{\Pi}_0(\vec{x})$. Nous effectuons alors le changement de variable d'intégration suivant :

$$\Phi \rightarrow \tilde{\Pi}_0 \tag{6.45}$$
$$\mathcal{D}\left[\Phi\right] \rightarrow \left(\frac{\delta\tilde{\Pi}_0}{\delta\Phi(\vec{x})}\right)^{-1}\mathcal{D}\left[\tilde{\Pi}_0\right]. \tag{6.46}$$

Ce changement de variable est naturel puisque lors d'un déplacement infinitésimal, l'impulsion $\tilde{\Pi}_0$ suffit à définir la configuration d'arrivée Φ. Finalement, pour calculer explicitement la condition d'unitarité, nous prenons de nouveau l'approximation discrète afin d'obtenir un produit de

[3] Un processus markoffien est un processus dont l'événement à un temps t_i ne dépend que de l'événement au temps t_{i-1}. Pour ces processus, il y a multiplaction des probailités (des amplitudes de probabilités pour la Mécanique Quantique) d'événements successifs.

fonctions exponentielles :

$$\prod_x \delta\left(\Phi_0(\vec{x}) - \Phi'_0(\vec{x})\right) = \prod_x \int \left(d\tilde{\Pi}_0(\vec{x})\right) \left|F\left(\Phi, \Phi_0\right)\right|^2 \left(\frac{\delta\tilde{\Pi}_0}{\delta\Phi(\vec{x})}\right)^{-1} \times \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\Phi_0(\vec{x}) - \Phi'_0(\vec{x})\right)\tilde{\Pi}_0(\vec{x})\right), \tag{6.47}$$

où nous avons utilisé le fait que $F\left[\Phi, t; \Phi_0, t_0\right] F^\dagger\left[\Phi, t; \Phi'_0, t_0\right] = \left|F\left[\Phi, \Phi_0\right]\right|^2$. Cette égalité est possible car les chemins considérés sont infiniment proches. Nous avons aussi tenu compte de ce que la fonctionnelle $F[\Phi, \Phi_0]$ est du type $\exp\left(\int d^3x f(\vec{x})\right)$ pour transformer, dans l'approximation discrète, la fonctionnelle $|F[\Phi, \Phi_0]|^2$ en un produit infini de fonctions $|F(\Phi(\vec{x}), \Phi_0(\vec{x}))|^2$. Pour qu'en chaque point d'espace, la condition d'unitarité soit remplie, il est nécessaire d'avoir :

$$\left|F\left(\Phi, \Phi_0\right)\right|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}\frac{\delta\tilde{\Pi}_0}{\delta\Phi(\vec{x})}, \tag{6.48}$$

afin de faire apparaître le produit d'intégrale du type $(2\pi\hbar)^{-1}\int e^{\frac{i}{\hbar}(u-v)p}dp$ dont la valeur est $\delta(u-v)$. En utilisant l'expression de $\tilde{\Pi}_0$ comme la dérivation fonctionnelle de l'action classique en Φ_0, et en prenant le produit sur tout l'espace des fonctions $\left|F\left(\Phi, \Phi_0\right)\right|^2$, l'expression pour la fonctionnelle $\left|F\left[\Phi, \Phi_0\right]\right|^2$ est alors en accord avec celle proposée dans la formule (6.41) :

$$\left|F\left[\Phi, \Phi_0\right]\right|^2 = \prod_x (2\pi\hbar)^{-1}\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta\Phi(\vec{x})\delta\Phi_0(\vec{x})}. \tag{6.49}$$

<u>Détermination de la phase de F :</u>

Dans le cas d'un nombre fini de degrés de liberté, la phase de la fonctionnelle F se détermine en appliquant la propriété de semi-groupe [100]. Puisque l'opérateur évolution satisfait à l'équation $\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t_1)\hat{U}(t_1, t_0)$, l'évolution de l'amplitude de probabilité décrit un processus markoffien et le propagateur, qui appartient à un semi-groupe, vérifie :

$$K\left[x_b^\mu(\tau); x_a^\mu(\tau_0)\right] = \int K\left[x_b^\mu(\tau); x_i^\mu(\tau_i)\right] K\left[x_i^\mu(\tau_i); x_a^\mu(\tau_0)\right] dx_i^\mu. \tag{6.50}$$

Cette condition sur le propagateur semi-classique impose une phase de $-\pi/4$ pour chaque degré de liberté justifiant la forme du propagateur semi-classique pour un système à D degrés de liberté donné dans la formule (6.40). Cette condition tient toujours dans le cas d'un nombre de degrés de liberté infini et prend la forme :

$$K\left[\Phi, t; \Phi_0, t_0\right] = \int \mathcal{D}\left[\Phi_i\right] K\left[\Phi, t; \Phi_i, t_i\right] K\left[\Phi_i, t_i; \Phi_0, t_0\right]. \tag{6.51}$$

La fonctionnelle F et l'action classique étant diagonales en $\vec{x}$, le propagateur semi-classique peut s'écrire comme un produit infini sur chaque point d'espace et la condition de semi-groupe ci-dessus devient une condition de semi-groupe en chaque point d'espace :

$$\prod_x \tilde{K}\left(\Phi(\vec{x}), t; \Phi_0\vec{x}), t_0\right) = \prod_x \int d\Phi_i(\vec{x})\tilde{K}\left(\Phi(\vec{x}), t; \Phi_i(\vec{x}), t_i\right) \times\tilde{K}\left(\Phi_i(\vec{x}), t_i; \Phi_0(\vec{x}), t_0\right). \tag{6.52}$$

Cette condition s'applique à chaque degré de liberté de façon identique à la détermination de la phase pour un nombre fini de degrés de liberté. La fonctionnelle F aura alors une phase de $-\pi/4$ par degré de liberté :

$$F\left[\Phi, t; \Phi_0, t_0\right] = \prod_x \left[\frac{1}{\sqrt{2i\pi\hbar}}\left|\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta\Phi(\vec{x})\delta\Phi_0(\vec{x})}\right|^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{6.53}$$

Dynamique semi-classique

Une *équation du mouvement* pour la fonctionnelle semi-classique $F[\Phi, t; \Phi_0, t_0]$ se dérive en introduisant l'ansatz (6.39) dans l'équation d'évolution du propagateur. Une fois injectée dans l'équation de Schrödinger et en se limitant au premier ordre en $\hbar$, la fonctionnelle F est solution de l'équation suivante :

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial\tilde{S}}{\partial t}\right] F = \frac{1}{2}\int d^3x \left[\begin{array}{c} -2i\hbar\left(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\Phi(\vec{x})}\right)\frac{\delta}{\delta\Phi(\vec{x})} - i\hbar\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta\Phi(\vec{x})^2} \\ +\left(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\Phi(\vec{x})}\right)^2 + (\nabla\Phi)^2 + 2V(\Phi) \end{array}\right] F. \tag{6.54}$$

Le terme d'ordre zéro en constante de Planck correspond à l'équation de Hamilton-Jacobi pour un champ scalaire (voir annexe A) et s'annule donc. La fonctionnelle F est alors solution de l'équation fonctionnelle suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \int d^3x \left[\left(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\Phi(\vec{x})}\right)\frac{\delta}{\delta\Phi(\vec{x})} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta\Phi(\vec{x})^2}\right)\right] F = 0. \tag{6.55}$$

Ces calculs sont similaires au développement semi-classique de la Mécanique Quantique non-relativiste. En particulier, en appliquant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ à la fonctionnelle $|F|^2$, nous obtenons aussi l'approximation semi-classique de l'équation de continuité (6.4) :

$$\frac{\partial |F|^2}{\partial t} + \int d^3x \frac{\delta}{\delta\Phi(\vec{x})}\left(\tilde{\Pi}(\vec{x})\,|F|^2\right) = 0, \tag{6.56}$$

qui est la généralisation à un nombre de degrés de liberté infini de l'équation de continuité semi-classique en Mécanique Quantique :

$$\frac{\partial |F(\vec{x},t)|^2}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\frac{\vec{p}(\vec{x})}{m}\,|F(\vec{x},t)|^2\right) = 0. \tag{6.57}$$

De manière très similaire, la fonctionnelle $|F|^2$ représente la densité de probabilité et le produit de cette densité avec l'impulsion classique $\tilde{\Pi}\,|F|^2$ la densité de courant de probabilité, tous deux à l'ordre semi-classique. En appliquant successivement l'opérateur $\frac{\delta}{\delta\Phi_0}$ puis $\frac{\delta}{\delta\Phi}$ à l'équation de Hamilton-Jacobi, il est possible de vérifier que l'expression (6.41) pour la fonctionnelle $|F|^2$ est bien solution de l'équation (6.56).

6.2.2 Application : champ scalaire libre en espace plat et de Sitter

Application au cas d'un champ scalaire libre

Pour un champ scalaire libre classique, il est plus aisé de travailler dans l'espace de Fourier plutôt que dans l'espace réel car cela permet de transformer le terme $(\nabla\Phi)^2$ en $k^2\,|\phi|^2$ tout en conservant une action diagonale vis-à-vis du mode de Fourier $\vec{k}$. L'action pour un champ libre s'écrit alors :

$$S = \frac{1}{2}\int dt \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|^2 - \omega_k^2\,|\phi|^2\right], \tag{6.58}$$

avec $\omega_k^2 = k^2 + m^2$ et dont les solutions classiques, *i.e.* $\frac{\delta S}{\delta\phi(\vec{k},t)} = 0$, sont données par :

$$\phi(\vec{k},\tau) = A\exp\left(-i\omega_k(\tau - t_0)\right) + B\exp\left(i\omega_k(\tau - t_0)\right). \tag{6.59}$$

A et B sont des constantes d'intégration déterminées grâce aux conditions aux limites : à l'instant initial t_0, le champ vaut $\phi(t_0) = \phi_0$ et à l'instant final t, le champ vaut $\phi(t) = \phi$, donnant pour les constantes A et B :

$$A = i\left(\frac{\phi - \phi_0 e^{i\omega_k\Delta t}}{2\sin(\omega_k\Delta t)}\right) \text{ et } B = -i\left(\frac{\phi - \phi_0 e^{-i\omega_k\Delta t}}{2\sin(\omega_k\Delta t)}\right), \tag{6.60}$$

la quantité Δt définissant toujours l'intervalle de temps $(t - t_0)$ et $B \neq A^\dagger$ car le champ prend des valeurs complexes dans l'espace de Fourier. Les solutions classiques de champ connues, il est possible de calculer explicitement l'action classique $\tilde{S}$ en effectuant l'intégration sur le temps :

$$\tilde{S} = 2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{t_0}^{t} d\tau \omega_k^2 \mathrm{Re}\left[AB^\dagger e^{-2ik(\tau - t_0)}\right]. \tag{6.61}$$

Une fois l'intégration sur le temps effectuée et en remplaçant les constantes A et B par leur expression en fonction des conditions aux limites, l'action classique d'un champ libre est alors la suivante :

$$\tilde{S} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\omega_k}{2\sin(\omega_k \Delta t)}\right] \left[\left(|\phi|^2 + |\phi_0|^2\right)\cos(\omega_k \Delta t) - 2\mathrm{Re}\left[\phi\phi_0^\dagger\right]\right]. \tag{6.62}$$

Dans le cas d'un spectre de Fourier discret, il suffit de remplacer $\int d^3k/(2\pi)^3$par $\sum_k$.

Puisque l'action décrivant un champ libre reste diagonale dans l'espace de Fourier, le propagateur semi-classique s'exprime aussi dans cet espace comme le produit infini sur chaque mode de Fourier des propagateurs pour chaque mode :

$$K[\phi, t; \phi_0, t_0] = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2i\pi\hbar}} \left|\frac{\delta^2 \tilde{S}}{\delta\phi(\vec{k})\delta\Phi_0^\dagger(\vec{k})}\right|^{\frac{1}{2}} \times \exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{S}[\phi, t; \phi_0, t_0]\right). \tag{6.63}$$

Soit :

$$\begin{aligned} K[\phi, t; \phi_0, t_0] \quad &= \quad \prod_{\vec{k}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2i\pi\hbar}} \left|\frac{\delta^2 \tilde{S}}{\delta\phi(\vec{k})\delta\Phi_0^\dagger(\vec{k})}\right|^{\frac{1}{2}} \exp\left(\left[\frac{i\omega_k}{2\hbar\sin(\omega_k \Delta t)}\right]\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\times \left[\left(|\phi|^2 + |\phi_0|^2\right)\cos(\omega_k \Delta t) - 2\mathrm{Re}\left[\phi\phi_0^\dagger\right]\right]\right)\right\}. \end{aligned} \tag{6.64}$$

Finalement, en appliquant l'opérateur $\frac{\delta^2}{\delta\phi(\vec{k})\delta\Phi_0^\dagger(\vec{k})}$ à l'action classique, le propagateur semi-classique décrivant un champ libre est donné par la formule ci-dessous :

$$\begin{aligned} K\left[\phi, t; \phi_0, t_0\right] \quad &= \quad \prod_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2i\pi\hbar\sin(\omega_k \Delta t)}} \exp\left(\left[\frac{i\omega_k}{2\hbar\sin(\omega_k \Delta t)}\right]\right. \\ &\quad \left.\times \left[\left(|\phi|^2 + |\phi_0|^2\right)\cos(\omega_k \Delta t) - 2\mathrm{Re}\left[\phi^\dagger\phi_0\right]\right]\right). \end{aligned} \tag{6.65}$$

Puisque pour un champ libre le potentiel est d'ordre 2 et indépendant du temps, la méthode semi-classique fournit un résultat exact : le propagateur semi-classique est strictement égal au propagateur quantique.

Résultats préliminaires pour un champ en espace de Sitter

Un espace-temps de type de Sitter, avec des sections spatiales euclidiennes, est décrit par la métrique dynamique suivante :

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[d\eta^2 - d\vec{x}d\vec{x}\right], \tag{6.66}$$

a étant le facteur d'échelle et η le temps conforme, lié au temps cosmique t par $d\eta = a^{-1}(t)dt$. En appelant H la constante de Hubble, le facteur d'échelle s'écrit $a(t) = e^{Ht}$. Le temps conforme prend alors la forme suivante $\eta = -H^{-1}e^{-Ht}$ et le facteur d'échelle $a(\eta) = -(H\eta)^{-1}$. Pour un champ libre non massif, l'action s'écrit :

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\partial^\mu\Psi\partial^\nu\Psi. \tag{6.67}$$

L'action ci-dessus peut être ramenée à l'action d'un champ libre se propageant dans un espace plat, mais ayant une masse dépendant du temps. En redéfinissant le champ par $\Psi \to \Phi = a(\eta)\Psi$, l'action prend la forme suivante :

$$S = \frac{1}{2}\int d\eta \int d^3x \left[(\partial_\eta \Phi)^2 - (\nabla\Phi)^2 - m^2(\eta)\Phi^2\right], \tag{6.68}$$

avec $m^2(\eta) = -\ddot{a}/a = -2/\eta^2$, la notation $\dot{a}$ signifiant la dérivation partielle par rapport au temps conforme. Le système peut alors être décrit par une dynamique Hamiltonienne en définissant les deux variables canoniques Φ et Π de manière usuelle :

$$\Pi = \dot{\Phi}, \tag{6.69}$$

et l'Hamiltonien H devient :

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left[\Pi^2 + (\nabla\Phi)^2 + m^2(\eta)\Phi^2\right]. \tag{6.70}$$

La première étape d'une étude semi-classique consiste à déterminer l'action classique en fonction des configurations initiale et finale du champ. La procédure est identique à celle utilisée dans le cas du champ libre. Puisque le potentiel est quadratique, l'action classique est écrite dans l'espace de Fourier où elle reste diagonale :

$$S = \frac{1}{2}\int d\eta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\left|\dot{\phi}\right|^2 - k^2 |\phi|^2 - m^2(\eta)|\phi|^2\right]. \tag{6.71}$$

Le champ étant réel dans l'espace réel, la relation $\phi(-\vec{k}) = \phi^\dagger(\vec{k})$ apparaît pour le champ dans l'espace de Fourier. Cette simplification permet de plus d'étudier chaque mode de Fourier indépendamment des autres modes. Les solutions des équations d'Euler-Lagrange, pour un espace de Sitter, sont connues et s'expriment en fonction des fonctions de Hankel qui prennent, pour une masse nulle, la forme suivante :

$$\phi(k,\eta) = A\left(1 - \frac{i}{k\eta}\right)e^{-ik(\eta-\eta_0)} + B\left(1 + \frac{i}{k\eta}\right)e^{ik(\eta-\eta_0)}. \tag{6.72}$$

Comme pour le champ libre, les constantes d'intégration s'expriment en fonction des conditions aux limites, (ϕ_0, η_0) initialement et (ϕ, η) au final :

$$A = \frac{\frac{k\eta}{k\eta+i}e^{-ik(\eta-\eta_0)}\phi - \frac{k\eta_0}{k\eta_0+i}\phi_0}{\frac{k\eta-i}{k\eta+i}e^{-2ik(\eta-\eta_0)} - \frac{k\eta_0-i}{k\eta_0+i}} \tag{6.73}$$

$$B = \frac{\frac{k\eta}{k\eta-i}e^{ik(\eta-\eta_0)}\phi - \frac{k\eta_0}{k\eta_0-i}\phi_0}{\frac{k\eta+i}{k\eta-i}e^{2ik(\eta-\eta_0)} - \frac{k\eta_0+i}{k\eta_0-i}}. \tag{6.74}$$

Il est maintenant nécessaire d'introduire cette solution dans l'expression de l'action puis de faire l'intégration sur la variable temporelle η. Finalement, en fonction des conditions aux limites, l'action prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{S}[\phi,\eta;\phi_0,\eta_0] = \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}&\Big[F_1^{(k)}(\eta,\eta_0)|\phi|^2 + F_2^{(k)}(\eta,\eta_0)|\phi_0|^2 \\ &+F_3^{(k)}(\eta,\eta_0)\mathrm{Re}\left[\phi\phi_0^\dagger\right] + F_4^{(k)}(\eta,\eta_0)\mathrm{Im}\left[\phi\phi_0^\dagger\right]\Big].\end{aligned} \tag{6.75}$$

Nous gardons la notation $\phi \equiv \phi(\vec{k})$ et $\phi^\dagger \equiv \phi(-\vec{k})$ pour alléger l'écriture. Les fonctions $F_i^{(k)}$ sont des fonctions réelles des deux variables η et η_0 et sont paramétrisées par la norme du mode de Fourier k. Ces fonctions peuvent être calculées analytiquement, une fois l'intégration sur la variable temporelle dans l'action effectuée. Leurs expressions extrêmement longues, données dans l'annexe B, ne sont pas fournies ici car elles n'apportent rien quant au raisonnement qui suivra. Le propagateur semi-classique peut être déduit de cette action et, en appelant $S^{(k)}$ la densité d'action dans l'espace de Fourier, ce propagateur s'écrit :

$$\begin{aligned}\tilde{K}\left[\phi,\eta;\phi_0,\eta_0\right] &= \prod_k \left[\sqrt{\frac{F_3^{(k)}(\eta,\eta_0)+F_4^{(k)}(\eta,\eta_0)}{2i\pi\hbar}}\right. \\ &\qquad \left.\times \exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{S}^{(k)}\left[\phi,\eta;\phi_0,\eta_0\right]\right)\right].\end{aligned} \tag{6.76}$$

Grâce au propagateur semi-classique, il est possible de déterminer l'évolution de la fonctionnelle d'onde décrivant le vide de Bunch-Davies[4] $|B\rangle$ à cet ordre d'approximation. A l'instant initial, *i.e.* juste avant le début de l'inflation, l'espace-temps peut être considéré comme Minkowskien et la fonctionnelle d'onde initiale est donc décrite par le même paquet d'onde Gaussien que celui décrivant l'état vide pour un champ libre :

$$|B\rangle \to \Psi_B\left[\phi_0,\eta_0\right] = \mathcal{N}\prod_k\left[\exp\left(-\frac{1}{2}k\left|\phi_0\right|^2 - i\frac{k}{2}\eta_0\right)\right]. \tag{6.77}$$

Le propagateur étant un noyau intégral de l'opérateur évolution, la fonctionnelle d'onde décrivant l'état quantique $|B\rangle$ à un instant η se déduit de cette fonctionnelle à un instant précédent η_0 par :

$$\Psi_B\left[\phi,\eta\right] = \int \mathcal{D}\left[\phi_0\right] K\left[\phi,\eta;\phi_0,\eta_0\right]\Psi_B\left[\phi_0,\eta_0\right]. \tag{6.78}$$

Cette intégration peut être effectuée en utilisant l'approximation semi-classique du propagateur, donnant la fonctionnelle d'onde semi-classique du vide de Bunch-Davies à un instant quelconque η :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_B\left[\phi,\eta\right] &= \int \mathcal{D}\left[\phi_0\right]\tilde{K}\left[\phi,\eta;\phi_0,\eta_0\right]\Psi_B\left[\phi_0,\eta_0\right] \\ &= \prod_k \iint_{-\infty}^{+\infty} d\mathrm{Re}\left[\phi_0\right] d\mathrm{Im}\left[\phi_0\right]\tilde{K}\left[\phi,\eta;\phi_0,\eta_0\right]\Psi_B\left[\phi_0,\eta_0\right].\end{aligned} \tag{6.79}$$

La fonctionnelle d'onde à un instant quelconque se décompose en une partie gaussienne et une partie de type onde progressive :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_B\left[\phi,\eta\right] &= \prod_k\left[\frac{\sqrt{-2i\pi\left(F_3+F_4\right)}}{k-iF_2}\exp\left(-\frac{k\left({F_3}^2+{F_4}^2\right)}{F_2\left(k^2+{F_2}^2\right)}\left|\phi\right|^2\right)\right. \\ &\qquad \left.\times\exp\left(i\left[\frac{F_1}{2}-\frac{{F_3}^2+{F_4}^2}{k^2+{F_2}^2}\right]\left|\phi\right|^2 - i\frac{k}{2}\eta_0\right)\right].\end{aligned} \tag{6.80}$$

Nous avons allégé l'écriture en supprimant les indices (k) et les arguments (η,η_0) des fonctions F_i. Il faut cependant garder à l'esprit qu'une dépendance avec le temps conforme et le mode de Fourier k est contenue dans ces fonctions. Les valeurs attendues du champ et de ses fluctuations sont alors simplement obtenues en prenant les valeurs moyennes de ϕ et ϕ^2 sur l'état $|B\rangle$, la fonctionnelle $\left|\Psi_B\right|^2$ donnant la densité de probabilité :

$$\langle\phi(\eta)\rangle = \int \mathcal{D}\left[\phi\right]\phi\left|\Psi_B\left[\phi,\eta\right]\right|^2 \tag{6.81}$$

$$\left\langle\phi^2(\eta)\right\rangle = \int \mathcal{D}\left[\phi\right]\phi^2\left|\Psi_B\left[\phi,\eta\right]\right|^2. \tag{6.82}$$

[4]Le vide de Bunch-Davies est l'état fondamental pour une théorie scalaire libre dans un espace-temps dS. Cet état est celui qui tend vers le vide de Minkowski en début de phase inflationnaire, c'est à dire lorsque l'espace-temps tend vers un espace plat statique.

Ces intégrales se calculent extrêment facilement à l'ordre semi-classique puisque la densité de probabilité $|\tilde{\Psi}_B|^2$ est une Gaussienne centrée en zéro avec un écart-type $\sigma_k(\eta)$ qui dépend à la fois du temps considéré et de la norme du mode de Fourier k. A l'ordre semi-classique, la statistique du champ est donc entièrement déterminée par les deux quantités suivantes :

$$\langle \tilde{\phi(\eta)} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \tilde{\phi^2(\eta)} \rangle = \sigma_k(\eta). \tag{6.83}$$

L'inflation a alors pour effet de modifier uniquement la largeur du paquet Gaussien, et ce de manière différente pour chaque mode de Fourier, amplifiant ainsi certains modes. De plus, les modes qui seront plus ou moins affectés par l'inflation dépendront bien évidemment du temps auquel les fluctuations sont évaluées. Par exemple, les modes à petites échelles de longueur ne seront pas modifiés puisque lorsque $k \to +\infty$ le champ est très bien décrit par un champ libre.

La dynamique d'un champ scalaire dans un espace-temps de de Sitter a été étudiée dans le cadre de la représentation de Schrödinger à l'aide d'une résolution directe de l'équation fonctionnelle de Schrödinger [98, 95]. Une telle résolution est possible car l'action décrivant ce système prend la forme d'une action libre avec une masse dépendant du temps. La fonctionnelle d'onde ainsi trouvée pourrait alors être comparée au propagateur semi-classique afin d'évaluer la précision de l'approche semi-classique.

6.2.3 Règle de quantification : préliminaires

Comme il l'a été vu dans le chapitre précédent, l'approximation semi-classique en Mécanique Quantique non-relativiste permet d'obtenir une règle de quantification de l'énergie via la loi de Bohr-Sommerfeld. Il est alors envisageable d'étendre cette règle dans le cas de la représentation de Schrödinger de la théorie quantique des champs, ce qui aboutirait à une règle, semi-classique, de première quantification. Pour cela, il est nécessaire de calculer la fonctionnelle densité d'états dont les pôles donneront les énergies admises par un système quantique. Dans la suite, uniquement les systèmes stationnaires seront considérés.

Propagateur semi-classique à énergie fixée

Pour un système indépendant du temps, il est plus judicieux d'utiliser le propagateur G à énergie fixée E qui s'obtient en prenant la transformée de Fourier, dans le domaine temps-fréquence, du propagateur à temps fixé K. A l'ordre semi-classique, ce propagateur G se définit alors :

$$\tilde{G}\left[\Phi, \Phi_0; E\right] = \int dt F\left[\Phi, \Phi_0; t\right] \exp\Big(i\tilde{S}\left[\Phi, \Phi_0; t\right] + iEt\Big). \tag{6.84}$$

Pour simplifier l'écriture, le temps initial sera pris égal à zéro, cette simplification ne réduisant en rien la généralité des résultats puisque nous considérons des systèmes stationnaires ne dépendant que de l'intervalle temporel. Ce propagateur sera dominé par la contribution des chemins dont la phase varie peu, décrits par la condition $E = -\left.\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}\right|_{\tilde{t}}$. Les temps $\tilde{t}$ correspondent aux temps mis par un système classique d'énergie E pour passer de la configuration Φ_0 à la configuration Φ. Nous pouvons alors effectuer un développement limité de l'action classique autour de ces temps $\tilde{t}$:

$$\tilde{S}\left[\Phi, \Phi_0; t\right] = \tilde{S}\left[\Phi, \Phi_0; \tilde{t}\right] + \left.\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}\right|_{\tilde{t}} (t - \tilde{t}) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial t^2}\right|_{\tilde{t}} (t - \tilde{t})^2 + \mathcal{O}\left((t - \tilde{t})^3\right). \tag{6.85}$$

Ceci donne pour la phase semi-classique $\varphi = S[\Phi, \Phi_0; t] + Et$:

$$\varphi = \tilde{S}\left[\Phi, \Phi_0; \tilde{t}\right] + E\tilde{t} + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial t^2}\right|_{\tilde{t}} (t - \tilde{t})^2 + \mathcal{O}\left((t - \tilde{t})^3\right). \tag{6.86}$$

Le terme d'ordre zéro en t peut être écrit comme une intégrale sur l'espace-temps :

$$\tilde{S}\left[\Phi,\Phi_0;\tilde{t}\right] = \int_0^{\tilde{t}} d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2}\tilde{\Pi}^2 - \frac{1}{2}\partial_i\Phi\partial^i\Phi - V(\Phi)\right] \tag{6.87}$$

$$E\tilde{t} = \int_0^{\tilde{t}} d\tau \int d^3x \mathcal{H}(\vec{x}). \tag{6.88}$$

La variable τ est une variable d'intégration temporelle et la quantité $\mathcal{H}$ est la densité Hamiltonienne qui peut s'exprimer via l'équation de Hamilton-Jacobi (voir annexe A) en fonction des champs canoniques Φ et Π et du potentiel. Le terme d'ordre zéro en t prend alors la forme suivante :

$$\tilde{S}\left[\Phi,\Phi_0;\tilde{t}\right] + E\tilde{t} = \int_0^{\tilde{t}} d\tau \int d^3x\tilde{\Pi}^2(\vec{x},\tau). \tag{6.89}$$

Le passage de $t=0$ à $\tilde{t}$ correspond au chemin classique d'énergie E passant de la configuration Φ_0 à la configuration Φ. Nous effectuons alors le changement de variable suivant :

$$\tau \to \Phi \quad \text{et} \quad d\tau = \left(\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tau}\right)^{-1} d\Phi(\vec{x}) = \tilde{\Pi}^{-1}(\vec{x},\tau)d\Phi(\vec{x}), \tag{6.90}$$

et la phase, à l'ordre zéro, apparaît comme une intégrale le long du chemin classique d'énergie E :

$$\tilde{S}\left[\Phi,\Phi_0;\tilde{t}\right] + E\tilde{t} = \int d^3x \int_{\Phi_0(\vec{x})}^{\Phi(\vec{x})} \frac{\delta\tilde{S}}{\delta\Phi} d\tilde{\Phi}(\vec{x}), \tag{6.91}$$

où l'impulsion classique est écrite comme la dérivée fonctionnelle de l'action par rapport au champ. La notation $\mathcal{D}\left[\tilde{\Phi}\right]$ signifie que l'intégration s'effectue le long d'un chemin classique. Le propagateur à énergie fixée prend alors la forme suivante dans l'approximation des phases stationnaires :

$$\begin{aligned}\tilde{G}\left[\Phi,\Phi_0;E\right] &= \exp\left(i\int d^3x \int_{\Phi_0(\vec{x})}^{\Phi(\vec{x})} \frac{\delta\tilde{S}}{\delta\Phi} d\tilde{\Phi}(\vec{x})\right) \\ &\quad\times \int dt F\left[\Phi,\Phi_0;t\right] \exp\left(\frac{i}{2}\left.\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial t^2}\right|_{\tilde{t}} (t-\tilde{t})^2\right).\end{aligned} \tag{6.92}$$

De plus, dans le cadre de cette approximation, la fonctionnelle F ne dépend pas du temps et s'écrit :

$$F\left[\Phi,\Phi_0;\tilde{t}\right] = \prod_x \frac{1}{\sqrt{2i\pi\tilde{\Pi}_0}}\sqrt{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\Phi}}, \tag{6.93}$$

l'expression de $\tilde{\Pi}_0$ en fonction de $\mathcal{H}$ se déduisant de l'équation de Hamilton-Jacobi. L'intégrale sur le temps se réduit alors à une intégrale Gaussienne :

$$\int dt \exp\left(\frac{i}{2}\left.\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial t^2}\right|_{\tilde{t}} (t-\tilde{t})^2\right) = \prod_x \sqrt{(2i\pi)\left(\frac{\partial^2\tilde{s}}{\partial t^2}\right)^{-1}}, \tag{6.94}$$

avec $\tilde{s}$ telle que $\tilde{S} = \int d^3x\tilde{s}$ et :

$$\frac{\partial^2\tilde{s}}{\partial t^2} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = \tilde{\Pi}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\Phi}. \tag{6.95}$$

La deuxième expression de $\frac{\partial^2\tilde{s}}{\partial t^2}$ s'obtient grâce au fait que nous considérons un chemin à énergie fixée imposant $d\mathcal{H}=0$. En combinant l'ensemble des formules ci-dessus, nous avons finalement pour le propagateur semi-classique à énergie fixée :

$$\tilde{G}\left[\Phi,\Phi_0;E\right]=\prod_x\left[\frac{1}{\sqrt{\left|\tilde{\Pi}(\vec{x})\tilde{\Pi}_0(\vec{x})\right|}}\exp\left(i\int_{\Phi_0(\vec{x})}^{\Phi(\vec{x})}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\Phi}d\tilde{\Phi}(\vec{x})\right)\right]. \tag{6.96}$$

Dans l'équation ci-dessus, nous avons directement transformé le terme $e^{\int d^3x f(x)}$ en $\prod_x e^{f(x)}$ afin d'écrire le propagateur sous la forme d'un produit infini sur l'espace.

Propagation dans un puits de potentiel et règle de quantification

Si le champ évolue dans un puits de potentiel, alors ses configurations évolueront entre deux configurations limites $\Phi_\pm$ données par les configurations tournantes $\tilde{\Pi}=0$:

$$\mathcal{H}(\vec{x})-\frac{1}{2}\left(\nabla\Phi_\pm\right)^2-V(\Phi_\pm)=0,\quad \text{pour } \vec{x}\in\mathbb{R}^3. \tag{6.97}$$

Les chemins classiques définis, la règle de Bohr-Sommerfeld peut s'étendre à l'espace de configuration de champ en calculant la densité d'état à une énergie donnée à l'ordre semi-classique :

$$\tilde{g}(E)=\int\mathcal{D}\left[\Phi\right]\tilde{G}\left[\Phi,\Phi;E\right]. \tag{6.98}$$

Les chemins classiques revenant à leur configuration de départ sont les suivants : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n\times)\left\{\Phi\to\Phi_+\to\Phi_-\to\Phi\right\}$ et $(n\times)\left\{\Phi\to\Phi_-\to\Phi_+\to\Phi\right\}$. La densité d'états, somme sur l'ensemble de ces chemins, est alors la somme sur n de deux chemins classiques "élémentaires", $\left\{\Phi\to\Phi_+\to\Phi_-\to\Phi\right\}$ et $\left\{\Phi\to\Phi_-\to\Phi_+\to\Phi\right\}$:

$$\tilde{g}(E)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\prod_x\left[\tau(\Phi_-\to\Phi_+)\exp\left(2i\left|n\right|\int_{\Phi_-(\vec{x})}^{\Phi_+(\vec{x})}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\Phi}d\tilde{\Phi}(\vec{x})+i\varphi_n\right)\right]. \tag{6.99}$$

Une phase supplémentaire φ_n a été rajoutée et correspond à la somme des phases $\varphi_\pm$ acquises par le propagateur semi-classique à chaque point tournant : $\varphi_n=2\left|n\right|\varphi_\pm$. Le terme $\tau(\phi_-\to\Phi_+)$ correspond au temps pour passer d'une configuration tournante à une autre à l'énergie E et s'obtient à partir de $\int_{\Phi_-}^{\Phi_+}\left|\tilde{\Pi}\right|^{-1}\mathcal{D}[\Phi]$. Il s'agit donc de la demi-période classique d'oscillation du champ dans le puits de potentiel. Une fois la somme sur l'entier n effectuée, la densité d'états prend alors la forme suivante :

$$\tilde{g}(E)=\prod_x\left[\tau(\phi_-\to\Phi_+)\frac{1+\exp\left(2i\int_{\Phi_-(\vec{x})}^{\Phi_+(\vec{x})}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\Phi}d\tilde{\Phi}(\vec{x})+2i\varphi_\pm\right)}{1-\exp\left(2i\int_{\Phi_-(\vec{x})}^{\Phi_+(\vec{x})}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\Phi}d\tilde{\Phi}(\vec{x})+2i\varphi_\pm\right)}\right]. \tag{6.100}$$

Les pôles de la densité d'états donnent les niveaux d'énergie. Il est ainsi possible d'établir une règle de quantification, à l'ordre semi-classique, de la densité d'énergie en chaque point d'espace :

$$\int_{\Phi_-(\vec{x})}^{\Phi_+(\vec{x})}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\Phi}d\tilde{\Phi}(\vec{x})+\varphi_\pm=n\pi,\quad \text{pour } \vec{x}\in\mathbb{R}^3 \text{ et } n\in\mathbb{N}. \tag{6.101}$$

Il est donc nécessaire de trouver la phase acquise à chaque configuration tournante. Par généralisation des résultats connus pour un nombre de degrés de liberté discret, il est naturel que cette phase, pour chaque degré de liberté, c'est-à-dire en chaque point d'espace, vaille $-\pi/2$, conduisant à une règle de Bohr-Sommerfeld similaire à celle obtenue en Mécanique Quantique non-relativiste :

$$\int_{\Phi_-(\vec{x})}^{\Phi_+(\vec{x})}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\Phi}d\tilde{\Phi}(\vec{x})=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad \text{pour } \vec{x}\in\mathbb{R}^3 \text{ et } n\in\mathbb{N}. \tag{6.102}$$

6.3 Discussion-Amélioration-Perspectives

L'étude ci-dessus est très préliminaire et de nombreuses améliorations peuvent et doivent y être apportées. Cependant, au-delà même de ces améliorations, la question du champ d'utilisation d'une telle approche se pose. Ces deux points, amélioration et nécessité du développement semi-classique, sont abordées ici.

6.3.1 Passage discret/continu : un point à traiter rigoureusement

Dans tout le développement semi-classique, nous avons couramment eu recours à la transformation suivante :

$$\exp\left(\int f(\vec{x})d^3x\right) = \prod_x \exp\left(f(\vec{x})\right). \tag{6.103}$$

Cette transformation peut se faire par l'intermédiaire d'une approximation discrète $\int d^3x \rightarrow \sum_{x_n}$. Ce passage continu à discret nécessite de quadriller l'espace avec une longueur de maille ε. Une fois les calculs effectués dans cet espace discrétisé, la longueur de maille ε est mise à zéro afin de retrouver le résultat pour un espace continu. Cette opération a éte faite de nombreuses fois durant le développpement semi-classique précédent. Cependant, la manière dont elle a été utilisée peut être remise en question à cause du gradient du champ vis-à-vis de l'espace intervenant dans l'action. En effet, en passant dans un espace discret, le gradient prend alors la forme suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \rightarrow \frac{\Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n)}{\varepsilon}, \tag{6.104}$$

et l'action s'écrit, dans un espace uni-dimensionnel :

$$S = \int dt \sum_n \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n)}{\varepsilon}\right)^2 - V\left(\Phi(x_n)\right)\right]. \tag{6.105}$$

L'action n'est donc plus diagonale en x_n. Or cette propriété a été utilisée lors du développement semi-classique. Puisque le passage de continu à discret annihile la diagonalité de S, il est nécessaire, afin de valider les résultats ci-dessus, de s'assurer, lors du passage discret à continu en fin de calcul, que cette propriété apparaisse de nouveau.

6.3.2 Calcul des phases : un *deuxième* point à traiter rigoureusement

Dans les calculs précédents, nous n'avons pas traité de manière rigoureuse le problème de la phase des contributions quantiques. L'extension du résultat de la référence [100] semble juste compte tenu de l'accord entre le propagateur semi-classique et le propagateur quantique pour un champ libre. Cependant, le problème de la phase acquise par le propagateur semi-classique au niveau des points tournants n'a pas du tout été traité dans l'étude précédente. Ce point est pourtant fondamental pour tout problème d'interférence quantique et son origine tient dans l'approximation des phases stationnaires. En effet, cette approximation permet de diviser la dynamique en une dynamique rapide et une dynamique lente, de nouveau hamiltonienne sur un espace de phase de dimension réduite. La méthode des phases stationnaires consiste alors, afin de simplifier la dynamique, à décrire la dynamique lente par la moyenne de l'hamiltonien lent sur la période de l'hamiltonien rapide. Cette séparabilité entre dynamique lente et dynamique rapide, pour l'étude d'un système quantique, correspond à séparer la partie classique de la partie quantique, les points tournants de la partie classique revêtant donc un caractère particulier. Ce point se démontre mathématiquement par l'étude asymptotique des intégrales oscillantes qui souligne que la limite quand $\hbar \rightarrow 0$ de l'intégrale de chemin de Feynman est donnée par le comportement de l'action au niveau des points critiques [101]. Les points critiques étant définis par $\delta S = 0$: ils décrivent les chemins classiques et l'intégrale de Feynman, dans cette approximation, est déterminée par l'action classique.

En Mécanique Quantique non-relativiste, le calcul de la phase acquise au passage d'un point tournant peut être trouvé dans l'ouvrage de Schulman [102] et une preuve en a été donnée dans le chapitre précédent lors de la procédure de jonction des fonctions d'onde WKB. Pour un système unidimensionnel, au niveau d'un point tournant x_t, la quantité $\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x_t \partial x_0}$ change de signe. En terme de phase, cela signifie que $|F(x,x_0)|^2$ est multiplié par $e^{i\pi}$ au passage du point tournant, la phase acquise par le propagateur semi-classique étant alors de $\pm\frac{\pi}{2}$. Le calcul de Schulman montre que la phase diminue et, en appelant q le nombre de points tournants sur la trajectoire classique allant de x_0 à x, le propagateur semi-classique s'écrit alors :

$$\tilde{K}\left[x,t;x_0,t_0\right] = \left(\frac{1}{2i\pi\hbar}\right)^{\frac{n}{2}} \left|\det_{ij}\left[\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^i \partial x_0^j}\right]\right|^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{S} - iq\frac{\pi}{2}\right), \tag{6.106}$$

q étant appelé *l'indice de Maslov*. Il serait donc nécessaire d'étendre l'analyse de Schulman au cas de la théorie des champs.

6.3.3 Ce développement est-il prédictible ?

L'utilité d'effectuer un développement semi-classique de la théorie quantique des champs dans sa représentation de Schrödinger peut être remise en question. La motivation d'une telle approche est la suivante : dans la plupart des cas, la théorie quantique des champs est prédictive dans une approche perturbative autour de la solution libre. Effectuer un développpement semi-classique de cette théorie revient donc à faire une étude perturbative autour de la solution classique. Cependant, la solution classique, qui consiste à trouver les solutions des équations d'Euler-Lagrange, sont aussi difficiles à trouver que la solution libre est facile à déterminer. De plus, cela soulève la question de l'utilité de la méthode semi-classique : en imaginant que les solutions classiques puissent être trouvées, alors il est possible d'effectuer la procédure usuelle de seconde quantification et de résoudre donc le problème quantique sans aucun développement perturbatif. Pourquoi alors utiliser le développement semi-classique ?

L'argument ci-dessus n'enterre pourtant pas l'idée d'un développement perturbatif autour de la solution classique. En effet, dans le cas de la Mécanique Quantique non-relativiste, un tel développement permet d'obtenir certains résultats sans pour autant résoudre les équations du mouvement classique. Dans le cas des systèmes stationnaires, la connaissance de la forme du potentiel permet à elle seule de déterminer, à l'ordre semi-classique, les niveaux d'énergie ainsi que la probabilité tunnel. Nous pouvons donc conjecturer que ces cas de figure se retrouvent pour la théorie quantique des champs. Dans le chapitre précédent, nous avons déterminé l'analogue de la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld, qui devient une règle de quantification sur la densité d'énergie plutôt que sur l'énergie elle-même. Il est cependant nécessaire d'inverser deux équations « algébriques » : la première correspond à l'équation (6.97) et permet de déterminer les configurations tournantes et la deuxième à l'équation (6.101) qui, une fois les configurations tournantes déterminées, permet d'obtenir les valeurs autorisées de la densité d'énergie. Ces deux équations, une fois écrites en fonction des configurations de champs, prennent la forme suivante :

$$\mathcal{H}(\vec{x}) - \frac{1}{2}\left(\nabla\Phi_\pm\right)^2 - V(\Phi_\pm) = 0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{6.107}$$

et

$$\int_{\Phi_-(\vec{x})}^{\Phi_+(\vec{x})} \left[2\left(\mathcal{H}(\vec{x}) - \frac{1}{2}\left(\nabla\Phi\right)^2 - V(\Phi)\right)\right]^{\frac{1}{2}} d\tilde{\Phi}(\vec{x}) + \varphi_\pm = n\pi, \quad \begin{array}{l}\vec{x} \in \mathbb{R}^3\\ \text{et } n \in \mathbb{N}.\end{array} \tag{6.108}$$

Le gradient du champ intervenant dans ces équations, il est évident que leur inversion ne peut être aisément réalisée. Encore une fois, il semble qu'un développement perturbatif autour de la solution classique ne puisse pas prédire simplement de résultats.

Il serait utile de reconsidérer rigoureuseument ces développements dans un espace discrétisé. Cela permettrait d'une part de confirmer, ou non, les passages *rapides* entre espace continu et discrétisé et d'autre part de remplacer les gradients du champ par un *couplage* entre la configuration de champ en deux points voisins du maillage. Ceci permettrait peut-être de se sortir d'impasses similaires à celles qui viennent d'être présentées pour la règle de quantification semi-classique. Ce travail consisterait à faire une étude semi-classique d'une chaîne de Klein-Gordon.

6.3.4 Perspectives

Le processus d'amplification des fluctuations quantiques du vide lors de la phase inflationnaire présente de nombreuses similitudes avec le processus d'évaporation des trous noirs : dans les deux cas, les fluctuations du vide sont rendues réelles par amplification gravitationnelle. Etudier ces phénomènes, c'est se placer dans une configuration où l'infiniment petit rencontre des champs gravitationnels intenses et permet donc de porter un premier regard sur les frontières de la physique standard. La représentation de Schrödinger de la théorie quantique des champs peut apporter des éléments nouveaux sur ces processus et l'expérience acquise grâce à l'étude de la phase inflationnaire peut être utile pour la compréhension du mécanisme d'évaporation de Hawking, l'approche de Schrödinger apportant un regard nouveau sur ce processus [103].

La dynamique des champs en espace-temps courbe implique des équations particulièrement compliquées et toute méthode approximative pour leur résolution ou pour obtenir des informations sur la dynamique est bienvenue. Une fois l'ensemble des difficultés citées dans les trois paragraphes ci-dessus résolues, les méthodes semi-classiques dans l'espace de configuration du champ devraient être étendues à la dynamique des champs dans un espace-temps courbe donné, et en particulier pour la propagation dans les espaces-temps de type Schwarzschild. La continuité logique de l'étude menée dans ce chapitre serait d'aborder des problèmes similaires à ceux vus dans les chapitres 5.2.1 et 5.2.2, et de les résoudre à l'ordre semi-classique, dans l'espace de configuration du champ.

Chapitre 7

Evaporation au-delà de la Relativité Générale

La construction d'une théorie quantique de la gravitation nécessite de s'accorder avec deux contraintes, qui peuvent assurément s'entremêler : d'une part obtenir une construction mathématiquement cohérente et, d'autre part, une théorie en accord avec des faits expérimentaux ou observationnels. Face au nombre grandissant de propositions, il est nécessaire de s'intéresser au peu d'objets réunissant les conditions nécessaires pour pouvoir accéder à des effets quantiques de la gravitation. A l'exception de l'univers primordial, les petits trous noirs sont vraisemblablement les seuls à offrir ce genre de conditions, à savoir une forte courbure de l'espace-temps associée à des phénomènes quantiques[1]. De plus, la température et les facteurs de corps gris d'un trou noir dépendant fortement de la métrique de fond, le processus de radiation de Hawking dépend alors de la théorie de la gravitation considérée : l'évaporation des trous noirs fournit une sonde directe de la théorie de la gravitation sous-jacente

Dans ce chapitre, les spectres de radiation des trous noirs de Schwarzschild sont calculés dans deux cadres théoriques étendant la Relativité Générale : la théorie de Gauss-Bonnet à D dimensions et la Relativité Générale avec constante cosmologique positive, elle aussi à D dimensions. Je présenterai tout d'abord la partie non-triviale, et jusqu'à présent non-calculée, du couplage entre un trou noir et les champs quantiques (les facteurs de corps gris), en abordant dans un premier temps leur origine ainsi que leurs méthodes de calculs. Ensuite, je décrirai le programme numérique écrit pendant cette thèse permettant une détermination exacte sur l'ensemble du spectre énergétique des facteurs de corps gris dans les cadres théoriques présentés ci-dessus. Finalement, je montrerai les résultats obtenus ainsi que les spectres d'émission de particules scalaires, fermioniques et vectorielles. Les résultats déterminés à l'aide d'une approche semi-classique seront aussi abordés en fin de ce chapitre.

7.1 Facteurs de corps gris : généralités

7.1.1 Définition

Les trous noirs s'évaporent en émettant toutes les particules du modèle standard suivant une loi de corps gris. Il a été montré dans le chapitre 4 que la distribution thermique apparaît naturellement pour un observateur lointain et la température du trou noir peut alors s'interpréter comme le travail que le trou noir fournit pour briser[2] les fluctuations quantiques du vide. Cependant, un terme potentiel, correspondant à la fois au potentiel gravitationnel et centrifuge,

[1] Il est amusant de noter qu'un trou noir ayant la masse du Mont Blanc a un rayon de Schwarzschild de l'ordre du fermi.

[2] *Briser* s'utilise ici dans le sens de *séparer* : la paire particule/antiparticule ne s'annihile pas et la fluctuation est dite *brisée*.

est négligé dans l'approche de Unruh et c'est justement lui qui modifie légèrement la loi de corps noir. Le processus de radiation des trous noirs se décompose alors en deux étapes : la gravité de surface, $i.e$ la température, brise les fluctuations du vide au niveau de l'horizon, puis la particule émise doit traverser une barrière de potentiel avant de s'échapper définitivement du trou noir et atteindre un observateur placé à l'infini. Le flux de particules émises comporte trois termes : une distribution thermique provenant de la brisure des paires particule/antiparticule, un terme de section efficace d'émission σ_g correspondant à la probabilité de s'échapper compte tenu du potentiel centrifuge et de la courbure l'espace-temps autour du trou noir, et finalement un terme d'espace de phase :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{T_H}} \pm 1} \times \sigma_g(M, s, \omega) \times \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{7.1}$$

Dans le spectre différentiel en énergie $dN/d\omega dt$, un terme de facteur de corps gris $\Gamma(M, s, \omega)$ correspondant au produit de la section efficace d'émission avec le terme d'espace de phase apparaît, où M est la masse du trou noir, s le spin de la particule et ω son énergie. Ces facteurs de corps gris ont été calculés par Page dans le cas de trous noirs de Schwarzschild et de Kerr à 4 dimensions pour des particules scalaires, fermioniques et bosoniques de spin 1 [67, 68, 69].

Bien qu'inattendu, le calcul de la température d'un trou noir de Schwarzschild s'effectue relativement facilement et ne nécessite pas de reprendre tout le formalisme développé dans le chapitre 4. De nombreuses méthodes, soit exactes comme le calcul, par abus de langage, de la gravité de surface, soit approchées comme une méthode de type WKB [63], permettent d'obtenir cette température. La partie non triviale du calcul du flux d'émission n'étant pas le calcul de la température mais plutôt celui du terme de section efficace d'émission, nous allons décrire essentiellement le calcul de cette dernière. Mentionnons uniquement une méthode développée par Hartle et Hawking [59] qui fournit une formule simple pour la température d'un trou noir de Schwarzschild vu par un observateur à l'infini :

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{dh}{dr} \right|_{r_H} \tag{7.2}$$

où h correspond à la fonction métrique. Cette formule est issue d'un calcul explicite de la densité d'états de fréquences normales données par les fréquences associées au temps de Schwarzschild t : en passant dans le temps complexe, il est montré qu'une singularité périodique de période T_H^{-1} apparaît. Cette singularité se traduit alors par une contribution thermique à la température T_H dans la densité d'états. Puisque nous ne considérerons que des trous noirs de Schwarzschild, toutes les températures de trous noirs étudiés seront dérivées à l'aide de cette formule.

7.1.2 Exemple d'un champ scalaire sans masse

Pour dériver la section efficace d'émission d'un champ scalaire et sans masse, une approche purement quantique doit être adoptée : la particule considérée est décrite par une fonction d'onde scalaire et la section efficace se déduit de la probabilité que cette fonction d'onde a de traverser la barrière de potentiel[3]. Comme il s'agit d'une probabilité d'émission, l'onde sera composée de modes rentrants et sortants au niveau de l'horizon du trou noir et uniquement de modes sortants infiniment loin de ce dernier (il n'y a aucune source de particules à l'infini du trou noir). Cependant par symétrie, la section efficace d'émission sera identique à celle d'absorption et il est alors possible de retourner le problème : l'onde sera composée de modes rentrants et sortants à l'infini et uniquement de modes rentrants au niveau de l'horizon. Quelque soit le point de vue adopté, émission ou absorption, la section efficace sera bien celle qui intervient dans le spectre d'émission.

[3]Il s'agit uniquement d'un simple effet tunnel.

Equation du mouvement

Compte tenu des symétries de l'espace-temps de Schwarzschild, la section efficace est donnée par le théorème optique en théorie quantique de la diffusion [97] :

$$\sigma_g(\omega) = \sum_{\ell}^{\infty} \frac{(2\ell+1)\,\pi}{\omega^2}\,|A_\ell|^2 \tag{7.3}$$

où A_ℓ correspond au coefficient de transmission du mode de moment angulaire ℓ, égal au moment orbital pour les particules scalaires. Ces coefficients de transmission sont obtenus en résolvant la partie radiale de l'équation de Klein-Gordon qui prend la forme générale donnée dans le chapitre 5.1.1. Etudier cette équation sous la forme d'une équation de Schrödinger (voire équation 5.8) est une étape indispensable car elle permet d'identifier le potentiel (voire chapitre 5.1.1) vu par le champ et dont la forme est capitale puisque la formule (7.3) n'est valable que dans le cas d'une pénétration adiabatique du potentiel : afin de pouvoir définir des états asymptotiques libres, le potentiel doit tendre vers zéro ou une constante à la fois proche de l'horizon et à l'infini du trou noir. Par définition de l'horizon, $h(r_H) = 0$, cette condition d'adiabaticité est bien vérifiée au niveau de l'horizon, ou bien quand $r^\star$ tend vers $-\infty$. A l'autre extrémité, la condition d'un espace asymptotiquement plat est suffisante pour que le potentiel tende vers zéro à l'infini du trou noir[4]. A titre d'exemple, la figure 7.1 représente le potentiel scalaire V pour différentes valeurs du moment angulaire ℓ en fonction de la coordonnée radiale de Schwarzschild r et de la coordonnée radiale *tortoise* pour un trou noir de Schwarzschild en Relativité Générale à quatre dimensions.

Dans le cas où le potentiel vu par la particule scalaire possède les propriétés citées ci-dessus, le coefficient de transmission se déduit des différents flux sortants et rentrants à l'infini et au niveau de l'horizon. En indexant les quantités par *in* et *out* pour les modes rentrants et sortants et par (h) et (∞) pour les modes au niveau de l'horizon et ceux à l'infini, le coefficient de transmission est donné par :

$$|A_\ell|^2 = \begin{cases} \mathcal{F}_{out}^{(\infty)}/\mathcal{F}_{out}^{(h)} & \text{point de vue de l'emission} \\ \\ \mathcal{F}_{in}^{(h)}/\mathcal{F}_{in}^{(\infty)} & \text{point de vue de l'absorption} \end{cases} \tag{7.4}$$

où le *flux* $\mathcal{F}_{out/in}^{(\infty/h)}$ correspond à la partie radiale du quadri-courant J_μ : $J_r = 2hr^2 \mathrm{Im}\left[\Phi^\dagger \partial_r \Phi\right]$. Le calcul de ce coefficient nécessite donc la connaissance de la fonction d'onde et par conséquent de résoudre l'équation de Klein-Gordon.

Méthode exacte de calcul

Même dans le cas le plus simple d'un trou noir de Schwarzschild en Relativité Générale quadri-dimensionnelle, il n'existe pas de solution analytique à l'équation (5.7) et un calcul numérique s'impose. La méthode, qui sera décrite en détail dans le chapitre 7.2 mais dont les points importants sont présentés ici, est alors la suivante : le point de vue absorption est adopté et l'équation de Klein-Gordon est numériquement résolue pour différentes valeurs de l'énergie depuis l'horizon du trou noir jusqu'à une distance suffisamment grande pour être considérée comme infiniment éloignée du trou noir. Au niveau de l'horizon du trou noir la fonction d'onde prend la forme d'ondes planes vis-à-vis de la coordonnée tortoise :

$$R(r^\star) \simeq A_{in}^{(h)} e^{-i\omega r^\star} + A_{out}^{(h)} e^{i\omega r^\star} \tag{7.5}$$

[4]Une étude plus fine devient nécessaire pour les univers de type (A)dS.

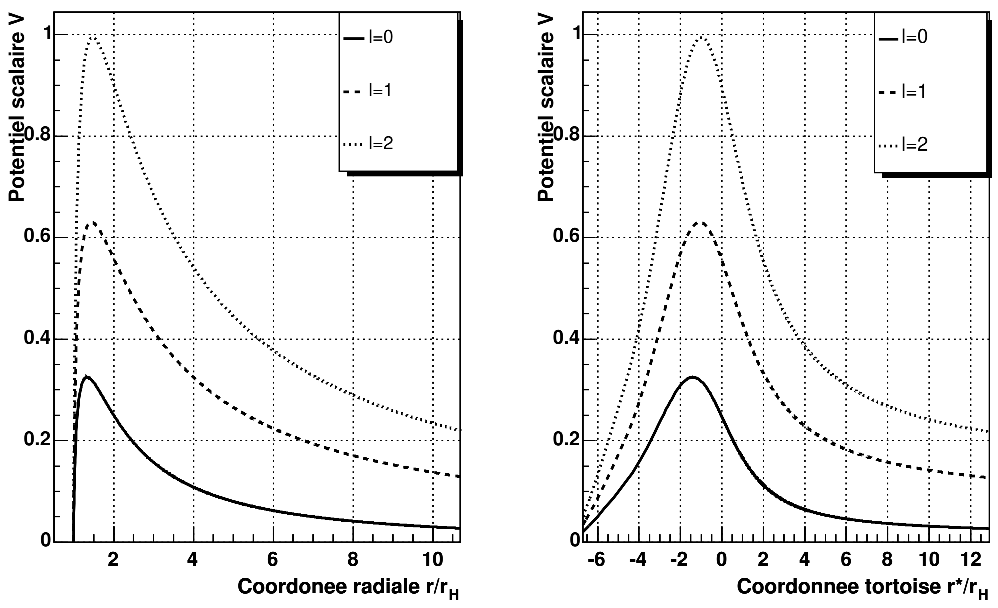


FIG. 7.1 – *Gauche :* Potentiel V vu par une particule scalaire se propageant dans un espace-temps courbé par un trou noir de Schwarzschild en fonction de la variable radiale de Schwarzschild r. *Droite :* Même potentiel exprimé en fonction de la coordonnée tortoise $r^{\star}$.

et on impose que $A_{out}^{(h)} = 0$ car il n'y a que des modes rentants. Infiniment loin du trou noir, la fonction d'onde prend la forme d'ondes sphériques vis-à-vis de la coordonnée de Schwarzschild r :

$$R(r) \simeq A_{in}^{(\infty)} \frac{e^{-i\omega r}}{r} + A_{out}^{(\infty)} \frac{e^{i\omega r}}{r}. \tag{7.6}$$

Cette forme théorique est alors ajustée sur la solution numérique avec les amplitudes $A_{in/out}^{(\infty)}$ comme paramètres libres. Connaissant les solutions asymptotiques, l'amplitude de diffusion peut directement être exprimée en fonction des amplitudes des ondes à l'infini et à proximité de l'horizon grâce à un calcul explicite des flux et, d'un point de vue absorption, prend la forme suivante :

$$|A_\ell|^2 = r_H^2 \left| \frac{A_{in}^{(h)}}{A_{in}^{(\infty)}} \right|^2 = 1 - \left| \frac{A_{out}^{(\infty)}}{A_{in}^{(\infty)}} \right|^2. \tag{7.7}$$

D'un point de vue pratique, l'équation (5.7) est directement utilisée et par conséquent toutes les grandeurs divergent à l'horizon. La résolution numérique se fait alors à partir de $r_{ini} = r_H + \varepsilon$, avec ε suffisamment petit pour n'introduire qu'une erreur négligeable, en appliquant les conditions aux limites suivantes :

$$R(r_{ini}) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{i\omega}{h(r)}, \tag{7.8}$$

qui assurent l'absence de modes rentrants et fixent le flux à l'horizon égal à 1. Le coefficient de transmission est finalement calculé avec les valeurs des paramètres issues de l'ajustement.

Une autre source d'erreur provient de l'incapacité de calculer la somme sur tous les moments angulaires. Cependant, comme le montre la figure 7.1, la barrière de potentiel augmentant avec ℓ, le coefficient de transmission diminue et la section efficace est dominée par les modes de faible moment angulaire. Il est alors possible de limiter la somme à un certain rang m telle que les contributions à la section efficace des ondes partielles de moment angulaire supérieur à m deviennent négligeables.

Bien qu'une méthode numérique soit indispensable pour calculer cette section efficace sur l'ensemble du spectre en énergie des particules, il existe des méthodes analytiques qui premettent de calculer cette grandeur dans deux cas limites : pour des particules dont l'énergie est pratiquement nulle, *i.e.* $\omega \ll r_H^{-1}$, ou pour des particules de très haute énergie, *i.e.* $\omega \gg r_H^{-1}$, l'inverse du rayon de Schwarzschild étant l'échelle d'énergie naturelle pour les particules[5]. Ces méthodes ont été utilisées avec succès pour calculer les facteurs de corps gris dans le cadre des théories des cordes [108], pour des trous noirs à D dimensions en espace asymptotiquement plat [109, 111] ou de Sitter [105] ou bien pour des trous noirs de Schwarzschild en gravité de Gauss-Bonnet [106]. La limite à haute énergie (cas ultra-relativiste) se ramène à un calcul classique, *i.e.* non quantique : il revient à chercher la distance la plus proche à laquelle une particule test peut s'approcher du trou noir avant d'être absorbée, la section efficace étant alors donnée par la surface du disque contenu dans cette dernière orbite stable. Cette valeur limite, aussi appelée limite géométrique car se basant uniquement sur la géométrie du trou noir, a été utilisée avec succès pour des géométries simples comme les trous noirs de Schwarzschild en Relativité Générale à quatre dimensions [67, 69, 68, 6] mais peut s'appliquer à des géométries plus compliquées [105, 106]. L'équation du mouvement $p^\mu p_\mu = 0$ d'une particule test en orbite circulaire autour d'un trou noir de Schwarzschild, et ce quelque soit la théorie sous-jacente, prend la forme suivante [104, 106] :

$$\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{h(r)}{r^2} \tag{7.9}$$

où φ décrit l'angle azimutal et b correspond au quotient du moment angulaire de la particule sur son moment linéaire. Pour avoir une orbite définie, il est nécessaire que $b < \min(r/\sqrt{h})$ et la distance minimale d'approche de la particule est alors donnée par ce minimum $b_c = \min(r/\sqrt{h})$. Finalement, la section efficace d'absorption dans le régime ultra-violet est simplement donnée par l'aire géométrique circonscrite par cette dernière orbite stable $\sigma_g = \pi b_c^2$.

En ce qui concerne la limite à basse énergie, la démarche est bien plus complexe et se base essentiellement sur des méthodes mathématiques de résolution de l'équation de Klein-Gordon. Nous ne rentrerons pas dans les détails d'un telle analyse et nous renvoyons le lecteur aux références [109] pour le cas des trous noirs de Schwarzschild $D-$dimensionnels ainsi qu'aux références [112, 113, 114, 105] pour le cas de trous noirs de Reissner-Nordström et de Schwarzschild-de Sitter. Mentionnons tout de même l'idée générale de cette méthode : des solutions approchées pour $\omega \to 0$ près de l'horizon du trou noir et infiniment loin de ce dernier sont trouvées et ensuite ces deux solutions asymptotiques sont raccordées dans une région intermédiaire afin d'obtenir une expression analytique du coefficient de transmission. Ce raccordement nécessitant d'étendre *intelligemment* les solutions asymptotiques dans une région où elles ne sont plus valables, les formes approchées citées précédemment ne sont pas suffisantes et une étude plus rigoureuse de l'équation (5.7) s'impose. En se référant à [109], il est montré que, dans le cas de trous noirs de Schwarzschild $D-$dimensionnels et après un changement de variable adéquat, les ondes sont décrites par des fonctions hypergéométriques à proximité du trou noir et par des fonctions de Bessel fractionnaire d'ordre $\ell + 1/2$ loin du trou noir [6]. En identifiant les modes rentrants et sortants dans ces solutions et en les raccordant dans une région intermédiaire, il est possible d'obtenir une forme analytique pour la section efficace d'absorption.

[5] Cette échelle d'énergie est une conséquence directe de la nature quantique des particules imposant une comparaison entre leur longueur d'onde et la taille du trou noir.

[6] Les fonctions de Bessel correspondant aux états propres du Laplacien en coordonnées sphériques, cette solution approchée revient à négliger le potentiel gravitationnel, tout en conservant le potentiel centrifuge.

Approche semi-classique

Le calcul des facteurs de corps gris étant issu de la diffusion quantique sur une barrière de potentiel gravitationnel, il est possible d'utiliser la méthode semi-classique afin de déterminer une valeur approchée de l'amplitude de diffusion $|A_\ell|^2$. Ainsi, à l'ordre semi-classique le plus bas, la probabilité tunnel donnée dans l'équation (5.53) peut fournir l'amplitude de diffusion. Cependant, le coefficient de transmission entrant dans le calcul des facteurs de corps gris s'obtient à l'aide des flux de la fonction R, décrivant la propagation dans un espace courbe, tandis que la probabilité tunnel semi-classique s'obtient en étudiant la fonction $U(r^\star) = rR(r)$, décrivant la propagation dans un espace plat avec un terme potentiel. Il nous faut donc exprimer le flux de la fonction R, à l'infini et à proximité de l'horizon du trou noir, en fonction du flux de la fonction U :

$$\mathcal{F}_R = 2r^2 h(r)\mathrm{Im}\left(\frac{R}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 R^\dagger\right). \tag{7.10}$$

En remplaçant R par son expression en fonction de U, le flux prend la forme suivante :

$$\mathcal{F}_R = 2h(r)\mathrm{Im}\left(U(r)\frac{\partial U^\dagger(r)}{\partial r} + \frac{|U(r)|^2}{r}\right). \tag{7.11}$$

Le deuxième terme de la parenthèse étant réel, il disparaîtra. La dernière étape consiste à passer de r à $r^\star$. Comme $dr^\star = h^{-1}dr$, nous avons finalement égalité parfaite entre les flux :

$$\mathcal{F}_R = 2\mathrm{Im}\left(U(r^\star)\frac{\partial U^\dagger(r^\star)}{\partial r^\star}\right). \tag{7.12}$$

Compte tenu de l'égalité des flux, l'amplitude de diffusion sera exactement donnée par la probabilité tunnel de la fonction pour une particule décrite par la fonction U et la section efficace, à l'ordre semi-classique, prend alors la forme suivante :

$$\sigma_g(\omega) = \sum_\ell \frac{(2\ell+1)\pi}{\omega^2}\exp\left(\int_{r_1^\star}^{r_2^\star}\sqrt{\omega^2 - V_\ell^2(r^\star)}dr^\star\right), \tag{7.13}$$

les points tournants $r_i^\star$ dépendant à la fois de l'énergie et du moment orbital considérés.

Comme il l'a déjà été signalé dans le chapitre 5.1.3, la probabilité tunnel utilisée ci-dessus présente deux incovénients majeurs : elle surestime la probabilité de diffusion pour des particules d'énergie supérieure à la barrière et elle n'est plus du tout valide à proximité du seuil. Or, puisque dans le calcul des facteurs de corps gris toutes les énergies et moments angulaires sont mis en jeu, une partie significative de la diffusion concernera des énergies et moments angulaires pour lesquels la probabilité tunnel ci-dessus n'est plus valable. En estimant les facteurs de corps gris à l'ordre WKB, il ne faudra pas perdre de vue que l'estimation au niveau des résonances sera fortement surestimée. Cependant, nous pouvons nous attendre à ce que la position en énergie de ces résonances soit relativement bien retrouvée et que la limite à haute énergie soit exactement retrouvée. Afin d'améliorer l'estimation semi-classique des facteurs de corps gris, nous pouvons utiliser la probabilité tunnel semi-classique optimisée pour fonctionner au seuil proposée dans les articles [77, 78], et déjà utilisée dans le chapitre 5.2.2 pour l'étude d'un champ scalaire en espace SAdS. Avec une telle expression, les facteurs de corps gris prendront alors la forme suivante

$$\sigma_g(\omega) = \sum_\ell \frac{(2\ell+1)\pi}{\omega^2}\left(1 + e^{2i\pi(\mu+1/2)}\right)^{-1}, \tag{7.14}$$

avec

$$\mu + 1/2 = ip^2(r^\star_{max})\left[2\left.\frac{d^2p^2(r^\star)}{dr^{\star 2}}\right|_{r^\star_{max}}\right]^{-1/2}, \tag{7.15}$$

qui dépendra du moment angulaire et de l'énergie considérée via la fonction p^2. Dans le régime infra-rouge, là où les phénomènes quantiques dominent, il semble *a priori* hasardeux d'utiliser une telle méthode d'approximation.

