



**HAL**  
open science

# Comparaison entre les analyses angulaire et temporelle des signaux vibratoires de machines tournantes. Etude du concept de cyclostationnarité floue

Frédéric Bonnardot

► **To cite this version:**

Frédéric Bonnardot. Comparaison entre les analyses angulaire et temporelle des signaux vibratoires de machines tournantes. Etude du concept de cyclostationnarité floue. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2004. Français. NNT: . tel-00103067

**HAL Id: tel-00103067**

**<https://theses.hal.science/tel-00103067>**

Submitted on 3 Oct 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

No. attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## THÈSE

*pour obtenir le grade de*  
**DOCTEUR DE L'INPG**

*Spécialité : «Signal, Image, Parole, Télécoms»*

préparée au **LASPI**  
«Laboratoire d'Analyse des Signaux et des Processus Industriels à Roanne»

dans le cadre de l'École Doctorale **EEATS**  
«Électronique, Électrotechnique, Automatique, Télécommunication et Signal»

*présentée et soutenue publiquement*

*par*

**Frédéric BONNARDOT**

*le 10 décembre 2004*

## Titre :

**COMPARAISON ENTRE LES ANALYSES ANGULAIRE ET  
TEMPORELLE DES SIGNAUX VIBRATOIRES DE  
MACHINES TOURNANTES. ETUDE DU CONCEPT DE  
CYCLOSTATIONNARITÉ FLOUE.**

---

*Directeur de thèse : Joannes DANIERE*

---

## **JURY :**

S. Braun	Professeur émérite au Technion, Israel	, Rapporteur
E. Moreau	Professeur à l'Université du Sud Toulon - Var, Toulon	, Rapporteur
J.L. Lacoume	Professeur à l'INPG, Grenoble	, Examineur
R.B. Randall	Professeur à l'UNSW, Sydney, Australie	, Examineur
J. Danière	Professeur émérite à l'Université Jean Monnet, Roanne	, Directeur
F. Guillet	Professeur à l'Université Jean Monnet, Roanne	, Co-directeur
J. Antoni	Maître de Conférence à l'UTC	, Invité



*A mes parents,  
et à ma sœur.*



# Remerciements

J'EXPRIME ma gratitude à Monsieur le professeur J.L. LACOUME pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse et pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Je tiens à remercier très vivement Monsieur J. DANIERE, Professeur émérite à l'Université Jean-Monnet, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant d'effectuer mes travaux de thèse sous sa direction. Ses conseils et son aide ont été des plus utiles pour l'aboutissement de ce travail. Il fait partie des personnes qui m'ont fait découvrir et apprécier le métier d'enseignant-chercheur.

J'exprime ma gratitude à Monsieur F. GUILLET, co-directeur de cette thèse, Professeur à l'Université Jean-Monnet et directeur du laboratoire LASPI, ainsi que Monsieur M. El Badaoui, Maître de Conférence à l'IUT de Roanne pour le grand intérêt qu'ils ont accordé à mes travaux de thèse, leurs conseils et leur aide constante tout au long de cette étude.

Je remercie les rapporteurs, Monsieur S.G. Braun, Professeur émérite au Technion, et Monsieur E. MOREAU, Professeur à l'ISITV, de l'intérêt qu'ils ont montré pour mon travail et d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse.

Mes remerciements à Monsieur R.B. RANDALL, Professeur à l'UNSW de Sydney, pour m'avoir invité en Australie pendant 6 mois, pour son accueil, ses conseils et échanges très fructueux.

Je remercie également, Monsieur J. ANTONI, Maître de conférence à l'Université de Technologie de Compiègne, pour ses conseils et son aide.

Merci à Monsieur P. WHITE d'avoir accepté mon invitation.

Merci aux premiers relecteurs de cette thèse pour leurs fructueuses remarques et corrections : MM. J. DANIERE, F. GUILLET, M. EL BADAOUI, J. ANTONI, N. NEJJAR, mes parents.

Mes sincères remerciements s'adressent à tous les membres du LASPI, et département GIM, Mme Besombes, Roussiez, MM. El Badaoui, Nejjar, Kharraja, Marcon, Martini, Albert, Chevrier, Christophe, et, Mme Ercolini, secrétaire du département, pour sa gentillesse et son efficacité, ainsi que tous les autres pour leur aide et soutien qu'ils ont su m'apporter, et les bons moments passés ensemble. Merci aux stagiaires, doctorants et ATER rencontrés ces trois années : Xavier, Amani, Anand, Rosa, Michel.

Je tiens également à remercier les doctorants de l'équipe de recherche de l'UNSW pour leur accueil : Anne, Hiroaki, Nader, Peter, Linsuo, Slobodan, Xianhua.

Je remercie tous ceux que j'ai oublié de ne pas m'en tenir rigueur.

Enfin, ma gratitude et mes très sincères remerciements s'adressent à ma famille, qui m'a toujours encouragé, et soutenu dans les moments difficiles.







# Table des matières

<b>1</b>	<b>Cyclostationnarités : Définitions et propriétés</b>	<b>5</b>
1.1	Pourquoi la cyclostationnarité (Avant propos)	5
1.2	Cyclostationnarité	6
1.2.1	Moments et Cumulants	7
1.2.2	Cyclostationnarité au sens strict	11
1.2.3	Cyclostationnarité à l'ordre $n$	12
1.2.4	Cyclostationnarité au sens large	12
1.2.5	Cyclostationnarité pure et impure	12
1.3	Extension de la cyclostationnarité	13
1.3.1	Presque cyclostationnarité	15
1.3.2	Polycyclostationnarité	17
1.3.3	Semicyclostationnarité	21
1.3.4	Pseudo-cyclostationnarité	22
1.3.5	Cyclostationnarité floue	22
1.4	Conclusion	22
<b>2</b>	<b>Re-échantillonnage angulaire</b>	<b>25</b>
2.1	Échantillonnage angulaire "direct"	25
2.2	Principe de l'échantillonnage angulaire a posteriori	26
2.2.1	Estimation de la position et de la vitesse	27
2.2.2	Filtre anti-repliement	27
2.2.3	Interpolation	28
2.3	Estimation de position	30
2.3.1	Utilisation du codeur ou du top tour	30
2.3.2	Démodulation autour de la fréquence d'engrènement	32
2.3.3	Utilisation de similitudes	37
2.4	Exemple et évaluation	44
2.4.1	Présentation du banc d'essai	44
2.4.2	Utilisation de l'engrènement	45
2.4.3	Utilisation des similitudes (cepstre)	54
2.5	Alternatives	56
2.6	Bilan et perspectives	56
<b>3</b>	<b>De la théorie à l'expérimentation</b>	<b>59</b>
3.1	Cycloergodisme	59
3.1.1	Moyenne cyclique (synchrone)	59
3.1.2	Définition du cycloergodisme (au sens fort)	60

3.2	Caractérisation de la cyclostationnarité aux ordres 1 et 2 . . . . .	61
3.2.1	Caractérisation à l'ordre 1 . . . . .	61
3.2.2	Caractérisation à l'ordre 2 . . . . .	66
3.2.3	Alternative dans le cas quasi-cyclostationnaire . . . . .	73
3.3	Application au diagnostic . . . . .	74
3.4	Conclusion . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Cyclostationnarité floue</b>	<b>81</b>
4.1	Définition . . . . .	81
4.2	Impact des fluctuations de vitesse aléatoires . . . . .	81
4.2.1	Effet à l'ordre 1 . . . . .	82
4.2.2	Effet à l'ordre 2 . . . . .	84
4.3	Fluctuations de vitesse périodiques et déterministes . . . . .	85
4.4	Effet du filtrage par la structure . . . . .	88
4.5	Fluctuations de périodes cycliques aléatoires non cyclostationnaires . . . . .	90
4.5.1	Modèle pour les signaux accélérométriques de roulements . . . . .	90
4.5.2	Modèles pour la génération des impacts . . . . .	91
4.5.3	Processus de génération d'impacts - Comparaison des deux approches . . . . .	92
4.5.4	Comparaison des deux approches - Signaux de roulements . . . . .	97
4.6	Bilan et perspectives . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Application de la cyclostationnarité aux signaux de roulement</b>	<b>101</b>
5.1	Séparation fréquentielle . . . . .	102
5.1.1	Exploitation par l'analyse d'enveloppe . . . . .	102
5.1.2	Problèmes posés par l'analyse d'enveloppe . . . . .	104
5.2	Séparation engrènement roulement . . . . .	104
5.2.1	Contribution des roues . . . . .	104
5.2.2	Contribution des roulements . . . . .	105
5.2.3	Séparation par la méthode SANC (Self adaptive noise cancellation) . . . . .	105
5.2.4	Séparation non supervisée améliorée (E-SANC) . . . . .	107
5.3	Application aux signaux d'hélicoptères (roulements planétaires) . . . . .	108
5.3.1	Origine des signaux . . . . .	108
5.3.2	Examen du signal accélérométrique . . . . .	108
5.3.3	SANC . . . . .	110
5.3.4	E-SANC . . . . .	110
5.3.5	Analyse d'enveloppe . . . . .	110
5.4	Débruitage basé sur la cyclostationnarité à l'ordre 2 . . . . .	113
5.4.1	Mise en évidence des liens à l'ordre 2 . . . . .	115
5.4.2	Principe de la reconstruction . . . . .	116
5.5	Application de la séparation à l'ordre 2 . . . . .	122
5.6	Cas simple . . . . .	122
5.6.1	Modèle . . . . .	122
5.6.2	Choix du filtre . . . . .	122
5.6.3	Simulation . . . . .	123
5.7	Influence de l'allure du signal . . . . .	124
5.8	Signaux de roulement . . . . .	126
5.8.1	Signaux réels . . . . .	128

5.9 Bilan et perspectives . . . . . 128



# Table des figures

1.1	Exemple de signal cyclostationnaire . . . . .	5
1.2	Moyenne d'ensemble . . . . .	6
1.3	Signal cyclostationnaire à l'ordre 2 . . . . .	7
1.4	Nombre d'articles sur la cyclostationnarité (1955-2004) . . . . .	8
1.5	dWV basée sur le moment . . . . .	14
1.6	dWV de la moyenne synchrone . . . . .	14
1.7	sWV basé sur le cumulatif . . . . .	15
1.8	Banc d'essais du LIS . . . . .	18
1.9	Signal polycyclostationnaire . . . . .	18
1.10	Superposition de périodes communes . . . . .	19
1.11	Réducteur du LASPI . . . . .	20
1.12	Décomposition d'un signal quasicyclostationnaire . . . . .	21
1.13	Différents types de cyclostationnarité et lien avec la (non)-stationnarité . . . . .	23
1.14	Détermination du type de cyclostationnarité . . . . .	23
2.1	Chaîne d'acquisition angulaire . . . . .	25
2.2	Re-échantillonnage a posteriori . . . . .	27
2.3	Principe du filtrage "forward-backward" . . . . .	28
2.4	Interpolation . . . . .	29
2.5	Caractérisation des splines . . . . .	31
2.6	Détection des fronts montants . . . . .	31
2.7	Spectre d'un signal d'engrenage sans fluctuation de vitesse . . . . .	34
2.8	Spectre d'un signal d'engrenage avec fluctuation de vitesse . . . . .	35
2.9	Interprétation graphique de l'erreur sur la phase . . . . .	36
2.10	Erreur de phase en fonction du rapport signal à bruit . . . . .	37
2.11	Cepstre d'un écho simple . . . . .	39
2.12	Cepstre d'un écho simple (bruit) . . . . .	39
2.13	Cepstre d'un écho multiple . . . . .	41
2.14	Cepstre d'un signal d'engrenage . . . . .	41
2.15	Estimation de position à l'aide du cepstre . . . . .	43
2.16	Agrandissement d'une portion du signal vibratoire . . . . .	43
2.17	Association de réducteur back to back . . . . .	45
2.18	Premiers échantillons . . . . .	46
2.19	Spectre du signal et réponse fréquentielle du capteur . . . . .	46
2.20	Exemple de choix de filtre passe-bande . . . . .	48
2.21	Vitesses instantanées estimées . . . . .	48
2.22	Vitesses instantanées estimées . . . . .	48
2.23	Effet d'une erreur de phase . . . . .	49

2.24	Effet de la bande du filtre . . . . .	51
2.25	Comparaison des vitesses estimées à partir du codeur (BF) et de l'engrènement . . . . .	51
2.26	Superposition des signaux re-échantillonnés dans le domaine angulaire . . .	51
2.27	Erreur d'instant d'échantillonnage . . . . .	52
2.28	Comparaison du re-échantillonnage a posteriori et de l'échantillonnage angulaire direct . . . . .	53
2.29	Ecart type de l'erreur de déphasage . . . . .	53
2.30	Comparaison du re-échantillonnage a posteriori et de l'échantillonnage angulaire direct . . . . .	54
2.31	Comparaison des instants d'échantillonnage . . . . .	55
2.32	Erreur de phase en fonction du bruit . . . . .	55
3.1	Calcul de la moyenne synchrone . . . . .	61
3.2	Module du filtre équivalent à la moyenne synchrone . . . . .	63
3.3	Application du seuil à la moyenne synchrone . . . . .	65
3.4	Moyennage synchrone de signaux de périodes commensurables . . . . .	67
3.5	Estimation de la corrélation spectrale . . . . .	70
3.6	Support de la DCS . . . . .	72
3.7	Relations entre les différentes représentations à l'ordre 2 . . . . .	73
3.8	Premiers points du signal . . . . .	75
3.9	Période commune $p(\theta)$ . . . . .	76
3.10	Signal résiduel $r(\theta)$ . . . . .	76
3.11	Signal après traitement . . . . .	78
4.1	Fonctions de Bessel de 1 <sup>ère</sup> espèce . . . . .	87
4.2	Modèle du signal vibratoire . . . . .	90
4.3	Modèles de fluctuations de vitesse . . . . .	92
4.4	Cycles superposés . . . . .	93
4.5	Cycles superposés - défaut de roulement sur bague interne . . . . .	93
4.6	Densité d'impacts . . . . .	96
4.7	Corrélation spectrale de la densité d'impact . . . . .	97
5.1	Principe de l'extraction du signal de roulement . . . . .	102
5.2	Principe de l'analyse d'enveloppe . . . . .	103
5.3	Décomposition du signal . . . . .	106
5.4	Mise en oeuvre de l'algorithme SANC . . . . .	107
5.5	Amélioration de la SANC . . . . .	107
5.6	Transmission de l'hélicoptère et défaut . . . . .	108
5.7	Premiers échantillons . . . . .	109
5.8	Spectres . . . . .	111
5.9	Spectre après la SANC . . . . .	111
5.10	Vitesse instantanée de crownwheel . . . . .	112
5.11	Spectre après la ESANC . . . . .	112
5.12	Apport de l'ESANC sur l'analyse d'enveloppe . . . . .	114
5.13	Transformée de Fourier de l'enveloppe au carré du signal après ESANC . .	114
5.14	Spectre d'un signal de roulement (synthétisé) . . . . .	116
5.15	Corrélation spectrale d'un signal de roulement (synthétisé) . . . . .	117

5.16	Principe du filtre de Wiener Cyclique . . . . .	118
5.17	Implémentation du filtre de Wiener Cyclique . . . . .	118
5.18	Choix du filtre . . . . .	124
5.19	Débruitage dans le cas simple . . . . .	125
5.20	Influence de l'allure du spectre du signal sur la reconstruction . . . . .	127
5.21	Filtre pour un seul décalage . . . . .	127
5.22	Signal - 7 fréquences - bruit important . . . . .	129
5.23	Débruitage de signaux de roulement . . . . .	130
5.24	Signaux filtrés passe bande . . . . .	130
5.25	Transformée de Fourier de l'enveloppe au carré du signal débruité . . . . .	131





# Notations utilisées

$j$	: nombre complexe tel que $j^2 = -1$
$x^*$	: conjugué
$\Re(u)$	: partie réelle de $u$
$\Im(u)$	: partie imaginaire de $u$
$\underline{x} = [x_1, \dots, x_N]^T$	: vecteur colonne de taille $N$ et ses $N$ éléments
$\underline{x}^H$	: transposé conjugué
$\underline{x}_{a,b,c} = [x_a, x_b, x_c]^T$	: sous vecteur
$\mathbf{x} = [x_{i,j}]_{i=1\dots N, j=1\dots M}$	: matrice $N \times M$ et ses éléments
$\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$	: processus stochastique
$X$	: variable aléatoire
$x(t)$ ou $x_\omega(t)$	: $\omega^{\text{ème}}$ réalisation de ce processus stochastique
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	: espérance mathématique
$\mathbb{E}\{A B\}$	: espérance de $A$ conditionné par $B$
$\mathbb{E}_B\{A\}$	: espérance calculée relativement à $B$
$p_X(\omega)$	: densité de probabilité associée à $X$
$F_X(\omega)$	: fonction de répartition associée à $X$
$\Phi_X(u)$	: fonction caractéristique de la variable aléatoire $X$
$\Psi_X(u)$	: seconde fonction caractéristique de la variable aléatoire $X$
$\mu_{X(k)}$	: moment d'ordre $k$ associé à $X$ , dans le cas d'un vecteur de $N$ éléments, $k$ pourra être omis si $k = N$
$\kappa_{X(k)}$	: cumulants d'ordre $k$ associés à $X$ , (même remarque concernant $k$ )
$CS_n$	: cyclostationnaire à l'ordre $n$
$CSP_n$	: cyclostationnaire pur à l'ordre $n$
$POCS$	: polycyclostationnaire
$o$	: ordre (l'ordre $o$ correspond à $o$ fois la fréquence de rotation)
$X(f)$ ou $X(o)$	: transformée de Fourier (le contexte permettra de faire la différence avec la notation employée pour les variables aléatoires)
$S_{x(2)}(\theta, f)$	: distribution de Wigner-Ville
$\mathcal{S}_{x(2)}(\theta, f)$	: spectre de Wigner-Ville
$S_{x(2)}(f, \alpha)$	: densité de corrélation spectrale
$S_{x(2)}^\alpha(f)$	: densité spectrale cyclique
$S_{x(2)}(f)$	: spectre
$S_{x,y}(f)$	: interspectre

- $\ln(a)$  : logarithme népérien de  $a$   
 $\log_n(a)$  : logarithme à base  $n$  de  $a$   
 $\tilde{x}(t)$  : cepstre d'énergie de  $x(t)$   
 $\hat{x}(t)$  : estimation de  $x(t)$   
 $a(t) * b(t)$  : produit de convolution de  $a(t)$  par  $b(t)$
- $\delta$  : distribution de dirac  
 $\delta_\tau$  : distribution de dirac appliquée en  $\tau$   
 $\sqcup_T$  : peigne de dirac de période  $T$





# Aide mémoire

CS est l'abréviation de Cyclostationnaire

Dénomination	Définition	Période(s) cyclique(s)
CS à l'ordre $n$	Moment d'ordre $n$ périodique	$\{\Theta_1\}$
CS au sens large	Cyclostationnaire à l'ordre 1 et 2	$\{\Theta_1\}$
CS au sens strict	Fonction de répartition périodique	$\{\Theta_1\}$
CS pur	Utilisation des cumulants au lieu des moments	$\{\Theta_1\}$
Presque-CS	Périodicité remplacé par presque-périodicité (plusieurs cycles)	$\{\Theta_1, \dots, \Theta_K\}$ $K \in [1; \infty]$
PolyCS	Le signal contient un nombre fini de cycles	$K \in [1; \infty[$
QuasiCS	Les cycles sont incommensurables	$\sum_{k=1}^K \alpha_k \Theta_k \neq 0$ $\forall \{\alpha_1, \dots, \alpha_K\}$
CS floue	Signal cyclostationnaire observé selon une autre variable.	$\{\Theta_1(t)\}$ non certain tel que $\mathbb{E}\{\Theta_1(t)\}$ existe
SemiCS	Le signal a été observé sur une durée suffisante	
PseudoCS	La durée d'observation est insuffisante. Ou le signal apparait cyclostationnaire sur la durée d'observation mais ne l'est pas.	



# Introduction

DANS le contexte socio-économique actuel, il est important pour les industriels de maîtriser les coûts ainsi que la qualité des produits afin de pouvoir survivre face à une concurrence exacerbée. Dès lors, la maintenance de l’outil de production devient un enjeu capital. En effet, face aux fortes cadences de production une panne paralysant une partie de l’usine, peut rapidement conduire à une perte financière importante. Il convient alors de trouver un équilibre entre le nombre d’arrêts pour la maintenance et le risque de défaut grave. Les outils de diagnostic doivent donc fournir une estimation de l’état de la machine à la fois fiable et précise. Il est alors possible de planifier cette maintenance et de réduire son coût selon la politique de gestion du risque adoptée dans l’entreprise.

Dans le passé les possibilités de diagnostic étaient fortement limitées par les performances de l’informatique. Son évolution exponentielle permet aujourd’hui d’offrir des outils de diagnostic à la fois “abordables” et puissants. Les limitations matérielles tendent progressivement à disparaître et permettent d’implémenter des algorithmes de plus en plus performants.

Ainsi, les outils de maintenance modernes résultant de la convergence entre le traitement du signal et la mécanique deviennent de plus en plus incontournables. Deux types d’outils sont disponibles : ceux qui fonctionnent en temps réel et fournissent des résultats instantanés et ceux qui fonctionnent en temps différé où le temps de calcul n’est plus une contrainte. Nous nous sommes intéressé ici à l’étude de procédures applicables en temps différé pour des machines tournantes dans le cadre de l’analyse vibratoire.

Les machines tournantes produisent des signaux cycliques selon un ou plusieurs cycles de base se répétant indéfiniment. L’existence de ces cycles conduit naturellement à exploiter la cyclostationnarité de ces signaux c’est-à-dire la périodicité de leurs paramètres statistiques. Pour qu’il y ait périodicité de ces paramètres, il faut que la durée des cycles successifs soit constante, ce qui n’est pas le cas si la machine est sujette à des variations de vitesses aléatoires. Dans ce cas, nous sommes conduits à réaliser les acquisitions des signaux sous échantillonnage angulaire, ce qui signifie que les échantillons sont prélevés à pas angulaire constant. Ce type d’acquisition garantit un nombre d’échantillons constant pour chaque cycle. Si de plus, les paramètres de fonctionnement de la machine sont constants (pression, température, vitesse moyenne, ...) les signaux prélevés peuvent être qualifiés de cyclostationnaires. L’échantillonnage angulaire est beaucoup moins répandu que l’échantillonnage temporel et il est surtout plus contraignant expérimentalement car le signal d’horloge de la carte d’acquisition doit être fourni par un capteur de position solidaire de l’arbre de la machine.

Il n’est pas toujours possible de rendre certaine la valeur d’une période cyclique, par exemple, pour des signaux de roulement où de nombreuses fluctuations existent. Dans ce



---

cas, on peut souvent considérer que les périodes successives sont distribuées autour d'une période moyenne avec un écart-type donné; nous sommes alors dans le cas peu étudié jusque là de la cyclostationnarité que nous avons qualifié de floue. L'acquisition ne peut plus être synchronisée sur ces signaux que ce soit dans le domaine angulaire ou temporel.

Le matériel ainsi que les campagnes d'acquisitions sous échantillonnage angulaire étant onéreux, il serait intéressant d'essayer d'obtenir les mêmes performances ou résultats à l'aide de signaux acquis sous échantillonnage temporel. Cela permettrait d'une part d'exploiter les bases de signaux déjà existantes et, d'autre part d'éviter un investissement supplémentaire en matériel. Pour cela, nous proposons de re-échantillonner les signaux temporels dans le domaine angulaire en se basant sur la loi de vitesse de rotation de la machine. Une fois cette loi estimée, il est possible de re-échantillonner a posteriori le signal à pas angulaires constant. Diverses pistes sont alors possibles pour l'estimation de vitesse, soit à partir du signal délivré par le codeur de position, soit à partir du signal vibratoire lui-même.

Le but de cette thèse est d'expliquer comment exploiter la cyclostationnarité sur des signaux accélérométriques de machines tournantes. Les méthodes présentées sont illustrées sur des signaux d'engrenage et de roulement acquis aussi bien sous échantillonnage temporel qu'angulaire. Les principaux apports de cette thèse concernent la proposition et la définition du concept de cyclostationnarité floue permettant de caractériser des phénomènes cycliques où la période n'est pas constante. De nouvelles méthodes de re-échantillonnage angulaire à partir du signal accélérométrique ont été proposées. Ces dernières permettent de s'affranchir du capteur de position. La combinaison du re-échantillonnage angulaire avec des méthodes de traitement du signal existantes permet d'acroître leur efficacité. Tout ces outils ont été validés dans plusieurs cas concrets, et notamment, dans le cas d'un réducteur d'hélicoptère.

Dans le *premier chapitre* nous présentons les bases théoriques de la cyclostationnarité. Pour cela, nous supposons que la variable générique des signaux est la position angulaire de la machine. Dans un premier temps, nous donnons les définitions de la cyclostationnarité pour une seule période cyclique. Dans un deuxième temps, nous expliquons comment étendre la cyclostationnarité pour un signal comportant plusieurs périodes cycliques. Nous introduisons également le vocable de cyclostationnarité floue destinée aux signaux ne comportant pas de périodes cycliques certaines, ou constantes.

Comme les signaux sont le plus souvent acquis dans le domaine temporel, nous proposons dans le *deuxième chapitre* des méthodes de re-échantillonnage en fonction de l'angle. Nous débutons par les méthodes exploitant un signal de position fourni par un codeur optique, ce signal étant enregistré parallèlement avec le signal accélérométrique. La technique d'échantillonnage angulaire classique est également incluse dans ces méthodes. Ensuite, nous présentons deux méthodes novatrices exploitant l'information de position contenue dans le signal accélérométrique. Il n'est alors plus nécessaire d'utiliser un capteur de position. Ces différentes méthodes de re-échantillonnage sont ensuite comparées.

Dans le *troisième chapitre*, nous expliquons comment exploiter la cyclostationnarité en pratique. Pour cela nous introduisons le concept de cycloergodisme qui étend la notion d'ergodisme au cas cyclostationnaire. Nous présentons également les différents outils utilisés pour caractériser le signal à l'ordre 1 et 2 (variance, distribution Wigner-Ville ...). Nous nous intéressons ensuite au cas particulier des roues d'engrenage qui possèdent plusieurs

---

cycles, tous sous-multiples d'un même cycle commun. Alors qu'une approche classique conduirait à ne considérer que ce cycle commun, nous avons cherché à exploiter chacun des cycles séparément. Nous montrons alors à partir d'un exemple que cette approche, bien qu'utilisant des estimateurs biaisés, donne de meilleurs résultats pour le diagnostic.

Dans le *quatrième chapitre* nous étudions plus en détail la cyclostationnarité floue. Nous faisons tout d'abord le lien entre la cyclostationnarité et la cyclostationnarité floue. Pour cela nous observons les effets des fluctuations de périodes cycliques et mettons en évidence les conditions permettant de conserver la cyclostationnarité. Ensuite, nous étudions le cas où les fluctuations des périodes cycliques sont aléatoires et stationnaires.

Dans la *cinquième partie*, nous montrons comment exploiter la cyclostationnarité floue pour le diagnostic de roulements de réducteurs à engrenage. Les capteurs ne fournissent pas directement la contribution des roulements mais un mélange issu des roues, des roulements, ainsi que du bruit. Nous nous intéressons dans un premier temps à la séparation des contributions roues et roulements. Pour cela, nous utilisons le caractère principalement cyclostationnaire à l'ordre 1 (c'est-à-dire certain) des signaux des roues face au caractère cyclostationnaire floue des signaux de roulement (et non prédictible). Malheureusement comme le bruit est également non prédictible, le signal de roulement estimé contient également le bruit d'origine du signal. Pour supprimer ce dernier, nous exploitons la cyclostationnarité floue, c'est-à-dire les liens entre les différentes composantes fréquentielles afin de reconstruire un signal avec un bruit atténué par filtrage optimal de "Wiener cyclique".



# Chapitre 1

## Cyclostationnarités : Définitions et propriétés

### 1.1 Pourquoi la cyclostationnarité (Avant propos)

LES outils de traitement du signal sont souvent utilisés dans le contexte stationnaire. Néanmoins, dans des domaines tels que la communication, le traitement de la parole, la mécanique, ... les hypothèses simplificatrices permettant de travailler dans un contexte stationnaire ne sont plus valables.

Pour illustrer cela, la figure 1.1 montre un signal vibratoire issu d'un réducteur à engrenages. Nous pouvons noter la présence d'un motif d'allure périodique dans le signal. La période est indiquée par des rectangles alternativement noirs et blancs. Cette périodicité apparente est due à l'existence d'un cycle de base que l'on rencontre dans la plupart des systèmes mécaniques et en particulier dans les machines tournantes. Si les paramètres de fonctionnement de la machine sont constants (vitesse moyenne, pression, température, durée du cycle moteur, période du réducteur) on dira que les signaux qui en sont issus sont cyclostationnaires. Mathématiquement, un signal est cyclostationnaire si l'on trouve des périodicités dans certaines de ses statistiques. Chaque période ou cycle peut être considéré comme la réalisation d'un même processus aléatoire. Pour cela, chaque réalisation doit débuter à une position angulaire identique (même position de l'arbre pour un moteur électrique, même dents en contact pour les engrenages, ...). Si l'on superpose ces réalisations, on pourra alors calculer la moyenne d'ensemble (c'est-à-dire l'amplitude moyenne pour un angle  $\theta$  donné) comme le montre la figure 1.2. Cette moyenne d'ensemble, permet-

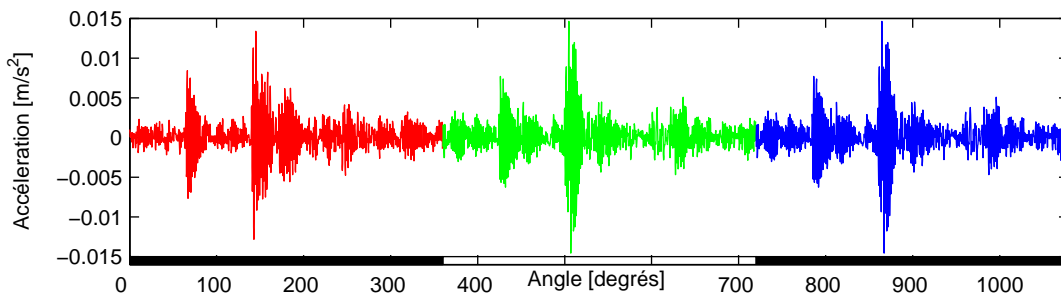


Figure 1.1: Exemple de signal cyclostationnaire

tra d’extraire la “partie périodique” du signal (à l’ordre 1). Lorsque cette dernière existe, le signal sera alors *cyclostationnaire à l’ordre 1*.

Ce signal a été choisi car il permet de visualiser facilement ces périodicités. La partie périodique peut être noyée dans du bruit. Il faut alors utiliser la moyenne d’ensemble pour faire ressortir ce motif périodique par rapport au bruit (si ce bruit est stationnaire). En pratique, on ne disposera souvent que d’une seule réalisation et on sera conduit à remplacer la moyenne d’ensemble par une moyenne de cycles appelée *moyenne synchrone* (sous réserve d’existence).

Certains signaux de communication bien que non périodiques (à l’ordre 1), ont une énergie périodique. La figure 1.3 inspirée de [Max et Lacoume, 1996] présente un tel signal. Une fois élevé au carré, il devient périodique. On dira alors que ce signal présente des périodicités cachées. Un tel signal est *cyclostationnaire à l’ordre 2*. De façon plus générale, un signal est cyclostationnaire à l’ordre 2 si ses propriétés statistiques à l’ordre 2 sont périodiques.

La cyclostationnarité, cas particulier de la non-stationnarité nous permettra donc de mieux appréhender les périodicités cachées ou non d’un signal. Les machines tournantes générant intrinsèquement des périodicités, on aura intérêt à exploiter la cyclostationnarité.

Après avoir expliqué brièvement l’intérêt de la cyclostationnarité nous allons maintenant en présenter l’aspect théorique.

## 1.2 Cyclostationnarité

Les premières études sur la cyclostationnarité datent des années 1950 avec les travaux précurseurs de Bennett [Bennett, 1958] et Gladyshev [Gladyshev, 1961, Gladyshev, 1963]. Comme le montre la figure 1.4(a) (issue de [Gardner, 1994]) et la figure 1.4(b), la cyclostationnarité a commencé à susciter un intérêt croissant à partir des années 1980 (explosion du domaine des télécommunications, ...). Elle a été utilisée dans l’identification, la séparation de sources, la séparation de signaux se recouvrant spectralement, ... Néanmoins, la cyclostationnarité n’a pas suscité le même engouement en mécanique : son utilisation dans ce domaine et en particulier pour les machines tournantes n’est apparue que récemment. Ce manque d’enthousiasme est probablement dû aux variations de vitesse des systèmes mécaniques qui ont tendance à supprimer la cyclostationnarité. D’autre part,

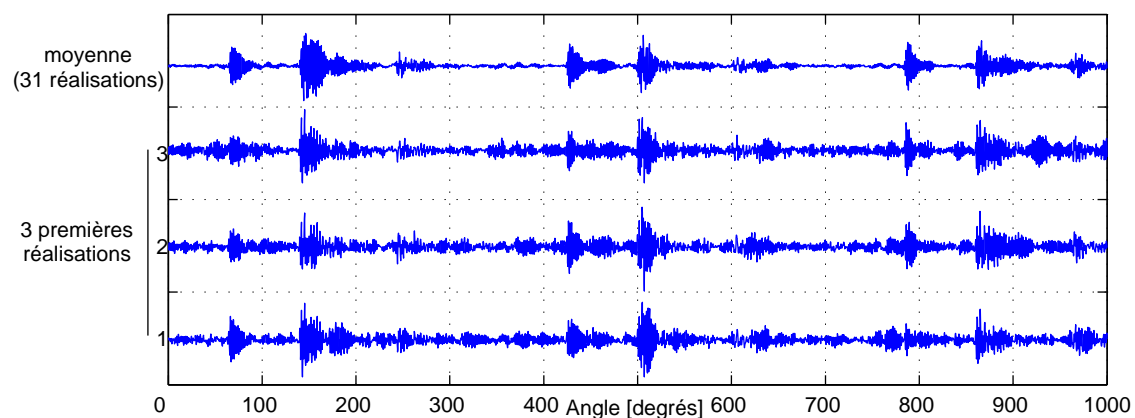


Figure 1.2: *Moyenne d’ensemble*

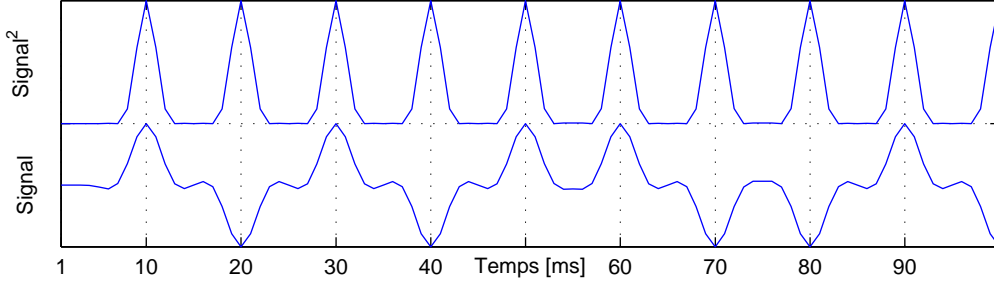


Figure 1.3: *Signal cyclostationnaire à l'ordre 2*

il existe souvent une forte cyclostationnarité à l'ordre 1 qu'il est ardu de retrancher car sa période n'est pas forcément stable et connue. Il est alors difficile d'exploiter directement les outils développés dans le domaine des télécommunications où les signaux sont souvent à moyenne synchrone nulle. La cyclostationnarité a ouvert des perspectives et a permis d'obtenir des résultats très intéressants [Lejeune et al., 1997, McCormick et Nandi, 1998, Dalpiaz et al., 2000, Capdessus, 1992, Capdessus et al., 2000, Randall et al., 2001a, Bouillaut et Sidahmed, 2001, Antoni et al., 2002a, Antoni et al., 2004, Raad, 2003].

Tout comme pour la stationnarité, nous allons définir la cyclostationnarité à l'ordre  $n \geq 1$ . Pour cela nous devons tout d'abord rappeler la définition des *moments* et *cumulants* dans le contexte cyclostationnaire.

### 1.2.1 Moments et Cumulants

Puisque nous nous intéressons plus particulièrement aux machines tournantes, nous allons utiliser leur variable générique : l'angle  $\theta$  au lieu du temps  $t$ . Pour plus de simplicité, nous nous limiterons aux vecteurs aléatoires réels. Le cas des vecteurs aléatoires complexes est traité notamment dans [Lacoume et al., 1997, Amblard et al., 1996].

Soit un vecteur aléatoire  $\underline{X}(\theta) = [X_1(\theta), \dots, X_N(\theta)]$  de dimension  $N$  à valeurs réelles admettant comme fonction de répartition  $F_{\underline{X}}(\underline{v}, \theta)$  (avec  $\underline{v} = [v_1, \dots, v_N] \in \mathbb{R}^N$  et  $\theta \in \mathbb{R}^N$ ) définie par :

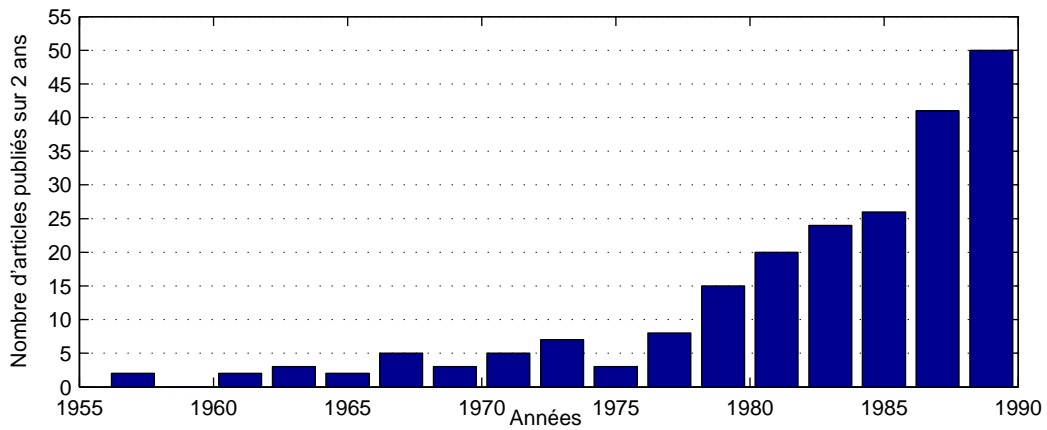
$$F_{\underline{X}}(\underline{v}, \theta) = P \{X_1(\theta) \leq v_1, \dots, X_N(\theta) \leq v_N\} \quad (1.1)$$

Il est important de noter que nous travaillons pour l'instant sur des réalisations de  $X$  et que nous n'avons fait aucune hypothèse quant à l'ergodicité. A partir de ce vecteur aléatoire, il est alors possible de définir la fonction caractéristique qui n'est autre que la transformée de Fourier de la densité de probabilité (à  $2\pi$  près).

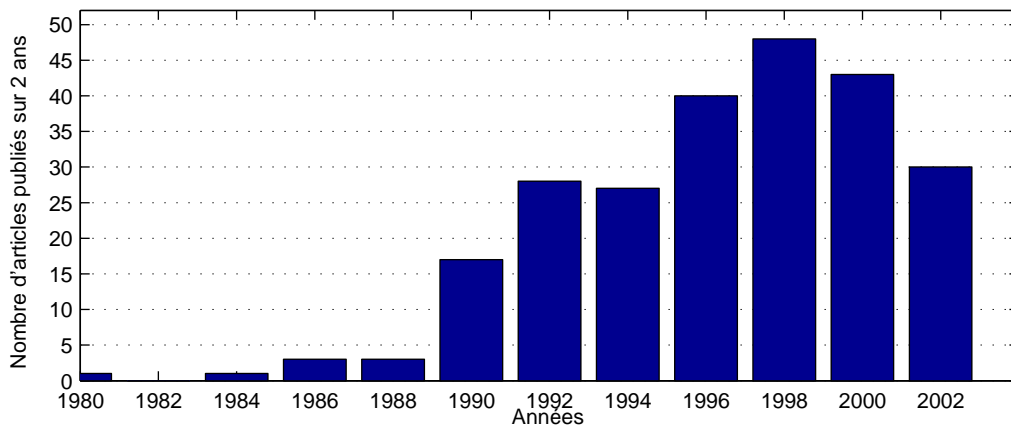
$$\Phi_{\underline{X}}(\underline{u}, \theta) \triangleq \mathbb{E} \left\{ e^{j\underline{X}(\theta)^T \underline{u}} \right\} \quad (1.2)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} e^{j\underline{v}^T \underline{u}} dF_{\underline{X}}(\underline{v}, \theta) \quad (1.3)$$

Où  $dF_{\underline{X}}(\underline{v}, \theta)$  désigne la différentielle de la fonction de répartition. Ici nous utilisons la fonction de répartition plutôt que la densité de probabilité. En effet, à une fonction de répartition pourra correspondre une distribution de densité de probabilité (par exemple si la



(a) 1955-1990 (source : Gardner)



(b) 1980-2004 (source IEEE Explore - recherche limité au mot clé "cyclostationarity")

**Figure 1.4:** *Nombre d'articles sur la cyclostationnarité (1955-2004)*

fonction de répartition est un échelon). Cette fonction de répartition peut être décomposée en une somme de deux termes et écrite sous la forme :

$$F_{\underline{X}}(\underline{v}, \underline{\theta}) = F_{\underline{X}_c}(\underline{v}, \underline{\theta}) + F_{\underline{X}_d}(\underline{v}, \underline{\theta}) \quad (1.4)$$

$F_{\underline{X}_c}(\underline{v}, \underline{\theta})$  étant la partie continue et dérivable, et,  $F_{\underline{X}_d}(\underline{v}, \underline{\theta})$  une fonction de type escalier. La première fonction caractéristique correspondra à une variable aléatoire continue, la deuxième à une variable aléatoire discrète. Ainsi, cette formulation permettra de traiter à la fois le cas discret et le cas continu.

On définit également la seconde fonction caractéristique par :

$$\Psi_{\underline{X}}(\underline{u}, \underline{\theta}) = \ln \Phi_{\underline{X}}(\underline{u}, \underline{\theta}) \quad (1.5)$$

Il est alors possible de développer les fonctions caractéristiques en série entière. Les coefficients de ces séries permettront alors de retrouver les moments pour  $\Phi_{\underline{X}}(\underline{u}, \underline{\theta})$  et les cumulants pour  $\Psi_{\underline{X}}(\underline{u}, \underline{\theta})$ .

### Moments

Pour tout n-uplet  $(i_1, \dots, i_N) \in \mathbb{R}^N$  tel que  $\sum_{n=1}^N i_n = k$ , le moment d'ordre  $k$  est défini par :

$$\mathbb{E} \left\{ \prod_{n=1}^N X_n^{i_n}(\theta_n) \right\} = \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{n=1}^N v_n^{i_n} dF_{\underline{X}}(\underline{v}, \underline{\theta}) \quad (1.6)$$

On pourra retrouver également les moments à partir de la fonction caractéristique :

$$\Phi_{\underline{X}}(\underline{u}, \underline{\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k}{k!} \mathbb{E} \left\{ (\underline{u}^T \underline{X}(\underline{\theta}))^k \right\} \quad (1.7)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} \left\{ \prod_{n=1}^N X_n^{i_n}(\theta_n) \right\} = j^{-k} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \right)^{i_1} \left( \frac{\partial}{\partial u_2} \right)^{i_2} \dots \left( \frac{\partial}{\partial u_n} \right)^{i_n} \Phi_{\underline{X}}(\underline{u}, \underline{\theta}) \Big|_{\underline{u}=0} \quad (1.8)$$

Comme on se place dans le cas de vecteurs aléatoires, choisir un  $i_n > 1$  équivaut à utiliser un vecteur aléatoire contenant plusieurs fois la même variable aléatoire. On se limitera donc à  $k = N$  et  $i_n = 1 \forall n \in [1; N]$ . On pourra alors définir la notation :

$$\mu_{\underline{X}^{(k)}}(\underline{\theta}) \triangleq \mathbb{E} \left\{ \prod_{n=1}^N X_n(\theta_n) \right\} = (-j)^N \frac{\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_N} \Phi_{\underline{X}}(\underline{u}, \underline{\theta}) \Big|_{\underline{u}=0} \quad (1.9)$$

Par exemple, la variance sera interprétée comme la covariance de deux vecteurs identiques et pourra être notée  $\mu_{[X, X]^{(k)}}(\underline{\theta})$ .

Dans le cas d'un vecteur aléatoire, l'ordre  $(k)$  pourra être omis pour  $k = N$ .

### Cumulants

En utilisant exactement la même procédure mais à partir de la seconde fonction caractéristique, nous obtenons les cumulants. Pour les mêmes raisons, nous choisirons d'utiliser les cumulants simples c'est-à-dire avec  $i_n = 1 \forall n \in [1; N]$ . Nous aurons alors :



$$\kappa_{\underline{X}(k)}(\underline{\theta}) \triangleq (-j)^N \frac{\partial^n}{\partial u_1 \cdots \partial u_N} \Psi_{\underline{X}}(\underline{u}, \underline{\theta}) \Big|_{\underline{u}=0} \quad (1.10)$$

Il est important de noter que nous utilisons  $\kappa_{\underline{X}(k)}(\underline{\theta})$  et non  $\kappa_{\underline{X}(k)}$  puisque nous ne nous plaçons pas dans le contexte stationnaire. Pour un signal unidimensionnel, nous avons  $\kappa_{X(k)}(\underline{\theta}) = \kappa_{\underline{Y}(k)}(\underline{\theta})$  où  $\underline{Y}$  est un vecteur contenant  $k$  fois la variable aléatoire  $X$  :  $\underline{Y} = \underbrace{[X, \dots, X]}_{k \text{ fois}}$ .

### Relation moments cumulants

Il est possible d'exprimer les cumulants d'ordre  $N$  en fonction des moments à l'aide de la formule de Leonov et Shiryaev [Leonov et Shiryaev, 1959] en utilisant les  $I$  partitions  $P_{N_i} = \{\nu_{1_i}, \dots, \nu_{q_i}\}$  de l'ensemble  $\{1, \dots, N\}$  :

$$\kappa_{\underline{X}(N)}(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^I (-1)^{q_i-1} (q_i - 1)! \cdot \prod_{j=1}^{q_i} \mu_{\underline{X}_{\nu_{j_i}}}(\underline{\theta}_{\nu_{j_i}}) \quad (1.11)$$

Par exemple, à l'ordre 2, on a  $P_{N_1} = \{\{1, 2\}\}$  et  $P_{N_2} = \{\{1\}, \{2\}\}$  d'où :

$$\begin{aligned} \kappa_{\underline{X}(2)}(\underline{\theta}) &= (-1)^0 0! \mu_{\underline{X}_{1,2}}(\underline{\theta}_{1,2}) + (-1)^1 1! \mu_{\underline{X}_1}(\underline{\theta}_1) \mu_{\underline{X}_2}(\underline{\theta}_2) \\ &= \mu_{\underline{X}}(\underline{\theta}) - \mu_{X_1}(\theta_1) \mu_{X_2}(\theta_2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

On a également :

$$\begin{aligned} \kappa_{\underline{X}(3)}(\underline{\theta}) &= \mu_{\underline{X}}(\underline{\theta}) \\ &- \mu_{X_1}(\theta_1) \cdot \mu_{\underline{X}_{2,3}}(\underline{\theta}_{2,3}) - \mu_{X_2}(\theta_2) \cdot \mu_{\underline{X}_{1,3}}(\underline{\theta}_{1,3}) - \mu_{X_3}(\theta_3) \cdot \mu_{\underline{X}_{1,2}}(\underline{\theta}_{1,2}) \\ &+ 2\mu_{X_1}(\theta_1) \cdot \mu_{X_2}(\theta_2) \cdot \mu_{X_3}(\theta_3) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ces formules se simplifient en utilisant des signaux centrés<sup>1</sup> pour lesquels  $\mu_{X_i(1)}(\theta_i) = 0 \quad \forall i$ . Jusqu'à l'ordre 3, le cumulants correspond au moment calculé sur le signal centré. Le contexte cyclostationnaire nous empêche de simplifier plus ces formules puisque  $\mu_{X_1(1)}(\theta_1) \neq \mu_{X_2(1)}(\theta_2)$ .

Cette formule montre que les cumulants d'ordre  $N$  dépendent uniquement des moments d'ordre inférieur.

Il est également possible d'exprimer les moments à partir des cumulants :

$$\mu_{\underline{X}(N)}(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^I \prod_{j=1}^{q_i} \kappa_{\underline{X}_{\nu_{j_i}}}(\underline{\theta}_{\nu_{j_i}}) \quad (1.14)$$

On peut en déduire :

$$\mu_{\underline{X}(2)}(\underline{\theta}) = \kappa_{\underline{X}}(\underline{\theta}) + \kappa_{X_1}(\theta_1) \cdot \kappa_{X_2}(\theta_2) \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{X}(3)}(\underline{\theta}) &= \kappa_{\underline{X}}(\underline{\theta}) \\ &+ \kappa_{X_1}(\theta_1) \cdot \kappa_{\underline{X}_{2,3}}(\underline{\theta}_{2,3}) + \kappa_{X_2}(\theta_2) \cdot \kappa_{\underline{X}_{1,3}}(\underline{\theta}_{1,3}) + \kappa_{X_3}(\theta_3) \cdot \kappa_{\underline{X}_{1,2}}(\underline{\theta}_{1,2}) \\ &+ \kappa_{X_1}(\theta_1) \cdot \kappa_{X_2}(\theta_2) \cdot \kappa_{X_3}(\theta_3) \end{aligned} \quad (1.16)$$

<sup>1</sup>attention, on retranche ici la moyenne d'ensemble, qui, après une hypothèse de cycloergodicité pourra être substituée par une moyenne synchrone

Tout comme les cumulants, les moments d'ordre  $N$  ne sont liés qu'aux cumulants d'ordre inférieur. Après avoir défini les moments et cumulants, nous allons les utiliser afin de caractériser les différents types de cyclostationnarité.

L'utilisation des cumulants permet d'estimer des statistiques qui rendent compte des propriétés à l'ordre  $N$  seul, alors que les statistiques issues des moments prennent en compte tous les ordres de 1 à  $N$ .

Par exemple, à l'ordre 2, pour une variable aléatoire  $X(\theta)$ , de moyenne  $\mu_X(\theta)$  qui peut s'écrire :

$$X(\theta) = \mu_X(\theta) + X_c(\theta) \text{ où } X_c(\theta) \text{ est la version centrée de } X(\theta) \quad (1.17)$$

Le cumuland d'ordre 2 est :

$$\kappa_{[X,X]}(\underline{\theta}) = \mathbb{E}\{X_c(\theta_1)X_c(\theta_2)\} \text{ où } \underline{\theta} = [\theta_1, \theta_2] \quad (1.18)$$

et le moment d'ordre 2 :

$$\mu_{[X,X]}(\underline{\theta}) = \mathbb{E}\{X_c(\theta_1)X_c(\theta_2)\} + \mu_X(\theta_1)\mu_X(\theta_2) \quad (1.19)$$

L'équation (1.18) montre que le cumuland ne dépend pas de la statistique d'ordre 1 contrairement au moment d'ordre 2 pour lequel la contribution à l'ordre 1 est ajoutée (équation 1.19). Le cumuland à l'ordre 2 retranche donc la contribution issue de l'ordre 1 et permet ainsi de se focaliser sur l'ordre 2.

## 1.2.2 Cyclostationnarité au sens strict

Soit  $\{X(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$  un processus stochastique complexe ou réel.

$\{X(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$  est dit *cyclostationnaire au sens strict* avec la *période cyclique*  $\Theta$  si sa fonction de répartition est périodique avec la période  $\Theta$  :

$$F_X(v_1, \dots, v_n; \theta_1, \dots, \theta_n) = F_X(v_1, \dots, v_n; \theta_1 + \Theta, \dots, \theta_n + \Theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1.20)$$

Que l'on peut écrire de manière plus compacte :

$$F_X(\underline{v}, \underline{\theta}) = F_X(\underline{v}, \underline{\theta} + \underline{\Theta}) \quad (1.21)$$

La définition de la *stationnarité au sens strict* peut être retrouvée à partir de cette définition, en supprimant la notion de périodicité. Un processus stochastique  $\{X(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$  complexe ou réel est dit *stationnaire au sens strict* si sa fonction de répartition est invariante pour tout changement de l'origine du temps :

$$F_X(\underline{v}, \underline{\theta}) = F_X(\underline{v}, \underline{\theta} + \underline{\tau}), \quad \forall \underline{\tau} \in \mathbb{R}^N \quad (1.22)$$

Dès lors, comme tout signal stationnaire vérifie forcément (1.21), la classe des signaux stationnaires est incluse dans la classe des signaux cyclostationnaires et hérite donc de toutes ses propriétés.

### 1.2.3 Cyclostationnarité à l'ordre $n$

$\{X(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$  est dit *cyclostationnaire à l'ordre  $n$*  ( $CS_n$ ) avec une période cyclique  $\Theta$  si son moment d'ordre  $n$  existe, et est périodique de période  $\underline{\Theta} = [\Theta, \dots, \Theta]$  :

$$\mu_{X(n)}(\underline{\theta}) = \mu_{X(n)}(\underline{\theta} + \underline{\Theta}) \quad (1.23)$$

### 1.2.4 Cyclostationnarité au sens large

$\{X(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$  est dit *cyclostationnaire au sens large*, s'il est cyclostationnaire conjointement à l'ordre 1 et à l'ordre 2.

La définition de la *stationnarité au sens large* peut être retrouvée à partir de cette définition en supprimant la notion de périodicité :  $\{X(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$  est dit stationnaire au sens large s'il est stationnaire à l'ordre 1 et stationnaire à l'ordre 2.

### 1.2.5 Cyclostationnarité pure et impure

#### Définition

Soit un signal déterministe  $x(\theta)$  sinusoïdal :  $x(\theta) = \sin(\theta)$ . Ce signal est cyclostationnaire à l'ordre 1 car il est périodique. Son moment d'ordre  $n$  est :

$$\mu_{x(\theta)(n)}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \dots \sin(\theta_n) \quad (1.24)$$

$$= x(\theta_n) \mu_{x(\theta)(n-1)}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \quad (1.25)$$

Dans cet exemple très simple, le moment d'ordre  $n$  est lié au moment d'ordre inférieur par  $x(\theta_n)$ . On a donc affaire à un signal cyclostationnaire à tous les ordres. On ne pourra donc pas étudier séparément l'apport de chaque ordre. On parlera alors de *cyclostationnarité "impure"* puisque  $CS_n$  est une conséquence de  $CS_{n-1}$ .

A l'ordre 2, il est possible en travaillant sur le signal centré (c'est-à-dire le cumulants) de supprimer l'influence de l'ordre 1. Par exemple, pour un signal  $y(\theta) = p(\theta) + r(\theta)$  composé d'un signal  $p(\theta)$  cyclostationnaire à l'ordre 1 et d'un autre signal quelconque et indépendant de  $p(\theta)$ , le cumulants d'ordre 2 ne dépendra pas de  $p(\theta)$  contrairement au moment.

$$\kappa_{y(\theta)(2)}(\underline{\theta}) = \mu_{[y(\theta)-p(\theta)](2)}(\underline{\theta}) = \mu_{r(\theta)(2)}(\underline{\theta}) \quad (1.26)$$

$$\mu_{y(\theta)(2)}(\underline{\theta}) = [\kappa_{y(\theta)(1)}(\underline{\theta})]^2 + \kappa_{y(\theta)(2)}(\underline{\theta}) \quad (1.27)$$

L'utilisation des cumulants au lieu des moments pourra alors être généralisée aux ordres supérieurs [Gardner et Spooner, 1994]. On parlera alors de *cyclostationnarité "pure"* à l'ordre  $n$  (noté  $CSP_n$ ) puisqu'elle n'entraînera pas  $CSP_{n+1}$ . On pourra alors caractériser la cyclostationnarité pour un ordre donné indépendamment des autres ordres.

A l'aide de l'équation 1.14, il est possible d'établir les implications entre  $CSP_n$  et  $CS_n$ .

Cyclostationnarité impure à l'ordre ...	... si
2	$CSP_2$ ou $CSP_1$
3	$CSP_3$ ou $CSP_1$
4	$CSP_4$ ou $CSP_2$ ou $CSP_1$

## Illustration

Afin de montrer l'apport des cumulants, nous allons examiner un signal  $y(\theta)$  issu d'un moteur diesel 4 cylindres PSA XUD9 1905  $cm^3$ . Il a été acquis sous échantillonnage angulaire et exploité dans [Antoni, 2000, Antoni et al., 2002a, Antoni et al., 2004]. Ce signal est cyclostationnaire puisque chaque événement mécanique est lié à la position du vilebrequin. Ce signal peut être décomposé en [Braun et Seth, 1980] :

$$y(\theta) = p(\theta) + cs_2(\theta) + n(\theta) \quad (1.28)$$

- $p(\theta)$  est une composante  $CS_1$  de période  $4\pi$  (sur un moteur 4 temps le cycle correspond à deux tours de vilebrequin),
- $cs_2(\theta)$  est la composante cyclostationnaire à l'ordre 2,
- un bruit résiduel  $n(\theta)$ .

Les figures 1.5 à 1.7 montrent l'apport des cumulants pour caractériser le signal à l'ordre 2. Le signal analysé ainsi que sa densité spectrale de puissance ont été ajoutés sur les bordures des figures. Parmi les 4 caractérisations possibles du signal, nous avons choisi la distribution de Wigner-Ville car c'est la transformée de Fourier d'un moment d'ordre 2. Ce domaine permet de localiser facilement les événements mécaniques. Les figures 1.5, 1.6, 1.7 montrent respectivement la distribution de Wigner-Ville associée au moment d'ordre 2 (corrélation), à la moyenne synchrone, et au cumulants d'ordre 2 (variance - on parle alors de spectre de Wigner Ville). L'amplitude des signaux a été normalisée avant les traitements car les calibres utilisés dans la chaîne de mesure n'étaient pas disponibles. Ainsi, nous utilisons  $\propto m^2/s^4$  pour indiquer que l'échelle est homogène à des  $m^2/s^4$ .

Les figures 1.6 et 1.7 mettent en évidence que la composante périodique ou  $CS_1$  du signal est beaucoup plus énergétique que la composante  $CSP_2$ . En conséquence, cette composante domine et provoque des interférences dues à son caractère déterministe qui nuisent à la lisibilité. Dans la figure 1.7, il n'y a que la composante  $cs_2$  exempte de toutes interférence détruite par moyennage synchrone de la contribution à l'ordre 2. L'étude de ces signaux dans [Antoni, 2000] a montré l'intérêt de la partie  $CSP_2$  pour le diagnostic et la localisation des défauts. Il est donc très important et intéressant dans ce cas d'étudier séparément la partie  $CS_1$  et la partie  $CS_2$ .

Cet exemple montre que l'utilisation des cumulants permet d'analyser la contribution de chaque ordre sans être gêné par l'ordre précédent. Jusqu'à l'ordre 3, l'estimation des cumulants est en théorie assez simple puisqu'il suffit de travailler sur des signaux centrés (débarrassés de leur moyenne synchrone). Nous verrons au cours de cette thèse, qu'en pratique, il n'est pas toujours simple d'enlever cette moyenne (synchrone).

## 1.3 Extension de la cyclostationnarité

La cyclostationnarité est très intéressante pour étudier les machines tournantes puisqu'elle permet de prendre en compte le caractère cyclique d'un processus. Jusque là nous avons supposé une seule période cyclique. Or, il existe des processus ou des machines qui possèdent plusieurs cycles. Nous allons alors étendre la notion de cyclostationnarité afin de l'adapter à de tels cas.

