



HAL
open science

Branched surfaces in contact geometry

Skander Zannad

► **To cite this version:**

Skander Zannad. Branched surfaces in contact geometry. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2006. Français. NNT: . tel-00103561

HAL Id: tel-00103561

<https://theses.hal.science/tel-00103561>

Submitted on 4 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année : 2006

N° B.U. :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

SURFACES BRANCHÉES EN GÉOMÉTRIE DE CONTACT

Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Présentée et soutenue publiquement par

Skander ZANNAD

*le 15 septembre 2006 à l'Université de Nantes
devant le jury ci-dessous*

<i>Président</i>	:	Emmanuel GIROUX	DR du CNRS	(ÉNS Lyon)
<i>Rapporteurs</i>	:	Michel BOILEAU	Professeur	(Université de Toulouse III)
		William KAZEZ	Professeur	(University of Georgia)
<i>Examineurs</i>	:	Michel BOILEAU	Professeur	(Université de Toulouse III)
		Gilles CARRON	Professeur	(Université de Nantes)
		Vincent COLIN	MC-HDR	(Université de Nantes)
		Emmanuel GIROUX	DR du CNRS	(ÉNS Lyon)
		François LAUDENBACH	Professeur émérite	(Université de Nantes)
	Daniel MATIGNON	MC-HDR	(Université d'Aix-Marseille I)	

Directeur de thèse : François LAUDENBACH
Co-encadrant : Vincent COLIN
Laboratoire : Laboratoire Jean Leray (UMR 6629 UN-CNRS-ECN)

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mes deux directeurs de thèse, Vincent Colin et François Laudenbach. Tous deux m'ont accompagné pendant mon apprentissage du métier de chercheur en mathématiques, avec passion et générosité. Ils ont su me remettre en selle pendant les quelques moments difficiles que cette thèse a connus. Si j'ai beaucoup appris de chacun d'eux, apprendre de ces deux directeurs à la fois, avec leurs connaissances complémentaires, fut plus que doublement profitable.

Je remercie Ulrich Oertel et Jacek Świątkowski, qui ont trouvé une erreur dans une première version de cette thèse.

Je remercie également mes deux rapporteurs, Michel Boileau et William Kazez, qui ont généreusement accepté de lire cette thèse en détail, ainsi que les autres membres du jury : Gilles Carron, Daniel Matignon et Emmanuel Giroux, qui en fut le président. Je suis très honoré qu'ils aient accepté ce rôle.

J'ai profondément apprécié ces années passées au sein du département de mathématiques, dans une ambiance très amicale. Je voudrais en remercier tous les membres, en particulier Saïd et les thésards (qui vont et viennent au gré des années), avec qui j'ai vécu des moments mémorables.

Enfin, j'embrasse ma famille et ma belle-famille pour leur soutien constant, et plus particulièrement Rozenn, présente à mes côtés depuis mon arrivée à Nantes pour mon DÉA, et Elen, dont l'arrivée parmi nous quelques mois avant l'achèvement de cette thèse a fait de 2006 une année bien remplie.

Table des matières

0	Introduction	7
I	Surfaces branchées	13
I.1	Premières définitions	13
I.2	Surfaces de contact	15
I.3	Courbes vrillées	17
I.4	Décollements (splittings)	20
II	Une condition suffisante pour qu’une surface branchée porte pleinement une lamination	23
II.1	Énoncés des résultats et plan de la démonstration	23
II.2	Limite inverse d’une suite de décollements	24
II.3	Démonstration du théorème II.1.1	25
II.3.1	Décomposition cellulaire de \mathcal{B}	25
II.3.2	Premier décollement	26
II.3.3	Voies ferrées	27
II.3.4	Suite résolvente de décollements	31
II.3.5	Décollements adaptés	34
II.3.6	Conclusion	41
II.4	Quelques remarques sur la question de savoir si une surface bran- chée porte ou non pleinement une lamination	43
III	Structures de contact portées par des surfaces branchées	47
III.1	Quelques définitions	47
III.1.1	Voisinages fibrés d’une surface branchée	47
III.1.2	Structures de contact et feuilletacts	48
III.2	“Porter” et “ σ -porter”	48
III.2.1	σ -feuilletacts et σ -contaminations (contact-laminations) .	48
III.2.2	Structure de contact σ -portée par une surface branchée :	50
III.2.3	Structure de contact portée par une surface branchée . .	50
III.3	Exemple d’une surface branchée portant une forme de contact positive et une forme de contact négative	52
III.4	“ σ -porter” implique “porter”	56

TABLE DES MATIÈRES

III.5 Un critère pour porter deux structures de contact	61
Bibliographie	65

Chapitre 0

Introduction

Les surfaces branchées sont des objets combinatoires qui se révèlent utiles, notamment pour étudier les laminations. Elles constituent ainsi l'outil principal de construction de laminations essentielles dans les travaux de D. Gabai, U. Oertel, A. Hatcher, T. Li ou encore C. Delman et R. Roberts.

Peut-être que l'un des résultats topologiques les plus frappants est le théorème **0.0.1** de [GO] :

Théorème 0.0.1 *Si une variété de dimension 3 compacte orientable admet une lamination essentielle (ou, de manière équivalente d'après [Li], admet une surface branchée laminaire), alors son revêtement universel est homéomorphe à \mathbb{R}^3 .*

L'objectif de cette thèse est de relier la théorie des surfaces branchées et des laminations essentielles à celle des structures de contact, afin d'en déduire des résultats de nature topologique. Les laminations essentielles sont une généralisation à la fois des surfaces incompressibles, et des feuilletages tendus. Or l'on sait, par exemple d'après les travaux de Y. Eliashberg et W. Thurston et ceux de K. Honda, W. Kazez et G. Matić, qu'il existe des liens étroits entre les structures de contact et les feuilletages tendus. On peut donc s'attendre à trouver des correspondances entre les structures de contact et les laminations, par exemple *via* les surfaces branchées. Pour cela, on introduit la notion de structure de contact *portée* par une surface branchée. Une telle voie a déjà été empruntée par U. Oertel et J. Świątkowski dans [OS1] et [OS2], où un grand nombre de correspondances entre les propriétés des structures de contact et celles des surfaces branchées sont obtenues. Cependant, on utilise ici une définition plus générale de structure de contact portée par une surface branchée (cf. section III.5), qui peut être comparée à la définition d'une paire formée par une structure de contact et un champ de Reeb *ajustés* à une hiérarchie suturée (cf. [HKM] et [CH] par exemple).

La question de départ de cette thèse est la suivante : le revêtement universel d'une variété close orientable et irréductible portant une structure de contact tendue positive et une structure de contact tendue négative dans la même classe d'homotopie de champs de plans, est-il \mathbb{R}^3 ? On sait déjà que si ces structures de contact sont universellement tendues, c'est-à-dire si leurs rappels dans \tilde{V} sont deux structures de contact tendues, alors \tilde{V} n'est pas \mathbb{S}^3 . En effet, à isotopie près, \mathbb{S}^3 n'a qu'une structure de contact tendue positive et qu'une structure de contact tendue négative, et ces deux structures de contact ne sont pas homotopes parmi les champs de plans.

Pour deux structures de contact de signes opposés, une condition plus forte qu'être dans la même classe d'homotopie est de n'avoir que des contacts positifs, i.e. il existe un champ de vecteurs non singulier transversal aux deux structures de contact. L'exemple le plus simple d'une telle paire de structures de contact provient de l'approximation \mathcal{C}^0 d'un feuilletage tendu par une structure de contact tendue positive et une structure de contact tendue négative, donnée par le théorème 2.4.1 et le corollaire 3.2.5 de [ET]. Dans ce cas, la présence d'un feuilletage tendu assure que \tilde{V} est \mathbb{R}^3 .

Dans un premier temps on peut donc chercher à répondre à la question initiale dans le cas de deux structures de contact n'ayant que des contacts positifs.

En vue d'une réponse, un premier résultat est le théorème III.5.0.3 :

Théorème III.5.0.3 *Soient ξ_1 et ξ_2 deux structures de contact orientables n'ayant que des contacts positifs, c'est-à-dire que les coorientations de ξ_1 et ξ_2 coïncident là où ξ_1 et ξ_2 sont tangentes. Alors il existe une structure de contact ξ'_1 isotope à ξ_1 et une structure de contact ξ'_2 isotope à ξ_2 qui sont toutes deux portées par une surface branchée \mathcal{B} dont le complémentaire d'un voisinage fibré dans V est une union de bulles triviales. En particulier, ce complémentaire est irréductible.*

Une seconde étape est le théorème suivant, qui est le résultat principal de cette thèse :

Théorème II.1.1 *Soit V une variété orientée de dimension 3, sans bord. Soit \mathcal{B} une surface branchée orientable de V , dont le lieu singulier a un nombre dénombrable de points doubles, et qui n'a pas de courbe vrillée. Alors \mathcal{B} porte pleinement une lamination.*

Le corollaire suivant en découle immédiatement :

Corollaire II.1.2 *Soit V une variété sans bord orientée de dimension 3. Soit \mathcal{B} une surface branchée orientable de V , dont le lieu singulier a un nombre dénombrable de points doubles, et qui n'a pas de courbe vrillée homotope à 0*

dans V . Alors le rappel de \mathcal{B} dans \tilde{V} porte pleinement une lamination.

Dans le cadre des laminations essentielles, ce résultat est presque optimal. En effet, l'existence d'une courbe vrillée homotope à zéro implique l'existence d'une courbe fermée homotope à zéro et transversale à \mathcal{B} . Or, d'après le point (4) du lemme 2.7 de [GO], si \mathcal{B} porte pleinement une lamination essentielle, il n'existe pas de telle courbe fermée. La condition "ne pas avoir de courbe vrillée homotope à 0 dans V " est ainsi suffisante pour que le rappel de \mathcal{B} dans \tilde{V} porte pleinement une lamination, mais elle est également nécessaire pour que ce rappel porte pleinement une lamination essentielle.

En ce sens, ce théorème constitue un élément de réponse à la question de D. Gabai (problèmes 3.4 de [GO] et 2.1 de [Ga]) : *Quand une surface branchée porte-t-elle pleinement une lamination ?*

Cette question est complexe, comme le montre le théorème suivant de L. Mosher :

Théorème 0.0.2 (L. Mosher) *Déterminer si une surface branchée générale porte abstraitement une lamination ou non n'est pas un problème résoluble algorithmiquement.*

Donnons une brève explication des termes "surface branchée générale" et "porter abstraitement une lamination" : la définition de surface branchée utilisée dans ce texte est celle de surface branchée plongée dans une variété de dimension 3. Cependant, il existe une définition plus générale de surface branchée, qui n'implique pas que la surface branchée soit plongée ou même immergée dans une variété de dimension 3. Dans [Ch], J. Christy donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface branchée générale puisse être plongée ou immergée dans une variété de dimension 3. Il donne également des exemples. "Porter abstraitement" une lamination est la généralisation aux surfaces branchées générales de "porter pleinement" une lamination pour les surfaces branchées plongées dans une variété de dimension 3. Des définitions précises se trouvent dans [MO].

Une démonstration du théorème 0.0.2 est donnée dans [Ga].

Il reste alors un trou à combler pour répondre à la question initiale : une surface branchée portant une structure de contact tendue positive et une structure de contact tendue négative peut-elle avoir une courbe vrillée homotope à zéro ? Comme nous l'avons déjà mentionné, cette condition de ne pas avoir de courbe vrillée homotope à zéro est nécessairement vérifiée pour toute surface branchée \mathcal{B} portant pleinement une lamination essentielle.

Si l'on cherche à démontrer qu'une surface branchée portant une structure de contact tendue positive et une structure de contact tendue négative n'a pas de courbe vrillée homotope à zéro, une condition supplémentaire apparaît :

\mathcal{B} ne doit pas avoir de composante de Reeb, c'est-à-dire que \mathcal{B} ne doit pas porter de sous-lamination d'un feuilletage de Reeb du tore solide, comprenant la feuille limite torique et au moins une autre feuille. Cette condition est de toute façon nécessaire pour montrer que \mathcal{B} est essentielle. Ceci amène une autre question ouverte : une surface branchée portant une structure de contact tendue positive et une structure de contact tendue négative peut-elle avoir une composante de Reeb ?

Dans cette approche, les courbes vrillées pourraient jouer un rôle similaire à celui des courbes fermées transversales à un feuilletage. La présence d'une courbe fermée transversale à un feuilletage et homotope à zéro indique l'existence d'un cycle évanescent et d'une composante de Reeb. Dans le cas contact on pourrait espérer montrer qu'une surface branchée \mathcal{B} portant une structure de contact tendue positive et une structure de contact tendue négative et n'ayant pas de composante de Reeb n'a pas de courbe vrillée homotope à zéro. Ce résultat de type Novikov permettrait de répondre par l'affirmative à la question initiale. En effet, on a les deux résultats suivants :

Proposition 0.0.3 ([Co]) *Une surface branchée qui porte une structure de contact tendu est incompressible.*

et :

Proposition 0.0.4 ([GO]) *Une lamination est essentielle si et seulement si elle est pleinement portée par une surface branchée essentielle.*

La proposition **0.0.3** implique que \mathcal{B} est incompressible. Or la surface branchée \mathcal{B} utilisée est celle obtenue dans le théorème **III.5.0.3**, qui est de complémentaire irréductible. Si l'on considère que de plus \mathcal{B} n'a pas de composante de Reeb, alors par définition, \mathcal{B} est essentielle (cf. [GO]). Le rappel de \mathcal{B} dans \tilde{V} est donc également une surface branchée essentielle. Or ce rappel porte pleinement une lamination car \mathcal{B} n'a pas de courbe vrillée homotope à zéro. D'après la proposition **0.0.4**, cette lamination est essentielle et donc $\tilde{V} = \mathbb{R}^3$ selon le théorème **0.0.1**.

Des investigations futures devront répondre à ces questions en suspens et à d'autres telles que : quelles surfaces branchées portent une structure (forme) de contact (tendue, hypertendue) ? Y a-t-il d'autres conditions issues de la géométrie de contact sous lesquelles le revêtement universel de la variété est homéomorphe à \mathbb{R}^3 ?

À plus long terme, les structures de contact portées par des surfaces branchées pourraient avoir d'autres applications :

Quand une surface branchée porte une forme de contact, le champ de Reeb de cette forme est contrôlé. Ce contrôle pourrait être utilisé pour déterminer si la forme est hypertendue, i.e. son champ de Reeb n'a pas d'orbite contractile. Dans ce cas, d'après un théorème de H. Hofer, K. Wysocki and E. Zehnder, la structure de contact est tendue et la variété est irréductible.

On peut aussi espérer utiliser ce contrôle pour faire des calculs d'homologie de contact.

Un autre problème classique est la détermination des propriétés d'une variété qui persistent après une chirurgie de Dehn. L'avantage des structures de contact sur les laminations est qu'une variété de contact demeure contact après chirurgie de Dehn. Sous certaines conditions, le caractère tendu d'une structure de contact est aussi préservé. Ce fait pourrait par exemple être exploité, *via* les surface branchées, pour trouver de nouvelles conditions sous lesquelles une lamination essentielle peut être étendue à un remplissage de Dehn.

Le chapitre **I** donne les définitions basiques au sujet des surfaces branchées et des surfaces de contact. Le théorème **II.1.1** est ensuite démontré dans le chapitre **II**. Le dernier chapitre est consacré aux structures de contact portées par une surface branchée.

Je tiens à remercier U. Oertel et J. Świątkowski pour avoir décelé une faute dans une première version optimiste de cette thèse, où je pensais avoir répondu à la question de D. Gabai.

Chapitre I

Surfaces branchées

Dans tout ce chapitre, V est une variété sans bord de dimension 3, orientée.

I.1 Premières définitions

Définition I.1.1 Une *surface branchée* \mathcal{B} dans V est une union de surfaces lisses localement modélée sur l'une des trois figures de la figure I.1.2. Le *lieu singulier* \mathcal{L} de \mathcal{B} est l'ensemble des points, dits de *branchement* dont aucun voisinage n'est un disque. Sa *partie régulière* est $\mathcal{B} \setminus \mathcal{L}$. L'adhérence d'une composante connexe de la partie régulière est appelée un *secteur* de \mathcal{B} .

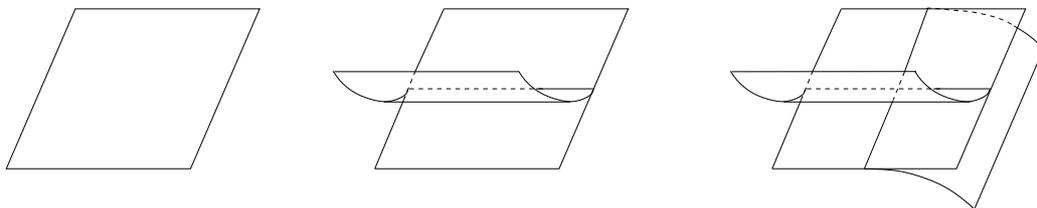


FIG. I.1.2 – Modèles locaux d'une surface branchée

Le lieu singulier peut avoir des points doubles : c'est le cas dans le troisième modèle de la figure I.1.2. En chaque point lisse de \mathcal{L} , on définit un *sens de branchement*, comme sur la figure I.1.3.

Définition I.1.4 Un *voisinage fibré* $N(\mathcal{B})$ de \mathcal{B} est un "fibré" en intervalles au-dessus de \mathcal{B} , comme sur la figure III.1.1.2. Le bord de $N(\mathcal{B})$ se décompose en un *bord horizontal* $\partial_h N(\mathcal{B})$ transversal aux fibres et un *bord vertical* $\partial_v N(\mathcal{B})$, tangent aux fibres (cf. figure III.1.1.2, a)).

On définit l'application quotient $\pi : N(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ qui envoie une fibre de $N(\mathcal{B})$ sur son point base. En particulier, $\pi(\partial_v N(\mathcal{B})) = \mathcal{L}$. On peut également considérer $N(\mathcal{B})$ non pas comme un fibré abstrait mais comme une partie de

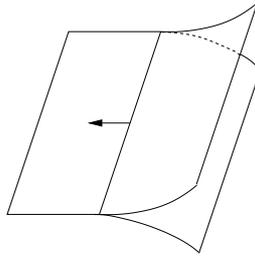


FIG. I.1.3 – Sens de branchement

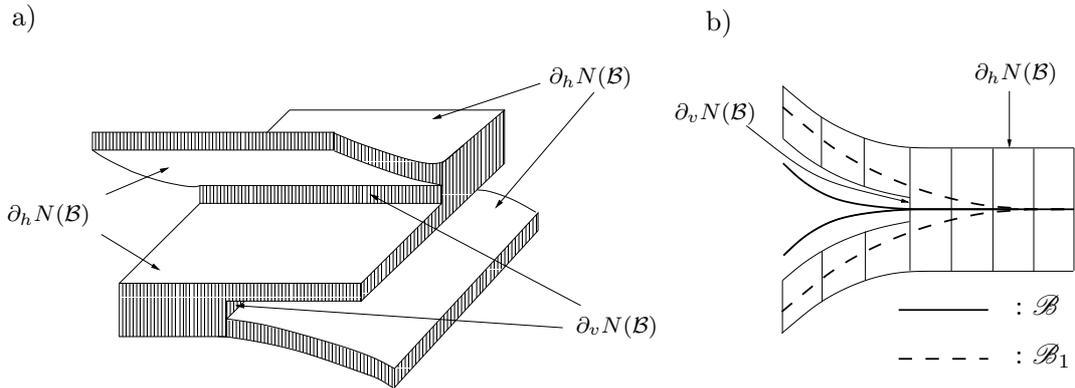


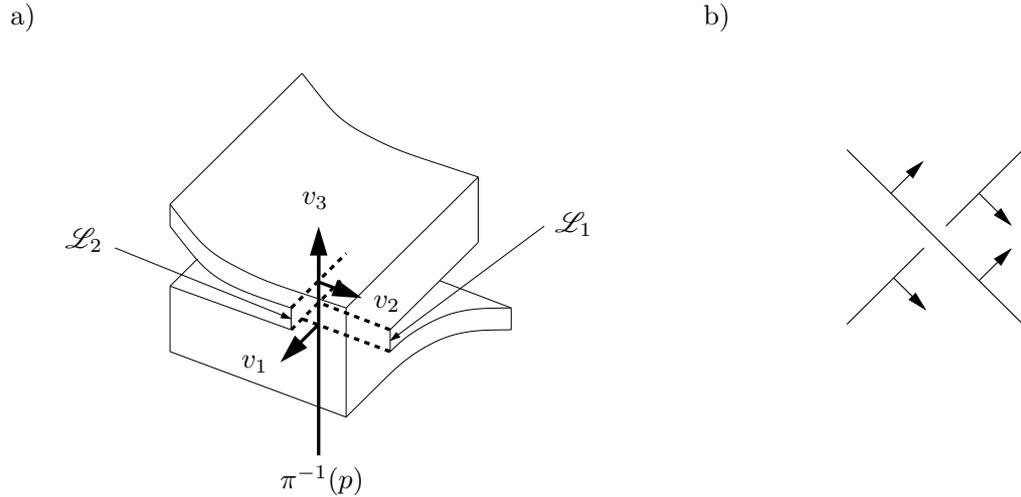
FIG. I.1.5 – Voisinage fibré de \mathcal{B}

V , et dans ce cas \mathcal{B} n'est pas incluse dans $N(\mathcal{B})$. Par contre, $N(\mathcal{B})$ contient une surface branchée \mathcal{B}_1 isomorphe à \mathcal{B} (cf. figure III.1.1.2, b)). La surface branchée \mathcal{B}_1 est un *décollement* de \mathcal{B} , notion définie dans la section I.4. Si $N(\mathcal{B})$ n'est en fait pas un voisinage de \mathcal{B} , c'est un voisinage de \mathcal{B}_1 .

Voyons comment chaque point double p de \mathcal{L} peut être affecté d'un signe. Localement il passe par p deux portions lisses de \mathcal{L} , notées \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , et coorientées par leur sens de branchement.

Fixons une orientation de la fibre de $N(\mathcal{B})$ passant par p . Cela a donc un sens de dire que l'une des deux branches \mathcal{L}_1 ou \mathcal{L}_2 passe au-dessus de l'autre. Appelons \mathcal{L}_1 la branche du dessous, et v_1 un vecteur de $T_p V$ définissant le sens de branchement de \mathcal{L}_1 en p . De même, soit v_2 un vecteur définissant le sens de branchement de \mathcal{L}_2 en p . Enfin, soit v_3 un vecteur donnant l'orientation choisie de la fibre de $N(\mathcal{B})$ passant par p , comme en a) de la figure I.1.6, a). On dit alors que p est un point double *positif* (resp. *négatif*) si la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $T_p V$ est directe (resp. indirecte) pour l'orientation de V . Avec cette convention, les points doubles positifs seront représentés dans le plan par le diagramme b) de la figure I.1.6.

Remarque I.1.7 Le signe d'un point double dépend de l'orientation de V : si on change cette dernière, les signes des points doubles changent également.


