Situations recherche et jeux mathematiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs.

Karine Godot

Université Joseph Fourier- Grenoble 1

Thèse pour obtenir le grade de
docteur de l'université Joseph Fourier en mathématiques-informatique
(spécialité didactique des mathématiques)

présentée et soutenue publiquement le 29 Novembre 2005 par

Karine Godot

SITUATIONS RECHERCHE

ET

JEUX MATHEMATIQUES

POUR LA FORMATION ET LA VULGARISATION

Exemple de La roue aux couleurs

Jury:

Sylvestre Gallot (président du jury)
Gilles Godefroy (rapporteur)
Sylvain Gravier (co-directeur)
Denise Grenier (co-directrice)
Alain Mercier (rapporteur)
Eric Triquet (examinateur)

Thèse préparée au sein de l'équipe CNAM et
de l'erté Maths à modeler du laboratoire Leibniz

À tous ceux qui ont les yeux qui brillent

Cela fait maintenant six ans que j'oeuvre dans la vulgarisation des sciences auprès des enfants au sein de l'association Sciences et malice. Six ans que je m'enthousiasme avec eux, que je les vois s'émerveiller, s'interroger, chercher, essayer, recommencer... tout en découvrant les sciences, la physique, la chimie, l'astronomie, la mécanique et leurs multiples applications... Toutes les sciences!? Hélas, non. De formation mathématicienne, j'avais aussi envie de transmettre mon goût pour les mathématiques mais toutes les fois où je prononçais ce mot, des grimaces apparaissaient sur les jeunes visages... Pourquoi tous ces enfants qui aimaient tant les sciences rejetaient-ils les mathématiques!? Que proposer pour que cela change!? Pour que les mathématiques soient pour eux aussi vivantes et ludiques que les autres sciences!?

La recherche de réponses à ces questions m'a conduite à rencontrer les chercheurs de l'équipe CNAM et le projet Maths à modeler à l'occasion d'une Fête de la science, à découvrir les situations recherche qu'ils développent et à avoir envie d'étudier, au travers de cette thèse, ce qu'elles pouvaient apporter à l'enseignement des mathématiques et à leur vulgarisation.

Je remercie Messieurs Alain Mercier et Gilles Godefroy d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et Messieurs Eric Triquet et Sylvestre Gallot pour l'attention qu'ils y ont portée.

Mercis à Denise Grenier et Sylvain Gravier, mes directeurs de thèse, pour leurs conseils et leurs encouragements.

Je remercie également tous les enfants qui m'ont accueillie pour m'avoir donner l'occasion de les voir s'émerveiller en mathématiques, et plus particulièrement Marylou.

Mercis aussi aux enseignants qui ont accepté que je m'immisce dans leurs classes et que j'y propose des activités différentes de ce qui s'y passait habituellement.

Mercis à Charles et Sylvain pour le plaisir et la joie qu'ils ont à chercher en mathématiques. Leurs rires quotidiens, leur enthousiasme m'ont accompagnée et confortée dans mes recherches durant ces trois années.

Mercis à Cécile, Julien et Jean Marie pour m'avoir aidée lors de mes expérimentations.

Mercis à Mireille pour son accompagnement et ses observations.

Mercis aux membres du laboratoire Leibniz pour leur acceuil chaleureux.

Mercis à Janine et Philippe, et à Samuel bien sûr, pour leur soutien permanent.

Table des matières

Chapitre 1

PLUSIEURS RAPPORTS CONVERGENTS

«Pour atteindre nos objectifs, il faut, au préalable, réconcilier les Français avec la science [...]. Dans ce contexte, donner le goût des sciences aux enfants et éveiller leur curiosité sont des enjeux importants. C'est pourquoi j'ai inscrit la culture humaniste et scientifique dans le socle des connaissances et des compétences qui doivent être impérativement maîtrisées à l'issue de la scolarité obligatoire.»

François Fillon
Ministre de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (1er février 2005) [1]

La situation semble préoccupante. Depuis quelques années, des rapports se multiplient en France et dans plusieurs autres pays. Les premiers d'entre eux mettaient en avant la désaffection progressive des filières scientifiques, les suivants tentent d'en saisir les raisons et d'apporter des propositions concrètes afin de redonner *«le goût aux sciences»*.

La culture scientifique, technique et industrielle apparaît pour tous comme un *«!enjeu culturel, éducatif et sociétal!»* [Rapport Jantzen, 2001]. Elle est identifiée comme un élément à part entière de la culture en général, élément indispensable pour aider le citoyen à comprendre le monde dans lequel il vit, où la technologie et autres applications scientifiques tiennent une place de plus en plus importante.

> *« Dans l'incapacité que nous sommes de prévoir les évolutions de nos sociétés, le meilleur viatique que nous puissions donner aux enfants est de développer chez tous, et de façon solidaire, les facultés qui ont permis dans le passé la survie et l'évolution de l'espèce humaine!: la curiosité qui vise à connaitre et à comprendre, la capacité de formaliser et de transmettre les savoirs qui est la racine de tous les progrès passés et futurs, et l'inventivité*

[1] *Vous trouverez l'intégralité du discours en annexe 1.*

qui permet de nous outiller dans tous les domaines.(...) Dans cette éducation, la science tient sa place en tant que valeur fondamentale de notre culture, en tant qu!'élément essentiel de tout citoyen, en tant que facteur déterminant de notre pays.» [Académie des sciences, 2005, p.4].

Dès lors se pose le problème de la diffusion de cette culture au plus grand nombre.

L'école, du fait de son caractére obligatoire et de sa mission éducative intrinsèque est identifiée comme le vecteur privilégié de cette diffusion comme le souligne le rapport Jantzen: «!*si l'action de culture scientifique et technique doit exister, c'est d'abord dans le système de formation initiale qu'elle doit être menée en priorité.!*» [p 18].

Suite à ce constat, plusieurs réflexions ont été engagées autour de l'enseignement des différentes disciplines scientifiques.

> *«!Ce qui importe, c'est la façon de présenter ou d'enseigner les sciences. L'enseignement est devenu trop théorique, alors que la démarche expérimentale y est pourtant fondamentale. Le côté ludique des disciplines scientifiques est mis à l'écart. Les élèves sont encouragés à apprendre sans comprendre et cela leur donne une image fausse des sciences car c'est le contraire de la logique scientifique.!»* [Rapport Hamelin, 2003, p 36].

Intéressons-nous plus particulièrement aux réflexions développées autour des mathématiques. Deux composantes de la culture mathématique sont identifiées dans les différents rapports comme éléments essentiels à transmettre. Tout d'abord, les connaissances déjà acquises, établies au sein de la communauté mathématique, les savoirs notionnels, les «!mathématiques déjà faites!», traditionnellement composantes principales de l'enseignement des mathématiques en France. D'autre part, des capacités comportementales transversales liées à la démarche de recherche en mathématiques!: curiosité, imagination, créativité, analyse critique, raisonnement...

> *«!Pourquoi enseigner les mathématiques!? Avant tout **on a besoin de l'alliance entre imagination et raisonnement apportée par la démarche mathématique**, depuis l'élaboration et la mise en forme des énoncés jusqu'à la démonstration de leurs conséquences. (...) **L'enseignement des mathématiques doit se mesurer non seulement à ce qu'il apporte immédiatement aux élèves** pour mieux se situer dans l'ensemble des pratiques et des connaissances!, **mais aussi**, comme tout autre enseignement **aux atouts qu'il donne aux enfants ou jeunes gens d'aujourd'hui pour aborder, au cours de leur vie, les grands problèmes de l'humanité à venir** dont nous ne faisons que pressentir la difficulté.(...) La réflexion sur l'enseignement des mathématiques est donc par nature une réflexion à long terme. (...) Elle prend point d'appui sur ce que nous savons*

*du mouvement des sciences et sur une vision implicite de l'avenir à long terme!: des possibilités sans nombre, des dangers déjà identifiés, et une multitude de problèmes auxquels **l'humanité ne pourra faire face qu'en mobilisant toutes les ressources de l'imagination, de la créativité, des capacités d'analyse critique et de raisonnement, et des connaissances engrangées par les générations précédentes**.»* [Commission «!Kahane!», 2002, p 1-2]

Parallèlement à l'identification de ces deux composantes comme essentielles, s'établit, au regard des différentes études, le constat qu'il devient nécessaire de repenser l'enseignement des mathématiques, jugé trop théorique. Plusieurs propositions convergentes sont énoncées dans ce sens.

*«!L'ensemble des rapports[2] indique une multitude de voies où **l'enseignement des mathématiques peut se renouveler**. Il montre aussi la valeur permanente qui s'attache à cet enseignement, à savoir **développer l'imagination et la rigueur**. La vertu des problèmes, des exemples, des contre-exemples, des démonstrations, de la recherche et de la mise en forme, se retrouve à propos de tous les thèmes.!»* [Kahane, op.cit.]

*«!A la lumière de l'importance des mathématiques pour l'avenir des élèves, **il est essentiel que les systèmes éducatifs veillent à susciter chez les élèves un intérêt pour les mathématiques** et qu'ils réussissent à leur donner la motivation nécessaire pour qu'ils poursuivent l'apprentissage au-delà de leur scolarité. **L'intérêt et le plaisir** de matières spécifiques, soit la motivation intrinsèque, affectent l'intensité et la pérennité de l'engagement à l'égard de l'apprentissage ainsi que la profondeur de la compréhension des acquis.!»* [Rapport Pisa, 2003, p.124].

*«!Les principes de "La main à la pâte" élaborés pour les sciences de la nature et la technique, gardent toute leur valeur pour l'enseignement des mathématiques (ndlr!: à l'école primaire): **rendre l'enfant acteur dans la constitution des nouveaux savoirs scientifiques, en lui donnant l'occasion de poser lui-même les questions, au lieu d'apprendre des réponses obligées à des questions qu'il ne s'est pas posées**. »* [Académie des sciences, op. cit, p.5]

Un élément, jugé primordial pour redonner aux élèves le goût des sciences, apparaît donc!: «!les mathématiques en train de se faire» ou **la mise en situation de recherche des élèves,** quel que soit leur niveau scolaire.

---

[2] Le rapport Kahane comporte plusieurs sous rapports relatifs respectivement au calcul, à la géométrie, aux statistiques et probabilités et à la formation des enseignants.

Dès lors, est avancée à plusieurs reprises, l'idée de la création **de laboratoires de mathématiques**, inspirés d'une idée d'Emile Borel datant de 1904!!

> *«!Il s'agirait de créer, dans tous les lycées et collèges, des laboratoires de mathématiques semblables aux laboratoires de physique et chimie, pourvus de locaux propres, de matériel (informatique en particulier), de livres, de documents pour rassembler des élèves par petits groupes (...). Les activités de certains clubs de mathématiques, ou de l'association MATHs.en.JEANS préfigurent des activités à venir dans ces nouvelles structures.(...) D'autres surgiraient sans doute à partir des professeurs d'établissement.!»* [Kahane, op.cit., p3]

Les professionnels de la recherche sont invités à prendre part activement à la mise en recherche des élèves au sein de ces laboratoires, afin *«!de renforcer les liens entre le système éducatif d'une part et les établissements de recherche, les universités d'autre part, [pour] favoriser la compréhension par (et pour) les adultes de demain des enjeux scientifiques et techniques de la société.!»* [Jantzen, op.cit., p61]

> *«!Le laboratoire serait un lieu privilégié pour la rencontre entre chercheurs, enseignants et élèves. En créant une nouvelle image des mathématiques et de leur aspect expérimental, le laboratoire devrait favoriser les relations interdisciplinaires»*. [Kahane, op.cit., p3]

> *«!Il convient que les organismes qui ont pour vocation première la diffusion de la culture scientifique et technique, s'appuient (...) sur des organismes dont la diffusion scientifique n'est pas la vocation première, mais qui peuvent apporter un appui déterminant!: **les universités**, et d'une façon générale **les établissements d'enseignement**, ainsi que les centres et **laboratoires de recherche** publics et privés.!»* [Rapport Sénat, 2003]

> *«!La mise en oeuvre d'un enseignement moderne des sciences et techniques (...) demande (...) d'établir un partenariat durable avec les associations de professeurs, les communes, les scientifiques et les ingénieurs, **en impliquant fortement les universités, les écoles et les laboratoires**.!»* [Académie des sciences, op. cit, p.8].

Dans le cadre de notre thèse, nous allons chercher à montrer que **les situations recherche,** les outils développés au sein de notre équipe de recherche, l'erté ***Maths à modeler***, peuvent être un des types de situations permettant cette mise en recherche, situations à faire vivre dans ces laboratoires, mais aussi en classe ou sur le temps de loisir, et cela dès le plus jeune âge.

Chapitre 2

POSITION DE LA RECHERCHE!

> *«!On peut aisément donner plus d'exemples où énoncer la conjecture primitive, montrer la preuve, les contre-exemples et suivre l'ordre heuristique jusqu'au théorème et à la définition-éprouvette, dissiperait le mysticisme autoritaire des mathématiques abstraites et en ralentirait la dégénérescence.!»*
> [Lakatos 1984, p 196]

Notre recherche s'inscrit dans le cadre de l'erté ***Maths à modeler*** mise en place par l'équipe Combinatoire Naïve et Apprentissages Mathématiques (CNAM) du Laboratoire Leibniz, à Grenoble et d'autres équipes de recherche françaises aux préoccupations similaires. Dans la lignée des travaux développés autour des *problèmes ouverts,* par Arsac et l'IREM de Lyon notamment [Arsac et al., 1988], ce projet a pour objectif de **mettre en avant l'aspect expérimental des mathématiques**, de sensibiliser à la recherche en mathématiques.

> *«!Au lieu de considérer que les mathématiques sont une science achevée à laquelle on s'initie sous la conduite d'un maître (ou d'un livre) ou seulement un outil pour résoudre des problèmes pas forcément mathématiques, les pratiques que nous proposons considèrent les mathématiques d'un troisième point de vue!: comme une science vivante qui a son développement propre et sa logique propre.!»* [Notre but est] *«!de placer les élèves dans la situation la plus typique de l'activité de recherche mathématique, c'est-à-dire affronter un problème dont l'énoncé les place, toutes proportions gardées, dans la situation du chercheur en mathématiques.!»!* [Arsac et al., op.cit]

Nous construisons des situations incitant à entrer dans une démarche scientifique en mathématiques en vue d'un apprentissage ou d'une mise en œuvre de la réflexion, de la compréhension de pourquoi et comment «!quelque chose marche ou ne marche pas!», cela dans le temps scolaire ou extrascolaire. Ainsi, plusieurs travaux de recherche s'articulent notamment autour des deux questions suivantes!: comment orienter l'élève vers une démarche scientifique en mathématiques, comment amener tout un chacun à devenir un apprenti chercheur en mathématiques!?

Dans cette thèse, nous étudions plus particulièrement des situations de recherche développées dans le cadre de *Maths à modeler*, appelées **situations recherche,** que nous définirons précisément plus loin, qui sont **présentées sous forme de jeu et introduites à l'aide d'un support matériel[3].**

Nous cherchons tout d'abord à identifier les savoirs en jeu (point de vue épistémologique), les apprentissages induits (point de vue didactique) et les conditions de leur émergence, cela au sein de deux institutions: **l'institution scolaire** et **l'institution** que nous appellerons **«loisir scientifique».** Cette dernière comprend les différentes manières de sensibiliser aux sciences dans le temps de loisir, que ce soit l'édition, la presse, les événements grand public type *Fête de la Science* ou la pratique d'ateliers réguliers en dehors de l'école. Nous la présenterons plus en détails au début de la deuxième partie de notre thèse.

Par ailleurs, nous étudions quel peut être le rôle du support de communication que représente le jeu dans la dévolution des situations ainsi que les influences qu'il peut avoir dans la mise en place de démarches de recherche.

Enfin, nous cherchons à identifier quelle peut être l'image de l'individu, élève ou grand public, vis-à-vis des mathématiques en vue de déterminer les apports éventuels de la pratique régulière de situations inhérentes au projet *Maths à modeler*.

I- NOS OBJETS DE RECHERCHE

I-1 DES SITUATIONS RECHERCHE…

Les rencontres proposées entre les mathématiques et les apprentis chercheurs dans le cadre du projet *Maths à modeler* se font par le biais de situations appelées **situations recherche** qui sont telles que:

- Le problème abordé est le plus souvent issu de problèmes de recherche actuels, il peut comporter une, plusieurs ou aucune solution.
- Le point de départ est une question facilement compréhensible pour celui à qui elle est posée.

[3] *vous trouverez en annexe 10 quelques situations Maths à modeler, autres que celle que nous avons étudiée.*

• Les méthodes de résolution ne sont pas désignées. Plusieurs pistes peuvent être suivies.

• Les principaux savoirs en jeu sont des savoirs «!transversaux!» [4].

• Le domaine conceptuel dans lequel se trouve le problème, même s'il n'est pas familier, est d'un accès facile pour que l'on puisse prendre facilement possession de la situation, s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution.

• La résolution de la situation recherche peut amener à se poser de nouvelles questions.

Cette définition n'est pas sans rappeler celle du *problème ouvert* introduite par Arsac et son équipe [Arsac et al, 1988]. Toutefois, même si on peut noter plusieurs points communs comme le fait que l'énoncé n'induise ni la méthode ni la solution, que la solution ne soit pas une application directe des résultats présentés en cours mais soit tout de même accessible et surtout que la résolution nécessite la mise en oeuvre d'une démarche de recherche, on peut identifier plusieurs différences!:

• une situation recherche peut avoir, une, plusieurs ou aucune solution,

• il n'y a pas nécessairement de savoir mathématique notionnel à assimiler. En effet, nous cherchons avant tout à mettre l'accent sur la démarche de recherche en elle-même, sur l'activité de recherche en mathématiques et nous rapprochons donc en ce sens de G. Glaeser qui cherchait à susciter!*«!un développement comportemental plutôt qu'un développement cognitif dans un domaine mathématique particulier.!»* [Glaeser, 1999, p217]

I-2 …ISSUES DES RECHERCHES EN MATHEMATIQUES DISCRETES…

L'équipe CNAM regroupe des chercheurs en didactique et des chercheurs en mathématiques discrètes. Alors que ce domaine des mathématiques est quasi absent de l'enseignement en France, la pluridisciplinarité de notre équipe a permis depuis plusieurs années d'identifier cette discipline comme support permettant de **faire évoluer le rapport à des concepts transversaux en mathématiques**.

Ainsi, D. Grenier et C. Payan suggèrent que les mathématiques discrètes puissent être utilisées comme alternative à la géométrie pour **l'apprentissage de la preuve** [Grenier, Payan, 1998].

Après avoir identifié le décalage entre ce qu'est **la modélisation** d'une part pour l'institution savante mathématicienne et d'autre part pour les élèves, J. Rolland a montré la pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de cette étape de l'activité mathématique, en vue d'une meilleure conformité. [Rolland, 1999]!

[4] *Tels que l'implication, la modélisation, le raisonnement, la preuve, la généralisation…Voir à ce propos [Grenier, Payan 2002]*

D’autres recherches ont étudié comment les mathématiques discrètes peuvent aider à construire et mieux définir des notions para-mathématiques.
C. Ouvrier-Buffet [2003]!, dans sa thèse, définit plusieurs situations issues des mathématiques discrètes en vue d'établir un ensemble de situations qui peut être considéré comme une situation fondamentale pour l'apprentissage de **la construction de définitions** en mathématiques. Parmi ces situations, on trouve notamment la situation «droite discrète». Il s'agit de construire des définitions d'une droite discrète, soit en partant d'une situation de classification et en cherchant explicitement à définir une droite dans le cadre discret, soit en partant d'une problématique plus axiomatique et en demandant de construire des triangles discrets et d'expliciter la construction.
Enfin, un support à l'apprentissage de **l'implication** a été développé par V. Deloustal-Jorrand [2004] à partir notamment de problèmes de type «pavages de polyminos». Il s'agit d'étudier les conditions d'existence du recouvrement, ou pavage, d'une grille à l'aide de formes prédéfinies, les polyminos, sans qu'il ne reste de case vide ou que deux formes ne se chevauchent.

Toutes ces recherches s’intéressent jusqu’à présent principalement à l’université. Dans le cadre de notre thèse, nous élargirons ces approches et nous situerons au niveau du collège et de l’école primaire, à l’instar d’autres recherches menées actuellement au sein de l’erté *Maths à modeler*, notamment celles de C. Poisard [Poisard, 2005]. C. Poisard se place d’une part dans l’institution «loisir scientifique», dans le cadre d’un atelier de mathématiques mis en place par un centre d’animation scientifique et technique qui reçoit des scolaires du cycle 3 de l’école primaire, d’autre part dans l’institution scolaire. Elle étudie dans les deux cas en quoi la fabrication et la compréhension de l’utilisation d’instruments à calculer, en particulier le boulier chinois, présentée sous la forme d’une situation recherche, peut permettre, dès le cycle 3, la mobilisation de savoirs transversaux ainsi qu’une réorganisation des connaissances relatives à la numération de position, aux algorithmes, et en particulier à la notion de retenue.

Par ailleurs, J. Rolland a souligné dans sa thèse que **le peu de place accordée aux mathématiques discrètes dans l’enseignement a contribué à leur donner un statut particulier!** :

> *«!Le fait que les mathématiques discrètes soient peu transposées joue en leur faveur. En effet, ainsi, on ne peut rattacher le problème à un savoir enseigné, il garde un attrait de par son caractère novateur, il peut même être considéré comme ludique.!»* [Rolland, op cit]

Compte tenu de ce constat, il est apparu pertinent, dans le cadre du projet *Maths à modeler*, de proposer des situations recherche issues des travaux actuels en mathématiques discrètes.

Ainsi, aucun pré requis mathématique ne peut a priori être un obstacle à leur dévolution et donc être un frein à la mise en œuvre d'une démarche de recherche en mathématiques.

I- 3 …PRESENTEES SOUS FORME DE JEUX

Comme nous le verrons notamment dans la deuxième partie de cette thèse, les mathématiques discrètes sont source de nombreux sujets de jeux mathématiques proposés pour les olympiades mathématiques (Kangourou, Quizz math…), dans des revues de vulgarisation, ou dans la presse quotidienne (par exemple la rubrique *Affaire de logique* dans le journal Le Monde). Cela nous conforte dans l'hypothèse que nous faisons sur l'utilisation de cette branche des mathématiques comme **support potentiel à une rencontre avec les mathématiques, susceptible d'être accessible au plus grand nombre.**

Aussi les situations recherche inhérentes au projet *Maths à modeler* sont-elles présentées **sous la forme de jeux**, dans le sens où:

- on peut jouer à un, deux ou plusieurs joueurs.
- les actions possibles sont organisées par des règles du jeu (les consignes)
- le déroulement d'une partie s'appuie sur l'utilisation d'un support, que ce soit un support matériel, informatique[5] ou papier-crayon.
- le jeu permet de traiter tous ou certains aspects de la situation recherche dans le sens où il peut présenter le problème dans des cas particuliers (choix de valeurs).

II- QUESTIONS DE LA RECHERCHE

Notre travail de thèse s'intéresse plus particulièrement aux situations recherche introduites à l'aide d'un support matériel. Nous nous placerons au sein de deux institutions: l'institution scolaire française et l'institution «loisir scientifique», et chercherons à apporter des éléments de réponse aux questions suivantes!:

---

[5] *Vous en aurez plusieurs exemples en consultant le site http://www-leibniz.imag.fr/ LAVALISE ainsi que le CD Rom Les 7 énigmes de K'stet, édité par Génération 5.*

Q 1! : quel peut être le rôle du support matériel dans la dévolution des situations recherche «ludiques» dans les deux institutions considérées? Permet-il de rentrer dans une démarche de recherche en mathématiques!?
et plus particulièrement!:
La situation recherche *la roue aux couleurs* est-elle susceptible d'être accessible à tout un chacun!?

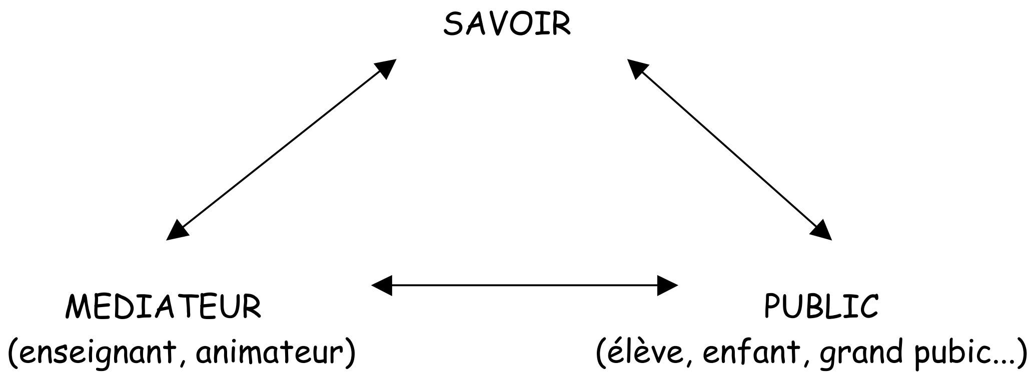
Q 2! : quels peuvent être les apprentissages induits par les situations recherche «!ludiques!» dans les deux institutions étudiées? Quelles peuvent être les influences du support matériel vis-à-vis de ces apprentissages!?

Q 3! : comment peut être gérée une situation recherche «ludique» en classe!? et dans un cadre de vulgarisation?

III- CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE

G. Brousseau, au début de la théorie des situations didactiques, définit les objets d'étude de la didactique comme *«!la description et l'explication des activités liées à la communication des savoirs et les transformations, intentionnelles ou non, des protagonistes de cette communication, ainsi que les transformations du savoir lui-même.»* [Brousseau,!1998, p 34]
On schématise souvent ces objets d'étude sous la forme d'un graphe à trois pôles, le triplet didactique, mettant en jeu traditionnellement l'enseignant, l'élève et le savoir.

Compte tenu de notre problématique et en particulier du fait que nous cherchons à étudier les situations recherche dans l'institution scolaire mais aussi dans l'institution loisir scientifique, nous faisons le choix de ne pas restreindre ce triplet à l'enseignement et de l'élargir à la communication scientifique. Dès lors, nous considèrerons l'enseignant comme un des médiateurs potentiels, l'élève comme un des publics, le savoir que nous considérons étant relatif à l'activité de recherche en mathématiques.



Notre choix d'appliquer les concepts didactiques à l'institution «loisir scientifique» nous amènera à définir quel peut être *le contrat didactique* inhérent aux différentes actions mises en place dans **la deuxième partie** de notre thèse.

Nos analyses didactiques s'appuieront sur certains éléments de *la théorie des situations didactiques* de G. Brousseau, [Brousseau, 1998] d'une part et sur d'autres issus de la *théorie anthropologique* de Y. Chevallard [Chevallard 1992 et 1994] d'autre part.

Après avoir défini plus précisément l'activité de recherche en mathématiques au **chapitre 3**, notre thèse s'articulera en **deux parties**. **La première partie** sera plus particulièrement axée sur l'étude des situations recherche présentées sous forme de jeu matériel au sein de l'institution scolaire, **la deuxième**, sur leur utilisation dans l'institution «loisir scientifique».

Au début de la première partie, nous chercherons à définir, à l'aide de *l'approche écologique*, quels peuvent être l'*habitat* et la *niche écologique* de la recherche en mathématiques au sein de l'institution scolaire française, à travers l'étude des programmes scolaires et des manuels de primaire. Suite à cette étude, nous ferons des hypothèses sur le *rapport institutionnel* de l'institution scolaire vis-à-vis des mathématiques.

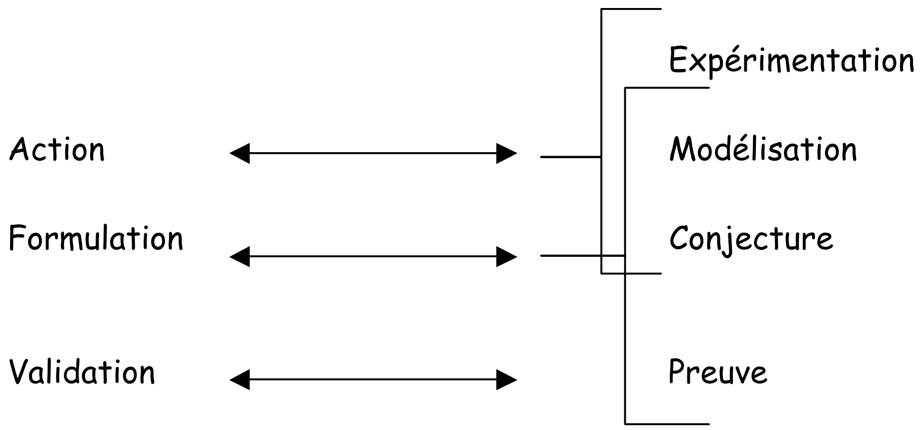
Nous procèderons de même pour l'institution «loisir scientifique» en analysant, parmi les différentes actions mises en oeuvre pour le développement de la culture mathématique, la place accordée à l'heuristique mathématique dans **le chapitre II.1.**

Dans le chapitre II.2, nous aurons recours, enfin, à un questionnaire afin d'avoir des éléments pour identifier quel peut être *le rapport personnel* d'un élève de l'institution scolaire française vis-à-vis des mathématiques et plus particulièrement de l'activité de résolution de problèmes, dans le but de formuler des hypothèses sur les apports des situations recherche.

Par ailleurs, afin d'étudier la dévolution et la gestion des situations recherche en classe, nous mettrons en place plusieurs expérimentations à des niveaux scolaires différents autour de la situation recherche *La roue aux couleurs*, dont vous trouverez les analyses mathématique et didactique au **chapitre! 4**. Nous développerons ces expérimentations **dans la première partie de notre thèse**. Après y avoir analysé la dévolution de cette situation en première année d'université, nous nous tournerons vers le cycle 3 de l'école primaire et la classe de 6ème afin de déterminer quelles peuvent être les productions de si jeunes élèves et les conséquences de nos choix didactiques tant du point de vue de la situation de recherche que des apprentissages ou du jeu.

Chacune de ces expérimentations sera analysée par le biais des *dialectiques de l'action, de la formulation et de la validation* [Brousseau, 1998].

Nous considèrerons les correspondances suivantes :



Nous chercherons également à analyser les productions du public à l'aide des notions de *joueur* et d'*actant* définies ainsi par G. Brousseau [Brousseau, 2005]!:

> *Actant!: celui qui répond avec des raisons objectives, adaptées, applique des règles.*
>
> *Joueur!: celui qui répond avec d'autres raisons, des connaissances subjectives. Il agit selon les règles comme il veut.*

Enfin, les choix relatifs aux niveaux scolaires où nous avons mené ces expérimentations s'appuient sur un processus de validation destiné à vérifier l'accessibilité des situations recherche dans un cadre de vulgarisation et donc auprès d'un public divers et varié, aux connaissances mathématiques plus ou moins riches, à partir d'observations faites dans le cadre scolaire. Ainsi, l'analyse des résultats des différentes expérimentations au sein de l'institution scolaire, en particulier à l'école primaire, nous a conduite à mettre en place deux expérimentations dans l'institution de loisir scientifique, que nous présenterons et analyserons **dans la deuxième partie de cette thèse.**

Chapitre 3

HEURISTIQUE ET MATHEMATIQUES : QUELQUES DEFINITIONS

«!Nous savons que le seul moyen de faire des mathématiques c'est de chercher et résoudre certains problèmes spécifiques et à ce propos, de poser de nouvelles questions.»
[Brousseau, 1998, p61]!

I- QU'EST-CE QUE FAIRE DES MATHEMATIQUES ?

I-1 PETIT TOUR DANS LES DICTIONNAIRES COURANTS! : DES DEFINITIONS SUCCINTES

Afin d'apporter des éléments de réponse à cette vaste question, nous avons consulté dans un premier temps quelques dictionnaires courants.

Le petit Robert!(2003)

> ***MATHÉMATIQUES***: *n.f et adj!: ensemble des sciences qui ont pour objet la quantité et l'ordre -> algèbre, analyse, arithmétique, calcul différentiel, intégral, géométrie, mécanique, etc...*

Petit Larousse illustré (2005)

> ***MATHÉMATIQUES****: n.f. Disciplines étudiant, par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés des êtres abstraits, tels que les nombres, les figures géométriques, etc, ainsi que les relations qui s'établissent entre eux.*

Dictionnaire de l'académie française!(9ème édition, 1992)

> ***(1) MATHÉMATIQUE*** *n.f. et adj. XIIIe siècle. Emprunté, par l'intermédiaire du latin mathematicus, du grec mathêmatikos, de même sens.*
> *N. f. 1. La mathématique (anciennement et dans des emplois spécialisés) ou, couramment, les mathématiques, la science qui étudie les grandeurs, nombres, figures, espaces, ainsi que les relations entre ces objets. L'arithmétique, l'algèbre, la géométrie sont des branches des mathématiques. L'apprentissage*

des mathématiques. Un problème de mathématiques. Un professeur de mathématiques. L'histoire des mathématiques. Mathématiques appliquées, qui, par opposition aux Mathématiques pures, traitent des propriétés des nombres et des figures dans leur application à diverses sciences et techniques. Mathématiques modernes, s'est dit d'un mode d'enseignement des mathématiques qui fut en vogue autour de 1960 et fut abandonné par la suite.

Alors que ces définitions explicitent les objets d'étude des mathématiques rien n'est dit sur les méthodes et pratiques propres à cette discipline, sauf Larousse qui précise qu'elle s'appuie sur le «!*raisonnement déductif!*». Aussi, dans le but de compléter ces définitions, allons-nous nous tourner vers ceux qui font les mathématiques, les pratiquent, les développent!: les chercheurs en mathématiques.

I-2 LE POINT DE VUE DES EXPERTS! : LES CHERCHEURS

Quel que soit leur objet d'étude, tous les chercheurs en mathématiques sont unanimes!: **faire des mathématiques, c'est avant tout résoudre des problèmes**, comme cela apparaît notamment dans les réponses recueillies par J.Nimier et présentées dans son ouvrage «!*Entretiens avec des mathématiciens!*» regroupant plusieurs "ressentis" de chercheurs sur leur discipline de prédilection [Nimier, 1989]!. Par exemple, à la question!: «!*qu'est-ce que l'activité mathématique pour vous!?*», le professeur A.Lichnerowicz[6] précise!:

> *«!L'activité mathématique pour moi, enfin pour n'importe quel chercheur en mathématiques est d'une espèce assez différente de celle qui est communément admise!:* ***vous vous posez une question, vous vous préoccupez d'un problème****... Vous commencez à travailler un peu de manière apparente à une table sur un bout de papier, pas très longtemps.!-bon...le but en fait, le plus souvent le problème est un prétexte-le but est de faire à ce propos une méthode ou de créer des êtres mathématiques... qui, dans le réseau de la connaissance mathématique, irradient. Pendant très longtemps ensuite, apparemment vous ne travaillez pas, mais vous travaillez tout le temps. C'est-à-dire,* ***vous finissez laborieusement par arriver à une espèce d'état de transe qui dure trois semaines, un mois, où vous pensez pratiquement tout le temps à la même question*** *et votre manière de penser n'est pas du tout la manière logique ... qui ne viendra qu'après.!»*

[6] *Professeur au Collège de France. Membre de l'Académie des sciences, section des Sciences mécaniques (1963). Il fut président de la Société Mathématique de France et du Comité national d'Histoire et de Philosophie des Sciences. Travaux sur les espaces de Riemann, la relativité générale, les groupes de transformation. Il intervint dans l'enseignement des mathématiques en France (commission Lichnerowicz, 1967-1971) par l'introduction des mathématiques dites "modernes".*

Certes, une fois que de nombreux problèmes sont résolus, cela peut aussi impliquer un processus de recherche de formalisation, d'axiomatisation, comme l'illustre cette présentation de l'activité mathématique qu'avait faite Hilbert dans la préface d'un ouvrage écrit en collaboration avec Cohn-Vossen!(traduction Nemenyi)!:

> *«!Dans les mathématiques, comme dans tout autre champ de recherche scientifique, nous trouvons deux tendances. D'une part,* ***la tendance vers l'abstraction*** *cherche à cristalliser les relations logiques sous-jacentes dans le labyrinthe du matériel étudié et à réorganiser ce matériel d'une manière systématique et ordonnée. D'autre part* ***la tendance vers la compréhension intuitive*** *fournit par une prise plus immédiate des objets étudiés, un vivant rapport qui, pour ainsi dire, souligne la signification concrète de ces relations.!»* [Hilbert, 1932]!

mais cela ne vient qu'après la résolution de multiples problèmes.

Nous considèrerons donc que faire des mathématiques c'est avant tout chercher à résoudre des problèmes divers et variés, «! se creuser la tête! », tout en mettant en oeuvre une démarche, guidée par des règles établies par l'ensemble de la communauté mathématicienne.

Mais, cela est encore bien flou. Aussi allons-nous chercher à définir ce que signifient plus précisément pour nous les termes «chercher à résoudre!» et «!problèmes!».

II- NOS DEFINITIONS

II-1 CHERCHER EN MATHEMATIQUES ET HEURISTIQUE

I. Lakatos [Lakatos, 1984], dans *Preuves et réfutations*, bien d'autres après ou avant lui, ont décrit les différentes composantes de l'activité de recherche en mathématiques. Tous s'accordent pour dire que, face à un problème, le chercheur en mathématiques, comme tout scientifique, a recours à la démarche scientifique, nommée aussi hypothético-déductive, dont les étapes sont par exemple définies ainsi dans les directives ministérielles relatives aux programmes scolaires du primaire à la terminale:

- faire des essais pour produire une conjecture
- tester sa conjecture en faisant d'autres essais
- prouver la validité de sa conjecture.!

À cette définition, nous rajouterons une étape supplémentaire:

- se poser de nouvelles questions.

Ces phases ne se déroulent pas forcément de manière linéaire, certaines peuvent être sautées, d'autres reproduites ...

L'étude de l'ouvrage de Nimier [Nimier op. cit.] précédemment présenté nous a également amenée à prendre en compte dans notre définition trois aspects plus psychologiques:

- imaginer, avoir recours à l'intuition,
- persévérer,
- avoir du plaisir.

relevés au travers des différents entretiens, dont voici quelques exemples.

Claude Berge[7]

> *«!Les mathématiques c'est quand même aussi un petit peu un jeu, il faut les considérer un peu comme un jeu. (...) Un jeu, c'est une façon de jouir avec l'esprit...!je crois, c'est concentrer son activité sur ce qui vous donne le maximum de jubilation.!»*

André Lichnerowicz

> *«!L'art de faire des mathématiques, aussi bien comme écolier que comme mathématicien, consiste souvent à «!sécher!» la moitié du temps. (...) Les mathématiques quand on les pratique, même comme enfant, à propos de problèmes ouverts et de situations ouvertes, représentent un jeu dont les combinaisons et l'aspect imaginaire sont probablement beaucoup plus riches que les échecs, par exemple.!»*

Bernard Malgrange[8]!

> *«!C'est un jeu où on a toutes les données en main, mais... si on le prend uniquement sous l'aspect jeu, bien entendu il y en en a d'autres, c'est un jeu où la solution dépend...!du temps qu'on y passe, de l'effort qu'on y met, de l'imagination qu'on y met et puis de la chance qu'on a à un moment donné. (...)!»*

Charles Pisot![9]

---

[7] *C. Berge est considéré comme un des plus grands mathématiciens francais du XX° siècle. Il est le père de la théorie moderne des graphes.*

[8] *Membre de l'Académie des sciences, docteur Honoris causa de l'université de Genève, directeur de recherche au CNRS. Ses travaux concernent les équations différentielles et les dérivées partielles, les fonctions de plusieurs variables complexes, la géométrie algébrique.*

[9] *Ancien professeur à l'université Paris VI. Outre son cèlèbre livre de Mathématiques générales (Éd. Dunod) écrit en collaboration avec le doyen Marc Zamansky (Paris XI, Orsay), bible des étudiants en mathématiques des années 1960-70, on lui doit des travaux en théorie des nombres principalement sur les nombres dits «!de Pisot!».*

«!(...) C'est un peu le même plaisir que celui de l'explorateur.(...) On ne décide pas de devenir mathématicien, c'est parce qu'on aime les raisonnements, les devinettes, les problèmes, des choses comme cela, les mots croisés, les jeux de réflexion, je pense que tout cela ce sont des indices. (...) En mathématiques, il faut avoir soi-même une idée si on veut progresser.(...) Il faut s'accrocher, il faut tourner, retourner la question qui vous préoccupe sous tous ses aspects, il faut y penser tout le temps.».

La définition que nous venons de donner se limite à une présentation de la recherche personnelle, il s'agit donc dans l'état actuel de la définition de «!faire des mathématiques tout seul!». Nous prendrons également en compte le fait que, généralement dans la recherche actuelle, ces phases individuelles sont complétées par une phase de communication à travers des échanges avec d'autres chercheurs, au sein de l'équipe de recherche, du laboratoire ou, plus formellement lors de communications publiques, comme les séminaires, les colloques. Ces échanges font partie intégrante de la recherche car ils participent à son avancée, en apportant d'autres regards, en soumettant au débat les résultats, dont certains peuvent être remis en doute, ou en les validant... Aussi allons-nous intégrer dans notre définition cet aspect «!communication!».

Nous considèrerons donc que faire des mathématiques c'est se retrouver dans la peau d'un chercheur en mathématiques, s'interroger, essayer, tâtonner, observer, raisonner, émettre des conjectures, généraliser, prouver, s'accrocher, imaginer, trouver du plaisir à chercher, échanger avec autrui, partager ses découvertes, critiquer, argumenter...

Nous avons, par ailleurs, retrouvé l'ensemble de ces idées dans l'institution loisir scientifique, par exemple dans un ouvrage écrit par S. Gasquet[10], disponible en bibliothèque municipale et destiné à présenter l'activité mathématique à tous, et particulièrement aux parents d'élèves:

«!Les mathématiques se construisent constamment!; le mathématicien professionnel observe des exemples, utilise son intuition, pense a priori qu'un résultat doit être vrai parce qu'il le «!sent!», l'admet provisoirement, poursuit en laissant des «!trous logiques!» sur lesquels il reviendra (ou bien d'autres mathématiciens intéressés sur le même thème). Il explore, il bâtit. Il échange avec d'autres, il réfute, il trouve des erreurs dans ses recherches précédentes. Parfois il met en forme, il rédige pour publier et de ce fait convaincre la communauté des mathématiciens. Parfois aussi, il

---

[10] professeure agrégée en mathématiques, retraitée et membre, entre autre, du groupe concepteur des programmes du secondaire de 1991 à 1993 et de la commission Kahane sur l'enseignement des mathémtiques organisée en 2000.

laisse en héritage des questions qu'il n'a pas su résoudre…et d'autres s'y attelleront.!» [Gasquet, 1989]

Ainsi, quelle que soit l'institution considérée, les points de vue sur l'activité de recherche en mathématiques semblent idoines avec celui des experts, les chercheurs en mathématiques. Par la suite nous désignerons, en référence à Polya et Glaeser, sous les termes **«! heuristique mathématique! »**, «!*l'art de résoudre des problèmes de mathématique.!*» [Polya, 1989] et donc le fait de rentrer dans une activité de recherche en mathématique dont nous venons de décrire les différentes composantes et plus particulièrement *«!l'étude des méthodes spontanées ou non conduites par une personne confrontée à un problème.!»* [Glaeser, 1999, p 112]

II-2 PROBLEME

Faire des mathématiques, c'est donc chercher, méthodiquement. Mais à partir de quoi cherche-t-on!? **Des problèmes,** répondrez-vous. Mais quelles caractéristiques doivent-ils remplir pour que leur résolution conduise effectivement à chercher en mathématiques, au sens où nous venons de le définir!? C'est quoi un problème!? Quelle est la différence entre un problème et un exercice!?

Pour définir ce que nous rassemblerons sous le terme «!problème!», nous nous sommes appuyée dans un premier temps sur une définition énoncée par G. Glaeser:

*• «! **Un problème est une question dont on ne connaît pas la réponse**. Si la réponse est triviale, il n'y a pas de problème. Si sans que la réponse ne soit triviale, la démarche de résolution apparaît dès la lecture de l'énoncé, il n'y a pas de problème non plus.*

*• Un problème doit aussi être **motivant**.*

*• Un problème peut être **difficile**. Sa résolution peut s'étendre sur une **longue période**. Mais il faut que l'élève sente qu'il progresse. **Une question inabordable n'est pas un problème mais un casse-tête**.*

*• **L'énoncé du problème** n'est pas nécessairement définitif. Il peut être **modifié, précisé, restreint**, ou, au contraire, envisagé dans le cadre d'une situation plus générale.*

*• La résolution d'un problème ne peut être téléphonée par l'enseignant. **C'est à l'élève de progresser,** souvent seul, parfois au sein d'une équipe avec d'autres élèves.» [Glaeser, 1971].*

Afin de prendre également en compte un aspect plus psychologique, nous complétons cette définition par celle donnée plus récemment par J.Brun :

> *«!Dans une perspective psychologique, un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi que* ***le problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet****, en fonction de leur développement intellectuel par exemple.»* [Brun, 1990]

Nous considérerons donc qu'un problème est **évolutif**, son énoncé peut être modifié. Il ne **doit pas pouvoir être mis en relation avec un savoir déterminé**, **contrairement à un exercice** qui a pour but la mise en application d'un savoir afin d'en percevoir l'utilité, les conditions d'utilisation, de vérifier qu'il a été compris, comme le souligne J.Julo!:

> *«!C'est bien là que se trouve* ***la frontière entre exercice et problème!*** *: l'existence dans le premier cas d'une stratégie qui s'impose elle-même, d'une procédure que l'on n'a pas à élaborer (mais plutôt à appliquer) et donc d'une représentation que l'on a plus vraiment à construire.!»* [Julo, 1995]

Cependant un problème doit être **accessible**, permettre peu à peu d'avancer dans sa résolution à l'aide des outils mathématiques et du raisonnement, de rentrer dans une démarche de recherche, car comme J.Julo nous estimons que *«! ce n'est pas la solution du problème en elle-même qui est le véritable but de la recherche, c'est le fait que le réussisse à* ***comprendre par moi-même*** *ce qui faisait problème.!»* [Julo, op cit]. **Dans le cas contraire nous parlerons de casse-tête**. Un casse-tête est pour nous une situation problématique dont les éléments de résolution sont inaccessibles au joueur, sa résolution consiste bien souvent à conduire de multiples essais qui débouchent éventuellement sur une solution, souvent unique, sans que l'on ait compris les concepts mathématiques sous-jacents.

Enfin, un problème a une **difficulté relative**, un même énoncé peut être considéré comme un problème pour un élève de primaire et n'être qu'un exercice pour un collégien.

Ainsi, nous avons décrit plus précisément ce qui, pour nous, caractérise de manière générale l'activité de recherche en mathématiques, tant par ses composantes que par ses objets. Compte tenu de la définition d'une situation recherche que nous avons donnée précédemment, nous considérerons que **les situations recherche sont des problèmes** et que leur résolution peut amener à faire des mathématiques au sens où nous venons de le définir.

Nous allons maintenant chercher à déterminer en quels termes cette activité de recherche peut être mise en oeuvre par un apprenti mathématicien dans le cadre de l'enseignement ou de la vulgarisation des mathématiques.

III- FAIRE FAIRE DES MATHEMATIQUES ?

Selon notre définition, «!faire des mathématiques!» c'est se retrouver dans la peau de celui qui développe cette discipline, l'enrichit, contribue à la fabrication de ses objets, de ses savoirs, c'est donc devenir «chercheur en mathématiques!» et cela quelle que soit l'institution où le public est invité à venir faire des mathématiques.
Comme le précise G. Brousseau en introduction de la théorie des situations didactiques, nous considèrerons, que:

> *«!**une bonne reproduction par l'élève d'une activité scientifique** exigerait qu'il agisse, qu'il formule qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des théories, qu'il les échange avec d'autres, qu'il reconnaisse celles qui sont conformes à la culture, qui lui emprunte celles qui lui sont utiles.!»* [Brousseau, 1998, p 37]

«! Faire faire des mathématiques! », selon nous, c'est donc proposer à autrui, élève ou grand public, des outils, des problèmes, et des conditions de gestion conduisant à rentrer dans une démarche de recherche en mathématiques telle que nous venons de la définir.

Nous allons chercher à déterminer par la suite d'une part quels peuvent être les éléments présents dans l'activité du public qui seront pour nous des indices révélateurs de la mise en oeuvre des différentes composantes heuristiques et d'autre ce à quoi cela peut lui permettre d'aboutir.

III-1 ANALYSE DE LA TACHE «RECHERCHE EN MATHEMATIQUES»

Nous considèrerons que l'élève ou le public est rentré dans une démarche de recherche en mathématiques dans une situation de jeu si:

- il choisit les sous-problèmes qu'il souhaite étudier si le problème est posé de façon ouverte.
- il ne se contente pas de jouer et abandonne la recherche par essais-erreurs pour mettre en place une recherche organisée, imaginer des stratégies de résolution. Pour cela, il peut chercher à modéliser la situation.

Nous désignerons par **stratégie de recherche** le recours à des propriétés particulières (intuitives ou justifiées) pour guider les essais. C'est donc la manière dont on cherche.

- il observe ce qu'il fait, est amené à énoncer des propriétés, à généraliser, à déterminer des méthodes de construction de solution.

Nous appelons **méthodes de construction** des procédures qui, contrairement aux stratégies de recherche, fournissent à coup sûr des solutions. Ce sont donc des résultats de la recherche.
Nous verrons de plus comme un indice du fait qu'il y a **décontextualisation des solutions** l'introduction d'un codage pour les représenter.

- il cherche à énoncer des conjectures.

Nous distinguerons, en référence à I.Lakatos, **des conjectures locales** propres à un cas particulier et **des conjectures globales**, propres à un sous-problème.

- il produit des contre-exemples pour invalider certaines de ses propositions
- il cherche à apporter des arguments de preuve.
- il se pose de nouvelles questions.

Nous nous appuierons sur cette définition lors de l'analyse de nos expérimentations, nous nous attacherons à relever dans les productions du public les différentes composantes que nous venons de citer afin de déterminer dans quelle mesure les situations recherche peuvent être un outil pour l'amener à «!faire des mathématiques!».

III-2 C'EST QUOI UN RESULTAT! ?

Faire des mathématiques au sens où nous l'avons défini débouche rarement sur une seule solution comme cela peut être le cas pour un exercice. Aussi nous apparaît-il important de définir ce à quoi peut aboutir une telle recherche. Dans la mesure où le public a été mis en situation de recherche, par exemple par la biais d'une de nos situations recherche, nous considèrerons donc comme un résultat, la donnée:

- de solutions particulières (résultat minimal)
- de méthodes de construction locales ou globales
- d'énoncés de conjectures locales ou globales
- de preuves locales ou globales

Ces étapes n'apparaissent pas nécessairement lors de chaque recherche mais dans la mesure où elles sont toutes potentiellement présentes, nous verrons comme un des indices du niveau de connaissance de l'apprenti chercheur le fait de se détacher du point de vue local pour adopter des considérations globales.

IV- SITUATIONS RECHERCHE ET HEURISTIQUE

Dans une situation recherche, les acteurs (public et médiateur) sont dans des positions différentes de celles qu'ils ont l'habitude d'occuper dans une situation didactique classique. Afin d'en présenter les différents aspects, nous nous appuyerons sur la proposition de modélisation des situations recherche en classe de G. Grenier et C. Payan présentée lors du séminaire national de didactique en 2002 [Grenier, Payan, 2002] et supposerons qu'elles sont applicables lors de la pratique de situations recherche dans l'institution de loisir scientifique, l'élève cédant alors sa place au public participant, enfant ou adulte, et l'enseignant, à l'animateur.

Dans le cas d'une situation recherche en classe, G. Grenier et C. Payan précisent que:

• l'élève est en position de chercheur

> *«!Il est dans une tâche de production de quelque chose de «!nouveau!», qui n'est pas seulement nouveau pour lui. (...) Nos données expérimentales montrent que, pour l'élève, le fait de savoir qu'il cherche à résoudre un problème non résolu ou partiellement résolu, modifie le rapport qu'il a avec son activité.!»* [Grenier, Payan, op.cit.]

• l'enseignant est en double position de chercheur et de gestionnaire de la situation.

> *«!Pour le pôle recherche, sa position est plus proche de celle de l'élève que dans une situation classique, car il n'est pas nécessairement détenteur des solutions du problème. Mais il est (censé être) détenteur des savoirs transversaux et avoir des critères d'évaluation sur leur validité. C'est une position qui se révèle difficile, parce qu'il n'est pas d'usage pour un enseignant en France d'avoir une activité de recherche.*
>
> *Dans la gestion des situations recherche, le contrôle par l'enseignant de l'activité de l'élève se fait d'abord en fonction de l'avancée dans la résolution du problème et aussi par rapport aux objectifs d'apprentissage, les savoirs transversaux. Les notions mathématiques susceptibles d'apparaître comme des outils de résolution peuvent être fournies par l'enseignant.*
>
> *Le «!jeu des obligations!» entre l'élève et l'enseignant porte bien sur ces savoirs transversaux. Les règles de base associées sont celles du débat scientifique!*[Legrand, 1993]. *Ces règles et propriétés du débat scientifique forment des connaissances de base pour l'activité mathématique et des*

éléments de rétroaction. Elles sont constitutives d'un milieu pour une situation recherche en classe.!» [Grenier, Payan, op.cit.].

Nous considérons également, compte tenu du fait que les situations recherche sont des situations très ouvertes, que:

• l'élève est gestionnaire de la recherche

Il ne sait pas à l'avance où vont le mener ses recherches, le résultat de ses recherches n'est pas une solution unique, il peut suivre plusieurs pistes et a à sa charge le choix de certaines variables.

Du fait de ces disparités, les attentes des acteurs en présence, élève et enseignant, diffèrent elles aussi des pratiques usuelles de la classe de mathématiques. Grenier et Payan [Grenier, Payan, op.cit] soulignent que!:

> ***«! Le critère de réussite pour l'élève** n'est pas, comme dans les exercices usuels, la résolution de la question (que la solution soit juste ou fausse). Dans les situations recherche, la résolution du problème est souvent partielle. Le problème n'est pas fini et on peut le prolonger de façon naturelle, il reste des conjectures à faire ou d'autres cas à étudier et de nouvelles questions. Un critère de réussite «!provisoire!» peut être que l'on a émis une conjecture forte, ou simplement résolu un cas particulier.*
>
> ***Le critère de réussite pour l'enseignant** est la reconnaissance d'apprentissages liés aux savoirs relatifs à l'heuristique en mathématiques et plus particulièrement au triplet (question, conjecture, preuve).!»*

Le contrat didactique qui découle des caractéristiques des situations recherche diffère donc de celui du cours de mathématiques habituellement décrit dans les travaux de didactique. Dans le cadre de notre thèse, nous allons chercher à analyser les conséquences de ces différences sur la dévolution des situations recherche, pour chacune des deux institutions considérées, et en particulier si elles s'avèrent être un élément perturbateur voire un obstacle pour les élèves.

Chapitre 4

LA ROUE AUX COULEURS

I- LE PROBLEME MATHEMATIQUE

Ce problème a été inspiré[11] d'un des jeux mathématiques proposés dans le journal Le Monde, par E. Busser et G. Cohen, dans la rubrique hebdomadaire dénommée «!Affaire de logique!». Contrairement à ce que son intitulé laisse entendre, cette rubrique comporte des petits problèmes mettant en oeuvre un raisonnement mathématique et non des problèmes de logique proprement dite.
L'énoncé était donné dans le numéro du 10 Juillet 2001 sous la forme suivante:

AFFAIRE DE LOGIQUE **PROBLÈME N° 231**

La table tournante

LES DOSSIERS disposés sur la table tournante sont numérotés de 1 à 10, dans cet ordre. Les dix membres du club de spiritisme, qui ont revêtu un maillot numéroté (les numéros vont de 1 à 10), prennent place autour de la table. Vous pouvez lire leurs initiales sur le schéma. Ainsi, Aline, qui porte le dossard n° 1, est assise devant le dossier n° 1, mais c'est la seule de l'assistance à porter le numéro du dossier devant lequel elle se trouve. D'ailleurs, chose curieuse, quand la table tourne, quelle que soit sa position, un seul des convives est placé devant le dossier correspondant à son numéro. Béatrice porte un numéro plus grand que Charles. Retrouvez le numéro porté par chacun des membres du club.

Elisabeth Busser et Gilles Cohen
© POLE 2001

Solution du problème dans *Le Monde* du 17 juillet.

[11] *Nous remercions à ce propos Charles Payan, mathématicien voyageur, qui, le premier de l'équipe CNAM, a vu dans ce problème une occasion de «se creuser la tête », un de ses passe temps favori.*

La semaine suivante, la solution suivante était donnée :

Solution du problème n° 231 paru dans *Le Monde* du 10 juillet.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	8	5	2	9	6	3	10	7	4

Or, il y a une erreur dans cette solution, saurez-vous la dénicher!?

Ce problème a également été cherché au cours des années soixante par plusieurs mathématiciens, dont notamment M. Gardner mais aussi G.Polya, et G.Rybicki, selon les dires de M. Gardner [Gardner, 1982], qui ont montré son équivalence avec la recherche du positionnement de n reines sur un échiquier cylindrique d'ordre k afin qu'une et une seule soit en prise.

Nous avons choisi de voir ce problème comme un sous-problème du problème plus général suivant:

> **Soient deux disques de tailles différentes respectivement découpés en n secteurs angulaires identiques et disposés de façon concentrique.**
> **On associe à chaque secteur du plus grand une couleur distincte.**
> **On applique au petit disque des rotations successives de $2\pi/n$.**
> **Comment peut-on colorier les n secteurs du petit disque en k couleurs, choisies parmi les n couleurs externes ($1 \leq k \leq n$), de façon à n'avoir toujours qu'une seule de ses couleurs en face à face avec celle qui lui correspond sur le disque extérieur pour chaque rotation effectuée ?**

Nous allons tout d'abord analyser ce problème d'un point de vue mathématique. Ensuite, nous nous attacherons à présenter différentes stratégies de recherche de solution susceptibles d'être adoptées et les résultats auxquels elles permettent d'aboutir.

II- RESOLUTION DU PROBLEME

Considérons le problème de façon globale et étudions sa résolution via le **support papier-crayon**. Il peut être décrit par la donnée de deux entiers!: *n* le nombre de couleurs sur le disque extérieur et *k* le nombre de couleurs à l'intérieur. Il s'agit de disposer les couleurs internes de sorte qu'à chaque tour de la table il n'y ait qu'une et une seule couleur en face-à-face. Ce problème sera noté par la suite *(n,k)*. On peut considérer que la résolution de ce problème, quels que soient les cas étudiés, se déroule en deux étapes:

- Recherche d'une disposition des couleurs sur le disque central
- Validation de cette disposition. Chaque solution proposée doit être testée par une rotation du disque central et la vérification que, dans toutes ses positions, une seule de ses couleurs soit en face de celle qui lui correspond sur le disque extérieur.

Après quelques essais, plusieurs remarques générales peuvent s'imposer!:

Rem$_{coul}$: la nature des couleurs n'a pas d'importance pour la résolution du problème, seule leur position et le fait qu'elles soient distinctes importent.
Rem$_{sens}$: le sens de rotation de la roue n'a pas d'importance.

On peut donc supposer que l'on tourne toujours dans le sens des aiguilles d'une montre. En effet, un tour en sens contraire est équivalent à *n-1* tours dans ce sens.

On peut également remarquer que!:

Rem$_{int-ext}$! : Le problème reste le même si on inverse le rôle respectif des positions extérieure et intérieure, en considérant alors que l'on fait tourner le disque extérieur et que le plus petit reste fixe.

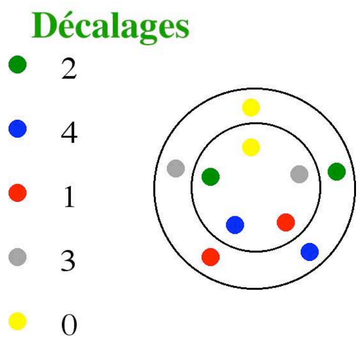
Nous allons maintenant proposer une résolution possible de trois des sous-problèmes (n,k). Afin de clarifier les différentes démonstrations, nous choisissons, quel que soit le cas traité, de coder les différentes couleurs à l'aide de nombres allant de 0 à n-1.

II-1 ETUDE DE (n,n)

Le premier cas considéré est celui où le nombre de couleurs utilisées à l'intérieur est égal à celui extérieur (*k!=!n*). On trouve alors facilement par expérimentation des solutions lorsque *n!=!3,!5,!7* ou encore *9*. Par contre lorsque *n* est pair, les tentatives échouent. Ce qui conduit à la conjecture suivante!:

Conj$^{(n,n)}$: "(n,n) admet une solution si et seulement si n est impair!".

Pour prouver cette conjecture, nous avons à traduire la contrainte de l'unique face à face quelle que soit la position du disque intérieur. Cela signifie qu'à chaque fois que le disque intérieur va tourner d'un cran, il ne doit y avoir qu'une seule couleur qui se retrouve en face à face. Ainsi, il doit y avoir une couleur qui réalise le face à face dans la position initiale, puis une lorsque le petit disque tourne d'un cran, une pour 2 crans, 1 pour 3 …etc …



Dès lors, numérotons les couleurs par des nombres allant de 0 à n-1 et considérons les positions des couleurs à placer relativement à celles du disque extérieur (donc celles des dossiers par rapport à celles des membres dans le problème du Monde). Etant donnée une solution du problème, on associe à chaque couleur i **un décalage**, d_i, qui correspond au nombre de crans nécessaires pour que la couleur i soit en face-à-face avec sa position sur le disque extérieur.

Ces décalages vérifient la propriété suivante!:

> ***$P_{dec}^{(n,n)!}$: les décalages entre la position sur le disque intérieur et celle sur le disque extérieur doivent être distincts et sont compris entre 0 et n-1.***

Cette condition est une **condition nécessaire** pour obtenir une solution. Si de plus on dispose d'une configuration telle que dans chaque secteur du disque intérieur, il n'y a qu'une seule couleur, alors cette condition est également une **condition suffisante**. En effet, dès lors qu'une disposition est caractérisée par un pion de chaque couleur disposé dans chaque position sur le disque intérieur et des décalages tous distincts et compris entre 0 et n-1, cela nous garantit qu'elle est solution, puisque pour chaque cran, on est assuré qu'il n'y aura qu'une et une seule couleur en face à face.

Montrons $P_{dec}^{(n,n)!}$. On peut définir *n* positions sur les disques intérieur et extérieur, en considérant comme position 0 la position où l'on place la couleur numérotée 0 et en numérotant consécutivement les autres positions jusqu'à avoir parcouru l'ensemble des positions possibles, dans le sens des aiguilles d'une montre par exemple.

Soit une couleur i. On peut alors définir une fonction g telle que:

$$g_i = (p_i + d_i) \bmod n.$$

où g_i correspond à la position de la couleur i sur le disque extérieur.
p_i correspond à sa position sur le disque intérieur
d_i, correspond au nombre de secteurs colorés qui séparent p_i de g_i.

Si l'on considère que dans chaque position du disque intérieur il ne peut y avoir qu'une seule couleur, les fonctions p et g définissent des bijections de $\{0,1,2,\ldots n\text{-}1\}$ sur $\{0,1,2,\ldots n\text{-}1\}$.

Alors, nous pouvons affirmer par le biais de sommations modulo n que la somme des décalages est un multiple de *n*. En effet:

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_i + \sum_{i=0}^{n-1} d_i = \sum_{i=0}^{n-1} i \ \ mod\ n$$

Or les p_i ainsi que les d_i prennent toutes les valeurs entre 0 et n-1. Cette dernière remarque nous permet de réécrire la formule précédente ainsi:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = 0 \ \ mod\ n$$

La somme des entiers consécutifs de 0 à n-1 étant (n-1)*n/2, ce nombre doit donc être un multiple de n. Cela implique que (n-1)/2 doit être un entier, par conséquent n doit être impair.

Ainsi nous parvenons au résultat suivant! :

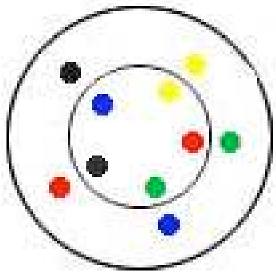
- pour n pair, il n'y a pas de solution,
- pour n impair, on ne sait pas. Il y a peut être une ou des solutions.