7.1.3 Particules avec spin

D'un point de vue qualitatif, le cas des particules scalaires s'étend aisément aux particules avec un spin non-nul : il s'agit toujours d'adopter une description purement quantique des particules et de chercher le coefficient de transmission de cette dernière. La section efficace sera de nouveau donnée par la formule (7.3) en remplaçant le moment orbital ℓ par le moment angulaire total $j = \ell + s$ de la particule considérée. Cependant, d'un point de vue technique, la tâche se complique grandement avec l'introduction du spin car ce dernier "se couple" au champ gravitationnel : par exemple, les matrices de Dirac sont modifiées en espace courbe et les particules sans masse de spin 1 ne sont pas décrites par deux équations de Klein-Gordon.

Pourquoi le spin doit-il intervenir dans la propagation des particules ? Il a été vu dans le chapitre 2 que l'introduction de la dérivation covariante est indispensable pour compenser l'effet de la variation des coordonnées curvilignes le long d'une trajectoire et permettre de définir le transport parallèle. Cependant lors d'un transport parallèle sur une courbe fermée, les composantes du vecteur changent entre le départ et l'arrivée car les coordonnées ont changé : il ne s'agit pas d'une différentielle exacte. Si l'on s'interesse à la propagation d'une particule spinorielle, les particules de matière, ou vectorielle, les bosons de jauge, il est nécessaire de prendre en compte que le long de sa trajectoire les composantes du spin vont être modifiées et cet effet non trivial introduit un "couplage" du spin avec le champ gravitationnel. D'un point de vue plus formel, ce "couplage" apparaît puisque le Lagrangien décrivant la propagation d'une particule de spin quelconque dans un espace-temps courbe doit vérifier deux invariances de jauge : l'invariance par changement de coordonnées généralisées imposée par le principe d'équivalence et l'invariance de Lorentz lors d'une transformation infinitésimale de Lorentz dans le référentiel localement inertiel [107], afin de prendre en compte la structure de spin du champ étudié.

Newman et Penrose ont développé un formalisme utilisant une tétrade particulière qui permet de décrire les particules de spin non-nul dans un espace-temps courbe [115, 116]. C'est dans ce formalisme que tout d'abord Teukolsky et Press ont pu calculer les équations des perturbations scalaires, spinorielles, vectorielles et tensorielles pour un trou noir de Kerr [117, 118, 119]. C'est aussi grâce à ce formalisme que les équations de la Mécanique Quantique pour des particules de spin non-nul peuvent être déduites. Dans le cas de problème à symétrie sphérique, il est possible d'obtenir une forme générale de l'équation d'onde d'une particule de spin donné s. Cette analyse généralisée (*master analysis* dans la littérature) consiste tout d'abord à obtenir les équations de champs dans le formalisme de Newman-Penrose et ensuite à chercher des solutions sous la forme d'états propres d'énergie et de moment angulaire $\Phi_s(t,r,\Omega) = e^{-i\omega t} Y^\ell_{m,s}(\Omega) R_s(r)$, où $Y^\ell_{m,s}$ sont les harmoniques sphériques de spin. Les particules sont alors entièrement décrites par la partie radiale des équations de champs :

$$\Delta^s \frac{d}{dr}\left(\Delta^{1-s}\frac{dP_s}{dr}\right) + \left(\frac{\omega^2 r^2}{h} + 2is\omega r - \frac{is\omega r^2}{h}\frac{dh}{dr} - \lambda\right) P_s = 0 \tag{7.16}$$

où les fonctions $\Delta = r^2 h(r)$, $P_s(r) = \Delta^s R_s(r)$ et la constante $\lambda = j(j+1) - s(s-1)$ ont été introduites pour simplifier l'écriture. Dans cette équation, s représente l'hélicité et peut donc valoir $\pm 1/2$ pour les fermions et ± 1 pour les bosons de jauge sans masse. La résolution de l'équation ci-dessus pour une particule se propageant autour d'un trou noir permet de déterminer la probabilité de transition de cette dernière et par conséquent la section efficace d'émission via l'équation (7.3) en remplaçant le moment orbital ℓ par le moment angulaire total $j = \ell + s$ de la particule. L'équation ci-dessus est extrêmement pratique car elle s'applique aussi aux particules scalaires en prenant $s = 0$. Dans la suite nous raisonerons sur cette équation générale et sur la fonction P_s plutôt que sur R_s, l'équation différentielle vérifiée par cette dernière étant légèrement plus compliquée. Notons que dans le cas de particules scalaires, les fonctions P_0 et R_0 coïncident.

Malgré quelques différences, toutes les méthodes de résolution de cette équation différentielle citées pour le cas des particules scalaires sont applicables au particules de spin non-nul. En particulier, pour le cas de particules de haute énergie, la limite géométrique est rigoureuseument la même que dans le cas des particules scalaires : à très hautes énergies, toutes les particules tendent vers un comportement classique et l'effet du spin devient négligeable. La méthode analytique dans le cas où $\omega \to 0$ s'applique aussi au cas des particules avec spin bien que l'analyse de l'équation différentielle ainsi que les solutions asymptotiques diffèrent de celles des particules scalaires [111] : par exemple les fonctions de Kummer apparaîtront à la place des fonctions de Bessel fractionnaires pour les solutions loin du trou noir. Finalement, les méthodes numériques s'étendent aisément au cas général avec comme solutions asymptotiques :

$$\begin{aligned} P_s(r) &\to A_{in}^{(h)} e^{-i\omega r^\star} + A_{out}^{(h)} \Delta^s e^{i\omega r^\star} \quad \text{quand} \quad r \to r_H \\ P_s(r) &\to A_{in}^{(\infty)} \frac{e^{-i\omega r}}{r^{1-2s}} + A_{out}^{(\infty)} \frac{e^{i\omega r}}{r} \quad \text{quand} \quad r \to +\infty. \end{aligned} \tag{7.17}$$

En toute rigueur, le champ comportant deux composantes $\pm |s|$, il est nécessaire de résoudre deux équations différentielles correspondant aux composantes $s = +|s|$ et $s = -|s|$. Cependant, Cvetic et Larsen [108] ont montré que la composante $+|s|$ emportait majoritairement les modes rentrants et la composante $-|s|$ majoritairement les modes sortants. D'un point de vue absorption, ce sont les modes rentrants qui servent au calcul du coefficient de transmission et résoudre uniquement l'équation pour la composante $+|s|$ est suffisant.

Comme pour les champs scalaires, une fois les solutions asymptotiques connues, il est possible de déterminer l'amplitude de diffusion entrant dans les facteurs de corps gris en fonction des amplitudes des modes grâce à un calcul explicite des flux. Pour les champs de spin 1/2, le flux est défini comme la composante radiale du quadri-courant $J^\mu = 2\sigma^\mu_{AB}\Psi^A_{1/2}\bar{\Psi}^B_{1/2}$ évaluée sur une sphère de dimension deux. Pour les champs de jauge, le flux se déduit de la trace du tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu} = 2\sigma^\mu_{AB}\sigma^\nu_{A'B'}\Psi_1^{AB}\bar{\Psi}_1^{A'B'}$, lui aussi évalué sur une sphère de dimension deux. Un calcul explicite de ces deux quantités est présenté dans les références [108, 111] aboutissant, d'un point de vue absorption, à une expression générale pour l'amplitude de diffusion :

$$|A_j|^2 = r_H^{2(1-2s)} \left| \frac{A_{in}^{(h)}}{A_{in}^{(\infty)}} \right|^2. \tag{7.18}$$

7.1.4 Cas des dimensions supplémentaires

Que se passe-t-il dans le cas où la théorie sous-jacente présente des dimensions supplémentaires ? Encore une fois, d'un point de vue qualitatif cela ne change rien et l'ensemble des idées et des méthodes de calcul présentées précédemment reste tout à fait valable. Quelques différences sont cependants introduites car il devient nécessaire de différencier les particules émises uniquement sur la brane de celles qui peuvent se propager dans le bulk.

Dans le cadre des modèles ADD, les particules du modèle standard sont, par construction, confinées sur la brane et le seul changement dans le calcul des sections efficaces d'absorption vient de la forme de la fonction métrique de la brane. En appelant h la fonction métrique dans le bulk, il peut être montré que la projection de la métrique du bulk sur la brane dans le cas de dimensions supplémentaires étendues et planes induit une métrique, sur la brane, de type Schwarzschild avec la fonction métrique h. Ainsi, l'émission de particules confinées sur la brane dépend implicitement du nombre de dimensions supplémentaires via la fonction métrique induite sur la brane. Bien que dans les modèles ADD les dimensions supplémentaires ne sont pas étendues, elles restent tout de même grandes et peuvent être considérées comme étendues si la taille du trou noir considéré est bien plus petite que celle des dimensions supplémentaires. Cette hypothèse simplificatrice vaut aussi bien pour la dynamique des particules autorisées à se propager dans le bulk que lors de la construction des solutions des équations d'Einstein décrivant un trou noir de Schwarzschild $D-$dimensionnel.

Toujours dans le cadre des modèles ADD, les particules se propageant dans le bulk sont les gravitons ainsi que les particules scalaires ne portant aucune charge du modèle standard. De telles particules peuvent *a priori* exister bien qu'aucune particule élémentaire scalaire n'ait été observée : les champs scalaires jouent déjà un rôle essentiel en physique des hautes énergies[7] et en cosmologie[8]. Pour de telle particules, la partie radiale de la dynamique à D dimensions est modifiée et devient :

$$\frac{h(r)}{r^{D-2}}\frac{d}{dr}r^{D-2}h(r)\frac{dR(r)}{dr}+\left(\omega^2-h(r)\frac{\ell\left(\ell+D-3\right)}{r^2}\right)R(r)=0. \tag{7.19}$$

La présence de ces dimensions supplémentaires modifie explicitement la dynamique radiale des particules autorisées à se propager dans le bulk, tout d'abord d'un point de vue cinétique via la généralisation $D-$dimensionnelle du Laplacien et ensuite d'un point de vue potentiel via la forme de la fonction métrique et du potentiel centrifuge. Si pour les particules confinées sur la brane les solutions asymptotiques ne changent pas, il n'en va pas de même pour les particules se propageant dans le bulk : bien qu'elle reste inchangée près de l'horizon, la fonction d'onde radiale loin du trou noir est donnée par la généralisation à D dimensions des ondes sphériques

$$R(r)\simeq A_{in}^{(\infty)}\frac{e^{-i\omega r}}{\sqrt{r^{D-2}}}+A_{out}^{(\infty)}\frac{e^{i\omega r}}{\sqrt{r^{D-2}}}. \tag{7.20}$$

La section efficace d'absorption diffère elle-aussi du cas à quatre dimensions et se déduit de la généralisation à D dimensions du théorème optique [120] :

$$\sigma_g(\omega)=\sum_{\ell}^{\infty}\frac{2^{D-4}\pi^{\frac{D-3}{2}}\Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right)}{(D-4)!\omega^{D-2}}\times\frac{(2\ell+D-3)\,(\ell+D-4)!}{\ell!}\left|A_\ell\right|^2 \tag{7.21}$$

qui redonne bien la forme habituelle en posant $D=4$. Finalement le terme d'espace de phase dans le flux émis sera lui aussi modifié ainsi :

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\rightarrow\frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}} \tag{7.22}$$

pour prendre la forme $d^{D-1}k=\Omega_{D-2}\times\omega^{D-2}d\omega$, où Ω_{D-2} représente l'angle solide total de dimension $(D-2)$, dans le cas d'une particule de masse nulle.

Tout comme pour les champs scalaires confinés sur la brane, il est possible d'écrire la partie radiale de l'équation de Klein-Gordon sous la forme d'une équation de Schrödinger. Pour cela, il est à nouveau nécessaire d'utiliser la coordonnée tortoise $r^\star$ comme coordonnée spatiale et d'effectuer le changement de fonction inconnue suivant $U(r)=r^{(D-2)/2}R(r)$. Avec ces nouvelles variables, l'équation différentielle est alors la suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{d^2}{dr^{\star 2}}\\ +h(r)\left[\dfrac{\ell(\ell+D-3)}{r^2}+\dfrac{D-2}{2r}\dfrac{dh}{dr}+(D-4)(D-2)\dfrac{h(r)}{4r^2}\right]\end{array}\right\}U=\omega^2U, \tag{7.23}$$

le deuxième terme du membre de gauche pouvant s'interpréter comme un terme de type potentiel. La même ambiguité concernant ce terme, potentiel ou carré du potentiel, que pour le cas des champs confinés sur la brane se retrouve dans la littérature. Comme précédemment, nous interpréterons ce terme comme le carré du potentiel bien que, en ce qui concerne le calcul des facteurs de corps gris, l'interprétation en terme de V ou V^2 ne change rien.

L'étude du spectre d'évaporation des trous noirs dans des cadres théoriques faisant intervenir des dimensions supplémentaires est faisable dans la mesure où ces dimensions sont planes et étendues. De telles conditions seront toujours des approximations dans le cas des théories

[7]La masse des particules proviendrait de leur interaction avec un boson scalaire, le boson de Higgs, dont la valeur attendue du champ sur l'état vide n'est pas nulle.

[8]La phase primordiale d'inflation serait déclenchée par un champ scalaire loin de son état d'énergie minimum et en roulement lent.

actuelles avec dimensions supplémentaires comme les modèles ADD ou RS. Cependant cette approximation est largement justifiée si la taille du trou noir est bien inférieure à celle des dimensions supplémentaires. Cette hypothèse sera toujours en toile de fond pour le au calcul des spectres d'émission des trous noirs ainsi que dans leur éventuelle détection.

7.2 Facteurs de corps gris : calculs numériques

A l'heure actuelle, l'unique manière de déterminer les facteurs de corps gris sur l'ensemble du spectre énergétique passe par une étape numérique afin de pouvoir résoudre les équations de la Mécanique Quantique en espace courbe. J'ai donc développé un programme de calcul numérique permettant de déterminer avec une précision ajustable les facteurs de corps gris pour des particules scalaires, fermioniques et des bosons de jauge confinés sur notre brane ainsi que pour des particules scalaires pouvant se propager dans le bulk, émises d'une part par des trous noirs de Schwarzschild à D dimensions immergés dans un Univers de Sitter et d'autre part, par des trous noirs de Schwarzschild en théorie de Gauss-Bonnet à D dimensions. Dans cette partie, la structure et les principes de l'évaluation numérique des facteurs de corps gris sont présentés. La première partie traite de la structure générale du programme alors que nous nous attarderons dans la seconde partie sur les "subtilités" propres à chaque cas étudié dans cette thèse.

7.2.1 Principe général du programme

Le programme de calcul numérique des facteurs de corps gris procède en trois étapes : pour une valeur donnée de l'énergie ω et du moment angulaire ℓ, la partie radiale des équations, donnée de façon générale par l'équation (7.16), est tout d'abord résolue numériquement. Puis, à partir de la solution numérique, les amplitudes des modes rentrants et sortants à l'infini sont estimées et utilisées pour déterminer le coefficient de transmission. Finalement, ce coefficient de transmission permet de calculer la contribution du multipôle d'ordre ℓ à la valeur de la section efficace d'absorption à l'énergie ω. Ces étapes sont alors reprises pour l'ordre multipolaire suivant et ce jusqu'à atteindre une précision suffisante sur la section efficace d'absorption avant de passer à une nouvelle valeur de l'énergie. La figure (7.2) représente, sous forme d'un schéma, la structure générale du programme de calcul de la section efficace d'absorption avec, en particulier, les trois grandes étapes.

En ce qui concerne la résolution numérique, l'équation radiale (7.16) est écrite sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre, tout d'abord car l'utilisation d'équations du premier ordre est plus aisée et ensuite car la fonction d'onde est complexe et doit donc être décomposée en sa partie réelle et sa partie imaginaire. En appelant U et V les parties réelle et imaginaire de la fonction d'onde radiale, le système différentiel prend la forme suivante :

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} \dfrac{dU}{dr} \\ U \\ \dfrac{dV}{dr} \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(r) & F_2(r) & 0 & F_3(r) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_3(r) & F_1(r) & F_2(r) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{dU}{dr} \\ U \\ \dfrac{dV}{dr} \\ V \end{pmatrix} \tag{7.24}$$

où les fonctions F_i, réelles, ne dépendent que de la coordonnée radiale r ainsi que de l'énergie, du moment angulaire et du spin et contiennent toute l'information sur la courbure de l'espace-temps. Ce système est ensuite résolu à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre [123], choisie principalement pour sa simplicité et sa robustesse. Le point de vue de l'absorption est utilisé pour le calcul des sections efficaces. Les conditions aux limites s'appliquent donc à l'horizon du trou noir où l'on impose que la fonction d'onde radiale soit uniquement composée de modes entrants et la résolution numérique part du rayon de Schwarzschild jusqu'à l'infini spatial. Cependant de nombreuses précautions doivent être prises quant à la résolution numérique :

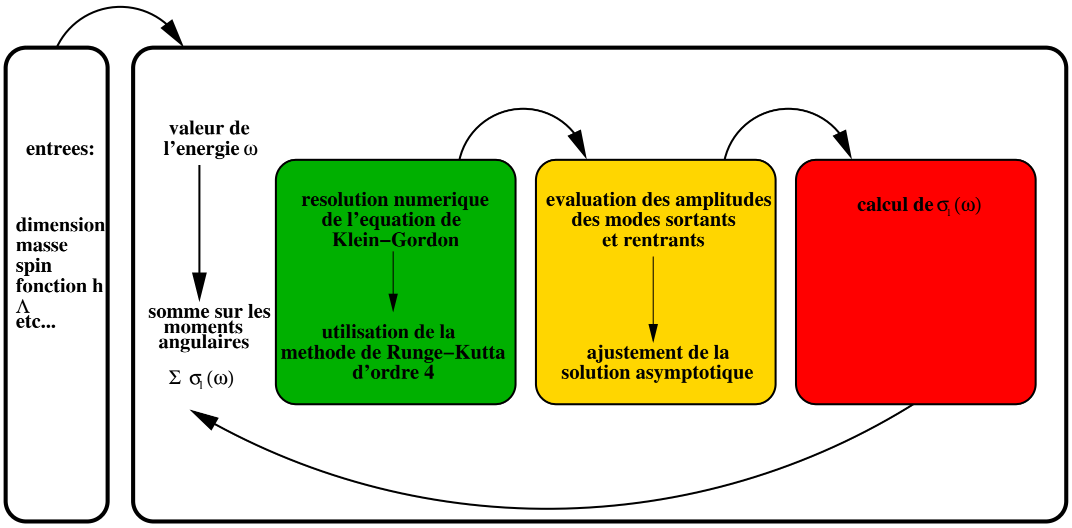


FIG. 7.2 – Schéma représentant la structure générale du programme calculant la section efficace d'absorption en fonction de l'énergie de la particule

tout d'abord l'intégration ne peut être commencée *stricto sensu* à l'horizon du trou noir car la fonction métrique, et donc les fonctions F_i, divergent à cet endroit, tout comme elle ne peut être effectuée jusqu'à l'infini spatial. De plus, les effets de décalage gravitationnel vers le rouge ou vers le bleu doivent être pris en compte car ils modifient la fréquence de l'onde. Pour surmonter ces problèmes, l'intégration numérique est commencée à $r_{ini} = r_h + \varepsilon$, en prenant soin de choisir ε suffisamment petit pour que l'erreur induite sur la solution numérique soit négligeable et elle est stoppée à une valeur r_{max} suffisamment élevée pour être considérée comme l'infini. Les valeurs de ces deux grandeurs dépendent à la fois des trous noirs considérés et du type de particules émises mais elles restent du même ordre de grandeur suivant tous les cas considérés : ε est de l'ordre de $10^{-4} r_H$ et r_{max} de l'ordre de $300/\omega$. Les conditions aux limites prennent alors la forme suivante :

$$P_s(r_{ini}) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dP_s}{dr} = -\frac{i\omega}{h(r_{ini})}. \tag{7.25}$$

ce qui assure, en plus de l'annulation des modes sortants, que le flux entrant est égal à 1. L'évolution de la fréquence de la fonction d'onde selon l'endroit considéré force à modifier la valeur du pas de l'intégration numérique de manière à ce qu'il reste bien inférieur à la longueur d'onde locale tout en assurant de ne pas requérir trop de points et donc de temps d'intégration. Une méthode efficace consiste à utiliser directement les formules de décalage vers le rouge induit par la courbure de l'espace-temps $\omega_{loc}(r) = \omega/\sqrt{h(r)}$: en appelant Δr le pas de l'intégration, on peut le choisir de manière à avoir $\Delta r < \sqrt{h(r)}/\omega$.

La deuxième étape de l'intégration numérique consistant à extraire les amplitudes de la fonction d'onde, il est nécessaire d'identifier les modes sortants et entrants dans la solution numérique. Pour cela, connaissant la forme asymptotique des fonctions d'ondes quand $r \to +\infty$, une procédure d'ajustement par test de χ^2 de la solution analytique sur la solution numérique à grande valeur de r, où les amplitudes des différents modes sont les paramètres libres, est utilisée. Puisque la fonction d'onde se décompose sous forme d'ondes sphériques à l'infini $P_s(r) \simeq A_{in}^{(\infty)} e^{-i\omega r}/r^{1-2s} + A_{out}^{(\infty)} e^{i\omega r}/r$, les fonctions U et V sont des combinaisons de fonctions sinus et cosinus avec des amplitudes données par des combinaisons des parties réelle et imaginaire des coefficients $A^{(\infty)}_{out/in}$:

$$\begin{aligned} U(r) &= \left(\frac{\mathrm{Re}\left(A^{(\infty)}_{in}\right)}{r^{1-2s}} + \frac{\mathrm{Re}\left(A^{(\infty)}_{out}\right)}{r}\right)\cos(\omega r) \\ &+ \left(\frac{\mathrm{Im}\left(A^{(\infty)}_{in}\right)}{r^{1-2s}} - \frac{\mathrm{Im}\left(A^{(\infty)}_{out}\right)}{r}\right)\sin(\omega r) \end{aligned} \tag{7.26}$$

$$\begin{aligned} V(r) &= \left(\frac{\mathrm{Im}\left(A^{(\infty)}_{in}\right)}{r^{1-2s}} + \frac{\mathrm{Im}\left(A^{(\infty)}_{out}\right)}{r}\right)\cos(\omega r) \\ &+ \left(-\frac{\mathrm{Re}\left(A^{(\infty)}_{in}\right)}{r^{1-2s}} + \frac{\mathrm{Re}\left(A^{(\infty)}_{out}\right)}{r}\right)\sin(\omega r). \end{aligned} \tag{7.27}$$

La précision de l'ajustement dépend énormément de l'énergie et de l'ordre multipolaire considérés mais elle est, dans la plupart des cas, sans conséquence sur la précision du calcul de la section efficace en comparaison des autres sources d'erreurs induites lors de la résolution numérique.

Une fois ces amplitudes déterminées, le coefficient de transmission est calculé en utilisant soit l'amplitude des modes entrants et sortants, soit l'amplitude des modes sortants uniquement ; le coefficient de transmission $|\mathcal{A}_j|^2$ étant donné par :

$$|\mathcal{A}_j|^2 = {r_H}^{2(1-2s)}\left|\frac{1}{A^{(\infty)}_{in}}\right|^2 = 1 - \left|\frac{A^{(\infty)}_{out}}{A^{(\infty)}_{in}}\right|^2. \tag{7.28}$$

Le coefficient de transmission calculé, il est aisé d'obtenir la contribution d'ordre j à la section efficace via la relation $\sigma_j(\omega) = (2j+1)\pi|\mathcal{A}_j|^2/(\omega r_H)^2$. En toute rigueur, la section efficace totale à l'énergie ω est finalement donnée en sommant la totalité des ordres multipolaires. Or une telle opération n'est pas faisable numériquement. Cependant la somme peut être tronquée à un ordre m, introduisant une nouvelle source d'erreur sur la détermination de la section efficace, puisque le potentiel augmente avec le moment angulaire. La valeur de m est choisie de manière à ce que la contribution des ordres supérieurs à m soit négligeable.

7.2.2 Spécificités selon les cas étudiés

Spécifités dues au spin

Le spin de la particule intervenant dans l'équation de champ, son influence sur la détermination numérique des facteurs de corps gris est par conséquent prépondérante, tant au niveau du système différentiel à intégrer qu'au niveau de l'évaluation des amplitudes de probabilité. En se focalisant tout d'abord sur le cas d'un champ scalaire, le système différentiel est grandement simplifié car la fonction F_3 est rigoureuseument nulle. En effet, cette dernière caractérise le « couplage » entre le spin de la particule et le champ gravitationnel, qui devient nul pour une particule de spin nul. Cette fonction F_3 étant nulle, les parties réelle et imaginaire de la fonction d'onde radiale évoluent donc indépendamment l'une de l'autre et sont solution du même système différentiel ; l'unique différence entre les deux parties provenant des conditions initiales imposées. D'après l'équation (7.28), la détermination numérique des amplitudes de probabilité nécessite deux ajustements avec chacun quatre paramètres libres pour la partie réelle et la partie imaginaire. Cependant, ces ajustements sont simplifiés en regroupant les différentes amplitudes de probabilité de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathrm{Re}\Big(A_{in}^{(\infty)}\Big) + \mathrm{Re}\Big(A_{out}^{(\infty)}\Big), \\ A_2 &= \mathrm{Im}\Big(A_{in}^{(\infty)}\Big) - \mathrm{Im}\Big(A_{out}^{(\infty)}\Big), \\ B_1 &= \mathrm{Im}\Big(A_{in}^{(\infty)}\Big) + \mathrm{Im}\Big(A_{out}^{(\infty)}\Big), \\ B_2 &= -\mathrm{Re}\Big(A_{in}^{(\infty)}\Big) + \mathrm{Re}\Big(A_{out}^{(\infty)}\Big). \end{aligned} \tag{7.29}$$

Avec cette redéfinition, l'évaluation des amplitudes de probabilité nécessite d'abord deux ajustements avec chacun deux paramètres libres, A_1 et A_2 pour la partie réelle et B_1 et B_2 pour celle imaginaire, puis l'inversion du système algébrique mentionné ci-dessus. L'avantage d'un tel changement est double : d'une part, l'ajustement des fonctions analytiques sur les solutions numériques est amélioré et d'autre part, la détermination des amplitudes de probabilité est plus rapide.

Pour les fermions, la fonction F_3 n'est cette fois-ci plus nulle compliquant légèrement la résolution numérique. Une différence de taille apparaît aussi dans le cas des fermions : ne résolvant que la composante $+|s|$ des équations de champ, les modes sortants seront pratiquements nuls $|A_{out}|^2 \ll |A_{in}|^2$. Plus particulièrement, les investigations numériques ont montré qu'imposer $A_{out} = 0$ introduit une erreur négligeable quant à la détermination des facteurs de corps gris pour les fermions. Avec une telle simplification, les fonctions U et V deviennent à l'infini :

$$U(r) = \mathrm{Re}\left(A_{in}^{(\infty)}\right)\cos(\omega r) + \mathrm{Im}\left(A_{in}^{(\infty)}\right)\sin(\omega r), \tag{7.30}$$

$$V(r) = \mathrm{Im}\left(A_{in}^{(\infty)}\right)\cos(\omega r) - \mathrm{Re}\left(A_{in}^{(\infty)}\right)\sin(\omega r). \tag{7.31}$$

Travailler sous cette approximation est très pratique pour deux raisons : d'une part les ajustements se font avec deux paramètres libres permettant un gain de temps et, d'autre part, nous avons deux estimations indépendantes de la partie réelle et imaginaire de l'amplitude permettant ainsi une vérification de la résolution numérique.

Pour les champs de jauge, la situation devient cependant plus délicate pour la raison suivante, déjà mis en exergue par les auteurs de la référence [104] : travaillant avec la composante $+|s|$, la contribution des modes sortants au niveau de l'horizon sera fortement supprimée par un terme $(r^2 h(r))^{|s|}$. Or, l'intégration numérique se fait à partir de l'horizon du trou noir où nous imposons l'absence de mode sortant. Cependant, la moindre petite erreur dans l'estimation des fonctions U et V, et il y en a nécessairement, peut être confondue avec une contribution due à un mode sortant. L'intégration numérique s'éloignant de l'horizon, cette petite contribution est alors amplifiée et la solution à l'infini est alors fortement contaminée par des modes sortants. Autrement dit, la résolution numérique de l'équation de champ pour des particules avec spin n'est pas stable vis-à-vis des conditions initiales. Cette instabilité n'apparaît pas dans le cas des fermions mais elle devient importante pour les bosons de jauge rendant la résolution directe des équations de champ impossible. Cependant, une solution pour surmonter ce problème [104] consiste à résoudre l'équation différentielle pour la fonction $F(y)$ telle que $P_1 = yF(y)e^{-i\omega r^*}$ et $y = r/r_H$. Avec ces nouvelles variables, il devient nécessaire de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$h(y)y^2\frac{d^2F}{dy^2} + 2y\left(h(y) - i\omega r_H y\right)\frac{dF}{dy} - j(j+1)F = 0, \tag{7.32}$$

imposant comme conditions initiales

$$F(1) = 1 \quad \text{et} \quad \left.\frac{dF}{dy}\right|_{y=1} = \frac{ij(j+1)}{2\omega r_H}. \tag{7.33}$$

Avec cette équation, les problèmes de contamination disparaissent et l'estimation des facteurs de corps gris est alors faisable. Tout comme pour les particules de spin $\frac{1}{2}$, la fonction d'onde est principalement dominée par les modes rentrants et l'amplitude des modes sortants peut alors être mise égale à zéro infiniment loin du trou noir sans perdre en précision.

Spécificités dues à la métrique

La métrique va elle aussi énormément conditionner la précision requise dans la résolution numérique des équations de champ. Fixant la forme du potentiel, elle va tout d'abord imposer la valeur de r à atteindre pour pouvoir considérer que l'approximation en onde sphérique est suffisante. De plus, elle fixera aussi le choix du pas d'intégration, qui devra être variable, puisque la métrique est caractéristique de la courbure et donc des effets de décalage gravitationnel vers le rouge ou le bleu des ondes.

Dans le cas d'une théorie de Gauss-Bonnet sans constante cosmologique, l'espace-temps est asymptotiquement plat. De plus, le terme de Gauss-Bonnet étant une première correction à la Relativité Générale, son action se limite aux petites distances, c'est-à-dire à proximité du trou noir. Autrement dit, l'influence du terme de Gauss-Bonnet sera négligeable une fois loin du trou noir et la valeur de r à atteindre pour que l'approximation sphérique soit justifiée est alors sensiblement identique à celle requise en Relativité Générale et peut être prise de l'ordre de $300/\omega$. En ce qui concerne le début de l'intégration, un pas adaptif est nécessaire compte tenu des effets de décalage vers le rouge. La méthode est alors la suivante : un pas Δx_∞ est choisi à l'infini, là où les effets de décalage en fréquence sont négligeables. Ce pas est choisi de manière à avoir un nombre de point N suffisamment grand durant une oscillation $\Delta x_\infty = \omega/N$. Il est alors possible de calculer un pas qui prend en compte les effets de décalage gravitationnel en fréquence : en r le pas $\Delta x(r) = \Delta x_\infty \sqrt{h(r)}$. Il sera cependant nécessaire de faire attention de ne pas s'approcher trop près de l'horizon car $\Delta x(r)$ tend vers zéro dans cette région, ce qui augmenterait considérablement le temps de calcul.

Dans le cas d'un Univers de Sitter, la situation se complique fortement puisqu'un deuxième horizon s'ajoute à l'horizon du trou noir. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, l'intégration numérique doit être faite de l'horizon du trou noir à l'horizon de Sitter. Cette taille limite fixe directement la valeur maximale de r à atteindre durant l'intégration. Cependant, puisqu'il s'agit d'un horizon, il faudra, numériquement parlant, stopper la résolution avant de l'atteindre pour éviter toute divergence. En approchant de cet horizon, la solution est décrite, comme à proximité de l'horizon du trou noir, par des ondes planes dont la fréquence augmentera par décalage gravitationnel vers le bleu. Cette particularité nécessite d'appliquer de nouveau un pas adpatatif, donné grâce à la méthode précédente. De plus, l'estimation des facteurs de corps gris se faisant par ajustement sur les solutions numériques proches de l'horizon de Sitter, la résolution numérique se doit d'être suffisamment précise augmentant ainsi le temps de calcul de manière significative en comparaison d'un calcul en espace-temps asymptotiquement plat. L'ajout d'un deuxième horizon peut avoir des conséquences assez significatives en regard du spin de la particule : en effet, celui-ci risque de renforcer la contamination des solutions par des modes sortants et l'effet pourrait devenir significatif même dans le cas de champ fermionique.

7.3 Facteurs de corps gris : résultats et spectres

7.3.1 Résultats avec terme de Gauss-Bonnet [106]

La métrique décrivant l'espace-temps autour des trous noirs de Schwarzschild en théorie de Gauss-Bonnet est présentée dans le chapitre 2.2.3. De plus, pour que le terme de Gauss-Bonnet soit dynamique sans couplage avec un champ dilatonique, il est nécessaire que le nombre de dimensions soit strictement supérieur à cinq.

Propriétés thermodynamiques de ces trous noirs

La thermodynamique des trous noirs de Schwarzschild en théorie de Gauss-Bonnet est décrite par la masse, la température et l'entropie, d'abord calculées par [33] puis intensément étudiées dans les références [124, 125]. Les deux premières grandeurs sont déduites de la fonction $h(r)$ intervenant dans la métrique décrivant l'espace-temps autour d'un tel trou noir et s'expriment toutes deux en fonction de la taille de l'horizon du trou noir r_H. La fonction métrique pour les trous noirs de Schwarzschild-Gauss-Bonnet, en se limitant à la branche (+) et à une topologie elliptique, prend la forme suivante

$$h(r) = 1 + \frac{r^2}{2\tilde{\alpha}}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{64\pi\tilde{\alpha}M}{(D-2)\Omega_{D-2}M_D^{D-2}r^{D-1}}}\right), \tag{7.34}$$

où M est la masse du trou noir, $\tilde{\alpha} = \alpha(D-3)(D-4)$, α étant la constante de couplage de Gauss-Bonnet et M_D la masse de Planck $D-$dimensionnel. Ω_{D-2} est l'angle solide total à $D-2$ dimensions, qui est aussi la surface d'une hypersphère unitaire à $D-2$ dimensions. Ceci conduit aux expressions suivantes pour la masse et la température T_H :

$$M_{BH} = \frac{(D-2)\pi^{\frac{D-1}{2}}M_D^{D-2}r_H^{D-3}}{8\pi\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}\left(1 + \frac{\alpha(D-3)(D-4)}{r_H^2}\right), \tag{7.35}$$

$$T_H = \frac{(D-3)\left[r_H^2 + \alpha(D-5)(D-4)\right]}{4\pi r_H\left[r_H^2 + 2\alpha(D-4)(D-3)\right]}, \tag{7.36}$$

Γ correspondant à la fonction factorielle de Euler.

L'entropie de ces trous noirs est calculée de manière thermodynamique en imposant que les trous noirs de Gauss-Bonnet vérifient le premier principe. Ainsi l'entropie se définit de la manière suivante :

$$S_{BH} = \int \frac{dM_{BH}}{T_H}. \tag{7.37}$$

La température et la masse s'exprimant en fonction du rayon de Schwarzschild, l'intégrale ci-dessus se calcule sur la variable r_H en imposant que l'entropie soit nulle quand l'horizon du trou noir l'est. Cette condition limite tient dans l'interprétation de l'entropie des trous noirs comme l'information cachée par l'horizon. L'entropie doit donc s'annuler en l'absence d'horizon et s'écrit alors :

$$\begin{aligned} S_{BH} &= \int_0^{r_H} T_H^{-1}(r_H)\frac{\partial M_{BH}}{\partial r_H}dr_H \\ &= \frac{\Omega_{D-2}r_H^{D-2}M_D^{D-2}}{4}\left[1 + \frac{2\alpha\,(D-2)\,(D-3)}{r_H^2}\right]. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Puisqu'un trou noir de Schwarzschild est, géométriquement parlant, une sphère de dimension $D-2$ et de rayon r_H, la surface de son horizon est donc $\mathcal{A} = \Omega_{D-2}r_H^{D-2}$. L'entropie des trous noirs de Gauss-Bonnet ne vérifie donc pas la loi des aires, *i.e.* $S_{BH} \propto \mathcal{A}$, car si cela avait été le cas, elle prendrait la forme :

$$S_{BH} = \frac{1}{4}\mathcal{A}M_D^{D-2} = \frac{1}{4}\Omega_{D-2}r_H^{D-2}M_D^{D-2}. \tag{7.39}$$

Revenons à l'entropie donnée par l'équation (7.39), il est possible qu'elle devienne négative. Ceci a lieu pour des valeurs de la constante de couplage de Gauss-Bonnet telle que

$$\alpha < -\frac{r_H^2}{2\,(D-2)\,(D-3)}. \tag{7.40}$$

Donc, si la constante de couplage de Gauss-Bonnet est négative, certains trous noirs peuvent avoir une entropie négative et l'interprétation d'un tel résultat n'est pas aisée. S'agit-il d'un défaut dans la définition de l'entropie ? Ce comportement ne pourrait-il pas imposer une taille minimale pour les trous noirs ? Afin de rester conservatif dans l'étude des facteurs de corps gris ci-après, nous nous limiterons à des valeurs de la constante de couplage de Gauss-Bonnet positives assurant une entropie positive quelque soit la taille du trou noir considéré. La gamme de valeurs étudiées pour α est choisie de manière heuristique : cette constante de couplage ne devra être ni trop petite, pour qu'il y ait des effets visibles dans le future, ni trop grande pour que ces effets n'aient pu être observés jusqu'à maintenant. De plus, le terme de Gauss-Bonnet décrivant les premières correction à la Relativité Générale apparaissant dans la région de Planck, il semble naturelle que la valeur de la constante de couplage α soit de l'ordre de M_D^{-2}, à plus ou moins un ordre de grandeur près. Notre étude s'étendra sur une gamme allant de quelques fractions de M_D^{-2} à une dizaine de M_D^{-2}.

Forme du potentiel et solutions asymptotiques

L'espace-temps autour d'un trou noir de Schwarzschild en gravitation de Gauss-Bonnet à D dimensions est asymptotiquement plat. Par conséquent, le potentiel vu par une particule scalaire s'annule infiniment loin du trou noir et l'utilisation du théorème optique pour le calcul de la section efficace est alors justifiée. Ce potentiel est donné par la formule vue dans le chapitre 5.1.1 en prenant la fonction métrique dans le cas de trous noirs de Gauss-Bonnet.

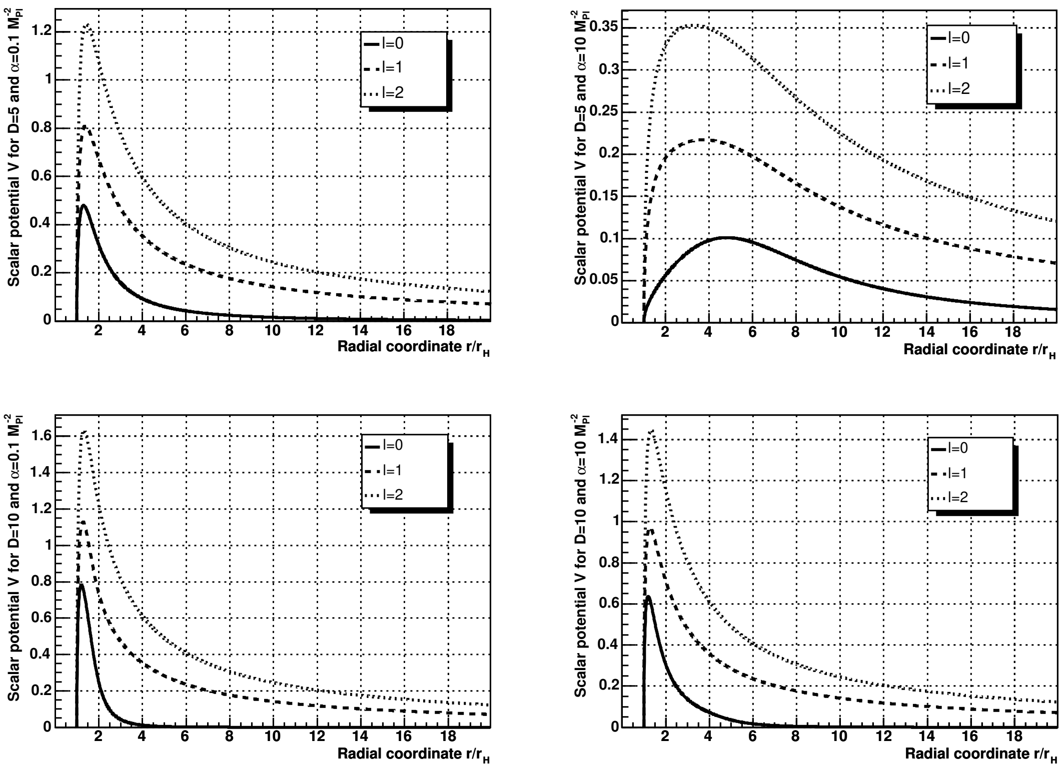


FIG. 7.3 – Potentiel scalaire sur la brane pour un trou noir de Schwarzschild en gravité de Gauss-Bonnet en fonction de la coordonnée radiale de Schwarzschild r. *Haut : D* est pris égal à 5 et la constante de couplage α égal à 0.1 M_D^{-2} à gauche et 10 M_D^{-2} à droite. *Bas : D* est pris égale à 10 et la constante de couplage α égale à 0.1 M_D^{-2} à gauche et 10 M_D^{-2} à droite.

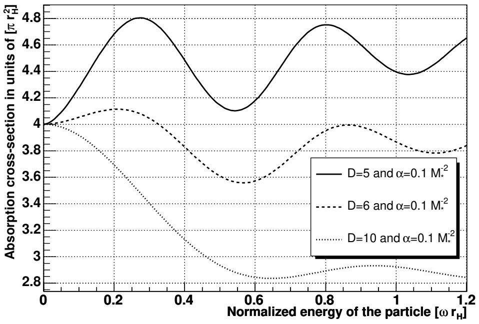
La figure 7.3 représente ce potentiel pour un nombre de dimensions D égal à 5 et 10 et pour une constante de couplage α égale à 0.1 M_D^{-2} et 10 M_D^{-2}. Tout d'abord, le potentiel augmente et s'amincit légèrement quand le nombre de dimensions augmente. En ce qui concerne les particules de basse énergie, il n'est pas aisé de tirer une conclusion quant à la valeur de la section efficace d'émission. Mais pour les particules de haute énergie, on s'attendra à ce que la section efficace diminue quand la dimensionnalité de l'espace augmente. Vis-à-vis de la constante de couplage α, le potentiel diminue et s'élargit quand cette dernière augmente. De nouveau, bien qu'il soit impossible de tirer des conclusions quant au comportement à basse énergie de la section efficace, la limite à haute énergie de cette dernière augmentera avec la valeur de la constante de couplage. Les solutions aux limites pour les fonctions d'ondes seront données par les solutions asymptotiques décrites dans les chapitres 7.1.2, 7.1.3 et 7.1.4 : des ondes sphériques à l'infini du trou noir, puisque l'espace est asymptotiquement plat, et des ondes planes en fonction de la coordonnée tortoise au niveau de l'horizon.

Section efficace d'émission

A l'aide du programme numérique présenté précédemment, nous avons pu obtenir les - différentes sections efficaces d'absorption, ou facteurs de corps gris, pour des champs scalaires, fermioniques et de jauge confinés sur la brane ainsi que pour des champs scalaires se propageant dans le bulk. La section efficace d'absorption sera exprimée, pour le cas de champs confinés sur la brane, en unités de πr_H^2 et, pour les champs se propageant dans le bulk, en unités de la surface du trou noir à $D-2$ dimensions $\mathcal{A} = \Omega_{D-2} r_H^{D-2}$ et représentée comme une fonction de l'énergie de la particule ω normalisée à l'inverse de la taille du trou noir. L'unité des abscisses sur les différents graphiques sera donc le paramètre sans dimension ωr_H. Le choix de cette unité est une conséquence directe du fait que le processus de diffusion des particules s'échelonne directement sur la taille du trou noir car l'énergie de la particule n'a de sens, en terme de diffusion, qu'en comparaison de la longueur d'onde associée à la taille de l'objet diffusant, qui est le trou noir. De plus, les sections efficaces présentées ci-dessous seront toujours normalisées à la surface émettrice du trou noir, bidimensionnelle ou $(D-2)-$dimensionnelle selon le champ considéré. Ainsi, il ne faudra pas perdre de vue que les augmentations ou diminutions induites par, soit le nombre de dimensions, soit la constante de couplage de Gauss-Bonnet, seront en unités de surface de trou noir et se traduiront simplement, en terme de flux, si les trous noirs sont de taille identique. La surface émettrice d'un trou noir de Schwarzschild étant proportionnelle à une puissance de son rayon, la taille du trou noir peut être vue comme l'unité naturelle des facteurs de corps gris.

Champ scalaire confiné sur la brane :

La figure 7.4 représente la section efficace d'absorption d'un champ scalaire avec le système d'unité convenu précédemment. La partie de droite permet de déduire l'influence de la constante de couplage de Gauss-Bonnet, le nombre de dimensions étant fixe, tandis que la partie de gauche permet de déduire l'effet du nombre de dimensions. Ce dernier est pris égal à $\{5, 6, 10\}$ et la constante de couplage à 0.1 M_D^{-2} sur la partie gauche tandis que D vaut 6 et $\alpha = \{0, 0.1, 1, 10\}$ M_D^{-2} sur la partie droite de la figure. Premièrement, la section efficace d'absorption, comme dans le cas de la Relativité Générale à D dimensions dont une étude exhaustive se trouve en référence [104], tend vers une valeur constante qui est la surface à quatre dimensions du trou noir $4\pi r_H^2$ lorsque l'énergie de la particule s'annule. Des similitudes avec le cas de la Relativité Générale apparaissent aussi concernant l'influence du nombre de dimensions : une augmentation de la dimensionnalité de l'espace induit une diminution de la section efficace d'absorption sur l'ensemble du spectre en énergie. Deuxièmement, pour un nombre de dimensions fixé, une augmentation de la valeur de la constante de couplage de Gauss-Bonnet entraîne une augmentation de la section efficace d'absorption.



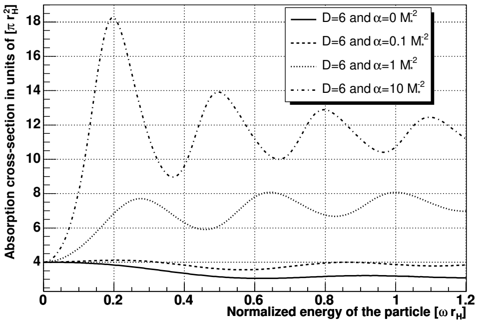


FIG. 7.4 – Section efficace d'absorption d'un champ scalaire confiné sur la brane par un trou noir de Schwarzschild en gravité de Gauss-Bonnet et fonction de l'énergie de la particule ωr_H. *Gauche :* La constante de couplage de Gauss-Bonnet α est prise égale à $0.1\ M_D^{-2}$ et le nombre de dimensions D à $\{5, 6, 10\}$. *Droite :* La constante de couplage de Gauss-Bonnet est prise égale à $\{0, 0.1, 1, 10\}\ M_D^{-2}$ et le nombre de dimensions à 6.

Champ de fermions confiné sur la brane :

La figure 7.5 représente la section efficace d'absorption d'un champ fermionique avec la même présentation que dans le cas d'un champ scalaire, à savoir la partie de gauche correspondant à une valeur fixée de la constante de couplage de Gauss-Bonnet et différentes valeurs du nombre de dimensions et la partie droite correspond au cas contraire. Les différentes valeurs choisies pour D et α sont identiques au cas d'un champ scalaire. De nouveau, l'effet du nombre de dimensions est similaire au cas de la Relativité Générale à D dimensions : une augmentation du nombre de dimensions entraîne une diminution de la section efficace d'absorption à haute énergie et une augmentation de cette dernière à basse énergie. En ce qui concerne l'effet de la constante de couplage de Gauss-Bonnet, cette dernière influence la section efficace de manière opposée au nombre de dimensions : là où une augmentation de D entraîne une augmentation de la section efficace, une augmentation de la constante de couplage entraîne quant à elle une diminution du facteur de corps gris et réciproquement. De plus, quand $\omega r_H \to 0$ la section efficace tend vers une constante non-nulle qui dépend à la fois du nombre de dimensions et de la constante de couplage de Gauss-Bonnet[9], chacun de ces paramètres agissant de manière opposée : la limite à basse énergie de la section efficace d'absorption diminue avec le nombre de dimensions tandis qu'elle augmente pour des valeurs plus faibles de α. Finalement, la limite à haute énergie du facteur de corps gris pour les fermions est identique à celle pour les scalaires pour une valeur fixée du couple (D, α). Ce résultat est en effet prévisible car à haute énergie, le spin de la particule n'a plus d'effet et les particules peut être considérées comme classiques.

Champ de jauge confiné sur la brane :

En ce qui concerne le cas de champs de jauge confinés sur la brane, les résultats sont représentés sur la figure 7.6 avec un "format" identique aux cas scalaire et fermionique. De manière générale, les conclusions tirées dans le cas des champs fermioniques s'appliquent au cas des champs de jauge, excepté pour la limite infra-rouge. En effet, pour les champs de spin 1, la section efficace tend cette fois-ci vers zéro quand $\omega r_H \to 0$, et ce quelque soit la valeur du couple (D, α). Cependant, le facteur de corps gris tombe plus ou moins rapidement à zéro selon

[9]Il n'existe pas d'interprétation intuitive de ce comportement. Il peut cependant être noté qu'un terme de *couplage* entre le spin du champ et la courbure intervient : il est donc *a priori* possible que la limite infra-rouge dans le cas de particule de spin non nul dépende du nombre de dimensions D et de la constante de couplage α via la coubure.

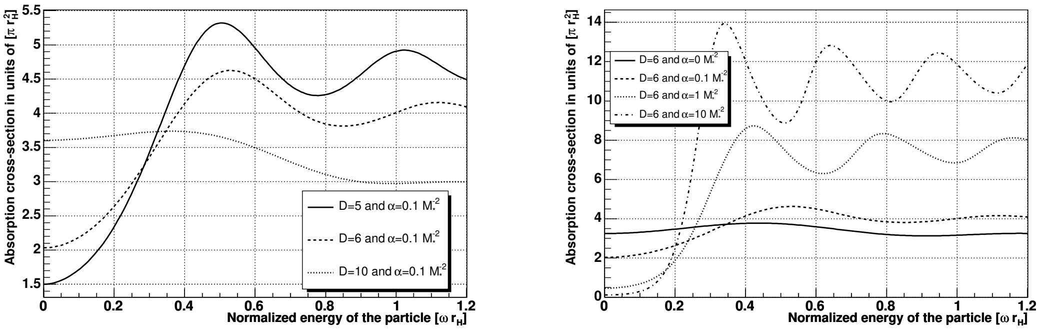


FIG. 7.5 – Section efficace d'absorption d'un champ fermionique confiné sur la brane par un trou noir de Schwarzschild en gravité de Gauss-Bonnet et fonction de l'énergie de la particule ωr_H. *Gauche :* la constante de couplage de Gauss-Bonnet α est prise égale à 0.1 M_D^{-2} et le nombre de dimensions D à $\{5, 6, 10\}$. *Droite :* la constante de couplage de Gauss-Bonnet est prise égale à $\{0, 0.1, 1, 10\}$ M_D^{-2} et le nombre de dimensions à 6.

la valeur des paramètres D et α. Le comportement de cette *chute* suit la même dépendance en D et α que la section efficace fermionique à basse énergie : la section efficace, dans le régime de basse énergie, diminue quand le nombre de dimensions diminue ou bien quand la constante de couplage de Gauss-Bonnet augmente. Finalement, tout comme pour les fermions, la limite à haute énergie est identique à celle des champs scalaires.

Champ scalaire se propageant dans le bulk :

Pour finir, les résulats obtenus dans le cas de l'absorption de particules scalaires autorisées à se propager dans le bulk sont représentés sur la figure 7.7. Les valeurs pour le nombre de dimensions et la constante de couplage sont identiques aux cas précédents. Il faut cependant se rappeler que l'unité pour la section efficace est cette fois-ci la surface à D dimensions du trou noir. En ce qui concerne la limite à basse énergie ainsi que l'influence de α, les conclusions sont, qualitativement parlant, les mêmes que pour un champ scalaire confiné sur la brane : d'une part, la section efficace tend systématiquement vers la surface $D-$dimensionnelle du trou noir quand $\omega r_H \to 0$ et, d'autre part, une augmentation de la constante de couplage de Gauss-Bonnet entraîne une augmentation de la section efficace. D'un point de vue quantitatif, il y a cependant une différence : l'effet de α est bien plus important sur un champ se propageant dans le bulk que sur un champ se propageant uniquement sur la brane. Concernant l'effet du nombre de dimensions, les conclusions concernant le cas d'un champ sur la brane ne s'appliquent pas dans le cas de la propagation dans le bulk puisqu'une augmentation du nombre de dimensions conduit à une augmentation du facteur de corps gris. Cependant, ce comportement en fonction du nombre de dimensions rejoint celui du facteur de corps gris pour un champ scalaire se propageant dans le bulk en théorie de la Relativité Générale à D dimensions [104].

Analyse semi-analytique :

Les résultats ci-dessus ont pu être corroborés grâce à une analyse semi-analytique de la limite à haute énergie de la section efficace d'absorption obtenue par la méthode décrite dans le chapitre 7.1.2. Dans le cas de particules confinées sur la brane, il faut minimiser la quantité $r/\sqrt{h(r)}$ afin de déterminer la position r_c de cette dernière orbite dont l'aire géométrique sera l'aire d'un disque de rayon $b_c = r_c/\sqrt{h(r_c)}$. La limite à haute énergie pour les champs se

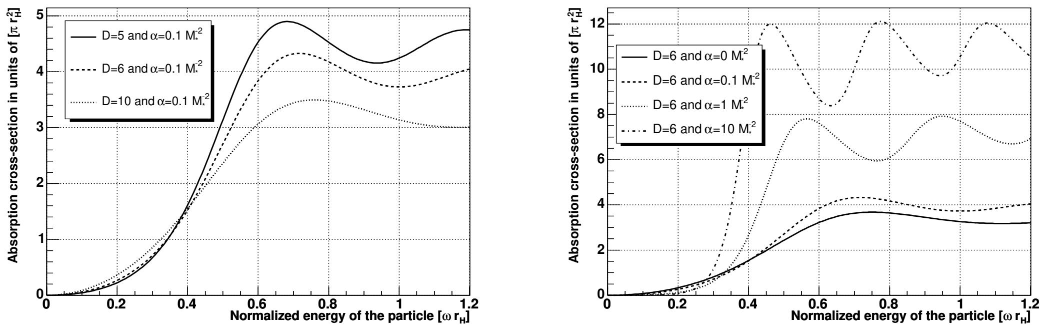


FIG. 7.6 – Section efficace d'absorption d'un champ de jauge confiné sur la brane par un trou noir de Schwarzschild en gravité de Gauss-Bonnet et fonction de l'énergie de la particule ωr_H. *Gauche :* la constante de couplage de Gauss-Bonnet α est prise égale à 0.1 M_D^{-2} et le nombre de dimensions D à $\{5, 6, 10\}$. *Droite :* la constante de couplage de Gauss-Bonnet est prise égale à $\{0, 0.1, 1, 10\}$ M_D^{-2} et le nombre de dimensions à 6.

propageant uniquement sur la brane, quelque soit leur spin, est alors donnée par la :

$$\sigma_g(\omega \to +\infty) = \frac{\pi r_c^2}{1 + \frac{r_c^2}{2\tilde{\alpha}}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{64\pi\tilde{\alpha} M}{(D-2)\Omega_{D-2} M_D^{D-2} r_c^{D-1}}}\right)}, \tag{7.41}$$

r_c étant solution de l'équation algébrique suivante

$$\sqrt{1 + \frac{64\pi\tilde{\alpha} G M_{BH}(D-3)(D-4)}{(D-2)\Omega_{D-2} r_c^{D-1}}} = \frac{8\pi(D-1)GM_{BH}}{(D-2)\Omega_{D-2}\, r_c^{D-3}}. \tag{7.42}$$

Les valeurs de r_c peuvent être déterminées numériquement selon les valeurs du couple de paramètres D et α. Les résultats obtenus quant à la valeur de la limite à haute énergie pour des valeurs de α égales à $\{0, 0.1, 1, 10\}$ M_D^{-2} et des valeurs de D allant de 5 à 11 sont répertoriés dans le tableau 7.1 où la section efficace est toujours en unités de πr_H^2. Ces résultats sont en excellent accord avec les résultats obtenus précédemment par les auteurs de la référence [104] correspondant au cas $\alpha = 0$ ainsi qu'avec les résultats numériques présentés ci-dessus.

$\sigma_g/(\pi r_H^2)$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 10$
$D = 5$	4.00	4.59	9.46	51.2
$D = 6$	3.07	3.91	7.64	11.4
$D = 7$	2.60	3.53	5.70	6.62
$D = 8$	2.31	3.24	4.53	4.88
$D = 9$	2.12	3.00	3.82	3.98
$D = 10$	1.98	2.80	3.34	3.43
$D = 11$	1.87	2.63	3.00	3.06

TAB. 7.1 – Limite à haute énergie des facteurs de corps gris pour une émission sur la brane en unités de πr_H^2.

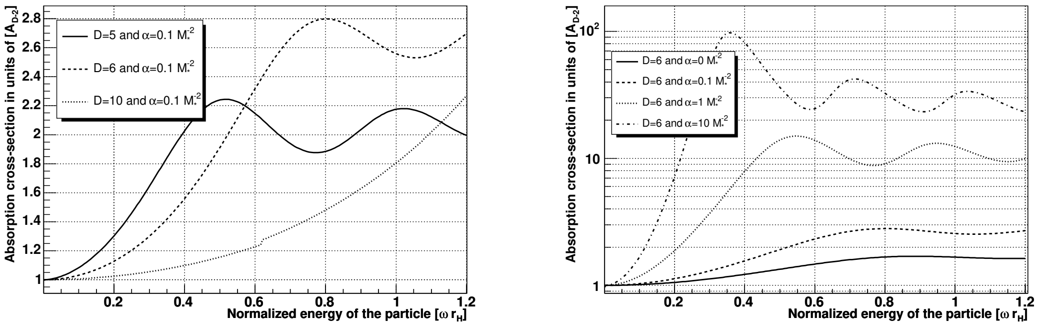


FIG. 7.7 – Section efficace d'absorption d'un champ scalaire se propageant dans le bulk par un trou noir de Schwarzschild en gravité de Gauss-Bonnet et fonction de l'énergie de la particule ωr_H. *Gauche :* la constante de couplage de Gauss-Bonnet α est prise égale à 0.1 M_D^{-2} et le nombre de dimensions D à $\{5, 6, 10\}$. *Droite :* la constante de couplage de Gauss-Bonnet est prise égale à $\{0, 0.1, 1, 10\}$ M_D^{-2} et le nombre de dimensions à 6.

Pour les particules autorisées à se propager dans le bulk, la dérivation de la limite géométrique procède de la même façon, l'équation du mouvement en fonction de l'angle azimutal prenant exactement la même forme que dans le cas à quatre dimensions, et le régime classique accessible est de nouveau donné par $b < \min(r/\sqrt{h(r)})$. Puisque la fonction métrique est identique pour des particules se propageant dans le bulk ou sur la brane, les valeurs de b_c définissant la dernière orbite stable seront identiques au cas précédent. Cependant, l'aire géométrique de cette orbite sera différente car nous considèrons maintenant un espace à D dimensions. Cette aire peut être vue soit comme celle d'un disque à $D-2$ dimensions soit comme le volume d'une sphère à $D-3$ dimensions[10] et tous deux de rayons b_c. Une fois cette surface, ou volume, trouvée, la limite géométrique à haute énergie du facteur de corps gris prend la forme suivante

$$\sigma_g(\omega \to +\infty) = \frac{2\pi}{(D-2)} \frac{\pi^{(D-4)/2}}{\Gamma[(D-2)/2]} b_c^{D-2}, \tag{7.43}$$

Γ étant ici la fonction factorielle de Euler. De nouveau, il y a un très bon accord entre la limite à haute énergie déterminée par cette analyse classique, dont les valeurs sont représentées dans le tableau 7.2, et celle trouvée par une résolution numérique des équations de champs quantiques.

L'interprétation intuitive de l'influence du terme de Gauss-Bonnet ainsi que de la dimensionnalité de l'espace-temps sur la propagation des particules n'est pas aisée. Une étude numérique exhaustive était donc indispensable afin d'aboutir aux résultats qui viennent d'être présentés.

Observables : spectres d'émission et rapports bulk/brane

Spectres d'émission

Bien que les facteurs de corps gris soient riches en renseignements concernant l'influence de la théorie de la gravitation sous-jacente sur la propagation des particules à proximité des trous noirs, il est nécessaire de retourner à l'observable physique permettant de sonder la structure de l'espace-temps autour des trous noirs que sont les spectres d'émission de ces derniers. Puisque nous ne considérons que des particules de masse nulle, les flux prendront la forme suivante

$$\frac{d^2N}{dt d\omega} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\sigma_g(\omega, s, M_{BH})\,\omega^2}{\exp(\omega/T_H) - (-1)^{2s}}, \tag{7.44}$$

[10]Pour $D = 4$, une sphère à $D-3$ dimensions est un cercle dont le volume est la surface du disque qu'il contient, donc bien la surface d'un disque à $D-2$ dimensions.

σ_g/A_{D-2}	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 10$
$D = 5$	1.70	2.09	6.19	77.7
$D = 6$	1.77	2.87	11.0	24.5
$D = 7$	1.85	3.97	13.2	19.1
$D = 8$	1.93	5.31	14.6	18.1
$D = 9$	2.01	6.81	15.8	18.3
$D = 10$	2.08	8.40	17.0	19.0
$D = 11$	2.16	10.0	18.3	19.9

TAB. 7.2 – Limite à haute énergie des facteurs de corps gris pour une émission dans le bulk en unités de A_{D-2}.

pour les particules confinées sur la brane et

$$\frac{d^2N}{dtd\omega} = \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{\Omega_{D-2}\sigma_g\left(\omega, s, M_{BH}\right)\omega^{D-2}}{\exp\left(\omega/T_H\right) - 1}, \tag{7.45}$$

pour les particules scalaires se propageant dans le bulk. Puisque l'effet du nombre de dimensions a été intensément étudié dans la référence [104], nous nous concentrerons dans cette partie sur l'effet de la constante de couplage de Gauss-Bonnet sur les spectres d'émission des trous noirs de Schwarzschild. Pour étudier ces spectres d'émission, il est nécessaire de fixer une grandeur caractérisant de manière univoque le trou noir. Il est possible de choisir soit son rayon de Schwarzschild r_H, soit sa masse. En choisissant le rayon de Schwarzschild, la masse du trou noir considéré variera avec la constante de couplage de Gauss-Bonnet puisque ces trois grandeurs, M_{BH}, r_H et α, sont liées les unes aux autres par une unique équation. Avec un tel choix, l'influence de la constante de couplage sera investiguée pour des trous noirs de même taille mais de masse différente. Ce choix est a priori le plus aisé puisque la température T_H et les facteurs de corps gris sont des fonctions explicites des deux variables r_H et α et s'échelonnent en fonction de la taille du trou noir. D'une certaine manière, en théorie de Gauss-Bonnet, la taille des trous noirs est l'unité naturelle des grandeurs déterminant leurs spectres d'émission. Cependant, la grandeur caractéristique d'un trou noir que l'on peut espérer mesurer n'est pas son rayon de Schwarzschild, mais sa masse. Adoptant un point de vue phénomènologique, nous considérerons les spectres d'émission pour des trous noirs de même masse et donc étudier l'influence de α sur ces spectres signifiera que les trous noirs n'auront pas la même taille. Ceci complique extrêment les choses car il est alors nécessaire de considérer la température et les facteurs de corps gris comme des fonctions de α et de la masse M_{BH}, qui est une fonction de α. Ainsi, l'influence de la constante de couplage de Gauss-Bonnet sur les spectres d'émission dépendra de la masse du trou noir et une influence générale, indépendante de la masse, ne pourra être trouvée.

Compte tenu de la remarque précédente, l'effet de la constante de couplage de Gauss-Bonnet sur les spectres d'émission sera étudié pour quatre masses différentes de trous noirs $M_{BH} = \{10, 100, 1000, 10000\}\, M_D$, les plus basses représentant des trous noirs dénotés comme *légers* et les plus élevées des trous noirs dénotés comme *lourds*. A une masse de trou noir donnée, modifier la constante de Gauss-Bonnet va jouer sur les spectres de deux manières différentes : cela va tout d'abord modifier la température, et ce, compte tenu de l'expression de cette dernière, de façon non-monotone. Deuxièmement, cela va modifier les valeurs des facteurs de corps gris et de manière fortement dépendante de la masse du trou noir. En effet, augmenter la constante de couplage entraîne, d'une part, une augmentation des facteurs de corps gris, du moins dans une large gamme en énergie et ce quelle que soit la taille du trou noir, mais uniquement en unités de surface du trou noir et, d'autre part, une diminution de la taille du trou noir. Ainsi, en faisant varier la constante α, deux mécanismes agissant de manière opposée entrent en jeu et, selon la masse considérée, l'un ou l'autre des effets sera dominant aboutissant soit à une augmentation des particules émises, soit à une diminution, quand α augmente. Il est important de noter que l'effet du terme de Gauss-Bonnet sur la taille des trous noirs est fortement supprimé quand la masse augmente car ce terme de Gauss-Bonnet agit à petites distances, correspondant à des faibles masses de trous noirs, tandis que son effet sur les facteurs de corps gris a lieu à toutes les masses car la rétrodiffusion des particules émises a lieu à proximité du trou noir, là où le terme de Gauss-Bonnet reste important, et ce quelle que soit sa taille.

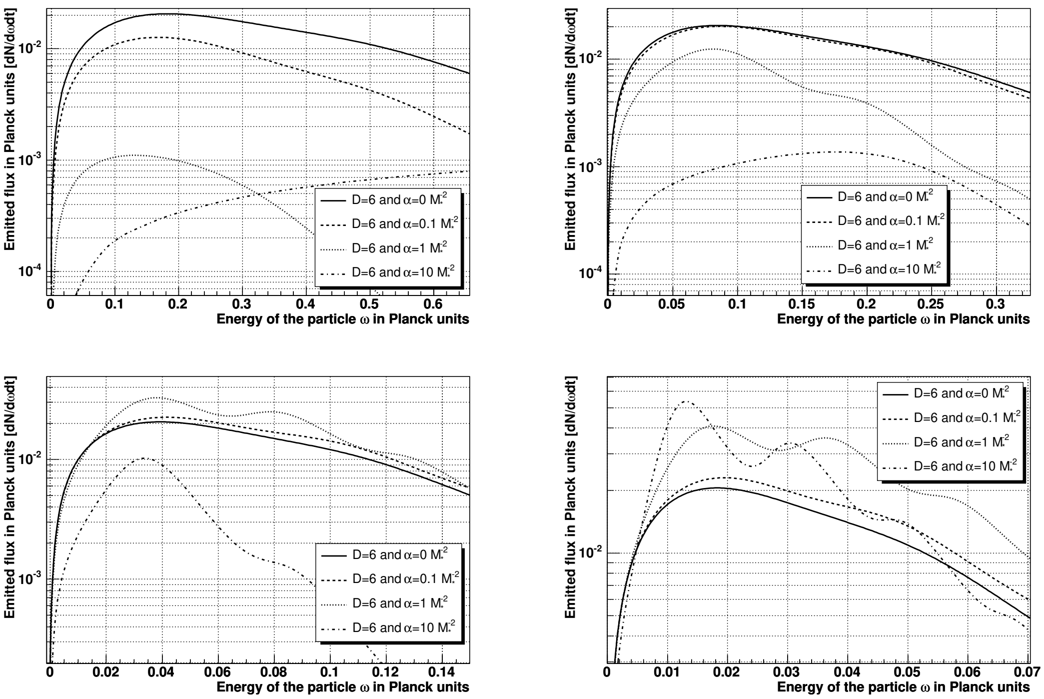


Fig. 7.8 – Flux de particules scalaires confinées sur la brane émises par un trou noir de Schwarzschild-Gauss-Bonnet en fonction de l'énergie ω de la particule en unités de Planck M_D. La constante de couplage de Gauss-Bonnet prend les valeurs $\alpha = \{0, 0.1, 1, 10\}\ M_D^{-2}$, le nombre de dimensions est fixé à 6 et les trous noirs ont des masses de $M_{BH} = 10\ M_D$ (haut gauche), $M_{BH} = 100\ M_D$ (haut droit), $M_{BH} = 1000\ M_D$ (bas gauche) et $M_{BH} = 10000\ M_D$ (bas droit).