 FIG. I.1.6 – a) : $\{v_1, v_2, v_3\}$; b) point double positif

Par contre, ce signe est indépendant de l'orientation de la fibre passant par ce point double choisie dans la définition précédente.

Définition I.1.8 Une surface branchée \mathcal{B} porte une surface \mathcal{S} immergée dans V si \mathcal{S} est incluse dans l'intérieur d'un voisinage fibré de \mathcal{B} , et que \mathcal{S} est transversale aux fibres de ce voisinage fibré. On dit que \mathcal{S} est *pleinement portée* par \mathcal{B} si de plus \mathcal{S} intersecte toutes les fibres du voisinage fibré.

Définition I.1.9 Une *lamination* de codimension 1 d'une variété M de dimension 3 (resp. 2) est la décomposition d'un fermé λ de M en surfaces (resp. en courbes) immergées injectivement et appelées *feuilles*, telle que λ est recouvert par des cartes de la forme $]0, 1[^2 \times [0, 1]$ (resp. $]0, 1[\times [0, 1]$) dans lesquelles les feuilles sont de la forme $]0, 1[^2 \times \{point\}$ (resp. $]0, 1[\times \{point\}$).

Définition I.1.10 Une surface branchée \mathcal{B} porte une lamination λ de codimension 1 si λ est incluse dans un voisinage fibré de \mathcal{B} et que ses feuilles sont transversales aux fibres. On dit que λ est *pleinement portée* si de plus elle intersecte toutes les fibres.

I.2 Surfaces de contact

Soit \mathcal{B} une surface branchée.

Définition I.2.1 Une *surface de contact* est l'immersion d'une surface \mathcal{S} dans \mathcal{B} dont le bord est envoyé sur des cercles lisses du lieu singulier de \mathcal{B} , de sorte que les directions de branchement le long de ces composantes de bord pointent vers l'intérieur de la surface.

En considérant un relèvement de \mathcal{S} dans $N(\mathcal{B})$, on voit que l'existence d'une telle surface est équivalente à l'existence d'une immersion $f : \mathcal{S} \rightarrow N(\mathcal{B})$ vérifiant :

- (i) $f(\text{Int}(\mathcal{S})) \subset \text{Int}(N(\mathcal{B}))$ et est transversal aux fibres ;
- (ii) $f(\partial\mathcal{S}) \subset \text{Int}(\partial_v N(\mathcal{B}))$ et est transversal aux fibres.

Par conséquent, l'expression *surface de contact* sera utilisée indifféremment pour les deux définitions.

Un exemple est donné figure **I.2.4, a)**.

Remarque I.2.2 Une surface de contact n'est en général pas un secteur, mais une union de secteurs, c'est-à-dire que le lieu singulier de la surface branchée peut rencontrer l'intérieur d'une surface de contact. Il en est de même pour les surfaces puits et les surfaces de contact vrillées, définies plus loin.

Définition I.2.3 On appelle *surface puits* l'immersion d'une surface \mathcal{S} dans \mathcal{B} , dont le bord est envoyé sur des cercles lisses par morceaux de \mathcal{L} , dont les directions de branchement le long du bord pointent vers l'intérieur et dont au moins une composante de bord n'est pas lisse. Un point double du bord de \mathcal{S} qui est l'intersection de deux composantes lisses du bord de \mathcal{S} est un *coin* de \mathcal{S} . Une surface puits a donc au moins un coin.

En considérant un relèvement non lisse de \mathcal{S} dans $N(\mathcal{B})$, on peut dire que de manière équivalente, une surface puits est une immersion $f : \mathcal{S} \rightarrow N(\mathcal{B})$ vérifiant :

- (i) $f(\text{Int}(\mathcal{S})) \subset \text{Int}(N(\mathcal{B}))$ et est transversal aux fibres ;
- (ii) $f(\partial\mathcal{S})$ est inclus dans $\text{Int}(\partial_v N(\mathcal{B}))$ sauf en un nombre fini et non nul d'intervalles fermés $C_1 \dots C_k$. En dehors des C_i , $f(\partial\mathcal{S})$ est transversal aux fibres de $\partial_v N(\mathcal{B})$. Chaque C_i est inclus dans une fibre de $N(\mathcal{B})$ correspondant à un point double de \mathcal{L} , et doit intersecter $\text{Int}(N(\mathcal{B}))$. Ainsi $\pi(f(\partial\mathcal{S}))$ n'est pas lisse. Les C_i sont appelés les *coins* de \mathcal{S} .

Un exemple est donné figure **I.2.4, b)**.

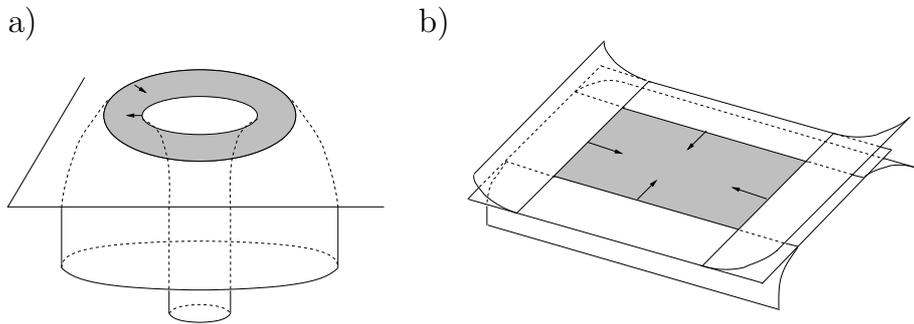


FIG. I.2.4 – Anneau de contact et disque puits

Définition I.2.5 Une *surface de contact vrillée* est une surface puits dont tous les coins, qui sont des points doubles, ont le même signe, et qui vérifie de plus : pour une métrique riemannienne pour laquelle \mathcal{L} au voisinage d'un point double découpe \mathcal{B} en quatre secteurs d'angle $\pi/2$, les coins d'une surface de contact vrillée sont tous d'angle $\pi/2$. Le cas d'un coin d'angle $3\pi/2$ est exclu. C'est une *surface de contact vrillée positive* (resp. une *surface de contact vrillée négative*) si tous ces points doubles sont positifs (resp. négatifs).

Un exemple est donné figure **I.2.6**.

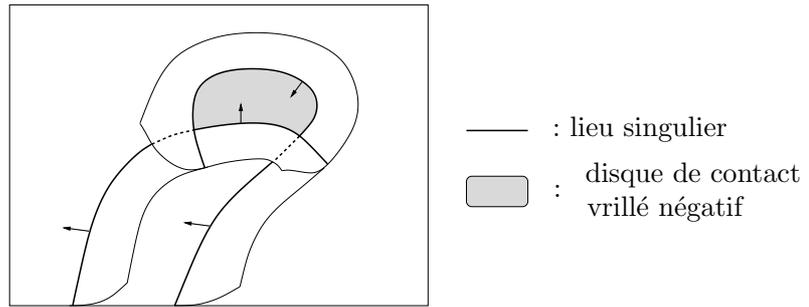


FIG. I.2.6 – Disque de contact vrillé négatif

Remarque I.2.7 Il est bien connu que l'existence d'un disque de contact vrillé qui est un secteur est une obstruction à l'existence d'une lamination pleinement portée. Ce fait est repris dans la proposition **II.3.3.8**, puis démontré en utilisant des *voies ferrées*.

Dans le même ordre d'idée, on donne la définition suivante :

Définition I.2.8 Une *surface source* est l'immersion d'une surface dans \mathcal{B} , dont le bord est envoyé sur des cercles lisses par morceaux de \mathcal{L} et dont les directions de branchement le long du bord pointent vers l'extérieur de la surface.

I.3 Courbes vrillées

Définition I.3.1 Une surface branchée \mathcal{B} sera dite *orientable* s'il existe une orientation globale des fibres d'un voisinage fibré $N(\mathcal{B})$ de \mathcal{B} .

Remarque I.3.2 Une surface branchée orientable ne peut donc pas avoir de *monogone*, c'est-à-dire un disque $D \subset V \setminus \text{Int}(N(\mathcal{B}))$ avec $\partial D = D \cap N(\mathcal{B}) = \beta \cup \delta$, où $\beta \subset \partial_v N(\mathcal{B})$ est dans une fibre de $\partial_v N(\mathcal{B})$ et $\delta \subset \partial_h N(\mathcal{B})$ (cf. figure **I.3.3**).

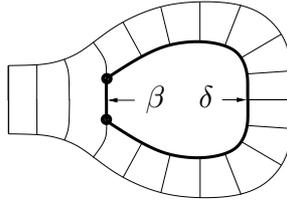


FIG. I.3.3 – monogone

Remarque I.3.4 Comme on le verra dans le paragraphe III.2.3, une surface branchée qui porte une structure de contact orientable ou une forme de contact est orientable.

Dans la suite de ce paragraphe, \mathcal{B} sera une surface branchée orientable, et $N(\mathcal{B})$ un voisinage fibré de \mathcal{B} dont on aura fixé une orientation des fibres.

Définition I.3.5 Une *courbe vrillée positive* (resp. *négative*) γ est une courbe fermée orientée immergée dans \mathcal{B} qui vérifie :

- (i) γ est incluse dans \mathcal{L} , et est donc une union de segments lisses de \mathcal{L} .
Quand en suivant γ on passe d'un segment lisse à un autre en un point double de \mathcal{L} , ce point double est un *coin* de γ ;
- (ii) γ a au moins un coin;
- (iii) en un coin, γ passe d'un segment lisse I_1 de \mathcal{L} à un segment lisse I_2 de \mathcal{L} . Puisque \mathcal{B} est orientée, l'un de ces segments est au-dessus de l'autre. Si I_2 est au-dessus de I_1 , on dit alors que le coin est *montant*, sinon il est dit *descendant*. Le signe d'un coin en tant que point double ne détermine en rien s'il est montant ou descendant. On demande alors que tous les coins de γ soient montants (resp. descendants).

L'existence d'une courbe vrillée γ est équivalente à l'existence dans $N(\mathcal{B})$ d'une courbe toujours notée γ , qui se décompose en une union $\gamma = \gamma_l \cup \gamma_c$, où γ_l et γ_c vérifient :

- (i) γ_l est la *partie lisse* de γ : c'est une union finie de segments inclus dans $\partial_v N(\mathcal{B})$ et transversaux aux fibres de $N(\mathcal{B})$;
- (ii) γ_c est une union finie non vide de segments notés C_i , $i = 1 \dots n$, où chaque C_i est inclus dans une fibre de $N(\mathcal{B})$, de telle sorte que l'orientation de C_i induite par celle de γ coïncide avec (resp. soit l'inverse de) l'orientation de cette fibre. Les C_i sont les coins de γ . Ils sont dits *montants* (resp. *descendants*) si γ est positive (resp. négative).

Remarque I.3.6 Si l'on inverse l'orientation d'une courbe vrillée positive, on obtient une courbe vrillée négative, et réciproquement.

Remarque I.3.7 Le bord d'une surface de contact vrillée est une courbe vrillée.

Définition I.3.8 Une courbe vrillée *simple* est une courbe vrillée dont l'intérieur de la partie lisse est plongée dans \mathcal{B} . Autrement dit, seuls les coins sont de multiplicité supérieure à 1.

Lemme I.3.9 Soit γ une courbe vrillée. Alors il existe une courbe vrillée simple δ incluse dans γ .

Démonstration On note également $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{B}$ l'immersion de la courbe vrillée γ , \mathbb{S}^1 étant muni d'une orientation. On peut toujours supposer que γ est positive. Si γ est simple, on a bien évidemment $\delta = \gamma$. Sinon, il existe deux segments de \mathbb{S}^1 notés $J = [a, b]$ et $K = [c, d]$, d'intérieurs deux à deux distincts, dont l'orientation est celle induite par l'orientation de \mathbb{S}^1 , et tels que les images $\gamma(J)$ et $\gamma(K)$ coïncident. Si $\gamma(J) = \gamma(\mathbb{S}^1)$, alors on pose $\delta_1 = \gamma(J)$, qui est bien une courbe vrillée positive.

Sinon, les segments J et K sont choisis maximaux, dans le sens où pour tout voisinage $\mathcal{V}(J)$ suffisamment petit de J dans \mathbb{S}^1 et tout voisinage $\mathcal{V}(K)$ suffisamment petit de K dans \mathbb{S}^1 , on a $\gamma(\mathcal{V}(J)) \not\subset \gamma(\mathcal{V}(K))$ et $\gamma(\mathcal{V}(K)) \not\subset \gamma(\mathcal{V}(J))$. Cela signifie que $\gamma(\mathcal{V}(J))$ et $\gamma(\mathcal{V}(K))$ bifurquent en $\gamma(a)$ et en $\gamma(b)$. Ainsi, au but, le point $A = \gamma(a)$ de \mathcal{L} est un coin de $\gamma(\mathcal{V}(J))$ ou de $\gamma(\mathcal{V}(K))$, et il en est de même pour $B = \gamma(b)$.

On distingue alors deux cas :

- (i) Les orientations de $\gamma(J)$ et $\gamma(K)$ coïncident, autrement dit $\gamma(c) = \gamma(a) = A$ et $\gamma(d) = \gamma(b) = B$:

Le point B est un coin de $\gamma(\mathcal{V}(J))$ ou de $\gamma(\mathcal{V}(K))$. Par exemple, c'est un coin de $\gamma(\mathcal{V}(J))$. On pose alors : $\delta_1 = \gamma([a, c])$. Puisque $\gamma(c) = \gamma(a)$, cette courbe est fermée. Puisque $c \notin \text{Int}(J)$, on a $J = [a, b] \subset [a, c]$, et donc B est un coin de δ_1 puisque c'est un coin de $\gamma(\mathcal{V}(J))$. Enfin, tous les coins de δ_1 sont montants puisque $[a, c]$ a l'orientation induite par celle de \mathbb{S}^1 , et que tous les coins de γ sont montants. Par conséquent, δ_1 est une courbe vrillée.

- (ii) Les orientations de $\gamma(J)$ et $\gamma(K)$ sont opposées, autrement dit $\gamma(d) = \gamma(a) = A$ et $\gamma(c) = \gamma(b) = B$:

On pose : $\delta_1 = \gamma([c, b])$. Puisque $\gamma(c) = \gamma(b)$, cette courbe est fermée. Puisque B est un coin de $\gamma(\mathcal{V}(J))$ ou de $\gamma(\mathcal{V}(K))$, B est un coin de δ_1 . Enfin, tous les coins de δ_1 sont montants puisque $[c, b]$ a l'orientation induite par celle de \mathbb{S}^1 , et que tous les coins de γ sont montants. Par conséquent, δ_1 est une courbe vrillée.

Dans tous les cas, il y a dans γ une courbe vrillée positive δ_1 qui a strictement moins de coins (comptés avec leur multiplicité) que γ . Si δ_1 n'est pas simple, on réapplique alors tout le raisonnement précédent à δ_1 , et on obtient une courbe vrillée positive δ_2 ayant strictement moins de coins que δ_1 . Or δ_1

est fermée, donc elle est compacte et a un nombre fini de coins, même avec multiplicité. Par récurrence, on obtient en un nombre fini d'étapes une courbe vrillée positive simple incluse dans γ . \square

On en déduit ce corollaire immédiat :

Corollaire I.3.10 *Une surface branchée qui n'a pas de courbe vrillée simple n'a pas du tout de courbe vrillée.*

I.4 Décollements (splittings)

Définition I.4.1 Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux surfaces branchées plongées dans V . On dit que \mathcal{B}' est un *décollement* de \mathcal{B} s'il existe un voisinage fibré $N(\mathcal{B})$ de \mathcal{B} et un I -fibré J dans $N(\mathcal{B})$, au-dessus d'une surface portée par $N(\mathcal{B})$, tels que :

- (i) $N(\mathcal{B}) = N(\mathcal{B}') \cup J$;
- (ii) $J \cap N(\mathcal{B}') \subset \partial J$;
- (iii) $\partial_h J \subset \partial_h N(\mathcal{B}')$;
- (iv) $\partial_v J \cap N(\mathcal{B}')$ est inclus dans $\partial_v N(\mathcal{B}')$, a un nombre fini de composantes, et ses fibres sont des fibres de $\partial_v N(\mathcal{B}')$.

Remarque I.4.2 Lorsque \mathcal{B}' est un décollement de \mathcal{B} , on utilisera la notation : $\mathcal{B}' \xrightarrow{p} \mathcal{B}$. En effet, \mathcal{B}' est incluse dans un voisinage fibré $N(\mathcal{B})$ de \mathcal{B} , muni d'une projection π sur \mathcal{B} , et la restriction p de π à \mathcal{B}' est la projection voulue.

On a un premier résultat immédiat :

Lemme I.4.3 *Soit \mathcal{B}' un décollement d'une surface branchée \mathcal{B} . Si \mathcal{B}' porte pleinement une lamination λ , alors λ est aussi pleinement portée par \mathcal{B} .*

Démonstration Remarquons déjà que toute lamination portée par \mathcal{B}' est évidemment portée par \mathcal{B} .

Soit J le I -fibré tel que $N(\mathcal{B}) = J \cup N(\mathcal{B}')$. Soit f une fibre de $N(\mathcal{B})$. Le point (iii) de la définition I.4.1 implique que les extrémités de f ne peuvent pas être dans J . Ainsi, $f \setminus J$ est non vide. Puisque λ est pleinement portée par $N(\mathcal{B}')$, elle intersecte $f \setminus J$ et donc elle intersecte f . Elle est donc bien pleinement portée par \mathcal{B} . \square

Définition I.4.4 Soit \mathcal{B} une surface branchée. Soit Σ un secteur de \mathcal{B} dont le bord contient une portion lisse α de \mathcal{L} , dont le sens de branchement pointe vers l'intérieur de Σ . Soit $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ un arc plongé dans Σ tel que $\gamma(0) \in \alpha$ et $\gamma(t) \in \text{Int}(\Sigma)$ pour $t \neq 0$. Un *décollement le long de γ* est une surface branchée \mathcal{B}' définie comme dans la définition précédente I.4.1, où J est un I -fibré au dessus d'un voisinage de γ dans Σ (cf. figure I.4.5).

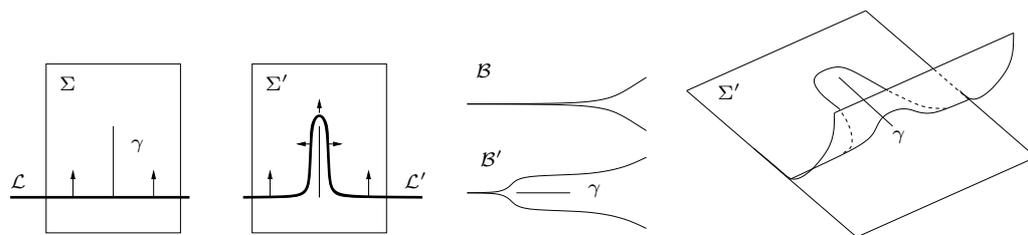


FIG. I.4.5 – Décollement le long de γ

Définition I.4.6 On reprend les mêmes notations que dans la définition précédente I.4.4. On suppose maintenant que $\gamma(1)$ appartient à \mathcal{L} , en un point où le branchement pointe aussi vers l'intérieur de Σ . On dit dans ce cas que γ est en position de *vis-à-vis*. On choisit une orientation des fibres de $N(\mathcal{B})$ le long de γ . Il y a alors trois décollements possibles : le *décollement supérieur*, le *décollement inférieur* et le *décollement neutre*, représentés figure I.4.7.

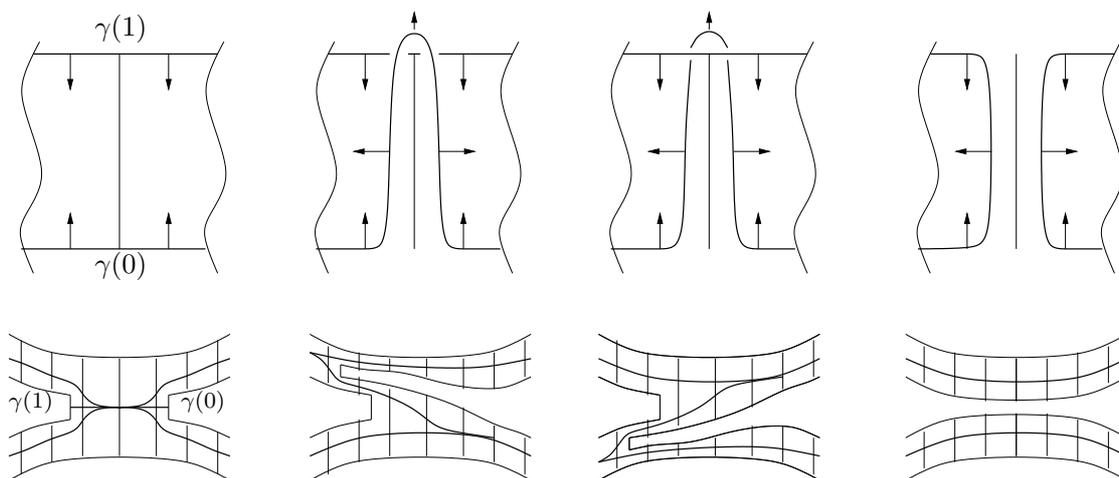


FIG. I.4.7 – Décollements supérieur, inférieur et neutre

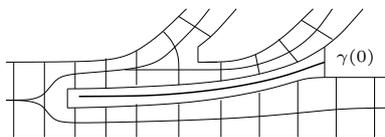


FIG. I.4.8 – Décollement rétrograde

Remarque I.4.9 Si Σ est un secteur non borné, on peut faire un décollement le long d'un chemin $\gamma : [0, 1[\rightarrow \Sigma$ non borné mais proprement plongé, et

vérifiant les mêmes hypothèses que dans la définition **I.4.4**. Ce décollement infini peut-être vu comme un décollement neutre “à l’infini”.

Remarque I.4.10 Il est possible de faire un décollement le long de γ si γ passe d’un secteur à un autre dans le sens de branchement. Il n’y a alors qu’un décollement possible, appelé *décollement rétrograde* (cf. figure **I.4.8**).

Chapitre II

Une condition suffisante pour qu'une surface branchée porte pleinement une lamination

Dans tout ce chapitre, V est une variété sans bord de dimension 3, orientée. Son revêtement universel sera noté \tilde{V} . Si \mathcal{B} est une surface branchée de V , le rappel de \mathcal{B} dans \tilde{V} sera noté $\tilde{\mathcal{B}}$.