Une solution apparaît en fait rapidement en choisissant les décalages dans l'ordre décroissant, ainsi si l'on associe à la couleur 0 le décalage 0, la couleur 1 sera décalée de n-1, la couleur 2 de n-2, etc…

Nous noterons dorénavant les solutions en indiquant les g_i, d_i, et p_i correspondants. La solution ci-dessus peut donc être ainsi décrite! :

	J	V	B	R	N
g_i	0	1	2	3	4
d_i	0	4	3	2	1
p_i	0	2	4	3	1

solution qui correspondant à

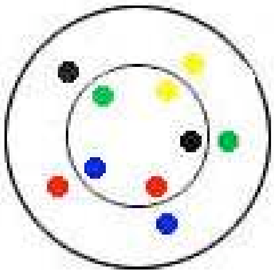


Une fois les décalages introduits, il est possible de trouver toutes les solutions existantes. On peut par exemple obtenir des solutions en cherchant à associer d'autres propriétés relatives au choix des décalages, sous condition bien sûr que pour tout i, d_i différent de i, car alors les couleurs i et 0 occuperaient la même position.
Par exemple, si l'on décide de choisir des décalages d'abord tous pairs, puis tous impairs et vice versa.

décalages pairs puis impairs

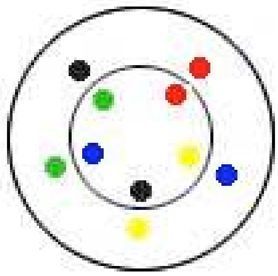
	J	V	B	R	N
g_i	0	1	2	3	4
d_i	0	2	4	1	3
p_i	0	4	3	2	1

(solution dans l'ordre inverse)

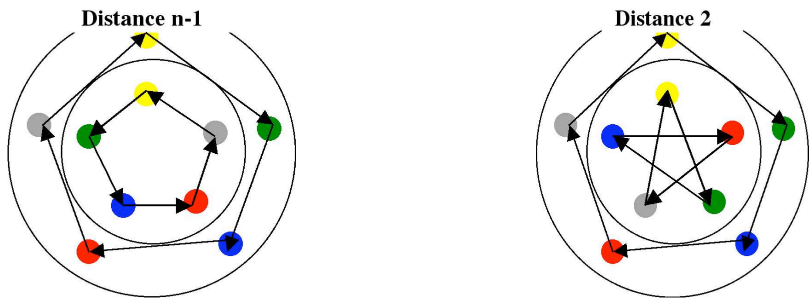


décalages impairs puis pairs

	R	B	J	V	N
g_i	0	1	2	3	4
d_i	0	3	1	4	2
p_i	0	3	1	4	2



Considérons maintenant **la distance entre deux couleurs intérieures i et j**, c'est à dire le nombre de crans qui les séparent sur le petit disque. En considérant les couleurs prises deux à deux consécutivement sur le disque extérieur, on peut alors se demander s'il est possible de trouver des solutions telles que les couleurs placées au centre soient à **distance constante**. Dans l'exemple que nous venons de donner, on peut, par exemple, trouver une solution à distance n-1=4 et une à distance 2!:



Nous savons qu'il ne peut exister de solution à distance 1 car alors les couleurs seraient toutes séparées d'un cran et seraient donc dans le même ordre qu'à l'extérieur. Mais, en existe t'il à distance 3!?

Traitons le cas général. Soient *n* le nombre de couleurs choisies et *d* une distance 'constante'. Sans rotation, *0* est en face de *0*, *1* en position *d*, …, *i* en position *d.i*
Pour que cela donne une solution, il faut que les *n* couleurs apparaissent à l'intérieur et que chacune soit dans une position distincte. En d'autres termes, il faut que pour deux couleurs *i* et *j* différentes on ait!:

d.i≠!d.j mod n. $(p_i \neq p_j)$ *(1)*

d.i!-i≠!d.j –j mod n pour tout i, j!, i≠!j $(di!\neq!d_j)$ *(2)*

La condition (1) est vérifiée pour tous i et j si et seulement si *d* et *n* sont premiers entre eux (ce qui est le cas lorsque *n* est impair et *d!=!2*).
Maintenant, pour vérifier la condition (2) et donc que la situation initiale n'a qu'un seul face-à-face, il est nécessaire et suffisant que!:

d.i!-i≠!d.j –j mod n pour tout i, j!, i≠!j

donc

(d-1) (i-j)≠!0 mod n pour tout i, j!, i≠!j

ce qui peut s'exprimer par!:

(d-1) et n premiers entre eux.

Afin de voir ce qui se passe lorsque l'on tourne, il suffit de remarquer que les décalages dans notre solution sont tous différents. En effet, pour une couleur intérieure fixée *i*, il faut tourner *–d.i* afin qu'elle soit face à la position *0*. On tourne encore *i* fois pour que la couleur *i* soit en face de la position *i*. On obtient donc les décalages *0, 1-d, …, i-d.i, …, n-1-d.(n-1)*. Comme *d-1* est premier avec *n*, on a bien que tous ces nombres sont différents.

Cette étude nous donne le résultat suivant!:

> ***$P^{(n,n)}_{dist}$! : Le problème (n,n) admet une solution à 'distance constante' d si et seulement si d et n sont premiers entre eux et d-1 et n sont premiers entre eux! .***

La résolution de ce cas comporte donc plusieurs niveaux :

- Donnée de solutions pour n impair éventuellement complétée par l'énoncé de méthodes de construction générale locales
- Conjecture de la généralisation des méthodes locales à tout n impair
- Preuve de cette généralisation
- Conjecture de l'inexistence de solution pour n pair
- Preuve de cette inexistence, par exhaustivité sur des petites valeurs de n ou, pour tout n, par l'utilisation de considérations sur les congruences et les sommations modulo n.

II-2 ETUDE DE (n,k), $1 \leq k \leq 2$

1- Cas (n,1)

La résolution de ce cas est triviale. Si l'on colorie le disque central d'une seule couleur on est assuré de n'avoir qu'un seul face à face, quelles que soient les couleurs choisies.

2- Cas (n,2)

La première étape de la résolution de ce problème consiste à choisir les deux couleurs centrales. Il apparaît rapidement une condition quant à ce choix:

> ***$P^{(n,2)}_{consec}$: les deux couleurs choisies ne doivent pas être consécutives, sinon, quel que soit n, il y aura soit aucun face à face soit deux simultanément.***

Une analyse par cas permet de montrer qu'il n'y a pas de solution pour *n!=!3,!5* et pour les courageux *n!=!7*. Par ailleurs, on exhibe facilement des solutions pour *n* pair. Cela peut conduire à la conjecture affirmant qu'il n'y a de solutions pour *(n,!2)* que si *n* est pair. Toutefois, si on étudie le cas *n!=!9*, après quelques essais, ceci aboutira à une solution. On aura ainsi mis en évidence un **contre-exemple** à cette conjecture et on sera amené à l'énoncé d'une nouvelle conjecture:

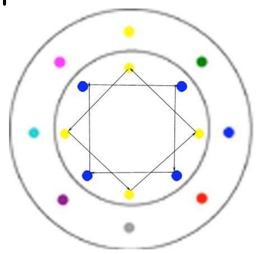
Conj$^{(n,2)}$: "(n,2) admet une solution si et seulement si n est non premier! ".

Afin de montrer **Conj$^{(n,2)}$**, supposons que les couleurs sont numérotées de 0 à n-1. Choisissons les couleurs 0 et c, 2≤ c≤ n-2. Pour remplir la condition de l'unique face à face, on doit placer une couleur en face à face (ex 0) et la même en face du secteur qui correspond à la deuxième couleur sur le disque extérieur (c). Compte tenu du fait que l'on tourne, **par forçage**, on doit en fait retrouver la couleur 0 dans toutes les positions de la forme a*c, a entier, 2≤ a*c≤ n-2. En effet, supposons qu'il existe r, tel que r soit le plus petit entier tel que r*c soit colorié en c (r≠1). Si on tourne la roue de (r-1)*c crans, on aura 0 en face de 0 et c en face de c, ce qui est contradictoire.
Une fois les deux couleurs choisies, il faut donc reporter leur décalage, que nous noterons dec_2, sans pour autant parcourir toutes les positions, sinon, on n'aura colorié tous les secteurs qu'avec une seule couleur.
Montrons qu'en fait:

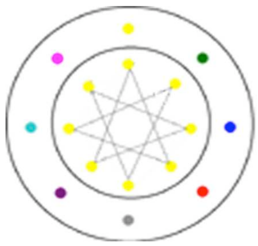
Conj$^{(n,2)}_{dec2}$ ': dec_2, le décalage entre les deux couleurs ne doit pas être premier avec n.

Nous allons pour cela utiliser un raisonnement par l'absurde.
Prenons deux couleurs 0 et c telles que g(c)= g(0) + dec2=dec2, 1<dec 2<n-1.
Supposons que dec2 et n soient premiers entre eux, dec2 n'est donc pas un diviseur de n et dec2 et n n'ont pas de diviseur en commun. Les multiples de dec2 hormis ceux de la forme α.dec2, $\alpha \in$ N, α≥1, sont donc tous les entiers compris entre 1 et n-1 modulo n. On va donc colorier avec la couleur 0 toutes les positions.
Exemples: n=8

ext 0 1 2 3 4 5 6 7
int 0 2 0 2 0 2 0 2
(dec_2=2)



ext 0 1 2 3 4 5 6 7
int 0 0 0 0 0 0 0 0
(dec_2=3)



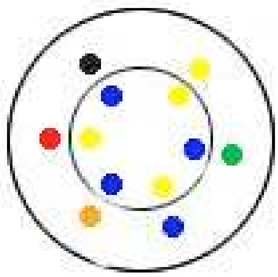
Deux sous cas sont donc à distinguer dans la résolution du sous problème (n,2).

• n non premier

Par ce biais plusieurs solutions peuvent être trouvées selon le choix des couleurs à placer. Leur décalage doit être un diviseur de n. Pour un n donné, on étudie donc quels sont ses diviseurs autres que 1 et lui-même. On place la couleur 0 en face à face puis on choisit la couleur c qui est espacée de 0 d'un nombre de crans égal à un de ces diviseurs. On place 0 en face de toutes les cases multiples du diviseur modulo n et c ailleurs.

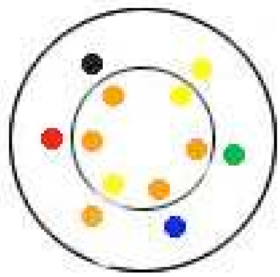
Exemple!: n=6

2 et 3 sont diviseurs de 6.



choix des couleurs 0 et 2.

La couleur 0 se retrouve aux positions 0, 2 et 4.



choix des couleurs 0 et 3.

La couleur 0 se retrouve aux positions 0 et 3

• n premier, n>2

Il n'y a pas de solution. Le fait que n soit premier entraîne que l'on ne peut pas lui trouver de diviseur. L'utilisation du forçage nous ramène à parcourir toutes les positions et ne nous permet donc pas de déterminer des positions relatives à la deuxième couleur.

Différents niveaux apparaissent donc dans la résolution de (n,2):

• Choix correct des deux couleurs centrales

• Données de solutions pour n non premier et éventuellement de méthodes de construction générale locales

• Conjecture de la généralisation des méthodes locales à tout n premier

• Preuve de cette généralisation

• Conjecture de l'inexistence de solution pour n premier

• Preuve de cette inexistence. Elle peut être établie en utilisant les congruences modulo n mais ce savoir mathématique n'est pas indispensable et peut apparaître de façon implicite via l'étude du report des décalages ou des arguments de type «!forçage!».

II-3 ETUDE DE (n,k), 2<k<n

Afin de ne pas alourdir la lecture, nous ne rentrerons pas dans une résolution détaillée de ces cas car ils ne seront pas exploités lors de nos expérimentations. Nous précisons juste que chacun d'entre eux admet une ou plusieurs solutions quelles que soient les valeurs de n et k. Vous trouverez en annexe 2 une démonstration détaillée qui a été fournie par un des participants, lors d'une université d'été *Animath* au cours de laquelle nous avons encadré un atelier autour des situations recherche.

II-4 RECAPITULATIF DES CONJECTURES ET REMARQUES ASSOCIEES AUX CAS (n,1), (n,2), et (n,n)

Dans ce paragraphe, nous allons récapituler les différentes remarques et conjectures inhérentes aux cas que nous avons présentés. Nous choisissons de ne parler que de conjectures et non de théorèmes car ce qui est premier lors de la résolution du problème est l'énoncé de la conjecture, sa preuve, le fait qu'elle devienne un théorème, ne venant donc que dans un deuxième temps.

Remarques générales!:

∀(n,k)! :

Rem_{coul}: la nature des couleurs n'a pas d'importance pour la résolution du problème seule leur position et le fait qu'elles soient distinctes importent.

Rem_{sens}: le sens de rotation de la roue n'a pas d'importance.

$Rem_{int-ext}$! : Le problème reste le même si on inverse le rôle respectif des positions extérieure et intérieure, en considérant alors que l'on fait tourner le disque extérieur et que le plus petit reste fixe.

(n,1)!:

$P^{(n,1)!}$: (n,1) admet une solution quel que soit n.

(n,n)!:

$Conj^{(n,n)}$: "(n, n) admet une solution si et seulement si n est impair!".

$P^{(n,n)!}{}_{dec}$: les décalages entre la position sur le disque intérieur et celle sur le disque extérieur doivent être distincts et sont compris entre 0 et n-1.!

$P^{(n,n)}{}_{dist}$! : Le problème (n,n) admet une solution à 'distance constante' d si et seulement si d et n sont premiers entre eux et d-1 et n sont premiers entre eux.

(n,2)!:

$Conj^{(n,2)}$: "(n,2) admet une solution si et seulement si n est non premier!"
$P^{(n,2)}_{consec}$: les deux couleurs choisies ne doivent pas être consécutives, sinon, quel que soit n, il y aura soit aucun face à face soit deux simultanément.
$Conj^{(n,2)}_{dec2}$': dec_2, le décalage entre les deux couleurs choisies doit être un diviseur de n, modulo n.

III- ANALYSE DIDACTIQUE DU PROBLEME MATHEMATIQUE! : LES STRATEGIES DE RECHERCHE ENVISAGEABLES

Maintenant imaginez que vous ayez eu à résoudre le problème proposé, sur **support papier-crayon** toujours, sous quel angle l'auriez-vous abordé ? Comment l'auriez-vous représenté ?
On peut choisir de procéder au hasard, par essais et erreurs, mais nous pensons que différents éléments peuvent suggérer des stratégies de recherche. Précisons.
Tout d'abord, on peut se centrer sur l'ordre dans lequel sont réparties les couleurs et chercher à disposer celles du centre en conservant l'ordonnancement.
Ainsi, l'aspect circulaire de la roue peut amener à chercher des solutions par le biais de considérations liées à la symétrie.
Le codage des couleurs par le biais de nombres est susceptible d'entraîner vers une recherche de dispositions à travers des propriétés arithmétiques.
En fait, nous pensons qu'en plus d'une étude des décalages, quatre points de vue sur le problème peuvent guider la recherche de solution.

- le point de vue «!positionnel!» ou lié à l'ordre
- le point de vue géométrique
- le point de vue arithmétique
- le point de vue axé sur la théorie des graphes (implicitement ou non)

Ces quatre points de vue sont à mettre en relation avec les choix quant à la représentation du problème et au codage des données. Selon les cas étudiés, ils ne sont pas équivalents. A chacun d'eux vont correspondre des choix et des arguments qui peuvent conduire le joueur à des stratégies de recherche différentes et finalement à certains résultats plutôt que d'autres, la mise en valeur de propriétés pouvant inciter à une généralisation et à la recherche de solution à travers ces propriétés.
Bien évidemment, ils peuvent cohabiter et être adoptés à tour de rôle ou être mêlés selon les joueurs.

Nous allons maintenant chercher à identifier quels peuvent être leurs apports et les résultats auxquels ils permettent d'aboutir selon les cas étudiés.

III-1 S_{ORDRE} : RECHERCHE PAR LE BIAIS DE L'ORDRE

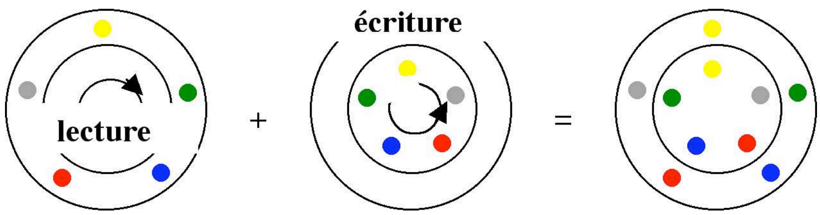
1- Etude de (n,n)

On peut, dans un premier temps, chercher comment répartir ces n couleurs en face des n couleurs initiales, en conservant leur ordre initial. Alors, deux dispositions peuvent être testées:

- dans le même ordre que les couleurs du disque extérieur, disposition qui n'est pas valide
- dans l'ordre inverse, disposition qui est gagnante si n est impair.

Nous aboutissons ainsi à la méthode de construction suivante :

> ***$M_{ordre}^{(n,n)}$: Pour déterminer une solution de (n,n) lorsque n est impair, on peut donc écrire les couleurs du disque intérieur dans le sens (de rotation) contraire aux aiguilles d'une montre, en lisant les couleurs externes dans le sens des aiguilles d'une montre.***



Pour se convaincre que cette méthode décrit bien une solution, il suffit d'observer d'une part que le procédé de construction de la solution est invariant par rotation et d'autre part que pour chaque couleur, il existe une rotation créant le face-à-face désiré, à chaque couleur étant associé un décalage différent, comme nous l'avons déjà relevé dans la résolution du problème.

2- Etude de (n,2)

La stratégie précédente n'est plus valide pour l'étude du cas (n,2) du fait qu'il faille choisir tout d'abord les deux couleurs centrales. Si l'on choisit deux couleurs consécutives et qu'on les place soit dans le même ordre, soit dans l'ordre inverse, elle peut tout de même amener à énoncer la propriété :

> ***$P_{consec}^{(n,2)}$: les deux couleurs choisies ne doivent pas être consécutives, sinon il y aura soit aucun face à face soit deux simultanément, quel que soit n.***

S_{ordre}, stratégie liée à l'ordre, ne permet donc d'exhiber qu'une seule solution quel que soit n impair pour le cas (n,n) ainsi que l'énoncé d'une méthode de construction.

Elle ne fonctionne pas si n est pair et ne fournit pas d'arguments pour prouver l'inexistence de solution dans ce cas.

III-2 $S_{SYM!}$: RECHERCHE PAR LE BIAIS D'UNE PROPRIETE GEOMETRIQUE, LA SYMETRIE

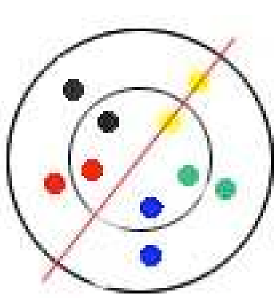
Le point de vue géométrique est lié à la situation concrète évoquée par l'énoncé du problème. Il s'appuie sur une représentation circulaire qui reprend l'idée des deux disques.
Les arguments utilisés sont basés sur la configuration du cercle et sur le fait que l'on puisse tourner dans les deux sens. Ils sont liés à des considérations associées à la symétrie axiale.

1- Etude de (n,n)

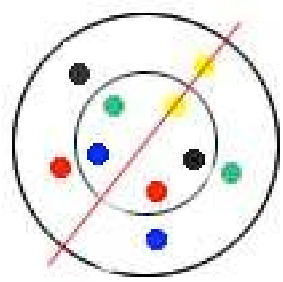
Cela permet d'aboutir à la méthode de construction suivante!:

> ***M_{sym} $^{(n,n)!}$: On dispose dans un premier temps les pions intérieurs en face de ceux qui leur correspondent sur le disque extérieur. Ils sont donc tous en face à face. On détermine ensuite les deux pions qui rempliront la condition de l'unique face à face dans la première position du petit disque. L'axe de symétrie passera par ces deux pions. On déplace alors les autres pions intérieurs symétriquement par rapport à cet axe.***

Dans notre exemple, les jaunes sont placés sur cet axe et sont donc invariants, les autres couleurs sont «!inversées!»!:



placer tous les pions en face à face

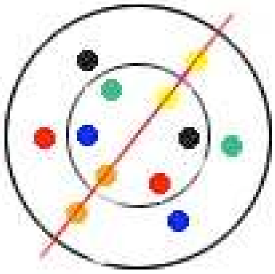


les «!inverser!» par rapport à l'axe.

La solution obtenue par le biais de cette méthode de construction est équivalente à celle obtenue par le biais de S_{ordre}.

Dans le cas n pair, la symétrie ne fonctionne plus car deux sommets sont sur l'axe et on ne peut parvenir par ce biais à aboutir à des résultats probants.

Par exemple, pour n=6 :



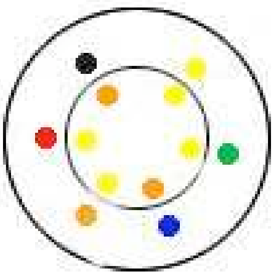
Le point de vue géométrique associé à la symétrie permet donc d'obtenir une seule solution quel que soit n impair, la même que celle exhibée par le biais de considérations liées à l'ordre. Il ne peut être réinvesti lorsque n est pair mais il ne fournit pas d'arguments permettant de montrer qu'il n'y a pas de solutions pour (n,n) dans ce cas.

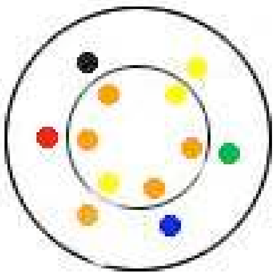
2- Etude de (n,2)

La recherche de solutions à travers l'utilisation d'arguments liés à la symétrie peut amener dans un premier temps le joueur à étudier le cas où n est pair et à choisir les couleurs diamétralement opposées. Des lors, afin de répondre à la contrainte de l'unique face à face, il apparaît nécessaire de placer la même couleur dans deux secteurs diamétralement opposés. On parvient donc à la méthode de construction suivante :

> ***$M_{sym\ diam}^{(n,2)}$: choisir deux couleurs diamétralement opposées sur le disque extérieur. Les placer telles que l'on ait toujours la même couleur dans deux positions diamétralement opposées.***

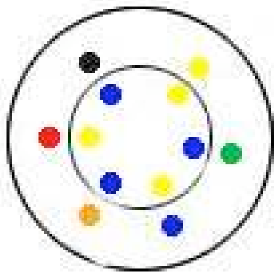
Alors, à partir du choix des deux couleurs, plusieurs solutions peuvent être trouvées.
Pour n=6, par exemple



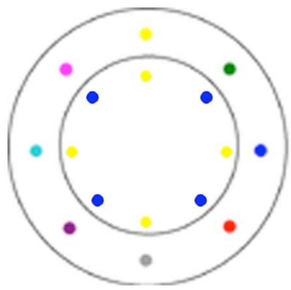


Une fois ces solutions obtenues, on peut chercher à réinvestir cette observation pour étudier s'il existe d'autres solutions si les deux couleurs choisies sont disposées différemment. Alors, selon les cas étudiés, les résultats obtenus peuvent conforter les observations faites ou les remettre en cause.

Si les couleurs sont choisies implicitement telles que leur décalage soit un multiple de n (par exemple, si l'on étudie n=6, choix des couleurs 0 et 2) alors en plaçant la première en face à face et en utilisant des arguments **de forçage** du type "si je mets la couleur 0 là, je devrais la mettre en face de la couleur 2 extérieure et, pour tenir compte de la rotation, en face de la couleur 4!; la couleur 2 sera alors placée dans les positions 1, 3 et 5…", on peut obtenir d'autres solutions.



n=6

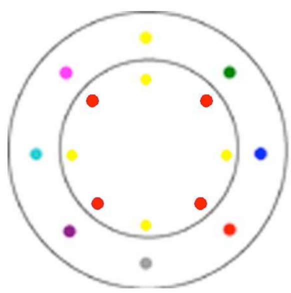


n=8

On retrouve dans ces solutions les propriétés de symétrie déjà évoquées et une disposition alternée des deux couleurs qui peut inciter à une généralisation de la méthode:

> ***$M_{sym,\ alternées}^{(n,2)}$: "Je choisis deux couleurs séparées de m crans, je les place alternées sur le disque. Je dois avoir la même couleur sur deux secteurs diamétralement opposés."***

Si les couleurs sont choisies telles que leur décalage n'est pas un diviseur de n, alors si on se cantonne à de considérations de symétrie, on peut aboutir à des solutions qui répondent au principe de symétrie mais ne sont pas valides.
Par exemple pour n=8:



Enfin, le fait d'associer la construction de solutions à des propriétés de symétrie peut amener à une conjecture erronée!: considérer qu'il n'y a pas de solution pour le cas n impair au lieu de n premier. Cela d'autant plus que si l'on cherche à la vérifier pour des petites valeurs de n, 3, 5, 7 étant premiers, il faut aller jusqu'à 9 pour trouver le premier impair qui ne soit pas premier.

Cette stratégie de recherche permet donc d'obtenir plusieurs solutions si implicitement le décalage entre les deux couleurs choisies, dec_2, est un diviseur de n, particulièrement si les couleurs sont choisies diamétralement opposées.
La résolution de ce cas ne nécessite donc pas l'utilisation de savoirs mathématiques particuliers. Une méthode générale de construction peut être établie suite à la généralisation des observations faites sur des cas particuliers qui peuvent conduire à identifier les contraintes. Elle amène aussi à la conjecture de l'inexistence de solution si n est impair, voire si n est premier si le cas n=9 a été traité, et fournit des arguments de preuve dans la mesure où elle s'appuie sur une construction par forçage. On peut alors disposer d'un algorithme de construction par forçage dit **algorithme glouton** dont nous rappelons les caractéristiques:

> *Un algorithme glouton fait toujours le choix qui semble le meilleur sur le moment. Autrement dit, il fait un choix optimal localement, dans l'espoir que ce choix mènera à la solution optimale globalement. A chaque étape, les choix faits lors des étapes précédentes ne sont pas remis en cause.*
>
> *Les algorithmes gloutons n'aboutissent pas toujours à des solutions optimales, mais la méthode gloutonne est très puissante et fonctionne correctement pour des problèmes variés.*

Dès lors que la situation nous impose de mettre un pion forcément à une position déterminée, une fois toutes les contraintes remplies, on peut montrer qu'il n'est pas possible, lorsque n est premier, de trouver deux couleurs qui satisfassent à la situation proposée.

III-3 S_{arith}: RECHERCHE PAR LE BIAIS D'UNE PROPRIETE ARITHMETIQUE

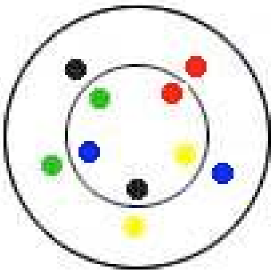
Si le codage des couleurs par le biais de nombres a été introduit, une stratégie de recherche peut s'appuyer sur la recherche de solutions à travers les propriétés arithmétiques des nombres, en particulier des considérations liées à la parité.

1- Etude de (n,n)

On peut essayer par exemple de placer les couleurs en fonction de leur parité, en regroupant les pairs d'une part et les impairs d'autre part. On parvient à la méthode de construction suivante!:

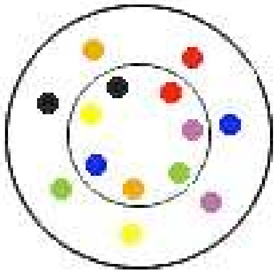
> ***$M_{arith!}^{(n,n)}$: regrouper les pairs dans l'ordre croissant (respectivement décroissant) d'une part et les impairs dans l'ordre croissant (respectivement décroissant) d'autre part.***

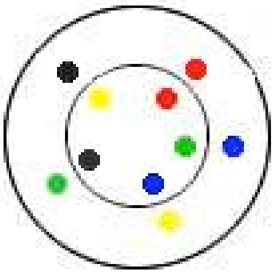
On aboutit ainsi par exemple à!:



n=5
ext 0 1 2 3 4
int 0 2 4 1 3
d_i 0 3 1 4 2

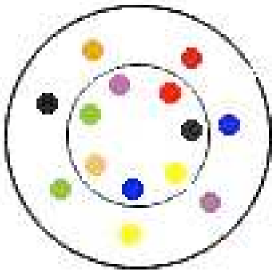
n=7
ext 0 1 2 3 4 5 6
int 0 2 4 6 1 3 5
d_i 0 4 1 5 2 6 3





ext 0 1 2 3 4
int 0 3 1 4 2
d_i 0 4 3 2 1

ext 0 1 2 3 4 5 6
int 0 5 3 1 6 4 2
d_i 0 5 3 1 6 4 2



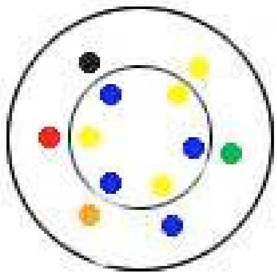
2- Etude de (n,2)

On peut chercher à identifier les deux couleurs à choisir en fonction de leur parité. Toutefois, là aussi, l'obtention de solution dépendra des valeurs de n étudiées.

Si les couleurs sont choisies de même parité, alors leur décalage sera un nombre pair et l'on pourra trouver une disposition gagnante si n est pair.
Par exemple, pour n=6:

ext 0 1 2 3 4 5
int 0 2 0 2 0 2

(même parité)

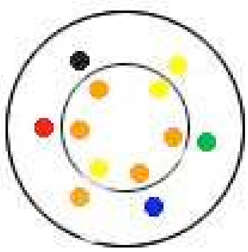


On parvient donc à la méthode de construction!:

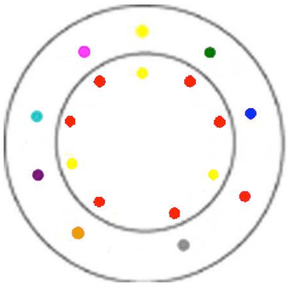
$M_{arith}^{(n,2)}$! : pour n pair, choisir deux couleurs de même parité.

Si n n'est pas pair, cela se complique. Si les couleurs sont de parités différentes alors leur décalage aura pour valeurs 3, 5, 7,… et on ne pourra trouver de solutions que si n est un multiple de ce décalage, modulo n, comme l'illlustrent ces quelques exemples;

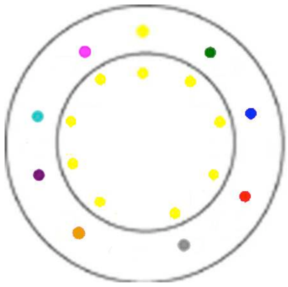
n=6 :
dec_2=3, diviseur de 6



n=9 :



couleurs 0 et 3, dec_2=3, diviseur de 9



couleurs 0 et 5, dec_2=5, 5 non diviseurs de 9
par forçage, tous les pions sont de la couleur 0

Cette stratégie permet donc d'obtenir toutes les solutions lorsque n est pair car alors les deux couleurs choisies seront décalées d'un nombre pair, dec_2 sera donc un diviseur de n, modulo n.
Si n est impair et premier, que les deux couleurs soient choisies de même parité ou pas, cette méthode n'aboutit à aucune solution.
Si n est impair et non premier, elle ne fonctionne pas à tous les coups. Elle permet de trouver des solutions si les couleurs sont de parités différentes seulement dans le cas où les deux couleurs sont choisies telles que dec_2 soit un diviseur de n, modulo n.

Après plusieurs tentatives, du fait de ces dissemblances, S_{arith} peut amener à faire le lien entre, d'une part le fait d'être de parités différentes, d'autre part le décalage que cette propriété induit entre les couleurs et enfin, les propriétés arithmétiques de n (parité, diviseurs). Dans ces conditions, S_{arith} peut conduire à énoncer la conjecture :

> ***$Conj^{(n,2)}$' : le décalage entre les deux couleurs doit être un diviseur de n, modulo n.***

III-4 S_{graphe} : RECHERCHE PAR LE BIAIS DE GRAPHES

Cette stratégie s'appuie de façon implicite ou pas sur des éléments de la théorie des graphes. Rappelons à ce propos quelques définitions :

(1)"En théorie des graphes, un graphe est intuitivement la donnée d'un ensemble de "points" (sommets) et d'un ensemble de "liens" chaque lien étant établi entre deux points distincts ou non. Selon leurs natures les liens se

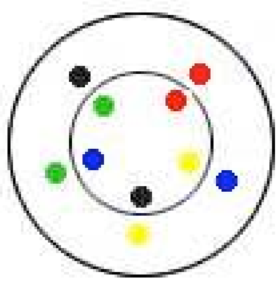
schématisent par une flèche ou par un trait (arête), reliant le couple de sommets; d'où les notions de graphe orienté et de graphe non orienté. (…)"(*Dictionnaire des Mathématiques* de A.BOUVIER & M.GEORGE & F.LE LIONNAIS)
(2) "Une suite d'arêtes consécutives s'appelle une **chaîne**. Une chaîne **simple** utilise une seule fois la même arête. Une chaîne **élémentaire** ne repasse pas deux fois par le même sommet."
(3) "Un cycle est une chaîne telle que :
1) le même arc ne figure pas deux fois dans la même séquence;
2) les deux sommets aux extrémités de la chaîne coïncident.
(4) "Un cycle **hamiltonien** passe une fois et une seule par chaque sommet."

Cependant, S_{graphe} peut être mise en oeuvre sans que ces éléments théoriques soient connus.

1- Etude de (n,n)

Cette approche peut être suscitée par l'étude du cas n=5 et le tracé du pentagone croisé en forme d'étoile!:

tracé du pentagone croisé



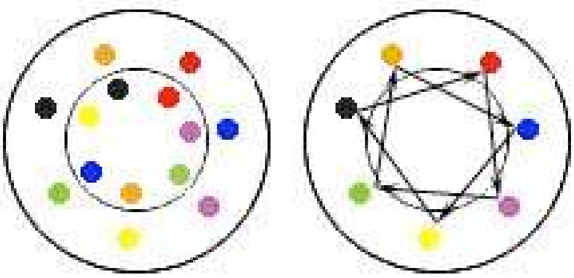
solution associée

Dès lors, on cherche!les cycles hamiltoniens tels que chaque arrête représente la relation "la couleur qui doit être consécutive" et tels que le ième (i≠1) sommet ne soit pas en ième position sur le disque extérieur.
La recherche de ces cycles peut se faire implicitement à travers celle de polygones réguliers convexes à n sommets inscrits dans le cercle. En considérant les n points répartis sur le cercle, on cherche à tracer un polygone régulier non convexe à n sommets. L'ordre de placement des couleurs est alors indiqué par les arêtes du polygone. Si une arête relie par exemple la couleur 1 à la 5 alors on placera les couleurs 1 et 5 consécutivement. Ainsi, on applique la méthode suivante!:

M_{graphe} $^{(n,n)}$! : rechercher les polygones réguliers convexes à n sommets inscrits dans le cercle. Chaque arrête représente la relation "la couleur qui doit être consécutive sur le petit disque". Le ième sommet (i≠1) ne doit pas être en ième position sur le disque extérieur.

En étudiant les polygones qui peuvent être tracés si l'on prend un point sur deux ou un point sur trois, sur quatre, etc..., on peut obtenir plusieurs solutions à distance constante pour n impair.
Exemples!: n=7

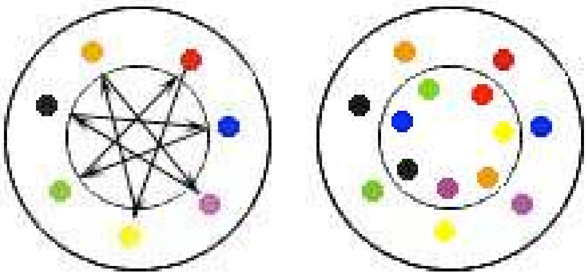
Sommets de 2 en 2



(7,2) premier[12], (7,1) premier

ext 0 1 2 3 4 5 6
int 0 2 4 6 1 3 5
d_i 0 4 1 5 2 6 3

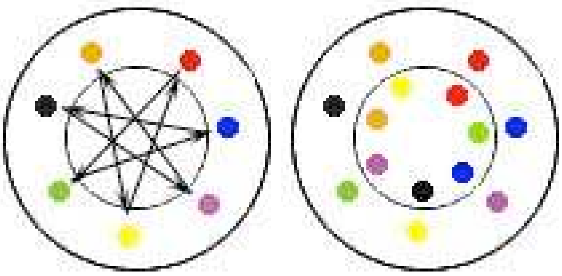
Sommets de 3 en 3



(7,3) premier, (7,2) premier

ext 0 1 2 3 4 5 6
int 0 3 6 2 5 1 4
d_i 0 3 6 2 5 1 4

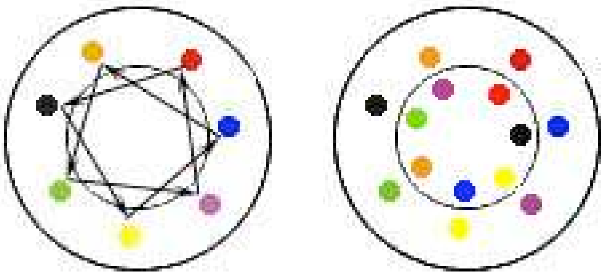
Sommets de 4 en 4



(7,4) premier, (7,3) premier

ext 0 1 2 3 4 5 6
int 0 4 1 5 2 6 3
d_i 0 6 5 4 3 2 1

Sommets de 5 en 5



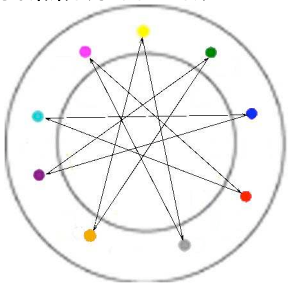
(7,5) premier, (7,4) premier

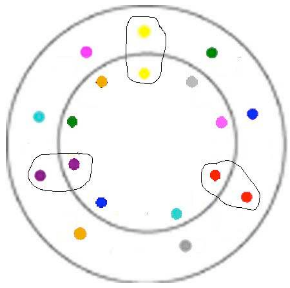
ext 0 1 2 3 4 5 6
int 0 5 3 1 6 4 2
d_i 0 5 3 1 6 4 2

Toutefois, comme nous l'avons souligné dans la résolution du problème, cela ne permet d'aboutir à des solutions que si et seulement si la distance constante choisie d est telle que d et n soient premiers entre eux et d-1 et n soient premiers entre eux.
La possibilité de tracé d'un polygone n'implique donc pas que la répartition qu'il induit soit valable. Il est nécessaire de vérifier si le polygone ainsi obtenu remplit bien la condition de l'unique face à face.
Par exemple pour n=9, le polygone suivant n'est pas valide :

[12] *nous noterons par la suite (a,b) premier le fait que a et b soient premiers entre eux.*

Sommets de 4 en 4





3 faces à faces

En effet, on a (9,4) premier, mais (9,3) non premier.

Lorsque n est pair, on ne parvient pas à trouver de polygones convenables. Si l'on prend les sommets de p en p avec p diviseur de n, on retombe sur le 1^er^ sommet sans avoir parcouru tous les points. Si p et n sont premiers, on ne remplit pas la condition " le ième(i≠1) sommet ne soit pas en ième position sur le disque extérieur".

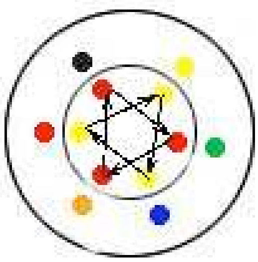
Ainsi, cette stratégie peut permettre d'exhiber plusieurs solutions pour n impair, l'existence du polygone apparaissant comme une condition nécessaire à l'obtention d'une solution à distance constante mais pas suffisante car elle ne vérifie pas intrésèquement la deuxième condition de la proposition!$P^{(n,n)}_{dist}$! : (d-1,n) doivent être premiers entre eux.

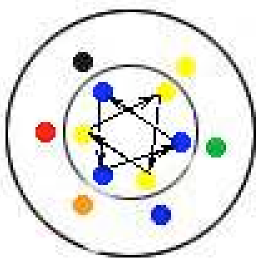
2- Etude de (n,2)

L'étude de cas particuliers peut amener par le biais de considérations géométriques à chercher s'il est possible de trouver deux polygones réguliers inscrits dans le cercle tels que leurs sommets respectifs soient associés à une des deux couleurs. Une fois les polygones trouvés, on colorie tous les sommets de l'un avec une des couleurs par lesquelles passent le polygone (par exemple jaune) et les sommets de l'autre avec une des autres couleurs parmi celles dont sont coloriés les autres sommets du premier polygone (exemple!: rouge ou bleu pour n=6, bleu, gris, turquoise pour n=8)

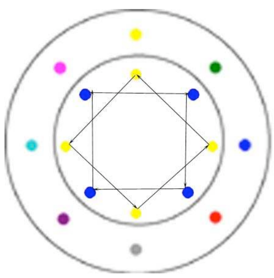
Par exemple

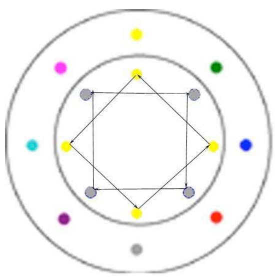
n=6

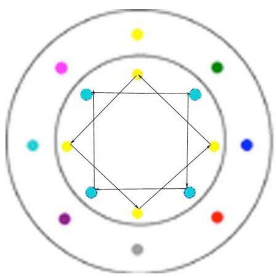




n=8







On retrouve là aussi de façon implicite des éléments de la théorie des graphes. Il s'agit de trouver des sous-cycles basés sur la relation : "être de la même couleur", même s'il n'est pas nécessaire que ces considérations apparaissent. La méthode associée sera donc!:

> ***M_{graphe} $^{(n,2)!}$: chercher deux polygones réguliers inscrits dans le cercle.***
> ***Soit un de ces polygones. Soit une des couleurs de ses sommets. Colorier tous les pions du petit disque correspondants avec les sommets du polygone de cette couleur.***
> ***Soit une autre des couleurs de ses sommets. Colorier les pions du petit disque correspondants avec les sommets du deuxième polygone avec cette couleur.***

Dans le cas où n est non premier, on peut parvenir à trouver des solutions où les deux couleurs sont alternées sur le disque central. Toutefois, l'existence de deux polygones réguliers n'est qu'une condition nécessaire et n'est pas donc suffisante pour assurer de la validité d'une disposition.
Dans le cas où n est premier, on ne peut parvenir à construire les deux polygones réguliers, ce qui peut orienter vers la conjecture de l'inexistence de solution mais ne permet pas de conclure, étant donné que toutes les contraintes de l'énoncé n'ont pas été traduites.

Ainsi, même si aucune de ces stratégies ne correspondent pas à celles qui aboutissent à une méthode de construction générale de toutes les solutions quand il en existe ou à la preuve de leur inexistence lorsqu'il n'en existe pas, nous pensons qu'elles peuvent émerger lors de la recherche, en tant que stratégies initiales.
De plus, du fait qu'elles permettent d'aboutir à une ou plusieurs solutions, nous faisons l'hypothèse qu'elles peuvent être utilisées au-delà de cette première approche. Il est donc important d'avoir à l'esprit leur domaine de validité.

1ère PARTIE

SITUATIONS RECHERCHE LUDIQUES EN CLASSE

DEVOLUTION, APPRENTISSAGES ET GESTION

Chapitre I.1

L'HEURISTIQUE DANS L'INSTITUTION SCOLAIRE

> *«!Un élève ne fait pas de mathématiques s'il ne se pose et ne résout pas de problèmes. Tout le monde est d'accord là-dessus. Les difficultés commencent lorsqu'il s'agit de savoir quels problèmes il doit se poser, qui les pose, et comment.»*
> [Brousseau, 1998, p.115]

Dans ce chapitre, nous cherchons à définir quelle peut être la place accordée à la l'activité de recherche en mathématiques au sein de l'instituton scolaire française. Pour cette étude, nous nous sommes appuyée sur *L'approche écologique* développée dans le cadre de *la théorie anthropologique du didactique* par Y.Chevallard [Chevallard, 1992]. Cette théorie, en définissant *l'habitat* et *la niche écologique*, nous apporte des outils permettant de répondre à nos questions sur la *vie* de l'heuristique en mathématiques dans le système scolaire français:

> *«!Pour le dire en langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte l'adresse, le lieu de résidence de l'organisme. La niche ce sont les fonctions que l'organisme y remplit : c'est en quelque façon la profession qu'il y exerce!»*.[Chevallard, 1994]

Dans un premier temps, nous avons procédé à une étude des programmes scolaires du primaire, du collège et du lycée afin de déterminer quels pouvaient y être l'habitat et la niche accordés à l'heuristique en mathématiques. Nous avons ensuite cherché quels outils et méthodes pouvaient être suggérés au sein des instructions officielles pour permettre sa pratique.

Nous nous sommes centrée, ensuite, sur l'enseignement des mathématiques en primaire et avons étudié certains des manuels proposés en cycle 3, reprenant à notre compte la position adoptée par D.Mensouri :

«!Les manuels constituent aussi une réalisation effective et "objectivée" des enseignements donnés en classe. Réalisation soumise au regard et au jugement public, et qui se veut représentative de la réalité de la classe.» [Mensouri, 1994]

Enfin, l'ensemble de ces études, nous amènera à émettre des hypothèses sur le rapport de l'institution scolaire vis-à-vis des mathématiques, c'est-à-dire!:

*«!On dira qu'un objet O existe pour I, une institution, s'il existe un objet, que je note $R_I(O)$ que j'appelle **le rapport institutionnel** de I à O. (...) A chaque institution I est associé un ensemble d'objets, O_I, dit objets institutionnels (pour I), qui est l'ensemble des objets que connaît I, c'est-à-dire pour lesquels il existe un rapport institutionnel $R_I(O)$.»*[Chevallard, 1992]

I- L'HEURISTIQUE DANS LES PROGRAMMES SCOLAIRES

I-1 BREVE PRESENTATION DE L'EVOLUTION DES PROGRAMMES DE PRIMAIRE

Afin de montrer l'évolution de la place accordée à l'heuristique dans les programmes scolaires, nous nous sommes centrée sur les programmes de primaire de 1945 à nos jours. Nous avons choisi de ne considérer que les programmes de ce niveau car jusqu'en 1975, la scolarité était obligatoire pour tous jusqu'au certificat d'étude, le collège était donc avant tout réservé à un public favorisé.
Pour cette présentation, nous nous sommes appuyée sur la description qui en est faite dans l'introduction des ouvrages *ERMEL*, "*Apprentissages numériques et résolution de problèmes*" que nous présenterons plus en détails à la fin de ce chapitre et nous avons regardé plus particulièrement comment étaient considérés les problèmes à chaque époque.

1- Dans les programmes de 1945

Le problème était alors avant tout vu comme un outil de contrôle des connaissances acquises. Les auteurs des programmes avaient mis l'accent sur les problèmes d'application, en effet, ils pensaient, selon les auteurs d'*ERMEL* que

«!Pour résoudre un problème, il est nécessaire d'avoir abordé auparavant toutes les connaissances qui permettent de le résoudre, car domine alors l'idée que l'on apprend en passant du simple au complexe. L'étude et la

répétition de" problèmes- types" jouent un grand rôle.!» [ERMEL, 1997, p45]

Même si ce texte date de 60 ans, nous pouvons remarquer que cette position institutionnelle existe encore aujourd'hui. De nombreux professeurs, par exemple, ne se permettraient pas de poser un problème à leurs élèves si ces derniers ne disposent de toutes les connaissances requises pour le résoudre.

2- Dans les programmes de 1970

Les années 70 sont marquées par l'influence des mathématiques dites "modernes" et l'étude des structures mathématiques.

> *«!Les élèves doivent apprendre à passer d'une situation à un schéma mathématique qui la décrit et inversement. Un bon exercice consiste à imaginer des situations décrites par un schéma donné.!»* [13]

Ainsi, résoudre un problème revenait souvent à reconnaître ou identifier dans des situations simples le modèle mathématique sous-jacent.

3- L'évolution des programmes de 1978-1980

Dès lors, apparaît une prise en compte du fait que les élèves ont des difficultés à donner du sens à des connaissances, souvent étudiées d'abord pour elles-mêmes:

> *«!Les élèves d'aujourd'hui savent aussi bien faire des opérations qu'il y a vingt ans et ont de plus la maîtrise d'outils que ne connaissaient pas leurs aînés... en revanche les élèves du CE2 au CM2 ont des difficultés pour résoudre des problèmes... Cette faible disponibilité d'outils, par ailleurs bien maîtrisés, constitue l'information la plus claire des résultats [de l'enquête]!.»* [14]

Suite à cette enquête, l'institution scolaire a peu à peu pris conscience du fait qu'il ne suffit pas de disposer d'outils pour savoir s'en servir. Une rupture par rapport aux programmes et méthodes d'apprentissage précédents a commencé à s'opérer. L'enseignement des mathématiques s'est alors orienté vers la nécessité de s'appuyer sur les connaissances des élèves, d'axer sur les démarches personnelles de résolution plus que sur les réponses, de permettre la validation par l'élève lui-même.
Des situations de recherche sont progressivement apparues dans l'enseignement, au cours desquelles les élèves devaient sélectionner les données utiles, traiter, organiser

[13] *Programme de 1970*

[14] *Conclusion de "L'enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire" INRP, 1978*

les informations, formuler des hypothèses... Les auteurs d'*ERMEL* précisent que «!*la nécessité est reconnue d'un apprentissage spécifique d'ordre méthodologique (se poser des questions, mettre en relation des questions et des données, analyser une situation, trier des données, valider et communiquer) mais il n'y a pas, à proprement parler, d'enseignement organisé sur ces objectifs d'apprentissage à la résolution de problèmes!.»*

4- Les programmes de 1985 à 2002

Au cours de ces dernières années, la rupture insufflée par les programmes de 1970 s'est accentuée. L'importance des problèmes et de leur résolution est de plus en plus soulignée. Par exemple, en 1985 apparaît dans les programmes le terme "problème de recherche", les instructions officielles de 1995 puis celles de 2002 pour les cycles 2 et 3 de l'école primaire précisent que : *«!l'essentiel du programme réside dans l'orientation pragmatique d'un enseignement des mathématiques centré sur la résolution de problèmes.!»*
Plusieurs compétences relatives à la résolution de problèmes sont également mises en avant comme nous allons le voir à travers l'étude des programmes par niveaux.

I-2 ETUDE DES PROGRAMMES PAR NIVEAUX

1- A l'école primaire! : méthodes spécifiques versus savoirs transversaux

Nous concentrerons notre étude sur les cycles 2 et 3, car même si quelques éléments relatifs à la résolution de problèmes sont énoncés pour le cycle 1, on peut considérer, comme cela est précisé dans les programmes officiels, que *«c'est à partir du cycle 2 que l'on rentre véritablement dans l'univers mathématique.»*[15]
Que ce soit en 1995 ou en 2002, l'activité «résolution de problèmes» est identifiée comme un élément important dans l'apprentissage de connaissances mathématiques aux cycles 2 et 3.
Par exemple, il est indiqué en 1995 que:

> *«!Le développement des capacités à chercher, abstraire, raisonner, prouver se poursuit. (...) Il est important que dès le cycle 2, l'élève soit confronté à de véritables problèmes de recherche (qu'il n'a donc pas appris à résoudre) et pour lesquels il peut mettre en oeuvre son esprit créatif et son imagination pour l'élaboration de solutions originales.!»*

et en 2002[16] :

---

[15] *Qu'apprend-on à l'école élémentaire?, 2002, p 27 et BO HS n°1, 14/02/02*
[16] *documents d'application des programmes 2002, Maths Cycle 2 p7.*

«!Dès le cycle 2, les élèves doivent prendre conscience du fait que résoudre un problème ne revient pas à trouver, tout de suite, les calculs à effectuer pour répondre à la question posée. Une élaboration est, en général, nécessaire, faite d'étapes ou d'essais plus ou moins organisés.!»

«!Ils peuvent être confrontés à de ***véritables problèmes de recherche***[17] *pour lesquels ils ne disposent pas de solution éprouvée et pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles. C'est alors l'activité même de résolution de problèmes qui est privilégiée dans le but de développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences méthodologiques:*

- *émettre des hypothèses et les tester*
- *faire et gérer des essais successifs*
- *élaborer une solution originale et en éprouver la validité*
- *argumenter*

Ces situations peuvent enrichir leur représentation des mathématiques, développer leur imagination et leur désir de chercher, leurs capacités de résolution et la confiance qu'ils peuvent voir dans leurs propres moyens.!»

Il est également spécifié[18] au cycle 3 que *«!la confrontation à de* ***véritables situations de recherche***[17] *pour lesquelles différents types de démarches sont possibles favorise l'initiative, l'imagination et l'autonomie des élèves.!»*

Les programmes de 2002 sont dans la continuation de ceux de 1995, l'activité «résolution de problèmes» y est vue comme une initiation à la recherche en mathématiques, s'appuyant sur l'esprit créatif, l'imagination et la mise en oeuvre d'une démarche de recherche.
Toutefois, il apparaît une différence notoire entre les deux programmes. Dans les programmes de 1995, les compétences relatives à l'activité «résolution de problèmes» sont listées dans une rubrique à part alors qu'elles font partie des compétences générales propres aux mathématiques dans ceux de 2002.
Ainsi, on trouve par exemple au cycle 2 en 1995:

«!Résolution de problèmes:

À l'issue de ce cycle, l'élève doit pouvoir :

- *analyser des problèmes de recherche simples*
- *choisir les données nécessaires à la résolution*
- *mobiliser les connaissances déjà acquises*

---

[17] *C'est moi qui souligne*
[18] *documents d'application des programmes 2002, Maths Cycle 3, p5.*

- exposer clairement des résultats!»

et au cycle 3:

«!Dans des situations variées, l'élève pourra:

- reconnaître, trier, organiser et traiter les données utiles à la résolution d'un problème

- formuler et communiquer sa démarche et ses résultats

- argumenter à propos de la validité d'une solution

- élaborer une démarche originale dans un véritable problème de recherche, c'est-à-dire un problème pour lequel on ne dispose d'aucune solution déjà éprouvée

- élaborer un questionnement à partir d'un ensemble de données.!»

Alors que dans les instructions officielles de 2002, figure, pour le cycle 2[19]:

«!Des compétences générales sont à l'œuvre dans l'ensemble des activités mathématiques et doivent être acquises en fin de cycle:

- s'engager dans une procédure personnelle de résolution et la mener à son terme

- rendre compte oralement de la démarche utilisée, en s'appuyant éventuellement sur sa "feuille de recherche" ;

- admettre qu'il existe d'autres procédures que celle qu'on a soi-même élaborée et essayer de les comprendre ;

- rédiger une réponse à la question posée ;

- identifier des erreurs dans une solution.!»

et pour le cycle 3:

«! utiliser ses connaissances pour traiter des problèmes ;

- chercher et produire une solution originale dans un problème de recherche

- mettre en œuvre un raisonnement, articuler les différentes étapes d'une solution ;

- formuler et communiquer sa démarche et ses résultats par écrit et les exposer oralement ;

- contrôler et discuter la pertinence ou la vraisemblance d'une solution;

- identifier des erreurs dans une solution en distinguant celles qui sont relatives au choix d'une procédure de celles qui interviennent dans sa mise en œuvre ;

---

[19] BO 14/02/02

- argumenter à propos de la validité d'une solution produite par soi-même ou par un camarade (ceci suppose que les élèves ne pensent pas que la démarche est unique et donc que l'enseignant accepte des démarches différentes)».

Même si les compétences visées sont du même ordre, le fait que les programmes de 1995 les identifient comme des compétences spécifiques à une activité, et non générales, est loin d'être anodin. Nous pensons que cela peut avoir des conséquences sur le point de vue que l'on va adopter sur l'activité de résolution de problèmes en elle-même. D'un côté, elle va apparaître comme **un savoir spécifique**, pour lequel il faudra proposer *«!des activités pour mettre en place et développer des compétences méthodologiques!»,*[20] de l'autre, comme **un savoir transversal** aux mathématiques qui requiert des compétences qui *«!ne doivent pas être travaillées pour elles-mêmes, l'objectif essentiel devant toujours rester de résoudre le problème posé.»*[21]
De plus, les compétences identifiées sont beaucoup plus ciblées et réductrices en 1995. Celles de 2002 cherchent à développer chez les élèves *«un comportement de recherche »* alors qu'en 1995 apparaissent des compétences telles que *«reconnaître, trier, organiser et traiter les données utiles à la résolution d'un problème », «élaborer un questionnement à partir d'un ensemble de données »*... Nous verrons plus loin quelles ont pu être les conséquences de telles instructions dans le contenu des manuels scolaires.

Ainsi, les instructions relatives à l'activité «résolution de problèmes» en primaire se rapprochent de plus en plus de la mise en place d'activités qui invitent «!*la classe à s'apparenter à une petite communauté mathématique!»*[22], ce qui correspond donc aux objectifs de notre recherche. Les différentes composantes de la démarche de recherche y sont décrites. Les compétences visées sont donc très proches de celles que nous avons supposées être mises en pratique à travers les situations recherche.

2- Au collège et au lycée! : des programmes dans la continuation de ceux du primaire

Les derniers programmes en date pour les niveaux supérieurs, collège ou lycée, sont dans la continuation de ceux du primaire. Ainsi, il est précisé pour le collège[23]

> *« En primaire. une proportion importante d'élèves s'intéresse à la pratique des mathématiques et y trouve du plaisir. Le maintien de cet intérêt pour les mathématiques doit être une préoccupation pour le collège.* ***Il est en effet possible de se livrer, à partir d'un nombre limité de***

[20] *Instructions officielles de 1995*
[21] *documents d'application des programmes 2002, cycle 2 et cycle 3, p 5*
[22] *documents d'application des programmes 2002, cycle 2 et cycle 3, p 5*
[23] *BO HS n°4, 9/09/04*

__connaissances, à une activité mathématique véritable__, avec son lot de questions ouvertes, de recherches pleines de surprises, de conclusions dont on parvient à se convaincre. __Une telle activité, accessible aux élèves, a une valeur formatrice évidente__ et leur permet d'acquérir les savoirs et savoirs faire qui leur sont nécessaires. »

comme pour le lycée, par exemple en 1ère!:

« Le noyau central [de l'enseignement en mathématiques] résume, en quatre composantes essentielles, la spécificité de toute pratique mathématique: observation, abstraction, expérimentation, démonstration. Ces quatre composantes entretiennent entre elles des rapports dialectiques, l'une appelant l'autre ou s'appuyant sur elle, au gré du travail mathématique réalisé!(...) »![24]!

«!Il est souhaitable que l'enseignant garde toujours à l'esprit le souci de donner à ses élèves une vision élargie de ce qui se fait en classe(donner du sens et du souffle!!)!(...) Il faut continuer à tout faire pour éviter de donner des mathématiques une vision étriquée réduite à des techniques. »[25]

On trouve de plus de manière récurrente dans les instructions officielles relatives à ces niveaux des injonctions similaires ou voisines de celles que nous avons relevées pour le primaire!:

Primaire	Collège[26]	Lycée[27]
capacités à chercher, abstraire, raisonner, prouver	pratiquer une démarche scientifique, chercher, observer	observation, abstraction, expérimentation, démonstration
	identifier et formuler un problème	formuler un problème
		percevoir l'analogie entre des problèmes apparemment distincts (Term)
		modéliser (Term)
émettre des hypothèses et les tester faire et gérer des essais successifs	énoncer des conjectures, les expérimenter	se poser des questions, conjecturer un résultat
élaborer une solution originale	recherche de contre-exemples	trouver d'éventuels contre-

[24] BO HS n°7, 31/08/00 (programmes de 1ère S)

[25] documents d'accompagnement des programmes de la classe de première des séries générales, p 49, CNDP, 2001

[26] BO HS n°4 9/09/04

[27] Programmes de Seconde (BO HS n°6, 10/07/01), programmes de 1ère S (BO HS n°7, 31/08/00), programmes de Terminale S (BO HS n° 4, 30/08/01) et leurs documents d'accompagnement

et en éprouver la validité		exemples
argumenter à propos de la validité d'une solution produite par soi même ou par un camarade	construction d'une argumentation écoute des arguments d'autrui introduction progressive au raisonnement déductif	comprendre comment la question se résout dans des cas particuliers et en quoi les arguments valables se généralisent ou non ($1^{ère}$ et Term)
		trouver des résultats partiels ($1^{ère}$)
		généraliser un résultat (Term)
		apprentissage de la rigueur et de la recherche de preuves ($1^{ère}$) concevoir des démonstrations dans leur totalité, puis en détailler les différentes étapes
contrôler et discuter la pertinence ou la vraisemblance d'une solution identifier des erreurs dans une solution en distinguant celles qui sont relatives au choix d'une procédure de celles qui interviennent dans sa mise en œuvre	contrôle des résultats et évaluation de leur pertinence en fonction du problème étudié analyse critique	contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé.
formuler et communiquer sa démarche et ses résultats par écrit et les exposer oralement	communiquer une recherche mettre en forme une solution	étudier une démonstration qu'on n'aurait pas trouvée soi-même, expliquer oralement une démarche, rédiger au brouillon puis au propre, (2^{nde})
		faire des conjectures sur des questions voisines ($1^{ère}$)
		supprimer une hypothèse dans un problème (Term)
		chercher une nouvelle démonstration d'une propriété et la comparer avec d'autres (Term)
favoriser l'initiative, l'imagination et l'autonomie des élèves	des qualités d'initiative, d'imagination et de créativité	capacités d'imagination et d'analyse critique (2^{nde} et $1^{ère}$)

Ce qui faisait partie des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes en primaire est donc également pointé dans les niveaux supérieurs. Le contenu des programmes du collège est quasi identique à celui du primaire, hormis l'introduction progressive du raisonnement déductif et l'importance accordée à l'écrit en mathématiques. Les programmes du lycée reprennent l'ensemble des connaissances relatives à la résolution de problèmes déjà listées, en les précisant, les affinant, les complétant. Apparaissent par exemple, le terme de «!résultats partiels!» et l'idée d'ouverture de la recherche par le biais d' *«énoncés de conjectures sur des questions voisines!»* ou du fait de *«!supprimer une hypothèse dans un problème!»* afin d'en étudier les conséquences... Par ailleurs, de nouveaux concepts sont aussi introduits. Un chapitre particulier! est consacré à la démonstration et à la rigueur de sa rédaction en 1ère S et un à la modélisation en Terminale S.

Un des objectifs de l'enseignement actuel des mathématiques en France, quel que soit le niveau scolaire, est donc d'initier les élèves à la démarche de recherche en mathématique, la définition qui en est donnée dans les différentes directives officielles étant très proche de celle que nous avons prise, mettant en avant, d'une part la démarche hypothético—déductive, de l'autre, la prise d'initiative, l'imagination, la créativité.
L'heuristique en mathématiques semble donc bénéficier **d'un habitat important au sein de l'institution scolaire française**, habitat qui est, de plus, récurrent du primaire à l'université. D'autre part, au regard des textes officiels, il semble indéniable que **sa niche est jugée primordiale** à l'activité mathématique.
L'école souhaite donc permettre aux élèves de découvrir et de vivre la recherche en mathématiques... mais comment s'y prend-elle? Nous allons maintenant chercher à identifier quelles pouvaient être les caractéristiques des situations à utiliser ou les méthodes préconisées pour parvenir à ce que l'élève développe les compétences citées.

II- QU'EST-CE QU'UN PROBLEME[28] DE MATHEMATIQUES ?

Afin d'avoir des éléments relatifs aux méthodes proposées dans les instructions officielles pour la pratique de l'heuristique à l'école, nous avons tout d'abord regardé quels outils étaient pointés et donc quelles définitions ou caractéristiques d'un problème y figuraient.

À partir de 1980, les instructions officielles font apparaître trois types de problèmes!:

- Les problèmes pour introduire des notions nouvelles
- Les problèmes d'application. Ils peuvent permettre d'évaluer des connaissances.
- Les problèmes pour apprendre à chercher.

On retrouve en partie cette classification dans les programmes actuels du primaire:

> *« Quatre types de problèmes sont évoqués et peuvent être associés à des objectifs d'apprentissage différents*[29]

[28] *employé dans ce chapitre au sens des manuels.*

- Les problèmes dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance

- Les problèmes destinés à permettre le réinvestissement des connaissances déjà travaillées, à les exercer

- Les problèmes plus complexes que les précédents dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances

- Les problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher: en général, pour résoudre ces problèmes, l'élève ne dispose pas encore de solution experte. »

aussi bien que dans les programmes de la classe de 6ème!: (BO 1995)

«!On peut schématiquement faire référence à trois grands types de problèmes:

- ceux qui correspondent effectivement à des situations de la vie quotidienne et présentent une complexité raisonnable pour s'inscrire dans l'univers familier des élèves

- ceux qui sont posés dans d'autres champs disciplinaires. Ils sont l'occasion de commencer à travailler sur l'idée de modélisation mathématique. Ils permettent, en particulier, de décrire, contrôler et anticiper des phénomènes dans des situations accessibles aux élèves.

- ceux qui portent directement sur des objets mathématiques et conduisent plus particulièrement à développer la curiosité mathématique et l'esprit de recherche. Dans ce domaine, il convient de distinguer exercice d'application et problème véritable dont la solution n'est pas obtenue directement par l'utilisation de connaissances étudiées préalablement.!»

que dans ceux du lycée, par exemple en 1ère S!:

«!Les travaux proposés en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, jouent un rôle primordial ; ils ont des fonctions diversifiées :

- La résolution d'exercices d'entraînement, en liaison avec l'étude du cours, permet aux élèves d'affermir leurs connaissances de base et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples;

- L'étude de situations plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problème à résoudre et à rédiger, alimente le

---

[29]" Les problèmes pour chercher", document d'accompagnement des nouveaux programmes de primaire, direction de l'enseignement scolaire, 2002.

travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux élèves d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances dans des secteurs variés ;

- Les travaux individuels de rédaction (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte,...) visent essentiellement à développer les capacités de mise au point d'un raisonnement et d'expression écrite ; (…)

- Les devoirs de contrôle, peu nombreux, combinent des exercices d'application directe du cours (voire des questions de cours), des problèmes plus synthétiques, comportant des questions enchaînées de difficulté progressive et permettant aux élèves de vérifier leurs résultats, et des problèmes plus ouverts (susceptibles d'amener l'élève à choisir un modèle mathématique approprié, à émettre une conjecture, à expérimenter à travers des exemples ou des contre-exemples, à construire un raisonnement) (…)[30]»

Suite à cette étude, nous distinguerons **deux grands types de «problèmes»** présents dans les instructions officielles:

- **les exercices d'application** qui impliquent l'utilisation de une ou plusieurs notions mathématiques préalablement introduites par l'enseignant. Ils peuvent servir à entraîner les élèves à faire fonctionner une notion mathématique ou à les évaluer lors des devoirs de contrôle.
- **les problèmes «véritables» ou «problèmes pour chercher»** qui, au contraire, ne font pas appel à des notions déjà abordées mais ont pour but la mise en place d'une démarche de recherche mathématique et peuvent éventuellement permettre l'introduction de nouveaux concepts. Ils se rapprochent de la définition d'un problème mathématique que nous avons prise et explicitée au début de notre thèse.