La figure 7.8 représente les spectres d'émission de particules scalaires confinées sur notre brane pour les quatre valeurs de masse données ci-dessus ainsi que pour quatre valeurs de la constante de couplage $\alpha = \{0, 0.1, 1, 10\}\ M_D^{-2}$. De cette figure, nous concluons que pour les trous noirs légers, une augmentation de la constante de couplage de Gauss-Bonnet entraîne une diminution du nombre de particules scalaires émises car, considérant un système à très haute énergie, la diminution de la taille du trou noir est l'effet dominant. Cependant la situation s'inverse lorsque les trous noirs deviennent lourds et une augmentation de α aboutit à une augmentation du nombre de particules émises. En effet, pour les trous noirs lourds, le terme de Gauss-Bonnet, agissant à petite distance, est sous-dominant par rapport à la taille du trou noir qui est, avec une bonne approximation, donnée par sa taille en relativité générale à D

dimensions. Cependant, l'augmentation des facteurs de corps gris en unités de surface du trou noir n'est, quant à elle, pas supprimée, entraînant la hausse du flux de particules émises. De plus, le fait que le changement de taille soit important pour les trous noirs légers et peu important pour les trous noirs lourds se voit directement sur les graphiques : si, pour une masse donnée, r_H change de manière significative avec la constante de couplage α, alors la température suit ce changement et la position du maximum du spectre, directement liée à la température du trou noir, doit aussi se déplacer. Ce comportement est clairement identifié sur les spectres pour un trou noir de 10 M_D^{-2}, où la position du pic de la loi de corps gris change considérablement d'un spectre à l'autre tandis que ce pic ne bouge pratiquement pas pour un trou noir de $M_{BH} = 10000\ M_D$.

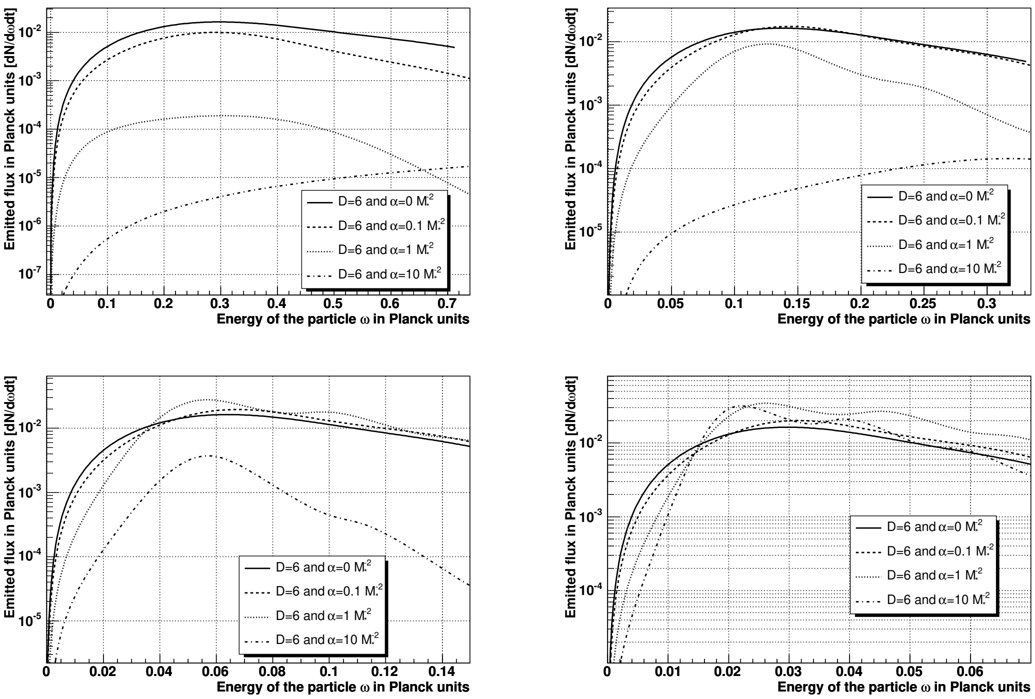


Fig. 7.9 – Flux de particules bispinorielles confinées sur la brane émises par un trou noir de Schwarzschild-Gauss-Bonnet en fonction de l'énergie ω de la particule en unités de Planck M_D. La constante de couplage de Gauss-Bonnet prend les valeurs $\alpha = \{0, 0.1, 1, 10\}\ M_D^{-2}$, le nombre de dimensions est fixé à 6 et les trous noirs ont des masses de $M_{BH} = 10\ M_D$ (haut gauche), $M_{BH} = 100\ M_D$ (haut droit), $M_{BH} = 1000\ M_D$ (bas gauche) et $M_{BH} = 10000\ M_D$ (bas droit).

Les figures 7.9 et 7.10 représentent les flux de fermions et de bosons de jauge émis par des trous noirs de Gauss-Bonnet pour le même jeu de valeurs de la masse et de la constante de couplage α que dans le cas des particules scalaires. D'un point de vue qualitatif, l'influence de α sur le nombre de particules de ce type émises est identique au cas des particules scalaires, et ce pour les mêmes raisons. Cependant, d'un point de vue quantitatif, d'une part la diminution du flux pour les trous noirs légers est plus importante pour les particules de spin plus élevé et d'autre part, l'augmentation du flux pour des trous noirs lourds est plus faible pour des particules de plus grand spin. Cette différence quantitative s'explique par l'effet dépendant du spin de la constante de couplage sur les facteurs de corps gris. En particulier, pour les particules de spin nul, une augmentation de α conduit à une augmentation des facteurs de corps gris sur l'ensemble du spectre énergétique alors que pour les particules de spin non-nul, il existe une énergie ω_c, qui dépend de la taille du trou noir, en deçà de laquelle les facteurs de corps gris diminuent et au-delà de laquelle ils augmentent quand α augmente. De plus, bien que dans un régime à haute énergie augmenter la constante de couplage α conduit à augmenter la valeur des facteurs de corps gris pour toutes les particules, cette augmentation est diminuée pour des particules de spin plus élevé dans une gamme d'énergie intermédiaire $\omega \simeq r_H^{-1}$. C'est la combinaison de ces deux effets, dépendant du spin, qui explique que le flux de particules émises soit plus faible quand le spin des particules augmente. De plus, l'énergie critique ω_c apparaît très nettement sur les spectres de particules avec spin non-nul émises par des trous noirs lourds (graphique en bas à droite des figures 7.9 et 7.10), les spectres se divisant en une partie à faible énergie diminuant pour des valeurs de α plus élevées et une partie à haute énergie où le nombre de particules émises augmente avec la constante de couplage α.

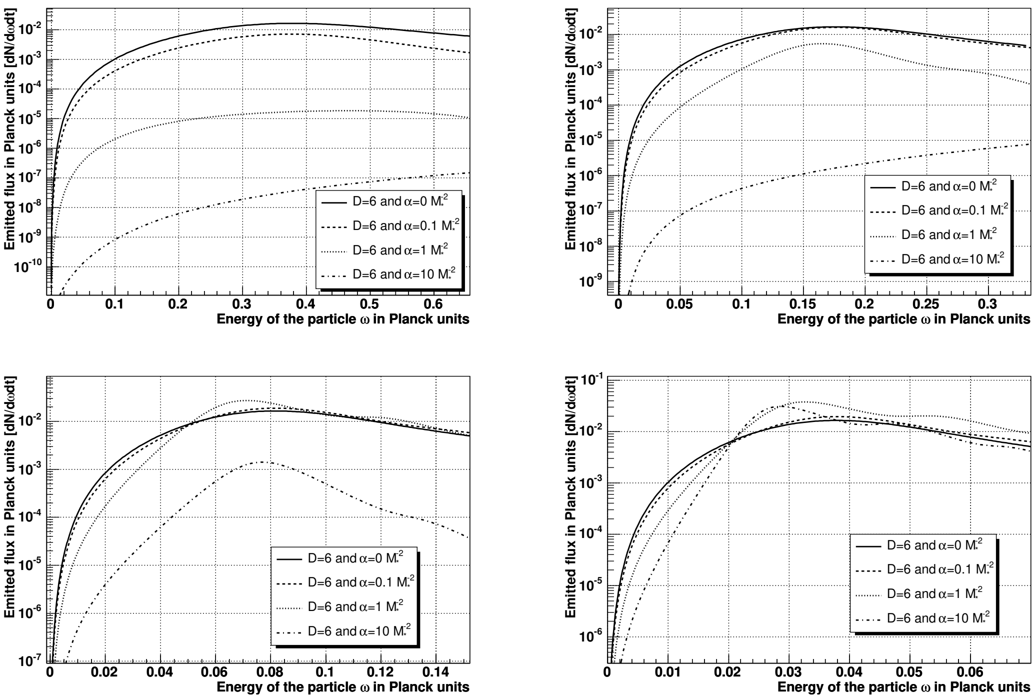


FIG. 7.10 – Flux de particules vectorielles confinées sur la brane émises par un trou noir de Schwarzschild-Gauss-Bonnet en fonction de l'énergie ω de la particule en unité de Planck M_D. La constante de couplage de Gauss-Bonnet prend les valeurs $\alpha = \{0, 0.1, 1, 10\}\ M_D^{-2}$, le nombre de dimensions est fixé à 6 et les trous noirs ont des masses de $M_{BH} = 10\ M_D$ (haut gauche), $M_{BH} = 100\ M_D$ (haut droit), $M_{BH} = 1000\ M_D$ (bas gauche) et $M_{BH} = 10000\ M_D$ (bas droit).

Finalement, la figure 7.11 montre les spectres d'émission de particules scalaires pouvant se propager dans le bulk. Comme pour les particules émises sur la brane, ces spectres sont représentés à la fois pour différentes valeurs de la constante de couplage de Gauss-Bonnet, et pour différentes valeurs de la masse du trou noir : $\alpha = \{0, 0.1, 1, 10\}\ M_D^{-2}$ et $M_{BH} = \{10, 100, 1000, 10000\}\ M_D$. D'un point de vue qualitatif, l'influence de la constante de couplage de Gauss-Bonnet sur l'émission de ces particules est identique à celle sur l'émission des particules confinées sur la brane. D'un point de vue quantitatif, tout d'abord pour les trous noirs légers, la diminution du flux est plus importante pour les particules émises dans le bulk car la diminution de la taille du trou noir, induisant une diminution de la surface émettrice, agit à la puissance $D - 2$ dans le bulk et à la puissance 2 dans la brane. Ensuite, pour les trous noirs lourds, l'augmentation du flux de particules émises est plus important pour les particules pouvant se propager dans le bulk puisque les facteurs de corps gris pour de telles particules augmentent d'avantage avec α que les facteurs de corps gris pour les particules confinées sur la brane.

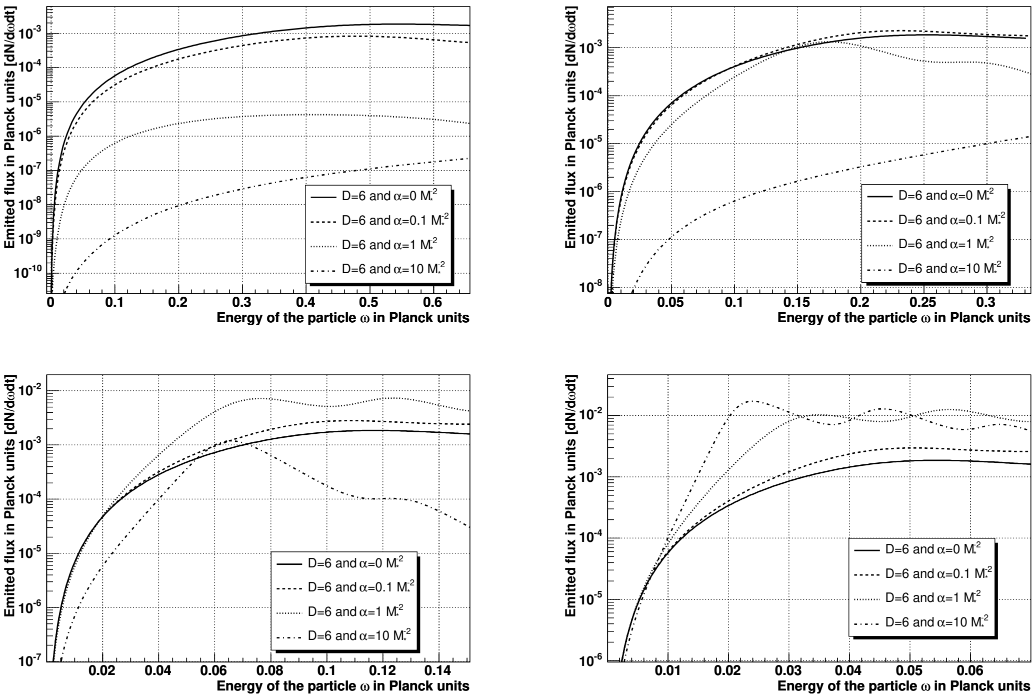


FIG. 7.11 – Flux de particules scalaires autorisées à se propager dans le bulk émises par un trou noir de Schwarzschild-Gauss-Bonnet en fonction de l'énergie ω de la particule en unités de Planck M_D. La constante de couplage de Gauss-Bonnet prend les valeurs $\alpha = \{0, 0.1, 1, 10\}\ M_D^{-2}$, le nombre de dimensions est fixé à 6 et les trous noirs ont des masses de $M_{BH} = 10\ M_D$ (haut gauche), $M_{BH} = 100\ M_D$ (haut droit), $M_{BH} = 1000\ M_D$ (bas gauche) et $M_{BH} = 10000\ M_D$ (bas droit).

Rapport du taux d'émission dans le bulk sur celui sur la brane :

Afin de sonder la structure de l'espace-temps à proximité d'un trou noir, il est nécessaire de reconstruire les spectres de radiation impliquant de pouvoir détecter les particules émises. Bien qu'en apparence triviale, cette question doit être posée car seules les particules émises sur la brane pourront être détectées. Il est donc nécessaire de contrôler quelle est la fraction de particules émises sur la brane par rapport à celle émise dans le bulk. Il a par exemple été montré que les trous noirs $D-$dimensionnels émettent principalement sur la brane dans un cadre ADD [126] alors qu'ils émettent principalement dans le bulk dans le cadre de modèle RS via l'émission de quanta CFT lorsque la dualité AdS/CFT est respecté [127]. Puisque dans les modèles de type ADD, seules certaines particules scalaires peuvent se propager dans le bulk, ce rapport devra être évalué uniquement pour les champs scalaires et prend la forme suivante :

$$\frac{dN_{bulk}}{dN_{brane}} = \left(\frac{\Omega_{D-2}}{4\pi}\right) \times \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{D-4} \times \left(\frac{\sigma_g^{(bulk)}}{\sigma_g^{(brane)}}\right). \tag{7.46}$$

Ce rapport est donc simplement donné par le produit du rapport des termes d'espace de phase, *i.e.* les deux premiers termes, multiplié par le rapport des sections efficaces d'absorption. La figure 7.12 montre ce rapport pour le jeu de masses et de constantes de couplage de Gauss-Bonnet cités précédemment. Tout comme pour les spectres d'émission, l'influence de la constante de couplage de Gauss-Bonnet sur ce rapport dépend de la masse du trou noir. Premièrement, ce rapport reste, dans l'ensemble des cas présentés ci-dessous excepté un, inférieur à 1. De plus, pour les trous noirs légers, une augmentation de la valeur de α conduit à une diminution de ce rappport assurant que, quelque soit la valeur de α, le rapport reste inférieur à 1 et le trou noir émet principalement sur la brane. Cependant, pour les trous noirs lourds, ce rapport augmente avec la valeur de la constante de couplage de Gauss-Bonnet autorisant alors, pour des valeurs suffisamment élevées de α, un rapport dN_{bulk}/dN_{brane} plus grand que 1.

Pour une meilleure investigation de cette éventualité, il est possible de déterminer une limite supérieure à ce rapport, considéré comme une fonction de la masse. Cette limite s'obtient en considérant des trous noirs à rayon de Schwarzschild fixé, ce qui équivaut à négliger la diminution de taille du trou noir lorsque la constante de couplage α augmente. Puisque cette diminution affecte plus les particules émises dans le bulk que celles émises sur la brane, le rapport dN_{bulk}/dN_{brane} pour des trous noirs ayant le même rayon de Schwarzschild sera bien la valeur maximale qu'il peut atteindre lorsque la masse du trou noir varie. Plus particulièrement, cette limite supérieure serait atteinte par un trou noir ayant une masse infinie, puisqu'il s'agit du seul trou noir dont une variation de la constante de couplage α ne ferait pas varier sa taille. Cette limite supérieure est représentée sur la figure 7.13 en fonction de l'énergie de la particule avec soit α (partie gauche), soit le nombre de dimensions D (partie droite) comme paramètre. En se focalisant dans un premier temps sur la partie droite de cette figure, une augmentation du nombre de dimensions entraîne une diminution du rapport de flux émis dans le bulk sur le flux émis sur la brane, comme c'est le cas dans le cadre de la Relativité Générale à D dimensions. Deuxièmement, il est possible que la limite supérieure du rapport dN_{bulk}/dN_{brane} puisse devenir plus grande que 1 comme il l'est vu sur la partie gauche de la figure 7.13. Cependant, ce rapport ne devient que très légèrement supérieur à 1 et ce pour une valeur de α égale à 10 M_D^{-2}. Donc pour qu'un trou noir émette principalement dans le bulk, rendant sa détection difficile, il faudrait qu'il ait une grande masse et que la constante de couplage de Gauss-Bonnet soit très élevée. Cette conditon est cependant peu favorisée, en premier lieu car elle requiert une constante de couplage improbable, ensuite car elle nécessite de pouvoir produire des trous noirs lourds, *i.e.* avec $M_{BH} > 10000\ M_D$. Comme il le sera vu ultérieurement, l'unique possibilité de pouvoir observer si finement des trous noirs en évaporation consiste à les produire au sein des futurs collisionneurs de particules, comme cela est possible dans les scénarii ADD abaissant l'échelle de Planck à $M_D \sim 1$ TeV. Cependant, les trous noirs produits auraient alors des masses allant de l'ordre du TeV à la dizaine de TeV pour le LHC, ce qui est bien inférieur aux dizaines de milliers de masse de Planck nécessaires. Ainsi, dans un scénario ADD, les trous noirs potentiellement observables seront bien dans la catégorie *légers* et s'évaporeront en emettant principalement des particules sur la brane. Cette situation favorable d'un point de vue détection est d'autant plus renforcée que l'ensemble des particules du modèle standard sont, par définition des branes, confinées sur ces dernieres.

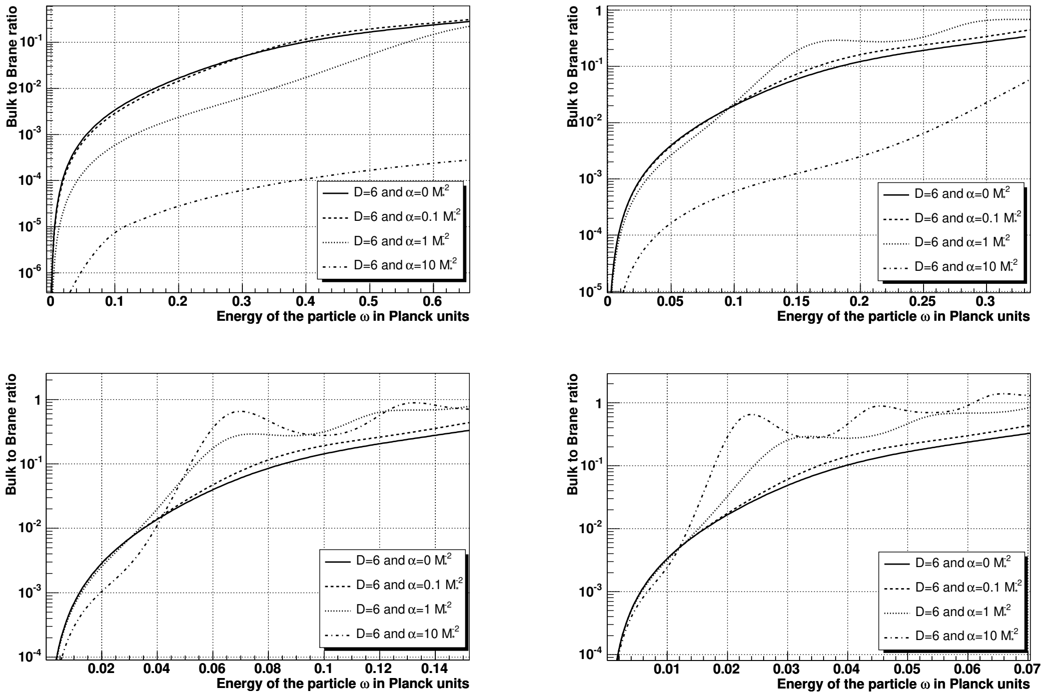


FIG. 7.12 – Rapport du nombre de particules émises par un trou noir de Schwarzschild-Gauss-Bonnet pouvant se propager dans le bulk sur le nombre de particules émises confinées sur la brane en fonction de l'énergie ω de la particule en unités de Planck M_D. La constante de couplage de Gauss-Bonnet prend les valeurs $\alpha = \{0, 0.1, 1, 10\}\ M_D^{-2}$, le nombre de dimensions est fixé à 6 et les trous noirs ont des masses de $M_{BH} = 10\ M_D$ (haut gauche), $M_{BH} = 100\ M_D$ (haut droit), $M_{BH} = 1000\ M_D$ (bas gauche) et $M_{BH} = 10000\ M_D$ (bas droit).

Domaine de validité des résultats

Les calculs précédents ont été effectués sous certaines hypothèses. Tout d'abord, la métrique à D dimensions utilisée pour modéliser les trous noirs de Schwarzschild en théorie de Gauss-Bonnet a été dérivée en supposant toutes les dimensions étendues. Bien évidemment, afin de respecter les contraintes expérimentales, il faut non seulement que les dimensions supplémentaires soient compactifiées mais aussi que leur taille caractéristique ne soit pas trop élevée. Ainsi, pour que la métrique utilisée ci-dessus soit une bonne approximation, il est nécessaire que la taille du trou noir soit bien inférieure à celle des dimensions supplémentaires. Par exemple, dans les modèles ADD et en imposant une échelle de Planck de l'ordre du TeV, la taille caractéristique des dimensions supplémentaires s'étale de quelques fermis à quelques dixièmes de millimètre

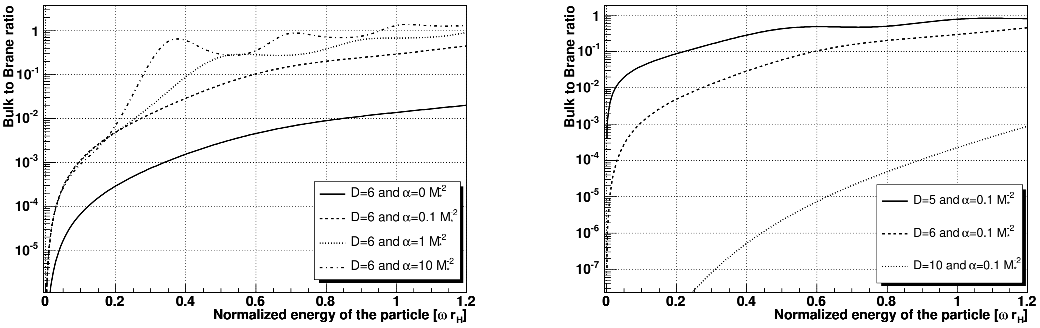


FIG. 7.13 – Rapport du nombre de particules émises par un trou noir de Schwarzschild-Gauss-Bonnet pouvant se propager dans le bulk sur le nombre de particules émises confinées sur la brane en fonction de l'énergie de la particule ωr_H normalisée à l'inverse de la taille du trou noir. *Gauche :* La constante de couplage est prise égale à $\{0, 0.1, 1, 10\}$ M_D^{-2} et le nombre de dimensions est fixé à 6. *Droite :* La constante de couplage est fixée à 0.1 M_D^{-2} et le nombre de dimension est pris égale à $\{5, 6, 10\}$.

selon le nombre de dimensions supplémentaires. Ce modèle est donc un cadre particulièrement favorable pour appliquer les résultats ci-dessus quand à l'étude de trous noirs dont la masse s'échelonnera entre $(10^4\text{TeV}^{-1})^{D-3} \times M_D^{D-2}$ et $(10^{16}\text{TeV}^{-1})^{D-3} \times M_D^{D-2}$.

Deuxièmement, pour que l'étude précédente soit valide, il est nécessaire que la longueur d'onde de la particule émise soit, elle aussi, plus petite que la taille des dimensions supplémentaires. Si cette condition n'est pas vérifiée, alors la particule émise ne ressent plus l'effet des dimensions supplémentaires et les facteurs de corps gris doivent être étudiés dans un formalisme à quatre dimensions. Cette restriction impose une coupure à basse énergie $\omega_c \simeq R^{-1}$, R étant la taille caractéristique des dimensions compactifiées, en-deça de laquelle nos résultats ne sont plus valides. D'un point de vue phénoménologique, cette coupure à basse énergie n'est cependant pas dramatique puisqu'aussi bien le nombre de dimensions que la constante de couplage de Gauss-Bonnet, laissent une marque claire sur les facteurs de corps gris dans le domaine à haute énergie, là où le formalisme à D dimensions est valide.

7.3.2 Résultats avec constante cosmologique [105]

La métrique décrivant les trous noirs de Schwarzschild-de Sitter (SdS) est présentée dans le chapitre 2.2.3. A la différence de la théorie de Gauss-Bonnet, il n'y a pas de restriction dimensionnelle afin que la constante cosmologique soit dynamique et nous travaillerons pour ce cas avec un nombre de dimensions variant de quatre à onze[11].

Propriétés thermodynamiques de ces trous noirs

La fonction métrique décrivant l'espace-temps autour d'un trou noir immergé dans un espace de Sitter prend la forme suivante :

$$h(r) = 1 - \frac{\mu}{r^{D-3}} - \frac{2\Lambda r^2}{(D-1)(D-2)}. \tag{7.47}$$

[11]La distinction particules dans le bulk ou sur la brane n'a de sens que pour $D > 4$.

Les quantités thermodynamiques de ce type de trous noirs sont données en appliquant la même procédure que pour les trous noirs en théorie de Gauss-Bonnet

$$\begin{aligned} M_{BH} &= \frac{1}{2}(D-2)\Omega_{D-2}M_D^{D-2}r_H^{D-3}\left(1-\frac{2\Lambda r_h^2}{(D-1)(D-2)}\right), && (7.48)\\ T_H &= \frac{1}{4\pi r_H}\left((D-3)-\frac{2\Lambda r_H^2}{D-2}\right). && (7.49)\end{aligned}$$

Ce type d'espace-temps présentant un deuxième horizon r_{dS} (voir chapitre 2.2.3), une deuxième température peut alors être définie :

$$T_{dS} = \frac{1}{4\pi r_{dS}}\left((D-3)-\frac{2\Lambda r_{dS}^2}{D-2}\right), \tag{7.50}$$

qui est inférieure à la température du trou noir T_H puisque $r_{dS} > r_H$. En appliquant la même définition thermodynamique que dans le cas des trous noirs de Gauss-Bonnet, l'entropie des trous noirs Schwarzschild-de Sitter vérifie la formule de l'aire :

$$S_{BH} = \frac{1}{4}\Omega_{D-2}r_H^{D-2}M_D^{D-2} = \frac{1}{4}\mathcal{A}M_D^{D-2}. \tag{7.51}$$

A la différence des trous noirs de Schwarzschild en théorie de Gauss-Bonnet, l'ajout d'une constante cosmologique, qu'elle soit positive ou négative [59], ne modifie pas la formule de l'aire pour l'entropie, du moins pour les trous noirs de Schwarzschild.

Forme du potentiel, condition d'adiabaticité et solutions asymptotiques

Lorsque l'on considère des espaces-temps avec constante cosmologique, la question des états asymptotiques lors du calcul des sections efficaces d'absorption devient primordiale. En effet, l'espace-temps n'étant plus asymptotiquement plat, il est impossible de définir des états asymptotiques libres pour les fonctions d'ondes et encore moins de placer un observateur infiniment loin du centre diffuseur. Cet effet se caractérise par le fait que le carré du potentiel, dont l'expression est rappelée dans l'équation (7.54), diverge en $+\infty$ pour une constante cosmologique non-nulle, positive ou négative

$$\begin{aligned} V_{brane}^2(r) &= \left(1-\frac{\mu}{r^{D-3}}-\frac{2\Lambda r^2}{(D-3)(D-2)}\right) && (7.52)\\ &\times\left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+(D-3)\frac{\mu}{r^{D-1}}-\frac{4\Lambda}{(D-1)(D-2)}\right] \\ V_{bulk}^2(r) &= \left(1-\frac{\mu}{r^{D-3}}-\frac{2\Lambda r^2}{(D-3)(D-2)}\right) && (7.53)\\ &\times\left[\frac{(2\ell+D-3)^2-1}{4r^2}+(D-2)^2\frac{\mu}{4r^{D-1}}-\frac{D\Lambda}{2(D-1)}\right], \end{aligned}$$

le premier potentiel correspondant à celui sur la brane et le deuxième au potentiel dans le bulk. Les carrés de ces deux potentiels en fonction de la coordonnée radiale r est représentés sur la figure 7.14 pour $D = 5$, $\mu = 1$ et $\Lambda r_H^2 = 0.01$ et pour différentes valeurs du moment orbital ℓ. Cette figure montre le potentiel à proximité de l'horizon du trou noir et bien avant d'atteindre l'horizon de Sitter, ne permettant pas de voir la divergence vers $-\infty$ de ce dernier lorsque $r \to +\infty$.

Cependant, pour une constante cosmologique positive, il est possible de placer judicieusement l'observateur afin de se ramener à des conditions équivalentes à un espace asymptotiquement plat. Tout d'abord, un espace-temps SdS présentant deux horizons, celui du trou noir et l'horizon cosmologique, considérer la propagation d'une particule initialement au-delà de l'horizon cosmologique n'a pas de sens car cette région est causalement déconnectée du trou noir.

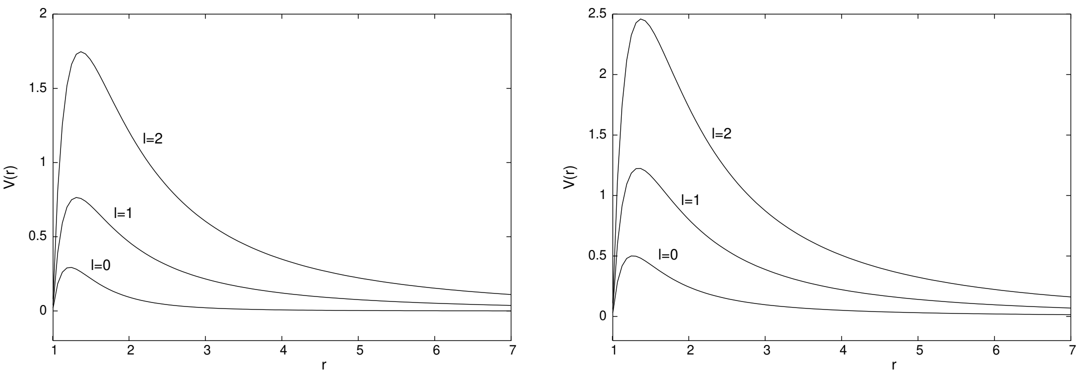


FIG. 7.14 – Carré du potentiel scalaire pour un trou noir de Schwrazschild-de Sitter avec $D = 5$, $\mu = 1$ et $\Lambda r_H^2 = 0.01$ ainsi que pour différentes valeurs du nombre quantique orbital ℓ. *Gauche :* potentiel sur la brane. *Droite :* potentiel dans le bulk.

De plus, le potentiel s'annule à la fois à l'horizon du trou noir et à l'horizon cosmologique : au niveau de ces deux horizons, il est possible de définir des états libres. En plaçant l'observateur exactement à l'horizon cosmologique, il peut être considéré comme infiniment loin du centre diffuseur. Ceci se justifie pleinement car la propagation des champs s'étudie plus naturellement en utilisant la coordonnée radiale tortoise qui, dans le cas d'un espace-temps à quatre dimensions, s'écrit :

$$r^\star = \sum_{i=0}^{3} \frac{r_i \ln |r - r_i|}{1 - \Lambda r_i^2}, \tag{7.54}$$

r_i représentant les trois racines du trinôme $P(x) = 3\mu - 3x + \lambda x^3$, les deux racines positives correspondant aux deux horizons présents dans les espaces SdS. Compte tenu de l'équation (7.54), passer de la coordonnée r à la coordonnée $r^\star$ permet de se limiter à la zone entre les deux horizons en effectuant une bijection de $[r_H, r_{dS}]$ dans $]-\infty, +\infty[$. Dans le système de coordonnées tortoise, la propagation d'une particule de l'horizon du trou noir vers l'horizon cosmologique se ramène à la propagation de $-\infty$ vers $+\infty$ avec le potentiel qui tend asymptotiquement vers zéro dans les deux cas. La coordonnée tortoise présente le même comportement pour un nombre de dimensions plus élevé et aussi bien pour des particules se propageant uniquement sur la brane que dans le bulk. En plaçant l'observateur au niveau de l'horizon cosmologique, il est donc possible de se ramener, comme dans le cas asymptotiquement plat, à un problème de diffusion avec des états initial et final asymptotiquement libres.

Cependant, les états asymptotiques diffèrent de ceux obtenus pour des espaces asymptotiquement plats : si la fonction d'onde reste identique au niveau de l'horizon du trou noir, elle ne prend pas la forme d'une onde sphérique près de l'horizon cosmologique mais celle d'une onde plane. Les états asymptotiques s'écrivent alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P_s(r) &\to A_{in}^{(h)} e^{-i\omega r^\star} + A_{out}^{(h)} \Delta^s e^{i\omega r^\star} \qquad \text{quand} \quad r \to r_H \\ P_s(r) &\to A_{in}^{(dS)} e^{-i\omega r^\star} + A_{out}^{(dS)} \Delta^s e^{i\omega r^\star} \quad \text{quand} \quad r \to r_{dS}. \end{aligned} \tag{7.55}$$

D'un point de vue numérique, cette solution reste problématique car elle ne devient précise qu'une fois extrêmement proche de l'horizon de Sitter, exigeant énormément de temps de calcul pour extraire avec confiance les amplitudes des modes rentrants et sortants. C'est pourquoi une solution asymptotique différente, valide sur une plus grande gamme de r avant l'horizon, est utilisée comme base théorique pour extraire les amplitudes des modes proches de r_{dS}. Cette solution s'obtient en s'inspirant des méthodes analytiques mises en œuvre afin de déterminer les facteurs de corps gris dans la limite $\omega \to 0$ [109, 111]. Dans le cas de particules scalaires, cette procédure consiste tout d'abord à remplacer la fonction $h(r)$ par la fonction $f(r)$ telle que :

$$f(r) = h(r) \left[1 - \frac{2\Lambda r_H^2}{(D-2)\,(D-1)} \right], \tag{7.56}$$

puis à redéfinir la fonction inconnue par $P(r) = f^{\alpha}(1-f)^{\beta} F(f)$. La partie radiale de l'équation de Klein-Gordon prendra alors la forme d'une équation hypergéométrique [87] près de l'horizon cosmologique, imposant des relations entre les paramètres α, β ainsi que des paramètres de fonctions géométriques. La fonction P pourra donc s'exprimer à l'aide de fonctions hypergéométriques dont les paramètres seront choisis en requérant que P vérifie les bonnes conditions aux limites, en l'occurence qu'elle ne diverge pas exponentiellement en r_{dS}. Finalement, près de l'horizon cosmologique $r \simeq r_{dS}$, la fonction d'onde radiale scalaire prend alors la forme suivante [109, 111] :

$$P(r) = B_1 e^{-i\frac{\omega r_{dS}}{A_C} \log[f(r)]} + B_2 e^{i\frac{\omega r_{dS}}{A_C} \log[f(r)]}, \tag{7.57}$$

avec $A_C = (D-3) - 2\Lambda r_{dS}^2/(D-2)$. Puisque le terme A_C est toujours négatif et que la fonction f décroît à l'approche de l'horizon de Sitter, le terme B_1 sera l'amplitude du mode rentrant et le terme B_2 celle du mode sortant permettant ainsi une évaluation de l'amplitude de diffusion. Avec la solution approchée ci-dessus, l'ajustement sur la solution numérique atteint une précision suffisante pour une bonne détermination des amplitudes $B_{1/2}$.

Section efficace d'émission

Champ scalaire confiné sur la brane :

La détermination numérique des facteurs de corps gris se fait en prenant en compte la remarque précédente et l'amplitude de diffusion est donc déterminée en utilisant les amplitudes des modes sortants et rentrants à l'horizon du trou noir et à l'horizon de Sitter. Pour des champs scalaires se propageant sur la brane, les résultats numériques sont présentés sur la figure 7.15. Ils correspondent à la section efficace d'absorption, en unité de πr_H^2, en fonction de l'énergie de la particule, en unité de r_H^{-1}, avec le nombre de dimensions $D = \{4, 5, 9\}$ comme paramètre pour la partie gauche, et la valeur de la constante cosmologique $\Lambda = \{0, 0.01, 10^{-1.5}, 0.05\}\ r_H^{-2}$ comme paramètre pour la partie droite. L'effet du nombre de dimensions est identique au cas de la Relativité Générale sans constante cosmologique ou de la théorie de Gauss-Bonnet : des espaces-temps avec un nombre de dimensions plus élevé correspond à une diminution de la section efficace sur tout le domaine énergétique. Par ailleurs, l'effet d'une constante cosmologique positive non-nulle laisse une trace très nette dans les sections efficaces d'absorption sous la forme d'une divergence infrarouge. Ce résultat important signe un comportement typique de la présence de deux horizons dans l'espace-temps considéré et il a été montré qu'une telle divergence apparaît aussi pour des trous noirs chargés [112, 113, 114]. Cette empreinte nette à basse énergie s'interprète comme la délocalisation totale du quantum considéré entre les deux horizons. De plus, la figure de droite semble indiquer qu'une augmentation de la valeur de la constante cosmologique conduit à une légère augmentation de la section efficace d'absorption pour des énergies intermédiaires ainsi qu'à haute énergie.

Champ scalaire se propageant dans le bulk :

La figure 7.16 représente les facteurs de corps gris, en unité de la surface à D dimensions du trou noir, pour des particules scalaires pouvant se propager dans le bulk. La partie de gauche se focalise sur l'influence du nombre de dimensions avec $D = \{5, 7, 8\}$ et $\Lambda = 0.01\ r_H^{-2}$, tandis que la partie droite s'intéresse à l'effet de la constante cosmologique avec $\Lambda = \{0, 0.01, 10^{-1.5}, 0.05\}\ r_H^{-2}$ et $D = 5$. L'émission dans le bulk présente quelques différences qualitatives par rapport à celle sur la brane : tout d'abord, une augmentation du nombre de dimensions aboutit à une augmentation de la section efficace à basse énergie qui proviendrait de la multiplicité plus élevés

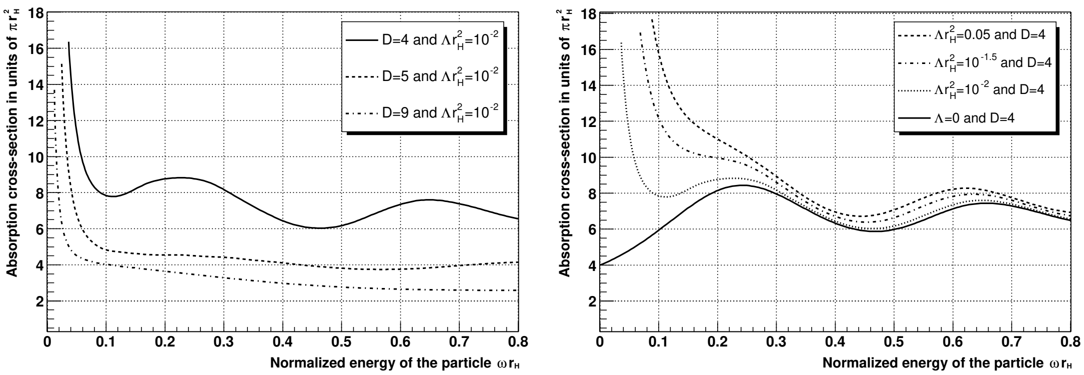


FIG. 7.15 – Section efficace d'absorption, en unité de πr_H^2, de particules scalaires confinées sur la brane par un trou noir SdS en fonction de l'énergie de la particule en untié de r_H^{-1}. *Gauche :* la valeur de la constante cosmologique est fixée à $\Lambda = 0.01\ r_H^{-2}$ et le nombre de dimensions vaut $D = \{4, 5, 9\}$. *Droite :* la valeur de la constante cosmologique est fixée à $\Lambda = \{0, 0.01, 10^{-1.5}, 0.05\}\ r_H^{-2}$ et le nombre de dimensions vaut $D = 4$.

que chaque mode multipolaire pour des espaces-temps de dimensionnalité plus grande[12]. Dans la partie haute énergie, et ce bien que les figures ci-dessous ne le montrent pas, l'influence du nombre de dimensions est identique au cas asymptotiquement plat : la limite à haute énergie de la section efficace augmente avec le nombre de dimensions. En ce qui concerne l'influence de la constante cosmologique, les résultats sont qualitativement identiques à l'émission sur la brane : une augmentation de la valeur de la constante cosmologique entraîne une augmentation des facteurs de corps gris sur l'ensemble du spectre en énergie et sa simple présence conduit à l'apparition d'une divergence infra-rouge.

Résultats analytiques :

Pour l'émission de particules scalaires par des trous noirs SdS, des investigations analytiques peuvent être menées non seulement dans le domaine classique, *i.e.* à haute énergie, mais aussi dans le domaine à basse énergie. Pour la limite à haute énergie, la méthode est identique à celle utilisée dans le chapitre précédent. Pour les trous noirs de Gauss-Bonnet, une inversion numérique d'une équation algébrique était nécessaire. Cette inversion numérique n'est pas indispensable dans le cas de trous noirs SdS car la valeur de r minimisant la fonction $r/\sqrt{h(r)}$ peut être trouvée analytiquement. Pour les particules confinées sur la brane, la limite à haute énergie s'écrit $\sigma_g = \pi b_c^2$ avec

$$b_c = r_h \left\{ \left(\frac{D-3}{D-1}\right) \left(\frac{D-1}{2}\left[1 - \frac{2\Lambda r_H^2}{(D-2)(D-1)}\right]\right)^{-2/(D-3)} - \frac{2\Lambda r_H^2}{(D-2)(D-1)} \right\}^{-1/2} . \tag{7.58}$$

Dans le cas de champs ayant accès au bulk, la limite géométrique de la section efficace est donnée par la formule (7.43) en prenant le résultat analytique ci-dessus pour b_c. Les tableaux 7.3 et 7.4 listent un ensemble de résultats analytiques obtenus pour la limite à haute énergie des facteurs de corps gris, le premier tableau correspondant aux champs scalaires confinés sur

[12]Pour les particules confinés sur la brane, la multiplicité d'un mode ℓ est $2\ell + 1$ quelle que soit la dimensionnalité de l'espace-temps. Cependant, pour les particules se propageant dans le bulk, la multiplicité vaut $\frac{(2\ell+D-3)(\ell+D-4)!}{\ell!(D-4)!}$ et augmente avec le nombre de dimension.

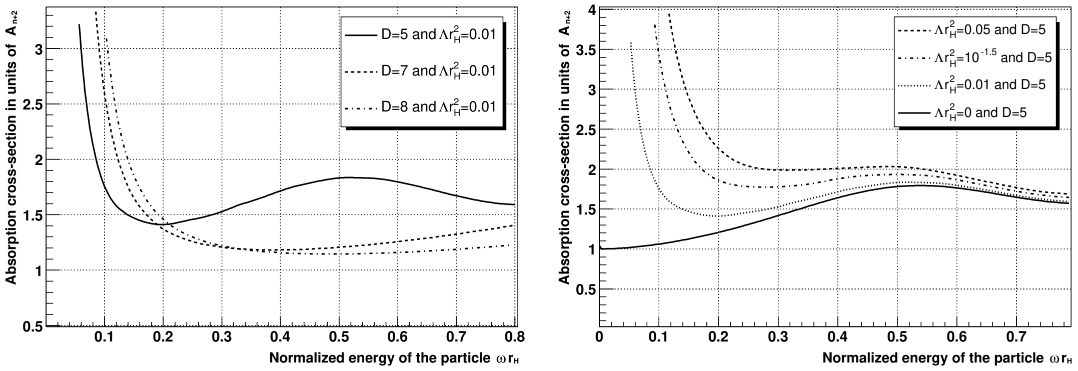


FIG. 7.16 – Section efficace d'absorption, en unité de Ω_{D-2}, de particules scalaires se propageant dans le bulk, et émises par un trou noir SdS, en fonction de l'énergie de la particule en unité de r_H^{-1}. *Gauche :* la valeur de la constante cosmologique est fixée à $\Lambda = 0.01\ r_H^{-2}$ et le nombre de dimensions vaut $D = \{4, 5, 9\}$. *Droite :* la valeur de la constante cosmologique est fixée à $\Lambda = \{0, 0.01, 10^{-1.5}, 0.05\}\ r_H^{-2}$ et le nombre de dimensions vaut $D = 5$.

la brane et le second à ceux autorisés à se propager dans le bulk. Pour les particules confinées sur la brane, l'unité de la section efficace est πr_H^2 tandis que l'unité est Ω_{D-2} pour les particules se propageant dans le bulk. Chaque tableau se scinde en deux : la moitié gauche donnant les facteurs de corps gris en fonction du nombre de dimensions et la moitié droite les donnant en fonction de la valeur de la constante cosmologique. En ce qui concerne l'émission sur la brane, les calculs analytiques sont en très bon accord avec les résultats numériques confirmant l'influence du nombre de dimensions et de la constante cosmologique sur les facteurs de corps gris. Pour l'émission dans le bulk, les résultats de la partie gauche du tableau confirment qu'une augmentation du nombre de dimensions conduit à une augmentation des facteurs de corps gris dans le domaine ultraviolet. De plus, les résultats analytiques concernant l'influence de Λ (partie droite) sont en excellent accord avec les résultats numériques.

D	$\sigma_g\ [\pi r_H^2]$ pour $\Lambda r_H^2 = 0.01$	Λr_H^2	$\sigma_g\ [\pi r_H^2]$ pour $D = 4$	$\sigma_g\ [\pi r_H^2]$ pour $D = 5$
4	6.8591	0	6.7500	4.0000
5	4.0201	10^{-4}	6.7511	4.0002
6	3.0774	10^{-3}	6.7607	4.0020
8	2.1179	$10^{-1.5}$	7.1114	4.0645
11	1.8699	10^{-1}	8.0962	4.2131

TAB. 7.3 – Limite géométrique de la section efficace d'absorption de particules scalaires confinées sur la brane par un trou noir SdS. La partie gauche fournit le résultat en fonction du nombre de dimensions alors que la partie droite les fournit en fonction de la valeur de la constante cosmologique.

Il est aussi possible de déterminer la valeur de l'amplitude de diffusion dans le domaine

D	σ_g $[A_{D-2}]$ pour $\Lambda r_H^2 = 0.01$	Λr_H^2	σ_g $[A_{D-2}]$ pour $D = 5$
		0	1.6977
5	1.7105	10^{-4}	1.6978
6	1.7757	10^{-3}	1.6989
7	1.8535	10^{-2}	1.7105
8	2.0117	$10^{-1.5}$	1.7389
11	2.1622	10^{-1}	1.8351

TAB. 7.4 – Limite géométrique de la section efficace d'absorption de particules scalaires pouvant se propager dans le bulk par un trou noir SdS. La partie gauche fournit le résultat en fonction du nombre de dimensions alors que la partie droite les fournit en fonction de la valeur de la constante cosmologique.

infra-rouge en se limitant à l'ordre monopolaire. La méthode, utilisée avec succès dans les références [112, 113, 114], est la suivante : des solutions asymptotiques sont trouvées en r_H et r_{dS}. Ces deux solutions sont ensuites raccordées à un troisième type de solutions valable dans une région intermédiaire entre les deux horizons. Une fois ce raccordement effectué, il est possible d'exprimer l'amplitude des modes sortants et rentrants à proximité de l'horizon de Sitter en fonction de l'amplitude des modes au voisinage du trou noir. L'amplitude de diffusion peut alors être explicitement calculée puisque le rapport des flux est lié aux rapports des amplitudes des modes. Afin de trouver les solutions à proximité des deux horizons, l'équation (5.8) de type Schrödinger est utilisée pour donner comme solutions asymptotiques :

$$U(r^\star) = A_1 e^{-i\omega r^\star} \quad \text{pour} \quad r \simeq r_H \tag{7.59}$$
$$U(r^\star) = B_1 e^{-i\omega r^\star} + B_2 e^{i\omega r^\star} \quad \text{pour} \quad r \simeq r_{dS}, \tag{7.60}$$

où la condition d'absence de mode sortants à l'horizon du trou noir a été appliquée. Il est nécessaire d'exprimer ces solutions en terme de la fonction P d'une part et en fonction de la variable r d'autre part. L'expression de la coordonnée tortoise en fonction de r est la suivante :

$$r^\star = \frac{\ln(r - r_H)}{2k_H} - \frac{\ln(r_{dS} - r)}{2k_{dS}} + \sum_{m=1}^{D-3} \frac{\ln(r + r_m)}{2k_m}, \tag{7.61}$$

avec r_m les racines de l'équation $h(r) = 0$ et k_m la gravité de surface à la position r_m définie par :

$$k_m = \frac{1}{2} \left. \frac{dh}{dr} \right|_{r_m}. \tag{7.62}$$

Le résultat ci-dessus pour la coordonnée tortoise est la généralisation du résultat donné au début de ce chapitre pour le cas à quatre dimensions. Puisque $P(r) = U(r)/r$, les solutions asymptotiques finales, après un développement limité de l'exponentiel, sont les suivantes :

$$\begin{aligned} P(r \to r_H) &= \frac{A_1}{r_H} \left\{ 1 - i\omega \left[\frac{\ln(r - r_H)}{2k_H} - \frac{\ln(r_{dS} - r_H)}{2k_{dS}} \right.\right. \quad (7.63) \\ &\quad \left.\left. + \sum_{m=1}^{D-3} \frac{\ln(r_H + r_m)}{2k_m} \right] \right\}, \\ P(r \to r_{dS}) &= \frac{1}{r_{dS}} \left\{ (B_1 + B_2) + i\omega(-B_1 + B_2) \left[\frac{\ln(r_{dS} - r_H)}{2k_H} \right.\right. \quad (7.64) \\ &\quad \left.\left. - \frac{\ln(r_{dS} - r)}{2k_{dS}} + \sum_{m=1}^{D-3} \frac{\ln(r_{dS} + r_m)}{2k_m} \right] \right\}. \end{aligned}$$

La solution dans une région intermédiaire ne peut être trouvée qu'à l'ordre monopolaire et, puisque $\omega \to 0$, prend la forme suivante[13] :

$$P(r) = C_1 \left[\frac{\ln(r - r_H)}{2k_H r_H^2} - \frac{\ln(r_{dS} - r)}{2k_{dS} r_{dS}^2} + \sum_{m=1}^{D-3} \frac{\ln(r + r_m)}{2k_m r_m^2} \right] + C_2. \tag{7.65}$$

Avec l'ensemble de ces solutions, les amplitudes à l'horizon de Sitter peuvent être reliées à celles près de l'horizon du trou noir via les constantes C_i, valables dans une région intermédiaire :

$$C_1 = -i\omega r_H A_1 \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{A_1}{r_h} + O(\omega), \tag{7.66}$$

$$C_1 = i\omega r_{dS} (B_2 - B_1) \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{1}{r_{dS}} (B_1 + B_2) + O(\omega). \tag{7.67}$$

Il est maintenant possible de calculer le coefficient de transmission T et de réflexion R sur la barrière de potentiel :

$$R = \left| \frac{B_2}{B_1} \right|^2 = \left(\frac{r_{dS}^2 - r_H^2}{r_{dS}^2 + r_H^2} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = 1 - R = \frac{4 r_{dS}^2 r_H^2}{(r_{dS}^2 + r_H^2)^2}. \tag{7.68}$$

L'amplitude de diffusion étant donnée par la probabilité de transmission par effet tunnel, la section efficace à basse énergie sera alors la suivante

$$\sigma_g(\omega \to 0) = \frac{\pi}{\omega^2} \frac{4 r_{dS}^2 r_H^2}{(r_{dS}^2 + r_H^2)^2}, \tag{7.69}$$

en se limitant à l'ordre monopolaire. Cette approximation est grandement suffisante puisqu'il s'agit de la contribution dominante. Avant d'interpréter ce résultat, regardons le cas de particules se propageant dans le bulk. La méthode est exactement identique à celle utilisée ci-dessus. Les solutions approchées, à l'ordre monopolaire et quand $\omega \to 0$, sont alors les suivantes :

$$P(r \to r_H) = \frac{A_1}{r_H^{(D-2)/2}} e^{-i\omega r^\star}, \tag{7.70}$$

$$P(r \to r_{dS}) = \frac{1}{r_{dS}^{(D-2)/2}} \left\{ B_1 e^{-i\omega r^\star} + B_2 e^{i\omega r^\star} \right\}, \tag{7.71}$$

$$P(r, \omega = 0) = C_1 \left[-\frac{\ln(r)}{\mu} + \frac{\ln(r - r_H)}{2k_H r_H^{D-2}} - \frac{\ln(r_{dS} - r)}{2k_{dS} r_{dS}^{D-2}} + \sum_{m=1}^{D-3} \frac{\ln(r + r_m)}{2k_m r_m^{D-2}} \right] + C_2, \tag{7.72}$$

l'expression de $r^\star$ en fonction de r ne changeant pas. La jonction des différentes solutions asymptotiques procède exactement de la même manière pour aboutir à l'expression finale des probabilités de transmission et de réflexion dans le bulk :

$$R = \left(\frac{r_{dS}^{D-2} - r_H^{D-2}}{r_{dS}^{D-2} + r_H^{D-2}} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4 (r_{dS} r_H)^{D-2}}{(r_{dS}^{D-2} + r_H^{D-2})^2}, \tag{7.73}$$

ainsi qu'à celle de la section efficace d'absorption :

$$\sigma_g(\omega \to 0) = \left[\frac{2^{D-4} \pi^{(D-3)/2} (D-3) \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right)}{\omega^{D-2}} \right] \left[\frac{4 (r_{dS} r_H)^{D-2}}{(r_{dS}^{D-2} + r_H^{D-2})^2} \right]. \tag{7.74}$$

[13]En imposant $\ell = 0$ et $\omega = 0$, l'équation radiale est alors $\frac{d}{dr}\left(r^2 h(r) \frac{dP}{dr}\right) = 0$.

Que ce soit pour les particules émises sur la brane ou dans le bulk, puisque l'amplitude de diffusion $|A_\ell|^2 = T$ tend vers une constante, la section efficace diverge en ω^{-2} (ω^{D-4}) pour les particules émises sur la brane (dans le bulk). Ce comportement est typique des espaces-temps où deux horizons sont présents. Dans le cas d'espaces asymptotiquements plats, il a été montré [109, 111] que l'amplitude de diffusion se comporte de la manière suivante

$$|A_\ell|^2 \propto (\omega r_H)^{2\ell+2} \quad \text{et} \quad |A_\ell|^2 \propto (\omega r_H)^{2\ell+D-2}\,, \tag{7.75}$$

pour les champs confinés sur la brane et ceux se propageant dans le bulk. Ce comportement assure la convergence vers une valeur finie non-nulle de la section efficace quand $\omega \to 0$. Dans le cas de trous noirs SdS, le deuxième horizon rend l'amplitude de diffusion constante conduisant à la divergence infra-rouge mentionnée.

Observables : spectres d'émission et rapport bulk/brane

Définition de la température :

A partir de la détermination théorique des facteurs de corps gris, nous avons accès aux spectres d'émission, toujours donnés par une loi de corps gris, de particules scalaires que ce soit sur la brane ou dans le bulk. Cependant, la courbure asymptotique non-nulle impose de reconsidérer la température des trous noirs SdS. En effet, la température calculée à l'aide de la gravité de surface, que ce soit en théorie asymptotiquement plate ou non, sera celle vue par un observateur placé dans une région plate de l'espace-temps considéré. Dans un cadre théorique asymptotiquement plat, il suffit de considérer un observateur infiniment loin du trou noir pour qu'une telle condition soit remplie. C'est pourquoi, pour l'émission de trous noirs de Gauss-Bonnet, cette méthode pouvait être utilisée avec sûreté et les spectres calculés avec une telle température correspondaient à des spectres vus par un observateur à l'infini. Ce raisonnement ne peut tenir dans le cas de trous noirs SdS car il n'existe aucune région plate. Puisqu'il n'est pas possible de considérer un observateur dans une telle région, la température sera évaluée pour un observateur placé dans une zone dont les caractéristiques sont « les plus proches »de celles de l'infini spatial dans un espace sans constante cosmologique, *i.e.* la région la plus plate possible. Cette position r_0 est donnée par l'endroit où l'accélération est nulle et se détermine en résolvant $\frac{dh}{dr} = 0$. A une telle position, les effets de la constante cosmologique et du trou noir se compensent exactement assurant une accélération nulle. De plus, en r_0, la fonction métrique est maximale et sa valeur est la valeur la plus proche de 1 qu'elle peut atteindre en espace-temps SdS, confirmant de nouveau que la position r_0 est la plus proche de la "platitude". La résolution de $\frac{dh}{dr} = 0$ aboutit à l'expression suivante pour r_0 :

$$r_0 = \left[\frac{(D-1)(D-2)(D-3)\mu}{4\Lambda}\right]^{1/(D-1)}. \tag{7.76}$$

L'observateur n'étant plus dans une région plate, la température du trou noir lui apparaîtra comme décalée vers le bleu :

$$T_H^{(\infty)} = \frac{1}{4\pi}\left.\frac{dh}{dr}\right|_{r_H} \to T_H = \frac{1}{4\pi\sqrt{h(r_0)}}\left.\frac{dh}{dr}\right|_{r_H}. \tag{7.77}$$

Puisque $h(r_0) < 1$, la température sera plus élevée que si elle est estimée avec la formule de Hartle-Hawking.

Spectres d'émission :

Les figures 7.17 et 7.18 représentent le taux d'émission d'énergie défini par :

$$\frac{d^2E}{d\omega dt} = \omega\frac{d^2N}{d\omega dt}, \tag{7.78}$$

Cette quantité est préférée au flux de particules compte tenu de la divergence infrarouge des facteurs de corps gris. Afin d'assurer la conservation de l'énergie, il est en effet nécessaire de vérifier qu'aucune quantité d'énergie infinie ne puisse être émise par le trou noir, et ce même si la probabilité d'émission de particules tend vers l'infini quand $\omega \to 0$. Il est évident, au vu des taux d'émission de la figure 7.17, que l'énergie est effectivement bien conservée. Cependant, la divergence des facteurs de corps gris laisse une empreinte claire sur ce taux : à la différence du cas asymptotiquement plat, il tend vers une valeur non-nulle quand $\omega \to 0$ indiquant que les trous noirs SdS peuvent émettre une fraction non-négligeable de leur énergie par l'intermédiaire de quanta d'ultra-basse énergie. De plus, la divergence étant plus marquée pour des valeurs de la constante cosmologique plus élevées, le taux d'émission de ces quanta augmente donc avec la valeur de Λ. Ce comportement, caractéristique de la présence d'une constante cosmologique positive non-nulle, apparaît aussi bien pour l'émission d'énergie sur la brane que dans le bulk, bien que l'effet soit plus marqué pour l'émission sur la brane.

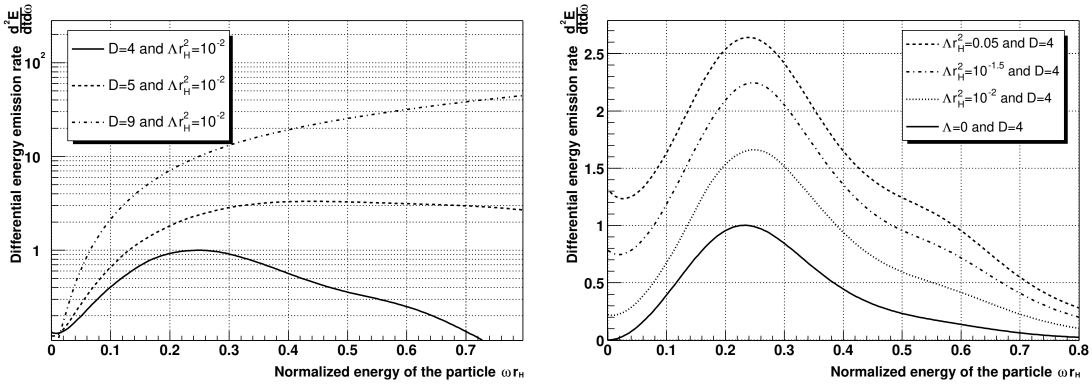


FIG. 7.17 – Taux d'émission d'énergie d'un trou noir SdS sous forme de particules scalaires confinées sur la brane en fonction de l'énergie de la particule en unité de r_H^{-1}. *Gauche :* la valeur de la constante cosmologique est fixée à $\Lambda = 0.01\, r_H^{-2}$ et le nombre de dimensions à $D = \{4, 5, 9\}$. *Droite :* la valeur de la constante cosmologique est fixée à $\Lambda = \{0, 0.01, 10^{-1.5}, 0.05\}\, r_H^{-2}$ et le nombre de dimensions à $D = 4$.

En se focalisant sur la figure 7.17, il apparaît que le taux d'émission d'énergie augmente à la fois avec le nombre de dimensions, ce résultat étant identique au comportement pour des trous noirs de Schwarzschild en espace asymptotiquement plat [104], et la valeur de la constante cosmologique. Comme il l'a été mentionné précédemment, ce comportement est possible uniquement parce que le préfacteur $1/\sqrt{h(r_0)}$ impliqué dans la température surpasse l'effet de la décroissance de la gravité de surface pour des valeurs de constantes cosmologiques plus élevées. En ce qui concerne le taux d'émission d'énergie dans le bulk, ce dernier se comporte de la même manière que le taux d'émission sur la brane : il augmente avec le nombre de dimensions et avec la valeur de Λ. Il réside cependant une différence entre l'émission sur la brane et celle dans le bulk : la position du maximum d'énergie émise est fortement décalée vers les hautes énergies pour l'émission dans le bulk en comparaison à la position du maximum pour l'émission sur la brane. Ce phénomène vient du fait que la probabilité d'absorption, équivalente à celle d'émission, à basse énergie est plus faible dans le bulk que sur la brane, augmentant de fait le taux d'émission vers les hautes énergies puisque la quantité d'énergie potentiellement émise par unité de temps contenue par le trou noir est quant à elle fixée.

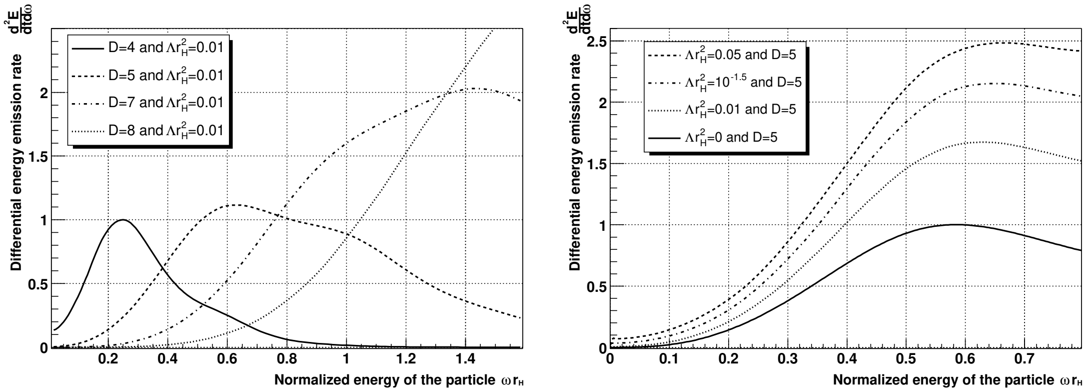


FIG. 7.18 – Taux d'émission d'énergie d'un trou noir SdS sous forme de particules scalaires pouvant se propager dans le bulk en fonction de l'énergie de la particule en unité de r_H^{-1}. *Gauche :* la valeur de la constante cosmologique est fixée à $\Lambda = 0.01\ r_H^{-2}$ et le nombre de dimensions à $D = \{4, 5, 6, 7\}$. *Droite :* la valeur de la constante cosmologique est fixée à $\Lambda = \{0, 0.01, 10^{-1.5}, 0.05\}\ r_H^{-2}$ et le nombre de dimensions à $D = 5$.

Rapports du taux d'émission dans le bulk sur celui sur la brane :

La figure 7.19 représente le rapport d'énergie émise par le trou noir dans le bulk sur celle émise sur la brane. L'allure de ces courbes prouve que ce rapport reste inférieur à 1, assurant que le trou noir émet principalement des quanta scalaires sur la brane et non dans le bulk, comme cela est le cas dans le cadre de la Relativité Générale à D dimensions ou en théorie de Gauss-Bonnet. Compte tenu des limites géométriques de la section efficace dérivées précédemment (voir équation (7.59) et (7.43)), l'effet de la constante cosmologique s'annule dans le rapport dE_{bulk}/dE_{brane} quand $\omega \to \infty$; rapport qui devient identique à celui d'un trou de Schwarzschild en espace-temps plat. La constante cosmologique laisse cependant une empreinte sur ce rapport dans le domaine de basse énergie : la présence de la constante cosmologique abaissant la barrière de potentiel dans le bulk $D(D-2)/8$ fois plus que sur la brane, le rapport dE_{bulk}/dE_{brane} augmente donc avec la valeur de la constante cosmologique à basse énergie, comme il l'est clairement vu sur la partie droite de la figure 7.19. D'autre part, une augmentation du nombre de dimensions entraîne une forte diminution du rapport dE_{bulk}/dE_{brane} sur l'ensemble du spectre en énergie, bien que cette différence diminue à plus haute énergie. Le comportement à basse énergie de ce rapport est une conséquence de la variation du rapport T_{bulk}/T_{brane}, T étant le coefficient de transmission, qui augmente avec Λ et diminue avec D. Ce rapport est donné par l'expression suivante :

$$\frac{T_{bulk}}{T_{brane}} = \left(\frac{1}{\eta}\right)^{D-4} \left(\frac{1-\eta^2}{1-\eta^{D-2}}\right)^2, \tag{7.79}$$

où $\eta = r_H/r_{dS}$ est le rapport entre la taille de l'horizon du trou noir et celle de l'horizon de Sitter. Un trou noir SdS n'étant défini que si $R_H < R_{DS}$, le rapport η est toujours inférieur à un. La quantité T_{bulk}/T_{brane} ci-dessus diminue donc avec D et augmente avec Λ, puisque cette dernière augmente la valeur r_{dS}. Le rapport du nombre de particules émises dans le bulk sur celui émises sur la brane dN_{bulk}/dN_{brane}, évidemment égale au rapport dE_{bulk}/dE_{brane}, peut s'exprimer dans la limite basse énergie en fonction du rapport ci-dessus (voir équations (7.69), (7.74) et (7.46)) :

$$\frac{dE_{bulk}}{dE_{brane}} = \pi \left(\frac{D-3}{D-1}\right) \frac{T_{bulk}}{T_{brane}}.$$

Puisque le préfacteur devant T_{bulk}/T_{brane} ne fait pas intervenir la valeur de la constante cosmologique, le comportement du rapport dE_{bulk}/dE_{brane} quand $\omega \to 0$ suit celui du rapport des amplitudes de diffusion, à savoir il augmente avec Λ. En ce qui concerne l'évolution avec le nombre de dimensions, le préfacteur décroît avec ce paramètre. De plus, le rapport T_{bulk}/T_{brane} diminue quand D augmente, conduisant ainsi à la diminution du rapport dE_{bulk}/dE_{brane} pour des valeurs du nombre de dimensions plus élevées. Nous retrouvons donc bien analytiquement ce qui était suggéré numériquement.