II.1 Énoncés des résultats et plan de la démonstration

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant :

Théorème II.1.1 *Soit V une variété sans bord orientée de dimension 3. Soit \mathcal{B} une surface branchée orientable de V , dont le lieu singulier a un nombre dénombrable de points doubles, et qui n'a pas de courbe vrillée. Alors \mathcal{B} porte pleinement une lamination.*

Le corollaire suivant découle immédiatement de ce théorème :

Corollaire II.1.2 *Soit V une variété sans bord orientée de dimension 3. Soit \mathcal{B} une surface branchée orientable de V , dont le lieu singulier a un nombre dénombrable de points doubles, et qui n'a pas de courbe vrillée homotope à 0 dans V . Alors le rappel de \mathcal{B} dans \tilde{V} porte pleinement une lamination.*

Le principe de la démonstration est le même que celui de la construction d'une lamination d'holonomie strictement négative, dans la partie 4 de [OS2]. Il s'agit d'effectuer une suite résolvente de décollements dont la limite inverse induise une lamination d'holonomie nulle sur le voisinage fibré d'un voisinage

du 1-squelette d'une certaine décomposition cellulaire en disques et demi-plans de \mathcal{B} . Les limites inverses de suites résolvente de décollements sont définies dans la section II.2.5. La démonstration du théorème II.1.1 est l'objet de la section II.3.

II.2 Limite inverse d'une suite de décollements

Définition II.2.1 Soit \mathcal{B} une surface branchée. On appellera *suite de décollements* toute suite $\dots \mathcal{B}_{k+1} \xrightarrow{p_{k+1}} \mathcal{B}_k \xrightarrow{p_k} \dots \xrightarrow{p_2} \mathcal{B}_1 \xrightarrow{p_1} \mathcal{B} = \mathcal{B}_0$ de surfaces branchées $(\mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que :

- (i) pour tout i , \mathcal{B}_{i+1} est un décollement de \mathcal{B}_i ;
- (ii) pour tout i , \mathcal{B}_i est munie d'un voisinage fibré $N(\mathcal{B}_i)$, et ces voisinages fibrés sont tels que $N(\mathcal{B}_{i+1})$ est un sous-fibré de $N(\mathcal{B}_i)$.

Ainsi, tous les $N(\mathcal{B}_i)$ ont leurs fibres tangentes à celles de $N(\mathcal{B})$, et ils sont emboîtés les uns dans les autres.

En présence d'une telle suite, on notera, pour tout $k \geq 1$:

$$P_k = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_k = \pi|_{\mathcal{B}_k} : \mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{B}$$

la projection de \mathcal{B}_k sur \mathcal{B} .

On notera également $\pi_n : N(\mathcal{B}_n) \rightarrow \mathcal{B}_n$ la projection suivant les fibres de $N(\mathcal{B}_n)$ vers \mathcal{B}_n .

La définition suivante est inspirée par [MO] :

Définition II.2.2 Une suite de décollements $\dots \mathcal{B}_{k+1} \xrightarrow{p_{k+1}} \dots \xrightarrow{p_1} \mathcal{B} = \mathcal{B}_0$ est dite *résolvante* si elle vérifie :

- (i) il existe des points de \mathcal{B} notés $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, un réel $\rho > 0$ et des disques plongés dans \mathcal{B} notés $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$, centrés en x_i et de rayon ρ pour une certaine métrique sur \mathcal{B} , tels que les d_i recouvrent \mathcal{B} ;
- (ii) pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une sous-suite $(\mathcal{B}_{\varphi_i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que les lieux singuliers des surfaces branchées de cette sous-suite n'intersectent pas $\pi^{-1}(d_i)$. Autrement dit, pour tout k , $\mathcal{B}_{\varphi_i(k)}$ n'a pas de branchements au-dessus de d_i : les singularités au-dessus de d_i sont *résolues*, et $P_{\varphi_i(k)}^{-1}(d_i)$ est donc une union disjointe de disques.

Lorsqu'une telle suite existe, on dit que \mathcal{B} admet une suite résolvente de décollements.

Remarque II.2.3 En particulier, une surface branchée qui admet une suite résolvente de décollements est *complètement décollable* au sens de [GO].

Lemme II.2.4 ([GO],[MO]) : Soit \mathcal{B} une surface branchée admettant une suite résolvente de décollements. Alors \mathcal{B} porte pleinement une lamination.

Démonstration : Elle se trouve p. 84-85 de [MO].

Soit $\dots \mathcal{B}_{k+1} \xrightarrow{p_{k+1}} \dots \xrightarrow{p_1} \mathcal{B} = \mathcal{B}_0$ une suite résolvente de décollements. Posons $\lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N(\mathcal{B}_n)$. En tant qu'intersection de fermés, λ est fermée. Exhibons maintenant un atlas adapté, dont les cartes seront les $\pi^{-1}(d_i)$, où les d_i sont les disques du point (i) de la définition II.2.2.

Soit $i \in \mathbb{N}$, et $y \in d_i$. Alors $\lambda \cap \pi^{-1}(y)$ est un certain fermé T de $[0, 1]$. La suite de décollements étant résolvente, considérons la sous-suite $(\mathcal{B}_{\varphi_i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ du point (ii) de la définition II.2.2. Puisque les $N(\mathcal{B}_n)$ forment une suite décroissante de fermés, on a : $\lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N(\mathcal{B}_{\varphi_i(n)})$. D'après le point (ii) de la définition II.2.2, $\lambda \cap \pi^{-1}(d_i)$ est topologiquement un produit $d_i \times T$. Si la transversale T contient un intervalle d'intérieur non vide I_T , on retire $\text{Int}(I_T)$ de T . On réduit ainsi T en une transversale $T' = T \setminus \text{Int}(T) = \partial T$ d'intérieur vide, totalement discontinue. Ainsi, $\pi^{-1}(d_i)$ est une carte laminée, la trace des feuilles étant les $d_i \times \{t\}$, pour $t \in T'$. L'ensemble $\lambda' = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (d_i \times T')$ est bien une lamination. De plus, λ' intersecte transversalement toutes les fibres de $N(\mathcal{B})$. \square

Définition II.2.5 Soit $\dots \mathcal{B}_{k+1} \xrightarrow{p_{k+1}} \dots \xrightarrow{p_1} \mathcal{B} = \mathcal{B}_0$ une suite de décollements résolvente. La lamination pleinement portée $\lambda' = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (d_i \times T')$ construite dans la démonstration précédente est appelée *limite inverse* de la suite de décollements.

II.3 Démonstration du théorème II.1.1

Soit \mathcal{B} une surface branchée vérifiant les hypothèses du théorème II.1.1.

II.3.1 Décomposition cellulaire de \mathcal{B}

Le lieu singulier \mathcal{L} découpe \mathcal{B} en secteurs. On peut donc définir une décomposition cellulaire X de \mathcal{B} , dont les 2-cellules sont les secteurs. Les 2-cellules ne sont donc pas forcément des disques ou des demi-plans. Les arêtes sont les arcs lisses de \mathcal{L} n'ayant pas de point double dans leur intérieur et tels que : s'ils sont bornés, leurs deux extrémités sont des points doubles (éventuellement confondus) ; s'ils sont difféomorphes à $[0, 1]$, leur extrémité est un point double ; s'ils sont difféomorphes à \mathbb{R} , ils ne rencontrent aucun point double. Les sommets sont les points doubles de \mathcal{L} .

Cette première décomposition, la plus simple, n'est pas assez fine pour la construction voulue. Pour des raisons qui deviendront claires après l'énoncé du lemme II.3.3.4, il faut raffiner cette décomposition cellulaire en une décomposition dont les cellules compactes soient des disques. On rajoute donc autant d'arêtes, bornées ou non, que nécessaire pour que toutes les 2-cellules bornées soient des disques, et que les autres soient des demi-plans, par confort. On rajoute également des sommets pour qu'aucune arête n'ait ses deux extrémités confondues. On appelle Y la décomposition cellulaire finalement obtenue.

Remarque II.3.1.1 Le “bord d’une 2-cellule” ici utilisé n’est pas le bord topologique, mais le bord combinatoire. Ainsi, une même arête peut intervenir deux fois dans le bord d’une 2-cellule, avec deux orientations différentes.

II.3.2 Premier décollement

La première étape est un premier décollement de \mathcal{B} , noté \mathcal{B}_1 , et qui est une surface branchée pleinement portée par $N(\mathcal{B})$, comme dans la définition I.1.4 du chapitre I. Décrivons-le plus précisément.

Soit un réel $\varepsilon > 0$, tel que pour une certaine métrique sur \mathcal{B} , les arêtes de Y soit toutes strictement plus longues que 5ε (la raison de cette condition apparaîtra plus tard). On considère alors l’intersection d’un ε -voisinage tubulaire de \mathcal{L} dans V avec \mathcal{B} . On choisit ε suffisamment petit pour que ce voisinage tubulaire soit régulier. Cette intersection est l’union de \mathcal{L} et de deux parties, qui s’intersectent près des points doubles : une partie qui se trouve derrière \mathcal{L} , pour la coorientation de \mathcal{L} donnée par le sens de branchement, et une partie notée $T_{\mathcal{L}}$ qui se trouve devant \mathcal{L} . Le bord de $T_{\mathcal{L}}$ est inclus dans l’union de \mathcal{L} et d’une copie parallèle de \mathcal{L} , notée \mathcal{L}_1 . Ce bord est juste “inclus dans” et non “égal à” cette union, à cause de ce qui se passe aux points doubles. Le premier décollement est le décollement le long de $T_{\mathcal{L}}$, c’est-à-dire que l’on enlève à $N(\mathcal{B})$ un I -fibré au-dessus de $T_{\mathcal{L}}$. La surface branchée \mathcal{B}_1 ainsi obtenue est isomorphe à \mathcal{B} et a \mathcal{L}_1 pour lieu singulier (cf. figure II.3.2.1).

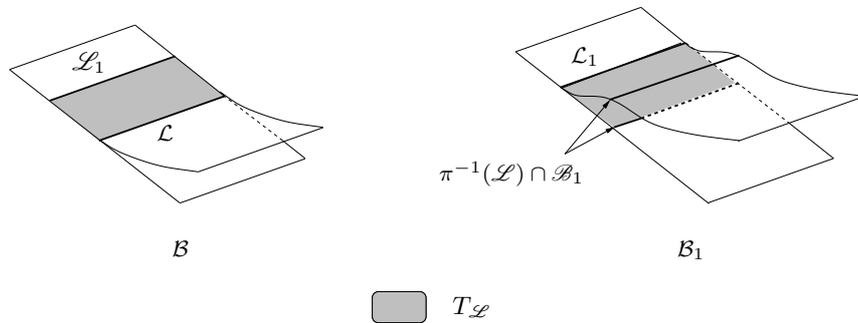


FIG. II.3.2.1 – Premier décollement

La trace de $\pi^{-1}(\mathcal{L})$ sur \mathcal{B}_1 consiste alors localement en deux copies de \mathcal{L} , tracées sur des secteurs différents (au moins localement), comme on le voit sur la figure II.3.2.1. La trace de $\pi^{-1}(Y)$ sur \mathcal{B}_1 , notée Y_1 , est par conséquent un peu plus complexe qu’une décomposition cellulaire en disques, puisque certaines de ses cellules et de ses arêtes sont branchées. Mais ces branchements se trouvent tous dans un ε -voisinage fermé de \mathcal{L}_1 , et \mathcal{B}_1 privée d’un ε -voisinage fermé du 1-squelette de Y_1 est la même union de disques que \mathcal{B} privée du 1-squelette de Y .

II.3.3 Voies ferrées

Chaque 2-cellule Σ de Y hérite de $N(\mathcal{B})$ d'un fibré en intervalles $N(\Sigma)$, construit de la manière suivante : on note $N(\text{Int}(\Sigma))$ l'ensemble de toutes les fibres de $N(\mathcal{B})$ dont le point base se trouve dans $\text{Int}(\Sigma)$ et on pose $N(\Sigma) = \overline{N(\text{Int}(\Sigma))}$. Le bord de $N(\Sigma)$ se décompose en un bord horizontal (inclus dans $\partial_h N(\mathcal{B})$) et un bord vertical (non inclus dans $\partial_v N(\mathcal{B})$). Puisque toutes les 2-cellules bornées de Y sont des disques et sont donc orientables, le bord vertical de $N(\Sigma)$, noté $\partial_v N(\Sigma)$, est en fait de la forme $\mathbb{S}^1 \times I$. Pour les 2-cellules non bornées, ce bord vertical est de la forme $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Pour chaque 2-cellule Σ , on regarde alors la trace de \mathcal{B}_1 sur $\partial_v N(\Sigma)$, qui est également le bord de $\Sigma_1 = P_1^{-1}(\Sigma)$. Il s'agit d'une *voie ferrée (train track)*, autrement dit d'une courbe branchée, pleinement portée par le voisinage fibré $\partial_v N(\Sigma)$. Cette voie ferrée n'a pas de bord et évite la trace de $\partial_v N(\mathcal{B})$ sur $\partial_v N(\Sigma)$. Elle est compacte si et seulement si Σ l'est. La figure II.3.3.1 montre deux exemples de voies ferrées bornées.

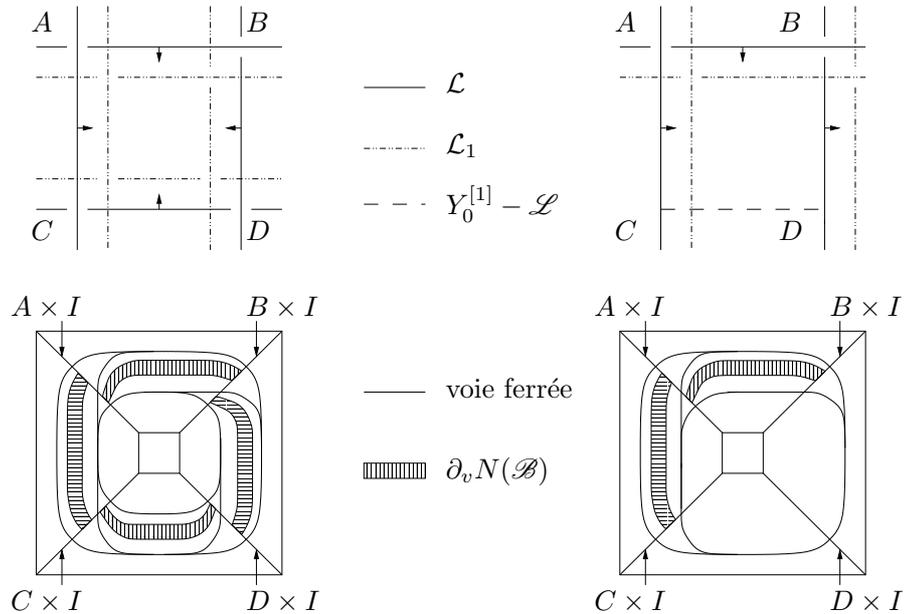


FIG. II.3.3.1 – Voies ferrées

Une orientation d'une 2-cellule donne une orientation de son bord. La voie ferrée correspondante est donc également orientée. Pour chaque 2-cellule Σ , on fixe également une orientation des fibres de $\partial_v N(\Sigma)$. On peut donc introduire les définitions suivantes :

Définition II.3.3.2 Un branchement d'une voie ferrée est dit *direct* quand une voie parcourue dans le sens direct s'y divise en deux, et *retrograde* quand deux voies parcourues dans le sens direct s'y rejoignent.

Allons encore un peu plus loin dans la classification des branchements d'une voie ferrée :

Définition II.3.3.3 Soit \mathcal{V} une voie ferrée orientée compacte sans bord, pleinement portée par un fibré trivial $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. On fixe une orientation des fibres. Soit \mathcal{C} une courbe lisse fermée de \mathcal{V} . Elle découpe $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ en deux parties : $(\mathbb{S}^1 \times [0, 1])^+$, constituée des points qui se trouvent au-dessus de \mathcal{C} pour l'orientation des fibres, et $(\mathbb{S}^1 \times [0, 1])^-$ constituée des points qui se trouvent en-dessous. Un branchement le long de \mathcal{C} est dit *supérieur* (resp. *inférieur*) si la branche qui quitte ou rejoint \mathcal{C} se trouve dans $(\mathbb{S}^1 \times [0, 1])^+$ (resp. $(\mathbb{S}^1 \times [0, 1])^-$).

On peut alors énoncer le lemme suivant :

Lemme II.3.3.4 Soit Σ une 2-cellule compacte de Y (Σ est un disque), et Σ_1 sa trace sur \mathcal{B}_1 . Soit \mathcal{V} la voie ferrée associée au bord de Σ_1 . C'est une voie ferrée orientée compacte sans bord, pleinement portée par un fibré $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. On fixe une orientation des fibres. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) lorsque l'on suit n'importe quelle courbe lisse fermée de \mathcal{V} , soit on ne rencontre aucun branchement inférieur, soit on rencontre au moins un branchement inférieur direct et au moins un branchement inférieur rétrograde ;
- (ii) \mathcal{V} peut être décollée en une union de cercles lisses ;
- (iii) Σ n'est pas un disque de contact vrillé.

Démonstration

★ (i) \Rightarrow (ii) : Si c'est vrai pour chaque composante connexe de \mathcal{V} , alors c'est vrai pour \mathcal{V} . On peut donc supposer \mathcal{V} connexe, et différent d'une courbe lisse. Pour tout $\theta \in \mathbb{S}^1$, soit $\max(\theta) = \max\{t \in [0, 1] \mid (\theta, t) \in \mathcal{V}\}$, qui est un réel de $[0, 1]$. On peut définir $\max(\mathcal{V}) = \{(\theta, \max(\theta)), \theta \in \mathbb{S}^1\}$. Alors $\max(\mathcal{V})$ est un cercle lisse inclus dans \mathcal{V} , le long duquel on rencontre au moins un branchement inférieur direct et au moins un branchement inférieur rétrograde, et aucun branchement supérieur. En particulier il existe un arc orienté \mathcal{A} de $\max(\mathcal{V})$, allant (pour l'orientation de \mathcal{V}) d'un branchement direct à un branchement rétrograde, et ne rencontrant aucun autre branchement. Alors $\mathcal{V} \setminus \mathcal{A}$ est une voie ferrée \mathcal{V}_1 orientée compacte sans bord pleinement portée par $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, et $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \max(\mathcal{V})$. Toute courbe lisse fermée de \mathcal{V}_1 est aussi une courbe lisse fermée de \mathcal{V} , et ses branchements inférieurs restent inchangés par le décollage précédent. Donc \mathcal{V}_1 vérifie aussi le point (i) de l'énoncé du lemme. Si \mathcal{V}_1 n'est pas un cercle, on réitère alors l'opération précédente en utilisant $\max(\mathcal{V}_1)$, et au bout d'un nombre fini d'étapes, on a bien décomposé \mathcal{V} en une union de cercles lisses. Un exemple est présenté figure II.3.3.5.

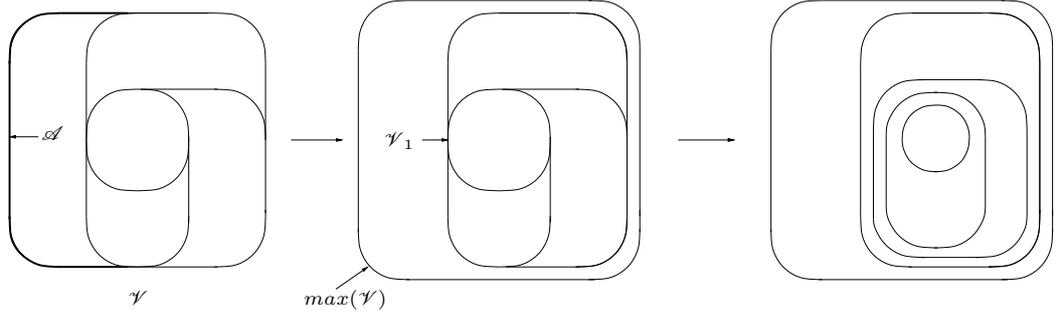
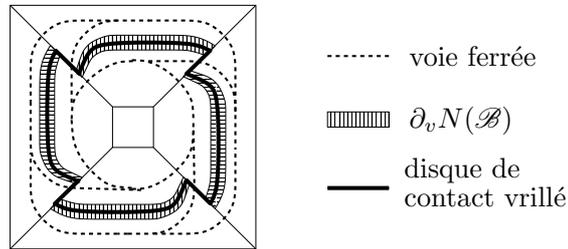


FIG. II.3.3.5 – Décollement d'une voie ferrée en une union de cercles

- ★ $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$: Soit \mathcal{C} une courbe lisse fermée de \mathcal{V} n'ayant, par exemple, que des branchements inférieurs directs. Si l'on parcourt \mathcal{C} dans le sens direct, et que l'on emprunte un branchement inférieur direct, alors quel que soit le chemin lisse suivi ultérieurement sur \mathcal{V} , jamais on ne pourra revenir sur \mathcal{C} , car cela impliquerait l'existence d'un branchement inférieur rétrograde le long de \mathcal{C} . Ainsi, aucune branche inférieure quittant \mathcal{C} dans le sens direct n'est incluse dans une courbe lisse fermée de \mathcal{V} , et \mathcal{V} n'est donc pas une union de cercles lisses.
- ★ $\neg(iii) \Rightarrow \neg(i)$: La trace de \mathcal{B}_1 quand Σ est un disque de contact vrillé est toujours comme sur la figure **II.3.3.6**, c'est-à-dire que c'est l'union de deux cercles lisses et de segments joignant ces deux cercles en des points de branchement.


 FIG. II.3.3.6 – $\neg(i) \Leftrightarrow \neg(ii)$

Le cercle du dessus n'admet que des branchements inférieurs, et il en admet au moins un car un disque de contact vrillé a au moins un coin. De plus, ces branchements sont tous du même type car tous les coins d'un disque de contact vrillé sont de même signe.

- ★ $\neg(i) \Rightarrow \neg(iii)$: Supposons qu'il existe une courbe lisse fermée C de \mathcal{V} dont tous les branchements inférieurs sont d'un seul type, par exemple directs, et qui a au moins un branchement inférieur. Étudions la trace de $\partial_v N(\mathcal{B})$ sur $\partial_v(\Sigma)$. Chacune de ses composantes a un bord vertical ayant deux composantes connexes, et un bord horizontal ayant aussi deux composantes connexes. Chaque composante du bord vertical est incluse dans une fibre de $\partial_v N(\Sigma)$ dont le point base est un point de branchement

de \mathcal{B} .