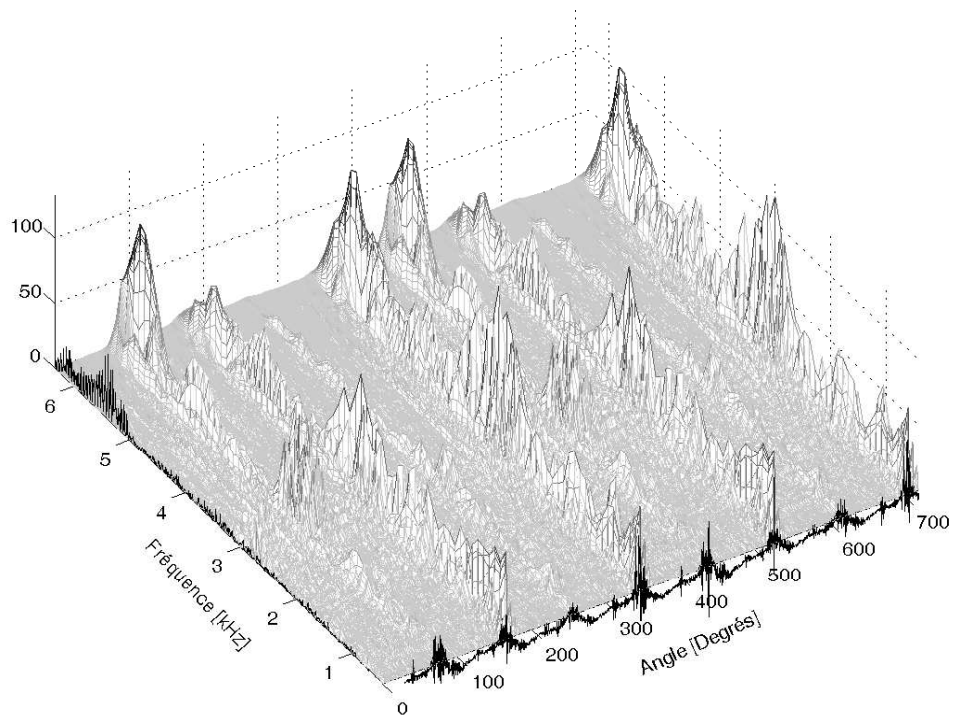


Figure 1.5:  $dWV$  basée sur le moment

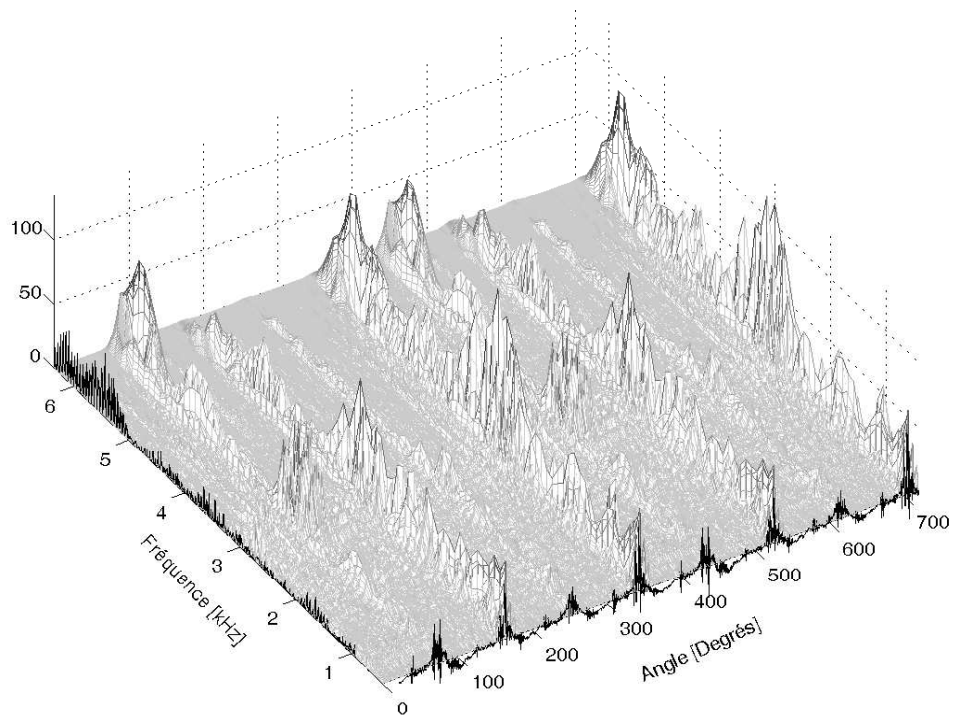
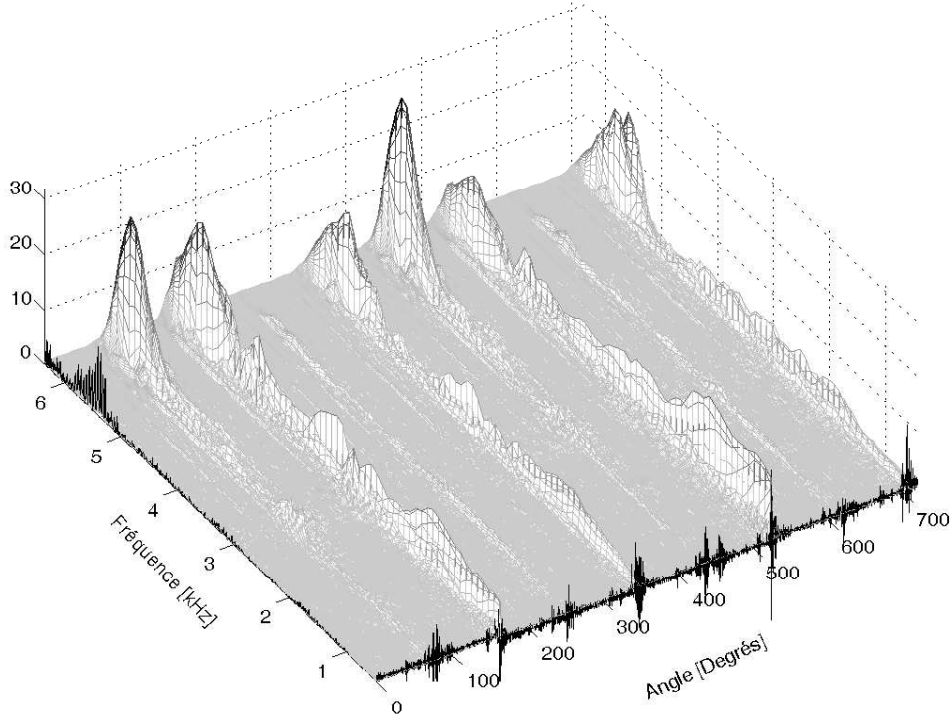


Figure 1.6:  $dWV$  de la moyenne synchrone


 Figure 1.7: *sWV basé sur le cumulant*

### 1.3.1 Presque cyclostationnarité

La *presque cyclostationnarité* (*almost cyclostationary* en anglais) [Gardner, 1978] est basée sur les *fonctions presque périodiques* (ou *p*-périodiques). De telles fonctions sont étudiées dans [Bass, 1971, Corduneanu, 1989].

#### Fonctions presque périodiques

Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite *p*-périodique sur  $\mathbb{C}$  si, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme trigonométrique  $p_\varepsilon(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{j\omega_n t}$  ( $c_n \in \mathbb{C}, \omega_n \in \mathbb{R}$ ) tel que :

$$|f(t) - p_\varepsilon(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.29)$$

Où  $\omega_n$  est un ensemble de fréquences qui ne sont pas forcément harmoniques entre elles.

On notera alors :

$$f(t) \approx p(t) \quad \text{où } p(t) \text{ est un polynôme trigonométrique} \quad (1.30)$$

Si la série de Fourier Bohr est uniformément convergente, alors, on peut écrire :

$$f(t) = p(t) \quad (1.31)$$

Dans [Corduneanu, 1989], il est montré que la définition (1.29) implique que :

Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre  $l(\varepsilon)$  tel que tout intervalle de longueur  $l(\varepsilon)$  contienne un nombre  $\tau$  vérifiant :

$$|f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall t \quad (1.32)$$

Cette formulation utilisée dans [Lacoume et al., 1997] montre mieux l'aspect "périodique" avec l'utilisation de  $\tau$ . Il est possible de construire une fonction presque périodique en ajoutant  $K$  fonctions périodiques  $f_k(\theta)$  ayant des périodes  $T_k$  non commensurables entre elles<sup>2</sup>. Chacune des fonctions périodiques  $f_k(\theta)$  admet alors une décomposition en série de Fourier :

$$f_k(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{k,m} \cdot e^{2\pi j m t / T_k} \quad (1.33)$$

Où  $a_{k,m}$  est le coefficient associé à la fréquence  $m/T_k$  de la  $k^{\text{ième}}$  fonction  $f_k(\theta)$  de période  $T_k$ . Dès lors, on pourra combiner les séries de Fourier associées à chaque fonction :

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^K f_k(\theta) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{k,m} \cdot e^{2\pi j m t / T_k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{2\pi j t \nu_n} \quad (1.34)$$

Où  $c_n$  est le coefficient associé à la fréquence  $\nu_n$ . Chaque fréquence  $\nu_n$  correspond alors à une unique fréquence  $m/T_k$ . On décompose alors la fonction  $f(\theta)$  sous forme d'une série. Néanmoins, comme les périodes  $T_k$  sont incommensurables entre elles (dans notre exemple), les fréquences  $\nu_n$ , rangées par ordre croissant, ne sont pas en progression linéaire. Il ne s'agit donc plus d'une série de Fourier puisque les  $\nu_n$  ne sont pas les harmoniques d'un même fondamental mais d'une décomposition en série de Fourier-Bohr. La fonction  $f(\theta)$  est alors une fonction presque périodique. D'autre part, on ne peut plus écrire  $f(t) = f(t+T)$  puisqu'il n'existe aucune période commune entre les  $T_k$ , les fonctions presque-périodiques permettent ainsi de décrire les fonctions comportant plusieurs périodes sans période commune.

### Presque cyclostationnarité au sens strict

Un processus stochastique  $\{X(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$  réel est dit presque cyclostationnaire au sens strict si sa fonction de répartition est presque périodique.

### Déclinaisons de la presque cyclostationnarité

Il sera alors possible de décliner la presque cyclostationnarité à différents ordres en remplaçant périodique par presque périodique. Ainsi, la presque cyclostationnarité au sens large est définie dans [Gardner, 1978] par :

Un processus aléatoire centré du second ordre à paramètres réels et continus est presque-cyclostationnaire au sens large si et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre entier naturel  $N_\varepsilon$  et un polynôme trigonométrique à l'ordre  $N_\varepsilon$  dans  $L^\infty(\mathbb{R})$  qui approxime uniformément la fonction d'autocorrélation pour  $X$  à  $\pm\varepsilon$ , c'est-à-dire :

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \left| C_{X,X}(\theta, \tau) - \sum_{n=-N_\varepsilon}^{N_\varepsilon} c_n(\tau) \exp(j\omega_n \theta) \right| < \varepsilon, \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad (1.35)$$

On a ainsi une autocorrélation  $C_{X,X}(t, \tau)$  presque périodique.

---

<sup>2</sup>Les fréquences de l'ensemble  $\{f_i\}_{i=1, \dots, q}$ ,  $q$  fini, sont incommensurables si :  $\sum_{i=1}^q \beta_i f_i = 0 \Rightarrow \beta_i = 0 \forall i$  (où les  $\beta_i$  sont entiers).

Alors que dans le contexte cyclostationnaire nous avons une période, nous avons ici un ensemble de presque périodes  $1/\omega_n$  qui peuvent être quelconques. On peut alors en mettant des contraintes sur ces presque périodes faire apparaître des sous-ensembles des signaux presque cyclostationnaires.

### 1.3.2 Polycyclostationnarité

Parmi les fonctions presque périodiques, les fonctions *polypériodiques* vont nous permettre de construire un sous-ensemble des processus presque cyclostationnaires : les processus polycyclostationnaires. Nous allons tout d'abord définir la polypériodicité :

Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite polypériodique avec les fréquences fondamentales associées  $\{\nu_i\}_{i=1,\dots,q}$  si elle est presque périodique, et si les fréquences associées aux coefficients de Fourier-Bohr  $c_n$  sont toutes multiples des  $\nu_i$ . L'ensemble  $\{\nu_i\}_{i=1,\dots,q}$  est tel que  $q$  est fini et les  $\nu_i$  sont incommensurables.

La polypériodicité impose d'une part un nombre fini de fréquences fondamentales incommensurables et n'est plus définie à l'aide d'une convergence uniforme d'autre part. La fonction  $f(\theta)$  utilisée pour illustrer les fonctions presque périodiques sera donc polypériodique si  $K$  est fini. Cette distinction permettra d'être plus proche de la réalité où les fréquences fondamentales sont générées par un nombre fini de procédés physiques.

#### Définition de la polycyclostationnarité

Un processus stochastique  $\{X(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$  réel est dit *polycyclostationnaire (POCS)* avec les périodes cycliques  $\Theta_i$  si sa fonction de répartition est polypériodique selon ces mêmes périodes.

Nous allons inclure également dans la polycyclostationnarité le cas où les  $\Theta_i$  sont rationnels entre eux (commensurables). Dès lors, il convient d'envisager 2 cas.

#### Périodes cycliques rationnelles

Si les périodes cycliques  $\{T_n\}_{n=1\dots N}$  sont toutes rationnelles entre elles, il est possible de trouver une période cyclique commune  $T_C$  multiple de chacune des périodes cycliques  $T_n$ . Dès lors, l'ensemble des  $\{\nu_i\}$  engendrera une fréquence commune  $1/T_C$ .

Afin d'illustrer le calcul de la période commune nous allons nous baser sur un exemple concret : les engrenages. La figure 1.11 présente le multiplicateur utilisé au LIS<sup>3</sup> dans le cadre de l'Action Incitative Diagnostic et Signal<sup>4</sup>. Le multiplicateur présenté sur la figure 1.8 est constitué de roues ayant respectivement  $n_1 = 57$  et  $n_2 = 15$  dents.

Les deux roues tournent à des vitesses différentes, elles vont générer des signaux périodiques de périodes  $\Theta_1 = 2\pi$  et  $\Theta_2 = 2\pi \cdot \frac{n_2}{n_1}$ . A chaque tour de la roue menante, il y a 57 contacts entre les dents des deux roues (la roue menante engrène la roue menée). Néanmoins, les dents en contact ne sont pas les mêmes d'un tour à l'autre. De plus, la surface de chaque dent n'est pas rigoureusement identique et particulièrement si il y a un défaut. Dès lors, le phénomène d'engrènement va introduire une *période commune*  $\Theta_C$ . Le

<sup>3</sup>Laboratoire des Images et des Signaux, Grenoble

<sup>4</sup>des photos ainsi que des signaux sont disponibles sur [http://www.lis.inpg.fr/la\\_recherche/projets/proj21.htm](http://www.lis.inpg.fr/la_recherche/projets/proj21.htm)



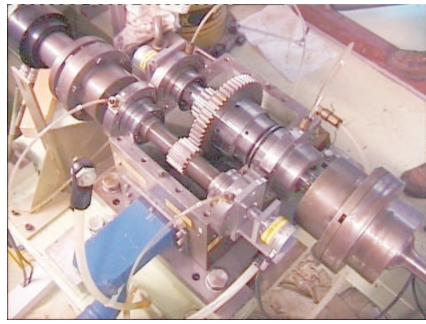


Photo du multiplicateur

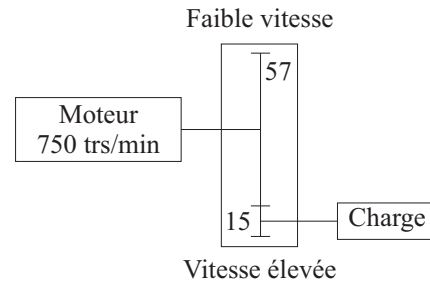


Schéma cinématique associé

Figure 1.8: Banc d'essais du LIS

terme  $\Theta_C$  correspondra à l'angle nécessaire pour que l'engrenage revienne dans la même configuration (mêmes dents en contact).

La période commune correspond à un nombre de dents égal au plus petit commun multiple (ppcm) de  $n_1$  et  $n_2$ . Soit :

$$\Theta_C = \Theta_1 \cdot \frac{\text{ppcm}(n_1, n_2)}{n_1} = \Theta_2 \cdot \frac{\text{ppcm}(n_1, n_2)}{n_2} \quad (1.36)$$

La figure 1.9 présente des signaux issus de ce réducteur. Les bandes alternativement noires et blanches indiquent respectivement, la période de rotation de l'arbre d'entrée  $\Theta_1$ , la période de rotation de l'arbre de sortie  $\Theta_2$ , et, la période commune  $\Theta_C$ . En regardant attentivement les bandes, on vérifiera que l'on a une synchronisation des bandes tous les  $\Theta_C$  degrés. Dans notre cas, la période commune correspond à  $\lambda = 5$  tours de l'arbre d'entrée et à  $\beta = 19$  tours de l'arbre de sortie. En regardant la figure nous apercevons nettement la période correspondant à l'arbre d'entrée qui module fortement le signal. Cette forte modulation est due au très mauvais état du réducteur et plus particulièrement de la roue menante. La période commune est difficile à déceler sur cette figure.

Afin de mettre en évidence cette périodicité, le signal accélérométrique a été découpé en tranches correspondant à un cycle commun. Les tranches étant ensuite affichées les unes en dessous des autres (figure 1.10). La période commune est multiple des périodes

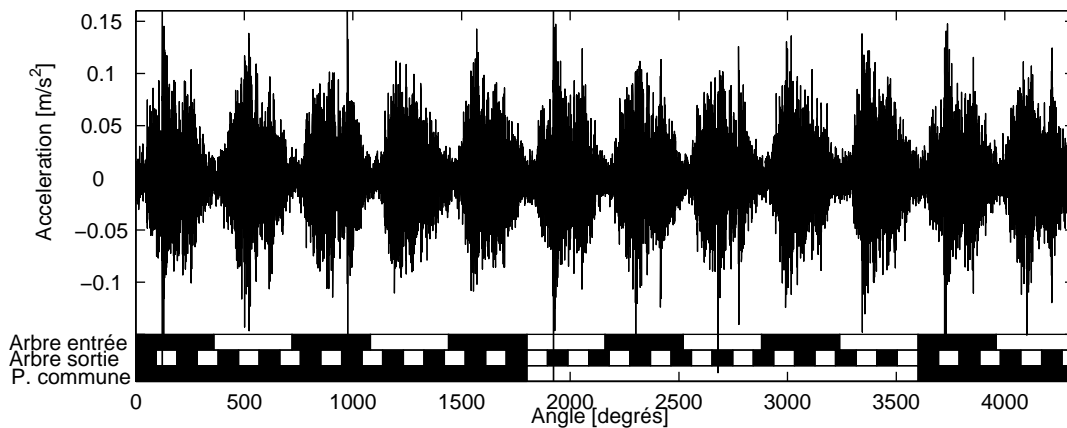


Figure 1.9: Signal polycyclostationnaire

de rotation de l'arbre d'entrée et de l'arbre de sortie. Il est donc possible de considérer uniquement cette période comme le suggère la figure 1.10. Dans ce cas, le signal devient cyclostationnaire, et, est beaucoup plus simple à étudier, néanmoins, on ne prend plus en compte la contribution de chacune des roues.

Nous allons donner un exemple qui va fortement nuancer cette approche, les signaux proviennent d'un réducteur fabriqué par la société FOC-MANQUAT utilisé au LASPI<sup>5</sup>. La figure 1.11 montre une roue du réducteur (à gauche), le réducteur (au milieu) ainsi que son schéma cinématique (à droite). Soit  $n_i$  le nombre de dents correspondant à la  $i^{\text{ème}}$  roue, tel que  $i = 1$  pour l'arbre d'entrée, et  $I$  le nombre de roues. Pour notre réducteur, nous avons  $\underline{n} = [23, 62, 15, 70, 18, 59, 18, 61]$  et  $I = 8$ .

Pour ce type d'engrenage à plusieurs étages, il y a de nombreuses périodes de rotation : on pourra généraliser les développements précédents à chaque couple ou ensemble de roues pour calculer des périodes communes locales. Pour les engrenages à plusieurs étages, l'angle à partir duquel l'engrenage revient dans la même configuration va dépendre de toute la cinématique (nombre de dents). En généralisant l'équation 1.36, on obtient une période commune  $\Theta_C$  :

$$\Theta_C = \Theta_1 \prod_{k=1}^{I/2} \frac{\text{ppcm}(n_{2k-1}, n_{2k})}{n_{2k-1}} \quad (1.37)$$

Afin d'illustrer cette formule, nous allons l'appliquer au réducteur du LASPI. Pour voir l'évolution de cette période en fonction du nombre d'étages du réducteur, nous allons la calculer pour les 2 premières roues, les 4 premières, ...

Nombre de paires de roues prises en compte	1	2	3	4
Période commune (tours)	62	868	51 212	3 123 932
Durée (1500 trs/min)	3 s	35 s	34 min	1,5 jour

Nous constatons alors que plus le nombre d'étages du réducteur devient grand, plus il est irréaliste de travailler sur certaines périodes communes très grandes. Pour réaliser des statistiques basées sur la période commune, il est nécessaire d'enregistrer un grand

<sup>5</sup>Laboratoire d'Analyse des Signaux et des Processus Industriels

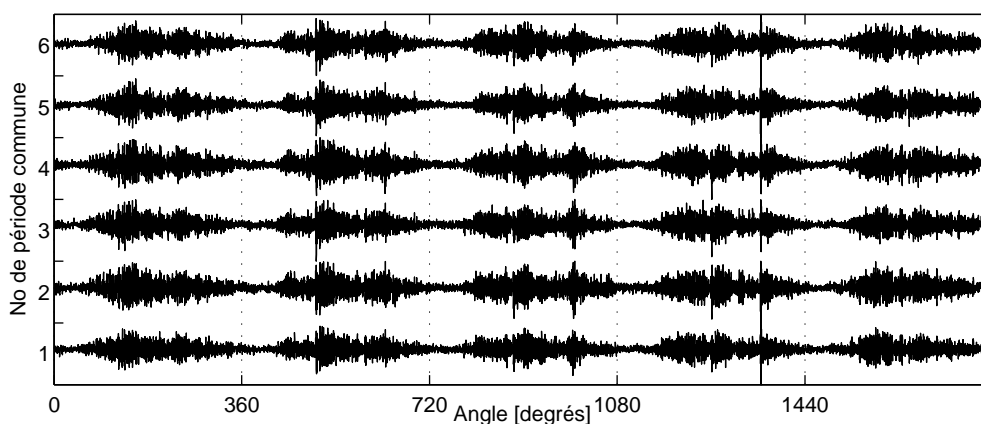


Figure 1.10: Superposition de périodes communes

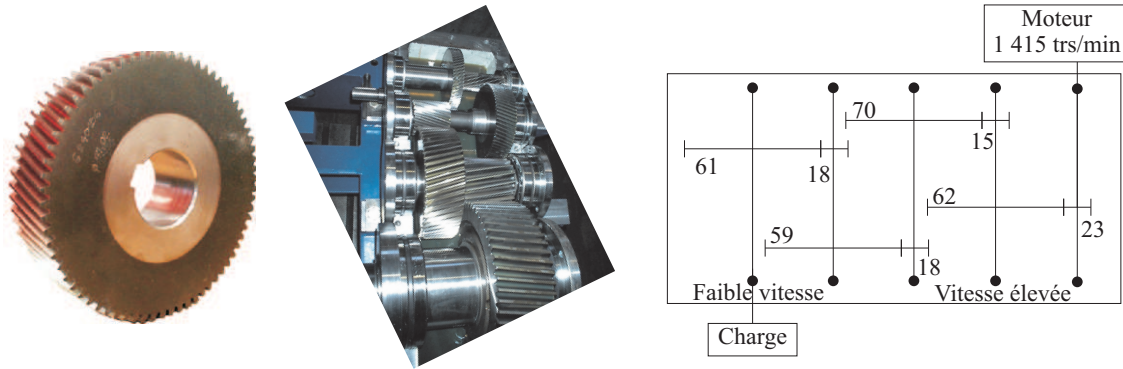


Figure 1.11: Réducteur du LASPI

nombre de cycles. Une limite à 30 cycles correspond à une durée d’acquisition de 1 mois et 2 semaines. Cette problématique nous amènera à définir plus loin la semicyclostationnarité et la pseudo-cyclostationnarité. Considérer qu’un signal d’engrenage polycyclostationnaire se réduit à un signal cyclostationnaire, ne fonctionne que pour des réducteurs ayant un faible nombre d’étages.

En pratique, on se focalisera sur les périodes cycliques que l’on souhaite étudier. Les périodes cycliques plus longues seront tronquées lors de l’acquisition “trop courte”. Elles n’apparaîtront donc plus en tant que périodes mais comme un signal pseudo aléatoire. Il est donc important de ne pas perdre de vue que les résultats seront biaisés (voir chapitre 3 pour plus de détails).

### Périodes cycliques non rationnelles (ou quasi-cyclostationnarité)

Ce type de polycyclostationnarité est appelé quasi-cyclostationnarité par Gardner [Gardner, 1978].

La quasicyclostationnarité intervient par exemple, dans le signal où il y a présence d’une composante d’origine électrique et d’une composante d’origine mécanique. La figure 1.12 présente au centre un signal acquis par un ensemble capteur/conditionneur de mauvaise qualité. Le capteur de type vibratoire était pollué par le secteur à 50 Hz. Ce signal est donc quasicyclostationnaire. En se synchronisant sur la période cyclique mécanique, il a été possible, par moyennage synchrone de séparer la composante mécanique périodique de la composante électrique. Cet exemple montre que les signaux quasicyclostationnaires posent moins de problème que les signaux polycyclostationnaires pour l’estimation des différentes composantes, puisque les exponentielles de Fourier associées aux différentes fréquences fondamentales ainsi qu’à leurs harmoniques sont disjointes. Néanmoins, leur séparation devient délicate si les fréquences sont “relativement proches” (canaux non distincts sur une densité spectrale pour le pas d’échantillonnage utilisé).

C’est aussi le cas des signaux de machines asynchrones qui tournent à une fréquence légèrement inférieure à la fréquence du champ tournant (phénomène de glissement). Ce champ tournant est lui même lié à la fréquence d’alimentation par un coefficient correspondant au nombre de paires de pôles. Dès lors, les fréquences associées aux signaux électriques et mécaniques sont situées à des fréquences très proches et sont alors difficiles à distinguer.

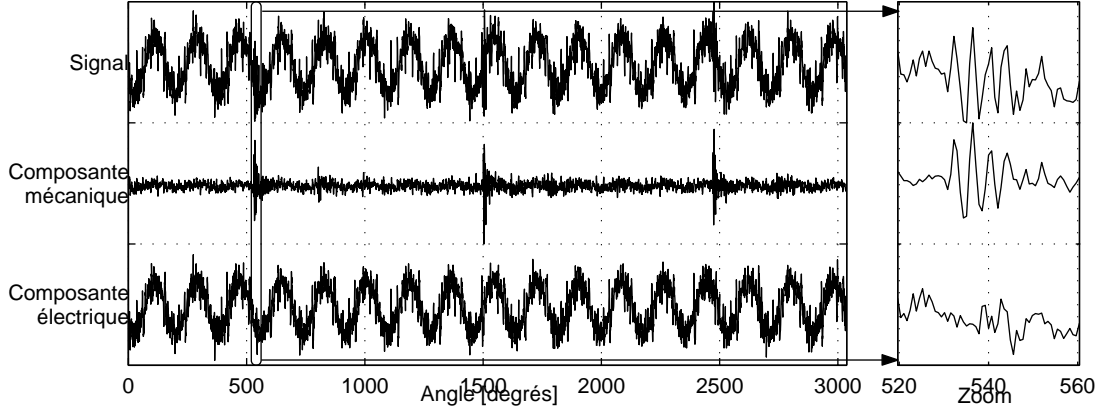


Figure 1.12: Décomposition d'un signal quasicyclostationnaire

### 1.3.3 Semicyclostationnarité

Le concept de cyclostationnarité est essentiellement théorique. Il est impossible de vérifier expérimentalement la cyclostationnarité en raison même de la durée finie de toute expérience. On propose alors d'adapter le concept de *semistationnarité* tel qu'il est présenté dans [Picinbono, 1994] aux signaux cyclostationnaires.

Soit :

- un domaine  $\mathcal{D}_y = [\theta_1, \theta_2]$ ,
- un signal réel cycloergodique et cyclostationnaire  $x(\theta)$  de période cyclique  $\Theta$ , et,
- un autre signal réel  $y(\theta)$  tel que :

$$y(\theta) = \begin{cases} x(\theta) & \text{pour } \theta \in \mathcal{D}_y \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.38)$$

Bien que  $y(\theta)$  ne soit pas cyclostationnaire, car de durée finie, il vérifie cependant (1.21) ou (1.23) si  $\theta$  et  $\theta + \Theta$  sont dans  $\mathcal{D}_y$ . On dit alors que  $y(\theta)$  est *semicyclostationnaire* si  $\theta_2 - \theta_1 \gg \max(\Theta, \theta_c)$  où  $\theta_c$  représente les constantes “d'angles” du système<sup>6</sup>. L'utilisation de  $\Theta$  sera importante pour les machines tournant “très lentement” et,  $\theta_c$  prédominera pour les machines “rapides”.

La définition de la semistationnarité peut être retrouvée en enlevant le préfixe cyclo et en supprimant  $\Theta$  au profit de la longueur de corrélation  $t_c$ . La longueur de corrélation est le temps à partir duquel on considère que la fonction de corrélation est nulle. Dans le contexte cyclostationnaire  $t_c$  ne peut être défini puisque la fonction d'autocorrélation est périodique, c'est pourquoi nous le remplaçons par  $\Theta$  et par  $\theta_c$ . Ainsi, nous reprenons l'idée qu'il est nécessaire de connaître le signal sur une durée supérieure aux constantes de temps du système afin de pouvoir tirer des conclusions pertinentes. Dans le cas des signaux cyclostationnaires la fonction de corrélation n'est pas décroissante mais périodique, on pourra alors estimer la période suivante à partir de la période précédente.

En général, lorsque l'on traite des signaux issus de l'expérimentation, on parle par abus de langage de cyclostationnarité et d'estimation au lieu de semicyclostationnarité. Considérer un signal semicyclostationnaire signifie tout simplement que l'on a acquis suffisamment de points pour l'analyser.

<sup>6</sup>Étant donné que nous sommes dans le domaine angulaire, le terme constante “d'angle” a été substitué au terme constante de temps.

### 1.3.4 Pseudo-cyclostationnarité

L'hypothèse de semicyclostationnarité n'est pas toujours valide. Par exemple, si l'enregistrement est trop court pour observer l'ensemble des périodes cycliques, ou dans le cas de réducteurs à engrenage dont le rapport de réduction est important. Le processus bien que cyclostationnaire n'apparaît pas en tant que tel sur le signal.

Par ailleurs, un signal peut apparaître cyclostationnaire pour une observation, donnée alors qu'il est non stationnaire. Lors d'une observation certains paramètres apparaissent constants (niveau d'huile, état d'usure du système, ...). Après un certain temps (par exemple 500 000 km pour des roulements de roue d'automobile), on peut noter l'évolution de paramètres qui apparaissaient comme constants. D'autre part, certaines approximations ne seront plus valables (la fluctuation autour de la période moyenne sera de plus en plus importante dans un procédé de type marche aléatoire comme les roulements). On a donc ici une sorte de cyclostationnarité définie localement.

De tels signaux non semi-cyclostationnaires, seront appelés pseudo-cyclostationnaires.

### 1.3.5 Cyclostationnarité floue

Jusqu'à présent les définitions ont été données dans le domaine angulaire puisque la variable générique des machines tournantes est l'angle. Néanmoins, il est courant d'utiliser le temps pour échantillonner de tels signaux. Les signaux peuvent alors devenir non stationnaires et non cyclostationnaires à cause des fluctuations de vitesse. Il est néanmoins dommage dans ce cas de ne pas utiliser le fait que les signaux soient issus de machines cycliques. C'est pourquoi nous avons proposé de définir la *cyclostationnarité floue* afin de rétablir le lien avec la cyclostationnarité.

Nous désignerons sous le vocable "cyclostationnaire floue" les processus cycliques dont le ou les périodes cycliques sont variables qu'elles soient déterministes ou aléatoires.

Le chapitre 4 sera consacré à l'étude de la cyclostationnarité floue.

## 1.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les bases théoriques de la cyclostationnarité. La figure 1.13 présente une synthèse des différents type de cyclostationnarité et leur lien avec la (non)-stationnarité sous forme de diagramme de Venn. La figure 1.14 montre un organigramme permettant de déterminer facilement le type de cyclostationnarité.

Les chapitres suivant préciseront la notion de cyclostationnarité. Dans le chapitre 2 nous allons présenter les différents types d'acquisitions (temporelle, angulaire), leurs avantages et inconvénients. Nous expliquerons également comment induire la cyclostationnarité pour les signaux temporels. Le chapitre 3 montrera les aspects plus pratiques de la cyclostationnarité et rapportera des exemples dans le cas des signaux d'engrenages.

Ensuite nous ferons le lien entre la variable angulaire utilisée jusqu'à présent et la variable temporelle à l'aide de la cyclostationnarité floue. Cette dernière nous permettra également d'étudier les fluctuations de périodes cycliques. Le chapitre 5 montrera comment exploiter des signaux de roulements produisant des signaux cyclostationnaires flous.

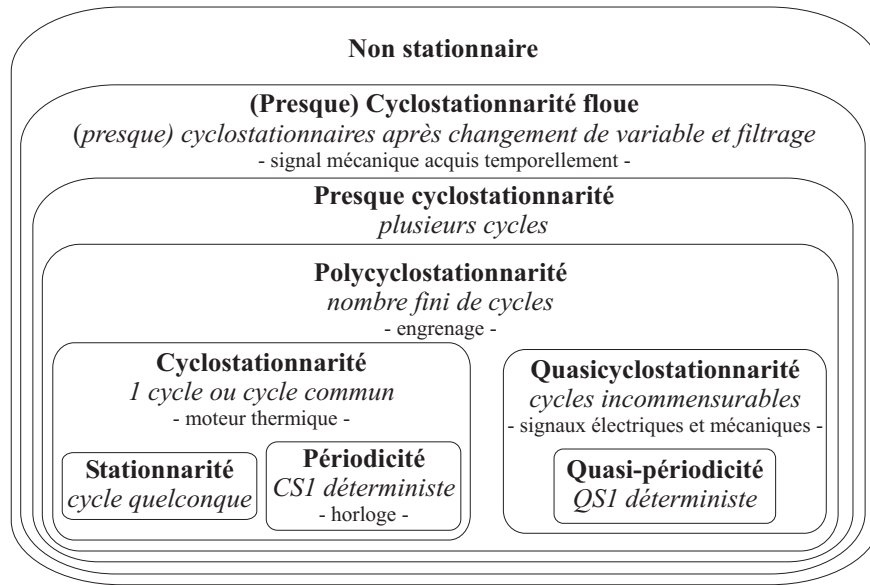


Figure 1.13: Différents types de cyclostationnarité et lien avec la (non)-stationnarité

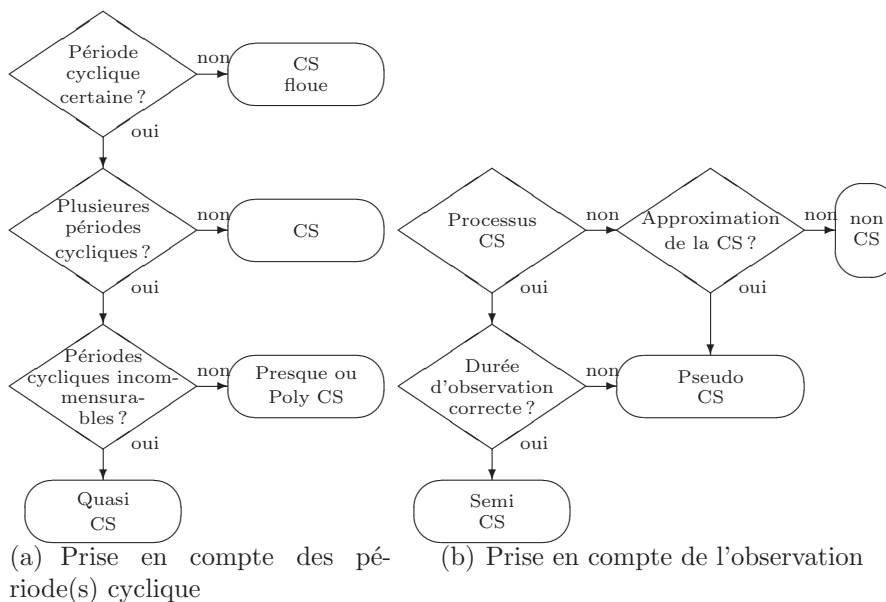


Figure 1.14: Détermination du type de cyclostationnarité



# Chapitre 2

## Re-échantillonnage angulaire

DANS le chapitre précédent, la cyclostationnarité a été définie. Toutes les définitions ont été introduites à l'aide de la variable angulaire ; la variable générique des machines tournantes. Néanmoins, les acquisitions dans le domaine angulaire dont nous rappellerons leur mise en œuvre technique sont peu courantes. Nous proposerons donc des méthodes de re-échantillonnage en fonction de l'angle à partir des signaux à variable générique temporelle. Ces méthodes seront comparées avec l'échantillonnage angulaire direct (plus couteux et contraignant du point de vue expérimental).

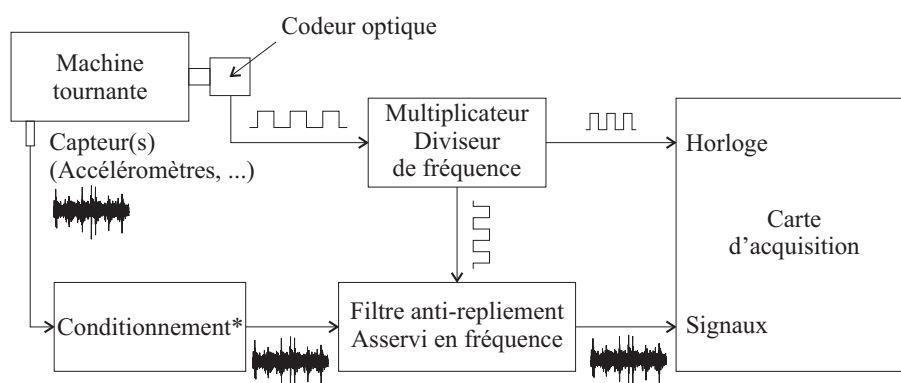
### 2.1 Échantillonnage angulaire “direct”

Le principe d'une chaîne d'acquisition angulaire est présenté sur la figure 2.1.

Un codeur angulaire fixé à un arbre de la machine tournante permet d'obtenir une information de position relative. Le codeur délivre un signal carré dont la fréquence est un multiple de la fréquence de rotation. Un top tour permet d'obtenir une position de référence utile pour la localisation.

Notre chaîne d'acquisition utilise un codeur optique incrémental.

Si le codeur optique fournit un signal à une fréquence “trop élevée” pour l'application (4096 fronts montants/tours par exemple), il est possible de réduire cette dernière à l'aide d'un diviseur de fréquence (compteur utilisé comme diviseur par  $2^n$ ). Ce signal sera alors



\* Sauf le filtre anti-repliement

Figure 2.1: Chaîne d'acquisition angulaire



utilisé comme horloge externe par la carte d'acquisition. Au LASPI, nous utilisons souvent 512 ou 1024 points/tour.

Comme dans toute chaîne d'acquisition classique, les signaux issus des capteurs sont conditionnés, amplifiés, puis préalablement filtrés.

La vitesse de la machine tournante peut varier au cours du temps, aussi la fréquence d'échantillonnage ainsi que la fréquence de Shannon/Nyquist varient également. Il est donc nécessaire de pouvoir changer la fréquence du filtre anti-repliement au cours de l'acquisition pour suivre ces variations de fréquence. Pour cela, il est possible d'utiliser un filtre anti-repliement à capacités commutées dont la fréquence de coupure dépend d'une fréquence externe. Sur le matériel utilisé au LASPI, cette fréquence doit être 100 fois plus élevée que la fréquence de coupure du filtre. Un multiplicateur de fréquence est alors nécessaire.

Pour de faibles fluctuations de vitesse, il est possible de simplifier le système. Dans ce cas, la fréquence du filtre anti-repliement est réglée pour satisfaire la condition de Nyquist correspondant à la vitesse la plus faible. On économise alors l'utilisation d'un multiplicateur de fréquence.

Un tel système (avec ou sans multiplicateur) présente des avantages importants :

- il fait réellement une acquisition angulaire, c'est la solution idéale,
- il n'est pas nécessaire de sur-échantillonner les signaux pour des post-traitements (on ne surdimensionnera donc pas la carte d'acquisition).

Néanmoins, il présente certains inconvénients [Potter, 1990] :

- Il est beaucoup plus onéreux que les autres systèmes et donc moins intéressant commercialement.
- Les contraintes sur l'équipement réduisent le choix (horloge externe, ...). La majorité des chaînes d'acquisition utilisent une horloge interne et ne disposent pas toujours d'entrée complémentaire permettant l'utilisation d'une horloge externe.
- Les multiplicateurs de fréquence n'arrivent pas à suivre les changements rapides de vitesse.
- Il est nécessaire de fixer un codeur optique sur l'arbre de la machine tournante. Cette opération coûteuse en temps, exclut l'utilisation de l'échantillonnage angulaire pour un contrôle systématique des pièces dans une chaîne de montage en grande série (par exemple, fabrication de moteurs).
- Il est nécessaire d'avoir prévu l'utilisation d'un codeur optique (place, arbre disponible pour fixer le codeur).

Tous ces inconvénients nous ont amenés à développer des algorithmes de *re-échantillonnage a posteriori*. Ces algorithmes permettent d'estimer le signal échantillonné angulairement à partir d'un signal échantillonné temporellement [Bonnardot et al., ] en exploitant un capteur de position, voire dans certaines applications aucun capteur.

## 2.2 Principe de l'échantillonnage angulaire a posteriori

Le re-échantillonnage angulaire a posteriori ou "order tracking" est une alternative intéressante à l'échantillonnage angulaire direct. Il n'est plus nécessaire d'investir dans une instrumentation coûteuse, et il est possible de travailler à la fois dans le domaine angulaire et dans le domaine temporel.

Dans ce chapitre nous allons présenter une méthode générale d'échantillonnage angulaire a posteriori. Des éléments seront ensuite modifiés afin de passer en revue les divers algorithmes : du plus simple basé sur l'utilisation du signal codeur, au plus élaboré ne nécessitant pas de codeur optique.

La figure 2.2 montre le principe du re-échantillonnage a posteriori :

Outre le signal à re-échantillonner  $x(n)$  (signal accélérométrique par exemple), un signal  $p(n)$  contenant une information sur la position (le codeur optique par exemple) est nécessaire. Ces deux signaux peuvent être identiques si on estime la position à partir du signal accélérométrique. Il est important de noter que ces signaux sont préalablement acquis temporellement.

Le but de ce paragraphe étant de décrire une méthode générale de re-échantillonnage nous considérons pour l'instant la partie estimation de position comme une boîte noire. En effet, mis à part cette partie, toutes les autres étapes sont les mêmes pour les algorithmes que nous allons présenter.

### 2.2.1 Estimation de la position et de la vitesse

Soit  $T_e$  la période d'échantillonnage. La suite  $\varphi_s(n)$  des positions de l'arbre correspondant aux échantillons  $x(n)$  est tout d'abord estimée à l'aide de  $p(n)$ . Cette étape va changer selon la méthode de re-échantillonnage employée. Elle fera l'objet d'un paragraphe entier. La position estimée ou phase  $\hat{\varphi}_s(n)$  (en radians) permet également de calculer la fréquence instantanée, c'est-à-dire la vitesse de l'arbre à l'aide de la relation :

$$f_{rot}(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left. \frac{d\varphi_s(t)}{dt} \right|_{t=nT_e} \quad (2.1)$$

Où la notation  $|_{t=nT_e}$  signifie évalué en  $t = nT_e$ .

La dérivation pouvant être approximé dans le domaine discret par des différences.

### 2.2.2 Filtre anti-repliement

Le re-échantillonnage implique le respect des conditions de Nyquist. Malheureusement, l'intervalle de temps entre chaque échantillon n'est pas constant. Le filtre anti-repliement numérique est donc configuré selon la plus basse fréquence de rotation instantanée ainsi

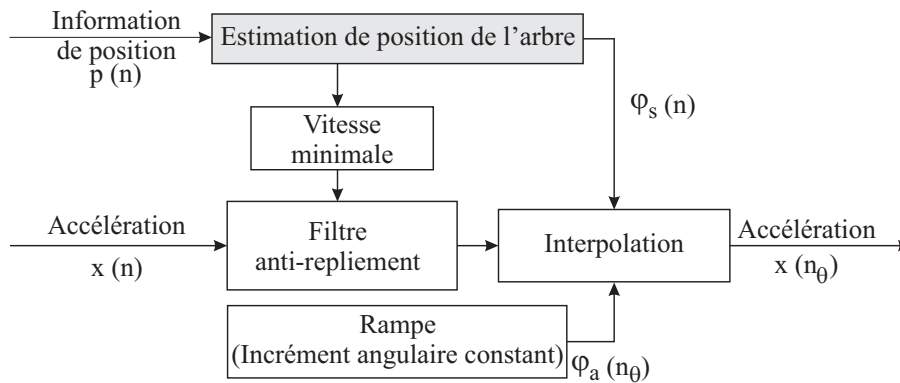


Figure 2.2: Re-échantillonnage a posteriori

que le nombre d'échantillons par tour désiré après re-échantillonnage  $spr$ . Le plus grand intervalle de temps entre deux échantillons dans le domaine angulaire est donné par :

$$\Delta n_{max} = \frac{1}{spr \cdot \min [f_{rot}(n)]} \text{ en seconde} \quad (2.2)$$

Dès lors la fréquence de Nyquist sera :

$$f_{Nyquist} = \frac{spr \cdot \min [f_{rot}(n)]}{2} \text{ en Hz} \quad (2.3)$$

Il faudra prendre garde à ne pas déphaser le signal lors du filtrage en utilisant, de préférence, un filtre *RIF* symétrique (en compensant le retard pur) ou un filtre du type forward-backward tel que la fonction "filtfilt.m" dans matlab. Le principe du filtrage forward-backward est de filtrer une première fois le signal, de le retourner, de filtrer la version retournée puis de le retourner une nouvelle fois (figure 2.3). Ce type de filtrage n'agit pas sur la phase mais élève au carré l'amplitude du filtre associé.

Comme la fréquence instantanée est une estimation, la fréquence de Nyquist est également une estimation. L'utilisation d'une marge de sécurité doit alors être envisagée.

En pratique, il est possible de contourner cette étape en choisissant  $spr$  tel que pour la fréquence d'échantillonnage  $f_{ech}$  :  $f_{Nyquist} > \frac{f_{ech}}{2}$ . Dans ce cas, l'intervalle entre deux échantillons angulaires sera toujours inférieur ou égal à l'intervalle entre deux échantillons temporels et le filtrage ne sera plus nécessaire. Si les fluctuations de vitesse sont faibles, la taille des signaux re-échantillonnés est alors voisine de la taille des signaux temporels.

### 2.2.3 Interpolation

A l'aide de  $\varphi_s(n)$ , il est possible par interpolation, d'estimer le signal accélérométrique pour des positions d'arbre correspondant à un incrément angulaire constant  $\varphi_a(n_\theta) = \frac{2\pi}{spr} \cdot n_\theta$ . La figure 2.4 illustre ce procédé pour un échantillon donné.

Des algorithmes détaillés de diverses méthodes d'interpolation se trouvent dans [Press et al., 2002]. Nous rappelons ci-dessous les 3 méthodes principales :

#### Fourier

L'interpolation de Fourier considère que le signal est à bande limitée et périodique. Ainsi, pour un signal correctement échantillonné (fréquence d'échantillonnage supérieure à deux fois la bande du signal), il est possible de reconstruire le signal pour n'importe quel instant en utilisant la formule :

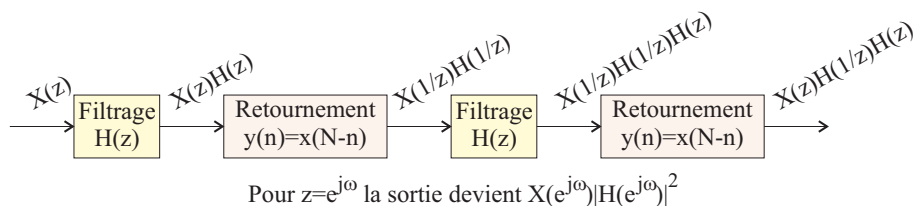
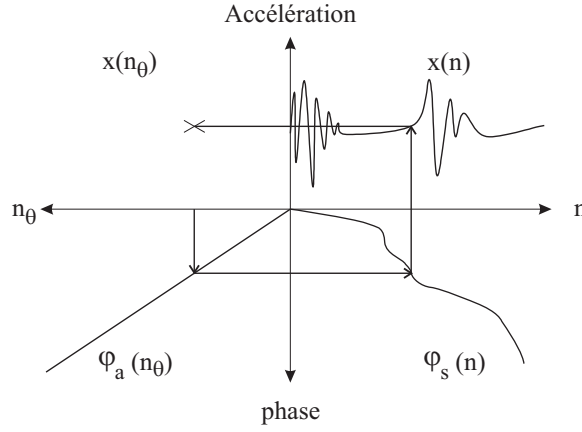


Figure 2.3: Principe du filtrage "forward-backward"


 Figure 2.4: *Interpolation*

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n \cdot \Delta_t) \cdot \frac{\sin[\pi(t - n \cdot \Delta_t)/\Delta_t]}{\pi(t - n \cdot \Delta_t)/\Delta_t} \quad (2.4)$$

Cette interpolation bien qu'idéale, doit être adaptée comme indiqué dans [Candocia et Principe, 1998] car le nombre de termes est infini.

### Interpolation polynomiale

L'interpolation polynomiale est basée sur la formule de Lagrange qui utilise un polynôme d'ordre  $N - 1$  pour interpoler  $N$  points :

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^N x(n \cdot \Delta_t) \cdot L_n^N(t) \quad (2.5)$$

où :

$$L_n^N(t) = \prod_{i=0, i \neq n}^N \frac{t/\Delta_t - i}{n - i} \text{ avec } n = 0, \dots, N \text{ (fonction de base de Lagrange)} \quad (2.6)$$

L'interpolation de Lagrange n'impose pas de contrainte de continuité sur les dérivées. Elle pourra ainsi générer des signaux interpolés dont la dérivée présente des discontinuités, alors qu'en général, les signaux réels ont des dérivées continues. Ceci est un gros inconvénient puisque la vocation de l'interpolation est d'estimer les valeurs du signal réel et ne doit donc pas supprimer ses propriétés.

### Splines

Les splines sont des morceaux de polynômes connectés ensemble "sans à coup" [Unser, 1999]. L'ordre  $k$  des splines correspond à l'ordre des polynômes (par exemple, pour  $k = 1$ , on utilise des droites). Le lissage entre chacun des polynômes est assuré par une contrainte de continuité sur les splines et leurs dérivées jusqu'à l'ordre

$k - 1$ . Des informations plus détaillées sur les splines peuvent être trouvées dans [Unser, 1999, de Boor, 2002, Lim et Macleod, 1996, McFadden, 1989, Unser et al., 1993].

Il est possible de considérer les splines comme des filtres et de calculer leur réponse impulsionnelle (figure 2.5(a)) et fréquentielle (2.5(b)) [McFadden, 1989].

Ces figures montrent le lien entre les splines et l'interpolation de Fourier. Pour un ordre infini, la réponse impulsionnelle des splines tend vers le sinus cardinal et la réponse fréquentielle vers le filtre passe bas idéal (cf. interpolation de Fourier dans [Candocia et Principe, 1998]). D'une certaine manière, les splines peuvent être considérées comme des filtres passe-bas, mais il ne faut pas perdre de vue que la fréquence de coupure de ce filtre est la fréquence de Nyquist du signal original (pour un ordre infini). Les splines sont une façon perfectionnée de relier des points comme sur du papier millimétré avec un stylo : si le signal n'est pas correctement échantillonné, les splines ne devineront pas les points manquants.

Il existe d'autres méthodes d'interpolation (fonction rationnelle, ...). Nous avons choisi d'utiliser les splines car elles imposent des contraintes de continuité, et elles se rapprochent de l'interpolation de Fourier.

Le signal re-échantillonné angulairement  $x(n_\theta)$  est obtenu à l'issue de l'interpolation. Nous allons maintenant nous intéresser à l'estimation de la position de l'arbre.

## 2.3 Estimation de position

### 2.3.1 Utilisation du codeur ou du top tour

Des méthodes basées sur le codeur ou le top tour ont été décrites et analysées dans [Fyfe et Munck, 1997] (en utilisant des signaux synthétiques). Dans [Potter, 1990] et [bru, 1995], il est possible de trouver une comparaison avec les anciennes méthodes et un exemple d'application commercial.

Ces méthodes utilisent une chaîne d'acquisition temporelle. Le signal issu, soit du codeur, soit du top tour (le plus souvent), est acquis en parallèle avec les autres signaux. Les autres étapes sont réalisées de manière logicielle.

Tout d'abord, le temps d'arrivée de l'impulsion issue du codeur est calculé en utilisant un détecteur de front montant. La méthode la plus simple consiste à détecter le passage d'un seuil. Il est possible d'améliorer la précision en prenant en compte les échantillons suivants et précédents afin de réaliser une interpolation. La figure 2.6 compare ses deux approches. Le signal avant échantillonnage est en pointillé et les échantillons sont représentés par des ronds. Cette figure montre clairement l'apport de l'interpolation. Il est nécessaire d'utiliser une fréquence d'échantillonnage élevée vis à vis de la bande passante des signaux mécaniques pour détecter avec précision l'instant de franchissement du seuil. On sur-échantillonne donc les autres signaux (seules quelques cartes d'acquisitions permettent d'utiliser des fréquences d'échantillonnage différentes pour certains canaux).

Une fois les impulsions détectées, la position de l'arbre est estimée. Soit le nombre d'impulsions par tour  $ppr$  fourni par le codeur ( $ppr = 1$  dans le cas d'un top tour). Chaque instant détecté correspond à un incrément angulaire de  $\Delta_\theta = \frac{2\pi}{ppr}$ . Dans [Fyfe et Munck, 1997], l'interpolation est faite à l'aide d'un polynôme d'ordre 2 :

$$\theta(t) = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 \quad (2.7)$$

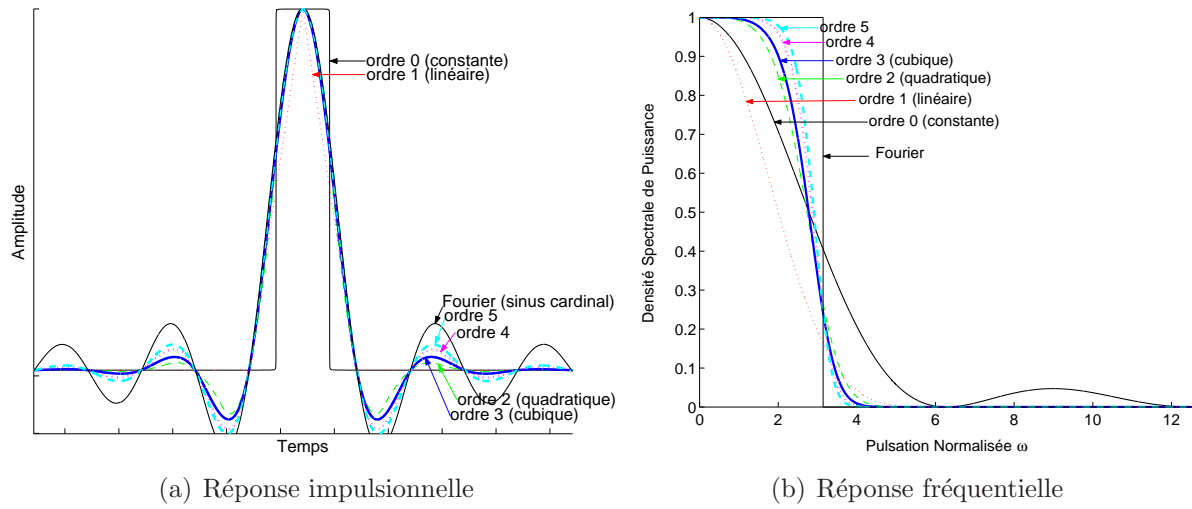


Figure 2.5: Caractérisation des splines

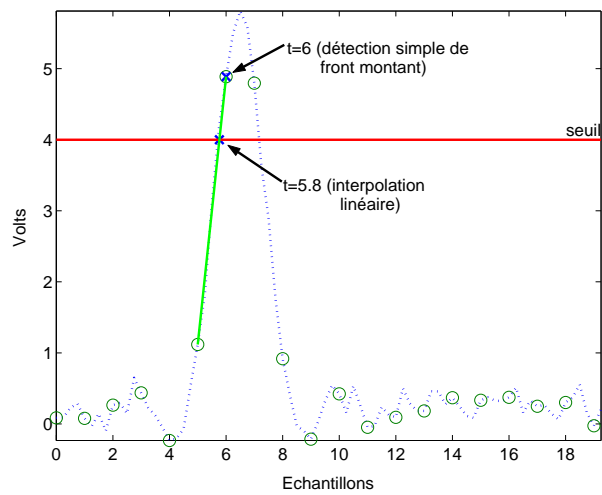


Figure 2.6: Détection des fronts montants

La résolution de cette équation fournit la position ou phase en fonction du temps et donc  $\varphi_s(n)$  aux instants d'échantillonnage. Cette méthode d'interpolation pourra être remplacée par des splines lorsque l'on n'a pas de contrainte de temps réel. Il est alors ensuite possible d'utiliser l'algorithme général d'échantillonnage a posteriori.

Bien que l'interpolation où l'équation 2.7 soit capable de fournir la phase à n'importe quel instant, la précision est limitée par le nombre de points par tour. En effet, si le signal tachymétrique est un top tour, on ne pourra pas obtenir une précision supérieure au tour. La vitesse estimée à l'intérieur du tour sera donc une vitesse moyenne lissée. Il conviendra donc de déterminer le nombre de points par tour selon la finesse de l'analyse choisie ou des contraintes matérielles. Un re-échantillonnage au top tour permettra d'obtenir des signaux avec un nombre constant de points par tour, mais ne compensera pas les variations de vitesse à l'intérieur du tour. Dès lors, ces variations de vitesse non compensées se retrouveront dans la contribution résiduelle (c'est-à-dire non périodique du signal). Nous étudierons la différence entre les signaux top tour et codeur optique plus loin. Fort heureusement les fluctuations de vitesse restent faibles (quelques pour mille voire quelques pour cent), dès lors, la contribution résiduelle engendrée sera de faible énergie. Néanmoins, cette erreur deviendra de plus en plus préjudiciable pour des méthodes de diagnostic travaillant en "hautes fréquences" (relativement au signal tachymétrique) puisque la reconstruction sera basée sur un signal basse fréquence dans le cas d'un top tour. Dans [Fyfe et Munck, 1997], il est conclu qu'en théorie l'augmentation du nombre de points par tour doit apporter une amélioration. Néanmoins, il n'a été trouvé aucun test pour étayer cet argument. Cela s'explique notamment par l'inertie de la machine qui limite les fluctuations de vitesse haute fréquence, en agissant comme un filtre passe bas. Cette limitation réduit le nombre de points par tour minimal nécessaire pour obtenir de "bons résultats".

Une méthode hybride a été proposée dans [Bossley et al., 1999] : K.M. Bossley propose d'adjoindre à la carte d'acquisition un compteur rapide (c'est-à-dire un trigger analogique). La détection du top tour n'étant plus faite de manière logicielle mais matérielle, il n'est donc plus nécessaire de sur-échantillonner le signal. De plus, comme les mesures sont faites de manière externe elles sont plus précises.

Une implantation temps réel de cette méthode peut être trouvée dans [Crapart, 1995].

Ces techniques ne nécessitent plus de chaîne d'acquisition angulaire mais imposent encore l'utilisation d'un codeur. C'est pourquoi nous proposons de nouvelles méthodes exploitant l'information contenue dans le signal accélérométrique [Bonnardot et al., ] et [Bonnardot et al., 2004b]. Les méthodes suivantes ont été développées pour des signaux d'engrenages.

### 2.3.2 Démodulation autour de la fréquence d'engrènement

Cette méthode repose sur l'utilisation du signal accélérométrique (moyennant certaines contraintes notamment sur les variations de vitesse). La fréquence d'engrènement résultant des contacts entre les dents est utilisée afin de déterminer la position de l'arbre.

#### Modèle d'un engrenage

Le modèle présenté par McFadden dans [McFadden, 1986] et plus récemment dans [Wang, 2001] est utilisé :

$$x(n) = \sum_{m=0}^M X_m [1 + a_m(n)] \cdot \cos [2\pi m T f_1 n + \Phi_m + b_m(n)] \quad (2.8)$$

Où :

- $f_1$  est la fréquence de rotation de l'arbre,
- $T$  est le nombre de dents de la roue présente sur l'arbre d'entrée,
- $T f_1$  est la fréquence d'engrènement,
- $m$  est le numéro de l'harmonique de la fréquence d'engrènement ( $m=1$  pour le fondamental),
- $X_m$  est l'amplitude de l'harmonique de fréquence  $m T f_1$ ,
- $\Phi_m$  est la phase initiale,
- $a_m(n)$  et  $b_m(n)$  sont les fonctions de modulation d'amplitude et de phase.