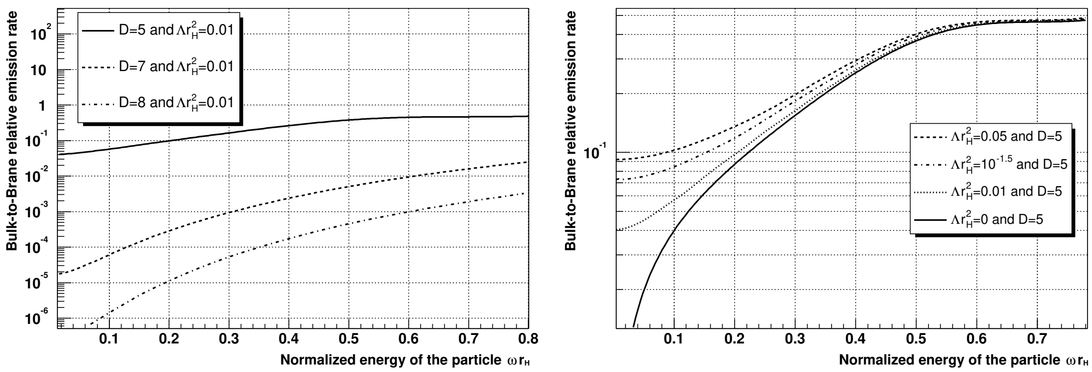


FIG. 7.19 – Rapport du taux d'énergie émise dans le bulk sur celui émise sur la brane par un trou noir SdS en fonction de l'énergie des quanta émis en unité de r_H^{-1}. *Gauche :* la valeur de la constante cosmologique est fixée à $\Lambda = 0.01\ r_H^{-2}$ et le nombre de dimensions à $D = \{4, 5, 9\}$. *Droite :* la valeur de la constante cosmologique est fixée à $\Lambda = \{0, 0.01, 10^{-1.5}, 0.05\}\ r_H^{-2}$ et le nombre de dimensions à $D = 4$.

Domaine de validité des résultats

Comme pour les trous noirs en théorie de Gauss-Bonnet, la métrique ci-dessus décrivant l'espace-temps autour d'un trou noir SdS est obtenue en supposant les dimensions supplémentaires étendues. La discussion du domaine de validité concernant la taille des trous noirs à considérer ainsi que la coupure à basse énergie de la particule émise à appliquer afin que les calculs ci-dessus soient valides est donc identique au cas des trous noirs de Gauss-Bonnet. Cependant, pour le cas de trou noir SdS, la limite à basse énergie est assez contraignante en vue d'une éventuelle détection de l'influence de la constante cosmologique sur l'évaporation des trous noirs, cette influence apparaissant essentiellement via la divergence infrarouge des facteurs de corps gris. Pour des trous noirs plongés dans un univers ayant $D > 4$ dimensions, la divergence infrarouge doit être prise avec précaution. Pourtant, à la différence des trous noirs de Gauss-Bonnet, les résultats précédents sont valides dans des univers à quatre dimensions, ces dernières étant nécessairement étendues. Dans ce cas-ci, la coupure à basse énergie n'a donc plus lieu d'être et la divergence infrarouge est bien présente dans les facteurs de corps gris.

7.3.3 Résultats semi-classiques [110]

Comme il vient d'être montré, le calcul exact des facteurs de corps gris est une opération assez lourde requérant, d'une part, des investigations analytiques pouvant être spécifiques à chaque cas étudié et, d'autre part, des investigations numériques qui nécessitent un grand temps de calcul. Il est important de garder à l'esprit que chaque ordre multipolaire de chaque point de chaque courbe dans chaque figure requiert la résolution numérique d'un système différentiel ainsi qu'un ajustement global de fonctions complètes sur des solutions numériques parfois instables. Dans l'optique d'alléger la détermination de ces facteurs, la méthode semi-classique décrite dans le chapitre 7.1.2 peut s'avérer fort utile. Il ne faut cependant pas perdre de vue que cette méthode fournit uniquement des valeurs approchées et bien que plus facilement mise en place, ne pourra déboucher que sur un premier ordre de grandeur des facteurs de corps gris. Il sera de plus indispensable d'identifier les domaines d'énergie dans lesquelles l'approximation semi-classique est justifiée.

Solution WKB dans une métrique de Schwarzschild

Considérons le cas simple de l'émission d'un trou noir de Schwarzschild à quatre dimensions, dont l'espace-temps est décrit par la métrique originelle de Schwarzschild dont la forme est rappelée ci-dessous :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_H}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2. \tag{7.80}$$

Dans une telle métrique, la coordonnée tortoise et le potentiel vu par une particule scalaire prennent la forme suivante :

$$r^\star = r + r_H \ln(r - r_H), \tag{7.81}$$

$$V^2(r) = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)\left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{r_H}{r^3}\right). \tag{7.82}$$

Ce potentiel est représenté sur la figure 7.20 en fonction de la coordonnée tortoise pour différentes valeurs du nombre quantique orbital ℓ. Le potentiel s'annule à l'horizon du trou noir et infiniment loin de ce dernier, c'est-à-dire quand $r^\star$ tend vers $-\infty$ et $+\infty$. Tout comme dans le cas des espaces-temps SAdS, il est impossible d'inverser la relation $r^\star = f(r)$ et d'exprimer directement le potentiel en fonction de la coordonnée tortoise. Cependant, $r^\star$ est une bijection croissante de r. Il est donc possible de travailler sur la coordonnée r sans ajouter de complication, en particulier pour la détermination des points tournants. Ce potentiel présente un maximum localisé en r_{max} :

$$r_{max} = \begin{cases} \frac{4}{3} r_H & \text{pour } \ell = 0 \\ \frac{r_H}{4L}\left(3L - 3 + \sqrt{9 + 9L^2 + 14L}\right) & \text{pour } \ell \neq 0, \end{cases} \tag{7.83}$$

avec $L = \ell(\ell+1)$. Pour une particule à une énergie ω donnée, les points tournants seront obtenus en résolvant l'équation $V^2(r) = \omega^2$. Ce problème se divise en deux cas : si l'énergie est supérieure au maximum de la barrière, alors il n'y a aucun point tournant et si l'énergie est inférieure au maximum de la barrière, il existe alors deux points tournants $r_\pm$ qui nécessitent la résolution d'une équation polynômiale d'ordre 4 qui, bien qu'une résolution analytique soit possible (méthode de Cardan [128]), sera résolue numériquement.

Traitant un problème stationnaire, la résolution à l'ordre semi-classique de l'équation de Schrödinger sera donnée par les solutions WKB, notées $\tilde{U}(r^\star)$ par la suite. A la différence des

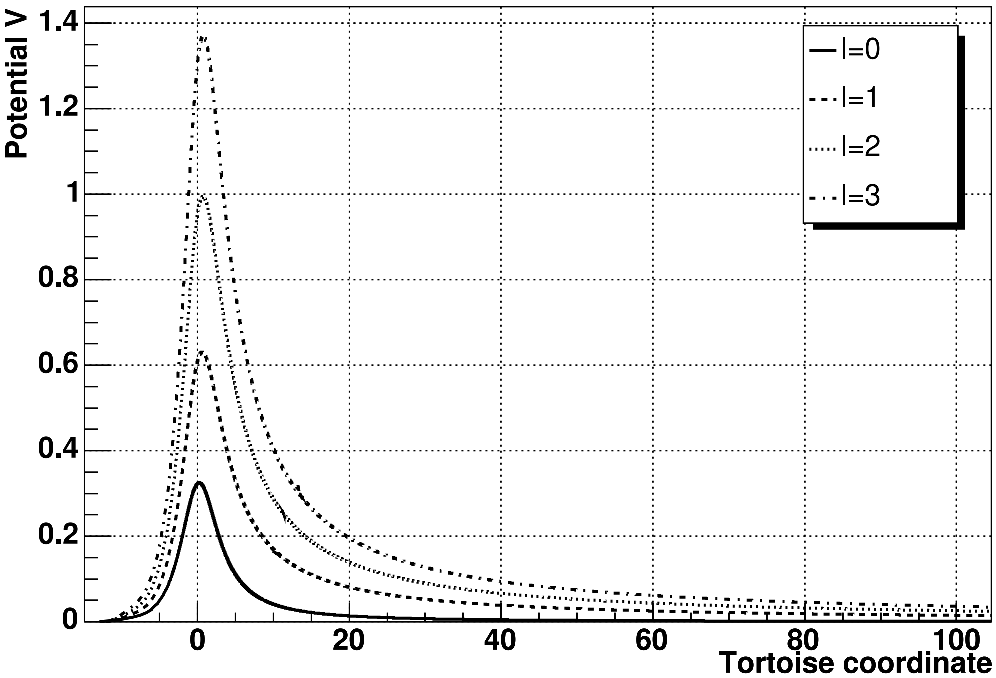


FIG. 7.20 – Potentiel vu par une particule scalaire se propageant dans un espace-temps de Schwarzschild à quatre dimensions en fonction de la coordonnée tortoise $r^\star$.

calculs précédents, un point de vue *émission* est adopté imposant l'absence de mode rentrant à l'infini du trou noir. Les fonctions d'onde asymptotiques sont alors les suivantes :

$$\lim_{r^\star \to -\infty} \tilde{U}(r^\star) = \frac{A_{in}}{\sqrt{\omega}} e^{-i\omega r^\star} + \frac{A_{out}}{\sqrt{\omega}} e^{i\omega r^\star}, \tag{7.84}$$

$$\lim_{r^\star \to +\infty} \tilde{U}(r^\star) = \frac{B_{out}}{\sqrt{\omega}} e^{i\omega r^\star}. \tag{7.85}$$

Si l'énergie de la particule est plus grande que le maximum de la barrière, alors la transmission est totale et il n'y a aucune réflexion. L'amplitude A_{in} devient égale à zéro et la fonction d'onde WKB se compose uniquement de modes sortants :

$$\tilde{U}(r^\star) = \frac{A_{out}}{\sqrt{p(r^\star)}} \exp\left(i \int_{r_0^\star}^{r^\star} p(x)dx \right). \tag{7.86}$$

Au contraire, si l'énergie de la particule est inférieure à la barrière de potentiel, une partie de l'onde est réfléchie et une autre partie est transmise par effet tunnel. Puisqu'il n'y a aucune source à l'infini du trou noir, il ne peut y avoir d'onde exponentiellement croissante sous la barrière de potentiel. Une fois les conditions de jonction appliquées aux deux points tournants, la situation étant identique au calcul de l'effet tunnel dans le chapitre 5.1.3, la fonction d'onde

WKB se comporte ainsi

$$\tilde{U}(r^\star) = \begin{cases} \frac{A_{out}}{\sqrt{p(r^\star)}}\left(e^{i\int_{r_-^\star}^{r^\star} p(x)dx} - ie^{-i\int_{r_-^\star}^{r^\star} p(x)dx}\right) & \text{pour } r^\star < r_-^\star \\ \frac{A_{out}}{\sqrt{|p(r^\star)|}} e^{-i\frac{\pi}{4} - \int_{r_-^\star}^{r^\star} |p(x)|dx} & \text{pour } r_-^\star < r^\star < r_+^\star \\ \frac{A_{out}e^{-\tau}}{\sqrt{p(r^\star)}} e^{i\int_{r_+^\star}^{r^\star} p(x)dx} & \text{pour } r_+^\star < r^\star, \end{cases} \tag{7.87}$$

avec $\tau = \int_{r_-^\star}^{r_+^\star} |p(r^\star)|\, dr^\star$.

Sections efficaces d'absorption

L'amplitude de diffusion est alors donnée par l'une ou l'autre des formules énoncées dans le chapitre 7.1.2. Cependant, comme il est impossible d'inverser la relation $r^\star = f(r)$, il est nécessaire d'exprimer ces relations en termes de la coordonnée r. Compte tenu de la bijectivité croissante de $r^\star$ en fonction de r, nous obtenons :

$$|A_\ell|^2 = \exp\left(2\int_{r_-}^{r_+} \frac{1}{h(r)}\sqrt{\omega^2 - V^2(r)}dr\right) \tag{7.88}$$

pour l'amplitude de diffusion à l'ordre WKB le plus bas, et :

$$|A_\ell|^2 = \left(1 + e^{2i\pi(\mu+1/2)}\right)^{-1}, \tag{7.89}$$

avec

$$\mu + 1/2 = ip^2(r_{max})\left[2h(r)\,\frac{d}{dr}\left(h(r)\frac{dp(r)}{dr}\right)\bigg|_{r_{max}}\right]^{-1/2}, \tag{7.90}$$

pour l'amplitude de diffusion optimisée au seuil, *i.e.* quand l'énergie de la particule est proche du maximum de la barrière de potentiel. En ce qui concerne la première méthode WKB présentée ci-dessus, l'intégrale du module de l'impulsion entre les deux points tournants est facilement évaluée numériquement à l'aide d'une méthode des trapèzes. Il faut cependant noter que, travaillant avec la coordonnée r, les pas d'intégration devront être choisis très fins afin de correspondre à des pas suffisamment petits pour la coordonnée $r^\star$, le passage de r à $r^\star$ correspondant à un étirement, en particulier à proximité de l'horizon.

La figure 7.21 représente la section efficace d'émission, à l'ordre WKB et exacte, de particules scalaires émises par un trou noir de Schwarzschild à quatre dimensions en fonction de l'énergie de la particule. La partie gauche de la figure représente les résultats obtenus en utilisant les deux amplitudes de diffusion à l'ordre WKB, ainsi que le résultat exact obtenu grâce à une étude numérique. La partie droite de la figure représente quant à elle l'erreur relative sur l'estimation de ces sections efficaces à l'aide des méthodes WKB. Cette erreur relative est définie de façon algébrique :

$$\frac{\Delta\sigma_g}{\sigma_g} = \frac{\sigma_g^{(\mathrm{WKB})} - \sigma_g^{(exact)}}{\sigma_g^{(exact)}}. \tag{7.91}$$

Comme il l'a été mentionné dans le chapitre 7.1.2, la méthode au premier ordre WKB surestime l'amplitude de diffusion, et donc le facteur de corps gris, au niveau des résonnances tandis que l'utilisation de la méthode optimisée au seuil permet une bien meilleure estimation dans ce domaine, quoique légèrement sous-estimée. Il faut cependant noter que d'une part la position des résonances est très bien retrouvée avec les deux méthodes WKB et que d'autre part, l'erreur relative au niveau des résonances diminue rapidement avec l'énergie des particules. Cette erreur, dans le cas de l'estimation au premier ordre WKB, n'est pas dramatique car elle conduit à une structure très piquée aisément identifiable correspondant à une erreur relative ne dépassant pas

35 %. Comme il l'est clairement vu sur la partie droite de la figure 7.1.2, l'approximation WKB, qu'elle soit optimisée au seuil on non, n'est plus valide à trés basse énergie et conduit à une divergence de la section efficace d'absorption. Dans le cas de l'approche WKB au premier ordre, cette divergence apparaît dès le mode monopolaire puisque $|A_0|^2 \to e^{-4\sqrt{r_H}}$ quand $\omega \to 0$. Ce comportement est beaucoup plus problématique puisque sans l'appui d'un résultat exact, il est extrêment difficile d'identifier si la méthode WKB entraîne une simple erreur ou bien si elle devient totalement non prédicitive, comme cela est le cas ici. Cette difficulté d'identification s'illustre très bien au regard du comportement dans le domaine infrarouge des facteurs de corps gris pour un trou noir SdS qui présente la même divergence infrarouge, celle-ci étant en l'occurence physique.

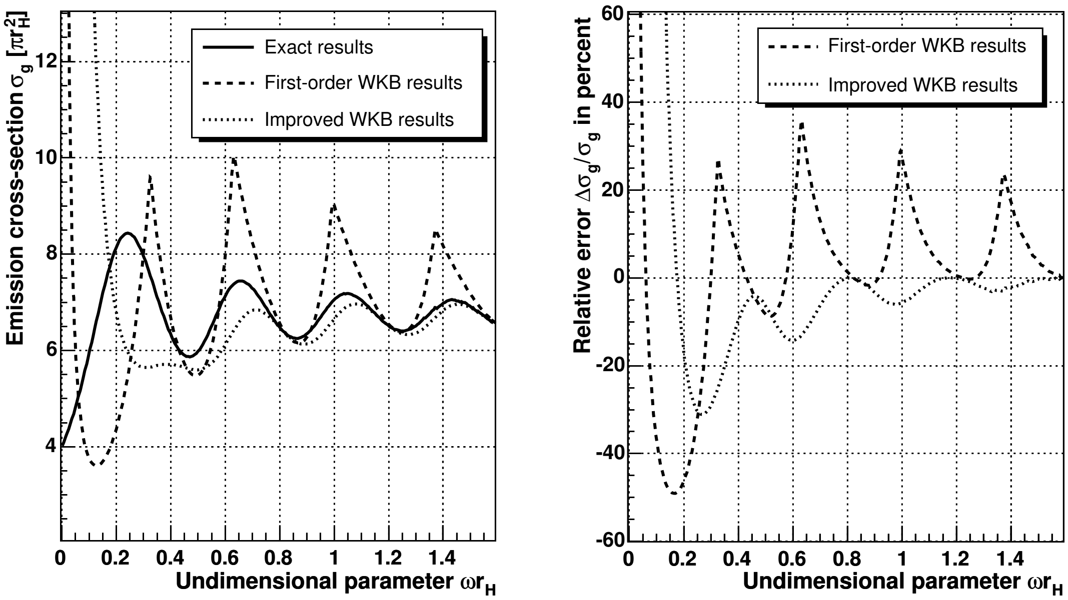


FIG. 7.21 – *Gauche :* facteurs de corps pour des particules scalaires émises par un trou noir de Schwarzschild à quatre dimensions. La courbe en trait plein correspond au résultat exact obtenu grâce à un calcul numérique, la courbe en tiret au résultat à l'ordre WKB le plus bas et la courbe en pointillé au résultat à l'ordre WKB optimisé au seuil. *Droite :* erreur relative $\Delta\sigma_g/\sigma_g$ de l'estimation à l'ordre WKB des facteurs de corps gris. La courbe en tiret correspond à l'erreur relative sur l'estimation au premier ordre WKB et celle en pointillé à l'erreur sur l'estimation optimisée au seuil.

Malgré ces désavantages, l'évaluation des facteurs de corps gris à l'aide des méthodes semi-classiques permet d'obtenir à l'aide de calculs simples à mettre en oeuvre un premier ordre de grandeur des facteurs de corps gris avec une précision satisfaisante pour des énergies au delà de $0.6r_H^{-1}$. Dans le régime d'énergie couvert par la figure 7.1.2, l'erreur relative moyenne, pour $\omega > 0.6r_H^{-1}$, est d'environ 10% pour la méthode la moins précise et il a été testé que cette erreur relative décroît jusqu'à $\omega \simeq 3r_H^{-1}$. De plus, les deux méthodes semi-classiques redonnent exactement la limite à haute énergie des facteurs de corps gris $\sigma_g(\omega \to \infty) = 27\pi r_H^2/4$. Un tel résultat, bien qu'attendu et même condition minimum pour que les méthodes semi-classiques soient fiables, a été démontré analytiquement dans la référence [129] à condition que la valeur de l'amplitude de diffusion WKB tende vers 1 lorsque l'énergie de la particule tend vers l'infini (voir équation (4.2) et (4.3) de la référence [129]). Les méthodes WKB utilisées ci-dessus remplissent cette condition et fournissent donc nécessairement une évaluation exacte de la limite à haute énergie des facteurs de corps gris. Il semble donc qu'une évaluation des facteurs de corps gris à l'ordre WKB s'avère être un outil aisé à mettre en place permettant d'obtenir un premier ordre de grandeur des facteurs de corps gris si l'on ne considère pas le domaine infrarouge, *i.e.* $\omega \ll r_H^{-1}$. Ces méthodes ont d'ailleurs été utilisées afin de déterminer les facteurs de corps gris pour des gravitons émis par des trous noirs de Schwrazschild à D dimensions [129].

Spectre d'émission

A partir des résultats ci-dessus, il est donc possible de calculer l'observable physique, à l'ordre WKB, liée aux facteurs de corps gris, qu'est le spectre d'émission. Ce spectre d'émission est une loi de corps gris à la température $T_H = (4\pi r_H)^{-1}$, pour des trous noirs de Schwarzschild, et doit donc présenter un pic aux alentours de $\omega_{pic} \simeq 1.6 T_H$. La position de ce pic est valable pour une loi de corps noir mais, les facteurs de corps gris devenant très rapidement une fonction oscillante autour de la limite à haute énergie[14], la méthode fournit tout de même un bon ordre de grandeur pour le spectre d'émission des trous noirs de Schwarzschild. En unité de r_H^{-1}, la position du pic est donc environ à $\omega_{pic} \simeq 0.13 r_H^{-1}$. L'évaluation des facteurs de corps gris à l'ordre WKB n'étant valable que pour des énergies supérieures à $0.6 r_H^{-1}$, il semble que l'utilisation des résultats WKB ne soit pas appropriée pour estimer les spectres d'émission. Cette prédiction est confirmée par les résultats présentés sur la figure 7.22 montrant le spectre de particules scalaires émises par un trou noir de Schwarzschild obtenu de quatre manières différentes : la courbe en trait plein représente le spectre exact ; la courbe en tiret le spectre au premier ordre WKB, la courbe en pointillé le spectre WKB optimisé au seuil et la courbe en trait alterné pointillé-tiret une loi de corps noir à la température du trou noir et avec une surface émettrice égale à la limite géométrique de la section efficace d'absorption. Il est évident, au vu de ces résultats, que l'approche WKB ne présente ici aucun intérêt phénoménologique particulier puisque, mis à part la queue à haute énergie, aucune des deux méthodes utilisées n'aboutit à une bonne évaluation du spectre d'émission. De plus, utiliser une loi de corps noir à la température du trou noir et avec une surface émettrice égale à la section efficace à haute énergie reproduit bien mieux ce spectre tout en étant très facilement calculée. L'ensemble des résultats présentés dans cette section amènent à la conclusion suivante : utiliser une approche semi-classique pour évaluer les facteurs de corps gris s'avère intéressante d'un point de vue théorique, permettant d'avoir un premier ordre d'idée quant à l'influence de la courbure de l'espace-temps à proximité d'un trou noir sur l'absorption des particules, mais s'avère de peu d'intérêt phénoménologique.

7.4 Conclusions et perspectives

7.4.1 Conclusions

J'ai montré dans ce chapitre que le processus d'évaporation des trous noirs peut renseigner sur la théorie gravitationnelle sous-jacente. En particulier, j'ai montré qu'une information centrale sur le profil de courbure de l'espace dans lequel les particules se propagent est contenue dans les facteurs de corps gris et que cette information se transpose dans l'observable que sont les flux de radiation de Hawking.

[14] Les oscillations sont la conséquence des résonances successives quand l'énergie de la particule est proche du maximum de la barrière de potentiel. Chaque maximum dans la section efficace correspond à une résonance à un nouvel ordre multipolaire.

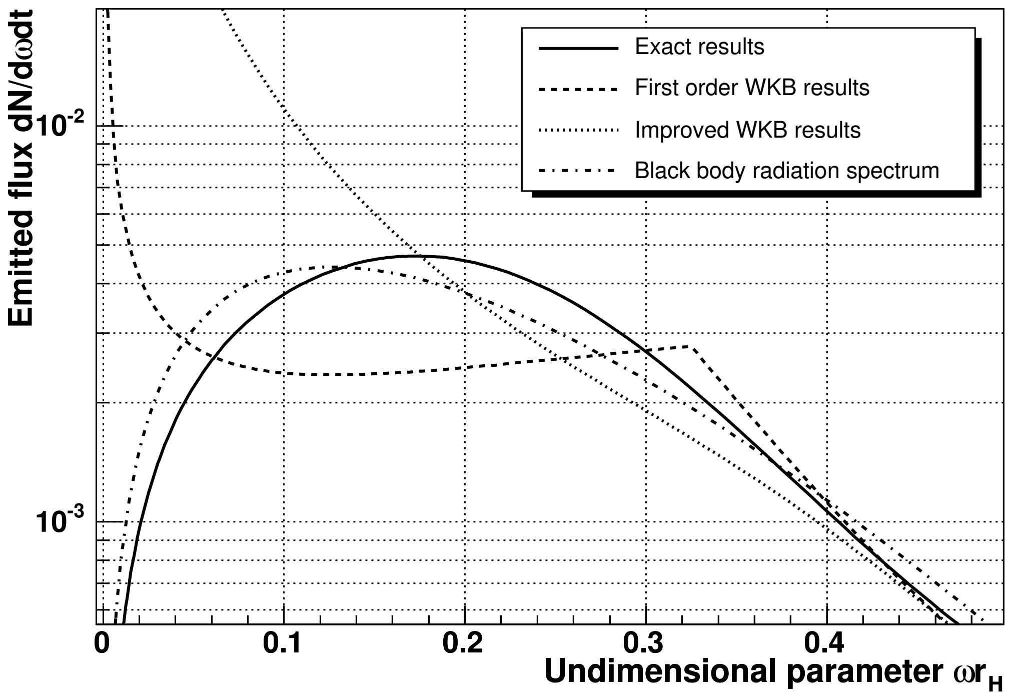


Fig. 7.22 – Spectre d'émission de particules scalaires par un trou noir de Schwarzschild à quatre dimensions déterminé de quatre manières différentes : la courbe en trait plein représente le spectre exact ; la courbe en tiret le spectre au premier ordre WKB, la courbe en pointillé le spectre WKB optimisé au seuil et la courbe en trait alterné pointillé-tiret à une loi de corps noir à la température du trou noir et avec une surface émettrice égale à la limite géométrique de la section efficace d'absorption. Les pics apparaissant sur la courbe en tiret reflètent le comportement très piqué des facteurs de corps gris au premier ordre WKB.

J'ai développé une méthode numérique permettant de déterminer la valeur des facteurs de corps gris sur l'ensemble de la gamme énergétique pour des champs scalaires, des champs fermioniques et des champs de jauge. Cette méthode numérique a été appliquée dans le cadre de la théorie de Lovelock à D dimensions dont les résultats démontrent l'influence directe des paramètres de la théorie (nombre de dimensions, valeur de la constante cosmologique et valeur de la constante de couplage de Gauss-Bonnet) sur les facteurs de corps gris. Ces résultats sont par ailleurs confirmés dans le domaine ultra-violet et infra-rouge par des investigations analytiques.

J'ai aussi montré que les développements semi-classiques en espace-temps de type Schwarzschild s'avèrent être un premier outil d'investigation très prometteur pour déterminer l'influence d'une théorie sur le processus de Hawking. Cette méthode approximative n'est pas valable sur l'ensemble de la gamme énergétique mais fournit des résultats d'une assez grande précision pour des énergies supérieures à environ $0.6 \times r_H^{-1}$.

7.4.2 Perspectives : facteurs de corps gris

La méthode numérique ainsi que la détermination semi-classique des facteurs de corps gris s'étendent à d'autres cas. Elles peuvent être appliquées à des théories gravitationnelles différentes (les théories scalaire-tenseur qui sont elles aussi une voie prometteuse) ou bien à des champs différents de ceux considérés dans cette étude. Tout d'abord, il est nécessaire de calculer les facteurs de corps gris pour les champs du modèle standard, *i.e.* champs de matière et champs de jauge confinés sur la brane[15], émis par un trou noir de Schwarzschild-de Sitter. Ensuite, dans le cadre des scenarii branaires ADD, la détermination de facteurs des corps gris pour les gravitons est bien évidemment la suite logique de mon étude. Enfin, dans une optique plus générale de dynamique des champs en espaces-temps courbes, l'étude de la propagation de champs massifs, à commencer par les scalaires, est aussi un problème a aborder.

Facteurs de corps gris pour les champs avec spin en espace SdS

La présence d'une constante cosmologique positive et non-nulle dans les équations d'Einstein conduit à l'apparition d'une divergence infra-rouge dans les facteurs de corps gris. Il n'est cependant pas évident que cette divergence perdure pour des particules de spin non-nul puisque la valeur du spin intervient de façon non-triviale dans les coefficients de transmission à basse énergie. En effet, le comportement infra-rouge des facteurs de corps gris pour un trou noir de Gauss-Bonnet tend à prouver qu'il ne faut pas généraliser le cas scalaire aux cas avec spin non-nul. De plus, dans le cadre de la Relativité Générale $D-$dimensionnelle, les coefficients de transmission pour un champ de spin s, $s = \frac{1}{2}$ ou 1, sont proportionnels à $(\omega r_H)^{2(j+s)}$, j étant le moment angulaire total [109].

Les investigations numériques préliminaires montrent que la divergence infra-rouge est bien présente pour les champs de spin $\frac{1}{2}$ mais qu'elle disparaît pour les champs de jauge. Ce comportement est le résultat probable d'un effet de spin à basse énergie mais aucune investigation analytique n'a été menée pour confirmer ce résultat. Il est important de garder à l'esprit que l'ajout d'un deuxième horizon complique énormément le problème, tant d'un point de vue numérique qu'analytique, et rend les investigations pour les particules avec spin bien plus longues. Il s'agit néanmoins d'une voie naturelle de développement de cette étude.

Facteurs de corps gris pour les gravitons

D'un certain point de vue, le graviton est une particule standard des modèles ADD et déterminer leur taux d'émission par les trous noirs émerge naturellement des motivations données pour les champs scalaires et les champs du modèle standard. L'étude des gravitons présente de nombreux intérêts. Tout d'abord, seuls ces particules et les particules scalaires n'ayant aucune charge vis-à-vis du modèle standard peuvent se propager dans les dimensions supplémentaires : leur étude permet donc une compréhension des effets $D-$dimensionnels sur la propagation. Les particules scalaires permettent les mêmes investigations mais ces particules restent sujet à caution alors que les gravitons, dans les modèles « standards », existent bel-et-bien. Ensuite, les gravitons donnent accès au comportement de particules de spin 2 dans un espace-temps courbe. Enfin, d'un point de vue observationnel, ces particules ne peuvent pas être détectées : déterminer leur taux d'émission est donc nécessaire pour déterminer la quantité d'énergie manquante et donc l'incertitude sur la reconstruction des grandeurs thermodynamiques (masse et température) de trous noirs éventuellement détectés par leurs produits d'évaporation.

La dynamique d'un graviton dans un espace-temps courbe s'obtient en étudiant les perturbations métriques autour de la métrique de fond. Ce calcul renvoie à celui de la dynamique des ondes gravitationnelles loin de leur source (la métrique de fond étant alors minkowskienne) et correspond à une extension à D dimensions du calcul originel de Regge et Wheeler visant à déterminer la stabilité de « la singularité de Schwarzschild » [130]. Evidemment, le spectre du graviton est intimement lié au lagrangien gravitationnel et il peut être envisagé que si la Relativité Générale n'est plus la théorie gravitationnelle sous-jacente, alors le spectre du graviton doit être différent. Dans le cas de la théorie de Gauss-Bonnet, il est montré que les

[15] Ces calculs peuvent bien évidemment être étendus à n'importe quel type de champ, comme les champs supersymétriques par exemple (spin $s = 0,\ 1/2,\ 1$ et $3/2$).

équations dynamiques des perturbations métriques autour d'un espace de fond sont identiques à celles de la Relativité Générale. Ainsi, les équations du mouvement pour un graviton se propageant autour d'un trou noir de Schwarzschild en théorie de Gauss-Bonnet sont identiques, à la métrique de fond près, à celles décrivant la propagation d'un graviton autour d'un trou noir de Schwarzschild. Les équations de champs sont tout d'abord décomposées en une partie tensorielle de trace nulle, une partie vectorielle et une partie scalaire [131]. Ensuite, compte tenu des symétries des trous noirs de Schwarzschild, les différents éléments se décomposent en une partie temporelle, une partie angulaire et une partie radiale. Comme pour les particules scalaires et celles du modèle standard, les solutions des parties temporelles et angulaires sont respectivement les états stationnaires et les harmoniques sphériques de spin. La partie radiale prend alors la forme d'une équation de Schrödinger [131] :

$$\left[h(r)\frac{d}{dr}\left(h(r)\frac{d}{dr}\right)+\omega^2-V_\ell^{\mathrm{S,V,T}}(r)\right]R_\ell^{\mathrm{S,V,T}}(r)=0. \tag{7.92}$$

Les potentiels scalaire, vecteur et tenseur dépendent de la métrique de fond. Pour une métrique de Schwarzschild en Relativité Générale $D-$dimensionnelle, les potentiels prennent la forme :

$$\begin{aligned}
V_\ell^{\mathrm{T}}(r) &= \frac{h(r)}{r^2}\left[\ell(\ell+D-3)+\frac{(d-4)(D-2)}{4}+\frac{(D-2)^2}{4}x\right], &(7.93)\\
V_\ell^{\mathrm{V}}(r) &= \frac{h(r)}{r^2}\left[\ell(\ell+D-3)+\frac{(d-4)(D-2)}{4}-\frac{3(D-2)^2}{4}x\right], &(7.94)\\
V_\ell^{\mathrm{S}}(r) &= \frac{h(r)}{4r^2}\left[\frac{qx^3+px^2+wx+z}{(2m+(D-2)(D-1)x)^2}\right], &(7.95)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{array}{ll}
x=1-h(r)=\left(\frac{r_H}{r}\right)^{D-3}, & m=\ell(\ell+D-3)-D+2,\\
q=(D-2)^2(D_1)^2, & z=16m^3+4m^2D(D-2),\\
\multicolumn{2}{l}{w=-12m(D-2)\left[m(D-6)+(D-4)(D-2)(D-1)\right],}\\
\multicolumn{2}{l}{p=(D-2)(D-1)\left[4m\left(2D^2-11D+18\right)+(D-4)(D-2)(D-1)(D-6)\right].}
\end{array} \tag{7.96}$$

Dans le cas de trous noirs de Gauss-Bonnet, les trois potentiels doivent être dérivés en suivant la méthode de [131] en prenant la fonction métrique pour un trou noir de Schwarzschild-Gauss-Bonnet.

L'évaluation numérique des facteurs de corps gris procède alors de façon identique aux cas étudiés précédemment : les équations pour les trois modes, tenseur, vecteur et scalaire, sont numériquement résolues en imposant comme conditions aux limites qu'il n'y ait aucune source de particule à proximité de l'horizon du trou noir. Le potentiel s'annule en $r\to r_H$ et $r\to+\infty$ pour les trois modes et les solutions asymptotiques sont donc[16] :

$$R_\ell^{\mathrm{S,V,T}}(r)\to\begin{cases} A_{in}^{(h)}e^{-i\omega r^\star} & \text{quand } r\to r_H\\ A_{in}^{(\infty)}e^{-i\omega r}+A_{out}^{(\infty)}e^{i\omega r} & \text{quand } r\to+\infty.\end{cases} \tag{7.97}$$

Le coefficient de transmission est alors défini pour chaque mode par :

$$\left|A_\ell^{\mathrm{S,V,T}}\right|^2=1-\left|\frac{A_{out}^{(\infty)}}{A_{in}^{(\infty)}}\right|^2, \tag{7.98}$$

[16] L'annulation des potentiels en r_H est uniquement due à la présence de l'horizon. De même, l'annulation en l'infini est une conséqunce du fait que l'espace est asymptotiquement plat. Il n'est donc pas nécessaire de connaître la forme exacte des potentiels pour en déduire leur comportement asymptotique.

et la section efficace d'absorption [132] :

$$\sigma_g^{\mathrm{S,V,T}}(\omega) = \frac{2}{D(D-3)} \sum_\ell \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{D-2} \times \frac{N_\ell^{\mathrm{S,V,T}} \left| A_\ell^{\mathrm{S,V,T}} \right|^2}{\Omega_{D-2}}. \tag{7.99}$$

Les coefficient $N_\ell^{\mathrm{S,V,T}}$ représente la multiplicité des modes scalaire, vecteur et tenseur dans un espace-temps $D-$dimensionnel [132, 133] :

$$N_\ell^{\mathrm{S}} = \frac{(2\ell+D-3)(\ell+D-4)!}{\ell!(D-3)!} \tag{7.100}$$

$$N_\ell^{\mathrm{V}} = \frac{\ell(\ell+D-3)(2\ell+D-3)(\ell+D-5)!}{(\ell+1)!(D-4)!} \tag{7.101}$$

$$N_\ell^{\mathrm{T}} = \frac{(D-1)(D-4)(\ell+D-2)(\ell-1)(2\ell+D-3)(\ell+D-5)!}{2(\ell+1)!(D-3)!}. \tag{7.102}$$

Dans le cadre de la Relativité Générale à D dimensions, les facteurs de corps gris ont d'abord été calculés à l'ordre WKB [129] puis de manière exacte grâce à un calcul analytique dans le domaine infra-rouge [133, 132] et grâce à un calcul numérique sur l'ensemble de la gamme énergétique [132]. Grâce la méthode décrite ci-dessus, ces résultats pourront être étendus aux cas de trous noirs de Schwarzschild en théorie de Gauss-Bonnet, du moins de façon numérique.

Etats quantiques liés autour d'un trou noir

La plupart des particules du modèle standard sont massives et il est donc essentiel d'étudier l'influence de la masse sur la propagation des particules en espace-temps courbes et plus particulièrement sur le processus d'évaporation des trous noirs. Tout comme en mécanique classique, aucun état lié n'apparaît dans pour des particules de masse nulle : il n'y a pas de puits dans le potentiel défini dans le chapitre 5.1.1, qui aurait alors permis l'apparition d'une liaison gravitationnelle. Ainsi, par analogie avec la mécanique classique, nous pouvons nous attendre à ce que des états liés quantiques apparaissent dans la dynamique de champs massifs.

Pour une particule scalaire de masse μ, l'équation de Klein-Gordon prend la forme suivante [107] :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\Phi\right) + \mu^2\Phi = 0. \tag{7.103}$$

Dans un espace-temps de Schwarzschild à quatre dimensions, cette équation est résolue par séparation des variables. Le champ se décompose suivant une partie temporelle, une partie angulaire et une partie radiale : $\Phi = e^{-i\omega t}Y_m^\ell(\theta,\varphi)R(r)$. La fonction d'onde radiale est alors solution de l'équation différentielle :

$$\left[\frac{h(r)}{r^2}\frac{d}{dr}h(r)r^2\frac{d}{dr} + \omega^2 - h(r)\left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \mu^2\right)\right]R(r) = 0, \tag{7.104}$$

qui prend la forme d'une équation de Schrödinger grâce aux changements usuels de variable et de fonction inconnue, $r \to r^\star$ et $R(r) \to U(r) = rR(r)$:

$$-\frac{d^2U}{dr^\star} + \left(\omega^2 - V_\ell^2(r)\right)U = 0. \tag{7.105}$$

Le potentiel intervenant dans cette équation correspond à la contribution du potentiel centrifuge, du potentiel gravitationnel et de la masse du champ :

$$V_\ell^2(r) = h(r)\left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{dh}{dr} + \mu^2\right). \tag{7.106}$$

Il est intéressant de noter que la masse décalée vers le rouge ou le bleu par la courbure de l'espace-temps, *i.e.* le terme $h(r)\mu^2$, agit comme un potentiel. Cette contribution supplémentaire fait que le potentiel ne tend plus vers zéro à l'infini mais vers μ. Le carré de ce potentiel est représenté sur la figure 7.23 pour trois valeurs de la masse du champ : $\mu^2 = 0,\ 0.1$ et $0.4\ r_H^{-2}$. Pour chacune de ces valeurs, les potentiels monopolaire, $\ell = 0$, et dipolaire, $\ell = 1$, sont tracés. Cette figure montre qu'un puits de potentiel local apparaît pour une masse non-nulle du champ. La présence de ce puits dépend de la valeur de μ : pour $\mu^2 = 0.1\ r_H^{-2}$, le puit est présent dès le potentiel monopolaire tandis que pour $\mu^2 = 0.4\ r_H^{-2}$, ce minimum n'apparaît qu'à l'ordre dipolaire.

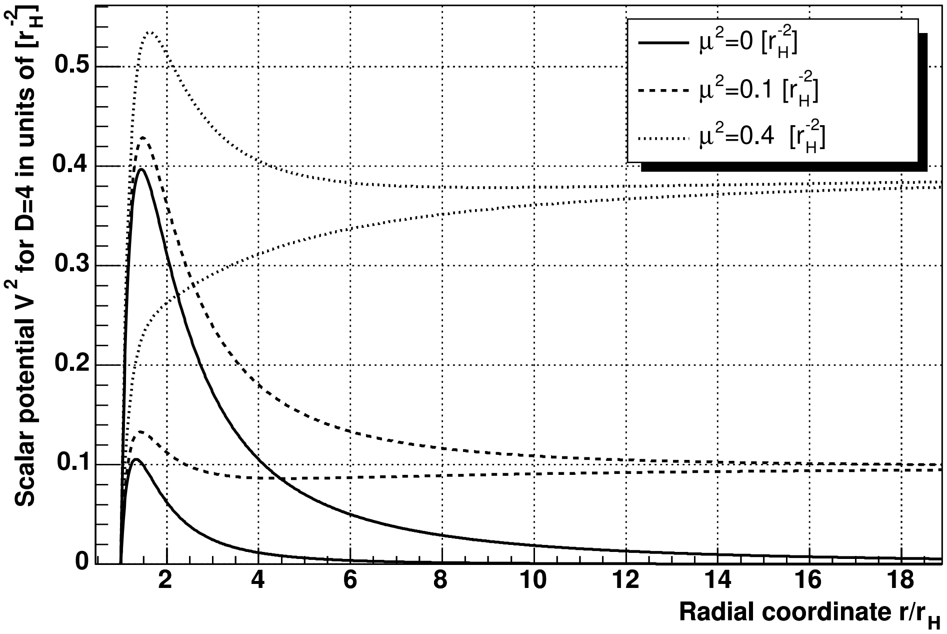


FIG. 7.23 – Carré du potentiel pour un champ scalaire se propageant dans un espace-temps de Schwarzschild quadri-dimensionnelle en fonction de la coordonnée radiale r. La masse du champ est prise égale à $\mu^2 = 0,\ 0.1$ et $0.4\ r_H^{-2}$ et les potentiels monopolaire, $\ell = 0$, et dipolaire, $\ell = 1$, sont représentés pour chacune de ces valeurs. Le potentiel le plus élevé est le potentiel dipolaire.

L'apparition d'un puits à un ordre multipolaire ℓ donné est conditionnée par les racines de l'équation algébrique $\frac{dV_\ell^2}{dr} = 0$:

$$r_H \mu^3 r^3 - 2\ell(\ell+1)r^2 - 3r_H(1-\ell(\ell+1))r + 4r_H^2 = 0. \tag{7.107}$$

Cette équation cubique admet deux racines supérieures à r_H si la masse μ est plus faible qu'une certaine masse critique, $\mu_+(\ell)$, donnée par :

$$\mu_+^2 = \frac{1}{216 r_H^2}\left(-27J_1 + \sqrt{729J_1^2 + 432J_2}\right), \tag{7.108}$$

avec

$$J_1 = \ell^3(\ell+1)^3 + \ell^2(\ell+1)^2 - \ell(\ell+1) - 1, \tag{7.109}$$
$$J_2 = \ell^2(\ell+1)^2 \left[9 + 14\ell(\ell+1) + 9\ell^2(\ell+1)^2\right]. \tag{7.110}$$

Si la valeur de μ est plus grande que $\mu_+(\ell)$, alors l'équation cubique n'admet qu'une racine réelle négative. Le comportement général du potentiel peut alors être dressé à partir de cette masse critique $\mu_+(\ell)$: si par exemple la masse μ de la particule se situe dans l'intervalle $[\mu_+(\ell_1), \mu_+(\ell_1+1)]$, alors le potentiel sera une bijection croissante de $[r_H, \infty[$ dans $[0, \mu[$ pour tous les ordres multipolaires inférieurs ou égaux à ℓ_1 tandis qu'une barrière de potentiel et un puits local, tous deux dus à l'attraction gravitationnelle du trou noir, apparaîtront pour tous les ordres multipolaires strictement supérieurs à ℓ_1.

L'allure générale du potentiel est conditionnée par une seconde masse critique, appelée $\mu_-(\ell)$. Cette deuxième valeur particulière de la masse définit les hauteurs relatives de la barrière de potentiel proche de l'horizon du trou noir et de la masse de la particule. Une telle condition peut se traduire de la manière suivante : si la masse de la particule est plus grande que la barrière de potentiel, alors le système ne présente aucun point tournant pour une énergie de particule égale à sa masse. Ainsi, la masse de la particule sera la valeur la plus élevée du potentiel si l'équation algébrique $V_\ell^2(r) = \mu^2$ n'admet pas de racines supérieures à r_H. Comme dans le cas précédent, cette équation est cubique :

$$r^3 - \frac{\ell(\ell+1)}{r_H\mu^2}r^2 - \frac{1-\ell(\ell+1)}{\mu^2}r + \frac{r_H}{\mu^2} = 0, \tag{7.111}$$

et elle n'admet pas de solutions supérieures à r_H si $\mu > \mu_-(\ell)$. La masse $\mu_-(\ell)$ est alors donnée par :

$$\mu_-^2 = \frac{1}{27r_H^2}\left(-L_1 + \sqrt{L_1^2 + 27L_2}\right), \tag{7.112}$$

avec

$$L_1 = 2\ell^3(\ell+1)^3 + 3\ell^2(\ell+1)^2 - 3\ell(\ell+1) - 2, \tag{7.113}$$
$$L_2 = \ell^2(\ell+1)^2\left[\ell(\ell+1)+1\right]^2. \tag{7.114}$$

Pour un moment angulaire donné ℓ, la masse $\mu_-(\ell)$ est toujours inférieure à la masse $\mu_+(\ell)$. Les valeurs de ces deux grandeurs sont données dans le tableau 7.5 pour différentes valeurs du nombre quantique orbital ℓ. Le comportement du potentiel peut alors être classifié selon

ℓ	μ_- $[r_H^{-1}]$	μ_+ $[r_H^{-1}]$
0	$2/\sqrt{27}$	1/2
1	0.794	0.931
2	1.275	1.480
3	1.768	2.046
4	2.264	2.617
5	2.761	3.191

TAB. 7.5 – Masses critiques $\mu_\pm(\ell)$, en unité de r_H^{-1}, pour différentes valeurs du moment angulaire.

la masse de la particule : il part toujours de zéro en $r = r_H$ et tend vers μ en $+\infty$, i) si

$\mu < \mu_-(\ell)$, le potentiel atteint un maximum plus grand que μ puis passe par un minimum ; ii) si $\mu = \mu_-(\ell)$, le potentiel atteint un maximum strictement égal à μ et passe par un minimum ; iii) si $\mu_-(\ell) < \mu < \mu_+(\ell)$ le potentiel atteint un maximum inférieur à μ puis un minimum et iv) si $\mu \geq \mu_+(\ell)$ alors le potentiel est une bijection croissante. La figure 7.24, dans laquelle le potentiel monopolaire pour des masses de particules scalaires correspondant aux quatre cas cités ci-dessus est représenté, illustre ce comportement. Dans la suite, je me focaliserai sur le cas monopolaire et les deux masses critiques seront simplement notées $\mu_\pm$, les résultats s'étendant qualitativement à des ordres supérieurs. Finalement, dans le cas où $\mu < \mu_+$, les positions de la

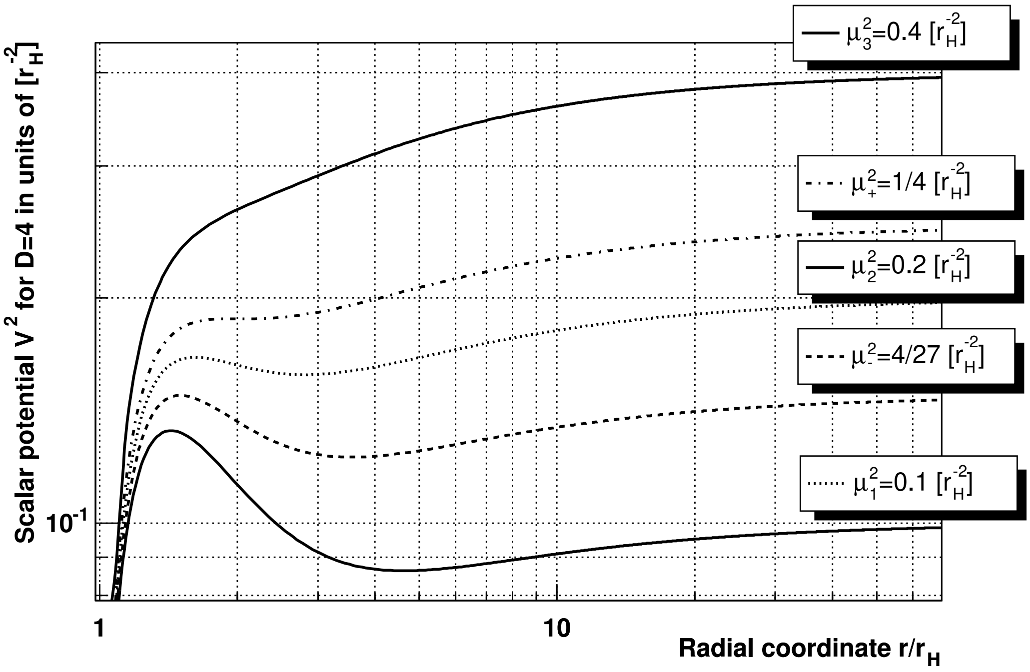


FIG. 7.24 – Potentiel monopolaire pour cinq masses de particules : i) $\mu^2 = 0.1\, r_H^{-2}$ correspondant à $\mu = \mu_-(0)$; ii) $\mu = \mu_-(0)$; iii) $\mu^2 = 0.2\, r_H^{-2}$ correspondant à $\mu_-(0) < \mu < \mu_+(0)$; iv) $\mu = \mu_+(0)$ et v) $\mu^2 = 0.4\, r_H^{-2}$ correspondant à $\mu > \mu_+(0)$.

barrière de potentiel, r_-, et du minimum local, r_+, sont données par les deux racines supérieures à r_H de l'équation cubique (7.107) :

$$r_- = \frac{1}{\mu}\left[\cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)\right], \tag{7.115}$$

$$r_+ = \frac{1}{\mu}\left[\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta)\right], \tag{7.116}$$

avec

$$\theta = \frac{1}{3}\arctan\left[\sqrt{\left(\frac{\mu_+}{\mu}\right)^2 - 1}\right]. \tag{7.117}$$

Le comportement asymptotique de ces deux positions est en accord avec l'étude du potentiel monopolaire pour une particule de masse nulle :

$$\lim_{\mu\to 0} r_+ = +\infty, \tag{7.118}$$

$$\lim_{\mu\to 0} r_- = \frac{4}{3} r_H \tag{7.119}$$

$$\lim_{\mu\to \mu_+} r_\pm = 2r_H. \tag{7.120}$$

Le minimum disparaît quand $\mu \to 0$ et la position du maximum tend bien vers celle dérivée dans le cas de masse nulle(voir référence [110] et le chapitre 7.3.3 de ce manuscrit). Enfin, lorsque la masse de la particule est égale à μ_+, les deux racines sont dégénérées et valent $2r_H$. Ce cas correspond à la courbe alternée pointillé-tiret de la figure 7.24 dans laquelle un *point selle* en $r = 2r_H$ apparaît : il représente la dégéneresence des minimum et maximum du potentiel.

Il est évident que la masse de la particule doit être proche des valeurs critiques $\mu_\pm$, pour que son effet sur la propagation de la particule soit significatif : si la masse est largement inférieure à $\mu_-(0)$, son effet dans le potentiel est négligeable tandis que si $\mu \gg \mu_+$ alors l'effet de la masse est dominant, excepté proche de l'horizon du trou noir où l'attraction gravitationnelle domine. Entre ces deux cas limites, la complexité du potentiel entraîne des effets tout à fait nouveaux. En particulier, si un un puits de potentiel est présent, alors des états liés, quantiques, doivent apparaître dont l'énergie est inférieure à l'énergie de masse de la particule compte tenu de l'énergie de liaison gravitationnelle. Tout comme en mécanique classique, les états liés n'existent que pour les particules massives car il n'y a pas de puits pour $\mu = 0$. Cependant, à la différence de la mécanique classique, ces états peuvent exister à l'ordre monopolaire, c'est-à-dire pour un moment angulaire nul. Ainsi, il serait possible qu'à un niveau quantique, un halo sphérique de particule en orbite autour du trou noir se forme. Par ailleurs, si la masse de la particule se trouve entre $\mu_+(\ell - 1)$ et $\mu_+(\ell)$, les états liés apparaîtront avec une distribution angulaire principalement dictée par l'ordre multipolaire le plus bas dans lequel un puits de potentiel est présent. Dans l'exemple ci-dessus, elle sera donc dominée par l'harmonique sphérique d'ordre ℓ : $Y_m^\ell(\theta, \varphi)$. Afin de fixer les ordres de grandeurs pour que de tels phénomènes soient significatifs, le tableau 7.6 représente le rayon de Schwarzschild, la masse et la température que devrait avoir un trou noir afin que la masse de différents types de particules du modèle standard soit égale aux masses critiques $\mu_\pm$. Ces particules ne sont évidemment pas décrites par des champs scalaires mais leur masse permet de définir tout de même l'ordre de grandeur des caractéristiques des trous noirs pour lesquels l'effet de μ est, *a priori*, important. Enfin, les états liés seront décrit par des états quasi-stationnaires compte tenu de la barrière de potentiel finie à gauche du puits : ces états possèdent un temps de vie du fait de la probabilité tunnel non-nulle de traverser la barrière *à gauche* et d'être absorbé par le trou noir. La barrière de potentiel *à droite* est, quant à elle, infiniment épaisse et ne permet donc aucune transition tunnel vers $r \to +\infty$ qui limiterait le temps de vie des états quasi-stationnaires.

Les états liés vont jouer un rôle important durant le processus d'évaporation de Hawking. D'une part, la propagation des particules est influencée par la présence du terme de masse dans le potentiel, modifiant ainsi les facteurs de corps gris. D'autre part, une partie des particules émises à basse énergie va être piégée dans le puits : ces particules ne seront pas détectées par un observateur à l'infini et pourront formé un halo autour du trou noir si le temps de vie des états liés est suffisamment grand. Dans le même esprit qu'un halo QCD, ce halo pourrait modifier significativement les spectres d'émission, tels qu'ils seraient vus par un observateur à l'infini, à cause de l'interaction entre particules émises et particules du halo. Ce dernier point reste purement spéculatif car il nécessite l'existence d'états liés, donc un puits de potentiel suffisamment profond, avec un temps de vie élevé, c'est-à-dire une barrière *à gauche* suffisamment grande et/ou épaisse. Pour le cas $\ell = 0$, les deux masses critiques sont de l'ordre de grandeur de la température du trou noir :

$$\mu_- = \frac{8\pi}{\sqrt{27}} T_H \text{ et } \mu_+ = 2\pi T_H. \tag{7.121}$$

particules	$\mu = \mu_-$ pour $\ell = 0$			$\mu = \mu_+$ pour $\ell = 0$		
(type et masse)	r_H [fm]	M_{BH} [kg]	T_H [MeV]	r_H [fm]	M_{BH} [kg]	T_H [MeV]
electron $\mu = 511$ keV	140	9×10^{13}	0.1	190	1.2×10^{14}	0.08
muon $\mu = 105$ MeV	0.72	5×10^{11}	21.7	0.93	6×10^{11}	16.7
charm $\mu \simeq 1.2$ GeV	0.06	4×10^{10}	248	0.08	5×10^{10}	190
top $\mu \simeq 175$ GeV	4×10^{-4}	2.5×10^{8}	36×10^{3}	5.6×10^{-4}	3.7×10^{8}	28×10^{3}
W boson $\mu = 80$ GeV	9×10^{-4}	6×10^{8}	16×10^{3}	1.2×10^{-3}	8×10^{8}	12×10^{3}

TAB. 7.6 – Rayon de Schwarzschild, masse et température qu'un trou noir devrait avoir pour que la masse de différentes particules du modèle standard (électron, muon, charm, top et boson W) soit égales aux masses critiques $\mu_\pm$.

Ainsi, quand la température du trou noir devient légèrement supérieure à la masse de la particule, l'effet de μ, et plus particulièrement du puits de potentiel, est important. Il serait alors envisageable qu'un comportement particulier dans la dynamique d'évaporation apparaissent à chaque fois que la température du trou noir atteint une valeur dont une des deux masses critiques $\mu_\pm$ correspondantes soit égale à une masse de particule.

La première étape consiste donc à déterminer les caractéristiques, fréquences normales ω et largeur de bande Γ, des états liés. Ce calcul peut tout d'abord se faire à l'ordre semi-classique en appliquant la méthode utilisée dans le chapitre 5.2.2. Le spectre de fréquences des états liés dépendra de la valeur de μ. En particulier, le spectre sera infini si $\mu < \mu_-$ et fini si $\mu_- < \mu < \mu_+$. En effet, à l'ordre semi-classique, le spectre de fréquences est donné par la règle de Bohr-Sommerfeld :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{r_1(\omega)}^{r_2(\omega)} \sqrt{\omega^2 - V^2(r)}\frac{dr}{h(r)} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi. \tag{7.122}$$

La règle de quantification est ici écrite en fonction de la coordonnée radiale de Schwarzschild. Il est évident que la fréquence maximale autorisée pour un état lié est le plus petit des deux maxima du potentiel : la fréquence maximale sera donc μ pour $\mu < \mu_-$ et $V_{(max)} = V(r_-)$ pour $\mu > \mu_-$. Dans le deuxième cas, le membre de gauche est une intégrale dont les bornes sont finies et dont l'intégrand n'admet que des valeurs finies sur l'ensemble de l'intervalle d'intégration : le membre de gauche est donc fini et il existe un entier n_{max} au-delà duquel la règle de Bohr-Sommerfeld n'admet aucune solution en fréquence. Le spectre des états liés est alors fini et contient n_{max} états. Dans le cas où $\mu < \mu_-$, la borne d'intégration supérieure est alors $+\infty$ quand $\omega = \mu$. Or, dans le cas monopolaire, la fonction à intégrer se comporte comme r en $+\infty$. Ainsi le membre de gauche de la règle de Bohr-Sommerfeld tend vers l'infini quand $\omega \to \mu$ et n peut donc prendre une infinité de valeurs. Enfin, en effectuant le changement de variable $x = r/r_H$, l'équation cubique (7.111), dont les racines fournissent la position des points tournants r_1 et r_2, et la règle de Bohr-Sommerfeld (7.122) ne dépendent que de x et des paramètres réduits ωr_H et μr_H. Ainsi, le spectre en fréquence normales des résonances, en unités de r_H^{-1}, ne dépend que de μr_H et prend la forme suivante :

$$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{f_n(\mu r_H)}{r_H}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \tag{7.123}$$

f_n étant une fonction de la variable μr_H paramétrisée par l'entier n intervenant dans la règle de Bohr-Sommerfeld. Le tableau 7.7 compile un ensemble de résultats sur le spectre en fréquence

	$\mu = 0.25 \times \mu_+$					
n	0	1	2	3	4	5
ωr_H	$1.2456.10^{-1}$	$1.2491.10^{-1}$	$1.2496.10^{-1}$	$1.2498.10^{-1}$	$1.2498.10^{-1}$	$1.2499.10^{-1}$
Γr_H	$1.4871.10^{-2}$	$1.4938.10^{-2}$	$1.4947.10^{-2}$	$1.4950.10^{-2}$	$1.4951.10^{-2}$	$1.4952.10^{-2}$

	$\mu = \mu_-$					
n	0	1	2	3	4	5
ωr_H	$3.7468.10^{-1}$	$3.8262.10^{-1}$	$3.8395.10^{-1}$	$3.8439.10^{-1}$	$3.8458.10^{-1}$	$3.8468.10^{-1}$
Γr_H	$1.6853.10^{-1}$	$1.8697.10^{-1}$	$1.9017.10^{-1}$	$1.9121.10^{-1}$	$1.9168.10^{-1}$	$1.9192.10^{-1}$

	$\mu = 0.8 \times \mu_+$					
n	0	1	2	3	4	5
ωr_H	$3.8835.10^{-1}$	/	/	/	/	/
Γr_H	$1.9070.10^{-1}$	/	/	/	/	/

TAB. 7.7 – Spectre des fréquences normales ω et largeur de bande Γ en unités de r_H^{-1} trois valeurs différentes de la masse de la particules couvrant les cas $\mu < \mu_-$, $\mu = \mu_-$ et $\mu > \mu_-$. Les résultats sont à l'ordre semi-classique et la règle est résolue par méthode numérique.

et la largeur de bande des états liés à l'ordre monopolaire. La règle de Bohr-Sommerfeld est inversée numériquement pour fournir la valeur de ω et la largeur de bande est déterminée en appliquant la formule de [78] pour la probabilité tunnel. La valeur de la masse de la particule est fixée à trois valeurs différentes : $0.25 \times \mu_+$, ce qui est plus faible que μ_-, μ_- et $0.8 \times \mu_+$, ce qui est plus élevé que μ_-. Ces résultats préliminaires sont en accord avec l'analyse qualitative ci-dessus : le spectre semble infini pour $\mu < \mu_-$ (des niveaux jusqu'à $n = 25$ sont trouvés numériquement) alors qu'il devient fini pour $\mu > \mu_-$. D'un point de vue quantitatif, les résultats sont assez surprenants : pour $\mu = 0.8 \times \mu_+$, seul le niveau $n = 0$ existe puisque pour $n \geq 1$:

$$\int_{r_1(\mu)}^{r_2(\mu)} \sqrt{\mu^2 - V^2(r)} \frac{dr}{h(r)} < \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi. \tag{7.124}$$

Il semblerait que les états liés disparaissent très rapidement quand la masse du champ devient supérieure à μ_- puisqu'à l'ordre monopolaire $\mu_- \simeq 0.769\mu_+$.

L'influence d'un terme de masse sur la section efficace d'absorption de particules scalaires est importante : quand la longueur d'onde de la particule tend vers l'infini, la section efficace diverge [134]. Ce résultat, démontré analytiquement par des méthodes similaires à celles présentées dans ce chapitre, se comprend aisément en terme de potentiel. La section efficace d'absorption pour un observateur à l'infini prend la forme suivante [134] :

$$\sigma_g(\omega) = \sum_\ell \frac{\pi(2\ell + 1)}{k^2} |A_\ell|^2 , \tag{7.125}$$

où k est l'impulsion de la particule définie par $\omega^2 = k^2 + \mu^2$ et $|A_\ell|^2$ représente le coefficient de transmission. La définition de l'impulsion n'est ici valable que pour un observateur à l'infini du trou noir et ne concerne que les particules qui s'échappent définitivement de l'attraction du trou noir, *i.e.* dont la fréquence normal ω est supérieure à μ. A la différence des particules de masse nulle, la barrière de potentiel à traverser n'est plus infiniment épaisse quand $\omega \to \mu$ et le coefficient de transmission tend donc vers une valeur finie non-nulle dans cette limite basse énergie. Or, quand $\omega \to \mu$, k tend vers zéro et le rapport $|A_\ell|^2 / k^2$ diverge. Le calcul numérique de la section efficace d'absorption pour un observateur placé à l'infini spatial confirme

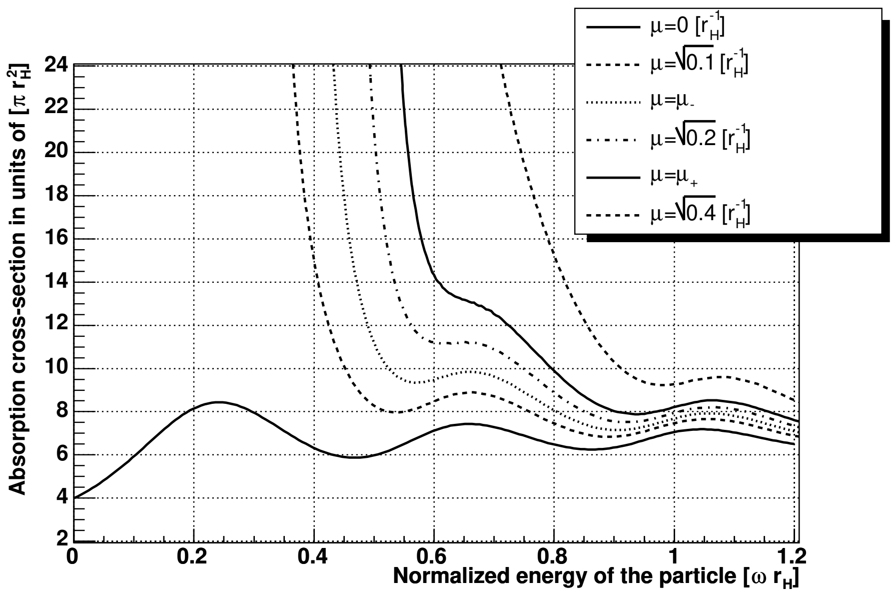


FIG. 7.25 – Section efficace d'absorption pour des particules scalaires massives en fonction de leur énergie à l'infini. La section efficace diverge bien quand $\omega \to \mu$ pour des masses non-nulles. La section efficace représentée ici est pour un observateur à l'infini : l'énergie ne peut donc pas être inférieure à l'énergie de masse car de telles particules seraient piégées dans le puits de potentiel proche du trou noir.

cette divergence *infra-rouge* dans le cas de particules massives. De plus, les particules ayant une fréquence normale inférieure à leur masse seront piégées dans le puits de potentiel et n'atteindront jamais l'infini. Ce calcul de section efficace doit aussi être mené pour le cas de particules dont la fréquence normale se trouve entre le minimum du puits de potentiel et l'énergie de masse de la particule : dans ce domaine énergétique, la section efficace présentera des résonances chaque fois que la fréquence normale correspond à une fréquence du spectre des états quasi-stationnaires.

7.4.3 Perspectives : thermodynamique des trous noirs

L'étude des trous noirs dans le cadre de la Relativité Générale a montré qu'il existe une très forte analogie entre les lois de la dynamique de ces objets et les principes fondamentaux de la thermodynamique. Cette analogie a conduit Bardeen, Carter et Hawking à postuler les principes de la thermodynamique des trous noirs. Erigées au rang de principes, les quatre lois de la thermodynamique des trous noirs sont alors invoquées dans des cadres théoriques qui vont bien au delà de la Relativité Générale, supposant donc que ces postulats sont vérifiés. Or, dans des cadres théoriques au delà de la théorie d'Einstein, rien ne prouve qu'ils le soient.

Le principe zéro, tout d'abord, stipule que la température est identique sur toute la surface du trou noir : la température d'un trou noir peut donc être déduite de la gravité de surface. Le premier principe, ensuite, nous donne la loi de variation de l'énergie interne en fonction de la variation d'entropie et la température : elle permet de donner une définition thermodynamique de l'entropie. Le second principe, dans sa version généralisée, indique que l'entropie d'un système contenant un trou noir ne peut qu'augmenter, aussi bien lors des processus classiques que lors des processus quantiques. Enfin, le troisième principe énonce qu'un trou noir ne peut totalement disparaître en un nombre fini d'opérations. Ce dernier peut être invoqué afin d'assurer la conservation de l'énergie lors du processus d'évaporation. Dans le cadre de Relativité

Générale, tous ces principes sont issus de certaines propriétés des trous noirs : par exemple, Hawking & Hartle ont montré que la gravité de surface donnait la température [59] et le second principe, à l'ordre classique, provient du théorème de l'aire.