Plaçons-nous en un point p de C et parcourons C dans le sens direct. Au premier point de branchement p_1 rencontré, C se divise en deux branches : la branche du dessus passe au-dessus d'une composante b_1 de la trace de $\partial_v N(\mathcal{B})$, et la branche du dessous passe sous cette composante. On continue à suivre C jusqu'à rencontrer la fibre où s'arrête b_1 . Si cette fibre est au-dessus d'un point de branchement p_2 qui n'est pas un point double, alors la branche de \mathcal{V} sous b_1 rejoint la branche de \mathcal{V} au-dessus de b_1 en ce branchement. Or ces deux branches seraient les mêmes que précédemment et on aurait un branchement inférieur rétrograde le long de C . Ce point de branchement p_2 est donc un point double. En ce point, il y a donc deux branchements, un direct et un rétrograde, dont un est sur C . C'est donc le branchement direct, et à nouveau, C se sépare en deux branches encadrant une nouvelle composante connexe b_2 de la trace de $\partial_v N(\mathcal{B})$. Puisque ce branchement est direct, b_2 se trouve au-dessus de b_1 en p_2 . On continue à parcourir jusqu'à revenir en p_1 . Au long de ce parcours, on aura suivi k composantes connexes b_1, \dots, b_k de $\partial_v N(\mathcal{B})$ et rencontré k points doubles p_1, \dots, p_k . Chaque composante b_i va de p_i à p_{i+1} , pour $i = 1 \dots k$ modulo k . Or en p_i , b_{i-1} est sous b_i , et ce pour chaque i , donc ces points doubles sont de même signe. Ainsi Σ est un disque de contact vrillé à k coins. □

Remarque II.3.3.7 Dans la démonstration du point (i) \Rightarrow (ii), on pourrait aussi définir $\min(\mathcal{V})$ de la même manière que $\max(\mathcal{V})$, et montrer alors que les points (ii) et (iii) sont équivalents à un point (i') : lorsque l'on suit n'importe quelle courbe lisse fermée de \mathcal{V} , soit on ne rencontre aucun branchement supérieur, soit on rencontre au moins un branchement supérieur direct et au moins un branchement supérieur rétrograde. Les points (i) et (i') sont donc équivalents.

Avec les mêmes idées, il est possible de démontrer un résultat connu déjà mentionné dans la remarque I.2.7 :

Proposition II.3.3.8 *Soit \mathcal{B} une surface branchée ayant un secteur disque \mathcal{D} qui est aussi un disque de contact vrillé. Alors \mathcal{B} ne peut pas porter pleinement de lamination.*

Démonstration Supposons que \mathcal{B} porte pleinement une lamination λ . On considère $N(\mathcal{D})$, le voisinage fibré au-dessus de \mathcal{D} dans $N(\mathcal{B})$. On note \mathcal{V} la voie ferrée qui est la trace de \mathcal{B}_1 sur $\partial_v N(\mathcal{D})$. L'intersection des feuilles de λ passant au-dessus de \mathcal{D} avec $\partial_v N(\mathcal{D})$ est un ensemble de disques. Les bords de ces disques sont des cercles qui forment une lamination de dimension 1 pleinement portée par un voisinage fibré de \mathcal{V} . Or, comme on le voit sur l'exemple de la figure II.3.3.9, b), \mathcal{V} est l'union de cercles lisses et de segments

joignant ces deux cercles en des points de branchement. Et, puisque \mathcal{V} ne peut être décomposée en une union de cercles, il n'existe pas de cercle porté par un voisinage fibré de \mathcal{V} et passant au-dessus d'un de ces segments (c)), d'où une contradiction.

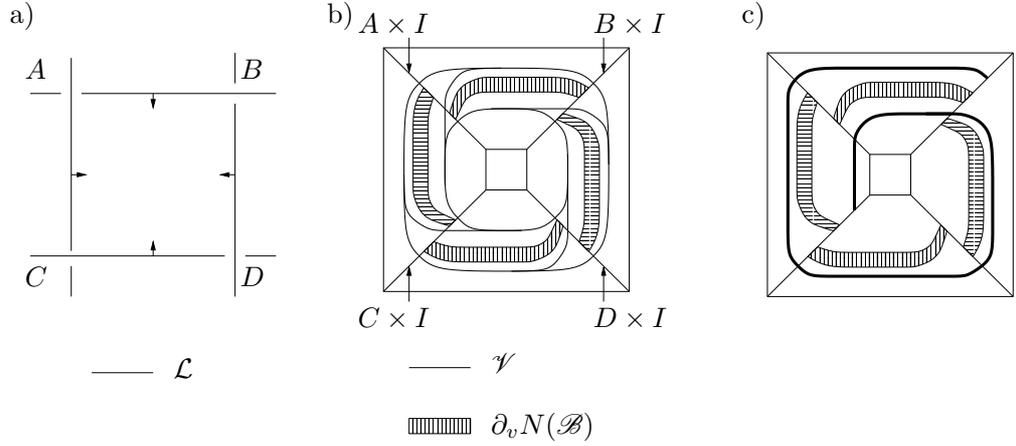


FIG. II.3.3.9 – Disque de contact vrillé

□

C'est pour cette raison que l'existence d'un disque de contact vrillé de \mathcal{B} interdit à la suite de la démonstration de fonctionner. C'est également pour cela que l'on a raffiné la première décomposition cellulaire de \mathcal{B} dans la sous-section II.3.1.

Remarque II.3.3.10 Pour les cellules non bornées les choses sont beaucoup plus simples, puisque toute voie ferrée pleinement portée par un voisinage fibré $\mathbb{R} \times [0, 1]$ se décompose toujours en une union de droites lisses.

II.3.4 Suite résolvente de décollements

On reprend $\varepsilon > 0$ défini dans la sous-section II.3.2 pour le décollement de \mathcal{B} menant à \mathcal{B}_1 . Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement décroissante telle que pour tout n , $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon_n < \varepsilon$.

Soit Y_ε un $\frac{\varepsilon}{2}$ -voisinage de $Y^{[1]}$ dans \mathcal{B} . Alors la trace de \mathcal{B}_1 sur $\pi^{-1}(Y_\varepsilon)$ est une surface branchée à bord notée \mathcal{B}'_1 .

Le but de cette sous-section est d'expliquer comment construire une suite de décollements de \mathcal{B} , dont la suite de décollements de \mathcal{B}'_1 qu'elle induit soit résolvente.

On note $(y_i)_{i \in J}$ l'ensemble des sommets de Y , où J est un sous-ensemble fini ou non de \mathbb{N} . À chaque sommet y_i correspondent plusieurs sommets de Y_1 , au moins deux et au plus trois, suivant que y_i est un point double ou un point simple du lieu singulier. On note ces sommets $y_i(j)$ pour $j = 1, 2$ ou 3 . On note alors $d_i(j)$ la projection par p_1 du disque de \mathcal{B}_1 de centre $y_i(j)$ et de rayon 2ε . On peut choisir ces $d_i(j)$ de telle sorte que $d_i = \cup_{j \in \{1,2,3\}} d_i(j)$ soit un disque branché, voisinage de y_i dans \mathcal{B} (cf. figure II.3.4.1).

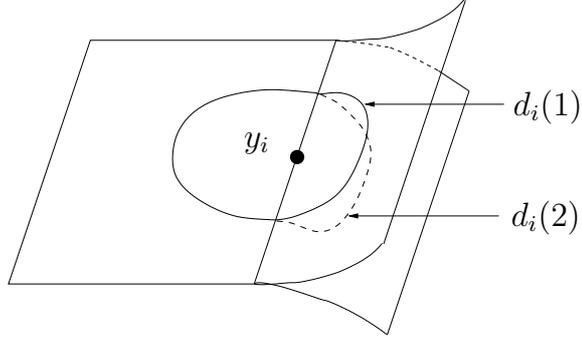


FIG. II.3.4.1 –

Le lieu singulier de \mathcal{B}'_1 est entièrement inclus dans l'union des $p_1^{-1}(d_i(j))$ pour tous les i et j (remarquons que le lieu singulier de \mathcal{B}'_1 n'a pas de point double). De plus, puisqu'on a supposé que les arêtes de Y étaient strictement plus longues que 5ε , si y_{i_1} est différent de y_{i_2} , alors d_{i_1} et d_{i_2} sont disjoints.

Enfin, on choisit une suite de sommets de Y , $(y_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, pour ψ une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , telle que tout sommet y apparaisse un nombre infini de fois. Ceci est possible car il n'y a qu'un nombre dénombrable de sommets de Y .

Déterminons les décollements menant de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}_2 . On considère toutes les arêtes de Y ayant $y_{\psi(1)}$ pour sommet. On les oriente de $y_{\psi(1)}$ vers leur deuxième sommet. Soit \mathbf{a} une de ces arêtes. Son deuxième sommet est y_k , différent de $y_{\psi(1)}$. On considère la trace de \mathcal{B}_1 sur $\pi^{-1}(\mathbf{a})$, que l'on note $\mathcal{V}_{\mathbf{a}}$. Puisque \mathbf{a} est orientée, on peut parler de branchements directs et rétrogrades le long de $\mathcal{V}_{\mathbf{a}}$. Or, d'après la construction de \mathcal{B}_1 , les branchements rétrogrades se trouvent tous dans $\pi^{-1}(d_{\psi(1)})$, et les branchements directs se trouvent tous dans $\pi^{-1}(d_k)$, et chaque branchement se trouve à une distance ε des extrémités de $\mathcal{V}_{\mathbf{a}}$. En fait, à ce stade de la suite de décollements, il y a au plus un branchement direct et un branchement rétrograde le long de $\mathcal{V}_{\mathbf{a}}$. S'il n'y a pas de branchement rétrograde, aucun décollement ne sera fait le long de $\mathcal{V}_{\mathbf{a}}$. Sinon, on va effectuer un décollement le long du chemin inscrit sur $\mathcal{V}_{\mathbf{a}}$ allant du branchement rétrograde au branchement direct s'il existe, sinon allant jusqu'au bout de $\mathcal{V}_{\mathbf{a}}$, dans un ε_1 -voisinage de ce chemin. Si un branchement direct est rencontré, ce

décollement peut être supérieur, inférieur ou neutre. La sous-section suivante **II.3.5** indiquera lequel choisir. Si c'est le décollement neutre qui doit être effectué, le décollement s'arrêtera au point de branchement direct. Sinon, on peut continuer le décollement le long d'un chemin inscrit sur \mathcal{V}_a et allant jusqu'au bout de \mathcal{V}_a . Puisque $\varepsilon_1 < \varepsilon$, le long de ce chemin, aucun autre branchement rétrograde n'est rencontré, et ainsi il n'y a pas de décollement rétrograde. Le même procédé est appliqué à toutes les arêtes ayant $y_{\psi(1)}$ pour sommet. Le deuxième décollement se fait dans un ε_2 -voisinage du chemin de décollement correspondant tracé sur \mathcal{V}_a , le troisième dans un ε_3 -voisinage du chemin correspondant et ainsi de suite. La décroissance des ε_i a pour but d'éviter les décollements rétrogrades. L'ordre de ces arêtes n'a pas d'importance.

Après ces décollements, on obtient une surface branchée \mathcal{B}_2 . On considère toutes les arêtes de Y ayant $y_{\psi(2)}$ pour sommet. On les oriente de $y_{\psi(2)}$ vers leur deuxième sommet. Soit \mathbf{a} une de ces arêtes. Son deuxième sommet est y_k , pour un certain entier k différent de $\psi(2)$. On considère la trace de \mathcal{B}_2 sur $\pi^{-1}(\mathbf{a})$, que l'on note \mathcal{V}_a . La situation est la même que dans le paragraphe précédent à un détail près : il peut maintenant y avoir plus d'un branchement direct et un branchement rétrograde le long de \mathcal{V}_a (cf. figure **II.3.4.2**). Toutefois, tous les branchements rétrogrades se trouvent dans $\pi^{-1}(d_{\psi(2)})$, et tous les branchements directs se trouvent dans $\pi^{-1}(d_k)$. Tous ces branchements se trouvent à une distance des extrémités de \mathcal{V}_a au moins égale à ε_i , si i décollements ont été effectués sur \mathcal{B}_1 .

Regardons les branchements rétrogrades de \mathcal{V}_a : il y en a un certain nombre j . Puisque les décollements successifs ont été effectués dans des voisinages de plus en plus petits, on peut ordonner ces branchements du plus éloigné de $\pi^{-1}(y_{\psi(2)})$ au plus proche. On les note b_1, \dots, b_j , b_i étant strictement plus éloigné que b_{i+1} . On va alors effectuer des décollements le long de chemins partant des b_i , dans des voisinages de plus en plus petits dont la taille est déterminée par la suite (ε_n) . Afin d'éviter tout décollement rétrograde, on commencera par un décollement le long d'un chemin partant de b_1 . Le second décollement partira de b_2 , et ainsi de suite jusqu'au dernier décollement qui partira de b_j . À chaque branchement direct rencontré un des trois décollements sera choisi, conformément à la sous-section **II.3.5**. Comme précédemment, si c'est le décollement neutre qui doit être effectué, le décollement s'arrêtera à ce point de branchement direct. Sinon, on peut continuer le décollement jusqu'à ce qu'un autre branchement direct soit rencontré, ou jusqu'au bout de \mathcal{V}_a . Là aussi, grâce au choix des ε_n , tout décollement rétrograde sera évité. Le même procédé est appliqué à toutes les arêtes ayant $y_{\psi(2)}$ pour sommet. L'ordre de ces arêtes n'a pas d'importance.

On réitère ces opérations à chaque fois : les décollements menant de \mathcal{B}_n à \mathcal{B}_{n+1} se font tous le long de chemins dont l'image par π est incluse dans une

arête ayant $y_{\psi(n)}$ pour sommet. Les branchements rétrogrades sont toujours au-dessus de $d_{\psi(n)}$: il y en a de plus en plus, mais ils sont toujours strictement ordonnés, du plus éloigné au plus proche. De plus, pour tout i , le lieu singulier de \mathcal{B}'_i est entièrement contenu dans $P_i^{-1}(\cup_{i \in J} d_i)$. En rajoutant à l'ensemble des d_i des disques dont les images réciproques par les projections P_i ne rencontrent jamais le lieu singulier des \mathcal{B}'_i , on obtient un ensemble de disques dont l'union recouvre \mathcal{B}'_1 . Mais le lieu singulier de \mathcal{B}'_{n+1} n'intersecte pas $P_{n+1}^{-1}(d_{\psi(n)})$: on a alors *résolu* les singularités au-dessus de $d_{\psi(n)}$. Le sommet $y_{\psi(n)}$ réapparaissant un nombre infini de fois dans la suite $(y_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, la suite $\dots \mathcal{B}'_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{B}'_1$ est bien une suite résolvente de décollements.

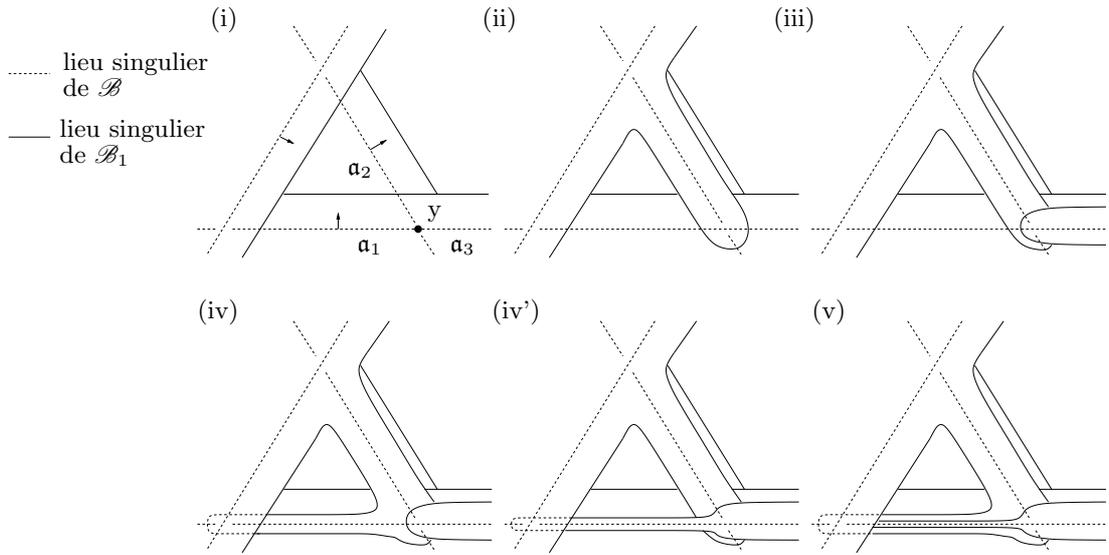


FIG. II.3.4.2 – Exemple d'une suite de décollements

La figure **II.3.4.2** montre un exemple d'une suite de décollements construite suivant cette méthode. Sur cette figure les lieux singuliers sont représentés "vus de haut", et seule la partie supérieure est dessinée. Les trois premiers points montrent une suite de décollements à l'issue de laquelle il y a plusieurs branchements rétrogrades le long de certaines arêtes issues de y . Le premier décollement à effectuer le long de \mathbf{a}_1 est celui représenté en **(iv)** et non pas en **(iv')**, où il y a un décollement rétrograde. Le deuxième décollement est celui représenté en **(v)**. Il reste ensuite à décoller le long de \mathbf{a}_2 et \mathbf{a}_3 .

II.3.5 Décollements adaptés

Montrons maintenant qu'il est possible d'effectuer les décollements le long des arcs de décollement définis dans la partie précédente, de manière à ce qu'aucune des surfaces branchées \mathcal{B}_n n'admette de courbe vrillée, et donc de

disque de contact vrillé.

Si un arc de décollement n'est pas en position de vis-à-vis, le lieu singulier après décollement reste le même : il est déformé, mais il n'y a pas de nouveaux points doubles.

Dans le cas où l'arc de décollement est en position de vis-à-vis, on observe le fait suivant : un décollement supérieur introduit deux nouveaux points doubles dans le lieu singulier, un positif et l'autre négatif, et un décollement inférieur introduit également deux points doubles au même endroit, mais de signes contraires à ceux obtenus par décollement supérieur. La figure **I.4.7** permet de s'en convaincre facilement.

Il faut maintenant définir une suite de décollements qui ne créent jamais de courbe vrillée. Un décollement d'une telle suite sera dit *adapté*.

La propriété suivante est fondamentale (on garde les mêmes notations que précédemment) :

Proposition II.3.5.1 *Soit \mathcal{B}_n une surface branchée obtenue à partir de \mathcal{B}_1 par une suite de décollements, et qui n'a pas de courbe vrillée. On note \mathcal{L}_n son lieu singulier. Alors, quel que soit l'arc de décollement correspondant à deux branchements en vis-à-vis de \mathcal{B}'_n (la surface branchée induite par \mathcal{B}_n sur $\pi^{-1}(Y_\varepsilon)$), au moins un des trois décollements, neutre, supérieur ou inférieur, est adapté.*

Démonstration D'après le corollaire **I.3.10**, on peut ne considérer que des courbes vrillées simples. C'est ce qui sera fait dans toute cette démonstration.

Notons \mathbf{a} l'arc de décollement utilisée pour passer de \mathcal{B}_n à \mathcal{B}_{n+1} . On suppose \mathbf{a} en situation de vis-à-vis. Considérons les décollements possibles le long de \mathbf{a} . Lorsqu'on effectue un de ces décollements, le lieu singulier n'est modifié que dans un voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{a})$ de \mathbf{a} .

On commence par faire le décollement neutre. On note \mathcal{B}_{nul} la surface branchée obtenue. On adopte les notations de la figure **II.3.5.2, b)**, où $\mathbf{a}_g = [p_g, q_g]$, $\mathbf{a}_d = [q_d, p_d]$, l_g et l_d sont des segments lisses orientés du lieu singulier. On dira qu'une courbe orientée passe *positivement* par l'un de ces segments si elle passe par ce segment avec la même orientation que ce segment. On dira qu'elle passe *négativement* par un segment si elle y passe dans l'autre sens.

Supposons que le décollement neutre ne soit pas adapté. On suppose par exemple que γ est une courbe vrillée positive passant positivement en \mathbf{a}_g dans \mathcal{B}_{nul} . Les autres cas se traitent de la même manière. On distingue le cas **(A)**, où γ ne passe pas en \mathbf{a}_d , du cas **(B)**, où γ passe en \mathbf{a}_d .

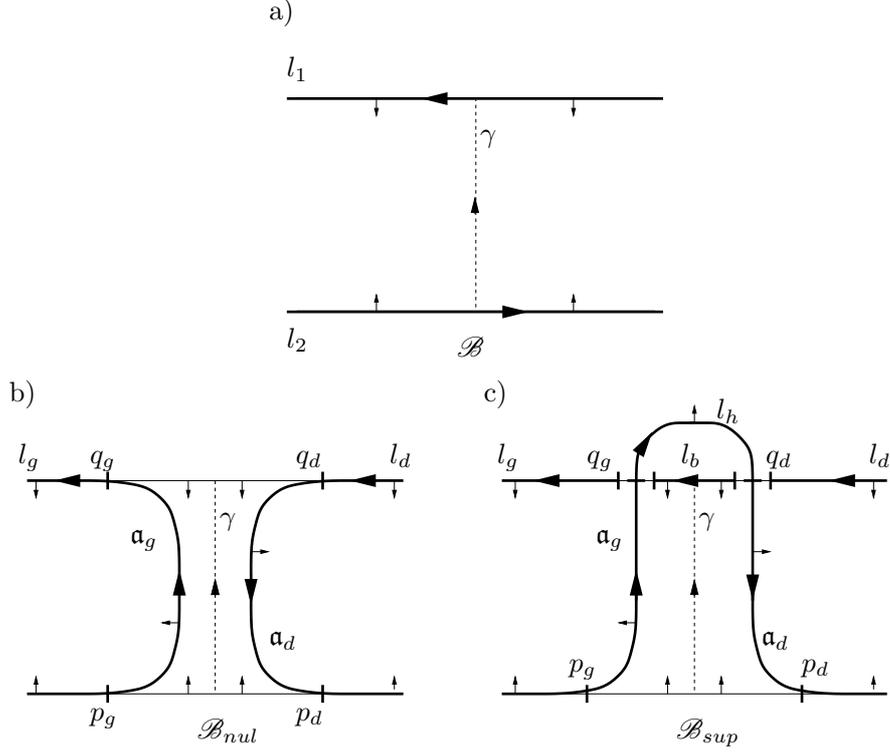


FIG. II.3.5.2 –

Lemme II.3.5.3 *Si γ est dans le cas (B), alors elle passe négativement en \mathbf{a}_d .*

Démonstration Supposons qu'elle y passe positivement. L'immersion de γ dans \mathcal{B}_{nul} donne l'immersion d'une courbe fermée γ' dans \mathcal{B}_n , qui coïncide avec γ en dehors de $\mathcal{V}(\mathbf{a})$. Il reste à définir γ' dans $\mathcal{V}(\mathbf{a})$. Pour cela, on définit deux arêtes orientées dans \mathcal{B}_n , notées a_g et a_d , qui relient p_g à q_g et q_d à p_d . Ces arêtes correspondent à \mathbf{a}_g et \mathbf{a}_d , mais elles ne sont pas dans le lieu singulier de \mathcal{B}_n . On définit γ' dans $\mathcal{V}(\mathbf{a})$ de la même manière que γ , en remplaçant \mathbf{a}_g et \mathbf{a}_d par a_g et a_d . Tous les coins de γ' autres que p_g , p_d , q_g et q_d sont montants. Si l'on considère γ' comme une courbe basée en q_g , on peut écrire $\gamma' = \gamma'_1 * a_d * \gamma'_2 * a_g$, où γ'_1 est la portion de γ' allant de q_g à q_d , et γ'_2 celle allant de p_d à p_g . On pose alors : $\beta_1 = \gamma'_1 * [q_d, q_g]$ et $\beta_2 = \gamma'_2 * [p_g, p_d]$. Ces deux courbes sont inscrites dans le lieu singulier de \mathcal{B}_n . De plus un coin de γ est nécessairement un coin de β_1 ou de β_2 , et réciproquement. Donc une des courbes β_1 ou β_2 a au moins un coin, et tous ses coins sont montants. C'est donc une courbe vrillée positive de \mathcal{B}_n , présente avant décollement, ce qui est absurde. \square

Dans le cas (B), on peut donc écrire $\gamma = \gamma_1 * \mathbf{a}_d^{-1} * \gamma_2 * \mathbf{a}_g$, où γ_1 est la portion de γ allant de q_g à p_d , et γ_2 celle allant de q_d à p_g . On a alors un second lemme :

Lemme II.3.5.4 *Il y a au moins un coin sur γ_1 et au moins un coin sur γ_2 .*

Démonstration Supposons par exemple qu'il n'y ait pas de coin sur γ_2 . Comme dans la démonstration du lemme **II.3.5.3**, il existe une courbe fermée γ' dans \mathcal{B}_n , correspondant à γ , et que l'on peut écrire $\gamma' = \gamma'_1 * a_d^{-1} * \gamma'_2 * a_g$. On pose alors dans $\mathcal{B}_n : \beta = \gamma'_1 * [p_d, p_g] * \gamma'^{-1} * [q_d, q_g]$. C'est une courbe fermée immergée dans \mathcal{B}_n , et incluse dans le lieu singulier de \mathcal{B}_n . Tout coin de γ est un coin de γ'_1 donc de β , et tout coin de β est un coin de γ . Par conséquent, β est une courbe vrillée positive de \mathcal{B}_n , ce qui est une contradiction. \square

Que γ soit dans le cas **(A)** ou dans le cas **(B)**, on va montrer que le décollement supérieur est adapté. On effectue donc ce décollement supérieur. On note \mathcal{B}_{sup} la surface branchée obtenue. On utilise les notations de la figure **II.3.5.2, c)**, où q_g et q_d sont des points doubles du lieu singulier de \mathcal{B}_{sup} . Supposons que \mathcal{B}_{sup} contienne une courbe vrillée simple positive δ passant dans $\mathcal{V}(\mathbf{a})$, c'est-à-dire que le décollement supérieur fait apparaître δ . On va en fait montrer que ceci est impossible. La figure **II.3.5.5** recense toutes les configurations locales de courbes vrillées simples positives passant dans ce voisinage. Quitte à renverser l'orientation de ces courbes, on obtient bien sûr toutes les configurations possibles de courbes vrillées simples négatives passant dans $\mathcal{V}(\mathbf{a})$.