Les fonctions  $a_m(n)$  et  $b_m(n)$  sont induites par la rotation des deux roues et comportent également des informations sur leurs imperfections (dans le modèle original, elles étaient utilisées pour représenter un défaut local d'une dent). Dès lors,  $a_m$  est composée de deux signaux périodiques selon la période de rotation de la roue menante et de la roue menée ( $\frac{1}{f_1}$  et  $\frac{1}{f_2}$ ). Plus de détails concernant les signaux vibratoires sont répertoriés dans [Randall, 1982] et [El Badaoui et al., 2001].

La figure 2.7 montre le spectre d'un tel signal sans fluctuation de vitesse (banc d'essais du LASPI). Il est composé :

- d'un pic à la fréquence d'engrènement  $f_{mesh} = T f_1$  et ses harmoniques  $m \cdot f_{mesh}$  (mis en évidence par un cercle sur la figure 2.7),
- de bandes latérales : pics espacés de  $q \cdot f_1$  (marqueur carré sur la figure 2.7) et de  $(p \cdot f_2)$  (croix sur la figure 2.7) aux alentours de la fréquence d'engrènement (et de ses harmoniques)  $m \cdot f_{mesh}$ . Ces bandes latérales sont dues à la modulation d'amplitude  $a_m(n)$  du signal d'engrènement par les roues.

$x(n)$  est ensuite convolué avec la réponse de la structure mécanique.

D'après le modèle, la fréquence de l'arbre  $f_1$  et donc sa position (ou phase) est contenue dans la version temporelle du signal. Il sera alors exploité afin d'estimer la position de l'arbre en vue de faire du re-échantillonnage angulaire.

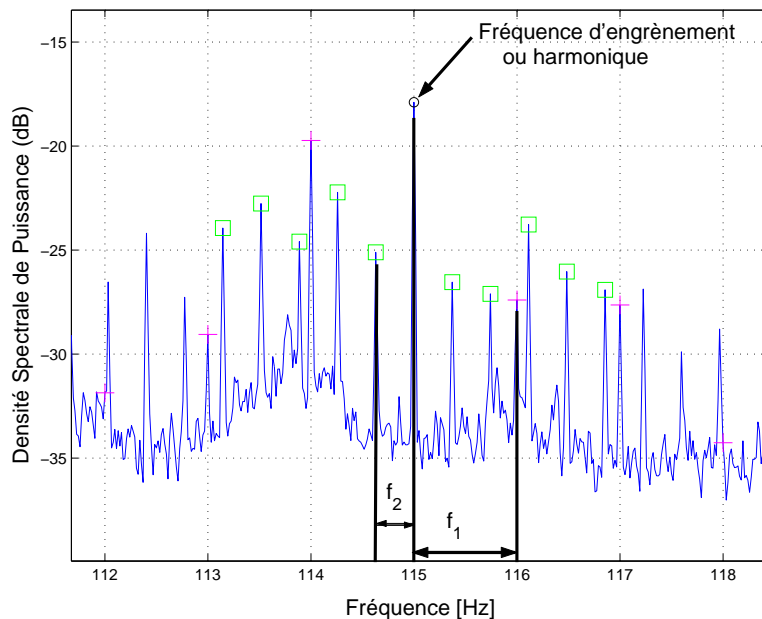
### Estimation de position et de vitesse

Afin de prendre en compte les fluctuations de vitesse, il est nécessaire de remplacer  $f_1$  par  $f_1(n)$  dans 2.8. Chaque fréquence notée sans  $(n)$  sera maintenant considérée comme une fréquence moyenne. La modulation de phase  $b_m(n)$  sera alors interprétée comme une fluctuation de vitesse et sera incluse dans  $f_1(n)$ . Nous ne nous intéressons pas ici au système de type broyeur de pierres où la vitesse est fortement liée aux pierres concassées c'est-à-dire à la charge. Nous considérons également que le régime est établi. Le modèle devient alors :

$$x(n) = \sum_{m=0}^M X_m [1 + a_m(t)] \cdot \cos \left[ \int_0^t 2\pi m T f_1(t) dt + \Phi_m \right] \Big|_{t=nT_e} \quad (2.9)$$

Un filtre passe bande centré sur la fréquence d'engrènement (ou une de ses harmoniques)  $m \cdot f_{mesh}$  et excluant les bandes latérales et autres perturbations permet d'isoler





**Figure 2.7:** *Spectre d'un signal d'engrenage sans fluctuation de vitesse*

la fréquence d'engrènement (ou une de ses harmoniques). Le réglage de la bande passante doit être réalisé en observant le spectre avec une bonne résolution fréquentielle.

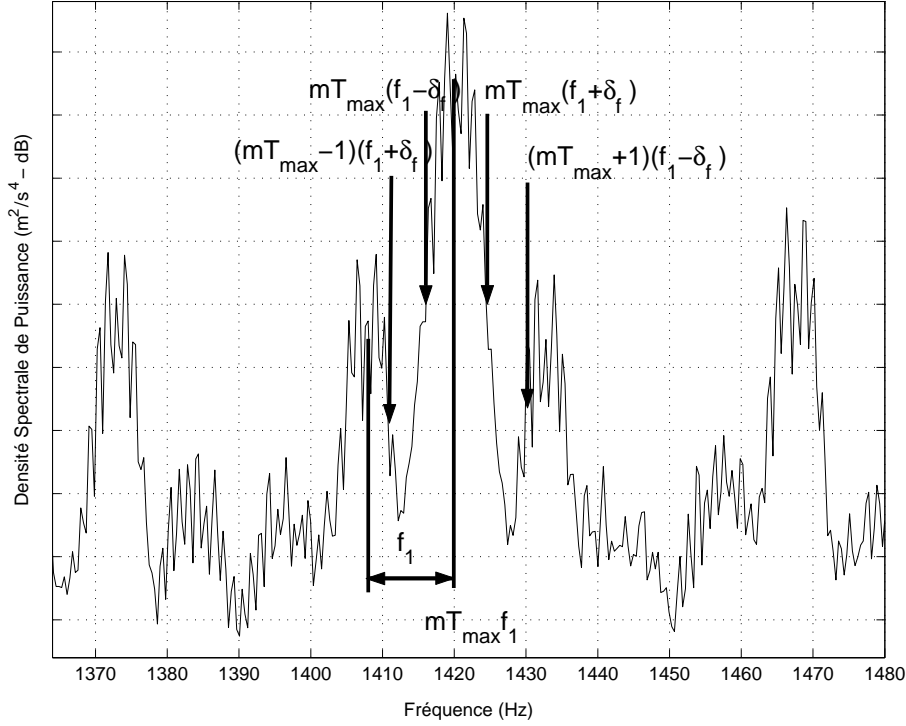
Comme la vitesse fluctue avec le temps, les pics sont remplacés par une distribution autour de la fréquence moyenne, des “collisions” sont alors possibles entre les harmoniques et les bandes latérales dans le spectre (cf. figure 2.8 pour un cas extrême issu du banc d'essais du LIS avant changement des engrenages). Si les variations de vitesse sont trop importantes, le motif associé à la fréquence d'engrènement va recouvrir les bandes latérales rendant impossible l'estimation à l'aide de notre méthode. En effet, après le filtrage passe bas, deux fréquences seront présentes au lieu d'une.

Afin d'étudier l'effet de la variation de vitesse sur le filtre, nous allons considérer une variation de fréquence maximale  $\delta_f$ . Dans un contexte stochastique, il peut être délicat de parler de maximum. Dès lors, nous pourrions, au lieu d'utiliser le maximum, caractériser cette variation en mesurant son écart type. Par exemple, dans le cas gaussien, interpréter  $\delta_f$  comme deux fois l'écart-type de la fluctuation de vitesse, permettrait de prendre en compte 90 % de la distribution de la vitesse.

Soit  $T_{max}$ , le nombre maximal de dents des deux roues (menantes et menées),  $f_1$  la vitesse minimale moyenne, et,  $m$  l'harmonique de  $f_{mesh}$  utilisée. La fluctuation maximale de vitesse qui ne cause pas de recouvrement est :

$$\delta_{f_{max}} = \frac{f_1}{1 + 2mT_{max}} \approx \frac{f_1}{2mT_{max}} \quad (2.10)$$

Par exemple, pour  $m = 1$ , si la fréquence de rotation de l'arbre est de  $f_1 = 23.6 \text{ Hz}$ , si la seconde roue à  $T_{max} = 62$  dents (1<sup>er</sup> étage de l'engrenage du LASPI), la fluctuation de vitesse maximale pour l'arbre d'entrée sera de  $0.1 \text{ Hz}$  ou  $0.4 \%$  de  $f_1$ . Plus l'harmonique est élevée, plus la bande deviendra étroite. Cet exemple montre l'inconvénient majeur de cette méthode : elle impose une fluctuation de vitesse faible. Si cette contrainte est



**Figure 2.8:** *Spectre d'un signal d'engrenage avec fluctuation de vitesse*

respectée, le filtre va extraire exclusivement et en totalité l'harmonique d'engrènement choisie. Il est important de préciser que la fréquence des variations de vitesse obtenue ne peut excéder la demi-largeur de bande qui est inférieure à la fréquence de rotation la plus basse (si l'on respecte la condition 2.10). En conséquence, les variations de vitesse à l'intérieur du tour sont invisibles : les possibilités de re-échantillonnage par cette méthode sont équivalentes au top tour.

$$y(n) = X_m \cdot \cos \left[ \int_0^t 2\pi m T f_1(t) dt + \Phi_m \right] \Big|_{t=nT_e} \quad (2.11)$$

Si la fluctuation de vitesse est trop importante, nous aurons une version erronée de la variation de vitesse au lieu de  $f_1(n)$ .

L'extraction de la phase instantanée ou position de l'arbre est réalisée grâce au signal analytique :

$$s_a(n) = X_m \cdot \exp \left[ \int_0^t 2\pi j m T f_1(t) dt + j\Phi_m \right] \Big|_{t=nT_e} \quad \text{où } j^2 = -1 \quad (2.12)$$

Son utilisation n'est valide que si le signal ne contient qu'une composante fréquentielle comme exigé précédemment (voir [Boashash, 1992] pour plus d'information). La phase déballée (c'est-à-dire dans  $\mathbb{R}$  et non  $]-\pi, \pi]$ ) est ensuite extraite de ce signal (complexe) :

$$\phi(n) = \left[ \int_0^t 2\pi m T f_1(t) dt + \Phi_m \right] \Big|_{t=nT_e} \quad (2.13)$$

La position angulaire de l'arbre de l'engrenage est obtenue en divisant cette phase par le nombre de dents ainsi que par le rang de l'harmonique utilisée :

$$\varphi_s(n) = \frac{\phi(n)}{mT} = \left[ \int_0^t 2\pi f_1(t) dt + \frac{\Phi_m}{mT} \right] \Big|_{t=nT_e} \quad (2.14)$$

La connaissance de la cinématique de l'engrenage (nombre de dents de chaque roue) est nécessaire pour calculer la fréquence d'engrènement, mais ce n'est pas un inconvénient car sa connaissance est en générale requise pour faire du diagnostic.

### Influence du bruit

Le modèle d'engrènement présenté dans (2.8) et sa version filtrée (2.11) ne font pas apparaître de bruit. On suppose donc implicitement que ce dernier est négligeable. Nous allons maintenant étudier l'influence du bruit en faisant quelques hypothèses. Le signal après filtrage sera modélisé par :

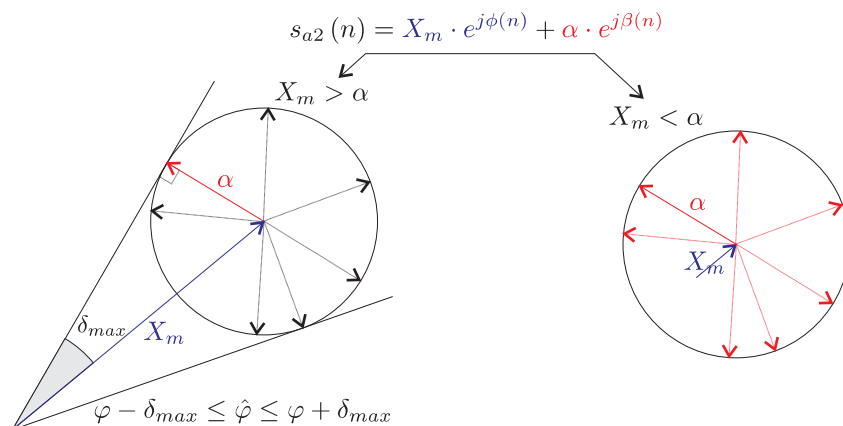
$$s_{a2}(n) = X_m \cdot e^{j\phi(n)} + b(t) \quad (2.15)$$

Où le deuxième terme  $b(t)$  représente le bruit. Ce terme pourra être écrit sous la forme  $b(t) = a(n) \cdot e^{j\beta(n)}$  sans aucune restriction sur la phase  $\beta(n)$ . On pourra donc interpréter  $s_{a2}$  géométriquement comme une somme de deux vecteurs. Afin de pouvoir définir un rapport signal à bruit, nous nous placerons dans le pire des cas, c'est-à-dire  $a(n) = \alpha$  où  $\alpha$  est l'amplitude maximale. Le rapport signal à bruit  $rsb$  sera alors défini par :

$$rsb = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{X_m}{\alpha} \right) \quad (2.16)$$

La figure 2.9 représente graphiquement  $s_{a2}(n)$  pour un échantillon  $n$  donné. Il existe deux cas.

- Si  $X_m > \alpha$  ( $rsb > 0$  dB), le vecteur associé aux valeurs possibles du bruit décrit un cercle de diamètre  $\alpha$ . L'erreur de phase maximale  $\delta_{max}$  correspond alors à l'angle entre  $X_m$  et la tangente au cercle passant par l'origine. On aura donc une erreur de phase maximale :



**Figure 2.9:** Interprétation graphique de l'erreur sur la phase

$$\delta_{max} = \arcsin\left(\frac{\alpha}{X_m}\right) \quad (2.17)$$

$$= \arcsin\left(10^{-rsb/20}\right) \quad (2.18)$$

- Si  $X_m < \alpha$  ( $rsb < 0$  dB), le bruit majoritaire impose sa propre phase. La phase n'a donc plus aucune signification.

La figure 2.10 montre l'erreur de phase maximale commise en fonction du rapport signal sur bruit. Elle est très sensible au bruit puisque pour  $rsb = 20$  dB, l'erreur est de  $5.7^\circ$ . Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que la phase est estimée à partir d'une fréquence d'engrènement. Dès lors, cette erreur est divisée, d'une part par le rang de l'harmonique et d'autre part par le nombre de dents de l'arbre, soit une précision de  $\frac{5.7}{4 \times 23} = 0.06^\circ$  sur notre banc d'essai si on se base sur l'harmonique  $4 \cdot f_{mesh}$ .

L'estimation de position basée sur la démodulation autour de la fréquence d'engrènement exploite un modèle de signal d'engrenages mais ne prend pas en compte l'aspect cyclostationnaire. En observant les signaux accélérométriques issus d'engrenages, l'idée de recalibrer (ou synchroniser) les cycles les uns par rapport aux autres afin de réduire les fluctuations de vitesse nous est apparue de manière assez intuitive. Le paragraphe suivant présente cette méthode.

### 2.3.3 Utilisation de similitudes

Les signaux vibratoires d'engrenage sont cyclostationnaires dans le domaine angulaire. La contribution cyclostationnaire à l'ordre 1 (périodique) représentant une part importante de l'énergie du signal, nous avons eu l'idée de tirer parti des similitudes d'aspect entre les cycles.

Le champ d'application de cette méthode est beaucoup plus étendu que la méthode précédente limitée aux engrenages : cette méthode est valable pour tous signaux présentant une composante cyclostationnaire à l'ordre 1 (similitudes).

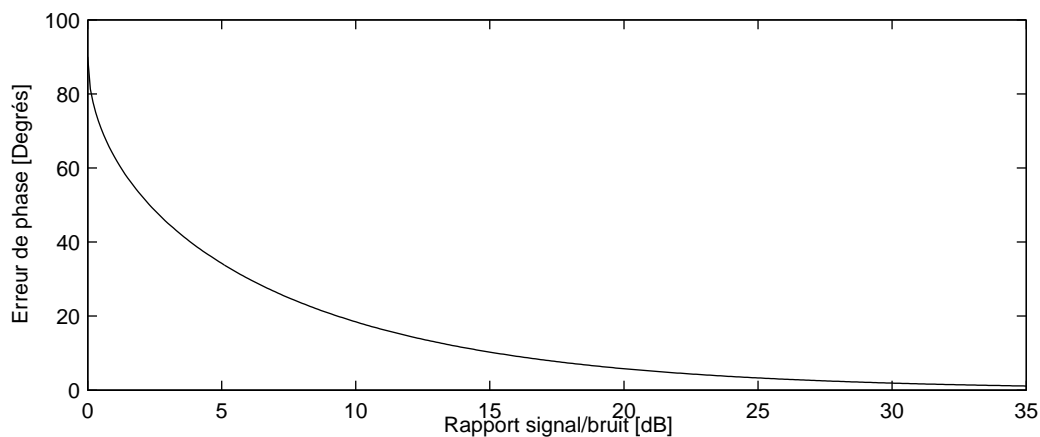


Figure 2.10: Erreur de phase en fonction du rapport signal à bruit

## Modèle

Un engrenage contenant plusieurs étages possède plusieurs périodes cycliques  $T_i$  dans un rapport rationnel entre elles. Chacune d'elle est un diviseur d'une période commune  $T_{com}$ . Pour faire apparaître les similitudes, le signal accélérométrique sera modélisé par la somme de contributions périodiques provenant de chacune des roues de périodes  $\{T_1, \dots, T_j\}$ . Les interactions entre chacune des roues, les contributions des autres composants mécaniques et le bruit seront contenus dans un terme  $b(\theta)$ . On pourra alors utiliser l'approximation suivante :

$$x(\theta) \approx \sum_{i=1}^J p_i(\theta) * \mathbb{W}_{T_i} + b(\theta) \quad (2.19)$$

Où  $\mathbb{W}_{T_i}$  est un peigne de Dirac convolué au signal  $p_i(\theta)$  émis pendant un tour de la  $i^{\text{ème}}$  roue. Il est alors possible d'interpréter chaque période comme un écho de la première. C'est pourquoi nous proposons d'utiliser un détecteur d'échos tel que le cepstre [Bonnardot et al., 2004b].

Afin de pouvoir décrire la méthode de re-échantillonnage, nous allons tout d'abord introduire le cepstre et présenter quelques unes de ses propriétés de manière rapide.

## Le cepstre

L'efficacité du cepstre pour l'analyse vibratoire des machines tournantes a été démontrée par R.B. Randall en 1975 dans [Randall, 1975] et plus récemment dans [El Badaoui et al., 2004].

Le cepstre a été introduit par Bogert afin de détecter des échos. Il a été défini par :

$$\tilde{s}(t) = TF^{-1} [Ln |TF(s(t))|] \quad \text{où TF correspond à la transformée de Fourier} \quad (2.20)$$

La variable  $t$  dans  $\tilde{s}(t)$  n'est plus appelée temps mais quérence.

## Propriétés du cepstre

Ce paragraphe liste les propriétés du cepstre, leurs démonstrations sont faites notamment dans [El Badaoui, 1999].

1. Le cepstre transforme la convolution (notée  $*$ ) en addition :

$$\text{si } s(t) = x(t) * y(t) \quad (2.21)$$

$$\text{alors } \tilde{s}(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{y}(t) \quad (2.22)$$

2. Le cepstre d'un signal de durée finie est de durée infinie

3. Cepstre d'un écho simple :

Un signal  $s_{e_{a,g}}(t)$  entaché d'écho (décalage) peut être modélisé par :

$$s_{e_{a,g}}(t) = s(t) * [\delta + g \cdot \delta_a] \quad (2.23)$$

$$= s(t) * e_{a,g}(t) \quad (2.24)$$

où  $e_{a,g}(t)$  est le terme d'écho simple de décalage  $a$  et de gain  $g$

Un tel signal a pour cepstre :

$$\tilde{s}_{e_{a,g}}(t) = \tilde{s}(t) + \tilde{e}_{a,g}(t) \quad (2.25)$$

Où :

$$\tilde{e}_{a,g}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{(-1)^{(n-1)}}{2|n|} \cdot \delta_{na} \quad (2.26)$$

La figure 2.11 montre le cepstre d'un tel signal. Comme on peut le constater sur la figure,  $\tilde{s}(t)$  est fortement décroissant et confiné à l'origine. La présence du peigne alterné  $\tilde{e}_{a,g}$ , fait du cepstre un outil très intéressant pour la détection d'échos.

4. Le cepstre est d'autant plus sensible que le signal de base  $s(t)$  est de type large bande. La figure 2.12 montre le cepstre d'un bruit blanc ajouté à sa version décalée. Par ailleurs, on comprend bien qu'une sinusoïde ajoutée à sa version décalée reste une sinusoïde et que le cepstre sera donc incapable d'y voir un écho.

5. Cepstre d'un écho multiple :

Il est possible de généraliser la modélisation précédente afin d'introduire l'écho multiple noté :

$$em_{a,N} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{na} \text{ pour } N - 1 \text{ échos} \quad (2.27)$$

Un signal  $s_{em_{a,N}}$  entaché d'échos multiples peut alors être modélisé par :

$$s_{em_{a,N}}(t) = s(t) * em_{a,N}(t) \quad (2.28)$$

Dans ce cas son cepstre est :

$$\tilde{s}_{em_{a,N}}(t) = \tilde{s}(t) + \tilde{e}_{m_{a,N}}(t) \quad (2.29)$$

Où :

$$\tilde{e}_{m_{a,N}}(t) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{2|n|} \delta_{nNa} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{2|n|} \delta_{na} \quad (2.30)$$

C'est-à-dire un peigne positif décroissant au pas  $a$  plus un peigne négatif décroissant au pas  $Na$ . La taille des signaux étant de l'ordre de  $Na$ , le peigne négatif est entièrement replié, donc, inexploitable.

Lorsque le signal contient  $M$  termes d'échos multiples, son cepstre contient  $M$  peignes positifs décroissants au pas correspondant (figure 2.13). La somme des premiers pics des  $M$  peignes est égale à 0.5 et la distribution des amplitudes est celle de la racine carrée de l'énergie des motifs auxquels chaque peigne est convolué.

6. Influence du bruit :

Le bruit diminue l'amplitude des diracs. L'amplitude du premier pic de  $\tilde{e}_{a,g}$  ou  $\tilde{e}_{m_{a,N}}$  est de 0.5 dans le cas non bruité. Dans le cas bruité, cette valeur est multipliée par  $\frac{1}{1+B}$  où  $B$  est l'écart type du bruit supposé blanc [El Badaoui, 1999]. Ainsi, plus le signal sera bruité, plus les diracs seront noyés dans le bruit de fond du cepstre, et plus leur détection sera ardue.

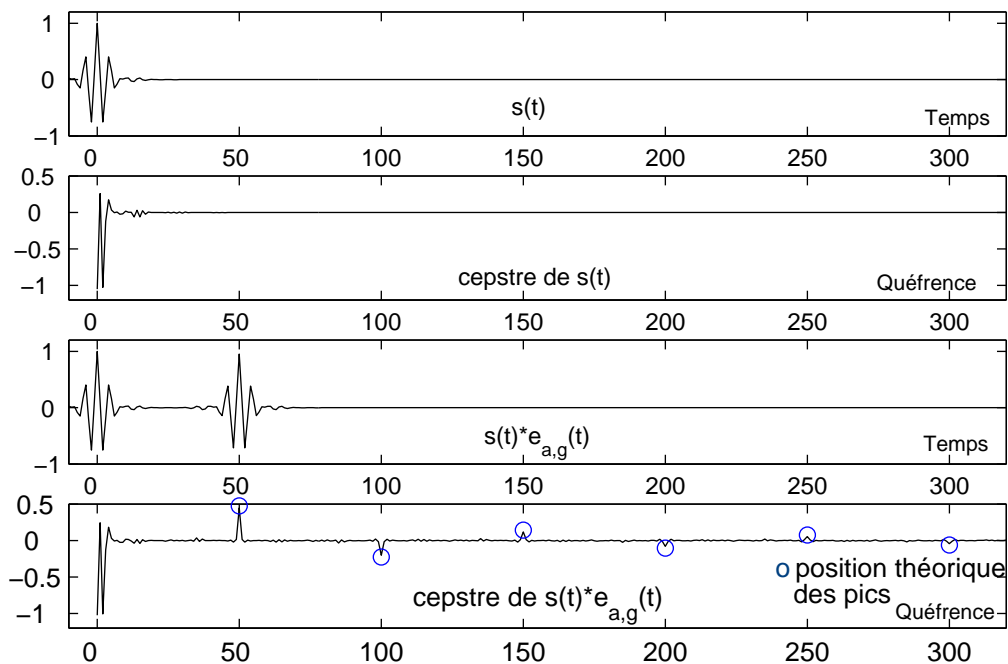


Figure 2.11: *Cepstre d'un écho simple*

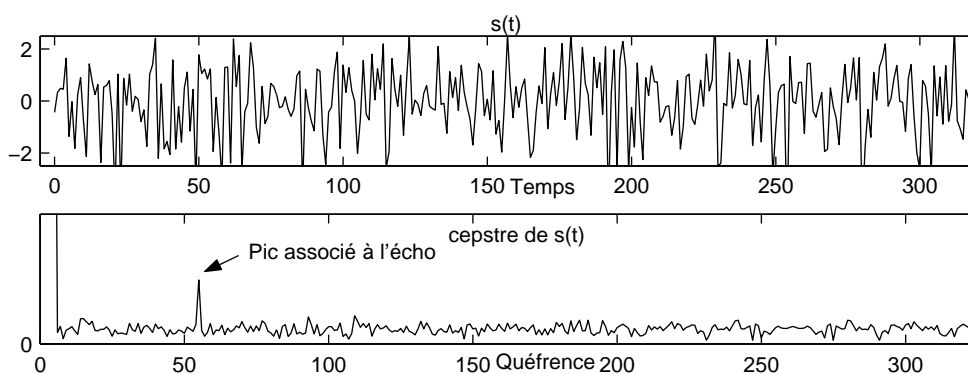


Figure 2.12: *Cepstre d'un écho simple (bruit)*

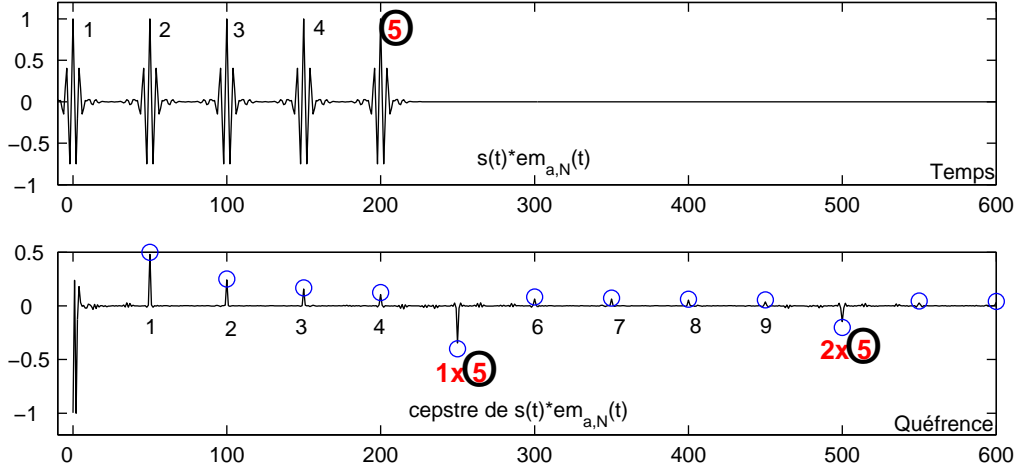


Figure 2.13: Cepstre d'un écho multiple

#### 7. Distribution des décalages :

Si le décalage est distribué autour d'un décalage moyen  $a$ , le terme d'écho est noté :

$$e_{a,g} = \delta + g * \delta_a \quad (2.31)$$

où  $g$  représente cette distribution. Alors, il admet comme cepstre [Fournel et al., 1992] :

$$\tilde{e}_{a,g} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{|n|}} g^{*n}(t) * \delta_{na} \quad (2.32)$$

Où  $g^{*n}(t)$  correspond à  $g(t)$  convolué  $n - 1$  fois avec lui même.

Dans un écho multiple, si les pics du cepstre sont distribués, le premier pic du cepstre reproduit cette distribution.

Tout l'intérêt du cepstre réside dans l'homomorphisme : les motifs périodiques ainsi que la réponse impulsionnelle de la structure contenus dans  $\tilde{p}_i(\theta)$  se trouveront surtout au début du cepstre (leur contribution décroît assez vite), et seront nettement différenciés des diracs associés à la périodicité. La figure 2.14 montre les premiers points du cepstre d'un signal d'engrenage. On distingue clairement les pics associés à l'arbre d'entrée  $n \cdot T_1$  et à l'arbre de sortie  $m \cdot T_2$ .

### Estimation de position basée sur le cepstre

L'emploi du cepstre, sur des signaux temporels avec des fluctuations de vitesse, contraint à se limiter à un écho, c'est-à-dire, deux tours de l'arbre étudié. En effet, utiliser plus de tours contribuerait d'une part à remplacer les diracs par une distribution dispersant l'énergie et d'autre part, fournirait une position moyennée sur plusieurs tours alors que l'on veut estimer une position instantanée. L'utilisation du cepstre sur 2 tours permet en théorie d'obtenir l'équivalent d'un top tour puisque la position est estimée pour chaque tour.



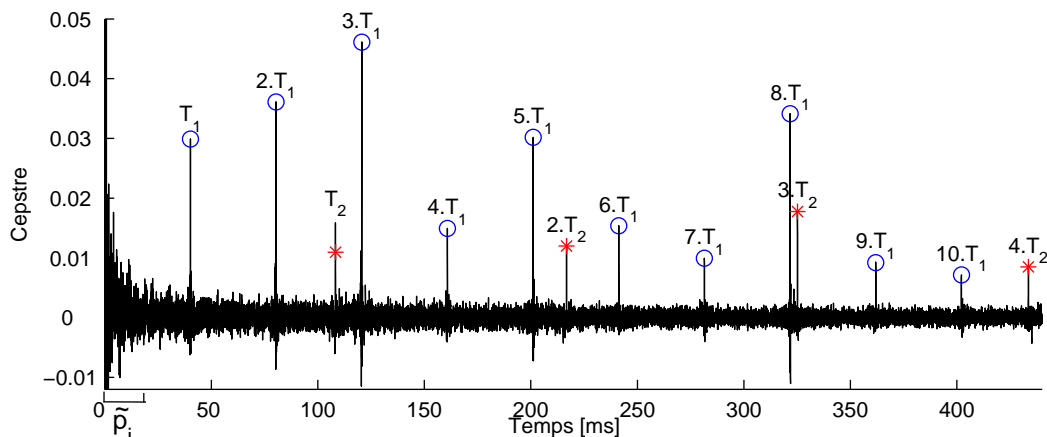
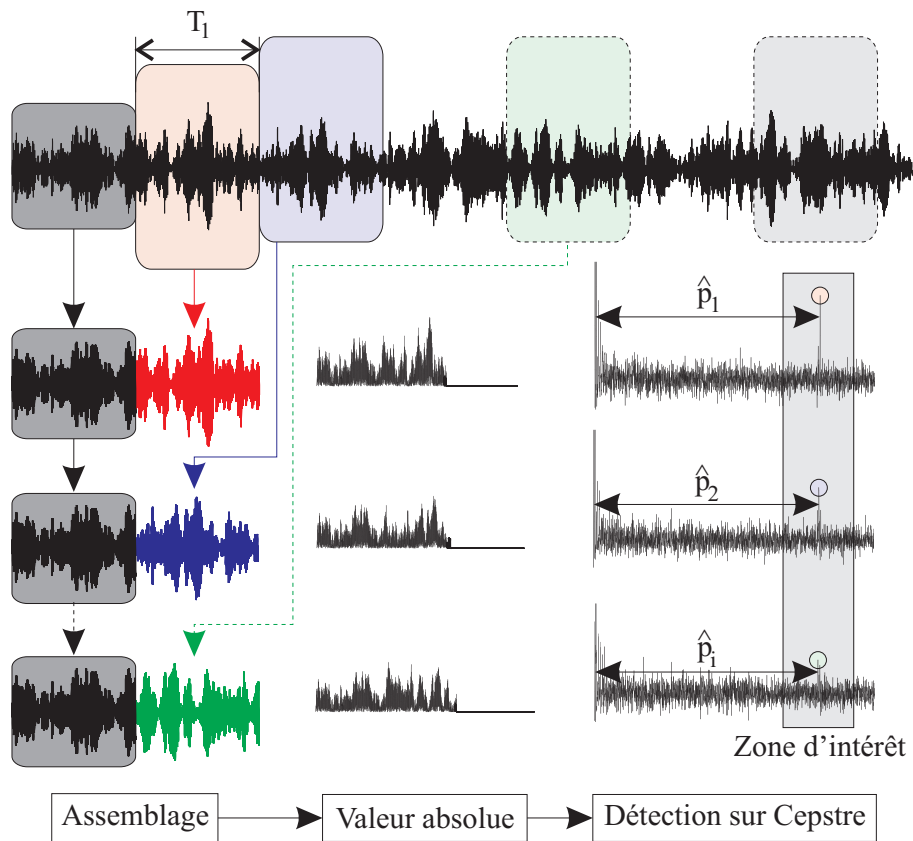


Figure 2.14: Cepstre d'un signal d'engrenage

A priori, le cepstre pourrait être calculé sur une fenêtre glissante afin d'estimer le “décalage” entre le  $k^{\text{ème}}$  tour et le  $(k + 1)^{\text{ème}}$  tour. Un calcul par intégration permettant d'en déduire la phase. Néanmoins, l'intégration produirait une accumulation des imprécisions de positions locales et serait préjudiciable au re-échantillonnage. C'est pourquoi nous allons prendre le signal accélérométrique du premier tour comme référence et le comparer successivement aux autres tours.

La méthode est présentée sur la figure 2.15. Cette méthode nécessite la connaissance de la période approximative de rotation de l'arbre d'entrée  $T_1$  obtenue en calculant le cepstre sur tout le signal ( $T_1$  est alors le centre de gravité du 1<sup>er</sup> pic du cepstre).

- Le signal est tout d'abord découpé en blocs de taille  $T_1$  correspondant environ à un tour.
- Pour estimer la phase instantanée du  $i^{\text{ème}}$  bloc, nous créerons un signal composé du 1<sup>er</sup> bloc de taille  $T_1$  et du  $i^{\text{ème}}$  bloc de taille légèrement supérieure mis côte à côte.
- Malheureusement, cet assemblage produit inévitablement une discontinuité à laquelle le cepstre est sensible. Cette discontinuité peut être représentée sous la forme d'un écho simple correspondant au décalage  $T_1$ . En raison de sa sensibilité aux motifs large bande, le cepstre de cette discontinuité peut être plus important que celui recherché associé à un signal composé en majeure partie de sinusoides (cf. figure 2.16). La solution à ce problème est d'utiliser la valeur absolue du signal afin de créer beaucoup plus de discontinuités soumises au décalage recherché.
- Le signal est alors prolongé par des 0 pour éviter le phénomène de recouvrement dû à la taille infinie du cepstre [El Badaoui, 1999], puis le cepstre est calculé à l'aide de l'équation (2.20).
- On obtient alors un pic situé à l'abscisse correspondant au décalage recherché (proche de  $T_1$ ). Après traitement de tous les blocs, on a une suite de décalages distribués autour de  $T_1$  (si l'on était déjà dans le domaine angulaire, toutes ces abscisses seraient égales à  $T_1$ ). Pour donner de la robustesse à l'algorithme, la recherche du décalage sera restreinte à l'intérieur d'une zone d'intérêt autorisant une fluctuation de quelques échantillons par rapport au décalage précédent. Plusieurs maximums locaux seront détectés et le plus proche de la période précédente sera retenu. Un sur-échantillonnage des signaux permettra d'améliorer l'estimation de l'abscisse du pic.



**Figure 2.15:** Estimation de position à l'aide du cepstre

- La phase ou la position angulaire de l'arbre d'entrée (en rad/s) associée au  $i^{\text{ème}}$  bloc de taille  $T_1$  est estimée à partir de la position du pic par :

$$\hat{\varphi}_s [T_1 (i - 1)] = \left( i - 1 - \frac{\hat{p}_i}{T_1} \right) \cdot 2\pi \quad (2.33)$$

- Les points manquants pour la version discrète  $\hat{\varphi}_s (n)$  seront estimés par interpolation spline cubique.

On utilisera ensuite l'algorithme général de re-échantillonnage a posteriori pour obtenir le signal dans le domaine angulaire.

Comme ce sont des décalages entre tours qui sont utilisés, l'estimation de position est équivalente à un top tour.

### De l'autocorrélation au cepstre robuste

L'atout majeur du cepstre par rapport à l'autocorrélation est de simplifier la détection des décalages grâce à des pics très étroits, néanmoins, il reste sensible au bruit. La corrélation quant à elle concentre le bruit au retard  $\tau = 0$  mais est également un outil réputé pour la détection de retard. Le retard est matérialisé par le maximum d'un motif large ce qui entraîne une estimation moins précise des retards.

La robustesse de la corrélation vis à vis du bruit a été combinée aux performances du cepstre pour créer le cepstre robuste présenté dans [Antoni et El Badaoui, 2000]. Le cepstre robuste  $\tilde{s}(t)$  est défini par :

$$\tilde{s}(t) = \text{cepstre} [\mu_{s(t)(2)} (\tau)^2] \quad (2.34)$$

Il suffira de remplacer le cepstre classique par le cepstre robuste dans l'algorithme précédent pour augmenter la robustesse vis à vis du bruit. Le cepstre robuste ralentit les calculs puisqu'il nécessite le calcul d'une corrélation. Néanmoins, en présence de bruit, il devient incontournable.

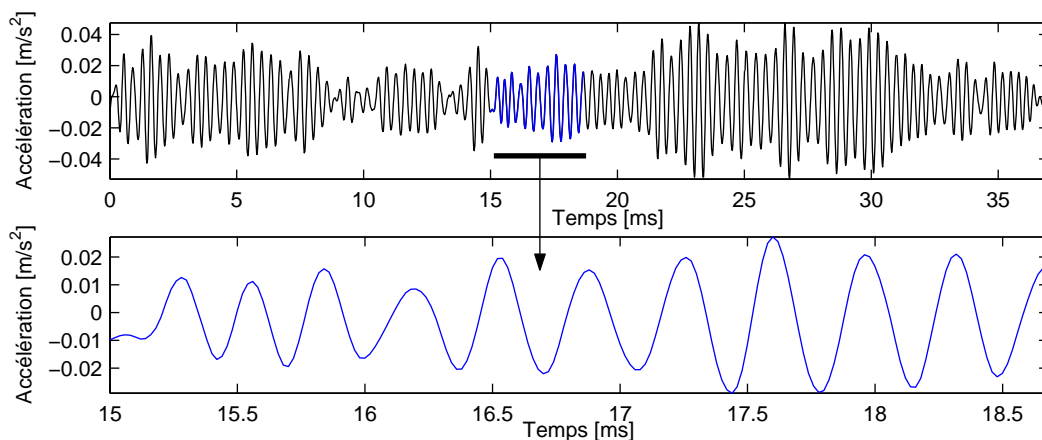


Figure 2.16: Agrandissement d'une portion du signal vibratoire

## 2.4 Exemple et évaluation

Ce chapitre montre pas à pas comment utiliser les méthodes de re-échantillonnage basées sur le signal.

### 2.4.1 Présentation du banc d'essai

Les signaux proviennent du banc d'essai du LASPI. Ce dernier est constitué de deux réducteurs montés dans une configuration “back to back” (voir figure 2.17).

Pour charger une machine tournante, il est courant d'utiliser un autre moteur configuré en générateur. L'énergie électrique est alors dissipée dans des résistances ou est absorbée par le réseau électrique.

Malheureusement, notre réducteur a un rapport de réduction assez élevé : 140. Dès lors, le couple en sortie du réducteur est 140 fois plus grand que le couple d'entrée. Le moteur électrique nécessaire à la charge de notre réducteur serait d'une part gigantesque et d'autre part fort coûteux. Aussi nous utilisons une solution mécanique de type back to back plutôt qu'une solution électrique.

Cette technique nécessite de posséder deux réducteurs identiques. Les deux arbres de sortie (petite vitesse - fort couple) sont reliés. Les deux arbres d'entrée (grande vitesse - faible couple) sont également connectés mais avec l'application préalable d'un couple entre ces derniers. Le couple appliqué sur l'arbre petite vitesse est multiplié par 140 sur l'arbre grande vitesse, ce qui peut correspondre à une très forte charge. Le moteur fournit juste l'énergie nécessaire pour faire tourner l'engrenage, et compenser les pertes mécaniques.

Le nombre de dents associé à chacune des roues est indiqué sur le schéma. Le moteur est alimenté directement sans utilisation de variateur. Un couplemètre positionné sur l'arbre commun d'entrée indique la charge différentielle appliquée. Les réducteurs produits par la société FOC Transmissions (Vienne) référence APA 4T 24 6H 2B sont des réducteurs de la série ATLAS à 4 trains parallèles capables de transmettre une puissance mécanique de 14.5 kW pour une vitesse d'entrée de 1500 trs/min, soit un couple maximum de 92 Nm en entrée et de 12.9 kNm en sortie.

Un codeur optique est placé sur l'arbre d'entrée, il permettra d'évaluer les algorithmes d'échantillonnage a posteriori. Les signaux ont été acquis avec une carte d'acquisition 12 bits (soit une dynamique de 72 dB), une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 50$  kHz, un filtre passe bas de fréquence de coupure  $f_c = 19.2$  kHz. Un million de points ont été enregistrés avec une charge de 16 Nm en entrée du réducteur. Les figures 2.18 et 2.19(a) donnent un aperçu rapide du signal vibratoire. Le maximum du spectre se trouve à  $-38$  dB et il y a une perte de 5 dB dûe à l'ajustage des gains. Dès lors, le niveau significatif le plus bas est de  $-38 + 5 - 72 = -105$  dB. La partie droite du spectre est en dessous de ce niveau. Les pics entre 20 kHz et 25 kHz sont probablement causés par l'électronique présente dans le filtre anti-repliement à capacités commutées. Ce spectre est juste un aperçu (faible résolution fréquentielle - fort moyennage) et ne fait donc pas apparaître les fréquences d'engrènement et de rotation qui nécessiteraient d'une part une meilleure résolution fréquentielle et d'autre part une observation sur une bande de fréquence limitée.

La majeure partie de la puissance est contenue approximativement dans la bande de fréquence  $[0; 5$  kHz]. Cette dernière est cohérente avec la caractéristique fréquentielle de l'accéléromètre 2.19(b) (courbe n°4) et de sa fixation de type aimant. La fréquence d'échantillonnage n'est donc pas imposée par les signaux accélérométriques mais par les

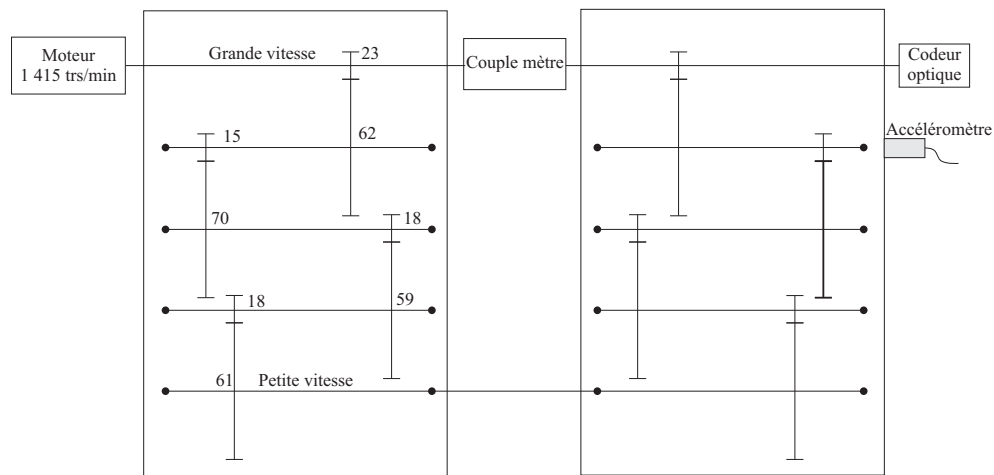


Figure 2.17: Association de réducteur back to back

signaux du codeur acquis en parallèle (512 *fronts montants/tours* - fondamental à environ  $6.4 \text{ kHz}$ ). Une période du codeur correspond, environ à 8 échantillons. Cet exemple montre la nécessité du sur-échantillonnage lors de l'acquisition simultanée de signaux issus du codeur.

## 2.4.2 Utilisation de l'engrènement

### Réglage du filtre passe-bande pour la démodulation

Comme les filtres passe-bande sont centrés sur la fréquence d'engrènement ou ses harmoniques, il sera nécessaire de déterminer avec précision la fréquence de rotation. Dans le cas contraire, l'observation du spectre permettra d'obtenir une meilleure précision en confrontant les positions approximatives des fréquences d'engrènement (harmoniques incluses) et des bandes latérales aux positions des "pics" dans le spectre. Cette étape peut être réalisée en plaçant des curseurs sur le spectre correspondant aux positions théoriques des "pics" et en ajustant la position des curseurs jusqu'à la correspondance. Lors de cette

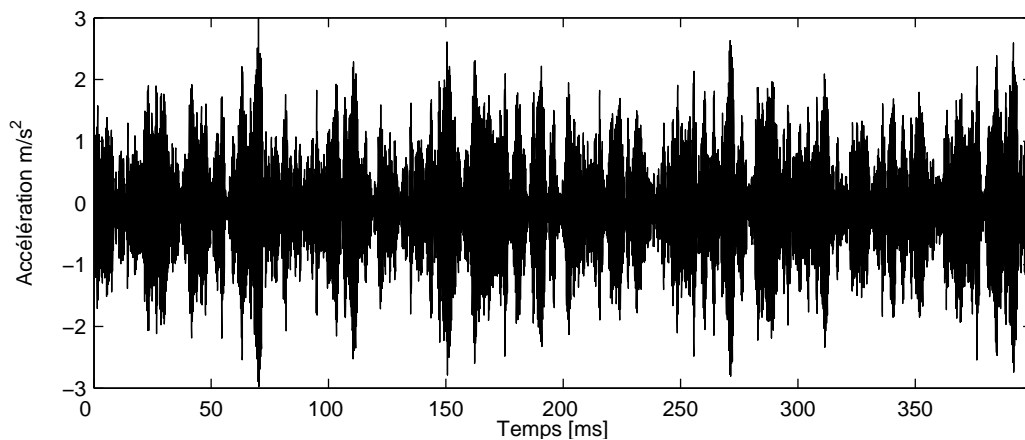


Figure 2.18: Premiers échantillons

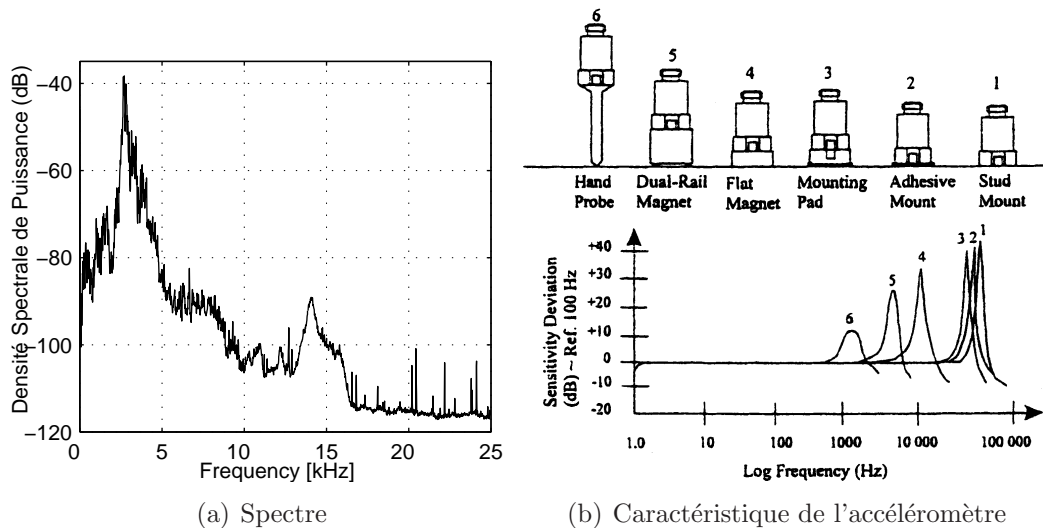


Figure 2.19: Spectre du signal et réponse fréquentielle du capteur

étape la résolution fréquentielle du spectre doit être privilégiée.

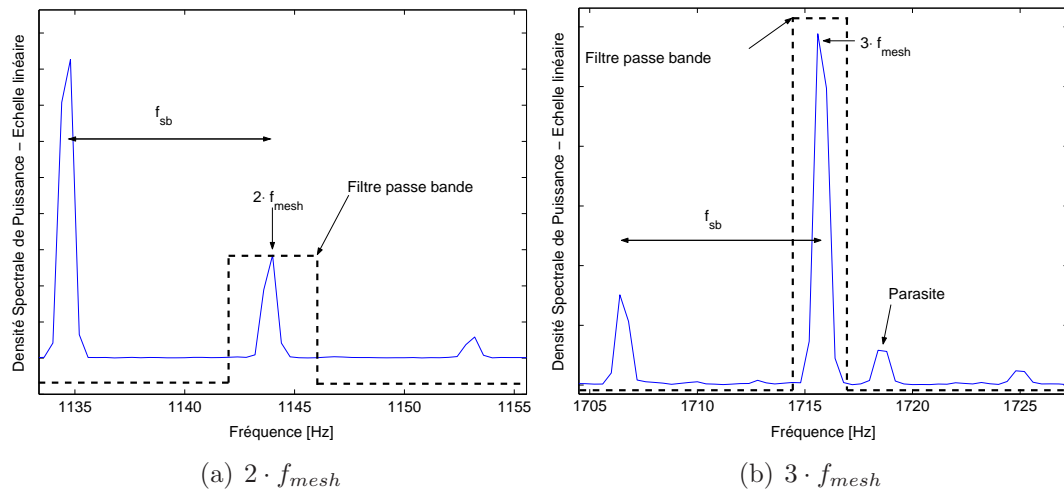
Soit  $f_{sb}$  la plus grande fréquence de rotation de l'arbre étudié. Une fois cette fréquence déterminée avec précision, le spectre sera affiché dans l'intervalle  $n \cdot f_{mesh} \pm f_{sb}$  afin de choisir la bande passante du filtre. Le but du filtre est de conserver uniquement la fréquence d'engrènement ou son harmonique et surtout de supprimer les fréquences parasites telle que dans la figure 2.20(b). Une représentation linéaire du spectre permet un choix plus facile des fréquences. Son utilisation n'exclut pas le contrôle à l'aide d'une échelle logarithmique. Comme seule la phase et non l'amplitude est utilisée, le filtre n'a aucune contrainte sur son module mais doit préserver la phase du signal. N'ayant pas de contrainte sur le module, nous avons utilisé un filtrage à l'aide d'une fenêtre rectangulaire dans le domaine fréquentiel.

Il est nécessaire d'exploiter plusieurs harmoniques de la fréquence d'engrènement (c'est-à-dire plusieurs filtres), en effet, le modèle restant théorique, certaines harmoniques peuvent être perturbées par du bruit les rendant inexploitable. Afin de choisir parmi toutes les phases instantanées candidates, nous proposons de comparer les vitesses instantanées.

### Fréquences instantanées

Comme le signal est "sur-échantillonné", il contient beaucoup d'harmoniques de la fréquence d'engrènement. Aussi, 12 harmoniques ont été exploitées pour créer 12 filtres distincts. Les fréquences instantanées (ou vitesses instantanées) ont été classées en 4 groupes :

1. Vitesses proches, figure 2.21(a) : Ce groupe contient les vitesses similaires. Il devrait a priori fournir de bons résultats.
2. Vitesses "bruitées", figure 2.21(b) : Ce groupe contient des vitesses qui tout en restant proches du groupe 1 apparaissent plus bruitées (fluctuations plus importantes).
3. Vitesses fausses, figure 2.22(a) : Ce groupe montre les conséquences d'un mauvais dimensionnement du filtre. Après examen du spectre, il apparaît que le filtre inclus une autre fréquence. Un réajustement du filtre permet d'obtenir une vitesse classée



**Figure 2.20:** Exemple de choix de filtre passe-bande

dans le 1<sup>er</sup> groupe. Néanmoins, cette figure n’a pas été corrigée afin de montrer les conséquences d’un mauvais dimensionnement du filtre.

4. Autres vitesses, figure 2.22(b) : Cette figure montre des vitesses qui ne sont pas liées aux autres groupes.

Ces courbes correspondent à un premier réglage des filtres. Il est possible en réajustant certaines fréquences d’améliorer quelques résultats. Afin de montrer les résultats tels qu’ils apparaissent lors des premiers essais, nous n’avons pas fait ces ajustements. Nous avons alors pu critiquer ces courbes et mettre en évidence la nécessité d’un tel réajustement notamment pour la catégorie “vitesses fausses”.

Ces figures montrent qu’il est important de tester autant d’harmoniques que possible afin de pouvoir faire une “classification”. Dans cet exemple, il a été possible de tester beaucoup d’harmoniques, néanmoins sur des signaux non “sur-échantillonnés” le nombre de candidats sera plus faible. En cas de doute, ou si le nombre d’harmoniques est faible, il suffit d’estimer le signal dans le domaine angulaire pour chacun des candidats. Un spectre ou une moyenne synchrone permet alors de choisir le meilleur :

- Le spectre du signal re-échantillonné présente les harmoniques d’engrènement sous la forme de pics étroits. Il suffit de choisir le signal re-échantillonné dont le spectre présente les pics les plus étroits.
- L’effet d’un mauvais moyennage synchrone est un filtrage passe-bas. Le meilleur signal re-échantillonné est celui dont le spectre de la moyenne synchrone contient le plus de hautes fréquences (centre de gravité du spectre le plus grand).

Une fois l’harmonique choisie, il est possible d’estimer les signaux dans le domaine angulaire. Les amplitudes des signaux re-échantillonnés suivant le premier groupe sont proches.

## Évaluation

L’estimation fait intervenir une interpolation. En théorie, l’interpolation est capable de fournir n’importe quelle précision (nombre d’échantillons par tour). En pratique, cette dernière est limitée pour plusieurs raisons :

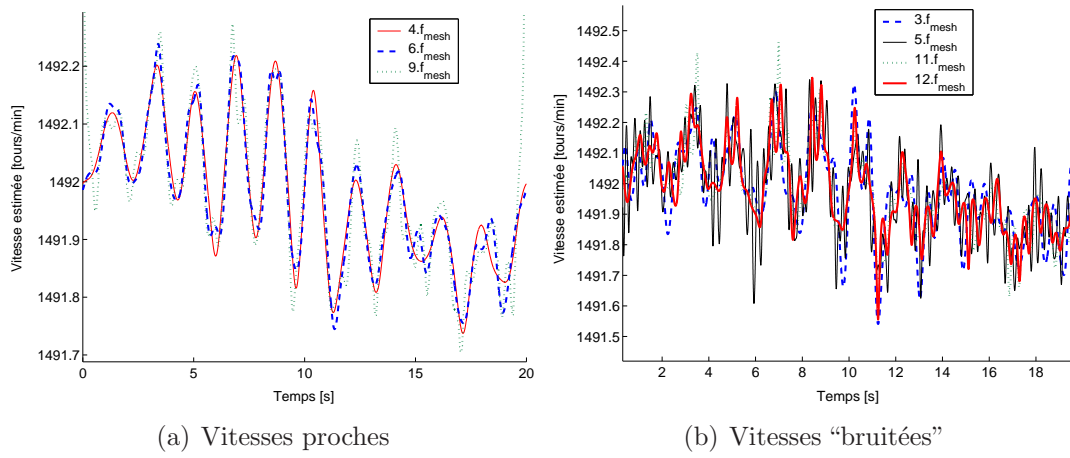


Figure 2.21: Vitesses instantanées estimées

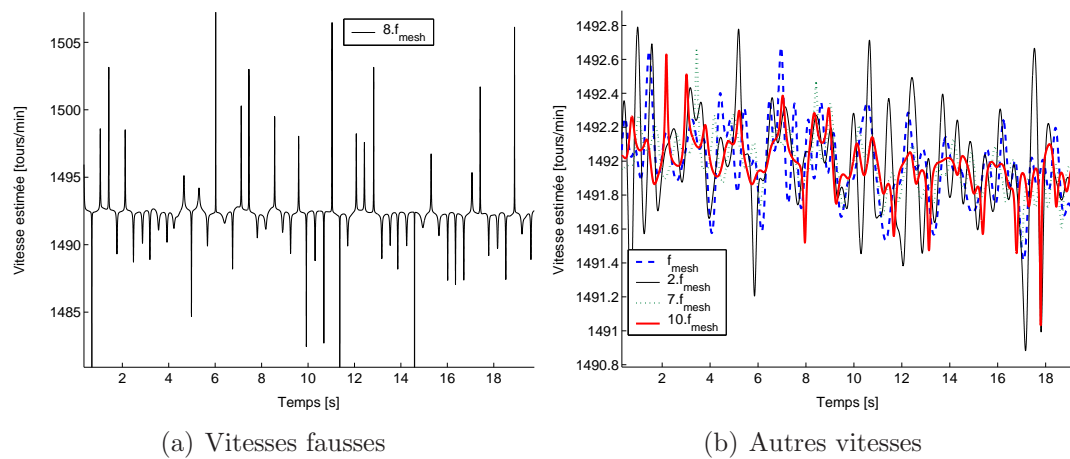


Figure 2.22: Vitesses instantanées estimées



- pour le 1<sup>er</sup> groupe, il existe des petites différences entre les vitesses estimées (figure 2.21(a)),
- la fluctuation maximale 2.10 peut être facilement atteinte en cas de phénomène de balourd. Dans ce cas, le filtrage isolera une fluctuation de vitesse moyennée ce qui limitera la résolution angulaire.

La figure 2.23 illustre l'effet d'une erreur d'estimation de phase. Les cercles montrent un agrandissement des zones intéressantes. L'erreur d'estimation peut être caractérisée de deux manières équivalentes :

1. Une erreur dans l'instant d'échantillonnage  $\epsilon_t(n_\theta)$  associé à un angle donné  $n_\theta$ . Par exemple, l'échantillon  $n_\theta = 16$  associé à un angle  $\theta = 10^\circ$  correspondra à  $t = 1.001 \text{ ms}$  d'après la phase estimée alors qu'il se trouve réellement à  $t = 1.024 \text{ ms}$ ; soit une erreur  $\epsilon_t(16) = -23 \mu\text{s}$ .
2. Une erreur dans l'amplitude  $\epsilon_a(n_\theta)$  du signal échantillonné.

Afin d'observer cette erreur d'amplitude, il est nécessaire de comparer le signal angulaire estimé à un signal de référence. Ce signal de référence sera d'abord obtenu en re-échantillonnant ce même signal accélérométrique mais en utilisant une démodulation du signal issu du codeur optique. Ensuite, ces signaux seront comparés au signal acquis simultanément dans le domaine angulaire à l'aide d'une autre chaîne d'acquisition.

La figure 2.24(a) montre le spectre du signal issu du codeur optique. Ce spectre contient des bandes latérales espacées de  $f_1 \text{ Hz}$  par rapport à la fréquence centrale ( $f_1$  est la période de rotation de l'arbre d'entrée). Elles correspondent à une modulation de fréquence du signal codeur optique par la vitesse de l'arbre d'entrée (phénomène de balourd). Cette fluctuation de vitesse ne respecte pas les contraintes imposées par l'équation (2.10) qui définit la fluctuation de vitesse maximale. La figure 2.24(b) compare les estimations de vitesse basées sur le pic central (dénommées BF et correspondant à la précision du top tour) et celles incluant les bandes latérales (HF). La modulation de fréquence apparaît clairement sur HF. BF correspond à une fréquence moyennée. Comme le signal accélérométrique est filtré en utilisant un filtre similaire à BF (pour éviter les fréquences parasites), les fréquences instantanées résultantes sont très proches (voir figure 2.25).