Dans un cadre théorique au-delà de la Relativité Générale, il est nécessaire de vérifier que les quatre principes cités ci-dessus, du moins leur auto-cohérence, sont toujours vérifiés. En ce qui concerne le principe zéro, la démonstration de Hartle & Hawking [59] ne se limite pas au cas des trous noirs de Schwarzschild en Relativité Générale. Ainsi, la température d'un trou noir statique et à symétrie sphérique, et ce dans n'importe quelle théorie métrique de la gravitation, est donnée par la gravité de surface au niveau de l'horizon, la symétrie sphérique assurant de fait le principe zéro. Le premier principe, combiné avec le troisième, permet de définir l'entropie de manière thermodynamique :

$$S(M_{BH}) - S(0) = \int_0^{M_{BH}} \frac{dM}{T_H(M)}, \tag{7.126}$$

la valeur de l'entropie pour une masse nulle pouvant être fixée à zéro. Cette définition thermodynamique est la plus usitée et peut dévier de la loi des aires, *i.e.* $S \propto \mathcal{A}_{BH}$, comme cela est le cas en théorie de Gauss-Bonnet. Avec une telle définition de l'entropie, il devient indispensable, pour obtenir une auto-consistance de ces quatre principes, de s'assurer que le second est bien vérifé lors de processus classiques ou quantiques.

Processus classique

Lors des processus classiques, vérifier le second principe consiste à s'assurer, pour les trous noirs de Schwarzschild, que la variation d'entropie suit la variation de masse, puisque dans tout processus classique la masse du trou noir ne peut qu'augmenter. Il est alors nécessaire de vérifier que la quantité $\frac{dS}{dM_{BH}}$ reste positive. La définition thermodynamique assure cette relation puisque :

$$\frac{dS}{dM_{BH}} = \frac{1}{T_H}, \tag{7.127}$$

qui est bien positive par définition de la température. Pour des trous noirs ayant par exemple un moment angulaire et/ou une charge, il est alors nécessaire de s'assurer que la quantité $dS = \frac{\partial S}{\partial M_{BH}} dM_{BH} + \frac{\partial S}{\partial J_{BH}} dJ_{BH} + \frac{\partial S}{\partial Q_{BH}} dQ_{BH}$ reste positive.

Il s'agit bien là d'une approche thermodynamique dans laquelle la loi de l'aire, $S_{BH} \propto \mathcal{A}$, n'est pas nécessairement vérifiée. Cependant, dans le cadre de la Relativité Générale quadri-dimensionnelle, cette loi est bien vérifiée et il fut montré par S. Hawking que l'aire d'un trou noir ne peut qu'augmenter lors de tous processus classiques.

Processus quantique

Pour les processus quantiques, la question est plus délicate puisqu'il devient donc nécessaire de vérifier que la quantité d'entropie sous forme de rayonnement de corps gris émise par le trou noir reste supérieure à celle perdue par ce dernier lors de l'émission de quanta. Il faut alors reprendre les travaux de Zurek [71] et Page [72] dans le cadre de théorie au-delà de la Relativité Générale. Pour un tel calcul, la connaissance exacte des facteurs de corps gris devient alors indispensable.

La quantité d'entropie créée durant un temps dt est donnée par l'entropie d'un bain de particules dont la distribution statistique est la loi de radiation de Hawking. Elle peut être déterminée soit à partir d'un ensemble statistique [135], soit à partir de la matrice densité de chaque mode émis par le trou noir [72] :

$$\frac{dS_m}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i,\ell,m,s} \int_0^{\infty} d\omega \left\{ \frac{dN_{i,\ell,m,s}}{d\omega dt} \ln \left[\left(\frac{dN_{i,\ell,m,s}}{d\omega dt} \right)^{-1} \pm 1 \right] \pm \ln \left[1 \pm \frac{dN_{i,\ell,m,s}}{d\omega dt} \right] \right\}, \tag{7.128}$$

le signe $+(-)$ corespondant aux degrés de liberté bosoniques(fermioniques). La quantité $\frac{dN_{i,\ell,m,s}}{d\omega dt}$ est le spectre de radiation de la contribution d'ordre multipolaire ℓ et m et d'hélicité s d'un degrés de liberté i d'une particule du modèle standard. Cette quantité d'entropie est alors comparée à la quantité d'entropie perdue par le trou noir compte tenu de sa perte de masse. A partir de sa définition thermodynamique, l'entropie perdue vaut :

$$\frac{dS_{BH}}{dt} = \frac{1}{T_H}\frac{dM_{BH}}{dt}, \tag{7.129}$$

avec

$$\frac{dM_{BH}}{dt} = -\sum_{i,\ell,m,s}\int_0^\infty \hbar\omega \frac{dN_{i,\ell,m,s}}{d\omega dt}d\omega. \tag{7.130}$$

La somme sur tous les degrés de liberté angulaire ℓ, m peut être directement incluse dans le spectre :

$$\frac{dM_{BH}}{dt} = -\sum_{i,s}\int_0^\infty \hbar\omega \frac{dN_{i,s}}{d\omega dt}d\omega, \tag{7.131}$$

avec :

$$\frac{dN_{i,s}}{d\omega dt}d\omega = \frac{4\pi\sigma_g(\omega,s)\omega^2}{e^{\omega/T_H} - (-1)^{2s}}. \tag{7.132}$$

La connaissance des facteurs de corps gris est donc indispensable à la vérification du second principe et, compte tenu de leur forme numérique, implique une évaluation numérique des deux intégrales ci-dessus. Quantifier l'irréversibilité du mécanisme de Hawking est donc une application directe des résultats présentés dans les parties précédentes de ce mémoire.

Chapitre 8

Les trous noirs comme sonde de nouvelles physiques

Les spectres d'émission de trous noirs dépendant directement de la théorie de la gravitation sous-jacente, le processus de radiation de Hawking peut, en principe, être utilisé afin de sonder la structure de l'espace-temps à proximité d'un trou noir. Il ne faut cependant pas perdre de vue que ce processus, jusqu'à présent non-observé, n'est détectable que pour des trous noirs de petite taille. Utiliser le processus de radiation de Hawking n'est possible qu'en considérant des phénomènes impliquant des trous noirs microscopiques. La phénoménologie des modèles à dimensions supplémentaires *à la* ADD présente plusieurs situations dans lesquelles des trous noirs de petites tailles seraient formés, offrant, d'un point de vue expérimental, un double avantage : une détection du processus d'évaporation des trous noirs et un nouveau test de la Relativité Générale (sans oublier un prix Nobel).

De petits trous noirs ont également pu se former dans l'univers primordial, en conséquence de fluctuations de densité ou de processus exotiques. Ce point sera abordé ultérieurement.

La question de l'information concernant le lagrangien gravitationnel qui pourrait être extraite en observant le processus d'évaporation des trous noirs est considérée dans ce chapitre sous l'oeil des modèles à dimensions supplémentaires de type ADD. Les contraintes expérimentales sur ces modèles seront d'abord présentées [136, 137, 138]. Dans un deuxième temps, la possible production de trous noirs lors de collisions ultra-énergétiques de particules sera abordée. Dans un monde branaire avec une échelle de Planck au TeV, une telle production peut avoir lieu par interaction du rayonnement cosmique avec le milieu galactique ou atmosphérique ou bien par collision de protons dans le futur collisionneur du CERN. Finalement, je présenterai dans une troisième partie la production galactique et cosmologique de trous noirs microscopiques ainsi que leur possible signature expérimentale puis, dans une quatrième partie, la production au sein des collisonneurs ainsi que la possible détection d'un terme de Gauss-Bonnet ou bien d'une constante cosmologique dans le Lagrangien de la gravitation. Quelques pistes d'investigation sur la fin de vie des trous noirs seront aussi abordées dans cette dernière partie.

8.1 Les contraintes expérimentales actuelles

Dans les modèles de type ADD, l'interaction gravitationnelle observée est si faible car nous n'avons accès qu'à sa projection sur notre brane quadri-dimensionnelle : dans l'ensemble des dimensions supplémentaires, l'intensité de cette interaction peut être bien plus élevée. Dans ce scenario, l'échelle de Planck fondamentale D-dimensionnelle M_D, est alors abaissée et devient bien inférieure à l'échelle de Planck observée M_{Pl}, quadri-dimensionnelle. Ces modèles ayant été originellement introduits pour résoudre le problème de la hiérarchie, l'échelle fondamentale M_D est fixée à une valeur de l'ordre du TeV afin de s'approcher significativement de l'échelle electro-faible. Il s'agit d'une sorte de choix de « naturalité ». Une phénoménologie riche apparaît alors dans les processus d'énergie supérieure au TeV, que ce soit du point de vue de la physique des particules (échange de gravitons) que de celui de la gravitation (modification du potentiel newtonien, production de trous noirs). L'étude des différents phénomènes *typiquement* extra-dimensionnels permet dès à présent de tester la viabilité des scenarii ADD et fournir les premières contraintes. De plus, si les modèles ADD s'avèrent être une bonne description de la physique au delà du TeV, ils pourront être testés et fortement contraints dans un futur proche.

8.1.1 Contrainte de la pomme

L'échelle de Planck à D dimensions se lie à celle quadri-dimensionnelle de la manière suivante [50] :

$$M_D = \left(\frac{M_{Pl}^2}{V}\right)^{\frac{1}{D-2}}, \tag{8.1}$$

où V est le volume des dimensions supplémentaires. Si les dimensions supplémentaires ont une taille caractéristique R, leur volume est approximativement donné par $V \sim R^{D-4}$. En imposant M_D à être de l'ordre du TeV, M_{Pl} étant de l'ordre de 10^{19} GeV, il est possible de déterminer la taille caractéristique des dimensions supplémentaires selon leur nombre. Pour $D = 5$, R vaut 10^{13} cm, environ la taille du système solaire, et tombe directement à quelques centaines de micromètres pour $D = 6$. Or, à des échelles de longueur inférieures à R, les phénomènes gravitationnels sont sensibles à l'ensemble des dimensions et le potentiel gravitationnel newtonien n'est plus en $1/r$ mais en $1/r^{D-3}$. Compte tenu de la valeur de R pour $D = 5$, la dynamique du système solaire serait différente de celle observée puisqu'elle serait décrite par un potentiel en $1/r^{D-3}$, excluant de fait les modèles avec un nombre de dimensions égal à 5. Cependant, la loi de la gravitation de Newton n'a pas été testée en dessous de longueurs de quelques centaines de micromètres, ce qui rend les modèles ADD ayant un nombre de dimensions supérieur ou égal à 6 viables.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous ne considèrerons donc que des espaces-temps avec un nombre de dimensions au minimum égal à 6.

8.1.2 Contraintes provenant des collisionneurs

Les contraintes quant à la valeur de l'échelle de Planck à D dimensions obtenues auprès des collisionneurs proviennent essentiellement de la non-observation de l'émission de gravitons réels, *i.e.* de la radiation gravitationnelle, ou bien l'échange de gravitons virtuels, *i.e.* de processus de diffusion gravitationnelle.

Que ce soit l'émission directe de gravitons ou la diffusion gravitationnelle, l'interaction impliquant un graviton est supprimée par un facteur $1/M_{Pl}^2$ empêchant, *a priori*, l'observation de tels proscessus. Cependant dans les modèles ADD, tous les modes de Kaluza-Klein du graviton vont intervenir et leur grand nombre pourra compenser cette suppression. Le nombre de modes de Kaluza-Klein présent entre l'ordre n et $n + dn$, dont la masse vaut alors $m = n/R$, est :

$$dN = \Omega_{D-5} n^{D-5} dn, \tag{8.2}$$

avec Ω_{D-5} l'angle solide total dans un espace comptant $D - 4$ dimensions. L'approximation continue est justifiée si l'écart énergétique entre deux niveaux de Kaluza-Klein $\Delta m/m \sim n^{-1}$, donc pour les excitations élevées du graviton. Le nombre de Kaluza-Klein revient à calculer le nombre de modes avec une impulsion n présents dans les dimensions supplémentaires, qui forment un espace de dimensions $D - 4$. En supposant le spectre de Kaluza-Klein continu, le nombre de modes entre l'impulsion n et $n + dn$ est alors le volume élémentaire compris entre les deux hypersphères $(D-5)-$dimensionnelles de rayon n et $n+dn$, justifiant la formule (8.2). En remplaçant n par son expression en fonction de la masse du mode et R par son expression en fonction de M_D et M_{Pl}, le nombre de mode de Kaluza-Klein ayant une masse entre m et $m + dm$ devient :

$$dN = \Omega_{D-5} \frac{M_{Pl}^2}{M_D^{D-2}} m^{D-5} dm. \tag{8.3}$$

Les expériences auprès des collisionneurs mesurant des sections efficaces inclusives, l'ensemble des modes de Kaluza-Klein va alors jouer un rôle et le facteur M_{Pl}^2 compense exactement le facteur de suppression intervenant dans l'amplitude d'interaction.

Des recherches d'émission de gravitons réels ont été menées aux expériences L3, H1, aux expériences DELPHI, ALEPH et OPAL du collisionneur LEP et aux expériences D0 et CDF du Tevatron. L'expérience L3 fournit les contraintes les plus fortes en terme de limite inférieure sur la masse de Planck à D dimensions [139]. D'autre part, l'échange de gravitons virtuels a été recherché au sein des expériences ALEPH, DELPHI, L3, OPAL, H1 ainsi qu'aux expériences D0 et CDF. Parmi l'ensemble de ces expériences, les limites inférieures obtenues par la collaboration D0 [140, 160, 138] sont les plus contraignantes. Le tableau 8.1 résume l'ensemble des limites inférieures les plus élevées obtenues à l'aide des deux processus cités ci-dessus.

Emission de gravitons réels						
D	6	7	8	9	10	11
M_D (TeV)	2.3	1.5	1.2	0.91	0.76	0.65
Echange de gravitons virtuels						
D	6	7	8	9	10	11
M_D (TeV)	0.88	0.77	0.58	0.47	0.39	0.35

TAB. 8.1 – Limites inférieures quant à la masse de Planck D-dimensionnelle obtenue par la non-observation d'émission ou d'échange de gravitons auprès de collisionneurs comme LEP ou le Tevatron (d'après [136]).

8.1.3 Contraintes astrophysiques et cosmologiques

Dans le cadre des modèles ADD, des gravitons de Kaluza-Klein vont être présents dans l'univers et donc modifier l'évolution de certains objets astrophysiques ainsi que le scenario cosmologique. Ces modifications, pouvant être significatives ou non, permettent elles aussi d'apporter un certain nombre de contraintes sur les scenarii ADD.

Premièrement, les supernovae vont perdre de l'énergie par émission de gravitons de Kaluza-Klein via des réactions du type $\gamma\gamma \to GG$ ou $e^+e^- \to GG$. En imposant que cette nouvelle perte d'énergie ne soit pas importante au point de modifier l'évolution observée, les limites suivantes ont pu être déterminées [141, 143] :

$$M_D \geq 26.5 - 188 \text{ TeV} \quad \text{pour} \quad D = 6, \tag{8.4}$$

$$M_D \geq 2.1 - 13 \text{ TeV} \quad \text{pour} \quad D = 7. \tag{8.5}$$

Les étoiles à neutrons font aussi partie des objets astrophysiques permettant de sonder les scenarii extra-dimensionnels. Les gravitons de Kaluza-Klein se désintégrant en photons, électrons, positons et neutrinos à proximité de ces objets compacts, il est nécessaire que ces produits de désintégration, en venant frapper l'étoile, ne l'échauffent pas de manière excessive. Les limites inférieures obtenues à l'aide de ces contraintes sont les suivantes [142, 143] :

$$M_D \geq 1100 - 3600 \text{ TeV} \quad \text{pour} \quad D = 6, \tag{8.6}$$
$$M_D \geq 19 - 190 \text{ TeV} \quad \text{pour} \quad D = 7. \tag{8.7}$$

D'autres contraintes peuvent être obtenues à l'aide du rayonnement de fond gamma : les gravitons de Kaluza-Klein présents dans l'univers vont se désintégrer en particules du modèle standard qui contribueront au rayonnement cosmique. En particulier, ils se désintègreront en photons γ et il est indispensable que leur contribution au rayonnement de fond n'excède pas l'observation. A partir des mesures de ce fond gamma entre 800 keV et 30 MeV, les limites inférieures suivantes ont pu être dérivées [144] :

$$M_D \geq 210 - 660 \text{ TeV} \quad \text{pour} \quad D = 6, \tag{8.8}$$
$$M_D \geq 8.3 - 22.9 \text{ TeV} \quad \text{pour} \quad D = 7. \tag{8.9}$$

De plus, la production de gravitons de Kaluza-Klein dans l'Univers primordial aboutirait à un découplage matière-rayonnement qui aurait lieu beaucoup plus tôt, ne permettant pas l'observation d'un Univers tel que nous le voyons. Ce phénomène a permis de placer de nouvelles limites sur M_D [145] :

$$M_D \geq 161 - 1900 \text{ TeV} \quad \text{pour} \quad D = 6, \tag{8.10}$$
$$M_D \geq 12 - 98 \text{ TeV} \quad \text{pour} \quad D = 7, \tag{8.11}$$
$$M_D \geq 2.3 - 14 \text{ TeV} \quad \text{pour} \quad D = 8. \tag{8.12}$$

Finalement, si l'Univers s'avèrait présenter une échelle de Planck au TeV alors, et comme il le sera vu plus tard, des trous noirs microscopiques seraient formés lors de collisions ultra-énergétiques de particules. Ces collisions pourraient avoir lieu lors de la pénétration de rayons cosmiques d'énergie extrême dans l'atmosphère terrestre. Ainsi des trous noirs microscopiques seraient produits dans l'atmosphère et pourraient, ou auraient dû, selon la valeur de M_D, être observés. La non-observation de ce phénomène conduit à une limite inférieure quant à l'échelle de Planck à D dimensions qui est, à l'aide des données d'AGASA :

$$M_D \geq 1.1 - 1.2 \text{ TeV} \quad \text{pour} \quad D = 9, \tag{8.13}$$
$$M_D \geq 1.1 - 1.3 \text{ TeV} \quad \text{pour} \quad D = 10, \tag{8.14}$$
$$M_D \geq 1.2 - 1.3 \text{ TeV} \quad \text{pour} \quad D = 11. \tag{8.15}$$

8.1.4 En résumé

Dans le cadre des scenarii ADD, et sous certaines hypothèses concernant le profil de la géométrie extra-dimensionnelle [146], l'ensemble des contraintes présentées ci-dessus amènent aux conclusions suivantes :

- le cas $D = 5$ est d'ores et déjà exclu ;
- le cas $D = 6$, bien que n'étant pas exclu, et même si les arguments de naturalité restent délicats à manipuler, semble difficile à mettre en œuvre afin de résoudre le problème de la hiérarchie ;
- les cas où $D \geq 8$ sont très peu contraints, l'échelle de Planck pouvant descendre au TeV, offrant un vaste panel phénoménologique accessible dans les années à venir ;
- ce sont les données astrophysiques et cosmologiques qui sont les plus contraignantes[1].

8.2 Production de trou noir à l'échelle du TeV

Comment un trou noir peut-il se former ? Quel que soit le mécanisme de formation, une condition suffisante consiste à confiner une énergie E dans une région de taille maximale égale

[1] 14 TeV c'est *peanut* pour l'univers primordial.

au rayon de Schwarzschild $r_H(E)$ associé à cette énergie, par exemple $r_H = 2E$ dans le cas de la Relativité Générale. Ainsi, un trou noir peut être formé si, lors d'une collision de deux particules, cette condition se réalise [147]. La formation de trous noirs par collisions de particules ne peut donc vraisemblablement être observée que dans les modèles ADD, l'échelle de Planck étant abaissée jusqu'au TeV.

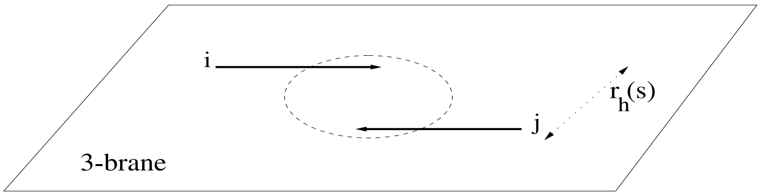


FIG. 8.1 – Schéma représentant la production d'un trou noir lors de la collision trans-planckienne de deux particules élémentaires i et j (d'après [159]).

La collision classique de deux particules élémentaires avec une énergie E dans le centre de masse est schématisée sur la figure 8.1 : un trou noir de masse E va se former si le paramètre d'impact est inférieur au rayon de Schwarzschild associé à E. Cette condition permet de définir géométriquement la section efficace de production :

$$\sigma = \pi r_H^2(E). \tag{8.16}$$

Dans cette équation, la dépendance en énergie est implicite via le rayon de Schwarzschild et cette forme est conservée car le lien entre r_H et E va dépendre de la théorie de la gravitation sous-jacente. Cette approche reste cependant très approximative, du moins dans son principe, et repose sur une vision classique de la collision impliquant $\sqrt{s} >> M_D$. Une approche plus rigoureuse, mais toujours classique, consiste à estimer si un horizon d'évènements apparaît ou non lors de la collision. Cela nécessite d'une part de décrire les particules sous le regard de la Relativité Générale et d'autre part, de rechercher les conditions de formation de cet horizon. Ce calcul, tout d'abord mené par Penrose [148] et D'Eath & Payne [149, 150, 151] dans le cas d'un paramètre d'impact nul, a été plus intensément étudié depuis la proposition des modèles ADD, en particulier par Giddings & Eardley [152], Yoshino & Nambu [153] et Yoshino & Rychkov [154]. Malgré ces nombreuses études, et bien qu'une certaine convergence dans les résultats émerge, la question n'est pas encore tranchée et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les calculs cherchent à démontrer l'apparition d'un horizon apparent, qui est une condition suffisante pour qu'un horizon d'évènements apparaisse. Ainsi, les sections efficaces déterminées peuvent être vues comme des limites inférieures. Deuxièmement, les pertes d'énergie sous forme d'ondes gravitationnelles doivent être prises en compte, compliquant la situation. Troisièmement, les corrections quantiques sont, en principe, à prendre en compte, même si ces corrections devraient devenir rapidement négligeables en s'éloignant de l'échelle de Planck. Finalement, et cet argument est sûrement le plus fort, les calculs sont tout simplement affreusement compliqués imposant un certain nombre de simplifications. Retenons seulement que, bien qu'il soit encore argumenté que certains facteurs de suppression quantique puissent apparaître, l'approximation géométrique mentionnée ci-dessus fournit un excellent ordre de grandeur quant à la valeur de la section efficace de production de trous noirs. Dans une approche phénoménologique, la section efficace de production peut donc être prise de la forme suivante [152] :

$$\sigma = \pi r_H^2(E) F(E), \tag{8.17}$$

la fonction F permettant de prendre en compte les raffinements du calcul ainsi que des éventuels facteurs de suppression ou d'amplification. Dans la suite, la section efficace géométrique sera considérée comme une approximation suffisante qui pourra être uniformément supprimée sur l'ensemble du spectre de masse en vue d'une prise en compte d'effet inélastique.

Si les modèles ADD se trouvent être une bonne description de la physique au delà de l'échelle du TeV, quelles seront les situations où les collisions de particules seront suffisamment énergétiques pour produire des trous noirs ? Nous pouvons penser tout d'abord au rayonnement cosmique d'énergie extrême, constituant une source de particules dont l'interaction avec les noyaux de l'atmosphère [155, 156, 157, 158] ou du milieu interstellaire [161] est suffisamment énergétique. Il existe une seconde possibilité : l'énergie dans le centre de masse des collisions proton/proton du futur accélérateur du CERN, le LHC, étant de 14 TeV, des trous noirs pourraient être formés auprès de cet instrument dans un futur proche [159, 160]. Que ce soit dans le cas de l'interaction du rayonnement cosmique ou au sein du LHC, les collisions mentionnées impliquent des particules composites que sont les hadrons. La section efficace de production des trous noirs lors de ces réactions est donc obtenue en convoluant la section efficace de production de trous noirs, appelée partonique, avec les fonctions de distribution des quark et gluons présents dans les hadrons interagissants. En supposant que la collision ait lieu entre deux protons, ce qui sera le cas pour les collisions au LHC, et la situation dominante pour l'interaction entre rayonnement cosmique et milieu interstellaire, la section efficace différentielle de la réaction $pp \to BH + X$ est déterminée en utilisant l'approche de la luminosité partonique [160] :

$$\frac{d\sigma}{dM_{BH}}(pp \to BH + X) = \sum_{a,b} \pi r_H^2(M_{BH}) \frac{2M_{BH}}{s} \int_{\frac{M_{BH}^2}{s}}^{1} f_a(x_a) f_b(\frac{M_{BH}^2}{s x_a}) \frac{dx_a}{x_a}, \tag{8.18}$$

$f_i(x_i)$ étant la fonction de distribution du parton (PDF) i ayant la fraction d'impulsion x_i et $\sqrt{s}$ est l'énergie dans le centre de masse proton/proton. La partie géométrique πr_H^2 correspond à l'interaction entre les deux partons a et b tandis que la partie intégrale correspond à la luminosité partonique de la collision ayant une énergie à la masse M_{BH}. La section efficace différentielle dans le cas d'une collision proton/proton au LHC, $\sqrt{s} = 14$ TeV, est représentée sur la figure 8.2 en fonction de la masse du trou noir formé (d'après [160]). Cette expression de la section efficace s'avère extrêment utile car les PDF impliquées peuvent facilement être ré-échelonnées pour des énergies de centre de masses différentes de 14 TeV, celles-ci ne dépendant que du rapport $M_{BH}/\sqrt{s}$. Ainsi, la section efficace de production pour des collisions proton/proton avec une énergie dans le centre de masse différente de celle du LHC peuvent aisément se déduire des sections efficaces dérivées dans la référence [160] dans le cas du LHC.

8.3 Contraintes astrophysiques [161]

Même si la possible production de trous noirs microscopiques auprès des futurs grands collisionneurs de particules ou bien par interaction de rayons cosmiques avec l'atmosphère soit le processus privilégié pour la détection d'un tel phénomène, il existe pourtant d'autres situations dans l'Univers où de tels trous noirs seraient formés. D'une part, la collision de rayons cosmiques d'ultra-haute énergie sur les atomes du milieu interstellaire de la Voie Lactée devrait conduire à une production non négligeable de trous noirs. D'autre part, lors de sa phase primordiale, l'univers atteint des températures considérables conduisant potentiellement à une production thermique de trous noirs microscopiques. Ces deux processus entraîneront une sur-production de particules via l'évaporation des trous noirs ainsi formés, pouvant éventuellement conduire à de nouvelles contraintes sur les modèles ADD.

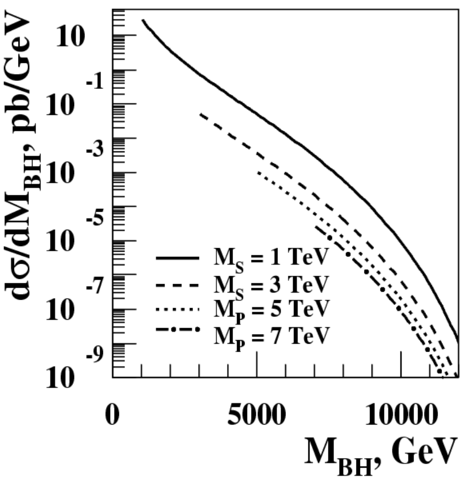


FIG. 8.2 – Section efficace différentielle pour la réaction $pp \to BH + X$ obtenue pour une collison ayant lieu au LHC d'énergie dans le centre de masse proton/proton égale à 14 TeV (d'après [160]).

8.3.1 Production galactique et rayonnement cosmique

Taux de production des trous noirs

Le nombre de trous noirs formés par unité de temps et par unité de volume s'obtient en intégrant, sur le domaine énergétique permettant d'avoir une énergie de collison supérieure à l'échelle de Planck, les interactions entre les rayons cosmiques et les atomes de milieu interstellaire :

$$\frac{dN_{BH}}{dtdVdM_{BH}} = \int_{M_D^2/2M_{Pl}}^{\infty} 4\pi\phi(E_{CR}) n_{ISM} \frac{d\sigma}{dM_{BH}} (M_{BH}, E_{CR})\, dE_{CR}, \tag{8.19}$$

$\phi(E_{CR})$ représentant le flux de rayons cosmiques, $d\sigma/dM_{BH}$ la section efficace différentielle de production de trous noirs à la masse M_{BH} et n_{ISM} la densité du milieu interstellaire. Nous supposerons que ce milieu est composé à 90 % d'hydrogène et à 10 % d'hélium. Nous intéressant à un phénomène moyen sur l'ensemble de la galaxie, nous pouvons prendre pour la densité du milieu interstellaire la valeur suivante $n_{ISM} \simeq 1.3$ cm^{-3}. Pour une échelle de Planck à 1 TeV, l'énergie minimale d'intégration pour obtenir l'énergie suffisante dans le centre de masse est alors de 5.5×10^{14} GeV. Les rayons cosmiques concernés seront ceux d'énergie au-delà du genou, le point où le spectre inclusif de rayonnement cosmique, globalement donné par une loi de puissance, s'adoucit. Le flux de rayons cosmiques sera alors évalué à l'aide des données de l'expérience KASKADE [162], prenant en compte les contributions des atomes d'hydrogène, d'hélium, de carbone, de silice et de fer. Finalement, la section efficace différentielle de production de trous noirs est obtenue par la méthode mentionnée dans le chapitre précédent en convoluant la section efficace géométrique parton-parton avec les fonctions de distribution partoniques. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau 8.2 où la fréquence de production de trous noirs dans la Voie Lactée ainsi que leur température à différentes masses sont représentées pour deux valeurs de l'échelle de Planck à D dimensions et deux valeurs du nombre de dimensions.

Il est clairement établi, au vu des résultats du tableau 8.2, que le taux de production de trous noirs reste assez faible, et ce compte tenu du faible flux de rayons cosmiques dans le domaine énergétique allant du PeV au EeV. Cependant, en ramenant ce taux de production à la taille de la Voie Lactée $V \simeq 10^{60}$ m^3, la fréquence de production de trous noirs microscopiques dans l'ensemble de la Voie Lactée atteint environ 10^{19} s^{-1} pour une échelle de Planck à 1 TeV. Il faut

M_D (TeV)	M_{BH} (GeV)	$\frac{dN_{BH}}{dtdVdM_{BH}}$ (GeV^{-1}.s^{-1}.m^{-3})	D	T_H (GeV)
1	M_D	10^{-41}	11	434
			6	172
	$10M_D$	10^{-45}	11	325
			6	80
	$100M_D$	10^{-50}	11	244
			6	37
10	M_D	10^{-45}	11	4340
			6	1725
	$10M_D$	10^{-50}	11	3258
			6	800
	$100M_D$	10^{-55}	11	2443
			6	371

TAB. 8.2 – Fréquence de production de trous noirs dans la Voie Lactée ainsi que leur température à différentes masses pour deux valeurs de l'échelle de Planck à D dimensions 1 TeV et 10 TeV et deux valeurs du nombre de dimensions 6 et 11.

aussi remarquer que, la section efficace de production $p+p \to BH$ décroissant rapidement avec la masse du trou noir, ce taux de production est très sensible à la masse du trou noir formé. Ce taux de production dépend aussi, en principe, du nombre total de dimensions. Cependant, cette dépendance marginale n'est pas mentionnée dans le tableau 8.2 car inférieure aux incertitudes introduites dans le calcul.

Emission d'antiprotons

Puisque des trous noirs microscopiques sont potentiellement formés dans notre galaxie, leurs produits de désintégration vont contribuer au rayonnement cosmique. Pour étudier les conséquences phénoménologiques de ce processus, nous nous focaliserons sur le spectre d'antiprotons pour les raisons suivantes : ce spectre est à la fois bien connu, tant d'un point de vue expérimental que théorique, et très petit comparé au flux de protons ($\bar{p}/p \simeq 10^{-5}$). Ce flux d'antiprotons, représenté sur la figure 8.3, ayant une origine secondaire provenant de la spallation des rayons cosmiques primaires sur le milieu interstellaire [163] (principalement les collisions protons/protons), il est indispensable que la contribution d'antiprotons d'origine primaire, comme ceux venant de l'évaporation de trous noirs, soit extrêmement faible afin de ne pas excéder le flux observé.

Le flux d'antiprotons primaires s'obtient en convoluant le flux d'antiprotons provenant d'un unique trou noir avec le spectre de masse des trous noirs présents dans notre galaxie :

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\bar{p}}}{dtdVdE_{\bar{p}}} &= \int_{M_D}^{\infty}\int_{M_D^2/2M_{Pl}}^{\infty} \phi(E_{CR}) n_{ISM} \frac{d\sigma}{dM_{BH}}(M_{BH}, E_{CR}) \\ &\quad \times \frac{dN_{\bar{p}}}{dE_{\bar{p}}}(E_{\bar{p}}, M_{BH}, E_{CR})\, dE_{CR} dM_{BH}, \end{aligned} \tag{8.20}$$

la quantité $dN_{\bar{p}}/dE_{\bar{p}}$ représentant le nombre d'antiprotons émis par un unique trou noir durant son temps de vie. Ce flux élémentaire se déduit de la loi de radiation de Hawking pour des trous noirs à D dimensions intégrée sur le temps de vie. Cependant, les trous noirs formés par collision de particules sur le milieu interstellaire sont extrêmement chauds et ils émettront directement des quarks et des gluons qui s'hadroniseront : le flux élémentaire est alors donné par la convolution de la loi de radiation de Hawking pour tous les degrés de liberté QCD avec les fonctions de fragmentation de ces derniers, le tout intégré sur le temps de vie du trou noir. Une simplification est tout de même faisable : les trous noirs étant très chauds, il peut être considéré

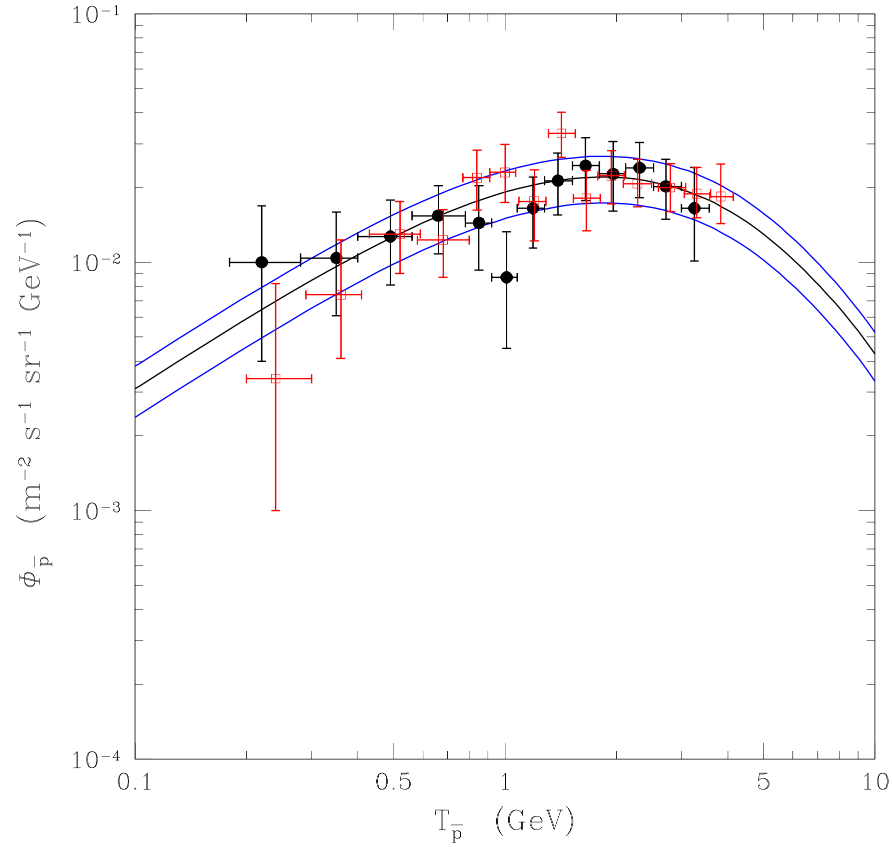


FIG. 8.3 – Flux d'antiprotons contenus dans le rayonnement cosmique. Les points représentent les données expérimentales et les courbes la prédiction théorique avec ses incertitudes, les antiprotons étant supposés d'origine secondaire. La figure provient de la référence [163].

que durant leur temps de vie très bref (de l'ordre de 10^{-27} s pour un trou noir de 5 TeV, une échelle de Planck de 1 TeV et un nombre de dimensions égal à 10), aucune thermalisation n'est possible. Ainsi, le nombre moyen de degrés de liberté QCD émis par un trou noir, initialement à la masse M_{BH} et à la température T_H, est alors le suivant :

$$N_{QCD}(M_{BH}) = \sum_i N_i \frac{M_{BH}}{2T_H}, \tag{8.21}$$

en supposant que fermions et bosons sont tous deux décrits par une statistique de Boltzmann. Cette approximation est possible puisque QCD de fonde à la fois sur des bosons (gluons) et des fermions (quarks). En effectuant un calcul exact, le facteur 2 intervenant dans l'équation ci-dessus serait remplacé par un facteur 1/0.46 pour des fermions et 1/0.68 pour des bosons. Plutôt que de prendre en compte l'ensemble du spectre d'émission, nous considérerons que chaque quanta est émis, dans le référentiel où le trou noir est au repos, avec une énergie égale à la température du trou noir, le nombre de quanta émis étant donné par le nombre moyen dérivé ci-dessus. En appelant $dg_i/dE_{\bar{p}}$ la fonction de fragmentation pour le degré de liberté QCD i, le flux d'antiprotons primaires sera donné par l'expression suivante :

$$
\begin{aligned}
\frac{dN_{\bar{p}}}{dtdVdE_{\bar{p}}} &= \int_{M_D}^{\infty}\int_{M_D^2/2M_{Pl}}^{\infty}\sum_i \phi(E_{CR})n_{ISM}\frac{d\sigma}{dM_{BH}}(M_{BH},E_{CR}) \\
&\quad\times\left(\frac{M_{BH}}{2T_H}\right)\frac{dg_i}{dE_{\bar{p}}}(E_{\bar{p}},M_{BH},E_{CR})\,dE_{CR}dM_{BH}.
\end{aligned} \tag{8.22}
$$

La fonction de fragmentation dépend de l'énergie du rayon cosmique impliqué dans la collision originelle puisque le trou noir formé n'est pas au repos : il est nécessaire de prendre en compte le boost de Lorentz dans l'énergie du quark ou gluon émis par le trou noir. Les quanta QCD émis auront donc une énergie s'étalant de $E_{min} = \gamma_{BH}T_H(1-\beta_{BH})$ à $E_{min} = \gamma_{BH}T_H(1+\beta_{BH})$ selon la direction du quanta émis par rapport à celle du trou noir. La figure 8.4, représentant la fonction de fragmentation en antiprotons pour un quark u à 200 GeV émis par un trou noir produit par un rayon cosmique à 10^8 GeV, à la fois dans le référentiel du trou noir et dans le référentiel galactique, illustre l'importance du boost relativiste quant à la distribution énergétique des antiprotons. Les fonctions de fragmentation sont déterminées à l'aide du simulateur Monte-Carlo PYTHIA [164] qui se base sur le modèle des cordes de couleur de Lund.

Flux attendu d'antiprotons

Une fois les antiprotons émis par les trous noirs, ils se propageront dans la Voie Lactée avant d'atteindre notre système solaire. Cette propagation est modélisée par un système à deux zones [163, 165] : la Voie Lactée est décrite par un cylindre dans lequel se trouvent les sources, ici les trous noirs, entouré de part et d'autre d'un halo diffusif dans lequel les rayons cosmiques subissent un mouvement aléatoire dû à la diffusion sur les irrégularités du champ magnétique. Cette approche est résumée dans le schéma montré en figure 8.5. Il est aussi pris en compte, dans ce modèle, un vent convectif provenant de la galaxie. Les paramètres libres sont au nombre de cinq : K_0, δ décrivant le coefficient de diffusion ($K(E) = K_0\beta R^\delta$), la taille du halo diffusive L, la vitesse des vents convectifs V_C et la vitesse des ondes d'Alfven V_a. Ces cinq paramètres ont été fortement étudiés et contraints grâce à une étude exhaustive [165] des données de rayonnement cosmique et nous avons choisi de les fixer à leur valeur moyenne autorisée. Le spectre d'antiprotons initialement émis est de plus modifié par des gains d'énergie par ré-accélération diffusive ainsi que par des pertes lors d'interactions inélastiques, mais non-annihilantes, sur le milieu interstellaire. Le traitement de ce dernier effet, faisant intervenir une équation intégro-différentielle, est étudié dans la référence [166] et aboutit à une composante dite tertiaire. Afin de mettre en place cette propagation dans notre galaxie, nous avons eu accès au programme de résolution numérique de la propagation développé par les auteurs des références [163, 165] dans lequel les trous noirs microscopiques produits dans la Voie Lactée constitueront une source primaire d'antiprotons. Une description approfondie de ce modèle de propagation et de la méthode utilisée pour résoudre l'équation de diffusion qui en découle se trouve dans la référence [167]. Mentionnons simplement que les cinq paramètres libres du modèle de diffusion sont contraints à l'aide du rapport bore sur carbone (B/C) et conduisent à une excellente estimation du flux d'antiprotons secondaires, les erreurs dues aux dégénérescences sur les paramètres étant inférieures aux incertitudes des mesures. Les incertitudes théoriques sur le flux d'antiprotons secondaires restent petites car l'origine de ces rayons cosmiques se trouve dans le disque galactique, tout comme pour le bore et le carbone : ils suivent le même trajet diffusif. En ce qui concerne les antiprotons primaires que nous considérons ici, nous pouvons aussi nous attendre à ce que l'intervalle autorisé sur les cinq paramètres libres entraîne une faible incertitude sur les flux car les trous noirs micorscopiques sont eux aussi localisés dans le disque galactique.

La figure 8.6 représente le flux d'antiprotons primaires provenant de l'évaporation des trous noirs microscopiques formés dans notre galaxie aussi bien au niveau interstellaire, noté IS, qu'au niveau de l'atmosphère terrestre, noté TOA pour *top of atmosphere*. Une possible inélasticité

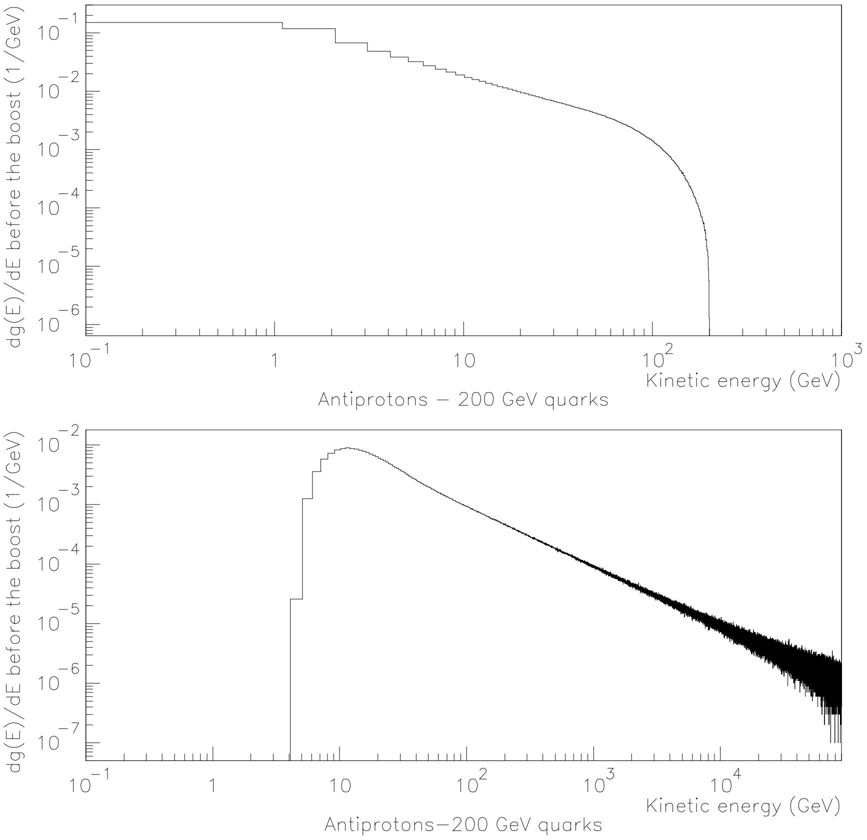


FIG. 8.4 – Fonction de fragmentation en antiprotons pour un quark u à 200 GeV émis par un trou noir produit par un rayon cosmique à 10^8 GeV en fonction de l'énergie de l'antiproton. *Haut :* allure dans le référentiel du trou noir. *Bas :* allure dans le référentiel galactique.

dans la production de trous noirs est aussi prise en compte comme une simple baisse de la normalisation de la section efficace différentielle de production de trous noirs. Dans chaque cas étudié, les flux se trouvent dans une bande d'incertitude théorique, délimitée par les courbes en tiret, correspondant à l'ensemble des valeurs des cinq paramètres astrophysiques autorisées afin d'être en accord avec les données de rayonnement cosmique. Les flux TOA sont inférieurs aux flux IS à basse énergie pour finalement converger à haute énergie, ce comportement provenant de la modulation solaire qui limite l'entrée dans le système solaire des particules de basse énergie. Il est clair, vu les flux obtenus, que la production d'antiprotons primaires est largement inférieure à celle d'antiprotons secondaires. Ceci provient essentiellement de ce que la section efficace de production de trous noirs, pourtant élevée, reste bien inférieure à la section efficace de production d'antiprotons par collison proton/proton au-dessus du seuil. En effet la section efficace de production de trous noirs est de l'ordre de quelques centaines de picobarns tandis que la section efficace totale pp est d'une centaine de millibarn avec une multiplicité en antiprotons proche de l'unité à 1 TeV. Bien que le flux primaire reste nettement inférieur au flux secondaire entre 0.1 GeV et 100 GeV, le spectre primaire à haute énergie est cependant plus dur. Ce résultat est la conséquence du boost relativiste appliqué aux fonctions de fragmentation devenant ainsi plus dures et se reflétant dans le spectre final à haute énergie. Ainsi,

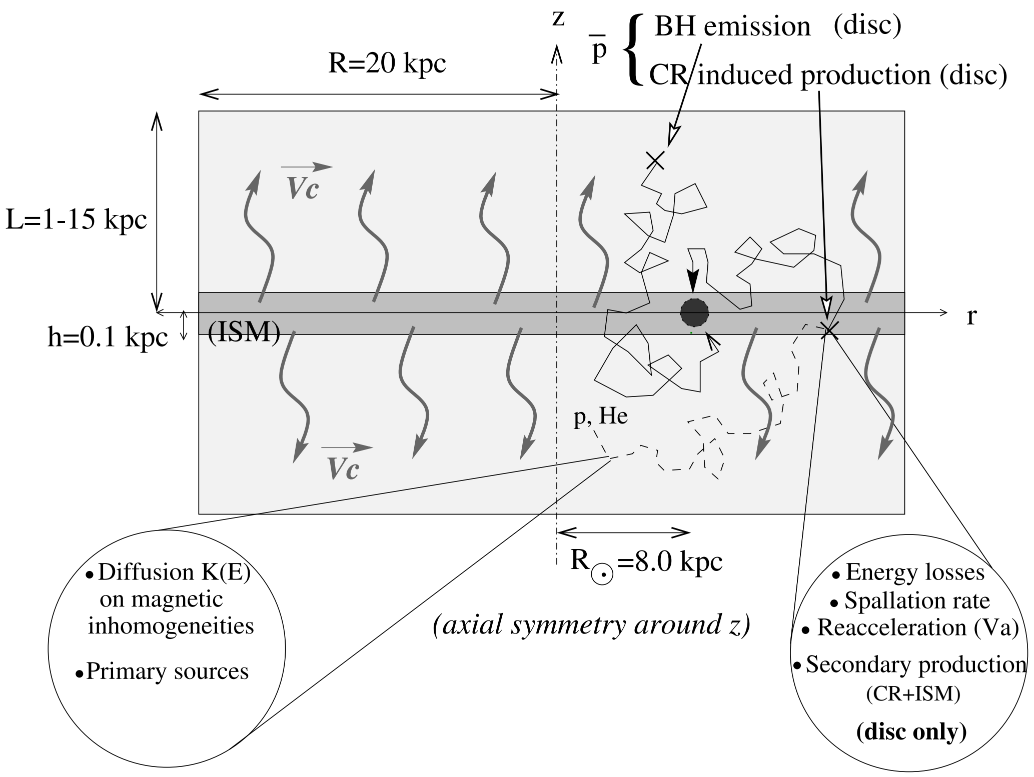


FIG. 8.5 – Représentation schématique du modèle de diffusion à deux zones. Schéma réalisé par D. Maurin [167].

compte tenu des pentes des flux primaires et secondaires (qui reflètent les spectres sources car les fonctions de fragmentation sont plus piquées et agissent comme des distributions de Dirac dans les convolutions), les antiprotons provenant de l'évaporation de trous noirs microscopiques devraient devenir dominants pour des énergies supérieures à 4×10^{10}GeV. Cette caractéristique, bien qu'extrêmement interessante en vue d'une preuve expérimentale d'une échelle de Planck au TeV, implique malheureusement des énergies bien au delà du domaine accessible à l'observation, qui est actuellement de l'ordre de la centaine de GeV pour les antiprotons. Bien que ce résultat n'offre pas de potentiel d'exclusion de régions de l'espace des paramètres des modèles ADD, il assure que la phénoménologie des trous noirs dans de tels scénarii est comptatible avec les observations de rayonnement cosmique.

Etude avec l'émission de photons

Les trous noirs formés par collisions ultra-énergétiques dans la galaxie ne vont pas s'évaporer en émettant uniquement des antiprotons et, parmi l'ensemble des particules émises par ces objets, les photons gamma offrent eux aussi un moyen d'exploration de la phénoménologie des modèles ADD en requérant, tout comme pour les antiprotons, que le flux de gammas issus des trous noirs en évaporation n'excède pas le fond. Lors du processus de radiation, les photons gamma auront une double origine : une émission directe via les fluctuations des degrés de liberté électromagnétiques et une émission indirecte via la désintégration de pions neutres lors de la fragmentation des degrés de liberté QCD. Compte tenu du grand nombre de degrés de liberté QCD, en comparaison au nombre de degrés de liberté électromagnétique, l'émission indirecte de photons sera le processus dominant. Et, puisqu'un grand nombre de pions sont

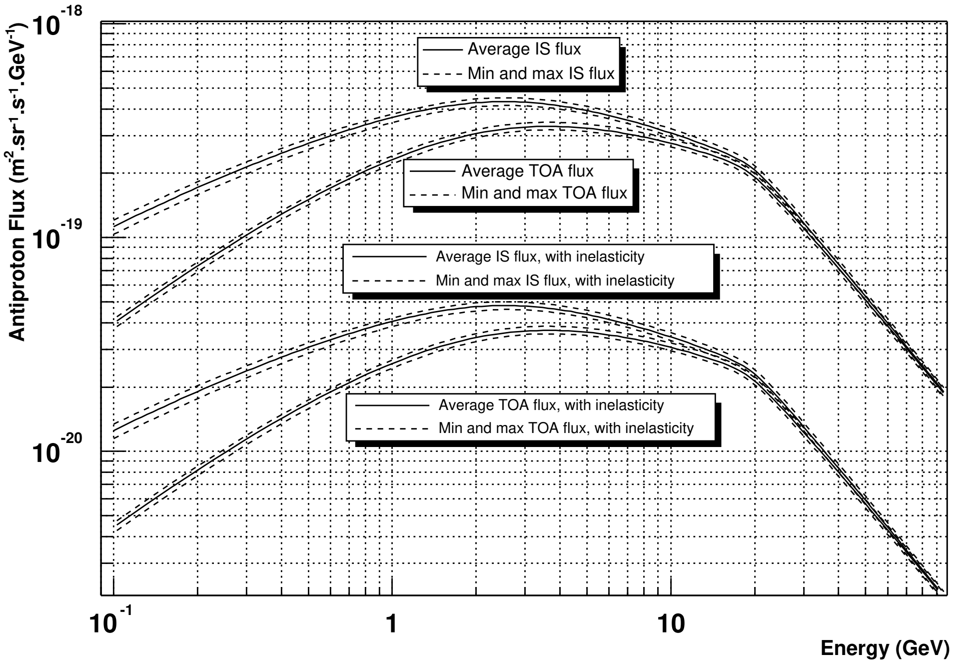


FIG. 8.6 – Flux d'antiprotons primaires IS et TOA (voir texte pour les notations) en fonction de l'énergie en GeV sans inélasticité dans la production de trous noirs (courbes du haut) et avec inélasticité (courbes du bas). Ces flux sont représentés par une bande délimitée par les courbes en tirets correspondant aux incertitudes théoriques du modèle de propagation.

produits lors du processus d'hadronisation des quarks et des gluons, l'émission de photons gamma sera bien plus importante que celle d'antiprotons. Cependant, le fond gamma est, lui aussi, bien plus important que le “fond” d'antiprotons secondaires. Le flux de photons gamma émis par les trous noirs microscopiques a été évalué de manière identique au flux d'antiprotons. En particulier, le générateur PYTHIA [164] a été utilisé pour le processus de fragmentation et le spectre de photons obtenu boosté par transformation de Lorentz. A la différence des antiprotons, les photons se propagent en ligne droite, aucun modèle de propagation n'étant par conséquent nécessaire, et ils ne subiront pratiquement aucune absorption dans le domaine énergétique dominant de la centaine de MeV (puisque le seuil de création de paires sur les fonds diffus infra-rouge et micro-onde n'est pas atteint). Le confinement galactique n'ayant plus lieu, il est aussi nécessaire de prendre en compte la contribution extraglactique qui s'avère cependant être négligeable, tout comme pour le cas des trous noirs primordiaux [168]. Le flux de photons gamma provenant de trous noirs microscopiques ainsi déterminé reste bien inférieur au fond gamma observé et ce jusqu'à des énergies de 10^{15} GeV. Cependant, une extrapolation jusqu'à de telles énergies, qui sont bien au delà de la coupure GZK, a peu de sens, en particulier en songeant que cela nécessite des énergies bien plus élevées pour les rayons cosmiques à l'origine du trou noir formé. Tout comme pour l'émission d'antiprotons, la production astrophysique de trous noirs microscopiques due à un univers avec une échelle de Planck de l'ordre du TeV n'est pas en contradiction avec les observations actuelles du point de vue de leur émission de photons gamma.

L'émission de neutrinos pourrait aussi être considérée. Cependant, comme pour les photons gamma, le spectre est dominé par la contribution des désintégrations de pions chargés issus de l'hadronisation des quarks et gluons. Le flux de neutrinos primaires est maximal autour de la centaine de MeV, et du même ordre de grandeur que celui de photons : les neutrinos primaires sont alors *noyés* dans le fond (atmosphérique par exemple), ne permettant aucune détection de trous noirs microscopiques.

8.3.2 Contraintes cosmologiques

Contribution à la Matière Noire

Si les trous noirs produits dans la Voie Lactée par collisions de particules forment des reliques stables, alors ces reliques contribueraient à la Matière Noire. Bien qu'une théorie quantique de la gravitation soit nécessaire à l'étude de la fin de vie des trous noirs, de nombreuses études, aussi bien quadri-dimensionnelles que D-dimensionnelles, basées, par exemple, sur les théories de corde [43] ou sur une modification du groupe de renormalisation de la métrique de Schwarzschild [169], ont montré que le processus d'évaporation s'arrête avant la disparition complète du trou noir pour laisser une relique stable dont la masse serait de l'ordre de grandeur de la masse de Planck. De tels résultats sont en accord avec la conjecture de *la censure cosmique* proposée par R. Penrose. De telles reliques contribueraient à la Matière Noire : ce sont des objets massifs, $M_{rel} \sim M_D$ et interagissant extrêmement faiblement, leur section efficace géométrique étant $\sigma_{geom} \sim \pi \ell_D^2$, ℓ_D étant la longueur de Planck à D dimensions. La quantité de masse sous forme de reliques contenues dans notre galaxie s'obtient en intégrant le spectre de masse de trous noirs formés dans la Voie Lactée, voir équation (8.19), sur l'ensemble du volume galactique ainsi que sur l'ensemble du temps de formation :

$$M_{rel}^{tot} = \int_{M_D}^{\infty} \int_{t_{form}}^{t_0} \int_0^{R_{gal}} \int_0^{y_{gal}} 2\pi R M_{rel} \frac{dN_{BH}}{dtdVdM_{BH}}, \tag{8.23}$$

R_{gal} et y_{gal} étant le rayon et la hauteur de la Voie Lactée, et t_0 et t_{form} l'âge actuel de l'univers et l'époque de formation de notre galaxie. En prenant $M_{rel} \sim M_D$, la masse totale des reliques présentes dans notre galaxie serait de $M_{rel}^{tot} \simeq 10^{12}$ g, correspondant à une contribution strictement négligeable à la Matière Noire. De nouveau, la production de trous noirs dans le cadre des modèles ADD ne contredit en rien cette observation cosmologique.

Production thermique et nucléosynthèse primordiale

Finalement, si l'univers primordial atteint des températures supérieures à l'échelle de Planck à D dimensions, alors des trous noirs microscopiques seront produits de manière thermique. Il est donc nécessaire de vérifier que leurs produits d'évaporation n'induisent pas de phénomènes en contradiction avec les observations actuelles. Cette condition sera vérifiée tant que les trous noirs ainsi formés se désintègrent bien avant la nucléosynthèse primordiale, leur produit de désintégration contribuant uniquement au bain thermique. Si l'évaporation se prolonge significativement jusqu'à la nucléosynthèse primordiale, l'entropie libérée par ce processus pourrait modifier l'abondance relative des éléments légers, par ailleurs fortement contrainte. Le temps de vie τ d'un trou noir à D dimensions avec une masse initiale M_{BH} est donné par la relation suivante :

$$M_{BH} = M_D \left(M_D \tau\right)^{\frac{D-3}{D-1}}. \tag{8.24}$$

Pour que les trous noirs microscopiques formés thermiquement survivent jusqu'à la nucléosynthèse primordiale, leur temps de vie doit être de l'ordre d'une centaine de secondes imposant des énergies de collisions de particules allant de 10^{20} GeV à 10^{23} GeV selon le nombre de dimensions supplémentaires considérées. Ces énergies, bien supérieures à l'échelle de Planck quadri-dimensionnelle, n'ayant aucune signification physique claire, laissent penser que la production thermique de trous noirs microscopiques dans l'Univers primordial n'induira aucune modification de l'abondance relative des éléments légers.

8.4 Contraintes auprès des collisionneurs

Malgré la richesse de la phénoménologie astrophysique des trous noirs microscopiques, il n'est malheureusement pas possible de faire des recherches de précision par cette approche. Cependant, avec une échelle de Planck au TeV, il est envisageable de produire des trous noirs au LHC. Ces trous noirs extrêmement petits vont alors s'évaporer quasiment instantanément et leurs produits de désintégration[2] seront par la suite détectés. La situation est alors la suivante : dans le cadre des modèles ADD, des trous noirs pourraient être formés au LHC et se désintègreraient au milieu des plus grands détecteurs de particules jamais construits permettant l'accès à des phénomènes très fins sur le spectre d'émission de ces objets, éventuellement dus à des écarts par rapport à la théorie de la Relativité Générale.

Les premières études suivant cette idée [159, 160] se basent sur une description du processus d'évaporation de Hawking dans le cadre de la Relativité Générale à D dimensions : il fut montré qu'il était possible de reconstruire la loi de Hawking, c'est-à-dire la température du trou noir en fonction de sa masse et d'en déduire le nombre de dimensions spatiales [160]. Ce phénomène d'écrantage par l'horizon mettrait fin à la physique des particules auprès des collisionneurs pour la remplacer par la physique de la gravitation à haute énergie. La figure 8.7 montre cette dépendance de la loi de Hawking avec le nombre de dimensions ainsi que les possibilités expérimentales du détecteur ATLAS quant à la reconstruction de cette loi. Ce résultat

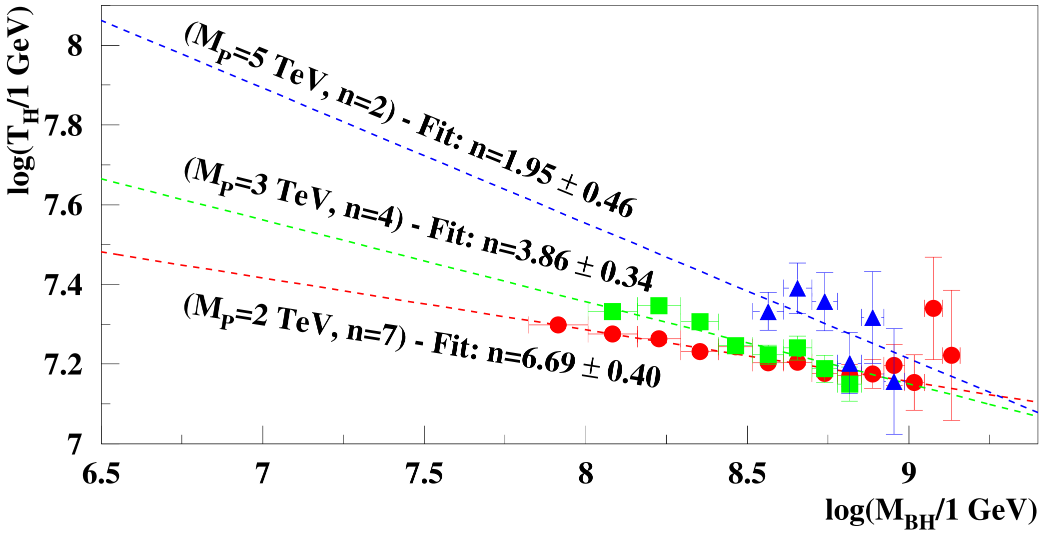


FIG. 8.7 – Loi de Hawking pour des trous noirs à D dimensions telle qu'elle serait reconstruite en détectant avec ATLAS les produits de désintégration de trous noirs microscopiques formés au LHC [160].

nécessite d'une part la connaissance du nombre de trous noirs formés auprès du LHC et d'autre part, une simulation du processus d'évaporation. Le nombre de trous noirs produits, représenté sur la figure 8.8, s'obtient en convoluant la section efficace de production de trous noirs par

[2]Nous pourrons remarquer que depuis que les trous noirs sont entrés dans le champ des physiciens des particules, ils ne s'évaporent plus : ils se désintègrent. Ah, le repli communautaire...

interaction proton/proton avec la luminosité du LHC. Dans cette étude, il est supposé qu'il n'y a aucune thermalisation de l'horizon entre deux émissions successives de particules. Cette hypothèse d'évaporation instantanée permet de déterminer le nombre de quanta émis d'une manière identique à celle présentée dans le chapitre 8.3.1 concernant l'émission d'antiprotons par des trous noirs microscopiques galactiques.

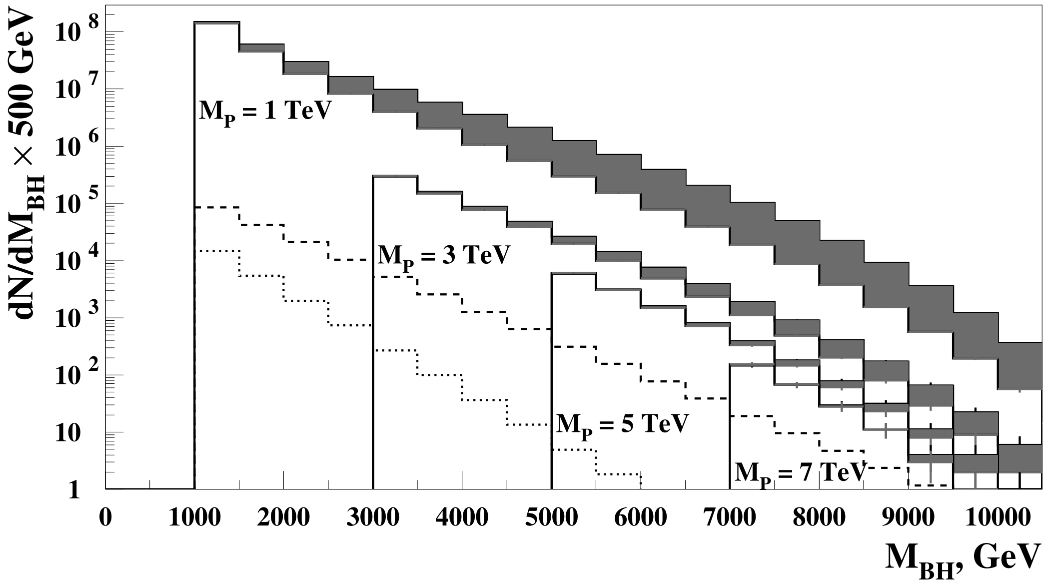


FIG. 8.8 – Nombre de trous noirs formés au LHC en fonction de leur masse pour différentes valeurs de l'énergie de Planck à D dimensions. La zone grisée correspond aux différentes valeurs prises pour le nombre de dimensions allant de 6 à 11. Les lignes en tiret et pointillé représentent le bruit de fond du modèle standard [160].

Si les modèles ADD avec une énergie de Planck au TeV sont avérés, alors la détection d'événements trou noir, *i.e.* $p + p \to BH$, sera très facile. Comme il l'est clairement vu sur la figure 8.8, le nombre de trous noirs produits est très grand, atteignant la centaine de millions d'événements dans le cas le plus favorable. Un tel nombre provient d'une section efficace de production élevée pour un processus exotique, environ 400 picobarns. De plus, la signature expérimentale de la désintégration de ces objets présente des caractéristiques spécifiques[159] :

- une grande multiplicité, environ 50 quanta émis pour un trou noir ayant une masse de 10 TeV ;
- une grande diversité en type de particules, l'évaporation se couplant démocratiquement aux champs quantiques ;
- une distribution angulaire de type $\frac{dN}{d\varphi} \sim N_0 + N_1 \sin(\varphi)$, N_0 correspondant aux particules émises pendant la phase où le trou noir est de type Schwarzschild et N_1 à celui pendant la phase où le trou noir formé n'a pas encore totalement perdu son spin ;
- une fraction non négligeable de leptons, pouvant atteindre de très hautes énergies $E_{lep} >$ 100 GeV ;
- une topologie des événements, du moins sur une base statistique, quasi-sphérique, les écarts à la sphéricité provenant de la phase où le trou noir n'a pas totalement éliminé son

spin ;
- dans le cas de formation de reliques stables, une très grande énergie manquante $E_{miss} \sim M_D \sim 1$ TeV.

Les investigations expérimentales possibles grâce à toutes ces caractéristiques sont décrites de manière exhaustive dans la référence [159]. La masse du trou noir pourra être déduite de l'énergie totale émise par ce dernier, plus éventuellement l'énergie manquante, tandis que la température viendra de la reconstruction du spectre d'émission.

8.4.1 Contraintes en théorie de Gauss-Bonnet [170]

Puisqu'il serait possible au LHC d'observer des effets très fins sur le spectre de radiation des trous noirs, nous pouvons décrire leur processus d'évaporation dans le cadre de la théorie de Gauss-Bonnet plutôt que dans celui de la Relativité Générale afin d'explorer les possibilités expérimentales du détecteur ATLAS en vue d'une éventuelle détection, voire mesure, d'un tel terme additionnel dans le Lagrangien de gravitation.

Production et thermodynamique

Afin de déterminer le nombre de trous noirs de Gauss-Bonnet produits au LHC, nous prendrons pour section efficace de production de trous noirs par interaction parton/parton la section efficace géométrique $\sigma = \pi r_H^2$. La luminosité du LHC ainsi que les fonctions de distribution partonique du proton ne dépendant pas de la théorie de la gravitation sous-jacente, le nombre de trous noirs de Gauss-Bonnet formés au LHC se déduit directement alors de celui obtenu dans le cadre de la Relativité Générale. Ce nombre de trous noirs produits étant donné pour une masse fixée[160], il devra simplement être ré-échelonné par la taille du trou noir en théorie de Gauss-Bonnet à la même masse :

$$\frac{dN^{(GB)}}{dM_{BH}}(M_{BH}) = \left(\frac{r_H^{(GB)}}{r_H^{(RG)}}\right)^2 \times \frac{dN^{(RG)}}{dM_{BH}}(M_{BH}), \tag{8.25}$$

les indices (GB) et (RG) signifiant respectivement en théorie de Gauss-Bonnet et en Relativité Générale. Cette méthode permettra de déduire très rapidement le nombre de trous noirs de Gauss-Bonnet formés au LHC à partir des résultats de la référence [160].