Les diagrammes **1** et **3** de cette figure sont équivalents, dans le sens où il existe une courbe vrillée simple positive de la forme **1** si et seulement si il existe une courbe vrillée simple positive de la forme **3**. De même, les diagrammes **5** et **7** sont équivalents, ainsi que les diagrammes **2** et **4** et les diagrammes **6** et **8**. Il n'y a donc que 4 cas à étudier pour δ .

Notons que l'immersion de γ dans \mathcal{B}_{nul} est aussi une immersion de γ dans \mathcal{B}_{sup} , dont on notera γ_{sup} l'image, pour éviter toute confusion. Mais q_g et q_d sont des points lisses de γ , alors que ce sont des coins descendants de γ_{sup} . La courbe γ_{sup} n'est donc pas vrillée, mais en dehors de q_g et q_d , tous ses coins sont montants.

Étudions donc tous les cas possibles, en commençant par ceux où γ est dans le cas **(A)** :

(A.1)

La figure **II.3.5.6** résume ce qui se passe. On considère γ_{sup} et δ comme deux courbes basées en q_g , et on pose $\beta = \delta * \gamma_{sup}$. Ce lacet β est librement homotope dans \mathcal{B}_{sup} à un lacet immergé ne passant plus dans $\mathcal{V}(\mathbf{a})$, et dont tous les coins sont montants. Ce dernier contient, d'après le lemme **I.3.10** une courbe vrillée positive simple, qui ne passe pas dans $\mathcal{V}(\mathbf{a})$ non plus. Cette courbe s'immerge donc en une courbe vrillée simple positive dans \mathcal{B}_n , ce qui est une contradiction.

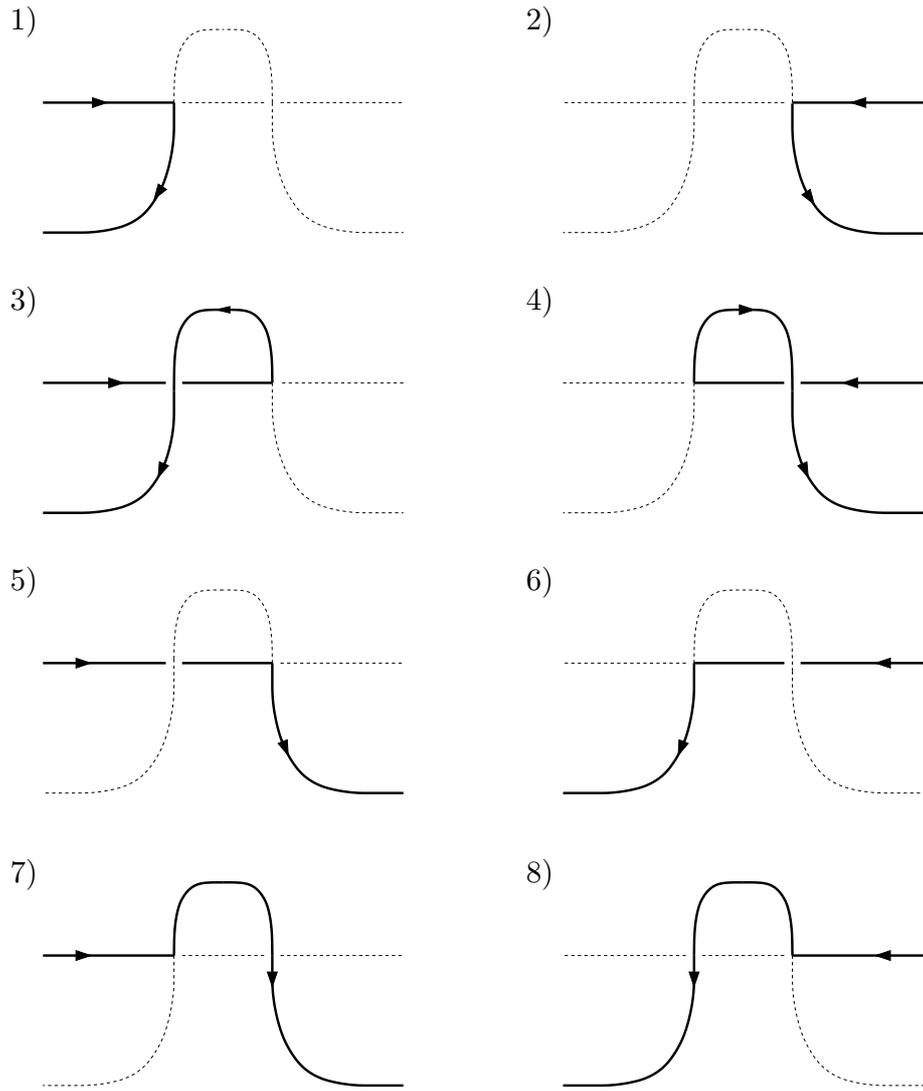


FIG. II.3.5.5 – Courbes vrillées positives passant dans $\mathcal{V}(\mathbf{a})$

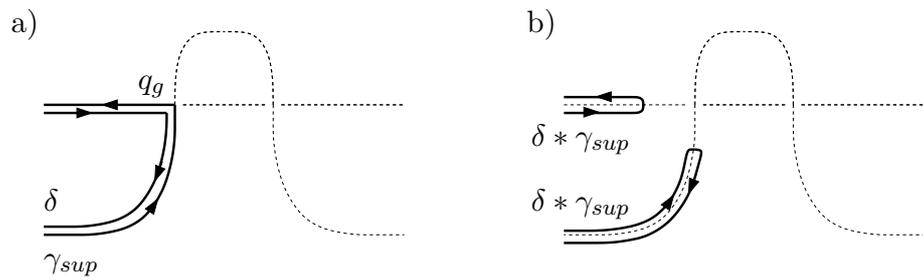


FIG. II.3.5.6 – (A.1)

(A.4)

La figure **II.3.5.7** résume ce qui se passe. On considère γ_{sup} et δ comme

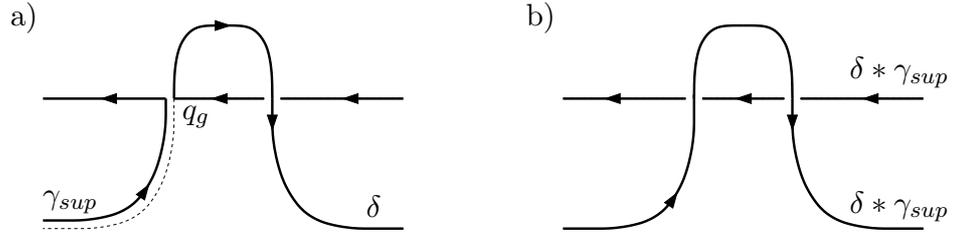


FIG. II.3.5.7 - (A.4)

deux courbes basées en q_g , et on pose $\beta = \delta * \gamma_{sup}$. Ce lacet β est immergé et n'a plus q_g comme coin. Tous ses coins sont montants. D'après le lemme **I.3.10**, β contient une courbe vrillée positive simple. Si cette courbe passe dans $\mathcal{V}(\mathbf{a})$, elle passe à la suite par \mathbf{a}_g , l_h et \mathbf{a}_d positivement, ou à la suite par l_d , l_b et l_g positivement, ou les deux. Cette courbe s'immerge donc en une courbe vrillée simple positive dans \mathcal{B}_n , ce qui est une contradiction.

(A.6)

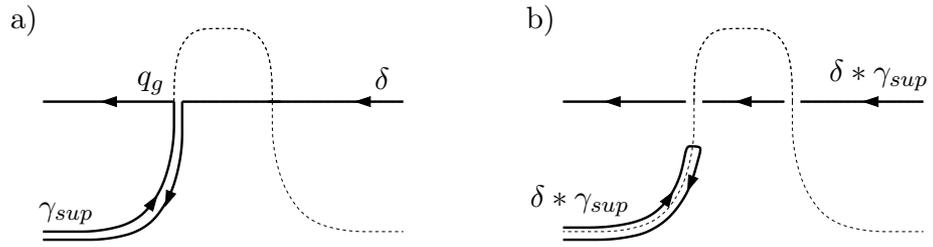


FIG. II.3.5.8 - (A.6)

La figure **II.3.5.8** résume ce qui se passe. On considère γ_{sup} et δ comme deux courbes basées en q_g , et on pose $\beta = \delta * \gamma_{sup}$. Ce lacet β est homotope dans \mathcal{B}_{sup} à un lacet immergé n'ayant plus q_g comme coin, et dont tous les coins sont montants. Il contient, d'après le lemme **I.3.10** une courbe vrillée positive simple. Si cette courbe passe dans $\mathcal{V}(\mathbf{a})$, elle passe à la suite par l_d , l_b et l_g positivement, et nulle part ailleurs. Cette courbe s'immerge donc en une courbe vrillée simple positive dans \mathcal{B}_n , ce qui est une contradiction.

(A.7)

La figure **II.3.5.9** résume ce qui se passe. On considère γ_{sup} et δ comme deux courbes basées en q_g , et on pose $\beta = \delta * \gamma_{sup}$. Ce lacet β est homotope dans \mathcal{B}_{sup} à un lacet immergé n'ayant plus q_g comme coin, et dont tous les coins sont montants. Il contient, d'après le lemme **I.3.10** une courbe vrillée positive simple. Si cette courbe passe dans $\mathcal{V}(\mathbf{a})$, elle passe à la suite par \mathbf{a}_g ,

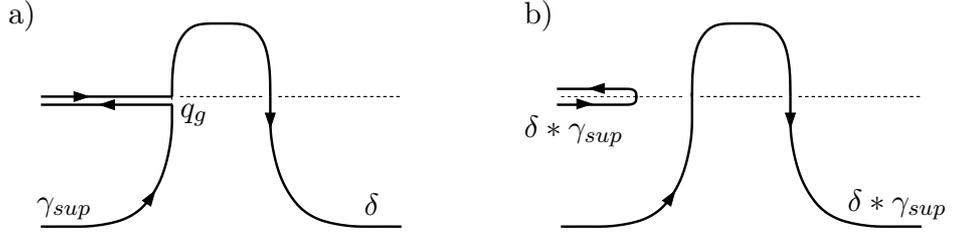


FIG. II.3.5.9 – (A.7)

l_h et \mathbf{a}_d positivement, et nulle part ailleurs. Cette courbe s'immerge donc en une courbe vrillée simple positive dans \mathcal{B}_n , ce qui est une contradiction.

Il reste ensuite à traiter les cas où γ est dans le cas **(B)** :

(B.1)

De même que l'on peut construire γ_{sup} à partir de γ , on peut construire une courbe δ_{nul} , fermée et immergée dans \mathcal{B}_{nul} , à partir de δ . Cette courbe a les mêmes coins que δ , excepté q_g . Si q_g est le seul coin de δ , alors δ_{nul} n'a pas de coin, sinon δ_{nul} est vrillée positive.

On peut alors considérer δ_{nul} et γ comme deux lacets dans \mathcal{B}_{nul} basés en q_g . On pose $\beta = \delta_{nul} * \gamma$. Ce lacet est librement homotope dans \mathcal{B}_{nul} à un lacet immergé ne passant plus en \mathbf{a}_g , et dont tous les coins sont montants. Ce dernier contient, d'après le lemme **I.3.10** une courbe vrillée positive simple, qui ne passe pas en \mathbf{a}_g non plus. On note encore β cette courbe. Si cette courbe ne passe pas dans $\mathcal{V}(\mathbf{a})$, elle s'immerge aussi en une courbe vrillée simple positive dans \mathcal{B} , ce qui est une contradiction.

Sinon, elle passe à la suite par l_d et \mathbf{a}_d , positivement, et nulle part ailleurs dans $\mathcal{V}(\mathbf{a})$. L'immersion de β dans \mathcal{B}_{nul} implique l'existence d'une immersion d'une courbe simple fermée β_{sup} dans \mathcal{B}_{sup} , et qui ne passe qu'en \mathbf{a}_d et l_d . On modifie alors δ en lui rajoutant une boucle $l_b * l_h$, de manière à obtenir une courbe δ' modelée sur le diagramme **4** de la figure **II.3.5.5**. La contradiction s'obtient alors comme dans le point **A.4**, en utilisant β_{sup} et δ' .

(B.2)

Par symétrie, ce point se traite de la même manière que le point précédent, **B.1**.

(B.7)

Ce cas est représenté figure **II.3.5.10**. Comme précédemment, on écrit $\gamma_{sup} = \gamma_1 \cup \gamma_2$, où γ_1 a q_g pour première extrémité et q_d pour dernière extrémité, et γ_2 a q_d pour première extrémité et q_g pour dernière extrémité. On considère alors dans \mathcal{B}_{sup} le lacet immergé suivant basé en q_g : $\beta = \delta * l_b * \gamma_2$. Ce lacet n'a

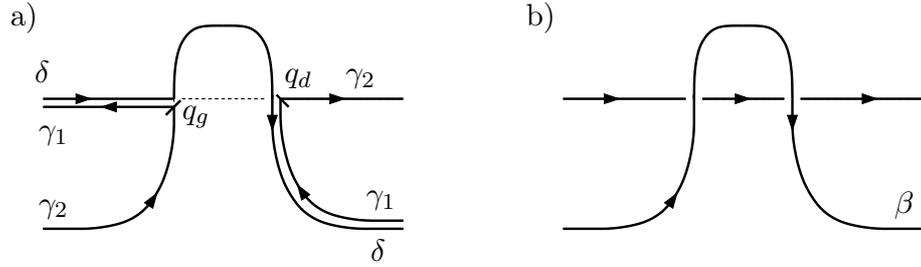


FIG. II.3.5.10 – (B.7)

ni q_g ni q_d comme coin. Ses coins sont ceux de γ_2 et ceux de δ sauf q_d . Ils sont donc tous montants, et d'après le lemme **II.3.5.4**, il y en a au moins un. Ainsi, β est une courbe vrillée simple positive, qui existait déjà avant décollement, ce qui est une contradiction.

(B.8)

Par symétrie, ce cas se traite comme le cas précédent, **(B.7)**.

En conclusion de ces 8 points, le décollement supérieur est adapté.

Les autres cas où le décollement neutre n'est pas adapté se traitent tous de la même manière et sont les suivants :

- γ est positive et passe négativement en \mathbf{a}_g : le décollement inférieur est alors adapté ;
- γ est positive et passe positivement en \mathbf{a}_d : le décollement inférieur est alors adapté ;
- γ est positive et passe négativement en \mathbf{a}_d : le décollement supérieur est alors adapté.

□

II.3.6 Conclusion

Au terme des deux sous-sections précédentes, on a construit une suite de décollements de \mathcal{B} dont aucune surface branchée n'a de courbe vrillée, donc de disque de contact vrillé. Cette suite induit une suite résolvente de décollements de \mathcal{B}'_1 dont la limite inverse est une lamination λ pleinement portée par \mathcal{B}'_1 . On veut montrer que λ est d'holonomie nulle.

Soit Σ une 2-cellule de Y , et $\partial\Sigma \times [0, 1]$ le sous-fibré de $N(\mathcal{B})$ au-dessus de $\partial\Sigma$. Alors $\lambda \cap (\partial\Sigma \times I)$ est une lamination orientée l_Σ de dimension 1 pleinement portée par $\partial\Sigma \times I$, obtenue par limite inverse (au sens de la définition **II.2.5**) des voies ferrées orientées $v_n = \mathcal{B}_n \cap (\partial\Sigma \times I)$.

Si Σ n'est pas bornée, il n'y a pas de problème d'holonomie puisqu'il n'y a pas de retour sur une même fibre. Regardons donc le cas où Σ est bornée.

Définition II.3.6.1 Soit λ une lamination orientée portée par un fibré trivial $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. On appellera *feuille croissante* (resp. *décroissante*) de λ toute feuille reliant dans le sens direct un point $p_1 = (\theta, t_1)$ à un point $p_2 = (\theta, t_2)$, avec $t_1 < t_2$ (resp. $t_1 > t_2$).

Lemme II.3.6.2 La lamination l_Σ est une lamination par des cercles.

Démonstration On note $N(v_n) = N(\mathcal{B}_n) \cap (\partial\Sigma \times I)$, qui est bien un voisinage fibré de v_n , et on pose $L_\Sigma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N(v_n)$. On a alors $l_\Sigma = \partial L_\Sigma$, d'après la définition II.2.5 de limite inverse.

Soit L une feuille croissante de l_Σ . Cette feuille L est une spirale qui a deux cercles limites disjoints : C^+ , limite de L parcourue dans le sens direct, et C^- , limite de L parcourue dans le sens indirect. On note A l'anneau situé entre C^+ et C^- . Regardons $L_\Sigma \cap A$. Par construction, cette intersection ne peut pas être égale à A . Cela signifie que $A \setminus L_\Sigma$ contient un ensemble de la forme $\gamma \times [0, 1]$, où γ est un chemin compact orienté pleinement porté par $\partial\Sigma \times I$, et qui est croissant (cf. figure II.3.6.3).

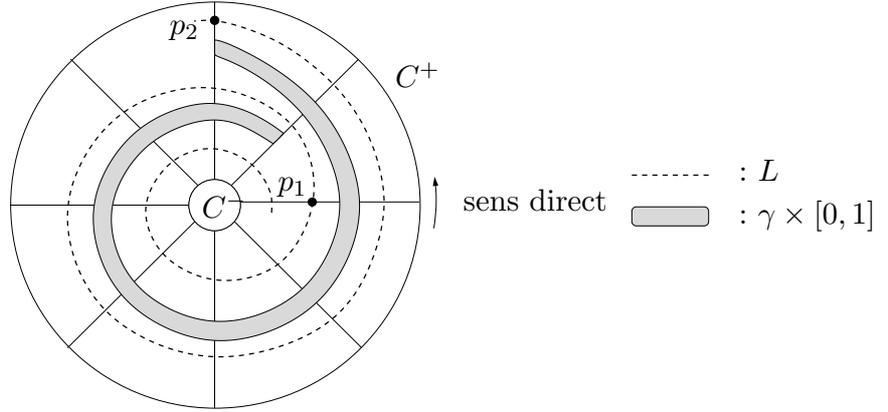


FIG. II.3.6.3 –

Alors, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $(\gamma \times [0, 1]) \cap N(v_n) = \emptyset$. Sinon, il existerait une suite de points (q_n) telle que $q_n \in (\gamma \times [0, 1]) \cap N(v_n)$. Or $(\gamma \times [0, 1]) \cap N(v_n)$ est compact, donc il existerait une sous-suite de (q_n) qui convergerait vers un point q contenu dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} ((\gamma \times [0, 1]) \cap N(v_n))$. Mais ce dernier ensemble est justement $(\gamma \times [0, 1]) \cap L_\Sigma$, qui est vide.

Il est donc impossible de trouver dans v_N un chemin allant de p_1 à p_2 dans le sens indirect, où p_1 et p_2 sont deux points de L comme sur la figure II.3.6.3.

Or puisqu'il existe un chemin direct de v_N allant de p_1 à p_2 et que \mathcal{B}_N n'a pas de disque de contact vrillé, le lemme II.3.3.4 implique qu'il existe aussi

II.4. QUELQUES REMARQUES SUR LA QUESTION DE SAVOIR SI UNE SURFACE BRANCHÉE PORTE OU NON PLEINEMENT UNE LAMINATION

un chemin indirect de v_N allant de p_1 à p_2 . On a donc une contradiction et L est un cercle. Le cas des feuilles décroissantes se traite de la même manière. \square

Ce résultat valant pour toute 2-cellule de Y , il vient finalement que λ est une lamination d'holonomie nulle.

Pour obtenir une lamination pleinement portée par \mathcal{B} , il ne reste plus qu'à "boucher les trous" des feuilles de λ , ces trous étant en fait difféomorphes aux 2-cellules de Y , qui sont toutes des disques ou des demi-plans. Cette opération est possible justement parce que λ est d'holonomie nulle.

Ceci achève la démonstration du théorème II.1.1.

II.4 Quelques remarques sur la question de savoir si une surface branchée porte ou non pleinement une lamination

La proposition II.3.3.8 énonce qu'une condition nécessaire pour qu'une surface branchée porte pleinement une lamination est qu'elle n'ait pas de disque de contact vrillé qui soit un secteur. L'obstruction à cette existence semble être essentiellement reliée au phénomène des disques de contact vrillés. Mais la non existence de disque de contact vrillé n'est pas suffisante, comme l'exemple de la figure II.4.0.1 le montre.