La figure 2.26 montre la superposition des signaux re-échantillonnés en utilisant respectivement le codeur (version BF et HF) ainsi que la 6<sup>ième</sup> harmonique du signal accélé-

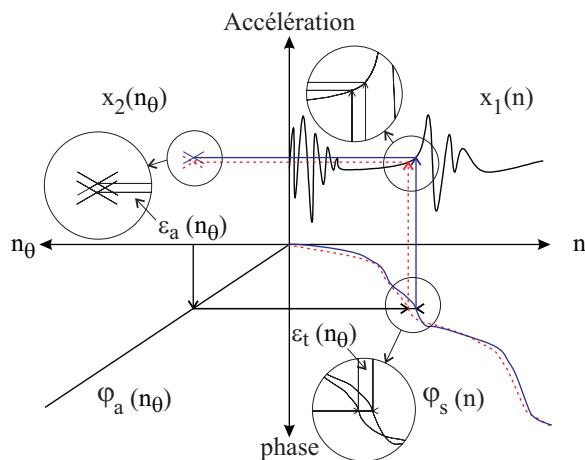


Figure 2.23: Effet d'une erreur de phase

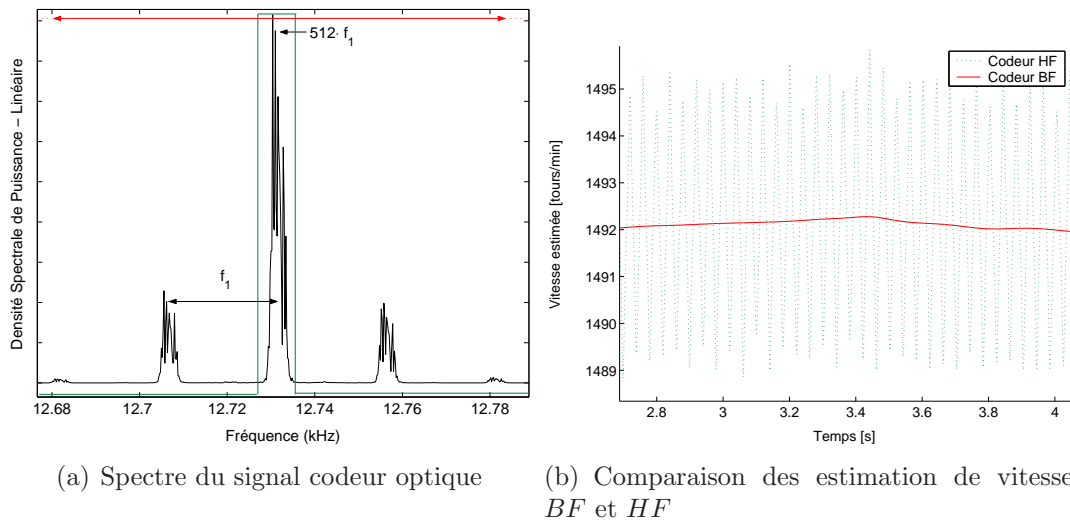
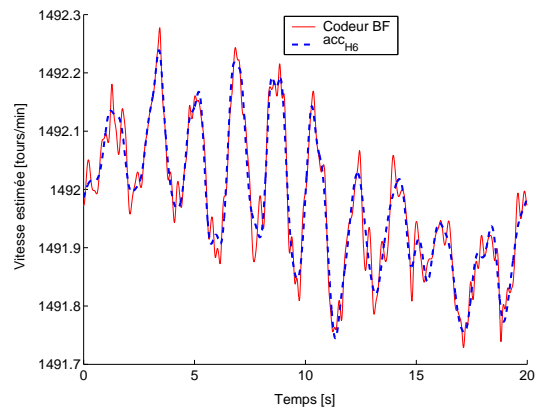


Figure 2.24: Effet de la bande du filtre

Figure 2.25: Comparaison des vitesses estimées à partir du codeur (*BF*) et de l'engrènement

rométrique (notée  $acc_{H6}$ ). Malgré la modulation de fréquence présente uniquement dans  $HF$ , les signaux sont assez proches. Dès lors, il serait intéressant d'étudier l'impact de cette différence de fréquence instantanée sur l'instant d'échantillonnage ou encore l'erreur dans l'instant d'échantillonnage  $\epsilon_t(n_\theta)$  présentée sur la figure 2.23.

Pour évaluer  $\epsilon_t$ , une droite d'équation  $x(n) = t$  est re-échantillonnée dans le domaine angulaire en utilisant respectivement l'information de phase extraite du signal accélérométrique ( $acc_{H6}$ ) et du codeur ( $BF$  et  $HF$ ). On obtient un instant d'échantillonnage en fonction de l'angle. L'erreur d'instant d'échantillonnage est alors obtenue en calculant les différences entre les instants d'échantillonnage issus de deux signaux distincts.

La figure 2.27 montre l'écart entre le re-échantillonnage basé sur signal accélérométrique ( $acc_{H6}$ ) et celui basé sur le signal codeur. L'effet de la modulation de fréquence présente dans le signal codeur peut être vu sur la courbe en trait fin comparant  $acc_{H6}$  et  $HF$ . La courbe correspondant au codeur  $BF$  ne contient plus les "hautes" fréquences associées à la modulation mais correspond à une fréquence moyenne puisque le filtrage préalable au calcul du signal analytique a exclu les bandes latérales (voir figures 2.24(a)). On peut constater que la principale cause d'erreur est due à ce filtrage. Il existe une erreur systématique de  $10 \mu s$  équivalent à un déphasage d'environ 0.8 degrés. Nous ne nous intéressons pas à cette erreur puisqu'en pratique la référence "zéro degré" est obtenue, si elle est souhaitée, en re-échantillonnant le signal top tour, qui est donc sujet au même déphasage.

L'erreur maximale entre deux instants d'échantillonnage est de  $30 \mu s$  (crête à crête) (figure 2.27). Si la vitesse était constante, les 512 fronts montants fournis par le codeur (c'est-à-dire 512 échantillons par tour) correspondraient à une période d'échantillonnage de  $80 \mu s$ . Dès lors, si l'on considère que le re-échantillonnage angulaire basé sur le codeur est parfait, l'erreur d'échantillonnage de  $30 \mu s$  correspond à 0.4 échantillons dans le domaine angulaire. Ainsi, l'écart sur la fréquence instantanée et la vitesse de rotation bien que spectaculaire n'a que peu d'influence sur la précision.

Une acquisition angulaire (512 échantillons par tour) a été effectuée en parallèle avec l'acquisition temporelle afin d'évaluer rigoureusement la qualité du re-échantillonnage a posteriori. La figure 2.28 montre les différences entre les deux signaux. Les agrandissements dans les cercles permettent de noter les différences entre les deux signaux. Il est important de noter qu'il n'est pas possible de caractériser l'erreur d'échantillonnage dans ce cas puisque l'échantillonnage angulaire supprime l'information de phase ou vitesse (incrément angulaire ou écart de phase constant entre chaque point). La seule évaluation possible utilisant le signal codeur optique enregistré en fonction du temps a déjà été faite sur la figure 2.27.

### Influence du bruit sur l'estimation de phase

Au paragraphe 2.3.2 nous avons montré l'effet du bruit sur l'estimation de la phase. Afin d'observer cette influence, un bruit blanc gaussien a été ajouté au signal accélérométrique. Le rapport signal sur bruit a été corrigé afin de tenir compte du filtrage passe-bande autour de  $4f_{mesh}$ . Ce rapport signal sur bruit ne prend malheureusement pas en compte le bruit initial qui est supposé faible. La phase est ensuite estimée en utilisant la méthode basée sur le signal analytique. L'erreur de phase s'obtient en retranchant la phase estimée à la phase associée au signal sans bruit additif. La moitié de l'amplitude de la fluctuation totale (maximum-minimum) est ensuite utilisée pour obtenir un équivalent à  $\delta_{max}$  (voir

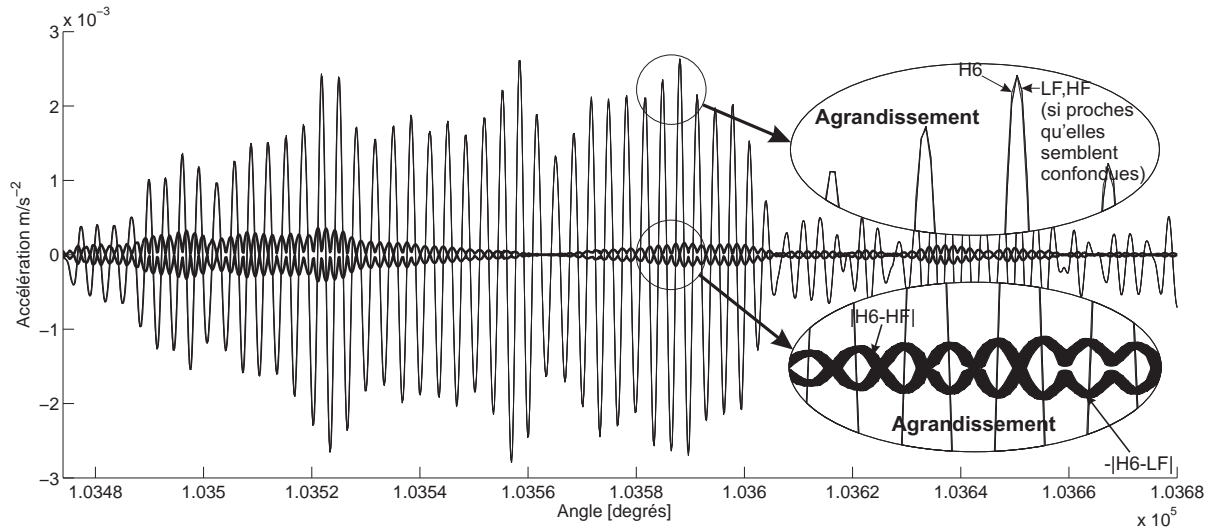


Figure 2.26: Superposition des signaux re-échantillonnés dans le domaine angulaire

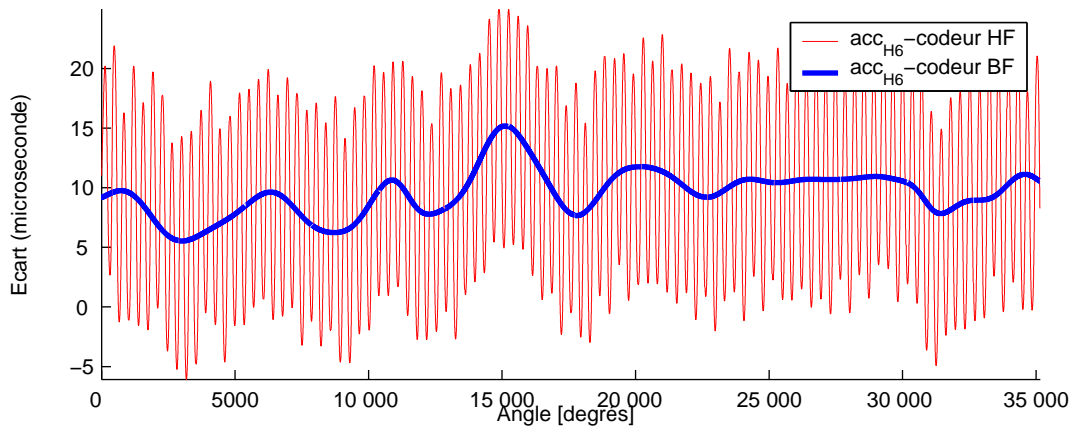


Figure 2.27: Erreur d'instant d'échantillonnage

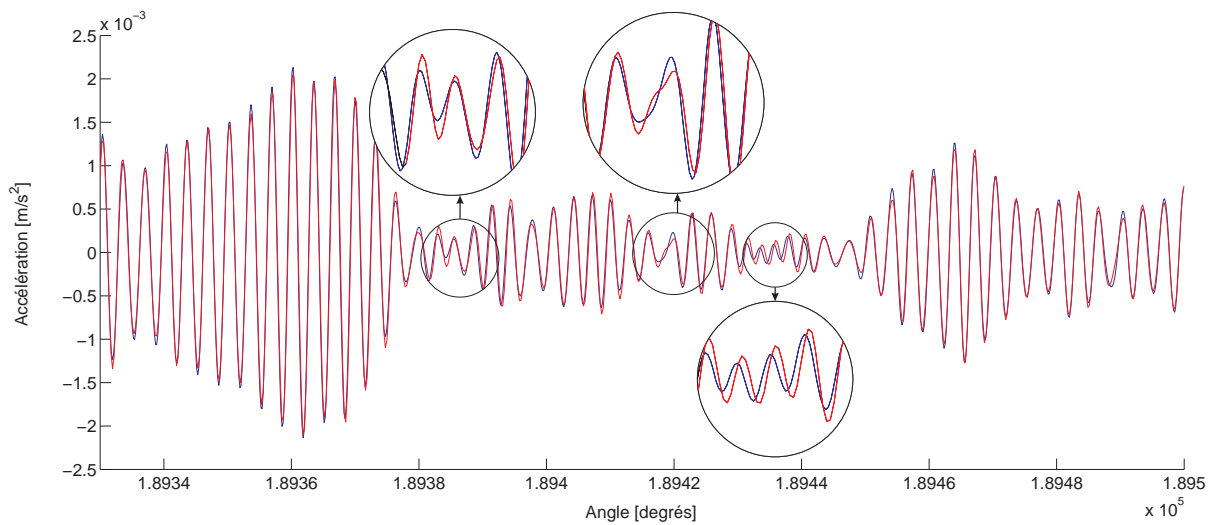


Figure 2.28: Comparaison du re-échantillonnage a posteriori et de l'échantillonnage angulaire direct

figure 2.9). On obtient alors une mesure pour un rapport signal sur bruit donné. Afin d'évaluer la pertinence et la dispersion de cette mesure, le processus est répété 5 fois pour un même rapport signal sur bruit.

La figure 2.29 montre l'évolution de l'écart type de l'erreur de la phase en fonction du rapport signal sur bruit. La courbe a été obtenue à l'aide d'une régression de la forme  $\delta = k_1 \cdot \arcsin\left(10^{\frac{-(reb+k_2)}{20}}\right)$ . Seule la zone  $[5 \text{ dB}, 40 \text{ dB}]$  est affichée car les valeurs inférieures à  $5 \text{ dB}$  présentent une trop grande dispersion. Plus le rapport signal sur bruit est faible, plus les écarts types sont dispersés. En effet, sur la figure 2.9, le cercle contenant toutes les valeurs possibles du bruit se rapproche de l'origine, sa contribution ainsi que sa variance se trouvent amplifiées. Du point de vue mathématique, la pente de la courbe étant plus importante lorsque l'on se rapproche de  $0 \text{ dB}$ , une fluctuation "locale" du rapport signal sur bruit produira une fluctuation plus importante de l'écart type. Comme l'indique la valeur de  $k_2 = -5 \text{ dB}$ , il existe un écart de  $5 \text{ dB}$  entre cette courbe et la courbe théorique (figure 2.10), cet écart est probablement causé par le bruit présent initialement. Il expliquerait également la forte dispersion avant  $5 \text{ dB}$ . Le facteur  $k_1 = 0.98$  montre que l'on suit la loi à une translation près.

Néanmoins, le niveau du bruit restant inconnu en pratique, il est impossible de prévoir son influence. Le bruit n'est pas blanc mais filtré (chemin de transmission, résonnances, ...), ces calculs justifient la nécessité d'utiliser le plus grand nombre d'harmoniques possibles pour estimer la phase instantannée.

### 2.4.3 Utilisation des similitudes (cepstre)

La méthode cepstrale est bien plus simple à utiliser puisqu'il est seulement nécessaire de lui fournir une période de rotation moyenne ainsi qu'une bande d'intérêt qui peut être trouvée de manière empirique.

#### Evaluation

La figure 2.30 montre l'erreur d'amplitude. Elle a été partagée en trois zones séparées par un pointillé correspondant respectivement au début, au milieu et à la fin du signal.

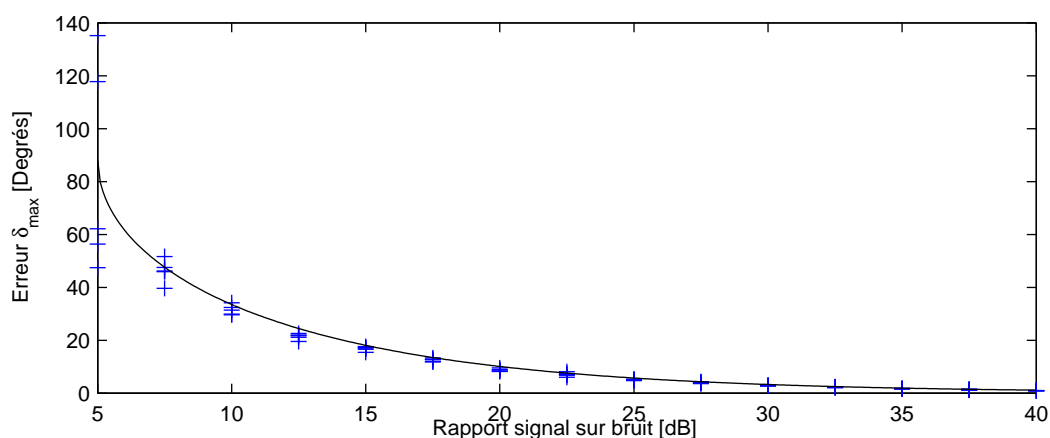


Figure 2.29: Ecart type de l'erreur de déphasage

Les deux signaux sont assez proches. Ainsi, le cepstre remplace avantageusement un top tour pour cet exemple.

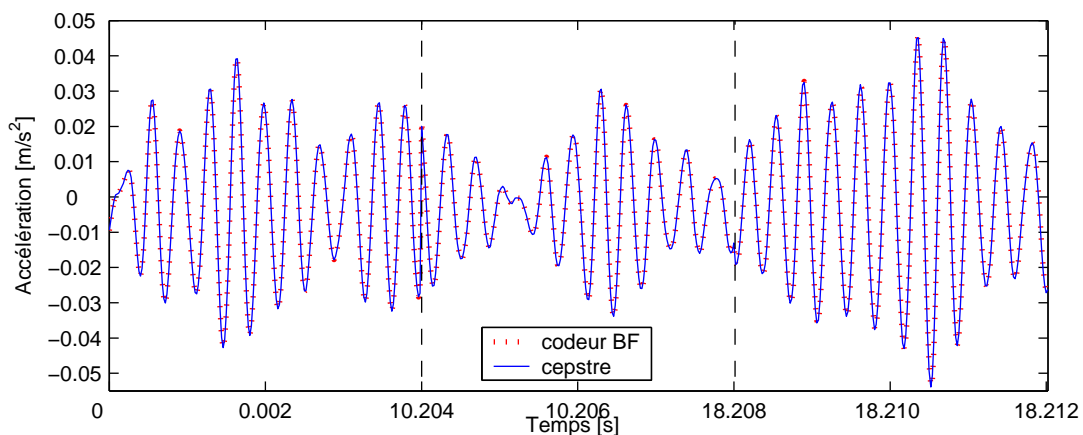
La figure 2.31 montre l'erreur d'instant d'échantillonnage. Contrairement à la méthode de re-échantillonnage basée sur la démodulation autour d'une fréquence d'engrènement, l'écart d'échantillonnage entre le cepstre et le codeur  $BF$  ne comporte pas majoritairement de composante basse fréquence. A chaque estimation la position du pic cepstrale est estimée à un échantillon près (après interpolation). Dès lors, cette imprécision génère une erreur d'estimation blanche et non basse fréquence comme pour la méthode précédente. Ici l'erreur d'échantillonnage a une amplitude crête à crête maximale de  $80 \mu s$  soit une précision moindre que pour la méthode précédente. Cette erreur pourrait sans doute être diminuée en améliorant la méthode d'estimation de la position du pic du cepstre.

Cette méthode est basée sur la ressemblance des signaux. Dès lors, elle est sensible aux fluctuations de vitesse. En effet, si la fluctuation de vitesse se révèle trop importante, les signaux ne se ressembleront plus d'un tour à l'autre et leur "écho" sera moins facilement détectable par le cepstre.

### Influence du bruit sur l'estimation de phase

Afin d'étudier l'influence du bruit, nous ajoutons au signal vibratoire normalisé un bruit additif dans un rapport donné. La phase est ensuite estimée par la méthode cepstrale. L'erreur de phase est estimée en calculant l'écart avec la phase de référence obtenue par démodulation du signal codeur  $BF$ . L'amplitude crête-à-crête de cet écart est ensuite mémorisée. Plusieurs mesures sont réalisées pour un même rapport signal sur bruit.

La figure 2.32 montre l'évolution de l'erreur d'amplitude en fonction du rapport signal sur bruit. Cette courbe permet de vérifier la moindre sensibilité au bruit du cepstre robuste. Le cepstre robuste est néanmoins plus long à calculer (un calcul de corrélation en plus). Contrairement à la méthode basée sur le signal analytique où la précision se dégrade progressivement, un bruit trop important rend le pic indétectable et provoque une erreur non négligeable. Une fois que le rapport signal sur bruit est acceptable, l'erreur de phase varie peu : quand l'amplitude du pic est suffisamment importante pour être détectée, la diminution du bruit n'apporte plus d'amélioration.



**Figure 2.30:** Comparaison du re-échantillonnage *a posteriori* et de l'échantillonnage angulaire direct

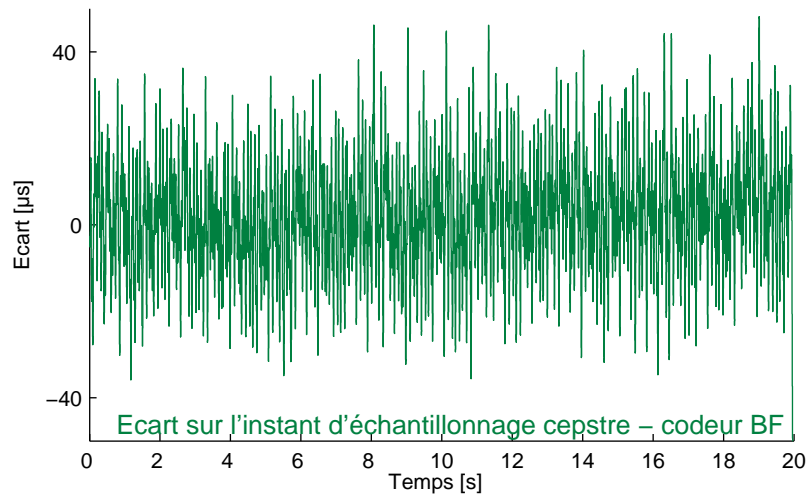


Figure 2.31: Comparaison des instants d'échantillonnage

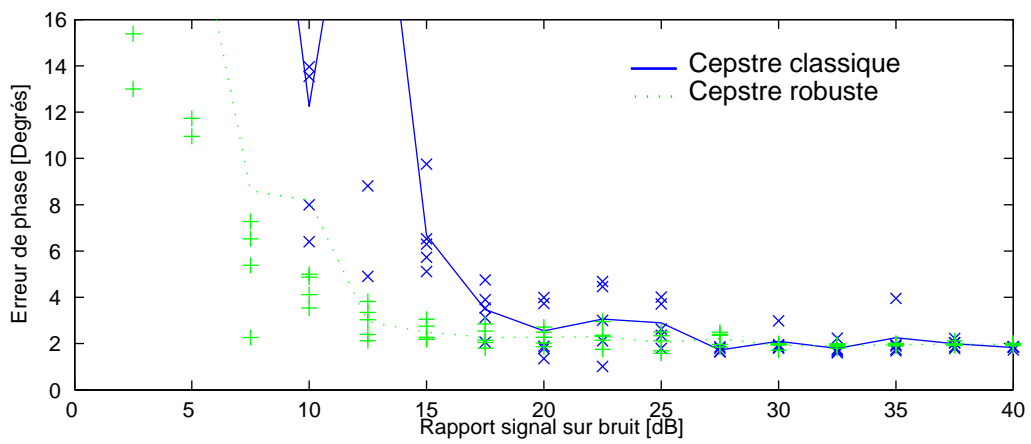


Figure 2.32: Erreur de phase en fonction du bruit

## 2.5 Alternatives

Dans ce chapitre, nous avons re-échantillonnés les signaux en vu d’induire la cyclostationnarité. Il existe également d’autres approches visant à extraire le contenu cyclique du signal.

Par exemple, le filtre de Vold-Kalman [Herlufsen et al., 1999, Vold et al., 1997] effectue un suivi d’ordre dans le domaine temporel. Pour cela, le signal est modélisé comme une série d’amplitudes  $x_k(n)$  modulant des exponentielles  $e^{j\varphi_k(n)}$ . Les fréquences associées à ces exponentielles représentent les fréquences de rotation du système ainsi que leurs différentes harmoniques. A l’aide d’une estimation de la phase  $\varphi_k$  réalisée a partir d’un signal tachymétrique, le filtre de Vold-Kalman estime la série d’amplitudes composantes  $x_k(n)$ . Cette méthode ne fournit pas de signaux dans le domaine angulaire mais uniquement les composantes modulantes.

Dans [Granjon, 2001], Granjon propose une méthode d’extraction des composantes “périodiques” associées à la rotation de la machine. Cette méthode nécessite un signal de référence à la fréquence de rotation de la machine (top tour, ...). En minimisant l’erreur quadratique entre le signal de référence filtré par un filtre périodique (cf. chapitre 5) et le signal vibratoire, il estime la composante périodique synchrone de la machine tournante. Cette méthode reste limité à l’ordre 1 (partie périodique).

## 2.6 Bilan et perspectives

Nous avons présenté, en plus des méthodes classiques, deux nouvelles méthodes pour réaliser un re-échantillonnage a posteriori basé sur les signaux accélérométriques. La première basée sur la démodulation autour de la fréquence d’engrènement et la seconde basée sur les similitudes (cepstre). Ces deux méthodes fournissent une précision équivalente à celle du top tour. Malgré cela, l’erreur entre les signaux acquis angulairement et les signaux re-échantillonnés est restée relativement faible lors de nos expérimentations. L’intérêt majeur de ces méthodes est le fait de pouvoir se passer de codeur. Les deux méthodes nécessitent quelques connaissances a priori sur la cinématique de la machine et la vitesse de rotation. Néanmoins, nous ne considérons pas ce point comme un handicap puisqu’elles sont nécessaires lors du diagnostic si l’on veut exploiter la cyclostationnarité. Nos méthodes ne fonctionnent que pour une vitesse moyenne stable (seule les fluctuations de vitesse de quelques pour mille inhérentes à la machine sont tolérées). L’atout majeur du re-échantillonnage a posteriori est de pouvoir combiner les avantages de l’observation double dans le domaine angulaire (nombre de points par tour constant, signal cyclostationnaire) et dans le domaine temporel (étude de la fluctuation de vitesse pour le diagnostic).

La méthode basée sur le cepstre est plus générale puisqu’elle exploite les similitudes, elle pourra donc être envisagée pour de nombreux types de signaux cyclostationnaires à l’ordre 1. Néanmoins, elle est beaucoup plus sensible au rapport signal à bruit que la méthode basée sur la démodulation d’harmoniques. Un meilleur algorithme de détection du pic dans le cepstre permettrait peut-être d’améliorer cette précision. Bien qu’à première vue la courbe 2.29 soit plus intéressante que la courbe 2.32, il n’en est rien : l’erreur présentée dans la courbe 2.29 correspond à l’erreur sur l’harmonique de l’engrènement étudiée. Pour la ramener à une erreur sur la position de l’arbre de sortie, il convient de



la diviser par le rang de l'harmonique ainsi que par le nombre de dents de la roue qui engrène. On obtient alors une erreur très faible.

Il serait intéressant d'étendre ces méthodes à la vitesse variable. Pour ce faire, on pourrait découper le signal en portions où la variation de vitesse serait considérée comme faible. Il est aussi envisageable d'effectuer un suivi peu précis afin de compenser grossièrement les fluctuations de vitesse, puis, de travailler avec les méthodes présentées ici sur le signal avec les fluctuations de vitesse compensées (re-échantillonnage a posteriori itératif).

Il faut noter qu'à l'heure actuelle, la tendance chez les fabricants de machines tournantes est d'intégrer des codeurs angulaires dans leurs produits dans le but de pouvoir réaliser différents types de contrôles (asservissement de vitesse, position, ...). Une mise à disposition de ces signaux permettrait d'une part de réaliser des acquisitions sous échantillonnage angulaires directement sans contraintes supplémentaires; et d'autre part d'intégrer le concept de diagnostic dans les variateurs de vitesse, ...





# Chapitre 3

## De la théorie à l'expérimentation

LA cyclostationnarité suppose l'existence de plusieurs réalisations d'un même processus. Or, en pratique, les signaux (issus d'une carte d'acquisition par exemple) correspondent à une seule réalisation de longueur finie. On va donc être conduit tout comme dans le cas stationnaire à parler d'ergodicité et d'estimation.

Le but de ce chapitre est dans un premier temps de généraliser la notion d'ergodicité aux processus cyclostationnaires et d'expliquer comment estimer les différentes grandeurs caractéristiques à l'ordre 1 et 2. Dans un deuxième temps, un exemple de diagnostic sur les signaux d'engrenages illustre l'exploitation de la cyclostationnarité à l'ordre 1.

### 3.1 Cycloergodisme

Lorsque l'on ne dispose que d'une seule réalisation, il existe deux solutions pour exploiter la cyclostationnarité.

- Il est possible d'utiliser le formalisme Fraction of Time Probability construit par Gardner [Gardner, 1994]. Dans ce formalisme, les signaux ne sont plus des réalisations d'un processus aléatoire mais une *série temporelle* (ou *série angulaire* selon nos notations). Ce formalisme conduit notamment à redéfinir la notion de fonction de répartition. Il traite le problème partiellement puisqu'il supprime la notion de réalisation au profit d'une série temporelle.
- Il est possible de caractériser nos signaux à partir d'une seule réalisation en étendant la notion d'ergodicité aux processus cyclostationnaires. On parle alors de *cycloergodicité* [Boyles et Gardner, 1983].

Dans les deux cas, la réalisation devra contenir un grand nombre de cycles. Nous allons ici définir et utiliser l'approche cycloergodique, plus classique que celle de Gardner.

Comme la notion d'ergodisme fait appel à la notion de moyenne temporelle, la notion de cycloergodisme fera appel à la notion de moyenne cyclique ou synchrone.

#### 3.1.1 Moyenne cyclique (synchrone)

Soit  $\{X(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{Z}}$  un processus stochastique cyclostationnaire complexe ou réel ayant comme période cyclique  $\Theta$ , contenant un nombre de cycles important, et,  $x(\theta)$  une réalisation  $\omega$  particulière.

On découpe le signal en  $K$  blocs consécutifs de longueur  $\Theta$ . La moyenne synchrone est alors donnée par :

$$\langle x(\theta) \rangle_{\Theta}^K = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x[\text{mod}(\theta + k\Theta, K\Theta)] \quad (3.1)$$

Où  $\text{mod}(a, b)$  est le reste de la division entière de  $a$  par  $b$ . La fonction  $\text{mod}$  permet de définir la moyenne synchrone pour tout  $\theta$ . Cette opération est schématisée sur la figure 3.1.

Puisque la moyenne synchrone extrait une composante périodique, qui admet une série de Fourier, elle peut être également écrite lorsque le nombre de blocs est infini :

$$\langle x(\theta) \rangle_{\Theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j k \theta / \Theta} \left\{ \lim_{W \rightarrow \infty} \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} x(u) e^{-2\pi j k u / \Theta} du \right\} \quad (3.2)$$

Où le terme entre crochet représente la transformée de Fourier pour les fréquences  $\frac{1}{\Theta}$  et ses harmoniques. La composante périodique est ensuite générée par la série de Fourier. La moyenne synchrone apparaît donc comme un filtre en peigne sélectionnant uniquement la fréquence  $1/\Theta$  et ses multiples.

### 3.1.2 Définition du cycloergodisme (au sens fort)

#### Cas où il existe 1 seul cycle

Soit un processus stochastique cyclique  $\{X(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$  de période cyclique  $\Theta$ , la  $\omega^{\text{ième}}$  réalisation de ce processus  $x_{\omega}(\theta)$ , et une fonction certaine  $g$ .  $X(\Theta)$  est cycloergodique au sens fort à la période cyclique  $\Theta$  si la moyenne synchrone (cyclique)  $\langle g[x_{\omega}(\theta)] \rangle_{\Theta}^K$  converge presque sûrement<sup>1</sup> vers un signal certain quand  $K$  tend vers l'infini.

Si le processus  $X(\theta)$  est de plus cyclostationnaire à la période cyclique  $\Theta$ , ce signal certain correspond au moment d'ordre  $n$  du processus  $X(\theta)$  pour  $g(x) = x^n$ .

En pratique, la cycloergodicité sera supposée (ou établie d'après un modèle). En effet, la vérifier nécessite de posséder différentes réalisations.

#### Cas où il existe plusieurs cycles

Dans le cas polycyclostationnaire, le signal n'a pas de période mais plusieurs "périodes" incommensurables entre elles. Chacune des périodes produit un peigne de Dirac dans le domaine fréquentiel. Puisque ces périodes sont incommensurables, tous les peignes sont distincts. Dès lors, la moyenne synchrone agit comme un filtre en peigne et, permet de sélectionner uniquement la période  $\Theta$  prise comme référence.

Afin de définir la cycloergodicité dans ce contexte, nous allons définir l'extracteur des composantes poly-périodiques associées aux  $K$  périodes cycliques  $\{\Theta_k\}$  :

$$\langle x(\theta) \rangle_{\{\Theta_k\}} = \sum_{k=1}^K \langle x(\theta) \rangle_{\Theta_k} \quad (3.3)$$

Nous pouvons alors définir le cycloergodisme pour plusieurs fréquences cycliques :

---

<sup>1</sup>l'ensemble des valeurs de  $\omega$  pour lesquelles il n'y a pas de convergence est de mesure nulle

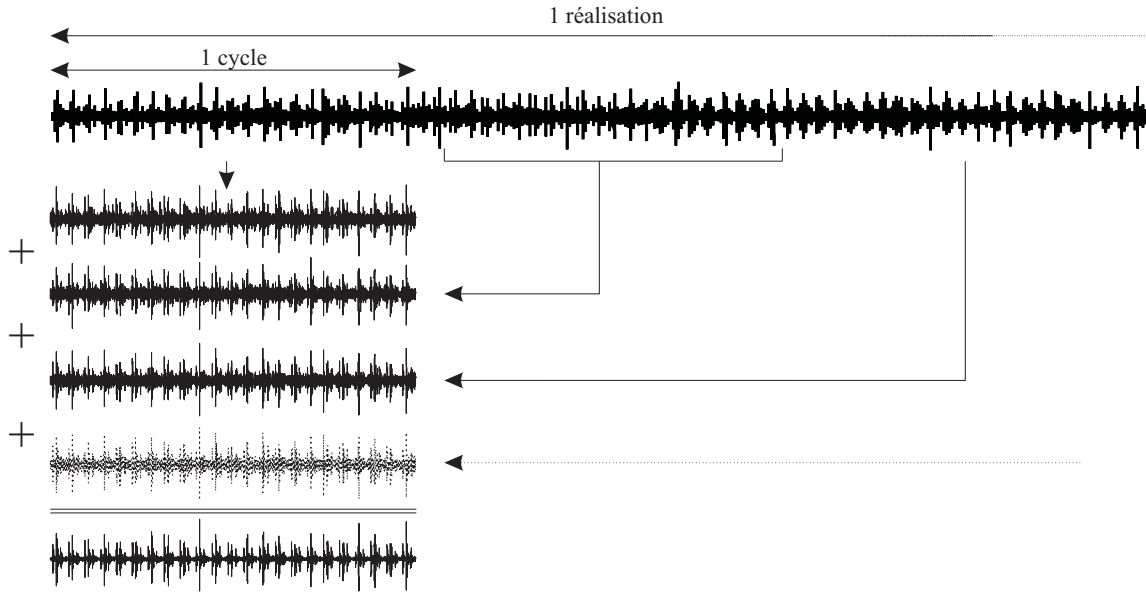


Figure 3.1: Calcul de la moyenne synchrone

Soit un processus stochastique poly-cyclique  $\{X(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$  de périodes cycliques  $\{\Theta_k\}$ ,  $x_\omega(\theta)$   $\omega^{\text{ième}}$  réalisation de ce processus, et une fonction certaine  $g$ .  $X(\Theta)$  est poly-cycloergodique au sens fort aux périodes cycliques  $\{\Theta_k\}$  si  $\langle g[x_\omega(\theta)] \rangle_{\{\Theta_k\}}$  converge presque sûrement vers un signal certain.

L'introduction du cycloergodisme va nous permettre de développer les estimateurs basés sur une réalisation  $x(\theta)$  d'un processus cycloergodique  $X(\theta)$  afin de caractériser la cyclostationnarité aux ordres 1 et 2.

Les estimations, basées sur une seule réalisation, peuvent également être réalisées en supposant l'unicité du processus générateur pour chacun des cycles considérés. Sous cette hypothèse, il est possible d'assimiler un cycle à une réalisation c'est à dire de substituer une moyenne d'ensemble par une moyenne de cycle.

## 3.2 Caractérisation de la cyclostationnarité aux ordres 1 et 2

### 3.2.1 Caractérisation à l'ordre 1

Pour caractériser la cyclostationnarité à l'ordre 1, nous allons chercher à estimer la composante (presque) périodique d'un signal (presque) cyclostationnaire.

#### Moyenne synchrone

Le premier outil destiné à extraire cette composante périodique est la moyenne synchrone [Braun, 1975] qui nous a servi à introduire la cycloergodicité dans le paragraphe précédent. La moyenne synchrone, bien qu'en apparence simple à calculer présente quelques pièges :

1. la période doit être connue de manière exacte. Dans le cas contraire, il est possible

d'utiliser des outils tels que le spectre, l'analyse cepstrale (présentée au chapitre 2), ou la corrélation pour mettre en évidence cette période, et la calculer avec une bonne précision. Si elle n'est pas connue exactement, l'estimateur de la moyenne synchrone tendra vers 0 (sauf si cette période correspond par hasard à une autre période présente dans le signal).

2. la période doit correspondre à un nombre entier de points. Cette condition n'est pas nécessairement vérifiée même si l'on travaille dans le domaine angulaire. Par exemple, dans le cas d'un engrenage, si la période de l'arbre moteur correspond à un nombre entier, la période en sortie du réducteur, multipliée par le rapport de réduction (2/3 par exemple) ne sera pas entière.

Dans, un tel cas où les fréquences d'entrée et de sortie sont commensurables (rapport  $p/q$ ,  $p$  et  $q$  entiers), il suffit tout simplement de sur-échantillonner d'un facteur  $p$  et de le sous-échantillonner d'un facteur  $q$  afin d'obtenir un nombre de points entier par tour de l'arbre de sortie (les outils de conversion de fréquence d'échantillonnage sont décrits dans [Crochiere et Rabiner, 1996]). Il est également possible d'utiliser une interpolation pour effectuer le ré-échantillonnage.

3. Le signal utilisé pour le calcul de la moyenne synchrone doit être tronqué afin d'avoir un nombre fini de périodes.

Ces conditions tendent à favoriser l'échantillonnage angulaire qui fournit un nombre de points constant par tour de l'arbre de référence (suppression de l'effet des fluctuations de vitesses). Des méthodes permettant de transformer des signaux à variable générique temporelle en signaux à variable générique angulaire ont été proposées au chapitre 2. En angulaire, les signaux sont "synchronisés" par rapport à la période cyclique.

Il est possible d'écrire la moyenne synchrone sous une forme similaire à l'équation (3.2) pour un signal de longueur  $L$ , multiple de la taille d'un bloc de  $\Theta$  échantillons :

$$\langle x(n_\theta) \rangle_\Theta^K = \sum_{k=0}^{\Theta-1} e^{2\pi jkn_\theta/\Theta} \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} x(m) e^{-2\pi jkm/\Theta} \quad (3.4)$$

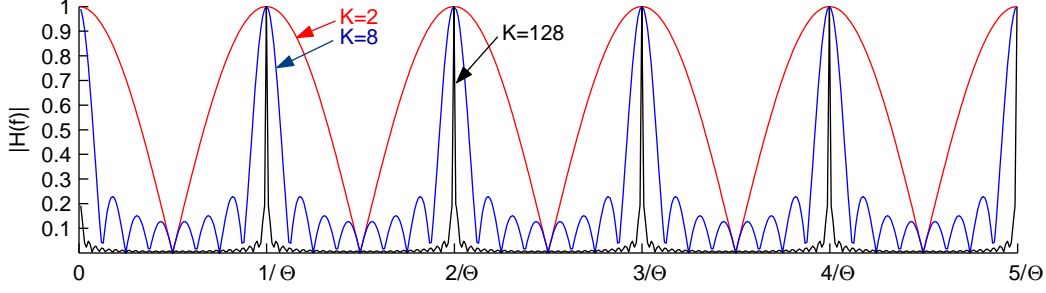
A la différence du cas continu, le nombre de points fini, conduira à employer un filtre en peigne avec des "dents élargies". On ne sélectionnera donc plus aussi précisément une fréquence donnée. La réponse fréquentielle du filtre en peigne équivalent est donnée par [Braun et Seth, 1979] :

$$H(f) = \frac{1}{K} \frac{\sin(\pi f \Theta K)}{\sin(\pi f \Theta)} e^{-j\pi f \Theta (K-1)} \quad (3.5)$$

Cette réponse est une fonction de Dirichlet qui a un maximum à la fréquence  $1/\Theta$  ainsi qu'à ses harmoniques (voir figure 3.2). La largeur des dents est inversement proportionnelle au nombre de cycles  $K$ . Dès lors, plus le nombre de cycles est grand, plus le filtre sera sélectif. Quand le nombre de cycles tend vers l'infini, ce filtre tend vers le filtre en peigne de l'équation (3.2).

### Seuil pour la moyenne synchrone :

La moyenne synchrone étant calculée sur un nombre fini de points, il n'est pas toujours facile de pouvoir différencier une composante "synchrone" qui ressortira grâce au



**Figure 3.2:** Module du filtre équivalent à la moyenne synchrone

moyennage constructif, d'une composante asynchrone subissant un moyennage destructif. Nous avons alors proposé dans [Bonnardot et al., 2003] d'utiliser un critère afin de détecter les valeurs résultant d'un moyennage constructif. Ce dernier est intéressant lorsque la composante périodique a une amplitude faible vis à vis du signal ou que le nombre de cycles utilisés pour le moyennage est faible. Lorsque le nombre de cycles est important (quelques centaines), le bruit est réduit fortement, alors un examen visuel du signal est souvent suffisant.

Ce critère est basé sur la définition d'un seuil. Toute valeur au dessus de ce seuil sera considérée comme une composante synchrone (avec un risque de se tromper donné).

La moyenne synchrone dépend de l'angle, donc le seuil en dépendra également. Pour définir un tel seuil, nous modélisons le signal comme la somme d'une composante déterministe  $m(\theta)$  de période  $\Theta$  et d'une composante résiduelle  $r(\theta)$  incluant le bruit ainsi que les contributions cyclostationnaires aux ordres supérieurs. Le signal devra avoir une composante continue nulle, c'est-à-dire  $\frac{1}{K\Theta} \sum_{\theta=0}^{K\Theta} x(\theta) = 0$ . Cette condition n'est pas restrictive puisque l'on s'intéresse uniquement à la partie synchrone. On pourra également si besoin est, rajouter la moyenne classique au seuil et au signal après traitement.

$$x(\theta) = m(\theta) + r(\theta) \quad (3.6)$$

Où la moyenne synchrone calculée sur  $K$  cycles est  $\hat{m}(\theta) = \langle x(\theta) \rangle_{\Theta}^K$ .

Soit  $a_{\theta_1}(k) = x(\theta_1 + k\Theta)$ , le signal obtenu en gardant les échantillons distants de  $\Theta$  à partir de  $\theta_1$ . Nous supposons pour établir le seuil que pour un angle  $\theta_1$  donné,  $a_{\theta_1}(k)$  suit une loi normale de moyenne  $m(\theta_1)$  et d'écart type  $\sigma_r(\theta_1)$ . Après moyennage synchrone,  $\hat{m}(\theta_1) = \langle a_{\theta_1}(k) \rangle^K$  suivra donc une loi normale de moyenne  $m(\theta_1)$  et d'écart type  $\sigma_r(\theta_1) / \sqrt{K}$ .

L'écart type de  $x(\theta)$  notée  $\hat{\sigma}_b(\theta)$  sera estimée sur  $K$  cycles par :

$$\hat{\sigma}_b(\theta) = \sqrt{\frac{K}{K-1} \langle [x(\theta) - \hat{m}(\theta)]^2 \rangle_{\Theta}^K} \quad (3.7)$$

Nous allons ensuite tester si  $m(\theta) \neq 0$ , c'est-à-dire si la moyenne synchrone existe pour un angle donné. Étant donné que l'on utilise un estimateur pour l'écart type, la quantité  $\frac{\hat{m}(\theta)}{\hat{\sigma}_r(\theta) / \sqrt{K}}$  suivra une loi de Student  $t_{\beta}$  à  $K - 1$  degrés de liberté.

Pour valider l'hypothèse  $x(\theta)$  cyclostationnaire à l'ordre 1 avec un risque de se tromper de  $\alpha$ , on exigera :



$$\left| \frac{\hat{m}(\theta)}{\hat{\sigma}_b(\theta)/\sqrt{K}} \right| \geq t_{1-\alpha} \quad (3.8)$$

On ne peut rien conclure si le signal est en dessous du seuil : il s'agit soit de bruit, soit d'une moyenne synchrone trop faible (auquel cas il faut augmenter le nombre de cycles).

Cette approche peut être discutable en présence de défauts puisque le kurtosis (c'est-à-dire la non gaussianité) de la série  $a_{\theta_1}(\theta)$  a été utilisée pour bâtir un indicateur de défaut [Raad, 2003]. Néanmoins, elle reste pertinente avant et lors de l'apparition du défaut, car une fois le défaut établi, le seuil n'est plus utile puisque ce défaut devient clairement identifiable dans la moyenne synchrone.

La figure 3.3 illustre l'utilisation du seuil. La figure (a) montre un cycle d'un signal accélérométrique issu d'un engrenage auquel un bruit gaussien a été ajouté afin de bien mettre en évidence le rôle du seuil.

La figure (b) montre la moyenne synchrone et le seuil associé, calculés sur  $K = 2500$  tours. Étant donné le nombre de cycles, on obtient un seuil très bas. Ce signal pourra donc être considéré comme étant la composante périodique. Il sera comparé au signal (c) qui est une moyenne synchrone sur  $K = 30$  tours. Le seuil qui est ici beaucoup plus élevé, va indiquer une zone correspondant à une moyenne synchrone nulle avec un risque de se tromper de  $\alpha = 5\%$ . En conséquence, toute valeur à l'intérieur de la zone pourra être nulle et ne sera pas interprétable (ceci est facilement vérifiable en comparant les courbes (b) et (c) aux alentours du 350<sup>ème</sup> échantillon).

La courbe (d) suggère une autre utilisation du seuil : la détection de cyclostationnarité. Pour cette courbe, une période de 502 points a été utilisée au lieu de 512 points (1 tour). Dès lors, on a un signal qui n'est plus cyclostationnaire à l'ordre 1 pour la période cyclique 502. Il est donc naturellement en dessous du seuil. En tirant parti de cette remarque, il est alors possible en comptabilisant le pourcentage de signal au-dessus du seuil pour différentes périodes de détecter le ou les cycles présents dans le signal. Cette utilisation est suggérée à titre indicatif puisqu'il existe de meilleurs outils pour trouver les fréquences cycliques (cepstre, corrélation spectrale, ...).

### Signaux presque-cyclostationnaires :

Il convient de distinguer deux cas :

- les fréquences sont incommensurables : dans ce cas il “suffira” de calculer les moyennes synchrones respectives suivant les différentes périodes. La moyenne est sans biais car elle est destructrice pour toutes les autres périodes. De tels signaux d'apparence simple sont la cause de nombreuses difficultés :
  - o Si le nombre d'échantillons par cycle est constant pour une source périodique, il ne sera pas constant pour l'autre, car, les deux périodes sont incommensurables. Il sera donc nécessaire de resynchroniser au préalable ces signaux sur la période étudiée avant de calculer la moyenne synchrone. Le chapitre 5 présente un exemple de signaux possédant deux fréquences cycliques différentes.
  - o Si ces fréquences sont proches, la séparation est rendue plus ardue lorsque le nombre de cycles disponibles est faible. En effet, le filtre en peigne associé à la moyenne synchrone a des dents assez “larges” et ne pourra donc pas facilement

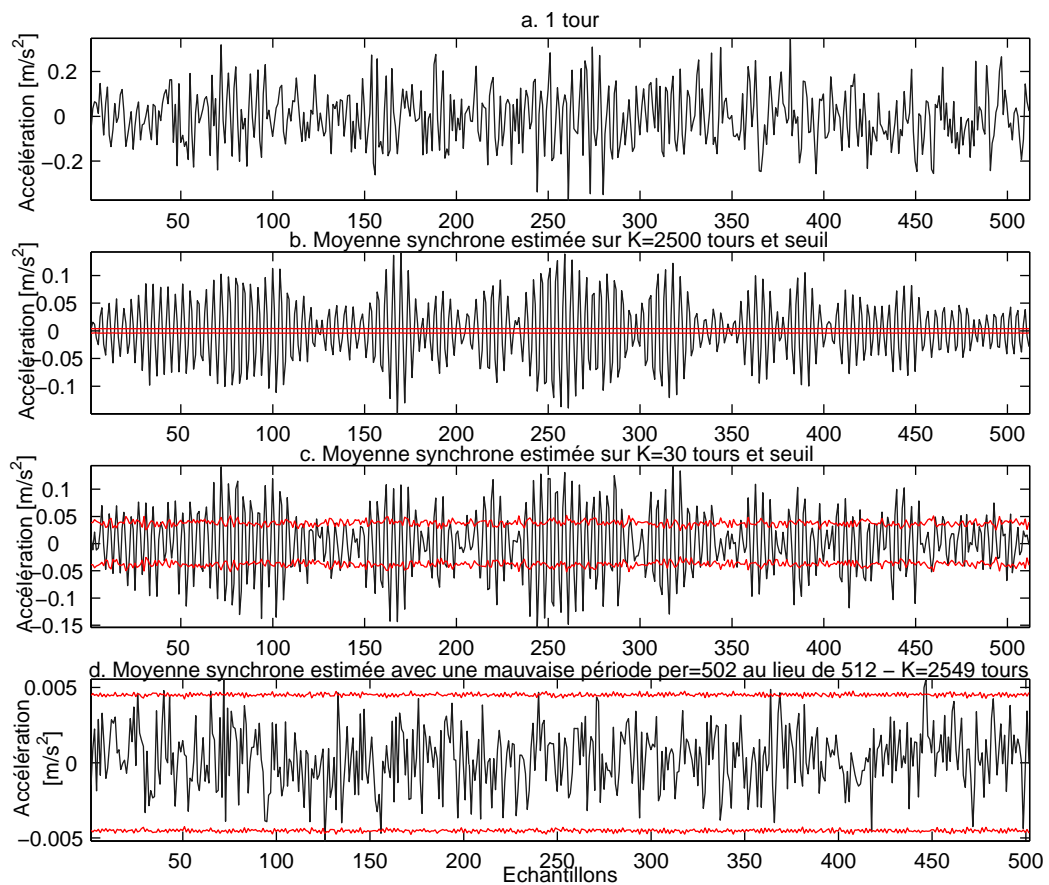


Figure 3.3: Application du seuil à la moyenne synchrone

séparer deux fréquences proches.

– les fréquences sont commensurables : deux approches sont alors possibles.

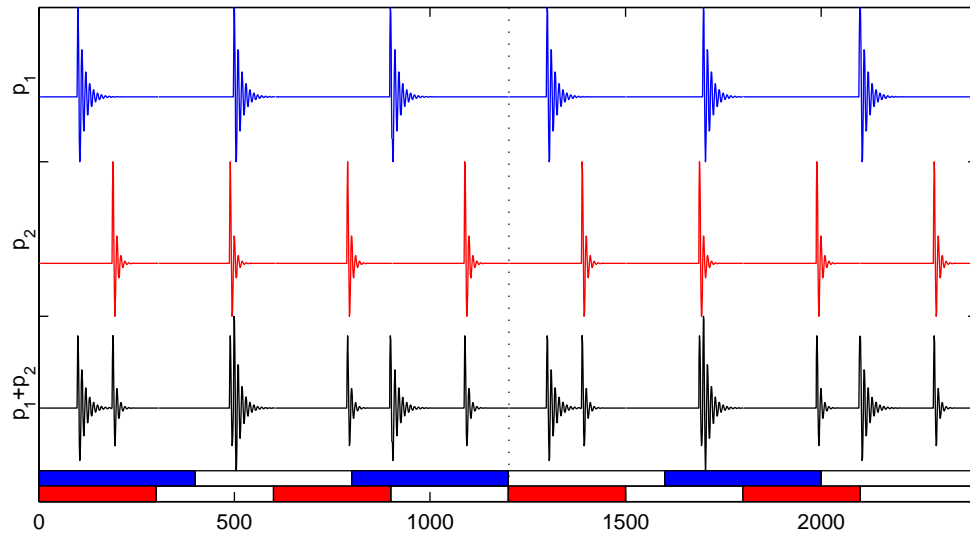
1. Considérer les signaux comme cyclostationnaires selon une période commune. Cette approche, bien que légitime conduit à une perte d'information puisque l'on n'exploite plus les périodes respectives mais une seule période commune. Sur les engrenages industriels, cette période commune est en général la plus longue possible afin d'éviter l'excitation des résonnances du système et la dégradation rapide de la boîte à vitesse.
2. Une autre approche, produisant des résultats non optimaux consiste à étudier chacune des sous périodes indépendamment. Malheureusement, les périodes étant dans un rapport commensurable la moyenne est biaisée car elle n'est pas totalement destructrice pour les autres périodes même si la taille du signal est infinie. L'efficacité de la moyenne synchrone sera réduite.

Pour illustrer ce biais nous avons construit sur la figure 3.4(a) un signal composé de la somme d'une composante périodique  $p_1(n)$  de période  $\Theta_1 = 400$  échantillons et d'une autre composante périodique  $p_2(n)$  de période  $\Theta_2 = 300$  échantillons. Le maximum de chacune des composantes est d'amplitude unitaire. La période commune du signal est alors  $\Theta_{com} = 1200$  échantillons. La figure 3.4(b) montre la moyenne synchrone calculée relativement à la période  $\Theta_1$ .

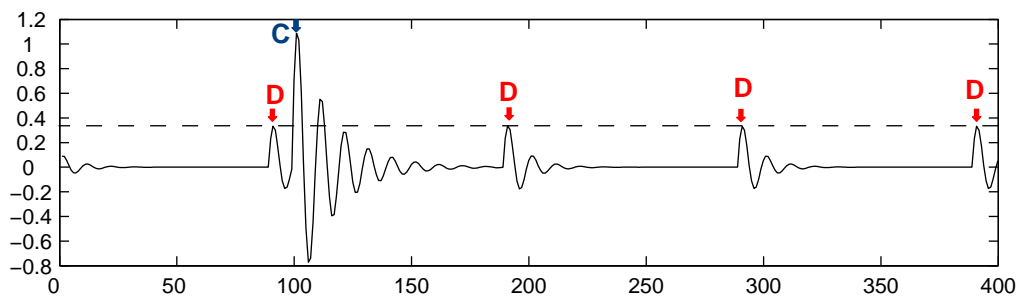
La moyenne synchrone calculée sur une durée infinie de période commune est formée du motif récurrent de  $p_1(n)$  (flèche notée C) que l'on souhaitait isoler mais également de 4 motifs récurrents issus de  $p_2(n)$  dont l'amplitude a été divisée par quatre (flèches notées D). En effet, dans un cycle commun, il y a 3 motifs issus de  $p_1(n)$  qui subissent un moyennage constructif et 4 motifs issus de  $p_2(n)$  qui subissent un moyennage destructif (ce qui explique leur amplitude de 0.25).

### 3.2.2 Caractérisation à l'ordre 2

A l'ordre 2, il est possible d'utiliser 4 représentations pour caractériser la  $CSP_2$ . Chaque représentation est liée soit à un repère angulaire, soit à un repère fréquentiel associé  $f_\theta$  soit à un repère mixte. Pour le repère angulaire nous utiliserons l'angle  $\theta$  ainsi que le retard  $\tau_\theta$  pour la corrélation. Bien que classiquement le domaine fréquentiel soit gradué en  $Hz$ , l'utilisation d'une telle graduation pour des signaux dépendant de l'angle nécessite quelques approximations. Dans le domaine angulaire, le nombre de points par tour  $ppt$  est constant. Pour deux fréquences de rotation distinctes, la quantité  $1/ppt$  restera constante. Dès lors, on ne pourra plus appeler cette quantité une fréquence. La quantité  $o = 1/ppt$  sera alors appelé un ordre [bru, 1995], l'ordre  $n$  correspond à  $n$  fois la fréquence de rotation instantanée. L'échelle fréquentielle en  $Hz$  étant en général plus familière, il sera toutefois possible de l'utiliser si les variations de vitesse sont faibles autour d'une vitesse de rotation moyenne constante, nous aurons alors  $f = f_\theta$  (de l'ordre de quelques pour cent ou pour mille autour de la fréquence de rotation moyenne). Il est bien sûr nécessaire de mesurer au préalable la vitesse de rotation moyenne.



(a) Création d'un signal polypériodique



(b) Moyenne synchrone du signal polypériodique

**Figure 3.4:** *Moyennage synchrone de signaux de périodes commensurables*

### Densité Spectrale de corrélation

Pour définir un spectre, il est nécessaire de calculer la transformée de Fourier du signal. Malheureusement, la transformation de Fourier définie par  $X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(\theta) e^{-2\pi j f \theta} d\theta$  n'est pas convergente, en moyenne quadratique lorsque  $x(\theta)$  est un signal aléatoire. Il convient alors d'utiliser la décomposition de Cramér présentée dans [Cramér, 1999, Blanc-Lapierre et Fortet, 1953] :

$$x(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi j f \theta} dX(f) \quad (3.9)$$

Où  $dX(f)$  est l'incrément spectral à la fréquence  $f$ . Pour  $x(\theta)$  **centré** (approche cumulante), on a :

$$\mathbb{E}\{dX(f_1) dX^*(f_2)\} = d^2\rho_{x(2)}(f_1, f_2) \quad (3.10)$$

où  $d^2\rho_{x(2)}(f_1, f_2)$  est une mesure de puissance qui quantifie l'interaction entre les deux canaux  $f_1$  et  $f_2$  telle que :

$$\kappa_{x(2)}(\theta_1, \theta_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi j(f_1\theta_1 - f_2\theta_2)} d^2\rho_{x(2)}(f_1, f_2) \quad (3.11)$$

La mesure  $d^2\rho_{x(2)}(f_1, f_2)$  est une différentielle au second ordre d'une fonction certaine  $\rho_{x(2)}(f_1, f_2)$  homogène à une distribution spectrale de la fonction d'autocovariance  $\kappa_{x(2)}(\theta_1, \theta_2)$ . Par suite, on admettra qu'il existe une densité de corrélation spectrale (DCS)  $S_{x(2)}(f_1, f_2)$  telle que :

$$d^2\rho_{x(2)}(f_1, f_2) = S_{x(2)}(f_1, f_2) df_1 df_2 \quad (3.12)$$

La DCS dépend alors de deux fréquences et s'identifie à un spectre lorsque ces dernières sont identiques :  $S_{x(2)}(f, f) d^2f = \mathbb{E}\{dX(f) dX^*(f)\}$ , et, dans le cas général, à l'inter-spectre entre deux versions décalées dans le domaine fréquentiel de  $\Delta_f = f_2 - f_1$  :  $S_{x(2)}(f_1, f_1 + \Delta_f) df_1 df_2 = \mathbb{E}\{dX(f_1) dX^*(f_1 + \Delta_f)\}$ .

Dans le cas cyclostationnaire, la périodicité du cumulante d'ordre 2 :  $\kappa_{x(2)}(\theta_1, \theta_2) = \kappa_{x(2)}(\theta_1 + \Theta, \theta_2 + \Theta)$  appliquée aux équations (3.11) et (3.12) impliquera :

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi j(f_1\theta_1 - f_2\theta_2)} d^2\rho_{x(2)}(f_1, f_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi j(f_1\theta_1 - f_2\theta_2)} S_{x(2)}(f_1, f_2) df_1 df_2 \quad (3.13)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi j(f_1\theta_1 - f_2\theta_2)} e^{2\pi j\Theta(f_1 - f_2)} S_{x(2)}(f_1, f_2) df_1 df_2 \quad (3.14)$$

Soit :

$$d^2\rho_{x(2)}(f_1, f_2) = \begin{cases} S_{x(2)}(f_1, f_2) df_1 df_2 & \text{pour } f_1 = f_2 + \frac{k}{\Theta}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.15)$$

La mesure de puissance sera donc nulle partout sauf sur l'ensemble des droites d'équation  $f_1 = f_2 + \frac{k}{\Theta}$  (cf. figure 3.6(a)). Il apparaît alors intéressant de faire le changement de repère :

$$\begin{cases} f = \frac{f_1 + f_2}{2} \\ \alpha = f_1 - f_2 \end{cases} \quad (3.16)$$

Ce changement de repère permet de faire apparaître la fréquence cyclique  $\alpha$ . Cette fréquence cyclique prend tout son sens en réécrivant l'équation 3.10 dans ce nouveau repère :

$$S_{x(2)}(f, \alpha) df d\alpha = \mathbb{E} \left\{ dX \left( f + \frac{\alpha}{2} \right) dX^* \left( f - \frac{\alpha}{2} \right) \right\} \quad (3.17)$$

La DCS apparaît donc comme le produit de deux versions décalées en fréquence d'une quantité  $\alpha$  des incréments spectraux à la fréquence  $f$ . Une valeur non nulle de la DCS caractérisera donc un lien entre les fréquences  $f - \frac{\alpha}{2}$  et  $f + \frac{\alpha}{2}$ .