III- QUELLES METHODES SONT PRECONISEES?

III- 1 ANALYSE DIDACTIQUE DE LA TACHE «RESOLUTION DE PROBLEME» PROPOSEE

Nous considérons que deux catégories de tâche interviennent selon le type de problèmes proposé:

[30] *Programmes de la classe de 1ère S, BO HS n°7-30/08/2000. Vol 5*

• s'il s'agit d'exercices d'entraînement ou d'application, la tâche consistera alors en l'identification du savoir ou de la notion à mettre en oeuvre dans les savoirs récemment traités en classe puis à l'utilisation d'une technique adéquate. Même s'il peut arriver que l'élève ait des outils de contrôle de son résultat, généralement, sa validation ne lui est pas demandée, elle est à la charge de l'enseignant.

• s'il s'agit de problèmes «véritables», l'élève devra rentrer dans une démarche de recherche telle que nous l'avons définie, identifier éventuellement le ou les savoirs à mettre en oeuvre, qui, dans ce cas ne font pas nécessairement partie de ce qui vient d'être vu en classe. Il aura souvent plusieurs tâches à gérer (tâches de résolution et tâches de contrôle), pourra mettre en oeuvre plusieurs procédures de résolution, des démarches personnelles. La validation des résultats sera faite dans un premier temps par l'élève, puis par la classe, le maître intervenant principalement pour gérer les débats.

Regardons maintenant du côté des programmes quelles sont les méthodes préconisées pour les différents niveaux scolaires.

III- 2 PROGRAMMES SCOLAIRES ET TACHE «RESOLUTION DE PROBLEMES»

1- A l'école primaire

Nous ne nous appuierons dans ce paragraphe que les directives de 2002, étant donné que celles de 1995 ne sont à l'heure actuelle plus en vigueur et n'étaient de toute façon pas très différentes.

Au début du document d'accompagnement des programmes pour les cycle 2 et 3[31], figure un paragraphe intitulé «!*une place centrale pour la résolution de problèmes*!» qui donne des directives générales quant aux caractéristiques des activités à mettre en place:

> *«!Dans ces activités (de résolution de problème), l'enseignant doit créer les conditions d'une réelle activité intellectuelle des élèves, **ils doivent être mis en situation de prendre en charge les différentes tâches associées à la résolution d'un problème**. (...)!».*

> *«!Les séances d'enseignement comportent en général différentes phases, avec des modes d'organisation diversifiées. **Les phases de recherche sont souvent plus efficaces et plus riches si elles sont conduites en petits groupes**, facilitant la confrontation des idées entre pairs et favorisant*

[31] *Documents d'application cycle 2 p 7 et 10 et cycle 3, p 8 et 10.*

l'intérêt de tous les élèves pour la tâche proposée. Elles gagnent à être ***précédées par un moment de travail individuel*** *qui permet à chacun d'entrer dans le problème et d'élaborer ses premières idées sur la solution à mettre en oeuvre.!»*

Ces remarques générales sont complétées pour chaque cycle par des indications plus précises quant aux types d'outils que l'on peut utiliser.

> *«!Afin d'éviter les difficultés rencontrées par les élèves du cycle 2 pour se représenter des situations décrites dans un texte,* ***les questions peuvent être posées dans le cadre de jeux ou d'expériences effectivement réalisées avec des objets****. Les exercices sur fiches ne doivent pas se substituer à ce travail primordial avec du matériel.* ***Il convient cependant de garder à l'esprit que ce n'est pas la manipulation elle-même qui constitue l'activité mathématique, mais les questions qu'elle suggère et l'activité intellectuelle que doivent développer les élèves pour y répondre lorsque le matériel n'est plus disponible****. Dans cet esprit, on privilégie les problèmes où les élèves sont placés en situation d'anticiper une réponse qu'ils pourront ensuite vérifier expérimentalement.»*[32]

Ainsi, nous trouvons comme outils susceptibles d'initier à la recherche en mathématiques l'idée d'utiliser des jeux, des situations concrètes. L'alternance entre travail individuel et collectif y est à nouveau mise en avant:

> *«!Les capacités à chercher, abstraire, raisonner et expliquer se développent aussi bien* ***dans les moments de travail individuel ou en petits groupes*** *que dans* ***les phases d'échange et de confrontation*** *qui permettent de mettre en valeur la diversité des méthodes utilisées pour résoudre un même problème. Au cycle 2, les écrits de recherche servent également souvent de support aux* ***échanges collectifs*** *au cours desquels les élèves trouvent une occasion de s'initier à l'argumentation et à ses exigences (écoute des autres, contrôle par autrui de ce qui est avancé, recours à une expérience pour trancher entre deux propositions...).!»*

Les instructions pour le cycle 3[33] sont proches de celles du cycle 2:

> *«!Le développement des capacités à chercher, abstraire, raisonner, prouver, amorcé au cycle 2, se poursuit. Pour cela, il est nécessaire* ***de prendre en compte les démarches mises en œuvre par les élèves, les***

[32] *BO 14/02/2002*
[33] *BO 14/02/2002*

> ***solutions personnelles*** *qu'ils élaborent, leurs erreurs, leurs méthodes de travail, et* ***de les exploiter dans des moments de débat****.!»*

Comme pour le cycle 2, il est également indiqué que ces compétences peuvent être développées par le biais :

> *«!****de situations issues de la vie de la classe, de la vie courante, de jeux, d'autres domaines de connaissances****!» [ou en s'appuyant] «!sur des objets mathématiques (figures, nombres, mesures...)!». [qui peuvent être] «!présentées sous des formes variées : expérience concrète, description orale, support écrit (texte, document, tableau, graphique, schéma, figure)!».*

Les directives quant à l'activité de résolution de problèmes et à ses conditions de mise en oeuvre énoncées dans les instructions officielles de primaire sont donc très proches des choix faits dans le cadre du projet *Maths à modeler*. La recherche peut s'effectuer en alternant travail en groupe et individuel, à l'aide de jeux, introduits éventuellement par le biais d'un support matériel, l'expérimentation y a une place importante.

2- Au collège

Les instructions officielles parues en 2004 pour le collège sont dans la continuation de celles de primaire!:

> *«!Les activités choisies doivent développer la capacité de se poser des problèmes et de progresser vers leur résolution. Elles doivent!:*
>
> *- Permettre un démarrage possible pour tous les élèves!;*
>
> *- Créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures*
>
> *- Fournir aux élèves (…) des occasions de contrôle de leurs résultats!;*
>
> *- Habituer à l'art d'expérimenter et à celui de conjecturer, donc d'entraîner à chercher…!»*

Ou, comme cela est également précisé:

> *«!permettre à l'élève de s'initier très progressivement au raisonnement déductif!».*

Cependant, seules des caractéristiques générales sont données quant aux situations à proposer, rien n'est dit quant à celles qu'il faudrait utiliser.

3- Au lycée

Comme pour le collège, les directives pour le lycée publiées en 2001 donnent l'esprit dans lequel les enseignants doivent organiser leur enseignement. Par exemple, pour les filières de première S, ES et L!:

> *« Le monde mathématique de chaque élève s'élabore en grande partie à travers une pratique permanente de calculs, d'argumentations, de petits raisonnements et de démonstrations. (...)* ***L'enseignant veillera à équilibrer les divers temps de l'activité mathématique dans sa classe ; recherche de problèmes, résolution d'exercices, mise en forme de démonstration, exposé magistral, synthèse,***... *rythmeront les heures de classe et* ***viseront tous à promouvoir chez chaque élève l'acquisition de la démarche mathématique!*** *(...). »*

Toutefois, contrairement au collège, les documents d'accompagnement de la classe de 1ère S comportent des exemples de situations utilisables permettant «! *l'acquisition de la démarche mathématique* », sous réserve qu'ils soient posés de façon ouverte et non guidée et que les élèves maîtrisent les savoirs notionnels requis.

Ainsi, même si les apprentissages relatifs à la résolution de problèmes ciblés pour le collège et le lycée sont les mêmes qu'en primaire, les directives quant aux conditions de mise en place disparaissent des programmes relatifs à ces deux niveaux. Toutefois, les caractéristiques générales quant aux types d'activités à mettre en oeuvre données pour le collège sont proches de celles des situations recherche. On retrouve l'accessibilité à tous, la production de conjectures, l'autovalidation...

Afin d'évaluer quelles pouvaient être les pratiques de la classe et les outils mis «officiellement» à la disposition des enseignants, nous avons par ailleurs cherché à étudier les manuels scolaires associés aux programmes précités. Pour cette étude, nous avons choisi de nous centrer sur le niveau primaire, cycle 3, niveau où ont eu lieu la majorité de nos expérimentations.

IV- ETUDE DES MANUELS DE PRIMAIRE «CLASSIQUES»

Depuis quelques années sont apparus dans les manuels scolaires du primaire, au côté des chapitres sur la numération, la géométrie, les opérations... de plus en plus de nouveaux chapitres relatifs à l'activité de résolution de problèmes, ce qui confirme l'importance de l'habitat et de la niche de cette activité.

Afin de montrer plus en détail quelles peuvent être les différentes rubriques proposées par ces manuels, nous présentons tout d'abord le contenu de *Objectif*

Calcul, CM1, ed 2001, qui est un des manuels utilisés dans une des classes de cycle 3 qui a participé à nos expérimentations.

IV-1 UN EXEMPLE, *OBJECTIF CALCUL, CM1*

Huit chapitres ou étapes sont répertoriés dans ce manuel, comme relatifs à la «résolution de problèmes». L'objectif de ce découpage est annoncé par les auteurs dans la préface du manuel:

> *«Savoir résoudre un problème suppose de savoir combiner de très nombreuses compétences. La démarche adoptée consiste à développer ces différentes compétences et à les faire jouer simultanément. »*

Il est également précisé dans l'introduction du manuel du professeur:

La résolution de problèmes

Il ne suffit pas de donner aux élèves des problèmes à résoudre (même en multipliant les exemples) pour qu'ils progressent dans leur capacité à le faire. L'objectif de ces étapes est d'assurer un apprentissage spécifique, d'ordre méthodologique.
Les différentes étapes vont permettre progressivement aux enfants :
— d'identifier le contexte d'une situation, avant même toute tentative de résolution ;
— de trouver les informations pertinentes dans des documents présentés sous différentes formes : texte, tableau, bande dessinée, graphique, carte ;
— de lire un énoncé, trouver rapidement quel est l'objet de la recherche, quelles sont les questions posées, quelle est l'articulation entre celles-ci ;
— de repérer si toutes les informations nécessaires à la résolution sont présentes dans l'énoncé et, éventuellement, de chercher celles qui manquent ;
— de trouver la ou les connaissance(s) à mettre en œuvre, la ou les opération(s) à effectuer ;
— de planifier la recherche, les calculs, en faisant par exemple des schémas ou des organigrammes ;
— de valider ses résultats, que ce soit par une argumentation de type mathématique, par la mise en évidence d'un contre-exemple, par la confrontation avec la réalité ;
— de communiquer sa démarche et ses résultats, car, s'il n'est pas nécessaire de faire référence à une norme dans la présentation de la solution, il est indispensable de présenter la recherche et les résultats en utilisant une formulation claire et logiquement articulée ;
— de confronter sa démarche et ses résultats avec ceux proposées par d'autres, et ainsi, être amené à argumenter.

Les chapitres se référant à l'activité de résolution de problèmes reprennent les différentes étapes citées dans cette présentation et sont répartis de la façon suivante sur les trois premières périodes parmi les cinq qui découpent l'année:
Période 1: sept/oct
16: Différentes présentations des informations.
Période 2: nov/dec:
22: Résolution de problèmes: à chaque problème sa solution
23: Résolution de problèmes: à chaque solution son problème
24: Résolution de problèmes: analyse des questions

25: Résolution de problèmes: aucune, une ou plusieurs réponses?
Période 3: janv/fev
45: Résolution de problèmes: identifier le bon outil
46!: résolution de problèmes!: organiser sa démarche
47!: problèmes d'hier et d'aujourd'hui
Ces huit étapes sont complétées par une double page dans la partie «!aide mémoire» intitulée «!résolution de problèmes numériques (aspects méthodologiques)!».
Au regard des termes employés, nous pouvons dans un premier temps classer ces différents chapitres en deux catégories!:

- ceux dont les objectifs annoncés pourraient se rapprocher des situations recherche!: les chapitres 16, 24, 25, 46 et 47 ainsi que l'aide mémoire.
- ceux dont les objectifs sont contraires aux situations recherche car ils mettent en avant une idée d'injectivité (voire de bijectivité) entre problème et solution: les chapitres 22, 23, 45.

Afin de vérifier si ce classement est effectivement valide, étudions tout d'abord plus en détail le contenu de chacun des chapitres de la deuxième catégorie puis ceux de la première.

1- Chapitres aux objectifs contraires aux situations recherche

La caractéristique commune aux trois chapitres que nous avons listés comme en désaccord avec les situations recherche est l'idée de l'unicité du triplet (problème, outil théorique, solution) associé à un problème donné.

Chapitre 22!: Résolution de problèmes: à chaque problème sa solution
Objectifs!: Analyser énoncés et solutions pour les associer

L'intitulé de ce chapitre amène à penser qu'un problème a toujours une solution et qu'elle est unique. Nous avons donc selon les auteurs du manuel la correspondance!: «!problème → solution!».
Trois énoncés sont à reconstituer à partir de la donnée d'informations, de calculs, de schémas, de titres, de questions et de phrases-réponses.

22 Résolution de problèmes : à chaque problème sa solution…

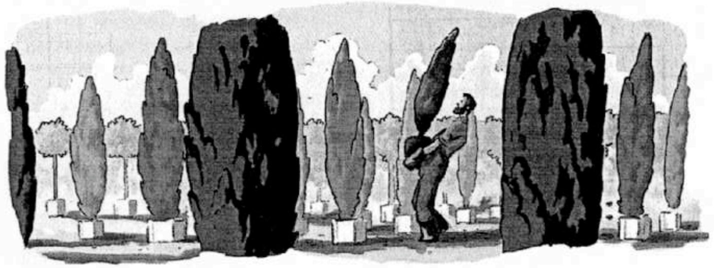
Analyser énoncés et solutions pour les associer.

Découverte

Méli-mélo

Les auteurs de ce manuel voulaient te montrer comment résoudre trois problèmes en t'aidant de schémas, mais… l'éditeur n'a rien compris. Il a fait imprimer séparément les titres, les informations, les schémas, les calculs, les réponses et a gardé seulement deux questions sur trois.

- Reconstitue les trois énoncés de problème et leur solution.
- Trouve la question qui manque pour l'un des trois problèmes.



1. Informations

A. Ce matin, Olivier le pépiniériste a vendu beaucoup d'arbres : 420 en tout.
Il a vendu :
- 45 thuyas de plus que de cerisiers ;
- 30 pommiers de plus que de thuyas.

B. Aujourd'hui, jour de la Sainte-Catherine, Olivier a vendu 420 arbres, des thuyas, des cerisiers et des pommiers.
Il a vendu 100 thuyas et 145 cerisiers.

C. La journée s'achève. Olivier le pépiniériste fait ses comptes :
- il a vendu ce matin 5 lots de jeunes cerisiers et 6 grands pommiers à 45 € l'un.
- il a 420 € dans sa caisse.

2. Calculs

D. 420 – (100 + 145) = 175
Preuve :
100 + 145 + 175 = 420

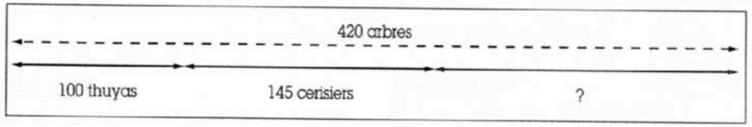
F. 6 × 45 = 270
420 – 270 = 150
150 : 5 = 30
Preuve :
(6 × 45) + (5 × 30) = 420

E. 45 + 45 + 30 = 120
420 – 120 = 300
300 : 3 = 100
100 + 45 = 145
100 + 45 + 30 = 175
Preuve :
100 + 145 + 175 = 420

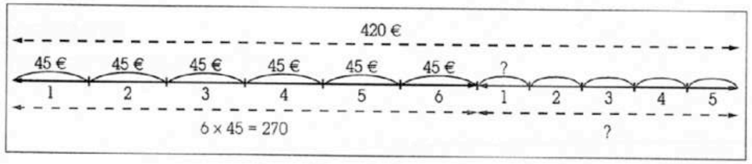
CALCUL RÉFLÉCHI
Jeu de cartes multiplicatif.

3. Schémas

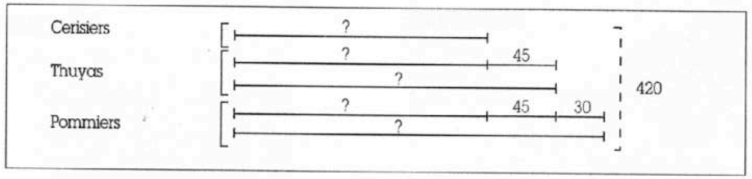
G.



H.



I.



4. Titres

J. L'heure des comptes.
K. Hit-parade des arbres.
L. Les arbres de la Sainte-Catherine.

5. Questions

M. Quel est le prix d'un lot de jeunes cerisiers ?
N. Combien Olivier a-t-il vendu de pommiers ?
O. . . . .

6. Réponses

P. Un lot de jeunes cerisiers coûte 30 €.
R. Olivier a vendu : 175 pommiers

Q. Olivier a vendu :
- 100 cerisiers ;
- 145 thuyas ;
- 175 pommiers.

À partir des informations fournies, la recherche du bon calcul, du bon schéma, de la bonne question ou de la phrase-réponse pourrait faire partie d'une activité de résolution de problèmes si tous les nombres présents dans les différents énoncés étaient similaires. Dès lors, il faudrait que l'élève ait compris les différentes problématiques mais aussi les calculs, schémas, textes proposés pour les associer.
Or, même si chacun d'entre eux se réfère au même contexte (Olivier et une histoire d'arbres) et met en jeu le nombre 420, les autres nombres diffèrent. Tel que cela est présenté il s'agit donc plutôt d'une **activité d'identification**: je cherche quel énoncé parle de 145, lequel parle de pommiers, par exemple.
L'activité de recherche de titre quant à elle est plus proche d'une activité de type compréhension de texte.

Chapitre 23: Résolution de problèmes: à chaque solution son problème
Objectifs!: Analyser des énoncés de problèmes pour en construire soi-même.

Le titre de cette étape renvoie à la correspondance!: «!solution → problème». Elle est introduite par une définition de ce qu'est un problème pour les auteurs du manuel:

> *«!Un problème est souvent construit de la façon suivante:*
>
> *- un énoncé qui définit un contexte et qui contient des informations.*
>
> *- des questions.*
>
> *La solution du problème décrit la manière dont on utilise les informations de l'énoncé pour répondre aux questions.!»*

Cette définition est très éloignée de la nôtre, le fait de préciser que!*«!**la** solution du problème décrit **la** manière!»* renforce l'idée induite au chapitre 22 que tout problème a une unique solution.
Dans chaque exercice, à partir de la donnée de différents documents (par exemple, un calcul associé à un contexte) les élèves doivent construire un énoncé de problème (en accord avec la définition donnée dans le manuel) puis le résoudre ou le faire résoudre par d'autres.
Il faut donc qu'ils comprennent les documents mis à leur disposition et qu'ils imaginent un texte et une question correspondants.

23 Résolution de problèmes : à chaque solution son problème…

Analyser des énoncés de problèmes pour en construire soi-même.

Découverte

Un problème est souvent construit de la façon suivante :
- un énoncé qui définit un contexte et qui contient des informations,
- des questions.

La solution du problème décrit la manière dont on utilise les informations de l'énoncé pour répondre aux questions.

1. Les trois problèmes des pages 54 et 55, une fois reconstitués, correspondent-ils à cette description ?

2. Avec un de tes camarades, utilise les renseignements suivants pour construire un énoncé de problème. Puis échangez votre travail avec un autre groupe pour vérifier que les énoncés construits utilisent bien les renseignements donnés.

a/ Titre

Un livre passionnant

b/ Contexte

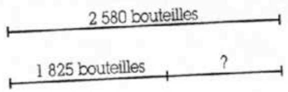
- Sophie parle à Mélanie.
- Elle voudrait lui donner envie de lire le livre qu'elle-même est en train de lire.

c/ Calculs

12 + 18 + 14 + 60 = 104
120 − 104 = 16

3. Utilise le schéma et le tableau suivants pour construire des énoncés de problèmes. Puis, résous ces problèmes.

a/



b/

Nombre de CD	Prix des CD
6	72 €
1	?
?	96 €

Problèmes

CALCUL RÉFLÉCHI

Loto multiplicatif

1 Utilise les renseignements suivants pour construire toi-même un problème. Résous ensuite ce problème.

a/ Contexte

- La bibliothécaire fait des achats à la librairie.
- Elle voudrait bien acheter aussi un bac à livres.

b/ Informations

- La bibliothécaire dispose de 175 €
- Le bac à livres coûte 25 €.

c/ Calculs

(2 × 14) + (5 × 12) + (3 × 18) = 142
175 − 142 = 33

2 Fais le même travail que dans l'exercice 1.

a/ Contexte

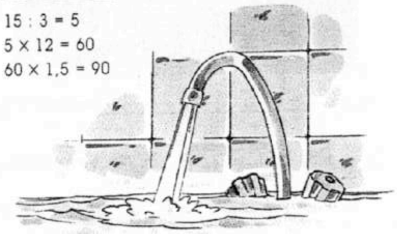
- un article relevé dans la presse

> **Inutile de laisser couler l'eau du robinet pour se raser, se laver les dents ou les mains : 3 minutes à robinet ouvert équivalent à un carton de 12 bouteilles d'eau. Ne l'ouvrez donc qu'en début et en fin d'opération.**

- capacité d'une bouteille d'eau : 1,5 litre.

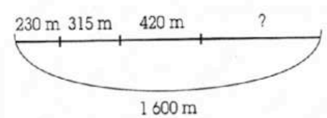
b/ Calculs

15 : 3 = 5
5 × 12 = 60
60 × 1,5 = 90

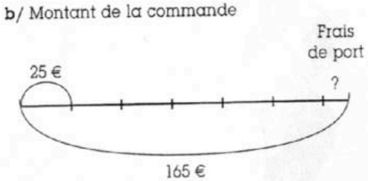


3 Utilise les schémas suivants pour construire des énoncés de problèmes. Puis résous ces problèmes.

a/



b/ Montant de la commande



4 Construis un énoncé de problème dont la solution est la suivante.

a/ Calculs

(110 + 50) × 2 = 320

b/ Réponse

Le périmètre du jardin est 320 mètres.

Regardons par exemple la deuxième question de la partie "Découverte":

Titre: un livre passionnant
Contexte "Sophie parle à Mélanie. Elle voudrait lui donner envie de lire le livre qu'elle-même est en train de lire".
Calculs: 12+18+14+60=104,
120-104=16

Qu'auriez-vous répondu!? Le manuel du maître fournit un réponse possible!:

Le titre et le contexte laissent penser que Mélanie lit son livre avec plaisir.
Dans les calculs, 120 ne peut être que le nombre de pages du livre et 12+18+14+60 représente le nombres de pages déjà lues, sans doute à des moments différents.
Production envisageable!: «!un livre passionnant!»
«!-Tu sais Mélanie, je suis en train de lire un roman d'aventure génial!! Il fait 120 pages, je l'ai commencé il y a quatre jours. Dimanche, j'ai lu 12 pages, lundi, 18, mardi, 14 et hier, 60.
et il te reste combien de pages à lire, Sophie!?!»
Trouve combien de pages Sophie doit encore lire pour terminer son livre.

Était-ce votre réponse!?

En plus du fait que le titre du chapitre puisse donner une mauvaise conception de ce qu'est un problème, nous nous interrogeons: trouver un sens à ces deux opérations ne mettant en jeu que l'addition, relève-t'il vraiment de l'activité de résolution de problèmes en CM1 ou à tout autre niveau d'ailleurs? Il s'agit plus, selon nous, d'un **travail sur l'expression**, l'imagination, le récit ... Cela d'autant plus que l'argument *«!120 ne peut être que le nombre de pages du livre!»* nous semble abusif et nous ne pensons pas que cela sera une évidence pour tous les élèves!! Les autres exercices sont dans le même esprit.

Nous pensons enfin que la mise en parallèle de l'intitulé: «à chaque solution son problème» et des différents documents donnés, peut induire chez les élèves des confusions voire des conceptions erronées quant à ce qu'est la solution d'un problème: est-ce un schéma, un calcul, un tableau, une phrase réponse?

Chapitre 45: Résolution de problèmes: identifier le bon outil

Objectifs!: Analyser le problème pour trouver comment le résoudre.

Ce chapitre s'intéresse à !«!l'opérateur!» qui permet la correspondance mutuelle entre un problème et sa solution, développée aux chapitres 22 et 23. il faut identifier **le** bon outil nécessaire pour résoudre chacun des différents problèmes.

Hormis un exercice de reproduction de figure géométrique, il s'agit d'exercices classiques relevant de l'une des quatre opérations arithmétiques élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division). Ils sont en accord avec la définition d'un problème préalablement donnée dans le manuel et sont bien loin d'être de véritables problèmes de recherche. Ils ne comportent pas de grande difficulté, une seule opération est en jeu à chaque fois, toutes les informations sont fournies, il n'y a pas de questions intermédiaires à trouver, il suffit de trouver **le** bon calcul.

2- Chapitres a priori compatibles avec les situations recherche

L'intitulé des différents chapitres que nous avons classés dans cette deuxième catégorie reprend différentes compétences susceptibles d'être sollicitées lors d'une recherche en mathématiques.

Chapitre 16: Différentes présentations des informations.
Objectifs!: Apprendre à chercher des informations dans divers documents.

Le titre de ce chapitre nous a amenée à penser qu'il pouvait proposer différents types de présentation d'informations, associés à une problématisation. Ils conduiraient ainsi à penser qu'un problème n'est pas forcément présenté par un texte mais peut être suscité par d'autres types de données, que ce qui est essentiel n'est pas la forme du problème mais son aspect problématique.
Or ce chapitre comporte avant tout des activités de lecture destinées, comme cela est souligné dans le livre du maître, à montrer aux enfants que *«!les informations peuvent être données de façon différente»* et à identifier les caractéristiques propres à ces formes: par exemple, un texte comporte des informations données sous forme explicite, avec peu ou beaucoup de détails alors qu'un graphique fournit des informations souvent numériques et avec un minimum de place et de texte... il n'y a donc finalement pas d'activité de résolution proprement dite mais une recherche d'information dans des documents différemment présentés (texte, tableau de données, graphique, bande dessinée, carte, plan).

Chapitre 24: Résolution de problèmes: analyse des questions
Objectifs!: Apprendre à trouver rapidement quel est l'objet de la recherche et à se poser les bonnes questions.

Au regard de son titre, ce chapitre nous a semblé pertinent par rapport à l'activité de recherche en mathématiques. Toutefois, son contenu est décevant.
Pour chaque exercice, les élèves doivent identifier quelles questions intermédiaires est-il nécessaire de se poser pour répondre à la question initiale, mais les différents problèmes ne sont pas à résoudre. Nous trouvons cela dommage, d'autant plus qu'il

faut avoir compris la problématique pour identifier les questions intermédiaires. Voici encore un chapitre intitulé «!résolution de problèmes!» sans résolution de problèmes!! Cela est, de plus, en désaccord avec la définition d'un problème donnée au chapitre 23 et risque d'être perturbant pour l'élève. Tout d'abord, certains des énoncés ne comportent pas tous de questions explicitement formulées mais des injonctions (trouve), de plus, ici, il ne suffit pas d'utiliser les informations de l'énoncé pour répondre à la question puisqu'il faut se poser de nouvelles questions !

Chapitre 25: Résolution de problèmes: aucune, une ou plusieurs réponses?
Objectifs!: Analyser les informations données et classer les énoncés en fonction du nombre de solutions possibles.

L'objectif de ce chapitre est, selon les auteurs du manuel, d'«!*analyser les informations données et de classer les énoncés en fonction du nombre de réponses possible*», qui peut être comme cela est précisé par la suite: «!*aucune, une seule ou plusieurs et dans ce cas, tu as envie de dire* «!*ça dépend...* ».
Sa présence au sein du manuel nous a particulièrement interpellée. Tout d'abord, il est en contradiction avec le chapitre 22 car il remet en cause la correspondance erronée, «!un problème → une solution!». Par ailleurs, compte tenu de ce que nous avons relevé à travers les différentes expérimentations que nous présentons ci-après au sujet de l'impossibilité en mathématiques, nous jugeons essentielle la présence d'un tel chapitre au sein d'un manuel scolaire.
Regardons maintenant de plus près les différents énoncés proposés.

Partie «!Découverte»
Enoncé 1: les tailles
Nous n'avons pas assez d'éléments pour attribuer à chaque enfant une taille unique. Notons x la taille de Christophe. Donner une réponse revient à définir tous les triplets (x, y=x-12, z) tels que y>z et x, y, z compris entre disons 50 cm et 2 m afin de pouvoir correspondre à des tailles humaines. On ne peut donc fournir une unique réponse mais une infinité de réponses correspondant à tous les triplets (x,y,z) si l'on se place dans l'ensemble des réels ou un nombre fini de réponse mais très grand s'il l'on se place dans $\mathbb{N}$ ou dans l'ensemble des décimaux ayant deux chiffres après la virgule (pour correspondre à l'écriture usuelle d'une mesure de taille).

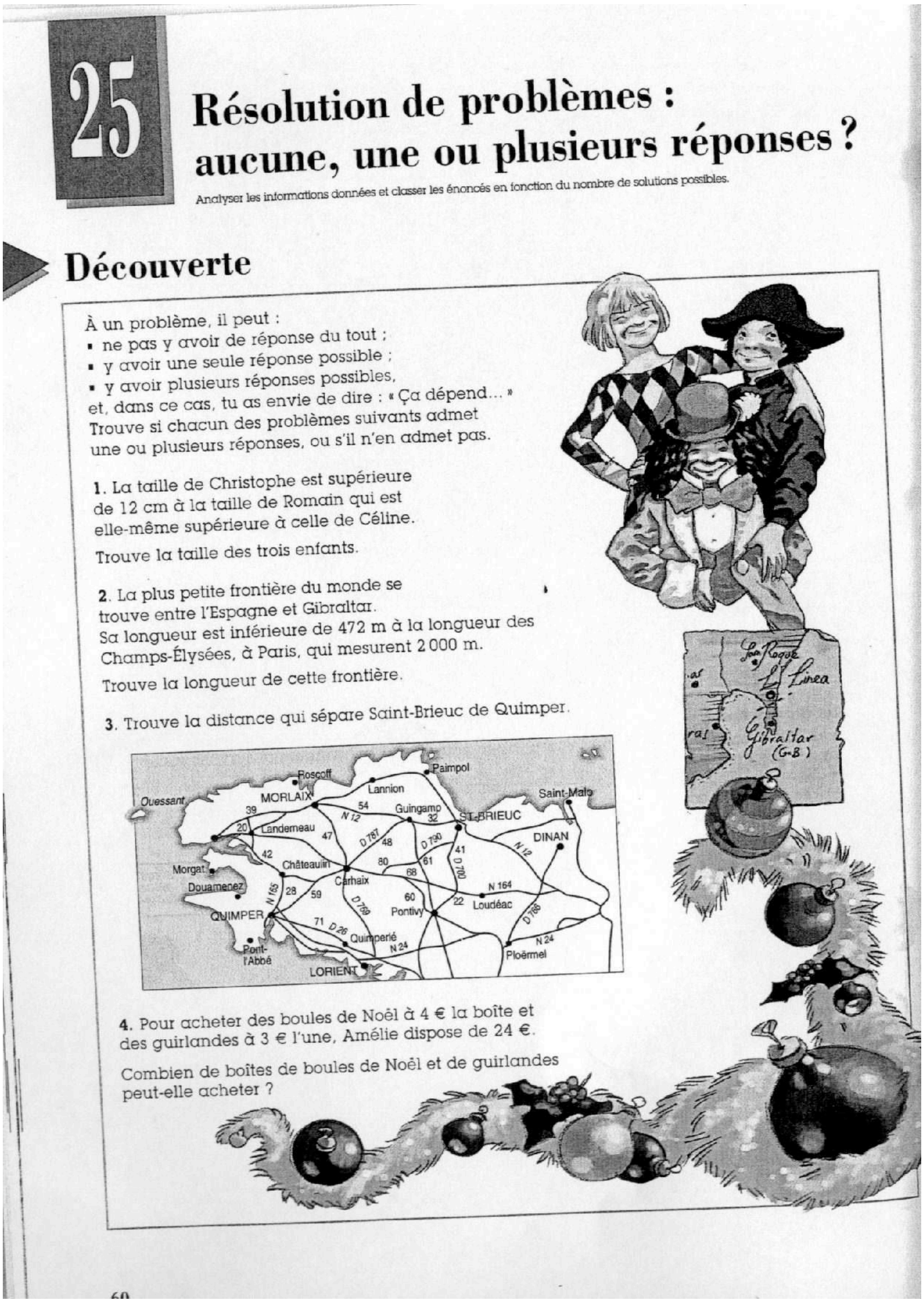
Enoncé 2: la frontière.
Là, la réponse est unique et s'obtient par une soustraction induite par le terme «!inférieure»: 2000-472= 1528.

Enoncé 3: la distance
Compte tenu des indications fournies par la carte, plusieurs réponses peuvent être données, sauf si l'on sous-entend que la distance de Saint Brieuc à Quimper est la

plus petite distance entre ces deux villes indiquée sur la carte, alors la réponse sera unique.

Enoncé 4: boules et guirlandes

Plusieurs réponses sont possibles. Il s'agit de déterminer les couples d'entiers naturels (x, y) solution de l'équation: $3x+4y\leq 24$ où x représente le nombre de boules achetées et y celui des guirlandes.



25

Résolution de problèmes : aucune, une ou plusieurs réponses ?

Analyser les informations données et classer les énoncés en fonction du nombre de solutions possibles.

Découverte

À un problème, il peut :
- ne pas y avoir de réponse du tout ;
- y avoir une seule réponse possible ;
- y avoir plusieurs réponses possibles,

et, dans ce cas, tu as envie de dire : « Ça dépend... »
Trouve si chacun des problèmes suivants admet une ou plusieurs réponses, ou s'il n'en admet pas.

1. La taille de Christophe est supérieure de 12 cm à la taille de Romain qui est elle-même supérieure à celle de Céline.
Trouve la taille des trois enfants.

2. La plus petite frontière du monde se trouve entre l'Espagne et Gibraltar.
Sa longueur est inférieure de 472 m à la longueur des Champs-Élysées, à Paris, qui mesurent 2 000 m.
Trouve la longueur de cette frontière.

3. Trouve la distance qui sépare Saint-Brieuc de Quimper.

4. Pour acheter des boules de Noël à 4 € la boîte et des guirlandes à 3 € l'une, Amélie dispose de 24 €.
Combien de boîtes de boules de Noël et de guirlandes peut-elle acheter ?

60

Chapitre 25. Partie «!Découverte»

Partie «Problèmes»

Enoncé 1:

Les élèves n'ont pas à résoudre les différents exercices mais doivent identifier à quelle catégorie ils appartiennent:

a) une solution unique obtenue par additions.
b) un nombre certes fini mais élevé de solutions, dépendant de toutes les possibilités de remplissage de la salle au cours des 26 représentations.
c) une solution unique obtenue par multiplications.

Enoncé 2:

La tâche relative à cet énoncé est différente des précédentes. Il s'agit d'identifier à quoi correspond chaque calcul et de modifier l'énoncé afin que les différentes réponses soient successivement celles correspondant au nouvel énoncé. Dans chaque cas, la réponse à étudier est unique.

Cette rubrique propose donc des exercices à une solution, d'autres à plusieurs solutions, tels que le «plusieurs» corresponde à la donnée d'un nombre fini mais plus ou moins grand de réponses. Selon notre analyse, il n'y a donc pas de cas où il n'y a pas de solution... Compte tenu de l'intitulé du chapitre, on peut s'en étonner... Nous avons donc regardé dans le manuel du maître les commentaires s'y référant.
Il est précisé dans l'intitulé de la consigne :

> *« (...) demandez vous :*
>
> *- si le problème n'admet qu'une seule réponse*
>
> *- s'il peut en avoir plusieurs*
>
> *- s'il n'en a pas, soit parce qu'il ne peut pas y en avoir, soit parce qu'il manque des informations. »*

Les problèmes 1 de la partie "Découverte" et 1.b de la partie "Problèmes" que nous avons identifiés comme ayant un très grand nombre de solutions voire une infinité sont considérés comme *«!n'ayant aucune réponse si l'on n'a pas d'informations supplémentaires!»*. Pour le deuxième exercice, par exemple, il est dit: *«!l'information est incomplète; rien ne dit combien de places ont été occupées au cours de chacune des 26 représentations. Donc il n'y a pas de réponse.!»*

Il est également indiqué au paragraphe «conclure avec les enfants», *«!lorsqu'à une même question, il peut y avoir plusieurs réponses, on peut chercher à donner des précisions qui permettent de choisir une réponse plutôt qu'une autre. (..)!»* Par exemple, dans le cas de l'exercice 1.b il est dit: *«on pourrait néanmoins répondre: "on aurait pu vendre 26*2 500 = 65 000 à condition que toutes les places aient été occupées au cours de chacune des 26 représentations. »*

Ordre de grandeur d'un produit.

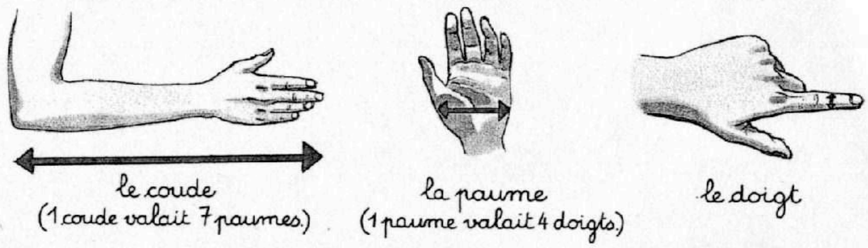
Problèmes

1 Trouve si chacun des problèmes suivants admet une ou plusieurs réponses, ou s'il n'en admet pas.

a/ Dans un livre qui date de 1966, on peut lire le problème suivant.
« Il y avait en France 17 452 chômeurs au 01.11.1960. Ce nombre a augmenté de 3 601 au cours du mois de novembre et s'est encore accru de 2 641 au mois de décembre. »
Trouve le nombre de chômeurs au 31.12.1960.

b/ Le théâtre du Châtelet à Paris compte 2 500 places.
Au mois de mai, il y a eu 26 représentations en soirées.
Trouve combien de billets ont été vendus pour ces 26 représentations.

c/ Au temps des pyramides, les unités de mesure égyptiennes étaient :



Trouve combien il fallait de doigts pour faire un coude.

2 Voici un énoncé de problème et 3 réponses.
Pour aménager le « club jeux » de l'école, un directeur dispose de 770 €.
Il veut acheter des puzzles en trois dimensions à 40 € pièce et des jeux de société à 15 € pièce.
Trouve combien de puzzles en trois dimensions à 40 € et combien de jeux à 15 € le directeur peut acheter.

Réponse 1
40 + 15 = 55
770 = 14 × 55
Il peut acheter 14 puzzles à 40 € et 14 jeux de société à 15 €.
Vérification : (14 × 40) + (14 × 15) = 770.
Il ne lui restera plus d'argent.

Réponse 2
40 + 15 + 15 = 70
770 = 11 × 70
Il peut acheter 11 puzzles à 40 € et 22 jeux à 15 €.
Vérification : (11 × 40) + (22 × 15) = 770.
Il ne lui restera plus d'argent.

Réponse 3
40 + 40 + 15 = 95
770 = (8 × 95) + 10
Il peut acheter 16 puzzles à 40 € et 8 jeux à 15 €.
Vérification : (16 × 40) + (8 × 15) =760.=760. =760
Il lui restera 10 €.

a/ Pour chaque réponse proposée, trouve à quoi correspondent les opérations.
b/ Trouve comment modifier l'énoncé pour que (successivement) seule la réponse 1, puis la réponse 2, puis la réponse 3 soit la bonne.

Chapitre 25. Partie «Problèmes»

Le fait qu'un problème puisse avoir plusieurs solutions est donc présenté comme quelque chose qu'il est préférable de ramener à une seule réponse, en rajoutant des conditions supplémentaires, comme s'il était gênant d'avoir un ensemble de solution qui ne soit pas un singleton !

Tout cela est en accord avec la définition d'un problème donnée dans le manuel où il est plusieurs fois employé le singulier: *«**la** solution du problème décrit **la** manière dont* *on utilise les informations de l'énoncé pour répondre aux questions*», mais n'est bien entendu pas forcément juste d'un point de vue mathématique !

Chapitre 46: Résolution de problèmes: organiser sa démarche

Objectifs!: Apprendre à planifier les calculs dans le cas de problèmes "à plusieurs opérations" grâce à des schémas de résolution (donnés).

L'intitulé de cette étape peut être rapproché d'une des caractéristiques des situations recherche, étant donné qu'il suggère, à travers l'utilisation du pronom possessif «!sa!», le caractère personnel que peut comporter une démarche de recherche. Cette étape tranche avec l'étape 45.

Le livre du maître précise qu'elle doit faire l'objet d'une seule séance qui a pour objectif!:

> *« d'amener les enfants à percevoir la nécessité:*
>
> *- de mettre en évidence ce qu'il faut savoir pour pouvoir répondre à la question posée*
>
> *- d'organiser les informations et de planifier les calculs sous forme d'un schéma de résolution en dissociant procédures et calculs.»*

Le texte de l'exercice de la partie découverte est très long et comporte de nombreuses données. En partant de la question posée, l'élève doit se poser des questions intermédiaires, à associer avec des opérations. Il doit pour cela utiliser un organigramme qui comporte de nombreuses flèches et étapes et est mis en parallèle avec un arbre à calculs. Un code couleur donne un statut différent aux différentes étapes: rose pour la question initiale, vert pour les données initiales et bleu pour les questions intermédiaires.

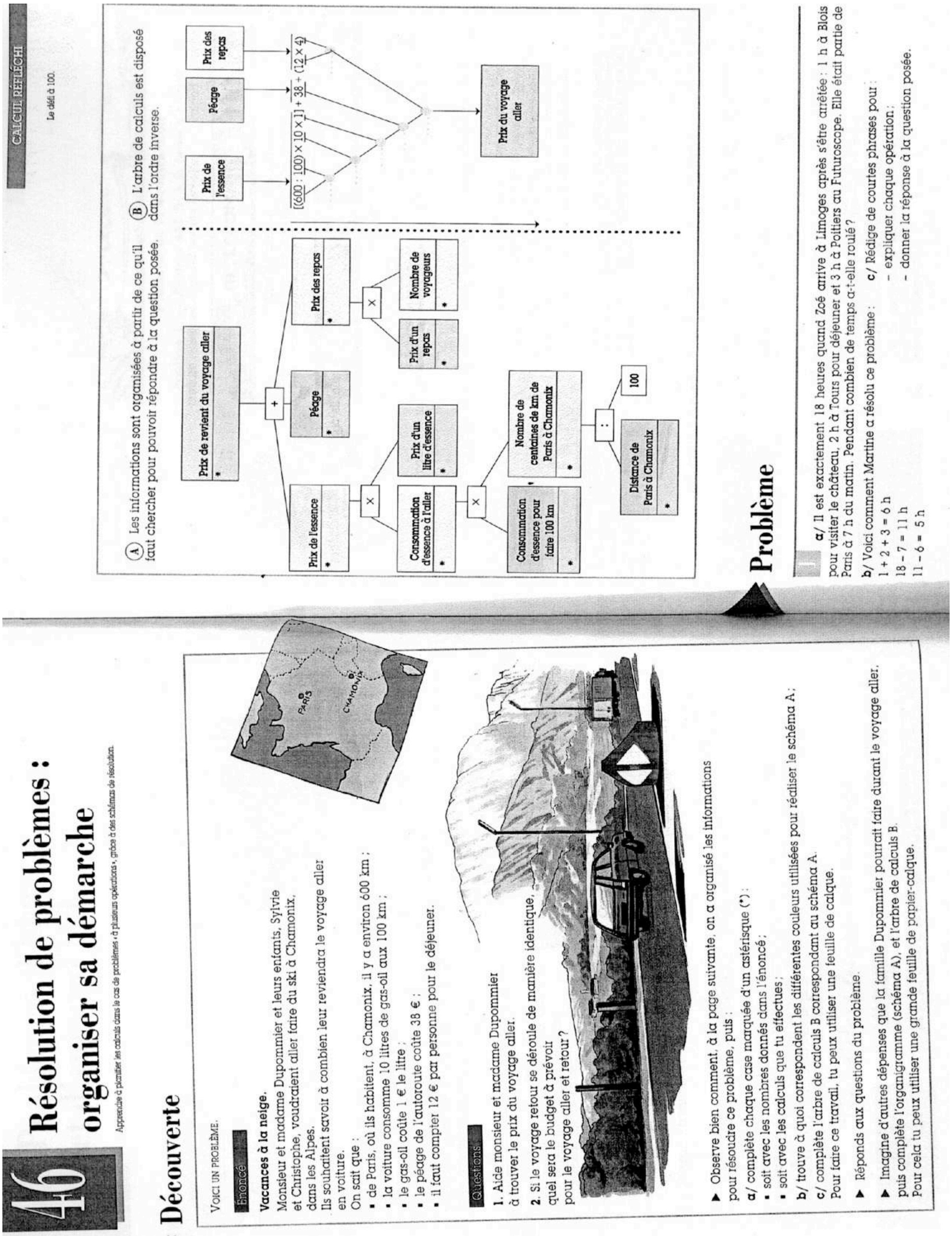
La donnée du schéma et de l'arbre à calculs oblige donc à rentrer dans une démarche non personnelle, très organisée et fermée, à comprendre un nouvel outil (en une seule séance!) alors que tous les élèves n'appréhendent pas les problèmes de la même façon. Nous pensons que cela peut donc s'avérer être plus une contrainte qu'une aide.

Le problème proposé ensuite est plus proche de ce qui a été fait précédemment. Là encore, la résolution n'est pas à la charge de l'élève, il doit juste comprendre les opérations données et rédiger la phrase réponse.

Chapitre 47: problèmes d'hier et d'aujourd'hui

Objectifs!: Résolution de problèmes classiques actuels ou issus d'anciens manuels de primaire (de 1886 à 1955).

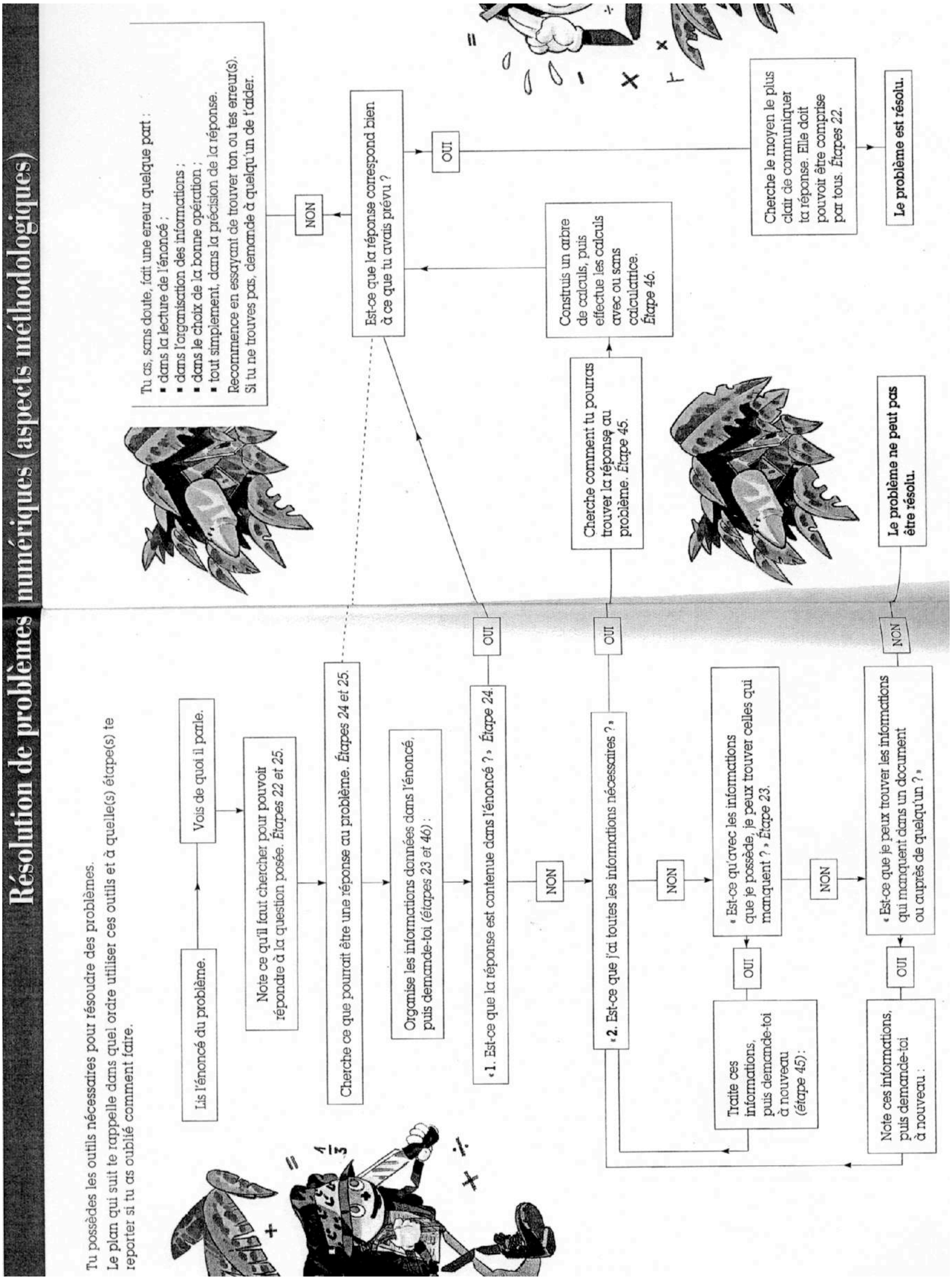
Il s'agit de petits problèmes classiques du même ordre que ceux du chapitre 45. Contrairement à la définition donnée d'un problème, là aussi, la plupart ne comporte pas de questions ouvertement formulées mais des injonctions (trouve, aide...). Les problèmes dits d'hier sont juste d'un contexte plus «dépaysant».



Chapitre 46

L'aide mémoire

Objectifs!: récapituler et organiser les uns par rapport aux autres, les différents chapitres relatifs à la résolution de problèmes.



Partie "Aide mémoire"

Cette double page, située à la fin du manuel, précise:

> *«!tu possèdes les outils nécessaires pour résoudre des problèmes. Le plan qui suit te rappelle dans quel ordre utiliser ces outils et à quelle(s) étape(s) te reporter si tu as oublié comment faire!»*

Comme pour l'étape 45, cet organigramme a pour objectif de donner des outils permettant aux élèves d'organiser leur recherche. Là aussi, tout est fixé ... Là aussi, les élèves doivent maîtriser un outil supplémentaire... et au regard du nombre d'étapes et de flèches, cela est loin d'être facile... Nous ne pensons donc pas que la donnée d'un tel schéma puisse permettre effectivement aux élèves d'apprendre à résoudre des problèmes. Savoir décrire sa recherche à l'aide d'un tel outil implique, selon nous, que l'on sache préalablement résoudre le problème. Ce n'est donc pas une aide à la recherche mais une aide à la présentation synthétique de sa recherche.

3- Conclusion! : pas de problèmes mais des exercices d'application

Au regard de cette étude, nous constatons donc que **ce manuel centre les activités** relatives à la résolution de problèmes **autour de la forme des problèmes et non de leur résolution**. **Sur les huit chapitres proposés, seuls deux conduisent les élèves à résoudre effectivement des problèmes et ceux qui sont proposés ne sont pas de véritables problèmes de recherche mais des exercices d'application.**

L'activité «résolution de problèmes» a été fragmentée en plusieurs étapes correspondant à certaines des compétences dont on peut avoir besoin pour résoudre un problème. Cependant, le fait que l'élève soit capable par exemple de poser des questions intermédiaires ne signifie pas qu'il aura *«développer des capacités à chercher*» et qu'il saura *«résoudre un problème dont il ne dispose pas de solution experte.*»

Les problèmes proposés dans ce manuel, par ailleurs, relèvent tous de l'arithmétique, hormis un exercice de géométrie. Nous pensons qu'associer systématiquement l'activité de résolution de problèmes à une activité de calcul risque d'induire une vision réductrice des mathématiques. De tels choix peuvent expliquer certaines des réponses obtenues pour le questionnaire que nous présentons et analysons au chapitre II.2.

Enfin, cette activité est limitée dans le temps. Si l'on suit la progression du manuel, une fois Février passé, il n'y a plus d'étapes qui s'y réfèrent. Que faut-il comprendre? Qu'une fois ces exercices faits, ça y est, l'élève a tous les outils pour résoudre des problèmes ? Que, dès lors, il n'a plus besoin de pratiquer?

Ainsi, non seulement les activités proposées dans *Objectif Calcul CM1* au sein de la rubrique «résolution de problèmes» n'amènent pas l'élève à résoudre effectivement des problèmes mais elles peuvent induire une conception erronée de ce qu'est un problème, et de ce que signifie «!chercher en mathématiques!». Elles donnent une définition des problèmes très réductrice et la complètent par des activités, qui peuvent, à notre avis, être par la suite source d'obstacles chez les élèves.

IV-2 AUTRES MANUELS DE PRIMAIRE

Afin d'analyser les activités relatives à la résolution de problèmes proposées dans d'autres manuels de primaire classiques, nous nous sommes appuyée, d'une part, sur un article écrit par R.M.Balmes et S.Coppé [Balmes, Coppé, 1999] pour la revue Grand N dans lequel elles ont étudié ces activités dans quatre manuels de primaire, niveau cycle 3, CM1 et ont regardé, en plus d'*Objectif Calcul CM1!*:

- Nouvelle Collection Thévenet, ed Bordas, 1996
- Collection Diagonale, ed Nathan, 1993
- Collection Quadrillage, ed Istra, 1997.

D'autre part, nous avons consulté deux autres articles écrits par C.Houdement et parus dans Grand N, un où elle a étudié les activités proposées pour le CE2 dans les manuels: *Nouvel Objectif Calcul CE2* (ed Hatier, 1995) et *Diagonale CE2* (ed Nathan, 1993) [Houdement, 1999], un autre au sein duquel elle faisait part, en collaboration avec S.Coppé, de leurs *«!réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire!»* [Coppé, Houdement, 2002],

Les manuels étudiés correspondent aux programmes de 1995, ils ont tous été réédités lors du passage à l'euro en 2000 mais n'ont pas tous eu de nouvelle parution depuis, hormis le Diagonale, dont un nouvel exemplaire est paru en 2003. Afin de proposer des ouvrages en accord avec les nouveaux programmes, les éditeurs Hatier et Istra, pour leur part, ont récemment abandonné les manuels que nous avons présentés au profit de nouvelles collections conçues, aux dires des éditeurs, «!*selon des méthodes différentes*[34].!»
Nous supposons donc, comme cela est le cas pour la classe de primaire qui a participé à nos expérimentations, que, dans la majorité des cas, l'édition de 2001 de chacun de ces manuels est encore utilisée en classe.

Aussi, estimons-nous que l'étude des manuels parus en 2001 reste un indicateur des pratiques enseignantes actuelles relatives à l'activité résolution de problèmes.

1- Définitions d'un problème

En plus de celle d'*Objectif Calcul CM1* que nous avons déjà citée, voici quelques-unes des définitions d'un problème de mathématiques relevées dans ces différents manuels:

---

[34] *Pour comprendre les maths, pour Istra et Cap Maths pour Hatier*

«!Pour rédiger un énoncé, tu dois inventer une situation, indiquer des données numériques ou non numériques et poser une!(ou plusieurs) question!(s) à laquelle (auxquelles) on peut répondre en se servant des données.!» (Quadrillage, CM1, p 130)

«!Un problème se présente sous la forme d'un énoncé qui contient des informations et une ou plusieurs consignes. ***Il faut combiner les informations***[35] *parfois en faisant un calcul, pour répondre à la consigne. Un problème comporte toujours une difficulté qu'il faut résoudre.!» (L'heure des maths CE2, lexique p.188 du livre élève, Hatier 1999)*

Ces différentes définitions sont proches de l'intitulé du chapitre 22 du manuel *Objectif calcul CM1, «!à chaque problème, sa solution!...».* Elles peuvent aussi être rapprochées de celles qui figuraient par exemple dans les instructions officielles de 1970!:!«*Il y a problème si, connaissant un certain nombre d'informations concernant une situation, on se propose de déduire de ces informations des renseignements non explicités initialement.!»*

Ainsi, même si le point de vue adopté vis-à-vis des problèmes a évolué depuis les programmes de 1970, les définitions données actuellement sont proches de celles d'il y a plus de 30 ans et restent très éloignées de notre définition d'un problème... Rien n'est dit sur les connaissances, les démarches à mettre en oeuvre. Il faut *«!combiner les informations!»*, *«!on utilise les informations de l'énoncé pour répondre aux questions!»*. Tous les éléments semblent être fournis dans l'énoncé, il n'y a pas de recherche proprement dite, la démarche de recherche apparaîtrait donc dès la lecture de l'énoncé puisqu'il suffit de trouver la bonne combinaison …
De plus, dans les définitions données en CM1, le fait que l'énoncé comporte une question semble un élément indispensable au fait d'être un problème. Or la présence explicite d'une question ouvertement formulée n'est pas forcément un élément caractéristique. Par exemple, comme nous l'avons vu dans *Objectif Calcul CM1*, certains exercices peuvent comporter une injonction telle que calcule, détermine, trace, place, montre, trouve... et susciter une situation problématique.

Au regard de ces manuels, comme C.Houdement et S.Coppé [2002] nous nous interrogeons: *«!est-il vraiment pertinent de vouloir définir un problème pour les élèves?»*, cela d'autant plus si les définitions données sont réductrices voire incorrectes!

[35] *c'est moi qui souligne*

2- Analyse des activités proposées

Comme dans *Objectif Calcul*, *CM1*, dans chaque ouvrage, plusieurs chapitres sont consacrés à l'activité «résolution de problèmes»!: 14 leçons sur 49 pour Quadrillage, 10 leçons sur 78 pour Diagonale, 10 sur 74 pour Thévenet.

Dans chacun des manuels, le découpage en différentes leçons est fait en accord avec les instructions officielles de 1995 qui présentaient différentes compétences méthodologiques à développer, comme nous l'avons rappelé précédemment. Ainsi, on trouve:

- des activités de catégorisation ou repérage: les élèves doivent identifier si ce qui est proposé est un problème de mathématiques ou non, repérer les données utiles ou inutiles, trouver quelle opération est en jeu... Généralement, aucune résolution effective n'est demandée.
- des activités visant à faire varier certains éléments de l'énoncé, formes ou contenus : place de la question, sa forme, son lien avec les données, contexte du problème, identification d'énoncés piège ou impossibles, recherche de données dans des documents différemment présentés (tableau, texte, graphique...)
- des activités de production: production de questions en relation avec des données, création de problèmes en lien avec un calcul... Ces activités ne sont pas nécessairement suivies de la résolution des problèmes produits.
- des activités de correction: corriger des solutions de problèmes produites par des élèves fictifs ou des camarades de classe.

Il nous semble, comme R.M.Balmes et S.Coppé, que l'on peut s'interroger sur l'efficacité des outils proposés. En effet, comme nous l'avons remarqué dans l'étude d'*Objectif Calcul CM1*, il n'y a pas vraiment de problèmes mathématiques à résoudre mais une juxtaposition d'activités visant une micro-compétence. Ce découpage a par ailleurs été mis en avant par Y.Chevallard et alii!:

> *«!Malgré la présence d'une certaine «!idéologie moderniste!» qui, en accord avec le mouvement 'problem solving, identifie l'enseignement des mathématiques avec l'enseignement d'une activité libre et créatrice autour de problèmes isolés, on observe une pratique d'enseignement qui a du mal à aller au-delà de l'enseignement de techniques de résolution presque algorithmiques.!»* [Chevallard, Bosch et Gascon, 1997]

Or, selon nous, un tel morcellement ne permet pas forcément au sujet de recomposer la compétence générale, comme le précise Julo dans son ouvrage *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement!:*

> *«!On a souvent voulu découper cette démarche* (de résolution de problème) *en opérations successives: lire l'énoncé, comprendre le problème, définir un plan,... Pourtant, ni la construction de la représentation, ni la*

résolution du problème en général, ne sont des processus linéaires. Il est admis, au contraire, que plusieurs processus interviennent simultanément et interagissent pour faire avancer notre compréhension et notre démarche de résolution.!» [Julo, 1995]

De plus, Houdement souligne:

> *« Une remarque générale s'impose: les propositions d'activités sous la rubrique "Résolution de problèmes" tournent beaucoup plus autour de la lecture des énoncés et l'organisation des informations. Elles se préoccupent beaucoup moins de l'entrée dans le contexte et du traitement effectif du problème. (...) Les différents textes proposés ne sont en général pas des problèmes, même au sens commun, dans la mesure où ils ont été vidés de toute intention mathématique. Le travail proposé à l'élève (...) ne contribue pas à donner une conception correcte de ce qu'est un problème. (...).!»* [Houdement, 1999]

Ainsi, comme cela était le cas pour *Objectif calcul CM1*, les activités que l'on trouve dans ces manuels risquent d'induire des conceptions erronées sur les problèmes chez les élèves, tel que le fait qu'un problème comporte forcément une question, qu'il n'a généralement qu'une solution et que s'il en a trop, cela revient à dire qu'il n'en a pas !

Les analyses de M.R. Balmes, S. Coppé et C.Houdement ont été complétées par une journée académique à l'école primaire intitulée: "Résoudre des problèmes à l'école" (Irem Lille, 9 Avril 2003). Dans le compte rendu de cette journée rédigé par C.Houdement, les remarques précédentes sont complétées par une critique des différentes tâches proposées:

> *«!Rappelons quelques-unes des consignes discutables que nous avions pointées en ajoutant un bref commentaire [ndlr!: <u>en italiques soulignées</u>]:*
>
> *• chercher si le texte proposé est un problème: <u>ce n'est pas à l'élève de faire le travail du maître, l'élève doit certes comprendre ce qu'on attend de lui mais par rapport au problème posé.</u>*
> *• chercher les informations utiles (ou inutiles) sans résoudre<u>: cette action est intimement mêlée au traitement du problème, chacun prélève les informations nécessaires en fonction des connaissances qu'il a. Proposer cette consigne fait croire aux élèves à une antériorité de la prise d'information sur le traitement du problème.</u>*
> *• chercher les informations manquantes: <u>a priori dans un problème de mathématiques scolaire classique, il ne manque pas d'infos, faire croire le</u>*

contraire contribue à accroître l'inquiétude des élèves en difficulté sur ce thème.!»

Alors que nous sommes d'accord avec la deuxième critique, nous ne le sommes pas avec les deux autres. Certes, nous pensons qu'identifier si un énoncé relève des mathématiques ou non n'a pas sa place dans une activité de résolution de problèmes proprement dite mais nous jugeons que ce type de tâche (que nous avons d'ailleurs suscitée dans le questionnaire que nous avons mis en place et présentons au sein du chapitre II.2) peut permettre à l'élève de comprendre ce que sont les mathématiques, leurs spécificités et n'est donc pas dénué de sens. Toutefois, nous considérons que cela ne doit pas faire l'objet d'une évaluation, mais juste être un outil à disposition de l'enseignant pour cerner quelles images des mathématiques sont présentes chez ses élèves et, peut être, être l'occasion d'avoir un point de vue plus philosophique sur cette discipline.

Enfin, nous n'estimons pas qu'il soit bon d'amener les élèves à penser que tout leur est systématiquement donné dans l'énoncé. Penser que toutes les données sont utiles ou que l'on a seulement besoin de ce que l'on nous donne risque d'induire chez eux là encore des conceptions erronées et créer des obstacles, par exemple, lorsqu'il faudra introduire de nouvelles variables, de nouveaux points...

Quoi qu'il en soit, comme M.R. Balmes et S. Coppé, nous sommes d'accord pour dire que ces activités sont proposées au détriment de véritables résolutions menées à terme et nous pensons qu'elles sont rarement une aide pour les élèves en difficulté dans la mesure où les intentions didactiques sont très loin de permettre la mise en oeuvre d'une démarche scientifique. Or,

> *«!il nous semble que l'on apprend à résoudre des problèmes en résolvant des problèmes, autrement dit, les outils se construisent par la pratique et sont propres à chaque individu. Ainsi, nous pensons que plutôt que d'apporter des techniques de résolution, il faut laisser les élèves les élaborer eux-mêmes. (...) Il faut traiter l'activité de résolution de problèmes en confrontant les élèves à de véritables problèmes pour lesquels ils doivent mobiliser des connaissances mathématiques, chercher, tâtonner, revenir en arrière... plutôt que des compétences méthodologiques.!»* [Balmes, Coppé, 1999]

IV-3 CONCLUSION

Ainsi, malgré la volonté de leurs auteurs de proposer des activités de «!résolution de problèmes!», aucun des manuels étudiés ne comporte de *«!véritables problèmes de recherche»*. Ceci nous amène à penser, d'une part, que proposer de telles tâches semble poser des difficultés et, d'autre part, que les problèmes de recherche ne doivent probablement pas être fréquemment proposés aux élèves lors des séances de mathématiques.