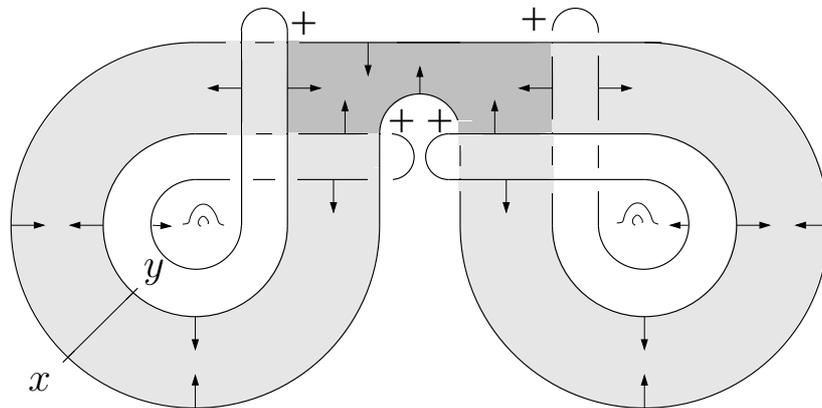


FIG. II.4.0.1 –

Cette figure représente le lieu singulier d'une surface branchée. Cette surface branchée ne peut pas porter pleinement de lamination. En effet si c'était le cas, une lamination pleinement portée λ aurait deux feuilles frontière (i.e. il n'y pas d'autre feuille entre elles et une certaine composante du bord hori-

zontal) passant par $\pi^{-1}([x, y])$ conformément à l'une des situations de la figure **II.4.0.2**.

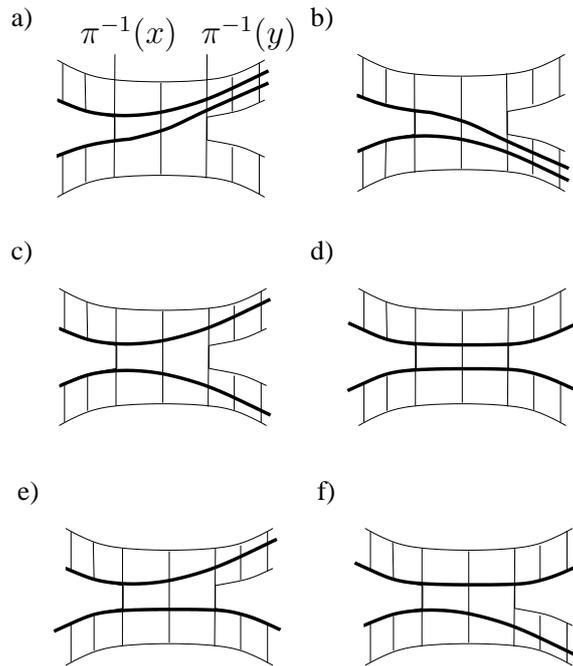


FIG. II.4.0.2 – Trace de deux feuilles frontière de λ

Dans le cas **a)** de cette figure, la surface branchée obtenue après décollement supérieur le long de $[x, y]$ porte toujours pleinement la lamination λ . Dans le cas **b)** seul le décollement inférieur a cette propriété, dans le cas **c)** les trois décollements conviennent, dans le cas **d)** seul le décollement neutre convient, dans le cas **e)** les décollements neutre et supérieur conviennent et dans le cas **f)** les décollements neutre et inférieur conviennent. Pourtant, si l'on effectue n'importe lequel des trois décollements le long de $[x, y]$, un disque de contact vrillé apparaît et la surface branchée obtenue ne peut donc pas porter pleinement de lamination.

En fait, il est possible de donner une définition de ce type de surface de contact vrillée qui donne inmanquablement un disque de contact vrillé quel que soit le décollement effectué le long de certains arcs. La non existence de ce type de surface de contact vrillée pourrait alors être une condition suffisante à l'existence d'une lamination pleinement portée. De manière plus générale, il est naturel de chercher si la non existence de surface de contact vrillée n'est pas une condition suffisante. On pourrait alors chercher à adapter la démonstration du théorème **II.1.1**, c'est-à-dire effectuer une suite infinie de décollements dits adaptés qui ne créerait pas de disque de contact vrillé, ou même de surface de contact vrillée. Il est possible dans ce cas de montrer qu'un décollement le long d'une arête de décollement **a** ne peut pas faire apparaître une surface

II.4. QUELQUES REMARQUES SUR LA QUESTION DE SAVOIR SI UNE SURFACE BRANCHÉE PORTE OU NON PLEINEMENT UNE LAMINATION

de contact vrillée d'un côté de \mathfrak{a} et une autre de même signe de l'autre côté. Il manque par contre un argument pour montrer qu'il existe un décollement ne faisant pas apparaître une surface de contact vrillée de chaque côté mais également ne faisant pas apparaître deux surfaces de contact vrillées de même signe du même côté. La difficulté est que le bord d'une surface de contact vrillée est difficilement contrôlable et peut passer plusieurs fois par l'arête de décollement. Le moyen de contourner cette difficulté est de considérer des courbes vrillées, bordant ou non des surfaces, et d'utiliser le lemme **I.3.9** et le corollaire **I.3.10**.

*CHAPITRE II. UNE CONDITION SUFFISANTE POUR QU'UNE SURFACE
BRANCHÉE PORTE PLEINEMENT UNE LAMINATION*

Chapitre III

Structures de contact portées par des surfaces branchées

Dans tout ce chapitre, V est une variété close de dimension 3, orientée. Son revêtement universel sera noté \tilde{V} .

III.1 Quelques définitions

III.1.1 Voisinages fibrés d'une surface branchée

Définition III.1.1.1 Un *voisinage fibré* de \mathcal{B} est un épaississement de \mathcal{B} muni d'un feuilletage par intervalles. Les feuilles de ce feuilletage sont les *fibres* du voisinage fibré. Pour chaque surface branchée \mathcal{B} il existe deux types de voisinage fibré, notés $N(\mathcal{B})$ et $V(\mathcal{B})$. Le voisinage fibré $N(\mathcal{B})$ est tel que son bord se décompose en un *bord horizontal* $\partial_h N(\mathcal{B})$ transversal aux fibres et un *bord vertical* $\partial_v N(\mathcal{B})$, formé par les portions centrales des fibres au-dessus du lieu singulier (cf. définition I.1.4 du chapitre I). On définit un second voisinage fibré de \mathcal{B} à partir de $N(\mathcal{B})$, noté $V(\mathcal{B})$, où chaque fibre de $\partial_v N(\mathcal{B})$ est écrasée sur un point. Le voisinage fibré $V(\mathcal{B})$ n'a ainsi pas de bord vertical (cf. figure III.1.1.2,b)).

Par la suite, si cela est important, on précisera avec quel type de voisinage fibré on travaille. Lorsqu'il sera question de voisinage fibré sans plus de précision, c'est que les deux points de vue seront utilisables.

Il existe deux projections $N(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ et $V(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ qui envoient les fibres sur leur point base. Ces deux projections seront notées π .

Les notions de “porter (pleinement ou non)” une lamination ou une surface précédemment définies en utilisant $N(\mathcal{B})$ s'adaptent de manière naturelle en utilisant $V(\mathcal{B})$.

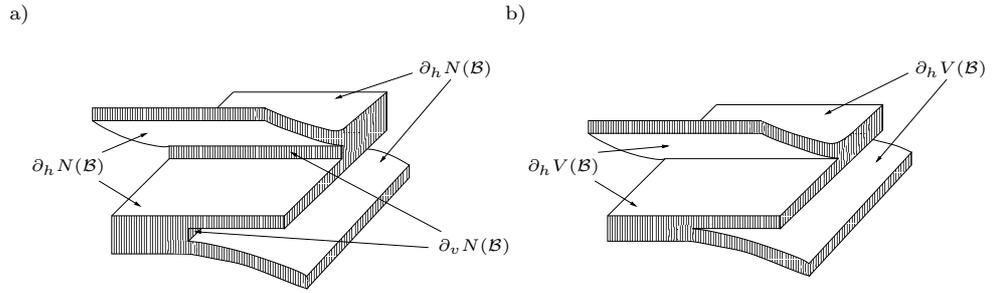


FIG. III.1.1.2 – Voisinages fibrés : a) $N(\mathcal{B})$; b) $V(\mathcal{B})$

III.1.2 Structures de contact et feuilletacts

Définition III.1.2.1 Un champ de plans ξ localement défini par une équation $\alpha = 0$ où α est une 1-forme, est une *structure de contact positive* (resp. un *feuilletact positif*) si $\alpha \wedge d\alpha > 0$ (resp. $\alpha \wedge d\alpha \geq 0$), par rapport à l'orientation de V . C'est une *structure de contact négative* (resp. un *feuilletact négatif*) si $\alpha \wedge d\alpha < 0$ (resp. $\alpha \wedge d\alpha \leq 0$). Un feuilletact est *de contact* en un point si en ce point $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$.

Nous ne considérerons maintenant que des feuilletacts et des structures de contact positifs.

Définition III.1.2.2 Soit ξ une structure de contact. Un *champ de Reeb* pour ξ est un champ de vecteurs transversal à ξ et dont le flot préserve ξ .

Définition III.1.2.3 Soit ξ une structure de contact. Un *disque de vrillage* (cf. [E12] par exemple) \mathcal{D} pour ξ est un disque vérifiant :

- (i) $\partial\mathcal{D}$ est tangent à ξ ;
- (ii) $\mathcal{D} \pitchfork \xi$ le long de $\partial\mathcal{D}$.

III.2 “Porter” et “ σ -porter”

Par la suite, \mathcal{B} désignera toujours une surface branchée.

III.2.1 σ -feuilletacts et σ -contaminations (contact-laminations)

Les définitions suivantes sont celles utilisées dans [OS1] :

Définition III.2.1.1 Un *σ -feuilletact* est un feuilletact ξ tel qu'il existe une surface lisse compacte F de V vérifiant :

- (i) F est partout tangente à ξ ;
- (ii) ξ est de contact en dehors de F ;

- (iii) chaque composante connexe de F a un bord non vide, ou, de manière équivalente, F admet une décomposition en anse consistant en 0- et 1-anses uniquement.

F est alors appelée la *surface intégrale maximale* de ξ .

Définition III.2.1.2 Une σ -déformation est une déformation lisse ξ_t , $t \in [0, 1]$, de champs de plans de V , telle que pour tout t , ξ_t est un σ -feuilletact, et de plus la famille F_t des surfaces intégrales maximales des ξ_t vérifie les points suivants : il existe une famille h_t de difféomorphismes de V , une partition de l'intervalle $[0, 1]$ en un nombre fini de sous-intervalles non triviaux consécutifs I_1, \dots, I_k et une suite $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ de surfaces lisses compactes telles que :

- (i) pour tout $t \in \overset{\circ}{I}_j$, $h_t(F_t) = \Sigma_j$;
- (ii) pour tout $1 \leq j \leq k-1$, les surfaces Σ_j et Σ_{j+1} sont distinctes, et l'une d'elles est contenue dans l'autre ;
- (iii) si $\Sigma_j \subset \Sigma_{j+1}$ (resp. $\Sigma_{j+1} \subset \Sigma_j$), $\overline{\Sigma_{j+1} - \Sigma_j}$ (resp. $\overline{\Sigma_j - \Sigma_{j+1}}$) est une surface compacte de bord lisse par morceaux ;
- (iv) chaque composante connexe de la plus grande des surfaces Σ_j et Σ_{j+1} est obtenue à partir de la plus petite en y attachant des 1-anses et y ajoutant des 0-anses.

Définition III.2.1.3 Soit ξ un champ de plans défini sur un voisinage fibré $V(\mathcal{B})$ de \mathcal{B} . Le champ ξ est une σ -contamination portée par \mathcal{B} si ξ vérifie :

- (i) ξ est transversale aux fibres de $V(\mathcal{B})$;
- (ii) ξ est tangente à $\partial_h V(\mathcal{B})$;
- (iii) ξ est un feuilletact de $V(\mathcal{B})$.

Si de plus la σ -contamination ξ vérifie le point :

- (iii') ξ est une structure de contact sur $Int(N(\mathcal{B}))$,

alors ξ est une σ -contamination pure portée par \mathcal{B} .

Soit F une surface compacte dont toutes les composantes connexes sont de bord non vide. On dit que \mathcal{B} est *obtenue par découpage de V le long de F* si \mathcal{B} vérifie :

- (i) $V \setminus N(\mathcal{B}) = Int(F \times [0, 1])$ et $\partial_h N(\mathcal{B})$ consiste en deux copies de F ;
- (ii) $F \subset V \setminus N(\mathcal{B})$;
- (iii) $\partial F \subset \partial_v N(\mathcal{B})$,

comme sur la figure **III.2.1.4**.

En particulier, si \mathcal{B} est le découpage le long de la surface intégrale maximale d'un σ -feuilletact ξ , \mathcal{B} porte une σ -contamination pure ξ' obtenue directement à partir de ξ .

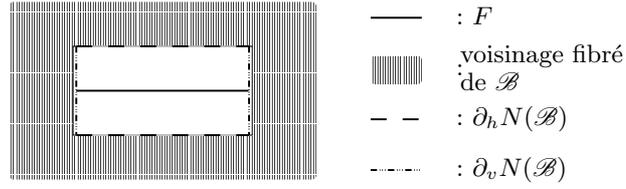


FIG. III.2.1.4 – Découpage le long de F

III.2.2 Structure de contact σ -portée par une surface branchée :

On peut maintenant introduire la première définition de structure de contact portée par une surface branchée :

Définition III.2.2.1 Soit ξ une structure de contact de V . On dit que \mathcal{B} σ -porte ξ si \mathcal{B} porte une σ -contamination pure obtenue par découpage le long de la surface intégrale maximale d'un σ -feuilletact ξ' , lui-même obtenu par σ -déformation de ξ .

Remarque III.2.2.2 Une condition nécessaire sur \mathcal{B} pour qu'elle σ -porte une structure de contact est que le complémentaire $V \setminus N(\mathcal{B})$ soit le produit de $[0, 1]$ et d'une surface compacte dont toutes les composantes connexes soient de bord non vide.

III.2.3 Structure de contact portée par une surface branchée

Les définitions suivantes sont tirées de [Co].

Les champs de Reeb sont utiles pour définir la seconde notion de structure de contact portée par une surface branchée :

Définition III.2.3.1 Soit ξ une structure de contact positive (resp. négative) définie sur un voisinage fibré $N(\mathcal{B})$ de \mathcal{B} . On dit que ξ est une structure de contact *portée* par \mathcal{B} si ξ vérifie :

- (i) ξ est transversale aux fibres de $N(\mathcal{B})$;
- (ii) toute composante de $\partial_h N(\mathcal{B})$ est transversale à un germe de champ de Reeb R et $\partial(\partial_h N(\mathcal{B}))$ est transversal ascendant (resp. descendant) à ξ , pour l'orientation de $\partial(\partial_h N(\mathcal{B}))$ déduite de celle de $\partial_h N(\mathcal{B})$ (coorienté par R) et l'orientation locale de ξ donnée par R .

Remarque III.2.3.2 Si \mathcal{B} porte une structure de contact, alors $\partial_h N(\mathcal{B})$ ne contient aucune surface close. En effet, au voisinage du bord horizontal, ξ est définie par une 1-forme α dont un champ de Reeb est transversal au bord

horizontal. Du fait de la non dégénérescence de $d\alpha$, le théorème de Stokes implique que le bord horizontal ne contient pas de surface close.

Remarque III.2.3.3 Comme cela a déjà été évoqué dans la remarque **I.3.4**, une surface branchée qui porte une structure de contact orientable est orientable.

Définition III.2.3.4 Soit ξ une structure de contact portée par \mathcal{B} . Si de plus toutes les fibres de $N(\mathcal{B})$ sont tangentes à un champ de Reeb pour ξ défini sur tout $N(\mathcal{B})$, alors ξ est définie dans $N(\mathcal{B})$ par une 1-forme α , et on dit que \mathcal{B} porte la forme de contact α .

Remarque III.2.3.5 Si \mathcal{B} porte une forme de contact, elle porte bien sûr une structure de contact, et pour les mêmes raisons que dans la remarque **III.2.3.2**, elle ne porte aucune surface close.

Remarque III.2.3.6 À nouveau, une surface branchée qui porte une forme de contact est orientable.

Définition III.2.3.7 Une surface branchée *porte fortement* une structure de contact ξ positive (resp. négative) si elle est partout transversale à un champ de Reeb R et si son lieu singulier, pour l’orientation provenant de la direction de branchement, est transversal ascendant (resp. descendant) à ξ , pour la coorientation de ξ donnée par R .

Remarque III.2.3.8 Par épaissement le long de R , une surface branchée qui porte fortement une structure de contact ξ porte une forme de contact associée à ξ .

Remarque III.2.3.9 Les définitions **III.2.3.1**, **III.2.3.4** et **III.2.3.7** établissent une hiérarchie dans la notion de “structure de contact portée par une surface branchée”.

Définition III.2.3.10 Soit ξ une structure de contact portée par une surface branchée \mathcal{B} . On dit que ξ est *une structure de contact tendue portée par \mathcal{B}* s’il n’existe pas de disque de vrillage pour ξ dans M , dont le bord soit contenu dans $N(\mathcal{B})$. La même définition peut être appliquée aux formes de contact (resp. structures de contact) portées (resp. fortement portées) par une surface branchée.

En plus des propriétés mentionnées dans les remarques, une surface branchée portant une forme de contact vérifie le fait suivant :

Proposition III.2.3.11 *Une surface branchée portant une forme de contact positive (resp. négative) n’a ni surface de contact ni surface de contact vrillée négative (resp. positive).*

Démonstration On pourra se référer à [Gi] pour les conventions de signe.

Soit α une forme de contact portée par \mathcal{B} . Supposons que α soit positive, le cas où elle est négative se traitant de la même manière. Soit \mathcal{S} une surface de contact ou une surface de contact vrillée négative de \mathcal{B} . L'existence de α implique qu'on a une orientation globale des fibres de $N(\mathcal{B})$, définie par le champ de Reeb de α , et que, quitte à inverser l'orientation de \mathcal{S} , l'orientation de $N(\mathcal{S})$ coïncide partout avec celle des fibres de $N(\mathcal{B})$.

Le bord de \mathcal{S} est lisse par morceaux, et chaque portion lisse qui n'est pas un coin est incluse dans l'intérieur du bord vertical de $N(\mathcal{B})$. La coorientation des composantes connexes de $\partial_h N(\mathcal{B})$ par le champ de Reeb de α donne une orientation du bord de ces composantes connexes, qui a son tour induit une orientation de chaque portion lisse du bord de \mathcal{S} qui n'est pas un coin. Pour cette orientation, chaque composante lisse qui n'est pas un coin est transversale ascendante à α . Or cette orientation est l'opposée de l'orientation du bord de \mathcal{S} , quand \mathcal{S} est également coorientée par le champ de Reeb de α . Les composantes lisses qui ne sont pas des coins sont transversalement descendantes pour α , pour cette dernière coorientation. Or si \mathcal{S} est vrillée elle est négative, donc ses coins sont aussi transversalement descendants pour cette coorientation. Ainsi, le bord de \mathcal{S} pour cette coorientation est transversal descendant à α . Par conséquent, le feuilletage caractéristique de \mathcal{S} est rentrant le long de son bord.

D'autre part, \mathcal{S} étant positivement coorientée par le champ de Reeb de α , $d\alpha$ est une forme d'aire positive sur \mathcal{S} , donc $\int_{\mathcal{S}} d\alpha > 0$, donc d'après la formule de Stokes, $\int_{\partial\mathcal{S}} \alpha > 0$. Or le bord de \mathcal{S} descendant pour α , donc $\int_{\partial\mathcal{S}} \alpha \leq 0$, ce qui constitue une contradiction. \square

III.3 Exemple d'une surface branchée portant une forme de contact positive et une forme de contact négative

Soit Σ_3 la surface close orientable de genre 3. On considère le produit $\mathcal{P} = \Sigma_3 \times \mathbb{S}^1$. On considère également les trois anneaux disjoints A_1 , A_2 et A_3 de Σ_3 , qui sont des voisinages de trois courbes fermées orientées c_1 , c_2 et c_3 , comme sur la figure III.3.0.1. Cette figure est invariante par rotation d'angle $\pi/3$.

Soient θ_1 , θ_2 et θ_3 trois points différents de \mathbb{S}^1 . On considère alors, pour $i = 1, 2, 3$, la surface à bord plongée dans \mathcal{P} , $\mathcal{S}_i = (\Sigma_3 \times \{\theta_i\}) \setminus A_i$.

Les \mathcal{S}_i sont difféomorphes à la même surface Σ , qui est la surface close orientable de genre 2 privée de deux disques disjoints.

Sur cette surface, on peut définir quatre courbes fermées disjointes, comme sur la figure III.3.0.2 : γ et δ , qui sont les composantes de bord de Σ , et ρ^γ

III.3. EXEMPLE D'UNE SURFACE BRANCHÉE PORTANT UNE FORME DE CONTACT POSITIVE ET UNE FORME DE CONTACT NÉGATIVE

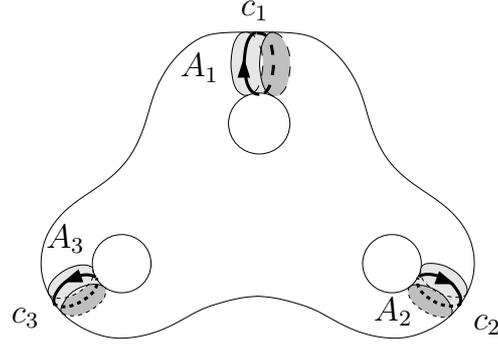


FIG. III.3.0.1 – Σ_3

et ρ^δ . On peut les orienter de sorte que, pour tout i , le plongement naturel φ_i de Σ dans \mathcal{S}_i identifie γ avec une courbe homotope à c_i , δ avec une courbe homotope à $-c_i$, ρ^γ avec une courbe homotope à c_{i-1} et ρ^δ avec une courbe homotope à $-c_{i+1}$. La cinquième courbe η de la figure III.3.0.2 sera utilisée plus loin.

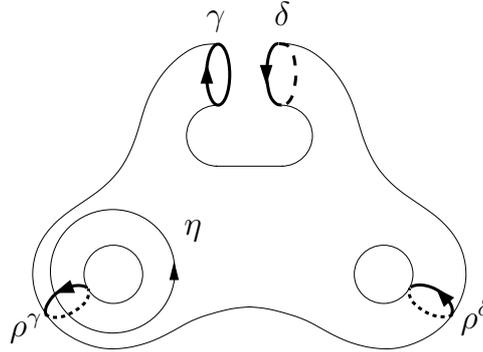


FIG. III.3.0.2 – Σ

Nous allons maintenant construire une 1-forme particulière β sur Σ , qui est la primitive d'une forme d'aire $d\beta$ de Σ . On suit pour cela une construction de [CH]. On considère un 1-squelette K de Σ de la manière suivante : on définit d'abord β autour d'un point p de l'intérieur de Σ , de sorte que p soit une singularité elliptique positive. Par exemple, $\beta = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$ près de $(0, 0)$. On attache alors cinq 1-anses, i.e. on prend cinq singularités hyperboliques positives (par exemple $\beta = 2xdy + ydx$ près de $(0, 0)$) et on connecte leurs séparatrices stables à p . L'union de ces six singularités et des dix séparatrices stables est le squelette K . Un voisinage de K est Σ , et si ce voisinage est suffisamment petit, le 1-feuilletage $\mathcal{F} = \ker\beta$ est transversal à $\partial\Sigma$, et pointe vers l'extérieur. Ce squelette peut être choisi de sorte que γ , δ , ρ^γ et ρ^δ sont toutes

positivement ou toutes négativement coorientées par β (cf. figure III.3.0.3).