On peut extraire la partie intéressante de cette mesure de puissance en définissant la *densité spectrale cyclique* (DSC) qui correspond aux valeurs non nulles de la DCS :

$$\begin{cases} S_{x(2)}^\alpha(f) &= S_{x(2)}(f, \alpha) \\ S_{x(2)}(f, \alpha) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_{x(2)}^{k/\Theta}(f) \delta_{\frac{k}{\Theta}} \end{cases} \quad (3.18)$$

La densité de corrélation est alors continue par rapport à la variable  $f$  et discrète par rapport à la fréquence cyclique  $\alpha$ . Ce résultat est une propriété remarquable des signaux cyclostationnaires.

L'équation (3.17) est la forme symétrique de la DCS. Il existe également une forme assymétrique définie par :

$$S_{x(2)}(f, \alpha) df d\alpha = \mathbb{E} \{ dX(f + \alpha) dX^*(f) \} \quad (3.19)$$

L'estimation de la corrélation spectrale se fera en deux étapes comme l'indique la figure 3.5(a) :

1. Pour une fréquence cyclique donnée  $\alpha$ , on effectue deux décalages fréquentiels du signal apodisé en le multipliant respectivement par  $e^{+i\pi\alpha\theta}$  et  $e^{-i\pi\alpha\theta}$ . On obtient alors deux signaux.
2. On calcule ensuite l'interspectre de ces deux signaux. L'interspectre obtenu correspond alors à une coupe de la corrélation spectrale à la fréquence cyclique  $\alpha$  choisie.

Comme la corrélation spectrale est basée sur le calcul d'un interspectre, on utilisera les mêmes techniques d'estimation : le périodogramme moyenné et le périodogramme lissé.

La figure 3.5 illustre ces deux techniques.

La méthode du périodogramme moyenné est basée sur le découpage du signal en  $K$  blocs de  $M$  points. La corrélation spectrale est tout d'abord calculée sur chacun de ces blocs. Les corrélations spectrales ainsi obtenues sont ensuite moyennées.

La méthode du périodogramme lissé est basée sur le lissage d'une corrélation spectrale calculée sur le signal complet. On sous-échantillonne ensuite cette image selon l'axe fréquentiel.

D'après les calculs de complexité de [Bouillaut, 2000], la méthode du périodogramme moyenné devient plus avantageuse à partir de 4 moyennes, de plus, elle nécessite moins de mémoire.

Lors de l'utilisation du périodogramme moyenné, il faudra prendre garde à la méthode d'évaluation de l'interspectre. En effet, dans les logiciels comme Matlab, la transformée de Fourier est calculée en considérant que chacun des blocs débute à un instant nul ( $n = 0$ ). Dès lors, pour la  $k^{\text{ième}}$  tranche, on introduira un déphasage de  $e^{2\pi j\alpha k M}$  [Capdessus, 1992] qu'il suffira de compenser pour estimer correctement la corrélation spectrale.

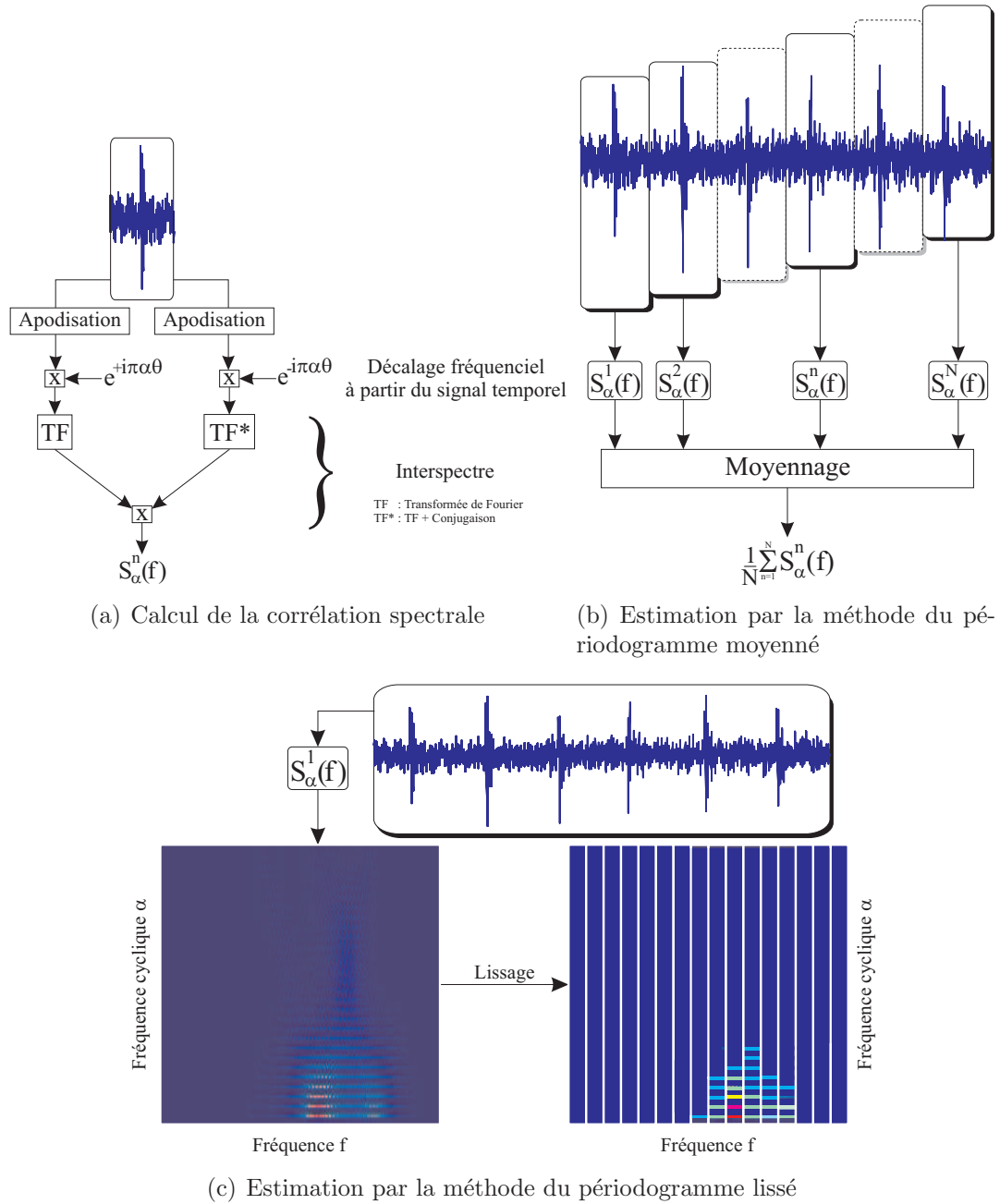


Figure 3.5: Estimation de la corrélation spectrale

Le périodogramme moyenné conduit à faire un compromis entre le biais et la résolution fréquentielle. En effet, le signal étant de taille finie, si l'on augmente le nombre de blocs on diminue le biais, mais, un bloc de taille réduite conduit à une résolution fréquentielle plus faible.

Un dilemme biais variance apparaît pour l'estimateur basé sur le périodogramme lissé lors du choix de la fenêtre de lissage : une fenêtre de lissage de durée importante permet de réduire le biais mais la variance dépend de la forme de cette fenêtre.

#### Signaux presque-cyclostationnaires

Dans le cas presque-cyclostationnaire, le cumulante d'ordre 2 peut être approximé uniformément par un polynôme trigonométrique de la forme :

$$\kappa_{x(2)}(\theta, \tau) \approx \sum_{n=1}^N c_n(\tau) e^{2\pi j \nu_n \theta} \quad (3.20)$$

Cette formulation conduira à une mesure de puissance nulle partout sauf sur l'ensemble des droites d'équation  $f_1 = f_2 + \nu_n$ . La figure 3.6(b) montre ce support pour un signal constitué de deux pseudo-périodes cycliques ainsi que de leurs harmoniques. Dès lors, les valeurs de la DSC non nulles correspondront non plus à une fréquence cyclique et à ces harmoniques mais à l'ensemble des pseudo-périodes  $\{\nu_n\}$  (incluant les harmoniques).

Parmi les applications de la DSC, on pourra citer le degré de cyclostationnarité introduit par Gardner et repris dans [Zivanovic et Gardner, 1991] :

$$D_{CS} = \frac{\sum_{\alpha \neq 0} \int_{\mathbb{R}} \left| S_{x(2)}^{\alpha}(f) \right|^2 df}{\int_{\mathbb{R}} \left| S_{x(2)}^0(f) \right|^2 df} \quad (3.21)$$

Ce degré de cyclostationnarité peut être interprété comme la distance avec le processus stationnaire le plus proche [Gardner et Franks, 1975]. Une étude et une généralisation des mesures de cyclostationnarité aux ordres supérieurs pourront être trouvés dans [Raad, 2003].

### **Autocovariance**

L'autocovariance correspond au cumulante d'ordre 2. Puisqu'elle est périodique dans le contexte cyclostationnaire :  $\kappa_{X(2)}(\theta_1, \theta_2) = \kappa_{X(2)}(\theta_1 + \Theta, \theta_2 + \Theta)$ , il est classique de faire le changement de repère :

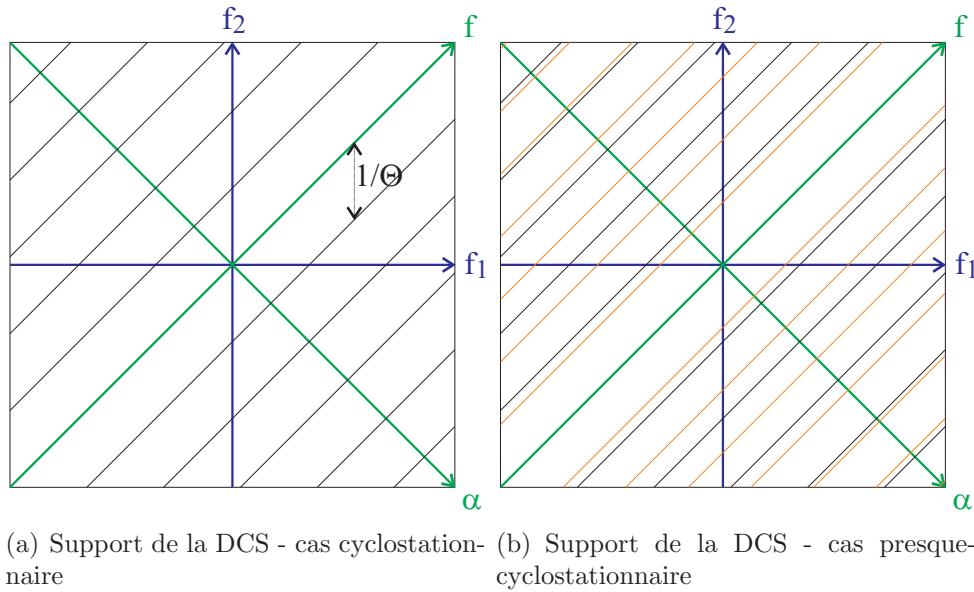
$$\begin{cases} \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \\ \tau = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \end{cases} \quad (3.22)$$

On utilise également la variance synchrone définie par  $\kappa_{X(2)}(\theta, 0)$  qui correspond à la puissance instantanée du système.

#### Cas cyclostationnaire

Dans le cas cyclostationnaire on a  $\kappa_{X(2)}(\theta, \tau) = \kappa_{X(2)}(\theta + m\Theta, \tau + n\Theta)$  quels que soient les entiers  $m$  et  $n$ . L'autocovariance admet donc un développement en série de Fourier dont les coefficients sont donnés par :





**Figure 3.6:** *Support de la DCS*

$$\kappa_{X(2)}^\alpha(\tau) = \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta \kappa_{X(2)}(\theta, \tau) e^{-2\pi j \alpha \theta} d\theta \text{ avec } \alpha = \frac{k}{\Theta}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.23)$$

Où les fréquences cycliques  $\alpha$  sont multiples de la fréquence de base du système :  $\alpha = \frac{k}{\Theta}$ ,  $k$  entier.

La fonction  $\kappa_{X(2)}^\alpha(\tau)$  est alors appelée fonction d'autocovariance cyclique. Elle est reliée à la DSC par :

$$S_{x(2)}^\alpha(f) = \int_{\mathbb{R}} \kappa_{X(2)}^\alpha(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (3.24)$$

#### Cas presque-cyclostationnaire

Dans le cas presque-cyclostationnaire la variance peut être approximée par un polynôme trigonométrique qui admet une décomposition de Fourier-Bohr (équation 3.20). Ce polynôme fournit directement la valeur de la variance cyclique :  $\kappa_{X(2)}^\alpha(\tau) = c_\alpha(\tau)$ .

À la différence du cas cyclostationnaire où l'ensemble des valeurs  $\alpha$  correspondait au fondamental et à ses harmoniques, elles correspondent ici à un ensemble de fréquences données.

La variance cyclique sera alors reliée à la DSC par :

$$S_{x(2)}^\alpha(f) \approx \int_{\mathbb{R}} \kappa_{X(2)}^\alpha(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (3.25)$$

L'égalité ne peut pas être utilisée ici car le polynôme trigonométrique approche seulement la variance.

### Spectre de Wigner-Ville

Nous traitons ici des signaux stochastiques. Or, la *distribution de Wigner-Ville*  $S_{x(2)}(\theta, f)$  a été originellement conçue pour des signaux déterministes d'énergie finie par :

$$S_{x(2)}(\theta, f) = \int_{\mathbb{R}} x^* \left( \theta - \frac{\tau}{2} \right) x \left( \theta + \frac{\tau}{2} \right) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (3.26)$$

Pour pouvoir manipuler des signaux aléatoires, nous allons utiliser le *spectre de Wigner-Ville* [Martin, 1982, Antoni, 2000]  $\mathcal{S}_{X(2)}(\theta, f)$  qui est défini comme l'espérance mathématique de la distribution de Wigner-Ville du processus aléatoire centré. Ainsi, pour un processus aléatoire  $X(\theta)$  on aura :

$$\mathcal{S}_{X(2)}(\theta, f) = \mathbb{E} \{ S_{X(2)}(\theta, f) \} \quad (3.27)$$

Sous réserve de commutativité entre l'espérance et l'intégration, il est possible de lier l'autocovariance et le spectre de Wigner-Ville par :

$$\mathcal{S}_{X(2)}(\theta, f) = \int_{\mathbb{R}} \kappa_{X(2)}(\theta, \tau) e^{2\pi j f \tau} d\tau \quad (3.28)$$

Lorsque le processus stochastique  $X(\theta)$  est (pseudo)-cyclostationnaire, le spectre de Wigner-Ville présente une structure (pseudo)-périodique suivant la variable angulaire  $\theta$ .

En combinant les équations (3.23) et (3.28), on peut écrire :

$$\mathcal{S}_{X(2)}(\theta, f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi j f \tau} \sum_{\alpha \in \{\nu_k\}} \kappa_{X(2)}^\alpha(\tau) e^{-2\pi j \alpha \theta} d\tau \quad (3.29)$$

$$= \sum_{\alpha \in \{\nu_k\}} S_{x(2)}^\alpha(f) e^{-2\pi j \alpha \theta} \quad (3.30)$$

Dans le cas cyclostationnaire, on aura  $\{\nu_k\} = \frac{k}{\Theta}$ . Dans le cas presque-cyclostationnaire, les fréquences  $\nu_k$  ne seront pas forcément multiples entre elles, de plus, il conviendra de remplacer l'égalité par une approximation.

Cette équation établit le lien entre le spectre de Wigner-Ville et la DSC.

La figure 3.7 résume les relations entre les différentes représentations à l'ordre 2.

### 3.2.3 Alternative dans le cas quasi-cyclostationnaire

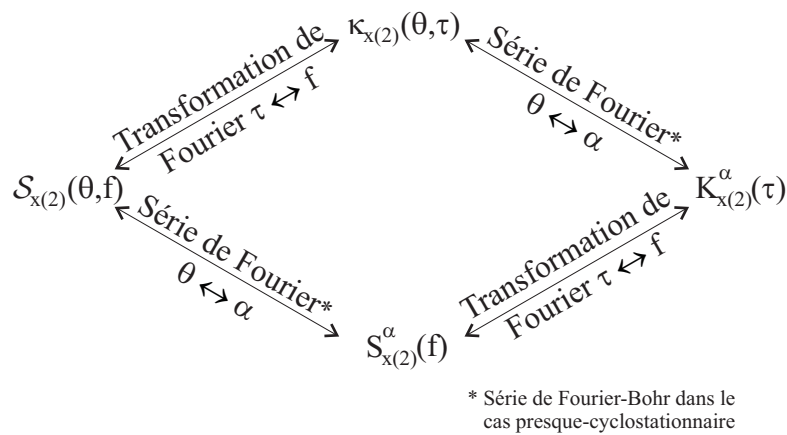
Lorsque les signaux sont quasi-cyclostationnaires (il existe des périodes incommensurables entre elles), il est possible d'utiliser l'opérateur d'extraction de composante périodique  $\langle x(\theta) \rangle_{\Theta}$  défini par l'équation (3.2).

Comme indiqué précédemment, cet opérateur apparaît comme un filtre en peigne sélectionnant uniquement les composantes de période  $\Theta$ .

On peut alors généraliser cet opérateur à l'ordre 2 par :

$$\langle \kappa_{X(2)}(\theta_1, \theta_2) \rangle_{\Theta} = \langle \mathbb{E} \{ [X(\theta_1) - \langle X(\theta_1) \rangle_{\Theta}] [X(\theta_2) - \langle X(\theta_2) \rangle_{\Theta}]^* \} \rangle \quad (3.31)$$

Nous avons proposé ici deux méthodes pour traiter le cas presque cyclostationnaire : soit de prendre en considération et obtenir des statistiques presque-cyclostationnaires, soit



**Figure 3.7:** Relations entre les différentes représentations à l'ordre 2

extraire chaque période (sous réserve d'existence c'est-à-dire de quasi-cyclostationnarité) et travailler alors sur des signaux cyclostationnaires. Le choix de la méthode dépendra alors du type de signal et des traitements que l'on veut faire. Par exemple, si chaque période a une signification physique, la dernière méthode deviendra intéressante.

### 3.3 Application au diagnostic

Ce paragraphe a pour but de montrer un exemple d'exploitation de la cyclostationnarité pour le diagnostic de défaut d'engrenages. Les signaux accélérométriques ont été acquis au centre d'études et recherches EDF à Chatou sur un banc d'essai de fatigue. Ces signaux ont notamment été exploités dans [Fontanive et Prieur, 1992] et [El Badaoui, 1999]. Nous proposons ici une autre analyse basée sur la cyclostationnarité.

Il s'agit d'un banc d'essai composé d'une roue de 56 dents et d'une autre de 15 dents. La fréquence de rotation de la roue menante est de  $12,5 \text{ Hz}$  et la fréquence d'échantillonnage de  $6,4 \text{ kHz}$ . Afin d'étudier l'apparition d'un défaut, un essai de fatigue a été réalisé. Tout au long de cet essai 15 acquisitions ont été faites. Un défaut de type écaillage a été détecté à partir de la dixième mesure. Le défaut s'est aggravé progressivement jusqu'à la rupture d'une dent lors du quinzième relevé.

Dans les précédentes publications, le défaut a été détecté lors du 10<sup>ième</sup> essai. Par ailleurs, les signaux ont été qualifiés de "fortement bruités". Nous allons, en exploitant la cyclostationnarité retrouver ces mêmes résultats. Pour cela, nous avons préalablement re-échantillonné les signaux dans le domaine angulaire en estimant la phase instantanée par démodulation autour de deux fois la fréquence d'engrènement.

La figure 3.8 montre les 15 acquisitions pendant une durée correspondant à la période commune (intervalle au bout duquel l'engrenage revient dans la même configuration (mêmes dents en contact)). La période commune  $\Theta_{com}$  représente 15 tours de la roue de 56 dents ou 56 tours de la roue de 15 dents (15 et 56 n'ayant pas de multiple commun). Chacun des signaux a été normalisé par rapport à leur valeur crête-à-crête avant affichage afin de faciliter leur comparaison. Le défaut apparaît nettement le 11<sup>ième</sup> jour alors qu'il avait été détecté par un expert le 10<sup>ième</sup> jour.

En toute rigueur les signaux d'engrenage sont cyclostationnaires, c'est-à-dire qu'il existe une période cyclique. Cette période correspond au cycle commun de l'engrenage.

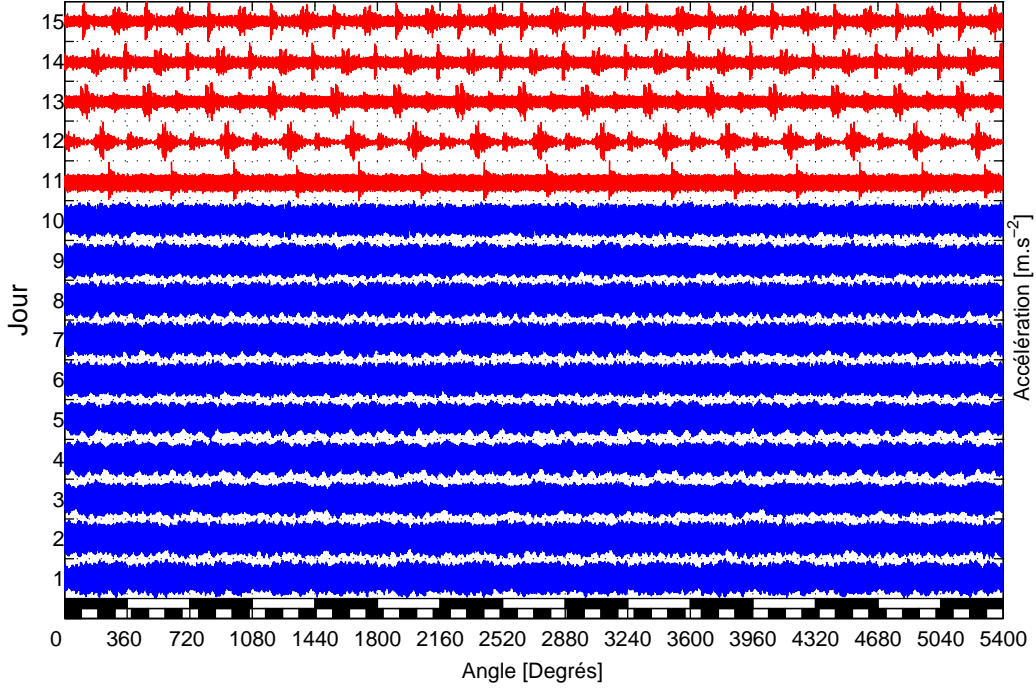


Figure 3.8: Premiers points du signal

Nous avons préféré les qualifier de polycyclostationnaires puisque physiquement cette période est composée de “sous” périodes correspondant aux périodes de rotation des roues qui sont dans un rapport rationnel, il serait alors dommage de ne pas exploiter ces informations. Nous allons exploiter la moyenne synchrone sur la période commune  $\Theta_{com}$  afin d’examiner l’apparition au dixième jour.

Si on considère le signal cyclostationnaire à l’ordre 2, on le modélise sous la forme :

$$x(\theta) = p(\theta) + r(\theta) \quad (3.32)$$

Où  $p(\theta)$  est un signal périodique de période  $\Theta_{com}$  que l’on estimera à l’aide d’une moyenne synchrone. Le signal ne contient malheureusement que 7 blocs de taille  $\Theta_{com}$ . La figure 3.9 montre l’estimation de cette période commune, le résidu est présenté sur la figure 3.10. On peut constater que la période commune est très proche du signal et que le résidu n’apporte que peu d’information nouvelle.

Devant l’insuccès de l’approche cyclostationnaire, nous allons utiliser une approche polycyclostationnaire. Pour cela le signal sera modélisé par :

$$x(\theta) = p_1(\theta) + p_2(\theta) + p_{1,2}(\theta) + r(\theta) \quad (3.33)$$

Où le signal est composé de deux signaux périodiques  $p_1(\theta)$  de période  $\Theta_1$  et  $p_2(\theta)$  de période  $\Theta_2$  dont la période correspond respectivement à la 1<sup>ère</sup> et à la 2<sup>ème</sup> roue ; de  $p_{1,2}(\theta)$  de période  $\Theta_{com}$  correspondant à l’interaction des 2 roues ; d’un signal résiduel  $r(\theta)$  non périodique. Nous supposons que les périodes  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  ne sont pas multiples entre elles mais dans un rapport rationnel. Dans le cas contraire, cette approche n’aurait aucun intérêt.

La composante précédemment estimée,  $p(\theta)$  correspond à la somme des trois composantes périodiques. L’estimation de  $p_1(\theta)$  se fera en calculant la moyenne synchrone

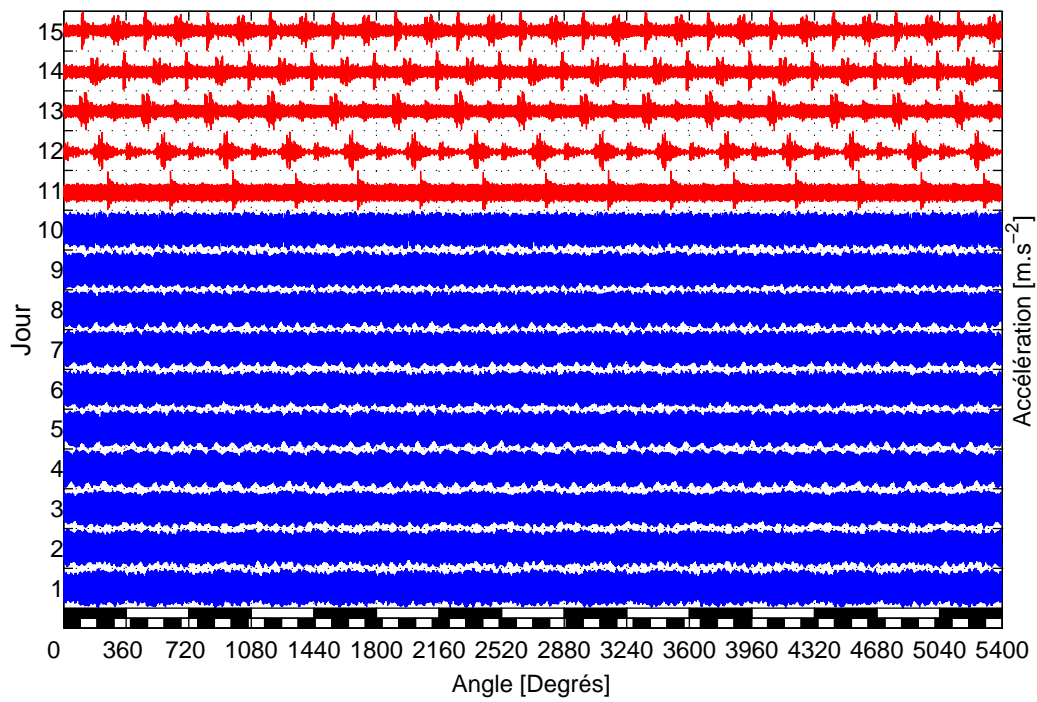


Figure 3.9: Période commune  $p(\theta)$

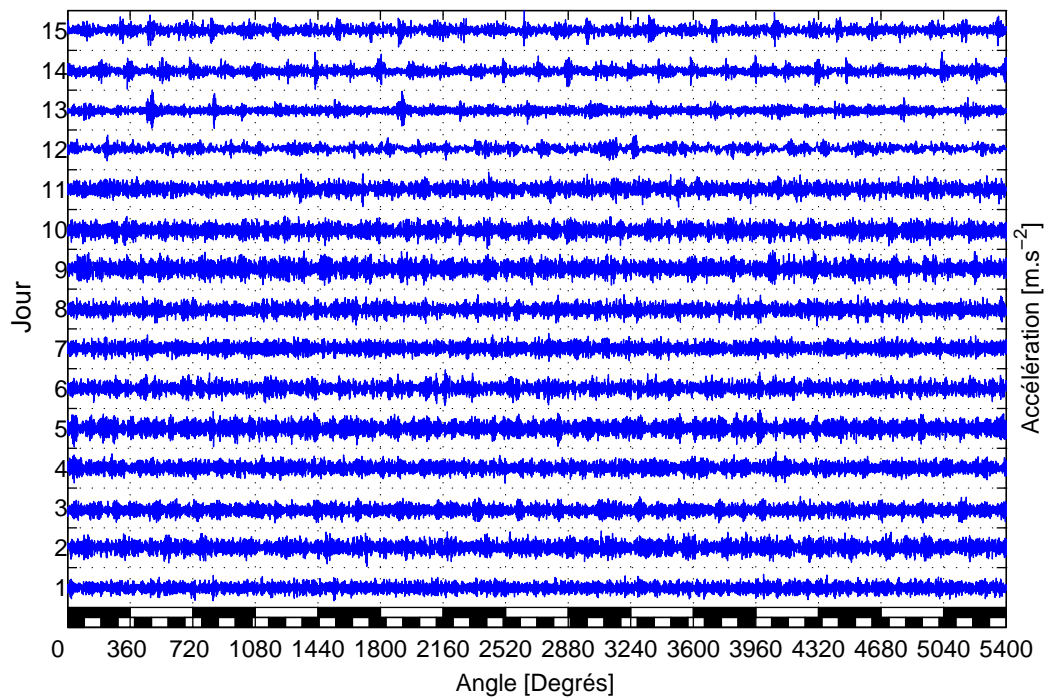


Figure 3.10: Signal résiduel  $r(\theta)$

$\langle x(\theta) \rangle_{\Theta_1}$ .

Malheureusement, l'estimateur de  $p_1(\theta)$  est biaisé. En effet, comme  $p_{1,2}(\theta)$  est périodique d'une part et que  $\Theta_1$  est sous-multiple de cette période, une moyenne synchrone calculée sur un nombre infini de blocs fera toujours apparaître un nombre fini  $\alpha = \frac{\Theta_{com}}{\Theta_1}$  de composantes décalées de  $p_{1,2}(\theta)$  lors du moyennage :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle x(\theta) \rangle_{\Theta_1}^{N\alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\alpha} \sum_{k=0}^{N\alpha-1} [p_1(\theta + k\Theta_1) + p_2(\theta + k\Theta_1) + p_{1,2}(\theta + k\Theta_1) + r(\theta + k\Theta_1)] \quad (3.34)$$

Où :

- $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\alpha} \sum_{k=0}^{N\alpha-1} p_1(\theta + k\Theta_1)$  correspondra, par définition à  $p_1(\theta)$ ,
- $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\alpha} \sum_{k=0}^{N\alpha-1} p_2(\theta + k\Theta_1) = 0$  puisque  $p_2(\theta)$  est périodique de période  $\Theta_2$  qui n'est pas multiple de  $\Theta_1$ ,
- $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\alpha} \sum_{k=0}^{N\alpha-1} p_{1,2}(\theta + k\Theta_1) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} p_{1,2}(\theta + k\Theta_1)$  puisque  $p_{1,2}(\theta)$  est périodique de période  $\Theta_{com}$  et que  $\alpha$  périodes sont contenues dans une période  $\Theta_{com}$ ,
- $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\alpha} \sum_{k=0}^{N\alpha-1} r(\theta) = 0$  par définition puisque  $r(\theta)$  n'est pas périodique de période  $\Theta_1$ .

Soit :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle x(\theta) \rangle_{\Theta_1}^{N\alpha} = p_1(\theta) + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} p_{1,2}(\theta + k\Theta_1) \neq p_1(\theta) \quad (3.35)$$

Néanmoins, si les nombres de dents sont élevés et qu'ils sont premiers entre eux, le nombre  $\alpha$  sera également élevé. Il est tout de même important de noter que l'estimateur de  $p_1(\theta)$  est quoiqu'il en soit biaisé.

Pour l'engrenage de EDF, nous allons essayer d'évaluer la moyenne associée à l'arbre 1 :

$$p_1(\theta) + p_{1,2}(\theta) \quad (3.36)$$

Pour cela, nous avons évalué la moyenne synchrone suivant la période commune, pour estimer la contribution :

$$p_1(\theta) + p_2(\theta) + p_{1,2}(\theta) \quad (3.37)$$

Puis nous avons retranché  $p_2(\theta)$  estimé par moyennage synchrone sur une période  $\Theta_2$  ( $\alpha = 56$ ). Le résultat est présenté sur la figure 3.11.

Bien que l'estimation soit biaisée ( $\alpha = 56$ ), le défaut est nettement visible et au 10<sup>ème</sup> jour (il se manifeste par l'apparition de pics dans le signal).

Ce signal a été qualifié de fortement bruité, nous avons établi ici que cette source de bruit provenait de la contribution de la deuxième roue. Cette composante, fortement énergétique lors des premières acquisitions masque les premiers signes de l'apparition du défaut. Lorsque le défaut progresse, l'énergie associée à la roue 1 porteuse du défaut devient plus importante et le fait ainsi ressortir sur le signal non traité.

De nombreuses autres approches ou méthodes complémentaires pourront être envisagées. Nous nous sommes néanmoins limités à cette dernière puisqu'elle est très simple et qu'elle illustre bien le problème du calcul de la moyenne synchrone dans le cas d'engrenages.

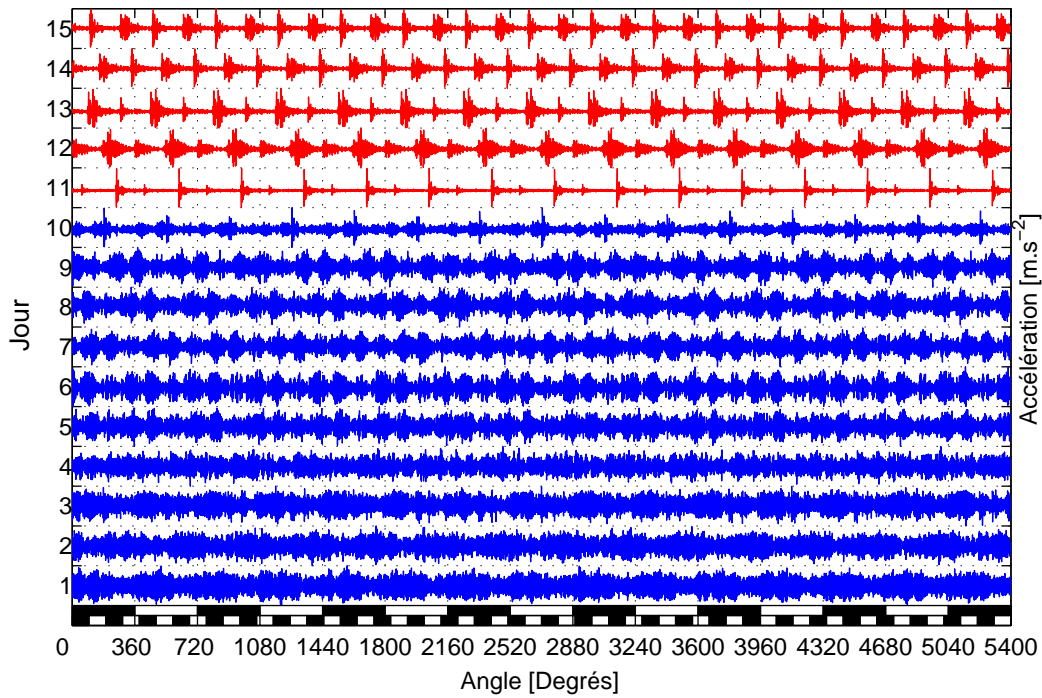


Figure 3.11: *Signal après traitement*

### 3.4 Conclusion

Nous avons défini dans ce chapitre la notion de cycloergodicité qui nous permet d'utiliser une seule réalisation de durée suffisamment longue. En pratique, nous supposons implicitement cette propriété vérifiée. Nous avons également défini les outils permettant de caractériser la cyclostationnarité et la quasi-cyclostationnarité aux ordres 1 et 2. Enfin, un exemple montre les limites de l'approche cyclostationnaire et l'intérêt de l'approche polycyclostationnaire pour les signaux d'engrenages.

Le chapitre suivant va illustrer l'utilisation de la cyclostationnarité dans le cadre de signaux pseudo-quasicyclostationnaires sur les signaux de roulement.







# Chapitre 4

## Cyclostationnarité floue

JUSQU'À présent, nous avons travaillé avec des signaux cyclostationnaires. Le but de ce chapitre est d'examiner le cas de signaux dont la ou les périodes cycliques ne prennent pas des valeurs certaines ; il s'agit par exemple de signaux acquis sous échantillonnage temporel, issus de machines dont la vitesse de rotation instantanée fluctue, ou bien, de signaux issus de roulements lorsque les glissements entre billes et cages font que les périodes cycliques deviennent des variables aléatoires. Afin de qualifier ce fait, nous avons introduit le vocable de “cyclostationnarité floue”. Nous allons définir plus précisément cette notion et voir dans quelles circonstances elle peut être exploitée au même titre que la cyclostationnarité.

### 4.1 Définition

Une fonction  $h(t)$  sera dite cyclostationnaire floue (respectivement presque cyclostationnaire floue) aux ordres  $\{o_1, o_2, \dots\}$  si et seulement s'il existe une fonction  $\theta = g(t)$  strictement croissante, une fonction  $f(\theta)$  cyclostationnaire (respectivement presque cyclostationnaire) aux ordres  $\{o_1, o_2, \dots\}$ , ainsi qu'un filtre variant dans le temps  $r(t, \tau)$  telle que l'on puisse écrire :

$$h(t) = f[g(t)] * r(t, \tau) \quad (4.1)$$

On prend donc en compte la relation entre l'angle et le temps d'une part en introduisant un changement de variable et d'autre part on tient compte d'un filtrage dépendant du temps et de l'angle (et donc de la vitesse de rotation), car la structure mécanique agit comme un filtre dans le domaine temporel. Dès lors, si la fluctuation de vitesse est importante, les harmoniques associées aux fréquences de rotation se déplaceront sur le spectre et n'aurons pas nécessairement la même pondération.

### 4.2 Impact des fluctuations de vitesse aléatoires

Dans cette partie nous allons considérer un signal vibratoire à variable générique angulaire  $x(\theta)$  (issu d'un engrenage par exemple) qui peut s'écrire :

$$x(\theta) = \sum_{i=1}^I c_i(\theta) e^{j\omega_i \theta} \quad (4.2)$$

où les  $\omega_i$  correspondent aux ordres (l'ordre  $i$  correspond à  $i$  fois la fréquence de rotation), et les termes  $c_i(\theta)$  sont des composantes stationnaires. Ce signal est cyclostationnaire à la période  $\frac{2\pi}{\omega_1}$ . Afin de l'examiner en fonction du temps  $t$ , nous allons utiliser une loi de position de la forme :

$$\theta(t) = v_{moy}t + \phi(t) \text{ avec } \phi(t) = \int_{-\infty}^t v(u) du \quad (4.3)$$

où  $v_{moy}$  est la vitesse moyenne,  $v(t)$  caractérise les fluctuations autour de la vitesse moyenne, et,  $\phi(t)$  est la phase instantanée associée à  $v(t)$ . Nous considérons ici que les fluctuations de vitesse sont faibles vis-à-vis de la vitesse moyenne. D'autre part, nous considérons que  $\theta(t)$  est une fonction strictement croissante, c'est-à-dire que la machine tournante associée à ce modèle ne fait pas de retour en arrière à cause de son inertie.

La période cyclique n'étant plus constante, on définit la période cyclique moyenne  $T_{moy} = 1/v_{moy}$ .

Si  $x(\theta)$  est cyclostationnaire, le signal  $x(t) = x[\theta(t)]$  est donc cyclostationnaire flou. Nous ne considérons pas pour l'instant l'effet du filtrage par la structure mécanique, il sera étudié séparément dans un autre paragraphe.

### 4.2.1 Effet à l'ordre 1

Afin de caractériser la cyclostationnarité à l'ordre 1, nous allons calculer la moyenne (d'ensemble) du processus stochastique associé à  $x(t)$ . Soient  $\{X(t)\}$ ,  $\{X(\theta)\}$ ,  $\{\Phi(t)\}$ ,  $\{C_i(\theta)\}$  les processus stochastiques dont les réalisations sont respectivement  $x(t)$ ,  $x(\theta)$ ,  $\phi(t)$  et  $c_i(\theta)$ .

Dans le domaine temporel, nous aurons :

$$\mathbb{E}\{X(t)\} = \sum_{i=1}^I \mathbb{E}\{C_i[v_{moy}t + \Phi(t)] e^{j\omega_i\Phi(t)}\} \underbrace{e^{j\omega_i v_{moy}t}}_{\text{déterministe}} \quad (4.4)$$

Nous devons alors calculer :

$$\mathbb{E}\{C_i[v_{moy}t + \Phi(t)] e^{j\omega_i\Phi(t)}\} = \mathbb{E}_{\Phi}\{\mathbb{E}\{C_i[v_{moy}t + \Phi(t)]|\Phi(t)\} e^{j\omega_i\Phi(t)}\} \quad (4.5)$$

Où  $\mathbb{E}\{A|B\}$  est l'espérance de A conditionnée par B, et  $\mathbb{E}_B\{A\}$  est l'espérance calculée relativement à B.

Comme  $C_i(\theta)$  est stationnaire,  $C_i[v_{moy}t + \Phi(t)]$  le sera également (l'absence de retour en arrière empêche l'apparition de périodicité). On pourra donc définir la quantité  $\mu_{C_i(1)}$  alors indépendante de  $\Phi(t)$ , correspondant à :

$$\mu_{C_i(1)} = \mathbb{E}\{C_i[v_{moy}t + \Phi(t)]|\Phi(t)\} \quad (4.6)$$

Cette quantité correspond à l'amplitude de l'ordre i dans l'espérance.

Nous aurons alors :

$$\mathbb{E}_{\Phi}\{\mu_{C_i(1)} e^{j\omega_i\Phi(t)}\} = \mu_{C_i(1)} \int e^{j\omega_i\varphi} p_{\Phi}(\varphi, t) d\varphi \quad (4.7)$$

Où  $p_{\Phi}(\varphi, t)$  est la densité de probabilité de  $\Phi$ . Finalement, l'espérance du signal dans le domaine temporel sera :

$$\mathbb{E} \{X(t)\} = \sum_{i=1}^I \left[ e^{j\omega_i v_{moy} t} \mu_{C_i(1)} \int e^{j\omega_i \varphi} p_{\Phi}(\varphi, t) d\varphi \right] \quad (4.8)$$

Dans [Antoni et al., 2004], il est conclu que le moment d'ordre 1 est périodique si et seulement si la fluctuation de vitesse possède des statistiques périodiques ou si elle est stationnaire. Nous allons ici, discuter plus en détail de l'interprétation de ce résultat.

### Conditions pour la conservation de la cyclostationnarité

Supposons  $p_{\Phi}(\varphi, t)$  périodique à la période  $T$ . Pour pouvoir trancher sur la cyclostationnarité à l'ordre 1, il faut tenir compte non seulement de la période cyclique moyenne  $T_{moy} = \frac{2\pi}{v_{moy}}$  mais aussi d'éventuelles périodicités dans la densité de probabilité de  $\Phi$ .

- Si  $T = k \cdot T_{moy}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , la période du moment d'ordre 1 sera alors imposée par  $p_{\Phi}(\varphi, t)$  et le signal résultant sera alors cyclostationnaire à l'ordre 1 à la période cyclique  $T$ .

Un tel cas peut apparaître :

- dans les réducteurs à engrenage si la roue de sortie présente un défaut qui génère des fluctuations de vitesse à sa période de rotation,
- à cause d'une charge non équilibrée qui engendre une fluctuation de vitesse à la fréquence de rotation de l'arbre.
- Si  $T = \frac{T_{moy}}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , la période du moment d'ordre 1 sera alors imposée par le terme  $e^{j\omega_i v_{moy} t}$ . Le signal sera alors cyclostationnaire à la période cyclique  $T_{moy}$ .

De telles fluctuations de vitesse peuvent être générées par des défauts d'alignement (fréquence double de la fréquence de rotation).

- Si la fluctuation de vitesse est stationnaire. Dans ce cas,  $p_{\Phi}(\varphi, t) = p_{\Phi}(\varphi)$  ne dépend plus du temps. On obtient donc un signal cyclostationnaire à la période cyclique  $T_{moy}$  (cette période étant imposée par le terme  $e^{j\omega_i v_{moy} t}$ ).

Un tel signal peut être généré par un broyeur de pierres où chaque pierre différente produirait une fluctuation de nature différente.

Lorsque le signal est composé de plusieurs périodes cycliques, il y a deux cas possibles :

- Soit les périodes sont commensurables, alors elles ont une très forte chance d'avoir la même origine physique donc d'être soumise à la même densité de probabilité (cas des engrenages). On utilise alors leur période commune.
- Soit elles sont incommensurables et cela signifie que leurs origines physiques sont différentes, et donc que les densités de probabilité de leurs variations peuvent être très différentes également. Dans ce cas, il est impossible de conclure sur la cyclostationnarité.

### Effet de filtrage passe-bas

Nous allons tout d'abord nous intéresser au terme  $\int e^{j\omega_i \varphi} p_{\Phi}(\varphi, t) d\varphi$ . Il correspond à la transformée de Fourier de la densité de probabilité  $p_{\Phi}(\varphi, t)$ . Si cette densité est Gaussienne centrée suivant  $\varphi$  d'écart type  $\sigma$  :

$$p_{\Phi}(\varphi, t) = \frac{f(t)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\varphi^2}{2\sigma^2}} \quad (4.9)$$

Le moment d'ordre 1 devient :

$$\mathbb{E} \{X(t)\} = \sum_{i=1}^I \left[ e^{j\omega_i v_{moy} t} \mu_{C_i(1)} f(t) e^{-\omega_i^2 \sigma^2 / 2} \right] \quad (4.10)$$

Cette équation comporte le terme  $e^{-\omega_i^2 \sigma^2 / 2}$ , qui est d'autant plus faible que l'ordre  $\omega_i$  ou que l'écart type  $\sigma$  sont importants. Ce terme agit donc sur le moment d'ordre 1 comme un filtre passe bas.

Dans le pire des cas (grande fluctuation de vitesse), l'écart type tendra vers l'infini et l'exponentielle vers 0. Le moment d'ordre 1 sera alors nul. Toute l'information à l'ordre 1 associée au cycle est donc détruite par les fluctuations de vitesse.

Dans le cas idéal (aucune fluctuation), l'écart type est nul, et le terme  $e^{-\omega_i^2 \sigma^2 / 2} = 1$ . Il n'y a donc plus de filtrage et toute l'information est conservée.

Ce filtrage réduit donc la quantité d'information à l'ordre 1 par rapport au cas cyclostationnaire.

## 4.2.2 Effet à l'ordre 2

Pour caractériser la cyclostationnarité pure à l'ordre 2, nous allons exprimer le cumulatif d'ordre 2 [Antoni et al., 2004], nous apporterons ensuite nos propres conclusions sur le filtrage et la conservation de la cyclostationnarité :

$$\kappa_{X(t)(2)} = \mathbb{E} \{X^*(t_1) X(t_2)\} - \mathbb{E} \{X^*(t_1)\} \mathbb{E} \{X(t_2)\} \quad (4.11)$$

$$= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \mathbb{E} \{C_m^* [v_{moy} t_1 + \Phi(t_1)] C_n [v_{moy} t_2 + \Phi(t_2)] e^{j[\omega_n \Phi(t_2) - \omega_m \Phi(t_1)]}\} \quad (4.12)$$

$$\dots \underbrace{e^{j v_{moy} (\omega_n t_2 - \omega_m t_1)}}_{\text{déterministe}} - \mathbb{E} \{X^*(t_1)\} \mathbb{E} \{X(t_2)\} \quad (4.13)$$

$$(4.14)$$

Nous devons alors calculer :

$$\mathbb{E} \{C_m^* [v_{moy} t_1 + \Phi(t_1)] C_n [v_{moy} t_2 + \Phi(t_2)] e^{j[\omega_n \Phi(t_2) - \omega_m \Phi(t_1)]}\} \quad (4.15)$$

$$= \mathbb{E}_{\Phi} \{ \mathbb{E} \{C_m^* [v_{moy} t_1 + \Phi(t_1)] C_n [v_{moy} t_2 + \Phi(t_2)] | \Phi(t_1), \Phi(t_2)\} e^{j[\omega_n \Phi(t_2) - \omega_m \Phi(t_1)]}\} \quad (4.16)$$

En exploitant la stationnarité de  $C_i(\theta)$  et donc celle de  $C_i(v_{moy} t + \Phi(t))$ , nous pouvons définir :

$$\mu_{C_i(2)} [v_{moy} (t_2 - t_1) + \Phi(t_2) - \Phi(t_1)] = \mathbb{E} \{C_m^* [v_{moy} t_1 + \Phi(t_1)] C_n [v_{moy} t_2 + \Phi(t_2)] | \Phi(t_1), \Phi(t_2)\} \quad (4.17)$$

Nous aurons alors :

$$D_{m,n}(t_1, t_2) = \mathbb{E}_{\Phi} \{ \mu_{C_i(2)} [v_{moy} (t_2 - t_1) + \Phi(t_2) - \Phi(t_1)] e^{j[\omega_n \Phi(t_2) - \omega_m \Phi(t_1)]}\} \quad (4.18)$$

$$= \int \int \mu_{C_i(2)} [v_{moy} (t_2 - t_1) + \varphi_2 - \varphi_1] p_{\Phi(2)}(\varphi_1, \varphi_2; t_1, t_2) \dots \quad (4.19)$$

$$\dots e^{j[\omega_n \varphi_2 - \omega_m \varphi_1]} d\varphi_1 d\varphi_2 \quad (4.20)$$

Finalement, le moment d'ordre 2 du signal dans le domaine temporel sera :

$$\kappa_{X(t)(2)} = \left[ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N D_{m,n}(t_1, t_2) e^{jv_{moy}(\omega_n t_2 - \omega_m t_1)} \right] - \mathbb{E}\{X^*(t_1)\} \mathbb{E}\{X(t_2)\} \quad (4.21)$$

### Effet de filtrage passe-bas

Cette équation est similaire à une transformée de Fourier à deux dimensions suivant  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  (à un signe près). Dans cette transformée de Fourier, le moment d'ordre 2 est pondéré par la densité de probabilité conjointe de  $\Phi(t)$ . Comme dans le cas précédent, il est possible de faire apparaître un effet de filtrage passe bas qui conduira à une perte d'information.

### Conditions pour la conservation de la cyclostationnarité

Nous retrouvons dans l'expression du cumulants d'ordre 2 la densité de probabilité conjointe de la variation de vitesse, la présence de l'exponentielle  $e^{jv_{moy}(\omega_n t_2 - \omega_m t_1)}$  et le produit des espérances de  $X$ . Dès lors, tout comme pour l'ordre 1, la cyclostationnarité à l'ordre 2 dépendra des propriétés des fluctuations de la période cyclique :

- Soit la période  $T$  de  $p_{\Phi(2)}$  est multiple ou sous multiple de la période moyenne  $T_{moy}$ , auquel cas le signal est cyclostationnaire selon la plus grande des périodes,
- Soit les fluctuations sont stationnaires, auquel cas, la densité conjointe de probabilité ne dépend plus du temps et le signal est cyclostationnaire selon la période  $T_{moy}$ .

Ces calculs (mis à part les conclusions) ont été généralisés aux ordres supérieurs dans [Raad, 2003].

Dans ce paragraphe, nous avons montré que sous certaines conditions, un signal cyclostationnaire flou peut devenir cyclostationnaire. Ces conditions sont assez fortes : il faut la stationnarité ou la cyclostationnarité de la variation de vitesse, avec une période cyclique multiple ou sous multiple de la vitesse moyenne. Nous allons maintenant étudier l'effet des fluctuations de vitesse périodiques et déterministes.

## 4.3 Fluctuations de vitesse périodiques et déterministes

Soit un signal cyclostationnaire flou associé à une fluctuation de vitesse cosinusoidale.

$$v(t) = \Delta \cos(\alpha t) + v_0 \quad (4.22)$$

$$\theta(t) = v_0 t + \frac{\Delta}{\alpha} \sin(\alpha t) \quad (4.23)$$

Où :

- $v_0$  est la vitesse moyenne,
- $\Delta$  caractérise l'amplitude de la fluctuation de vitesse,
- $\alpha$  est la pulsation de la fluctuation de vitesse.

Le signal  $x(\theta)$  devient dans le domaine temporel :

$$x(t) = \sum_{i=1}^I c_i[\theta(t)] e^{j\omega_i[v_0t + \frac{\Delta}{\alpha} \sin(\alpha t)]} \quad (4.24)$$

En utilisant les fonctions de Bessel de 1<sup>ère</sup> espèce  $J_n(z)$ , on peut écrire :

$$e^{j\omega_i \frac{\Delta}{\alpha} \sin(\alpha t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\alpha t} J_n\left(\frac{\omega_i \Delta}{\alpha}\right) \quad (4.25)$$

puis en remplaçant  $c_i[\theta(t)]$  par  $c_i(t)$ ,  $x(t)$  s'écrit alors :

$$x(t) = \sum_{i=1}^I c_i(t) e^{j\omega_i v_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\alpha t} J_n\left(\frac{\omega_i \Delta}{\alpha}\right) \quad (4.26)$$

Qui aura comme transformée de Fourier :

$$X(f) = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{\omega_i \Delta}{\alpha}\right) C_i\left(f - \frac{\omega_i v_0 + n\alpha}{2\pi}\right) \quad (4.27)$$

Où  $C_i(f)$  est la transformée de Fourier de  $c_i(t)$ .

Cette équation montre que les fluctuations de vitesse vont se matérialiser par l'apparition de composantes distantes de  $\frac{n\alpha}{2\pi}$  par rapport au pic principal à  $\frac{\omega_i v_0}{2\pi}$  pondérées par des fonctions de Bessel (modulation de fréquence). La figure 4.1 montre une représentation graphique des fonctions de Bessel (on obtient les termes associés aux ordres négatifs en utilisant  $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$  pour  $n$  entier).

### Effet de filtrage passe-bas

En observant la courbe 4.1 du haut, on note que plus la contribution  $\frac{\omega_i \Delta}{\alpha}$  est importante, plus l'enveloppe de la courbe de Bessel est faible. Ainsi, plus l'ordre  $\omega_i$  est grand, plus la composante  $C_i\left(f - \frac{\omega_i v_0 + n\alpha}{2\pi}\right)$  est atténuée. On retrouve donc un effet de filtrage passe bas donc une perte d'information déjà mise en évidence au paragraphe précédent.

### Génération de bandes latérales

La courbe du bas montre les pondérations  $J_n\left(\frac{\omega_i \Delta}{\alpha}\right)$  pour un  $\frac{\omega_i \Delta}{\alpha}$  donné en fonction de l'ordre. Si  $\Delta = 0$  (pas de fluctuation), seul le coefficient  $n = 0$  n'est pas nul. Ce résultat est logique puisqu'il supprime la pondération issue de la modulation. Lorsque la fréquence de la fluctuation de vitesse  $\alpha$  reste plus forte que  $\Delta\omega_i$ , l'énergie reste concentrée autour de l'ordre 0, c'est-à-dire que l'on génère des bandes latérales de faibles amplitudes. Quand ce rapport s'inverse (par exemple à cause d'un accroissement de l'amplitude de la modulation  $\Delta$ ), les bandes latérales deviennent alors plus énergétiques que la composante centrale.

### Conditions pour la conservation de la cyclostationnarité

A l'aide de cette expression nous pouvons retrouver quelques conclusions du paragraphe précédent :

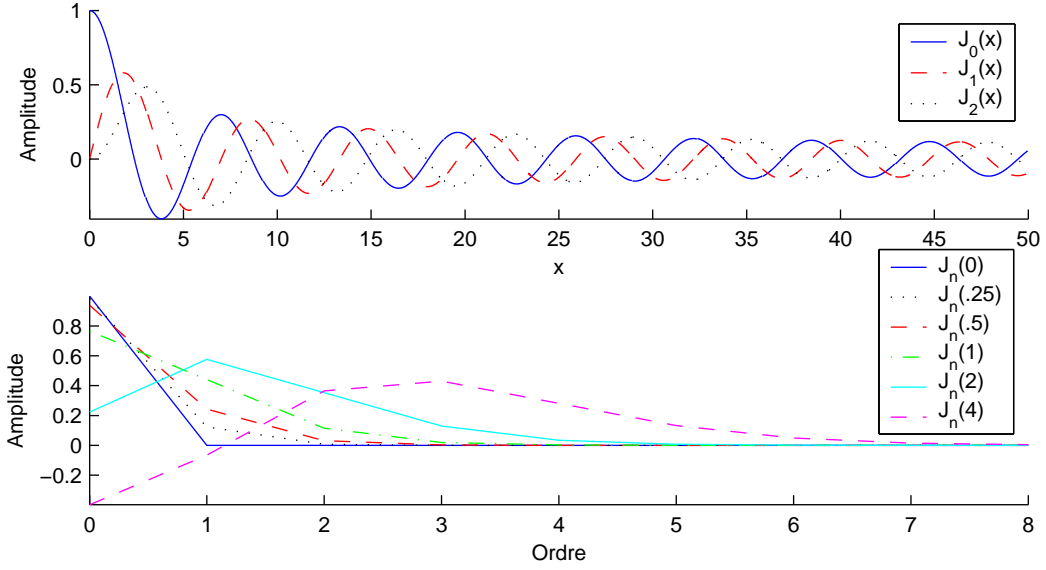


Figure 4.1: Fonctions de Bessel de 1<sup>ère</sup> espèce

- Si la pulsation de la fluctuation  $\alpha$  est multiple de  $\omega_i v_0$ , alors, pour chacune des valeurs de  $n$ , la fréquence  $\omega_i v_0 + n\alpha$  sera identique à celle d’une harmonique de  $\omega_i v_0$ . La période cyclique du signal sera donc  $\frac{2\pi}{v_0}$ .
- Si la pulsation  $\omega_i v_0$  est multiple de  $\alpha$ , la période cyclique du signal sera  $\frac{2\pi}{\alpha}$ .

Alors que dans le cas de fluctuations aléatoires, nous n’avions pas conclu lorsque les fréquences  $\alpha$  et  $\omega_i v_0$  étaient incommensurables, le cadre limitatif des fluctuations de vitesse déterministes va nous permettre de prendre en compte de telles fluctuations. En effet, bien que le processus ne soit pas nécessairement cyclostationnaire, il est toujours possible d’effectuer des moyennes synchrones. L’interprétation fréquentielle de la moyenne synchrone (filtre en peigne) nous sera particulièrement utile puisque nous connaissons la transformée de Fourier du signal. Si l’on considère que  $D_i(f)$  est relativement basse fréquence vis à vis de  $\alpha$ , une moyenne synchrone à la période  $\frac{2\pi}{\omega_i v_0}$  nous permettra d’extraire la ou les composantes périodiques et d’éliminer les bandes latérales en  $n\alpha$ . En pratique, l’efficacité de la moyenne dépendra du nombre de blocs (qui conditionne la sélectivité du filtre). Plus la valeur de  $\alpha$  est faible, plus le nombre de moyennes nécessaire à la disparition des modulations indésirables devra être grand.

Ainsi, lorsque la fluctuation de vitesse n’est pas à une fréquence commensurable avec  $\omega_i \Delta$ , il est toujours possible d’utiliser la moyenne synchrone pour extraire une contribution périodique. Dans le cas contraire, les signaux conservent certes leur cyclostationnarité mais il n’est pas aussi aisé de supprimer la pollution engendrée par les fluctuations de vitesse.

Il est possible de généraliser ces calculs en utilisant une loi de position de la forme :

$$\theta(t) = v_0 t + \sum_{k=1}^K \frac{\Delta_{c_k}}{\alpha_{c_k}} \cos(\alpha_{c_k} t) + \sum_{k=1}^K \frac{\Delta_{s_k}}{\alpha_{s_k}} \sin(\alpha_{s_k} t) \quad (4.28)$$



Dans ce cas, l'équation (4.27) devient :

$$X(f) = \sum_{i=1}^I \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{n_K=-\infty}^{+\infty} \left[ \prod_{k=1}^K j^{n_k} J_{n_k} \left( \frac{\omega_i \Delta_{c_k}}{\alpha_{c_k}} \right) \right] D_i \left( f - \frac{\omega_i v_0 + \sum_{k=1}^K n_k \alpha_{c_k}}{2\pi} \right) \quad (4.29)$$

$$+ \sum_{i=1}^I \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{n_K=-\infty}^{+\infty} \left[ \prod_{k=1}^K J_{n_k} \left( \frac{\omega_i \Delta_{s_k}}{\alpha_{s_k}} \right) \right] D_i \left( f - \frac{\omega_i v_0 + \sum_{k=1}^K n_k \alpha_{s_k}}{2\pi} \right) \quad (4.30)$$

On obtient alors une équation plus délicate à manipuler mais permettant de prendre en compte toutes les fluctuations de vitesse périodiques. Les conclusions sont similaires au cas précédent en remplaçant  $n\alpha_k$  par une combinaison linéaire des  $n_k\alpha_k$ .