Nous faisons l'hypothèse que le découpage en rubriques développé afin d'acquérir des compétences méthodologiques ne permet pas d'apprendre à chercher en mathématiques et peut même créer des obstacles, en donnant une vision erronée de ce qu'est un problème et de ce que signifie «chercher en mathématiques». La façon dont cela est présenté par exemple dans l'organigramme donné dans la synthèse finale du manuel *Objectif Calcul CM1*, est plus proche d'un algorithme ou d'une recette de cuisine.

Même si la démarche de résolution de problème présentée dans les programmes est conforme à ce qu'elle est pour le chercheur, même si les problèmes de recherche ont une place importante dans les instructions officielles, il apparaît donc un décalage entre ce qui est défini théoriquement et ce qui est proposé dans les manuels, comme l'ont montré les recherches en didactique des mathématiques que nous avons évoquées. Ce décalage peut être expliqué, nous semble-t-il, par la difficulté à trouver et à proposer et gérer de tels problèmes accessibles dès le primaire, problèmes qui diffèrent, de part la tâche induite et leurs conditions de mise en place, des pratiques jusqu'à présent habituelles de la classe.

Toutefois, nous restons tout de même optimiste. Au regard des écueils possibles, les programmes de 2002 ont jugé nécessaire de préciser: «*ces compétences ne doivent pas être travaillées pour elles-mêmes, l'objectif essentiel devant toujours rester de résoudre le problème posé*», ce qui nous l'espérons, incitera les éditeurs à revenir sur l'organisation pédagogique des manuels. Le fait que les éditeurs Hatier et Istra par exemple, aient depuis abandonné les manuels que nous avons présentés au profit de nouvelles collections proposant des méthodes différentes nous semble un indice d'une évolution des pratiques de résolution de problèmes en classe.
Par exemple, chez Hatier, le découpage en compétences méthodologiques a été remplacé par différents chapitres intitulés «problèmes» et comportant effectivement des problèmes à résoudre. Dans l'introduction du manuel de l'enseignant CM1, il est précisé que l'on trouvera «*des séances dédiées à l'initiation à la recherche avec trois types de situations*[36]*:*

> *- des situations où il s'agit de développer des stratégies de recherche originales*
>
> *- des situations où il s'agit de s'entraîner à organiser des éléments pour faire des déductions (type jeu du portrait)*
>
> *- des situations où il s'agit d'organiser et de traiter des données dans différents contextes (vie courante, documentation..)* »

Le manuel comporte aussi une banque de problèmes offrant «!*un ensemble de plus de 100 énoncés qui peuvent être utilisés à des moments choisis par l'enseignant. Sa*

[36] *Cap maths, CM1, le guide des activités, 2003, p8/9.*

situation en fin de manuel permet d'éviter que l'élève ne se réfère à des indices relatifs aux apprentissages en cours!». Il propose aussi différentes rubriques intitulées «!Math-magazine» qui présentent différents aspects historiques des connaissances mathématiques enseignées ainsi que des jeux *«!afin de développer le goût pour les mathématiques!»* chez les élèves, «!*la pratique des jeux qui comportent une forte composante stratégique aidant au développement de l'anticipation et du raisonnement ainsi qu'à celui de l'autonomie!»,* selon les auteurs.

Si l'on regarde les énoncés proposés dans le contenu des différentes séances, certains servent à introduire une nouvelle notion, d'autres, appelés «!exercices», à la mettre en oeuvre. Les premiers sont classés sous les rubriques «!recherche» et sont ceux qui se rapprochent le plus d'une situation de recherche. Ils comportent généralement plusieurs solutions. Les élèves peuvent y mettre en oeuvre des procédures personnelles, qui associent, calculs et déductions et éventuellement activités propres à la géométrie. Il ne suffit donc généralement plus *«!de combiner les informations»* pour répondre aux questions de ces rubriques, par contre cela reste valable pour la plupart des exercices d'application.

Les énoncés de la banque de problèmes complètent ceux figurant dans les différents chapitres. Ils n'ont, sauf quelques-uns, qu'une solution et nécessitent d'avoir recours à une des notions enseignées dans l'année. Généralement, leur résolution implique la mise en oeuvre d'un ou plusieurs calculs intermédiaires et non indiqués, une ou deux démarches peuvent être suivies. Il est précisé pour trois séries de problèmes sur les quinze que *«!leur résolution nécessite de savoir s'organiser, déduire ou procéder à des calculs!»* et que les valeurs numériques sont choisies telles qu'ils puissent être «!*résolus par calcul mental, de façon à ce que la charge de calculs ne perturbe pas le raisonnement!».*

Nous considérons ces énoncés soit comme des exercices de contrôle, soit comme des problèmes ouverts au sens de Arsac et de l'IREM de Lyon [Arsac et al., 1988]. En effet, le fait qu'ils puissent être posés à tout moment de l'année peut permettre d'une part à l'enseignant de vérifier que telle ou telle notion est acquise et peut être mobilisée quand elle est nécessaire. D'autre part, cela peut conduire à faire rechercher aux élèves des problèmes pour lesquels ils ne disposent pas de procédure experte, cela notamment pour ceux repérés par une puce bleue et présentés par les auteurs du manuel comme de *«!véritables questions de recherche!».*

Il est tout de même regrettable que dans la table des matières du manuel de l'élève soient donnés les numéros des exercices de la banque de problèmes se référant à la notion abordée...

L'ensemble des énoncés figurant dans ce manuel amène à faire travailler les différentes compétences pointées relatives à l'activité de résolution de problèmes dans les instructions officielles et qui étaient répertoriées dans des rubriques spécifiques dans *Objectif Calcul, CM1* telles que!:

- rédiger un énoncé auquel la réponse à la question doit être une opération donnée dans le manuel,

• valider ou corriger des solutions proposées pour des problèmes,

• tirer des informations de divers documents (texte, graphique, tableau...).

Contrairement à *Objectif Calcul*, ces activités n'ont plus de place à part, elles sont intégrées aux activités de résolution de problèmes «!traditionnelles».!, les compétences associées ne sont donc plus *«!travaillées pour elles-mêmes!»*.

Le nouveau manuel édité par Hatier propose donc des activités qui conduisent les élèves à résoudre des problèmes. Nous trouvons également intéressant qu'il comporte des séries de problèmes qui mettent en avant le raisonnement, la déduction. Toutefois, même si cela est une nette avancée par rapport à ce qui était proposé jusqu'alors, nous regrettons tout de même que les énoncés soient toujours des situations particulières et n'amènent jamais à généraliser ou à trouver des méthodes de résolution générales et surtout que les problèmes ou exercices proposés comportent toujours une solution, les élèves ne sont donc là aussi jamais confrontés à l'impossibilité en mathématiques.

Regardons maintenant ce qu'il en est des activités proposées par l'équipe *ERMEL* et l'INRP, suite à leurs réflexions sur l'apprentisssage des mathématiques en général et plus particulièrement la résolution de problèmes.

V- LES OUVRAGES *ERMEL*

La collection *ERMEL* est une série d'ouvrages qui résultent de nombreuses années de recherches et d'activités expérimentales par l'équipe de didactique des mathématiques de l'I.N.R.P.

Cette équipe, composée de formateurs en IUFM et de professeurs des écoles, a analysé entre autre les pratiques et les difficultés de l'enseignement des nombres, du calcul et de la résolution de problèmes au cycle des apprentissages fondamentaux et pour celui des approfondissements. Ces études ont débouché sur la publication de plusieurs ouvrages chez *Hatier pédagogie*.

Afin de voir quelle est la place accordée à l'heuristique dans les situations proposées et identifier comment les situations recherche se positionnent par rapport à ces initiatives, nous allons nous appuyer sur les éditions traitant du cycle 3.

Dans les ouvrages *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CE2, CM1 et CM2*, nous regarderons plus précisément les situations identifiées comme «!problèmes pour chercher», les autres étant surtout des situations-problèmes visant à l'acquisition d'une connaissance notionnelle.

Nous étudierons également *Vrai!? faux!? On en débat... de l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*, ouvrage qui présente plus en détail les situations issues du domaine numérique figurant dans les ouvrages précédents qui conduisent à

une preuve, et analyse leurs caractéristiques, les conditions de gestion et le rôle du maître lors des débats argumentatifs.
Nous nous appuierons sur les activités qu'il regroupe pour dresser un état de l'offre.

Présentation des caractéristiques des situations figurant dans Vrai!? faux!? On en débat...

Situation	Type de problème	Nombre de solutions	Tâche	Niveau
3 nombres qui se suivent	2 contraintes	1 ou aucune	Trouver des solutions Preuve de l'inexistence solution	CM1
Piscine	optimisation	1, plusieurs ou aucune	Trouver des solutions Preuve de l'inexistence solution	CM1
Plus grand produit	optimisation	1	Recherche d'une méthode	CM1 CM2
Golf	exhaustivité	1, plusieurs	Recherche d'une méthode pour garantir l'exhaustivité	CM2
Somme et différence	2 contraintes	1 ou aucune	Trouver des solutions Preuve de l'inexistence solution	CM2
Somme des n premiers entiers	dénombrement	1	Recherche d'une généralisation	CM2

Ainsi, plusieurs des situations proposées ont des caractéristiques communes avec les situations recherche. Elles comportent une, plusieurs ou aucune solution selon les valeurs choisies, nécessitent de développer des stratégies de recherche, conduisent à prouver, rechercher des méthodes... Cependant, cela est beaucoup plus guidé que ce que nous proposons comme nous allons le montrer à partir de deux exemples proposés pour le CM2: la situation «!Golf!» qui comporte plusieurs solutions et le recours à l'exhaustivité et «!Somme et différence», qui conduit à la preuve de l'inexistence de solution.

V-1 EXEMPLE DE DEUX SITUATIONS! : «! GOLF! » ET «! SOMME ET DIFFERENCE! »

1- «! Golf! » ou comment faire N avec deux nombres!

Il s'agit d'atteindre un nombre N en ajoutant des multiples de deux autres nombres, n_1 et n_2. Exemple!: atteindre 23 avec 2 et 5.
Une solution est!: 23=5+5+5+2+2+2+2 ce qui peut sécrire 23=3*5+4*2.

Selon le choix de N, n_1 et n_2, on peut trouver plusieurs solutions et dans ce cas chercher si on les a toutes.
Ainsi, cela semble proche de ce que nous supposons qu'il est susceptible de se passer avec les situations recherche.

Toutefois, si l'on se penche sur les conditions de mise en place, on s'aperçoit que la situation est très guidée. Les valeurs N, n_1 et n_2 sont choisies par l'enseignant, qui oriente les élèves vers la recherche d'une méthode garantissant l'exhaustivité!: étude de N=41, n_1= 8 , n_2=3 (2 solutions), puis N=97, n_1= 8 , n_2=3 (4 solutions) et enfin N=92, n_1= 5, n_2=3 (6 solutions).

2- «Somme et différence»

Trouver deux nombres entiers dont on connaît la somme S et la différence D.

Une solution existe si et seulement si S et D sont de même parité.
Là encore, tout est très guidé. Les élèves cherchent d'abord les cas S=49 et D=3, S=43 et D=17 puis S=38 et D!=16, S=40 et D=6, S=73 et D=9 ... qui ont tous une solution. Puis lors d'une deuxième phase, ils sont confrontés à S=32 et D=7 qui n'en a pas et doivent rechercher une preuve.

V-2 POSITION PAR RAPPORT AUX SITUATIONS RECHERCHE

Comme nous l'avons vu au travers des deux exemples précédents, les situations proposées dans *ERMEL* sont assez proches des situations recherche si l'on se place au niveau des tâches induites. Cependant, si l'on creuse un peu, plusieurs différences apparaissent.

Tout d'abord, elles n'amènent pas à mettre en oeuvre toutes les étapes de la démarche de recherche en mathématiques mais sont choisies de manière à en faire travailler plus particulièrement un des aspects. Il peut s'agir de rechercher une preuve ou une méthode de construction générale ou encore une méthode de recherche garantissant l'exhaustivité.

Leur présentation aux élèves, par ailleurs, est très guidée. Les énoncés sont toujours reformulés par l'enseignant qui assigne des valeurs aux variables, alors que nous pensons qu'il serait possible de laisser plus d'initiatives aux élèves. Reprenons nos deux exemples précédents.
Le problème **«! Golf! »** pourrait être posé sous sa forme générale puis **les élèves choisissent les valeurs de n_1 et n_2** qu'ils veulent étudier et voient tout d'abord quels nombres ils peuvent atteindre en ajoutant des multiples de n_1 et n_2. Ils peuvent ensuite chercher quel est le plus grand nombre N qu'ils obtiendront ainsi et généraliser.
Pour **«Somme et différence»,** le problème pourrait aussi être posé de façon plus ouverte!:

Soient deux entiers non nuls S et D tels que S>D. Quels couples (x,y) du plan peut-on atteindre tels que S = x+y et D =x-y ?!

Alors les choix des valeurs n'apparaîtront pas comme «!parachutés!», les élèves seront amenés à choisir S et D et donc avoir l'occasion de prendre conscience qu'il vaut mieux qu'ils commencent leurs recherches sur de petites valeurs, puis à généraliser leurs observations.

Enfin, ces deux situations se situent exclusivement dans le champ numérique et font appel à des notions précédemment enseignées, des pré requis sont donc nécessaires. Cela est à mettre en relation avec le point de vue adopté par les auteurs d'*ERMEL* sur les corrélations entre les différents types de problèmes présents dans l'enseignement des mathématiques et l'activité de résolution de problèmes, qu'ils résument par le tableau suivant!:

		Modèle de résolution connu	Modèle de résolution inconnu
Informations	Disponibles	problèmes d'application!: pas d'objectif relatif à la résolution de problème	problèmes de recherche (problèmes «!ouverts!»)
	Nécessité de - trier - rechercher - décomposer - organiser	problèmes complexes!: la résolution comporte des étapes qui ne sont pas précisées par des questions intermédiaires	

Ainsi, ils estiment que *«!des situations, dans lesquelles le modèle de résolution serait inconnu et les informations nécessaires à la représentation du but à atteindre non disponibles ou trop difficiles à organiser, apparaîtraient trop confuses aux élèves et ne leur permettraient pas de contrôler leurs résultats et leurs méthodes. De telles situations, inutilement compliquées ne pourraient servir aucune finalité d'apprentissage et démobiliseraient les élèves.!»*[ERMEL,1997, p49] ce qui explique qu'une case soit restée vide.

Ils affirment donc qu'une situation pour laquelle le modèle de résolution est inconnu et les informations non disponibles sans phase de recherche est forcément inabordable pour les élèves de primaire, car comportant trop d'incertitudes. Or, par définition, les situations recherche que nous développons sont telles que le modèle de résolution est inconnu et que les informations doivent être construites, notre hypothèse étant qu'elles peuvent être accessibles dès l'école primaire!! Aussi, **allons-nous attacher à montrer au cours de nos expérimentations que les situations**

recherche peuvent constituer les éléments manquants du tableau et prendre place dans la case laissée vide.

De façon générale, nous estimons donc que les situations proposées par *ERMEL* sont des situations au cours desquelles les élèves peuvent effectivement être sensibilisés à la démarche de recherche en mathématiques, ils y sont confrontés à l'impossibilité, la preuve, l'exhaustivité... Nous les considèrerons comme des situations recherche uniquement sur support papier-crayon et « aménagées», étant donné qu'elles sont présentées de manière fermée et très guidée. L'élève y est en position de chercheur mais n'est pas gestionnaire de la recherche.

VI- AUTRES INITIATIVES PRESENTES DANS L'INSTITUTION SCOLAIRE!

VI-1 MATHS EN STOCK! : ATELIERS DE RECHERCHE EN MATHEMATIQUES A L'ECOLE PRIMAIRE

Expérimenté depuis 8 ans dans quelques classes de l'école primaire du Var, essentiellement des cycles 3, le dispositif *Maths en Stock*, à l'initiative de P.Eysseric[37], est proche du projet *Maths à modeler* et comme lui, vise «*!la mise en place d'un lieu et d'un temps pour le plaisir de chercher en mathématiques dès l'école primaire. (...) dans la volonté de transposer dans la classe du chercheur en mathématiques, en se centrant plus sur le processus que le résultat!*». [Eysseric, 2002]. Les recherches mathématiques se déroulent dans la classe avec l'enseignant de celle-ci afin «*!d'éviter de produire un dédoublement des mathématiques dans la tête des enfants!: d'un côté les "maths sympa" du club math ou de l'intervenant extérieur et de l'autre les "maths rasoir" de la classe du maître ou de la maîtresse.!*» [op cit].
Il est à noter que ce dédoublement semble par ailleurs exister a priori chez de nombreux élèves comme nous le verrons dans la deuxième partie de cette thèse, certains distinguant deux types de mathématiques!: «*les vraies*» celles de l'école et les « *pour s'amuser*» présentées dans l'institution de loisir scientifique.

Les Ateliers de Recherche en Mathématiques ou ARM ont lieu à raison de 30min à 1 heure par semaine. Un chercheur (professionnel ou amateur) suit les élèves à distance dans leurs recherches, vient dans la classe lors de rendez-vous particuliers pour faire le point, écouter les arguments des élèves, valider ou invalider les résultats mis à jour, débattre, relancer la recherche. Les recherches se finalisent par la participation à un congrès annuel rassemblant l'ensemble des classes du département impliquées dans le projet, afin d'amener les élèves à communiquer à autrui leurs résultats, étape apparue nécessaire au cours de ces huit années car incitant les élèves à rentrer totalement dans l'activité de recherche en mathématiques.

[37] *P.Eysseric est professeur de mathématiques à l'IUFM d'Aix en Provence.*

Les ARM sont en quelque sorte le pendant des actions *MATHs.en.JEANS*[38] (que nous présentons ci-après) pour l'école primaire, hormis le fait qu'ils se passent dans le temps scolaire et ne fonctionnent pas sur le volontariat. Ils *«!sont intégrés dans le fonctionnement ordinaire de la classe!»*.[op cit.].
Les sujets de recherche peuvent être à l'initiative d'un chercheur ou de l'enseignant lui-même. Certains sont extraits de rallyes mathématiques ou des fiches jeux de l'APMEP (ils sont étudiés tels quels puis un nouveau problème plus ouvert pour lequel le problème initial est un cas particulier est identifié par la classe puis cherché), d'autres sont «!*des situations ouvertes encadrées!*». Par exemple, un enseignant de CE2 a proposé la situation suivante!: *«!on jette trois dès!»* puis il a demandé aux élèves de rechercher toutes les questions que l'on pouvait se poser. Une fois listées et triées, chaque élève a été invité à choisir de chercher à répondre à l'une d'entre elles. D'autres sujets d'ARM enfin sont similaires à nos situations recherche!: pavage de polyminos par un type de polyminos donné, par exemple.
Parfois, un support matériel est utilisé!: jeux de stratégie, machines à calculer, ficelles et noeuds, motifs géométriques à reproduire, solides à construire...

Ce dispositif est encore à l'état de projet. Son existence et sa pérennisation montrent que faire chercher en mathématiques, au sens où nous l'avons défini, dès l'école primaire est réalisable et que de nombreux enseignants sont prêts à se lancer dans l'aventure, même si au préalable ils estimaient!*«!mais nous ne sommes pas assez bons en mathématiques pour faire cela!!!»*.
Il soulève, par ailleurs, plusieurs questions similaires à celles induites par le projet *Maths à modeler!*: quels apprentissages inhérents aux ARM? Quel impact réel sur la façon d'aborder les mathématiques!? les problèmes!? comment amener les élèves à passer du stade de *joueur* à celui d'*actant*!? le dispositif peut-il survivre si l'ARM est imposé à chaque enseignant comme une activité du programme parmi d'autres!? Notre thèse contribuera, nous l'espérons, à apporter des éléments de réponse à certaines d'entre elles.

VI-2 LES CLUBS DE MATHEMATIQUES

En plus des cours de mathématiques, dans certains établissements scolaires, des **clubs de mathématiques** sont mis en place à l'initiative d'enseignants. Ces clubs proposent différentes activités autour des mathématiques. Afin d'identifier quelles peuvent être les activités proposées nous nous appuierons sur les publications de l'association *Animath*, association créée en 1998 qui s'est fixé comme objectif le développement de clubs et ateliers mathématiques dans les collèges et les lycées et qui mène une réflexion en amont sur leur mise en oeuvre. Elle a en particulier organisé deux universités d'été sur ce thème en 1999 et 2001 intitulées!: *Créer et animer un*

[38] *Nous présentons ce projet plus en détails dans les pages suivantes.*

atelier de mathématiques dans son collège ou son lycée et une en 2003 sur *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire* au cours de laquelle l'erté *Maths à modeler* a été invitée à encadrer plusieurs ateliers autour des situations recherche.

1- Des activités diverses et variées

Si l'on se réfère aux différentes approches présentées dans les actes de ces universités d'été, le contenu des clubs mathématiques peut être rapproché de certaines initiatives mises en place dans l'institution de loisir scientifique que nous allons présenter dans la deuxième partie de cette thèse!: recherche autour de l'histoire des mathématiques, la numération, fabrications d'objets mathématiques (par exemple polyèdres en papier), de frises, pliages, jeux de formes, pavages, construction autour du nombre d'or, fractales, réalisation d'expositions... Bien souvent, ces activités amènent les élèves à faire quelque chose d'enrichissant et de distrayant avec les mathématiques mais pas à en faire effectivement au sens où nous l'avons défini.

Parmi ces activités, on trouve également l'utilisation de jeux du commerce (Qui est-ce!? Puissance 4, Quads, Abalone, tangram, Réflexion, Jipto etc...), de jeux tirés des fichiers développés par l'APMEP, de jeux extraits des concours types Kangourou des mathématiques[39], Championnat de France de Jeux Mathématiques[40] ou autres quizz ou rallyes... qui peuvent pour leur part conduire à chercher en mathématiques. Leur formulation est ludique et, mis à part ceux du commerce, la majorité des jeux ou énigmes relève d'un des types de jeux que nous avons recensés sur internet et que nous détaillerons lors de notre présentation des différentes actions mises en place dans l'institution de loisir scientifique. Ils impliquent bien souvent de mettre en oeuvre un raisonnement déductif et ne montrent pas les autres aspects de la recherche en mathématiques!: essais, conjecture, preuve... De plus, comme les activités relevées précédemment dans les manuels, ils comportent pour la majorité d'entre eux une méthode de résolution et une solution et une seule. Enfin, soit le modèle mathématique est inaccessible comme par exemple pour un grand nombre de jeux du commerce, soit les jeux ont été élaborés dans l'optique de faire utiliser une connaissance mathématique notionnelle, par exemple de nombreux jeux conduisent à

[39] *jeu-concours organisé tous les ans, depuis 1991, Il est réservé aux élèves (à partir du CE2 dans les écoles et à tous les élèves de collèges, de lycées ou de niveau supérieur) et a lieu à l'initiative de membres de l'équipe éducative de l'établissement scolaire. L'épreuve de 50 min consiste en un questionnaire à choix multiples de 24!questions (16!questions pour les CE2), de difficulté croissante, pour chacune desquelles cinq réponses sont proposées!; il n'y a qu'une seule bonne réponse par question.*

[40] *Organisé par la FFJM, ce championnat s'adresse à tous, des élèves de l'école primaire aux adultes (sept catégories) et réunit annuellement 100 000 participants. Les concurrents doivent résoudre un certain nombre de problèmes (de 5 à 18) en une durée limitée. Le nombre et la durée varient selon la catégorie. Il arrive que les problèmes destinés aux élèves de 4ème et plus comportent aucune, une ou plusieurs solutions.*

avoir recours au calcul par les quatre opérations, aux tables de multiplication, à la symétrie, la géométrie dans l'espace...

2- MATHs.en.JEANS

Certains clubs de mathématiques présentés au cours des universités d'été d'*Animath* invitent les élèves à faire de la recherche en mathématiques dans l'esprit du projet *Maths à modeler*. Plusieurs d'entre eux sont mis en place en partenariat entre un enseignant et au moins un chercheur en mathématiques, notamment par le biais de l'association *AMEJ* appelée plus couramment *MATHs.en.JEANS* (Méthode d'Apprentissage des Théories mathématiques en Jumelant des Établissements pour une Approche Nouvelle du Savoir).

Action «!pilote». en 1989-1990, dans le cadre de la reprise par le CNRS et l'Éducation Nationale du projet "1000 classes-1000 chercheurs, elle constitue actuellement «!*une "institution de référence" pour son action innovante dans le monde de l'éducation scientifique et de la popularisation des mathématiques!*»[41] et collabore activement avec l'équipe CNAM depuis de nombreuses années, en particulier en étant impliquée dans le projet *Maths à modeler*.

L'AMEJ organise *«!des ateliers de pratique mathématique!»* en milieu scolaire (principalement collège et lycée pour l'instant, mais récemment une tentative d'ouverture à l'école primaire a été engagée) et universitaire dans une cinquantaine d'établissements ou universités. Ces ateliers fonctionnent en dehors des heures de mathématiques, le plus souvent sous forme de jumelage.

> *«!Ingrédients types : 1 mathématicien(ne), 2 établissements, avec, dans chacun, un enseignant et une vingtaine d'élèves qui choisissent cette activité!; un bouquet de sujets à la fois attractifs et sérieux!; un calendrier prévoyant, sur l'année, un atelier hebdomadaire (travail collectif en petit groupes de 1h30 à 2h) , 4 "séminaires" réunissant tous les participants, et une présentation "officielle" des résultats (communication en congrès + article). Et, bien sûr "une méthode" de régulation de la recherche...!»* [28]

Tous les élèves sont invités à y participer volontairement quel que soit leur niveau en mathématiques.

Du fait de la collaboration entre les chercheurs de l'équipe CNAM et ceux qui sont à l'initiative de *MATHs.en.JEANS* (certains sont même investis à part entière dans les deux projets), les sujets de recherche sont proches voire similaires avec certaines des situations recherche que nous proposons, ils sont ouverts, plusieurs pistes peuvent être suivies, il peut y avoir une, plusieurs ou aucune solution... Cependant ils ne sont pas nécessairement accessibles à tous, certains demandant d'utiliser des connaissances notionnelles.

---

[41] *source, site de l'AMEJ!: www.mjc-andre.org/pages/amej/accueil.htm*

VII- HYPOTHESES SUR LE RAPPORT DE L'INSTITUTION SCOLAIRE VIS-A-VIS DES MATHEMATIQUES ! : UNE VOLONTE MAIS PEU D'ACTIONS Y REPONDANT

Nous faisons l'hypothèse, suite à notre étude, que le rapport institutionnel de l'institution scolaire française vis-à-vis des mathématiques est ambigu.
D'un côté, « ! la tête ! », les programmes, sont en accord avec les pratiques expertes. Ils décrivent l'activité de recherche en mathématiques comme ont pu le faire les chercheurs dans l'ouvrage de Nimier que nous avons présenté [Nimier, 1989].
De l'autre, « !les mains ! », les pratiques de terrain, les manuels, cherchent à les mettre en application mais semblent ne pas y parvenir. Les manuels classiques de primaire par exemple proposent un découpage en micro-compétences et une réduction de la démarche de recherche à l'application d'algorithmes. Les problèmes (ou tout du moins tenus pour tels) comportent pour le plus grand nombre, bien souvent une solution, une seule méthode de résolution et se situent dans le champ numérique. L'impossibilité et le besoin de preuve qui en découle y sont très peu rencontrés.
Il y a donc contradiction, car nous faisons l'hypothèse que les activités proposées dans ces manuels ne peuvent amener *« !dès le cycle 2, les élèves [à] prendre conscience du fait que résoudre un problème ne revient pas à trouver, tout de suite, les calculs à effectuer pour répondre à la question posée. Une élaboration est, en général, nécessaire, faite d'étapes ou d'essais plus ou moins organisés »* comme le préconisent les dernières instructions officielles de primaire.

Pourtant des initiatives se développent et montrent qu'il est possible de proposer des activités de résolution de problèmes où l'élève <u>cherche</u> effectivement, comme le chercheur. Cependant, la plupart n'ont pas encore une place à part entière dans la classe de mathématiques et ont lieu, certes à l'école, mais en dehors des cours. Or, nous estimons qu'il est important que l'heuristique en mathématiques et ses différentes composantes soient identifiées par les élèves comme relevant de l'enseignement des mathématiques, afin qu'ils les intègrent dans leur rapport personnel aux mathématiques, ce qui, nous le verrons dans la partie II, n'est pas le cas pour tous.

Nous allons maintenant analyser quel peut être l'apport des situations recherche dans cette mise en recherche des élèves dans le cadre du cours de mathématiques, à partir d'une expérimentation autour de la situation recherche *La roue aux couleurs* que nous avons précédemment présentée et analysée.

Cette expérimentation se situe dans l'institution scolaire. Nous l'avons considérée selon plusieurs points de vue.

Elle peut être vue, d'une part, comme l'expérimentation d'une nouvelle situation recherche, *La roue aux couleurs*, afin d'identifier dans quelle mesure elle permet aux élèves de rentrer dans une démarche de recherche en mathématiques à travers l'étude des stratégies de recherche, des difficultés rencontrées ainsi que celle de l'influence du support ludique. Pour ce faire, une première expérimentation a été menée en DEUG, au cours de mon année de DEA et a fait l'objet d'une analyse détaillée dans mon mémoire dont nous présenterons ci-après les éléments principaux. [Godot, 2002]

Par ailleurs, un des objectifs de notre recherche étant de proposer des outils permettant de chercher en mathématiques dès le début du cursus scolaire, elle a été ensuite poursuivie par trois expérimentations, au cours de mes années de thèse. Les deux premières d'entre elles ont étudié la dévolution de *La roue aux couleurs* au cours moyen de l'école primaire et en classe de 6ème. La dernière a été conduite afin d'identifier plus précisément quelle gestion pouvait être mise en place pour permettre à une classe de primaire notamment de *«!s'apparenter à une communauté mathématique»*, tout au long d'un trimestre.

Enfin, la diversité des niveaux scolaires pour cette situation expérimentale, a aussi pour but d'évaluer si la situation «roue» est accessible ou non quel que soit le niveau scolaire afin de savoir dans quelle mesure elle peut être proposée au sein de l'institution «!loisir scientifique» et d'énoncer des hypothèses sur ce qu'il est susceptible de s'y passer.

Plus précisément, nous cherchons à répondre aux questions suivantes:

Pour amener des éléments de réponse à Q1: étude la dévolution

- Quelles sont les stratégies susceptibles d'être développées par les élèves? À quels résultats (solutions, conjectures, contre-exemples, méthodes, preuves) ont-ils abouti!?
- Quelles sont les influences du «!jeu!matériel» vis-à-vis de l'avancée dans le problème et des stratégies mises en oeuvre? A t-il un rôle différent en fonction du niveau scolaire?

Pour amener des éléments de réponse à Q2: étude des apprentissages

- Quelles sont les difficultés propres à chaque niveau scolaire? En existe-il qui soient récurrentes d'un niveau à l'autre?
- Quels peuvent être les apprentissages induits par cette situation recherche?

• Quelles peuvent être les influences du «!jeu!matériel» vis-à-vis de ces apprentissages!?

Pour amener des éléments de réponse à Q3: étude de la gestion

• Quelle gestion proposer afin qu'une classe devienne une communauté de jeunes chercheurs? Quels peuvent être les apports des outils et de l'organisation didactique mis en oeuvre?

Chapitre I.2

ENONCE DU PROBLEME

Partant du problème général, nous avons cherché à formuler un énoncé répondant aux caractéristiques des situations recherche que nous avons présentées dans notre introduction et qui puisse être associé à un support matériel, compte tenu de notre problématique. Afin de vérifier l'accessibilité à tous, il sera posé de la même manière quel que soit le niveau scolaire.

I- UN ENONCE OUVERT

Compte tenu de la définition d'une situation recherche que nous avons donnée, nous avons posé le problème sous une forme ouverte afin d'observer les stratégies de recherche et les outils qui pouvaient être mis en place ainsi que les cas qui pouvaient être étudiés. Il se présentera sous la forme d'une question et ne comportera, dans un premier temps, **aucune indication quant aux cas à étudier et à la manière de coder et représenter les données**.
Dans un deuxième temps, nous prévoyons une relance afin d'orienter vers les cas (n,2) ou (n,n) et ainsi amener les élèves, s'ils n'y sont pas parvenus seuls, à l'étude de cas n'ayant pas nécessairement de solution. Notre objectif ici est d'étudier **la gestion de l'inexistence de solution**.

II- UNE FORME LUDIQUE

Étant donné que nous désirons proposer cette situation recherche au plus grand nombre, nous avons, d'autre part, cherché une formulation ludique en le présentant sous la forme d'un jeu de fête foraine appelé *La roue aux couleurs*. Nous faisons l'hypothèse que présenté ainsi, la dévolution du problème sera facilitée, car cela apparaîtra comme plus attractif, notamment pour les niveaux élémentaires.

Nous avons bien sûr également fourni un support matériel afin d'analyser quel pouvait être son rôle.

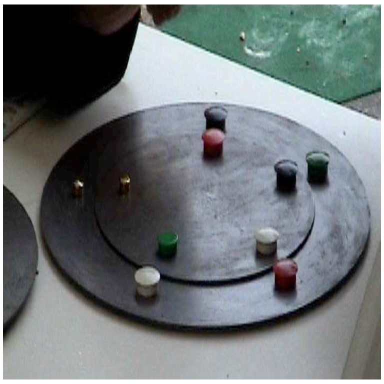
III- L'ENONCE PROPOSE

Le problème était posé de la façon suivante :

La roue aux couleurs

Un forain propose un jeu constitué de deux disques de tailles différentes, disposés de façon concentrique. Sur le plus grand disque, il pose un certain nombre de pions, **tous de couleurs différentes**.

Principe du jeu!:



Le joueur doit placer sur le petit disque **le même nombre de pions** que sur le grand disque. Ces pions peuvent être de une, deux, trois, quatre couleurs ou plus choisies parmi les couleurs disposées sur le grand disque par le forain.

On fait ensuite tourner le petit disque, cran par cran. **Le joueur gagne** si, dans chaque position du petit disque, **un et un seul de ses pions est de la même couleur** que celui qui lui correspond sur le grand disque.

Comment le joueur doit-il choisir et disposer ses pions pour gagner!?

Chapitre I.3

QUELS OBSERVABLES! ?

Suite à l'analyse mathématique et au regard des questions que nous nous posons, nous avons choisi différents éléments d'analyse relatifs aux productions des élèves et à la gestion mise en place.

I- POUR OBTENIR DES ELEMENTS DE REPONSE SUR LA DEVOLUTION

I-1 POINT DE VUE SUR LA RECHERCHE

1- Stratégies de recherche

La situation que nous mettons en place est une situation d'action dans la mesure où aucune indication dans l'énoncé n'est donnée pour suggérer comment aborder le problème.

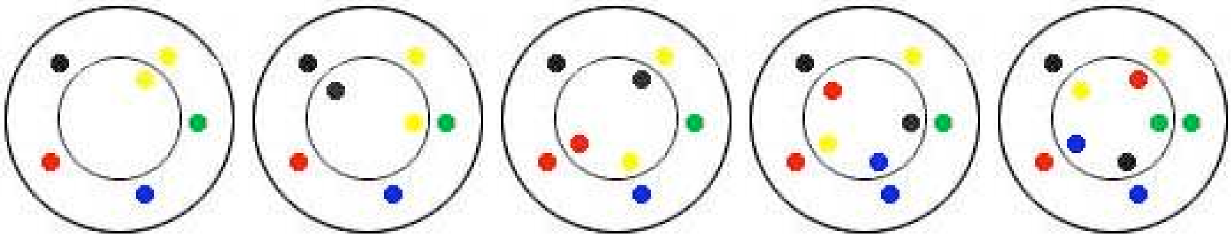
Comme nous l'avons souligné dans l'analyse mathématique et didactique de ce problème au chapitre précédent, nous pensons que, compte tenu des caractéristiques de la situation, plusieurs types de stratégies de recherche peuvent être mis en place lors d'une recherche sur support papier-crayon:

- S_{ordre} recherche par le biais de l'ordre
- S_{sym} recherche par le biais de la symétrie
- S_{arith} recherche par le biais de la parité
- S_{graphe} recherche par le biais de graphes
- S_{dec} recherche s'appuyant sur l'idée de décalages

Dans la mesure où la situation est introduite à l'aide d'un support matériel, nous souhaitons étudier, dans un premier temps, en fonction des niveaux scolaires, si ces stratégies vont tout de même apparaître et sous quelles conditions. Nous ne pensons pas qu'elles seront mises en oeuvre de manière équivalente selon la classe à laquelle appartiennent les élèves.

S_{arith} et S_{graphe} sont fortement liées au support papier-crayon, nous supposons donc qu'elles sont moins susceptibles d'être développées par les élèves de primaire ou collège, cela d'autant plus que S_{arith} nécessite d'avoir introduit un codage des couleurs par le biais de nombres.

Enfin, nous cherchons également à repérer si d'autres stratégies seront mises en oeuvre, inhérentes à une recherche avec un support matériel. En effet, il est alors possible, par exemple, de poser les pions centraux l'un après l'autre en faisant tourner la roue d'un cran à chaque fois. Cela donne pour n=5, si l'on choisit de tourner la roue intérieure dans le sens des aiguilles d'une montre:



Il est à noter que cette méthode est généralisable à tout couple (2p+1,2p+1) sous réserve d'avoir recours à un ordre adéquat pour fixer les pions les uns après les autres, tous les ordres n'aboutissant pas à une solution. Par exemple, dans le cas (5,5), numérotons les couleurs de 0 à 4 dans le sens des aiguilles d'une montre, le zéro étant associé à la couleur Jaune. Mettons ce 0 en face à face. On fait tourner, on place la 2, on fait tourner, on a le choix entre placer la 1 et la 4.
Si on choisit la 1. On fait tourner mais il ne nous reste que les couleurs 3 et 4 à placer et aucune ne seront en face à face.
Si on choisit la 4. On fait tourner, on place la 1 (seule possiblité). On fait tourner, on place la 3 et c'est gagné!!

2- Avancée dans le problème

Nous voulons déterminer jusqu'où les joueurs vont avancer dans la résolution et quels résultats ils vont mettre à jour. Nous les classerons ainsi :

- Données de solutions particulières
- Recherche de généralisation, en particulier!:
  - Énoncé de méthode de construction générale
  - Conjecture sur l'inexistence de solution
- Recherche de preuves

Compte tenu de nos analyses mathématique et didactique de la situation, nous supposons que plus le niveau scolaire sera élémentaire, moins des preuves seront recherchées. En effet, la démonstration ne fait partie du contrat didactique qu'à partir de la classe de $4^{ème}$ et, bien souvent, n'apparaît pas comme une nécessité épistémique chez les élèves, même pour ceux du supérieur!! Cependant, nous nous attacherons alors à relever dans les productions, l'existence éventuelle d'éléments relatifs à la mise en oeuvre d'une argumentation mathématique, définie par les auteurs d'*ERMEL* comme un prémisse à la preuve formelle: *«il appartient aux élèves de primaire de percevoir la spécificité de l'argumentation mathématique!:!pour affirmer qu'une propriété est vraie, il faut trouver une connaissance ou une propriété qui* *recouvre le cas correspondant et sur lequel on peut s'appuyer. (...) L'argumentation mathématique consiste à établir au moyen de raisonnement la valeur de vérité d'une proposition mathématique. (Elle) doit comporter, comme argumentation heuristique, des «!sous-programmes!» de raisonnement valide, même si on ne sait pas encore relier ces différents sous-programmes pour arriver à un arbre déductif complet qui corresponde à la démonstration.!».!* [ERMEL 2004, p42-43]!

De plus, dans la mesure où ces étapes apparaissent, nous distinguerons celles qui se situent au niveau local et sont attachées à un couple (n,k) particulier, par exemple (4,4) et celles qui sont relatives au niveau global, par exemple à l'étude de (n,n), ∀n. Nous regarderons également comment a lieu la validation des dispositions.

I-2 Role du support materiel

1- Vocabulaire employé

Afin de savoir si le problème posé sous la forme *La roue aux couleurs* peut être perçu comme un jeu, quel que soit le niveau scolaire, nous allons regarder comment s'opère la dévolution du problème, en s'attachant à relever dans le langage utilisé s'il comporte des termes faisant référence à un univers ludique.

2- Utilisation du support matériel

Nous voulons étudier si le support va être utilisé par les élèves et de quelle manière. En particulier, facilite-t'il ou non la dévolution du problème!? Quelles peuvent être ses influences vis-à-vis des stratégies de recherche mises en oeuvre et cela en fonction du niveau!? Nous faisons l'hypothèse que les stratégies $\mathbf{S}_{\mathbf{arith}}$ et $\mathbf{S}_{\mathbf{graphe}}$ ne peuvent être développées que si les élèves parviennent à se détacher du support. Le fait qu'elles apparaissent ou pas sera donc un indice du degré d'utilisation du support matériel.

De plus, nous supposons que plus le niveau scolaire sera élémentaire, plus le support matériel aura un rôle important car il permet une manipulation directe que nous pensons plus accessible qu'une recherche sur support papier-crayon. En référence à G.Brousseau [Brousseau, 2005] nous nous demandons alors si le fait d'avoir recours au support permet tout de même de passer du statut de *joueur* à celui d'*actant* et donc de se détacher du jeu pour adopter un point de vue mathématique sur le problème.

II- POUR OBTENIR DES ELEMENTS DE REPONSE SUR LES APPRENTISSAGES

Nous cherchons à déterminer quels peuvent être les apprentissages induits par la pratique de situations recherche en classe. Pour cela, nous allons observer dans quelle mesure les différentes étapes liées à la mise en oeuvre d'une démarche de recherche en mathématiques apparaissent, si cela a lieu lors d'un travail adidactique ou doit être induit par une intervention extérieure et enfin quelles sont les étapes qui posent des difficultés aux élèves pour chaque niveau scolaire.

Nous rappelons que nous considérons que l'élève est rentré dans une démarche de recherche mathématique si:

- Il choisit les sous-problèmes qu'il souhaite étudier si le problème est posé de façon ouverte.
- Il ne se contente pas de jouer, abandonne peu à peu la recherche par essais-erreurs pour mettre en place une recherche organisée, imaginer des stratégies de résolution. Pour cela, il peut chercher à modéliser la situation. Nous verrons par exemple comme un indice du fait qu'il y a décontextualisation des solutions trouvées, l'introduction d'un codage pour représenter les solutions,
- Il observe ce qu'il fait, cherche à mettre en relation différents résultats, est amené à énoncer des propriétés,
- Il cherche à énoncer des conjectures locales (propres à un cas particulier) ou globales (propres à un sous-problème),
- Il produit des contre-exemples pour invalider certaines de ses propositions
- Il cherche à apporter des arguments de preuve,
- Il se pose de nouvelles questions.

Nous allons donc relever dans les productions des élèves si ces étapes apparaissent, dans quelles conditions et s'il y en a qui posent plus de difficultés que d'autres.

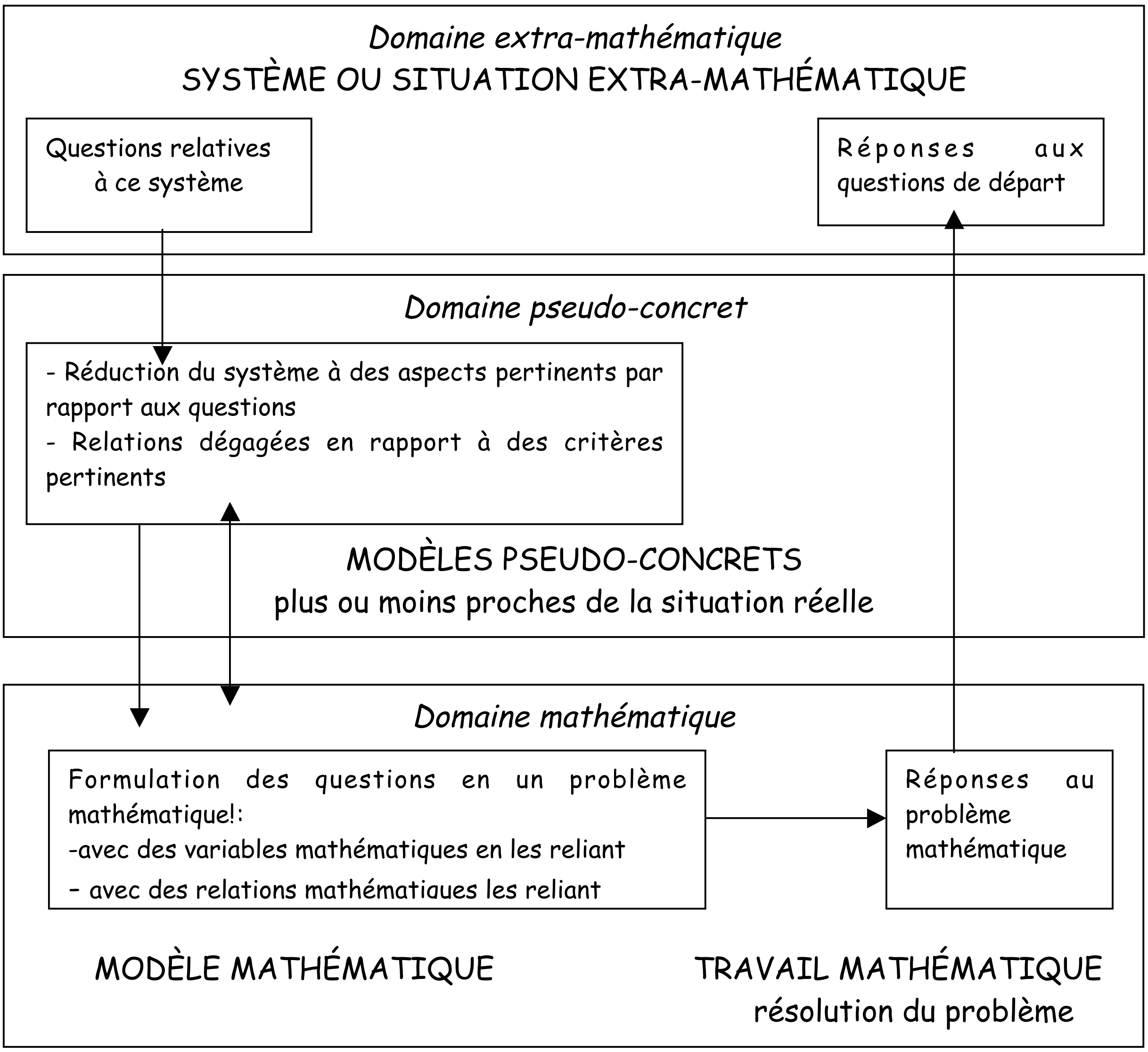
II-1 Organisation de la recherche!

Afin d'étudier en quels termes ce problème peut être considéré comme une situation recherche, notre analyse va s'attacher tout d'abord à identifier quels sous-problèmes et quels cas le joueur va choisir d'étudier ainsi que les raisons de ses choix.

Étant donné que l'énoncé du problème est ouvert, la première tâche à la charge de l'élève lorsqu'il rentre dans une situation recherche est le choix des valeurs du couple (n,k). Or un tel choix ne fait habituellement pas partie du contrat didactique. Face à un tel énoncé, on peut donc papillonner de (n,k) en (n',k') ou se centrer sur l'étude d'un sous-problème particulier et fixer soit n, soit k, soit les deux. Aussi, allons-nous étudier quels sont les cas traités, si les choix des élèves sont organisés ou si les différents couples étudiés sont choisis de manière erratique, sans critère particulier, ce qui, nous supposons, est susceptible d'avoir lieu chez les jeunes élèves.

II-2 RECHERCHE D'UNE MODELISATION DE LA SITUATION

La modélisation marque un pas important dans toute recherche de problème. Par modélisation, nous entendons, comme L. Coulange *«une interprétation mathématique liée à une situation "réelle" ou à sa description en langage naturel, relativement à des questions que l'on se pose sur cette situation.!»* [Coulange, 1997]!. Elle permet donc au chercheur de se détacher de la situation concrète pour rentrer dans sa résolution via les outils propres à la science mathématique. Nous cherchons à déterminer si elle peut apparaître au cours de la recherche de *La roue aux couleurs*.
Nous supposons que cela se fera différemment selon les niveaux de connaissance. Afin d'analyser les différences entre ces niveaux, nous reprendrons le schéma de la démarche de modélisation mathématique établi par L. Coulange![Coulange, op.cit.]!:



Nous allons nous attacher à relever dans les productions des élèves à quelles étapes de la démarche ils aboutissent.
Nous rappelons que *«!on appelle modèle pseudo-concret un modèle intermédiaire (en langage naturel ou éventuellement sous forme d'un schéma) entre la situation réelle et*

le modèle mathématique. C'est en quelque sorte un premier niveau d'abstraction de la réalité.!» [Coulange, op.cit.]!

Même si «!cette modélisation du processus de modélisation!» est partielle et ne rend pas compte de l'ensemble des comportements heuristiques susceptibles d'être mis en oeuvre face à une situation problématique, cette distinction entre modèle pseudo-concret et modèle mathématique nous permettra de différencier, dans les productions des élèves, ceux qui restent au stade du jeu, de ceux qui rentrent dans une recherche mathématique, même s'ils ne parviennent pas tous à un modèle mathématique de la situation comportant les décalages. Nous identifierons comme relevant d'une modèle pseudo-concret le fait que les élèves modifient leur regard sur la situation, en cherchant à mettre en parallèle leurs observations, à les généraliser, en traduisant certaines des contraintes comme la rotation...

1- Représentations et codages

Nous considérons comme une première étape de la modélisation du problème et la construction d'un modèle pseudo-concret, le fait de remarquer que les couleurs sont interchangeables, qu'une solution n'est pas propre aux couleurs choisies mais à leur disposition relative c'est-à-dire l'énoncé de la remarque générale!:

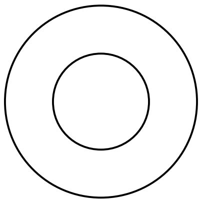
> ***Rem_{coul}! : la nature des couleurs n'a pas d'importance pour la résolution du problème, seule leur position et le fait qu'elles soient distinctes importent.***

Dans un deuxième temps, nous cherchons à voir si un codage des couleurs va être introduit ou une représentation à l'aide d'un tableau, actions qui se détachent toutes deux de la représentation concrète de la situation pour aller vers une mathématisation. Comme nous l'avons supposé dans l'analyse des différents sous-problèmes, la représentation et le codage utilisés peuvent avoir une influence sur les stratégies de recherche mises en place. Pour des raisons pratiques, nous noterons par la suite:

- **$C_{Ø}$**: pas de codage proprement dit. Les couleurs sont reproduites concrètement.
- **C_{ini}**! : les couleurs sont remplacées par leurs initiales. Nous considèrerons cela, notamment pour les élèves de primaire et de 6ème, comme le fait de se détacher en partie d'une représentation réaliste pour se rapprocher d'une abstraction, même si cela ne constitue finalement qu'un tout petit pas dans ce sens.
- **C_{num}**: les couleurs sont remplacées par des nombres.

Nous faisons l'hypothèse que plus le niveau de connaissance sera élevé, plus C_{num} sera susceptible d'être utilisé. Le pas à franchir est bien plus important que pour C_{ini} et peut être favorisé si l'on a déjà été confronté à l'abstraction comme lors du recours au «!x!» dans la mise en équation algébrique d'un problème à partir de la classe de 4ème.

R_{circ}: une représentation circulaire qui reprend l'idée de la roue.



R_{tab}: une représentation par un tableau à double entrée

couleurs extérieures						
couleurs intérieures						

Nous supposons que cette représentation demande un niveau de connaissance supérieur à la précédente. En effet, passer d'une représentation réaliste comme R_{circ} à un tableau implique que l'on se détache en partie ou totalement du support matériel pour se tourner vers le support papier-crayon et **marque donc un pas significatif dans le passage du statut de *joueur* à celui d'*actant***.

Nous allons donc regarder, en fonction des niveaux de connaissance, les différents modèles pseudo-concrets et éventuellement mathématiques auxquels vont avoir recours les élèves à travers leurs choix de représentation ainsi que les corrélations qui pourraient apparaître entre représentations, codages et stratégies employées.

2- Traduction de la rotation

Nous désirons identifier comment la contrainte de la rotation va être prise en compte par le joueur. En particulier, pour le cas (n,n), va-t-il étudier les positions des couleurs en fonction du décalage observé entre leur position sur le disque extérieur et celle qu'elles ont sur le disque intérieur et donc introduire la nouvelle variable correspondant à ce décalage, d_i pour $0 \leq i \leq n-1$!?
Pour le cas (n,2), nous cherchons à voir si dec_2, le décalage entre les deux couleurs choisies va être pris en considération.

Nous considèrerons comme une avancée dans le processus de modélisation l'introduction de ces deux nouvelles variables, action qui améliore les modèles pseudo-concrets et peut leur attribuer le statut de modèle mathématique si les élèves sont parvenus à décontextualiser entièrement la situation.

II-3 ÉTUDE DES PHASES DE FORMULATION ET DE VALIDATION

Toute recherche implique, pour un chercheur, des phases de formulation des résultats découverts ainsi que des phases de validation.
Dans la mesure où des solutions particulières ont été trouvées et des conjectures formulées, tant au niveau local qu'au niveau global, nous souhaitons étudier si cela sera suivi par :

- L'énoncé d'une méthode de construction générale d'une solution,
- La recherche voire la donnée d'une preuve de l'inexistence de solution.

Nous voulons observer si elles apparaissent au cours des discussions internes aux différents groupes de façon adidactique, ou si cela devra être provoqué par une intervention extérieure aux groupes. De plus, nous regarderons la formulation des énoncés alors proposés et étudierons les influences que peut avoir l'utilisation du support matériel sur l'apparition et la rédaction de ces énoncés.

III- POUR OBTENIR DES ELEMENTS DE REPONSE SUR LA GESTION

Dans un premier temps, nous avons déterminé des conditions de recherche générales et des outils de gestion inspirés des pratiques des chercheurs en mathématiques, de nos observations préalables, des autres recherches menées autour des situations recherche, des travaux développés par *ERMEL* et des actions *MATHs.en.JEANS*.

Tout d'abord, nous avons choisi de **faire chercher les élèves par groupes** de 3 ou 4. Nous supposons que cette organisation sociale va inciter les joueurs à verbaliser, action identifiée, notamment par J.Julo, comme ayant une influence positive sur la représentation du problème et susceptible d'être une aide à la résolution [Julo, 1995,p 84]!. De plus, cela pourra aussi susciter les échanges et la mise en débat des solutions, méthodes, conjectures proposées, comme lorsqu'un chercheur soumet ses travaux aux autres membres de son équipe. Cela pourra aussi être un facteur stimulant pour la recherche et éviter les découragements éventuels.

Par ailleurs, compte tenu de notre problématique, nous avons fourni un **support matériel** à chaque groupe, au moins lors de la première séance, afin d'en étudier les apports. Il était accompagné d'aimants de 8 couleurs différentes en nombre suffisant pour pouvoir étudier les différents sous-problèmes (n,n), (n,2), (n,1).

Enfin, après une ou plusieurs séances de recherche avec le support, nous avons mis en place **un temps de mise en commun** pour que les groupes communiquent leurs résultats, leurs méthodes, leurs conjectures et éventuellement débattent, comme cela a lieu dans un laboratoire de recherche lorsque chaque équipe présente ses résultats, ou lors de colloques.

Compte tenu de la chronologie de nos expérimentations, ces conditions et outils ont évolué, afin de tenir compte du niveau scolaire, des contraintes temporelles et de ce qui a été observé lors des expérimentations aux autres niveaux.
Nous cherchons dans chaque cas à déterminer quels peuvent être leurs apports et leurs inconvénients.

IV- DIFFERENTS NIVEAUX, DIFFERENTES DUREES!

Le problème de *La roue aux couleurs* a été posé dans un premier temps à trois niveaux scolaires!:

- Des étudiants de DEUG 1ère année inscrits au module «!jeux combinatoires et raisonnements mathématiques!», recherche sur 2 séances de 2 heures,

afin d'évaluer tout d'abord son accessibilité auprès d'un public que nous avons déjà fréquemment étudié,

- Des élèves de CM1/ CM2, recherche sur 4 séances hebdomadaires de 45 min à la place du cours de mathématiques habituel,
- Des élèves de 6ème, recherche sur 4 séances hebdomadaires de 1h, à la place du cours de mathématiques habituel,

pour déterminer si des situations recherche peuvent être d'éventuels supports d'introduction à la recherche en mathématiques dès le plus jeune âge. Dans l'affirmative, cela nous amera à penser qu'elles peuvent aussi être un outil de vulgarisation, restera alors à déterminer quels peuvent en être leurs apports, ce que nous traiterons dans la deuxième partie de cette thèse.

Les différences de durée entre les niveaux ne sont pas des choix didactiques, mais sont dues à des contraintes institutionnelles relatives au nombre de séances que les différents enseignants ont pu nous libérer sans pour autant risquer *«!de ne plus pouvoir boucler le programme!»*.

Ces trois expérimentations ont été suivies d'une quatrième menée dans deux classes de cycle 3 de la même école (une de CE2/CM1 et une de CM1/CM2), afin d'étudier une gestion possible d'une situation recherche en classe. Elle s'est déroulée sur un trimestre à raison d'une heure par semaine pour chacune des deux classes.

PARTIE! I.A

ETUDE DE LA DEVOLUTION D'UNE SITUATION RECHERCHE EN CLASSE! : LA ROUE AUX COULEURS

Chapitre I.A.1

PRÉSENTATION SYNTHÉTIQUE DES PRODUCTIONS DE DEUG

Nous avons débuté notre série d'expérimentations au cours de mon année de DEA. Alors, nous avions posé le problème à des étudiants de 1ère année d'université, inscrits dans le module optionnel «jeux combinatoires et raisonnements mathématiques!», encadré par des membres de l'équipe CNAM, à l'université Joseph Fourier. Ces étudiants étaient issus de plusieurs filières scientifiques et n'étaient pas tous à l'aise en mathématiques. Ils avaient été préalablement confrontés à des situations de type recherche et avaient donc eu à plusieurs reprises l'occasion de se retrouver dans la position de jeunes chercheurs. Le fait d'expérimenter la nouvelle situation, *La roue aux couleurs*, auprès d'étudiants sensibilisés était donc pour nous l'occasion d'évaluer son accessibilité et de vérifier nos hypothèses auprès d'un public que nous considèrerons comme «!expert!» compte tenu des autres niveaux scolaires à qui nous l'avons proposée.

Pour notre expérimentation, quatre groupes ont été constitués, notés Gi, ($1 \leq i \leq 4$). La gestion de la classe était assurée par les chercheurs de l'équipe CNAM qui encadraient habituellement le cours. Comme pour les autres situations recherche, ils circulaient entre les groupes afin de vérifier que le problème avait été bien compris et aider les étudiants dans leurs recherches. Cependant, autant que faire se peut, ils restaient neutres dans leurs réponses, ne fournissaient aucun résultat et rétorquaient le plus souvent une autre question à la question posée. Étaient également présents deux autres chercheurs qui tenaient le rôle d'observateurs et n'intervenaient donc pas auprès des étudiants.

Au cours de la première séance, un exemple a été donné lors de la présentation pour le cas n=6, k=6 puis nous avons laissé les différents groupes s'approprier le problème et entrer dans sa résolution. La deuxième séance a été introduite par une relance. Il s'agissait d'orienter tous les groupes vers la recherche de solutions du cas k=2 puis du cas k=3, afin de recueillir des éléments d'analyse sur leurs productions pour la recherche de (n,2) et (n,3), en leur suggérant de remplacer les couleurs par des nombres et de considérer leurs positions, s'ils ne l'avaient pas fait. Avant la fin de cette séance, les quatre groupes devaient rédiger une synthèse de leurs résultats dans le but de pouvoir ensuite les exposer oralement aux autres.

Chaque groupe avait à sa disposition un support matériel lors de la première séance, il n'était fourni que s'il en faisait la demande lors de la deuxième.

Les discussions, recherches ont été suivies par les quatre chercheurs qui ont noté ce qu'ils jugeaient pertinent dans les phases de recherche de chacun des groupes. Leurs notes ont été complétées par les feuilles de recherche personnelles de chaque étudiant.

I- SUPPORT MATERIEL ET DEVOLUTION!

I-1 UNE FORME LUDIQUE BIEN ACCEPTEE

1- Vocabulaire employé

L'énoncé n'a pas posé de difficultés aux étudiants. On retrouve à travers les productions issues de la première séance différents termes associés à l'univers ludique. Plusieurs fois apparaissent les termes «cas gagnant», «cas perdant!», «on gagne à tous les coups», «on perd», «situation gagnante»… Un des étudiants a même eu l'impression d'avoir déjà vu un tel jeu dans une foire. Le caractère ludique que nous avons choisi d'associer à cette situation n'est donc pas apparu comme artificiel, ce qui aurait pu être un obstacle à notre hypothèse quant à son utilisation à des niveaux scolaires plus élémentaires ainsi que dans un cadre de vulgarisation.

2- Du support matériel au support papier-crayon

Lors de la première séance, le support matériel a été utilisé par tous les groupes pour débuter leur étude du problème. Il leur a permis de se l'approprier. Il a servi à rechercher des solutions et à les valider via la rotation du disque intérieur. Deux groupes (G1 et G2) l'ont ensuite rapidement abandonné pour se concentrer sur le support papier-crayon.
Au cours de la deuxième séance, un seul l'a réclamé et utilisé (G4).

I-2 POINTS DE VUE SUR LA RECHERCHE

1- Plusieurs stratégies de recherche

Nos «!experts!» sont rentrés, sans difficulté, de manière autonome et propre à chacun des groupes, dans une démarche de recherche mathématique du problème.
Au départ des dispositions ont été essayées au hasard et validées par le support matériel. Puis, les stratégies sous lesquelles nous pensons que ce problème peut être

abordé sont apparues. $\mathbf{S_{sym}}$ a été utilisée par les groupes G1 et G2 avant d'introduire les décalages. Dès lors, ils ont eu recours à $\mathbf{S_{dec,}}$ et ont cherché des propriétés sur ces décalages. G1, par exemple, a essayé de décaler toutes les couleurs de 1, puis de 2 ... alors que G2 a cherché à trouver une méthode garantissant d'associer à chaque couleur un décalage différent.

Les membres du groupe G3 débutent leur étude par $\mathbf{S_{graphe}}$ à travers la recherche implicite de cycles hamiltoniens et donc des considérations fondées implicitement sur le modèle graphe.

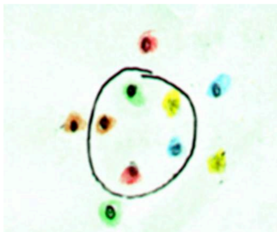
Le groupe G4 se centre principalement sur le point de vue géométrique et voit dans la symétrie un argument pour invalider des dispositions. Il complète finalement ce point de vue par $\mathbf{S_{arith}}$ et des observations quant à des propriétés arithmétiques liées à la parité, une fois institutionnalisé par les chercheurs encadrant le codage par des nombres au début de la deuxième séance.

2- Une avancée relative aux couples (n,k) étudiés

Tous les groupes sont arrivés à exhiber des solutions particulières, lorsqu'il en existait, que ce soit pour l'étude de (n,n), (n,2) ou (n,3). Lorsqu'il existe une solution, **la validation des dispositions s'est faite de façon adidactique, par le biais du jeu matériel ou du support papier-crayon**.

Etude de (n, n): plusieurs méthodes mais pas de conjecture

À partir de l'étude du cas (3,3) puis (5,5), la solution où les couleurs intérieures sont placées inversement à celles du forain a été donnée par tous les groupes, quels que soient la représentation ou le codage qu'ils ont utilisés.

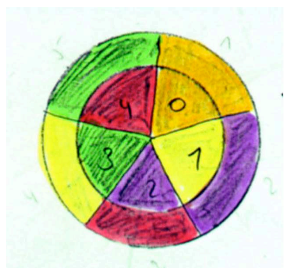


(5,5) solution
dans l'ordre inverse

$\mathbf{M_{ordre}}!^{(n,\ n)}$ a été découverte par les groupes G2 et G3 qui ont cherché à placer les nombres en sens inverse.

$\mathbf{M_{sym}}^{(n,\ n)}$ a été énoncée par les groupes G1 et G4 lorsqu'ils ont cherché des solutions qui soient symétriques.

Un autre type de solution a été trouvé par le groupe G3 par le biais de la recherche d'un graphe en "étoile» et donc de la méthode! $\mathbf{M_{graphe}}^{(n,\ n)}$. Elle a été ensuite réinvestie pour d'autres cas puis abandonnée suite à l'étude du cas (8,8), qui leur a fourni un contre-exemple.



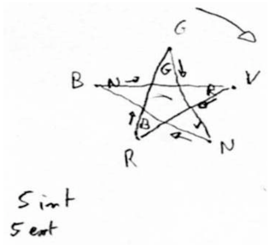
G2!:autre solution
0 1 2 3 4
0 3 1 4 2
di 0 4 3 2 1

Les groupes G1 et G2 ont exhibé une autre forme de solution pour (5,5) à travers l'étude des décalages et ont remarqué $\mathbf{p}^{(n,n)!}_{dec}$.