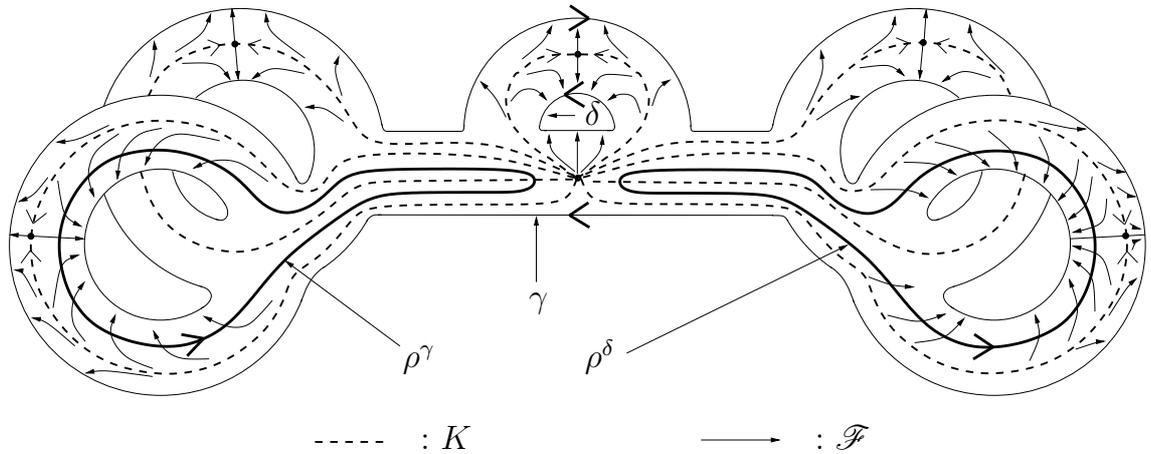


FIG. III.3.0.3 – 1-squelette de Σ

Étudions maintenant les β -longueurs des courbes fermées de Σ . Puisque β vaut zéro sur K , on peut choisir δ et ρ^δ aussi proche de K que l'on veut, et ainsi rendre leurs longueurs égales entre elles et aussi petites que l'on veut.

Si ρ^γ est plus courte que γ , on peut composer ρ^γ avec $\eta^n \circ \eta^{-n}$, pour n'importe quel entier n , comme sur la figure III.3.0.4 avec $n = 2$.

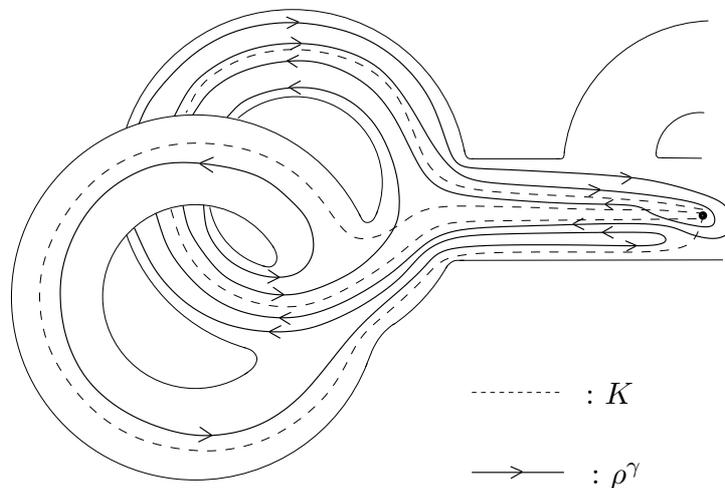


FIG. III.3.0.4 –

Après cette opération, la classe d'homotopie de ρ^γ reste la même, et ρ^γ est encore transversale à \mathcal{F} et disjointe de γ , δ et ρ^δ . On peut ainsi rendre ρ^γ aussi longue que l'on veut, et en particulier rendre sa longueur égale à celle de γ .

Finalement, la figure III.3.0.5 montre \mathcal{F} sur Σ près de γ , δ , ρ^δ et ρ^γ .

III.3. EXEMPLE D'UNE SURFACE BRANCHÉE PORTANT UNE FORME DE CONTACT POSITIVE ET UNE FORME DE CONTACT NÉGATIVE

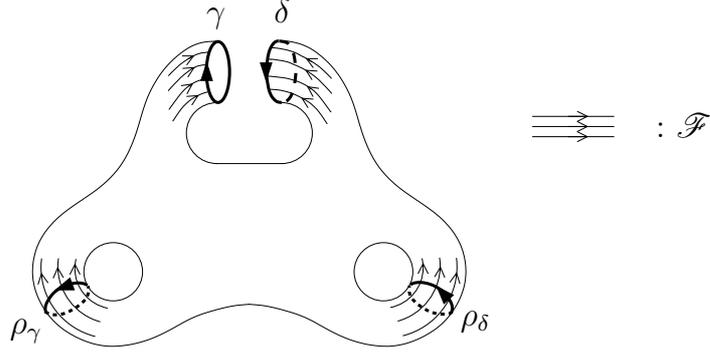


FIG. III.3.0.5 – \mathcal{F} et Σ

La 1-forme β et les courbes γ , ρ^γ , δ et ρ^δ sont envoyées par φ_i sur une 1-forme β_i et des courbes disjointes γ_i , ρ_i^γ , δ_i et ρ_i^δ dans \mathcal{S}_i . Soit ε un réel strictement positif, petit. On considère le produit $\mathcal{P}_i = \mathcal{S}_i \times]\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon[$, plongé dans \mathcal{P} . Soit t la coordonnée sur $]\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon[$. Puisque β_i est la primitive d'une forme d'aire, $\alpha_i^+ = \beta_i + dt$ est une forme de contact positive, dont le champ de Reeb R_i^+ est $\frac{\partial}{\partial t}$. De même, $\alpha_i^- = -\beta_i + dt$ est une forme de contact négative, dont le champ de Reeb R_i^- est $\frac{\partial}{\partial t} = R_i^+$.

D'après le lemme 6.2 de [CH], il existe une isotopie qui conjugue β près de γ (resp. δ) avec β près de ρ^γ (resp. ρ^δ). Ainsi, il est possible de recoller un voisinage de γ_i dans \mathcal{S}_i avec un voisinage de ρ_{i+1}^γ dans \mathcal{S}_{i+1} , par un produit qui est topologiquement $\gamma_i \times [\theta_i + \varepsilon, \theta_{i+1} - \varepsilon]$. De la même manière, il est possible de recoller un voisinage de δ_i dans \mathcal{S}_i avec un voisinage de ρ_{i-1}^δ dans \mathcal{S}_{i-1} , par un produit qui est topologiquement $\delta_i \times [\theta_{i-1} + \varepsilon, \theta_i - \varepsilon]$ (cf. figure III.3.0.6).

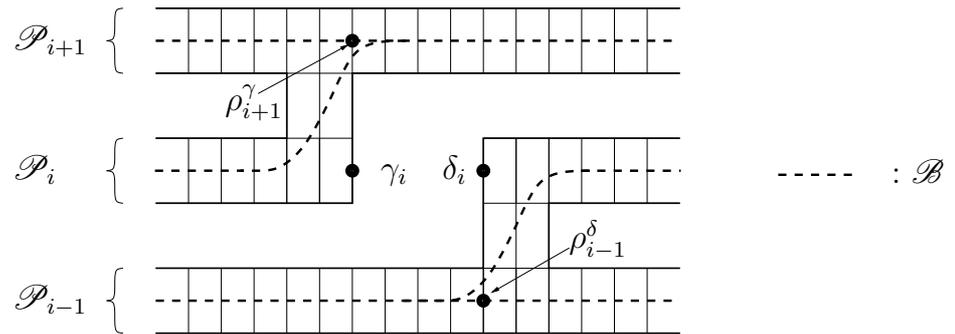


FIG. III.3.0.6 – $N(\mathcal{B})$

Les formes de contact α_i^+ et α_i^- peuvent ainsi être étendues sur ce produit, et recollées à $\alpha_{i\pm 1}^+$ et $\alpha_{i\pm 1}^-$. Le résultat est le voisinage fibré $N(\mathcal{B})$ d'une certaine surface branchée \mathcal{B} , dont les fibres sont tangentes aux champs de Reeb R^+ et R^- d'une forme de contact positive et d'une forme de contact négative,

définies sur $N(\mathcal{B})$. Puisque \mathcal{F} pointe vers l'extérieur de Σ , $\partial(\partial_h N(\mathcal{B}))$ est transversalement ascendant (resp. descendant) pour R^+ (resp. R^-). Par conséquent, \mathcal{B} porte une forme de contact positive et une forme de contact négative

La surface branchée \mathcal{B} est représentée figure III.3.0.7.

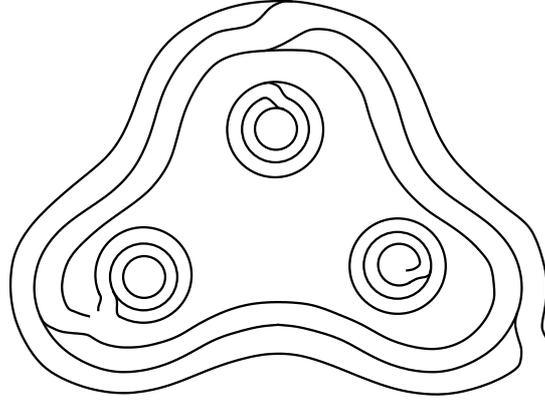


FIG. III.3.0.7 – \mathcal{B}

Remarque III.3.0.8 Puisque \mathcal{B} porte une forme de contact positive et une forme de contact négative, elle vérifie les points suivants :

- (i) \mathcal{B} n'a pas de surfaces de contact vrillée plongée ;
- (ii) \mathcal{B} n'a pas de surfaces de contact plongée ;
- (iii) \mathcal{B} ne porte pas de surface close ;
- (iv) \mathcal{B} n'a pas de monogone.

Bien sûr ces points peuvent être vérifiés directement sur la surface branchée sans utiliser la théorie des structures de contact. Le point (i) est particulièrement évident puisque le lieu singulier de \mathcal{B} n'a pas de point double.

III.4 “ σ -porter” implique “porter”

Les résultats de [OS1] et [OS2] sont énoncés en utilisant des structures de contact σ -portées par des surfaces branchées. Dans ce texte, on s'intéresse par contre aux structures de contact portées par des surfaces branchées. La proposition suivante permet de conserver certains résultats de [OS1] et [OS2] dans le cadre des structures de contact portées.

Commençons ce paragraphe par un lemme utile :

Lemme III.4.0.1 *Soit D un disque qui est une composante connexe de la surface intégrale maximale d'un σ -feuilleté ξ de V . Alors il existe un disque*

\tilde{D} contenant D et un produit $\tilde{D} \times [0, 1]$ tels que ξ est une structure de contact tendue dans $\tilde{D} \times]0, 1]$.

Démonstration Soit O un point dans l’intérieur de D . Soit \tilde{D}_0 un disque de V contenant D . On considère des coordonnées polaires (r, θ) sur \tilde{D}_0 pour lesquelles $D = \{r \leq 1\}$. Soit $\tilde{D}_0 \times [0, 1]$ un épaississement de \tilde{D}_0 , où $\tilde{D}_0 \times \{0\} = \tilde{D}_0$. Examinons les feuilletages caractéristiques des plans $P_K = \{\theta = K\} \times [0, 1]$, pour $K \in [0, 2\pi]$. Puisque ξ est tangent à D , il existe un $R > 1$ et un $T > 0$ tels que, pour tout K , le feuilletage caractéristique de $P_K \cap \{r \leq R\} \cap [0, T]$ est un feuilletage par des droites transversales aux droites $\{x\} \times [0, 1]$, pour $x \in \tilde{D}_0$, comme sur la figure **III.4.0.2**.

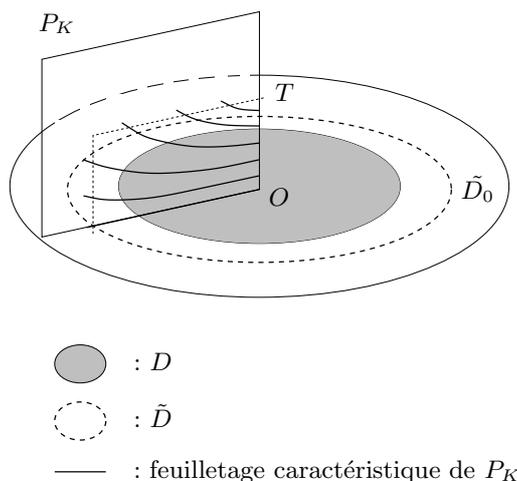


FIG. III.4.0.2 –

Posons $\tilde{D} = \{r \leq R\} \times \{0\}$. On étend alors les coordonnées polaires de \tilde{D} en des coordonnées cylindriques (r, θ, z) , $r \leq R$, $z \leq T$, telles que :

- les droites $\{r = cte, \theta = cte\}$ sont les droites $\{x\} \times [0, 1]$, pour $x \in \tilde{D}$;
- le point $\{r = 0, z = T\}$ pour ces coordonnées cylindriques est le point $O \times \{T\}$ dans le produit $\tilde{D}_0 \times [0, 1]$ précédent ;
- les demi-droites $\{z = cte, \theta = cte\}$ sont les demi-droites des feuilletages caractéristiques des P_K .

Avec ces coordonnées, les disques $\{z = cte\}$ ont pour feuilletage caractéristique un feuilletage radial, et sur $\{0 < z \leq T\}$, ξ a pour équation $dz - f d\theta$. Comme ξ est une structure de contact positive sur $\{0 < z \leq T\}$, f vérifie :

- $f = r^2 h$ pour une certaine fonction lisse $h > 0$;
- $\frac{\partial f}{\partial r} > 0$ pour $r > 0$.

Le changement de coordonnées $(r, \theta, z) \mapsto (\sqrt{f}, \theta, z)$ donne alors des coordonnées cylindriques dans lesquelles ξ a pour équation $dz - r^2 d\theta$, qui est l’équation de la structure de contact standard sur \mathbb{S}^3 , et cette structure de contact est tendue.

□

Proposition III.4.0.3 *Soit \mathcal{B} une surface branchée σ -portant une structure de contact ξ , pour un voisinage fibré $V(\mathcal{B})$. Alors \mathcal{B} porte une structure de contact ξ' .*

Démonstration Il existe une σ -déformation de ξ en un σ -feuilletage ξ_1 de surface intégrale maximale F . Notons que par définition, le bord de chaque composante connexe de F est non vide. Le complémentaire de $V(\mathcal{B})$ est donc de la forme $F \times [0, 1]$, et $\partial_h V(\mathcal{B})$ ne contient donc aucune surface close. Pour simplifier les notations, supposons que F soit connexe. Si ce n'est pas le cas, il suffira d'appliquer la construction qui suit à chaque composante connexe. On choisit les diverses orientations pour que F et ξ_1 soient tous deux coorientés par les fibres de $V(\mathcal{B})$.

Le bord de F est une union de cercles disjoints. Soit l une composante de ∂F . Considérons un voisinage tubulaire de l dans V de la forme $\mathbb{D}^2 \times l$, tel que chaque disque $\mathbb{D}^2 \times \{x\}$ pour x dans l , est tangent aux fibres de $V(\mathcal{B})$, qui le feuilletent donc. On notera h_1 ce feuilletage. Le disque $\mathbb{D}^2 \times \{x\}$ comporte un deuxième feuilletage, h_2 , transversal à h_1 : c'est le feuilletage caractéristique induit par ξ_1 , qui est un feuilletage non singulier. On oriente h_2 de telle sorte qu'en chaque point de l , il pointe vers l'extérieur de F . Au voisinage de chaque point de l , on considère un système de coordonnées (x, y, z) : h_1 dirige $\frac{\partial}{\partial z}$, h_2 dirige $\frac{\partial}{\partial y}$, et $\frac{\partial}{\partial x}$ est dirigé par le cercle $\{t\} \times l$ pour $t \in \mathbb{D}^2$. Dans ces coordonnées, ξ_1 a des équations locales de la forme $dz - g(x, y, z)dx = 0$ avec $g = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ en tout point de F , et $\frac{\partial g}{\partial y} > 0$ ailleurs.

Observons maintenant l'anneau $A_l = \{z = 0, y_1 > y > y_2 > 0\}$, pour $y_1 > y_2 > 0$ fixés. Puisque sur cet anneau on a $\frac{\partial g}{\partial y} > 0$, pour $|y_1|$ suffisamment petit, le feuilletage caractéristique de A_l est non singulier. De plus, par construction de A_l , son feuilletage caractéristique est un feuilletage par intervalles. D'après le choix des orientations, il est rentrant le long de la composante de bord $\{y = y_2\}$ et sortant le long de la composante de bord $\{y = y_1\}$. L'angle entre ξ_1 et A_l le long de la composante de bord $\{y = y_1\}$ est minoré par un certain $\varepsilon > 0$. Il existe donc deux anneaux \mathcal{C}^∞ -proches de A_l , $A_l^+ = \{z = z^+ > 0, y_1 > y > y_2 > 0\}$ et $A_l^- = \{z = z^- < 0, y_1 > y > y_2 > 0\}$, dont les feuilletages caractéristiques ont la même forme que celui de A_l , et pour lesquels l'angle entre ξ_1 et A_l^\pm est minoré le long de la composante de bord $\{y = y_1\}$ par une constante strictement positive, toujours notée ε .

Pour chaque composante de bord de F , on a deux tels anneaux. Il existe des anneaux fins a_l^+ (resp. a_l^-), disjoints de F , qui prolongent de manière lisse les A_l^+ (resp. A_l^-) du côté $\{y = y_2\}$ et dont le feuilletage caractéristique est aussi un feuilletage par segments. Puisque ξ_1 est de contact sur l'union des A_l^\pm et des a_l^\pm , ses plans tournent dans le sens positif le long des feuilletages caractéristiques de ces anneaux. Ceci garantit que le long des a_l^\pm , l'angle entre ξ_1 et a_l^\pm est majoré par une constante μ qui vérifie : $0 < \varepsilon < \mu$.

On prolonge enfin l'union des A_l^+ (resp. A_l^-) en une surface F^+ (resp. F^-)

disjointe de F , transversale aux fibres de $V(\mathcal{B})$, convexe (au sens contact), et qui contient les a_l^+ (resp. a_l^-). Notons $f^\pm = F^\pm - \bigcup_l A_l^\pm$. Alors les a_l^\pm sont des anneaux contenus dans f^\pm qui longent ses composantes de bord, comme sur la figure III.4.0.4.

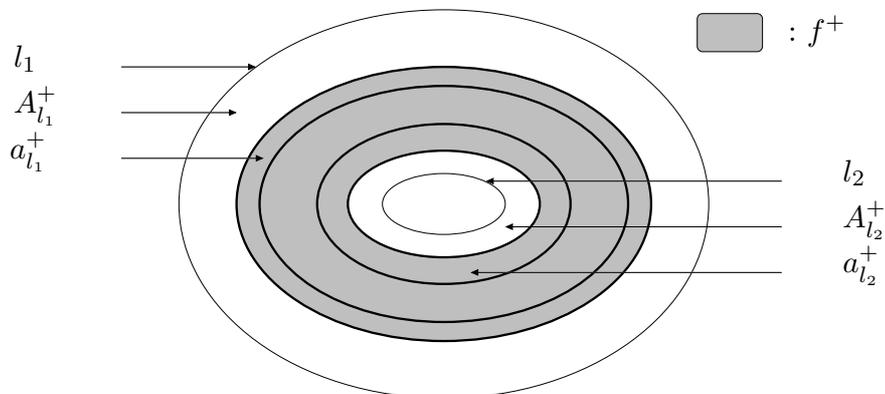


FIG. III.4.0.4 –

Ainsi, F^+ et F^- sont deux copies de F , dont les bords se projettent l’un sur l’autre suivant les fibres de $V(\mathcal{B})$. On a donc un voisinage fibré de \mathcal{B} , $N(\mathcal{B})$, dont le bord horizontal est l’union de F^+ et F^- . On considère alors la structure de contact ξ_1 restreinte à $N(\mathcal{B})$.

Il faut alors distinguer deux cas :

★ la caractéristique d’Euler de F est 1, donc F est un disque :

D’après le lemme III.4.0.1, le feuilletage caractéristique de F^+ n’a pas d’orbite périodique puisque F^+ est simplement connexe. De plus, toutes ses singularités sont positives, et il est sortant. Il dilate ainsi une certaine aire sur F^+ . La courbe de découpage de F^+ , en tant que surface convexe, est donc vide, et F^+ est bien transversale à un champ de Reeb. Le feuilletage caractéristique étant sortant, le bord de F^+ est ascendant. Il en est de même pour F^- .

★★ la caractéristique d’Euler de F est négative ou nulle :

Contrairement au cas précédent, f^+ n’est pas simplement connexe. Son feuilletage caractéristique peut donc avoir des orbites périodiques, mais non contractiles d’après le lemme III.4.0.1. Toutes les singularités du feuilletage caractéristique sont positives, et sont génériquement d’indice ± 1 . On veut alors utiliser la méthode d’E. Giroux, page 28 de [Gi2]. Pour cela il faut modifier le feuilletage caractéristique de f^+ , grâce à la convexité de f^+ , pour obtenir un feuilletage caractéristique dont toutes les singularités sont des selles.

S’il y a une singularité elliptique (d’indice +1), notée e_1 , et qu’une des trajectoires qui en sont issues aboutit à une autre singularité, cette dernière ne

peut pas être elliptique. En effet, elle serait attractrice et donc négative. C'est donc une selle. D'après le lemme d'élimination d'E. Giroux ([Gi1]), on peut éliminer ces deux singularités.

Supposons qu'aucune des trajectoires n'aboutisse à une autre singularité. Alors soit toutes ces trajectoires aboutissent à une orbite attractrice, soit elles sortent toutes par le bord de f^+ . Ce dernier cas n'est pas possible car f^+ est connexe et n'est pas un disque. Mais le premier cas n'est pas possible non plus, car alors cette orbite serait contractile, ce qui est une contradiction.