En conclusion, les fluctuations de vitesse rendront le spectre plus complexe en ajoutant de nombreuses bandes latérales. Lorsque les périodes sont incommensurables entre elles, la moyenne synchrone permet de supprimer les bandes latérales, ce qui n'est pas possible dans le cas contraire.

## 4.4 Effet du filtrage par la structure

Nous allons rappeler les calculs faits dans [Antoni et al., 2004] et apporter nos conclusions. Avant d'arriver au capteur, les signaux vibratoires passent par la structure mécanique qui agit comme un filtre. Nous allons ici, étudier l'effet de ce filtrage. Afin d'être plus clair, nous notons la variable selon laquelle est fait le calcul à l'aide d'un indice :  $x_\theta(\theta)$  ou  $x_t(t)$ .

Précédemment, nous avons défini la relation entre l'angle et le temps par l'équation (4.3). Etant donné qu'il n'y a pas de retour en arrière de la machine tournante, cette relation est bijective et la fonction réciproque peut s'écrire :

$$t(\theta) = u_0\theta + \psi(\theta) \text{ avec } \psi(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} s(\theta) d\theta \quad (4.31)$$

Où  $s(\theta)$  est exprimé en  $s/rad$ , soit l'unité inverse d'une vitesse angulaire.

Si  $\{X(t)\}$  est un processus stochastique cyclique réel, cyclostationnaire suivant  $\theta$  de période cyclique  $\Theta$ , de réalisation  $x(t)$  et  $\{Y(t)\}$  le processus résultant du filtrage de  $X(t)$  par un filtre de réponse impulsionnelle  $h(t)$ , alors :

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t X_t(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (4.32)$$

Si on remplace  $t$  par  $t(\theta)$ , on obtient :

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t=u_0\theta+\psi(\theta)} X_t(\tau) h[u_0\theta + \psi(\theta) - \tau] d\tau \quad (4.33)$$

Cette équation peut être écrite dans le domaine angulaire en utilisant le changement de variable  $\tau = u_0r + \psi(r)$  où  $r$  est un retard angulaire et la notation  $X_\theta(r) = X_t[u_0r + \psi(r)]$ .

$$Y(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} X_{\theta}(r) h[u_0(\theta - r) + \psi(\theta) - \psi(r)][u_0 + s(r)] dr \quad (4.34)$$

$$= \int_{-\infty}^{\theta} X_{\theta}(r) g(\theta, r) dr \quad (4.35)$$

Avec :

$$g(\theta, r) = h[u_0(\theta - r) + \psi(\theta) - \psi(r)][u_0 + s(r)] \quad (4.36)$$

Nous constatons ici que le filtre qui dépendait uniquement de  $\tau$  dans le domaine temporel est maintenant lié aux deux variables  $r$  et  $\theta$ .

Les moments d'ordre  $n$  du processus à valeurs réel  $Y$  sont alors donnés par :

$$\mu_{Y(\theta_1, \dots, \theta_n)(n)} = \mathbb{E} \left\{ \prod_{n=1}^N Y_{\theta}(\theta_n) \right\} = \mathbb{E} \left\{ \int_{-\infty}^{\theta} \dots \int_{-\infty}^{\theta} \prod_{n=1}^N X_{\theta}(r_n) g(\theta_n, r_n) dr_1 \dots dr_N \right\} \quad (4.37)$$

Si les fluctuations de vitesses sont déterministes, alors  $g$  le sera aussi et on pourra écrire :

$$\mu_{Y(\theta_1, \dots, \theta_n)(n)} = \int_{-\infty}^{\theta} \dots \int_{-\infty}^{\theta} \mu_{X(r_1, \dots, r_n)(n)} g^n(\theta, r_i) dr_1 \dots dr_N \quad (4.38)$$

Pour tester la cyclostationnarité de  $Y$  à la période cyclique  $\Theta$ , posons :

$$\begin{cases} \theta &= \theta + \Theta \\ \rho &= r - \Theta \end{cases} \quad (4.39)$$

Le moment d'ordre  $n$  devient alors :

$$\mu_{Y(\theta_1 + \Theta, \dots, \theta_n + \Theta)(n)} = \int_{-\infty}^{\theta + \Theta} \dots \int_{-\infty}^{\theta + \Theta} \mu_{X(\rho_1 + \Theta, \dots, \rho_n + \Theta)(n)} g^n(\theta + \Theta, \rho_n + \Theta) d\rho_1 \dots d\rho_N \quad (4.40)$$

En exploitant la cyclostationnarité du processus  $X$  suivant l'angle, nous pouvons écrire :

$$\mu_{Y(\theta_1 + \Theta, \dots, \theta_n + \Theta)(n)} = \int_{-\infty}^{\theta + \Theta} \dots \int_{-\infty}^{\theta + \Theta} \mu_{X(\rho_1 + \Theta, \dots, \rho_n + \Theta)(n)} g^n(\theta + \Theta, \rho_n + \Theta) d\rho_1 \dots d\rho_N \quad (4.41)$$

Avec :

$$g(\theta + \rho, r + \rho) = h[u_0(\theta - r) + \psi(\theta + \rho) - \psi(r + \rho)][u_0 + s(r + \rho)] \quad (4.42)$$

Dès lors, la cyclostationnarité du signal sera conditionnée par la périodicité du filtre  $g$ . D'après l'expression de ce filtre (équation 4.42) la périodicité de ce filtre est liée à la périodicité de  $\psi(\theta)$ , et de sa dérivée :

- si  $\psi(\theta)$  est périodique, à la période  $\Theta$ , le signal après filtrage conservera ses propriétés de cyclostationnarité à la période cyclique  $\Theta$ ,

- si  $\psi(\theta)$  est périodique, à une période  $\Theta_2$  multiple de  $\Theta$ , le signal ne sera plus cyclostationnaire à la période cyclique  $\Theta$  mais à la période cyclique  $\Theta_2$ ,
- si  $\psi(\theta)$  est périodique, à une période  $\Theta_3$  telle que  $\Theta$  est multiple de  $\Theta_3$ , alors le signal conservera ses propriétés de cyclostationnarité à la période cyclique  $\Theta$ .
- dans le cas d'une fluctuation de vitesse stationnaire, le signal conservera également ses propriétés de cyclostationnarité à la période cyclique  $\Theta$ .
- dans les autres cas, le signal deviendra non stationnaire.

## 4.5 Fluctuations de périodes cycliques aléatoires non cyclostationnaires

Pour illustrer ce cas de figure, nous allons nous appuyer sur deux modèles de signaux de roulements issus de [Randall et al., 2001a] et [Antoni et Randall, 2003]. Nous allons tout d'abord présenter le point commun de ces deux modèles, puis leurs prises en comptes différentes des fluctuations de la période cyclique due au glissement entre billes et cages. Enfin, nous présenterons différents calculs issus de ses deux articles afin de montrer l'impact de ces fluctuations sur la cyclostationnarité.

### 4.5.1 Modèle pour les signaux accélérométriques de roulements

La figure 4.2 présente les phénomènes physiques mis en jeu dans les roulements [McFadden et Smith, 1984].

1. Les chocs dus au défaut seront modélisés par une suite de diracs  $\sum_i \delta_{T_i}$  aux instants  $T_i$ .
2. Cette suite est modulée par la charge exercée entre l'arbre et le support du roulement. Un exemple de forme pour la charge est indiquée sur la figure 4.2. Cette modulation sera prise en compte par une fonction  $A(t)$  cyclostationnaire aux ordres 1 et 2 à la fréquence  $f_m$ .
3. Le signal  $x(t)$  est ensuite convolué à la réponse impulsionnelle de la structure. Comme la distance entre le défaut et le capteur n'est pas fixe, cette réponse varie au cours du temps. Elle sera représentée sous la forme d'un filtre périodique de réponse  $r(t, \tau)$ .

Dans ces conditions, il est possible d'utiliser le modèle suivant [Antoni et Randall, 2003] :

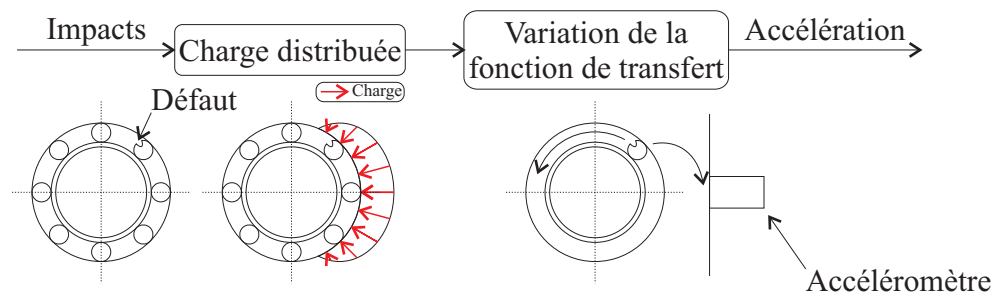


Figure 4.2: Modèle du signal vibratoire

$$d(t) = A(t) \sum_i \delta_{T_i} \quad (4.43)$$

$$x(t) = d(t) * r(t, \tau) \quad (4.44)$$

Comme le terme  $A(t)$  est cyclostationnaire, ses moments, périodiques, pourront s'écrire sous la forme :

$$\mu_{A(t)(1)}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi j k f_m t} \quad (4.45)$$

$$\mu_{A(t)(2)}(t, \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_A^k(t, \tau) e^{2\pi j k f_m t} \quad (4.46)$$

En raison de son caractère périodique, le filtre  $r$  peut être écrit sous la forme [Antoni et Randall, 2003] :

$$r(t, \tau) = \begin{cases} \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k(t - \tau) e^{2\pi j k f_m t} & \text{pour } \tau \leq t \\ 0 & \text{pour } \tau > t \end{cases} \quad (4.47)$$

où les  $r_k(\tau)$  représentent des filtres linéaires.

Ce modèle est donc un cas typique de cyclostationnarité floue. En effet, on retrouve un processus cyclique  $d(t)$  convolué par une réponse impulsionnelle dépendant à la fois du temps et de la position des billes du roulement.

Nous allons maintenant présenter deux manières de modéliser le processus générateur des instants d'impacts  $T_i$ .

### 4.5.2 Modèles pour la génération des impacts

Soit  $\Delta_i = T_{i+1} - T_i$  l'écart entre deux chocs. La période moyenne entre deux chocs est définie ici par  $T_{moy} = \mathbb{E}\{\Delta_i\}$ . Le processus stochastique  $\{T_i\}$  a été modélisé de deux manières différentes. Le premier modèle [Randall et al., 2001a], utilise une expression du type :

$$T_i = i \cdot T_{moy} + e_i \quad (4.48)$$

Où  $e_i$  représente la fluctuation de la période autour de la période moyenne. Le terme  $e_i$  sera ici modélisé par une loi normale centrée. La figure 4.3 (en haut) montre une réalisation simulée de  $x(t)$  basée sur ce modèle (les écarts  $e_i$  ont volontairement été exagérés). Les flèches longues indiquent la période moyenne  $T_{moy}$ . Elles découpent le signal en blocs de taille  $T_{moy}$ . Les petites flèches traduisent les fluctuations de vitesse  $e_i$  autour de la période moyenne. Cette méthode modélise une fluctuation autour d'une période moyenne. Si l'on superpose chacun des cycles (de durée  $T_{moy}$ ), on obtiendra alors une distribution autour de la période moyenne dont l'écart type est celui de  $e_i$  (voir figure 4.4).

Le deuxième modèle [Antoni et Randall, 2002, Antoni et Randall, 2003] s'exprime par les équations suivantes :

$$T_i = T_{i-1} + T_{moy} + e_i \quad (4.49)$$

$$= i \cdot T_{moy} + \sum_{j=0}^i e_j \quad (4.50)$$

Où  $e_i$  représente la fluctuation autour de l'écart moyen entre les chocs  $T_{moy}$ . La figure 4.3 (en bas) montre une réalisation de  $x(t)$  basée sur ce modèle (les fluctuations sont les mêmes que pour la figure précédente). A la différence de la figure précédente, l'origine des flèches ne débute pas à la fin de la précédente mais après chaque choc. Il s'agit d'une marche aléatoire. Si le signal est découpé en blocs de taille  $T_{moy}$  et que ces derniers sont superposés, la distribution s'élargira au fil du temps. Alors que le précédent modèle traduisait un écart aléatoire par rapport à une période moyenne, celui-ci correspond à un écart aléatoire par rapport au choc précédent (figure 4.4). Dès lors, le signal n'est plus synchronisé car les "écarts s'accumulent" : l'écart type de la distribution n'est donc plus constant mais  $\sqrt{i}$  fois celui de  $e_i$ .

Le deuxième modèle, en contradiction avec la figure 4.5 est plus logique. En effet, le choc issu du défaut est lié à l'instant du dernier choc. Néanmoins, nous ne disposons pas de signaux suffisamment long pour étayer cette hypothèse. Ce modèle tend à rendre le signal non stationnaire et non cyclostationnaire si l'on considère un nombre infini de périodes [Antoni et Randall, 2002]. Si le nombre de périodes et l'écart type sont faibles, il est possible d'utiliser le premier modèle. Il a l'avantage de générer des signaux cyclostationnaires. La figure 4.5 montre des signaux issus de roulement possédant un défaut sur la bague interne. On peut constater que l'approximation par le premier modèle est possible dans ce cas. L'observation d'un plus grand nombre de cycles (non disponibles) aurait peut-être conduit à une "désynchronisation".

Nous allons maintenant comparer les effets de ces deux modèles [Randall et al., 2001a] et [Antoni et Randall, 2003]. Pour cela, nous allons nous appuyer sur le formalisme décrit dans [Srinivasan et al., 1967].

### 4.5.3 Processus de génération d'impacts - Comparaison des deux approches

Nous allons dans un premier temps caractériser les impacts. Soit  $\{Y(t)\}$ , un processus stochastique générant une série d'impacts matérialisés par des diracs :

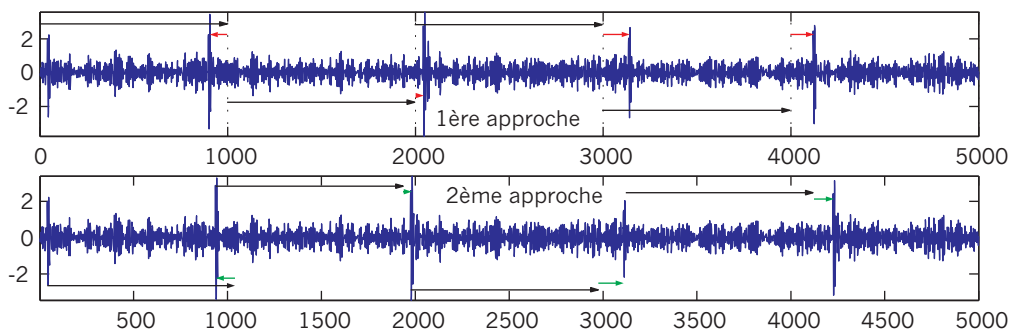


Figure 4.3: Modèles de fluctuations de vitesse

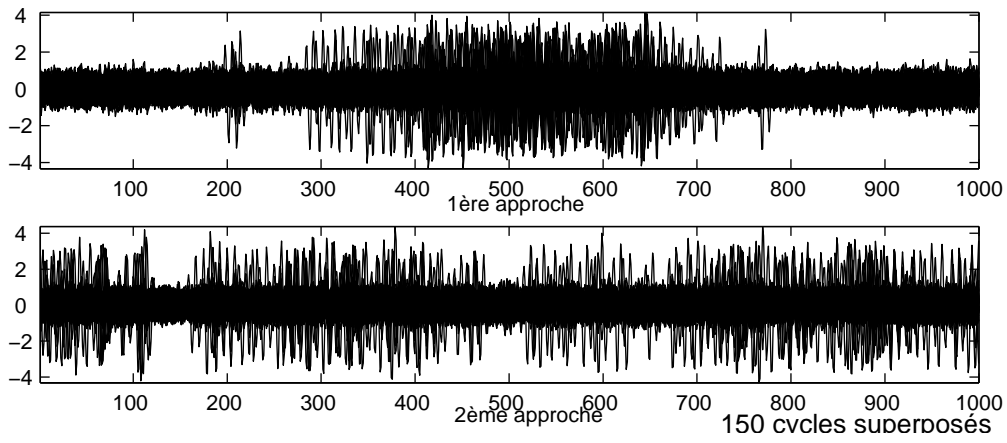


Figure 4.4: *Cycles superposés*

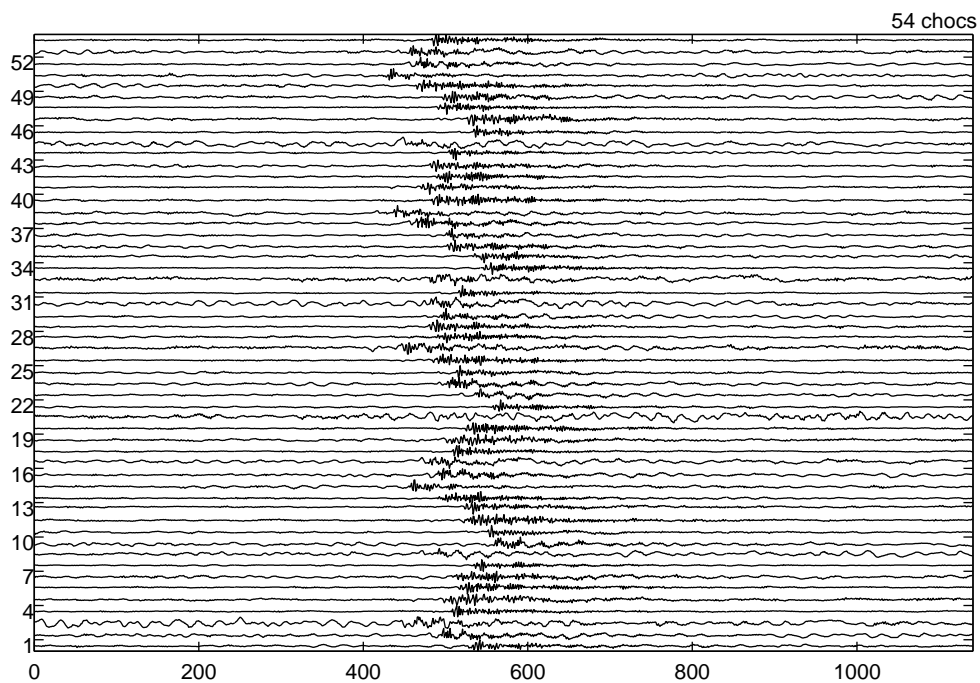


Figure 4.5: *Cycles superposés - défaut de roulement sur bague interne*

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{T_k} \quad (4.51)$$

Soit  $N(t)$ , le nombre d'impacts rencontrés dans  $Y(t)$  dans l'intervalle  $[0; T]$ . Pour une réalisation donnée,  $N(t)$  apparaît comme une fonction en "marches d'escalier". Ces deux processus sont liés par :

$$Y(t) = \frac{dN(t)}{dt} \quad (4.52)$$

Nous allons nous intéresser à la quantité  $dN(t)$  qui correspond au nombre d'impacts dans l'intervalle  $[t, t + dt]$ . En supposant que le premier impact a lieu à  $T_0 = 0$ , nous pouvons écrire :

$$\mathbb{E} \{dN(t)\} = \sum_{i=0}^{\infty} p(t \leq T_i \leq t + dt | T_0 = 0) \quad (4.53)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) dt \quad (4.54)$$

Où  $\phi_i(t)$  est la densité de probabilité du  $i^{\text{ème}}$  impact sachant que  $T_0 = 0$ , c'est-à-dire que  $\phi_0(t) = \delta_0$ .

L'expression de  $\phi_i(t)$  dépend du modèle utilisé.

### 1<sup>ère</sup> approche (jitter)

Dans la première approche (4.48), chaque impact est situé en  $i \cdot T_{moy} + e_i$ . La densité de probabilité du  $i^{\text{ème}}$  impact s'obtient donc en décalant celle du premier impact de  $k \cdot T_{moy}$ , soit :

$$\phi_i(t) = \phi_1[t - (k - 1) T_{moy}] \quad (4.55)$$

Il est important de noter que dans cette approche,  $\phi_i(t)$  est indépendante du précédent tirage de  $e_{i-1}$ .

### 2<sup>ème</sup> approche (marche aléatoire)

Dans ce cas (4.50), il est nécessaire de prendre en compte la valeur du tirage précédent de  $e_{i-1}$  car l'écart entre chaque impact est de  $T_{moy} + e_i$ . Puisque  $T_0 = 0$ , la densité de probabilité de l'impact  $i = 1$  est la densité de probabilité de  $T_{moy} + e_i$ . La position du  $i^{\text{ème}}$  résulte de la somme de  $i$  tirage de  $T_{moy} + e_i$ , dès lors, la densité de probabilité du  $i^{\text{ème}}$  impact correspondra à  $\phi_1(t)$  convoluée  $i - 1$  fois à lui-même. Soit :

$$\phi_i(t) = \underbrace{\phi_1(t) * \phi_1(t) * \dots * \phi_1(t)}_{i \text{ fois}} \quad (4.56)$$

Quelque soit l'approche, il est également possible d'écrire  $dN(t)$  sous la forme  $dN(t) = Y(t) dt$ . Cela va nous conduire à définir la densité d'impact  $f_1(t)$  par :

$$\mathbb{E} \{dN(t)\} = f_1(t) dt \quad (4.57)$$

$f_1(t) dt$  pourra alors être interprétée comme le nombre moyen d'impacts instantanés et  $f_1(t)$  comme le taux d'impact à l'instant  $t$ .

Afin de calculer la densité d'impacts, nous allons approximer la densité de probabilité associée à  $\phi_1(t)$  par une loi Gaussienne de moyenne  $T_{moy}$  et d'écart type  $\sigma$  :

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-T_{moy})^2}{2\sigma^2}} \quad (4.58)$$

Les figures 4.6(a) et 4.6(b) montrent  $f_1(t)$  pour les deux approches ainsi que son spectre pour ( $T_{moy} = 30$  et  $\sigma = 2.1$ ).

### 1<sup>ère</sup> approche

La figure du haut correspondant au "taux d'impact moyen" se compose d'une série de pics périodiques de période  $T_{moy}$ . La transformée de Fourier sera donc :

$$F_1(f) = \frac{1}{T_{moy}} \cdot e^{-2(\pi f \sigma)^2 - j2\pi f T_{moy}} \cdot \mathbb{I}_{1/T_{moy}} \quad (4.59)$$

La transformée de Fourier est donc une gaussienne (transformée de Fourier de  $\phi_1(t)$ ) multipliée par un peigne de dirac de période  $1/T_{moy}$ . La distribution des périodes cycliques induit ainsi un filtrage passe bas dont la fréquence de coupure sera conditionnée par son écart type. Plus l'écart type est grand, plus la fréquence de coupure est basse. Il est très important de noter que la transformée de Fourier n'est pas continue mais composée de diracs.

### 2<sup>ème</sup> approche

La figure du haut correspondant au "taux d'impact moyen" se compose d'une série de pics espacés de la période moyenne de l'impact. Au fur et à mesure que le temps passe, le pic devient de plus en plus large. En effet, comme le processus est de type marche aléatoire ( $T_i = iT_{moy} + \sum_{j=0}^i e_j$ ), la variation de la position autour de  $iT_{moy}$  est de plus en plus importante. Lorsque le temps tend vers l'infini,  $f_1$  tend vers  $1/T_{moy}$  (chaque position devenant équiprobable, il y a un taux d'impact constant). Il est important de noter qu'ici la densité d'impacts n'est alors plus du tout périodique comme dans le cas précédent. Les signaux générés n'ont alors aucune raison d'être cyclostationnaires.

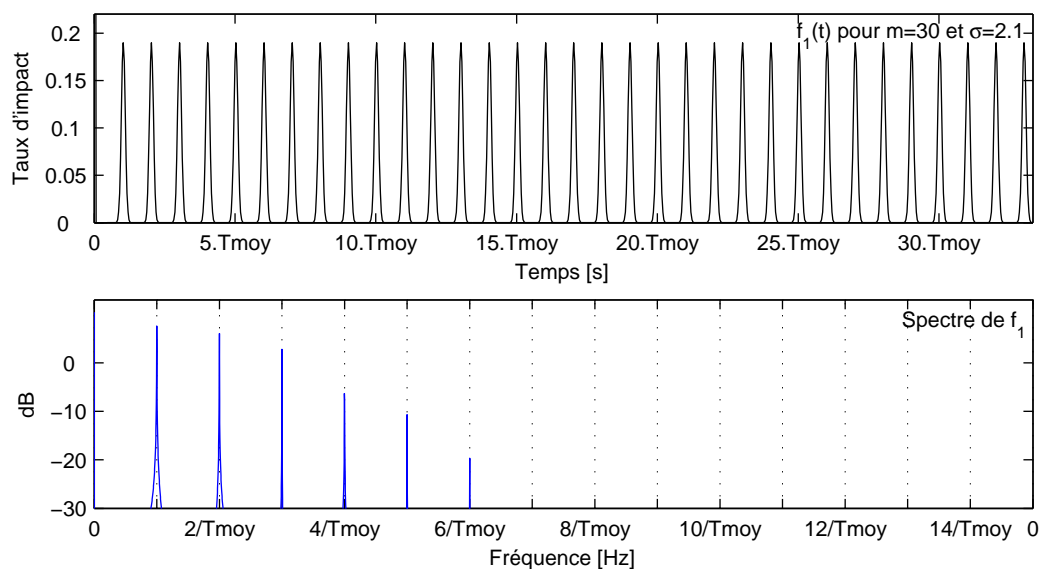
La transformée de Fourier est donnée par :

$$F_1(f) = \frac{1}{1 - e^{2(\pi\sigma f)^2 + j2\pi f T_{moy}}} \quad (4.60)$$

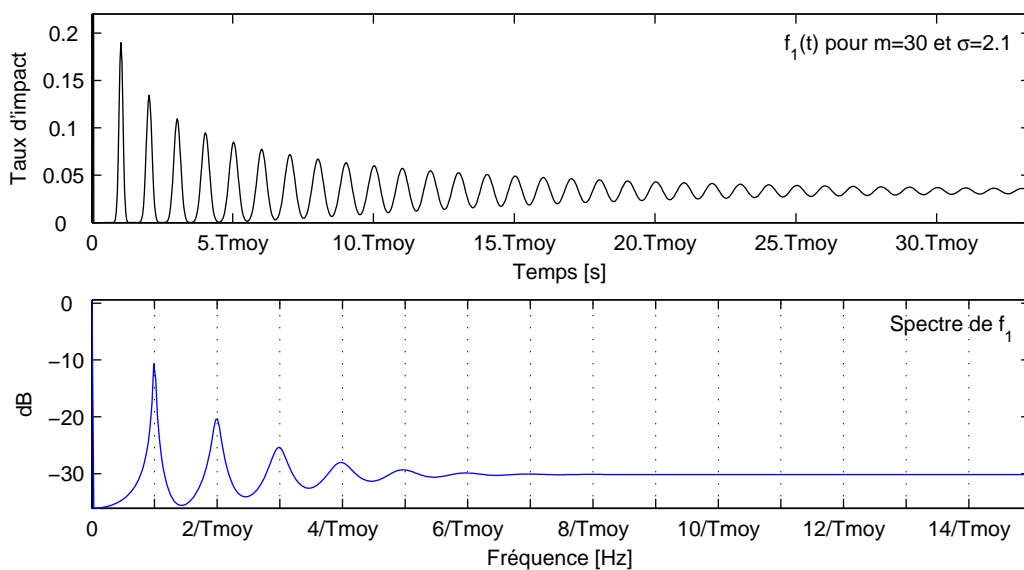
On retrouve encore une fois un effet de filtrage passe bas causé par les fluctuations de période cyclique. Il est important de noter qu'à la différence du modèle précédent, on obtient une transformée de Fourier continue (sauf à l'origine).

Si l'écart type de  $e_i(t)$  est suffisamment faible et que l'on considère un "faible" nombre de cycles, le signal pourra être éventuellement approximé par un modèle cyclostationnaire. On parlera alors de pseudo-cyclostationnarité.





(a) 1<sup>ère</sup> approche



(b) 2<sup>ème</sup> approche

Figure 4.6: Densité d'impacts

La densité d'impacts et sa transformée de Fourier constituent une caractérisation à l'ordre 1 de la génération d'impacts. Pour la caractériser à l'ordre 2, nous allons utiliser la corrélation spectrale de cette densité, pour cela il nous faut d'abord calculer son autocorrélation :

$$\mathbb{E} \{dN(t) dN(t + \tau)\} = f_2(t, \tau) dt d\tau \quad (4.61)$$

Il est montré dans [Antoni et Randall, 2003] que :

$$f_2(t, \tau) dt d\tau = f_1(t) f_1(\tau) dt d\tau \quad (4.62)$$

et que la transformée de Fourier de  $f_2(t, \tau)$  est donnée par :

$$F_2(\alpha, f) = F_1(\alpha) \cdot [F_1(\alpha) + F_1(\alpha - f) - 1] \quad (4.63)$$

Les figures 4.7 montrent les corrélations spectrales de la densité d'impact pour les 2 approches. Elles mettent en évidence deux points :

- L'effet de filtrage passe bas, du aux fluctuations de la période cyclique limite leur "support".
- Alors que pour la première approche, la corrélation spectrale est composée de peignes de diracs, elle apparaît continue pour la deuxième.

La relation entre  $f_1$  et  $f_2$  montre que  $f_2$  est également filtrée passe bas.

Après avoir caractérisé le processus de génération d'impacts, nous allons caractériser le signal lui même.

#### 4.5.4 Comparaison des deux approches - Signaux de roulements

Rappelons l'expression du signal :

$$x(t) = \int_0^t r(t, \tau) A(\tau) \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{\tau_k} d\tau \quad (4.64)$$

Les équations (4.51) et (4.52) permettent d'écrire, pour le processus stochastique  $\{X\}$  de réalisation  $x$  :

$$X(t) = \int_0^t r(t, \tau) A(\tau) dN(\tau) \quad (4.65)$$

##### Moment d'ordre 1

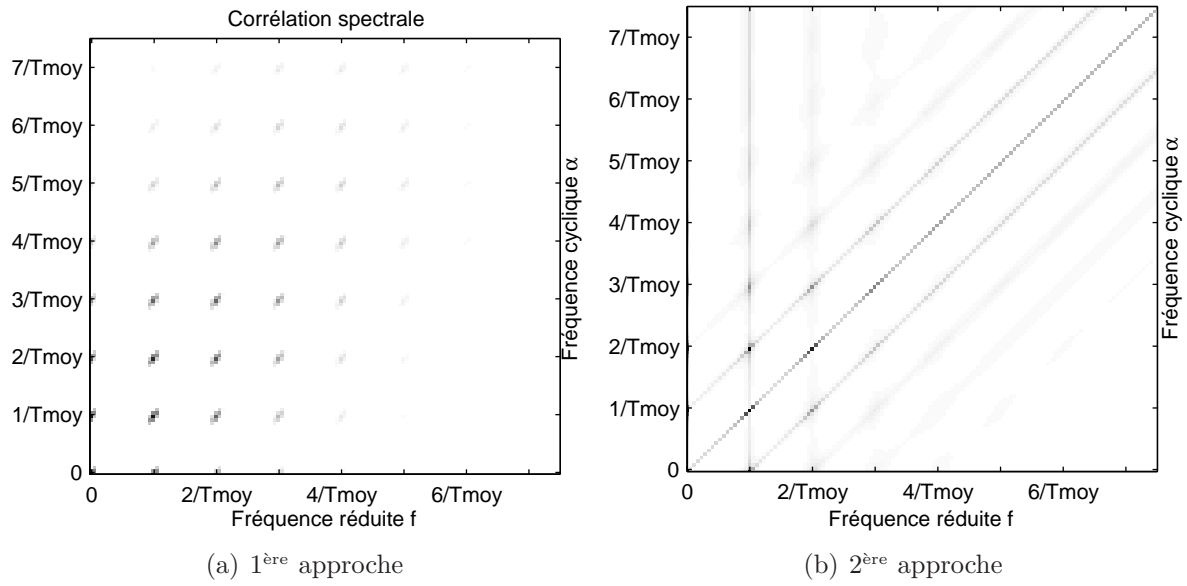
Le moment d'ordre 1 du signal est donc :

$$\mathbb{E} \{X(t)\} = \int_0^t r(t, \tau) \mu_{A(t)(1)}(\tau) f_1(\tau) d\tau \quad (4.66)$$

$A(t)$  est cyclostationnaire à une période  $1/f_m$ , et  $r$  est un filtre périodique à la même période.

Dans le cas du 1<sup>er</sup> modèle  $f_1$  est périodique à la période  $T_{moy}$ , il pourra donc s'écrire sous la forme :

$$f_1(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_{1,n} e^{2\pi j n \tau / T_{moy}} \quad (4.67)$$



**Figure 4.7:** Corrélation spectrale de la densité d'impact

En utilisant les équations (4.46) et (4.47), on obtient :

$$\mathbb{E} \{X(t)\} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_k F_{1,n} e^{2\pi j m f_m t} \int_0^t r_m(t - \tau) e^{2\pi j \tau [n/T_{moy} + k f_m]} d\tau \quad (4.68)$$

L'intégrale correspond à un produit de convolution avec une exponentielle, elle peut donc se mettre sous la forme.

$$\int_0^t r_m(t - \tau) e^{2\pi j \tau [n/T_{moy} + k f_m]} d\tau = R_{m, [n/T_{moy} + k f_m]} e^{2\pi j t [n/T_{moy} + k f_m]} \quad (4.69)$$

Il est alors possible d'écrire l'espérance sous la forme :

$$\sum_p c_p e^{2\pi j f_p t} \quad (4.70)$$

Qui correspond à un signal quasicyclostationnaire à l'ordre 1. Il sera alors possible d'extraire la partie cyclostationnaire à la période  $T_{moy}$  par moyennage synchrone.

Dans le cas du 2<sup>ième</sup> modèle,  $f_1$  n'est pas périodique, donc le signal est non cyclostationnaire. Vu la forme de  $f_1$  et si  $\frac{\sigma}{T_{moy}}$  est petit, il est néanmoins possible de supposer la quasi-cyclostationnarité dans une fenêtre contenant un nombre de cycle suffisamment faible (pseudo-quasi-cyclostationnarité).

## Moment d'ordre 2

La fonction d'autocorrélation du signal s'écrit :

$$\mu_{X(t)(2)}(t, \tau) = \mathbb{E} \{X(t + \tau) X^*(t)\} \quad (4.71)$$

$$= \int \int r(t + \tau, f + \lambda) r^*(t, f) \mu_{A(t)(2)}(f, \lambda) f_2(f, \lambda) d\lambda df \quad (4.72)$$

Les conclusions sont alors similaires au cas précédent : on obtient un signal quasicyclostationnaire à l'ordre 2 si on utilise le 1<sup>er</sup> modèle et un signal non cyclostationnaire si l'on utilise le deuxième modèle.

## 4.6 Bilan et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons étudié les conditions de conservation de la cyclostationnarité quand la période cyclique fluctue. Nous avons montré qu'elle est conservée si la période cyclique moyenne est multiple ou sous multiple de la période des fluctuations.

Nous avons également mis en évidence la non cyclostationnarité des signaux de roulement, sous réserve de validité du deuxième modèle, tout en soulignant qu'il était possible de la supposer si on a affaire à un faible nombre de cycles.

L'exploitation de la cyclostationnarité dans le cas cyclostationnaire flou est moins intéressante que dans le cas cyclostationnaire car il y a un effet de filtrage passe-bas lors de l'estimation des moments et cumulants, donc une perte d'informations. C'est la raison pour laquelle il est préférable de compenser les fluctuations de vitesse en utilisant les techniques de re-échantillonnage a posteriori décrites au chapitre 2. Dans le cas des signaux de roulement, il est évident que la suppression du "flou" est impossible à réaliser, cependant, le re-échantillonnage angulaire contribue à diminuer les écarts-types des distributions de périodes cycliques, donc, de diminuer les effets du filtrage passe-bas.

L'exploitation des signaux acquis sous échantillonnage temporel reste néanmoins intéressante pour étudier les fluctuations de vitesse et en général pour tous les traitements où l'hypothèse de cyclostationnarité n'est pas nécessaire. Le domaine temporel est aussi très intéressant pour étudier les effets du filtrage des structures dont la variable générique est le temps. On pourra citer par exemple la méthode du Prony glissant [Combet, 2003, Martin et al., 2004] utilisant une approche non-stationnaire. Toutefois, cette technique peut être nuancée puisque les chemins de transmission évoluent suivant l'angle.

Aussi, les deux approches se révèlent alors complémentaires.



## Chapitre 5

# Application de la cyclostationnarité aux signaux de roulement

DE nombreuses méthodes de diagnostic sur les roulements peuvent être trouvées dans la littérature [Howard, 1994] :

- dans le domaine temporel, des méthodes statistiques peuvent être employées (valeur efficace, kurtosis, ...),
- dans le domaine fréquentiel, il est possible d’observer l’évolution du spectre, ...,
- il est également possible d’utiliser l’analyse d’enveloppe qui consiste à employer un filtre passe bande pour isoler une composante issue du roulement, à démoduler cette dernière, puis à observer l’enveloppe du signal démodulé et son spectre,
- des développements récents ont tiré parti du kurtosis spectral [Antoni, 2004] [Vrabie et al., 2004] ;
- de nombreuses autres méthodes existent : analyse cepstrale, analyse temps-fréquence, ainsi, que les statistiques d’ordres supérieurs.

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à l’apport de la cyclostationnarité dans l’analyse des signaux de roulements : dans un contexte de pré-traitement puisque nous ne disposons pas de signaux avec une dégradation progressive.

Les méthodes de re-échantillonnage angulaire présentées au chapitre 2 nous ont permis d’induire la propriété de cyclostationnarité sur des signaux de machines tournantes.

Les réducteurs comportent non seulement des roues mais également des roulements permettant d’assurer la liaison entre les axes et la carcasse métallique. Les roulements étant en contact avec les roues, tout signal accélérométrique contient un mélange des contributions de ces deux éléments ainsi que du bruit. En général, la contribution des roues plus énergétique masque le signal de roulement. Il est alors nécessaire de séparer ces signaux préalablement au diagnostic.

Nous nous intéresserons dans un premier temps à l’élimination du signal issu de l’engrenage. Dans les réducteurs classiques, il suffit d’utiliser un simple filtre passe bande qui exploite le caractère “basse fréquence” des signaux issus des roues [McFadden et Smith, 1985]. On peut ensuite utiliser des outils tels que l’analyse d’enveloppe pour mettre en évidence les défauts. Cependant, dans le cas des boîtes à vitesse à forte réduction (hélicoptères) où les roues génèrent un signal plus large bande, il est nécessaire de séparer les signaux à l’aide d’une autre méthode. Il est possible d’employer une technique de séparation non supervisée (appelée aussi technique de soustraction de bruit ou Self Adaptive Noise Cancellation par les initiateurs de la méthode) pour amé-

liorer les résultats d'analyse d'enveloppe [Ho et Randall, 2000] (ici le bruit est le signal d'engrènement). Cette technique exploite le caractère périodique et donc prédictible des signaux d'engrènement par opposition aux signaux de roulement. On détermine alors un filtre capable de prédire l'échantillon courant à partir d'une série d'échantillons passés. Ce filtre permet alors d'estimer et donc de supprimer la contribution de l'engrènement.

La contribution des roues est périodique en angle et non en temps. Dès lors, cette technique est efficace uniquement lorsque les fluctuations de vitesse sont faibles, sinon ses performances se dégradent et la partie périodique ne peut plus être extraite. C'est pourquoi, nous avons amélioré cette méthode en la combinant au re-échantillonnage angulaire a posteriori [Bonnardot et al., 2004c]. La figure 5.1 montre le principe de cette méthode. Il aurait également été possible d'utiliser la moyenne synchrone afin d'estimer cette composante périodique [McFadden, 1987]. Néanmoins, la séparation non supervisée a été retenue puisque la moyenne synchrone ne peut séparer qu'une seule période cyclique à la fois et qu'elle nécessite la connaissance précise des fréquences cycliques.

Une fois la composante périodique retranchée, on obtient la contribution des roulements ainsi qu'un bruit additif.

Dans un deuxième temps, nous montrerons comment réduire ce bruit présent dans la contribution. Les signaux de roulement étant cyclostationnaires à l'ordre 2 (sur une durée limitée), ils présentent une redondance spectrale (c'est-à-dire qu'il existe une corrélation entre certains canaux fréquentiels). Nous exploitons alors cette redondance en essayant de reconstruire le signal de roulement à partir de versions décalées en fréquence. Les décalages correspondant aux fréquences caractéristiques des roulements et à leurs harmoniques.

## 5.1 Séparation fréquentielle

### 5.1.1 Exploitation par l'analyse d'enveloppe

L'analyse d'enveloppe [McFadden et Smith, 1984, Ho et Randall, 2000] exploite la nature impulsive de la source  $d(t)$  (voir équation 4.44) : son énergie est distribuée sur tout le spectre et pondérée par la réponse impulsionnelle. La figure 5.2 illustre cette technique :

1. Dans les boîtes de vitesse classiques (à l'exception des très forts rapports de réduction comme dans les hélicoptères), la contribution des roues occupe une bande fréquentielle plus basse que celle des roulements. La contribution "haute fréquence" des roulements est donc extraite à l'aide d'un passe-bande  $[f_1, f_2]$ . Ce filtre peut être déterminé en examinant l'évolution du spectre entre la situation actuelle et une situation sans défaut. Comme le montre le modèle précédent, la source  $d(t)$  passe par un filtre correspondant à la structure mécanique. Ainsi, le filtrage autour

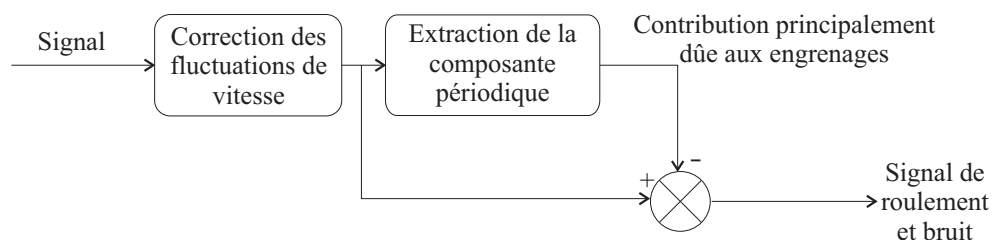


Figure 5.1: Principe de l'extraction du signal de roulement

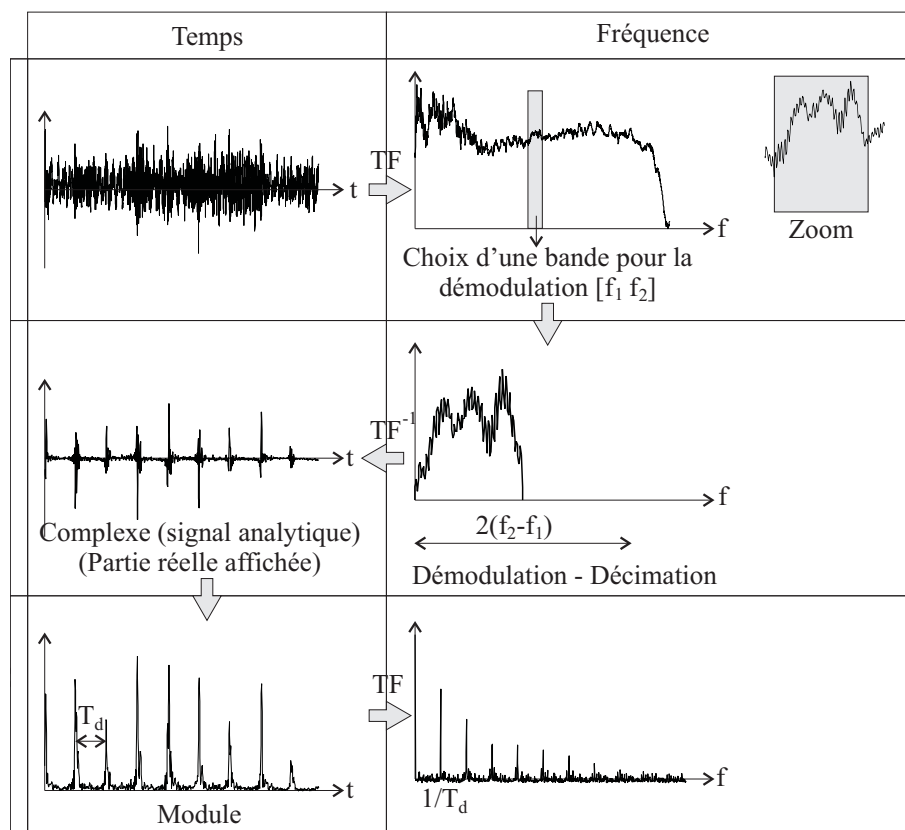


Figure 5.2: Principe de l'analyse d'enveloppe

d'une résonance où l'atténuation par la structure mécanique est plus faible, permet d'exploiter au mieux la dynamique de la carte d'acquisition et des capteurs utilisés.

2. Le signal filtré est ensuite démodulé afin de le ramener dans la bande fréquentielle  $[0, f_2 - f_1[$ . Pour cela, on calcule la transformée de Fourier du signal et on déplace la bande  $[f_1, f_2]$  en  $[0, f_2 - f_1]$ . Cette bande fréquentielle est alors doublée par zéro-padding avant de calculer la transformée de Fourier inverse, pour rendre le signal analytique. D'autres méthodes de démodulation, l'effet du zéro padding, ainsi que les effets de masquage sont étudiés plus en détail dans [Ho et Randall, 2000].
3. Le module du signal démodulé  $dem(t)$  est ensuite extrait :  $r(t) = |dem(t)|^m$  (avec  $m = 1$ ). En utilisant la transformée de Fourier (en bas à droite), il est alors possible d'étudier les propriétés fréquentielles de l'enveloppe.

A l'issue de ce traitement, on obtient une enveloppe ainsi que sa transformée de Fourier qui témoigne de l'état du roulement. Afin de pouvoir prendre une décision, il convient de comparer ce signal à un signal de référence ayant subi les mêmes traitements. Ce dernier doit être enregistré lorsque le roulement fonctionne parfaitement.

Plusieurs améliorations ont été proposées pour cette technique :

- Il est possible d'exploiter les propriétés homomorphiques du logarithme [Randall, 1994]. Le logarithme permet de transformer les modulations intervenant dans le modèle (distance source capteur variable) en contributions additives. Alors, la détérioration de la résolution dans le spectre par la modulation est réduite.
- Si les motifs associés au défaut peuvent être localisés précisément dans le signal,



il est possible de les isoler à l'aide d'une fenêtre. Dès lors, le bruit présent dans le reste du signal est supprimé.

La transformée de Fourier de l'enveloppe élevée au carré ( $m = 2$ ) correspond à l'intégrale de la corrélation spectrale selon les fréquences [Randall et al., 2001a]. En effet, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} S_{x(2)}(\alpha, f) df = \int_{\mathbb{R}} \lim_{W \rightarrow \infty} \frac{1}{W} \int_{\mathbb{R}} \int_{-W/2}^{W/2} C_{x,x}(t, \tau) \cdot e^{-2\pi j(f\tau + \alpha t)} dt d\tau df \quad (5.1)$$

$$= \lim_{W \rightarrow \infty} \frac{1}{W} \int_{\mathbb{R}} \int_{-W/2}^{W/2} C_{x,x}(t, \tau) \cdot e^{-2\pi j\alpha t} dt \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi j f \tau} d\tau df \quad (5.2)$$

$$= \lim_{W \rightarrow \infty} \frac{1}{W} \int_{\mathbb{R}} \int_{-W/2}^{W/2} C_{x,x}(t, \tau) \cdot e^{-2\pi j\alpha t} dt \delta(\tau) d\tau \quad (5.3)$$

$$= \lim_{W \rightarrow \infty} \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} C_{x,x}(t, 0) \cdot e^{-2\pi j\alpha t} dt \quad (5.4)$$

$$= \lim_{W \rightarrow \infty} \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} \mathbb{E} \{ |x(t)|^2 \} \cdot e^{-2\pi j\alpha t} dt \quad (5.5)$$

Où  $\mathbb{E} \{ |x(t)|^2 \}$  correspond à l'espérance de l'enveloppe. Ce spectre contient donc des pics aux fréquences caractéristiques des roulements (fréquences cycliques dues aux liens entre les harmoniques). Il contient également des pics correspondant aux autres fréquences cycliques (lien entre les bandes latérales par exemple).

### 5.1.2 Problèmes posés par l'analyse d'enveloppe

Cette technique est difficile à appliquer sur les signaux issus de réducteurs à engrenage d'hélicoptères où la contribution des roues est "large bande" (plus haute fréquence d'engrènement 11 kHz - plus faible fréquence de rotation 4.3 Hz). C'est pourquoi nous allons présenter une technique de séparation exploitant l'aspect cyclostationnaire des signaux d'engrenage ainsi que la cyclostationnarité floue induite par les signaux de roulement (fréquence non multiple résultant du glissement).

## 5.2 Séparation engrènement roulement

### 5.2.1 Contribution des roues

Les vibrations des roues sont causées principalement par l'erreur de transmission. L'erreur de transmission est l'écart entre la position réelle de l'arbre de sortie et celle qu'il occuperait si l'engrenage était parfait. L'erreur de transmission est générée par la variation de raideur périodique des éléments constituant le réducteur et les défauts. Comme elle est pratiquement périodique, les vibrations engendrées (et donc l'accélération) sont périodiques et déterministes. La contribution des roues est donc prédictible à un instant donné à l'aide des valeurs passées.

La figure 5.3 en bas montre la contribution des roues après séparation des contribution roues/roulement. Il est relativement facile de prédire le contenu du rectangle de gauche à

partir de celui de droite. L'autocorrélation de ce signal, à droite, met bien en évidence la nature répétitive de ce signal.

### 5.2.2 Contribution des roulements

Il se produit un phénomène de glissement entre la cage intérieure et la cage extérieure du roulement à billes : en cas de défaut sur une bille, les impacts ne se reproduisent jamais à la même position. La charge étant liée à l'angle (figure 4.2), chaque impact se produit dans des conditions différentes. Il existe aussi des différences (mineures) entre chaque bille. Tous ces phénomènes induisent des petites fluctuations aléatoires autour de la période de choc moyenne. Dès lors, la contribution produite par les roulements est aléatoire et donc imprévisible à l'aide des valeurs passées (voir figure 5.3). Il est conclu dans [Antoni et Randall, 2002] que les signaux de roulement sont des signaux aléatoires non stationnaires.

La figure 5.3 en haut montre la contribution des roulements. Il apparaît difficile de prédire l'instant et surtout l'amplitude des "chocs" dans le rectangle de droite. L'autocorrélation de ce signal, à droite, souligne la nature aléatoire de ce signal.

### 5.2.3 Séparation par la méthode SANC (Self adaptive noise cancellation)

Le signal  $x(t)$  d'un système engrenage-roulement peut être décomposé en deux parties : une partie périodique et prévisible  $p(t)$  provenant des roues, et, une autre partie imprévisible  $r(t)$  issue des roulements, nommée signal résiduel.

Le but de la soustraction de bruit non supervisée est de prédire la partie déterministe discrète de  $x(t)$  :  $\hat{x}(n)$ . Comme seule la contribution périodique est prédictible,  $\hat{x}(t) = \hat{p}(t)$ .

#### Approche temporelle

Soit  $\underline{x}$  le vecteur contenant les  $N$  valeurs précédentes de  $x(n)$  :  $\underline{x}(n) = [x(n-N+1) \cdots x(n)]^T$ . Le principe est d'estimer  $\hat{p}(t)$  à partir d'une version du signal décalée de  $\Delta$  échantillon :  $x(n-\Delta)$ . Le délai  $\Delta$  doit être choisi suffisamment grand pour supprimer toute corrélation entre le résidu et le signal retardé. Néanmoins, comme le signal n'est pas strictement périodique,  $\Delta$  doit être suffisamment petit pour que les variations restent négligeables. On aura alors :

$$\hat{x}(n) = \underline{h}^T \cdot \underline{x}(n-\Delta) \quad \text{où } \underline{h} \text{ est la réponse impulsionnelle du filtre de taille } N \times 1 \quad (5.6)$$

Comme le signal issu du roulement est imprévisible (on suppose que  $\Delta$  est suffisamment grand pour supprimer toute corrélation locale), on peut alors l'estimer par :

$$\hat{r}(n) = x(n) - \hat{p}(n) \quad (5.7)$$

Théoriquement, la taille du filtre  $N$  doit correspondre au moins au double du nombre de fréquences présentes dans  $p(t)$ . En présence de bruit, une valeur plus grande de  $N$  permet d'augmenter la qualité des résultats.

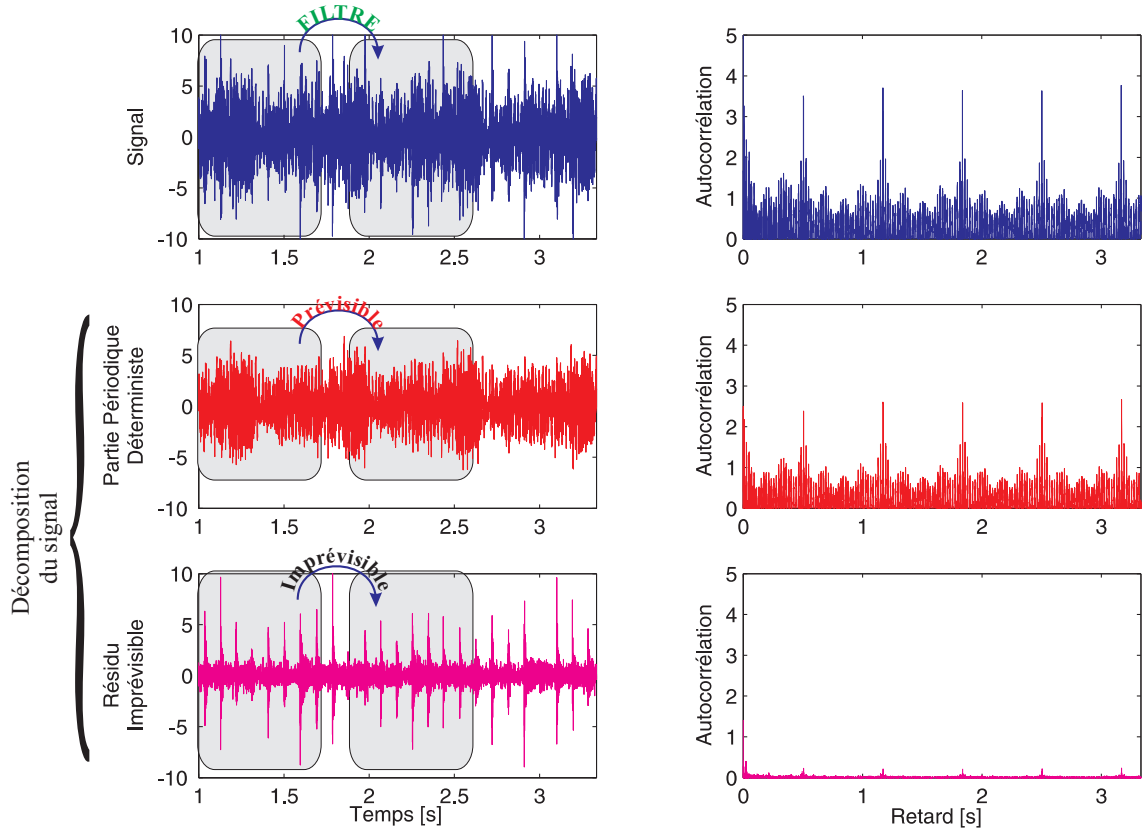


Figure 5.3: Décomposition du signal

La figure 5.4(a) décrit la mise en œuvre de cette méthode basée sur l’algorithme du gradient stochastique :

$$h^{n+1} = h^n + \mu \cdot \hat{r}(n) \cdot \underline{x}(n - \Delta - N) \quad (5.8)$$

Cette approche [Antoni et Randall, 2004a] nécessite le choix délicat du facteur d’oubli qui doit être suffisamment faible pour garantir la convergence [Widrow et Stearns, 1985, Haykin, 2002].

### Approche fréquentielle

Ces équations peuvent être résolues plus rapidement à l’aide d’un algorithme fonctionnant dans le domaine fréquentiel [Antoni et Randall, 2004b]. L’équation (5.6) peut s’écrire :

$$S_{x(n),x(n-\Delta)}(f) = H(f) \cdot S_{x(n-\Delta)}(f) \quad (5.9)$$

où  $S_{x,y}(f)$  désigne l’inter-spectre entre  $x$  et  $y$  (apodisation incluse), et,  $H(f)$  désigne la transformée de Fourier du filtre  $h(t)$ .

Comme indiqué sur la figure 5.4(b), le signal est tout d’abord découpé en blocs avec recouvrement. On construit également une autre série décalée de  $\Delta$ . Des spectres et inter-spectres “locaux” sont calculés pour chaque couple de blocs. Les spectres et inter-spectres sont “estimés” par moyennage. On peut ensuite déduire le filtre en divisant l’inter spectre

par le spectre. Pour cela nous supposons qu'il n'existe pas de composante fréquentielle de puissance nulle car les signaux réels contiennent du bruit.

Il est important de noter que par rapport à l'approche temporelle, l'approche fréquentielle évite le choix délicat du pas d'adaptation  $\mu$ .

### 5.2.4 Séparation non supervisée améliorée (E-SANC)

Face au problème posé par les fluctuations de vitesse pour la méthode SANC, l'échantillonnage angulaire semble assez intéressant. Comme les signaux sont rarement acquis suivant l'angle, nous avons proposé dans [Bonnardot et al., 2004c] d'utiliser le re-échantillonnage a posteriori basé sur la démodulation autour d'une harmonique, avant d'appliquer la méthode *SANC* comme l'illustre la figure 5.5. L'effet des fluctuations de vitesse est alors théoriquement annulé (voir chapitre 2) et les résultats sont améliorés (on satisfait l'hypothèse de périodicité de la contribution des roues faite dans la SANC). Il est ensuite possible d'utiliser des méthodes de diagnostic [Howard, 1994].

L'idée du re-échantillonnage a été également exploitée dans [Groover et al., 2005]. Néanmoins, la technique de re-échantillonnage employée, beaucoup plus classique, fait appel à un signal tachymétrique (codeur optique). De plus, la suppression des composantes issues des roues n'est pas aveugle comme avec la méthode *SANC* mais repose sur la suppression directe des pics dans la Transformée de Fourier.

## 5.3 Application aux signaux d'hélicoptères (roulements planétaires)

Les signaux issus de roulements planétaires fournissent un des cas les plus difficiles pour la détection et le diagnostic des défauts. En effet, ces derniers passent par un chemin tortueux et changeant en fonction du temps, pour arriver aux points de mesure où ils sont détectés. Dans le cas des boîtes de vitesse d'hélicoptère, cette détection est rendue bien plus ardue car le bruit (généralisé entre autre par les roues du réducteur) est large bande (relativement au domaine acoustique). Par exemple, un réducteur convertit une fréquence de rotation d'environ 350 *Hz* issue de la turbine à gaz en une fréquence de rotation de 5 *Hz* [Howard, 1994].

### 5.3.1 Origine des signaux

Nous allons maintenant appliquer ces méthodes sur des signaux accélérométriques d'hélicoptères Sea Hawk. Ces derniers proviennent d'un banc d'essai du US Naval Air Warfare Center, Aircraft Division, Trenton (New Jersey). Le signal a été acquis à une fréquence d'échantillonnage  $f_s = 100 \text{ kHz}$  pendant une durée de 60 *s* ( $6 \cdot 10^6$  échantillons) avec une charge de 400 *ft - lb* ( $\approx 542 \text{ Nm}$ ).

La figure 5.6 montre la transmission de l'hélicoptère ainsi que le défaut identifié sur un des rouleaux des roulements planétaires. Malheureusement la position du capteur accélérométrique nommé "PortRing" n'a pas été fournie. Les fréquences caractéristiques du roulement planétaire sont indiquées dans le tableau 5.1.