La figure 8.9 représente le rapport entre la température d'un trou noir de Gauss-Bonnet et celle d'un trou noir en Relativité Générale en fonction de sa masse et pour différentes valeurs du nombre de dimensions, la constante de couplage de Gauss-Bonnet étant fixée à $\lambda = 1$ TeV^{-2} et $\lambda = 0.01$ TeV^{-2}. Le comportement non-monotone de la température avec la masse en théorie de Gauss-Bonnet nous incite à considérer l'évaporation avec thermalisation plutôt que soudaine afin de tirer meilleurs avantages de la dynamique du processus. Jusqu'à présent, les études négligeaient la thermalisation pour des raisons de simplicité. En prenant en compte cet effet, nous traitons ici le problème de façon plus exhaustive et raffinée. Faire cette hypothèse entraîne cependant un accroissement, au cours de l'évaporation, de l'écart entre les spectres d'émissions de trous noirs selon la théorie considérée : au fur et à mesure que le trou noir s'évapore, sa taille diminue et l'effet du terme de Gauss-Bonnet sur le spectre de radiation devient de plus en plus dominant. Ceci est confirmé par les spectres exacts calculés dans le chapitre 7.3.1 et représentés sur les figures 7.8 à 7.11 et l'hypothèse de thermalisation complète sera alors un cas favorable en terme de discrimination entre les deux modèles, Gauss-Bonnet ou Relativité Générale.

Spectres d'émission intégrés

Tirer avantage de la dynamique d'évaporation revient à calculer des spectres intégrés sur le temps de vie en tenant compte de l'évolution des paramètres régissant le processus. De plus, l'évaporation de trous noirs de masse voisine du TeV est extrêment brève et aucune détection d'effets instantanés, à l'échelle du trou noir, n'est alors possible. La dynamique de l'évaporation

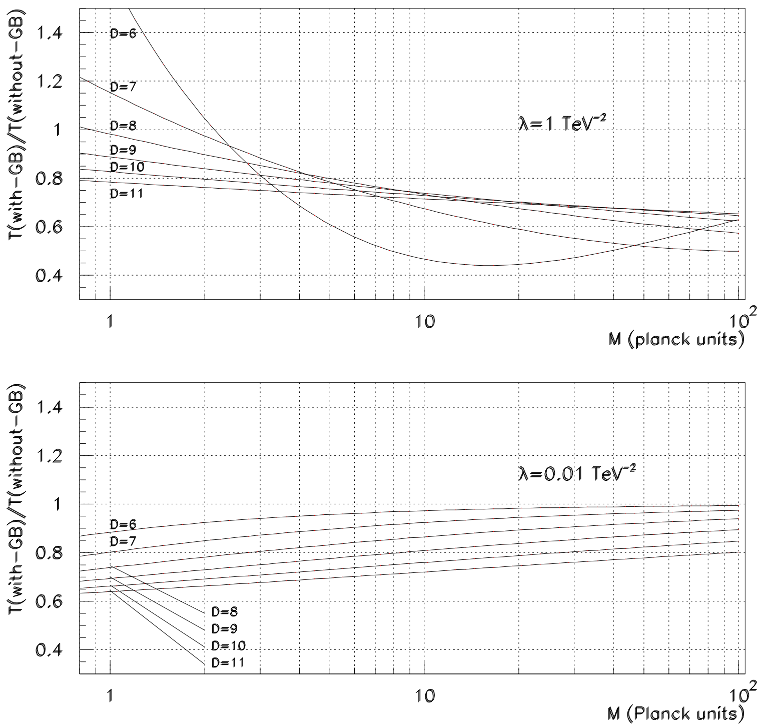


FIG. 8.9 – Rapport entre la température d'un trou noir de Gauss-Bonnet et celle d'un trou noir en Relativité Générale en fonction de sa masse en unité de Planck et pour différentes valeurs du nombre de dimensions. *Haut :* la constante de couplage de Gauss-Bonnet est fixée à 1 TeV^{-2}. *Bas :* la constante de couplage de Gauss-Bonnet est fixée à 0.01 TeV^{-2}.

est aussi bien décrite par sa variation de masse que celle de sa taille. Cependant, puisque toutes les quantités thermodynamiques dépendent explicitement du rayon de Schwarzschild et implicitement de la masse, ce sera la taille du trou noir qui sera la variable la plus pertinente. Le flux intégré, pour une particule de type i, est alors donné par :

$$\frac{dN_i}{d\omega} = \int_{r_0}^{0} \left(\frac{dM_{BH}}{dt}\right)^{-1} \left(\frac{dM_{BH}}{dr_H}\right) \left(\frac{d^2N_i}{dtd\omega}\right) dr_H, \tag{8.26}$$

r_0 étant la taille initiale du trou noir. Le taux de perte de masse dM_{BH}/dt s'obtient en intégrant le spectre instantané sur l'ensemble des énergies émises :

$$\frac{dM_{BH}}{dt} = -\sum_i \int_0^\infty \omega \frac{d^2N_i}{dtd\omega} d\omega. \tag{8.27}$$

Les facteurs de corps gris sont impliqués dans le calcul du flux intégré via le taux de perte de masse et le spectre d'émission instantané $d^2N_i/dtd\omega$ rendant l'intégrale ci-dessus calculable uniquement de manière numérique. Cependant, les trous noirs formés au LHC seront très chauds et les particules seront principalement émises à grandes énergies. Ainsi, les facteurs de corps gris seront approchés par leur limite à haute énergie sur l'ensemble du spectre. Sous cette hypothèse, le spectre d'émission des trous noirs revêt la forme d'une loi de corps noir et le taux de perte de masse peut se calculer analytiquement (il s'agit de la loi de Stefan) :

$$\frac{dM_{BH}}{dt} = -\frac{4\pi^6}{15}\left(\frac{D-1}{2}\right)^{2/(D-3)}\frac{D-1}{D-3}r_H^2 T_H^4\left[\frac{7}{8}N_f + N_b\right], \tag{8.28}$$

N_f (N_b) étant le nombre de degrés de liberté fermionique (bosonique) du modèle standard. Les deux autres termes intervenant dans le flux intégré s'obtiennent aussi analytiquement

$$\begin{aligned} \frac{dM_{BH}}{dr_H} &= \frac{(D-2)\pi^{(D-1)/2}M_D^{D-2}}{8\pi\Gamma\left((D-1)/2\right)}r_H^{(D-6)} \\ &\quad \times\left[(D-3)r_H^2 + (D-5)(D-4)(D-3)\lambda\right] \end{aligned} \tag{8.29}$$

$$\frac{d^2N_i}{dtd\omega} = \frac{4\pi^2\left(\frac{D-1}{2}\right)^{2/(D-3)}\frac{D-1}{D-3}g_i r_H^2\omega^2}{\exp\left(\omega/T_H(r_H)\right) - (-1)^{2s}}, \tag{8.30}$$

g_i représentant le nombre de degrés de liberté interne à la particule de type i. Ces trois quantités permettent de faire une unique intégration numérique afin d'obtenir le flux intégré sur le temps de vie des trous noirs. Ces flux intégrés en fonction de l'énergie pour l'émission d'un degré de liberté bosonique par un trou noir de masse initiale $M_{BH} = 10$ TeV sont représentés sur la figure 8.10 pour différentes valeurs du nombre de dimensions et de la constante de couplage de Gauss-Bonnet.

Ces spectres d'émission serviront alors de loi de probabilité en vue d'une simulation de l'évaporation des trous noirs à laquelle s'ajoutera une seconde loi de probabilité, cette fois-ci discrète, permettant de déterminer le type de particules préférentiellement émises. Cette seconde loi de probabilité se définit comme le rapport entre le nombre total moyen de particules de type i émises divisé par le nombre total de particules émises :

$$P(i) = \int_0^\infty \frac{d^2N_i}{dtd\omega}d\omega \Bigg/ \sum_i \int_0^\infty \frac{d^2N_i}{dtd\omega}d\omega. \tag{8.31}$$

Supposant de nouveau que les facteurs de corps gris sont égaux à la limite à haute énergie sur l'ensemble du domaine énergétique, l'intégration des spectres d'émission peut se faire analytiquement et la distribution de probabilité ci-dessus prend la forme suivante :

$$P(i) = \frac{c_i g_i}{\frac{3}{4}N_f + N_b}, \tag{8.32}$$

avec $c_i = 1$ si la particule est un boson et $3/4$ si c'est un fermion.

Détection et mesure de la constante de couplage de Gauss-Bonnet

Afin d'évaluer la possibilité de détection et de mesure par l'expérience ATLAS de la constante de couplage de Gauss-Bonnet, il faut simuler la détection des particules et la reconstruction du spectre intégré de radiation des trous noirs. Pour cela, le nombre de trous noirs produits pour chaque intervalle de masse sera déterminé grâce à la méthode citée précédemment. La dynamique de l'évaporation, pour une masse initiale donnée, sera simulée par une méthode Monte-Carlo en tirant aléatoirement le type de particules émises, quark, gluon, lepton etc, puis son énergie grâce aux deux distributions de probabilité calculées dans le paragraphe précédent. Ne seront ensuite conservés pour la reconstruction des spectres que les électrons, positons et photons dont l'énergie est supérieure à 100 GeV. Sur ces particules *prises en compte*, une incertitude due à la mesure est ajoutée. Pour cela, nous prenons une approximation extrêmement simple pour le détecteur ATLAS en ne considérant qu'une incertitude sur l'énergie, la résolution prévue étant $\Delta E/E = \sqrt{a^2/E + b^2}$ avec $a = 10\ \%/\sqrt{\text{GeV}}$ et $b = 0.5\ \%$. Cette procédure s'effectue pour chaque intervalle de masse nous permettant de recueillir un ensemble de spectres

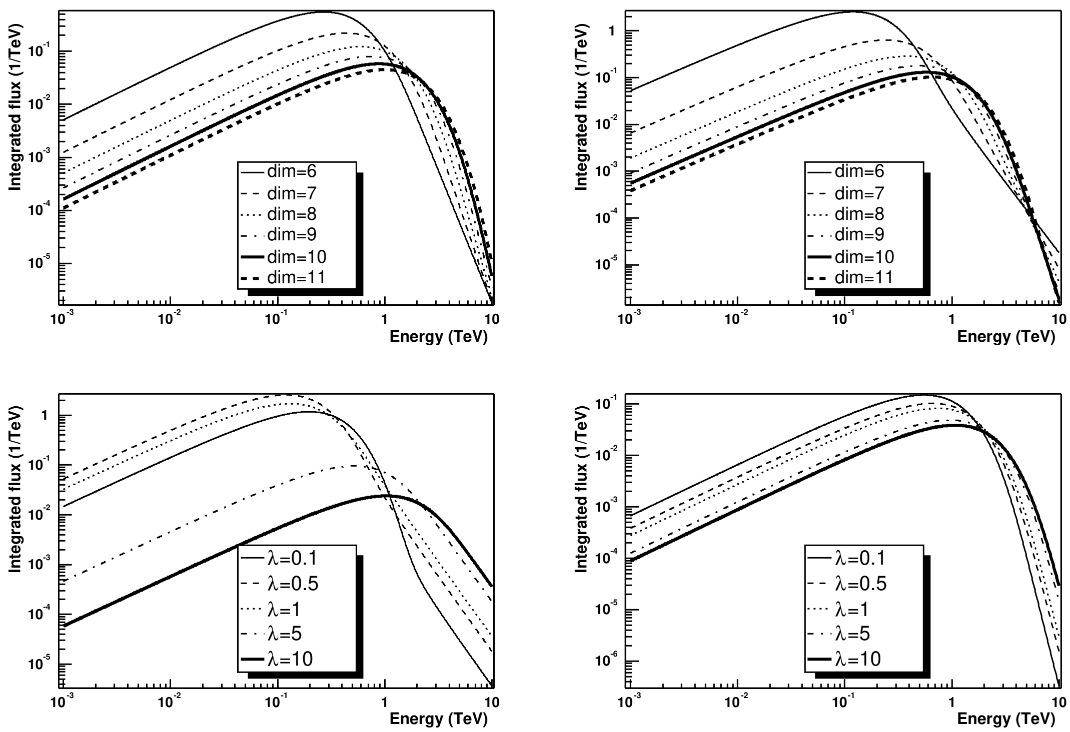


FIG. 8.10 – Flux intégré de photons émis par un trou noir de masse initiale $M_{BH} = 10$ TeV, l'échelle de Planck étant fixée à 1 TeV. *Haut :* la constante de couplage de Gauss-Bonnet λ est prise égale à 0 TeV^{-2} à gauche et 0.5 TeV^{-2} à droite et le nombre de dimensions égal à $D = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. *Bas :* le nombre de dimensions est pris égal à 6 à gauche et 11 à droite et la constante de couplage de Gauss-Bonnet égale à $\lambda = \{0.1, 0.5, 1, 5, 10\}$ TeV^{-2}.

d'émission intégrés reconstruits par ATLAS qui pourront être alors comparés à des prédictions théoriques.

Pour comparer les spectres reconstruits aux prédictions théoriques, il est nécessaire de connaître la masse de Planck ainsi que les paramètres thermodynamique initiaux du trou noir (masse et température). La masse de Planck pourra se déterminer aisément grâce à un effet de seuil : aucun trou noir ne sera produit avec une masse plus faible que celle de Planck. La masse du trou noir et sa température sont déterminées une fois le spectre reconstruit, l'énergie totale contenue dans ce spectre étant égale à la masse initiale du trou noir et la position du maximum du spectre étant directement liée à la température initiale. Ces mesures devraient être faisables compte tenu du nombre d'événements trou noir, de la faiblesse du bruit de fond (voir figure 8.8) et du faible pourcentage de particules émises ne pouvant être détectées (puisque seulement 5 % de l'énergie émise par le trou noir devrait partir sous forme de neutrinos et gravitons). Nous avons aussi vérifié à l'aide du logiciel PYTHIA [164] qu'une très faible partie des photons, électrons et positons directement émis par le trou noir se trouve au milieu d'un jet hadronique rendant leur détection impossible. Finalement, tout comme pour l'étude des trous noirs produits dans notre galaxie, cette étude a été menée en prenant en compte d'éventuelles sources d'inélasticité dans la production de trous noirs. Adoptant une approche purement phénoménologique pour cet effet, la section efficace partonique de production de trous noirs a été diminuée jusqu'à un millième de la section efficace géométrique : $\sigma = \{1, 0.1, 0.01, 0.001\}\ \pi r_H^2$.

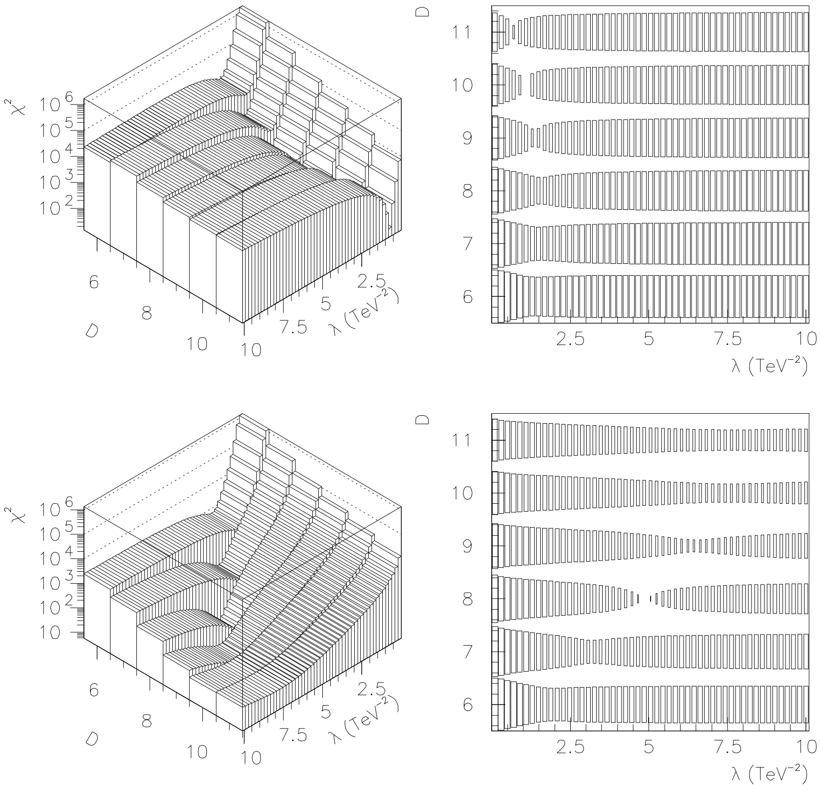


FIG. 8.11 – Distribution de $\chi^2/d.o.f$ obtenue pour des valeurs d'entrées de $(D, \lambda) = (10, 1\ \text{TeV}^{-2})$, partie supérieure, et $(D, \lambda) = (8, 5\ \text{TeV}^{-2})$, partie inférieure. La partie droite est une représentation du $\chi^2/d.o.f$ dans laquelle la surface du rectangle est proportionnelle à la valeur du $\chi^2/d.o.f$.

Les spectres reconstruits pour chaque jeu de valeurs du couple (D, λ) et pour chaque intervalle de masse sont alors comparés aux prédictions théoriques et une analyse de χ^2 est effectuée permettant ainsi d'étudier les valeurs de D et λ compatibles avec les données reconstruites par ATLAS. Cette analyse a été faite pour un grand nombre de valeurs d'entrée des paramètres du modèle D et λ et la figure 8.11 représente un exemple de la distribution de $\chi^2/d.o.f$ obtenue pour des valeurs d'entrées de $(D, \lambda) = (10, 1\ \text{TeV}^{-2})$ et $(D, \lambda) = (8, 5\ \text{TeV}^{-2})$ sur laquelle il est clairement vu que le $\chi^2/d.o.f$ atteint sa valeur minimale pour les valeurs d'entrée des paramètres (D, λ) définissant la physique, et ce de façon très piquée. Les mêmes résultats ont été obtenus pour une large gamme de valeurs de ces paramètres ainsi qu'en prenant en compte l'inélasticité et il semble possible de détecter, et éventuellement mesurer, une théorie de la gravitation présentant un terme de Gauss-Bonnet. Outre la vérification que la valeur minimum du $\chi^2/d.o.f$ se trouve pour les valeurs d'entrée du nombre de dimensions D et de la constante de couplage de Gauss-Bonnet λ (ce qui est la moindre des choses), un intervalle de valeurs autorisées par la détection du couple (D, λ), représentant les possibilités de détection de ATLAS, a été déterminé : les valeurs de (D, λ) compatibles avec les spectres reconstruits seront celles dont le $\chi^2/d.o.f \leq 2\chi^2_{min}/d.o.f$. χ^2_{min} représente la valeur minimum de la distribution de χ^2. Bien que ce critère ne soit pas rigoureux en terme d'analyse statistique, il peut cependant se traduire en terme d'un niveau de confiance suffisamment élevé pour que les intervalles déterminés caractérisent les possibilités de détection au LHC. Le tableau 8.3 compile les intervalles de valeurs pour le couple de paramètres (D, λ) en fonction des valeurs "physiques" de ces derniers. Excepté le cas $\lambda = 5$ TeV^{-2} dans un Univers à six dimensions et avec une forte inélasticité où la reconstruction est alors impossible, il est toujours possible de reconstruire les valeurs d'entrée des paramètres physiques avec un intervalle de confiance dont la largeur, selon les cas étudiés, varie du simple, le cas $(D, \lambda\ [\text{TeV}^{-2}]) = (6, 0.5)$, au double, le cas $(D, \lambda\ [\text{TeV}^{-2}]) = (8, 5)$. Cependant, il est, dans tous les cas reconstruits, toujours possible de discriminer entre une théorie avec ou sans terme de Gauss-Bonnet.

	Valeurs autorisées (min/max) pour $(\mathbf{D}, \lambda)$		
	$\lambda = 0.5$ TeV^{-2}	$\lambda = 1$ TeV^{-2}	$\lambda = 5$ TeV^{-2}
D=6	$\lambda : 0.39/0.58\,;\ D : 6/6$	$\lambda : 0.78/1.18\,;\ D : 6/6$	$\lambda :> 3.15\,;\ D : 6/7$
	$\lambda : 0.39/0.58\,;\ D : 6/6$	$\lambda : 0.78/1.18\,;\ D : 6/6$	$\lambda :> 3.15\,;\ D : 6/8$
	$\lambda : 0.39/0.58\,;\ D : 6/6$	$\lambda : 0.78/1.18\,;\ D : 6/6$	$\lambda :> 2.20\,;\ D : 6/8$
	$\lambda : 0.39/0.58\,;\ D : 6/6$	$\lambda : 0.78/1.32\,;\ D : 6/7$	reconstruction impossible
D=7	$\lambda : 0.39/0.58\,;\ D : 7/7$	$\lambda : 0.78/1.18\,;\ D : 7/7$	$\lambda :> 3.96\,;\ D : 7/8$
	$\lambda : 0.39/0.58\,;\ D : 7/7$	$\lambda : 0.78/1.18\,;\ D : 7/7$	$\lambda :> 3.77\,;\ D : 7/9$
	$\lambda : 0.39/0.58\,;\ D : 7/7$	$\lambda : 0.78/1.18\,;\ D : 7/8$	$\lambda :> 3.56\,;\ D : 7/9$
	$\lambda : 0.16/0.58\,;\ D : 7/8$	$\lambda : 0.18/1.37\,;\ D : 7/11$	$\lambda :> 1.58\,;\ D : 6/11$
D=8	$\lambda : 0.39/0.58\,;\ D : 8/8$	$\lambda : 0.99/1.18\,;\ D : 8/8$	$\lambda : 4.56/6.92\,;\ D : 8/9$
	$\lambda : 0.39/0.58\,;\ D : 8/8$	$\lambda : 0.99/1.18\,;\ D : 8/8$	$\lambda : 4.34/7.50\,;\ D : 8/9$
	$\lambda : 0.39/0.58\,;\ D : 8/8$	$\lambda : 0.77/1.18\,;\ D : 8/9$	$\lambda :> 3.95\,;\ D : 8/11$
	$\lambda : 0.20/0.79\,;\ D : 7/9$	$\lambda : 0.22/1.56\,;\ D : 7/11$	$\lambda :> 2.34\,;\ D : 7/11$
D=9	$\lambda : 0.39/0.58\,;\ D : 9/9$	$\lambda : 0.99/1.18\,;\ D : 9/9$	$\lambda : 4.74/5.34\,;\ D : 9/9$
	$\lambda : 0.39/0.58\,;\ D : 9/9$	$\lambda : 0.99/1.18\,;\ D : 9/9$	$\lambda : 4.55/5.91\,;\ D : 9/10$
	$\lambda : 0.18/0.58\,;\ D : 9/10$	$\lambda : 0.37/1.18\,;\ D : 9/11$	$\lambda : 3.59/7.29\,;\ D : 8/11$
	$\lambda :< 0.96\,;\ D : 8/11$	$\lambda : 0.22/1.58\,;\ D : 8/11$	$\lambda :> 2.37\,;\ D : 7/11$
D=10	$\lambda : 0.18/0.58\,;\ D : 10/11$	$\lambda : 0.99/1.18 ;D : 10/10$	$\lambda : 4.74/5.53\,;\ D : 10/10$
	$\lambda : 0.18/0.58\,;\ D : 10/11$	$\lambda : 0.58/1.18\,;\ D : 10/11$	$\lambda : 4.36/5.71\,;\ D : 10/11$
	$\lambda : 0.18/0.58\,;\ D : 10/11$	$\lambda : 0.58/1.58\,;\ D : 9/11$	$\lambda : 3.58/6.72\,;\ D : 9/11$
	$\lambda : 0.18/0.97\,;\ D : 9/11$	$\lambda : 0.39/1.96\,;\ D : 8/11$	$\lambda :> 2.77\,;\ D : 8/11$
D=11	$\lambda : 0.39/0.99\,;\ D : 10/11$	$\lambda : 0.99/1.58 ;D : 10/11$	$\lambda : 4.74/5.53\,;\ D : 11/11$
	$\lambda : 0.39/0.99\,;\ D : 10/11$	$\lambda : 0.98/1.58\,;\ D : 10/11$	$\lambda : 4.57/6.12\,;\ D : 10/11$
	$\lambda : 0.39/0.99\,;\ D : 10/11$	$\lambda : 0.75/1.77\,;\ D : 10/11$	$\lambda : 4.14/7.16\,;\ D : 9/11$
	$\lambda : 0.39/1.56\,;\ D : 9/11$	$\lambda : 0.75/2.37\,;\ D : 9/11$	$\lambda :> 2.96\,;\ D : 8/11$

TAB. 8.3 – Valeurs reconstruites pour D et λ [TeV^{-2}] en fonction des valeurs « physiques »d'entrée en imposant $\chi^2/d.o.f < 2\chi^2_{min}/d.o.f$. La première ligne correspond à $\sigma = \pi r_H^2$, la seconde à $\sigma = \pi r_H^2/10$, la troisième à $\sigma = \pi r_H^2/100$ et la quatrième $\sigma = \pi r_H^2/1000$.

Perspectives

L'étude ci-dessus montre que, dans un Univers où l'échelle de Planck est de l'ordre du TeV, il serait possible, à l'aide du processus d'évaporation de Hawking, de mesurer la contribution d'un terme de Gauss-Bonnet dans l'action de la gravitation au sein du futur collisionneur

LHC. Du moins, et ce puisqu'une complète simulation des possibles évènements trous noirs n'a pas été menée, semble-t-il possible pour un détecteur comme ATLAS de faire la distinction entre une théorie de la gravitation avec ou sans le terme de Gauss-Bonnet. Cette étude peut par ailleurs être améliorée sur différents points. Premièrement, nous avons considéré que la loi de Hawking restait valable sur l'ensemble de la durée de vie des trous noirs, ce qui n'est évidemment pas le cas. D'une part, les effets quantiques sur la gravitation devraient être pris en compte[3] et d'autre part, le nombre moyen de particules émises en fin de vie devenant inférieur à l'unité, il devient nécessaire d'appliquer une coupure à haute énergie, grâce à une fonction de Heavyside par exemple, dans le spectre d'émission afin de proprement prendre en compte la conservation de l'énergie. Ce dernier point peut devenir primordial dans le cas d'espace-temps de dimensionnalité élevée pour lesquels le nombre moyen de particules émises par les trous noirs formés au LHC est plus petit que 1 dès les premiers instants de l'évaporation. Refaire l'étude en appliquant la coupure à haute énergie peut s'avérer indispensable bien que cette troncature reste une approche phénoménologique et qu'une véritable compréhension de la fin de vie des trous noirs soit nécessaire. Deuxièmement, cette étude devrait être effectuée dans le cas de trous noirs avec spin, la collision parton/parton ayant dans la plupart des cas un paramètre d'impact non-nul. Cependant, cela requiert de trouver des solutions des équations d'Einstein-Gauss-Bonnet de la forme de Kerr, ce qui n'est pas encore été fait[4], et ce bien que les solutions décrivant des trous noirs de Kerr $D-$dimensionnels dans le cadre de différents modèles existent : Relativité Générale à D dimensions avec [171, 172] ou sans [7] constante cosmologique, ou bien en supergravité à cinq et sept dimensions [173, 174, 175]. Finalement, une véritable simulation de la reconstruction des spectres d'émission de trous noirs à l'aide du détecteur ATLAS est nécessaire. Cela requiert d'une part une simulation complète du détecteur et d'autre part, une estimation du bruit de fond. Ce n'est qu'avec une étude de ce type que la distribution de χ^2 précédente prendra tout son sens statistique.

8.4.2 Contrainte sur la constante cosmologique [177, 176]

Propriétés thermodynamiques

Les possibilités expérimentales du LHC quant à la recherche d'informations sur la théorie de la gravitation peuvent aussi être exploitées afin de contraindre l'éventuelle présence d'une constante cosmologique, qu'elle soit positive ou négative. Cependant, les propriétés thermodynamiques des trous noirs immergés dans un univers (A)dS, voir les équations (7.49) et (7.49), diffèrent énormément de celle des trous noirs de Gauss-Bonnet. En particulier, dans un univers de type de Sitter, il existe une masse maximale autorisée pour les trous noirs déterminant de fait, si des trous noirs sont formés avec une certaine masse M_{BH}, une limite supérieure quant à la valeur d'une constante cosmologique positive. Cette limite supérieure se détermine en imposant que la température des trous noirs reste positive. Ainsi, si la masse maximale de trous noirs observés au LHC est M_{max}, la limite supérieure pour la constante cosmologique est la suivante :

$$\Lambda < \frac{(D-2)(D-3)}{2r_H^2(M_{max})}. \tag{8.33}$$

La taille de l'horizon d'un trou noir de masse M_{max} s'obtient en inversant l'équation (7.49). Ce critère peut apparaître comme très contraignant : l'énergie maximale de collision au LHC étant de 14 TeV, si uniquement des trous noirs avec une masse maximale bien inférieure à ces 14 TeV se forment, alors cette coupure peut être interprétée comme l'effet d'une constante cosmologique positive et une valeur pour Λ peut être déterminée grâce à la relation ci-dessus. Pourtant, ce critère est en réalité extrêmement peu contraignant, comme cela est illustré sur la figure 8.12 qui représente la masse maximale permise pour les trous noirs de Schwarzschild en fonction de

[3] En un sens, le terme de Gauss-Bonnet prend en compte ces effets, du moins une partie. Cependant, il ne s'agit pas d'une théorie ultime.

[4] Nous avons mené cette investigation en collaboration avec S. Alexeev et N. Popov mais les ansatz usuels ne fonctionnaient pas dans ce cas. De nouvelles pistes prometteuses sont en cours d'étude.

la valeur de la constante cosmologique. En effet, dans le meilleur des cas, l'observation d'un trou noir de masse 14 TeV, le maximum possible au LHC, dans un univers où l'échelle de Planck est égale à 1 TeV impose une limite supérieure sur la constante cosmologique de l'ordre du TeV^2.

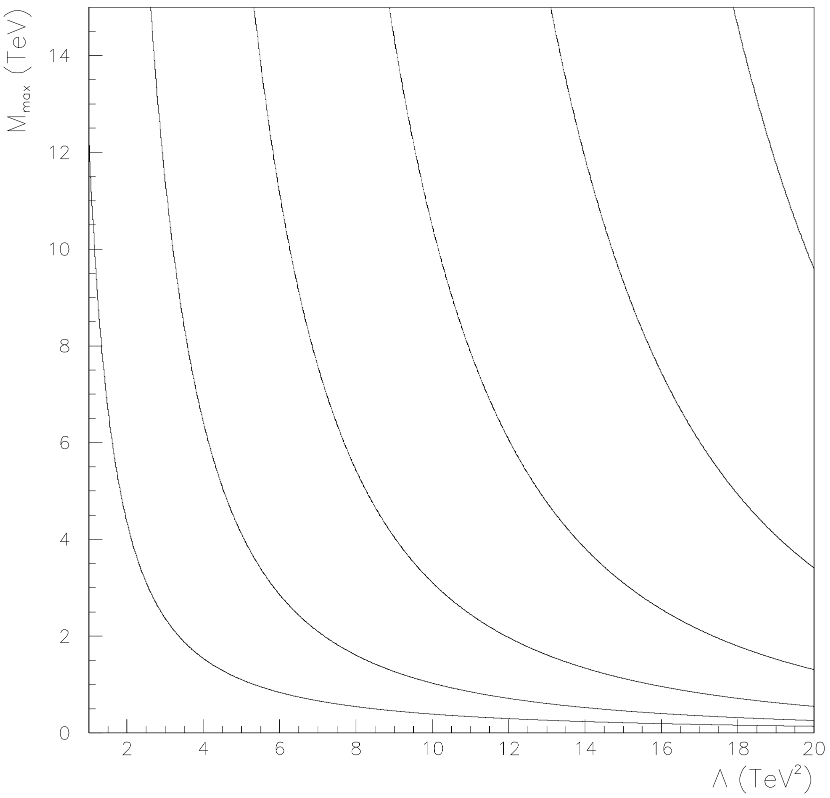


FIG. 8.12 – Masse maximale pour des trous noirs de Schwarzschild plongés dans un univers dS en fonction de la valeur de la constante cosmologique, ces deux quantités exprimées en TeV. La masse de Planck est prise égale à 1 TeV et le nombre de dimensions varie de 6 à 11, correspondant aux courbes allant de droite à gauche.

Pour obtenir des informations plus contraignantes, l'étude faite précédemment dans le cas des trous noirs de Gauss-Bonnet peut être reprise, les hypothèses faites restant pour la plupart valides. En particulier, comme les trous noirs observables au LHC seront très chauds, la limite à haute énergie pour les facteurs de corps gris sera une très bonne approximation. La question de la thermalisation lors de la dynamique de l'évaporation se pose de nouveau : les deux cas limites sont à considérer, à savoir une thermalisation complète entre l'émission de chaque particule et aucune thermalisation. Chacun de ces cas a ses avantages : d'un côté l'hypothèse d'une thermalisation complète devrait éviter des éventuelles dégénérescences lors de la reconstruction du couple (D, Λ) puisque la variation de température est prise en compte. Mais, la constante cosmologique agissant à grande échelle, son influence sur le processus d'évaporation diminuera au fur et à mesure que le trou noir perd de sa masse, ce dernier devenant de plus en plus petit. Ce phénomène est très bien illustré sur la partie gauche de la figure 8.13 qui représente la température d'un trou noir en fonction de son rayon en espace-temps asymptotiquement plat, $\Lambda = 0$, et en espace (A)dS, $\Lambda = \pm 1$ TeV^2, la masse de Planck étant fixée à 1 TeV et le nombre de dimensions à 8. Les trois températures convergent vers la même valeur quand $r_H \to 0$: sous l'hypothèse de thermalisation complète, les dernières particules émises ne contribueront que très peu aux différences entre les spectres en univers asymptotiquement plat et ceux en univers (A)dS. Au contraire, sous l'hypothèse d'absence de thermalisation, les écarts entre la température avec constante cosmologique et celle sans cette constante restent inchangés et précisément là où les écarts sont le plus élevés lors de l'évaporation. L'influence de la constante cosmologique, décroissant avec la masse du trou noir, est à l'opposé de l'effet du terme de Gauss-Bonnet, agissant quant à lui à petite échelle de longueur. La partie droite de la figure 8.13 montre le rapport entre la température avec constante cosmologique et la température sans cette constante pour un trou noir de 5 TeV, permettant ainsi de se mesurer de l'influence de cette constante sur la thermodynamique des trous noirs. Selon l'hypothèse faite sur la thermalisation,

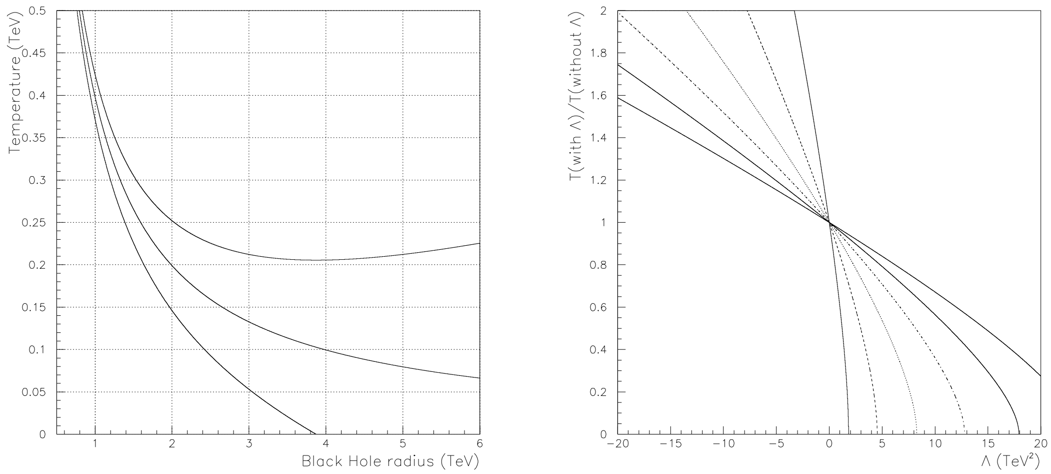


FIG. 8.13 – *Gauche :* température d'un trou noir en fonction de la taille de son horizon dans un Univers de Sitter (bas), asymptotiquement plat (centre) et Anti-de Sitter (haut). La masse de Planck est fixée à 1 TeV, le nombre de dimensions à 8 et la constante cosmologique, dans le cas non-asymptotiquement plat, à $|\Lambda| = 1$ TeV^2. *Droite :* rapport entre la température avec constante cosmologique et la température sans cette constante pour un trou noir de 5 TeV en fonction de la valeur de la constante cosmologique pour un nombre de dimensions allant de 6 à 11 (effet de moins en moins important).

les spectres intégrés auront la forme suivante pour un degré de liberté donné :

$$\frac{dN_i}{d\omega} = \int_{r_0}^{0} \left(\frac{dM_{BH}}{dt}\right)^{-1} \left(\frac{dM_{BH}}{dr_H}\right) \left(\frac{d^2N_i}{dtd\omega}\right) dr_H, \tag{8.34}$$

$$\frac{dN_i}{d\omega} = \underbrace{-M_{BH} \left(\frac{dM_{BH}^{(ini)}}{dt}\right)^{-1}}_{\tau_{BH}} \left(\frac{d^2N_i^{(ini)}}{dtd\omega}\right). \tag{8.35}$$

La première équation correspond au cas avec thermalisation et la seconde à l'émission instantanée. L'indice (ini) dans le spectre sans thermalisation signifie que la quantité est prise pour une température de trou noir égale à sa température initiale.

Détection et mesure de la constante cosmologique

La possible détection, voire mesure, d'une constante cosmologique au LHC grâce à l'évaporation des trous noirs procède de manière identique à la mesure de la constante de couplage du terme de Gauss-Bonnet. Nous ne reviendrons donc pas sur la méthode de simulation des spectres, le choix des particules à conserver ainsi que la reconstruction des spectres par un détecteur comme ATLAS. Lors de la simulation Monte-Carlo de la désintégration des trous noirs, la distribution de probabilité en énergie sera donnée par les formules 8.34 et 8.35 selon l'hypothèse choisie. Nous pouvons tout d'abord investiguer les possibilités de détection de la présence d'une constante cosmologique en comparant, grâce à une méthode de χ^2, les spectres avec une constante cosmologique non-nulle reconstruits par ATLAS à un spectre théorique pour $\Lambda = 0$. Pour chaque valeur du nombre de dimensions et de la constante cosmologique, le χ^2 est obtenu en sommant sur l'ensemble du spectre de masse de trous noirs formés. Le critère

Valeur minimale $\|\Lambda\|_{\text{min}}$, en TeV^2, détectable au LHC				
	Avec Thermalisation		Sans Thermalisation	
	dS	AdS	dS	AdS
$D = 6$	0.02	0.02	0.012	0.008
	0.52	0.44	0.30	0.22
$D = 7$	0.04	0.04	0.02	0.02
	0.98	0.98	0.66	0.62
$D = 8$	0.08	0.06	0.04	0.04
	1.8	1.6	1.1	1.0
$D = 9$	0.10	0.10	0.08	0.06
	2.6	2.4	1.7	1.4
$D = 10$	0.14	0.14	0.12	0.08
	3.0	3.2	2.7	2.2
$D = 11$	0.18	0.18	0.14	0.12
	4.5	3.6	3.2	2.9

TAB. 8.4 – Constante cosmologique minimale détectable au LHC en reconstruisant les spectres d'émission de Hawking. Pour chaque cas considéré, Univers de Sitter ou Anti-de Sitter, cette limite est déduite sous deux hypothèses, avec ou sans thermalisation, et en prenant en compte une forte inélasticité (seconde ligne) ou non (première ligne) dans la section efficace de production de trous noirs.

statistique pour discriminer une mesure comptatible ou non avec une constante cosmologique nulle est similaire au précédent : les cas incomptatibles avec $\Lambda = 0$ sont ceux pour lesquelles $\chi^2/d.o.f > 2\chi^2_{min}/d.o.f$, χ^2_{min} étant la valeur de la distribution de χ^2 obtenue pour un flux reconstruit avec une constante cosmologique nulle. Cette méthode permet donc de définir une valeur minimale pour la constante cosmologique $|\Lambda|_{min}$, en valeur absolue, pour que son effet puisse être détecté auprés du LHC. Le tableau 8.4 montre l'ensemble des valeurs minimales de la constante cosmologique détectables au LHC, sous les deux hypothèses mentionnées ci-dessus, et en prenant en compte ou non une forte inélasticité dans la section efficace de production de trous noirs. Comme nous pouvions nous y attendre, une forte inélasticité entraîne une détérioration des possibilités de détection, et ce de plus d'un facteur 10, sur la valeur de la constante cosmologique accessible. Il a été contrôlé que cette détérioration est principalement due aux effets statistiques. Comme il l'a été expliqué dans le paragraphe précédent, supposer que le processus d'évaporation est tellement bref qu'aucune thermalisation n'est possible accroît les possibilités de détection d'ATLAS. Ainsi, plus cette hypothèse sera justifiée, plus la sensibilité du LHC à la présence d'une constante cosmologique sera accrue.

Les possibilités de mesure des paramètres fondamentaux de la théorie que sont le nombre de dimensions et la valeur de la constante cosmologique s'étudient en appliquant la même méthode que pour la mesure de la constante de couplage de Gauss-Bonnet. Cependant, sous l'hypothèse d'évaporation soudaine, la mesure combinée de ces deux paramètres est en principe dégénérée. En effet, la comparaison des spectres revient à comparer, dans ce cas, la température initiale du trou noir formé connaissant sa masse. Or, pour une masse fixée, il n'existe pas un unique jeu de paramètres D et Λ aboutissant à la température mesurée, entraînant alors cette dégénérescence. La partie gauche de la figure 8.14 représente la température d'un trou noir de 5 TeV en fonction de la valeur de la constante cosmologique pour un nombre de dimensions allant de 6 à 11. La dégénéréscence est clairement vue sur cette figure puisqu'une isotherme, *i.e* une ligne horizontale, passe par plusieurs courbes correspondant chacune à un couple (D, Λ). En

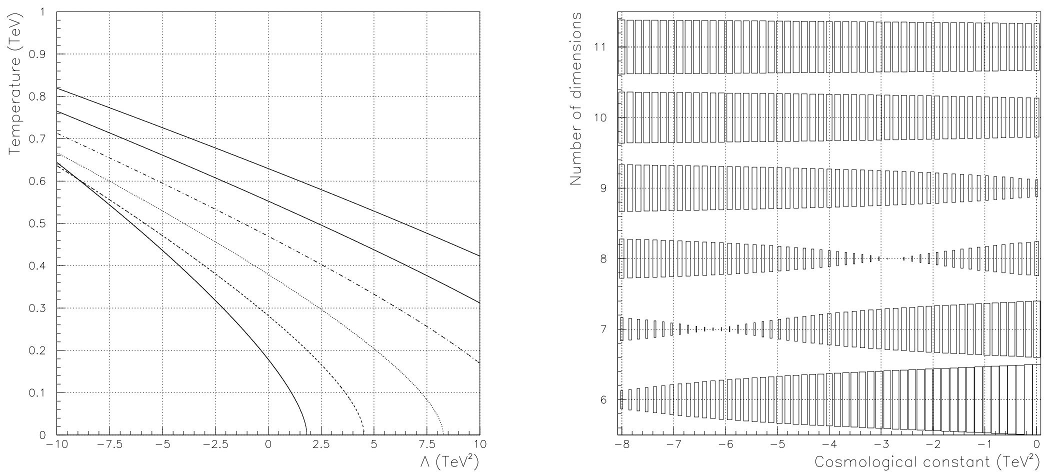


Fig. 8.14 – *Gauche :* température d'un trou noir de 5 TeV en fonction de la constante cosmologique Λ pour un nombre de dimensions allant de 6 à 11 (de bas en haut). La masse de Planck est fixée à 1 TeV. *Droite :* exemple de distribution de χ^2 obtenue à l'aide d'une simulation Monte-Carlo, en effectuant l'hypothèse de thermalisation complète, pour des valeurs d'entrée de $D = 8$ et $\Lambda = -2.5$ TeV^2.

principe, cette dégénéréscence peut être levée en autorisant une thermalisation, même partielle, puisque cela rajoute la variation de la température dépendant elle aussi du couple (D, Λ). Ainsi, en reprenant la simulation Monte-Carlo sous l'hypothèse d'une thermalisation complète, il pourrait être possible de mesurer les deux paramètres D et Λ. Bien qu'une étude systématique n'ait pas été menée, il semblerait que l'effet de la constante cosmologique sur la variation de la température soit trop petit pour lever de manière significative la dégénérescence. Comme le montre la partie droite de la figure 8.14, représentant un exemple type des distributions de χ^2 obtenues pour des valeurs d'entrée fixées du couple (D, Λ). De plus, puisque nous avons considéré une thermalisation complète, il s'agit là de la meilleure levée de dégénérescence possible, à moins de tenir compte de la véritable valeur des facteurs de corps gris sur l'ensemble du spectre énergétique. Autrement dit, à moins d'une mesure indépendante du nombre de dimensions ou de la valeur de la constante cosmologique, il ne semble pas possible de mesurer conjointement et de manière univoque au LHC la dimensionnalité de l'espace ainsi que la valeur de la constante cosmologique. Il est tout au plus envisageable, pour chaque valeur du nombre de dimensions, de déterminer un intervalle dans lequel la valeur de Λ doit se trouver. Par exemple, pour des valeurs d'entrée de $D = 8$ et $\Lambda = -2.5$ TeV^2, les valeurs autorisées de la constante cosmologique, et ce pour chaque valeur du nombre de dimensions, sont compilées dans le tableau 8.5. Ces résultats ont été obtenus avec une masse de Planck à 1 TeV et une forte inélasticité. Les possibilités de mesure d'un détecteur comme ATLAS sont donc fortement limitées : pour $D \geq 9$, un univers Anti-de Sitter peut apparaître comme étant de type de Sitter.

Valeurs autorisées (min/max) pour Λ [TeV^2]			
$D = 6$:	-10.4/-7.4	$D = 9$:	-1.0/3.5
$D = 7$:	-8.2/-4.4	$D = 10$:	3.3/8.2
$D = 8$:	-4.8/-0.8	$D = 11$:	8.2/12.6

TAB. 8.5 – Valeurs aurorisées pour Λ [TeV^2] pour chaque valeur du nombre de dimensions avec comme paramètres d'entrée $D = 8$ et $\Lambda = -2.5$ TeV^2. La masse de Planck est prise égale à 1 TeV et une forte inélasticité quant à la production de trous noirs a été prise en compte dans la simulation Monte-Carlo

Comparaison avec l'autre mesure

La récente découverte de l'expansion accélérée actuelle de l'univers [15] peut s'expliquer par la présence d'une constante cosmologique positive. Cependant, la mesure de la vitesse d'expansion de l'univers, se traduit par une valeur de la constante cosmologique de l'ordre de 10^{-60} eV^2. Qu'attendre alors du LHC qui, dans le cadre des modèles ADD, ne peut détecter la présence d'une constante cosmologique qu'autour du TeV ? En fait, que peut-on espérer d'une expérience de physique de haute énergie, environ 10 TeV, quant à un problème de physique de très basse énergie à environ 10^{-30} eV ?

Bien que ces investigations restent exotiques, il ne faut cependant pas les oublier pour autant : la mesure cosmologique de Λ concerne une constante cosmologique d'un univers quadri-dimensionnel (au moins de manière effective à ces échelles). Or l'étude précédente s'intéresse précisément à une constante cosmologique dans des univers de dimensions plus élevées, puisque le processus de Hawking est sensible à la courbure dans le bulk. Le lien entre la constante cosmologique quadri-dimensionnelle et celle à D dimensions n'est pas triviale. Soit les dimensions supplémentaires sont étendues, alors ces deux constantes sont du même ordre de grandeur[5] et nous ne pourrons rien tirer du LHC, soit ces dimensions sont compactifiées et alors le lien entre les valeurs effectives dans le bulk et sur la brane dépend des modèles, autorisant ainsi des valeurs de la constante cosmologique dans le bulk très élevées alors que la "projection" quadri-dimensionnelle serait très faible. Evidemment, les dimensions supplémentaires sont nécessairement compactifiées, mais elles peuvent être suffisament grandes pour être considérées comme étendues. La taille des dimensions supplémentaires est donc le critère majeur quant à la détermination des possibilités expérimentales du LHC.

8.4.3 Fin de vie des trous noirs : études préliminaires

L'étude de trous noirs éventuellement produits au LHC offrirait non seuleument un nouveau regard sur la gravitation, mais aussi sur le processus d'évaporation lui-même. Etrangement, cette deuxième approche, qui apporterait elle aussi un éclairement nouveau sur les théories physiques fondamentales, a été très peu abordée. Pourtant, observer la dynamique de l'évaporation est très riche d'informations car, bien que la loi de Hawking semble établie, elle présente toujours un certain nombre de problèmes. En premier lieu, la loi de Hawking ne prend pas en compte la conservation de l'énergie puisqu'elle prédit une probabilité non-nulle d'émettre un quanta avec une énergie supérieure à la masse du trou noir. D'autre part, elle prédit une évaporation totale du trou noir laissant ainsi une singularité nue d'espace-temps, contraire à la conjecture de la censure cosmique proposée par R. Penrose. Finalement, l'approche de Hawking étant semi-classique, la gravitation n'est pas quantifiée et elle ne peut en principe permettre une description de la fin de vie des trous noirs, la température et la masse atteignant l'échelle de Planck. Etudier la dynamique de l'évaporation des trous noirs de manière expérimentale permettrait donc d'obtenir une grande quantité d'informations quant aux problèmes cités ci-dessus. De plus, la multiplicité moyenne des particules produites par des trous noirs au LHC est très faible, les trous noirs étant très rapidement dans le régime de fin de vie. Ainsi, les modifications de la loi de Hawking nécessaires dans la région de Planck affectent un grand nombre de particules et sont donc nécessaire quant à une bonne simulation des possibles évènements observés au LHC.

Cette question peut être abordée de deux points de vue : soit nous avons *sous la main* un cadre théorique cohérent pour la description de la fin de vie des trous noirs, et dans ce cas le LHC permettrait de tester cette, ou ces théories ; soit nous adoptons une approche phénoménologique, sans préjuger du cadre théorique, pour résoudre la fin de vie des trous noirs et chercher alors des signatures expérimentales caractéristiques d'une modification de la loi de Hawking en fin d'évaporation. L'étude de la fin de vie des trous noirs que nous avons initiée dans la référence [177] adopte la seconde approche[6], le but étant de trouver les observables discriminant entre deux hypothèses introduites pour résoudre la conservation de l'énergie :

- l'évaporation suit la loi de Hawking jusqu'à l'émission de l'avant dernière particule, incluse, le dernier quantum émis emportant toute l'énergie disponible restante ;
- la loi d'émission de Hawking est tronquée à l'aide d'une fonction de Heavyside assurant, à chaque instant, qu'aucune particule avec une énergie supérieure à la masse du trou noir ne puisse être émise.

La première hypothèse, utilisée dans la plupart des générateurs, assure une conservation de l'énergie intégrée sur l'ensemble du processus d'évaporation tandis que la seconde conserve l'énergie de manière dynamique. La deuxième hypothèse est plus réaliste sur la fin de vie des trous noirs : au fur et à mesure que le trou noir s'évapore, le maximum de son spectre se décale vers les hautes énergies tandis que l'énergie disponible se décale vers les basses énergies aboutissant rapidement à une probabilité d'émission pour les particules avec une énergie inférieure à

[5] Dans le cas de dimensions supplémentaires *étendues*, la projection de la métrique de Schwarzschild dans le bulk sur la brane conserve la fonction métrique $h(r)$.

[6] La première approche a été abordée par l'étude des trous noirs de Gauss-Bonnet dans le chapitre 8.4.1 ainsi que dans la référence [178] dans laquelle la fin de vie des trous noirs est décrite dans le cadre des théories des cordes (en-deçà d'une certaine taille, les trous noirs sont décrits par un ensemble de longues cordes très excitées) et laisserait une signature expérimentale claire.

l'énergie disponible extrêmement faible. Plus particulièrement, le temps d'émission entre deux quanta tend vers l'infini et cela a permis de montrer que le processus d'évaporation pouvait s'arrêter laissant place à une relique [43, 179] en accord avec la conjecture de la censure cosmique. Il est donc nécessaire de prendre en compte l'éventuelle formation d'une relique stable, se traduisant par une énergie non-émise lors de l'évaporation, dans l'étude de la fin de vie des trous noirs.

Pour cette étude, un générateur Monte-Carlo d'événements trous noirs a été conçu : la masse du trou noir est tirée aléatoirement selon le spectre de masse calculé dans la référence [160] ; le type de particules est obtenu selon le nombre de degrés de liberté interne convolué avec le caractère fermionique ou bosonique et son énergie associée est déterminée par le spectre instantané qui sera, suivant l'hypothèse considérée, la loi de Hawking tronquée ou non. La dynamique d'évaporation de chaque trou noir sera stoppée selon qu'une masse relique ou non est prise en compte. Ce générateur a de plus été interfacé avec le logiciel PYTHIA [164] afin de pouvoir hadroniser les degrés de liberté QCD émis. Notons que dans ce générateur, les trous noirs sont produits au repos. Finalement, cette étude a tout d'abord été menée sans prendre en compte la présence du détecteur ATLAS, mais en appliquant cependant des coupures sur la pseudo-rapidité et l'impulsion tranverse des leptons et jets, compilées dans le tableau 8.6. Cette première approche permet en effet d'observer l'influence des différents scenarii d'évaporation sur des observables comme le flux, l'énergie manquante (dans le sens *non-émise*), la multiplicité ou encore le rapport leptons sur hadrons. Ensuite, le générateur Monte-Carlo a été interfacé avec le programme de simulation rapide du détecteur ATLAS, ATLFAST [180], afin de sonder les possibilités expérimentales relatives à l'étude de la fin de vie des trous noirs. L'ensemble de cette étude a été réalisé en simulant un million d'évènements *trou noir* avec une masse de Planck égale à 1 TeV, une masse relique égale à la masse de Planck et un nombre de dimensions fixé à huit.

photons	électrons	muons	jets
$p_T > 10$ GeV	$p_T > 5$ GeV	$p_T > 6$ GeV	$p_T > 15$ GeV
$\|\eta\| < 2.5$	$\|\eta\| < 2.5$	$\|\eta\| < 2.5$	$\|\eta\| < 5$

TAB. 8.6 – Critères de sélection appliqués à l'impulsion transverse p_T et la pseudo-rapidité η des particules émises.

Etude de l'émission directe

L'étude *sans détecteur* prouve que les quatre cas étudiés, conservation de l'énergie dynamique ou non avec apparition d'une relique stable ou non, sont clairement différentiables les uns des autres. Les deux approches relatives à la conservation de l'énergie se distinguent à la fois grâce à la multiplicité, figure 8.15, et aux flux intégrés, partie gauche de la figure 8.16, tandis que celles relatives à la relique stable se distinguent elles aussi grâce aux flux mais surtout grâce à l'énergie manquante, partie droite de la figure 8.16. Rappelons que si une relique stable apparaît, sa masse sera de l'ordre du TeV et il en sera donc de même pour l'énergie manquante. De plus, comme il l'est aisément vu sur la figure 8.16, les flux intégrés sont particulièrement sensibles à la formation ou non d'une relique stable. Autrement dit, une simulation rigoureuse des évènements trous noirs au LHC doit prendre en compte l'influence d'une relique, conduisant alors à un fort potentiel d'investigation de la fin de vie des trous noirs.

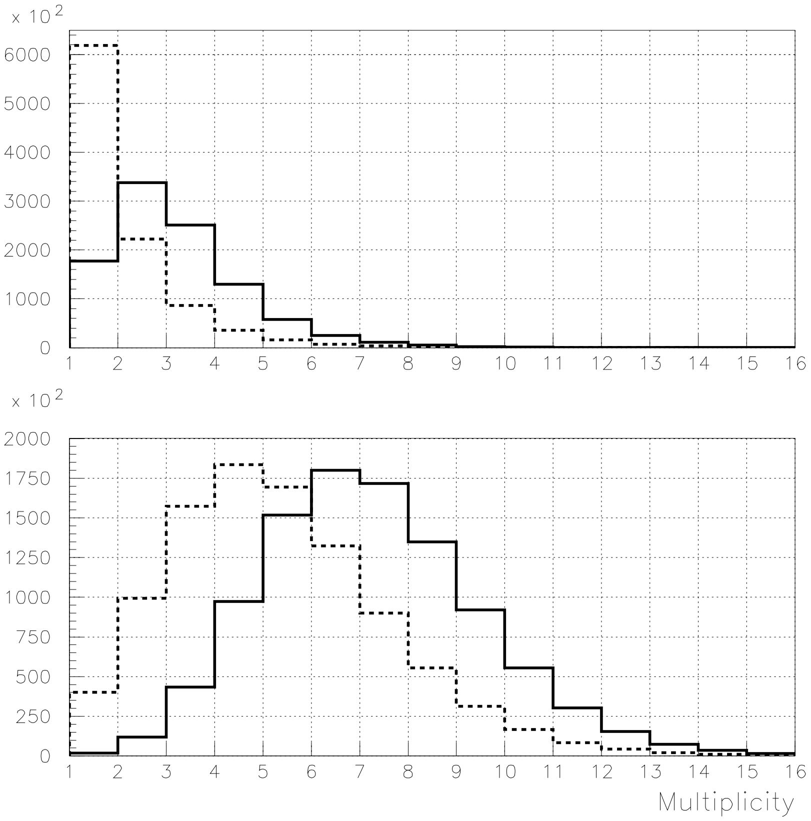


FIG. 8.15 – Multiplicité de l'émission des trous noirs par processus de Hawking. *Haut :* hypothèse de conservation intégrée de l'énergie. *Bas :* hypothèse de conservation dynamique de l'énergie. Dans les deux cas, l'histogramme en trait plein correspond à une évaporation totale du trou noir alors que l'histogramme en pointillé à la formation d'une relique stable.

Simulation de la reconstruction par ATLAS

Le programme ATLFAST permet de simuler le calorimètre d'ATLAS, la reconstruction des particules se faisant à l'aide d'un algorithme de cônes en pseudo-rapidité et angle azimuthal et, pour chaque position angulaire, une résolution gaussienne en énergie est appliquée. Les coupures utlisées dans l'étude sans détecteur sont aussi prises en compte. Différents critères de sélection sur les énergies transverses sont aussi mis en œuvre afin de discriminer les évènements trous noirs du fond QCD :

- présence d'un lepton de haute énergie ($E_T > 25$ GeV) ;
- ou présence d'une importante énergie transverse manquante ($E_T > 25$ GeV) ;
- ou présence d'un jet de haute énergie ($E_T > 150$ GeV) ;
- ou présence de deux jets de haute énergie ($E_T > 50$ GeV).

Avec de tels critères de sélection, l'efficacité pour des évènements trous noirs est de l'ordre de 99 % en l'absence de formation de reliques stables et de 86 % avec formation. Dans cette étude avec détecteur, l'énergie manquante n'est plus définie comme l'énergie non-émise ou non-détectée, mais comme un défaut d'impulsion. L'énergie manquante, dans ce cas, se déduit alors de la masse invariante reconstruite et la présence d'une masse relique en tant que telle n'apparaît donc pas. Les études préliminaires semblent indiquer que les variables discrimantes

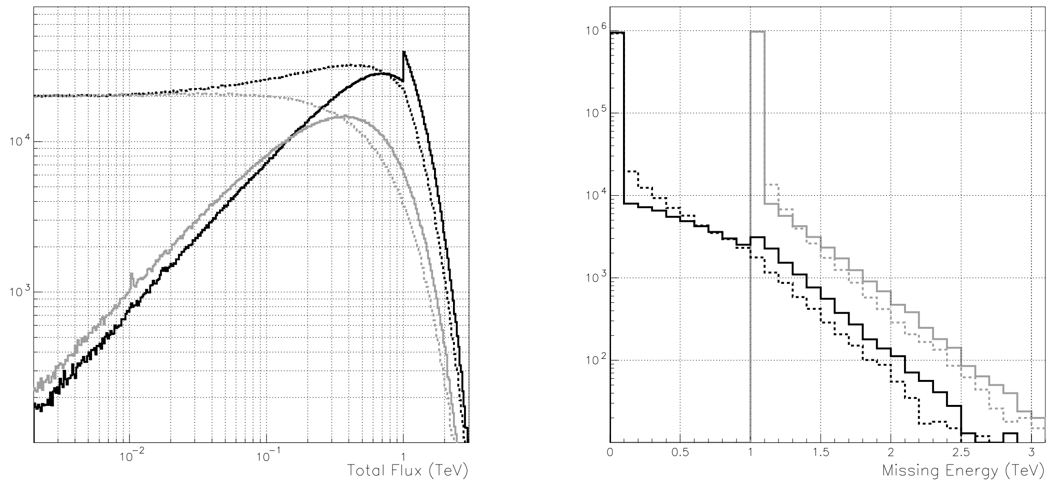


FIG. 8.16 – *Gauche :* flux total de particules émises pour un million d'évènements trous noirs. Le pic sur la courbe pleine n'est pas un artefact mais correspond au cas physique où une particule emporte toute l'énergie. *Droite :* energie manquante. Pour les deux graphiques, un trait plein correspond à une conservation intégrée de l'énergie et un trait pointillé à une conservation dynamique ; un trait noir correspond à une évaporation totale tandis qu'un trait gris à la formation d'une relique.

entre les quatre hypothèses quant à la dynamique de l'évaporation et la fin de vie des trous noirs sont l'énergie transverse manquante, la multiplicité et l'énergie transverse visible. La figure 8.17 représente la distribution des évènements trous noirs en fonction de l'énergie manquante transverse et de la multiplicité en jets. S'il est évident que l'énergie manquante semble un bon facteur discriminant afin de déterminer si les trous noirs s'évaporent totalement ou non, la multiplicité n'est plus aussi discrimante avec une simulation réaliste du détecteur. Dans le cas de l'absence de reliques, partie gauche de la figure 8.17, la multiplicité permet en effet une bonne différenciation entre conservation dynamique ou intégrée de l'énergie. Cependant, si les trous noirs finissent par former une relique, alors la multiplicité ne permet plus cette distinction, comme il l'est clairement vu sur la partie droite de la figure 8.17. L'étude de la distribution des évènements en fonction de l'énergie manquante transverse et de l'énergie visible transverse aboutit à la même conclusion : si la discrimination entre conservation intégrée ou dynamique de l'énergie est possible avec une évaporation totale, cette distinction n'est plus faisable lorsque le trou noir finit par former une relique stable.

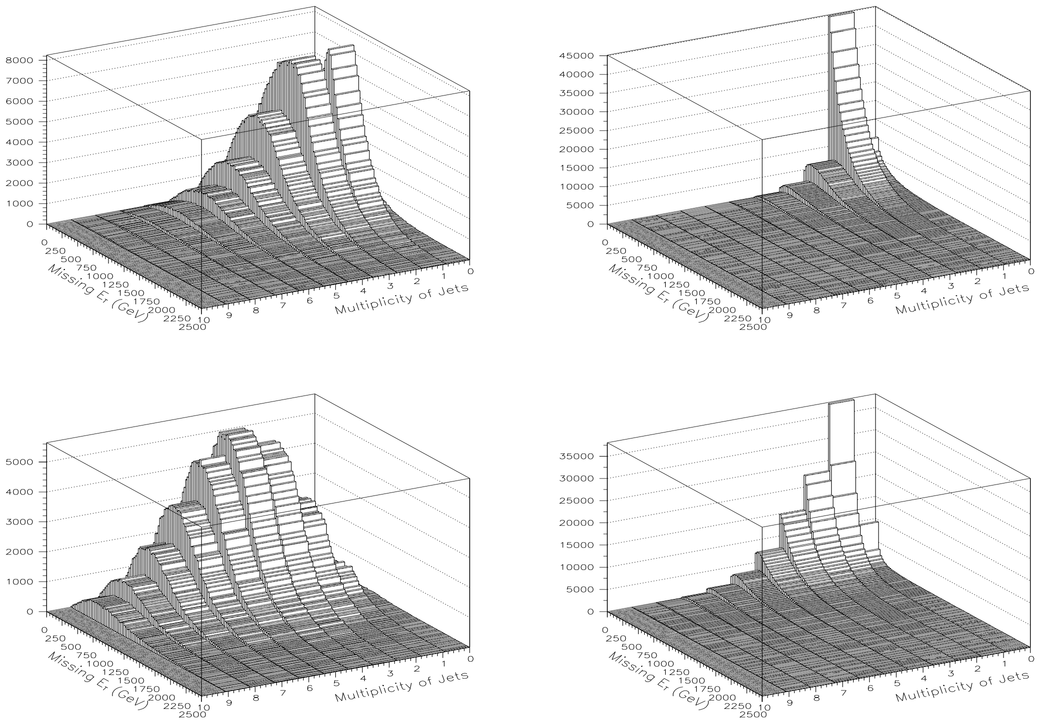


FIG. 8.17 – Distribution du nombre d'évènements trous noirs en fonction de l'énergie manquante transverse et de la multiplicté en jets. *Haut :* conservation intégrée de l'énergie avec évaporation totale à gauche et formation d'une relique à droite. *Bas :* conservation dynamique de l'énergie avec évaporation totale à gauche et formation d'une relique à droite.

Troisième partie

Un peu de cosmologie

Chapitre 9

Gravitinos et spectre de masse des PBHs

Les trous noirs ne constituent pas qu'une source d'information sur la théorie de la gravitation, mais aussi une sonde cosmologique. En effet, si de tels objets se sont formés dans l'univers primordial, alors leur action gravitationnelle ou leurs produits d'évaporation, que ce soit maintenant ou il y a longtemps (bien longtemps, dans une galaxie lointaine, très lointaine) sont riches d'informations sur les inhomogénéités de l'univers aux très petites échelles de longueur. Les trous noirs primordiaux représentent donc un outil complémentaire au Fond Diffus Cosmologique.

Dans ce chapitre, nous quitterons les théories de la gravitation à D dimensions pour revenir au cadre théorique de la Relativité Générale à quatre dimensions, par ailleurs bien plus exotique que le précédent ! Les méthodes de formation des trous noirs primordiaux ainsi que les contraintes obtenues sur ces objets seront brièvement récapitulées dans une premiere partie. Nous présenterons ensuite de nouvelles contraintes sur le spectre de masse de trous noirs primordiaux dérivées à l'aide de leur émission de gravitinos. Les limites supérieures sur ce spectre de masse seront finalement utilisées afin de contraindre le spectre de puissance primordiale aux échelles de longueur relatives à la formation des trous noirs primordiaux.

9.1 Les trous noirs primordiaux

9.1.1 Formation des PBH

Bien avant la proposition de Banks & Fischler de formation de trous noirs microscopiques dans le cadre des scenarii ADD, un mécanisme de formation de trous noirs de masse suffisamment faible pour que le processus d'évaporation devienne important était déjà connu. En effet, lors de la phase inflationnaire primordiale de notre univers, les fluctuations quantiques du vide sont amplifiées, et ce à toutes les échelles de longueur, expliquant l'ensemble des anisotropies observées [181]. En particulier, l'amplification aux petites échelles pourrait conduire à des contrastes de densité à la fois suffisamment élevés et confinés pour que des trous noirs, avec une masse arbitrairement faible, apparaissent. Les plus légers de ces trous noirs primordiaux (PBH) s'évaporent via le processus de Hawking à différents instants selon leur masse initiale. Cependant, le calcul originel du spectre de puissance des fluctuations primordiales est invariant d'échelle et, une fois normalisé sur le spectre de puissance à grande échelle contraint par le Fond Diffus Cosmologique (CMB), ne permet pas d'obtenir une puissance significative aux échelles de longueur de formation des trous noirs pour qu'une quantité suffisante de PBHs se forme. Mais, les échelles de longueur du CMB étant de 50 à 60 ordre de grandeurs supérieures à celles relatives aux PBHs, la conclusion précédente suppose donc que la physique est identique sur ces 50 ordres de grandeurs. Il est donc plausible que le spectre soit plus *bleu* en diminuant les échelles de longueur sondées[1], permettant une formation significative de PBHs et il existe un grand nombre de scenarii cosmologiques dans lesquels une partie non-négligeable de l'univers s'effondrerait pour produire des PBH. Parmi ceux-ci, certains seront contraints par la suite à l'aide des PBHs : les modèles brisant l'invariance d'échelle (BSI) conduisant à une bosse dans le spectre de puissance pouvant se situer à une échelle où les PBH se forment [182, 183] ou bien des phénomènes de transition de phase (lors de la brisure électro-faible par exemple) dans lesquels les collisions de bulles de faux vide entraîne l'apparition de trous noirs primordiaux.