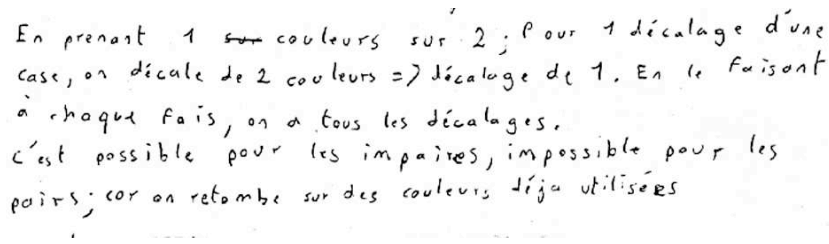
Cependant, le groupe G2 a poursuivi sa recherche dans ce sens et a énoncé une méthode de construction!:

> «!*Lorsqu'il y a un nombre impair de couleurs sur la roue ext. Pour gagner, on peut:*

- mettre une couleur sur 2, sur 3 ou sur 4 …sur n-1.
- tourner dans le sens inverse. »



G3 : graphe en étoile


En prenant 1 ~~sur~~ couleurs sur 2 ; pour 1 décalage d'une case, on décale de 2 couleurs => décalage de 1. En le faisant à chaque fois, on a tous les décalages.
C'est possible pour les impaires, impossible pour les pairs ; car on retombe sur des couleurs déjà utilisées

G2 : recherche d'une méthode avec des décalages réguliers

Pour le cas n pair, d'autre part, seul le groupe G2 a émis la conjecture, après l'étude de (2,2), (4,4) et (6,6), qu'il n'y a pas de solution par le biais de la recherche d'une disposition avec des décalages tous différents et choisis régulièrement, mais aucune preuve globale n'a été recherchée.

G2 : recherche d'une disposition pour (6,6) avec des décalages différents

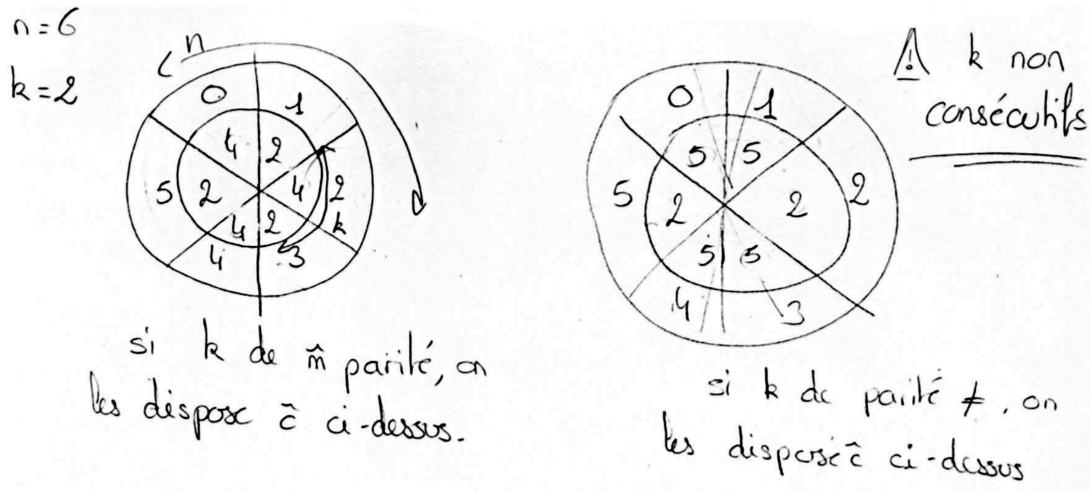
<u>*Etude de (n,2): deux méthodes, une conjecture et des idées de preuve*</u>

$\mathbf{P}^{(n,2)}_{\mathbf{consec}}$ a été énoncée par tous les groupes.

Ils ont ensuite cherché à établir une méthode de construction d'une solution pour (2p,2) pour deux couleurs particulières en cherchant à généraliser leurs observations. Par exemple, le groupe G1 a étudié successivement (4,2), (6,2) et (8,2) avant de proposer une méthode de construction générale.
Les méthodes énoncées sont très proches de la méthode $\mathbf{M}_{\mathbf{sym}}^{(n,2)}$, comme nous allons le voir à travers les différents énoncés produits par les étudiants.

Lors de la deuxième séance, l'introduction du codage des couleurs par des nombres a incité le groupe G4 à chercher tout d'abord une méthode de construction générale à travers des propriétés arithmétiques. Ainsi, pour n=6,!il a proposé la méthode!:

$M_{arith}^{(6,\,2)}$! : choisir deux couleurs de même parité.



G4!: recherche par le biais de la parité

Ensuite, il a recherché et établi une méthode générale quel que soit n pair, que nous détaillerons au paragraphe II-5.2 ci-après. Même si cette méthode requiert l'utilisation de la roue, la technique de forçage y apparaît et les deux couleurs choisies ne sont plus nécessairement opposées. Toutefois, rien n'est dit sur les conditions que doit remplir dec2, le décalage entre les deux couleurs.
Seul le groupe G3 a fourni une méthode générale en étudiant ce décalage!:

> *«!Pour n pair, k=2, on prend des couleurs avec un décalage multiple de 2<n à l'extérieur et on les intercale à l'intérieur.!»*

Ainsi, compte tenu du fait qu'il est spécifié que le décalage doit être un multiple de 2, on retrouve, formulée plus précisément, la méthode!:

$M'_{sym\ alt}{}^{(n,\,2)}$: "Je choisis deux couleurs séparées de m crans, je les place alternées sur le disque. Je dois avoir la même couleur sur deux secteurs diamétralement opposés."

complétée par une condition sur m!:

m=2k, m<n.

Suite à l'étude de cas particuliers, tous les groupes ont aussi émis la conjecture!:

«! (n,2) admet une solution si et seulement si n est pair! »

Cet énoncé faux a été induit, comme nous le supposions, par le fait que le premier impair non premier soit 9. En effet, les étudiants ont étudié les cas (3,2), (5,2) et (7,2) qu'ils ont jugés en nombre suffisant pour émettre une conjecture. G1, le seul groupe qui a remis en cause cette condition, l'a fait suite à l'étude des cas n=9 et n=15 qui avait été suggérée par un des chercheurs.

Les groupes G2 et G3 ont cherché d'eux-mêmes à prouver cette conjecture en étudiant des cas particuliers. G2 par exemple a montré par exhaustivité qu'il n'y avait pas de solution pour (5,2) et (7,2), mais n'ayant pas introduit dec2, il n'a pu aller plus loin faute de temps.

Étude de (n, 3): une méthode liée au support

Une méthode de construction générale pour ce cas a été donnée par le groupe G4. Il est parvenu à décrire comment obtenir une solution via l'utilisation du support matériel et non pas à décrire la solution elle-même. Leur méthode prend comme point de départ la configuration établie pour (2p, 2)!:

> *«!Je choisis deux couleurs pas adjacentes. J'en place une en face à face et je la mets également en face du secteur correspondant à l'autre. Je tourne, je place pour qu'il n'y ait pas de face à face. À un moment, une couleur "coince", je la remplace par une troisième.!»*

En faisant tourner le disque intérieur, on identifie donc le secteur qui «!pose problème», c'est-à-dire qui engendre dans une position donnée le deuxième face à face, et on le remplace par une troisième couleur, choisie consécutive aux deux autres.

I-3 CONCLUSION

Nous pouvons dire que la situation telle que nous l'avons mise en place en DEUG a fonctionné comme une situation recherche pour les aspects suivants. Tout d'abord, la formulation de l'énoncé n'a pas soulevé de problème de compréhension, la dévolution du problème s'est très vite opérée dans tous les groupes. De plus, aucun d'eux ne s'est arrêté à la stratégie essais-erreurs, plusieurs stratégies de recherche ont été mises en place, plusieurs solutions ont été exhibées, des conjectures ont été émises.
Le support matériel apparaît tout d'abord comme une aide à la dévolution du problème. Il permet d'en comprendre le sens et de faire de premières observations.
Dans un deuxième temps, son utilisation ne semble pas favoriser ou bloquer l'avancée dans le problème. Comme nous l'avons indiqué, qu'ils l'utilisent ou pas, tous les groupes sont parvenus à des résultats voisins, tout du moins si l'on regarde quantitativement les solutions exhibées et les conjectures énoncées.

II- RESULTATS ET DIFFICULTES

II-1 ORGANISATION DANS LA RECHERCHE

Lors de la première séance, le cas k=1 a été étudié par tous les groupes et a été très vite reconnu trivial. Puis, influencés par l'exemple introductif (6,6), trois se sont centrés principalement sur le cas k=n alors qu'un s'est penché sur k=2. Lors de la deuxième séance, suite à la relance, les recherches se sont centrées sur k=2 puis, si le temps, k=3.
Une fois k choisi, les valeurs de n ont été prises de façon méthodique, successives dans un premier temps, par exemple, 4, 5, 6 puis elles ont été classées très vite en deux catégories, les n pairs et les n impairs. Dès lors, ont été étudiés les cas n=5, 7, 9 ou n=4, 6, 8....

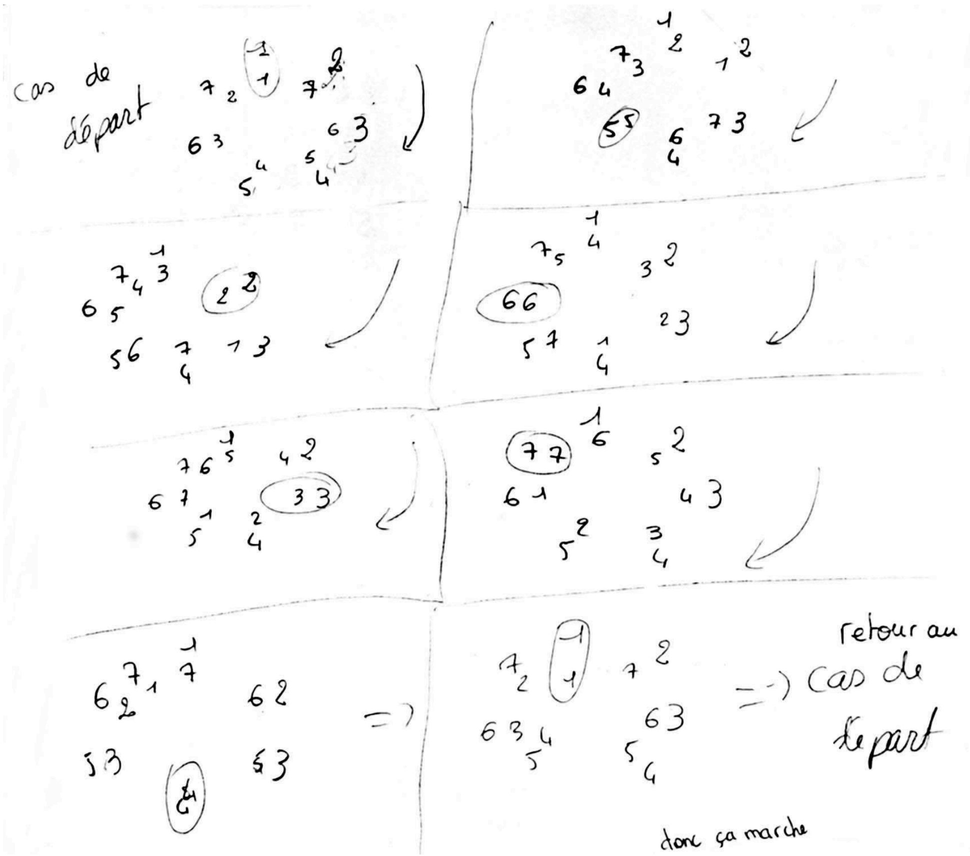
Nous pouvons donc considérer que, comme nous l'avions supposé, le fait que le choix du couple (n,k) à étudier soit laissé à la charge des élèves n'a pas été une gêne outre mesure pour des étudiants de première année d'université.

II-2 DES CHOIX DE REPRESENTATIONS ET CODAGES DIVERSIFIES

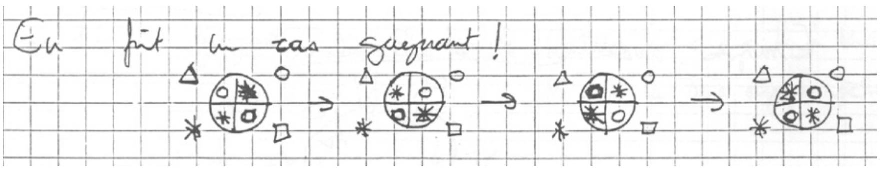
Alors que tous les groupes sont très vite parvenus à la remarque générale! $\mathbf{Rem_{coul}}$, l'introduction de $\boldsymbol{C_{num}}$ ou $\mathbf{R_{tab}}$ ne s'est pas faite de façon homogène.
$\mathbf{R_{circ}}$ apparaît dans un premier temps dans tous puis elle est complétée dans les groupes G1 et G2 par $\mathbf{R_{tab}}$. Nous ne pouvons pas dire pour ces deux groupes que l'une remplace l'autre car les étudiants font des allers-retours entre $\mathbf{R_{circ}}$ et $\mathbf{R_{tab}}$, mais n'abandonnent pas totalement $\mathbf{R_{circ}}$ pour $\mathbf{R_{tab}}$.
Lors de la 1ère séance, le codage $\boldsymbol{C_{num}}$ a été induit dans le groupe G1 par l'un des chercheurs.

$\boldsymbol{C_{\varnothing}}$ est utilisé dans un premier temps par tous les autres groupes, remplacé rapidement par $\boldsymbol{C_{ini}}$ chez G2 et G3. $\boldsymbol{C_{num}}$ apparaît ensuite dans le groupe G3 et chez un des étudiants du groupe G2. Deux des membres de G4 ont choisi, afin de se détacher des couleurs, d'introduire un codage à l'aide de symboles imaginaires avant d'avoir recours aux initiales, utilisées par les autres membres et finalement jugées plus pratiques.

Lors de la deuxième séance, suite à la relance, tous les groupes ont cherché à utiliser $\boldsymbol{C_{num}}$ mais sans y voir forcément l'intérêt, à en croire, par exemple, un des membres de G4: *«quel intérêt de coder avec des numéros, on y arrivait très bien sans!!»*



C_{num}, $R_{circ!}$: extrait feuille de recherche de G1, fin de la première séance.



G4!: introduction de symboles pour coder les couleurs

Analyse de la représentation utilisée en fonction du codage

Nous avons cherché, dans un deuxième temps, à analyser en quels termes un codage pouvait induire une représentation. Le tableau suivant répertorie les représentations choisies en fonction des codages utilisés.

	R_{circ}	R_{tab}
C_{ini}	G2 G3 G4	G2
C_{num}	G1 G2* G3 G4*	G1 G2!(1 étudiant) G2* G3*

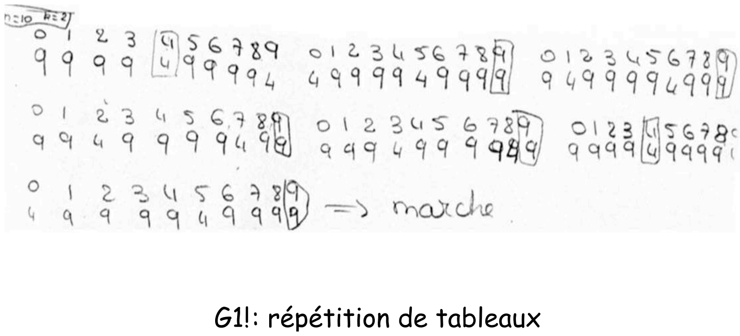
(*) apparus suite à la relance

Il nous semble donc que le fait d'introduire un codage des couleurs par le biais d'entiers consécutifs (C_{num}) peut être un facteur favorable à la représentation de la situation par le biais d'un tableau (R_{tab}).
En effet, G1, le seul groupe qui a introduit ce code dès la première séance suite à la suggestion d'un des chercheurs, en est arrivé rapidement à employer R_{tab}. On retrouve cette progression chez l'étudiant du groupe G2 qui avait lui aussi employé C_{num}. G4, qui n'avait utilisé que $C_{\emptyset}$ puis C_{ini} lors de la première séance, a cherché à se servir de C_{num} compte tenu de la remarque qui a été faite au début de la deuxième séance n'a pas eu l'air convaincu de son intérêt. L'introduction de ce codage a donc été jugée «!parachutée!» et a eu du mal à être réinvestie, il n'est donc pas étonnant que ce groupe n'ait pas eu recours à R_{tab}. Il en est resté à une représentation du problème très proche de la situation concrète. Le groupe G3 qui avait finalement utilisé C_{num} au terme de la première séance a réussi à réinvestir ce codage au cours de la deuxième séance et en est venu à employer R_{circ} et R_{tab} en parallèle pour traiter le cas k=2.

II-3 TRADUCTION DE LA ROTATION! : DES TABLEAUX ET DES DECALAGES

Le groupe G4 s'est servi durant les deux séances du support matériel pour établir et tester ses solutions et n'a donc pas eu besoin de représenter la rotation.
Afin de valider leurs dispositions, les trois autres groupes ont utilisé le support papier-crayon et ont donc dû traduire la rotation à l'aide des choix de représentations qu'ils avaient faits.

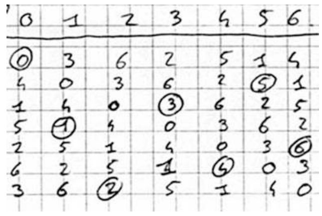
Les membres du groupe G1 l'ont traduite par le biais de la répétition de cercles, comme le montre l'extrait de leur feuille de recherche précédemment présenté, puis ont employé un tableau mais ils l'ont répété autant de fois qu'il y avait de positions, au lieu de le compléter.



G1!: répétition de tableaux

Le groupe G2 a pris en compte la rotation à travers **l'étude des décalages pour l'étude de! (n,n).**

Le groupe G3 l'a représentée au cours de la deuxième séance par le biais de tableaux «!prolongés».



0	1	2	3	4	5	6
0	3	6	2	5	1	4
4	0	3	6	2	5	1
1	4	0	3	6	2	5
5	1	4	0	3	6	2
2	5	1	4	0	3	6
6	2	5	1	4	0	3
3	6	2	5	1	4	0

G 3!: tableau prolongé

Cependant, nous remarquons qu'à aucun moment des considérations modulo n sur les décalages ne sont apparues.
De plus, même si tous les groupes avaient à l'esprit le fait qu'il faille tourner, on peut souligner qu'ils ont mis beaucoup de temps à traduire cela en termes de forçage et de report des écarts entre les couleurs choisies dans le cas (n,2). De plus, dec2, le décalage entre les deux couleurs à choisir n'a pas été introduit.

Nous pouvons donc considérer que tous les groupes sont parvenus à un modèle mathématique de la situation plus ou moins abouti. G1 et G3 ont eu recours à un codage numérique des couleurs et une traduction de la rotation par le biais de tableaux. G2 est allé encore plus en avant dans la modélisation et a introduit les décalages. Même si G4 a eu plus de difficultés, il a tout de même réussi à s'approprier ***C*~num~** et a abandonné son modèle pseudo-concret pour se tourner vers un modèle mathématique, qu'il a su utiliser pour énoncer des résultats comme nous le verrons par la suite.

II-4 ENONCES DE METHODES ET RECHERCHE DE PREUVES

1- Des méthodes de construction générale énoncées dans l'«! adidactique! »

Etude de (n, n): une formulation sans difficultés

La forme générale d'une solution pour n impair a été obtenue au cours d'un travail adidactique. La solution dans l'ordre inverse a été donnée par tous les groupes, mais seuls les groupes G1 et G2 ont énoncé que, pour qu'une disposition soit valide, il fallait que les décalages d_i soient tous différents.

Etude de (n, 2): des méthodes descriptives

Quels que soient la représentation et le codage qui ont été adoptés, une méthode de construction générale d'une solution pour le cas (2p+1, 2) a été donnée par trois groupes lors d'une phase de travail adidactique. Le groupe G4, quant à lui, ne l'a fait qu'en raison de la nécessité de présenter ses résultats à la fin de la deuxième séance.

Comme on peut le voir plus loin (paragraphe II-5.2), la plupart des méthodes énoncées sont restées proches de la généralisation de la description de ce qui avait été établi sur des cas particuliers.

La propriété «!k doit être un diviseur de n!» n'est pas apparue.

Etude de (n, 3): une méthode à construire

Le groupe G4 a cherché à énoncer une méthode de construction générale pour ce cas mais il est parvenu à décrire comment obtenir cette solution via l'utilisation du support matériel et non pas à décrire la solution elle-même.

2- Tentatives de preuves

Etude de (n, n): des preuves locales

La situation a fonctionné en adidactique pour la donnée de preuves pour des cas locaux comme (2,2) et (4,4). Les étudiants ont alors montré **par exhaustivité** qu'il n'y avait pas de solution. La preuve associée au cas (2p,2p) de façon générale n'a pas été cherchée. Certains groupes ont remarqué que, si pour une disposition on avait dans une position aucun face à face alors il y avait aussi dans une autre position, deux faces à faces. Toutefois, la constatation que la somme des décalages était constante n'est pas apparue, pas plus que des considérations modulo n, comme nous l'avons déjà souligné.

Etude de (n,2): des idées de preuves globales

Comme nous l'avons déjà remarqué, G2 et G3 ont cherché de façon adidactique à fournir une preuve de l'inexistence de solution pour (2p+1,2). Ils y ont été incités par la phase de formulation suscitée par la nécessité de présenter les résultats obtenus et par la discussion qui a suivi cet exposé à la fin de la deuxième séance. Pour les mêmes raisons, les membres du groupe G4 qui étaient restés très proches de la situation concrète ont dû observer leurs résultats via l'utilisation de $\boldsymbol{C}_{\mathbf{num}}$ et chercher à énoncer des arguments.

Dans tous les cas, les idées de preuves fournies ont été plus ou moins formelles. Pour la plupart, elles s'appuyaient sur **le forçage** dans le sens où si on met une couleur dans une position on la retrouvera **forcément** dans telles et telles autres positions.
Mais nous avons aussi trouvé un **argument erroné** s'appuyant sur l'impossibilité de reproduire ce qui marchait pour n pair. Par exemple, le groupe G3 a fourni la démonstration suivante :

> *«!Théorème pour les pairs ne marche pas. Il n'y a pas "d'en face". On imagine qu'on a une solution. On est obligé d'avoir deux fois la même couleur dans deux secteurs consécutifs, par exemple deux bleus. On choisit une autre décalée de deux crans. On tourne, on place. On finit avec du bleu partout. Donc pas de solution pour n impair. »*

La conclusion de cette démonstration est donc l'indice d'une erreur dans la logique du raisonnement. Ce n'est pas parce qu'aucune des méthodes fonctionnant sur les impairs est valide pour les pairs que l'on peut affirmer qu'il n'existe pas de solution.
Une fois le cas particulier n=9 étudié (suggéré par un des chercheurs), la conjecture qu'il n'y aurait pas de solution pour n premier a été avancée. Toutefois, une démonstration formelle n'a pu être présentée car le fait que l'écart entre les deux couleurs, dec2, doive être un diviseur de n, n'a pas été établi.

3- Etude de la validation des conjectures, méthodes et preuves formulées

La validation des différentes dispositions s'est faite avec le support matériel dans un premier temps puis avec les éléments mis en place pour traduire la rotation.
Les différentes conjectures fausses énoncées tout au long des deux séances ont quant à elles étaient invalidées dans la plupart des cas par la donnée de contre-exemples au sein même des groupes.
Lors de la phase de discussion commune qui a suivi la présentation des productions des groupes, les étudiants ont validé collectivement les différentes méthodes de construction de solution et tentatives de preuves qui avaient été établies à partir de l'observation de cas particuliers. Toutefois, les questions que posaient les chercheurs les ont guidés dans cette tâche.

II-5 ANALYSE DE L'UTILISATION DU SUPPORT MATERIEL EN FONCTION DES APPRENTISSAGES

L'utilisation du support matériel diffère d'un groupe à l'autre. En comparant les productions des différents groupes nous allons chercher à étudier en quoi il peut être une aide ou un blocage à la mise en oeuvre des différentes étapes de la démarche de recherche en mathématiques. Nous allons prendre comme éléments de comparaison la validation des résultats et la méthode de construction fournie pour (n,2) afin d'en étudier la formulation.

1- Influences du support matériel sur la validation

Le groupe G4, seul groupe à avoir utilisé le support tout au long des deux séances n'a jamais validé ses dispositions autrement que par la manipulation directe. Il a eu beaucoup de difficultés à s'approprier le codage $\boldsymbol{C_{num}}$ dont il n'a pas vu l'intérêt et donc à décrire les solutions trouvées en termes mathématiques.
Les autres groupes, une fois qu'ils ont délaissé le jeu matériel, ont cherché à représenter et décrire leurs solutions et ont été amenés à utiliser $\boldsymbol{C_{\o}}$ puis $\boldsymbol{C_{ini}}$ ou $\boldsymbol{C_{num}}$ en parallèle à $\mathbf{R_{circ}}$ et $\mathbf{R_{tab}}$ pour les valider.

L'utilisation exclusive du jeu matériel semble donc apparaître comme un obstacle à une validation mathématique des résultats. Au regard des productions du groupe G4, il semble empêcher de prendre du recul sur la situation concrète. Alors, son utilisation ne permet pas d'apporter des éléments de réponse lorsqu'il n'y a pas de solution, mais amène à une preuve sur des petites valeurs de n car il est compatible à l'étude des possibles et permet donc l'exhaustivité des cas.

2- Des énoncés très descriptifs

Nous avons choisi de regarder la méthode de construction fournie pour le cas (n,2) car celles établies pour le cas (2p+1,2p+1) mises à jour dans la classe se résument soit à la donnée de la disposition en sens inverse, soit à l'énoncé du fait que les décalages doivent être différents, formulations qui ne posent pas de difficultés pour des étudiants.

On remarque que les groupes qui ont très vite délaissé le jeu matériel, ont donné des méthodes de construction qui tendaient à se détacher de la description de ce qu'il faut faire et ont cherché à les établir pour tout n pair.

G1

> *«!(on choisit n pour une des deux couleurs), on prend (n/2)-1 et donc on prend comme deuxième nombre (n/2)-1 et on répète n, (n/2)-1 fois"" on répète deux fois cette séquence.»*

G2

> *«!pour n pair, on cale 0 sur 0. En face de la case 0, on met 0. À partir du premier zéro, il y a (n/2)-1 zéro et la case numéro (n/2)-1 porte le numéro n/2 (= le numéro de la case en face du 0). Ensuite, on complète avec des zéros sauf la case avant le premier zéro.»*

Les deux autres groupes qui utilisaient le support matériel lorsqu'ils ont rédigé leurs méthodes de construction sont restés très proches de la situation concrète et ont eu beaucoup de difficultés à généraliser. Le vocabulaire employé reste voisin du commentaire d'une action.

Méthode de construction du groupe G3 pour (n,2), exemple pour n =6!:

> *«on choisit deux couleurs non consécutives et non opposées (par exemple R et J).*
>
> *On les place alternées sue la roue centrale. **Si un R central arrive sur une R externe**, il y a un R sur le J externe. Si un J est sur le R externe il y a un J sur le J externe.*
>
> *Si on choisit deux couleurs consécutives dans tous les cas, il y a un **B à gauche d'un J** dans la roue centrale donc on ne peut pas gagner à tous les coups.*

Si on choisit deux couleurs opposées (exemple B et V), on met 4 B et 2 V opposées. Si un V est sur le B alors, il y a un V sur le V et vice versa. On gagne à tous les coups.»

Cette formulation tranche avec celle fournie lors de la deuxième séance et établie à l'aide du support papier-crayon:

«Pour n pair, k=2, on prend des couleurs avec un décalage multiple de 2<n à l'extérieur et on les intercale à l'intérieur.»

Méthode de construction du groupe G4 pour (n,2)!:

«Pour n=4, 6, 8 il y a une solution par forçage. (choix de deux couleurs k_1 et k_2). On place le numéro k_1 face au même numéro k_1 puis on fait en sorte que le numéro n_2 correspondant au numéro k_2 ne soit jamais en face de k_2. Donc on place k_1 en face de k_2, ***puis on tourne la roue d'un cran****, et à chaque fois on met k_1 lorsque n_2 apparaît. Lorsque tous les n_2 sont bloqués avec k_1, on place alors le reste des secteurs k_2. k_2 k_1+1. »*

Le support matériel peut donc être un obstacle à la formulation et à la généralisation des résultats, si le joueur ne parvient pas à s'en détacher. Il bloque en quelque sorte «!la mathématisation du regard!» sur les dispositions trouvées. Dès lors, si des solutions existent, leurs méthodes de construction ne sont pas analysées mais décrites. Dans le cas où il n'y a pas de solution, il devient difficile de parvenir à énoncer des arguments de preuve.

II-6 CONCLUSION! : DES RESULTATS DEPENDANT DES VALEURS DE (n,k) ETUDIEES

La roue aux couleurs a donc amené les étudiants à développer les différentes étapes de la démarche de recherche en mathématiques!: choix de valeurs, essais, observations, modélisation, recherche de résultats généraux (locaux ou globaux), formulation... mais cela n'a pas toujours eu lieu lors de phases de travail adidactique, aussi allons-nous nous attacher à identifier quelles sont les étapes qui leur ont posé des difficultés afin d'émettre des hypothèses sur les apprentissages susceptibles d'être développés par cette situation recherche.

Tout d'abord, on peut remarquer que tous ont **très vite mis en oeuvre un modèle pseudo-concret**. Ils ont rapidement eu à l'esprit $\mathbf{Rem_{coul}}$. Cela fut suivi, pour la plupart des groupes, par une autre étape dans la modélisation du problème, l'introduction de $\mathbf{C_{num}}$ ou $\mathbf{R_{tab}}$. Deux groupes sont ensuite parvenus à un modèle mathématique de la situation!: le groupe G1 a introduit la variable d_i ainsi que le groupe G2 qui l'a réinvestie en considérant dec_2 pour chercher à montrer qu'il n'existait pas de

solution pour (2p+1,2) à travers l'étude de cas particuliers. Cependant, les congruences modulo n ne sont pas apparues mais peut-être est-ce par manque de temps, étant donné que seulement 3 heures ont été consacrées à la recherche.
Par ailleurs, que ce soit pour les cas (2p+1,2p+1) ou (2p,2), **l'énoncé d'une méthode de construction générale a posé des difficultés** aux trois groupes qui s'y sont attelés. Ils se sont ensuite tous orientés vers la recherche d'une preuve pour (n,2) avec n impair (puis premier) mais cela a dû être provoqué pour deux d'entre eux par le biais de la présentation collective des résultats.

De façon globale, les apprentissages susceptibles d'apparaître à ce niveau nous semblent donc d'une part, être de l'ordre de la modélisation, à travers le codage des données, l'introduction des décalages et le recours aux congruences pour traduire la rotation, d'autre part, être liés à la recherche de la généralisation d'observations faites dans des cas particuliers, enfin être associés aux fondements même d'une preuve via sa rédaction, la nécessité de se détacher de ce que l'on indique sur un exemple pour fournir des arguments généraux et le type même d'arguments valides, comme l'a souligné le raisonnement erroné de G3 pour démontrer **Conj**$^{(n,n)}$.

L'étude de (n,2) semble faciliter la dévolution de la situation, compte tenu du fait que des énoncés de méthodes générales sont apparus lors d'un travail adidactique et que des preuves ont été recherchées pour le cas (2p+1,2).
Il semble important, d'autre part, lors de la mise en place de cette situation à ce niveau de prévoir deux phases : **une avec le support dans un premier temps** pour faciliter la dévolution du problème puis **une sans**, afin d'inciter les étudiants à se détacher de la situation concrète et à mettre en oeuvre sa modélisation, chaque phase pouvant s'étendre sur une ou plusieurs séances.

Enfin, le fait que les étudiants aient énoncé plus spontanément des méthodes de construction que des preuves nous amène à penser que les valeurs du couple (n,k) peuvent être classées en deux catégories qui correspondent à une formulation et une validation différentes :

(2p+1,2p+1) (2p,2) (n,k) $2<k<n$	plusieurs solutions. Formulation et validation par la donnée de solutions particulières, éventuellement complétée par l'énoncé d'une méthode de construction générale.
(2p,2p) (n premier,2)	pas de solution. Formulation et validation par le biais d'arguments mathématiques.

Dès lors, nous pensons que la situation recherche *La roue aux couleurs* peut être définie par un type de variable spécifique que nous appellerons **variable de recherche.** Cette variable est inhérente à la situation recherche, ce sont les valeurs du couple (n,k) pour la situation *La roue aux couleurs* par exemple, mais ce peut être la

taille de la grille dans le cas des polyminos (voir l'énoncé mis en Annexe 10). Elle définit les différents sous-problèmes qui sont rattachés au problème ouvert et amène à des phases d'action et de formulation différentes.
En effet, ses valeurs peuvent jouer un rôle dans l'avancée dans le problème, étant donné qu'elles impliquent l'existence ou non de solution et par conséquent un statut différent pour la donnée d'une réponse. Lorsqu'une solution existe, la donnée d'une disposition valide peut être considérée comme un résultat pour un cas particulier tandis que s'il n'est pas possible de trouver de solution, il apparaît nécessaire de fournir une preuve de cette inexistence et donc de mettre en place une argumentation formelle.

Il est à noter que, compte tenu du fait que les étudiants ont à leur charge le choix des valeurs dans les choix de gestion que nous avons faits, les variables de recherche ne sont pas des variables didactiques.

III- QUELLE GESTION ?

III-1 ETUDE DES INTERACTIONS AU SEIN DES GROUPES

L'organisation de la recherche en groupes a bien fonctionné : cette organisation sociale de la classe a permis en grande partie que les élèves se motivent les uns et les autres, s'organisent, se répartissent éventuellement les cas à étudier, débattent...

III-2 APPORT DU TEMPS DE MISE EN COMMUN

La mise en commun apparait comme un élément important car elle a, par exemple, incité plusieurs groupes à rechercher des arguments de preuves dans le cas (2p+1,2) de façon adidactique. Le besoin de devoir expliquer à autrui induit de passer d'une recherche personnelle à une recherche publique et donc de devoir formuler ses résultats, impressions, conjectures, pour les rendre publics donc intelligibles et argumentés.

III-3 FEUILLE DE RECHERCHE

Le fait que chaque élève ait une feuille de recherche peut amener des disparités dans les groupes, chacun des membres pouvant alors chercher de son côté, sans en référer aux autres. Nous pensons donc qu'en complément des feuilles de recherche individuelles, la nécessité de devoir remplir une feuille de recherche collective, sur laquelle les membres du groupe doivent inscrire les résultats de leur recherche, sous condition que chacun d'entre eux les ait validés, pourrait être un facteur d'unité et de synthèse. De plus, cela peut aussi favoriser les débats.

III-4 PROPOSITION DE NOUVEAUX OUTILS DE GESTION!

En plus de la possibilité d'avoir des feuilles de recherche individuelles, nous allons donc donner **une feuille de recherche collective** sur laquelle le groupe pourra consigner, quand il le souhaite, les résultats qu'il juge importants et sur lesquels il pourra s'appuyer lors des séances suivantes. Nous faisons l'hypothèse que ces feuilles sont une aide à la recherche car la situation se déroulant sur plusieurs séances, elles permettent de faire un lien entre ces différentes séances, elles favorisent les phases de formulation, les débats et peuvent inciter à la mise en place d'un codage, du fait du recours au support papier-crayon.

Nous conservons le **temps de mise en commun** pour que les groupes communiquent leurs résultats, leurs méthodes, leurs conjectures et éventuellement débattent. Toutefois, afin de susciter les phases de formulation, la recherche de méthodes, la généralisation, pour chaque couple (n,k) étudié, ce ne seront pas les groupes qui choisiront les couleurs du forain pour exposer leurs découvertes, elles seront fixées par le gestionnaire de la situation recherche.

IV- CONCLUSION! : QU'ONT FAIT NOS «! EXPERTS! »?

Eh bien, ils ont cherché, avec tout ce que cela implique! Cette première partie de notre expérimentation nous a confortés dans l'idée que *La roue aux couleurs* pouvait être rajoutée à notre panel de situations recherche, tout du moins en première année d'université.

Au regard des difficultés qu'ont rencontrées les étudiants, nous pensons que sa résolution peut susciter des apprentissages transversaux relatifs aux différentes composantes de la recherche en mathématiques!: modélisation, généralisation, preuve, raisonnement...

Cependant, le fait que tous, même ceux qui avaient habituellement des difficultés, comme le groupe G4, soient entrés dans une démarche de recherche, aient rapidement progressé dans sa résolution, et aient mis en oeuvre ses différentes composantes, nous conduit à penser que, présentée sous la forme que nous avons

proposée, jeu et support matériel, elle peut être accessible à un public plus large. En effet, même si l'utilisation prolongée du support a été un frein pour une recherche formelle de preuve, il est apparu comme une aide à la recherche, il l'a favorisée, a permis à tous d'exhiber des solutions, des méthodes, de formuler des conjectures, sans avoir recours à des savoirs mathématiques complexes....
Mais cela peut-il être le cas pour des niveaux élémentaires!? Avec une gestion adéquate, la situation *la roue aux couleurs*, accompagnée de son support matériel, peut-elle être un outil à la disposition des enseignants afin que leur classe puisse *«s'!apparenter à une petite communauté mathématique!»* comme le préconisent les instructions officielles!? Dans ce cas, quels apprentissages pourrait-elle susciter!?
C'est ce à quoi nous avons cherché à répondre au cours du deuxième temps de notre expérimentation.

Chapitre I.A.2

EXPÉRIMENTATION EN PRIMAIRE

Lors de la mise en place du deuxième temps de notre expérimentation, nous avons intégré dans la situation les outils de gestion induits par les résultats de notre première expérimentation en DEUG. Cependant, nous pensons que le fait de proposer des situations recherche en primaire nécessite des conditions particulières en raison, d'une part, de l'âge des élèves et, d'autre part, du fait que l'enseignant en sache très peu sur la situation étudiée.

I- CONDITIONS D'EXPERIMENTATION!

I-1 L'ACCOMPAGNEMENT A LA RECHERCHE

Pour la gestion des différentes séances, nous nous sommes inspirée du dispositif d'**accompagnement scientifique** mis en place dans le cadre de *La main à la pâte* pour le développement des sciences expérimentales à l'école primaire:

> *«!Pour aider les enseignants, l'opération La main à la pâte met en place des dispositifs d'accompagnement qui mettent en relation les communautés scientifique et enseignante. (...)*
>
> *L'accompagnateur s'engage, dans le cadre d'un projet La main à la pâte, à suivre régulièrement les activités scientifiques d'une classe selon un rythme et des modalités définis en concertation avec l'enseignant.*
>
> *Il n'est pas question pour lui de remplacer l'enseignant, ce dernier restant responsable du déroulement de la séance, de la pédagogie et de l'autorité au sein de la classe. (...)*
>
> *Quand l'accompagnateur participe à une séance de classe, il ne se substitue pas à l'enseignant. Il peut l'aider lors des phases de travail en groupe. Il veille à assurer un guidage qui laisse aux élèves leur autonomie et leur propre construction de leurs connaissances dans le*

respect du projet préparé avec l'enseignant. C'est en questionnant, en incitant à des observations, à des comparaisons, à des mises en relation que l'accompagnateur jouera ce rôle.

L'accompagnateur est observateur du bon déroulement de la séance, et récolte les informations qui permettent de discuter avec l'enseignant de la conduite des séances à venir. »![42]

Dans le cadre de nos expérimentations, l'enseignant assurait donc la gestion sociale de la classe et la constitution des groupes. Toutefois, en raison du caractère novateur de notre projet et du fait que nous centrons notre recherche sur l'analyse de ce que peuvent faire les élèves face à une situation recherche, ce n'est pas lui qui a fait les choix relatifs à la situation mathématique mais un chercheur tenant le rôle d'**accompagnateur principal,** noté A1. Ce dernier, comme le faisaient les chercheurs encadrants dans la classe de DEUG, faisait les choix didactiques relatifs au contenu des différentes séances, donnait les consignes à la classe et menait les discussions mises en place lors de la séance de mise en commun. Afin de recueillir le plus d'informations possible, il était secondé par d'autres accompagnateurs/observateurs, A2 et A3, qui, en plus de prendre des notes, circulaient aussi dans la classe, vérifiaient que la situation était bien comprise, répondaient aux questions bien souvent par d'autres questions. Cependant, en aucun cas, les différents accompagnateurs ne fournissaient de résultats aux élèves.

I-2 LE PUBLIC

La classe dans laquelle s'est déroulée cette expérimentation était une classe multiniveaux comportant des élèves de CM1 (6) et CM2 (14), d'un quartier populaire de Grenoble. Notre expérimentation s'est déroulée au cours du premier trimestre de l'année scolaire. Le professeur qui nous a accueillis à la demande du directeur de l'école nous a avoué au préalable son peu d'attrait pour les mathématiques. Même si le problème lui avait été présenté en amont, il ne l'a pas cherché seul, ne parvenant pas à dépasser ses appréhensions.

I-3 DEROULEMENT!

[42] *Site " http://www.inrp.fr/lamap" . Il a été modifié récemment, cela est beaucoup moins détaillé dans la version actuelle.*

L'énoncé proposé était strictement le même que celui donné en DEUG. La gestion par contre a été légèrement modifiée.

La recherche s'est déroulée pendant quatre séances de 45 min chacune (notées par la suite S1, S2, S3, S4). Au début de la première séance, l'énoncé du problème a été donné à chaque groupe par écrit puis a été expliqué oralement à l'ensemble de la classe, complété par un exemple à (4,2) illustrant la contrainte de l'unique face à face. Les deux premières séances ont été des séances de recherche libres, dans le sens où aucune indication quant aux choix des valeurs de la variable de recherche (n,k) n'était fournie.

Dans la troisième séance, on demandait aux différents groupes de synthétiser les résultats obtenus à l'aide d'une feuille où il fallait les classer dans différentes catégories:

- cas où nous ne connaissons qu'une seule solution associée à des couleurs particulières choisies par le forain
- cas où nous savons construire une ou plusieurs solutions quelles que soient les couleurs que le forain ait choisies
- cas où nous pensons qu'il n'y a pas de solution mais nous n'en sommes pas sûrs
- cas où nous sommes sûrs qu'il n'y a pas de solution et nous pouvons expliquer pourquoi il n'y en a pas

Cette séance avait pour objectif d'amener les élèves à faire le point sur leur recherche et à percevoir que leurs résultats n'avaient pas forcément tous le même statut.

La quatrième séance était une séance de mise en commun (20 min) et de discussion (15 min) sur ce que pensaient les élèves du problème et de la situation sur lesquels ils venaient de travailler.

Compte tenu du niveau des élèves et de ce que nous avions observé en DEUG, nous avons choisi de laisser le support aux élèves tout au long des séances.

Les élèves étaient répartis en cinq groupes que nous avions nommés!: jaune, noir, orange, rouge et vert.

Les productions de chaque groupe ont été enregistrées soit sur support audio soit sur support vidéo. Les données ont ensuite été retranscrites.

II- ANALYSE CROISEE DES PRODUCTIONS[43]

Chacun des groupes de primaire a eu une avancée qui lui est propre, tant du point de vue des cas étudiés, des stratégies et des résultats mis à jour.

[43] *vous trouverez en annexe, détaillés pour chaque groupe, l'historique des cas étudiés et les raisons des changements éventuels. (annexes 5 à 9)*

Le groupe Jaune a adopté un point de vue positionnel et est parvenu au terme des deux séances de recherche à énoncer la méthode de construction globale $\mathbf{M_{ordre}^{(n,n)}}$, à supposer qu'elle ne s'appliquait pas pour les pairs, ainsi qu'au résultat «!(2,2) n'admet pas de solution!» accompagné de sa preuve.

Le groupe Noir est le seul à n'avoir pas adopté de point de vue particulier sur la situation, il n'a donc eu recours qu'à la stratégie essais-erreurs. Il n'a pas abouti à des résultats globaux mais, grâce à un de ses membres, il a tout de même énoncé $\mathbf{P^{(4,2)}_{consec}}$ et une méthode de construction locale pour (4,2).

Le groupe Orange a eu une démarche que nous qualifierons de constructive qui lui a permis de mettre à jour une méthode de construction originale: $\mathbf{M_{gloutonne}^{(5,5)}}$. Il a adopté un point de vue global sur le sous-problème (n,n), d'une part en généralisant cette méthode à tout n impair, d'autre part, en énonçant une conjecture, qui comme $\mathbf{Conj^{(n,n)}}$, distingue les pairs des impairs en fonction du degré de difficulté de l'obtention de solution dans chacun des deux cas, sans toutefois aller jusqu'à garantir qu'il puisse ne pas y avoir de solution pour tout n pair.

Le groupe Rouge n'a pas eu de point de vue marqué sur le problème. Il a eu des difficultés pour prendre conscience du caractère interchangeable des couleurs, ce qui l'a freiné dans ses recherches mais il est tout de même parvenu à distinguer les cas pairs des cas impairs pour le sous-problème (n,2), à formuler la conjecture que (n,2) admettait une solution pour tout n pair, à supposer au contraire que le cas (7,2) n'admettait pas de solution, certes en s'appuyant sur un argument erroné, et à énoncer une méthode de construction locale pour (4,2), qu'il a su réutiliser pour (6,2) et (8,2) même s'il ne l'a pas clairement formalisée dans ces deux cas.

Le groupe Vert a adopté un point de vue géométrique sur cette situation. Il fait partie des groupes qui ont su franchir le pas entre le local et le global, il a ainsi découvert une méthode de construction globale propre au cas (n,2), ∀ n, ainsi que $\mathbf{Conj^{(n,2)}}$. De plus, il est le seul à avoir utilisé des arguments de l'ordre du forçage afin de montrer qu'il n'y avait pas de solution lorsque les deux couleurs étaient choisies consécutives lors de l'étude de (n,2).

Aussi, allons-nous nous attacher à comparer les différentes productions afin d'identifier des éléments de réponses aux questions de notre recherche.

II-1 DES CHOIX DE (n,k) MULTICRITERES

Les choix relatifs aux couples (n,k) à étudier ont été faits en grande partie lors d'un travail adidactique. Mis à part le groupe Rouge qui a commencé par étudier (8,8) et s'est tourné ensuite vers (4,2), tous les groupes ont débuté par l'étude de (4,2), induite par l'exemple initial.

Le groupe Orange s'est ensuite tourné vers (n,n) à travers l'étude de (7,7), (5,5), (1,1), dès le début de la première séance.

Les autres groupes, une fois qu'ils ont eu trouvé une solution pour le cas (4,2), en ont cherché d'autres. Certains comme le groupe Noir en ont même cherché «!*plein, plein!*». Une fois qu'ils ont eu remarqué seuls ou par le biais d'une discussion avec un des accompagnateurs, une régularité dans la forme de ces solutions, ils ont fait varier progressivement la valeur de n, en étudiant soit (3,2) (groupe Vert), soit (5,2) (groupes Noir, Rouge et Jaune).

L'étude d'un nouveau couple (n,k) s'est dès lors opérée soit!:

- Parce que les élèves avaient trouvé une solution pour le (n,k) qu'ils étudiaient et voulaient en trouver pour un autre.
- Parce qu'ils ne parvenaient pas à en trouver et décidaient d'abandonner par dépit. Cela les a amenés alors, soit à étudier le couple suivant relatif au sous-problème considéré (passage de (5,2) à (6,2) par exemple), soit à passer de (n,2) à (n,n) (le groupe Rouge passe de (5,2) à (5,5)), soit à chercher une solution pour un couple (n,k) avec k différent de 2 et n!: les groupes Noir et Orange ont étudié (8,1) suite à la difficulté qu'ils ont eu à trouver une solution pour respectivement (8,2) et (8,8).
- Parce qu'ils avaient remarqué au cours de leur recherche que leurs méthodes ne fonctionnaient que pour n pair (par exemple, les groupes Noir et Vert) ou pour n impair (par exemple, les groupes Orange et Jaune). Alors, une fois une solution obtenue pour un (2p,2) ou un (2p+1,2p+1) donné, ils ont cherché à mettre en oeuvre leur méthode pour respectivement (2p+2,2) ou (2(p+1)+2,2(p+1)+2) et ont poursuivi de la sorte jusqu'au plus n=8, le nombre maximum de couleurs disponibles.

Par ailleurs, certains choix du n à étudier ont été guidés par l'idée «!*de chercher avec le plus de couleurs possibles!*» ou, lorsque les élèves ne parvenaient pas tout de suite à trouver une solution avec un nombre important, par celle d'en mettre moins afin d'essayer d'y voir plus clair!: *«!il y en a trop, après on voit plus rien!»* (S1, groupe Rouge), *«!il y en a trop des pions, plus il y en a, plus c'est difficile* (S2, groupe Vert)!». Par exemple, le groupe Orange est passé de (7,7) à (5,5) lors de la première séance.
A contrario, l'étude de couples (n,k) avec n et k petits était a priori jugée trop simple par les élèves pour qu'ils s'y intéressent. Ainsi, avant d'étudier (n,1), ils ont hésité, puis ont tous demandé à un accompagnateur si cela était possible.
On retrouve des réticences du même ordre chez le groupe Orange. Lors de la deuxième séance, il a énoncé la conjecture!*«!c'est vachement plus facile avec les nombres qui sont impairs!»*. Cependant il avait trouvé précédemment une solution pour (4,2), confondu avec (4,4). Dès lors, conscient de la contradiction entre sa conjecture et le fait qu'il avait trouvé une solution pour (4,2), il s'est servi de la petitesse de 4 pour chercher une explication à tout ça!:

M!: mais à 4, on y arrivait facilement pourtant (il confond le cas (n,!n) et (n, 2))
*C!: ah ouais, c'est vrai…**mais 4 c'est tout petit***
F!: ouais, 4 c'est facile.

Plus tard, A1 lui a signifié sa confusion et l'a incité à vérifier sa conjecture en regardant ce qui se passe pour n pair, « *en commençant peut être par des petits : 2, 4, 6...* ». Une fois A1 parti, les élèves ont choisi seuls les valeurs de n qu'ils voulaient étudier :

M : on essaie avec 4.
Il place.
(..)
C : non mais attends, avec 2 déjà.
M : non pas avec 2.
C : arrête, elle a dit avec 2, 4, 6..
M : oui, mais avec 2 c'est facile. !
C : je sais que c'est facile.

Le cas (2,2) leur apparaissait donc a priori inintéressant, car trop facile. Une fois qu'ils l'ont eu cherché, ils sont revenus sur cette idée :

M : Là, ça marche, ça marche pas.
*M : oh là, là, **c'est trop dur**, ça marche pas ; ah non, mais c'est impossible 2, c'est impossible.*
C : attends, attends.
Ils vérifient.
C : là, ça marche pas du tout, et là ça marche... complètement. C'est pas possible avec 2.
M : 2 impossible, il faut le marquer ça !

L'étude des couples (n,k) avec k différent de n, 2 ou 1, enfin, est apparue soit par confusion (par exemple, le groupe Noir cherche (6,5) en croyant chercher (6,6)) , soit par quiproquo, comme pour le groupe Jaune lorsqu'il étudie (4,3):

A1 : alors vous en êtes où?
J: ben pour l'instant on trouve rien;
A1 : mais vous aviez trouvé des solutions déjà à 4.
J: oui mais tu nous as dit d'essayer à 4 et 3 au milieu.
A1: ah non, ah non. Là, t'en choisis deux, mais tu dois les répéter comme la semaine dernière, il faut qu'il y ait le même nombre au bord et au milieu.

ou le groupe Vert qui étudie (7,3) suite à une intervention de l'enseignant :

Ens : d'accord, donc vous avez mis 2 couleurs, vous pouvez essayer à 3 après, si vous voulez

et papillonne par la suite de couple (n,k) en couple (n',k') sans se centrer sur un sous-problème particulier : (7,3), (8,6), (6,4), (3,3), (4,3).

De façon générale, la dévolution du choix des valeurs de la variable de recherche (n,k) n'a donc pas posé de grandes difficultés aux élèves.

Le choix de l'exemple initial est apparu comme déterminant car il a amené quatre des cinq groupes vers l'étude de (n,2). À travers la comparaison de l'avancée des différents groupes, nous avons pu relever que, même s'ils différaient d'un groupe à l'autre, les **choix des couples (n,k) à étudier n'étaient généralement pas dus au hasard** mais étaient guidés par des considérations communes!: envie d'avancée dans le problème, abandon par dépit, considérations liées à la valeur numérique (petite ou grande), recherche d'une généralisation... ce qui est significatif d'une activité mathématique.

Cependant, même si les valeurs de (n,k) n'étaient pas choisies au hasard, à plusieurs reprises les accompagnateurs ont dû procéder à quelques recadrages dus notamment à des confusions entre les différents sous-problèmes associés. Ces recadrages nous amènent à penser que, si l'on pose le problème de façon ouverte comme nous l'avons fait, le gestionnaire de la recherche, enseignant ou accompagnateur, sera amené à intervenir selon le temps disponible pour la recherche, afin d'éviter les papillonnages et ainsi garantir une avancée féconde dans le problème.

II-2 L'ASPECT LUDIQUE

1- Le joueur fictif!

À ce niveau scolaire aussi, la situation proposée a bien été perçue comme un jeu par tous. À plusieurs reprises les élèves emploient les termes «!jouer!», !«!gagner!», «!casse-tête!».

Toutefois, contrairement au DEUG, l'énoncé a posé des difficultés à certains élèves, et en particulier le rôle du joueur fictif que représente le forain. Le groupe Rouge, par exemple, a détourné le problème au début de la première séance pour jouer à la loterie. À tour de rôle, ses membres tenaient le rôle du forain ou du joueur et comptabilisaient le nombre de coups nécessaires, transformés alors en nombre de points, avant qu'il y ait un face à face!:

Z!: il faut jouer comment en fait!? là, on en a zéro…c'est qui qui a commencé à jouer!?
J!: c'est moi.
Z!: bon alors tu commences!!
(...)
Z!: on a un. Ouais mais c'était pas à toi de jouer, on recommence tout, R c'est à toi.
J!: Alors qu'est ce que tu as!? T'en as un.
Z!: t'as un point. A toi, J.
J!: Allez, un, deux….j'ai exactement pareil que toi.
(...)
Ens!: mais là, vous jouez à la loterie, c'est pas ça le jeu. C'est trouver une solution pour que…à A1!: là, elles s'amusent à la loterie.
A1!: ah ben non.
Ens!: c'est pas ça le jeu.
A1!: non, c'est pas le jeu.

Ens!: tu vois elles font tourner et elles regardent combien elles ont à chaque fois.

Les accompagnateurs ont donc dû leur préciser que le forain pouvait être quelqu'un du groupe et que les autres membres seraient alors les joueurs. Dès lors, ils se sont lancés dans la recherche du problème.

2- Un support matériel très utilisé

Aucun des groupes n'a cherché à se détacher du support. Il leur a permis de faire facilement des essais, leur a fourni des contre-exemples. Quelle que soit leur stratégie, les élèves plaçaient les pions du forain puis ceux du joueur et faisaient tourner la roue centrale pour vérifier la validité de leur disposition par exemple le groupe Orange, une fois qu'il s'est approprié la condition de l'unique face à face, a utilisé le support tout au long des séances aussi bien pour valider seul ses dispositions:

F!: Je sais, je sais!!
M!: Ben t'as rien compris.
C!: Mais t'es con. Attends passe!;
M!: Tu mets un argenté là, ça va très bien. Regardez, on arrive là, on tourne et c'est bon!;
C!:Là c'est bon, déjà, on a 2 positions qui sont bonnes.
M!: Là c'est bon, on les a tous!?
C!: Mais non regarde. Celui-là il est bon, celui-là, ouais, il est bon, celui-là il est bon…
F!: mais non parce qu'il ne faut pas que ce soit en face.
C!: si, il faut qu'il y en ait qu'un seul qui soit en face; et celui-là, il est bon, et voilà!! Mais t'as rien compris il faut qu'il y en ait qu'un seul qui soit en face du même aimant à de la même couleur. Regarde, je te montre. Là, t'es d'accord c'est bon et il n'y a rien d'autre, là t'es d'accord c'est bon et il n'y a rien d'autre, t'es d'accord c'est bon et il n'y a rien d'autre, ***donc on a trouvé!*** *!*

que pour les invalider:

M et F!: Mais si c'est bon là
C!: là c'est bon, je bouge d'un cran, ça c'est bon, je bouge d'un cran et il y en a aucun qui sont bons… ***non ça marche pas****, il faut qu'il y en ait qui soit bon. Alors par exemple..*
M: mais là c'est bon attends!;
C!: mais non…
F!: mais si, regarde…il est bon
C!: ouais, là il est bon, t'es d'accord!? là il est bon, là… ***là, il y en a pas****.*

Par ailleurs, l'utilisation du support matériel a entraîné la mise en oeuvre d'une stratégie «!gloutonne!» par ce groupe, que nos noterons $\boldsymbol{S_{\mathbf{gloutonne}}}$, qui fonctionne sur le même principe que celle que nous avions décrite même si sa mise en oeuvre est différente. Nous la présenterons plus en détails par la suite. Nous pensons qu'elle ne serait pas apparue si la recherche s'était opérée par le seul biais du support papier-crayon, car elle aurait nécessité de représenter plusieurs fois la roue, de gommer... bref, le coût de la tâche associée aurait été trop onéreux. Il est par ailleurs remarquable que cette stratégie «!matérielle!» soit la seule pour laquelle les élèves ont eu recours à l'écrit pour garder trace de ce qui avait été correctement positionné!!

3- Conclusion! : support matériel, dévolution et aide à la recherche

Le support matériel semble donc permettre la dévolution du problème en primaire autant qu'en DEUG, les élèves ayant tous mis en oeuvre une démarche de recherche, plus ou moins élaborée.

Tout d'abord, il leur permet de faire aisément des essais, de trouver des solutions et leur fournit des contre-exemples.

Par ailleurs, même s'ils l'ont utilisé tout au long de leurs recherches, ils ont tout de même mis en oeuvre des stratégies. De plus, du fait qu'il entraîne une réduction du coût de la tâche liée à certaines stratégies par rapport au support papier-crayon, son utilisation a induit une stratégie «!gloutonne!» que nous n'avions pas rencontrée en DEUG.

Enfin, par son seul biais, tous les groupes sont parvenus à des méthodes de construction générales, au moins locales, même le seul groupe qui n'est pas allé au-delà d'une stratégie essais-erreurs.

Aussi, même si la présence de deux joueurs dans l'énoncé a posé quelques difficultés au début de la première séance à certains, le fait que tous ces jeunes élèves aient eu envie de jouer nous conforte dans l'invitation à la recherche que procure l'énoncé proposé accompagné du support matériel, aspect prometteur pour notre projet d'utilisation de cette situation dans un cadre de vulgarisation.

II-3 STRATEGIES ET METHODES

1- Des stratégies de recherche diversifiées

Même si la recherche ne s'est pas faite sur le support papier-crayon, on retrouve certaines des stratégies que nous avions envisagées, que ce soit pour l'étude de (n,n) ou (n,2). Les groupes Vert et Orange ont cherché et trouvé des solutions par le biais de considérations liées à la **symétrie**, le groupe Jaune s'est intéressé à **l'ordre des pions**, l'idée de **décalage** a pointé son nez dans le groupe Vert mais n'a pas été exploitée. Seul le groupe Noir n'a utilisé que la stratégie **essais-erreurs**, mais cela ne l'a pas empêché d'avancer...

Groupe Orange!: *on inverse*

> *A2!: t'as d'abord placé autour et après t'as mis celles du centre!?*
> *M!: oui!!*
> *A2!: mais t'as pas fait n'importe comment, j'imagine,*
> *M!: non, j'ai commencé par un pareil et après j'ai mis les mêmes couleurs qu'étaient là dehors, sur le plateau mais j'ai fait un peu au hasard.*

A2!: t'as fait un peu au hasard!? est ce que t'as d'abord mis ça et ça et après ça et ça!?
M!: ça c'est vrai
C!: ah oui, parce qu'il faut inverser en fait…
M!: oui, j'ai inversé les 2 couleurs, celle- là et celle-là et celle-là et celle-là.
C!: oui parce que si on rééchange, tout est pareil et on échange et ça marche.

Groupe Jaune!: *point de vue lié à l'ordre*

J!: donc il faut les placer.
A1!: voilà.
Ju: ah d'accord, il faut les placer dans un autre ordre!!!

Groupe Vert
idée de décalages

A!: ah, je viens de comprendre là… En fait, il faut aussi qu'ici ***que ce soit en décalage****, par exemple, là, tu mets un rouge, donc là, tu mets ça, comme ça quand tu tourneras, ça fera ça.*
M et C!: ah oui…
C!: donc là tu mets un gris,
A!: non un rouge…
C!: mais non, un gris
A!: ouais,
C!:et là, un rouge et là,
A!: attends, là déjà y en a 0
C!: là, un gris!,
A!: attends déjà, on essaie, là y a un rouge!.

importance des diagonales

M!: regarde, tu vois, on avait trouvé ***le système des diagonales****, là comme ça, si on en a 5, on peut pas faire de diagonale, donc il faut faire à 6.*
K!:oui!,à 6. (...) donc ***on reprend le système des diagonales*** *comme on avait fait là*
A!:oui.
M!: jaune, là, il faut jaune, mets un jaune là, ça fera déjà une diagonale. Ensuite, là, c'est bleu et là tu mets un jaune.

En plus de ces stratégies, d'autres sont apparues. Fortement liées à l'utilisation du support, elles consistent à construire **des solutions «! pas à pas! »,** comme $\mathbf{S}_{\mathbf{gloutonne}}$ développée par le groupe Orange.

C!: attends, vérifie si tu changes celle-là ça va peut-être tout chambouler avec le noir. J'ai une idée, j'ai une idée… ***on n'a qu'à noter toutes celles qui marchent bien.***
(...)
C!: oui, on a une méthode, on note ceux qui sont bons à chaque fois, et on change en fonction de ce qui est déjà pris ou pas. Avec ça, c'est plus facile.

On retrouve cette idée aussi chez le groupe Rouge à travers l'identification de la position «!qui pose problème!» même si cela ne leur a pas permis d'aboutir à des solutions.

Z!: attendez on va compter il faut que ça marche cinq fois, OK!? en tournant autour.
J!: voilà!! ben non ça marche pas…là, ça marche…
R!: là, ça marche..
Z!: donc ça fait deux fois.
J!: là, ça marche pas..
Z!: on fait un petit changement.
J!: on recommence. Tu mets un vert et un noir. Ensuite tu mets ça là et ça là, ça là. Un ça marche. Là ça marche. Là, ça marche!. Trois. Là ça marche pas. Et l'autre!? Donc ça marche pas non plus donc c'est ça le problème. Donc on recommence.
R!: déjà ça marche une fois.
Z!: ça marche, donc deux ça marche, trois, ça marche, quatre ça marche, c'est là qu'il faut changer.
R!: ouais.
Z!: c'est plus là, maintenant c'est là qu'il faut changer. Alors attends, viens on essaye juste ça maintenant.

2- Une avancée plus ou moins globale

Bien que le cas (4,2) ait été présenté comme exemple initial, les groupes Jaune et Orange ont délaissé (n,2) pour (n,n). Ce changement semble dû à une confusion entre les deux sous-problèmes d'une part et d'autre part à l'envie de mettre le plus de couleurs possible.

Quels que soient les cas étudiés, des solutions particulières ont été exhibées par tous lorsqu'il en existait. Par contre, la recherche de méthodes de construction générales, qu'elles soient locales ou globales, n'est pas apparue identiquement dans les différents groupes. Certains sont restés au niveau local, d'autres ont su généraliser encore et passer au niveau global.

Etude de (n,n): deux méthodes dont une originale

Ce cas a été étudié par les groupes Orange et Jaune. Suite à la recherche de (5,5), le groupe Jaune est parvenu rapidement à $\mathbf{M}_{\mathbf{ordre}}!^{(5,5)}$.

E!: on a essayé 5 là et 5 là.
A1: 5 au milieu et 5 là?
E: oui.
A1!: et vous avez trouvé des choses?
E: oui.
A1: et vous les avez notées?
E: oui.
A1: d'accord. Et si je mets les 5 autrement vous pouvez trouver aussi?
Ju: oui, euh, je sais pas.
J: je sais pas.

E: ben oui, peut être.
A1: ou vous avez trouvé que dans un cas bien précis?
E: on a essayé deux fois avec 5.
A1: et à chaque fois vous y arriviez? Si je choisis 5 couleurs n'importe lesquelles, vous arrivez à me trouver une solution?
E: oui, mais pas en une seconde.
A1: voilà, j'en ai mis 5 différentes des vôtres. On va voir si vous y arrivez.
Elles placent au milieu.
E: là, il y en a un, là, un, là, un…
A1: ouais.
E: là, un, là, un.
A1: et tu as tout mis au hasard?
E: non, en fait, j'ai …d'abord, j'en ai mis un en face et au lieu de tourner dans ce sens, j'ai mis noir là, au lieu de là…

Cette méthode sera notée!:

«! si les couleurs sont dans un sens, celles du milieu sont dans l'autre.!» puis supposée généralisable à tous les couples (2p+1,2p+1), après avoir été testée sur (7,7) et (3,3) suite à une discussion avec A3.