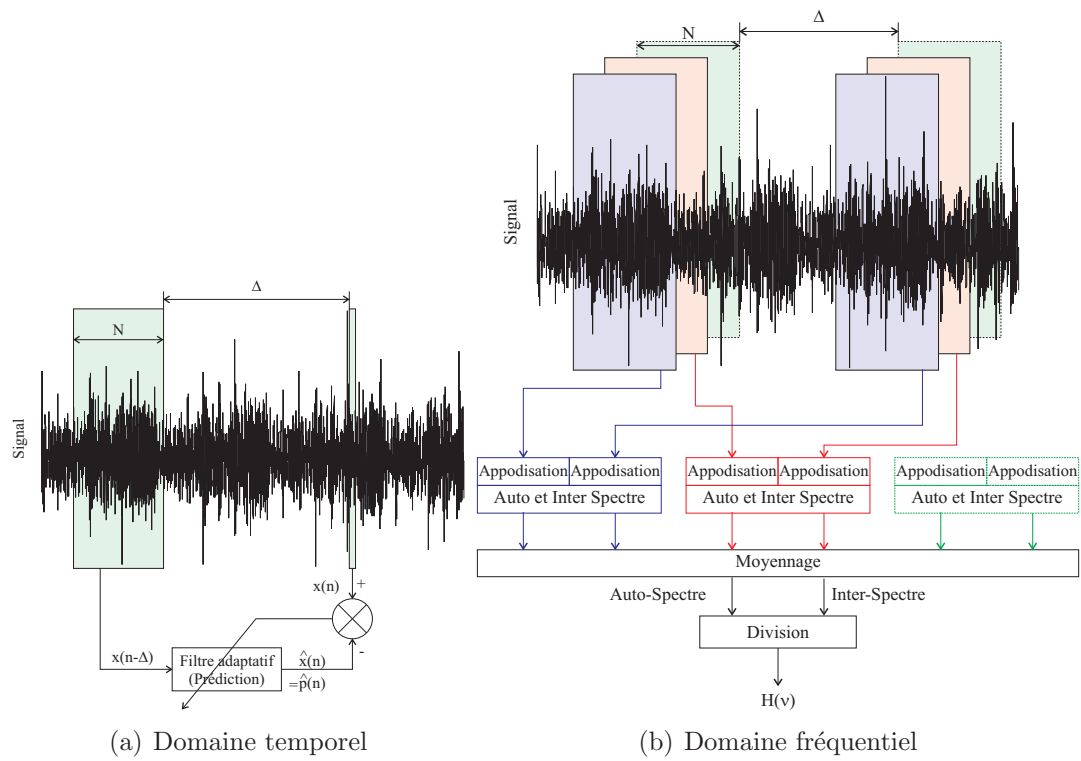


Figure 5.4: Mise en oeuvre de l'algorithme SANC

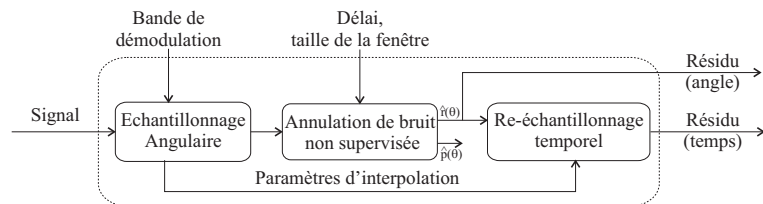


Figure 5.5: Amélioration de la SANC

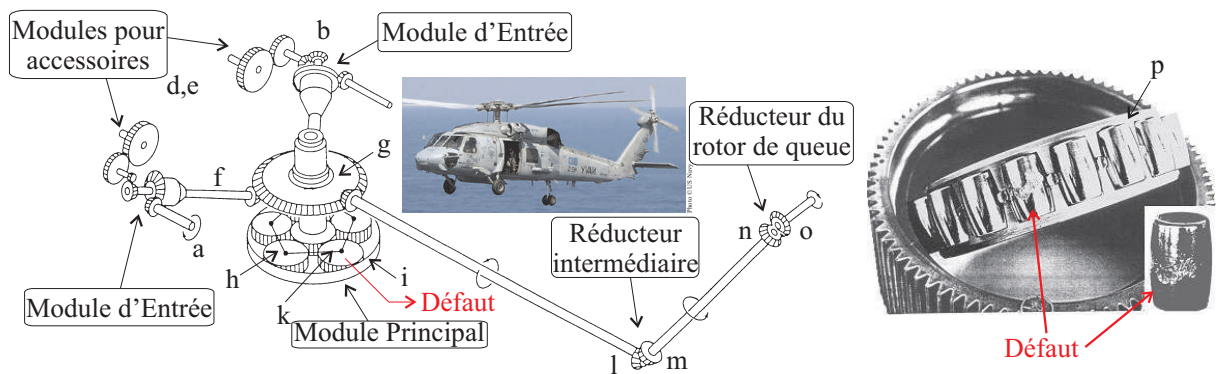


Figure 5.6: Transmission de l'hélicoptère et défaut

Désignation	Fréquence	tours/min
Défaut bague interne	122 $Hz$	7322
Défaut de bague externe	90.4 $Hz$	5422
Défaut de bille	77.359 $Hz$	4642
Vitesse de la cage (p)	5.0 $Hz$	300
Vitesse de rotation	11.8 $Hz$	708
Axe de la couronne (g)	20.1 $Hz$	1207
Engrenement couronne (g) [75]	1509 $Hz$	90540
Porte satellite (k)	4.3 $Hz$	258

Note : le nombre entre crochets correspond au nombre de dents

**Tab. 5.1:** Fréquences caractéristiques du roulement planétaire (à gauche) et du système complet (à droite)

### 5.3.2 Examen du signal accélérométrique

La figure 5.7 montre les 10 000 premiers échantillons (100  $ms$ ) du signal. Les 7 chocs (défaut de bille à 77.359  $Hz$ ) ne peuvent être détectés visuellement car la contribution du roulement est complètement masquée par le reste du signal (roue, autres roulements, bruit, ...). Une séparation des contributions du signal est donc nécessaire.

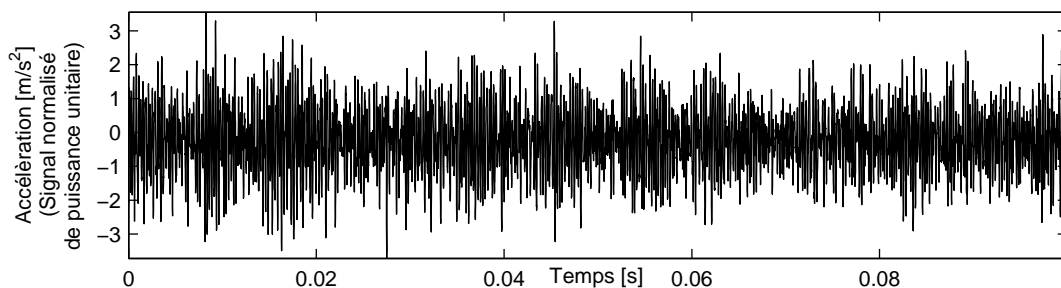
La figure 5.8 montre la densité spectrale de puissance du signal ainsi qu'un agrandissement. Les marqueurs correspondent à des fréquences de rotation, des fréquences d'engrenement ainsi qu'à leurs harmoniques. Les marqueurs ont été volontairement limités afin de ne pas surcharger la figure. Le but de cette figure n'est pas d'identifier avec précision les éléments associés à chacun des pics mais plutôt de montrer que les fréquences issues des roues occupent une large partie du spectre rendant difficile une analyse d'enveloppe sans débruitage préalable. On pourra noter la présence d'un marqueur à plus de 30  $kHz$ .

Le spectre met en évidence un problème de repliement après 35  $kHz$ , nous n'utiliserons donc pas ces "hautes fréquences".

Nous allons tout d'abord utiliser la *SANC*, puis la comparer à l'*E - SANC*.

### 5.3.3 SANC

La séparation basée sur la *SANC* nécessite de choisir deux paramètres : le décalage  $\Delta$  et la longueur du filtre. Nous avons utilisé des écarts  $\Delta$  variant de 10  $ms$  ( $\Delta = 1024$



**Figure 5.7:** Premiers échantillons

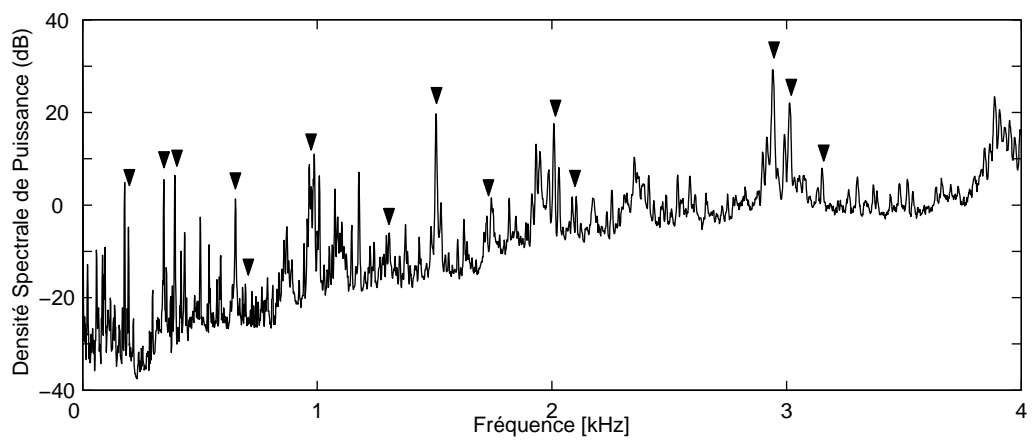
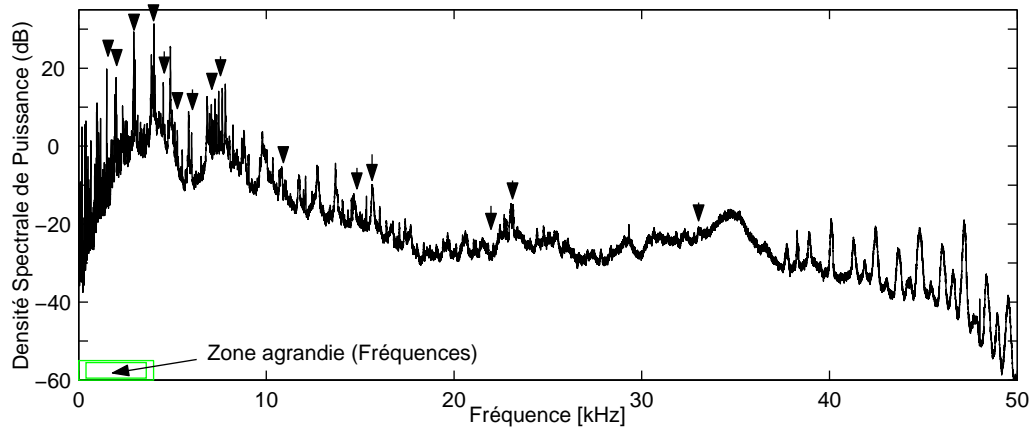


Figure 5.8: Spectres

échantillons) à  $2.6\text{ s}$  ( $\Delta = 262\ 144$  échantillons) avec une fenêtre pour le filtrage de  $0.66\text{ s}$  ( $65\ 536$  échantillons). Quelque soit la valeur de  $\Delta$  utilisée, les résultats sont identiques. La figure 5.9 compare le spectre avant et après la SANC (le signal original a été déplacé de  $30\text{ dB}$  pour une comparaison plus aisée). Il apparaît que les résultats sont mauvais et que la SANC n'apporte rien dans ce cas. Plusieurs essais ont confirmé cet échec.

La figure 5.10 montre l'estimation de la vitesse instantanée de la couronne, le filtre passe bande ( $1.5\text{ kHz}$  à  $1.52\text{ kHz}$ ) utilisé pour cette estimation supprime les fluctuations de vitesse supérieure à  $20\text{ Hz}$ . La fluctuation de vitesse représente  $0.9\%$  de la vitesse moyenne. Le spectre montre que ces fluctuations sont liées au porte satellite. L'élément mécanique associé aux fréquences de  $6\text{ Hz}$  et  $11\text{ Hz}$  n'a pas pu être mis en évidence.

De telles fluctuations de vitesse peuvent expliquer le dysfonctionnement de la SANC et suggère donc l'utilisation de la E-SANC.

### 5.3.4 E-SANC

Le re-échantillonnage angulaire a posteriori a été effectué en utilisant la fréquence d'engrènement de l'arbre de la couronne à  $1\ 509\text{ Hz}$ . La SANC a été ensuite appliquée comme préconisé sur la figure 5.5.

La figure 5.11 montre l'effet du débruitage sur le spectre après l'ESANC. Dans la zone basse fréquence, il y a une réduction des pics associés aux roues entre  $5\text{ dB}$  et  $25\text{ dB}$ . Après  $18\text{ kHz}$ , il y a juste une atténuation du signal, et aucune suppression de pics. La ESANC apporte donc une amélioration pour les basses fréquences. Dès lors, afin de bénéficier de ce débruitage, il est nécessaire de travailler dans la bande améliorée  $[0; 18\text{ kHz}]$ .

### 5.3.5 Analyse d'enveloppe

En général, la bande pour l'analyse d'enveloppe est choisie en examinant l'évolution du spectre pour différents niveaux de dégradation. Comme un seul enregistrement est disponible, nous avons essayé plusieurs filtres passe-bande avec une largeur de bande de  $800\text{ Hz}$  (cette bande doit être suffisamment large pour permettre d'observer l'effet des modulations) et une fréquence centrale variant par pas de  $500\text{ Hz}$  (le pas a été choisi empiriquement). La bande de  $600\text{ Hz}$  à  $1\ 400\text{ Hz}$  s'est avérée être la seule intéressante pour l'analyse d'enveloppe.

La figure 5.12 montre l'apport bénéfique de la *ESANC* sur l'analyse d'enveloppe, alors que les résultats de la *SANC* sont similaires aux résultats sur le signal non traité. On peut observer que le pic associé au défaut est nettement plus visible. En effet, les fréquences associées aux roues qui prédominaient ont été fortement réduites. Ainsi, le diagnostic est facilité. Malheureusement, comme un seul signal est disponible, il n'a pas été possible d'observer l'évolution de ce pic en fonction du défaut.

La figure 5.13 montre la transformée de Fourier de l'enveloppe au carré dans la zone. Elle met en évidence à l'aide de traits pointillés les bandes latérales de  $4.3\text{ Hz}$  correspondant à la fréquence de rotation du porte satellite. Ces dernières peuvent être expliquées par la variation du chemin de transmission entre le défaut et le capteur à la fréquence du porte satellite.

Il apparaît que la fréquence du défaut ( $77.359\text{ Hz}$ ) est proche de la 18<sup>ème</sup> harmonique de la fréquence de rotation du porte satellite ( $18 \times 4.3 = 77.4\text{ Hz}$ ). Il est possible que cette harmonique aide à faire ressortir le pic de défaut : la fréquence de défaut (avec une



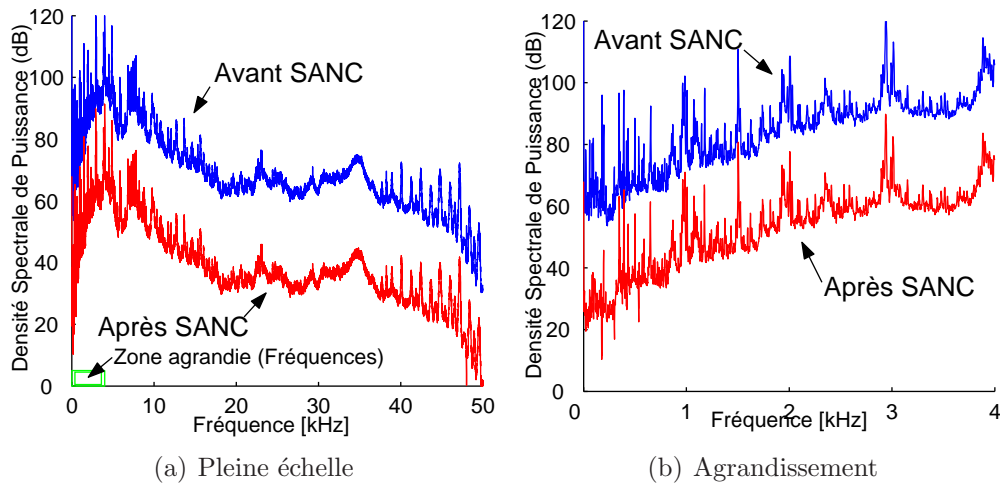


Figure 5.9: Spectre après la SANC

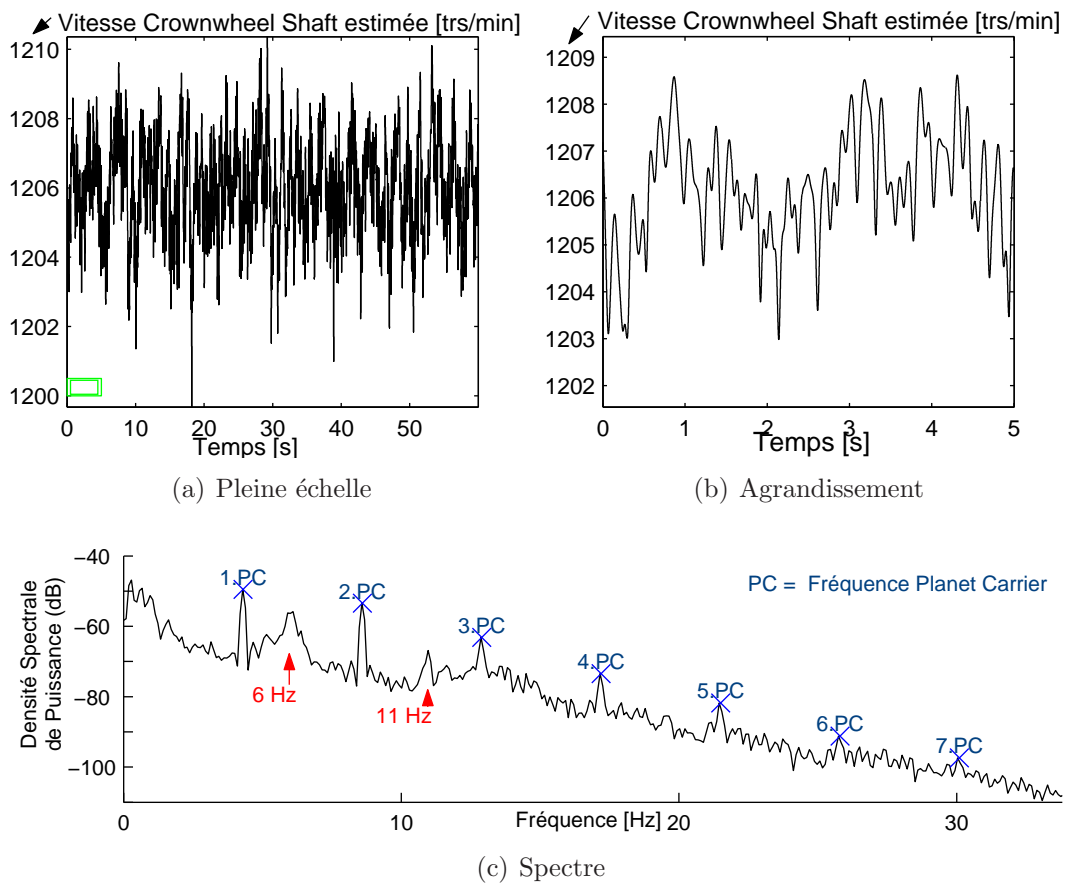


Figure 5.10: Vitesse instantanée de crownwheel

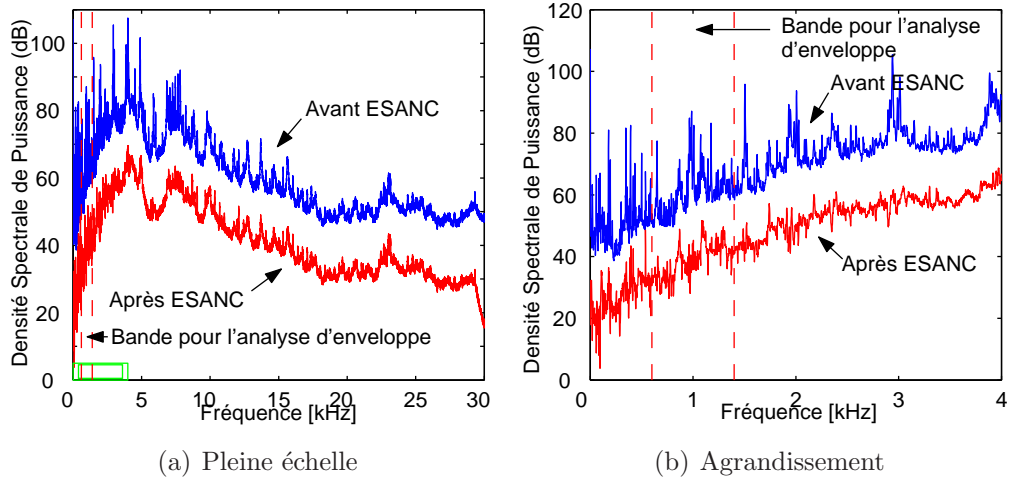


Figure 5.11: Spectre après la ESANC

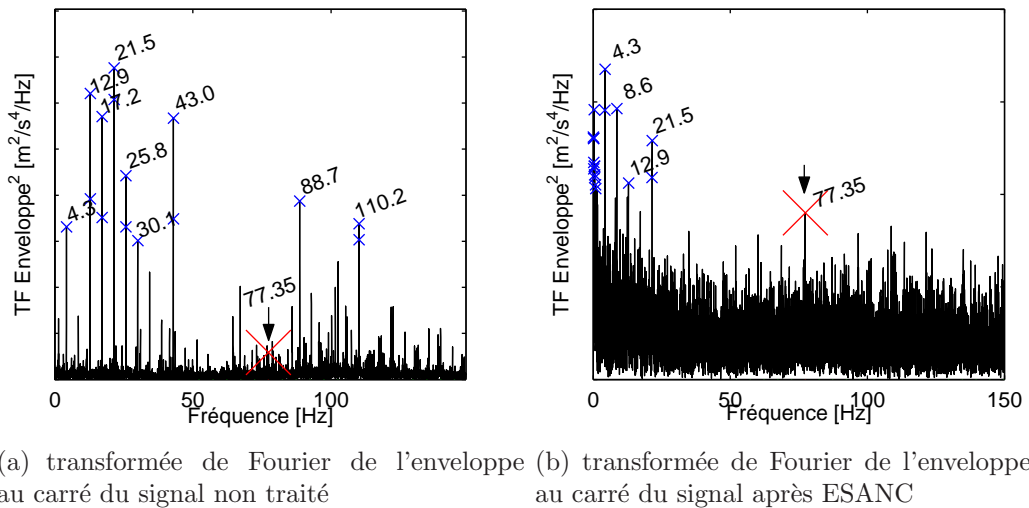


Figure 5.12: Apport de l'ESANC sur l'analyse d'enveloppe

fluctuation due au glissement) serait si proche de l’harmonique de la fréquence de rotation du porte satellite qu’elle se “synchroniserait” sur cette dernière plus énergétique. Une fois la partie périodique enlevée, seule la contribution fluctuante du défaut subsisterait. Ce lien entre la fréquence de défaut et le 18<sup>ème</sup> harmonique du porte satellite reste tout de même assez gênante pour faire du diagnostic sur ce type d’hélicoptère. Néanmoins, nous avons d’une part montré que l’ESANC améliore nettement l’analyse d’enveloppe par rapport à la SANC quand il y a des fluctuations de vitesse non négligeables, et d’autre part nous avons testé avec succès la méthode de re-échantillonnage a posteriori sur des signaux d’hélicoptère réputés complexes.

La SANC et l’ESANC ont pour but de supprimer la partie périodique du signal, mais, le signal résiduel contient toujours du bruit en plus du signal provenant des roulements. Dans le paragraphe suivant nous utilisons la cyclostationnarité à l’ordre 2 pour atténuer ce bruit.

## 5.4 Débruitage basé sur la cyclostationnarité à l’ordre 2

Le débruitage basé sur l’exploitation des propriétés de cyclostationnarité à l’ordre 2 permet de réduire le bruit additif toujours présent dans le signal résiduel mais ne permet pas de supprimer la composante périodique générée par l’engrenage. Dès lors, il conviendra d’extraire le signal résiduel à l’aide de la ESANC, par exemple, avant d’employer cette méthode. On travaillera alors sur un signal qui sera non cyclostationnaire à l’ordre 1. Nous utiliserons à présent  $x(\theta)$  pour désigner le signal résiduel.

Tout comme la séparation à l’ordre 1 qui exploitait les similitudes d’un cycle à l’autre, le débruitage à l’ordre 2 exploitera les similitudes d’une fréquence cyclique à l’autre. Pour faire le débruitage à l’ordre 2, nous allons utiliser un algorithme issu du domaine des télécommunications portant le nom de FRESH [Gardner, 1993].

Nous travaillerons sur le modèle :

$$x(t) = c(t) + b(t) \quad (5.10)$$

Où  $c(t)$  est le signal issu des roulements. Il est supposé suffisamment court (45 fois la période moyenne du défaut dans notre exemple) pour justifier le choix du 1<sup>er</sup> modèle. Dans ce cas, il est possible de définir une période moyenne autour de laquelle le défaut fluctue (fluctuation très inférieure à la période). Le terme  $b(t)$  représente un bruit qui

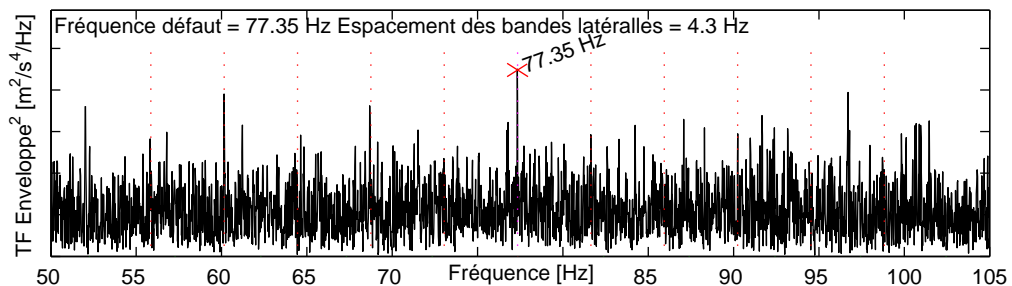


Figure 5.13: Transformée de Fourier de l’enveloppe au carré du signal après ESANC

contient le reste du signal. Nous considérons comme bruit tout ce qui n'est pas corrélé avec  $c(t)$ . Nous rapellons l'expression de  $c(t)$  définie dans l'équation (4.44) :

$$c(t) = r(t, \tau) * \left[ A(t) \sum_i \delta_{\tau_i} \right] \quad (5.11)$$

Nous ne considérons pas les ordres supérieurs à 2. En effet, la méthode employée exploite un critère d'énergie (ordre 2), elle est donc incapable de faire la différence entre deux candidats possédant une erreur de même énergie mais de dissymétries différentes.

### 5.4.1 Mise en évidence des liens à l'ordre 2

La cyclostationnarité à l'ordre 2 se traduit par l'existence de liens entre les fréquences. Parmi toutes les représentations existantes, la plus adaptée pour faire apparaître ces liens est la densité de corrélation spectrale. La corrélation spectrale est définie par :

$$S_{x(2)}(f, \alpha) df d\alpha = \mathbb{E} \left\{ dX \left( f + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot dX^* \left( f - \frac{\alpha}{2} \right) \right\} \quad (5.12)$$

Pour l'évaluer, on calcule une corrélation entre deux incréments spectraux du signal préalablement décalées en fréquence :  $X \left( f + \frac{\alpha}{2} \right)$  et  $X \left( f - \frac{\alpha}{2} \right)$ . La valeur  $\alpha$  correspond à la fréquence cyclique. Pour  $\alpha = 0$ , la corrélation spectrale correspond au spectre du signal  $x(t)$ .

La figure 5.14 montre le module de la transformée de Fourier d'un signal issu du modèle de roulement (5.11) simplifié (où le filtre  $r(t, \tau)$  a été remplacé par un filtre  $r(\tau)$ ). Pour le simuler, on génère au hasard les positions des impulsions  $T_i$  conformément à l'équation (4.48). Le caractère aléatoire est introduit à l'aide d'une loi normale centrée pour les jitters  $e_i$ . On génère ensuite une série aléatoire  $A_i$  correspondant à l'amplitude associée à la  $i^{\text{ème}}$  impulsion suivant également une loi normale. Ensuite, on génère la série de pics d'amplitude  $A_i$  à la position  $T_i$ . Puisque les positions ne sont pas entières, chaque pic est obtenu à l'aide d'un décalage circulaire d'un pic à l'origine. Cette position non entière permet de modéliser l'effet d'un échantillonnage des signaux non synchrones de la position des pics. On filtre ensuite le signal par la réponse impulsionnelle de la structure que nous avons modélisée par deux résonances. On ajoute également un bruit blanc.

Pour la figure 5.14, nous avons utilisé une période moyenne  $T_{moy}$  de 360 échantillons avec une fluctuation  $e_i$  d'écart type 10 échantillons. L'amplitude moyenne est 1 avec un écart type 0.1. La puissance du bruit est  $-7$  dB. Les résonances sont placées aux fréquences réduites 0.11 Hz et 0.16 Hz et correspondent respectivement à un amortissement de 0.08 et 0.06. Le signal comporte environ 300 cycles.

On retrouve nettement sur le spectre les deux résonances correspondant à la réponse impulsionnelle de la structure. On retrouve également une série de pics espacés de  $1/360$  Hz et une distribution sur ces pics correspondant à la fluctuation autour de la fréquence moyenne.

Pour le calcul de la corrélation spectrale, cette transformée de Fourier est décalée respectivement de  $-\alpha/2$  et de  $+\alpha/2$ . Lorsque la fréquence cyclique  $\alpha$  est multiple de la période moyenne du défaut, les "pics" sont face à face et l'on obtient une énergie plus importante que lorsque les pics sont disjoints (un lien existe entre chacun des pics puisque le signal est cyclostationnaire flou). Il apparaît alors des "lignes" dans la corrélation spectrale comme l'illustre la figure 5.15. Ces lignes sont espacées de la fréquence cyclique

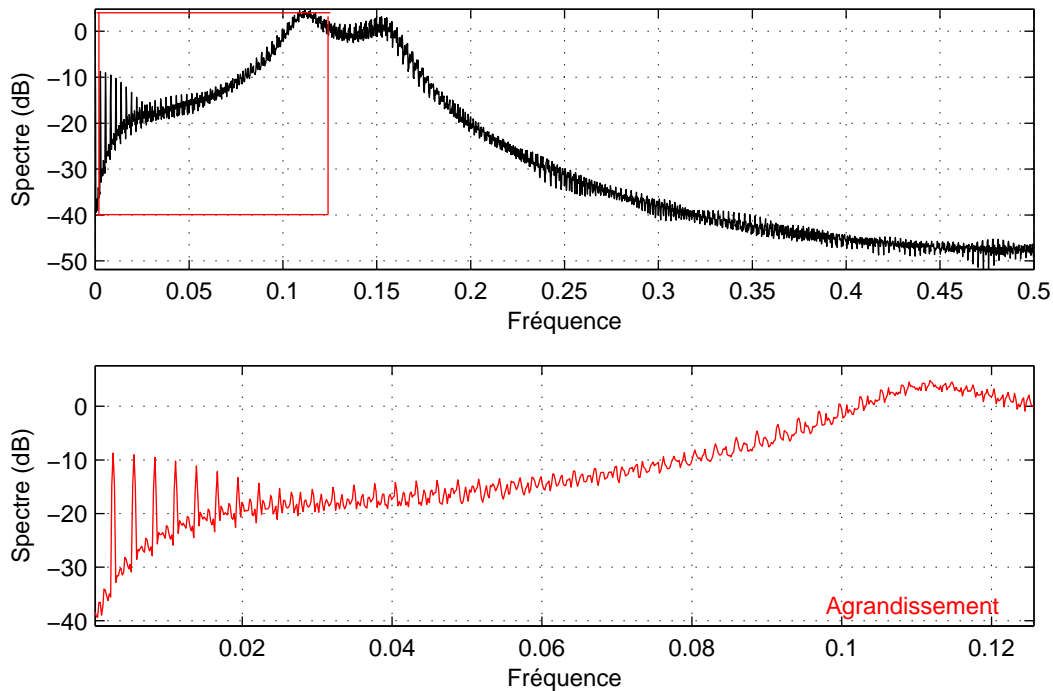


Figure 5.14: Spectre d'un signal de roulement (synthétisé)

$\alpha$  associée à la période moyenne du défaut. On retrouve ainsi le résultat établi pour le 1<sup>er</sup> modèle (jitter) dans [Randall et al., 2001a] : la corrélation spectrale est continue suivant  $f$  et discrète suivant  $\alpha$ .

## 5.4.2 Principe de la reconstruction

Ce paragraphe montre comment on peut reconstruire le signal à partir de versions décalées en fréquence puis filtrées.

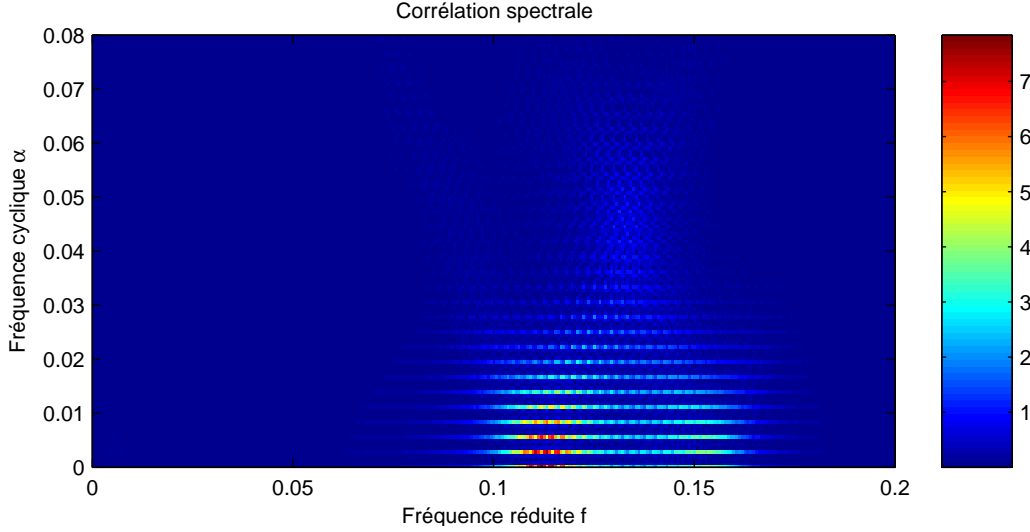
La figure 5.14 est l'élément clef que nous allons exploiter pour le débruitage : puisqu'il existe un lien entre le signal et ses versions décalées en fréquence, nous allons essayer de l'estimer à partir de plusieurs versions décalées, par un filtre de Wiener Cyclique [Gardner, 1994].

La figure 5.16, montre sur un exemple très simple le principe de ce filtre. Le signal  $x(t)$  de transformée de Fourier  $X(f)$  est construit à partir de deux motifs aléatoires et décorréllés :

- un bruit rose de bande limitée centré sur la fréquence  $f_1$  et modulé par un sinus à la fréquence  $f_3 - f_1$ ,
- un bruit blanc de bande limitée centré sur  $f_2$  et modulé par un sinus à la fréquence  $f_3 - f_2$ .

Un bruit blanc (large bande) est ensuite ajouté. Le choix des motifs (rectangle pour le bruit blanc à bande limitée, et demi-disque pour le bruit rose à bande limitée) sur la figure permet de bien mettre en évidence le lien entre les différentes fréquences.

En général, le but du filtre est de reconstruire le signal sans le bruit blanc (large bande). Nous supposons que les fréquences cycliques sont connues. En effet, bien qu'en théorie il soit possible d'exploiter tous les décalages, en pratique, le traitement d'un décalage se



**Figure 5.15:** *Corrélation spectrale d'un signal de roulement (synthétisé)*

révèle assez coûteux en temps de calcul. D'après la figure, les fréquences cycliques (ou décalages) à exploiter pour la reconstruction sont  $\alpha/2 = [f_1 + f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_3, -f_2, -f_3]$ .

Chaque signal décalé est ensuite filtré (un filtre différent par signal décalé - voir colonne  $|G_i(f)|^2$  de la figure 5.16). Les signaux résultants (dernière colonne) sont ensuite sommés pour obtenir une estimation du signal débruité  $c(t)$ . Dans le cas général, les filtres sont estimés par une procédure proche du filtrage de Wiener classique (minimisation de l'écart quadratique entre le signal estimé et le signal bruité  $x(t)$ ).

Les filtres ont deux rôles :

- la mise en forme des signaux (dans l'exemple il s'agit d'un simple gain),
- supprimer le bruit où il n'y a pas de signal corrélé.

Après le décalage fréquentiel, le bruit associé à chacun des motifs est différent. Ainsi, la combinaison des signaux décalés-filtrés est destructive pour le bruit (effet de moyennage). Il sera donc intéressant d'utiliser le maximum de fréquences cycliques ainsi que leurs harmoniques (en pratique on sera limité par le temps et la mémoire nécessaire). Dans le cas général, le décalage nul (c'est-à-dire le signal original) ne devra pas être utilisé lors de l'estimation car après filtrage on retrouvera une estimation du signal original.

Il est également important de noter que cette méthode ne supprime pas le bruit mais le réduit (il s'agit donc d'une estimation de  $c(t)$ ).

La majorité des remarques précédentes sont communes avec le filtre de Wiener classique.

La figure 5.17 montre le filtre de Wiener cyclique sous la forme d'un diagramme. L'utilisation des cosinus ou sinus permet de travailler sur des filtres réels et ne nécessite pas l'utilisation de fréquences négatives. Puisque  $x(t)$  est réel, ces deux formulations sont équivalentes :

$$\Re [x(n) e^{2\pi j \alpha_k n} * g(t)] = \Re [x(n) \cos(2\pi \alpha_k n) * g(n) + j x(n) \sin(2\pi \alpha_k n) * g(n)] \quad (5.13)$$

$$= x(n) \cos(2\pi \alpha_k n) * h(n) + x(n) \sin(2\pi \alpha_k n) * l(n) \quad (5.14)$$

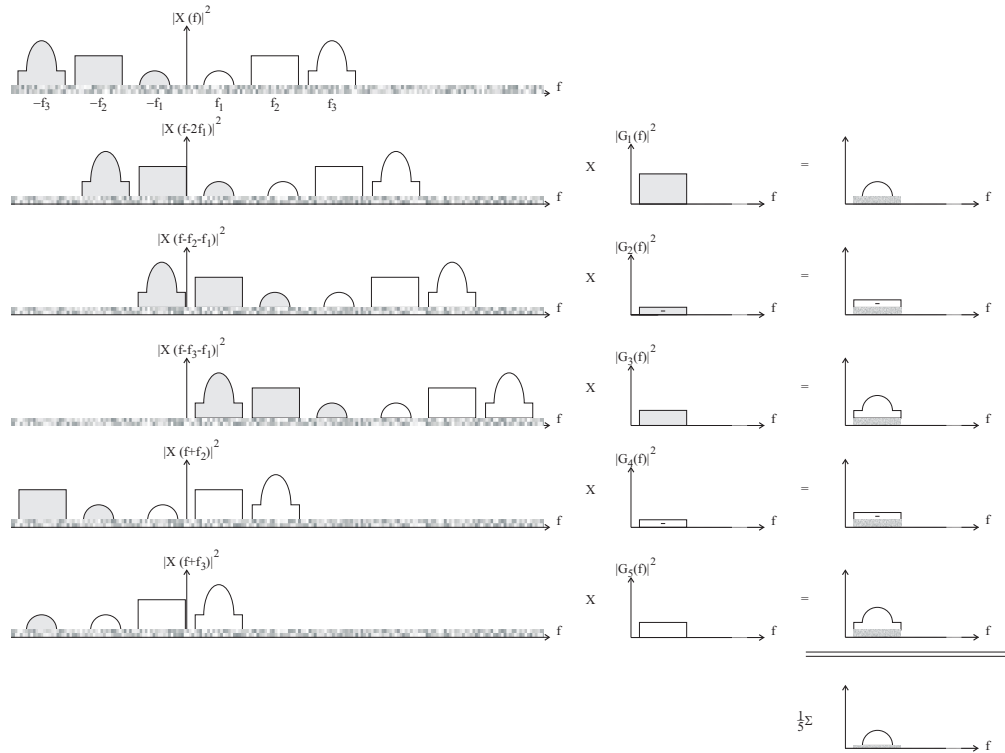


Figure 5.16: Principe du filtre de Wiener Cyclique

Avec

$$g(n) = h(n) - jl(n) \quad (5.15)$$

Ce diagramme permet de mettre en évidence le filtrage LPTV (Linéaire Variant Périodiquement dans le Temps). Plusieurs représentations équivalentes des filtres LPTV ont été recensées dans [Ferrara, 1985], néanmoins, comme la partie la plus coûteuse en temps de calcul est la détermination des filtres et non le filtrage en lui-même nous ne comparerons pas ces implémentations.

Nous allons présenter deux méthodes pour la recherche des coefficients. Ces deux méthodes sont basées sur la minimisation de l'erreur quadratique entre le signal prédit

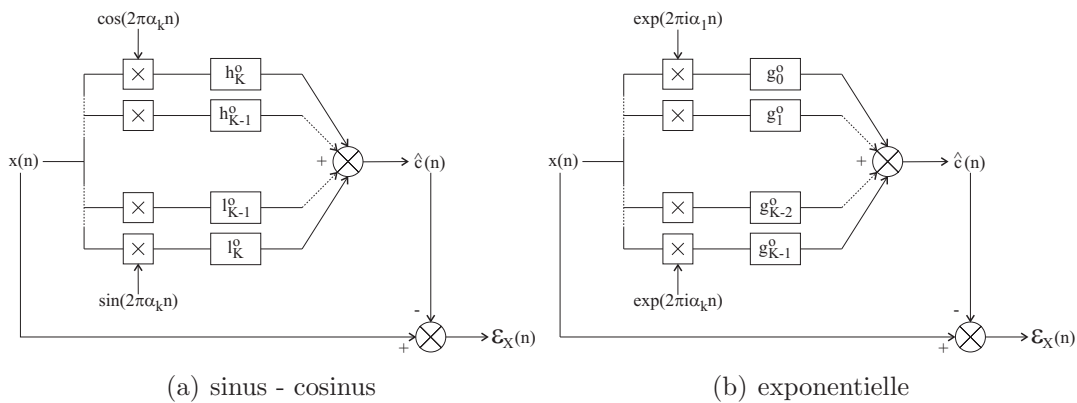


Figure 5.17: Implémentation du filtre de Wiener Cyclique

$\hat{c}(n)$  et le signal  $c(n)$ . La première méthode minimise ce critère dans le domaine temporel alors que la deuxième fait la minimisation dans le domaine fréquentiel.

### Approche temporelle

La figure 5.17(a) peut se formaliser par l'équation suivante :

$$\hat{c}(n) = \sum_{k=1}^K \{h_k(n) * [x(n) \cos(2\pi\alpha_k n)] + l_k(n) * [x(n) \sin(2\pi\alpha_k n)]\} \text{ pour } \alpha_k \neq 0 \quad (5.16)$$

Où  $h_k(n)$  et  $l_k(n)$  sont les filtres optimaux au sens des moindres carrés associés à la  $k^{\text{ième}}$  fréquence cyclique  $\alpha_k$ . Les fréquences cycliques  $\alpha_k$  correspondent, par exemple, dans le cas d'un signal de roulement à la fréquence du défaut  $1/T_{moy}$  ainsi qu'à ces harmoniques. En général, on utilise toutes les fréquences pour lesquelles la corrélation spectrale a établi un lien.

Afin de minimiser l'erreur quadratique  $\varepsilon_x^2(n) = |c(n) - \hat{c}(n)|^2$ , nous allons maintenant chercher à formuler l'équation 5.16 sous forme matricielle.

Le filtre LPTV (figure 5.17(a)) peut être vu comme un système MISO (entrée multiple sortie unique) dont les entrées sont :

$$\begin{cases} a_k(n) = x(n) \cdot \cos(2\pi\alpha_k n) \\ b_k(n) = x(n) \cdot \sin(2\pi\alpha_k n) \end{cases} \quad (5.17)$$

Afin d'utiliser la formulation vectorielle du filtrage, nous allons définir les vecteurs associés au filtre  $h_k(n)$  et  $l_k(n)$  de longueur  $L = \tau_L - \tau_1 + 1$  :

$$\begin{cases} \underline{h}_k = [h_k(\tau_1) \ \cdots \ h_k(\tau_L)]^T \\ \underline{l}_k = [l_k(\tau_1) \ \cdots \ l_k(\tau_L)]^T \end{cases} \quad (5.18)$$

Où les limites du filtre  $\tau_1$  et  $\tau_L$  sont choisies par l'utilisateur. Cette notation permet notamment de concevoir des filtres non causaux. En conséquence, il est nécessaire de mémoriser les valeurs passées et futures des entrées :

$$\begin{cases} \underline{a}_k(n) = [a_k(n - \tau_L) \ \cdots \ a_k(n - \tau_1)] \\ \underline{b}_k(n) = [b_k(n - \tau_L) \ \cdots \ b_k(n - \tau_1)] \end{cases} \quad (5.19)$$

L'estimée  $\hat{c}(n)$  s'écrit donc :

$$\hat{c}(n) = \sum_{k=0}^K [\underline{a}_k(n) \cdot \underline{h}_k + \underline{b}_k(n) \cdot \underline{l}_k] \quad (5.20)$$

Où sous forme vectorielle :

$$\hat{c}(n) = \underline{r} \cdot \underline{s} \quad (5.21)$$

Avec :

$$\underline{r} = [\underline{a}_1(n) \ \cdots \ \underline{a}_K(n) \ \underline{b}_1(n) \ \cdots \ \underline{b}_K(n)] \quad (5.22)$$

$$\text{et } \underline{s} = [\underline{h}_1^T \ \cdots \ \underline{h}_K^T \ \underline{l}_1^T \ \cdots \ \underline{l}_K^T]^T \quad (5.23)$$



Cette équation comporte  $u = 2KL$  inconnues (coefficients du filtre), il faut donc au moins  $u$  équations soit  $N_{min} = u + \tau_L - \tau_1$  échantillons pour trouver le filtre (un plus grand nombre d'équations permettra de faire une régression et donc d'améliorer les résultats). Pour un signal de  $N$  échantillons, ( $N > N_{min}$ ), nous avons :

$$\hat{c} = \mathbf{m} \cdot \underline{s} \quad (5.24)$$

Avec :

$$\hat{c} = [\hat{c}(N + \tau_1) \quad \cdots \quad \hat{c}(1 + \tau_L)]^T \quad (5.25)$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \underline{r}(N + \tau_1) \\ \vdots \\ \underline{r}(\tau_L + 1) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

La minimisation de  $\varepsilon_x(n)^2$  conduit donc au système d'équation :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{m},\mathbf{m}} \cdot \underline{s} = \underline{C}_{\mathbf{m},\underline{c}} \quad (5.27)$$

Où  $\mathbf{C}_{\mathbf{m},\mathbf{m}} = \mathbf{m}^H \cdot \mathbf{m}$ , et  $\underline{C}_{\mathbf{m},\underline{c}} = \mathbf{m}^H \cdot \underline{c}$ .

Cette équation ne peut pas être résolue directement puisque  $c(n)$  est inconnu. Le bruit  $b(n)$  est décorrélé du signal  $x(n)$  et de ces versions décalées. Dès lors, le vecteur de corrélation pourra être estimé en substituant le signal  $x(n)$  à  $c(n)$ .

$$\underline{C}_{\mathbf{m},\underline{x}} = \underline{C}_{\mathbf{m},\underline{c}} + \underline{C}_{\mathbf{m},\underline{b}} = \underline{C}_{\mathbf{m},\underline{c}} \quad (5.28)$$

Le système d'équation à résoudre devient donc :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{m},\mathbf{m}} \cdot \underline{s} = \underline{C}_{\mathbf{m},\underline{x}} \quad (5.29)$$

Ce système peut être résolu à l'aide de la pseudo inverse.

L'erreur de prédiction est donnée par :

$$\varepsilon^2 = C_{c,c}(0) [1 - \rho] \quad (5.30)$$

$$\text{avec } \rho = \frac{C_{\underline{x},\underline{c}} \mathbf{C}_{\mathbf{m},\mathbf{m}}^{-1} \underline{C}_{\mathbf{m},\underline{c}}}{C_{c,c}(0)} \quad (5.31)$$

### Approche fréquentielle

Pour éviter d'alourdir les notations, nous avons écrit  $X(f)$  au lieu de  $dX(f)$ . Il est également possible de reformuler les équations (5.10) dans le domaine fréquentiel :

$$X(f) = C(f) + B(f) \quad (5.32)$$

Où  $X(f)$ ,  $C(f)$ ,  $B(f)$  sont les transformées de Fourier discrètes des signaux  $x(n)$ ,  $c(n)$ ,  $b(n)$  de durée finie.

La figure 5.17(b) peut alors se formaliser par l'équation suivante :

$$\hat{C}(f) = \sum_{k=1}^K G_k(f) \cdot X(f - \alpha_k) \quad (5.33)$$

Où  $G_k(f)$  est la réponse fréquentielle du filtre associé au décalage en fréquence  $\alpha_k$ .

Il est possible de reformuler cette équation sous forme matricielle en créant des vecteurs étendus :

$$\underline{X}_e(f) = [X(f - \alpha_1) \quad \cdots \quad X(f - \alpha_k)]^T \quad ; \quad \underline{G}(f) = [G_1(f) \quad \cdots \quad G_k(f)] \quad (5.34)$$

On aura donc :

$$\hat{C}(f) = \underline{G}(f) \cdot \underline{X}_e(f) \quad (5.35)$$

$$\varepsilon(f) = C(f) - \hat{C}(f) = C(f) - \underline{G}(f) \cdot \underline{X}_e(f) \quad (5.36)$$

Nous voulons minimiser  $\varepsilon^2(f) = \mathbb{E} \{ \varepsilon^*(f) \cdot \varepsilon(f) \}$ . En utilisant le théorème de la projection orthogonale qui établit que l'erreur  $\varepsilon(f)$  doit être orthogonale à l'entrée  $\underline{X}_e(f)$  et après quelques calculs, on obtient :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_e(2)}(f) \cdot \underline{G}(f) = \underline{S}_{c, \underline{x}_e}(f) \quad (5.37)$$

Avec :

$$\underline{S}_{c, \underline{x}_e}(f) = \mathbb{E} \{ C(f) \cdot \underline{X}_e^H(f) \} \quad ; \quad \mathbf{S}_{\mathbf{x}_e(2)}(f) = \mathbb{E} \{ \underline{X}_e(f) \cdot \underline{X}_e^H(f) \} \quad (5.38)$$

Où  $\underline{S}_{c, \underline{x}_e}(f)$  est un vecteur  $(1 \times K)$ , et,  $\mathbf{S}_{\mathbf{x}_e(2)}(f)$  est la matrice inter-spectrale de taille  $(K \times K)$ .

La recherche du filtre optimal se fait donc en adaptant les équations de Wiener-Hopf dans le domaine fréquentiel. Comme dans le domaine temporel,  $C(f)$  est inconnu. La décorrélation entre le bruit et le signal recherché sera exploitée afin de substituer  $X(f)$  à  $C(f)$  :

$$\mathbb{E} \{ X(f) \cdot X^*(f - \alpha_k) \} = \mathbb{E} \{ [C(f) + N(f)] \cdot X^*(f - \alpha_k) \} \quad \alpha_k \neq 0 \quad (5.39)$$

$$= E \{ C(f) \cdot X^*(f - \alpha_k) \} \quad (5.40)$$

Cette équation montre l'importance de ne pas inclure la fréquence cyclique nulle (c'est-à-dire le signal original) dans l'algorithme de débruitage. Le filtre optimal est solution de l'équation :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_e(2)}(f) \cdot \underline{G}(f) = \underline{S}_{x, \underline{x}_e}(f) \quad \alpha_k \neq 0 \quad (5.41)$$

L'erreur de prédiction associée à une fréquence donnée est :

$$\varepsilon^2(f) = S_{c(2)}(f) [1 - \rho(f)] \quad (5.42)$$

$$\text{avec } \rho(f) = \frac{\underline{S}_{c, \underline{x}_e}(f) \mathbf{S}_{\mathbf{x}_e(2)}^{-1}(f) \underline{S}_{\underline{x}_e, c}(f)}{S_{c(2)}(f)} \quad (5.43)$$

A la différence de la méthode temporelle, la méthode fréquentielle effectue la minimisation sur chaque canal fréquentiel indépendamment. Une seule minimisation étant faite dans le domaine temporel, il serait nécessaire de blanchir les signaux afin de s'assurer d'une pondération identique de chacune des fréquences.

## 5.5 Application de la séparation à l'ordre 2

Nous allons d'abord traiter un exemple à vocation didactique avec des signaux très simples. Ils permettront notamment de construire des filtres intuitifs et de les comparer aux filtres optimaux. Ensuite, nous observerons les résultats sur un modèle de signal de roulement. Enfin, l'algorithme sera testé sur des signaux réels.

Tous les signaux exploités ici sont soit à moyenne synchrone nulle, soit des signaux auxquels on aura au préalable retiré la moyenne synchrone.

## 5.6 Cas simple

### 5.6.1 Modèle

Soit le signal :

$$x(n) = b_1(n) \cdot [\lambda + \sin(2\pi f_1 n)] + b_2(n) \quad (5.44)$$

$$= c(n) + b_2(n) \quad (5.45)$$

Où :

$$\begin{cases} b_1(n) & \text{est un bruit stationnaire à bande limitée } [-f_1/4, +f_1/4], \\ b_2(n) & \text{est un bruit blanc et stationnaire,} \\ \lambda = 2. \end{cases} \quad (5.46)$$

La différence entre la puissance de  $c(n)$  et  $b_2(n)$  est de 3 dB.

Ce signal est généré à partir d'un bruit à bande limité qui est modulé en fréquence et également multiplié par un gain. Cette modulation assure la présence d'un lien à la fréquence cyclique  $\alpha = f_1$  entre la contribution à  $f_1$  et la contribution non modulée. L'utilisation d'un bruit permet de garantir la non cyclostationnarité à l'ordre 1. Un bruit additif est ensuite ajouté. Les figures 5.19g et 5.19h montrent respectivement le spectre de chacune des composantes ( $c(n)$  et  $b_2(n)$ ) ainsi que le spectre du signal.

L'équation a été volontairement limitée à une seule fréquence cyclique pour réduire le nombre de filtres à étudier (les paragraphes suivant traiteront de signaux plus complexes). Le bruit  $b_1(n)$  a également été filtré pour pouvoir d'une part le discerner dans le spectre avec plus de facilité et d'autre part observer l'effet de l'algorithme dans les bandes fréquentielles ne contenant aucun signal "utile".

Avant d'observer les résultats de l'algorithme, nous allons déterminer un filtre empirique qui sera ensuite comparé aux filtres optimaux (au sens des moindres carrés).

### 5.6.2 Choix du filtre

Après le décalage en fréquence du signal par un sinus et un cosinus à la fréquence  $f_1$  (figure 5.17(a)), nous avons :

$$x(n) \cdot \underline{md}_1(n) = b_1(n) \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 & \frac{n_1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \lambda & -\frac{n_1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{md}_1(n) \\ \underline{md}_2(n) \end{pmatrix} + b_2(n) \cdot \underline{md}_1(n) \quad (5.47)$$

Avec :

$$\underline{md}_m(n) = [\cos(2\pi m f_1 n) \quad \sin(2\pi m f_1 n)]^T \quad (5.48)$$

Où  $md_1(n)$  représente les fonctions cosinus et sinus utilisées pour moduler le signal et  $md_2(n)$  les harmoniques générées par cette modulation. Comme cette expression est “simple” et que  $b_1(n)$  a été choisi de telle sorte qu’il n’y ait pas de recouvrement fréquentiel entre ses versions modulées, il est possible de déterminer les filtres nécessaires à la reconstruction du signal en observant l’équation (5.48). La reconstruction sera basée sur le signal modulé par le sinus. Si l’on introduit un déphasage, il sera indispensable d’exploiter le signal modulé par le sinus et le cosinus.

La figure 5.18(a) montre le signal original en trait continu ainsi que le signal décalé en pointillé. Le filtre a trois rôles indiqués par des flèches sur le schéma :

1. Supprimer le bruit situé à la fréquence  $2f_1$ ,
2. Fournir les gains nécessaires pour retrouver la même forme que le signal initial (soit  $2\lambda$  en “basse fréquence” pour transformer le terme  $\frac{b_1(n)}{2}$  en  $\lambda \cdot b_1(n)$  et  $1/\lambda$  en “haute fréquence” pour transformer le terme  $b_1(n) \lambda \sin(2\pi f_1 n)$  en  $b_1(n) \sin(2\pi f_1 n)$ ,
3. Supprimer le bruit modulé  $b_2(n)$  pour les fréquences où il est disjoint de  $c(n)$ .

Cet exemple améliore uniquement le signal pour les fréquences supérieures à  $f_1/4$ . Néanmoins, le bruit sera amplifié ailleurs. Ceci est du à la simplicité de l’exemple. En effet, pour donner de bons résultats, cette méthode nécessite l’utilisation de plusieurs fréquences cycliques.

### 5.6.3 Simulation

La figure 5.19 montre le résultat de l’algorithme temporel sur des signaux synthétiques pour un filtre de longueur  $L = 200$ . Les courbes bleues correspondent aux estimations, les courbes vertes, rouges et noires correspondent respectivement au signal  $x(n)$  avant traitement, à la composante  $c(n)$ , et, du bruit ajouté. La courbe (a) montre 10 cycles du signal  $x(n)$ , la courbe (b) montre la variance synchrone. En théorie, la caractérisation de la cyclostationnarité à l’ordre 2 nécessite l’observation d’une courbe en trois dimensions (corrélation spectrale, corrélation, ...). Nous avons néanmoins choisi d’afficher la variance synchrone pour caractériser la cyclostationnarité à l’ordre 2 car elle est très proche de l’analyse d’enveloppe (pour des signaux centrés, seul un moyennage est ajouté). Si la puissance du bruit  $b_i(n)$  est  $\sigma_i^2$ , l’expression de la variance synchrone est :

$$vs(n) = \sigma_{b_1}^2 \left[ \lambda^2 + 2\lambda \sin(2\pi f_1 n) + \frac{1}{2} - \frac{\cos(4\pi f_1 n)}{2} \right] + \sigma_{b_2}^2 \quad (5.49)$$

Sur les figures b et d, on peut constater que la variance synchrone est périodique mais qu’il subsiste une légère modulation (due à la lente convergence de son estimateur).

Les figures c et e montrent les signaux après débruitage. On peut remarquer que la variance synchrone du bruit estimé (figure f) n’est pas constante mais qu’il subsiste encore un terme cyclostationnaire (fluctuations périodiques). Le terme cyclostationnaire se trouve introduit artificiellement : si on utilise le filtre  $h(n)$  déterminé au paragraphe 5.6.2 (utilisant uniquement la composante sinusoïdale), l’équation (5.47) montre que le bruit  $b_2(n)$  est également modulé à la fréquence  $f_1$ , aussi, si nous notons  $\hat{b}_2(n)$  le bruit estimé, nous avons :

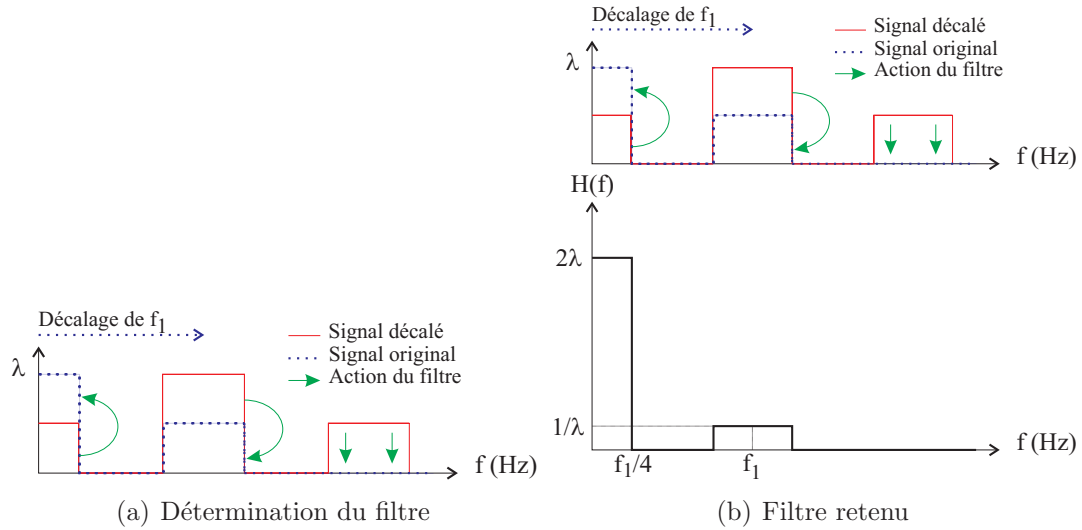


Figure 5.18: Choix du filtre

$$\hat{b}_2(n) = b_2(n) - [b_2(n) \cdot \sin(2\pi f_1 n)] * h(n) \quad (5.50)$$

Alors, un lien à la fréquence cyclique est créé entre le bruit et sa version décalée qui explique la composante cyclostationnaire présente dans l'estimation du bruit  $\hat{b}_2(n)$ . Ce défaut n'est pas très gênant si l'on s'intéresse uniquement à  $c(n)$ . En effet,  $\hat{c}(n)$  contiendra le même type de bruit mais décalé en fréquence et atténué. Néanmoins, il faudra être prudent lors de l'interprétation de  $\hat{b}_2(n)$ .