9.1.2 Contraintes observationnelles

La possible détection des produits d'évaporation des PBHs permettrait, en plus d'une confirmation observationnelle du processus de Hawking, de découvrir l'existence de petits trous noirs et d'en tirer une importante quantité d'informations sur les fluctuations primordiales aux très petites échelles. Le processus de Hawking n'étant toujours pas expérimentalement observé, l'existence des PBHs n'est donc pas encore confirmée par l'observation. Cependant, leur non-observation a déjà permis d'obtenir de très bonnes contraintes sur la densité de PBHs, $\Omega_{PBH} = \rho_{PBH}/\rho_{crit}$, présents dans l'univers aujourd'hui, pouvant se traduire en une contrainte sur le contraste de densité primordiale aux échelles de longueur sondées par ces objets.

Si des trous noirs se sont formés dans l'univers primordial, une certaine partie d'entre eux sont en train de s'évaporer actuellement, leurs produits de désintégration contribuant au rayonnement cosmique. En estimant la contribution au rayonnement cosmique des particules émises par les PBHs, une limite supérieure sur la densité de ces derniers présents actuellement dans l'univers [166, 184] a été déterminée. La méthode est identique à celle utilisée dans le chapitre 8.3.1 : le flux d'antiprotons primaires provenant des PBHs qui se concentrent dans le halo de matière noire, ne doit pas excéder le flux observé d'antiprotons d'origine secondaire. L'utilisation du rayonnement en photon gamma permet aussi d'aboutir à une limite supérieure sur Ω_{PBH}, la contribution provenant du rayonnement des PBHs ne devant pas excéder le fond diffus gamma, auquel la contribution des galaxies lointaines est soustraite. Chaque méthode a son avantage, le signal d'antiprotons ne donne accès qu'aux PBHs confinés dans le halo diffusif (la contribution provenant des sources présentes dans le halo de matière noire mais hors du halo diffusif étant négligeable [166]) mais le fond d'antiprotons secondaires est ténu, tandis que le signal standard de gamma est bien plus élevé mais permet l'accès à l'émission de PBHs à des distances cosmologiques, $z \leq 700$. Dans les deux études, la limite supérieure sur la densité de trous noirs primordiaux est de l'ordre de $\Omega_{PBH} < 10^{-9}$.

La densité de trous noirs primordiaux actuellement présents dans l'univers étant très faible, la limite supérieure mentionnée ci-dessus peut être traduite en une contrainte forte quand à la fraction β d'univers primordial qui s'effondre sous forme de trous noirs primordiaux. Cependant, la contrainte provenant des antiprotons ne concerne que les PBHs formés dans une gamme de masse leur permettant de s'évaporer actuellement. L'utilisation de la contrainte antiprotons aboutit donc à une limite supérieure sur cette fraction β dans une certaine gamme de masse. La masse du trou noir formé dans l'univers primordial étant lié à la taille de la fluctuation et l'amplitude de la fraction au contraste de densité, les contraintes aboutissant à β en fonction de la masse du PBH sont bien une expression des inhomogénéités primordiales. Dans un modèle de type BSI [182, 183], la traduction de la contrainte antiprotons en terme d'inhomogénéités primordiales a abouti à une fraction d'univers β s'effondrant en PBH variant de 10^{-27} à 10^{-14} pour des masses de trous noirs s'étalant de 10^{14} g à 2×10^{17} g [185]. On peut noter que ces valeurs sont inférieures à celles de Ω_{PBH} car il s'agit de contrainte au moment de la formation des trous noirs qui a lieu dans un univers dominé par le rayonnement où les PBHs sont « moins dilués » par l'expansion que la matière relativiste. D'autres méthodes, plus ou moins fiables, sont utilisées afin d'étendre la limite supérieure sur β à un spectre de masse plus large. Par exemple, si des trous noirs sont en fin de vie pendant la nucléosynthèse primordiale, alors

[1]Les résultats récents de WMAP [17] ne vont pas en ce sens. Il s'agit cependant d'une mesure sur une très petite plage d'échelles de longueur et qui ne s'inscrit pas en faux par rapport à cette étude.

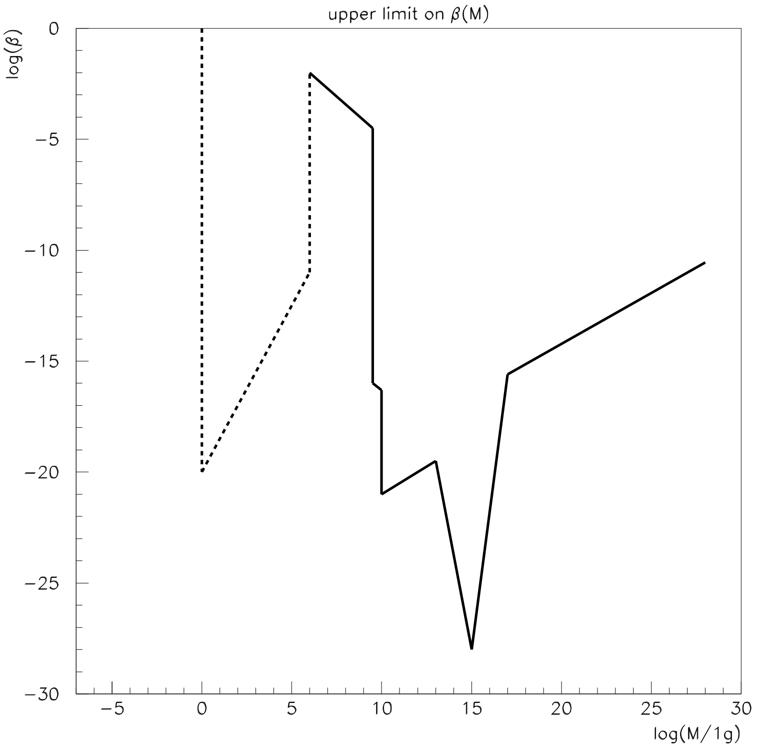


Fig. 9.1 – Limite supérieure sur la fraction d'univers primordial s'effondrant en trous noirs primordiaux (PBHs) en fonction de la masse des PBHs (voir texte pour une explication de ces limites).

leurs produits de désintégration très énergétiques vont briser les éléments légers en formation, dont l'abondance est par ailleurs fortement contrainte. Ainsi, il est nécessaire que très peu de trous noirs ayant un temps de vie, directement lié à leur masse, égale à l'époque de la nucléosynthèse primordiale se forment afin de ne pas modifier l'abondance des éléments légers. Cette contrainte, appelée aussi contrainte de sur-production d'entropie, correspond à des masses de PBHs allant de 10^9 g à 10^{14} g. Il est aussi nécessaire que les PBHs ne soient pas produits en trop grand nombre sinon ils fermeraient l'univers. Cette contrainte agit sur deux gammes de masses : premièrement pour $M_{PBH} > 10^{15}$ g, cette masse limite correspondant à des trous noirs dont le temps de vie est égal à l'âge de l'univers, les PBHs ne s'évaporent pas et contribuent directement à la quantité de matière. Pour des masses inférieures à 10^9 g, les contraintes sont plus pauvres : d'une part, si $M_{PBH} < 10^6$ g, il est nécessaire que les hypothétiques reliques stables ne soient pas en nombre suffisamment élevé pour fermer l'univers et, d'autre part, pour 10^6 g$< M_{PBH} < 10^9$ g, la contrainte provient du rapport baryon sur photon. L'ensemble des limites supérieures obtenues avec les contraintes citées ci-dessus est récapitulé de manière quantitative sur la figure 9.1 et permet d'obtenir de nombreuses informations sur le spectre de fluctuations primordiales aux très petites échelles, moyennant un modèle cosmologique de production de PBHs. En particulier, cette fraction d'univers s'effondrant en PBHs permet d'obtenir des contraintes sur l'indice spectral ainsi qu'un éventuel *running* de ce dernier.

9.2 Nouvelles contraintes sur le spectre de masse [187]

Contraintes en mSUGRA

Si la supersymétrie (SUSY) est bien une symétrie fondamentale de la nature [20], les partenaires supsersymétriques associés aux particules du modèle standard sont alors produites dans l'Univers primordial conduisant à une nouvelle composante de matière et/ou de rayonnement. Cette nouvelle composante peut être salutaire ou problématique : au contraire du neutralino qui apporte une solution au problème de la Matière Noire, le gravitino, partenaire SUSY du gravitons, peut aboutir à des prédictions en contradiction avec les contraintes cosmologiques actuelles. Dans le cadre de la Supergravité minimale (mSUGRA), cette super-particule est métastable et sa masse est de l'ordre de l'échelle électro-faible, *i.e.* 100 GeV, par construction. Etant métastables, les gravitinos produits dans l'Univers primordial vont se désintégrer après la nucléosynthèse primordiale au risque de dissocier les éléments légers. Toute source de production primordiale de gravitinos doit donc être étudiée en regard de cette contrainte[2]. En particulier, les trous noirs primordiaux, se couplant via la gravitation aux champs quantiques, seront une source importante de gravitinos.

Habituellement, le *problème* des gravitinos en cosmologie s'étudie via leur désintégration en photon-photino, le flux de photons de hautes énergies détruisant alors les éléments légers produits lors de la nucléosynthèse primordiale. Il existe cependant un canal plus sensible basé sur la désintégration du gravitinos en gluon-gluino [188, 189]. Dans cette approche, confirmée par de récentes analyses [190], les antiprotons issus de la fragmentation du gluon vont interagir avec les noyaux légers en équilibre formant ainsi une source de noyaux légers hors équilibre. Ainsi, les noyaux de ^{6}Li, ^{7}Li et ^{7}Be produits par collisions de noyaux hors équilibre avec les noyaux de ^{4}He à l'équilibre sont comparés aux abondances, par ailleurs très faibles, observées pour de tels éléments. Cette étude aboutit à la limite supérieure suivante quant à la densité de gravitinos pouvant être formés dans l'Univers primordial [188, 189] :

$$n_{3/2} < 1.1 \times 10^{-13} m_{3/2}^{-1/4}, \tag{9.1}$$

$m_{3/2}$ étant la masse du gravitino en GeV. Cette forte contrainte sur la densité de gravitinos peut alors être traduite en une contrainte sur le nombre de PBHs formés en la reliant au nombre de gravitinos émis par de ces objets. Cette contrainte s'appliquera à des trous noirs de faibles masses car pour émettre des gravitinos, la température des PBHs doit être supérieure à la masse du gravitino, imposant des trous noirs de masse inférieures à M [g] $< (10^{13}\ g)/m_{3/2}$ [GeV]. Les PBHs considérés auront alors une température au moins égale 100 GeV et la limite géométrique sera une approximation suffisante pour les facteurs de corps gris. Le nombre total de quanta émis par degrés de liberté s'obtient en intégrant le spectre de Hawking sur l'énergie ainsi que sur le temps durant lequel le trou noir peut émettre ce type de quanta :

$$N_{TOT}^{(i)} = \frac{27 \times 10^{24}}{64\pi\alpha_{SUGRA}} \int_{T_i}^{T_{Pl}} \frac{dT}{T^3} \int_{m/T}^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - (-1)^{2s}}. \tag{9.2}$$

Dans cette équation, T_i correspond à la température à partir de laquelle le trou noir peut émettre le quanta de type i, *i.e.* $T_i = m$, m étant la masse du quanta. La quantité x correspond à ω/T, ω étant l'énergie de la particule émise et α_s représente le nombre de degrés de liberté en Supergravité avec $M^2 dM = -\alpha_{SUGRA} dt$. Le nombre de gravitinos émis par les PBHs déduit de la formule précédente ne devant pas excéder la limite supérieure dérivée en [188, 189], cette limite se traduit naturellement en une limite supérieure sur la densité de trous noirs primordiaux en fonction de leur masse. Enfin, en supposant que les PBHs se sont formés durant une époque dominée par le rayonnement, la densité de PBHs peut alors être liée à la fraction d'Univers β qui s'effondre sous forme de trous noirs. La figure 9.2 représente les résultats obtenus sur

[2] C'est ainsi que l'on peut dériver une contrainte sur la température de *reheating* de l'Univers [186].

cette fraction en fonction de la masse des PBHs et ce pour deux valeurs de la masse du gravitino (courbes bleues). Ces résultats, mis en regard des limites obtenues avant (courbe noire), permettent une amélioration dans une gamme de masse, $M_{PBH} < 10^{10}$ g, où les contraintes précédentes étaient pauvres et peu fiables. Pour $M_{PBH} > 10^{10}$ g, la limite supérieure remonte rapidement puisque les trous noirs ne sont plus assez chauds pour émettre des gravitinos.

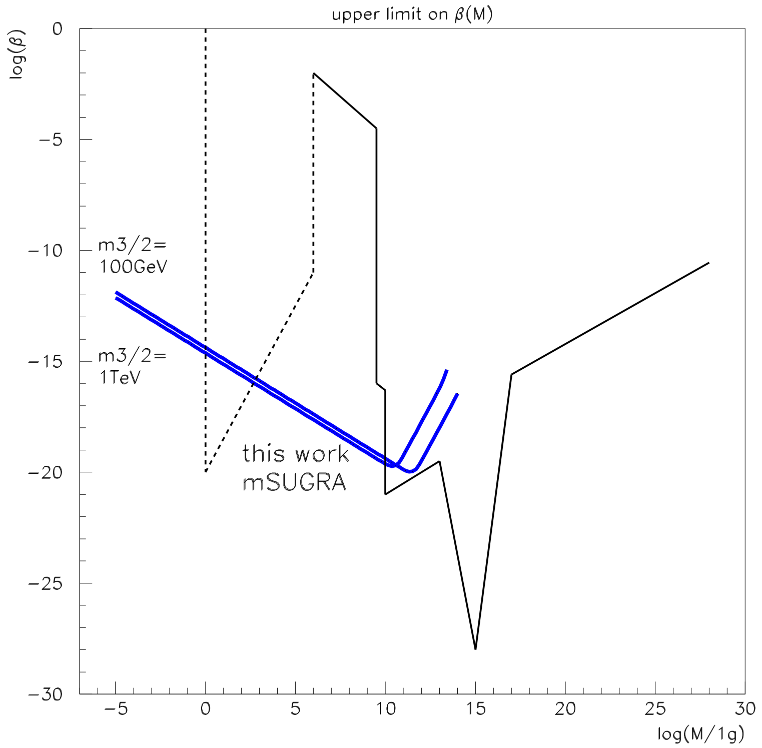


Fig. 9.2 – Limites supérieures sur la fraction d'Univers β qui s'effondre en PBHs en fonction de la masse du trou noir formé. La courbe noire correspond aux résultats précédents et les deux courbes bleues aux résultats obtenus à l'aide des gravitinos dans le cadre mSUGRA, pour $m_{3/2} = 100$ GeV (courbe du bas dans la région des masses élevées) et $m_{3/2} = 1$ TeV (courbe du haut dans la région des masses élevées).

Contraintes en GMSB

L'utilisation de gravitinos émis par les PBHs permet d'obtenir le même type de contraintes dans des scenarii SUSY différents. Par exemple, dans le cadre des modèles de Brisure de Supersymétrie par Médiation de Gauge (GMSB), le gravitino est la particule SUSY la plus légère, qui pourrait compter pour la Matière Noire si la R-parité est conservée. Ainsi, il est nécessaire que la densité de gravitino $\Omega_{3/2,0}$, mesurée aujourd'hui, n'excède pas la densité de matière observée $\Omega_{M,0}$. La densité de gravitinos émis par les PBHs se reliant à la fraction β, la condition $\Omega_{3/2,0} < \Omega_{M,0}$ de traduit par :

$$\beta \leq \frac{\Omega_{M,0}}{M_{3/2}\frac{m_{3/2}}{M_{PBH}}\sqrt{\frac{t_{eq}}{t_f}}}, \tag{9.3}$$

dans laquelle la dilution des gravitinos a été prise en compte. Dans cette formule, M_{PBH} représente la masse initiale du PBH formé, t_{eq} est le temps où l'ère radiative cesse et t_f est l'instant de formation du PBH. Les contraintes de WMAP fixant la densité de matière à environ 0.27 [16], les limites supérieures quant à β sont représentées sur la figure 9.3 dans deux cas extrêmes pour la masse du gravitino : $m_{3/2} = 10^{-5}$ GeV et $m_{3/2} = 10$ GeV. Ces limites supérieures sont du même ordre de grandeur dans la gamme de masse peu contrainte, $M < 10^{10}$ g, mais s'étendent à des plus grandes valeurs de la masse des trous noirs primordiaux, les valeurs autorisées de la masse du gravitino étant plus faibles dans le cadre des modèles GMSB que mSUGRA.

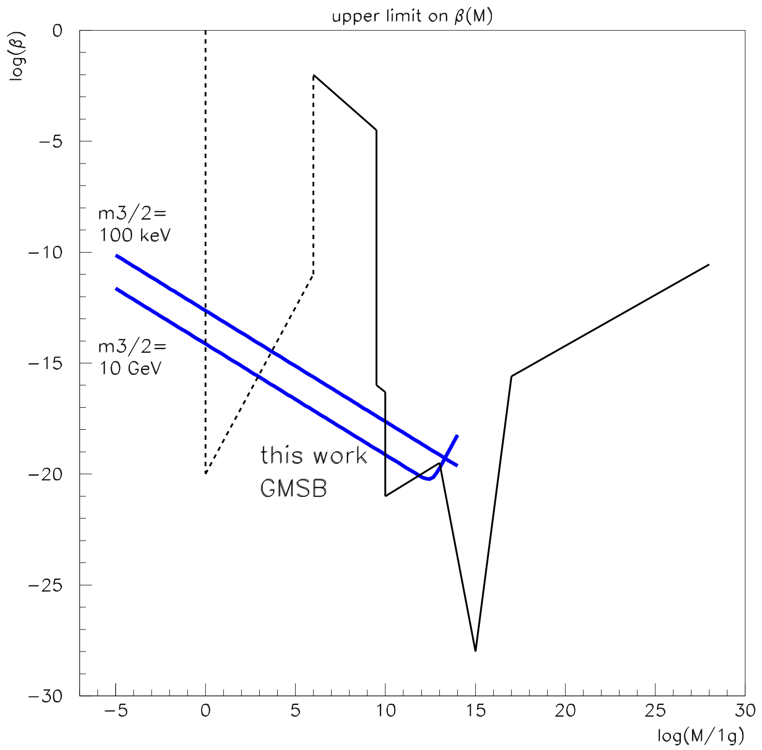


Fig. 9.3 – Limites supérieures sur la fraction d'Univers β qui s'effondre en PBHs en fonction de la masse du trou noir formé. La courbe noire correspond aux résultats précédents et les deux courbes bleues aux résultats obtenus à l'aide des gravitinos dans le cadre GMSB, pour $m_{3/2} = 10^{-5}$ GeV (courbe du bas dans la région des masses élevées) et $m_{3/2} = 10$ GeV (courbe du haut dans la région des masses élevées).

9.3 Conséquences cosmologiques [187]

Toute contrainte sur la densité de PBHs dans l'Univers primordial peut renseigner sur les inhomogénéités primordiales aux très petites échelles de longueur. Les contraintes présentées ci-dessous ne sont pas à mettre en concurrence avec les contraintes CMB, mais doivent se voir comme une étude complémentaire compte tenu des 50 ordres séparant les échelles de longueur sondées par le CMB et celles sondées par les PBHs. Pour contraindre le spectre de puissance primordiale $P(k)$, nous transcrirons les limites supérieures sur β en contrainte sur l'indice spectral n, défini par $P(k) \propto k^n$ ($n = 1$ pour un spectre invariant d'échelle). La variance du spectre de masse des PBHs $\sigma_{PBH}(t)$ va évoluer en fonction de l'indice spectral [191, 192] :

$$\sigma_{PBH}(t_{form}) = \sigma_{PBH}(t_0) \left(\frac{M_H(t_0)}{M_H(t_{eq})} \right)^{\frac{n-1}{6}} \left(\frac{M_H(t_{eq})}{M_H(t_{form})} \right)^{\frac{n-1}{4}}, \tag{9.4}$$

t_{form} représentant l'instant de formation du trou noir, t_{eq} l'instant de la transition de l'ère radiative à l'ère de poussière et t_0 l'instant présent. $M_H(t)$ est la masse de Hubble, qui est égale en première approximation à la masse du PBHs à t_{form}. La variance de masse aujourd'hui est mesurée par le CMB et cette quantité n'évolue que si le spectre de puissance n'est pas invariant d'échelle. Pour compléter l'étude, la fraction d'Univers β s'effondrant en trou noir se déduit de la variance dans le spectre de masse via :

$$\beta \simeq \frac{\sigma_{PBH}(t_{form})}{\sqrt{2\pi}\delta_{min}} \exp\left(-\frac{\delta_{min}^2}{2\sigma_{PBH}^2(t_{form})} \right), \tag{9.5}$$

la quantité $\delta_{min} \simeq 0.3$ étant la valeur minimum du contraste de densité pour qu'un trou noir primordial se forme. Ainsi, les limites supérieures obtenues dans le chapitre précédent mènent aux estimations de l'indice spectral suivantes : $n < 1.20$ dans le cas des modèles mSUGRA, les limites précédentes étant de l'ordre de 1.23 et 1.31 [192, 193] et dans le cadre des modèles GMSB, $n < 1.20$ pour $m_{3/2} \sim 10$ GeV et $n < 1.21$ pour $m_{3/2} \sim 100$ keV. Ces améliorations sont essentiellement dues à la grande gamme de masses sondées ainsi que la contribution des faibles masses, augmentant la sensibilité au "bras de levier" due à l'écart à l'invariance d'échelle, appelé *tilt*. En supposant une ère de poussière primordiale de notre Univers, la fraction d'Univers s'effondrant est alors augmentée et vaut $\beta > \delta^{13/2}$ aboutissant à une contrainte plus forte sur l'indice spectral $n < 1.19$. Le résultat est exprimé ici du point de l'indice spectrale n dans le but de souligner l'amélioration apporter par cette étude sur celles qui la précédent. Il s'agit là d'une formulation effective : un indice spectrale substantiellement supérieur à l'unité est aujourd'hui exclu par les mesures du CMB [17]. Cela n'invalide pas pourtant autant le résultat présenté ci-dessus : les PBHs permettent de contraindre la valeur de spectre de puissance primordiale à des échelles bien plus petites que celles sondées par le CMB.

Bien que le spectre de puissance primordiale soit génériquement prédit comme invariant d'échelle, une certaine "excursion" autour de cette prédiction est autorisé via le *running* de l'indice spectral [194], c'est-à-dire sa dépendance avec le nombre d'onde k, défini par :

$$P(k) = P(k_0) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_s(k_0) + \frac{1}{2}\alpha_s \ln\left(\frac{k}{k_0}\right)}. \tag{9.6}$$

Dans le cadre de la Supergravité, un running positif α_s s'avèrerait très prometteur. L'étude précédente impose comme limite supérieure sur ce running $\alpha_s < 2 \times 10^{-3}$, offrant une grande capacité d'exclusion puisque dans un large panel de modèles d'Univers primordial, inflationnaires [195] ou alternatifs [196], le running prédit serait de l'ordre de 10^{-3}.

Motivé par des modèles microphysiques [182], de nouvelles contraintes cosmologiques peuvent être obtenues en explorant des spectres de puissance ayant à la fois un tilt et une marche à une échelle caractéristique augmentant de manière significative la puissance aux petites échelles de longueur. L'amplitude de la marche p^{-2} est définie comme le rapport entre la puissance en

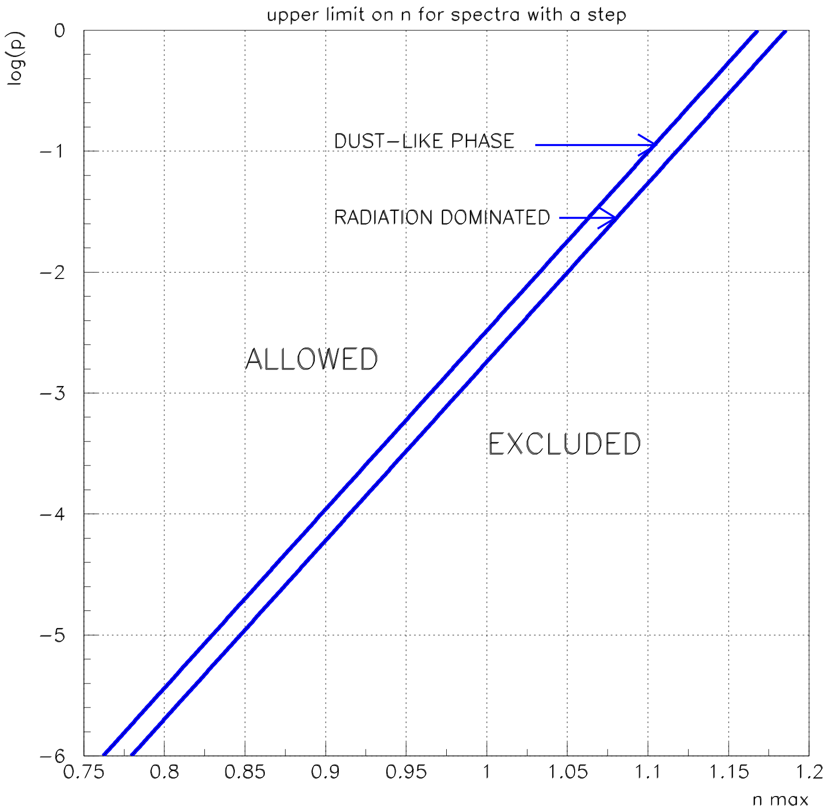


FIG. 9.4 – Valeur maximale autorisée de l'indice spectral en fonction du paramètre p de l'amplitude de la marche présente dans le spectre de puissance primordiale : $p^{-2} = P(k_{small\ length})/P(k_{long\ length})$.

deçà de la marche sur la puissance au delà de la marche. Il est alors possible de déterminer la valeur maximale autorisée pour l'indice spectrale en fonction de ce paramètre p. Les résultats sont présentés sur la figure 9.4 et montrent, dans une ère radiative ou de poussière, que la limite supérieure sur n devient extrêmemement contraignantes pour des faibles valeurs de p. Les différentes valeurs des masses de gravitinos utilisées sont incluses dans l'épaisseur des lignes. Cette présentation des résultats permet une comparaison directe avec les études des modèles BSI et apporte une amélioration notable par rapport aux travaux précédents.

Enfin, cette limite supérieure permet d'exclure l'hypothèse de la Matière Noire sous forme de reliques stables [199] imposant, dans les modèles avec une marche, que cette dernière apparaisse dans une gamme de masse inférieure à 10^9 g. Notre étude prouve que l'amplification requise n'est pas compatible avec la contrainte des gravitinos.

Chapitre 10

Matière Noire de Kaluza-Klein

La cosmologie physique est particulièrement intéressante et riche en ce sens qu'elle présente plusieurs énigmes. Le problème de la Matière Noire fait partie de ces questions auxquelles les cosmologistes tentent de répondre : il se dessine un faisceau de preuves expérimentales assez convergent pour conclure que la plus grande partie de la matière présente dans notre univers n'est pas visible, mais par ailleurs pas assez convergent pour déterminer quelle est cette matière[1]. De nombreuses propositions théoriques provenant soit de l'astrophysique soit de la physique des particules et satisfaisant aux conditions nécessaires pour être de la Matière Noire existent, mais aucune d'entre elles n'est confirmée expérimentalement, bien que certains candidats soient déjà exclus.

Cette question est abordée dans ce chapitre à la lumière des théories à dimensions supplémentaires. Apres une rapide présentation des observations soulevant le problème de la Matière Noire et des différents candidats, nous présenterons un candidat qui a émergé récemment : la particule de Kaluza-Klein la plus légère (LKP). Finalement, la possible détection indirecte via la mesure dans le rayonnement cosmique des produits d'annihilation de la LKP, si cette particule s'avèrait être le principal constituant de la Matière Noire dans la Voie Lactée, sera abordée.

10.1 Le problème de la Matière Noire

10.1.1 Indices observationnels

Les méthodes d'observations de la Matière Noire, sans parler ici de détection ici, se basent sur un principe simple : puisqu'elle ne peut être observée par sa lumière, il faut rechercher ses effets gravitationnels. Le premier indice observationnel poussant à postuler l'existence d'une matière non visible dans l'univers provient de l'observation des courbes de rotation de galaxies spirales [18]. En effet, en mesurant la distribution de masse lumineuse d'une galaxie, il est possible, grâce au théorème du viriel[2] de déterminer la vitesse de rotation de la galaxie en fonction de la distance à son centre, cette vitesse pouvant être mesurée par ailleurs. Or, ces deux approches expérimentales ne concordent pas. Cependant, il est possible d'ajouter assez loin du centre galactique une certaine quantité de matière, qui serait donc invisible, afin que les résultats issus du théorème du viriel s'accordent avec l'observation directe des courbes de rotation.

L'études des amas de galaxies permet aussi de mettre en évidence la présence de Matière Noire. Il est possible de mesurer d'une part la masse gravitationnelle des amas en étudiant la dispersion de vitesse des galaxies autour de la vitesse moyenne et d'autre part, la masse

[1] Il est intéressant de noter que malgré des faiblesses théoriques, les théories *MOND*, pour *Modified Newton Dynamics*, permettent de rendre compte des courbes de rotation des galaxies de façon spectaculaire et sans Matière Noire [200].

[2] $E_{pot} + 2E_{cin} = 0$, l'énergie potentielle provenant du champ de gravitation.

lumineuse de l'amas en sommant la contribution de chaque galaxie. Les résultats de ces études prouvent encore que la masse totale gravitationnelle est supérieure à la masse lumineuse. Bien que fréquemment utilisée cette méthode se base sur deux hypothèses : la "virialisation" des amas et l'isotropie du champ de vitesse. S'ajoutent à cette étude les observations en rayonnement X du gaz chaud présent dans les amas, riches d'informations sur la quantité de baryons. Ces études montrent que le rapport $M_b/M_{tot} \simeq 10 - 12$ %, indiquant que la Matière Noire ne serait pas baryonique.

L'étude des effets de lentilles gravitationnelles est aussi un outil important pour l'observation de Matière Noire. Lorsque un objet gravitationnel très massif se trouve sur la ligne de visée entre l'observateur et la source, alors les rayons lumineux vont être courbés conduisant à des images déformées. L'empreinte gravitationnelle par effet de lentille peut donc révéler la présence de Matière non-lumineuse. L'effet de *weak lensing*, quoique plus difficile à observer, est le plus prometteur quant à l'observation de Matière Noire car il permet de cartographier la distribution de masse.

La quantité de matière est maintenant très bien connue grâce à des mesures combinées de différentes sondes cosmologiques. D'une part, le CMB est très sensible à la géométrie de l'univers et permet une mesure précise de la densité totale dénergie Ω_{tot}. De plus, une fois combiné à d'autres observables cosmologiques, en particulier avec les Supernovae et les mesures des grandes structures, il permet d'avoir accès à la densité d'énergie de chaque constituant de l'univers. Ces études combinées ont permis de montrer que l'univers était pratiquement plat $\Omega_{tot} \simeq 1$, principalement constitué d'une énergie inconnue, appelée Energie Noire, $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ et de matière $\Omega_M \simeq 0.3$ de nature en grande partie inconnue puisque la contribution provenant des baryons est de quelques pourcents $\Omega_b \simeq 0.04$. Les mesures les plus récentes des paramètres cosmologiques se trouvent dans la références [17] où les trois années de prises de données de l'expérience satellite WMAP sont prises en compte.

Toutes ces mesures soulèvent un problème de compréhension de nombreux phénomènes astrophysiques et cosmologiques qui semblent d'origine commune, les observations mentionnées ci-dessus étant en accord les unes par rapport aux autres. Pourtant, la Matière Noire n'a été observée que par son action gravitationnelle qui ne permet pas de déterminer quelle est sa nature. De plus, il n'est pas encore exclu que la Matière Noire ne soit pas à l'origine de ces phénomènes, remettant ainsi en cause son existence. Des modifications de la dynamique newtonienne, comme les théories de type MOND [201] pour Modified Newton Dynamics, ou bien des modifications des lois de la gravitation à grande distance, comme les théories scalaire-tenseur [202] ou encore celles en $f(R)$ [203], pourraient aussi expliquer les observations citées ci-dessus. Il faut cependant insister sur le fait que la Matière Noire reste l'explication la plus favorisée puisqu'elle est la seule qui offre actuellement un cadre unifié pour résoudre les problèmes mis en exergue par l'observation, à l'exception de l'accélération de l'univers qui est une question majeure mais non abordée dans cette thèse.

10.1.2 Quelques candidats Matière Noire

Résoudre le problème de la Matière Noire consiste à trouver un *objet* matériel qui puisse rendre compte des observations. Ce candidat doit alors vérifier deux propriétés élémentaires :

- il doit être suffisament lourd et/ou dense pour être la principale contribution à la densité de matière et,
- il doit très peu interagir pour ne pas être observable avec les techniques actuelles.

Une fois ces deux caractéristiques statisfaites, il sera nécessaire de s'assurer que le candidat choisi puisse rendre compte quantitativement de la densité de matière mesurée sans contredire les autres observables cosmologiques. En particulier, les données actuelles favorisent un scenario avec une Matière Noire froide et essentiellement non-baryonique. Les candidats à la Matière Noire peuvent être classés selon leur nature : Matière Noire baryonique ou non, et selon leur appartenance "socio-physique" : astrophysique ou physique des particules.

Matière Noire baryonique

En ce qui concerne la Matière Noire baryonique, il existe tout d'abord deux candidats d'origine astrophysique : les nuages de gaz moléculaire de H_2 et des MACHOs pour Massive Compact Halo Object. Le gaz moléculaire est extrêmement difficile à mettre en évidence expérimentalement et son existence est sujet à caution : il a pu être observé en grande proportion dans la galaxie NGC 891 mais il serait absent de la Voie Lactée. Les MACHOs peuvent être des étoiles peu rayonnantes (naines brunes ou naines rouges) ou des trous noirs. Cependant les expériences EROS [205] et MACHO [206] ont montré que ces candidats ne peuvent être la source principale de Matière Noire.

Les observations les plus récentes tendent à prouver que la Matière Noire non-baryonique est principalement composée de gaz chaud inter-galactique. Les galaxies sont entouré d'halos de ce gaz dont l'observation en rayon X montre que leur masse est bien plus élevée que celle des galaxies.

Matière Noire non-baryonique

Il existe un premier candidat provenant de la physique des particules : le neutrino, puisque ce dernier s'avère être une particule massive. Le neutrino en tant que constituant dominant de la Matière Noire est cependant très peu favorisé : compte tenu de leur faible masse, ils seraient encore ultra-relativistes à l'instant de leur découplage [207], engendrant des structures bien plus grandes que celles observées [208].

Le candidat le plus prometteur, du moins le plus répandu, pour expliquer la Matière Noire non-baryonique fait appelle à des extensions du modèle standard de la physique des particules. En effet toute modification de ce modèle, et il y en a, entraîne nécessairement une modification de la physique de l'univers primordial. Ainsi tout nouveau type de particules serait produit dans l'univers très jeune et pourrait contribuer à la Matière Noire, si ce n'est complètement expliquer sa présence. Il faut donc chercher dans les extensions du modèle standard de nouvelles particules qui soient stables, massives et qui interagissent faiblement, impliquant nécessairement qu'elles soient neutres vis-à-vis de la QED et de la QCD. La plus populaire de ces particules, appelées WIMPs pour Weakly Interacting Massive Particle, est la particule supersymétrique la plus légère (LSP). La supersymétrie [20], seule extension du groupe de Poincaré introduisant une symétrie entre boson et fermion, permet de résoudre de nombreux problèmes du modèle standard tout en retrouvant ses résultats principaux. Dans un cadre supersymétrique, il est possible de déterminer le caractère de la particule par une parité particulière : si la particule est déjà dans le modèle standard, sa $R-$parité vaut $R = +1$ alors qu'elle vaut $R = -1$ s'il s'agit d'un partenaire supersymétrique. Ainsi, en imposant la conservation de cette parité cela interdit à une particule supersymétrique de se désintégrer en particule du modèle standard et la particule supersymétrique la plus légère est ainsi stable [209]. La LSP varie selon le modèle supersymétrique considéré. Dans le cas de l'extension minimale du modèle standard incluant la supersymétrie, la LSP est, dans une grande région de l'espace des paramètres, le neutralino qui interagit faiblement et a une masse au moins de quelques dizaines de GeV. C'est donc un bon candidat Matière Noire. Dans un modèle de type GMSB, le gravitino est la particule supersymétrique la plus légère qui est aussi un bon candidat Matière Noire : il peut atteindre des masses de l'ordre de quelques GeV et il interagit gravitationnellement, donc avec une très faible intensité[3].

L'ajout de WIMPs froids (c'est-à-dire non-relativistes) permet de rendre compte de l'observation, la densité relique de ces particules dépendant des valeurs des paramètres de la théorie des particules via la section efficace d'annihilation et la masse du WIMP. La présence de WIMPs permet d'expliquer la formation des grandes structures [210] et fournit un spectre de fluctuation de masse suffisant pour l'apparition de halos galactiques [211]. Enfin, les halos de WIMPs prennent une forme essentiellement universelle dépendant de la masse de la particule Matière

[3]Les espoirs de détection deviennent malheureusement nuls.

Noire et qui explique bien les courbes de rotation des galaxies à grandes distances [212].

Malgré ces succès, la présence de WIMPs en tant que contribution majeure à la Matière Noire souffre de certains problèmes. En particulier, les WIMPs s'accumulent au centre des galaxies ne reproduisant plus les courbes de rotation proche du centre galactique [213]. De plus, les WIMPs auraient tendance à s'accumuler en petits grumeaux conférant alors une sous-structure au halo de Matière Noire appelée, en anglais, *clumpiness*. Cette sous-structure confirmée par des simulations numériques à N-corps [215] est essentielle pour l'estimation des effets observationnels.

L'axion peut aussi être un bon candidat à la Matière Noire. Ces particules proviennent d'une extension du Modèle Standard visant à expliquer pourquoi la violation de symétrie CP par l'interaction forte est faible (les contraintes sur cette violation provenant par exemple des mesures du moment dipolaire du neutron). L'idée de Peccei & Quinn [216] consiste à rendre dynamique l'intensité du terme qui viole CP dans le lagrangien QCD afin qu'il atteigne un état d'équilibre dans le potentiel effectif ne violant plus, ou peu, cette symétrie. Ce potentiel effectif s'obtient en ajoutant de nouveaux champs et possède une symétrie chirale spontanément brisée. Cette nouvelle symétrie chirale présentant de plus une anomalie, le boson de Goldstone issu de la brisure spontanée de la symétrie devient donc massif. Avec cette transformation, les termes violant CP sont éliminés dans l'état vide grâce à l'ajout d'une nouvelle particule massive : l'axion. Le calcul de la densité relique d'axions présents dans l'univers [217] montre que cette particule contribuerait de manière importante à la Matière Noire si sa masse est de l'ordre du μeV, en accord avec les bornes supérieures expérimentales qui sont de l'ordre de 0.01 eV. Une masse si faible conduirait, comme pour les neutrinos, à de la Matière Noire chaude et donc à des inconvénients identiques quant à la formation des grandes structures. Cependant, à la différence des WIMPs ou des neutrinos, les axions peuvent être produits de manière non-thermique dans l'univers primordial, autorisant des vitesses non-relativistes.

10.1.3 Profil des halos de Matière Noire

La Matière Noire ne se distribue pas de manière uniforme dans tout l'univers mais elle se concentre autour et dans les galaxies sous forme de halos, dont la taille caractéristique est bien plus grande que celle des galaxies. Une galaxie est comme une fine éponge flottant entre deux eaux au milieu d'un bocal sphèrique. Cependant le halo de Matière Noire, bien qu'isotrope, n'est pas un milieu homogène : la distribution radiale de la densité de Matière Noire est une fonction de la distance au centre.

La forme du profil de Matière Noire à l'intérieur des galaxies reste une question ouverte. D'une part, les simulations à N corps dans les modèles cosmologiques Λ-CDM mènent à un profil universel sans noyau [212, 213, 214]. A l'approche du centre galactique, ce profil diverge comme $r^{-\gamma}$, r étant la distance au centre galactique et γ un exposant variant de 1 à 1.5, conduisant à une densité de Matière Noire très piquée dans la région du centre galactique. Les simulations numériques les plus récentes indiquent cependant que la divergence ne devrait pas être plus pentue que 1.2. Il est aussi important de noter que cette divergence apparaît pour des distances au centre galactique plus petites que la résolution typique des simulations numériques. D'autre part, de nombreuses analyses des courbes de rotation des galaxies indiquent que le halo de Matière Noire présenterait un cœur de densité constante au centre galactique [218, 219]. Le profil de Matière Noire peut prendre une forme mathématique générique avec 4 paramètres libres, α, β, γ et a, qui détermineront le type de profil considéré :

$$\rho_{CDM}(r) = \rho_{CDM\odot} \left[\frac{r_\odot}{r}\right]^\gamma \left[\frac{1+(r_\odot/a)^\alpha}{1+(r/a)^\alpha}\right]^{(\beta-\gamma)/\alpha} . \tag{10.1}$$

L'index $\odot$ signifie que la quantité est prise à la distance radiale du système solaire $r_\odot = 8$ kpc. La densité de Matière Noire au niveau du système solaire est prise égale à $\rho_{CDM\odot} = 0.3$ GeV.cm^{-3}. Les valeurs des paramètres ajustables pour les trois profils considérés, isotherme, Navarro-Frenk-White (NFW) et Moore, sont récapitulées dans le tableau 10.1. Le premier type de profil est issu de l'analyse des courbes de rotation alors que les deux suivants proviennent des simulations numériques. La distance caractéristique a est prise égale à la taille du noyau central dans le cas du profil isotherme, qui ne présente pas de divergence centrale puisque le paramètre γ est mis égal à zéro.

Modèle de halo	α	β	γ	a [kpc]
Cored isothermal [219]	2	2	0	4
Navarro, Frenk & White [212]	1	3	1	25
Moore [213]	1.5	3	1.3	30

TAB. 10.1 – Profil de Matière Noire dans la galaxie : valeurs des paramètres pour les trois modèles considérés.

10.2 WIMPs dans les modèles extra-dimensionnels : la LKP

Bien que la LSP soit actuellement le plus populaire des WIMPs, d'autres candidats ne peuvent être écartés. En particulier, il a été montré que les nouvelles particules apparaissant dans les théories de dimensions supplémentaires pouvaient produire un candidat Matière Noire [221, 222, 225]. Ces investigations furent menées dans deux cadres théoriques avec dimensions supplémentaires : les modèles de type *Universal Extra Dimension* (UED) et les modèles *Higher Dimensional Warped Grand Unified Theory* de type Randall-Sundrum (RS).

10.2.1 Un bon candidat Matière Noire ?

Pour obtenir un bon candidat Matière Noire, il est tout d'abord nécessaire de trouver une nouvelle particule qui soit stable, *i.e.* ne se désintègre pas en particule standard, grâce à une symétrie, ou du moins métastable par un couplage peu intense, si aucune symétrie n'assure sa stabilité. Il faudra ensuite s'assurer que cette particule interagit bien faiblement.

Cas UED

Puisque tous les champ peuvent se propager dans les dimensions supplémentaires, l'invariance par translation spatiale est préservée dans toutes les dimensions et l'impulsion des particules conservée le long des dimensions supplémentaires, du moins au niveau de l'arbre. Les masses des particules de Kaluza-Klein sont alors dégénérées à chaque niveau n_{KK} de la tour de Kaluza-Klein et ce nombre de Kaluza-Klein est conservé lors d'interaction dans la théorie effective à quatre dimensions. Cependant, la dégénérescence de masse est levée par la contribution des boucles lorsque la compactifications des dimensions supplémentaires est prise en compte [226]. La divergence induite par les boucles impose alors une renormalisation [227] qui viole la conservation du nombre de Kaluza-Klein mais conserve une autre symétrie appelée parité de Kaluza-Klein consistant à effectuer une translation de πR, R étant la taille des dimensions supplémentaires, puis à multiplier par $(-1)^{n_{KK}}$. Puisque cette parité doit être conservée, certaines transitions entre niveaux de Kaluza-Klein sont interdites[4] comme la transition de $n_{KK} = 1$, la

[4]Par exemple, en supposant que tout soit invariant par translation, les transitions d'un niveau n_{KK} à un niveau n'_{KK} seront possibles uniquement si les nombres de Kaluza-Klein sont de même parité.

particule de Kaluza-Klein la plus légère (LKP), vers $n_{KK} = 0$, la particule du Modèle Standard.

Par conservation de la parité de Kaluza-Klein, la LKP, qui est le premier état d'excitation de Kaluza-Klein des particules sans masse du Modèle Standard, est stabilisée. Pour être un WIMP, il est nécessaire d'isoler la particule qui interagira le moins. Le meilleur candidat sera donc le premier niveau de Kaluza-Klein du boson de jauge B relatif à la symétrie d'hypercharge, ou du neutrino, puisque ces particules interagiront par interaction faible. Le premier niveau de graviton de Kaluza-Klein peut aussi être un WIMP car il interagit par gravitation. Cependant, la faiblesse de l'interaction gravitationnelle entraînerait un très faible taux d'auto-annihilation conduisant très probablement à une densité relique de gravitons de Kaluza-Klein qui fermerait l'univers.

Cas RS

Dans ce cas-ci, l'invariance par translation suivant les dimensions supplémentaires ne peut intervenir pour stabiliser la LKP et en pratique, le modèle ne possède qu'une dimension supplémentaire. Pourtant, il est de nouveau possible de trouver une particule stable de Kaluza-Klein en imposant la stabilité du proton. En effet, dans un scénario avec grande unification et présence de dimensions supplémentaires, le nombre baryonique, *a priori* incomptatible avec les théories GUT, peut être un bon nombre quantique : le groupe de jauge unifié peut être brisé par des conditions aux limites le long de la dimension supplémentaire permettant d'obtenir les quarks et les leptons du modèle standard répartis dans différents multiplets du groupe de jauge. Par exemple, pour une théorie GUT $SO(10)$, les quarks gauches sont dans un premier multiplet, les quarks droits dans un second et les leptons dans un troisième [222]. En imposant que le nombre baryonique est un bon nombre quantique, une symétrie, appelée Z_3, qui laisse inchangés les champs du modèle standard, apparaît alors

$$\Psi \to e^{2i\pi[b-(n_c-\bar{n}_c)/3]}\Psi, \tag{10.2}$$

b étant le nombre baryonique, n_c le nombre de couleur et $\bar{n}_c$ celui d'anti-couleur. Les autres particules provenant de la théorie de grande unification sont quant à elles modifiées par le changement de phase ci-dessus et sont donc chargées vis-à-vis de la symétrie Z_3. De plus, à la différence des champs du modèle standard, ces champs de grande unification n'ont pas de niveau zéro de Kaluza-Klein. Donc, en imposant la conservation de la symétrie Z_3, il est impossible aux excitations de Kaluza-Klein des champs hors modèle standard de se désintégrer en particules du Modèle Standard et la plus légère d'entre-elle, *i.e.* le mode $n_{KK} = 1$, sera stable. Imposer cette symétrie Z_3 se justifie car elle permet de rendre le proton stable (sa section efficace est supprimée par l'échelle de Planck) [222]. Ainsi, comme dans les théories UED, la particule la plus légère[5] sous symétrie Z_3 est stable.

Il est nécessaire de vérifier que la particule de Kaluza-Klein la plus légère est aussi très peu interagissante. L'étude de la dépendance en masse des différentes excitations de Kaluza-Klein montre d'une part que ce sont les excitations fermioniques qui auront la masse la plus légère et d'autre part qu'elle doit se trouver dans le multiplet contenant le quark top droit [222]. Ce multiplet contient à la fois un neutrino droit de Dirac et un neutrino gauche de Dirac, dont le premier mode de Kaluza-Klein peut prétendre à être la LKP. Cependant, les expériences de détection directe de Matière Noire par collision élastique excluant déjà la possibilité d'un neutrino gauche comme candidat Matière Noire [228] et la première excitation de Kaluza-Klein du neutrino droit de Dirac devient la LKP stable. Bien que le couplage du neutrino de Dirac au bosons de jauge Z' et X_s soit plus élevé que celui aux bosons du modèle standard, les bosons de jauge de Kaluza-Klein ont une masse supérieure à 3 TeV, assurant une faible interaction de la LKP, qui devient par conséquent un WIMP[6].

[5]Cette particule est communément appelée LZP. Nous garderons cependant la notation LKP par simplicité, mais aussi car cette LZP, selon les modèles et contraintes phénoménologiques, peut s'avérer être aussi la LKP.

[6]Pour être en accord avec les tests électro-faibles de précision, l'échelle de Kaluza-Klein M_{KK} devrait être de l'ordre de la dizaine de TeV [223]. Cependant, il a été montré à partir de la correspondance AdS/CFT que le

10.2.2 Densité relique

Trouver un candidat Matière Noire ne résoud pas le problème. Encore faut-il vérifier que la densité relique du WIMP considéré est en accord avec la densité de Matière Noire mesurée. Le scénario est le suivant : les LKPs sont produites thermiquement dans l'univers primordial lorsque la température de ce dernier le permet, c'est à dire lorsque $T \gg M_{LKP}$. Ces LKP vont alors disparaître, principalement par annihilation mais aussi par co-annihilation si la deuxième particule de Kaluza-Klein la plus légère est de masse proche de celle de la LKP. Enfin, ces particules sont diluées avec l'expansion de l'univers. Lorsque la longueur de Hubble $L_H = c/H$, H étant la constante de Hubble qui détermine le taux d'expansion de l'univers, devient supérieure au libre parcours moyen de la LKP, ces dernières ne peuvent essentiellement plus interagir car trop éloignées les unes des autres. Les particules LKPs sont donc gelées et leur densité ne varie plus que par effet de dilution. La transition entre *particules interagissantes* et *particules gelées* se détermine en comparant le taux d'annihilation Γ au taux d'expansion de l'univers H, la température de transition étant approximativement obtenue quand $\Gamma = H$.

La dynamique de la densité n de LKPs est donnée par l'équation de Boltzmann dans un univers en expansion [217] :

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = -\langle \sigma v \rangle \left(n^2 - n_{eq}^2 \right). \tag{10.3}$$

La quantité σ correspond à la section efficace d'annihilation, v à la vitesse des particules et n_{eq} à la densité à l'équilibre thermique. Le taux d'annihilation est alors simplement donné par $\Gamma = n \langle \sigma v \rangle$. Pour un univers avec $T \gg M_{LKP}$, la densité de LKPs est obtenue en intégrant une loi de corps noir : $n \propto T^3$. Compte tenu de la limite supérieure sur la taille des dimensions supplémentaires, la LKP sera une particule lourde (de la dizaine de GeV au TeV) et constituera donc de la Matière Noire froide. Ainsi, lorsque $T \ll M_{LKP}$, la densité prendra alors la forme suivante :

$$n_{eq} = g \left(\frac{M_{LKP} T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-M_{LKP}/T}, \tag{10.4}$$

g étant le nombre de degrés de liberté interne de la LKP. Le taux d'annihilation va donc diminuer exponentiellement avec la température de l'univers pour finalement devenir inférieur au taux d'expansion H, qui lui varie en T^2 pour une ère radiative. Trouver la densité relique consiste donc à résoudre l'équation de Boltzmann en utilisant la température de l'univers comme *signature* temporelle, puisque c'est aussi cette quantité qui détermine le processus de gel des particules LKPs. La densité relique sera alors donnée par la densité après le découplage. Dans un univers dominé par le rayonnement, l'évolution de la constante de Hubble est donnée par :

$$H^2 = \frac{4\pi^3 g_\star T^4}{45 M_{Pl}^2}, \; t = (2H)^{-1}, \tag{10.5}$$

ce qui donne, en appelant $x = M_{LKP}/T$:

$$\frac{dx}{dt} = Hx, \tag{10.6}$$

$g_\star$ correspondant au nombre de degrés de liberté relativiste. Cette procédure permet donc d'écrire l'équation de Boltzmann en fonction de la température T plutôt que de la variable dynamique t :

$$Hx\frac{dn}{dx} + 3Hn = -\langle \sigma v \rangle \left(n^2 - n_{eq}^2 \right). \tag{10.7}$$

Il est alors commode d'utiliser la densité par unité d'entropie $Y = n/s$ avec l'entropie s donnée par $s = 2\pi^2 g_\star T^3/45$, la conservation de l'entropie par volume comobile ($sa^3 = cste$) fournissant

groupe de jauge électro-faible peut être étendu à $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ [224]. Cette nouvelle symétrie permet alors d'abaisser l'échelle de Kaluza-Klein à 3 TeV tout en restant en accord avec les tests électro-faibles.

$\frac{dn}{dt} + 3Hn = s\frac{dY}{dt}$. Une fois cette contrainte écrite en fonction de la variable x, l'équation de Boltzmann prend la forme :

$$\frac{dY}{dx} = -M_{LKP}M_{Pl}\sqrt{\frac{\pi g_\star}{45}}\frac{\langle\sigma v\rangle}{x^2}\left(Y^2 - Y_{eq}^2\right). \tag{10.8}$$

La résolution de cette équation nécessite de connaître la section efficace d'annihilation σ, qui dépend du modèle de dimensions supplémentaires considéré.

Cas UED

Dans ce cas, il est possible d'utiliser un développement non-relativiste de la section efficace d'annihilation, dominée par la production de fermions et de bosons de Higgs :

$$\langle\sigma v\rangle \simeq a + b\left\langle v^2\right\rangle = a + 6b/x. \tag{10.9}$$

Une formule analytique pour ce développement a été trouvée [221] :

$$a(B_{LKP}B_{LKP} \to f\bar{f}) = \frac{4\pi\alpha_1^2 N_c(Y_L^4 + Y_R^4)}{9M_{LKP}^2}, \tag{10.10}$$

$$b(B_{LKP}B_{LKP} \to f\bar{f}) = -\frac{4\pi\alpha_1^2 N_c(Y_F^4 + Y_H^4)}{9M_{LKP}^2}, \tag{10.11}$$

avec N_c, Y_l et Y_R qui sont le nombre de couleur, d'hypercharge gauche et d'hypercharge droite du fermion sortant. L'équation (10.8), une fois l'approximation non-relativiste pour la section efficace introduite, peut être résolue et donne pour la densité de LKP [221] :

$$\Omega_{LKP}h^2 = \frac{1.04 \times 10^9}{M_{Pl}}\frac{x_F}{\sqrt{g_\star}}\frac{1}{a + 3b/x_F}. \tag{10.12}$$

Dans cette équation, la densité d'énergie, ramenée à la densité critique $\rho_c = 3H^2/8\pi G$, $\Omega_{LKP} = M_{LKP} \times n(t \to +\infty)/\rho_c$ multiplié par le carré de la constante de Hubble h^2 en unité de 100 km.s^{-1}.Mpc^{-1}, a été utilisée car elle correspond à l'observable cosmologique. La quantité x_F détermine la température au moment du découplage et elle est donnée par la relation algébrique implicite :

$$x_F = \ln\left(\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 2)M_{LKP}M_{Pl}\sqrt{\frac{45}{8}}\frac{g}{2\pi^3}\frac{a + 6b/x_F}{\sqrt{g_\star x_F}}\right). \tag{10.13}$$

Cette densité relique dépend bien évidemment de la masse de la particule via la définition de la densité d'énergie, mais aussi via la section efficace d'annihilation et la température de découplage.

En exigeant que la densité relique de LKP, pour résoudre le problème de la Matière Noire, soit égale à la densité de matière présente dans L'univers $\Omega_M h^2 \simeq 0.15$, la masse de LKP doit se trouver entre 700 GeV et 900 GeV. La prise en compte d'une possible co-annihilation, si les masses de la LKP et de la seconde particule la plus légère sont proches, permet cependant de diminuer cette masse jusqu'à 300 GeV [221]. Enfin, une analyse récente incluant le deuxième niveau de Kaluza-Klein montre que la partie supérieure de l'intervalle de masse serait favorisée [237].

Cas RS

Tout comme pour la stabilisation et l'identification de la LKP, le calcul de densité relique dans un modèle warpé est plus délicat que dans un modèle UED, aucune formule analytique pour la section efficace d'annihilation ne pouvant être dérivée. Nous renvoyons le lecteur aux références [222, 225] pour une étude détaillée qui peut se résumer ainsi : pour une LKP de masse inférieure à 100 GeV, l'annihilation se fait essentiellement par le canal s avec un échange de boson Z. Pour des valeurs de masse plus élevées, la LKP s'annihile principalement en quark top par échange de boson X de grande unification en voie t. L'échange par voie s de boson Z', donnant en produit de sorties des pairs $t\bar{t}$, $b\bar{b}$, W^+W^- et Zh sont aussi dominants à grande masse.

Expliquer la Matière Noire par la LKP impose une masse pour ce WIMP de 20 GeV à 80 GeV près de la résonance en boson Z et des masses de l'ordre de plusieurs centaines de GeV ailleurs [222, 225].

10.2.3 Investigations expérimentales

Dans le cadre des modèles UED, la détection directe de LKP dans des détecteurs au germanium, à l'iodure de sodium et au xénon [228, 229] ainsi que la détection indirecte par émission de photons gamma, de neutrinos ou de positons et par émission synchrotron [229, 230, 231, 232, 233, 234] ont eté abordées. Le flux de neutrinos provenant de l'annihilation de LKP dans le coeur du Soleil a aussi été considéré [235]. Toutes ces pistes de détection ne se sont pas avérées fructueuses, tous les flux calculés étant bien trop faibles pour apporter une quelconque contrainte sur le modèle UED de Matière Noire. Le cas de la LKP dans le cadre des modèles *warpés* a aussi été pris en considération en étudiant le signal attendu dans les télescopes à neutrinos et les téléscopes à photons gamma ainsi qu'en positons cosmiques [236]. Comme pour le cas UED, le signal reste trop faible pour obtenir des contraintes sur le modèle.

10.3 Détection indirecte par antiprotons galactiques [220]

Tout comme pour la Matière Noire supersymétrique ou pour les trous noirs microscopiques en évaporation, une détection indirecte peut être envisagée en estimant la contribution au rayonnement cosmique des produits d'annihilation de la LKP. Pour les mêmes raisons que dans le cas des trous noirs microscopiques (voir chapitre 8.3.1), les antiprotons dans le rayonnement représentent une sonde prometteuse en vue d'explorer une région de l'espace des paramètres de plusieurs modèles de dimensions supplémentaires.

10.3.1 Source et propagation

Le calcul de flux d'antiprotons arrivant sur Terre et provenant de l'annihilation de LKP dans le halo de Matière Noire procède en deux étapes : le calcul du terme source puis la propagation des antiprotons dans le halo diffusif.

Le terme source revient à compter le taux d'annihilation de LKP dont les canaux de sorties contiennent un antiproton. Ce taux est donné par la convolution des fonctions de fragmentation avec le nombre d'annihilation donnant des paires quark-antiquark :

$$q_{\bar{p}}^{LKP}(r,T_{\bar{p}}) = \frac{1}{2}\sum_q \langle\sigma v\rangle_{q_i\bar{q}_i}\left(\frac{dN_{barp}}{dT_{\bar{p}}}\right)_{q_i} n_{LKP}(r), \tag{10.14}$$

$T_{\bar{p}}$ étant l'énergie cinétique de l'antiproton, $\frac{dN_{barp}}{dT_{\bar{p}}}$ la fonction de fragmentation et $\langle\sigma v\rangle_{q_i\bar{q}_i}$ la section efficace d'annihilation moyenne dans le canal considéré et qui sera prise dans sa limite non-relativiste. Ce terme source dépend de la position compte tenu de la variation de densité le long du profil de halo de Matière Noire :

$$n_{LKP}(r) = \frac{\rho_{LKP}(r)}{M_{LKP}}. \tag{10.15}$$

Il est donc indispensable de se donner un profil de halo de Matière Noire pour définir complètement le terme source. Le calcul des flux d'antiprotons seront effectués avec les trois profils de halo présentés dans le chapitre 10.1. La masse de la LKP sera prise de 300 GeV à 1 TeV dans le cadre des modèles de UED et de 30 GeV à 70 GeV dans le cadre des modèles RS. Le flux total sera naturellement augmenté pour des LKP plus légères puisque, à densité d'énergie de Matière Noire fixée, une plus faible masse de LKP entraîne une plus forte densité de ces particules et donc un taux d'annihilation plus élevé. Cet argument doit cependant être combiné avec les valeurs de la section efficace d'annihilation et avec la multiplicité d'antiprotons.

Le schéma de propagation est de nouveau le modèle diffusif à deux zones [167], déjà utilisé dans le chapitre 8.3.1. Une différence apparaît cependant avec le cas des trous noirs microscopiques : le halo de Matière Noire englobe le halo diffusif et la Voie lactée et la répartition des sources se complique par rapport au cas du chapitre 8.3.1 où elles se concentraient dans le disque galactique. Cette particularité a déjà été traitée dans le cas des trous noirs primordiaux [166]. En particulier, il a été montré que la contribution de l'émission venant des régions au delà du halo diffusif était négligeable. Les cinq paramètres libres du modèle, normalisation et indice spectral du coefficient de diffusion, vitesse des vents convectifs et d'Alfven et taille du halo diffusif, sont fortement dégénérés lorsqu'estimés à l'aide des données concernant le rapport B/C. Pourtant, en utilisant la région autorisée de l'espace de ces paramètres, cela conduit à une très faible incertitude sur le flux d'antiprotons secondaires car tous ces rayons cosmiques suivent le même parcours : ils sont émis et détectés dans le disque galactique. Cependant, pour les antiprotons provenant de l'annihilation de LKP, ces incertitudes risquent de conduire à de grandes variations sur le flux d'antiprotons car ils proviennent du halo et ne sont plus limités au disque. Puisque le parcours suivi par les rayons cosmiques provenant du halo de Matière Noire diffère de celui suivi par les rayons cosmiques secondaire, les dégénérescences sur les paramètres du modèle sont modifiées conduisant à des incertitudes théoriques plus élevées. Dans le cas de l'annihilation de particules supersymétriques, les incertitudes induites sur le flux d'antiprotons primaires étaient de l'ordre de 100 [238] et nous pouvons nous attendre à ce même type de résultats pour le cas présent. Le tableau 10.2 récapitule les valeurs minimum, maximum et médianes autorisées pour ces cinq paramètres afin d'être en accord avec les données B/C, la vitesse d'Alfven n'étant pas mentionnée car son influence est moindre que celle des autres paramètres. Chacun de ces paramètres va influer sur le flux d'antiprotons primaires. Tout d'abord, l'augmentation de la taille du halo va augmenter à la fois le nombre de sources et la distance qu'un rayon cosmique peut parcourir avant de s'échapper de la galaxie. De plus, les vents galactiques de convection auront pour effet d'éloigner les particules du disque. Enfin, les trois paramètres K_0, L et V_c sont corrélés : une faible valeur de K_0 correspond à une faible valeur de L et une valeur élevée de V_c, trois conditions qui conduisent toutes à une diminution du signal.

	δ	K_0 [kpc^2/Myr]	L [kpc]	V_c [km/s]
Maximum	0.46	0.0765	15	5
Médian	0.70	0.0112	4	12
Minimum	0.85	0.0016	1	13.5

TAB. 10.2 – Paramètres astrophysiques utilisés dans le modèle de diffusion à deux zones en accord avec les données B/C. δ correspond à l'indice spectral du coefficient de diffusion, K_0 à sa normalisation, L à la taille du halo diffusif et V_c à la vitesse des vents convectifs.

La résolution de l'équation de diffusion des rayons cosmiques s'effectue en décomposant la solution et le terme source suivant la base des fonctions de Bessel $J_0(\xi_i r/R_{gal})$, ξ_i étant le zéro d'ordre i de la fonction de Bessel J_0 [167]. En théorie, le développement en série de Bessel est infini si l'on veut prendre en compte la divergence centrale qui apparaît dans les profils de halo de Moore et NFW. Une telle série ne peut être traitée numériquement. Pour échapper à ce problème, le profil est adouci à proximité du centre galactique tout en s'assurant que le nombre d'annihilation de LKP reste identique. Pour un rayon inférieur à r_c, le profil usuel ρ en $r^{-\gamma}$ est remplacé par un profil en sinus-cardinal noté $\sin_c$:

$$\frac{\rho(r)}{\rho(r_c)} = \left(\frac{r_c}{r}\right)^{\gamma} \to \left(\frac{\rho(r \leq r_c)}{\rho(r_c)}\right)^2 = 1 + \left[\frac{4\pi^2\gamma}{3(3-2\gamma)} \sin_c^2\left(\frac{\pi r}{r_c}\right)\right]. \tag{10.16}$$

Cette nouvelle distribution de la densité de Matière Noire renormalisée conserve bien le nombre total d'annihilation de LKP. Le rayon r_c est pris égal à 500 pc assurant une convergence de la solution pour un développement jusqu'à $N_{Bes} = 300$. Il est de plus inutile de considérer des valeurs plus faibles pour r_c, ce qui augmenterait N_{Bes}, puisque la probabilité qu'un antiproton détecté dans le système solaire provienne du noyau central varie peu pour de telles valeurs de r_c [239, 240].

10.3.2 Résultats en UED

Les résultats dans le cas des modèles UED sont présentés sur la figure 10.1, chaque graphique correspondant à un des trois jeux de paramètres astrophysiques présentés dans le tableau 10.2. Tous les flux sont interstellaires, *i.e.* sans la modulation solaire. La masse de la LKP est prise égale à 300 GeV et 1 TeV et la courbe bleue en trait plein correspond à un profil isotherme, celle rouge en tiret à un profil NFW et celle de couleur magenta en pointillé à un profil de Moore. La courbe noire en trait plein représente le flux d'antiprotons d'origine secondaire. Les flux primaires étant bien inférieures au flux secondaire, il est impossible à l'aide des antiprotons d'exclure des régions de l'espace des paramètres du modèles UED considéré (avec parité de Kaluza-Klein conservée) ni de confirmer ou infirmer l'hypothèse postulant que la LKP est la source principale de Matière Noire.

Il est cependant important d'étudier l'influence des paramètres d'entrée physique sur le flux d'antiprotons primaires. Tout d'abord, une augmentation de la masse de la LKP conduit à une diminution du signal puisque le terme source varie en M_{LKP}^{-4}. En passant de 300 GeV à 1 TeV, le flux d'antiprotons primaires est divisé par un facteur $(10/3)^4 \simeq 120$: un tel comportement est clairement vu sur les différentes figures. Deuxièmement, les paramètres astrophysiques, comme attendu, agissent très peu sur le flux d'antiprotons secondaires tandis qu'ils influencent celui d'origine primaire. Cependant, même en augmentant le plus possible la diffusion galactique, les flux primaires restent sous le flux secondaire excepté pour une masse de 300 GeV, avec un profil de Moore et pour des énergies supérieures à la centaine de GeV. Enfin, le choix du profil de halo de Matière Noire, et en particulier d'une forte densité centrale, influence peu le flux d'antiprotons provenant de l'annihilation de LKP. Le passage d'un profil doux de type isotherme à un profil divergent au centre de type Moore n'entraîne qu'un accroissement de ce flux d'un facteur 2 à 3 dans le cas d'un maximum de diffusion. Cette augmentation est plus faible pour une diffusion médiane et disparaît complètement pour un minimum de diffusion. Cela provient du fait qu'il s'agit essentiellement d'un phénomène local qui, à la différence des gammas, ne sonde que très peu le centre galactique.

Compte tenu de la petitesse du signal en antiprotons et des incertitudes théoriques, autorisant une grande dispersion du signal en antiprotons, il semble difficile de détecter de la Matière Noire de Kaluza-Klein par ce canal. Réciproquement, ce résultat valide la LKP comme très bon candidat Matière Noire.