Toujours à partir de l'étude de (5,5), le groupe Orange a mis en oeuvre une méthode de construction similaire à un algorithme glouton que nous appellerons «!**méthode gloutonne»** et noterons $\mathbf{M}_{\mathbf{gloutonne}}^{(n,n)!}$, généralisable à tout couple (2p+1,2p+1) sous réserve que l'ordre des couleurs mises l'une après l'autre en face-à-face soit adéquat. Nous la résumerons ainsi!:

$M_{gloutonne}^{(n,n)!}$: placer une des couleurs centrales en face à face et les autres au hasard mais pas en face à face. Tourner le petit disque de cran en cran. Pour chaque position, vérifier qu'il y a une couleur en face à face et une seule ou en placer une. Noter à chaque fois la couleur qui a été positionnée. Les couleurs notées ne peuvent plus être déplacées. Continuer de cran en cran jusqu'à avoir parcouru un tour complet.

Au départ locale, cette méthode leur a permis d'obtenir des solutions pour plusieurs couples impairs, par exemple dans le cas du (9,9)!:

M!: C, tu notes!?
C!: ouais.
M!: d'abord, jaune, rouge, rose, [ils fixent le jaune, le rouge et le rose]
C!: rien du tout!
M!: alors qu'est ce qu'on fait!comme échange?
C!: l'argenté par exemple.
M!: l'argenté avec blanc!
C!: je sais pas si c'est une bonne chose…
M!: argenté, tu notes!? [ils fixent l'argenté]
C!: rien du tout!?
M!: bleu, c'est bon!?
C!: ouais, bleu, c'est bon et blanc, c'est bon aussi. [ils fixent le bleu]

M!: rien du tout.
C!: vert vas y.
M!: rouge.
C!: non le rouge on peut pas.
M!: le noir, tu l'as déjà marqué!?
C!: non.
M!: voilà on fait rouge et noir.
C!: mais non, on peut pas le rouge!!
M!: vert et noir!?
C!: oui tu peux. C'est lequel qui marche!?
M!: vert.
Elle note vert. [ils fixent le vert]
M!: rien du tout.
C!: bon on va y arriver, hein!?
M!: blanc, noir!?
C!: ouais.
M!: noir, t'as marqué!?
C!: échange le blanc et le noir parce que ça marchera après… après il y aura le noir qui marchera...
M!: oh, ça fait combien là déjà!? ça fait 9!! [ils fixent le noir puis le blanc]
!M: si ça marche pas, je me tue!! Ouais, ça marche!! ça marche!!
M!: on vérifie, tu regardes bien. Jaune.
[ils revérifient leur disposition en faisant tourner la roue]
C!: Après il faut que le rouge marche puis le rose.
Ils vérifient en faisant tourner le disque. C prévoit ceux qui vont correspondre et M vérifie.
C!: vert.
M!: vert
Etc…

Etude de (n,2): un point de vue plutôt local

Le cas (4,2), exemple introductif, a été le premier cas étudié par tous les groupes, qui ont tous abouti au moins à une solution. Les groupes Noir, Rouge et Vert ont continué dans ce sens et sont tous parvenus à la méthode de construction $\mathbf{M}_{\mathbf{symdiam}}^{\mathbf{(4,2)}}$.

Groupe Noir

D!: la troisième, c'était, attends,…il change. Voilà, ça marche aussi. Mais c'est à chaque fois la même chose. Regarde à chaque fois, tu dois mettre des deux côtés sur le petit disque, les noirs!en face et ça en face, et les deux couleurs que tu as mises au milieu, les noirs et ça, tu les mets en face, comme ça!.

Groupe Rouge

Z!: il faut que les deux couleurs, elles soient en face sur le cercle. Il faut toujours que les couleurs que l'on choisit au milieu elles soient en face et là, et là, il y a les deux autres couleurs.

Groupe Vert

A1!: et si je vous mets 4 couleurs n'importe lesquelles, vous pouvez me trouver une solution!?
K!:ouais.
A1!: c'est vrai!?

A!:oui.
A1!:alors on essaie!?
M!: oui, on essaye.
K!:c'est parti!!
A1 place 4 couleurs différentes de celles qu'ils avaient choisies!: rouge, jaune, vert, blanc, est ce que là vous allez trouver une solution!?
M!: on fait comme ça en fait.
Elle choisit deux couleurs opposées et les alterne.
M!: voilà, là, un, là, un!;là, un, et là
A1!: OK, s'il y en a 4, vous y arrivez toujours!?
M!: oui
A1!: et comment vous les avez choisies ces couleurs!? Pourquoi t'as choisi jaune et rouge et pas rouge et blanc par exemple.
K!: en fait au début, on a fait au hasard.
A1!: oui mais là, vous n'avez pas fait au hasard. J'ai mis les 4 et tout de suite elle a pris jaune et rouge.
A!:parce qu'elles sont en face!;
K!: elles sont en diagonale.
A1!: donc ça c'est une règle que vous utilisez mais que vous n'avez pas notée. Est ce que vous avez essayé en prenant 2 couleurs à côté!?
A!: non.
A1: par exemple,rouge et blanc, est ce que ça marche!?
M!: non, elles ne sont pas en face.
A1!: alors je peux prendre quoi!aussi ?
K!: bleu et vert. Je peux noter!?
A!: donc marque, quand il y en a 4 il faut qu'elles soient en face..
K!:en diagonale!?
A!: en face, alignées.

Seul le groupe Vert est ensuite passé à des considérations plus globales et a généralisé, sans intervention extérieure, sa méthode aux cas (6,2) et (8,2).

A!: donc on peut y arriver à 6, aussi, c'est la même stratégie
(...)
M!: attends, je vais essayer de faire comme tout à l'heure, je mets d'abord les 4. Voilà. Et là...il y a qu'à mettre un jaune. Mais non imagine qu'on en ait à 4...il faut faire les diagonales., donc on met celui là, là..
A!: d'abord ce qu'on a fait c'est qu'il fallait des couleurs opposées par exemple ça. Après, ça il fallait que ce soit à côté de quelque chose d'autre ensuite, il fallait avoir 2 trucs en même temps…Ca va peut-être marcher ça. Tiens ça marche, euréka, j'ai trouvé!! là, là, là, là, là …

Quel que soit le groupe, la dévolution du problème de *La roue aux couleurs* n'a donc pas posé de difficulté aux élèves malgré leur niveau scolaire élémentaire. Plusieurs des stratégies que nous avions présentées dans notre analyse a priori et retrouvées chez les étudiants de DEUG ont été développées. Cependant, même si tous les groupes ont trouvé des solutions particulières, la recherche de méthodes, locales pour la plupart, est souvent apparue suite à une discussion avec un des accompagnateurs.

II-4 RECHERCHE D'UNE MODELISATION DE LA SITUATION

1- Des couleurs de moins en moins importantes

Le premier pas vers un processus de modélisation du problème que représente l'énoncé de la remarque **Rem**$_{\textbf{coul}}$ a été franchi par tous mais à des temps différents. Lors de la première séance, elle a été formulée par les membres du groupe Jaune!au cours de la recherche:

E!: ben peut être qu'il faut essayer d'autres couleurs.
Ju!:non, c'est la même chose de toute façon, si tu changes de couleurs ce sera la même chose.
(...)
E!: ben si on a la réponse pour une c'est sûr qu'on a la réponse pour toutes.

Pour les groupes Vert et Orange, l'idée est venue pendant la deuxième séance, mais elle n'a pas été énoncée explicitement. Elle apparaît à travers la mise à jour de méthodes de construction induisant des remarques telles que!:

Groupe Orange

Ens!: combien de solutions vous savez construire!?
M!: tu nous mets n'importe quelles couleurs impaires et c'est bon.

Groupe Vert

A1: par exemple si le forain il met 6 couleurs mais pas celles que tu as choisies ou dans un autre ordre. Est ce que quand vous y êtes arrivés, vous savez faire avec d'autres couleurs ou les mêmes mais pas disposées pareil!?
M!: oui, de toutes façons, s'il met d'autres couleurs, il faudra les placer pareil alors, on y arrivera.

Groupe Noir

A1: est ce que vous en avez d'autres!avec n'importe quelles couleurs?
D!parle de (4,2)!: en fait,c'est pas vraiment les couleurs, il faut disposer les couleurs autour et on s'en fout que les couleurs changent. ***On peut faire avec n'importe quelles couleurs, mais faut que les pions du milieu ne soient pas n'importe comment***.

Les recherches du groupe Rouge, enfin, ont été menées tout au long des deux premières séances par le biais de considérations quant au choix des couleurs, notamment suscitées par Z, une des membres.

S1!:

t!= 23 min

J!: ça marche pas.
Z!: il faut changer de couleurs peut être.

t= 29 min

J!: là ça ne marche pas.
Z!: bon je sais il faut changer de couleurs là.

S2!:

t=4 min

Z!: après ça va plus marcher, ça marche pas...
(!...)
Z!: bon alors il faut changer de couleurs.

t=5 min

R!: attendez déjà on n'a qu'à essayer de changer de couleurs.

t=7 min

Z!: moi je pense qu'il faudrait changer de couleurs.

Puis, J, une autre membre a peu à peu remis en cause cette idée!:

t=6 min

J!: mais non c'est pas les couleurs qui coincent.

t= 8 min

J!: moi je pense que le problème c'est pas de changer les couleurs.

Rem$_{\textbf{coul}}$ a été finalement énoncée au cours de la troisième séance, suite à plusieurs discussions avec les différents accompagnateurs au cours de l'étude de (4,2)!:

t= 29 min

A1!: donc si on choisit le blanc et le vert est ce que ça marche!?
R!: non mais si on choisit vert et rouge, oui.
J!: pourquoi il y a des couleurs qui marchent et d'autres pas!?
R!: mais c'est pas les couleurs, on s'en fout des couleurs, c'est la position qui compte!!

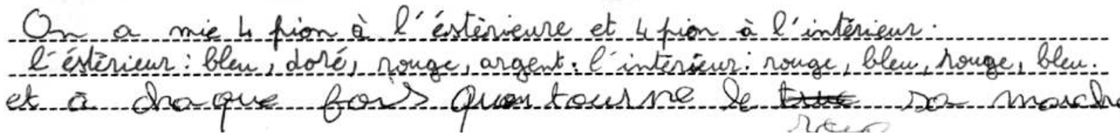
t=37 min

A2!: alors!?
Z!: ben on a trouvé un truc important... ben tu vois
J!: en fait c'est pas les couleurs, au début nous on croyait que c'était les couleurs.
Z!: en fait c'est les positions.

2- Représentations et codages: des roues et des couleurs

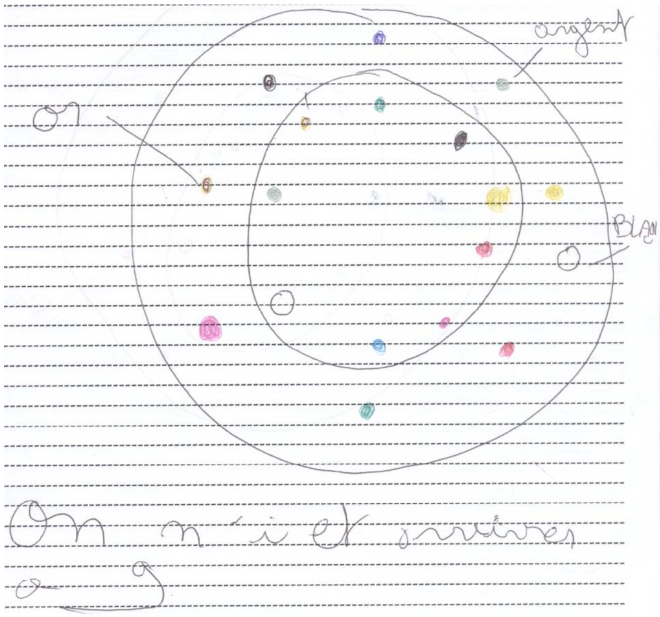
Quel que soit leur groupe, les élèves ne sont pas allés plus loin dans la recherche d'une modélisation de la situation et sont donc restés à des modèles pseudo-concrets très proches de la situation réelle.

Les solutions étaient décrites dans un premier temps par un texte!:


On a mie 4 pion à l'éstérieure et 4 pion à l'intérieur :
l'éstérieur : bleu, doré, rouge, argent : l'intérieur : rouge, bleu, rouge, bleu.
et a chaque fois quon tourne le ~~truc~~ roue sa marche

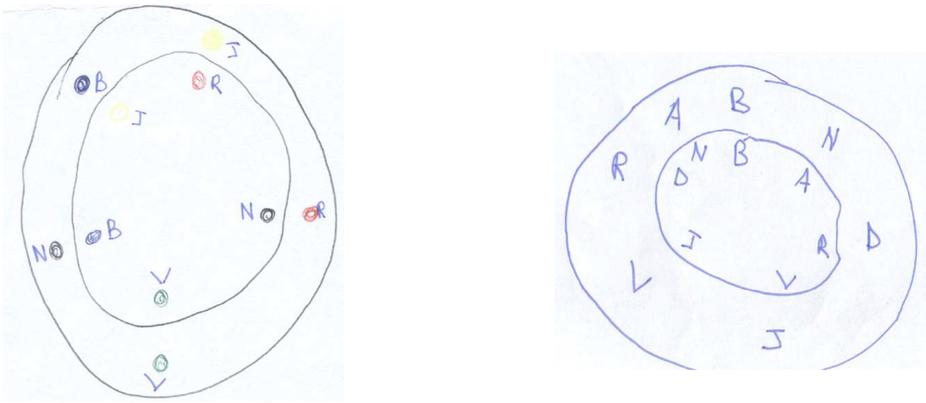
Extrait feuille de recherche, groupe Rouge!: des solutions décrites par des mots

Du fait de la difficulté que cela impliquait pour les élèves, les accompagnateurs leur ont suggéré qu'ils pouvaient faire des schémas, ce que les membres des différents groupes n'osaient pas faire dans un premier temps. Dès lors, les solutions ont été représentées pour la plupart des groupes de façon très réaliste, par le biais de $\mathbf{R}_{circ}$. Les pions étaient reproduits à l'aide de feutres de différentes couleurs (même les pions or et argent, compte tenu de la gamme de couleurs disponibles actuellement!).



Groupe Orange!: des pions de couleurs

Seul le groupe Jaune s'est détaché peu à peu de la situation concrète et a finalement eu recours à $\boldsymbol{C}_{ini}$, sans pions.



Le groupe Jaune!: des schémas de plus en plus abstraits

3- Prise en compte de la rotation! : l'importance du sens

Les élèves n'ont pas eu à traduire la rotation sur le support papier-crayon puisqu'ils ont toujours eu recours au support matériel. Toutefois, on retrouve des indices de la prise en compte du fait qu'il faille tourner dans les différents protocoles!:

- marqueurs langagiers (utilisation du futur, expressions)! indiquant l'anticipation de ce que va donner la configuration considérée!: «!ça ne va pas marcher!», «!après, ça ne marchera plus!», «!après, quand tu vas tourner!», «! si t'arrives comme ça »

• invalidation d'une disposition sans avoir besoin de faire tourner la roue

• recours intuitif à la notion de décalages!

Groupe Vert, S1

«!A!: ah, je viens de comprendre là…En fait, il faut aussi qu'ici que ce soit ***en décalage****, par exemple, là, tu mets un rouge, donc là, tu mets ça,* ***comme ça quand tu tourneras****, ça fera ça.!»*
«!déjà là, ça va marcher parce que si on tourne ça va automatiquement là. donc il faut faire les choses à l'avance!».

Cette idée a été reprise lors de S4 pour trouver des solutions pour (5,5)!:

C: on a fait un peu comme la méthode du groupe jaune (ndlr!: $M_{ordre}{}^{n}$) mais nous on a mis d'abord le doré après il faut mettre le rouge là ***comme ça quand on va tourner****, ça fera rouge puis on tourne et on met le vert là pour que* ***quand on tourne ça fasse vert*** *etc…*

Groupe Noir, S4

M!:Si je tourne, je ne peux pas parce que c'est après…!il faut essayer de trouver les places pour que quand on tourne ça fasse là mais pas là.

Par ailleurs, contrairement aux élèves de DEUG, les groupes ont attaché de l'importance au sens de rotation et ne sont pas tous parvenus à la remarque générale **$\mathbf{Rem_{sens}}$**.

Les groupes Vert et Rouge ont convenu dès le début de leurs recherches du sens dans lequel ils allaient tourner la petite roue. Ils ont dès lors opté pour le sens des aiguilles d'une montre et n'ont pas cherché à savoir si le fait de tourner dans l'autre sens importait ou pas. On retrouve cela chez le groupe Noir mais à aucun moment les élèves ont choisi ce sens, il s'est imposé de façon implicite.

Les membres du groupe Orange ont aussi tourné dans ce sens mais en remarquant que l'un ou l'autre, *«!c'est pareil!»*.

Le groupe Jaune, au contraire, a attaché de l'importance au sens de rotation. À plusieurs reprises, si une configuration ne fonctionnait pas, les élèves de ce groupe ont pensé qu'elle pouvait être valide en tournant dans le sens inverse.

S1!:

J!: oh, allez… sinon, regardez, on va tout recommencer, on va tourner dans ce sens à chaque fois.
Elles enlèvent tout et replacent.
J!: alors, là, il y en a zéro…là, zéro.
Ju et E!: si, il y en avait un!!
J!: ah oui…un
E!: deux.
Elles changent.
E!: deux.
J!: donc ça va pas donc maintenant on tourne dans ce sens…il y en a un. Y en a..

t=9 min

Ens!: alors, là, il y en deux, donc c'est pas bon.
E!: il y en a même trois.

Ens!: quatre même.
Rires.
*Ju!: **change de sens**, c'est sûr à un moment, il va y en avoir…*

t= 40 min

*J!: et **dans l'autre sens**, on peut la tourner!!*

S2!:

t=22 min

Ens: donc c'est impossible, ça. Vous pensez que c'est impossible?
J: oui. Même dans ce sens c'est impossible. Ça fait deux et zéro.

Se détacher de la situation concrète n'a pas été quelque chose d'aisé pour la plupart des élèves mais ils sont tous parvenus à énoncer $\mathbf{Rem}_{\mathbf{coul}}$ et donc à franchir ce pas important dans la modélisation du problème, qui marque **le début de la mise en oeuvre d'un modèle pseudo-concret.**
Cependant, les représentations utilisées restent très proches de celle du support matériel mais cela était prévisible étant donné que même parmi les DEUG, un groupe (G4) n'a utilisé que $\mathbf{R}_{\mathbf{circ}}$ et $\boldsymbol{C}_{\mathbf{ini}}$ et n'a eu recours à $\boldsymbol{C}_{\mathbf{num}}$ que lorsque ce codage avait été institutionnalisé.
Enfin, il est remarquable que $\mathbf{Rem}_{\mathbf{sens}}$ n'ait été que très peu explicitée. Nous ne pensions pas que le sens de rotation allait jouer un rôle aussi important dans la résolution, d'autant plus que rien n'était spécifié à ce sujet dans l'énoncé.

II-5 ÉTUDE DES PHASES DE FORMULATION ET DE VALIDATION!

1- Des propriétés

Tous les groupes qui se sont penchés sur le cas (4,2) ont été amenés à formuler $\mathbf{P}^{(4,2)}_{\mathbf{consec}}$.

Groupe Jaune

A2 à A1: elles disent qu'elles peuvent y arriver si elles mettent par exemple deux noirs et deux verts ou deux rouges et deux blancs. Après, elles disent qu'elles ne peuvent pas y arriver si elles mettent deux rouges et deux verts.
A1: pourquoi?
(…)
E: ben on a essayé et ça ne marche pas.
(…)
E: il faut noter quoi?
J: ben que ça ne marche pas! Que c'est que en face que ça marche. Que ça marche que en face.
A1!: voilà. Et tu peux donner un exemple aussi.
J et Ju: ça marche que en face mais pas à côté.

E lit ce qu'elle écrit:" on a remarqué que l'on ne pouvait pas mettre deux couleurs au milieu qui sont à côte à côte sur le grand plateau".

On a remarquées que ~~il~~ on ne pouvait pas mettre deux
couleurs côte à côte ~~sur le grand plateau.~~ au millieu sur
qui sont qui sont
le petit plateau.

$P^{(4,2)}_{consec}$: extrait de la feuille de recherche du groupe Jaune

Groupe Noir

D : ouais, on peut pas changer parce que ça va faire pareil après. Ah mais j'ai compris, ***il faudrait pas les mettre à côté, ces deux.***
(...)
A2 : vous avez 3 solutions, alors ?
Tous : ouais !
A2 : j'ai l'impression que vous pouvez toujours trouver des solutions ?
Tous : ben oui.
A2 : ah bon ? si on change par exemple…
E : non, on peut pas toujours trouver de solution…
A 2: ah bon ? alors quand est ce qu'on ne peut pas en trouver ?
D : quand les deux couleurs qu'on met au milieu elles sont à côté, on peut pas trouver…
A2 : ah bon ?
D : ça va faire comme ça et il y en aura 2 en face ;

Groupe Vert

M : à côté, on peut pas y arriver, regarde.
Il montre sur la roue.
(...)
M : les couleurs qu'on met au milieu, il faut pas qu'elles soient à côté à l'extérieur.

Toutefois cette remarque n'est pas toujours apparue spontanément. Le groupe Rouge par exemple choisissait toujours les deux couleurs non consécutives, il a fallu qu'un accompagnateur lui demande de traiter un cas où elles étaient côte à côte pour qu'il parvienne à énoncer $\mathbf{P_{consec}^{(4,2)}}$.

Parallèlement à $\mathbf{P_{consec}^{(4,2)}}$, le groupe Jaune a remarqué, lorsque les cas (4,2) ou (4,4) posaient problème, des similarités dans le nombre de faces à faces simultanés :

Si à un moment il y a 0 face à face alors dans une autre position, il y en aura 2 ;

ce qui implicitement prend en compte le fait que la somme des décalages est constante. Il s'en est servi à plusieurs reprises pour invalider ses dispositions et écourter la recherche dès lors qu'il aboutissait soit à aucun face à face soit à deux :

E : il y en a un. Y en a …zéro.
J : zéro.
E : donc ça veut dire qu'il va y en avoir deux quelque part.

2- Des méthodes de construction locales et globales

La recherche de généralisation, et donc de méthodes de construction, ne s'est pas opérée de la même manière selon les groupes. Certains avaient à l'idée dès le début qu'il pouvait exister des méthodes ou des points communs entre les solutions particulières.

Groupe Rouge!:

Z!: ouais. On va essayer de trouver une technique.

Groupe Vert

M: mais à quoi ça sert de refaire la même chose?
A: mais on fait pas la même chose, on fait avec d'autres...
M!: ah, tu veux dire qu'il faut juste changer les couleurs, il faut juste les placer, par exemple, si je choisis de mettre du jaune à la place du rouge,.(inaudible)
A!: mais non, on va faire un autre
K!: pour voir si ça marche ou pas.
M!: ah...
A!: par exemple, là on met jaune et en face on met un autre jaune, ça fait comme...
M!: oui mais c'est la même chose que ça sauf qu'à la place du rouge, on met du jaune, à la place du noir on peut mettre du vert, c'est ça que tu veux dire!? ah d'accord.

Les groupes Noir et Rouge ont énoncé des méthodes locales propres au cas (4,2), proches de $\mathbf{M}_{\mathbf{symdiam}}^{(n,2)}$. Le groupe Vert également mais contrairement aux deux autres, il l'a réinvesti par la suite à (6,2)!puis (8,2). Il a donc amorcé une démarche moins locale.

Les groupes Jaune et Orange ont quant à eux réussi à avoir des considérations globales. Après avoir trouvé plusieurs solutions pour (5,5), ils ont non seulement énoncé une méthode de construction pour ce cas, mais ils ont supposé, après plusieurs essais, qu'elle pouvait être étendue à (2p+1,2p+1), et donc ont abouti respectivement à $\mathbf{M}_{\mathbf{ordre}}^{(n,n)}$ et $\mathbf{M}_{\mathbf{gloutonne}}^{(n,n)}$, toutes deux méthodes de construction globales.

Qu'il soit local ou global, le passage d'un cas particulier à la recherche d'une forme générale s'est opéré pour trois groupes lors de phases de travail adidactique, pour les autres, cela a eu lieu suite à une discussion avec un des accompagnateurs.

Méthodes locales

Les groupes Jaune et Orange ont découvert seuls $\mathbf{M}_{\mathbf{ordre}}^{(5,5)}$ et $\mathbf{M}_{\mathbf{gloutonne}}^{(5,5)}$ au cours de leurs recherches. Il en est de même pour le groupe Vert et $\mathbf{M}_{\mathbf{symdiam}}^{(4,2)}$ énoncée au début de la deuxième séance alors qu'il revenait sur ses recherches précédentes.

On retrouve cette idée de généralisation locale chez D un des membres du groupe Noir mais cela a donné lieu à un conflit entre lui et les autres membres de son groupe au début de la deuxième séance alors qu'ils faisaient le point sur leurs recherches précédentes:

S2, t=2 min 50

E: après, $4^{ème}$, sur le grand disque...
D: quoi, il y en a encore une $4^{ème}$, ça me saoule!
P: tu fais quoi?
E: ben ouais, on en fait d'autres. Il faut en faire d'autres.
D: ah, ah, elle invente des trucs!
M: ouais mais il faut déjà trouver avant de marquer!
D: ouais mais on sait comment ça marche maintenant...
M: ouais mais on n'a rien trouvé et elle marque!
D: ouais mais on sait comment ça marche, on a compris, donc c'est plus la peine de trouver d'abord maintenant.
E lit ce qu'elle vient d'écrire.
E: sur le grand disque, un pion noir, vert, jaune; argent et sur le petit, noir, jaune, noir, jaune.

Alors que les autres membres avaient un point de vue très local et collectionnaient les solutions particulières, afin d'avoir *« plein plein de solutions »,* D cherchait à adopter un point de vue plus global, en remarquant des similarités entre leurs diverses solutions et en cherchant à généraliser ces observations. Contrairement aux autres, il avait aussi à l'esprit $\mathbf{P}_{\mathbf{consec}}^{\mathbf{(4,2)}}$.

Par contre, les membres du groupe Rouge ont eu besoin de l'aide des accompagnateurs pour aboutir à une méthode de construction pour (4,2). Il a fallu plusieurs interventions des Ai pour qu'ils y parviennent lors de la troisième séance. Peut-être cela peut-il s'expliquer par l'importance qu'ils apportaient aux couleurs et le fait qu'ils n'aient pas cherché plusieurs solutions pour (4,2), suite à une intervention de l'enseignant lors de la première séance qui les a incités à *«compliquer un peu la chose»* en rajoutant une couleur.

Méthodes globales

La deuxième étape vers la généralisation, le passage d'un (n,k) particulier au sous-problème général associé, s'est amorcée lors d'un travail adidactique au sein des groupes Vert et Rouge quand ils ont cherché à appliquer $\mathbf{M}_{\mathbf{symdiam}}^{\mathbf{(4,2)}}$ à (6,2) et du groupe Orange après qu'il ait remarqué que *« c'est vachement plus facile avec les nombres qui sont impairs »* et ait cherché à vérifier cette supposition en étudiant (3,3), (5,5) (7,7) et (9,9).

Groupe Rouge

R: à 4, on avait fait rouge, bleu, rouge, bleu...
J: oui, très intéressant...et alors?
R: peut être qu'il faut noir, blanc, noir, blanc, noir, blanc..
Z: d'accord, OK, pigé. Voilà.

Cela a été réinvesti pour (8,2), et leur a fourni une méthode de construction :

J: donc, on a trouvé la technique.

Groupe Orange

M!: après on essayera avec un milliard.
F!: un milliard, c'est pas un nombre impair.
M!: un milliard un alors…
(…)
F!: on prend que les nombres impairs.
C!: les nombres impairs, on sait tous les faire, les yeux fermés!!
(…)
Ens!: combien de solution vous savez construire!?
M!: tu nous mets n'importe quelles couleurs impaires et c'est bon.

Par contre, c'est suite à une discussion avec A3 que le groupe Jaune a cherché à utiliser $\mathbf{M}_{\mathbf{ordre}}^{(5,\,5)}$ pour (7,7) et est parvenu à $\mathbf{M}_{\mathbf{ordre}}^{(n,n)}$.

Les groupes Jaune et Noir ont, par ailleurs, généralisé sans aide extérieure les remarques qu'ils avaient faites suite à l'étude d'un couple (n,1).

Groupe Jaune!

A1: et si on met qu'une couleur au milieu?
Elles essaient.
A1: alors, là, ça marche et là, ça marche.
J: ouais, ça marche tout le temps!
A1: avec 1, ça marche?
E: ben ouais! Bien sûr..
A1: à 1, ça marche toujours?
E: oui.

Groupe Noir

D!: si on met que du vert, ça marche s'il y a du vert autour et d'autres couleurs.
A1: et n'importe lesquelles!?
M!: on peut mettre des millions et des millions de couleurs, s'il y a un vert, c'est bon.

3- Enoncés de méthodes de construction! : un frein dû aux difficultés liées à l'écrit

Le problème de l'écrit a joué un rôle important lors des phases de formulation, ce qui n'est pas étonnant compte tenu du niveau des élèves. Alors que des méthodes ont été explicitées oralement, seules les plus faciles à énoncer ont été retranscrites à l'écrit, tandis que les élèves représentaient aisément leurs solutions par des dessins. Ainsi, la rédaction de $\mathbf{M}_{\mathbf{ordre}}^{(n,n)}$ par le groupe Jaune est proche de celle que nous avions donnée alors que le groupe Orange a décrit $\mathbf{M}_{\mathbf{gloutonne}}^{(n,n)}$ oralement mais n'a pas cherché à la rédiger.

D'autre part, les méthodes associées à (n,2) semblent être celles qui ont posé le plus de difficulté aux élèves, compte tenu du nombre de paramètres à prendre en compte!: le nombre de couleurs extérieures, leur position relative, le choix des deux couleurs centrales, et enfin comment elles doivent être disposées. Cela apparaît par exemple dans les tentatives de formulation de $\mathbf{M}_{\mathbf{symdiam}}^{(4,2)}$ par les groupes Vert et

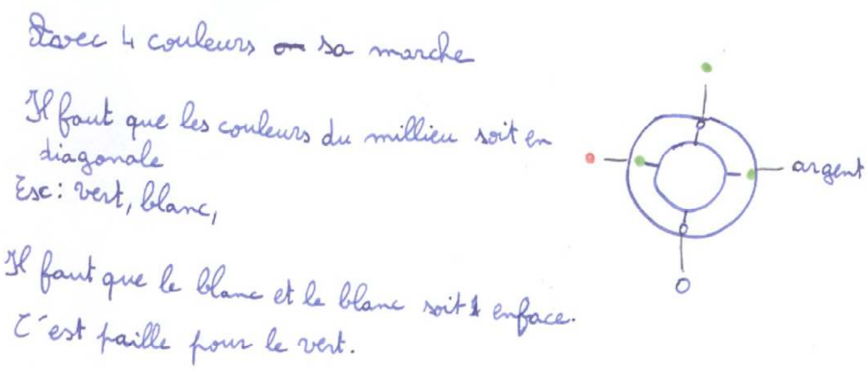
Rouge, les textes établis lors de la troisième séance traduisant difficilement l'ensemble des contraintes.

Groupe Vert!:

> *«!dans le petit rond, les deux couleurs choisies doivent être en diagonale, pour le grand rond, les deux couleurs du petit rond doivent être en diagonale!»*

Groupe Rouge!:

> *«!il faut que les couleurs du milieu soient en diagonale (ex!: vert, blanc) et il faut que le blanc et le blanc soient en face, c'est pareil pour le vert!»*



4- Des conjectures

Tous les groupes, quelle que soit leur avancée, ont été amenés au cours de leurs recherches à énoncer des conjectures liées au rôle de la parité de n dans l'obtention des résultats.

Après avoir essayé sa méthode pour (6,6), (7,7) et (3,3) guidé par A3, le groupe Jaune a supposé qu'il fallait distinguer les cas 'n pair' des cas 'n impair'!!:

> *E: alors en fait ma méthode ça marche que pour impair, ça marche pas pour pair.*

puis il a procédé à d'autres essais pour vérifier cette hypothèse. Rien n'a été dit par contre sur la possibilité de trouver une solution lorsque n est pair.

Le groupe Orange a tout d'abord émis l'hypothèse que les impairs étaient plus simples que les pairs pour (n,n)!:

> *M!: c'est vachement plus facile avec les nombres qui sont impairs.*
> *C!: ouais, c'est pas sûr mais on l'a remarqué. On verra bien. (...) On fait avec les nombres impairs et si on trouve que c'est plus facile...c'est que c'est juste.*

hypothèse qu'il a cherché à vérifier en étudiant (3,3), (5,5), (7,7), (9,9) d'une part et (8,8), (2,2) et (4,4) d'autre part.

Les membres du groupe Rouge, une fois leur méthode de construction générale mise à jour, ont cherché à l'utiliser pour trouver des solutions pour (5,2), cas qu'ils avaient fini par abandonner auparavant puis (7,2). Comme les groupes Jaune et Orange, cela les a amenés à énoncer une première conjecture, distinguant les cas où n est pair des cas où il est impair!:

J!: Il faut toujours que ce soit pair au bord et on choisit deux couleurs...
A1!: n'importe lesquelles!?
J!: n'importe lesquelles et ensuite, on les met comme ça mais pas comme ça et à chaque fois ça marche mais ça ne marche jamais quand c'est impair.
Z!: il faut que ce soit pair pour que ça marche.
(...)
A3!: et vous avez essayé d'autres pairs et impairs!?
J!: oui, on n'a réussi en faisant comme ça qu'avec 4 pions, 6 pions et 8 pions, alors tu vois, à chaque fois, c'est que des pairs.
A3!: est ce que vous avez essayé à 6!?
J!: oui et on a réussi.
A3!: donc vous avez des solutions pour 4, 6, 8 et au milieu deux couleurs différentes.
J!: oui.
Z!: en fait on prend les deux couleurs par exemple bleu et argent et on met bleu argent, bleu argent etc...
A3!: et les impairs!?
J!: ben on a bien réfléchi pour les nombres impairs et on n'y arrive vraiment pas.

5- Preuves suscitées, preuves spontanées, idée d'exhaustivité et de forçage

La plupart des arguments de preuve sont apparus à la suite de discussions avec les accompagnateurs au cours desquelles ils répondaient à chaque affirmation des élèves par la question!: «!pourquoi!? »! ou «!êtes-vous sûrs!?!».

Dès lors, la majorité des groupes a eu recours à des arguments inspirés de l'exhaustivité en donnant pour réponses des phrases du type!: *«! on a essayé et ça ne marche pas»* mais de façon générale ils étaient loin de garantir avoir étudié effectivement tous les cas possibles.

Groupe Jaune, S1 lors de l'étude de (4,4)!:

J!: non, ça va non plus. Mais c'est impossible!!
A1!: pourquoi c'est impossible!?
Ju!: ben parce que c'est la vérité.
A1!:Si c'est impossible il faut que tu m'expliques pourquoi c'est impossible.
J!: eh ben regarde, parce qu'à chaque fois qu'on tourne, eh ben c'est toujours la même.
Ju!: oui, c'est toujours la même. À chaque fois qu'on change, ça marche pas.
A1!: oui mais est ce que tu es sûre d'avoir essayer toutes les positions!?
Ju!: euh, je sais pas, je pense pas.

$\mathbf{P}^{(n,2)}_{\mathbf{consec}}$, le fait que les couleurs centrales ne doivent pas être choisies consécutives dans le cas de (n,2) et le problème local (2,2) sont les seuls cas où les élèves étaient sûrs qu'ils n'y avaient pas de solutions et pouvaient le montrer, l'étude des possibles étant facile à mettre en oeuvre.

$P^{(n,2)}_{consec}$

Groupe Rouge

A2!: et si on les choisit à côté!?
Z!: ça ne marche pas.
A2!: et pourquoi!?
Z!: on a essayé et ça ne marche pas.
A2!: mais est-ce que vous êtes sûres que ça ne marche pas comme ça!?
J!: oui, il y a toujours deux couleurs en même temps.

(2,2)

Groupe Jaune

Ens: ouais, qu'est ce que vous avez trouvé?
J: ben à deux couleurs ou à une couleur ou…à deux couleurs, c'est impossible mais…
Ens: ben vas-y alors, fais-moi voir d'autres choses alors…Montrez- moi d'autres choses que vous avez faites.
Ju: alors…
J: à deux ça ne marche pas.
Ju: ouais, à deux ça ne marche pas.
Ens: à deux c'est-à-dire?
J: par exemple, si on met ça et ça. Là, il y en a deux. Donc ça ne marche pas. Il y en a soit deux soit zéro.
Ens: donc c'est impossible, ça. Vous pensez que c'est impossible?
J: oui. Même dans ce sens c'est impossible. Ça fait deux et zéro.
Ens: et si vous mettiez…
Il place deux pions de la même couleur au milieu.
J: oui, mais ça on a déjà essayé c'est ce qu'on a fait tout à l'heure.
Ens: voilà, et ça marche ça.
J: oui.
Ens: donc c'est pas vraiment impossible à deux;
J: c'est impossible à deux avec deux au milieu.
Ens: d'accord.

Groupe Orange

C!: là, ça marche pas du tout, et là ça marche… complètement. C'est pas possible avec 2.
M!: 2 impossible, il faut le marquer ça.
Ils appellent l'enseignant.
M!: on n'y arrive pas avec 2. Avec, c'est impossible.
C!: Regarde, on va te le prouver.
M!: on va prendre le rose et le or.
M!: regarde, ça marche pas du tout et là c'est les 2. donc on peut pas.
Ens!: et si vous faîtes dans l'autre sens!?
M!: c'est pareil.

D'autre part, une argumentation proche du forçage est apparue au cours d'une phase de travail adidactique, chez le groupe Vert lors de l'étude de (4,2)!:

*A!: ah ben non ça marche pas, regarde quand je tourne ça fait là. Là, là, **c'est obligé**, là il peut pas y en avoir autrement.*

K : ben si parce que regarde, quand..
*A : non, non, attends je t'explique, c'est impossible parce que dès que tu mets un truc ici **t'es obligé** de mettre au moins un jaune, donc ça en fait 2, donc là, **c'est obligé que ça marche avec 4 comme ça**. Ben voilà…On peut en faire avec 6, mais **il faut pas que les deux couleurs soient comme ça ;***

Lorsque les valeurs de n augmentaient et que l'exhaustivité et le forçage étaient plus difficiles à utiliser, un autre type d'arguments est apparu, erroné celui-là et identique à celui avancé par le groupe G3 en DEUG. Il s'appuyait sur le fait que les méthodes établies pour les impairs ne fonctionnaient pas pour les pairs ou inversement et donc implicitement sur la conception selon laquelle il existait une seule méthode de résolution, comme le suggère un des membres du groupe Rouge :

*Z : c'est bon, troisième solution et on a trouvé **la** technique.*

Ainsi les groupes Orange, Rouge et Vert ont considéré qu'il n'y avait pas de solution pour (2p,2p) ou (2p+1,2) car leurs méthodes ne s'appliquaient plus.

Groupe Rouge

Z : comment on fait là, on peut pas !
R : ben parce que 7 c'est impair. 7 c'est impair alors on pourra jamais.
J : bon on va voir. Alors, ça marche.
Z : ça marche ? Où ça ? Ah d'accord.
J : là, ça ne marche pas.
Z : ben non, il y en a deux.
J : bon on recommence. Là, ça marche... pas.
Elles modifient.
J : là, pour l'instant, ça marche.
Z : donc on a fait le 1 ?
R : auais.
J : là...
R : ça ne marche pas... Bon, je pense qu'on va mettre
Z : ouais mais impair, ça peut pas marcher.
*J : attends il faut que je fasse un truc, je peux noter un truc ? Elle note **« la solution marche avec des nombres pairs. »***
(...)
A3 :oui, j'ai vu comment vous avez fait, mais pourquoi vous n'avez pas continué à 7 ?
Z : parce que c'est impair. Du coup, on avait deux bleus à côté, parce que c'était impair, parce que pour 8 on en met un puis un autre.

repris lors de la troisième séance :

J : je note, 7 ça ne marche pas car...
Z : car il est obligé qu'il y ait deux couleurs qui…
J : non, il y a une couleur qui n'est pas en face de sa couleur...

Groupe Orange

*C : et l'argenté, on peut pas le bouger, sinon, ça fait tomber le noir. Bon, ben ça marche pas cette méthode. Donc **8 ça ne marche pas**.*
(...)

A1!: et à 8!?
M!: c'est impossible.
A1!: pourquoi vous dîtes que ce n'est pas possible!?
C!: parce qu'on n'y arrive pas.
Ils continuent tout de même à chercher.
C!: attends, jaune, rouge, vert…On laisse tomber, on laisse tomber!! J'enlève les aimants.
A1!: vous avez abandonné à 8!?
M!: ouais, on n'y arrive pas à 8.
A1!: Vous pensez qu'il n'y a pas de solution!?
C!: oui.

Groupe Vert

*M!: regarde, tu vois, on avait trouvé **le système des diagonales**, là comme ça, **si on en a 5, on peut pas faire de diagonale**, donc il faut faire à 6.*
(…)
A!: ça marche pas, c'est pas pair
K!:il faut des pairs.

Comme les élèves de DEUG, ces trois groupes en ont conclu que!:

> *«!au 8, on n'y arrive pas parce que ce n'est pas un chiffre impair!(Orange, pour (n,n))*
>
> *« impair, ça peut pas marcher!» (Rouge, pour (n,2))*
>
> *«!ça marche pas, c'est pas pair!» (Vert, pour (n,2))*

Nous relevons donc, comme en DEUG, des difficultés liées à la formulation des résultats, énoncés de méthodes et de preuves, qui sont restés très descriptifs du fait de l'utilisation continue du support matériel. Les élèves ont de plus dû faire face au problème de l'écrit. Malgré cela, plusieurs énoncés de méthodes, locales pour la plupart, figurent dans les feuilles de recherche ou sur les feuilles de bilan.

La recherche de preuve a été plus problématique et a bien souvent due être suscitée par les accompagnateurs. Alors, la preuve par exhaustivité de la non-existence de solution pour les cas (2,2) et (n,2) avec deux couleurs consécutives a été fournie par plusieurs groupes accompagnée de quelques arguments relevant du forçage.

Nous avons retrouvé, enfin, l'argument erroné avancé par le groupe G3 de DEUG, s'appuyant sur la non-application des méthodes découvertes pour (2p+1,2p+1) à (2p,2p) ou celles de (2p,2) à (2p+1,2) pour supposer qu'il n'y avait pas de solution.

II-6- Conclusion! : une situation de recherche adaptee a l'ecole primaire

Ainsi, les différentes étapes de la démarche de recherche en mathématiques!: essais, généralisation, preuves... ont été mises en oeuvre par tous les groupes. Compte tenu de leurs productions, nous pensons que, contrairement à ce que nous avions relevé pour les situations proposées dans les manuels sous la rubrique «!résolution de problèmes!», la situation recherche *La roue aux couleurs* répond effectivement aux critères que doit remplir «!*un véritable problème de recherche!*» spécifiés dans les instructions officielles, afin de permettre aux élèves de développer *«!un comportement de recherche et des compétences méthodologiques:*

> *- émettre des hypothèses et les tester!: les élèves ont tous émis plusieurs hypothèses, qu'ils ont validées à l'aide du support matériel.*
>
> *- faire et gérer des essais successifs!: ils ont eu à choisir les valeurs de la variable de recherche (n,k), les couleurs du forain, celles du joueur, et organiser leur recherche.*
>
> *- élaborer une solution originale et en éprouver la validité!: les méthodes de résolution n'étant pas indiquées, chaque groupe a effectivement mis en oeuvre ses propres stratégies de recherche, a autovalidé ses dispositions, chercher à tester ses conjectures...*
>
> *- argumenter!: cela a été induit par les discussions internes aux groupes et les questions des accompagnateurs et lors de la séance de mise en commun.* »

D'autre part, nous pensons que la pratique d'une telle situation en classe peut, non seulement *«!permettre des apprentissages relatifs aux différentes étapes de la démarche de recherche en mathématiques dès le cycle 3!»* qui, rappelons le, sont!:

> *«- !utiliser ses connaissances pour traiter des problèmes ;*
>
> *- chercher et produire une solution originale dans un problème de recherche ;*
>
> *- mettre en œuvre un raisonnement, articuler les différentes étapes d'une solution ;*
>
> *- formuler et communiquer sa démarche et ses résultats par écrit et les exposer oralement ;*
>
> *- contrôler et discuter la pertinence ou la vraisemblance d'une solution;*
>
> *- identifier des erreurs dans une solution en distinguant celles qui sont relatives au choix d'une procédure de celles qui interviennent dans sa mise en œuvre ;*
>
> *- argumenter à propos de la validité d'une solution produite par soi-même ou par un camarade (ceci suppose que les élèves ne pensent pas que la démarche est unique et donc que l'enseignant accepte des démarches différentes).»*

mais peut aussi compléter ces compétences par des apprentissages relatifs à des notions transversales.

Tout d'abord, elle entraîne une introduction au processus de modélisation à travers un début de mise en oeuvre de modèles pseudo-concrets révélés par l'énoncé de $\textbf{Rem}_{\textbf{coul}}$ et $\textbf{Rem}_{\textbf{sens}}$.
D'autre part, quel que soit le niveau atteint dans la résolution, elle peut aussi inciter à prendre conscience de ce qu'est une solution à un problème mathématique et notamment de l'apport fécond que représente une solution *générale* par rapport à une solution particulière (ce qui a été source de conflit au sein du groupe Noir) et ainsi amener à rechercher des méthodes de construction générales locales dans un premier temps (apparues dans les groupes Noir, Vert et Rouge) et éventuellement globales (groupes Jaune et Orange). Pour ce faire, l'étude du cas (n,n) semble plus adaptée que (n,2) pour commencer la résolution car l'énoncé des méthodes associées à (n,2) implique la gestion de plusieurs variables ce qui peut créer chez les élèves un obstacle à sa rédaction.
Elle permet par ailleurs aux élèves d'être confrontés, selon les choix des valeurs de (n,k), non seulement à un problème mathématique pouvant avoir plusieurs solutions, mais aussi à un problème où il n'y en a pas, ce qui est loin d'être fréquent dans les manuels de primaire comme nous l'avons souligné au chapitre I.1. La recherche du cas (4,4) amène par exemple à se questionner!: ce cas admet-il une ou des solutions!difficiles à trouver ou bien n'en a-t-il aucune? Comment être sûrs?
Ainsi, ne sachant pas trancher, un groupe s'est penché à plusieurs reprises sur le (8,8) pour finir par conclure qu'il n'y avait pas de solution car *« ils ont essayé tous les moyens et n'en ont pas trouvé!»*, mais sans en être sûr et certain.
Le cas (2,2) est le seul qui induit l'étude de l'ensemble des possibles et amène les élèves à affirmer qu'il n'y avait pas de solution, même si cela était contraire à leur intuition première, et de le prouver comme par exemple le groupe Orange!:

M!: on n'y arrive pas avec 2. Avec, c'est impossible.
*C!: Regarde, on va te le **prouver**.*
M!: on va prendre le rose et le or.
M!: regarde, ça marche pas du tout et là c'est les 2. donc on peut pas.

Pour les autres choix de (n,k) correspondant à l'impossibilité, les réponses fournies à la question «!pourquoi ça ne marche pas,!» étaient de l'ordre de «!ça ne marche pas car ça ne marche pas!» comme le montre cet extrait du groupe Rouge!:

A2: alors, ça marche ou pas? Est ce que tu es sûre qu'il n'y a pas de solution?
J: euh..on est sûr ou on n'est pas sûr?
E: on est sûr.
A2: vous êtes sûres ?
E: sûres et certaines.
A2: Es- ce que vous pouvez m'expliquer pourquoi vous êtes sûres?
E: euh, on ne sait pas.
A2: vous êtes sûres mais vous ne pouvez pas expliquer pourquoi? Vous n'avez pas d'explication à me donner?
J: ben si ça ne marche pas.

En plus d'apprendre à s'organiser, la recherche de *La roue aux couleurs* peut donc amener, en CM, à introduire les notions de conjecture (élément si important dans la recherche en mathématiques et pourtant assez méconnu), preuve, forçage et celle

d'exhaustivité, notamment au travers des cas (2,2), (3,2), (4,2) et (4,4).
Cela peut aussi inciter à garder des traces afin d'être sûr d'avoir étudier toutes les positions possibles notamment pour le (4,4) et donc compléter le support matériel par le support papier-crayon.

III- OUTILS DE GESTION

III-1 LA RECHERCHE EN GROUPE: UNE AIDE A LA MOTIVATION

En plus de nos observations, nous avons demandé à la fin de l'expérimentation aux élèves de donner leur point de vue sur ce qu'ils venaient de faire par le biais d'un questionnaire écrit. 85% ont été d'accord pour dire qu'ils avaient aimé travailler en groupe. Pour compléter ces réponses, nous avons ensuite interrogé quelques élèves oralement et individuellement, en leur demandant en particulier comment ils avaient perçu le travail en groupe et le cas échéant pourquoi il les avait aidés. Voici quelques-unes des réponses que nous avons recueillies!:

R: ben ça aide à voir différents choix, de pas s'embêter si on est pas d'accord, ça arrive qu'on s'engueule parce qu'on est pas d'accord, alors ça nous apprend à être ensemble parce que souvent en classe on n'est pas ensemble.

F: ouais ça m'a aidé parce qu'on essayait de s'échanger des trucs. (...) ben ouais moi je trouve, chercher tout seul c'est un peu dur je trouve

M: ben, si j'avais pas travaillé en groupe je pense que j'aurais moins trouvé parce que en groupe, on s'est aidé.

Les élèves qui ont déclaré ne pas avoir aimé travailler en groupe et que nous avons interrogés individuellement, quant à eux, n'ont pas critiqué le fait de travailler en groupe proprement dit mais le fait de devoir chercher avec des enfants avec lesquels ils ne s'entendaient pas.

Karine!: Et toi t'as aimé travailler en groupe?
J: ouais, mais il y en avait deux dans mon groupe qui m'énervaient.
K!:T'aurais préféré travailler en groupe avec d'autres copains?
J: oui.

Nous retrouvons donc, comme en DEUG, le fait que la recherche se fasse en groupe comme un élément motivant, fédérateur et suscitant les discussions et les débats.

III-2 LES FEUILLES DE RECHERCHE! : UN SUPPORT DE COMMUNICATION INTERNE ET EFFICACE

Les feuilles de recherche ont été distribuées au début de la première séance à chacun des groupes par A1 qui précisait alors! *: «!ça, c'est une feuille où vous pouvez marquer ce que vous avez découvert aujourd'hui pour vous en rappeler pour la semaine prochaine!».* Ces feuilles ont été perçues comme à «!usage interne». et donc non public. Le fait de garder des traces de leurs recherches a été bien accepté par les élèves qui d'eux-mêmes ont désigné un de leurs membres pour tenir le rôle du scribe, généralement pendant toute une séance. Pour la plupart, ce qui apparaissait comme important à noter dans un premier temps était les solutions trouvées et non les dispositions invalides.

1- Garder des traces, oui, mais lesquelles?

Au cours des discussions avec les différents groupes, A1 a été amené à préciser : «!*notez vos impressions aussi, ce sont ce qu'on appelle des conjectures, ce sont comme des hypothèses.*!», (groupe Jaune) *«!n'oubliez pas de noter tous vos essais et vous pouvez dire «!ça on a essayé, on pense que ça ne marche pas!», vous pouvez faire des dessins aussi*!» (groupe Vert), ce qui a permis aux élèves de compléter leurs notes. Ainsi les groupes Jaune et Vert ont aussi noté l'énoncé de $\mathbf{P}^{(n,\ 2)}_{\mathbf{consec}}$, le groupe Orange des conjectures distinguant les cas pairs et impairs et le groupe Vert ses essais infructueux, comme le montre cet extrait:

> *K!: ça marche pas.*
> *M!: on n'a qu'à le noter ça, puisqu'on sait que ça ne marche pas. Comme ça on n'a pas à le refaire parce que sinon après, si ça se trouve on va refaire la même bêtise.*
> *A!: mais oui mais attends regarde…imagine que tu mets ça ici, par exemple*
> *M!: non ne change pas tout!!*
> *A!: oui mais je sais comment c'est, imagine que c'est comme ça, c'est toujours les mêmes qui sont au milieu., y en a toujours le même*
> *M!: oui mais on note pour pas qu'on refasse la même erreur, sinon tu peux la refaire tout le temps la même erreur, une fois qu'on aura marqué, eh ben on pourra regarder est ce que ça on l'a déjà fait, et ben oui on l'a déjà fait et on ne le refait pas, ça fait moins perdre du temps.*

Ces feuilles ont été utilisées lors de phases de travail adidactique pour!faire le point en début de séance sur les recherches antérieures, comme par exemple le groupe Jaune au début de la deuxième séance:

> *J : ben attends, parce que là, on va voir si ça marche. (elle lit les notes) Alors sur le grand plateau tu mets, du rouge, du vert, du blanc et du noir.*
> *E: après on met rouge et noir.*
> *J: ensuite, sur la roue du milieu vous mettez rouge blanc rouge blanc.*
> *E: il manque un blanc donc on va dire que ça c'est un blanc.*

J: donc maintenant on essaye, vas-y Ju, fais tourner. Voilà, là il y en a bien un. Vas-y continue. Là, un, là, un et là, un. Donc ça marche. Ensuite, la deuxième solution. Donc en fait on a dit que ceux qui étaient à côté comme ça ça ne marchait pas.
E: ouais, c'est ça.
J: bon Ju je te dis les couleurs, toi, E tu vas les mettre et après tu feras tourner la roue.
Ju: ouais, ouais, ouais!

Les élèves s'y référaient aussi au cours de leurs recherches pour voir s'ils avaient déjà étudié tel ou tel cas.

Lors de ces occasions est apparu l'intérêt de la précision de ce qui est noté, en particulier au sein du groupe Noir. Ses membres ont commencé par noter les couleurs intérieures sans préciser ce qu'ils avaient placé à l'extérieur!:
S1, t=17 min

A1!: est ce que vos notes vous aideront à le refaire la semaine prochaine!?
M!: ouais…ah, on a oublié de dire en face de quoi c'était.
D!: mais on le sait.

Ensuite, ils ont complété leurs notes.

A1!: et ça vous l'avez vérifié!? Ça marche!?
Tous!: oui!;
A1: dans cet ordre-là!?
Tous!: oui.
A1: vous pouvez me montrer!?
D!: ouais moi je le connais par cœur.
E!lui dicte ce qu'ils ont écrit.
E!: vert, noir, argent, or.
D place et complète.
E!: on a mis le vert et le noir en face, l'argent et l'or en face et sur le petit disque, 2 pions argentés en face et deux pions or.
A1!: en fait c'est pas l'ordre que vous avez marqué. Peut-être que vos notes ne sont pas assez précises. Si j'amène cette feuille à un autre groupe, ils vont peut-être vous dire que c'est vrai. ***Peut-être que l'ordre est important. Comment être plus précis! ?***
E!: on peut faire un dessin à côté…
Elle reprend les notes et les complète!;

Ils ont donc indiqué à l'aide de dessins toutes les couleurs choisies mais, du fait que l'ordre dans lequel elles étaient marquées n'était pas valide, l'erreur a été reproduite. Cela leur a posé des problèmes au cours de S3 pour remplir la feuille de bilan!:

Ils se disputent sur les notes précédentes qui sont mal marquées (problème d'ordre).
D!: bon, on va refaire exactement ce qui est marqué et on va voir si ça marche;
A1!: vous en êtes où!?
D!: on essaie de refaire ce qu'elle a mis parce que...
M!: elle a mal marqué et on n'arrive pas bien à lire.
Ils reprennent les solutions à (4,2) une par une et regardent ce qui ne va pas!;celle qui a noté boude et ne les aide pas. Ils ont du mal à comprendre les indications et à refaire.
A1!: où en êtes-vous!?`

D!: on essaie de déchiffrer ses hiéroglyphes.
A1!: mais elle avait fait des dessins, aussi.
D!: oui mais ses dessins ils ne vont pas avec ce qu'elle a écrit.
M!: elle n'a pas marqué dans le bon ordre!.

Finalement, le scribe a changé pour faire la synthèse des recherches et les autres membres ont accordé plus d'importance à la clarté de ce qui était noté!:

P!: voilà, ça marche. C'est moi qui marque.
E!:non, moi.
P!:OK…
D!: n'écris pas mal.
P!: du moment qu'elle sait se relire
D!: non, c'est plutôt nous qui devons pouvoir la relire.

2- Un outil indispensable à la gestion mais à compléter

Le problème de l'écrit a été un frein dans l'utilisation des feuilles de recherche. En effet, la difficulté à rédiger impliquait un temps de pause dans les investigations. Pendant qu'un élève notait, les autres attendaient, ce qui peut être source de perturbations.

Malgré ces difficultés, nous pensons que ces feuilles sont indispensables à la gestion d'une situation recherche. Sans elles, les élèves n'auraient aucune trace, autre que celle qui peut subsister dans leur mémoire, de ce qu'ils ont déjà découvert, et seraient donc plus susceptibles de se perdre. De plus, elles les obligent à formaliser leurs intuitions, à chercher à décrire ce qu'ils sont capables de faire et donc à analyser leurs actions.

Leur rédaction peut s'effectuer à l'aide de l'enseignant qui peut les guider dans la formulation, elle permet de faire pratiquer et de développer certaines des compétences listées dans les programmes de primaire!:

«!- *formuler et communiquer sa démarche et ses résultats par écrit*

- contrôler et discuter la pertinence ou la vraisemblance d'une solution;

- argumenter à propos de la validité d'une solution produite par soi-même ou par un camarade. »

Cependant, nous pensons qu'elles doivent être complétées par un support de communication publique, destiné au moins aux autres groupes. Cela pourrait inciter les élèves à énoncer clairement leurs résultats, à réfléchir éventuellement à une représentation adaptée de leurs solutions et serait un complément aux feuilles de recherche pour amener les élèves au support papier-crayon.

III-3 ROLE DES ACCOMPAGNATEURS

Au début de la première séance, les accompagnateurs sont intervenus pour vérifier que l'énoncé avait été bien compris, ce qui n'était pas le cas pour le groupe Rouge par exemple, insister sur la condition de l'unique face à face et sur le fait que les deux couleurs à placer au centre dans le cas de (n,2) doivent être choisies parmi celles figurant sur le disque extérieur et peuvent être répétées de façon inégale.

Hormis ces réorientations éventuelles et les demandes de vérification au début de la première séance, les accompagnateurs ont dû ensuite intervenir dans les différents groupes tout au long des séances pour faire le point et notamment!:

lever des doutes sur le problème à résoudre, en incitant à relire l'énoncé	ex!: S2, groupe Noir!: *D: mais on a qu'à mettre que du vert* *P!: mais on peut pas!!* *D!: oh, merde!!* *Dans le doute, il demande à un observateur, qui l'invite à relire l'énoncé:* *D!:" Ces pions peuvent être de une, deux, trois…etc couleurs!». Donc on peut.*
réorienter afin d'éviter les dispersions	ex!: S3, groupe Jaune!: *A1: oui, mais il faut que vous concentriez sur un problème où vous avez commencé à trouver plein de choses, au lieu d'en faire un nouveau, ce que vous avez fait, là, c'est un nouveau problème, ne vous dispersez pas, c'est la dernière séance. Vous aviez trouvé des choses avec deux couleurs au milieu et aussi avec autant au milieu qu'au bord. Vous choisissez d'aller plus sur un problème ou un autre, comme vous avez envie, mais vous n'en inventez pas un nouveau, d'accord?* *E: d'accord.* *A1: tu vois ça c'est un nouveau problème, tu vois, il y a deux verts, deux rouges…* *E: oui, d'accord.* *A1: si on avait plus de temps, ce serait intéressant d'en voir d'autres mais vu qu'il ne reste plus qu'une heure…* *Ju: une heure! Oh, c'est tout…*
inciter à continuer à chercher	ex!: S2, groupe Jaune!: *A1!: maintenant, vous pouvez essayer avec 5 couleurs par exemple…* *Ju: 5 couleurs?* *A1: si vous avez l'impression que 4 vous avez tout trouvé. ça voudrait dire que vous avez résolu le problème du 4 couleurs au bord et 2 au milieu.*
inciter à généraliser en vue d'établir une méthode de construction, une fois une solution trouvée	ex!: S1, groupe Vert *A!: oui, celui-là (elle montre le dessin) on a réussi.* *A1!: et si je vous mets 4 couleurs n'importe lesquelles, vous pouvez me trouver une solution!?* *K!:ouais.*

	A1!: c'est vrai!? *A!:oui.* *A1!:alors on essaie!?* *M!: oui, on essaye.* *K!:c'est parti!!* *A1 place 4 couleurs différentes de celles qu'ils avaient choisies!: rouge, jaune, vert, blanc.* *A1!: est-ce que là vous allez trouver une solution!?* *M!: on fait comme ça en fait.* *Elle choisit deux couleurs opposées et les alterne.* *M!: voilà, là, un, là, un!;là, un, et là* *A1!: OK, s'il y en a 4, vous y arrivez toujours!?* *M!: oui*
inciter à verbaliser ses actions, lorsqu'elles semblent guidées par des choix raisonnés	ex!: S2, groupe Vert (suite de l'extrait précédent) *A1!: et comment vous les avez choisies ces couleurs!? Pourquoi t'as choisi jaune et rouge et pas rouge et blanc par exemple.* *K!: en fait au début, on a fait au hasard.* *A1!: oui mais là, vous n'avez pas fait au hasard. J'ai mis les 4 et tout de suite elle a pris jaune et rouge.* *A!:parce qu'elles sont en face!;* *K!: elles sont en diagonale.*
inciter à étudier d'autres choix de couleurs centrales dans le cas de (n,2).	ex!: S1,! groupe Noir: *A1: est ce que vous avez essayé avec d'autres couleurs au milieu, doré et noir par exemple ou doré et vert!?* *M!: ah, il faut trouver mais avec d'autres couleurs!?* *A1: oui. Il faut trouver toutes les façons que le joueur a pour gagner…* S2, groupe Rouge!: *J!: Il faut toujours que ce soit pair au bord et on choisit deux couleurs..* *A1!: n'importe lesquelles!?* *J!: n'importe lesquelles! et ensuite, on les met comme ça mais pas comme ça et à chaque fois ça marche mais ça ne marche jamais quand c'est impair.* *Z!: il faut que ce soit pair pour que ça marche.* *A1!: d'accord. Et si tu prends rouge et bleu (deux couleurs à côté) par exemple, ça marche!?*
amener à vérifier une conjecture	ex!: S2, groupe Orange! *A2!: pourquoi vous arrivez à 9 et pas à 8!?* *M et C!: c'est pas un nombre pair, 9. Les nombres impairs c'est plus facile.* *C note la solution à (9, 9).* *Fà l'A1!: et on y est arrivé à 9!* *C: et moi j'ai trouvé une hypothèse qui est vraie!* *A1: et comment tu sais qu'elle est vraie?* *C: ben je sais pas c'est M et F qui m'ont dit que c'était vrai.*

M: ben oui, on a réussi à 5, 7 et 9.
C!: donc cette hypothèse est vraie.
A1: alors c'est quoi ton hypothèse?
C: que ça marche que avec les nombres impairs.
C: mais à 4, on a réussi.
A1!: avec 4 et 4 au milieu?
F: non, 4 et 3 au milieu.
A1:oui, mais à 4, vous avez cherché avec 2 couleurs au milieu, c'est un autre problème. Vous avez essayé à 4 et 4!? Vous avez trouvé 5 5, 7 7, 9 9... pour les impairs, vous y arrivez à chaque fois?
C!: oui, on a une méthode, on note ceux qui sont bons à chaque fois, et on change en fonction de ce qui est déjà pris ou pas. Avec ça, c'est plus facile.
A1; si je vous mets 11 couleurs!?
C!: On sait faire.
A1!: essayez avec les pairs, en commençant peut être par des petits!: 2, 4, 6 ..
C: avec 2, 4, 6?
A1: voilà.
M!: on essaie avec 4.

inciter à rechercher des arguments de preuve!

ex!: S1, groupe Noir

A2!: tu veux dire que c'est que tu peux y arriver quelles que soient les couleurs là?
D: ben non, les deux couleurs qu'on a choisi pour faire les couleurs du milieu faut surtout pas qu'elles soient à côté.
A2: pourquoi?
M: parce que ça marche pas.
A2: mais pourquoi ça ne marche pas? t'en mettrais la main à couper que ça marche pas!?
D!: non quand même… Mais si on met comme ça, il y en aura 2.
A2!: ouais mais peut être qu'on peut changer!? par exemple si on met comme ça...est-ce que tu peux me montrer que ça ne marche pas!?
D!: ben oui. Regarde, là, un, là, un et là il y en a deux.

S3, groupe Noir

A1!:est ce que je peux y arriver avec vert et argent!?
D!: non, parce qu'ils sont à côté!;
A1!: ça marche jamais ou c'est dur à trouver!?
D!: c'est dur à trouver pour l'instant.
A1: est-ce que c'est dur à trouver et vous n'avez pas trouvé ou alors, est ce que ça ne marche jamais!?
E et D!: ça marche jamais!!
A1!: vous êtes sûrs, sûrs!?
E et D!: oui.
A1!: tu serais prêt à parier combien!que ça ne marche pas!? T'es sûr, sûr!? Vous n'avez pas l'air…
D!: on n'a pas trouvé;

S1, groupe Jaune

J!: non, ça va non plus. Mais c'est impossible!!
A1!: pourquoi c'est impossible!?
Ju!: ben parce que c'est la vérité.
A1!:Si c'est impossible il faut que tu m'expliques pourquoi c'est impossible.