La figure g montre le spectre des différentes composantes du signal. La figure h montre le signal estimé par l'algorithme. L'algorithme réduit bien le bruit dans la zone fréquentielle contenant uniquement du bruit (fréquence au delà de 0.04 Hz). Ailleurs, le signal reconstruit a un spectre similaire au signal original.

La figure i montre les filtres utilisés pour la reconstruction. Contrairement à notre démarche du paragraphe précédent (5.6.2), les filtres n'ont pas été déterminés en connaissant le modèle mais en minimisant l'erreur quadratique. Cette différence de critère pourra expliquer une différence entre le filtre attendu et le filtre réel. En observant les filtres, on note une atténuation de 40 dB dans la zone  $[0, 0.01]$  Hz ainsi qu'une atténuation de 60 dB vers 0.02 Hz, soit une différence de 20 dB. Cet écart est conforme à notre gabarit de la figure 5.18(b) puisque l'atténuation doit être de  $20 \log_{10}(2\lambda^2)$  c'est-à-dire de 18 dB avec  $\lambda = 2$ . L'atténuation de 40 dB résulte de l'implémentation du filtre.

## 5.7 Influence de l'allure du signal

Le but de ce paragraphe est d'examiner l'influence de l'allure du spectre du signal sur la qualité de la reconstruction ou plus simplement du facteur  $\lambda$  du paragraphe précédent. Pour évaluer cette influence, on utilise un signal de la forme :

$$x(n) = c(n) + b_2(n) / 2 \quad (5.51)$$

$$c(n) = b_1(n) [0.5 + \sin(2\pi f_1 n) + \lambda \cdot \sin(2\pi f_2 n)] \quad (5.52)$$

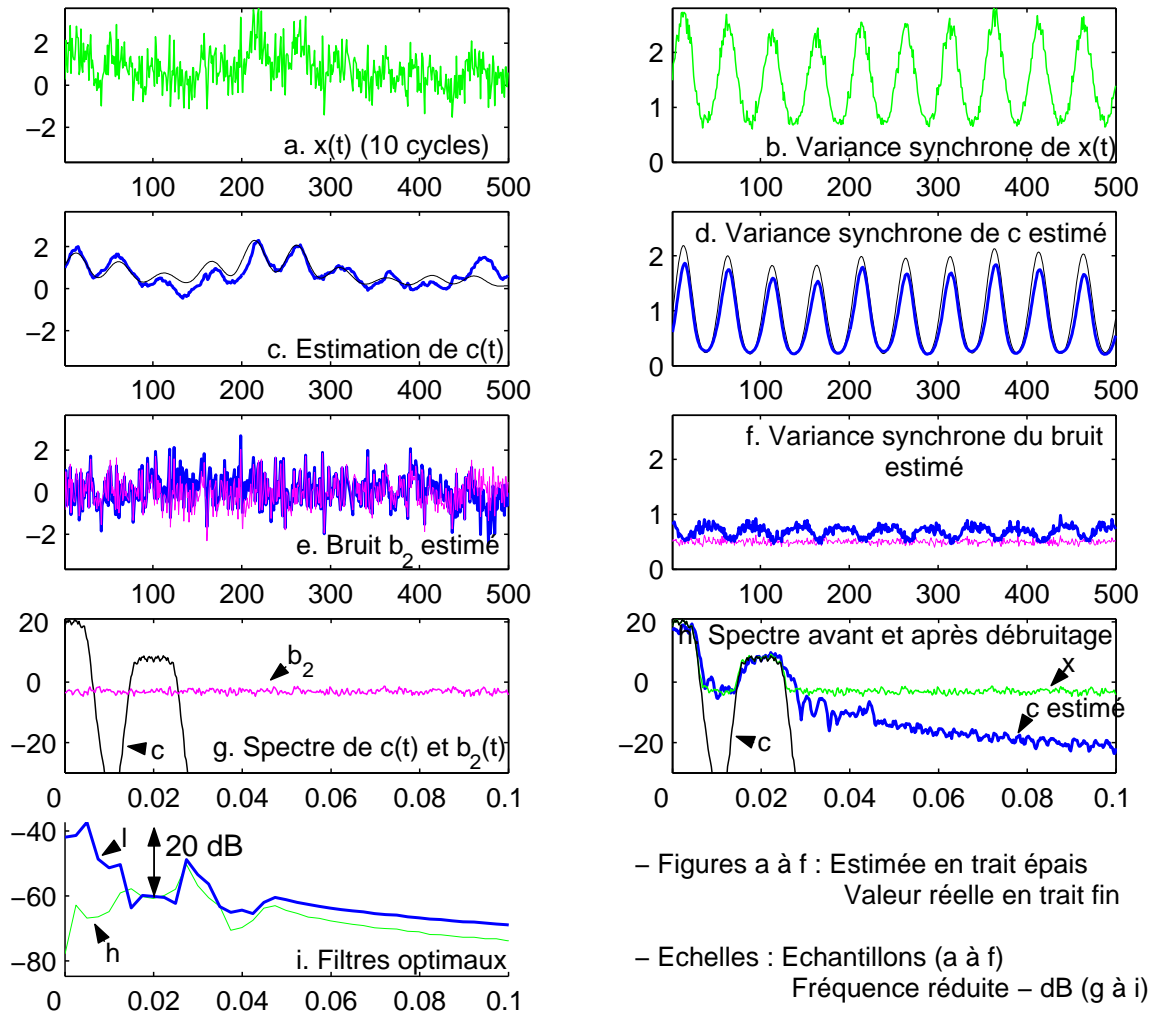


Figure 5.19: Débruitage dans le cas simple

Ce signal contient un terme modulé supplémentaire par rapport au paragraphe précédent comme l'indique son spectre (figure 5.20(a)). Nous allons évaluer l'erreur de reconstruction  $\varepsilon(n) = \hat{c}(n) - c(n)$  dans la bande fréquentielle associée au motif central  $[0.08; 0.12]$  Hz. Lors de la simulation, cette erreur sera mesurée par moyennage du spectre de l'erreur dans cette bande fréquentielle.

La fréquence centrale sera estimée à partir des deux autres motifs, on aura donc dans la bande fréquentielle  $B = [0.08; 0.12]$  Hz après les décalages, filtrages et combinaisons :

$$\varepsilon_B = \left[ \frac{b_1(n) + b_3(n)}{2} + \frac{\lambda b_1(n) + b_4(n)}{2\lambda} - b_1(n) \right] \cos(2\pi f_1 t) \quad (5.53)$$

$$= \left[ \frac{b_3(n)}{2} + \frac{b_4(n)}{2\lambda} \right] \cos(2\pi f_1 t) \quad (5.54)$$

$$(5.55)$$

Où  $b_3(n)$  et  $b_4(n)$  représentent les bruits modulés lors du filtrage *LPTV*. Comme ces deux bruits sont modulés à des fréquences différentes, leur intercorrélacion est nulle. Leur écart-type  $\sigma_b$  est identique. En exploitant ces deux propriétés, on peut écrire :

$$\mathbb{E} \{ \varepsilon_B^2 \} = \sigma_B^2 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4\lambda^2} \right) \quad (5.56)$$

Dès lors, plus le facteur  $\lambda$  sera important plus le bruit associé au motif central reconstruit sera faible. La réduction ne pourra néanmoins excéder 6 dB. Pour avoir de meilleurs résultats, il serait nécessaire d'utiliser d'autres fréquences cycliques. Par exemple pour  $\lambda = 1$  et  $K$  fréquences cycliques générées en ajoutant des termes du type  $b_1(n) \sin(2\pi f_k n)$  au modèle, l'écart type du bruit sera réduit d'un facteur  $\sqrt{K}$ .

Bien qu'il paraisse intéressant d'avoir un terme  $\lambda$  grand, il n'en est rien. En effet, le motif situé à la fréquence cyclique 0.22 Hz sera reconstruit à partir des deux motifs. A l'aide de calcul similaire on obtient :

$$\mathbb{E} \{ \varepsilon_C^2 \} = \sigma_B^2 \left( \frac{\lambda^2}{2} \right) \quad (5.57)$$

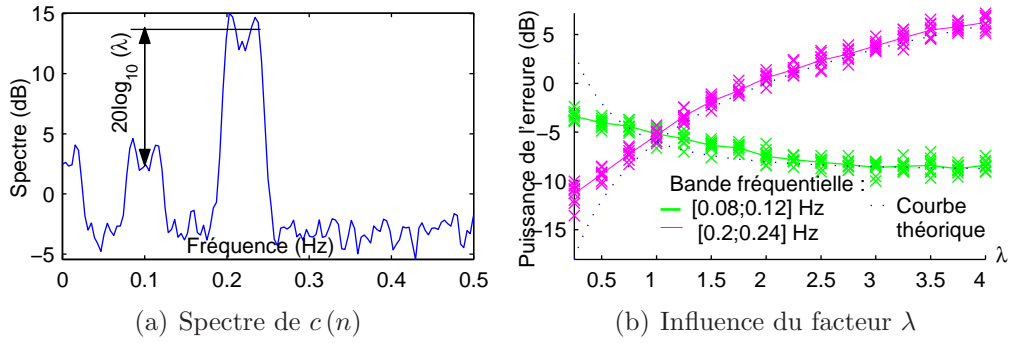
Dans ce cas les résultats sont mauvais pour  $\lambda$  grand. Par ailleurs, comme il s'agit de la contribution la plus énergétique l'erreur est nettement visible dans le domaine temporel. Une bonne reconstruction de toutes les composantes nécessite que chacune d'entre elles ait la même puissance (partie "utile" de  $c(n)$  blanche). Il ne faut pas perdre de vue qu'un blanchiment préalable du signal  $x(n)$  ne résoud pas ce problème car il intervient également sur le bruit  $b_2(n)$ .

La figure 5.20(b) montre l'évolution de l'erreur pour la bande fréquentielle associée au motif central et au motif de droite. Cette figure confirme nos calculs (tout particulièrement pour le motif de droite) et les valeurs de  $\lambda > 1$ . On peut remarquer que les courbes théoriques se croisent à  $\lambda = 1$ .

Nous allons maintenant exploiter le modèle de signaux de roulement.

## 5.8 Signaux de roulement

Les signaux sont basés sur l'équation 5.11 simplifiée que nous rappelons ici :



**Figure 5.20:** Influence de l'allure du spectre du signal sur la reconstruction

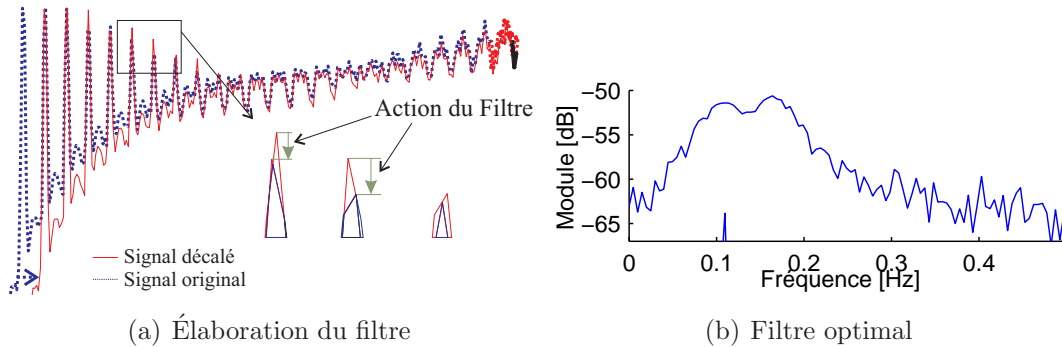
$$c(n) = r(t) * \left[ A(t) \sum_i \delta_{T_i} \right] \quad (5.58)$$

$$x(n) = x(n) + b(n) \quad (5.59)$$

Ce modèle est très intéressant pour tester l'algorithme face aux fluctuations de vitesses.

La figure 5.21(b) montre le spectre du filtre lors de l'utilisation d'une seule fréquence cyclique. Le spectre du filtre a une forme proche du spectre du signal (5.22g). La figure 5.21(a) permet d'expliquer cette ressemblance. Elle montre le spectre signal ainsi que sa version décalée. Le spectre est composé de pics régulièrement espacés (signal *proche* d'un signal périodique) avec une énergie légèrement distribuée autour des pics à cause des fluctuations de vitesse. Cette figure montre uniquement les premiers points du spectre afin de mettre en évidence les pics. A une échelle plus faible, ces pics seront difficilement discernables et le spectre mettra plutôt en évidence les résonances. Le décalage place "face à face" chacun des ces pics, dès lors le module du filtre correspondra à la différence (sur une échelle logarithmique) entre le module (en dB) des deux harmoniques.

La figure 5.22 montre les résultats pour 7 fréquences (fréquence cyclique et ces harmoniques). Comme le montre la figure g, La puissance du bruit est inférieure de 4 dB à la puissance maximale de  $c(n)$ . Un tel bruit rend la détection des pics difficile sur la figure a. La figure c montre l'estimation de  $c(n)$ . Le bruit entre les pics ayant été fortement réduit, il est possible de localiser clairement les défauts. Cette méthode apparaît assez



**Figure 5.21:** Filtre pour un seul décalage



intéressante pour le débruitage. La forte atténuation du bruit est confirmée par la figure h : le débruitage fait nettement apparaître la résonance.

### 5.8.1 Signaux réels

#### Banc d'essai d'engrenage

Les signaux proviennent d'un banc d'essai d'engrenage de l'UNSW présentant un défaut sur la bague externe. Ce défaut se traduit par une succession de chocs. Un signal accélérométrique ainsi qu'un signal tachymétrique (codeur optique) ont été acquis pendant une durée correspondant à 45 chocs. Le banc d'essai comporte un engrenage, il est nécessaire de supprimer la contribution issue des roues. Pour cela le signal a été re-échantillonné angulairement a posteriori à l'aide du signal tachymétrique afin d'estimer puis de retrancher la moyenne synchrone. La figure 5.23a montre le signal  $x(n)$  après suppression de la moyenne synchrone sur un intervalle de 3 chocs. Il est facile de distinguer le dernier choc, les deux premiers sont noyés dans le bruit. La variance synchrone (figure b) met en évidence ces chocs mais elle est assez bruitée. Après avoir utilisé l'algorithme de débruitage, on distingue nettement les trois chocs sur le signal (figure c) ainsi que sur la variance synchrone (figure d). En comparant les spectres avant et après débruitage (figure h), on peut remarquer qu'il y a très peu d'atténuation dans la bande  $[0.18, 0.27] Hz$ . Cela signifie que dans cette bande, la puissance du bruit est faible devant la puissance du signal utile (défaut). Il est apparu intéressant de l'isoler par filtrage passe bande comme lors de l'analyse d'enveloppe (figure 5.24). Cette figure confirme que c'est dans cette bande de fréquences que l'on trouve la contribution issue du défaut de roulement.

#### Hélicoptère

Dans ce paragraphe nous montrons l'apport de la méthode de débruitage à l'ordre 2 sur les signaux d'hélicoptère (les mêmes que pour le chapitre sur l'*ESANC*). Pour des raisons matérielles nous nous sommes limités à 1 millions de points (0.1 s). A titre indicatif le calcul a nécessité plus de 700 Mo de mémoire (en plus du système d'exploitation) et 1h30 de calculs sur un Athlon XP 2400+ (1 Go de mémoire). Nous avons utilisé les 9 harmoniques du défaut pour la reconstruction. La figure 5.25 montre les résultats du débruitage à l'ordre 1 seul (*ESANC*) et à l'ordre 1 et 2 (*ESANC*+débruitage). Les fréquences associées au défaut apparaissent nettement.

## 5.9 Bilan et perspectives

Dans ce chapitre nous avons montré comment utiliser la cyclostationnarité pour le débruitage. D'abord la cyclostationnarité à l'ordre 1 en exploitant la périodicité du signal : on recherche un filtre permettant de prédire le signal à l'aide des valeurs précédentes (*SANC*). Compte tenu du caractère prédictible des signaux périodiques, ce filtre extrait les signaux (poly)cyclostationnaires à l'ordre 1. Malheureusement, les méthodes de type *SANC*, bien que supposant le signal périodique utilisent un signal cyclostationnaire flou. Dès lors, nous avons proposé de re-échantillonner les signaux préalablement (*E-SANC*). Ces méthodes de séparation ont été illustrées à l'aide de signaux d'hélicoptère contenant une composante cyclostationnaire à l'ordre 1 suivant l'angle associée aux roues ainsi qu'une

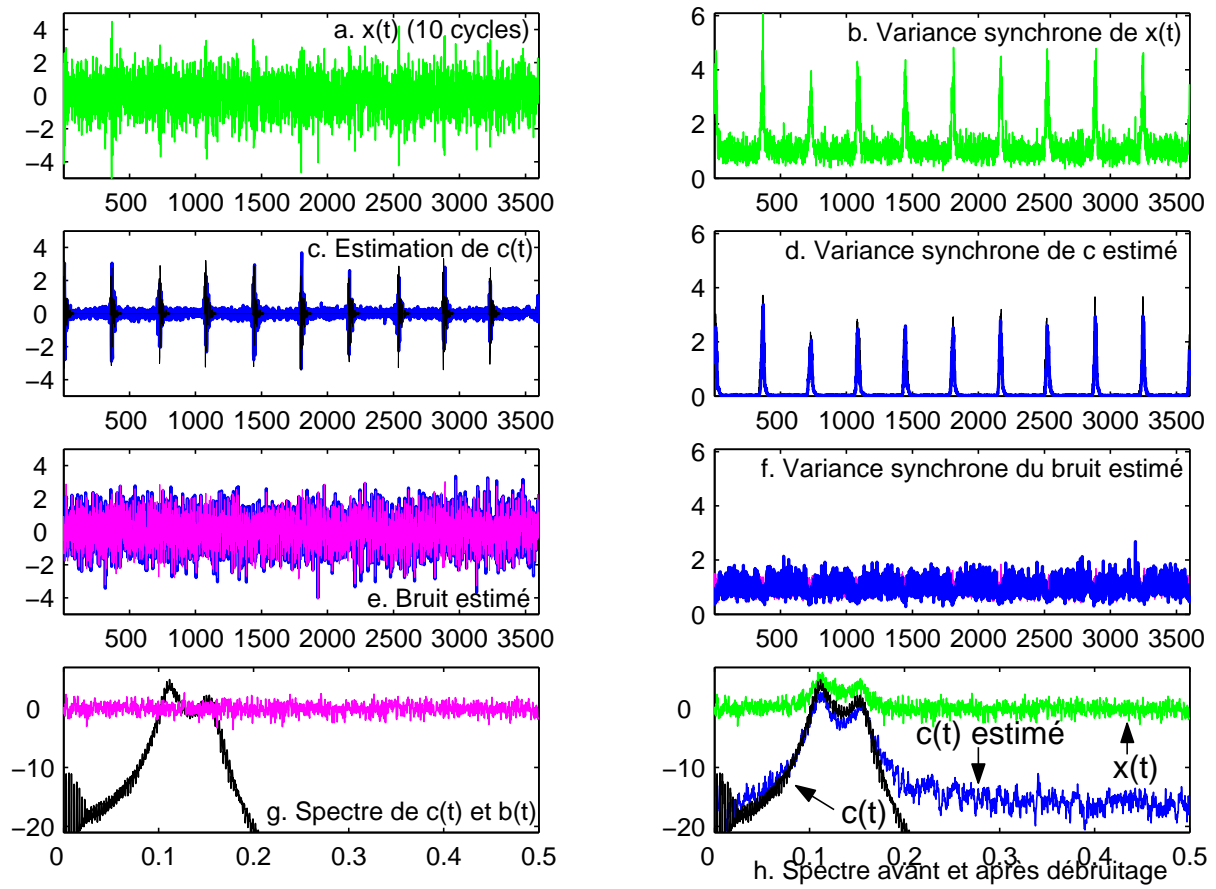


Figure 5.22: Signal - 7 fréquences - bruit important

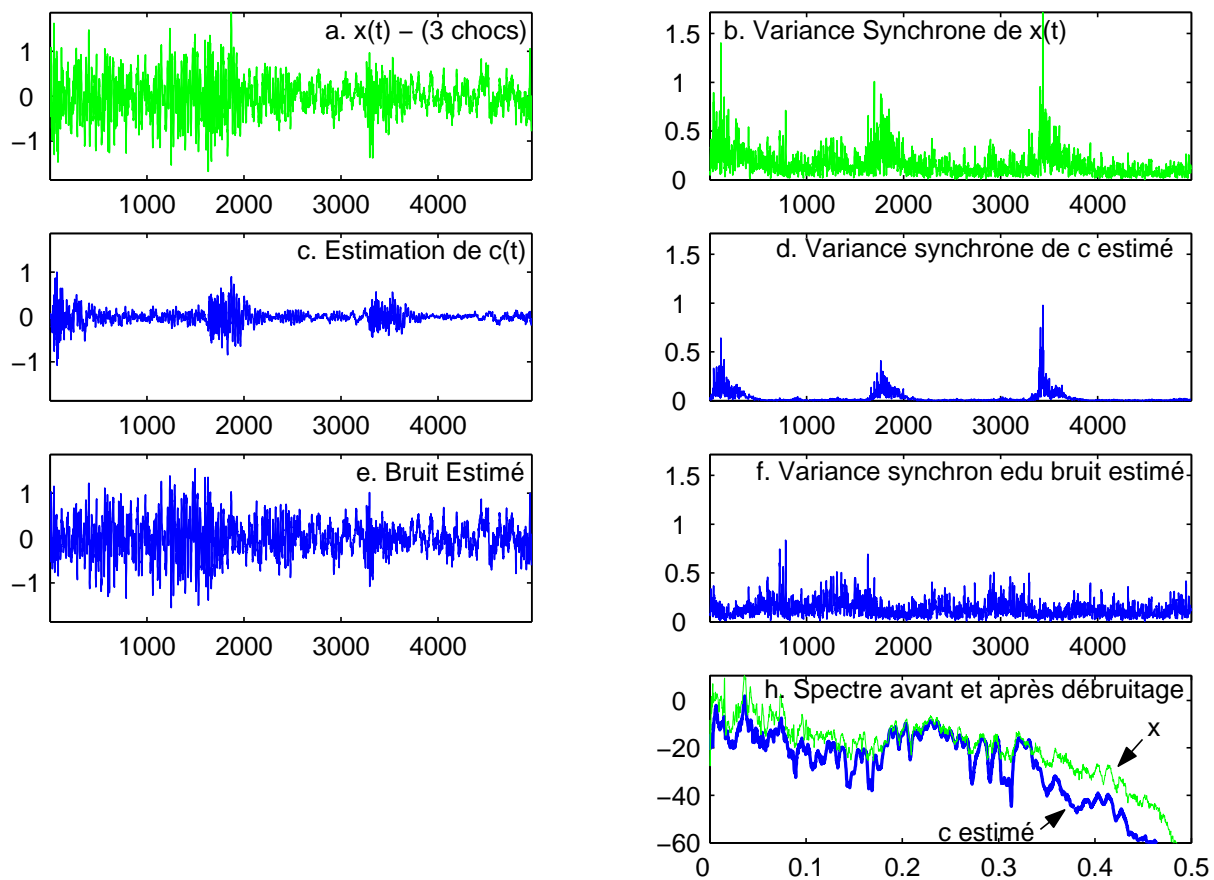


Figure 5.23: Débruitage de signaux de roulement

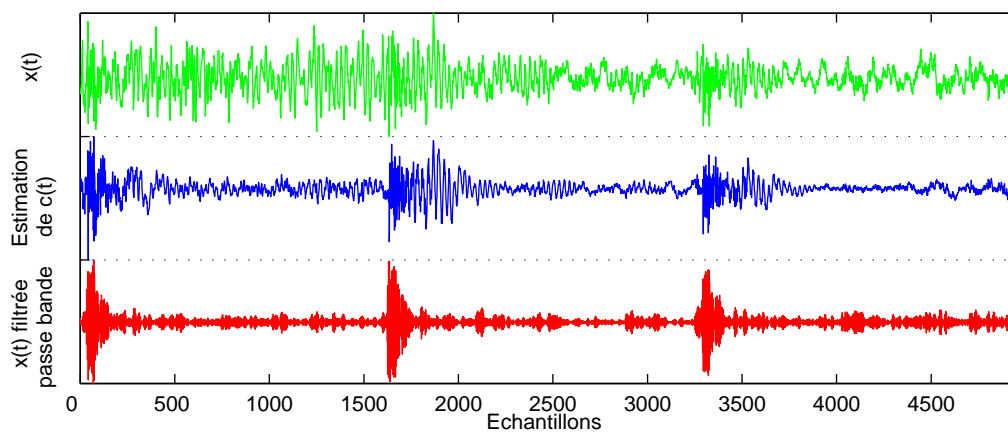
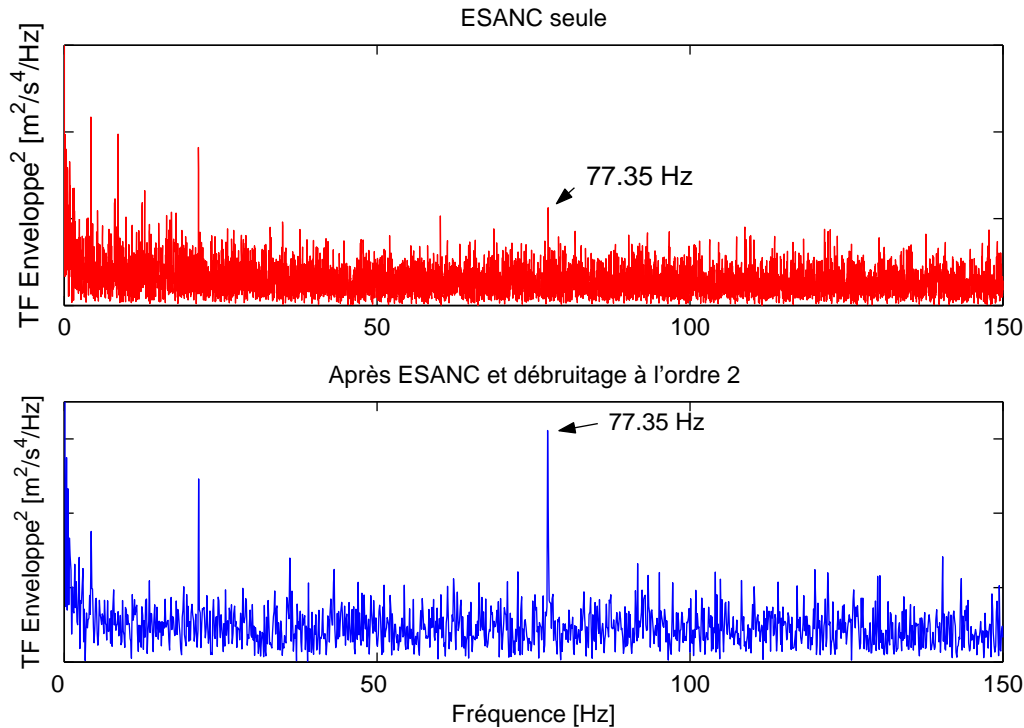


Figure 5.24: Signaux filtrés passe bande



**Figure 5.25:** Transformée de Fourier de l'enveloppe au carré du signal débruité

composante cyclostationnaire floue associée aux roulements. Alors que la SANC était incapable de séparer les signaux de roulement à cause des fluctuations de vitesses trop importantes, la E-SANC a permis d'une part de réaliser cette séparation et d'autre part de mettre en évidence la fréquence associée au défaut.

Après séparation à l'ordre 1 de la composante périodique, le reste du signal contient à la fois le signal de roulement et du bruit. Nous avons alors recherché une méthode permettant de réduire ce bruit. Cette méthode, généralisant le filtrage de Wiener, exploite la redondance spectrale engendrée par la cyclostationnarité. Son but est de reconstruire le signal à l'aide d'une somme de contributions obtenues en décalant fréquemment puis en filtrant ce même signal. Les exemples ont montré que la réduction de bruit fonctionnait mieux avec un nombre important de décalages (6, 7 ou plus selon les capacités de l'ordinateur) ainsi que pour un signal "blanc". Cette technique a permis d'améliorer notablement les signaux et de faire apparaître nettement le défaut de roulement sur le signal d'hélicoptère.

Bien que ces méthodes soient prometteuses, il serait intéressant de disposer d'un ensemble de mesures sur un hélicoptère pour différents niveaux de dégradation afin d'étudier sa sensibilité face à l'évolution du défaut.



## Conclusion générale

DANS ce mémoire, nous avons cherché à exploiter au mieux la cyclostationnarité afin de faire ressortir toute l'information présente dans les signaux issus de machines tournantes. Les méthodes de prétraitement que nous avons présentées ont été illustrées sur des signaux d'engrenage et de roulement.

Pour cela nous avons tout d'abord présenté différents types de cyclostationnarité.

- La cyclostationnarité classique permet d'exploiter des processus contenant une seule période cyclique (moteurs).
- La polycyclostationnarité est destinée au processus associé à plusieurs périodes cycliques. Nous avons choisi d'utiliser cette appellation pour les signaux des roues d'engrenage bien qu'ils soient cyclostationnaires à cause de l'existence d'un cycle commun. Ce choix permet d'être plus proche du procédé physique, c'est-à-dire de prendre en compte les périodes de rotation des différentes roues. Il produit néanmoins des résultats biaisés. Nous avons montré dans le cadre de diagnostic d'engrenage l'apport important de cette approche par rapport à l'approche cyclostationnaire.
- La quasicyclostationnarité qui permet d'étudier les processus possédant des fréquences cycliques non commensurables. Nous montrons comment exploiter cette forme de cyclostationnarité sur des signaux de roulements qui sont approchés par un modèle quasicyclostationnaire sur une faible durée. En général, la quasicyclostationnarité est induite lorsque les phénomènes physiques à l'origine des différentes périodes cycliques sont de natures différentes et indépendantes.

Nous avons également proposé une terminologie permettant de relativiser cette cyclostationnarité.

- Dans les machines tournantes, les signaux sont cyclostationnaires suivant l'angle. Néanmoins, ils sont souvent observés suivant la variable temporelle. Aussi, la cyclostationnarité n'est pas forcément conservée notamment quand les fluctuations de vitesse ne sont ni périodiques ni stationnaires. Par ailleurs, le filtrage peut également détruire la cyclostationnarité si les fluctuations de vitesse ne sont plus périodiques. La période du cycle de la machine n'est plus constante et la cyclostationnarité ne peut alors plus être utilisée. Il est dommage de ne pas exploiter le fait que ces signaux soient cycliques quelque soit leur variable générique. C'est pour cela que nous avons choisi d'appeler ce type de signal, cyclostationnaire flou. Nous avons alors proposé des méthodes de re-échantillonnage angulaire permettant d'induire la cyclostationnarité en travaillant dans le domaine angulaire.
- En pratique, les observations sont faites sur une durée finie. Nous avons alors défini la semicyclostationnarité et utilisé la notion de pseudo-cyclostationnarité pour juger de la pertinence de cette durée. Si l'observation est faite sur une taille suffisamment grande vis à vis des constantes de temps et des cycles de la machine, le signal est

semi cyclostationnaire. Dans le cas contraire, il est pseudo-cyclostationnaire. Un signal est également pseudo-cyclostationnaire si il apparaît cyclostationnaire sur la durée d'observation alors qu'il n'est pas cyclostationnaire.

Les différents types de cyclostationnarité ont été définis classiquement à partir des moments et cumulants qui sont des moyennes de réalisations. Malheureusement, en pratique nous ne disposons que d'une seule réalisation. Dès lors, nous avons été conduit à adapter la notion d'ergodicité au cas cyclostationnaire. Ceci nous a permis de caractériser les signaux aux ordres 1 et 2.

Afin de pouvoir exploiter les signaux enregistrés dans le domaine temporel, nous avons proposé de re-échantillonner les signaux dans le domaine angulaire a posteriori. Nous avons proposé deux types de méthodes. Les premières exploitant un capteur de position comme l'échantillonnage angulaire classique. Ces méthodes permettent d'exploiter l'échantillonnage angulaire à partir d'une chaîne d'acquisition temporelle. Elles ont l'inconvénient de nécessiter une bande passante relativement élevée vis à vis de celle du signal accélèrométrique. Un tel dispositif permet de disposer à la fois des signaux dans le domaine temporel et dans le domaine angulaire contrairement à l'échantillonnage angulaire classique. Dans le cas où l'on ne dispose pas de capteur de position, nous avons développé deux méthodes recherchant l'information de position dans le signal. La première exploite le modèle d'un signal d'engrenage qui contient l'image de la position du rotor. La deuxième utilise la composante cyclostationnaire à l'ordre 1 en recherchant les similitudes à l'aide d'un cepstre amélioré. Malheureusement, la précision de ces deux méthodes est la même que celles qui utilisent un top tour.

Nous nous sommes beaucoup intéressés aux signaux de roulement. Ces signaux présentent un cas de cyclostationnarité floue particulièrement intéressant. Lors de leur observation, sur des réducteurs, ils sont mélangés avec des signaux issus des roues dont la fréquence est incommensurable avec celle des roulements. Ce type de signal présente aussi une nature quasi cyclostationnaire due au glissement. Les variations du glissement nous empêchent également de nous synchroniser sur la cage du roulement. La cyclostationnarité engendrée par ce type de signal est donc floue. Par ailleurs, en étudiant deux modèles de signaux de roulements, nous avons notés que l'un d'entre eux les considèrerait non cyclostationnaires. Ceci nous a conduit à supposer qu'ils apparaissent cyclostationnaires sur une durée suffisamment courte (pseudo cyclostationnarité).

Pour traiter ces signaux nous avons tout d'abord exploité la nature principalement cyclostationnaire à l'ordre 1 (c'est-à-dire prédictible) des signaux des roues et l'aspect cyclostationnaire à l'ordre 2 et plus (c'est-à-dire non déterministe) des signaux de roulement. Pour cela nous avons testé l'algorithme de *SANC* qui donne le filtre permettant d'estimer n'importe quel échantillon "prédictible" à partir du passé. Alors, qu'il donnait de bons résultats sur des signaux de boîte à vitesse à faible rapport de réduction, il a échoué pour des signaux d'hélicoptère. Comme la *SANC* exploitait des signaux temporels, cet échec était prévisible au vue des fortes fluctuations de vitesse présentes dans l'hélicoptère. C'est pourquoi nous avons proposé d'effectuer un re-échantillonnage angulaire préalable (*E - SANC*). Les résultats ont été très fortement améliorés.

A l'issue de ce traitement, nous avons pu extraire la composante associée au roulement. Malheureusement, cette composante contient également du bruit qui est lui aussi non prédictible. Nous nous sommes alors intéressés dans un deuxième temps au débruitage de cette composante. Pour cela nous avons utilisé le filtre de Wiener Cyclique qui reconstruit le signal à partir de composantes décalées en fréquence. Plus le nombre de décalages est

important, plus l'effet de moyennage détruit le bruit. Cet outil a permis de faire ressortir le défaut présent dans le signal d'hélicoptère.

Cette thèse ouvre de nombreuses perspectives que nous avons commencé à explorer au laboratoire.

- Pour exploiter la quasi-cyclostationnarité, il serait intéressant d'étudier les signaux électriques des moteurs électriques dans le but de réaliser un diagnostic de leurs éléments mécaniques (roulements) et de ceux de la charge (engrenages). En effet, un moteur entraînant des engrenages subit les variations de vitesse, et est donc susceptible de contenir des informations sur les défauts mécaniques. L'exploitation de tels signaux est un vrai challenge compte tenu de la forte prédominance due au 50  $Hz$ . En cas de succès, une telle approche serait très intéressante pour les constructeurs de variateurs qui pourraient ajouter un système de diagnostic dans leurs produits.
- Il serait intéressant de disposer de signaux de roulements d'hélicoptères pour différents niveaux d'usure. Ainsi, il sera possible de tester les méthodes de diagnostic que nous avons présentées.
- Il serait également intéressant dans le futur, d'exploiter les propriétés de la cyclostationnarité pour la problématique de séparation de source.
- L'étude de signaux de roulement suffisamment long nous permettra de vérifier d'une part la validité du deuxième modèle, et d'autre part, de voir les limites de l'approximation cyclostationnaire.





# Bibliographie

- [bru, 1995] (1995). *Order Tracking Analysis*. Number Technical Review n°2. Brüel & Kjaer.
- [Agee et al., 1990] Agee, B., Schell, S., et Gardner, W. (1990). Spectral self-coherence restoral : a new approach to blind adaptive signal extraction using antenna arrays. *Proceedings of the IEEE*, 78(4) :753–767.
- [Amblard et al., 1996] Amblard, P., Gaeta, M., et Lacoume, J. (1996). Statistics for complex variables and signals - part i : Variables. *Signal Processing*, 42(11) :1–13.
- [Antoni, 2000] Antoni, J. (2000). *Apports de l'échantillonnage angulaire et de la cyclostationnarité au diagnostic par analyse vibratoire des moteurs thermiques*. Thèse de Doctorat, INPG, Grenoble.
- [Antoni, 2004] Antoni, J. (2004). Robust separation of vibration components using the short-time fourier transform. In CETIM, editor, *Surveillance 5*, Senlis. SFM.
- [Antoni et al., 2004] Antoni, J., **Bonnardot**, F., Raad, A., et El Badaoui, M. (2004). Cyclostationary modelling of rotating machine vibration signals. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(6) :1285–1314.
- [Antoni et al., 2002a] Antoni, J., Danière, J., et Guillet, F. (2002a). Effective vibration analysis of ic engines using cyclostationarity. part i-a methodology for condition monitoring. *Journal of Sound and Vibration*, 257(5) :815–837.
- [Antoni et al., 2002b] Antoni, J., Danière, J., Guillet, F., et Randall, R. (2002b). Effective vibration analysis of ic engines using cyclostationarity. part ii-new results on the reconstruction of the cylonder pressures. *Journal of Sound and Vibration*, 257(5) :839–856.
- [Antoni et El Badaoui, 2000] Antoni, J. et El Badaoui, M. (2000). Some strategies to achieve robust cepstral analysis. In *Proceedings of international conference on vibration in rotating machinery*, London. I.Mech.E.
- [Antoni et Randall, 2002] Antoni, J. et Randall, R. (2002). Differential diagnosis of gear and bearing faults. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 124(2) :165–171.
- [Antoni et Randall, 2003] Antoni, J. et Randall, R. (2003). A stochastic model for simulation and diagnostics of rolling element bearings with localized faults. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 125 :282–289.
- [Antoni et Randall, 2004a] Antoni, J. et Randall, R. (2004a). Unsupervised noise cancellation for vibration signals : part i - evaluation of adaptive algorithms. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(1) :89–101.
- [Antoni et Randall, 2004b] Antoni, J. et Randall, R. (2004b). Unsupervised noise cancellation for vibration signals : part ii - a novel stft algorithm. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(1) :103–117.

- [Bass, 1971] Bass, J. (1971). *Cours de mathématiques Tome III*.
- [Bennett, 1958] Bennett, W. (1958). Statistics of regenerative digital transmission. *Bell Systems Technical Journal*, 37 :1501–1542.
- [Blanc-Lapierre et Fortet, 1953] Blanc-Lapierre, A. et Fortet, R. (1953). *Théorie des fonctions aléatoires (in French)*. Masson.
- [Blough, 2003] Blough, J. (2003). Development and analysis of time variant discrete fourier transform order tracking. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(6) :1185–1199.
- [Boashash, 1992] Boashash, B. (1992). Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal - part 1 : Fundamentals. *Proceedings of the IEEE*, 80(4).
- [Bonnardot et al., 2004a] **Bonnardot**, F., Antoni, J., Randall, R., et El Badaoui, M. (2004a). Enhancement of second order cyclostationary signals. In *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Montreal - Canada. IEEE.
- [Bonnardot et al., 2002] **Bonnardot**, F., Badaoui, M. E., et Guillet, F. (2002). Analyse vibratoire, approche cyclostationnaire et déterministe. In *CNR'IUT*, Le Creusot.
- [Bonnardot et al., 2004b] **Bonnardot**, F., Danière, J., El Badaoui, M., et Guillet, F. (2004b). Ré-échantillonnage synchrone cepstral. In *CNR'IUT*, Nice.
- [Bonnardot et al., ] **Bonnardot**, F., El Badaoui, M., Randall, R., Danière, J., et Guillet, F. Use of the acceleration signal of a gearbox in order to perform angular resampling (with limited speed fluctuation). *Mechanical Systems and Signal Processing*.
- [Bonnardot et al., 2004c] **Bonnardot**, F., Randall, R., et Antoni, J. (2004c). Enhanced unsupervised noise cancellation using angular resampling for planetary bearing fault diagnosis. *International Journal of Acoustics and Vibrations*, 9.
- [Bonnardot et al., 2004d] **Bonnardot**, F., Randall, R., Antoni, J., et Guillet, F. (2004d). Enhanced unsupervised noise cancellation using angular resampling for planetary bearing fault diagnosis. In CETIM, editor, *Surveillance 5*, Senlis. SFM.
- [Bonnardot et al., 2003] **Bonnardot**, F., Zohbi, A. A., El Badaoui, M., et Guillet, F. (2003). Aide à l'interprétation de signaux cyclostationnaires. In *CNR'IUT*, Tarbes.
- [Bossley et al., 1999] Bossley, K., Mckendrick, R., Harris, C., et Mercier, C. (1999). Hybrid computer order tracking. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(4) :627–641.
- [Bouillaut, 2000] Bouillaut, L. (2000). *Approches cyclostationnaire et non-linéaire pour l'analyse vibratoire de machines tournantes : Aspects théoriques et applications au Diagnostic*. Thèse de Doctorat, UTC, Compiègne.
- [Bouillaut et Sidahmed, 2001] Bouillaut, L. et Sidahmed, M. (2001). Cyclostationary approach and bilinear approach : comparison, applications to early diagnosis for helicopter gearbox and classification method based on hocs. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(5) :923–943.
- [Boyles et Gardner, 1983] Boyles, R. et Gardner, W. (1983). Cycloergodic properties of discrete parameter nonstationary stochastic process. *IEEE Transactions on information theory*, 29(1) :105–114.
- [Braun, 1975] Braun, S. (1975). The extraction of periodic waveforms bytime domain averaging. *Acustica*, 32 :69–77.

- 
- [Braun et Seth, 1979] Braun, S. et Seth, B. (1979). On the extraction and filtering of signals acquired from rotating machines. *Journal of Sound and Vibration*, 65(1) :37–50.
- [Braun et Seth, 1980] Braun, S. et Seth, B. (1980). Analysis of repetitive mechanism signatures. *Journal of Sound and Vibration*, 70(4) :513–522.
- [Candocia et Principe, 1998] Candocia, F. et Principe, J. (1998). Comments on "sinc interpolation of discrete periodic signals". *IEEE Transactions on signal processing*, 45(7) :2044–2047.
- [Capdessus, 1992] Capdessus, C. (1992). *Aide au diagnostic des machines tournantes par traitement du signal*. Thèse de Doctorat, INPG, Grenoble.
- [Capdessus et al., 2000] Capdessus, C., Sidahmed, M., et Lacoume, J. (2000). Cyclostationary processes : application in gear faults early diagnosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 14(3) :371–385.
- [Combet, 2003] Combet, F. (2003). *Traitement du signal, modélisation et diagnostic des installations de remontées mécaniques*. Thèse de Doctorat, INPG, Grenoble.
- [Corduneanu, 1989] Corduneanu, C. (1989). *Almost periodic functions*. Chelsea, 2 edition.
- [Cramér, 1999] Cramér, H. (1999). *Mathematical methods of statistics*. 19 edition.
- [Crapart, 1995] Crapart, F. (1995). *Implantation d'algorithmes rapides sur processeur de traitement du signal - Application à l'analyse vibratoire de machines tournantes*. Thèse de Doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne.
- [Crochiere et Rabiner, 1996] Crochiere, R. et Rabiner, L. (1996). *Multirate Digital Signal Processing*.
- [Dalpiaz et al., 2000] Dalpiaz, G., Rivola, A., et Rubini, R. (2000). Effectiveness and sensitivity of vibration processing techniques for local fault detection in gears. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 14(3) :387–412.
- [Dandawaté et Giannakis, 1994] Dandawaté, A. et Giannakis, G. (1994). Extraction of almost periodic signals using cyclostationarity. In IEEE, editor, *ICASSP*, volume 4, pages 141–144. IEEE.
- [de Boor, 2002] de Boor, C. (2002). *Spline Toolbox for use with MATLAB User's Guide*. 3.1.1 edition.
- [El Badaoui, 1999] El Badaoui, M. (1999). *Contribution au diagnostic vibratoire des réducteurs complexes à engrenages par l'analyse cepstrale*. Thèse de Doctorat, Université Jean Monnet, St-Etienne.
- [El Badaoui et al., 2002] El Badaoui, M., Antoni, J., Guillet, F., et Danière, J. (2002). Rééchantillonnage angulaire par interpolation spline-cubic des signaux d'engrenages. In *6<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique*, Lille, France.
- [El Badaoui et al., 2001] El Badaoui, M., Cahouet, V., Guillet, F., et Danière, J. (2001). Modelling and detection of localized tooth defects in geared systems. *Journal of Mechanical Design*, 123 :422–430.
- [El Badaoui et al., 2004] El Badaoui, M., Guillet, F., et Danière, J. (2004). New applications of the real cepstrum to gear signals, including definition of a robust fault indicator. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(5) :1031–1046.
-

- [Ferrara, 1985] Ferrara, E. R. (1985). Frequency-domain implementations of periodically time-varying filters. *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing*, 33(4) :883–892.
- [Fontanive et Prieur, 1992] Fontanive, C. et Prieur, P. (1992). Surveillance et diagnostic des engrenages. In *Progrès récents des méthodes de surveillance acoustiques et vibratoires*, pages 639–649, Senlis.
- [Fournel et al., 1992] Fournel, T., Danière, J., Moine, M., Pigeon, J., Courbon, M., et Schon, J. (1992). Utilisation du cespêtre d'énergie pour la vélocimétrie par images de particules. *Traitement du signal*, 9(3) :267–271.
- [Fyfe et Munck, 1997] Fyfe, K. et Munck, E. (1997). Analysis of computed order tracking. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(2) :187–205.
- [Gardner, 1978] Gardner, W. (1978). Stationarizable random process. *IEEE Transactions on information theory*, 24(1) :8–22.
- [Gardner, 1993] Gardner, W. (1993). Cyclic wiener filtering : theory and method. *IEEE Transactions on communication*, 41(1) :151–163.
- [Gardner, 1994] Gardner, W. (1994). *Cyclostationarity in Communications and Signal Processing*. IEEE Press.
- [Gardner et Franks, 1975] Gardner, W. et Franks, L. (1975). Characterization of cyclostationary random signal processes. *IEEE Transactions on information theory*, 21(1) :4–14.
- [Gardner et Spooner, 1994] Gardner, W. et Spooner, C. (1994). The cumulant theory of cyclostationary time-series, part i : Fondation. *IEEE Transactions on signal processing*, 42(12) :3387–3408.
- [Gladyshev, 1961] Gladyshev, E. (1961). Periodically correlated random sequences. *Soviet Mathematics Doklady*, 2 :385–388.
- [Gladyshev, 1963] Gladyshev, E. (1963). Periodically and almost-periodically correlated random processes with continuous time parameter. *Theory of Probability and Its Applications*, 8 :173–177.
- [Granjon, 2001] Granjon, P. (2001). Modélisation de signaux vibratoires d'une machine tournante par un système linéaire variant périodiquement dans le temps. In des Mécaniciens, S. F., editor, *4ème Conférence Internationale Méthodes de surveillance et techniques de diagnostic acoustiques et vibratoires*, volume 2, pages 575–584.
- [Groover et al., 2005] Groover, C., Trethewey, M., Maynard, K., et Lebold, M. (2005). Removal of order domain content in rotating equipment signals by double resampling. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19(3) :483–500.
- [Gustafsson, 1996] Gustafsson, F. (1996). Determining the initial states in forward-backward filtering. *IEEE Transactions on signal processing*, 44(4) :988–992.
- [Haykin, 2002] Haykin, S. (2002). *Adaptive filter theory*.
- [Herlufsen et al., 1999] Herlufsen, H. et al. (1999). Characteristics of the vold/kalman order tracking filter. 33(4) :34–44.
- [Ho et Randall, 2000] Ho, D. et Randall, R. (2000). Optimisation of bearing diagnostic techniques using simulated and actual bearing fault signals. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 14(5) :763–788.

- 
- [Howard, 1994] Howard, I. (1994). A review of rolling element bearing vibration “detection, diagnosis and prognosis”. DSTO Research report 0013, DSTO, Melbourne.
- [Hurd, 1970] Hurd, H. (1970). *An investigation of periodically correlated stochastic process*. Thèse de Doctorat, Duke University, Durham.
- [Kootsookos, 1999] Kootsookos, P. (1999). A review of the frequency estimation and tracking problems. Technical report, DSTO, Salisbury Site.
- [Lacoume et al., 1997] Lacoume, J., Amblard, P., et Comon, P. (1997). *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*. Masson.
- [Lejeune et al., 1997] Lejeune, G., Lacoume, J., Marchand, P., Durnerin, M., Martin, N., Liénard, J., Silvent, A., Mailhes, C., Prieur, P., et Goulet, G. (1997). Cyclostationnarités d'ordre 1 et 2 : application à des signaux vibratoires d'engrenages. In *GRETSI*, number 16, pages 323–326, Grenoble.
- [Leonov et Shiryaev, 1959] Leonov, V. et Shiryaev, A. (1959). On a method of calculation of semi-invariants. 4(3) :319–328.
- [Lim et Macleod, 1996] Lim, T. et Macleod, M. (1996). On-line interpolation using spline functions. *IEEE Signal Processing Letters*, 3(5) :144–146.
- [Marchand, 1998] Marchand, P. (1998). *Détection et reconnaissance de modulations numériques à l'aide des statistiques cycliques d'ordre supérieur*. Thèse de Doctorat, INPG, Grenoble.
- [Martin et al., 2004] Martin, N., Jaussaud, P., et Combet, F. (2004). Close shock detection using time-frequency prony modeling. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(2) :235–261.
- [Martin, 1982] Martin, W. (1982). Time-frequency analysis of random signals. In *ICASSP*, pages 1325–1328, Paris. IEEE.
- [Max et Lacoume, 1996] Max, J. et Lacoume, J. (1996). *Méthodes et techniques de traitement du signal*, volume 1. Dunod, 5 edition.
- [McCormick et Nandi, 1998] McCormick, A. et Nandi, A. (1998). Cyclostionarity in rotating machine vibration. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(2) :225–242.
- [McFadden, 1986] McFadden, P. (1986). Detecting fatigue cracks in gears by amplitude and pahse demodulation of the meshing vibration. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Desing*, 108 :165–170.
- [McFadden, 1987] McFadden, P. (1987). A revised model for the extraction of periodic waveforms by the time domain averaging. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1(1) :83–95.
- [McFadden, 1989] McFadden, P. (1989). Interpolation techniques for time domain averaging of gear vibration. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 3(1) :87–97.
- [McFadden et Smith, 1984] McFadden, P. et Smith, J. (1984). Model for the vibration produced by a single point defect in a rolling element bearing. *Journal of Sound and Vibration*, 96(1) :69–82.
- [McFadden et Smith, 1985] McFadden, P. et Smith, J. (1985). The vibration produced by multiple point defects in a rolling element bearing. *Journal of Sound and Vibration*, 98(2) :263–273.
-

- [McFadden et Toozy, 2000] McFadden, P. et Toozy, M. (2000). Application of synchronous averaging to vibration monitoring of rolling element bearings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 14(6) :891–906.
- [Picinbono, 1994] Picinbono, B. (1994). *Signaux aléatoire 2. Fonctions aléatoires et modèles*.
- [Picinbono, 1995] Picinbono, B. (1995). *Signaux aléatoire 1. Probabilités et variables aléatoires*.
- [Potter, 1990] Potter, R. (1990). A new order tracking method for rotating machinery. *Sound and Vibration*, 24 :30–34.
- [Press et al., 2002] Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., et Flannery, B. (2002). *Numerical recipes in C - The art of scientific computing*. Cambridge.
- [Raad, 2003] Raad, A. (2003). *Contributions aux statistiques cycliques d'ordre supérieur : applications au diagnostic des défauts d'engrenages*. Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- [Rabiner et al., 1976] Rabiner, L., Cheng, M., Rosenberg, A., et McGonegal, C. (1976). A comparative performance study of several pitch detection algorithms. 24(5) :399–418.
- [Randall, 1975] Randall, R. (1975). Gearbox fault diagnosis using cepstrum analysis. In *5th World Congress in Theory of Machines and Mechanisms (I. Mech.E)*, volume 1, pages 169–174, Londres.
- [Randall, 1982] Randall, R. (1982). A new method of modeling gear faults. *Journal of mechanical design*, 104 :259–267.
- [Randall, 1994] Randall, R. (1994). Diagnostics of planetary bearings. In *IFTToMM Fourth International Conference on Rotor Dynamics*, number 4, pages 25–28, Chicago, Illinois USA. The Vibration Institute.
- [Randall et Antoni, 2001] Randall, R. et Antoni, J. (2001). Separation of gear and bearing fault signals in helicopter gearboxes. In *4<sup>me</sup> conf Méthodes de surveillance et techniques de diagnostic acoustiques et vibratoires 2001*, pages 161–183, Senlis. UTC Compiègne.
- [Randall et al., 2001a] Randall, R., Antoni, J., et Chobsaard, S. (2001a). The relationship between spectral correlation and envelope analysis in the diagnosis of bearing faults and other cyclostationary machine signals. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(5) :945–962.
- [Randall et al., 2001b] Randall, R. B., Antoni, J., et Chobsaard, S. (2001b). The relationship between spectral correlation and envelope analysis in the diagnostics of bearing faults and other cyclostationary machine signals. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(5) :945–962.
- [Srinivasan et al., 1967] Srinivasan, S., Subramanian, R., et Kumaraswamy, S. (1967). Response of linear vibrotory systems to non-stationary stochastic impulses. *Journal of Sound and Vibration*, 6(2) :169–179.
- [Unser, 1999] Unser, M. (1999). Splines a perfect fit for signal and image processing. *IEEE Signal processing magazine*, 16(6) :22–38.
- [Unser et al., 1993] Unser, M., Aldroubi, A., et Eden, M. (1993). B-spline signal processing. *IEEE Transactions on signal processing*, 41(2) :821–832.

- [Vold et al., 1997] Vold, H. et al. (1997). Multi axle order tracking with the vold-kalman tracking filter. 31 :30–34.
- [Vrabie et al., 2004] Vrabie, V., Granjon, P., Maroni, C., et Leprettre, B. (2004). Application of spectral kurtosis to bearing fault detection in induction motors. In CETIM, editor, *Surveillance 5*, Senlis. SFM.
- [Wang, 2001] Wang, W. (2001). Early detection of gear tooth cracking using the resonance demodulation technique. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(5) :887–903.
- [Widrow et Stearns, 1985] Widrow, B. et Stearns, S. (1985). *Adaptive signal processing*.
- [Zivanovic et Gardner, 1991] Zivanovic, G. et Gardner, W. (1991). Degree of cyclostationarity and their application to signal detection and estimation. *Signal Processing*, 22(3) :287–297.





# Index

- banc d'essai
  - EDF, 74
  - hélicoptère, 108
  - LASPI, 19
  - LIS, 17
- cumulants, 7
- cyclostationnarité
  - caractérisation, 61
    - autocovariance, 71
    - densité spectrale de corrélation, 66
    - moyenne synchrone, 59, 61, 74
    - spectre de Wigner-Ville, 72
  - cycloergodisme, 59
  - floue, 81
  - impure, 12
  - ordre 1, 6
  - ordre 2, 6
  - ordre  $n$ , 12
  - polycyclostationnarité, 17
  - presque cyclostationnarité, 15
  - pseudo-cyclostationnarité, 22
  - pure, 12
  - quasi-cyclostationnarité, 20
  - semicyclostationnarité, 21
  - sens large, 12
  - sens strict, 11
- moments, 7
- periode cyclique, 11
- roulement, 101
  - analyse d'enveloppe, 102
  - débruitage, 113
  - modele, 90
  - séparation engrenement roulement,
    - 104
    - E-SANC, 107
    - SANC, 105
- stationnarité
  - sens large, 12
  - sens strict, 11
- échantillonnage
  - a posteriori, 26
  - cepstre, 37
  - codeur, 30
  - engrènement, 32
  - évaluation, 44
  - angulaire direct, 25



---

## Comparaison entre les analyses angulaire et temporelle des signaux vibratoires de machines tournantes. Etude du concept de cyclostationnarité floue.

### Résumé

DANS ce mémoire, nous avons cherché à exploiter au mieux la cyclostationnarité afin de faire ressortir toute l'information présente dans les signaux issus de machines tournantes. Les méthodes de prétraitement qui y sont présentées sont illustrées sur des signaux d'engrenage et de roulement.

Nous présentons tout d'abord la cyclostationnarité ainsi que ces diverses variantes. La caractérisation est faite suivant l'angle où les signaux sont naturellement cyclostationnaires. Ensuite, nous insistons plus longuement sur le devenir de la cyclostationnarité après échantillonnage temporel. Alors que les périodes cycliques sont certaines suivant l'angle, elles ne le sont plus nécessairement suivant le temps à cause des fluctuations de vitesse aléatoires. Dès lors, les propriétés de cyclostationnarité disparaissent. Nous introduisons alors le concept de cyclostationnarité floue pour caractériser un tel signal. De plus, afin d'introduire la cyclostationnarité sur les signaux temporel, nous proposons des méthodes de re-échantillonnage en fonction de l'angle.

Après avoir présenté les outils basés sur la cyclostationnarité, nous nous intéressons à son utilisation sur des signaux mécaniques. Pour cela nous introduisons le concept de cycloergodisme qui étend l'ergodisme stationnaire au cas cyclostationnaire et nous permet d'utiliser une seule réalisation. Nous présentons également les différents outils à l'ordre 1 et 2 (variance, distribution Wigner-Ville ...). Un exemple de diagnostic sur un engrenage permet d'expliquer comment traiter les signaux contenant plusieurs périodes commensurables. Ensuite, nous illustrons la pseudo-quasi-cyclostationnarité floue à l'aide d'un signal composé d'engrènement et de roulement. Dans un premier temps, nous traitons de la séparation des contributions roues et roulement + bruit. Pour cela nous exploitons le caractère principalement périodique des signaux de roue et le caractère stochastique des signaux de roulement. Dans un deuxième temps, nous utilisons ensuite un filtre de Wiener Cyclique afin de réduire le bruit toujours présent dans la contribution du roulement.

**Spécialité :** Signal, Image, Parole, Télécoms.

**Mots-clés :** Machine tournante, cyclostationnarité, analyse angulaire et temporelle, re-échantillonnage, engrenage, roulement.

---

## Comparison between angular and time domain analysis of rotating machine vibratory signals. Study of fuzzy-cyclostationnarity concept.

### Abstract

THE aim of this thesis is to exploit as well as possible the cyclostationnarity in order to take advantage of all the information present in signals resulting from rotating machines. The methods presented here are illustrated on gears and rolling elements bearing.

Firstly, the cyclostationnarity and its extensions are introduced. The definitions are made according to the angle where the signals are naturally cyclostationnary. Then, the becoming of cyclostationnarity properties after temporal sampling is studied. The cyclic periods are certain according to the angle, but not necessarily according to time because of the random fluctuations of the speed. Consequently, the properties of cyclostationnarity are not necessary valid. So, we introduce the concept of fuzzy cyclostationnarity in order to characterize such a signal. Moreover, in order to induce the cyclostationnarity on the temporal signals, we propose angular domain re-sampling methods.

Secondly, these concepts are applied on mechanical signals. To do so, the concept of cycloergodism is presented. It extends the stationary ergodism to the cyclostationnary case and allows to use only one realization. Various tools at the order 1 and 2 (variance, Wigner-Ville Distribution) are also shown. An example of diagnosis on gears illustrates the problem caused by commensurable cycles. Then, the pseudo quasi fuzzy cyclostationnarity case is depicted by using a gear box signal with a defective rolling element bearing. In a first time, the separation of the contributions gear and bearings + noise is investigated. The mainly periodic character of the signals of wheel versus the stochastic character of the signals of bearing is exploited. In a second time, the Cyclic Wiener filter is used in order to reduce the noise always present in the bearing contribution.

**Speciality :** Signal, Image, Speech, Telecommunication.

**Keywords :** Rotating machine, cyclostationnarity, angular and temporal analysis, resampling, gearbox, rolling elements bearing.

---