10.3.3 Résultats en RS

Dans le cadre des modèles RS, la masse de la LKP est beaucoup plus faible et nous pouvons espérer une détection. La figure 10.2 montre le flux d'antiprotons *top of atmosphere* primaires

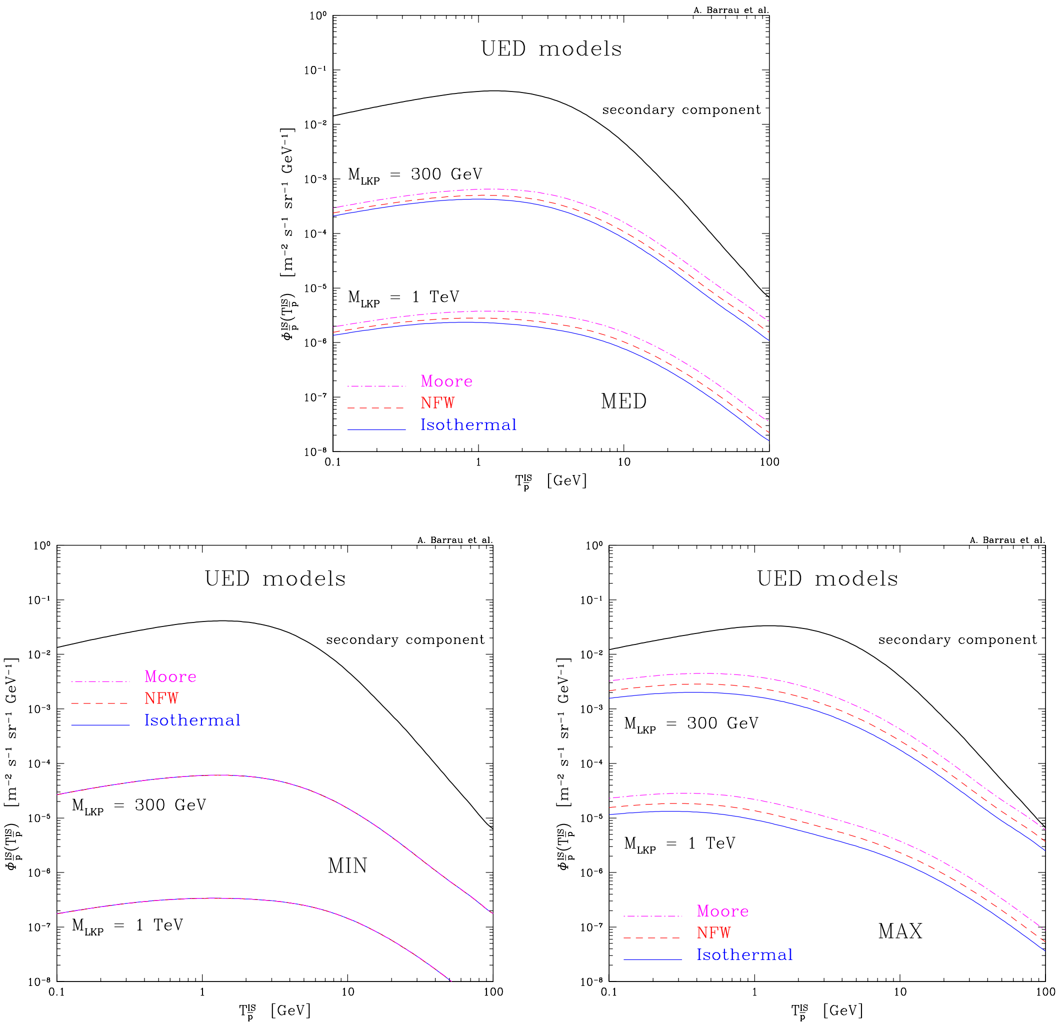


FIG. 10.1 – Flux interstellaire d'antiprotons d'origine primaire. Sur chaque graphique, et pour une masse de LKP donnée (300 GeV ou 1 TeV), la courbe bleue en trait plein correspond à un profil isotherme, celle rouge en tiret à un profil NFW et celle de couleur magenta en pointillé à un profil de Moore. La courbe noire en trait plein représente le flux d'antiprotons d'origine secondaire. *Haut :* diffusion médiane. *Bas :* diffusion minimum à gauche et maximum à droite.

pour des masses de LKP allant de 30 GeV à 70 GeV aux cotés des mesures expérimentales. Ces résultats sont obtenus pour un profil isotherme avec le jeu de paramètres astrophysiques offrant le maximum de diffusion. Pour $M_{LKP} = 40 - 50$ GeV, le signal passe au-dessus du fond et aurait déjà dû être détecté, supposant les hypothèses sur le profil de Matière Noire et les paramètres de diffusion exactes. Ceci est possible car cette gamme de masse correspond à $M_{LKP} = M_{Z^0}/2$ et le processus d'annihilation est dominé par la résonance du Z^0.

Bien que prometteur, il est nécessaire d'étudier l'influence des paramètres de propagation d'une part et du profil de halo d'autre part avant de conclure sur la possible exclusion de certains modèles RS. La figure 10.3 montre l'influence des paramètres astrophysiques, à gauche, et du profil de halo, à droite. Les paramètres de diffusion dégradent considérablement le signal puisque, pour des masses de LKP de 40 GeV et 50 GeV, le flux d'antiprotons décroît de deux ordres de grandeur en passant d'un maximum à un minimum de diffusion. Les incertitudes liées

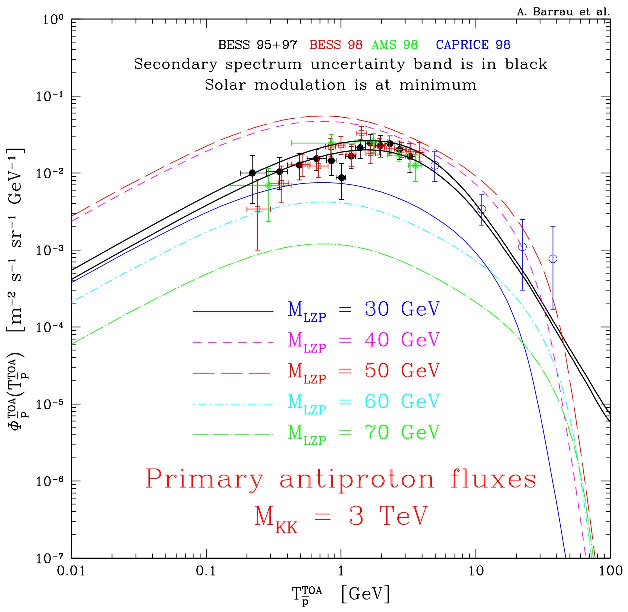


FIG. 10.2 – Flux d'antiprotons primaires pour des masses de LKP allant de 30 GeV à 70 GeV, l'échelle de Kaluza-Klein étant fixée à $M_{KK} = 3$ TeV. Les mesures expérimentales de flux d'antiprotons ainsi que le spectre théorique d'antiprotons secondaires (courbes noires) sont aussi représentés sur la figure.

au profil du halo sont quant à elle moins contraignantes, comme il l'est vu sur la partie droite de la figure 10.3 qui correspond de plus à un choix de paramètres astrophysiques autorisant un maximum de diffusion. Pour un choix de paramètres aboutissant à un minimum de diffusion, les trois profils ne peuvent plus être distingués les uns des autres sur le flux d'antiprotons primaires.

10.3.4 Halo grumeleux et exclusion

Le flux d'antiprotons primaires étant proche de celui d'origine secondaire, une détection peut être envisagée et des écarts aux paramètres canoniques astrophysiques, cosmologiques ou de physique des particules peuvent entraîner l'exclusion de certains modèles. Par exemple, les récentes simulations numériques montrent que le halo de Matière Noire aurait une structure grumeleuse conduisant alors à un accroissement du flux primaire si la Terre se trouve à proximité d'un de ces agrégats. Afin d'évaluer les conséquences de cette sous-structure, nous avons considéré un facteur d'accroissement global, appelé de *facteur de boost*, et comparé la somme du flux primaire et secondaire aux données présentées dans les figures 10.2 et 10.3. Il faut noter qu'uniquement le flux primaire, issu d'annihilation de Matière Noire, est affecté par ce facteur de boost et non le flux secondaire d'origine standard. La compatibilité entre données et prédiction s'effectue à l'aide d'un test du χ^2. Les données provenant des expériences ballon CAPRICE, BESS, IMAX et MASS et de l'expérience spatiale AMS, sont considérées avec leurs incertitudes provenant de la statistique et du problème de reconstruction et de contamination par une composante atmosphérique. Les antiprotons détectés ayant subis la modulation solaire, il est nécessaire de déconvoluer cet effet afin de pouvoir comparer les flux au niveau interstellaire. Pour cette déconvolution, trois valeurs du potentiel de modulation ont été considérées ($\phi = 500\ MV$, $700\ MV$ et $1000\ MV$), chaque valeur étant adaptée pour une des prises de données. Les erreurs utilisées dans la construction de la distribution de χ^2 sont les erreurs

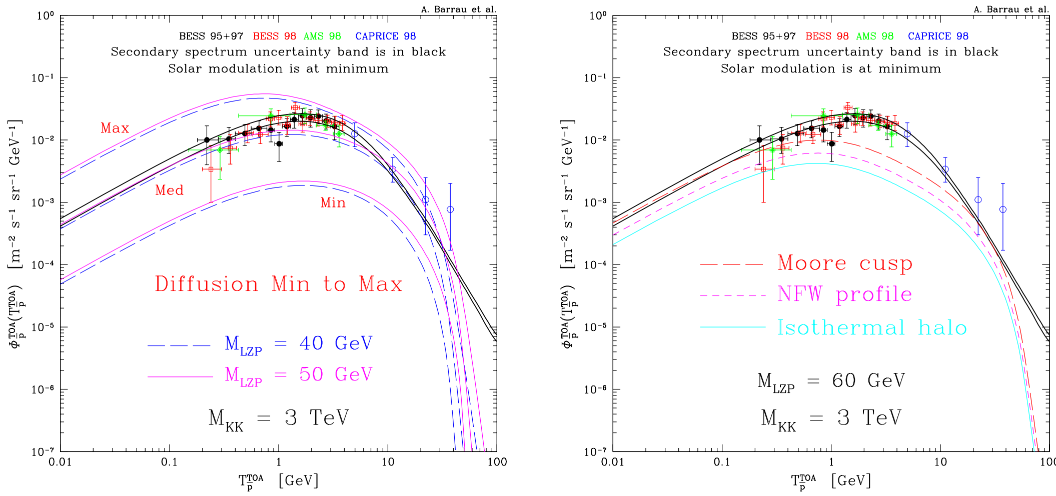


FIG. 10.3 – *Gauche :* influence des paramètres du modèle de propagation sur le flux d'antiprotons primaires. Le passage d'un maximum de diffusion à un minimum, tout en étant en accord avec les données B/C, diminue le flux de primaires de deux ordres de grandeur. *Droite :* influence du profil de Matière Noire sur le flux d'antiprotons provenant de l'annihilation de LKP. Ce flux augmente pour les profils ayant la plus grande concentration de LKP au centre galactique.

expérimentales. La figure 10.4 présente la valeur de la distribution de χ^2 par degrés de liberté, leur nombre étant environ égale à 50, en fonction de la valeur du facteur de boost pour les trois jeux de paramètres du modèle astrophysique : courbe rouge pour un maximum de diffusion, verte pour la diffusion médiane et magenta pour un minimum de diffusion. La signification statistique de la distribution doit ici être prise avec précaution.

Si le nombre d'antiprotons primaires excède le flux observé, et ce à cause du facteur de boost, alors ce modèle peut être exclu. Bien que cette condition d'exclusion soit difficilement traduisible en termes statistiques[7], nous pouvons appliquer le critère de sélection déjà appliqué dans les études précédentes : les valeurs de paramètres aboutissant à un $\chi^2/d.o.f > 2\chi^2_{min}/d.o.f$ sont exclues. χ^2_{min} est la valeur minimum de la distribution et s'obtient en l'absence de boost. Ce critère, en terme statistique, correspondrait environ à une exclusion à 99.99 % de niveau de confiance. Dans la plupart des cas, le flux primaire ajouté au flux secondaire est en accord avec les données et nous pouvons chercher la valeur du facteur de boost à partir de laquelle il y a incomptatibilité entre prédictions et observations. Pour l'ensemble des valeurs de paramètres du modèle de propagation, du modèle de dimensions supplémentaires et pour un profil isotherme, le tableau 10.3 représente les valeurs du facteur de boost au-delà desquelles le modèle est exclu. Si ce facteur s'avère être égal à 200, alors une grande partie des modèles RS développé dans la référence [222, 225] avec une échelle de Kaluza-Klein de 3 TeV sont exclus tandis que la détection peut être envisagée dans le futur pour des échelles plus élevées. Au vu des simulations numériques, cette valeur pour le facteur de boost n'est pas aberrante, quoiqu'élevée.

Notons que ces résultats concernent les modèles de type Randall-Sundrum, l'influence de la structure grumeleuse dans le cadre théorique UED ayant été considérée dans la référence [241]. Il a été montré que pour une LKP de 800 GeV avec un facteur de boost de 200, une distortion claire du flux d'antiprotons, due à l'annihilation de LKP, devrait apparaître pour des énergies au-delà de 10 GeV et atteindre son maximum à environ 100 GeV. Pour des profils sans cette sous-structure, les auteurs de la référence [241] montrent, comme l'étude ci-dessus, que le flux

[7]Le fait que les valeurs de la distribution de χ^2 par degré de liberté soit toujours supérieures à 1 prouve que les erreurs expérimentales ne sont pas correctement estimées.

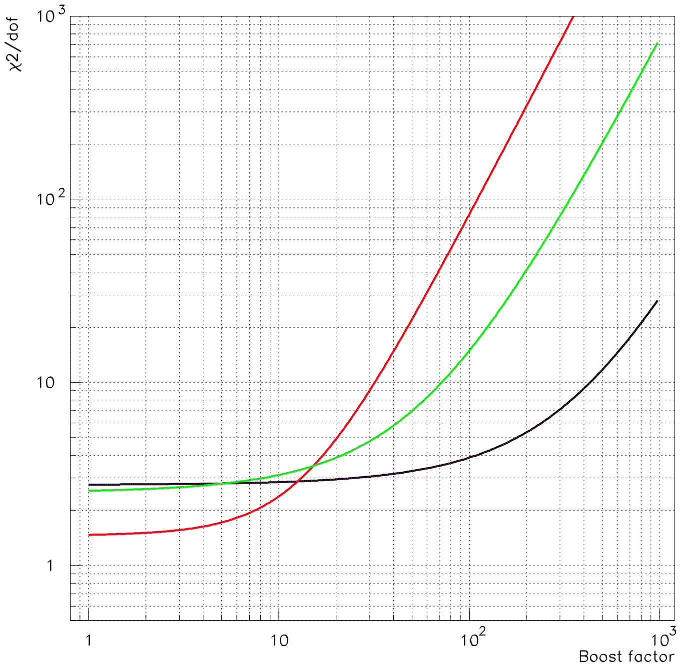


FIG. 10.4 – Valeur de la distribution de χ^2 en fonction du facteur de boost pour les trois modèles de diffusion, maximum (rouge), médian (verte) et minimum (magenta).

primaire reste bien en-deçà du flux secondaire.

Les expériences d'astroparticules sont donc aujourd'hui à la « limite de sensibilité » pour sonder des scenarii réalistes faisant intervenir des dimensions supplémentaires. La mise en évidence de la LKP serait une avancée majeure pour la Matière Noire et pour la structure fondamentale de l'espace-temps, du moins dans les modèles de type RS qui prennent en compte la gravitation[8]. Il faut néanmoins noter que, comme cela est souvent le cas avec des processus exotiques, chaque modèle peut être contraint en l'absence de signal. En revanche, si un signal est détecté, la discrimination entre les différentes théories est pratiquement impossible puisque la forme spectrale des flux est dominée par les fonctions de fragmentation qui interviennent de façon générique. Nous pouvons cependant espérer qu'une telle discrimination sera alors testée auprès des collisionneurs.

[8]Un grand défaut des modèles UED est justement qu'ils n'incorporent pas la gravitation.

masse LKP	Diffusion minimale	Diffusion médiane	Diffusion maximale
30 GeV	M_{KK} =3 TeV : 13.1	M_{KK} =3 TeV : 2.08	M_{KK} =3 TeV : exclu
	M_{KK} =6 TeV : 214	M_{KK} =6 TeV : 33.10	M_{KK} =6 TeV : 12.9
40 GeV	M_{KK} =3 TeV : 2.09	M_{KK} =3 TeV : exclu	M_{KK} =3 TeV : exclu
	M_{KK} =6 TeV : 33.9	M_{KK} =6 TeV : 5.25	M_{KK} =6 TeV : 2.09
50 GeV	M_{KK} =3 TeV : 1.74	M_{KK} =3 TeV : exclu	M_{KK} =3 TeV : exclu
	M_{KK} =6 TeV : 27.5	M_{KK} =6 TeV : 4.27	M_{KK} =6 TeV : 2.70
60 GeV	M_{KK} =3 TeV : 22.9	M_{KK} =3 TeV : 3.55	M_{KK} =3 TeV : 1.41
	M_{KK} =6 TeV : 355	M_{KK} =6 TeV : 55.0	M_{KK} =6 TeV : 22.4
70 GeV	M_{KK} =3 TeV : 79.4	M_{KK} =3 TeV : 12.3	M_{KK}=3 TeV : 5.01
	M_{KK} =6 TeV : 1240	M_{KK} =6 TeV : 191	M_{KK} =6 TeV : 78.2
80 GeV	M_{KK} =3 TeV : 191	M_{KK} =3 TeV : 29.3	M_{KK} =3 TeV : 12.0
	M_{KK} =6 TeV : 2930	M_{KK} =6 TeV : 464	M_{KK} =6 TeV : 185

TAB. 10.3 – Valeur du facteur de boost au delà de laquelle le scenario LKP pour la Matière Noire est exclu. Le critère d'exclusion est $\chi^2/d.o.f \geq 2\chi^2_{min}/d.o.f$. Différentes valeurs pour les paramètres de diffusion sont prises en considération et le halo de Matière Noire est choisi comme isotherme.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Calcul fonctionnel : quelques outils

Cette annexe a pour but de fournir quelques résultats de calculs fonctionnels ainsi que leur démonstration. Ces calculs sont une extension des résultats connus en mécanique classique à un système ayant un ensemble continu de degrés de liberté et, bien que couramment utilisés, la démonstration et l'origine de ces résultats ne sont que peu, voir pas, mentionnées dans la littérature.

L'approche de Schrödinger se fonde de plus sur une description Hamiltonnienne de la mécanique classique dans laquelle le temps est un paramètre extérieur déterminant l'évolution du système. Je rappelle ici la définition de la dérivation fonctionnelle [93] et je fournis ensuite une démonstration des équations de Hamilton-Jacobi dans le cas d'une théorie de champ scalaire, réel. Cette démonstration nécessite de déterminer l'élément différentiel d'une fonctionnelle de type $S[\Phi(\vec{x})]$ dont je donne aussi une démonstration pour la théorie de champ considérée.

Définition 1 *Soit G une fonctionnelle de $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, C^∞ étant l'ensemble des fonctions dérivables définies sur une variété M (manifold en anglais) de dimension D, la dérivation fonctionnelle de G par rapport à $f \in C^\infty$ s'écrit :*

$$\frac{\delta G\left[f(\mathbf{X})\right]}{\delta f(\mathbf{Y})} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\delta G\left[f(\mathbf{X}) + \varepsilon \delta^D\left(\mathbf{X} - \mathbf{Y}\right)\right] - \delta G\left[f(\mathbf{X})\right]}{\varepsilon} \right\}.$$

Définition 2 *Soit une fonctionnelle G, cette fonctionnelle est extrémale si sa dérivation fonctionnelle s'annule :*

$$\frac{\delta G\left[f(\mathbf{X})\right]}{\delta f(\mathbf{Y})} = 0.$$

Cela permet de définir de manière fonctionnelle le principe de moindre action. En théorie de champ, l'action est une fonctionnelle des champs $\Phi(\vec{x}, t)$, eux-mêmes fonctions de $(n+1)$ variables. Le principe de moindre action devient alors :

$$\frac{\delta S\left[\Phi(\vec{x}, t)\right]}{\delta \Phi(\vec{x}, t)} = 0,$$

et aboutit aux équations d'Euler-Lagrange.

Formule 1 *Soit un champ $\Phi_t(\vec{x})$ dont l'évolution est paramétrisée par un paramètre affine t et soit une fonctionnelle S de ce champ qui prend la forme suivante :*

$$S\left[\Phi_t(\vec{x}), t\right] = \int dt \int d^n x \mathcal{L}\left(\Phi, \partial_\mu \Phi\right) = \int d^n x s(\Phi(\vec{x}, t)).$$

L'élément différentiel d'une telle fonctionnelle s'écrit :

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial t}dt + \int d^n x \frac{\delta S}{\delta \Phi_t(\vec{x})}\delta\Phi.$$

<u>Démonstration :</u> Effectuons un décalage infinitésimal en champ $\Phi \to \Phi + \delta\Phi$ et en temps $t \to t + dt$. La fonctionnelle S prend alors la forme suivante :

$$S\left[\Phi + \delta\Phi, t + dt\right] = S\left[\Phi, t\right] + \int d^n x \left[\frac{\partial s(\Phi(\vec{x}, t)}{\partial t}dt + \frac{\partial s(\Phi(\vec{x}, t)}{\partial \Phi(\vec{x})}\delta\Phi(\vec{x})\right]. \tag{A.1}$$

Ce développement est possible car s est une fonction d'une infinité de variables : le temps t et chaque valeur du champ pris en tous les points de la *variété* $\left(\Phi(\vec{x})\right)_M$. Ici nous supposons que s est complètement dérivable. Le paramètre t étant indépendant de la *variété* M, nous avons :

$$\int d^n x \frac{\partial s(x, t)}{\partial t}dt = \frac{\partial S\left[\Phi(\vec{x}, t\right]}{\partial t}dt. \tag{A.2}$$

En appliquant la définition de la dérivation fonctionnelle à la fonctionnelle S et en utilisant son expression comme l'intégrale sur l'ensemble de la *variété* M, nous obtenons :

$$\frac{\delta S\left[\Phi(\vec{x}), t\right]}{\delta\Phi(\vec{x})} = \frac{\partial s(\Phi(\vec{x}), t)}{\partial\Phi(\vec{x})}. \tag{A.3}$$

Nous retrouvons donc bien l'expression pour l'élément différentiel donné dans la formule (1). Notons ici que, bien que le paramètre t influence la valeur du champ Φ, le champ est défini sur la *variété* M à laquelle t ne fait pas partie. La dérivation fonctionnelle se fait donc par rapport au champ Φ défini uniquement sur M.

Dans une approche Hamiltonienne de la mécanique, l'action est de la forme donnée dans la formule (1) et les champs sont définis sur la partie spatiale de l'espace-temps dont l'évolution est déterminée par un paramètre extérieur t qui est le temps. Nous pouvons, à l'aide de l'élément différentiel calculé ci-dessus, définir la dérivée totale par rapport au temps de l'action. Lorsque nous décalons le temps d'une quantité infinitésimale dt, l'action varie d'une quantité dS à cause de sa dépendance explicite avec le temps mais aussi car cette variation temporelle entraîne une variation du champ d'une quantité $\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t}dt$. L'évolution du champ avec le temps s'obtient en revenant à l'approche Lagrangienne $\Phi(\vec{x}, t)$. La dérivée totale de l'action par rapport au temps, dans une approche Hamiltonienne, est la suivante :

$$\frac{dS\left[\Phi(\vec{x}), t\right]}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \int d^n x \frac{\delta S}{\delta\Phi_t(\vec{x})}\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{A.4}$$

Ce résultat est la généralisation à un nombre de degrés de liberté continu de la dérivée totale de l'action pour un nombre fini m de degrés de liberté :

$$\frac{dS\left[\Phi(\vec{x}), t\right]}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}. \tag{A.5}$$

Formule 2 *Soit une action S décrivant un champ scalaire Φ soumis à un potentiel $V(\Phi)$. Dans une approche Lagrangienne, cette fonctionnelle s'écrit :*

$$S = \int d^{n+1}x^\mu \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi(\vec{x}, t)\partial^\mu\Phi(\vec{x}, t) - V(\Phi)\right],$$

et dans une approche Hamiltonienne :

$$S = \int dt \int d^n x \left[\frac{1}{2}\Pi(\vec{x})^2 - \frac{1}{2}\left(\nabla\Phi(\vec{x})\right)^2 - V(\Phi)\right].$$

Le champ Π est l'impulsion généralisée définie par la relation canonique usuelle $\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$. *L'impulsion généralisée peut alors être définie à partir de l'action :*

$$\Pi(\vec{x}) = \frac{\delta \tilde{S}\left[\Phi(\vec{y}), t\right]}{\delta \Phi(\vec{x})},$$

$\tilde{S}$ *étant l'action classique. Notons qu'il ne s'agit pas du principe de moindre action car le champ impliqué dans la formule ci-dessus n'est défini que sur la partie spatiale.*

Démonstration : Appliquons la dérivation fonctionnelle terme à terme dans l'expression de l'action :

$$\frac{\delta}{\delta \Phi(\vec{x})} \left[\int d^{n+1} y (\partial_t \Phi)^2\right] = 0 \tag{A.6}$$

$$\frac{\delta}{\delta \Phi(\vec{x})} \left[\int d^{n+1} y \partial_i \Phi \partial^i \Phi\right] = \int dt \partial_i \partial^i \Phi \tag{A.7}$$

$$\frac{\delta}{\delta \Phi(\vec{x})} \left[\int d^{n+1} y V(\Phi)\right] = \int dt \frac{\partial V}{\partial \Phi}. \tag{A.8}$$

La première relation vient du fait qu'une dérivation par rapport au temps est impliquée alors que nous faisons une dérivation fonctionnelle par rapport au champ comme fonction évoluant dans la partie spatiale. La dérivation fonctionnelle fera intervenir une distribution de Dirac du type $\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$, dont la dérivée par rapport au temps est nulle. La deuxième relation n'est autre que la réduction du principe de moindre action dans $\mathbb{R}^n$ avec une métrique euclidienne, n étant le nombre de dimensions spatiales. Enfin, le dernier terme se calcule aisément car le potentiel peut être vu comme une fonction du champ Φ évalué en $\vec{x}$:

$$\frac{\delta}{\delta \Phi(\vec{x})} \int d^{n+1} y V(\Phi) = \int d^{n+1} y \frac{\partial V\left(\Phi(\vec{y})\right)}{\partial \Phi(\vec{x})} \delta^3\left(\vec{x} - \vec{y}\right) = \int dt \frac{\partial V}{\partial \Phi}. \tag{A.9}$$

La dérivation fonctionnelle de l'action prend alors la forme suivante :

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi(\vec{x})} = \int dt \partial_i \partial^i \Phi(\vec{x}) - \frac{\partial V}{\partial \Phi}. \tag{A.10}$$

Si maintenant nous considérons l'action classique $\tilde{S}$ vérifiant le principe de moindre action, alors le champ Φ est solution des équations d'Euler-Lagrange donnant $\partial_i \partial^i \Phi(\vec{x}) - \frac{\partial V}{\partial \Phi} = \partial_t \partial^t \Phi(\vec{x})$. Nous avons alors :

$$\frac{\delta \tilde{S}\left[\Phi, t\right]}{\delta \Phi(\vec{x})} = \int dt \partial_t \partial^t \Phi(\vec{x}) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Pi(\vec{x}, t). \tag{A.11}$$

La dernière égalité provient de la définition canonique de l'impulsion généralisée Π.

Formule 3 *Soit une action* $\tilde{S}$ *définie de manière identique à la formule (2) et vérifiant le principe de moindre action. Appelons* $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - V(\Phi)$ *la densité lagrangienne et* $L = \int d^n x \mathcal{L}$ *le Lagrangien. Soit la densité Hamiltonienne de cette action définie par* $\mathcal{H} = \Pi \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathcal{L}$ *et* H *l'Hamiltonien associé. Nous avons alors l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :*

$$H = -\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \int d^n x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \Phi(\vec{x})}\right)^2 + \frac{1}{2}\partial_i \Phi \partial^i \Phi + V(\Phi)\right].$$

Démonstration : En fonction du Lagrangien, l'action s'écrit :

$$\tilde{S}\left[\Phi, t\right] = \int dt L\left[\Phi, t\right]. \tag{A.12}$$

Sa dérivée totale par rapport au temps s'écrit d'une part :

$$\frac{d\tilde{S}}{dt} = L\left[\Phi, t\right] = \int d^n x \mathcal{L}, \tag{A.13}$$

et, d'autre part :

$$\frac{d\tilde{S}}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \int d^n x \Pi(\vec{x}) \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{A.14}$$

où nous avons utilisé le fait que $\tilde{S}$ vérifie le principe de moindre action pour exprimer $\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \Phi(\vec{x})} = \Pi(\vec{x})$. Nous avons donc :

$$-\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \int d^n x \left[\Pi \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathcal{L}\right]. \tag{A.15}$$

Par définition, $\mathcal{H} = \Pi \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathcal{L}$ donc nous obtenons la première relation $-\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = H$. La deuxième relation s'obtient en exprimant explicitement l'Hamiltonien en fonction du champ :

$$\begin{aligned} H &= \int d^n x \left[\frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\partial_i \Phi \partial^i \Phi + V(\Phi)\right] && \text{(A.16)} \\ &= \int d^n x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \Phi(\vec{x})}\right)^2 + \frac{1}{2}\partial_i \Phi \partial^i \Phi + V(\Phi)\right], \end{aligned}$$

où nous utilisons de nouveau l'expression de l'impulsion généralisée en fonction de $\tilde{S}$.

Annexe B

Action classique pour un champ scalaire en espace de Sitter

Cette annexe a pour but de montrer que l'action classique décrivant un champ scalaire se propageant dans un espace-temps de type de Sitter prend la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{S}\left[\phi,\eta;\phi_0,\eta_0\right] &= \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[F_1^{(k)}(\eta,\eta_0)\left|\phi\right|^2+F_2^{(k)}(\eta,\eta_0)\left|\phi_0\right|^2\right. \\ &\left.+F_3^{(k)}(\eta,\eta_0)\mathrm{Re}\left[\phi\phi_0^\dagger\right]+F_4^{(k)}(\eta,\eta_0)\mathrm{Im}\left[\phi\phi_0^\dagger\right]\right].\end{aligned} \tag{B.1}$$

Les notations ϕ_0 et ϕ correspondent aux configurations prises par le champ aux instants intial η_0 et final η. Nous rappelons que dans un espace de Sitter, les solutions des équations de champs, à un instant τ, s'expriment à l'aide des fonctions de Hankel :

$$\phi_\tau(k,\tau)=A\left(1-\frac{i}{k\tau}\right)e^{-ik(\tau-\eta_0)}+B\left(1+\frac{i}{k\tau}\right)e^{ik(\tau-\eta_0)}, \tag{B.2}$$

avec les constantes d'intégrations A et B données par :

$$A = \frac{\frac{k\eta}{k\eta+i}e^{-ik(\eta-\eta_0)}\phi-\frac{k\eta_0}{k\eta_0+i}\phi_0}{\frac{k\eta-i}{k\eta+i}e^{-2ik(\eta-\eta_0)}-\frac{k\eta_0-i}{k\eta_0+i}} \tag{B.3}$$

$$B = \frac{\frac{k\eta}{k\eta-i}e^{ik(\eta-\eta_0)}\phi-\frac{k\eta_0}{k\eta_0-i}\phi_0}{\frac{k\eta+i}{k\eta-i}e^{2ik(\eta-\eta_0)}-\frac{k\eta_0+i}{k\eta_0-i}}. \tag{B.4}$$

L'action classique $\tilde{S}$ s'obtient en introduisant les solutions ci-dessus dans l'expression générique de l'action, qui prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int_{\eta_0}^{\eta}d\tau\left[h_k(\tau)\left(\left|A\right|^2+\left|B\right|^2\right)+2\mathrm{Re}\left[g_k(\tau)\right]\mathrm{Re}\left[AB^\dagger\right]\right. \\ &\left.-2\mathrm{Im}\left[g_k(\tau)\right]\mathrm{Im}\left[AB^\dagger\right]\right],\end{aligned} \tag{B.5}$$

avec

$$h_k(\tau)=\frac{3}{k^2\tau^4}\quad\text{et}\quad g_k(\tau)=e^{-ik(\tau-\eta_0)}\left(-\frac{3}{k^2\tau^4}+\frac{6}{\tau^2}-2k^2-\frac{2i}{k\tau^3}\right). \tag{B.6}$$

Puisque les constantes A et B ne dépendent que de l'instant initial et l'instant final, l'intégration sur la variable temporelle τ ne porte que sur les fonctions h_k et g_k. En appelant $H_k(\eta_0,\eta)$ et

$G_k(\eta_0,\eta)$ ces intégrales, l'action prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[H_k(\eta_0,\eta)\left(|A|^2+|B|^2\right)+2\mathrm{Re}\left[G_k(\eta_0,\eta)\right]\mathrm{Re}\left[AB^\dagger\right]\right. \\ &\left.-2\mathrm{Im}\left[G_k(\eta_0,\eta)\right]\mathrm{Im}\left[AB^\dagger\right]\right].\end{aligned} \tag{B.7}$$

Les expressions analytiques des fonctions H_k et G_k, obtenues grâce aux logiciel MAPLE, sont :

$$H_k(\eta,\eta_0)=k^{-2}\left(\frac{1}{\eta_0^3}-\frac{1}{\eta^3}\right), \tag{B.8}$$

et

$$\begin{aligned}G_k(\eta,\eta_0) &= k^{-2}\left(\frac{e^{-ik(\eta-\eta_0)}}{\eta^3}-\frac{1}{\eta_0^3}\right)-\frac{4}{3}ik^{-1}\left(\frac{e^{-ik(\eta-\eta_0)}}{\eta^2}-\frac{1}{\eta_0^2}\right) \\ &+\left(\frac{17}{3}+i\right)\left(\frac{e^{-k(\eta-\eta_0)}}{\eta}-\frac{1}{\eta_0}\right)-2ik\left(e^{-ik(\eta-\eta_0)}-1\right) \\ &-\frac{14}{3}ike^{k\eta_0}\left(\Gamma(0,ik\eta)-\Gamma(0,ik\eta_0)\right).\end{aligned} \tag{B.9}$$

La fonction $\Gamma(a,z)$ est la fonction incomplète d'Euler. Cette fonction n'étant pas définie en $z=0$, il sera nécessaire de s'assurer que l'intervalle de temps conforme $[\eta_0,\eta]$ ne passe pas par cette valeur.

Il suffit maintenant de remplacer les constante A et B par leur expression en fonction des configuration initiale et finale du champ, ϕ_0 et ϕ, pour obtenir la forme (B.2) de l'action. En développpant les différentes termes faisant intervenir les constantes, nous obtenons :

$$|A|^2+|B|^2=\frac{C_1|\phi|^2+C_2|\phi_0|^2+C_3\mathrm{Re}\left[\phi\phi_0^\dagger\right]}{D_1}, \tag{B.10}$$

et

$$\mathrm{Re}\left[AB^\dagger\right] = \frac{R_1|\phi|^2+R_2|\phi_0|^2+R_3\mathrm{Re}\left[\phi\phi_0^\dagger\right]+R_4\mathrm{Im}\left[\phi\phi_0^\dagger\right]}{D_2}, \tag{B.11}$$

$$\mathrm{Im}\left[AB^\dagger\right] = \frac{I_1|\phi|^2+I_2|\phi_0|^2+I_3\mathrm{Re}\left[\phi\phi_0^\dagger\right]+I_4\mathrm{Im}\left[\phi\phi_0^\dagger\right]}{D_2}. \tag{B.12}$$

Les fonctions C_i, D_i, R_i et I_i, qui dépendent de η, η_0 et k, sont données par :

$$C_1 = 2k^2\eta^2, \tag{B.13}$$

$$C_2 = 2k^2\eta_0^2, \tag{B.14}$$

$$C_3 = -4\mathrm{Re}\left[k^2\eta\eta_0\left(k\eta_0+i\right)\left(k\eta-i\right)e^{-ik(\eta-\eta_0)}\right], \tag{B.15}$$

puis

$$D_1 = \left|(k\eta-i)(k\eta_0+i)e^{-2ik(\eta-\eta_0)}-(k\eta_0-i)(k\eta+i)\right|^2, \tag{B.16}$$

$$D_2 = \left[(k^2\eta\eta_0+1)\sin\left(k(\eta-\eta_0)\right)-k(\eta-\eta_0)\cos\left(k(\eta-\eta_0)\right)\right]^2, \tag{B.17}$$

et

$$R_1 = (k^2\eta_0^2-1)k^2\eta^2, \tag{B.18}$$

$$R_2 = \left[(k^2\eta^2-1)\cos\left(2k(\eta-\eta_0)\right)-2k\eta\sin\left(2k(\eta-\eta_0)\right)\right]k^2\eta_0^2, \tag{B.19}$$

$$R_3 = -2k^2\eta\eta_0\left[(k^2\eta\eta_0-1)\cos\left(k(\eta-\eta_0)\right)-k(\eta+\eta_0)\sin\left(k(\eta-\eta_0)\right)\right], \tag{B.20}$$

$$R_4 = 2k^2\eta\eta_0\left[k(\eta+\eta_0)\cos\left(k(\eta-\eta_0)\right)+(k^2\eta\eta_0-1)\sin\left(k(\eta-\eta_0)\right)\right], \tag{B.21}$$

ainsi que

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 2k^3\eta^2\eta_0, && \text{(B.22)}\\
I_2 &= \left[(k^2\eta^2-1)\sin\left(2k(\eta-\eta_0)\right)+2k\eta\cos\left(2k(\eta-\eta_0)\right)\right]k^2\eta_0^2, && \text{(B.23)}\\
I_3 &= -R_4, && \text{(B.24)}\\
I_4 &= R_3. && \text{(B.25)}
\end{aligned}
$$

L'action classique $\tilde{S}$ s'écrit donc bien sous la forme (B.2) avec les fonction $F_i^{(k)}$ données par :

$$
\begin{aligned}
F_1^{(k)}(\eta,\eta_0) &= \frac{H_k\times C_1}{D_1}+\frac{2}{D_2}\left(R_1\times\mathrm{Re}\left[G_k\right]-I_1\times\mathrm{Im}\left[G_k\right]\right), && \text{(B.26)}\\
F_2^{(k)}(\eta,\eta_0) &= \frac{H_k\times C_2}{D_1}+\frac{2}{D_2}\left(R_2\times\mathrm{Re}\left[G_k\right]-I_2\times\mathrm{Im}\left[G_k\right]\right), && \text{(B.27)}\\
F_3^{(k)}(\eta,\eta_0) &= \frac{H_k\times C_3}{D_1}+\frac{2}{D_2}\left(R_3\times\mathrm{Re}\left[G_k\right]-I_3\times\mathrm{Im}\left[G_k\right]\right), && \text{(B.28)}\\
F_4^{(k)}(\eta,\eta_0) &= \frac{2}{D_2}\left(R_4\times\mathrm{Re}\left[G_k\right]-I_4\times\mathrm{Im}\left[G_k\right]\right). && \text{(B.29)}
\end{aligned}
$$

Conclusion

> « Entre la disparition d'une pensée et l'apparition d'une autre, il y a un intervalle vide qui dépasse toute imagination. »
>
> Chandra Swami

Dans son livre [1], K. Thorne qualifie les trous noirs d'*Einstein's outrageous legacy*, le scandale d'une théorie d'une rare élégance. Pourtant la phénoménologie des trous noirs est maintenant devenue un point incontournable dans la recherche d'une théorie quantique de la gravitation via leur processus d'évaporation. Bien qu'encore non découvert, ce phénomène est très bien établi d'un point de vue théorique et a déjà permis de placer de très bonnes contraintes sur la densité de trous noirs formés dans l'Univers primordial. Au-delà de cet attrait cosmologique, le processus de Hawking renseigne sur la cohérence des théories physiques fondamentales. A l'heure actuelle, l'évaporation des trous noirs fait partie des rares phénomènes dans lesquels des effets de gravité quantique pourraient être observés. De plus, le principe holographique, ravivé par la correspondance (A)dS/CFT, est très lié à la problématique de l'entropie de Hawking-Bekenstein. Comprendre ce processus dans le cadre des théories allant au-delà de la Relativité Générale, comme celle de Lovelock, s'avère donc un outil essentiel afin de sonder la cohérence des dites extensions.

L'étude de l'évaporation des trous noirs nécessite l'évaluation parallèle de deux quantités : la température d'une part et les facteurs de corps gris, *i.e.* la probabilité qu'un quantum s'échappe définitivement de l'attraction du trou noir, d'autre part. La deuxième quantité requiert la résolution des équations de champ dans un espace-temps courbe compliquant fortement les calculs, à la différence de la température qui, du moins dans le cas de trou noir de Schwarzschild, se détermine aisément. Dans le cadre de la théorie de Lovelock, les valeurs exactes de ces facteurs pour les particules du modèle standard ainsi que des particules scalaires confinées ou non sur la brane, émises par des trous noirs de Schwarzschild, sont données dans ce manuscrit. L'emphase a été mise sur les évaluations numériques, qui sont un outil indispensable au calcul de ces facteurs sur l'ensemble du spectre énergétique, permettant *in fine* de déterminer les spectres d'émission des trous noirs. Les résultats numériques sont de plus confirmés par des investigations analytiques dans les domaines infra-rouge et ultra-violet.

Ce travail de fond a d'abord permis de montrer l'influence de la théorie de Lovelock sur le mécanisme d'évaporation : aussi bien le terme d'ordre zéro, *i.e.* constante cosmologique, que le terme d'ordre deux, *i.e.* terme de Gauss-Bonnet, laissent une marque claire dans le spectre d'émission, et donc dans la dynamique d'évaporation. Cette situation, bien que non-observée actuellement, montre l'importance de ce phénomène en tant qu'expérience de pensée en vue de tester la cohérence de la théorie de Lovelock. Le calcul des facteurs de corps gris est indispensable afin de vérifier que les quatre *principes* de la thermodynamique des trous noirs restent justes dans ce nouveau corpus théorique. D'autre part, il a été montré que la détermination exacte des spectres d'émissions permettait des investigations expérimentales si l'on se place dans le cadre des modèles branaires *à la* Arkani-Hamed, Dimopoulos & Dvali. Il serait en l'occurence possible de déterminer si le terme de Gauss-Bonnet est présent ou non dans l'action gravitationnelle en détectant les produits d'évaporation des trous noirs microscopiques éventuellement formés dans les futurs collisionneurs, d'énergie de collision supérieure au TeV. Une étude préliminaire sur l'influence de la constante cosmologique a prouvé que la détermination des facteurs de corps gris s'avère indispensable pour lever certaines dégénérescences entre les paramètres fondamentaux du modèle, *e.g.* nombre de dimensions et valeur de la constante cosmologique. La phénoménologie des trous noirs ainsi formés a aussi été abordée d'un point de vue astrophysique pour montrer que la production de micro-trous noirs dans la galaxie ou dans l'univers primordial n'était pas en contradiction avec les données actuelles.

L'étude des facteurs de corps gris se base sur la dynamique des champs dans une métrique de fond non-Minkowskienne impliquant des équations différentielles dont la solution n'est pas connue dans la plupart des cas. J'ai aussi montré qu'il est possible d'obtenir une première estimation de la dynamique d'un champ scalaire dans des espaces-temps de type Schwarzschild sans pour autant faire appel à des calculs numériques. Pour cela, une méthode générique consistant à approcher la fonction d'onde radiale d'une particule scalaire par sa fonction d'onde WKB a été développée et certains points ont été considérablement éclaircis en comparaison des études de types WKB déjà existentes. L'utilité d'une telle approximation a aussi été prouvée en l'appliquant à trois cas d'espace-temps quadri-dimensionnels, statiques et à symétrie sphèrique : les espaces Anti-de Sitter ainsi que les trous noirs de Schwarzshild et Schwarzschild-Anti-de Sitter.

Les trous noirs constituent aussi une sonde cosmologique prometteuse car leur formation dans l'univers primordial renseigne directement sur les inhomognéïtés de densité aux très petites échelles de longueur. A partir des fortes contraintes quant à la production de gravitinos dans l'univers primordial, j'ai montré qu'il était possible d'améliorer la limite supérieure sur la fraction d'univers s'effondrant en trous noirs, et ce dans une gamme de masses peu explorée. Cette limite supérieure s'obtient en tirant parti du processus d'évaporation des trous noirs : ils émettront, entre autres types de particules, des gravitinos dont la densité est fortement contrainte, apportant ainsi de nouvelles informations sur le spectre de fluctuations primordiales à petite échelle. Finalement, dans les modèles cosmologiques, la Matière Noire joue un rôle central bien que sa nature soit jusqu'à présent inconnue. Pour répondre à ce problème, un candidat de type WIMP, qui serait la particule de Kaluza-Klein la plus légère dans les modèles UED ou bien la particules stabilisée par la symétrie Z_3 dans les modèles RS, *a vu le jour* il y a quelques années. Parmi les nombreuses voies de détection, directe ou indirecte, d'un tel candidat, nous avons pu montrer qu'il serait difficile de contraindre les modèles avec dimensions supplémentaires via la contribution des produits d'annihilation de LKP aux antiprotons cosmiques dans le cas de halo de Matière Noire non-grumeleux. S'il existe une telle sous-structure dans le halo, les expériences actuelles et à venir peuvent présenter une excellente sensibilité à ce phénomène dans le cadre des modèles de type RS.

Table des figures

Liste des tableaux

Bibliographie

[1] K. S. Thorne, *Black Holes and Time Warps : Einstein's outrageous Legacy*, W. W. Norton & Company, Inc., New York (1994)

[2] John Michell, *On the Means of Discovering the Distance, Magnitude, &c., of the Fixed Stars* Royal Society (1784) ;
Pierre Simon de Laplace, *Exposition du Système du monde* (1796)

[3] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, Inc. (1972)

[4] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit*, Cambridge University Press, Cambridge (2004)

[5] G. Boudoul, *Trous Noirs Primordiaux, Rayonnement Cosmiques et Développements Instrumentaux pour l'Imageur Tcherenkov de l'Expérience Spatiale AMS* (Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2003)

[6] C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, New York,1973)

[7] R. C. Myers & M. J. Perry, Annals Phys. **172** (1986) 304

[8] R. Arnowitt, S. Deser & C. Misner, Phys. Rev. **117** (1960) 1595

[9] R. Arnowitt, S. Deser & C. Misner, Phys. Rev. **118** (1960) 1100

[10] R. Arnowitt, S. Deser & C. Misner, Phys. Rev. **122** (1961) 997

[11] S. Deser & B. Tekin, Phys. Rev. D **67** (2003) 084009

[12] F. R. Tangherlini, Nuovo. Cim. **27** (1963) 636

[13] J. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231

[14] J. Maldacena, [**arXiv :hep-th/0309246**]

[15] S. Perlmutter *et al.*, Ap. J. **483** (1997) 565

[16] D. N. Spergel *et al.*, Astrophys. J. Suppl. **148** (2003) 175

[17] D. N. Spergel *et al.*, soumis à Ap. J., [**arXIv : astro-ph/0603449**]

[18] T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe* (Cambridge University Press, 1993) ;
T. Padmanabhan, *Theoretical Astrophysics Vol. 3 : Galaxies and Cosmology* (Cambridge University Press, 2002

[19] W. L. Freedman & M. S. Turner, Rev. Mod. Phys. **75** (2003) 1433

[20] K. A.Olive, Les Houches Session LXXI, *The Primordial Universe*, edited by P. Binétruy *et al.* (Springer, Berlin, 1999), p. 221

[21] G. Bertone, D. Hooper & J. Silk, Phys. Rept. **405** (2005) 279-390

[22] T. Kaluza, Sitzungusber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1921** (1921) 966

[23] O. Klein, Z. Phys. **37** (1926) 895 [Surveys High Energ. Phys. **5** (1986) 241]

[24] G. Servant & T. M. P. Tait, Nucl. Phys. B **650** (2002) 391

[25] S. Nojiri & S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **68** (2003) 123512

[26] S. Nojiri & S. D. Odintsov, Gen. Rel. Grav. **36** (2004) 1765

[27] S. W. Hawking & G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge Univ. Press, London, 1973)

[28] G. E. Lemaître, J. Math. and Phys. (M.I.T) **4** (1925) 188

[29] H. P. Robertson, Phil. Mag. **5** (1928) 835

[30] C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, 2004) ;
H. Nicolai, K. Peeters & M. Zamlakar, Class. Quant. Grav. **22** (2005) R193

[31] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory* (Cambridge University Press, 2004) ;
J. Polchinski, *String Theory* 2 volumes (Cambridge University Press, 1998) ;
M. B. Green, J. H. Schwarz & E. Witten, *Superstring Theory* 2 volumes (Cambridge University Press, 1988)

[32] B. Zwiebach, Phys. Lett. B **156** (1985) 315

[33] D. G. Boulware & S. Deser, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 2656

[34] N. Deruelle & J. Madore, Mod. Phys. Lett. A **1** (1986) 237

[35] N. Deruelle & L. Farina-Busto, Phys. Rev. D **41** (1990) 3696

[36] J. E. Lidsey & N. J. Nunes, Phys. Rev. D **67** (2003) 103510

[37] B. C. Paul & S. Mukherjee, Phys. Rev. D **42** (1990) 2595

[38] B. Abdesselam & N. Mohammedi, Phys. Rev. D **65** (2002) 084018

[39] C. Charmousis & J.-F. Dufaux, Class. Quantum. Grav **19** (2002) 4671

[40] L. Randall & R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690

[41] C. Charmousis, S. C. Davis & J.-F. Dufaux, JHEP **0312** (2003) 029

[42] S. O. Alexeyev & M. V. Pomazanov, Phys. Rev. D **55** (1997) 2110

[43] S. O. Alexeyev, A. Barrau, G. Boudoul, O. Khovanskaya & M. Sazhin, Class. Quantum. Grav **19** (2002) 4431

[44] R. C. Myers & J. Z. Simon, Phys. Rev. D **38** (1988) 2434

[45] M. Banados, C. Teitelboim & J. Zanelli, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 957

[46] T. Torii & K.-I. Maeda, Phys. Rev. D **58** (1998) 084004

[47] D. Lovelock, J. Math. Phys. **12** (1971) 498

[48] D. Lovelock, J. Math. Phys. **13** (1972) 874

[49] T. Applequist, H.C. Cheng & D. A. Dobrescu, Phys. Rev. D **64** (2001) 035002

[50] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos & G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429** (1998) 263

[51] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos & G. R. Dvali, Phys. Rev. D **59** (1999) 086004

[52] I. Antoniadis *et al.*, Phys. Lett. B **436** (1998) 257

[53] I. Antoniadis, C. Munoz & M. Quiros, Nucl. Phys. B **397** (1993) 515

[54] I. Antoniadis, K. Benakli & M. Quiros, Phys. Lett. B **331** (1994) 313

[55] I. Antoniadis, S. Dimopoulos, A. pomarol & M. Quiros, Nucl. Phys. B **544** (1999) 503

[56] D. M. Ghilencea & H.-P. Nilles, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys **28** (2002) 2475

[57] S. W. Hawking, Nature **248** (1974) 30

[58] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199

[59] J. B. Hartle & S. W. Hawking, Phys. Rev. D **13** (1976) 2188

[60] K. Srinivasan & T. Padmanabhan, Phys. Rev. D **60** (1999) 24007

[61] S. Shankaranarayanan, T. Padmanabhan & K. Srinivasan, Class. Quantum. Grav. **19** (2002) 2671

[62] S. Shankaranarayanan, K. Srinivasan & T. Padmanabhan, Mod. Phys. Lett. A **16** (2001) 571

[63] M. K. Parikh & F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 5042

[64] S. Massar & R. Parentani, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 3810

[65] S. Takagi, Prog. Theor. Phys. **88** (1986) 1

[66] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14** (1976) 870

[67] D. N. Page, Phys. Rev. D **13** (1976) 198

[68] D. N. Page, Phys. Rev. D **14** (1976) 3260

[69] D. N. Page, Phys. Rev. D **16** (1977) 2402

[70] J. M. Bardeen, B. Carter & S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **31** (1973) 1961

[71] W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1683

[72] D. N. Page, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1013

[73] L. Susskind & J. Lindesay, *An Introduction to Black Holes, Information and the String Theory : the Holographic Universe* (World Scientific, 2005)

[74] S. W. Hawking, Phys. Rev. D **72** (2005) 084013

[75] V.P. Frolov & I. D. Novikov, *Black Holes Physics : Basic Concepts and New Developments* (Kluwer Academic Publishers, 1998)

[76] H.-P. Nollert, Class. Quantum Grav. **16** (1999) R159

[77] B. F. Schutz & C. M. Will, Ap. J **291** (1985) L33

[78] S. Iyer & C. M. Will, Phys. Rev. D **35** (1987) 3621

[79] R. A. Konoplya, Phys. Rev. D **68** (2003) 024018

[80] J. Martin & D. J. Schwarz, Phys. Rev. D **67** (2003) 083512

[81] R. Casadio, F. Finelli, M. Luzzi & G. Venturi, Phys. Rev D 71 (2005) 043517

[82] R. Casadio, F. Finelli, M. Luzzi & G. Venturi, Phys. Lett. B 625 (2005) 1

[83] R. Casadio, F. Finelli, M. Luzzi & G. Venturi, Phys. Rev. D **72** (2005) 103516

[84] S. Winitzki, Phys. Rev. D **72** (2005) 104011

[85] M. Brack & R. K. Bhaduri, *Semiclassical Physics* (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1997)

[86] P. Kanti, *Communication privée*

[87] M. Abramowitz & I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publication Inc., New York, 1966).

[88] S. J. Avis, C. J. Isham & D. Storey, Phys. Rev. D **18** (1978) 3565

[89] C. P. Burgess & C. A. Lutken, Phys. Lett. B **153** (1985) 137

[90] I. I. Cotaescu, Phys. Rev. D **60** (1999) 107504

[91] J. Grain & A. Barrau, article en préparation

[92] R. W. Jackiw, *Diverse Topics in Theoretical and Mathematical Physics* (World Scientific, 1995)

[93] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985)

[94] K. Huang, *Quantum Field Theory* (Wiley interscience, John Wiley & Sons, 1998)

[95] D. V. Long & G. M. Shore, Nucl. Phys. B **530** (1998) 247

[96] P. M. Morse & H. Feschbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, New York, 1953)

[97] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (1994)

[98] J. Guven, B. Lieberman & C. T. Hill, Phys. Rev. D **39** (1989) 438

[99] C. Morette, Phys. Rev. **81** (1951) 848

[100] C. Dewitt-Morette, Annales de l'Institut Henri Poincaré (A) Physique théorique **11** (1969) 153

[101] Y. Colin de Verdière, Ens. Math. **44** (1998) 23

[102] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integrals* (Wiley, 1981)

[103] K. Freese, C. T. Hill & M. Mueller, Nucl. Phys. B **255** (1985) 693

[104] C. M. Harris & P. Kanti, JHEP **0310** (2003) 014

[105] P. Kanti, J. Grain & A. Barrau, Phys. Rev. D **71** (2005) 104002

[106] J. Grain, A. Barrau & P. Kanti, Phys. Rev. D **72** (2005) 104016

[107] N. D. Birrell & P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, 1982)

[108] M. Cvetic & F. Larsen, Phys. Rev. D **57** (1998) 6297

[109] P. Kanti & J. March-Russell, Phys. Rev. D **67** (2003) 104019

[110] J. Grain & A. Barrau, Nucl. Phys. B **742** (2006) 253

[111] P. Kanti & J. March-Russell, Phys. Rev. D **66** (2002) 024023

[112] Y. Gürcel, V. D. Sandberg, I. D. Novikov & A. A. Starobinsky, Phys. Rev. D **19** (1979) 413

[113] Y. Gürcel, V. D. Sandberg, I. D. Novikov & A. A. Starobinsky, Phys. Rev. D **20** (1979) 1260

[114] P. R. Brady, C. M. Chambers, W. Krivan & P. Laguna, Phys. Rev. D **55** (1997) 7538

[115] E. Newman & R. Pensrose, J. Math. Phys. **3** (1962) 566

[116] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* Oxford University Press, New York, 1983

[117] S. A. Teukolsky, Ap. J. **185** (1973) 635

[118] W. H. Press & S. A. Teukolsky, Ap. J. **185** (1973) 649

[119] S. A. Teukolsky & W. H. Press, Ap. J. **193** (1974) 6443

[120] S. S. Gubser, I. R. Klebanov & A. A. Tseytlin, Nucl. Phys. B **449** (1997) 217

[121] C. M. Harris & P. Kanti, Phys. Lett. B **633** (2006) 106

[122] G. Duffy, C. M. Harris, P. Kanti & E. Winstanley, JHEP **0509** (2005) 049

[123] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling & B. P. Flannery, *Numerical Recipes* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988)

[124] R. G. Cai, Phys. Rev. D **65** (2002) 084014

[125] I. P. Neupane, Phys. Rev. D **69** (2004) 084011

[126] R. Emparan, G. T. Horowitz & R. C. Myers, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 499

[127] R. Emparan, J. Garcia-Bellido & N. Kaloper, JHEP **0301** (2003) 079

[128] Cardan, *Ars Magna* 1545 (Boyer and Merzbach 1991, p. 283)

[129] A. S. Cornell, W. Naylor & M. Sasaki, JHEP **0602** (2006) 012

[130] T. Regge & J. A. Wheeler, Phys. Rev. **108** (1957) 1063

[131] H. Kodama & A. Ishibashi, Prog. Theor. Phys. **110** (2003) 701

[132] V. Cardoso, M. Cavaglia & L. Gualtieri, JHEP **0602** (2006) 021

[133] S. Creek, O. Efthimiou, P. Kanti & K. Tamvakis, Phys.Lett. B **635** (2006) 39

[134] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14** (1976) 3251

[135] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer & B. Roulet, *Eléments de Physique Statistique* (Hermann, 1996)

[136] Y. Uehara, Mod. Phys. Lett. A **17** (2003) 151101

[137] G. Landsberg, FERMILAB-CONF-04-399-E-T, SSI-2004-MOT006, 2004 [**arXiv : hep-ex/0412028**]

[138] M. Besancon, Acta Phys. Polon. B **36** (2005) 3487

[139] M. Acciari *et al.* [L3 Collaboration], Phys. Lett. B **470** (1999) 268

[140] B. Abbott *et al.* [D0 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 1156

[141] S. Hannestad & G. G. Raffelt, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 051301

[142] S. Hannestad & G. G. Raffelt, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 071301

[143] S. Hannestad & G. G. Raffelt, Phys. Rev. D **67** (2003) 125008 ; Erratum-ibid. D **69** (2004) 029901

[144] L. J. Hall & D. R. Smith, Phys. Rev. D **60** (1999) 085008

[145] M. Fairbairn, Phys. Lett. B **508** (2001) 335

[146] K. R. Dienes, Hamburg 2002, Supersymmetry and unification of fundamental interactions, vol. 2 (2002) [**arXiv : hep-ph/0211211**]

[147] T. Banks & W. Fischler, [**arXiv : hep-th/9906038**]

[148] R. Penrose, *non publié*

[149] P. D. D'Eath & P. N. Payne, Phys. Rev. D **46** (1992) 658

[150] P. D. D'Eath & P. N. Payne, Phys. Rev. D **46** (1992) 675

[151] P. D. D'Eath & P. N. Payne, Phys. Rev. D **46** (1992) 694

[152] D. M. Eardley & S. B. Giddings, Phys. Rev. D **66** (2002) 044011

[153] H. Yoshino & Y. Nambu, Phys. Rev. D **66** (2002) 065004

[154] H. Yoshino & V. S. Rychkov, Phys. Rev. D **71** (2005) 104028

[155] L. A. Anchordoqui & H. Goldberg, Phys. Rev. D **65** (2002) 047502

[156] L. A. Anchordoqui, J. L. Feng, H. Goldberg & A. D. Shapere, Phys. Rev. D **65** (2002) 124027

[157] J. L. Feng & A. D. Shapere, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 021303

[158] E.-J. Ahn, M. Ave, M. Cavaglia & A. G. Olinto, Phys. Rev. D **68** (2003) 043004

[159] S. B.Giddings & S. Thomas, Phys. Rev. D **65** (2002) 056010

[160] S. Dimopoulos & G. Landsberg, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 161602

[161] A. Barrau, C. Féron & J. Grain, Ap. J. **630** (2005) 1015

[162] M. Roth *et al.*, Proc. of the 28th ICRC, p. 1

[163] F. Donato, D. Maurin, P. Salati, A. Barrau, G. Boudoul & R. Taillet, Ap. J. **536** (2001) 172

[164] T. Sjöstrand, Comput. Phys. Commun. **82** (1994) 74

[165] D. Maurin, F. Donato, R. Taillet & P. Salati, Ap. J. **555** (2001) 585

[166] A. Barrau, G. Boudoul, F. Donato, D. Maurin, P. Salati & R. Taillet , Astronom. Astrophys. **388** (2002) 676

[167] D. Maurin, *Propagation des Rayons Cosmiques dans un Modèle de Diffusion : une Nouvelle Estimation des Paramètres de Diffusion et du Flux d'Antiprotons Secondaires* (Thèse de doctorat, Université de Savoie, 2001)

[168] A. Barrau, Astropart. Phys. **12** (2000) 269

[169] A. Bonanno & M. Reuter, Phys. Rev. D **62** (2000) 043008

[170] A. Barrau, J. Grain & S. Alexeyev, Phys. Lett. B **584** (2004) 114

[171] G. W. Gibbons, H. Lu, D. N. Page & C.N. Pope, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 171102

[172] W. Chen, H. Lu & C. N. Pope, Class. Quant. Grav. **23** (2006) 5323

[173] Z.-W. Chong, M. Cvetic, H. Lu & C. N. Pope, Phys. Lett. B **626** (2005) 215

[174] Z.-W. Chong, M. Cvetic, H. Lu & C. N. Pope, Phys. Rev. D **72** (2005) 041901

[175] Z.-W. Chong, M. Cvetic, H. Lu & C. N. Pope, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 161301

[176] J. Labbé, A. Barrau & J. Grain, PoS(HEP2005)013

[177] J. Labbé, *Trous Noirs en Collisionneurs : Evaporation, Constante Cosmologique et Fin de Vie* (Rapport de stage de Master2, Université Joseph Fourier, 2005)

[178] S. Dimopoulos & R. Emparan, Phys. Lett. B **526** (2002) 393

[179] J. H. MacGibbon, Nature **329** (1987) 308

[180] E. Richter-Was, D. Froidevaux & L. Pogglioli, ATLAS Internal Note, **PHY-No-131** (1998)

[181] P. Peter & J.-P. Uzan, *Cosmologie Primordiale* (Belin, 2005)

[182] A. A. Starobinsky, JETP Lett. **55** (1992) 489

[183] J. Lesgourgues, D. Polarski & A. A. Starobinsky, MNRAS **197** (1998) 769

[184] A. Barrau, G. Boudoul & L. Derôme, Proc. of the 28th ICRC, [**astro-ph/0304528**]

[185] A. Barrau, D. Blais, G. Boudoul & D. Polarski, Phys. Lett. B **551** (2003) 218

[186] A. Barrau & N. Ponthieu, Phys.Rev. D **69** (2004) 105021

[187] M. Yu. Khlopov, A. Barrau & J. Grain, Class. Quantum. Grav. 23 (2006) 1875

[188] M. Yu. Khlopov *et al.*, Phys. Atom. Nucl. **57** (1994) 1393

[189] E. V. Sedel'nikov, S. S. Filippov & M. Yu. Khlopov, Phys. Atom. Nucl. **58** (1995) 235

[190] K. Jedamzik, Phys. Rev. D **70** (2004) 063524

[191] A. M. Green & A. R. Liddle, Phys. Rev. D **56** (1997) 6166

[192] T. Bringmann, C. Kiefer & D. Polarski, Phys. Rev. D **65** (2002) 024008

[193] H. I. Kim, C. H. Lee & J. H. MacGibbon, Phys. Rev. D **59** (1999) 063004

[194] A. R. Liddle & D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large Scale Structure* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000)

[195] H. V. Peiris *et al.*, Ap. J. **148** (2003) 213

[196] J. Khoury, P. J. Steinhardt & N. Turok, Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 161301

[197] M. Yu. Khlopov *et al.*, Astronom. Lett. **24** (1998) 413

[198] M. Yu. Khlopov *et al.*, Grav. Cosmol. **2** (1999) S1

[199] A. Barrau, D. Blais, G. Boudoul & D. Polarski, Ann. Phys. **13** (2004) 115

[200] R. H. Sanders & S. S McGaugh, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **40** (2002) 263

[201] M. Milgrom, New Astron. Rev. **46** (2002) 741

[202] Y. Fujii & K. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation* (Cambridge University Press, Cambridge) ;
C. H. Brans, [**arXiv : gr-qc/0506063**]

[203] H. A. Buchdahl, MNRAS **150** (1970) 1

[204] A. Arbey, *Matière Noire Astronomique et Champs Scalaires* (Thèse de doctorat, Université de Savoie, 2003)

[205] T. Lasserre *et al.*, Astronom. Astrophys. **355** (2000) 39

[206] C. Alcock *et al.*, Ap. J. **542** (2000) 281

[207] J. A. Peacock, *Cosmological Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998)

[208] S. D. M. White, C. S. Frenk & M. Davis, Ap. J. **274** (1983) L1

[209] R. Barbier *et al.*, Phys. Rept. **420** (2005) 1

[210] M. Davis, G Efstathiou, C. S. Frenk & S. D. M. White, Ap. J **292** (1985) 371

[211] P. J. E. Peebles, Ap. J **277** (1984) 470

[212] J. F. Navarro, C. S. Frenk & S. D. M. White, Ap. J **462** (1996) 563

[213] B. Moore *et al.*, MNRAS **310** (1999) 1147

[214] T. Fukushige & J. Makino, Ap. J. **477** (1997) L9

[215] J. Diemand, B. Moore & J. Stadel, Nature **433** (2005 389

[216] R. D. Peccei & H. R. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38** (1983) 1440

[217] E. Kolb & M. S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley Reading, 1990)

[218] A. Borriello & P. Salucci, MNRAS **323** (2001) 285

[219] J. N. Bahcall & R. N. Soneira, Astrophys. J. Suppl. Ser. **44** (1980) 73

[220] A. Barrau, P. Salati, G. Servant, F. Donato, J. Grain, D. Maurin & R. Taillet, Phys. Rev. D **72** (2005) 063507

[221] G. Servant & T. M. P. Tait, Nucl. Phys. B **650** (2002) 391

[222] K. Agashe & G. Servant, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 231805

[223] G. Burdman, Phys. Rev. D **66** (2002) 076003

[224] K. Agashe, A. Delgado, M. J. May & R. Sundrum, JHEP **0308** (2003) 050

[225] K. Agashe & G. Servant, JCAP **502** (2005) 002

[226] H.-C. Cheng, K. T. Matchev & M. Schmaltz, Phys. Rev. D **66** (2002) 036005

[227] H. Georgi, A. K. Grant & G. Hailu, Phys. Lett. B **506** (2001) 207

[228] G. Servant & T. M. P. Tait, New J. Phys. **4** (2002) 99

[229] H.-C. Cheng, J. L. Feng & K. T. Matchev, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 211301

[230] G. Bertone, G. Servant & G. Sigl, Phys. Rev. D **68** (2003) 044008

[231] L. Bergstrom, T. Bringmann, M. Eriksson & M. Gustafsson, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 131301

[232] E. A. Baltz & D. Hooper, JCAP **507** (2005) 001

[233] L. Bergstrom, T. Bringmann, M. Eriksson & M. Gustafsson, JCAP **04** (2005) 004

[234] D. Hooper & G. D. Kribs, Phys. Rev. D **70** (2004) 115004

[235] D. Hooper & G. D. Kribs, Phys. Rev. D **67** (2003) 055003

[236] D. Hooper & G. Servant, Astropart. Phys. **24** (2005) 231

[237] M. Kakizaki, S. Matsumoto, Y. Sato & M. Senami, Nucl. Phys. B **735** (2006) 84

[238] F. Donato, N. Fornengo, D. Maurin, P. Salati & R. Taillet, Phys. Rev. D (2004) 063501

[239] R. Taillet & D. Maurin, Astron. Astrophys. **402** (2003) 971

[240] D. Maurin & R. Taillet, Astron. Astrophys. **404** (2003) 949

[241] T. Bringmann, JCAP **0508** (2005) 006