Toutes ces modifications ne sont que \mathcal{C}^0 et peuvent donc faire perdre la transversalité aux fibres de $N(\mathcal{B})$. Par contre, la transversalité au champ de vecteurs de contact garantissant la convexité de f^+ est maintenue. Une interpolation entre ces deux champs de vecteurs là où ont lieu les modifications donne un nouveau voisinage fibré toujours noté $N(\mathcal{B})$, auquel f^+ est transversale.

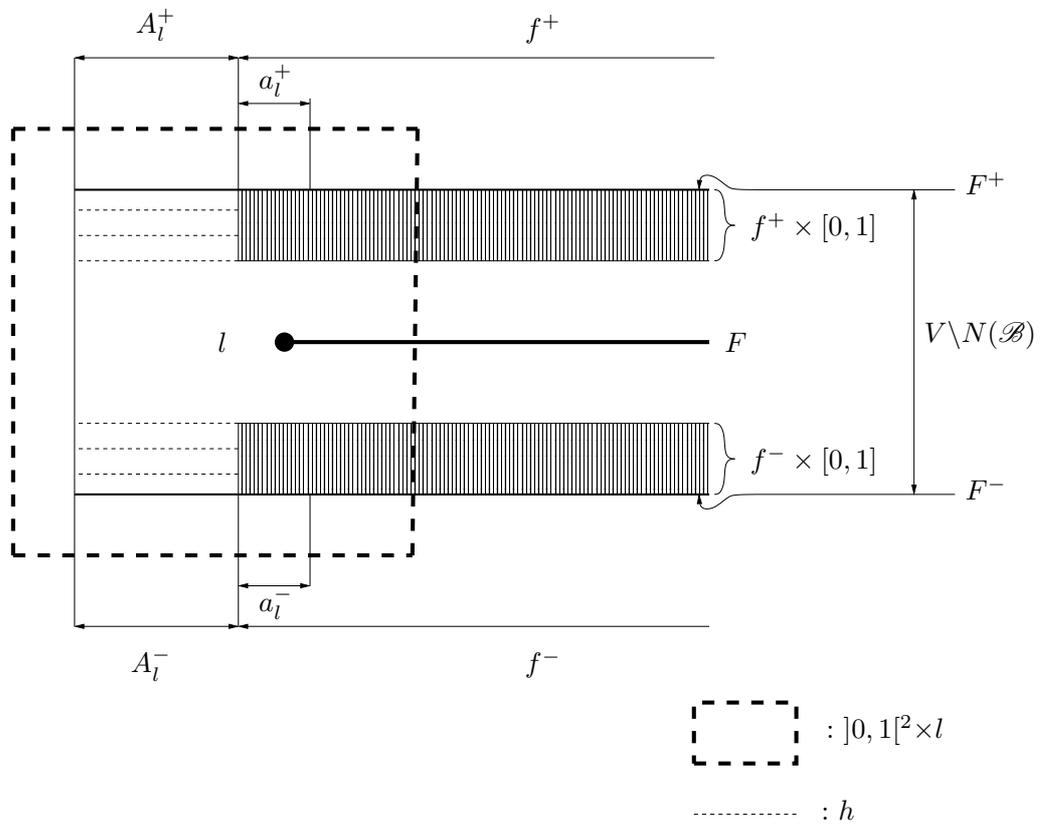


FIG. III.4.0.5 –

On utilise maintenant un feuilletage \mathcal{H}^+ sur f^+ , qui est sortant, dilatant pour une certaine aire, et dont les singularités sont des selles positives. En utilisant la méthode d'E. Giroux, page 28 de [Gi2], il existe un prolongement de ξ_1 à $f^+ \times [0, 1] \subset V \setminus N(\mathcal{B})$, dont le feuilletage caractéristique sur $f^+ \times \{1\}$ est justement \mathcal{H}^+ . De plus, on peut étendre ξ_1 de manière à ce que sa variation

en norme $\| \cdot \|_\infty$ soit aussi petite que l'on veut, ce qui assure que l'angle entre ξ_1 et chaque $a_t^+ \times \{t\}$, pour $t \in [0, 1]$, reste plus petit qu'une constante strictement positive, toujours notée μ , et strictement plus grand que ε .

On fait le même travail sur f^- .

Il reste maintenant à combler le trou entre $\partial f^\pm \times [0, 1]$ et $\partial F^\pm \times [0, 1]$ pour vérifier les conditions d'une structure de contact portée par \mathcal{B} . Considérons un voisinage de ∂F , de la forme $]0, 1[^2 \times \partial F$, contenant les A_t^+ et les A_t^- , ainsi que les fibres de $V(\mathcal{B})$ qui rejoignent le bord de F^+ à celui de F^- (voire figure III.4.0.5). On peut le choisir de telle sorte que la trace de chaque fibre $]0, 1[^2 \times \{x\}$, $x \in \partial F$, sur A_t^\pm , soit le feuilletage caractéristique $\xi_1 A_t^\pm$. Chaque fibre a ainsi un feuilletage caractéristique qui n'est défini qu'au voisinage de son bord privé de la partie entre $f^+ \times \{1\}$ et $f^- \times \{1\}$. Ce feuilletage caractéristique est tangent aux bords horizontaux (les A_t^\pm), et transversal aux bords verticaux. On peut le prolonger en un feuilletage par intervalles h sur toute la fibre. On étend ensuite ξ_1 sur toute la fibre, de telle sorte que h soit un feuilletage legendrien. Cela est possible car le long de $\partial f^\pm \times [0, 1]$ l'angle entre ξ_1 et les sections $f^\pm \times \{t\}$ est majoré par μ , et de l'autre côté, cet angle est minoré par ε . On peut donc faire tourner ξ_1 dans le sens positif le long de h , ce qui donne bien une structure de contact.

Finalement, on a une structure de contact définie sur un nouveau voisinage fibré de \mathcal{B} , noté $N(\mathcal{B})'$, dont le bord horizontal est l'union de deux copies de F , l'une étant un prolongement de $f^+ \times \{1\}$, l'autre un prolongement de $f^- \times \{1\}$. Sur ces deux surfaces, le feuilletage caractéristique de ξ_1 a par construction la même propriété que sur $f^\pm \times \{1\}$, à savoir qu'il est dilatant, sortant et à singularités toutes positives. Ces deux surfaces sont donc convexes, et donc transversales à un germe de champ de contact, et ces germes ne sont jamais tangents à ξ_1 , donc ce sont des germes de champ de Reeb, ce qui achève la démonstration. □

III.5 Un critère pour porter deux structures de contact

Énonçons d'abord un résultat de [Co] :

Proposition III.5.0.1 *Soit α une forme de contact définie sur V . On suppose que V est close. Alors il existe une surface branchée qui porte la forme α .*

La démonstration de cette proposition s'inspire de celle du théorème 1.9 de [OS1]. Cette démonstration elle-même utilise une méthode de construction d'une surface branchée à partir d'un feuilletage, décrite dans les préliminaires de [GS]. En utilisant cette même méthode, on montre le résultat suivant :

Définition III.5.0.2 Soit \mathcal{B} une surface branchée de V . Une *bulle triviale* est une composante de $V \setminus N(\mathcal{B})$ de la forme $\mathbb{D}^2 \times I$, où $\partial\mathbb{D}^2 \times I$ est dans $\partial_v N(\mathcal{B})$ et $\mathbb{D}^2 \times \{0\}$ et $\mathbb{D}^2 \times \{1\}$ sont dans $\partial_h N(\mathcal{B})$.

Théorème III.5.0.3 Soient ξ_1 et ξ_2 deux structures de contact orientables n'ayant que des contacts positifs, c'est-à-dire que les coorientations de ξ_1 et ξ_2 coïncident là où ξ_1 et ξ_2 sont tangentes. Alors il existe une isotopie ξ'_1 de ξ_1 et une isotopie ξ'_2 de ξ_2 qui sont toutes deux portées par une surface branchée \mathcal{B} dont le complémentaire d'un voisinage fibré dans V est une union de bulles triviales. En particulier, ce complémentaire est irréductible.

Démonstration Puisque ξ_1 et ξ_2 n'ont que des contacts positifs, il existe un feuilletage non singulier \mathcal{F} de dimension 1, transversal à ξ_1 et ξ_2 .

Par compacité de V , il existe une famille finie de disques disjoints $(D_i)_{i=1\dots n}$ transversale à \mathcal{F} et qui coupent les feuilles de \mathcal{F} en intervalles fermés.

On note κ le feuilletage $\xi_1 \cap \xi_2$ singulier, de dimension 1. Les feuilletages \mathcal{F} et κ sont transversaux. Pour ε_1 un réel strictement positif, on considère un produit $P_i = D_i \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ tel que $D_i \times \{0\} = D_i$ et les intervalles $\{point\} \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ sont tangents à \mathcal{F} . Les disques de la famille (D_i) peuvent être choisis génériques et suffisamment petits et nombreux, et ε_1 peut être choisi suffisamment petit pour que l'on ait :

- (i) pour chaque i , le cylindre P_i est contenu dans une carte feuilletée \mathcal{C}_i de κ ;
- (ii) les cartes feuilletées \mathcal{C}_i sont deux à deux disjointes.

Chaque carte \mathcal{C}_i est munie de coordonnées (x_i, y_i, z_i) avec $-1 \leq x_i \leq 1$, $-1 \leq y_i \leq 1$ et $-1 \leq z_i \leq 1$, dans lesquelles les feuilles de κ sont de la forme $\{y_i = \text{constante}_1, z_i = \text{constante}_2\}$. Les structures de contact ξ_1 et ξ_2 étant tangentes à κ , elles admettent respectivement pour équation dans \mathcal{C}_i : $dz_i - f_i(x_i, y_i, z_i)dy_i = 0$ et $dz_i - g_i(x_i, y_i, z_i)dy_i = 0$, avec $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} > 0$ et $\frac{\partial g_i}{\partial x_i} < 0$. On réalise alors une isotopie de f_i en une fonction F_i vérifiant :

- (i) $\frac{\partial F_i}{\partial x_i} > 0$;
- (ii) il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que F_i et f_i coïncident sur $\mathcal{C}_i \setminus]-1 + \varepsilon_2/2, 1 - \varepsilon_2/2[$;
- (iii) il existe $\varepsilon_3 > 0$ tel que $\frac{\partial F_i}{\partial x_i} < \varepsilon_3$ sur $] -1 + \varepsilon_2, 1 - \varepsilon_2[$.

La structure de contact $\xi'_1 = \text{Ker}(dz_i - F_i(x_i, y_i, z_i)dy_i)$ est isotope à ξ_1 . Le point (iii) implique que ξ'_1 peut être rendue aussi proche que l'on veut en norme \mathcal{C}^∞ d'un feuilletage \mathcal{A}_i d'équation $dz_i - a_i dy_i = 0$, a_i étant une constante, sur $] -1 + \varepsilon_2, 1 - \varepsilon_2[$. Toute la rotation du champ de plans ξ_1 est ainsi "repoussée" dans $\mathcal{C}_i \setminus]-1 + \varepsilon_2, 1 - \varepsilon_2[$.

De même, il existe une structure de contact ξ'_2 isotope à ξ_2 et aussi proche que l'on veut en norme \mathcal{C}^∞ d'un feuilletage \mathcal{B}_i d'équation $dz_i - b_i dy_i = 0$ sur $] -1 + \varepsilon_2, 1 - \varepsilon_2[$. On suppose enfin que les P_i et les \mathcal{C}_i sont suffisamment petits pour que \mathcal{A}_i et \mathcal{B}_i soient transversales à \mathcal{F} . Ainsi, ξ'_1 et ξ'_2 sont toujours transversales à \mathcal{F} .

Il existe alors un nombre fini de disques d_i^j deux à deux disjoints et vérifiant :

- (i) chaque d_i^j est inclus dans une feuille du feuilletage \mathcal{A}_i de $] -1 + \varepsilon_2, 1 - \varepsilon_2[$;
- (ii) toute feuille de \mathcal{F} passant par P_i est coupée par au moins un des d_i^j .

Le point (ii) garantit que l'ensemble des d_i^j coupe les feuilles de \mathcal{F} en intervalles.

Il existe alors une isotopie de \mathcal{C}_i dans \mathcal{C}_i , fixe dans un voisinage du bord, qui rend les feuilles de \mathcal{B}_i aussi \mathcal{C}^∞ -proche que l'on veut des d_i^j , dans un voisinage des d_i^j , tout en préservant la transversalité à \mathcal{F} . La figure III.5.0.4 montre l'image des feuilles de \mathcal{B}_i après une telle isotopie, dans un plan $x_i = \text{constante}$.

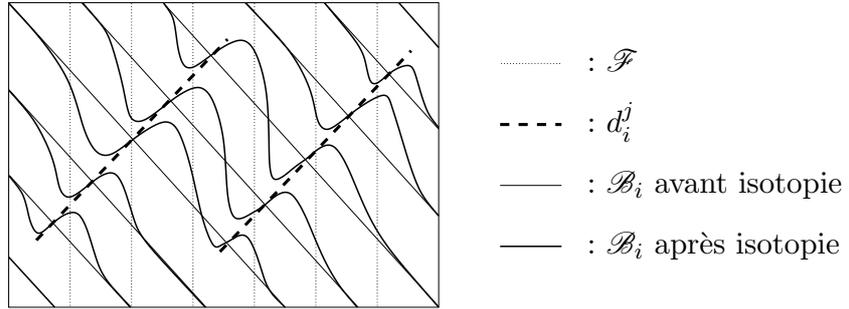


FIG. III.5.0.4 –

Ainsi, cette isotopie envoie ξ'_2 sur une structure de contact toujours notée ξ'_2 , aussi \mathcal{C}^∞ -proche que l'on veut des d_i^j , dans un voisinage des d_i^j .

Autour de chaque d_i^j on considère des coordonnées cylindriques $(r_i^j, \theta_i^j, t_i^j)$, $r_i^j \in [0, 1]$ et $t \in [-1, 1]$, telles que $\frac{\partial}{\partial t_i^j}$ soit tangent à \mathcal{F} et que $d_i^j = \{t_i^j = 0\}$. Regardons le feuilletage caractéristique de ξ'_1 le long d'un carré de la forme $\{\theta_i^j = \text{constante}\}$. Dans un voisinage de d_i^j , il s'agit d'un feuilletage en segments presque horizontaux, car ξ'_1 est \mathcal{C}^∞ -proche de d_i^j . Ainsi, pour $\varepsilon_4 > 0$ suffisamment petit, ce feuilletage caractéristique comporte un segment allant du point $(0, 0, \varepsilon_4)$ à un point du segment $\{\theta_i^j = \text{constante et } r = 1\}$ (cf. figure III.5.0.5).

L'ensemble de ces segments quand θ_i^j parcourt $[0, 2\pi]$ forme un disque $d_{i,1}^{j,+}$ transversal à \mathcal{F} . Le feuilletage caractéristique de ξ'_1 sur $d_{i,1}^{j,+}$ est un feuilletage ayant en son centre une singularité elliptique positive, et rentrant le long du bord. De même, ce feuilletage caractéristique comporte un segment allant du point $(0, 0, -\varepsilon_4)$ à un point du segment $\{\theta_i^j = \text{constante et } r = 1\}$, et l'ensemble de ces segments quand θ_i^j parcourt $[0, 2\pi]$ forme un disque $d_{i,1}^{j,-}$ transversal à \mathcal{F} . Le feuilletage caractéristique de ξ'_1 sur $d_{i,1}^{j,-}$ est un feuilletage ayant en son centre une singularité elliptique positive, et rentrant le long du bord. La partie de la carte cylindrique comprise entre $d_{i,1}^{j,+}$ et $d_{i,1}^{j,-}$ est un cylindre C_i^j . Lorsque l'on retire à V tous ces cylindres C_i^j , on obtient le voisinage fibré $N(\mathcal{B})$ d'une

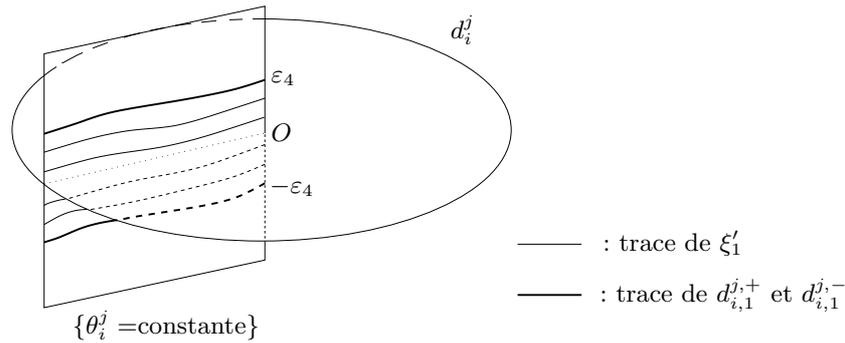


FIG. III.5.0.5 –

surface branchée \mathcal{B} .

Montrons maintenant qu'il existe une structure de contact isotope à ξ_2' et portée par \mathcal{B} . Le feuilletage caractéristique de ξ_2' le long d'un carré $\{\theta_i^j = \text{constante}\}$ est également un feuilletage en segments presque horizontaux dans un voisinage de d_i^j . On peut donc définir deux disques $d_{i,2}^{j,+}$ et $d_{i,2}^{j,-}$ comme précédemment, à la différence près que cette fois les feuilletages caractéristiques le long de ces deux disques ont une singularité elliptique négative et qu'ils sont sortants le long du bord, car ξ_2' est négative. Il existe alors une isotopie de V qui préserve \mathcal{F} , vaut l'identité en dehors d'un voisinage des cartes cylindriques et envoie les $d_{i,2}^{j,+}$ sur les $d_{i,1}^{j,+}$ et les $d_{i,2}^{j,-}$ sur les $d_{i,1}^{j,-}$. Cette isotopie envoie donc ξ_2' sur une structure de contact portée par \mathcal{B} .

Par construction, le complémentaire de $N(\mathcal{B})$ dans V est une union de bulles triviales, et donc de boules, d'où l'irréductibilité de ce complémentaire. \square

Remarque III.5.0.6 S'il existe une forme de contact α_1 représentant ξ_1 telle que le champ de Reeb R_1 de α_1 soit transversal à ξ_2 , la démonstration précédente donne une surface branchée portant la forme de contact α_1 et la structure de contact ξ_2 , si l'on pose $F = R_1$.

Bibliographie

- [Ch] J. CHRISTY, *Immersing Branched Surfaces in Dimension three*, Proc. AMS 115 (1992), p. 853-861.
- [Co] V.COLIN, *Quelques remarques sur les surfaces branchées en géométrie de contact*.
- [CH] V.COLIN & K.HONDA, *Constructions contrôlées de champs de Reeb et applications*, Geometry & Topology, Vol. 9 (2005), p. 2193-2226.
- [DR] C.DELMAN & R.ROBERTS, *Alternating knots satisfy Strong Property P*, Comment. Math. Helv. 74 (1999), n°3, p. 376-397.
- [El1] Y.ELIASHBERG *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, Invent. Math. 98 (1989), p. 623-637.
- [El2] Y.ELIASHBERG *Contact 3-manifolds, twenty years since J.Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier, Vol. 42 (1992), p. 165-192.
- [ET] Y.ELIASHBERG & W.THURSTON *Confoliations*, University Lecture Series, Vol. 13 (1998), American Mathematical Society, ISBN : 0-8218-0776-5
- [Ga] D.GABAI *Problems in foliations and laminations*, Geometric Topology (Athens, GA, 1993), AMS/IP Stud. Adv. math. 2.2, p. 1-33.
- [Gi1] E. GIROUX *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helv. 66 (1991), p. 637-677.
- [Gi2] E.GIROUX *Topologie de contact en dimension trois [autour des travaux de Yakov Eliashberg]*, Séminaire Bourbaki, Astérisque 216 (1993), p. 7-34.
- [GO] D.GABAI & U.OERTEL, *Essential laminations in 3-manifolds*, Annals of Mathematics, 130 (1989), p. 41-73.
- [GS] S.GOODMAN & S.SHIELDS, *A condition for the stability of \mathbb{R} -covered on foliations of 3-manifolds*, Trans. of the AMS , 352 (2000), n°9, p. 4051-4065.

BIBLIOGRAPHIE

- [Hae] A.HAEFLIGER, *Travaux de Novikov sur les feuilletages*, Séminaire Bourbaki n° 339 (1968), Soc. Math. France, Vol. 10 (1995), p. 433-444. , Paris, 1995.
- [Hat] A.HATCHER, *Some examples of essential laminations in 3-manifolds*, Ann. Inst. Fourier, Vol. 42 (1992), p. 313–325.
- [HKM] K. HONDA, W. KAZEZ & G. MATIĆ, *Tight contact structures and taut foliations*, Geometry & Topology, Vol. 4 (2000), p. 219-242.
- [Li] T.LI, *Laminar Branched Surfaces in 3-manifolds*, Geometry & Topology, Vol. 6 (2002), p. 153-194.
- [MO] L.MOSHER & U.OERTEL, *Spaces which are not negatively curved*, Comm. in Anal. and Geom., 6 (1991), p. 67-140.
- [Oe] U.OERTEL, *Incompressible branched surfaces*, Invent. math. 76 (1984), p. 385-410.
- [OS1] U.OERTEL & J.ŚWIATKOWSKI, *Contact Structures, σ -Confoliations, and Contaminations in 3-manifolds*, arXiv :math.GT/0307177 (2003).
- [OS2] U.OERTEL & J.ŚWIATKOWSKI, *A Contamination carrying Criterion for Branched Surfaces*, arXiv :math.GT/0307276 (2003).

Résumé : Le but de cette thèse est d'établir des liens entre la théorie des laminations et celle des structures de contact, via les surfaces branchées. Cette démarche est motivée par l'existence de liens étroits entre les structures de contact tendues et les feuilletages tendus. Le résultat principal est l'obtention d'une condition suffisante pour qu'une surface branchée B d'une variété V de dimension 3 porte pleinement une lamination. Il en découle une condition suffisante pour que le rappel de B dans le revêtement universel de V porte pleinement une lamination. Cette condition est nécessaire pour que cette lamination soit essentielle. Ce résultat apporte un élément de réponse à une question classique de Gabai. On introduit ensuite une notion de structure de contact portée par une surface branchée qui généralise celle de Oertel-Swiatkowski. Enfin, on établit une condition suffisante pour que deux structures de contact soient, à isotopie près, portées par une même surface branchée.

Mots-clés : surface branchée ; structure de contact ; lamination

Summary : The purpose of this thesis is to establish links between the theory of laminations and the theory of contact structures, via branched surfaces. This will be motivated by the existence of links between tight contact structures and taut foliations. The main result is a sufficient condition for a branched surface B in a 3-dimensional manifold V to fully carry a lamination. It implies a sufficient condition for the lift of B in the universal cover of V to fully carry a lamination, which is also a necessary condition for this lamination to be essential. This result gives a piece of answer to a classical question of Gabai. We then introduce a notion of contact structure carried by a branched surface, which generalizes the one of Oertel-Swiatkowski. At last, we give a sufficient condition for two contact structures to be carried, modulo isotopy, by the same branched surface.

Key words : branched surface ; contact structure ; lamination