Ainsi, les interventions des accompagnateurs ne se réduisent pas à une explication de l'énoncé. Leur rôle est bien plus important. Ils sont les garants d'une recherche féconde, en ramenant, notamment, les élèves aux cas qui leur posent problèmes, en leur demandant de se positionner sur leur validité au lieu de les évincer car ils les jugent difficiles à résoudre, en les orientant vers la généralisation..., tout en leur laissant finalement le choix de leurs actions.

Leurs multiples échanges avec les élèves nous amènent à penser que, même si la plupart des groupes ont avancé seuls dans le problème, s'ils ont mis en oeuvre les différentes étapes de la démarche en mathématiques et que beaucoup de résultats ont été mis à jour lors de phases de travail adidactique, il est nécessaire pour un public si jeune d'avoir des interactions avec un gestionnaire, enseignant ou accompagnateur, qui le guidera dans sa recherche, sans pour autant lui fournir de réponse et tuer la situation recherche.

III-4 Feuilles de bilan

Au cours de la troisième séance, les élèves ont eu à remplir des feuilles de bilan qui les conduisaient à faire le point sur leur recherche en classant leurs résultats à travers quatre rubriques!:

- cas où nous ne connaissons qu'une seule solution associée à des couleurs particulières choisies par le forain
- cas où nous savons construire une ou plusieurs solutions quelles que soient les couleurs que le forain a choisies
- cas où nous pensons qu'il n'y a pas de solution mais nous n'en sommes pas sûrs
- cas où nous sommes sûrs qu'il n'y a pas de solution et nous pouvons expliquer pourquoi il n'y en a pas

Cette tâche a posé des problèmes de compréhension aux élèves et a nécessité des explications dans chaque groupe, mais ces feuilles leur ont tout de même permis de faire le point et les ont incités à s'interroger sur le statut de leurs résultats, afin de savoir dans quelle rubrique ils devaient figurer!: solution particulière!? solution générale!? conjecture de non-existence!? preuve de non-existence!?

Dans la plupart des groupes, un des membres a été chargé de remplir la feuille de bilan à l'aide des feuilles de recherche, pendant que les autres poursuivaient les investigations.

Pour ce faire, les élèves ont donc dû se servir de leurs notes et se rendre éventuellement compte de l'importance de leur précision, notamment le groupe Noir, comme nous l'avons déjà indiqué. Cela les a aussi amenés à revenir sur ce qu'ils avaient fait, à se repencher sur les cas qu'ils avaient évincés pour savoir qu'en penser. C'est en les remplissant que le groupe Rouge est parvenu à $\mathbf{P}^{(n,2)}_{consec}$ et à l'énoncé d'une méthode de construction pour (4,2) par exemple.

Ces feuilles ont notamment été l'occasion pour les accompagnateurs de tester à quel point les élèves étaient sûrs de leurs conjectures d'inexistence. Trois groupes ont rempli la dernière rubrique!: «!cas où nous sommes sûrs qu'il n'y a pas de solution et nous pouvons expliquer pourquoi!». Les groupes Jaune et Vert y ont placé $\mathbf{P}^{(n,2)}_{consec}$, le groupe Rouge le cas (7,2), l'explication donnée étant là encore que leur méthode ne marche pas.

Le 7 sa ne marche pas
car il y a une couleur qui né pas enface de sa meme couleur
ex: argent doit être en face.

Groupe rouge!: une fausse preuve

Même si la tâche qu'elle induit est complexe, cette feuille a donc un apport intéressant, compte tenu des échanges verbaux qu'elle a suscités. Elle permet aux élèves de revenir sur les résultats de leur recherche, sur leurs notes et peut être un outil supplémentaire pour l'enseignant pour se rendre compte de l'avancée de chaque groupe et pour faire prendre conscience aux élèves des différences entre solution particulière et solution générale, de l'intérêt de la seconde sur la première et de la nécessité d'avoir des arguments probants pour pouvoir être sûr, et donc d'introduire une discussion sur ce qu'est un résultat pour un chercheur en mathématiques.

Nous pensons donc que les feuilles de bilan peuvent être données, dans un premier temps, à remplir par les différents groupes, comme nous l'avons fait, afin qu'ils réfléchissent aux statuts de leurs résultats puis, qu'elles peuvent être utilisées par l'enseignant, pour classer collectivement les différentes découvertes faites dans la classe, faire le point, synthétiser, débattre, institutionnaliser et organiser la poursuite des recherches, lors de la mise en commun.

III-5 Temps de mise en commun et institutionnalisation

La mise en commun s'est faite au cours de la quatrième séance. Compte tenu des impératifs institutionnels, elle n'a duré que 20 min mais une séance entière aurait été préférable.

Les élèves étaient par groupes, chaque groupe disposait d'un support et de ses notes. A1 tenait le rôle du forain!: il choisissait le couple (n,k) à étudier ainsi que les couleurs extérieures et questionnait les élèves sur la manière dont le joueur devait jouer. Tour à tour, les volontaires, après un temps de recherche en groupe, venaient présenter leurs méthodes ou exposer leurs arguments de preuves. A1 notait ensuite au tableau les résultats mis à jour.

Cependant, le fait que chaque groupe ait un support afin de réfléchir avant de venir montrer à tous comment il s'y prend a permis à certains (très chanceux!!) de trouver des solutions par essais-erreurs, aussi, cela ne semble pas adapté si l'on souhaite mettre en avant l'importance d'avoir des méthodes. Nous pensons donc qu'il est préférable qu'un seul support soit disponible, commun à la classe, sur lequel les élèves s'appuieront pour illustrer leurs propos et montrer comment appliquer leurs méthodes. Nous supposons qu'alors la recherche par essais-erreurs sera dévalorisée car moins efficace et plus laborieuse.

L'enseignant peut aussi la compléter par l'introduction de la variable didactique interdisant la possibilité (ou pas) de faire tourner la roue pour construire une solution. Alors, le choix de l'impossibilité pourra valoriser les méthodes de construction abstraites, comme $\mathbf{M}_{\mathbf{ordre}}$ ou $\mathbf{M}_{\mathbf{sym}}$, applicables également par la suite sur le support papier-crayon, au détriment des méthodes gloutonnes et surtout des essais-erreurs. Cela peut donc permettre à l'enseignant d'inciter les élèves à classer les différentes méthodes en fonction de leur dépendance au support matériel et ainsi, de leur faire prendre conscience que celle-ci est relative et que certaines méthodes en sont tout à fait indépendantes, afin de les amener peu à peu au support papier-crayon.

Quoi qu'il en soit, cette séance a permis d'institutionnaliser!:

- les résultats obtenus pour (n,1) en précisant le nombre de solution,
- le fait qu'il y ait une méthode de construction de solution pour (4,2),
- $\mathbf{P}_{\mathbf{consec}}^{\mathbf{(n,2)}}$,
- le fait qu'il y ait au moins deux formes de solution pour (6,2), Cela est apparu suite aux questions de A1 qui a conduit les élèves, après que le groupe Vert ait présenté un premier type de solution, à étudier s'il est possible de trouver des solutions pour deux couleurs non consécutives et non diamétralement opposées,
- les méthodes découvertes dans la classe pour (2p+1,2p+1),
- le fait que (2,2) n'admette pas de solution,
- le fait qu'il y ait des cas où il semblerait qu'il n'y ait pas de solutions sans que l'on en soit sûr, comme (5,2) ou (4,4).

Si la recherche s'était poursuivie au cours d'autres séances, ce temps de mise en commun aurait pu inciter pour la suite à!:

- rechercher toutes les solutions possibles pour (6,2), (8,2) et ainsi peut-être aboutir à $\mathbf{Conj}^{\mathbf{(n,2)}}_{\mathbf{dec2}}$,

• chercher à prouver qu'il n'y a pas de solution pour (3,2), (5,2), (7,2)...,
• chercher d'autres méthodes pour (2p+1,2p+1),
• chercher à prouver qu'il n'y a pas de solution pour (4,4), (6,6)...

La mise en commun peut être préparée par l'enseignant à partir de ce qu'il a observé en circulant dans les groupes ainsi qu'en consultant les feuilles de recherche. Cela lui permet de lister l'ensemble des cas étudiés sur la classe ainsi que les résultats obtenus, en vue de les rendre collectifs. Il peut aussi demander à chaque groupe d'exposer oralement ses productions, en précisant ce qu'il faut présenter!: cas traités, méthodes et conjectures énoncées et compléter éventuellement la présentation par une classification des résultats dans les quatre catégories figurant dans les feuilles de bilan, comme nous l'avons déjà dit.
C'est une séance importante car elle permet de créer une unité «!*dans la communauté de petits chercheurs!*» en faisant le point globalement et en donnant ainsi la possibilité à des groupes qui auraient avancé moins vite de prendre connaissance de ce que les autres ont mis à jour, de s'en saisir et de l'utiliser pour poursuivre les recherches.

III-6 CONCLUSION! : DES OUTILS DE GESTION ADAPTES MAIS INCOMPLETS

Les outils de gestion que nous avons proposés semblent convenir au niveau primaire, mis à part les difficultés dues à l'écrit parfois difficilement conciliables avec la nécessité de devoir travailler en groupe. Cependant nous pensons qu'ils peuvent tous deux être surmontés à l'aide de l'enseignant au fur et à mesure du déroulement des séances.

Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse qu'il est préférable de ne fournir qu'un seul support lors de la mise en commun afin de mettre en avant l'apport fécond des méthodes par rapport à la recherche par essais-erreurs.

Enfin, comme nous l'avons dit, nous supposons qu'il est important de rajouter un aspect communication publique aux outils déjà définis. Quelle forme cela peut-il prendre!? Si l'on se réfère aux pratiques de la recherche, deux formes sont disponibles!: un résumé écrit des recherches comme dans une publication ou un exposé oral, accompagné de documents écrits comme dans une conférence. Compte tenu des difficultés liées à l'écrit que nous avons soulignées, nous pensons que la deuxième forme sera plus adaptée. Cela pourrait être par exemple la rédaction d'une affiche à commenter oralement.

IV- CONCLUSION! : UNE SITUATION RECHERCHE DEVOLUABLE DES LE CM1

Au regard des productions des élèves, nous pouvons conclure que la situation *La roue aux couleurs* apparaît comme une situation recherche dès le CM1.

Comme nous l'avons souligné dans nos analyses, les productions des élèves de primaire ne sont pas si éloignées de celles de DEUG. Aucun des groupes n'est resté au stade du jeu, tous ont trouvé des solutions et ont progressé vers une généralisation. Dans les deux cas, le support matériel a permis la dévolution du problème, l'avancée dans la recherche et la mise à jour de méthodes.

Il est remarquable par ailleurs que, bien que les niveaux de connaissances soient très éloignés, sur certains aspects de la situation, les difficultés que nous avons relevées dans les deux classes sont très proches.

Dans les deux, la recherche de généralisation et de preuve a bien souvent dû être suscitée par les accompagnateurs.

L'expression écrite a été frein dans les deux cas, les problèmes rencontrés relevant du même ordre!: retranscrire. Les DEUG ne sont pas parvenus tout de suite à une formulation mathématique de leurs méthodes ou preuves, les élèves de primaire ont eu des difficultés à exprimer par des mots leurs actions, cela d'autant plus que contrairement aux étudiants, ils n'ont, à aucun moment, mis en place de modèle mathématique.

Toute proportion gardée, nous retrouvons donc des difficultés inhérentes à différentes étapes de la recherche en mathématiques, difficultés selon nous principalement dues à l'absence de pratique dans l'enseignement. Cela nous conforte dans l'idée que les situations recherche peuvent permettre une présence régulière de l'heuristique en mathématiques au sein de l'institution scolaire, dès l'école primaire, comme le préconisent les instructions officielles.

Faire chercher en mathématiques dès le CM1 implique, bien entendu, des conditions de gestion spécifiques.

Le support matériel qui s'avère être une aide à la dévolution et à la recherche.

Le travail en groupes qui suscite les débats et évite les découragements.

La présence des accompagnateurs qui évite les égarements éventuels et permet ainsi d'avancer dans la démarche de recherche en mathématiques. L'étude de leurs différentes interventions nous a amenée à identifier quelles peuvent être les difficultés des élèves face à la gestion d'une situation recherche et où doivent se situer les médiations éventuelles du gestionnaire de la situation.

La séance de mise en commun qui permet de synthétiser les résultats, d'institutionnaliser les méthodes et conjectures, et d'ainsi créer une unité dans la classe, unité que nous estimons nécessaire si la recherche doit être poursuivie. Cependant, le fait que chaque groupe dispose d'un support a permis à certains de trouver des solutions par hasard et a donc créé un obstacle à la mise en valeur auprès de tous de l'avantage de construire des méthodes.

Les feuilles de bilan qui amènent à prendre conscience des différents statuts des résultats. Toutefois, du fait des difficultés qu'elles ont posées, nous pensons qu'il est préférable qu'elles soient remplies en commun, avec l'aide de l'enseignant. Dès lors, elles peuvent être une introduction au débat, une aide à la synthèse.
Les feuilles de recherche qui sont une aide pour les élèves pour garder des traces de leurs recherches, toutefois leur utilisation ne les a pas conduits à introduire de codage des couleurs et donc à aller plus loin dans la modélisation de la situation.

Dans le deuxième temps de cette expérimentation, nous allons chercher à confirmer ces observations, en vérifiant l'accessibilité de *la roue aux couleurs* en 6ème. Nous allons aussi chercher à améliorer encore nos outils de gestion, d'une part, en rajoutant un aspect communication publique aux outils déjà définis, ainsi qu'une contrainte amenant à se détacher des couleurs afin d'inciter, si besoin, les élèves à introduire un codage. D'autre part, nous ne proposerons qu'un seul support lors de la séance de mise en commun afin d'évincer la recherche de solutions au hasard et contribuer à mettre en avant les méthodes et l'importance de la généralisation.

Chapitre I.A.3

EXPERIMENTATION EN 6EME

I- LE PUBLIC

Cette expérimentation s'est déroulée au sein d'une des classes de 6ème d'un collège de l'agglomération grenobloise situé en ZEP au cours du deuxième trimestre de l'année scolaire. L'effectif était de 24 élèves.

II- CONDITIONS D'EXPERIMENTATION

Nous avions demandé à l'enseignante de constituer six groupes de quatre élèves que nous noterons par la suite de A à F. le groupe D a été filmé, les autres enregistrés. Afin de recueillir le plus grand nombre de données et notamment savoir comment les élèves non filmés cherchaient avec le support, nous avons choisi d'affecter un accompagnateur fixe aux groupes B, C et F. A1, l'accompagnateur principal, s'occupait du groupe A mais il était amené à se déplacer à la demande des élèves, notamment auprès du groupe D.

Nous avons assigné le groupe E à l'enseignante. Le problème lui avait été présenté lors d'un rendez-vous préalable mais rien ne lui avait été indiqué quant à sa résolution. En effet, nous voulions pouvoir observer comment un enseignant sans formation préalable pouvait mener une telle activité dans sa classe, afin d'avoir un aperçu des interactions possibles entre lui et ses élèves.
La recherche a eu lieu au début du troisième trimestre scolaire, au cours de quatre séances de 45 min, le dernière étant séparée des trois autres par les vacances de Printemps. Elles étaient ainsi réparties!:

- une séance de recherche libre, introduite par un exemple pour (4,2),
- une séance de recherche centrée sur (n,2) ou (n,n) suite à une relance collective, afin de confronter les élèves à l'impossibilité,
- une séance de rédaction d'une affiche.

Consigne!: par groupe, vous devez rédiger une affiche dans laquelle vous présentez aux autres groupes les résultats de vos recherches.
Pour cela, vous pouvez!:

- indiquer tous les cas que vous avez cherchés en précisant à chaque fois le nombre de couleurs choisies par le forain et le nombre de couleurs choisies par le joueur
- donner les méthodes que vous avez utilisées pour trouver des solutions
- indiquer les cas où vous avez un moyen de trouver des solutions avec n'importe quelles couleurs choisies par le forain et comment sont ces solutions!
- indiquer les cas où vous pensez qu'il n'y a pas de solution et ce qui vous a amenés à le penser
- indiquer les remarques que vous avez faites

Matériel!:

- une grande feuille blanche
- un feutre

- une séance de bilan: temps de mise en commun et institutionnalisation

Cela devait se conclure par la rédaction, à l'aide de l'enseignante, d'un article à publier dans le journal du collège mais cela n'a pu se faire en raison des multiples grèves qui eurent lieu durant cette période.
Les deux premières séances sont similaires à celles du primaire. La troisième par contre ne demande plus de classer les résultats obtenus mais de **rédiger une affiche**.

Nous cherchons par ce biais à amener les élèves à passer d'une recherche «!privée!», interne au groupe, à une recherche «!publique!», communiquée à la classe, au même titre qu'un chercheur lorsqu'il publie ses travaux.
Toutefois, nous supposons que le problème de l'écrit peut être encore présent à ce niveau, aussi avons-nous préféré proposer la rédaction d'une affiche, susceptible d'être commentée oralement, à un texte qui doit être autonome et est, de ce fait bien plus complexe à rédiger.
Pour la rédaction de cette affiche, les élèves ne disposent que **d'un seul feutre**. Notre objectif est de voir si le fait de ne plus avoir toute leur palette de couleurs va les inciter à introduire un codage afin de représenter leurs solutions.

Lors du temps de mise en commun, les élèves disposaient de leur feuille de recherche, par contre il n'y avait qu'un support matériel, commun à la classe, sur lequel les couleurs n'étaient pas choisies par les élèves. Ils pouvaient l'utiliser pour illustrer leur propos.

III- ANALYSE DES PRODUCTIONS

Nous trouvons plus pertinent de nous attacher à relever dans la situation les analogies qu'elle peut avoir avec celles des autres élèves, de primaire notamment, ainsi que les différences. De ce fait, afin ne pas alourdir la lecture de cette thèse, nous ne présenterons pas dans le détail les productions de chacun des groupes.

III-1 LE ROLE DU JOUEUR FICTIF DANS L'ENONCE DU PROBLEME

Comme pour les élèves de primaire, le fait que l'énoncé sous-entende la présence de deux joueurs semble avoir gêné certains élèves au début de la première séance. Ils ne comprenaient pas qui devait tenir le rôle de ce personnage fictif. Les accompagnateurs ont dû les aider à s'organiser en expliquant par exemple que *«!le forain c'est quelqu'un d'autre. Si tu veux, ça peut être quelqu'un de ton groupe et toi t'es le joueur…!»*.
Une fois cette précision apportée, la recherche a pu commencer.

III-2 ROLE DU SUPPORT MATERIEL

Tout comme en primaire, le support a été utilisé par les élèves tout au long de leur recherche. Là aussi, il a été favorable à la dévolution du problème, tous les groupes ayant dès le début cherché, et trouvé, des solutions.

Le groupe A a su s'en détacher lors de l'étude de (2,2) pour lequel il a conclu qu'il n'y avait pas de solution sans le vérifier matériellement!:

A: à 2, c'est impossible.
Y: ben oui, on est obligé de les mettre soit là, soit là, ça fait soit les deux mêmes, soit aucun…
A1: donc vous n'avez pas besoin d'essayer.
Y: ben non.
K: deux on n'est pas obligé de vérifier. A deux, on est obligé de faire ça, soit on est obligé de faire ça.

III-3 CHOIX DES VALEURS DE LA VARIABLE DE RECHERCHE

Voici un tableau présentant les différents cas étudiés par chacun des groupes. Nous avons souligné les cas qui ont été traités suite à une intervention de l'accompagnateur ou de l'enseignante. Les choix des autres cas sont à l'initiative seule des élèves des groupes.

Groupes	Cas traités
A	S1!: (4,2),(5,2) (5,5) (8,8)!? (7,7)!? (6,6) S2!: (3,3) (3,3) (4,4) (2,2) (6,6) (1,1) (7,7)
B	S1!: (4,2) (4,3) (4,3) (4,4) (4,3) S2!: (4,2) (3,3) (3,2) (2,2) (2,1) (5,5) (5,2) (6,6)
C	S1!: (6,5 pions) (6,6) (7,4) (4,4) (4,1) (4,4) (4,3) (4,4) (4,3) (8,6 pions) (8,7) S2!: (6,6) (7,7) (6,6) (4,4) (4,3) (4,4) (8,8) (7,7) (4,4) (5,5) (1,1) (3,3) (2,2) S3!: (7,7) (4,4) (3,3) (4,4)
D (vidéo)	S1!: (4,4) (4,3) (5,4) (5,5) (4,3) (2,2) (6,6) (2,2) (2,1) (6,2)!? (3,3) S2!:(7,7) (4,4) (6,6)!? (4,4) (6,6) (8,8) (9,9)
E (enseignante)	S1!: (5,5) (3,3)!? (1,1)!? (4,4)!? (6,6) (5,5) (5,1) (7,1) (5,2) S2!:(5,2) (5,3) (5,2) (6,2)!? (4,2) (5,2) (5,3) (5,2) (5,3)? (6,2) (6,2) (10, 2)!? (6,6)
F	S1!: (4,4) (4,3) (4,1) (4,4) (4,2) (4,3) (4,3) (4,2) (4,4) (4,2) (4,4) (4,3) (5,1) (5,5) (6,6) (1,1) (2,2) (2,1) S2!: (4,1) (4,3) (5,1) (5,5) (5,5) S3!: (8,8)

Ce tableau nous indique par exemple qu'un accompagnateur a dû intervenir deux fois lors de S2 auprès du groupe C pour qu'il revienne à l'étude de (4,4) tout comme l'enseignante qui a réorienté trois fois son groupe sur (5,2).
Suite à l'exemple introductif, deux groupes ont commencé par (4,2), deux par (4,4) et un à (5,5) et le dernier à (6,5 pions) histoire de faire "plus fort" en mettant respectivement une ou deux couleurs de plus.

Par la suite, A, C et F se sont donc centrés principalement sur (n,n), E sur (n,2) et B a choisi de considérer tout d'abord (4,3) puis les deux sous-problèmes (n,n) et (n,2) pour un n donné (ex!: ils ont étudié (5,5) puis (5,2)).

La progression dans la recherche et les raisons des choix des valeurs de la variable de recherche sont analogues à celles observées en primaire. Cependant les élèves se sont moins dispersés, les accompagnateurs et l'enseignante les recadrant immédiatement du fait de leur présence continue, comme quand ils voulaient choisir un n beaucoup plus grand que celui qu'ils venaient d'étudier ou un k différent de n ou 2, une fois indiquée la relance.

Comme en primaire, les principaux choix ont été guidés soit par l'envie de poursuivre par l'étude du cas suivant quand une solution a été trouvée et ainsi «!faire encore plus fort!», soit par l'envie de chercher autre chose, quand une solution ne venait pas rapidement. Ainsi (4,3) a été étudié par plusieurs groupes après qu'ils aient cherché (4,4) sans parvenir à exhiber une disposition valide, comme le groupe B par exemple!:

J: il y a le blanc.
M: et le vert.
Ils changent.

J: il y a le blanc, y a le vert...mais y a le doré!
M: on l'élimine le doré!
S: ***ouais, on l'enlève!*** *Faut pas le mettre.*
M: si on met les 4 couleurs ça va jamais marcher!
Ils enlèvent le doré et mettent un autre vert.

Dès lors, les accompagnateurs ont dû les réorienter vers (n,n).

On retrouve également chez les élèves l'envie de mettre le plus de couleurs possible, comme par exemple ceux du groupe B!:

J: au bord on doit en mettre combien?
A4: au bord, vous en mettez autant que vous voulez.
J: d'accord.
M: donc viens on met toutes les couleurs alors. (Groupe B, S2)

et les réticences pour certains à étudier des cas où les valeurs de n ou k étaient petites.

A1: est ce que vous avez vérifié d'autres trucs pairs? Qu'est ce qu'on pourrait essayer pour vérifier?
Y: à 5, ça marche et à 3, ça marche.
A1: ouais mais pour vérifier que les pairs marchent pas...
A: on essaie d'autres trucs.
C: à 6.
A: à 2.
Y: oui mais 2, ça marchera pas parce que c'est pas assez... (Groupe A, S2)

Choisir les couples (n,k) n'a là aussi pas posé de problèmes aux élèves, même si cela ne fait généralement par partie du contrat didactique habituel dans une classe de $6^{ème}$. Les critères de choix des valeurs de (n,k) sont similaires à ceux observés chez les élèves de primaire!: envie d'avancée dans le problème, abandon par dépit, considérations liées à la valeur numérique (petite ou grande), recherche d'une généralisation...

III-4 PRESENTATION ET ANALYSE DES STRATEGIES MISES EN OEUVRE

Là encore, les productions des élèves de $6^{ème}$ comportent de nombreux points communs avec celles de primaire. Voici un tableau récapitulatif!des différentes stratégies développées dans la classe!:

Stratégie	quels cas!? quels groupes!?
$S^{44}_{essais-erreurs}$	(n, n): A, C (n,2) et (n,3): B
S_{sym}	
$S_{gloutonne}$	E: (n,n) et (n,2)
$S_{déc}$	(n,n): B, D, F
Autres!: $S_{forçage!}$	(3,3)!: A, B, D (5,5)!:B
S_{graphe}	(5,5)!:C

Nous allons maintenant les comparer à celles apparues chez les élèves de primaire, en relevant tout d'abord celles qui sont communes aux deux niveaux.

1- Des stratégies déjà rencontrées...

Comme nous l'avions observé chez le groupe Orange en primaire, $S_{gloutonne}$ a été mise en oeuvre par le groupe E, à l'aide de l'enseignante, lors de de l'étude de (5,2) au cours de la deuxième séance:

Ens: oui, on va partir de là donc on a déjà deux pions qui sont fixes, on n'a plus le droit de les bouger.
D: ouais.
B: ceux là on peut.
Ens: oui, pour l'instant ceux là on peut les bouger…quand on tourne d'un cran…
D:là, il y a le blanc et le noir qui vont venir…
C: mais madame et si on fait comme ça?
Ens: non, ces deux là, on a dit qu'on n'avait pas le droit de les bouger.

Par ce biais, l'enseignante cherchait, une fois les deux couleurs choisies, à organiser les essais afin d'être sûre qu'il n'y avait pas de solution, cependant contrairement aux primaires, il n'y a pas eu recours au support papier crayon pour garder trace des positions «!là ne plus toucher!». Cette stratégie a été utilisée aussi lors de la deuxième séance pour l'étude de (6,6)!:

Ens: essaye de partir de quelque chose. Par exemple ici ça marchait.
C: on essaie de partir d'un noir par exemple et après on tourne…
Ens: ici ça marche avec le blanc. (…) Vas y continue donc là c'est bon, ça marche. Le blanc on le bouge plus…
Ens: euh…(elle réfléchit avec eux), là, tu peux bouger tout sauf le blanc, donc fais ce que tu veux…
C: celui là.
Ens: D'accord. Donc maintenant, on bouge plus ni le blanc ni le noir.

[44] *Tous les groupes ayant débuté par cette stratégie, nous ne faisons figurer que ceux qui n'en ont pas utilisé d'autres.*

D: euh…ça marche déjà pas.
Ens: mais c'est pas grave, on peut encore bouger plein de pions.
D: place le bleu à la place du doré.
Ens. Ça marche et le blanc, on n'a pas le droit de le bouger. On n'a pas le droit de bouger blanc, noir, doré et maintenant jaune. Non c'était le bleu pardon qu'on n'avait pas le droit de bouger. Blanc, noir, bleu ,jaune.
C: ça marche pas là.
Ens: non, lui, on n'a pas le droit de le bouger.
D: et le vert?
Ens: on a le droit de bouger encore deux pions.
D: vert ou doré?
B: et le jaune on peut le bouger?
Ens: non.
D: vert ou doré? Ben change le vert et le doré. Vas y. (...)

La stratégie $\mathbf{S_{déc}}$ a été mise en oeuvre dans les groupes B, F et D. Comme pour le groupe Vert en primaire, elle n'a pas permis à tous d'aboutir à une méthode de construction. Nous retrouvons, chez les groupes B et F, la même progression que chez les étudiants du groupe G1 de DEUG. Dans un premier temps, les décalages étaient identiques, tous égaux à un!:

B, S1, t!=26 min

M: je crois, il faut mettre les couleurs…par exemple, si le doré il est là, il faut mettre là, si le vert, il est là, il faut le mettre là…
(il explique qu'il faut décaler les pions du centre par rapport à ceux de l'extérieur).
M: celui-là, on le met là, celui-là, on le met là, celui-là, on le met là, celui-là, on le met là.
Il essaie.
J: ah, comme ça, comme ça! Y a le rouge, mais y a le blanc et y a le doré et y a le vert!!!
Ils rient.

F, S1
t=10 min

*H: ah ça y est je sais comment il faut faire, je sais…il faut **qu'ils soient décalés**…regarde…un,…*
Il place.

puis tous égaux à deux…

t=15 min

*H: ça marche, ça marche… on a trouvé je crois…oh…ça marche pas. Ah, il faut que ce soit décalé d'un ou deux… **Décale d'un. Là j'ai décalé de un, décale de deux**. Le vert tu le mets ici. Mets le vert ici, après tu mets le jaune ici …*

Du fait que cela n'aboutissait pas B l'a abandonné tandis que F a fini, comme G1 en DEUG, par chercher à associer à chaque couleur un décalage différent lors de l'étude de (5,5), ce qu'avait fait dès le début le groupe D!:

> *A1!: et cette solution vous l'avez trouvée au hasard ou vous avez une méthode!?*
> *G!: on a une méthode. Tu vois, lui, tu le mets en face, après le vert, tu le mets à un cran pour que quand tu tournes ça fasse vert, puis le doré à deux derrière, le jaune à 3 etc...(Groupe D, S2)*

qui s'en est aussi servi pour trouver des solutions pour (7,7).

Tout comme en primaire, l'idée de décalages a donc été avancée par certains, mais, dans le cas des 6ème, deux groupes sont allés plus en avant et sont parvenus à $\mathbf{P_{dec}}^{\mathbf{(n,n)!}}$.

Trois groupes, enfin, n'ont pas développé de stratégie particulière et ont eu recours à $\mathbf{S_{essais\ erreurs}}$ tout au long de leur recherche, comme le groupe Noir chez les élèves de primaire.

2- ... Et des nouvelles stratégies!

En plus des stratégies proches de celles du primaire, d'autres stratégies, que nous avions d'ailleurs relevées dans notre analyse a priori et que nous avons recontrées en DEUG, ont été développées.

Une stratégie se rapprochant de $\mathbf{S_{graphe}}$ a été utilisée dans le groupe C lors de la troisième séance, pour chercher une solution à (5,5)

> *A3!: vous pourriez expliquer comment t'as fait pour que ça marche!?*
> *A!: parce que en premier j'ai mis un là, et le contraire ici, 3 fois et ça marchait pas alors j'en ai changé et après ça marchait. Chaque 3, j'en mettais un de inversé. Par exemple, lui, 1 ,2 ,3, je le mettais là, lui, 1, 2, 3, je le mettais là, après les deux opposés, je les ai changés et ça a marché.*

mais ils n'ont pas pu poursuivre dans cette voie faute de temps.

Enfin, une nouvelle stratégie que nous noterons $\mathbf{S_{forçage}}$ est apparue dans le groupe B lors de la recherche de (n,n). Les pions étaient posés l'un après l'autre, en éliminant les positions inadéquates pour tenir compte des contraintes, puis la roue était tournée pour vérifier, comme l'illustre l'extrait suivant au cours duquel A4 demande aux élèves de leur expliquer ce qu'ils font!:

> *M: en fait…regardez.*
> *A4: donc tu fixes le rouge.*
> *M: ou une autre couleur, c'est pareil mais j'aime bien le rouge.*
> *A4: ensuite tu mets le bleu en face du vert …*
> *M: le doré on peut pas le mettre là.*

A4:…et le doré en face du blanc.
J: et pourquoi tu le mets là le bleu?
M: parce que regarde si on fait comme ça après ça va faire les deux couleurs.
S: parce qu'après il y a le bleu.
A4: quand on tourne après il y a le bleu.
M: si tu veux on peut laisser celle là et celle là tu la mets là.
A4: et le doré tu peux pas le mettre en face du blanc parce que sinon après tu auras deux couleurs, donc tu le mets en face du bleu...
M: oui, le blanc on le met pas là, on le met là. Regarde, ça, ça …
A4: …après il n'y a plus qu'une façon pour poser le blanc et le vert.
M: ça, ça et ça.
J: attends, le bleu, là…
A4: le bleu il le met en face du vert parce qu'après quand il va tourner il faut que le bleu soit en face du bleu.
M:et il faut pas que le doré il soit là.
J: le blanc…il est là.
A4: le doré ne peut être ni en face du blanc ni en face du doré parce que quand on tourne après le doré qui était en face du blanc il devient en face du doré.

Ces deux nouvelles stratégies, $\mathbf{S}_{\mathbf{graphe}}$ et $\mathbf{S}_{\mathbf{forçage}}$, mises en oeuvre par les élèves de 6ème sont donc venues compléter les stratégies que nous avions observées chez ceux de primaire. **Cela se confirme! : quel que soit le niveau scolaire, plusieurs des stratégies que nous avons relevées dans notre analyse a priori sont susceptibles d'apparaitre, et cela même si la recherche ne se fait que par le biais du support matériel.**

III-5 Les aspects «! modelisation! » dans le travail de recherche

Comme en primaire, tous les groupes sont parvenus à un modèle pseudo-concret de la situation.

1- Indépendance par rapport aux couleurs

$\mathbf{Rem}_{\mathbf{coul}}$ est apparue, au cours de la deuxième séance, dans les différents groupes suite à des discussions internes au moment de chercher une disposition pour un (n,k) donné mais avec d'autres couleurs.

A1: et si vous changiez le bord?
Y: ben non, ça changera rien parce que y en aura toujours autant, c'est pas la couleur qui joue, c'est le nombre. (Groupe A)

S: On n'avait pas mis les mêmes couleurs la dernière fois.
M: ouais mais c'est pas grave! c'est pas les mêmes couleurs mais c'est le même principe. (Groupe B)

H!: oui mais c'est pas avec les mêmes couleurs.
I!: mais c'est pareil!! ça revient au même… (Groupe C)

A1!: est ce que ce serait différent si le forain avait choisi gris et jaune au lieu de rouge et vert!?
M!: non, c'est pareil, en fait, il faut deux couleurs différentes au bord et deux pions de la même couleur au milieu!. (Groupe D)

A2!: est ce que ça sert d'essayer des cas que vous avez déjà faits avec des couleurs différentes!?
I!: ben non, c'est la même chose. (Groupe F)

Le groupe E ne l'a pas explicitée mais, compte tenu des discussions internes lors de la recherche de méthodes, nous pensons qu'il l'avait à l'esprit.

Ainsi, tout comme en primaire, tous sont parvenus à $\mathbf{Rem}_{\mathbf{coul}}$ mais là aussi, cela ne s'est pas fait de façon homogène, certains y ont été amenés progressivement par le biais de la recherche de méthode, stimulée par les discussions avec les accompagnateurs. Toutefois, nous n'avons pas retrouvé les difficultés qu'a connu le groupe Rouge de primaire qui a eu besoin de plusieurs séances pour identifier que seule la position importait, étant donné que dès la deuxième séance, tous en avaient pris conscience.

2- Représentations et codages

Les feuilles de recherche sont similaires à celles de primaire!: elles contiennent des roues et des couleurs. Seul le groupe C a utilisé $\mathbf{C}_{\mathbf{ini}}$ mais il s'est inspiré des notes de A3.

Lors de la troisième séance, **la contrainte du feutre unique** a amené tous les groupes à trouver un moyen de présenter autrement leurs solutions, en vue de les orienter vers une modélisation de la situation.

<u>*Une description sans abstraction*</u>

A, C et D n'ont pas su résoudre la question de la représentation des couleurs et ont entièrement décrit leurs résultats par un texte.

Le groupe C a présenté ses méthodes!:

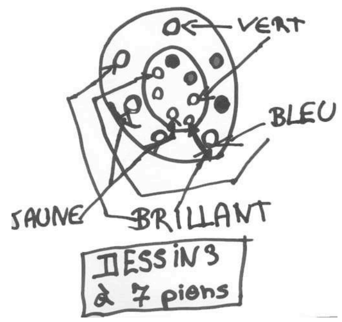
> *«!1ère méthode!: Nous avons inversé les pions à chaque fois que nous avions faux.*
>
> *2ème méthode!: Pour commencer, on met les pions de la même couleur puis on décale toutes les couleurs d'un cran.!»*

mais sans illustrer ses propos.

A l'opposé, le groupe D a détaillé ses solutions particulières à titre d'exemples, sans fournir de méthode générale, comme ci-dessous pour le cas (4,3)!:

«Il faut mettre au forain!: un jaune, un vert, un rouge et un gris. en face du jaune il faut mettre un rouge. En face du vert il faut mettre un vert. en face du rouge, il faut mettre un gris. En face du gris, il faut mettre un autre vert. »

A, enfin, a choisi lui aussi d'écrire le nom des couleurs mais il a en plus utilisé une roue, complétée par des flèches.

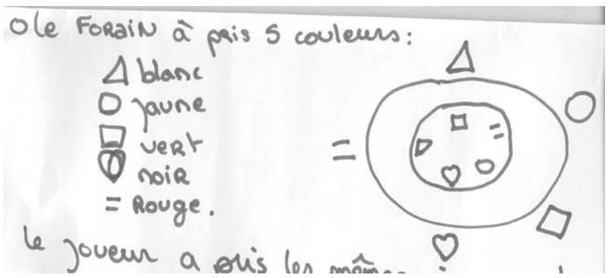


<u>*Un petit pas vers la modélisation*</u>

Comme nous l'avons déjà évoqué, nous considérons comme une activité élémentaire de modélisation, l'introduction d'un codage des couleurs. Cela est apparu dans la moitié des groupes lors de la rédaction des affiches, avec la contrainte du feutre unique.
B et F ont eu recours à $\boldsymbol{C}_{ini}$.

groupe B

E, enfin, a choisi d'inventer un codage en associant à chaque couleur un symbole,



codage qui n'est pas sans rappeler le codage qu'ont introduit deux des membres du groupe G4 en DEUG au début de leur recherche.

3- Traduction de la rotation

Dans quel sens on tourne?

On retrouve, comme en primaire, trois tendances!:

choix d'un sens de rotation sans explication!: les groupes A et E ont toujours tourné dans le sens direct mais sans en avoir convenu préalablement.

choix délibéré d'un sens sans en expliquer le choix: les groupes C et F

M: pourquoi tu tournes pas dans ce sens?
A: bon d'accord. Alors, un argenté ... (GroupeC)

*I: **fais tourner dans ce sens sinon, ça va pas être bon** et après il y en a trois. Allez à moi! (Groupe F)*

choix d'un sens mais en remarquant **Rem$_{sens}$**.!:les groupes B et D

M: moi je dis il faut plutôt le mettre là, l'autre rouge. Parce que comme ça quand on tourne le rouge il faut qu'il vienne là.
J: ouais mais c'est n'importe. C'est comme si on faisait là (elle montre sur le support en faisant tourner dans l'autre sens). Tu vois là, pareil.
M: ah ben oui mais après ça va m'embrouiller, je préfère le mettre là.
J: oui mais les gens aussi i ils tournent comme ça...
M: oui je dis c'est mieux comme on a fait tout à l'heure. (Groupe B)

T!: mais non, c'est de l'autre côté, tourne pas dans ce sens.
G!: mais tu t'en fous, tu peux tourner comme tu veux!! (Groupe D)

Anticipation

Les élèves, à ce niveau aussi, ont cherché à anticiper la rotation au moment de placer les couleurs intérieures mais, contrairement aux élèves de primaire, ils ont su prévoir au delà d'un cran et ont ainsi rejeté certaines positions sans faire tourner la roue.

Enfin, la plupart a eu l'idée de décaler les pions intérieurs par rapport aux pions extérieurs même si cela n'a pas pas toujours abouti à **M$_{décalage}$** et à la propriété-en-acte que tous les décalages devaient être différents.

Comme en primaire, tous les groupes ont donc avancé dans l'élaboration d'un modèle pseudo-concret de la situation et identifié **Rem$_{coul}$**. Nous avons également retrouvé les disparités relatives à l'énoncé de **Rem$_{sens}$**.

Nous pouvons noter, par ailleurs, deux différences entre les productions des deux classes. La première tient en la prise en compte par les collégiens, à plusieurs reprises, de la rotation à travers la notion de décalage et peut être due au fait que la recherche du sous-problème (n,n) ait été privilégiée.

Le seconde est que la contrainte du feutre unique a amené les élèves à avancer dans la modélisation de la situation en recherchant un codage des couleurs, cependant, les nombres ne sont toujours pas apparus.

III-6 PHASES DE FORMULATION ET DE VALIDATION

De manière générale, les $6^{ème}$ ont eu un point de vue à la fois plus local mais plus complet sur le problème que les élèves de primaire!: une fois les valeurs de n et k choisies, ils ont cherché à trouver plusieurs types de solutions.

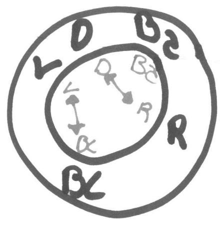
1- Plusieurs méthodes de construction

Dans un premier temps, la donnée d'une solution particulière suffisait aux collègiens qui considéraient alors qu'il ne restait plus qu'à faire la même chose avec d'autres couleurs. Même s'ils avaient l'idée qu'il y avait des techniques, les premières méthodes de construction n'ont été énoncées que parce que les accompagnateurs les incitaient à recommencer avec d'autres couleurs et à verbaliser et expliquer leurs actions.

<u>*Etude de (n,n): 3 méthodes et une "pseudo" méthode*</u>

Même si $\mathbf{S_{sym}}$ n'a pas été utilisée, $\mathbf{M_{sym}^{(3,3)!}}$ a été énoncée par les groupes A, C et B. Ce dernier a eu l'idée de la tester pour (5,5) et est parvenu à $\mathbf{M_{sym}^{(5,5)}}$, présentée ainsi sur son affiche!:

> Le forain a choisi 5 couleurs, exemple!: le vert, le blanc, le rouge , le bleu, le doré.
> On en met 1 en face (1 à l'extérieur en face de 1 à l'intérieur) et on inverse les deux couleurs voisines!, exemple:



Mais il ne l'a pas généralisée à tout n impair.
Le groupe A par contre ne l'a pas exploitée de la même manière. Il a eu un point de vue plus inductif et a cherché à trouver comment construire une solution à (5,5) quand on en avait une à (3,3)!:

> *K à A1: pour 5, on fait comme pour 3 (il en place 3 en reprenant sa méthode) et on en rajoute 2 en les inversant.*
> *Il montre sur un cas et ça fonctionne.*

et a abouti finalement au même type de solution.

a- $M_{décalages!}^{(n,n)}$

Alors qu'elle était restée au stade intuitif en primaire, $\mathbf{M_{décalages!}^{(n,n)}}$ a été explicitée par les groupes F et D. Le premier l'a formulée dans le cas du (5,5), suite à plusieurs essais sur les propriétés que doivent avoir ces décalages comme nous l'avons déjà souligné!:

> *H!: ah je sais. Laisse moi faire s'il te plait.* ***Il faut décaler de un, de deux, de trois, de quatre etc****…!Le blanc…de un, le rouge, de deux, le vert, de trois, et de quatre le doré et de cinq le jaune. Comme ça.*
> *Il essaye.*
> *H!: ça marche, ça marche…*

Le groupe D l'a découverte et mise en œuvre pour trouver des solutions pour (5,5) et (7,7), ainsi que pour chercher des solutions pour (6,6) et (8,8).

b- Une nouvelle méthode!: $M_{forçage}$

Nous trouvons dans les productions du groupe B une méthode que nous n'avions pas rencontrées chez les élèves de primaire, hormis pour le cas (3,3). Nous la noterons!: $\mathbf{M_{forçage!}}$. Résultat de $\mathbf{S_{forçage!}}$, elle consiste à placer les pions l'un après l'autre, sans tourner la roue, en tenant compte des positions valides et invalides!:

> *J: oui ça marche mais j'ai pas compris pourquoi il faisait comme ça.*
> *A4: en fait, il choisit, si j'ai bien compris, de fixer une couleur en face après il se dit je vais fixer une couleur, le bleu, de telle façon qu'au premier tour il soit en face du bleu, d'accord?*
> *J: ça j'ai compris.*
> *A4: après il décide de placer le doré.*
> *S: ah et s'il met le doré là, après quand il tourne ça fait deux.*
> *M: voilà, après ça fera deux couleurs.*
> *A4: le doré tu peux pas le mettre en face du doré, tu peux pas le mettre en face du blanc donc tu le mets en face du bleu.*
> *J: ah j'ai compris.*
> *M: tu peux pas le mettre là, donc tu le mets là et l'autre tu le mets là.*
> *A4: et après t'as plus qu'une façon pour poser le vert et le blanc qui restent.*
> *J: et par exemple si on fait comme ça. Si on veut que après quand on tourne c'est pas le bleu. J'ai envie que ce soit le doré et pas le bleu.*
> *S: tu mets le doré là.*
> *A4: tu mets le doré en face du blanc pour qu'au premier tour il soit en face du doré.*
> *J: maintenant, le vert on le met là et le blanc on le met là.*
> *M: doré, bleu, blanc, rouge, vert.*

c- «!Essais-erreurs!»!: une pseudo méthode!

Le groupe C a cru voir une méthode dans le fait de mener sa recherche par le biais d'essais-erreurs et de changer les pions de place à chaque fois que la contrainte de l'unique face à face n'était pas remplie:

> *S à A!: écris ta méthode, comment t'as fait.*
> *A!: j'ai inversé les pions.*
> *A3!: comment ça!?*
> *A!: j'ai inversé les pions à chaque fois que ça marchait pas.*

M : en premier elle a mis des couleurs, et quand ça ne marchait pas elle a inversé les pions.

Il a d'ailleurs présenté sa «!méthode!» sur son affiche, le texte étant celui que nous avons reproduit au paragraphe III-5.2.

d- (5,5)!: plusieurs types solutions

Le groupe E a très peu étudié le cas (n,n) toutefois, il est le seul à s'être demandé combien il existait de solutions différentes à (5,5) compte tenu du fait qu'ils en avaient déjà trouvé deux.

A2!: donc maintenant vous essayez quoi!?

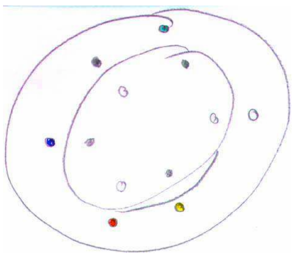
G!: on peut essayer de trouver plusieurs combines puisque là, on en a déjà deux.

ce qui a été noté!:!*« avec 5 couleurs, nous pouvons trouver deux combines. Peut être il y en aura 3!?!»*

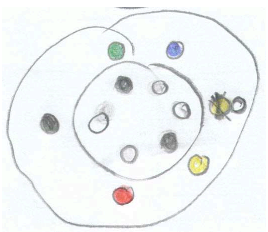
Etude de (n,2): une méthode locale et plusieurs formes générales de solutions

$\mathbf{M}_{\mathbf{alternée}}^{(4,2)!}$ a permis au groupe B de trouver plusieurs solutions à (4,2), mais rien n'a été dit quant aux choix de ces couleurs et cela n'a pas été poursuivi.

Le groupe E est celui qui a avancé le plus loin dans l'étude de (n,2), guidé par l'enseignante. A partir du cas (4,2), il est, lui aussi, parvenu à $\mathbf{M}_{\mathbf{alternée}}^{(4,2)!}$ mais il a continué et considéré ensuite (5,2) et (6,2). Il a alors remarqué $\mathbf{P}^{(n,2)}_{\mathbf{consec}}$ puis, contrairement aux élèves de primaire, il a considéré les positions relatives des deux couleurs à choisir (ce que nous avons noté dec2) et donné les deux types de solutions existant pour (6,2)!:



Avec un nombre pair et le milieu alterné et sans les couleurs prises à côté, ça marche toujours.



Au milieu, il faut 4 couleurs + 2 et sur la grande roue, il faut que les couleurs soient séparées par 2 pions.

Etude de (n,1) et sa généralisation

Tous les groupes ont cherché à un moment donné un couple (n,1). Pour C et E, cela s'est fait spontanément tandis que les autres ont été encouragés par un accompagnateur, car là aussi, les élèves ne pensaient pas qu'il pouvait être intéressant ou possible de regarder des cas si petits. Là encore, k=1 semble donc être vu comme un cas trop particulier par les élèves.

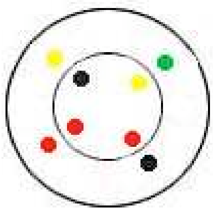
Lors de la séance de mise en commun, ils ont tous su généraliser leurs résultats et affirmer qu'il suffisait de choisir n'importe quelle couleur qui est autour et de la placer au milieu. Dès lors, il y aura autant de solutions que de couleurs extérieures.

Autres cas

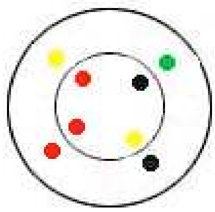
Les groupes B et D ont été amenés à chercher des solutions pour (4,3), suite à l'étude de (4,4) et aux difficultés qu'ils avaient pour trouver une solution. D a trouvé une solution mais n'a pas poursuivi et est passé à (5,5) alors que le groupe B est parvenu à énoncer une méthode de construction locale. Toutefois, il n'a pas su la rédiger et ne l'a présentée qu'oralement, guidé par les questions de son accompagnateur. Nous la résumerons ainsi:

> *Le forain choisit 4 couleurs, exemple!: rouge, jaune, vert et noir.*
>
> *Le joueur doit choisir!: deux de la même couleur (exemple!: rouge), il en place une en face à face et l'autre consécutivement. Il a deux façons de faire. Pour les deux autres couleurs, il prend les deux couleurs voisines de la première, ici noir et jaune et il les place par élimination!:*

Int 0 1 2 3
Ext 0 3 1 0



Int 0 1 2 3
Ext 0 0 3 1



Plusieurs des sous-problèmes liés au choix des valeurs de (n,k) ont donc été étudiés. Pour chacun d'eux, des méthodes, locales pour la plupart, ont été énoncées, en particulier deux groupes sont parvenus à $\mathbf{M}_{\text{décalages!}}^{(5,5)}$, alors que cette notion était restée très intuitive chez les élèves de primaire.

2- Des conjectures et des preuves locales

Compte tenu du point de vue local adopté par les élèves dans leur choix des couples (n,k), très peu de conjectures globales ont été énoncées.

Etude de (n,n)!: (4,4) un cas déroutant

Comme en primaire, la recherche des cas (2,2) et (4,4) a amené les élèves à se confronter à l'impossibilité et à la nécessité du recours à la preuve pour acquérir une certitude.

Les cinq groupes qui ont étudié (2,2) se sont très vite convaincus qu'il n'admettait pas de solution par exhaustivité des cas, à l'aide du support pour B, C, D et F, sans en avoir besoin et uniquement par une preuve intellectuelle, pour A. (CF extrait p 183).

Cependant, la conjecture «!(4,4) n'admet pas de solution!» n'a été formulée qu'à la suite de multiples essais par les groupes A, C, D et F.
A et F, afin d'être vraiment convaincus, ont cherché par l'exhaustivité des cas (plus ou moins garantie) à savoir si oui ou non il y avait une solution et dans la négation, à comprendre pourquoi.
Groupe A!:

> *Y réessaie à 4.*
> *Y: maintenant je pense que c'est impossible;*
> *A1: pourquoi es tu plus convaincu que tout à l'heure?*
> *Y: à chaque fois que j'essaie, il y en a deux .Et si je le mets là et lui, je vais le mettre là, après je vais mettre lui là, et il y en aura 0. Comme il y en aura 0, je vais essayer de le mettre à une autre place, si je le mets là, et lui, là, là y en aura 2. Il y en aura tout le temps deux. Je vais changer, là, il y en aura deux encore, je vais encore essayer de changer, il y en aura tout le temps deux, si je le mets là, deux.*

Groupe F!:

> *G!: j'ai une idée!! Je peux dire pourquoi ça marche pas!? Parce que quand il y a 4 couleurs autour et 4 couleurs au milieu, ça marche pas et dès que…*
> *H!: si, si, ça doit marcher comme ça…*
> *I!: eh non.*
> *F!: 4 couleurs ça doit pas marcher.*
> *G!: parce que quand on tourne, comme il y a les mêmes…pareilles*
> *I!: il y a deux à un moment à chaque fois.*
> *H!: le rouge, après ça va faire le bleu.*
> *I!: à chaque fois que tu mets les 4 mêmes couleurs ça peut jamais marcher. A chaque fois il y en aura deux.*
> *G!: à chaque fois il y en aura deux pareilles ou il n'y en aura pas.*
> *I!: marque le. Il faut jamais mettre les 4 mêmes couleurs parce que sinon, il y en aura toujours deux.*

F a ensuite étudié d'autres sous-problèmes tandis que seul A a suggéré que les cas pairs pouvaient être distingués des cas impairs. Orienté par l'accompagnateur, il a ensuite étudié (2,2) et (6,6) pour voir ce qu'il en était!:

Groupe A!:

> *A: les trucs pairs ça marche pas…*
> *A1: pourquoi tu penses ça?*
> *C: ah ouais…*
> *A1: est-ce que vous avez vérifié d'autres trucs pairs? Qu'est-ce qu'on pourrait essayer pour vérifier?*
> *Y: à 5, ça marche et à 3, ça marche.*
> *A1: ouais mais pour vérifier que les pairs marchent pas…*
> *A: on essaie d'autres trucs.*
> *C: à 6.*
> *A: à 2.*
> *Y: oui mais 2, ça marchera pas parce que c'est pas assez…*

A1: donc, si vous essayez à 2, et 4 ça marche pas, après vous pouvez essayer à d'autres…et si vous ne trouvez pas peut être qu'elle a raison, mais si vous trouvez pour 2 ou pour à 6, ben ça voudra dire que c'était pas vrai.
C: à 6.

Ils ont très vite réussi à se convaincre de l'inexistence de solution pour le cas (2,2) en fournissant une preuve comme nous l'avons déjà souligné, de celle de (4,4) en cherchant à étudier tous les cas possibles mais cela est resté plus intuitif pour (6,6)!:

Ils placent les pions.
K: il y a du gris, du blanc, du rouge, du jaune, du bleu, ça fait 6.
Ils cherchent.
Y: là, il y en a pas.
K: là, il y a lui.
A: là, c'est la même chose que tout à l'heure.
Y: le blanc…
K: le bleu…
A: c'est la même chose que tout à l'heure, sauf qu'il y en a trois là. A mon avis ça ne marche pas pour les nombres pairs.
Y: là, il y a le bleu…;
A1 revient:.
A1: alors ces 6?
A: ben ça ne marche pas non plus.
K: ça doit pas marcher.
C: à 6 ça ne marche pas.
A1: donc vous pensez que ça ne marche pas? Pourquoi?
Y: soit y 'en a 2, soit y'en a 3, soit y en a pas.
C:ça dépend combien il y en a, ça fait …la moitié. Puisque tout à l'heure à 4, c'était 2.
A: et là, c'est soit 2, soit 3, soit 0.
C: voilà.

Nous retrouvons donc dans leurs arguments des remarques liées au fait que la somme des décalages soit constante, avec ce coup-ci la possibilité d'obtenir 0, 2 ou 3 faces à faces. Il est par ailleurs remarquable qu'un des élèves, C, ait l'idée de mettre en parallèle le nombre de ces faces à faces simultanés avec la valeur de n, ce qui marque là encore un pas vers le processus de généralisation, même si ce n'a pas été poursuivi.

Les membres du groupe A ont ensuite étudié d'autres couples impairs et sont parvenus à **Conj**$^{(n,n)!}$:

A: ça a pas marché à 4, pas à 6 ça va pas marcher à 8.
A1: vous n'avez pas essayé à 8?
K: non mais c'est pas pareil;

notée sur leur affiche!:!«*!quand on met un chiffre pair, ça ne marche pas par contre les chiffres impairs marchent!*».

D est le seul groupe qui est parvenu, dans un travail adidactique, à la conjecture que (4,4) n'avait pas de solution. C'est le fait qu'il ne puisse utiliser $\mathbf{M}_{\textbf{décalages}}$ lors de sa recherche de solution pour (4,4), qui l'a amené à faire cette hypothèse. Dès lors, il a su le mettre en parallèle avec (2,2) qu'il avait déjà étudié mais il a marqué dans un premier temps une différence de statut entre ces deux couples en affirmant!:

*à 2 et 2, **on ne peut pas**. (ndlr!: car ce n'est pas possible)*

*à 4 et 4, **on n'y arrive pas**. (ndlr!: mais on ne sait pas si c'est possible)*

Puis, après avoir étudié (6,6), il a, comme A, énoncé $\mathbf{Conj}^{(n,n)}$ mais sans en être persuadé car conscient de ne pas avoir tout essayé!:

«!on pense que tous les nombres pairs ne marchent pas!»!;

Le groupe C est parvenu à la même conclusion en étudiant lui aussi (4,4) mais A3 lui a mis la puce à l'oreille en leur disant qu'il n'y avait pas toujours de solution!:

A3!: il y a des fois c'est pas impossible que ça ne marche pas.
A!: ah bon!?
A3!: oui, Il y a des cas où ça ne marche pas. C'est pour ça qu'il faut trouver une méthode pour qu'on regarde pourquoi ça marche et pourquoi ça ne marche pas.

Il a dans un premier temps pensé que cela tenait du fait que 4 était petit mais est revenu sur son intuition!:

A!: un rien…bon à 4 ça ne marche pas, il en faut plus.
A3!: tu m'as dit que plus il y en avait plus ça marchait, c'est ça!?
A!: oui, c'est mon intuition.
A3!: pourtant tout à l'heure avec 8, ça a pas marché.
A!: ben, parce que c'était pas, il y en avait…
S!: ah, ça marche pas avec les chiffres pairs, ça marche qu'avec les chiffres impairs.

et a vérifié la validité de $\mathbf{Conj}^{(n,n)}$ en étudiant (1,1), (3,3) et (2,2).
Comme A, D et F, il a su montrer que (2,2) n'admettait pas de solution par exhaustivité mais il a ensuite conclu!*«!là 4, ça ne marche pas parce que ça ne marche pas!».*

(6,6) est le seul couple de ce sous problème qu'a étudié le groupe E. Il a pensé qu'il n'admettait pas de solution compte tenu du fait qu'il ne parvenait pas à en trouver avec $\mathbf{M}_{\textbf{forçage}}$, mais rien n'a été précisé sur l'ordre dans lequel devaient être placés les pions. Ainsi, cela aurait très bien pu être erroné, vu que tous les ordres de placement ne sont pas valides.

Lors de la séance de mise en commun, les doutes au sujet des cas impossibles sont réapparus. A1 a demandé aux élèves ce qu'ils pensaient de (2,2) et tous n'étaient pas convaincus de l'inexistence de solution.

A1!: alors maintenant le forain il en met deux et le joueur deux.
El!1: ça marche.
El 2!: ça marche pas.
El!3: ça va jamais marcher.
A1!: si ça marche pas il faut venir montrer pourquoi ça marche pas, si ça marche, il faut montrer pourquoi aussi.
Un élève vient. Il place deux couleurs au centre.
A1!: donc là il me dit ça marche pas.
Elèves: ben oui après ça fait les deux mêmes.
A1!: est ce que je peux arriver à ce que ça fasse un à chaque fois!?
El 4!: non.
El 5!: oui, oui, en en mettant qu'une au milieu. Tu mets que des rouges au milieu.
A1!: oui mais à deux couleurs!?
Elèves!: on peut pas.
A1!: donc vous dites «!on peut pas!». Vous en êtes sûrs ou pas!?
Elèves!: sûrs et certains.
El 6!: ben non puisqu'on peut mettre qu'une seule couleur.
A1!:oui mais à deux et deux!? qui pense que ça ne marche pas du tout!? Levez la main.
A1!: donc il y en a la moitié qui en est sure. Et l'autre!? Il ne vous a pas convaincu avec ce qu'il a expliqué!? Alors ceux qui n'ont pas levé le doigt vous pensez quoi!?
El 7!: ben que ça marche pas mais on n'est pas sûr.
El 3!: mais non c'est archi sûr.

Cela s'est corsé pour le (4,4) où seuls les élèves des groupe A, D et F étaient persuadés qu'il n'y avait pas de solution, compte tenu de leurs recherches.

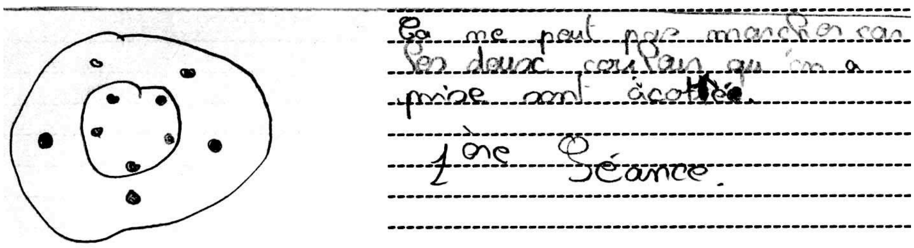
A1!: alors maintenant, le forain il en met 4 et le joueur 4.
El1!: ah non.
El2!: ça va pas marcher c'est pas un nombre impair.
El!1: c'est comme 2 et 2.
El2!: c'est un nombre pair.
A1!: est ce que tout le monde est d'accord!?
Certains hésitent.
A1!: bon je vous laisse réfléchir un peu.(...) Ceux qui disent que c'est pas possible, pourquoi vous dites ça!?
El3!: ben on a essayé et on a vu que c'était pas possible.
A1!: et vous êtes sûrs d'avoir fait toutes les possibilités!?
El3!: ben on est sûr, on l'a fait.
A1!: vous l'avez fait et vous êtes sûrs d'avoir tout fait!?
El!1: oui.
El!2: tous les nombres pairs ça marche pas.

Cependant, aucun argument réellement probant n'étant sorti, le doute a subsisté dans la classe et A1 a noté!: *«!nous pensons qu'il n'y a pas de solutions mais nous n'en sommes pas sûrs.!»*. Le fait que (4,4) n'ait pas de solution a donc conservé son statut de conjecture et nécessiterait des recherches ultérieures pour acquérir dans la classe celui de théorème.

La mise en commun a donc révélé que le cas (4,4) était loin d'être résolu pour tout le monde. Nous n'avons pas été surpris qu'il pose des difficultés aux élèves étant donné que les essais n'étaient pas suffisamment organisés pour garantir l'exhaustivité mais le fait que l'ensemble de la classe ne soit pas unanime pour le cas (2,2) alors qu'une démonstration a été donnée par les élèves et validée, nous a souligné, là encore, les difficultés que peuvent avoir les élèves vis-à-vis de l'impossibilité en mathématiques ainsi que celles liées au statut de la preuve, tout du moins par exhaustivité.

<u>Etude de (n,2)</u>

Seul le groupe E a avancé dans la recherche de (n,2). En collaboration avec l'enseignante, il est parvenu à $\mathbf{P}_{\mathbf{consec}}^{(n,2)}$.



Il a également énoncé la conjecture « (5,2) n'admet pas de solution ». $\mathbf{Conj}^{(n,2)}$ a été pressentie, cependant il n'a pas eu le temps de poursuivre plus en avant.

Ainsi, même s'ils ont eu un point de vue plus local que les élèves de primaire, les 6ème ont énoncé deux nouvelles méthodes de construction pour le cas (n,n) et donné les deux types de solutions pour (6,2). **Ils ont donc « débroussaillé » moins loin mais plus finement**. Par contre, au regard des conjectures et des preuves formulées, nous avons retrouvé **les difficultés et les conflits cognitifs liés à l'impossibilité**, apparus notamment à travers l'étude des cas (2,2) et (4,4).

III-7 « *UNE PETITE COMMUNAUTE MATHEMATIQUE* », QUEL QUE SOIT LE NIVEAU

Les productions des différents groupes de 6ème confirment donc ce que nous avions observé chez les élèves de primaire: la situation *La roue aux couleurs* présentée sous la forme que nous avons établie est accessible dès les premières années d'enseignement et permet aux élèves de rentrer dans une démarche de recherche en mathématiques.

Là encore, le support matériel est une aide à la dévolution de la situation. Il a permis à tous de se lancer dans la recherche de faire des essais, d'établir des stratégies.
Contrairement au DEUG, nous pensons que sa présence est une aide à la recherche et qu'il est peu probable, au regard des difficultés que les élèves ont eu pour introduire un codage des couleurs, qu'ils s'en détachent spontanément et cherchent sur le support papier-crayon.
Cependant, alors qu'en DEUG nous estimions qu'il pouvait être un frein à la mathématisation de la situation, pour des niveaux scolaires élémentaires comme ceux que nous venons d'étudier, notre position diffère. Compte tenu du niveau de connaissances, nous considérons que son utilisation a tout de même induit l'introduction des décalages, la recherche de généralisation et de quelques preuves, au niveau local dans un premier temps puis, pour certains, global, et a donc amené les élèves dans un processus de recherche dont les résultats sont à mettre en parallèle avec le niveau scolaire.

Ainsi, face à une situation recherche et donc un problème de recherche ouvert, nous n'attendons pas bien sûr que celui-ci soit entièrement résolu par les élèves (ce n'est même pas forcément possible pour les chercheurs!!) mais nous attachons de l'importance au fait que les élèves avancent dans la résolution d'un des sous-problèmes liés au choix de la variable de recherche. En effet, même s'ils ont eu un point de vue généralement plus local que les élèves de primaire, différence qui nécessiterait une étude plus approfondie pour en comprendre les raisons (que nous ne pouvons mener dans le cadre de cette thèse), les 6ème ont tout du même été amenés à énoncer des méthodes, généraliser, émettre des conjectures, rencontrer l'impossibilité, prouver, modéliser...
De plus, même si les résultats semblent moins nombreux qu'en primaire, on peut remarquer que **certains élèves ont eu des interrogations plus proches de celles du chercheur**. Ainsi, ils se sont posés la question lors d'un travail adidactique non seulement de savoir pourquoi ça ne marchait pas (ex!: (4,4) groupe A) mais aussi pourquoi ça marche!parfois :

B: après faut qu'on mette une explication pourquoi ça tourne toujours bien.
C: parce que…on a pris toutes les bonnes couleurs et on les a placées au bon endroit…
D: ben voilà, c'est pas si bête que ça, hein?
B: t'as dit quoi toi dèjà?
C: parce qu'on a pris toutes les bonnes couleurs et qu'on les a placées au bon endroit…
A : parce qu'on a pris toutes les mêmes couleurs et qu'on les a bien placées.
D: non mêmes couleurs, ça fait…on a pris les bonnes couleurs et on les a bien placées.
B: ce jeu marche, je mets? Puisque ça, ça marche.
E: et ben tu dis il y a une solution possible.
B: la solution est..(Groupe E, S3)

Quels que soient leurs avancées et les cas étudiés, **les élèves ont donc fait des mathématiques, ils ont transformé leur classe en «** ***une petite communauté mathématique!*** **»** .

Au regard des difficultés rencontrées, nous supposons que cette situation recherche répond tout à fait aux directives officielles pour la $6^{\text{ème}}$ qui stipulent que!:

> *«!L'enseignement des mathématiques en classe de sixième comporte deux aspects :*
>
> *• il apprend à relier des observations du réel à des représentations : schémas, tableaux, figures*
>
> *• il apprend aussi à relier ces représentations à une activité mathématique et à des concepts.!»*

et peut permettre aux enseignants de disposer d'outils permettant de!:

> *«!• développer les capacités de raisonnement : observation, analyse, pensée déductive ;*
>
> *• stimuler l'imagination, l'intuition ;*
>
> *•! habituer l'élève à s'exprimer clairement, aussi bien à l'écrit qu'à l'oral;*
>
> *•! affermir les qualités d'ordre et de soin.*
>
> *Ainsi, dès la sixième, l'enseignement des mathématiques développe les capacités de travail personnel de l'élève et son aptitude à chercher, à communiquer et à justifier ses affirmations.!»*

IV- OUTILS DE GESTION

Il n'y a pas de différence quant aux apports des outils de gestion communs avec notre expérimentation en primaire!: travail en groupe et feuilles de recherche. Là encore, les élèves se sont entraidés même s'ils se sont parfois disputés quand ils voulaient tous essayer de trouver en même temps!!

Ils ont noté leurs solutions sur **les feuilles de recherche** *«!pour garder des traces!»*. Les **accompagnateurs** ont dû les guider pour qu'ils notent leurs conjectures mais ils ont eu beau insister pour que les élèves décrivent leurs méthodes, il a fallu attendre la rédaction des affiches pour qu'ils s'y attèlent et seules les plus simples à rédiger ont été formulées par écrit. Pour les autres, ils se sont justifiés en disant que cela était trop compliqué et qu'ils l'expliqueraient à l'oral.

Lors de la **séance de mise en commun**, compte tenu du peu de temps disponible, A1 a choisi de revenir seulement sur (n,n) étant donné que tous les groupes avaient avancé sur ce cas. Et ils ont fait ce qu'ils avaient dit!: ils ont tous su présenter leurs méthodes, sans avoir eu besoin de se replongler dans une recherche préalable, même si deux semaines de vacances ont séparé les deux dernières séances!!

IV-1 Un seul support pour la mise en commun

Le fait qu'un seul support soit disponible lors de la mise en commun a permis, comme nous l'escomptions, de mettre en valeur les méthodes de construction par rapport à la donnée de solutions particulières et de rejeter la pseudo-méthode du groupe C par exemple. En effet, seuls les groupes qui avaient découvert des méthodes de construction (des vraies!!) ont pu indiquer à la classe comment obtenir des solutions, la stratégie essais-erreurs étant alors dévalorisée car moins performante et donc trop longue à mettre en œuvre lors d'un exposé, comme nous l'avions supposé.

IV-2 Redaction d'une affiche

La rédaction d'une affiche semble un apport intéressant puisqu'elle a incité les élèves à revenir sur leurs recherches et rédiger des méthodes. Toutefois, là encore, le problème de l'écrit peut être un frein, comme nous l'avons souligné ci-dessus. Seules les méthodes les plus faciles à décrire ont été retranscrites. Cependant, le fait que les élèves puissent compléter le contenu de leurs affiches oralement leur a permis de présenter ce qu'ils n'avaient pas su écrire. Aussi pensons-nous que, dans ces conditions, cet outil de gestion peut être un support de communication adapté à la gestion d'une situation recherche en classe dès l'école primaire, d'autant plus que la mise en parallèle des différentes affiches permet d'exposer l'avancée de l'ensemble de la classe et ainsi, après que chaque groupe ait exposé ses résulats, créer l'unité, importante pour la suite des recherches, comme nous l'avons déjà souligné.

IV-3 La contrainte du feutre unique comme moyen d'inciter a une representation du probleme

Le fait de n'avoir qu'un seul feutre a dans un premier temps dérouté les élèves, comme par exemple ceux du groupe E!:

> *Ens: parce que vous avez une couleur, un seul feutre, là vous en avez pris plusieurs de feutres.*
> *B: on est obligé de mettre une seule de couleurs?*
> *Ens: il va falloir réfléchir à comment faire autrement.*

B: c'est-à-dire ces solutions on pourra pas les faire?
Ens: vous pourrez pas les représenter comme ça.
B: ben alors c'est impossible!
A: ouais, on peut pas les faire.
C: ah si, en écriture, on écrit jaune, rouge…
D:oh….
Ens: vous n'êtes pas obligés de dessiner, vous pouvez expliquer.
B: expliquer c'est trop dur.

Puis, partagé entre la difficulté de rédiger un texte et celle de représenter ses solutions avec une seule couleur, chaque groupe a cherché seul comment il pourrait s'y prendre. Certains ont renoncé aux dessins ne sachant comment rémédier à la carence, d'autres ont enrichi leur modèle pseudo-concret et inventé une façon de faire. Comme nous l'avons illustré précédemment, les résultats ont été présentés soit sous forme de texte (groupe C et D), soit par des schémas avec les noms des couleurs (groupe A) ou avec les initiales (groupes B et F) ou enfin avec l'invention d'un codage à l'aide de symboles pour le groupe E!:

B à A1!: A2, il est venu, il a dit qu'il fallait déjà qu'on résout ce problème comment, parce que là on a utilisé les dessins et il faut qu'on résout le problème sans les dessins alors…
A1: ben les dessins ça peut vous aider…
B: oui, mais on peut pas les faire, on n'a qu'une seule couleur!
A1: eh ben faut trouver un autre moyen pour représenter les dessins.
B: ah ben oui, ben, on cherche déjà ça…
D: avec les crayons de couleur
A1: non, sans les crayons de couleur.
B: eh ben, alors, on peut pas.
D: ben de la peinture?
A1: non, sans la peinture. T'as un feutre. Comment on peut avoir un autre moyen que en coloriant?
C: en écrivant les couleurs!
B: eh ben on écrit.
A: voilà.
C: c'est que je vous avais dit!
A: On écrit comme ça en haut?
B: c'est moi qui écris…
C: alors dans le premier on a choisi cinq couleurs, le forain a choisi cinq couleurs.
B note.
C: après tu mets les couleurs sont …
D: ah mais les couleurs…
C: tu peux mettre deux points et mettre les couleurs. Il y a blanc, jaune, vert, noir et rouge.
D: alors, le blanc, c'est la peau, le jaune, …
C: c'est le soleil.
A: ah ouais, tu fais ça. Rouge, c'est le sang, jaune, c'est le soleil…
(...)
A1: d'accord, les mêmes cinq couleurs. Mais quand tu vas donner une solution, il faut que tu précises l'ordre, tu peux faire un dessin, pour que ce soit plus clair.

B: oui, mais…ah, je les représente par des signes?
A1: par exemple.
C: triangle, rond, carré…
D: mais c'est quoi, triangle, rond, carré, après vert, jaune!
C à D: allez laisse tomber!
B à A2: on a représenté ça par des signes.
D: ah mais on sait même pas ce que ça veut dire?
C: le triangle, c'est blanc, le rond, c'est jaune, le carré, c'est vert, le je sais pas quoi c'est noir et le égal c'est rouge.

Lors de la séance de mise en commun, suite à l'observation des affiches, A1 est revenu sur la clarté et l'avantage de chaque type de représentation.
Les élèves ont très vite été d'accord pour dire qu'écrire un texte seul n'était pas forcément le plus facile, et qu'il était préférable de le compléter par un schéma. Dès lors, les différents codages ont été comparés. Celui du groupe A a été jugé peu lisible si le nombre de couleurs devenait important. Restaient donc $\boldsymbol{C}_{\mathbf{ini}}$ et les symboles du groupe E.
$\boldsymbol{C}_{\mathbf{ini}}$ a été considérée dans un premier temps comme la plus pratique!:

A1!: qu'est-ce qu'on pourrait inventer pour pouvoir représenter beaucoup de couleurs!?
El1: des lettres.
El2!: des trucs bizarres.
A1!: si je mets une lettre, combien je pourrais représenter de couleurs?
El!3: 26.
A1!: et si j'ai plus que 26 couleurs!?
El3!: ben pour blanc on fait bla, bleu, ble.
A1!: oui mais ça va être plus long et pas très clair s'il y en a beaucoup.
El4!: on écrit tout.
A1!: oui mais là ils avaient essayé à 5 avec des flèches et c'est pas très pratique.

puis lorsque le nombre de couleurs devenait supérieur à 26, les élèves ont opté pour le codage du groupe E!:

El5!: on fait des formes n'importe comment
A1!: on en invente autant qu'on a de couleurs!?
Elèvess!: oui voilà.
A1!: donc on en invente de plus en plus!?
El5!: oui mais c'est bien, c'est clair avec la légende à côté.
A1!: oui mais si j'en ai beaucoup, beaucoup, je vais devoir inventer des tas de symboles ça fait beaucoup de travail. Si on a un million de couleurs!?
El6!: c'est impossible de trouver!!
A1!: bon d'accord, un million un alors!!
El5!: on fait un trait d'abord comme ça puis tordu, puis droit….

Puis un élève a proposé d'utiliser des numéros, mais cela a été loin de faire l'unanimité!:

El7!: on met des numéros.

A1!: on met des numéros. Est-ce que les numéros ça peut vous aider!?
El6!: oui.
El8!: il y en a pas beaucoup.
A1!: il n'y en a pas beaucoup!?
El7!: si, il y en a beaucoup, il y a 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 …
A1!: il y en a combien des nombres!?
El7!: jusqu'à l'infini.
El5!: oui mais moi je préfère inventer.
A1!: là t'as pas besoin d'inventer ça existe déjà. On va pouvoir mettre toutes les couleurs. On dit ça c'est la couleur 1.
El5!: comme avec les formes alors.
A1!: oui mais on a dit que les formes c'était bien s'il y en avait pas trop. S'il y en a beaucoup, on peut mettre des nombres.
El5!: ou on imagine.
A1!: donc on peut soit inventer des symboles si on a beaucoup d'imagination soit utiliser des symboles qui existent déjà, les nombres.

Cela nous amène à penser que **les nombres,** tout du moins entiers**, semblent avoir un statut particulier** pour les élèves. Ils ne parviennent pas à les voir dans un contexte non numérique, comme des symboles, alors que cela est fréquent dans la vie courante (numéros de téléphone, codes postaux...). Ils paraissent les rattacher principalement au calcul, composante essentielle de l'activité mathématique pour la plupart d'entre eux, comme nous le soulignons dans le chapitre 2 de la deuxième partie de cette thèse. Nous pensons que cette situation peut donc permettre, suite à une mise en commun, de **prendre conscience que les nombres sont des symboles performants pour coder des quantités discrètes**. Pour ce faire et afin d'évincer les réticences des élèves préférant les symboles imaginaires, il faudrait, dans la mesure où la recherche se poursuit par la suite, qu'ils aient à travailler effectivement avec les différents codages proposés, afin qu'ils puissent se rendre compte des apports du codage numérique.

La contrainte du feutre unique apparait donc comme un moyen d'amener les élèves qui ne l'ont pas fait préalablement à introduire un codage des couleurs et ainsi à enrichir leurs modèles pseudo-concrets.

IV-4 ROLE DE L'ENSEIGNANTE

Au regard des interactions qu'elle a eu avec le groupe E, nous pouvons dire que **l'enseignante a, dans un premier temps, tenu un rôle proche de celui des autres accompagnateurs**!: elle observait que l'énoncé avait été bien compris et évitait les éventuelles dispersions.

Cela a changé dès lors que le groupe a été confronté à des cas où il n'y avait pas de solution. N'en sachant guère plus que ses élèves sur les différentes valeurs de la variable de recherche (n,k), et leurs conséquences sur les phases de formulation et validation que nous avons déjà évoquées, elle a mené les recherches en collaboration avec le groupe, afin de les aider à organiser leurs essais et ainsi avoir des arguments pour pouvoir affirmer si oui ou non il y avait des solutions. **Elle est alors** quasiment **devenue membre du groupe à part entière** et a cherché à garantir l'exhaustivité en mettant en oeuvre, avec ses élèves, $\mathbf{M}_{\mathbf{forçage}}$. C'est elle qui a aussi permis aux élèves de trouver les deux types de solutions à (6,2) en étudiant la manière de choisir les deux couleurs intérieures!: consécutives, séparées par une, par deux. Elle les aidait à faire des choix organisés des deux couleurs et les laissait chercher comment les six pions devaient être positonnés.

L'étude de ces interactions nous permet donc de faire des hypothèses sur ce qu'il est possible de se passer lors de la recherche de cette situation en classe, sans présence extérieure. L'enseignante est prête à laisser chercher ses élèves mais au préalable, elle les met sur la bonne voie. Elle ne les amène pas à organiser leurs recherches par eux-mêmes, en les questionnant par exemple comme le font les accompagnateurs, mais elle leur montre comment faire.

Cela nous amène à penser que pour que cette situation au contrat didactique différent de celui mis en place habituellement dans la classe de mathématiques puisse «!fonctionner!» tel que nous l'avons supposé et observé, il est important que les enseignants puissent suivre une formation préalable, pour avoir des clefs pour la résolution du problème afin de se sentir «!à l'aise!», mais surtout pour savoir «!laisser chercher!» les élèves.

IV-5 CONCLUSION

De façon générale, les outils de gestion que nous avons mis en place ont effectivement permis aux élèves de chercher, débattre, garder des traces, chercher des méthodes, les formuler ...

Le fait de n'avoir qu'un support pour la mise en commun avec des couleurs fixées par l'accompagnateur principal a effectivement permis de mettre en valeur les méthodes découvertes et rejeter les pseudo-méthodes et la recherche par essais-erreurs.

La rédaction d'une affiche a amené les élèves à clarifier leurs propos, formuler leurs résultats. Le fait qu'elle puisse être complétée oralement a réduit certaines des difficultés liées à l'écrit, notamment pour les méthodes de type gloutonnes ou comme $M_{forçage}$ dont la formulation peut être complexe.

La contrainte du feutre unique semble adaptée pour inciter les élèves à introduire un codage des couleurs en vue d'une recherche sur papier-crayon. Cependant, cela ne suffit pas pour l'introduction du codage numérique, apparu certes mais loin de faire l'unanimité, en raison nous semble-t'il du fait que les élèves ne voient pas les nombres selon un point de vue symbolique. Pour qu'ils abandonnent les codes qu'ils ont proposés et comprennent l'avantage du recours aux nombres, nous pensons qu'il faudrait qu'ils aient à s'en servir dans la suite pour chercher effectivement sur le papier. Dans ce but, on peut par exemple proposer de nouveaux éléments pour la situation par exemple en introduisant une activité sur le support papier-crayon seul leur demandant de chercher des cas simples.

Les interventions des accompagnateurs, enfin, évitent aux élèves les dispersions et les incitent à généraliser ou à se confronter à l'impossibilté en mathématiques, si déroutante. Leur comparaison avec celles de l'enseignante nous amène à penser qu'une formation des enseignants serait appropriée pour leur apprendre à mettre en place le contrat didactique inhérent aux situations recherche.

V- CONCLUSION! : *LA ROUE AUX COULEURS,* UNE SITUATION PERTINENTE POUR APPRENDRE A CHERCHER, DU PRIMAIRE A L'UNIVERSITE

L'exemple de *La roue aux couleurs* nous conforte dans notre idée qu'il est possible d'introduire les situations recherche dès l'école primaire sous une forme adaptée.
Nos expérimentations sur plusieurs niveaux nous ont montré à quel point le support pouvait être une aide et un soutien à la dévolution du problème mais aussi une occasion à la recherche permettant même à des élèves de CM ou 6ème de rentrer dans une démarche de recherche en mathématiques et d'avancer dans la résolution.

La prise en compte des phases de travail adidactique et de celles suscitées suite à une intervention des accompagnateurs, nous a aidée à identifier les difficultés des élèves, à déterminer quels pouvaient être les apprentissages potentiels et a montré que les élèves peuvent avancer seuls dans la résolution de la situation recherche, sous condition que leur recherche soit régulièrement relancée à l'aide de questions du gestionnaire de la situation leur demandant de justifier leurs propos (pourquoi!?) ou bien les amenant à réitérer leur action (comment!?).

Compte tenu des difficultés communes aux différents niveaux scolaires, nous pensons que, quel que soit le niveau, *La roue aux couleurs* met en jeu des notions «!transversales!» aux mathématiques, rarement travaillées ainsi dans l'institution scolaire, au regard de l'étude de manuels que nous avons faite!: l'argumentation, la généralisation, l'impossibilté, la modélisation, la recherche de preuve. Nous estimons, de plus, qu'au cours de leurs recherches les élèves ont effectivement mobilisé les connaissances relevées dans les intructions officielles relatives à chaque niveau. Ainsi, cette situation recherche répond aux attentes des programmes officiels qui préconisent le recours à de «*véritables problèmes de recherche!*» dès l'école primaire. Cependant, ce n'est pas un outil miracle, pour qu'il y ait apprentissage, il faut bien évidemment que la pratique de telles situations en classe soit régulière. Une seule fois ne suffit pas!!

Nous pensons donc que cette série d'expérimentations a permis de montrer que faire chercher en mathématiques était possible et source d'apprentissages dès le plus jeune âge, sous réserve que les enseignants puissent être formés à la gestion de ce type d'activité. Au regard des difficultés récurrentes que nous avons relevées du primaire à l'université, nous irons même plus loin et affirmons que cela amène à penser que faire chercher en mathématiques dès le plus jeune âge est non seulement possible mais **nécessaire,** car cela peut contribuer à donner du sens à l'activité mathématiques tout au long de la scolarité. Par ailleurs, le fait que même les élèves de CM soient parvenus à avancer dans la résolution du problème, nous conforte dans notre hypothèse de l'accessibilité de cette situation et donc du support potentiel de vulgarisation de l'activité mathématique qu'elle représente.

Bien évidemment, introduire de telles activités au sein de la classe, notamment chez les plus jeunes, demande la mise en place de conditions de gestion spécifiques.
Après une séance sans contraintes, on peut choisir, selon le temps dont on dispose, d'**orienter les recherches vers un sous-problème**, en particulier (n,n) ou (n,2) qui impliquent tous les deux de se confronter à l'impossibilté en mathématiques et donc à la nécessité de prouver. Les problèmes relatifs à l'expression écrite impliquent que le cas (n,n) semble plus accessible aux élèves les plus jeunes, (n,2) demandant de prendre en compte plusieurs variables lors de la rédaction des méthodes. Lors de la présentation du problème, l'exemple introductif peut avoir une influence sur le déroulement de la recherche des différents groupes car bien souvent c'est le cas que les élèves vont choisir pour commencer, il fait donc partie des variables de la situation didactique.
La recherche en groupes apparait comme un élément motivant. Il semble important aussi que chaque groupe ait à sa disposition une feuille ou **un cahier de recherche** afin de garder des traces et représenter la situation sur le papier. Cependant, ce n'est pas suffisant pour amener à introduire un codage ou à formuler des résultats, aussi ceci doit-il être complété par une phase de rédaction destinée à des personnes extérieures au groupe!: la classe par exemple mais cela pourrait être une autre classe, et ce serait préférable car cela nécessiterait d'être encore plus compréhensible, qui peut être de la même école ou d'une autre à l'instar des jumelages MATHs.en.JEANS par exemple.

Compte tenu de nos observations, nous pensons que l'organisation didactique nécessaire à la recherche d'une telle situation en niveau élémentaire doit proposer!:

- au moins deux séances de recherche afin d'assurer la dévolution du problème, la première pouvant être libre et la seconde orientée (par exemple vers (n,n))

suivies par

- une séance de mise en commun pour faire le point sur l'ensemble de la classe, institutionnaliser certains résultats et voir vers quoi doivent s'orienter les futures recherches

- plusieurs séances de recherche
- une nouvelle séance de mise en commun
- un moment de communication vers des personnes extérieures à la classe, afin d'inciter les élèves à revenir sur leurs résultats et à les formuler clairement.

Nous pensons donc qu'une dizaine d'heures est nécessaire, à raison d'une heure hebdomadaire. Si l'on en a envie, la recherche peut ensuite être poursuivie autour d'un autre sous-problème de *La roue aux couleurs*, notamment (n,2).

Dans le chapitre suivant, nous allons chercher, à étudier plus précisément si cette gestion est réellement transposable dans les conditions de classe à travers l'observation de deux autres classes de primaire.

Les outils que nous avons proposés n'ont pas amené les élèves les plus jeunes à une recherche sur le support papier-crayon alors que nous pensons que cela peut être une aide pour avancer dans la résolution du problème, via l'introduction des décalages et l'étude exhaustive du cas (4,4) par exemple. Aussi, nous reste-t'il à déterminer comment induire une recherche par écrit, sans pour autant que cela devienne un obstacle pour les élèves. Nous expérimenterons donc deux nouvelles tâches construites dans ce but.

PARTIE! B:

ETUDE DE LA GESTION

D'UNE SITUATION RECHERCHE EN CLASSE!

Nous l'avons vu, la situation *La roue aux couleurs* est dévoluable en tant que situation mathématique dès le CM1. Reste maintenant à déterminer comment la mettre en oeuvre en classe, compte tenu de nos observations préalables et en particulier des outils de gestion que nous avons déjà proposés. En particulier, comme nous l'avons précisé en conclusion de notre série d'expérimentations précédente, nous cherchons à les compléter par une phase de travail au cours de laquelle les élèves sont amenés à chercher individuellement sur le support papier-crayon, ainsi que par une phase de communication publique de leurs résultats.

I- CONDITIONS DE MISE EN PLACE! ET ANALYSE A PRIORI

I-1 LE PUBLIC

Deux classes multiniveaux d'une école de la région grenobloise ont participé à cette expérimentation!:

- la classe de CE2/CM1 constituée de 4 CE2 et 19 CM1
- la classe de CM1/CM2 constituée de 3 CM1 et 19 CM2

Dans chacune des classes, les élèves étaient répartis en six groupes, définis respectivement par les deux enseignantes. La première a fait le choix de rassembler les CE2 (le groupe 3), la deuxième a réparti les CM1 dans trois groupes différents. Chaque classe menait des recherches indépendamment de l'autre.
Nous avons choisi de ne pas enregistrer les productions de chacun des groupes mais de seulement relever, au fil des séances, ce que nous jugions important, au regard de nos observations précédentes, à l'aide d'un magnétophone. En particulier, nous avons regardé quels cas étaient étudiés, les conditions d'apparition des méthodes ainsi que leurs énoncés et la gestion de l'impossibilié, notamment au travers des cas (2,2) et (4,4).

I-2 A CHACUN SON ROLE

En plus du rôle d'accompagnateur principal introduit dans le cadre de la «!Main à la pâte!», nous avons repris à notre compte celui de **parrain scientifique**, distingué du premier de la manière suivante!:

«!Pour cadrer ces interactions et les différencier d'autres interventions proposées aux enseignants, deux «!chartes!» ont été élaborées pour préciser le rôle des partenaires en distinguant deux modalités différentes!:

l'accompagnateur scientifique!: professionnel ou étudiant, il offre son aide et son temps en venant préparer les séances avec l'enseignant et en l'assistant dans leur réalisation.

le parrain scientifique!: professionnel moins disponible sur le temps scolaire, il offre souvent une aide plus épistolaire.(ndlr!: principalement par mail)!»

Comme lors des expérimentations que nous avons déjà présentées, l'accompagnateur est présent lors de chaque séance auprès de l'enseignante pour l'aider dans la gestion de la situation, répondre aux questions des élèves, les amener à s'interroger, à conjecturer, à généraliser... Là encore, c'est lui qui fait les choix didactiques relatifs à la situation et non les enseignantes car celles-ci ne s'estimaient pas assez aguerries pour prendre seules les choses en main. C'est donc l'interlocuteur principal de la classe au niveau du contenu mathématique alors que les enseignantes prenaient en charge la gestion sociale.

Le parrain scientifique, lui, a un rôle bien plus sporadique. Il est là pour présenter la situation lors de la première séance, conjointement à l'accompagnateur, et, après plusieurs séances de recherche, pour faire un bilan collectif, apporter un regard extérieur sur les productions de la classe et donc celles du triplet «!enseignant-accompagnateur-élèves!», relever les résultats importants, soulever certaines des questions restées sans réponse... Il a donc le statut d'un expert extérieur.

I-3 UN ENONCE SANS JOUEUR FICTIF

Afin de pallier le problème de la présence du forain posé en primaire et 6ème, l'énoncé du jeu a été modifié par l'accompagnateur. Pour cela, il s'est inspiré de l'énoncé original, figurant dans le journal Le Monde, en remplaçant les membres du club de spiritisme par... des chercheurs!!

LA TABLE TOURNANTE DES CHERCHEURS

Des chercheurs sont assis autour d'une table tournante, ils sont tous habillés de **couleurs différentes**.

Sur la table, devant chacun d'eux, se trouve un dossier. Un chercheur n'a le droit de parler que **s'il a en face de lui un dossier de la même couleur** que celle de son vêtement.

Comment choisir la couleur des dossiers pour qu'à chaque tour de table, un et un seul chercheur puisse parler ?

Plusieurs exemples autour de (n,n) ont été donnés par l'accompagnateur au début de la première séance pour expliciter à quoi correspondait «!un tour!» de table et la contrainte de l'unique face à face, mais aussi pour orienter les élèves vers (n,n), car comme on l'a déjà évoqué lors de l'analyse de nos précédentes expérimentations, l'exemple introductif est bien souvent le cas par lequel ils vont commencer leurs recherches. Le couple particulier (4,4) venait clore cette présentation et pouvait ainsi amener les différents groupes à se confronter dès le début à l'impossibilité et nous permettre d'étudier leurs réactions face à ce cas si déroutant.

I-4 NOUVEAUX OUTILS DE GESTION! : RECHERCHE SUR LE PAPIER ET COMMUNICATION PUBLIQUE

Dans un premier temps, nous avons repris les outils de gestion de la situation que nous avions proposés dans nos expérimentations antérieures, au niveau de l'organisation sociale et des outils matériels.
Ainsi, la recherche s'est effectuée en **groupes de 3 ou 4**, chaque groupe disposait d'un **support matériel** et d'un **cahier de recherche**.

Deux séances de mise en commun ont été organisées. Lors de la première, l'accompagnateur invitait chaque groupe à faire part de ses avancées, de ses remarques..., le tout était retranscrit sur une affiche sur laquelle l'accompagnateur écrivait sous la dictée des différents groupes afin d'évincer le problème de l'écrit. Les résultats présentés ont ensuite été mis en débat puis, une fois validés, institutionnalisés.
La seconde, menée par le parrain scientifique, est venue clôturer la phase de recherche et synthétiser les découvertes, en vue de la préparation d'un temps fort de communication publique, **le séminaire**.

Ces outils de gestion ont été enrichis par une nouvelle étape dans l!'organisation sociale de la situation à travers la mise en place d'un séminaire ainsi que par **deux nouvelles tâches sur le support papier-crayon:** valider des dispositions d'une part et produire une solution d'autre part.

1- Le séminaire

Comme nous l'avons souligné précédemment, il nous semble important que la gestion d'une situation recherche comporte un temps de présentation «!publique!» afin d'inciter les élèves à formuler leurs résultats. Or, nous pensons que cela sera encore plus assuré si cette présentation est destinée à un public extérieur à la classe, qui n'a pas cherché le problème auparavant, ainsi les élèves sont amenés à être le plus compréhensibles possible.
Pour cela, nous nous sommes inspirée des actions menées dans le cadre de *MATHs.en.JEANS*, finalisées par l'organisation d'un séminaire national, au cours

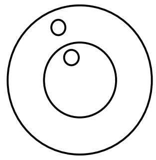
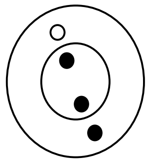
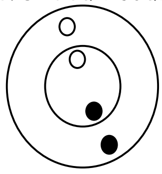
duquel les différents groupes d'élèves présentent à tous leurs recherches. Bien plus modeste, notre séminaire réunissait, au sein du laboratoire Leibniz, les deux classes de primaire ainsi qu'une classe de $6^{ème}$ d'un collège de l'agglomération grenobloise qui venait présenter les résultats de ses recherches sur le problème du pavage d'une grille carrée à l'aide de dominos, qu'elle avait menée à l'aide de son enseignante de mathématiques et d'un chercheur de notre équipe.

2- Fiches individuelles! : deux nouvelles tâches, valider et produire sans le support

Nous avons cherché à proposer, d'une part, une nouvelle activité amenant à se détacher du support matériel pour chercher par le biais du support papier crayon, d'autre part, à développer un outil permettant d'avoir un aperçu de l'avancée individuelle des élèves.
Ainsi, nous avons mis en place une séance au cours de laquelle les élèves avaient à répondre à **deux tâches différentes, sans disposer du jeu matériel**. La première demandait de valider ou non des dispositions fournies, pour la deuxième les élèves étaient amenés à trouver des solutions pour une valeur de n donnée.

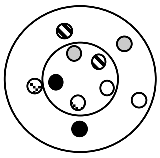
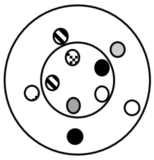
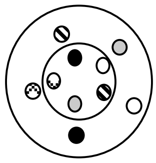
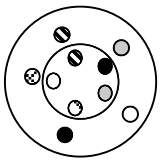
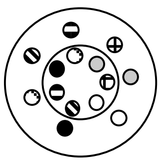
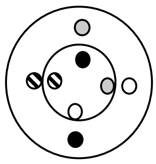
<u>Tâche 1!: Valider</u>

UN CHERCHEUR, ET UN SEUL, VA T'IL POUVOIR PARLER!
A CHAQUE TOUR DE TABLE?

	Ta réponse Oui ou non	Ton explication
Chercheur: une couleur Dossier: une couleur 		
Chercheurs!:deux couleurs Dossiers: une couleur 		
Chercheurs:deux couleurs Dossiers: deux couleurs 		

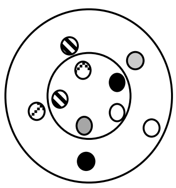
Dans cette partie, les cas étudiés sont volontairement très simples afin de vérifier si l'élève a compris la contrainte de l'unique face à face. Il s'agit de l'étude de trois valeurs particulières de la variable de recherche (n,k)!: (1,1), (2,1) et (2,2). Les deux premiers cas admettent des solutions, le dernier non. Déterminer leur validité ne pose pas de difficulté, car elle «!saute aux yeux!». Cependant des difficultés peuvent apparaitre si l'on se réfère au contexte de l'énoncé!: que signifie t'il dès lors qu'un seul chercheur parle tout seul ou s'ils sont deux mais qu'un seul peut prendre la parole!? Ainsi, même si la réponse fournie est correcte, les explications peuvent refléter si l'élève est resté à un stade très concret et n'a pas décontextualisé le problème ou bien, en comparant avec le reste des réponses, s'il a avancé dans la modélisation du problème mais procède à un retour à la situation réelle étudiée et évalue la pertinence et la cohérence de ses résultats.
Cette première partie de la tâche de validation a ensuite été complétée par l'étude de cas plus complexes.

LES CHERCHEURS PEUVENT-ILS PARLER CHACUN LEUR TOUR!?

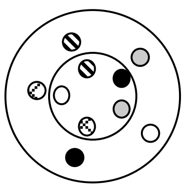
	CADRE POUR FAIRE TA RECHERCHE	Ta réponse
		
		
		
		
		
		

Il s’agit donc de la suite de la tâche 1 mais à travers l’étude des couples (5,5), (7,7) et (4,4).
Notons D_i, $1 \leq i \leq 6$, les différentes dispositions proposées.

D_2 et D_4 sont toutes deux valides.

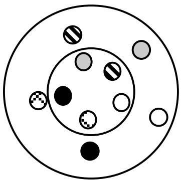


La première reprend la solution obtenue par le biais de $\mathbf{S}_{sym}^{(n,n)}$ ou $\mathbf{S}_{ordre}^{(n,n)}$ et peut donc être validée sans faire tourner la roue si l’élève la reconnait.

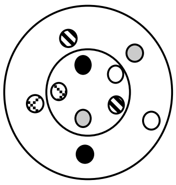


D_4, par contre, nécessite d’étudier toutes les positions et donc de faire tourner la roue de cran en cran. Nous cherchons à voir comment les élèves vont y parvenir, quels outils ils vont développer pour valider sur le support papier-crayon!: vont-ils représenter des roues successives comme nous l'avons vu en DEUG!? ou bien introduire un tableau!? se servir des décalages!?

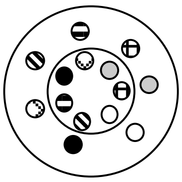
Toutes les autres dispositions sont invalides. Pour le savoir, les élèves doivent donc faire tourner la roue. Ils peuvent le faire «!dans leur tête!» ce qui nécessite donc d'avoir une représentation mentale de la rotation et de savoir anticiper le résultat de cette rotation. Ils peuvent aussi avoir recours au support écrit et chercher sur le papier et dans ce cas ils auront besoin de traduire la rotation.
Pour chaque disposition invalide, la position «!qui!coince!» a été choisie différemment selon les D_i.



Pour D_1, elle apparait au bout d'un cran dans les deux sens, direct et indirect, et est donc assez aisément identifiable.



Pour D_3, tout dépend dans quel sens on tourne. Si l'on attache de l'importance à un sens par rapport à un autre, et que l'on ne fait tourner la roue que dans le sens des aiguilles du montre, comme nous l'avons observé chez les élèves de 6ème et primaire, il n'y a aucun face à face au bout de deux crans. Par contre, dans le sens direct, cela se produit dès le premier cran. Ce cas est donc là pour identifier si les élèves privilégient individuellement un sens par rapport à l'autre, mais aussi s'ils parviennent mentalement à faire tourner la roue au délà d'1/5 de tour, et dans le cas contraire s'ils développent une recherche sur le papier.



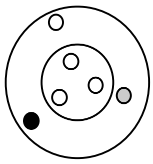
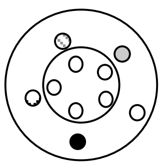
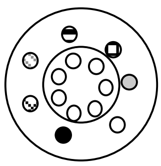
Dans le même ordre d'idée, quel que soit le sens choisi, deux faces à faces apparaisent pour D_5 au bout de deux crans, mais là, 7 pions sont proposés. Faire tourner mentalement devient donc plus complexe et peut donc encourager le recours à l'écrit.

D_8 enfin doit nous permettre d'identifier le cas échéant le degré de confiance et de certitude que les élèves peuvent avoir envers la conjecture!**Conj**$^{(n,n)}$ ou tout du moins **Conj**$^{(4,4)}$! : vont-ils chercher ou bien rejeter a priori cette disposition, persuadés que le cas (4,4) n'admet pas de solution!?

<u>Tâche 2!: produire une solution</u>

COMMENT LES CHERCHEURS DOIVENT-ILS PLACER LEURS DOSSIERS POUR POUVOIR PARLER CHACUN A LEUR TOUR!?

(COLORIE LES PIONS DU MILIEU AVEC LES BONNES COULEURS)

	Explique ce que tu fais
Chercheurs: 3 couleurs Dossiers: 3 couleurs 	
Chercheurs: 5 couleurs Dossiers: 5 couleurs 	
Chercheurs: 7 couleurs Dossiers: 7 couleurs 	

La tâche 2 demande de trouver des solutions seulement sur le support papier crayon.

Pour le cas (3,3) cela ne pose pas de grandes difficultés, une solution peut être obtenue par forçage, comme avec le support matériel!: je place une couleur en face à face et je dispose les deux autres par élimination.

Pour les cas (5,5) et (7,7), plusieurs solutions existent mais les exhiber par hasard, sans utiliser le support matériel, nous parait difficile, au regard du nombre de combinaisons possible et de la nécessité de devoir anticiper la rotation si l'on veut procéder là aussi par forçage.

Nous cherchons ainsi à savoir, d'une part, si les élèves qui ont découvert des méthodes vont penser et/ou sont capables de les réinvestir, d'autre part, si, sans utiliser de méthodes, ils parviennent à trouver des solutions sans le jeu matériel. Nous supposons que cela sera envisageable pour les deux premiers cas mais deviendra difficile pour le dernier.

II-ANALYSE DE LA SITUATION EXPERIMENTALE!

II-1 DEROULEMENT

La recherche s'est déroulée sur un trimestre (de Novembre à Mars) à raison d'une heure par semaine. Les séances ont ainsi été organisées:

S1!	présentation de la situation ouverte par le parrain scientifique avec (4,4) comme exemple introductif
S2 S3	recherche en groupes, orientée vers (n,n).
S4	mise en commun et institutionalisation des résultats par l'accompagnateur principal
S5 S6	recherche en groupes
S7	feuilles de bilan individuelles
S8	synthèse des résultats et questionnements par le parrain scientifique suivie de la répartition des tâches en vue du séminaire par l'accompagnateur principal et chacune des enseignantes.
S9 S10 S11 S12	préparation du séminaire, en groupes
S13	séminaire dans les locaux du laboratoire Leibniz

II-2 PRESENTATION SYNTHETIQUE ET ANALYSE DES PRODUCTIONS ECRITES

Au regard de nos notes, des cahiers de recherche et des réponses aux feuilles individuelles, nous estimons que, globalement, les productions des élèves corroborent nos précédentes observations. Nous présentons l'ensemble des résultats mis à jour sur les deux classes en nous appuyant sur la séance S4 au cours de laquelle chaque groupe a présenté ses productions à sa classe, en rédigeant une affiche à l'aide de l'accompagnateur. Ce dernier a ensuite institutionnalisé les différents résultats.

1- Avancée dans le problème

Voici, pour les deux classes, le récapitulatif, pour chaque groupe, des cas étudiés et des résultats mis à jour et rédigés dans les cahiers de recherche.

Classe de CE2/CM1

Groupes	Cas étudiés	Résultats formulés
1A	(4,4), (8,8), (3,3), (2,2), (2,1), (5,5), (4,4), (4,3), (5,5), (4,2)	preuve inexistence (2,2) méthode gloutonne (5,5) $M_{ordre}^{(5,5)}$ méthode par forçage (4,2)
2A	(2,2), (2,1), (4,4), (4,1), (3,3), (5,5), (3,3), (4,4), (5,5)	preuve inexistence (2,2) $M_{sym}^{(3,3)}$ $Conj^{(4,4)}$ méthode gloutonne (5,5)
3A CE2	(4,4), (3,3), (5,5), (7,7), (8,8)	$M_{sym}^{(3,3)}$ solutions à (3,3), (5,5) et (7,7) par tatônnements
4A	(3,3), (5,5), (4,4), (4jaune+1noir, 4noir) (2,2), (2,1)	$M_{sym}^{(3,3)}$, $M_{sym}^{(5,5)}$ preuve inexistence (2,2)
5A	(4,4), (5,5), (3,3), (2,2), (2,1), (1,1), (4,4)	$M_{sym}^{(3,3)}$ solution à (3,3) solution (5,5) par tatônnements
6A	(4,4), (6,6), (6,1), (1,1), (5,5), (6,6)	plusieurs solutions à (5,5) idée de décalages conjecture que ce qu'ils font pour les impairs ne fonctionne pas pour les pairs!;

Classe de CM1/CM2

Groupes	Cas étudiés	Résultats formulés
1B	(3,3), (1,1) (5,5), (7,7), (2,2), (4,4), (4,1), (6,6), (6,4)	solutions à (3,3) solution à (5,5) et (7,7) par tatônnements $Conj^{(n,n)}$ $P^{(n,1)}$
2B	(4,4), (4,1), (3,3), (5,5), (1,1), (4,4), (2,2), (6,6)	$P^{(n,1)}$ preuve inexistence (2,2) $Conj^{(4,4)}$ $M_{sym}^{(3,3)}$ $M_{dec}^{(5,5)}$ codage couleurs par des nombres conjecture M_{dec} inopérante sur (6,6)
3B	(4,4), (4,1), (1,1), (3,3), (4,4), (5,5), (13,13)	$P^{(n,1)}$ $M_{dec}^{(5,5)}$ solution (13,13) obtenue sur le papier avec M_{dec} conjecture M_{dec} inopérante pour les pairs
4B	(4,4), (3,3), (5,5), (7,7)!, (5,5), (4,4)	solutions à (5,5) et (7,7) par tatônnements 2ème solution (5,5) par M_{graphe} (de 2 en 2) $M_{graphe}^{(2p+1,\ 2p+1)}$ de 2 en 2

5B	(3,3), (1,1), (7,7), (5,5)	solutions à (5,5) et (7,7) par tatônnements
6B	(4,4), (3,3), (2,2), (2,1), (7,7), (4,4), (4,1)	$M_{sym}^{(3,3)}$, $M_{sym}^{(7,7)}$ puis $M_{sym}^{(2p+1,2p+1)}$ $P^{(2p,1)}$ puis $P^{(n,1)}$ $Conj^{(n,n)}$

Influencés, semble-t'il, par le dernier exemple introductif, plusieurs groupes ont commencé leurs recherches par (4,4) puis, comme ils ne parvenaient pas à trouver de solution, ils ont considéré (4,1), (3,3) ou (2,2). Nous retrouvons dans le groupe 1A l'**envie de mettre le plus de couleurs possible** et d'étudier (8,8), finalement abandonné pour le cas plus simple (3,3). **Face à l'impossibilité**, là aussi, les élèves ont donc été **tentés d'aller voir autre chose**, sans avoir établi de certitude sur le cas (4,4), hormis le fait qu'il semblait difficile.

Ensuite, soit ils sont restés dans le sous-problème (n,n) en étudiant (2,2), (3,3) ou (5,5), soit ils se sont orientés vers (n,1). L'accompagnateur ainsi que les enseignantes les ont alors **incités à généraliser** leurs résultats et à voir ce qu'il en était pour d'autres choix de couleurs ou d'autres valeurs de n.

Certains ont regardé plus en détails des cas où n était pair. Des **preuves de l'inexistence de solution pour (2,2)** ont alors été rédigées dans les cahiers de recherche!:

> *«!Nous ne pouvons pas faire à 2, pourquoi!?*
>
> *Si on met le jaune en face du jaune, on ne peut mettre le noir qu'en face du noir. Et si on fait le contraire, aucun ne parlera. Nous pouvons donc qu'avec une seule [couleur au milieu] obligatoirement.!» (groupe 4A)*

Par contre, comme dans la classe de primaire étudiée auparavant et en 6ème, **(4,4) est resté problématique**. Seuls les groupe 2A et 2B ont décidé qu'il n'avait pas solution en argumentant par exhaustivité. Par exemple, 2A a marqué sur son cahier:

> *«Est-ce que c'est possible à 4!?*
>
> *Ma réponse est non, car j'ai essayé de mettre tous les pions un par un et ça a pas marché!»*

La conjecture $\mathbf{Conj^{(n,n)}}$ est finalement apparue dans les deux classes, mais les élèves ont été prudents. Ils ont d'abord essayé plusieurs couples (2p+1,2p+1), certains sont allés jusqu'à n=13, avant d'énoncer qu'ils pensaient qu'il était possible de trouver des solutions pour tous les impairs. Avant de supposer qu'il n'y avait pas de solution pour les pairs, ils ont affirmé que les méthodes qu'ils avaient établies pour les impairs ne pouvaient être reproduites pour les pairs. Enfin, l'étude des cas (2,2) et (4,4) a amené certains à faire le lien et finalement à énoncer $\mathbf{Conj^{(n,n)}}$.

Dès lors, les élèves ont cherché comment il était tout de même possible de trouver une disposition valide, en faisant varier k.
Le groupe 6B a proposé $\mathbf{P}^{(2p,1)}$!

> *«!pour 4 ça marche mais c'est toujours le même chercheur qui parle. Et ça marche aussi avec 2, 6, 8...»*

puis, comme les autres, est ensuite parvenu à $\mathbf{P}^{(n,1)}$.

Peu à peu, enfin, $\mathbf{Rem}_{\mathbf{coul}}$ a été formulée, contrairement à $\mathbf{Rem}_{\mathbf{sens}}$, qui, là encore, n'a été évoquée que par certains élèves. Les autres vérifiaient leur disposition dans un sens donné, le sens indirect le plus souvent, ou bien dans les deux sens, comme dans les deux classes précédemment étudiées.

2- Stratégies, méthodes et impossibilité

La recherche s'est tout d'abord faite par le biais d'essais-erreurs puis $\mathbf{S}_{\mathbf{sym}}$ est apparue dans les deux classes suite à l'étude de (3,3), complétée par $\mathbf{S}_{\mathbf{gloutonne}}$ pour (5,5) chez les CE2/CM1 et par une stratégie proche de $\mathbf{S}_{\mathbf{graphe}}$ et par $\mathbf{S}_{\mathbf{dec}}$ dans la classe de CM1/CM2.

La recherche et la formulation de méthode a dû, là aussi être suscitée par l'accompagnateur dans plusieurs groupes. Lors de la présentation du séminaire, nous reviendrons plus en détails sur les différentes méthodes énoncées, $\mathbf{M}_{\mathbf{sym}}^{(n,n)}$, $\mathbf{M}_{\mathbf{gloutonne}}^{(5,5)}$, $\mathbf{M}_{\mathbf{graphe}}^{(n,n)}$ et $\mathbf{M}_{\mathbf{dec}}^{(n,n)}$, découlant de ces stratégies.

Nous avons par ailleurs retrouvé les difficultés liées à la confrontation à des cas impossibles tels (4,4), comme l'évoquent les changements de valeurs du couple (n,k) que nous venons de présenter, le fait qu'un seul groupe se soit clairement positionné dans son cahier sur l'inexistence de solution pour ce cas (même si son argument est loin d'être probant!!) et cet extrait d'une discussion entre l'accompagnateur et Nicolas, un élève de CM1 du groupe 2A:

> *Acc: Vous avez déjà beaucoup essayé pour 4, vous y arrivez pas, est-ce que vous voulez pas essayer pour 5 par exemple? Parce que vous refaites toujours la même chose...!est ce que vous ne voulez pas essayer quelque chose de nouveau pour voir si ça marcherait différemment?*
> *N: on va déjà essayer de faire avec 4, **réussir au moins**.... jaune et jaune...zéro...*
> *Il change.*
> *Acc: est-ce que vous ne voudriez pas essayer des choses différentes, même avec 4...!regardez ce que vous avez fait avec 4...!à l'extérieur, vous ne pouvez en mettre que 4 mais à l'intérieur, vous pouvez choisir le nombre de couleurs...!vous, vous avez toujours fait 4 à l'extérieur et 4 à l'intérieur...!est-ce que vous ne pourriez pas essayer autre chose?*
> *N: en tout cas moi, non.*
> *Acc: tu veux pas essayer autre chose, et pourquoi?*
> *N: j'ai envie de trouver pour 4.*
> *Acc: si tu as envie de trouver pour 4...tu as vu que ça ne marchait pas pour 4 pour le moment...est-ce que tu voudrais comprendre pourquoi ça ne marche pas?*
> *N: oui.*
> *Acc: c'est très bien d'avoir envie de comprendre pourquoi ça ne marche pas.*

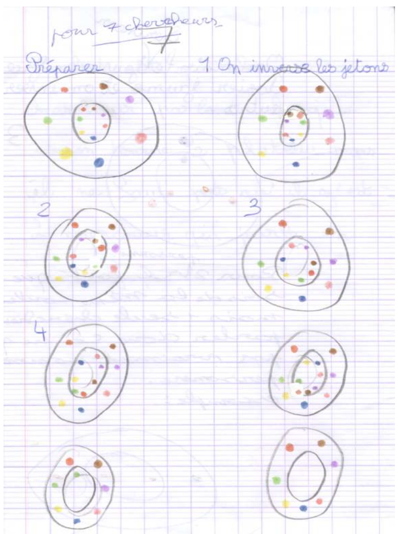
(...)
N: alors argent et doré;
Acc: qu'est-ce que vous faites là?
N: on essaye de trouver.
Acc: tu as vu que pour 4 vous aviez beaucoup de difficultés....
N: oui mais...
Acc: alors ça veut peut-être dire que ça ne marche pas.
N: oui mais peut être que ça marche.
Acc: t'es pas convaincu que ça ne marche pas. Si je te dis ça ne marche pas est-ce que tu me crois?
N: non.
Acc: et pourquoi, tu ne me crois pas?
N: parce qu'il y a sûrement une solution.
Acc: parce que tu crois qu'il y a toujours une solution?
N: ben ouais.
Acc: ça arrive qu'il y ait pas de solution.
N: oui, mais...il y a sûrement des solutions...

Ainsi, pour Nicolas, réussir signifie trouver une solution et comme pour la plupart des tâches mathématiques qu'il a déjà rencontrées, une solution, il y en a sûrement une.
A force d'essayer, il a tout de même fini par comprendre qu'il n'y en avait effectivement pas!:

N: ah j'ai compris...parce que si tu as deux comme ça, tout au début, ça peut pas marcher parce que par exemple, imaginons que le rouge on le mette là et que comme ça ça peut pas marcher parce que si on fait comme ça, il y aura toujours deux couleurs qui seront pareilles....
Acc: donc tu as compris pourquoi ça pouvait pas marcher quand on a 4 couleurs à l'intérieur?
N: oui.

et a accepté de chercher un autre cas.

3- Représentations, codages et modélisation! : nombres et décalages



extrait du cahier de recherche du groupe 6B

Comme pour l'autre classe de primaire, tous les élèves ont utilisé dans leurs cahiers de recherche, $\mathbf{R_{circ}}$, associé à $\boldsymbol{C_{\varnothing}}$ et quelque fois à $\boldsymbol{C_{ini}}$.

Par contre, au fur et à mesure des séances, un groupe a réussi, dans chaque classe, à compléter son modèle pseudo-concret et à se détacher du support. Il a fait «!tourner les roues!» sur le papier pour montrer que sa solution marchait, comme l'illustre, par exemple, une des pages du cahier de recherche du groupe 6B.

Les groupes 2B et 3B, enfin, sont allés plus loin dans le processus de modélisation et ont fini par introduire d'eux-mêmes les nombres lorsqu'ils décrivaient leur méthode dans leurs cahiers de recherche, en vue de la préparation du séminaire.

Avoir recours aux nombres semble pouvoir être mis en relation avec le fait d'avoir introduit les décalages. En effet, 2B l'a fait pour (5,5) suite à son étude avec des décalages à distance constante:

> *«!Méthode de décalage!: il faut mettre le dossier 1 en face du chercheur 1, le dossier 2 en face du chercheur 3, le dossier 3 en face du chercheur 5 etc... A chaque fois, il faut augmenter de un la différence entre le numéro du dossier et le numéro du chercheur!»*

3B, quant à lui, les a utilisés, après être parvenu à trouver une solution à (13,13) à l'aide de $\mathbf{M_{dec}}$:

> *«!le 0!ième est décalé de 0, le 1^{er} de 1, le $2^{ème}$ de 2, le $3^{ème}$ de 3, le $4^{ème}$ de 4 etc...jusqu'à 13!!!»*

Cette relation peut expliquer l'apparition surprenante du zéro dans l'énoncé de leur méthode. En effet, c'est le choix croissant et régulier des décalages qui a déterminé chez les élèves l'ordonnancement des chercheurs!: celui qui a été décalé de 1 a été étiqueté 1^{er}, celui qui a été décalé de 2, $2^{éme}$, dans la même logique, celui en face à face, donc décalé de zéro, s'est donc retrouvé $0^{ème}$.
Cette notation est donc similaire à celle que nous avons utilisée lors de la résolution du problème dans le chapitre 4. Cependant, nous verrons plus loin que les élèves l'ont modifiée pour éviter justement de commencer leur numérotation à zéro, ce qui ne faisait pas l'unamité car était jugé «!bizarre!» par certains membres du groupe, tout en conservant une mise en correspondance numéro du chercheur-décalage.

A travers les productions de ces deux classes, nous avons retrouvé les résultats et les difficultés que nous avions relevées lors de nos expérimentations précédentes, en particulier la troublante confrontation à l'impossibilté à travers l'étude de (4,4).

Le temps supplémentaire et la nécessité de présenter un séminaire ont contribué par contre à l'introduction des décalages suivie, d'une part de $\mathbf{M_{dec}}$ avec des décalages réguliers, d'autre part du recours aux nombres lors de la rédaction de cette méthode et donc du passage d'un modèle pseudo-concret à un premier modèle mathématique de la situation.

De plus, les résultats mis à jour dans le groupe de CE2 suggérent que cette situation puisse être proposée à ce niveau, l'avancée dans le problème sera alors relative au niveau de connaissance comme nous l'avons déjà précisé, mais impliquera quoi qu'il en soit la mise en oeuvre des différentes étapes de la démarche de recherche en mathématiques.

III- APPORT DES TACHES INDIVIDUELLES SUR LE SUPPORT PAPIER CRAYON

Les fiches individuelles ont été remplies par les élèves après six séances de recherche. Leur objectif, rappelons-le était, d'une part, d'amener chaque élève à une recherche sur le support papier-crayon, d'autre part de proposer un outil permettant d'évaluer l'avancée de chacun.

III-1 TACHE 1! : VALIDER

1- Un chercheur, et un seul, va t'il pouvoir parler à chaque tour de table?

Comme nous l'avions prévu, quelle que soit la classe, les réponses fournies pour cette tâche ont été correctes, hormis quelques cas isolés. Les justifications avancées reprennent le respect de la contrainte de l'unique face à face. Certains parlent de pions, d'autres se réfèrent à l'énoncé et parlent toujours de chercheurs et de dossiers.

Parmi ceux là, dans chaque classe, un élève a répondu non pour le cas (1,1) et correctement pour les deux autres. Au regard de l'ensemble de leurs réponses, nous pouvons affirmer que ces deux élèves sont restés très proches de la situation concrète et se sont appuyés sur le fait qu'ils trouvaient absurde de faire une réunion seul. Ils ont donc répondu!: *«Non, car il est tout seul donc il parle seul il n'y a personne pour prendre des notes ou écouter!»* (CM2) et *«!non, car le chercheur est tout seul donc s'il parle, personne ne l'écoutera.!»* (CM1).
A l'inverse, quatre élèves (deux dans chaque classe) ont répondu correctement car ils ont su trouver une interprétation réaliste du cas (1,1)!:

«!oui, car il s'entraîne à parler pour sa réunion en privé» (CM1)

«!oui, il s'entraine pour son exposé» (CM1)!

«oui, il est tout seul, il peut s'entraîner devant une glace»(CM2)!

«!oui, il pourra parler mais l'inconvénient c'est qu'il est tout seul»(CM2)

Au regard des réponses qu'ils ont avancées ensuite pour les cas (2,1) et (2,2), ces arguments semblent être le résultat de la mise en oeuvre du processus de modélisation que nous avons présenté au début de cette partie et donc de la donnée d''une réponse à la question de départ située dans un domaine extra mathématique, après avoir résolu le problème dans le champ mathématique.

Le vocabulaire employé et les arguments avancés pour le cas particulier (1,1) peuvent donc être un outil pour évaluer l'avancée des élèves dans la décontextualisation du problème, s'ils sont mis en parallèle avec les réponses apportées pour (2,1) et (2,2).

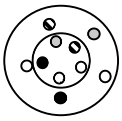
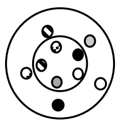
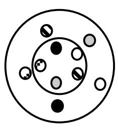
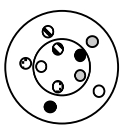
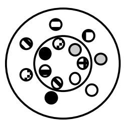
Dans le cas de (2,2), trois types d'arguments ont été avancés pour répondre non!: 24% des élèves n'ont pas fait tourner la table et ont répondu non car la disposition proposée comportait deux faces à faces, 14 % ont fait tourner la roue d'un cran et se sont appuyés sur le fait que, dans la position suivante, il n'y avait aucun face à face, 62%, enfin, ont parcouru un tour complet et répondu par la négative car *«!avec deux chercheurs et deux dossiers, soit il y en a deux qui parlent soit il y en a aucun donc ce n'est pas possible!»*. Cependant, nos données ne nous permettent pas de savoir si les élèves de cette troisième catégorie ont répondu cela après avoir fait tourner la table ou s'ils réaffirmaient ce qu'ils avaient déjà constaté lors de leurs recherches précédentes en groupes.

Nous pouvons affirmer que la contrainte de l'unique face à face a bien été comprise par les élèves, ainsi que le fait qu'elle doit être vérifiée dans toutes les positions et donc que la situation a bien été dévoluée à tous. Toutefois, il est remarquable que la majorité d'entre eux ait «!fait tourner!» la roue alors que la position initiale était invalide et que seulement 1/4 d'entre eux aient affirmé que (2,2) n'était pas possible sans avoir besoin de la faire tourner, alors que tous avaient l'air d'en être persuadés suite à l'étude de ce cas via le support.

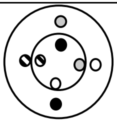
Nous retrouvons donc le statut particulier des couples (n,k) pour lesquels il n'y a pas de solution et les difficultés que cette impossibilté peut entraîner chez les élèves.

2- Les chercheurs peuvent-ils parler chacun leur tour!?

Voici, pour les deux classes, les résultats obtenus pour chacune des dispositions à étudier[45]:

	CE2/CM1			CM1/CM2	
	Réponses correctes	Réponses incorrectes		Réponses correctes	Réponses incorrectes
	17/23 74%	4/23 17%		20/22 91%	1/22 5%
	14/23 61%	7/23 30%		14/22 64%	7/22 32%
	18/23 78%	3/23 13%		19/22 86%	2/22 10%
	17/23 74%	4/23 17%		18/22 82%	3/22 15%
	9/23 39%	11/23 48%		18/22 82%	2/22 10%

45 *Les différences par rapport à 100 viennent du fait que certains élèves n'ont pas répondu*

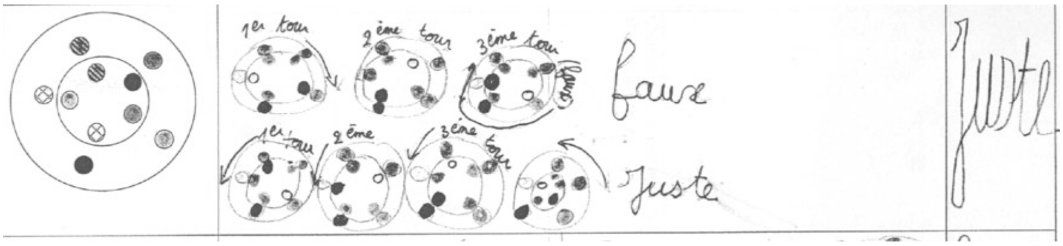
	18/23 78%	2/23 9%		20/22 91%	1/22 5%

Compte tenu de ces résultats, nous pouvons considérer que cette tâche a été majoritairement bien résolue pas les élèves. Cependant, comme nous allons le voir, les erreurs commises dépendent des caractéristiques de la disposition proposée (valide (D2 et D4) et invalide, nombre de crans à tourner avant la position qui «!coince!» en fonction du sens de rotation, nombre de pions), et des différentes méthodes de validation mises en oeuvre.

Rem$_{sens}$

Les réponses apportées par les élèves reprennent ce que nous avions relevé lors de nos précédentes observations. La majorité d'entre eux privilégie implicitement un sens et tourne la roue dans celui des aiguilles d'une montre, d'autres le font dans le sens direct. Certains ont vérifié la disposition donnée dans un sens puis dans l'autre.

Quentin, CM2, par exemple a considéré D_4 «!juste!» bien que dans sa recherche, il ait étudié les deux sens et soit parvenu, suite à une erreur, à une position invalide pour l'un d'eux.



Vérification dans les deux sens, Quentin, CM2

Quelques élèves, enfin, ont su choisir à chaque fois le sens de rotation qui était «!le moins coûteux!» en fonction du nombre de positions à considérer avant de rencontrer 0 ou 2 faces à faces et avaient donc remarqué **Rem$_{sens}$**.

Comment valider une disposition sur le papier?

Pour remplir cette tâche, trois méthodes ont été utilisées.

a) M1!: Faire tourner la roue «!dans sa tête!»!

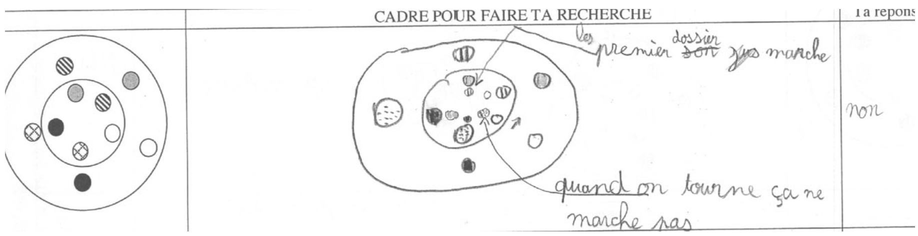
Très intuitive, cette méthode a été utilisée dans les deux classes par la moitié des élèves. Elle leur a permis d'invalider les dispositions D1, D3 et D7. Cependant, lorsque la contrainte de l'unique face à face n'était pas respectée, les élèves s'en apercevaient plus aisément une fois qu'ils étaient dans une position où il y en avait deux que lorsqu'il n'y en avait aucun, car cela était plus «!visible!».

Se passer d'une recherche par écrit a été plus difficile à utiliser et souvent source d'erreur pour les dispositions qui nécessitaient d'aller au délà d'un cran et en particulier pour celles qui sont valides, car alors cinq positions sont à considérer. Certains se sont alors tournés vers une recherche sur le papier, en utilisant le cadre prévu à cet effet ou en cherchant par ailleurs (sur la table, un brouillon...) même si cela n'était pas autorisé par la consigne.

b) M2!: Faire tourner la roue sur le papier

Trois types de représentation ont été utilisées pour cela.

• 1er choix de représentation!: représenter plusieurs pions juxtaposés sur la même roue!:



Alexis, CM1

Cette représentation est apparue chez quelques élèves. Là aussi elle a apporté des réponses correctes pour D1, D3 et D4 mais sa mise en oeuvre s'est avérée difficile pour les autres car elle devenait peu lisible, le cadre dans lequel la recherche devait être effectuée étant de largeur limitée.

• 2ème choix!: représenter plusieurs roues

Aurélie, CE2

Cette représentation, que nous avions également relevée en DEUG, est apparue chez plusieurs élèves répartis sur les deux classes. Généralement, ils ont choisi le sens des aiguilles d'une montre pour faire tourner la roue mais certains, comme

Quentin, ont vérifié dans les deux sens, d'autres dans celui qui nécessitait le moins de dessins.
Un élève a fait tourner la roue extérieure et s'est implicitement appuyé sur le théorème-en-acte!:

> ***Rem$_{int/ext}$! : Le problème reste le même si on inverse le rôle respectif des positions extérieure et intérieure, en considérant alors que l'on fait tourner le disque extérieur et que le plus petit reste fixe.***

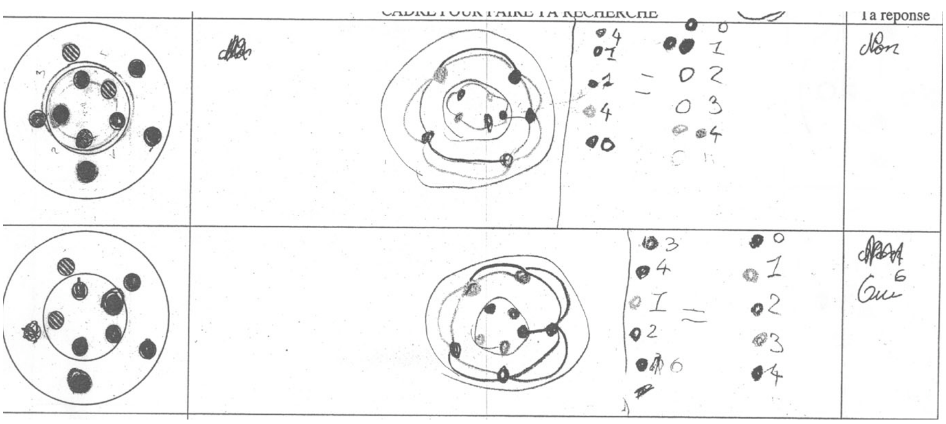
Ce type de représentation permet de résoudre le problème pour un nombre raisonnable de couleurs et d'apporter une réponse correcte pour toutes les dispositions, mises à part quelques exceptions pour D_2 et D_4, compte tenu, là encore, du nombre de positions à considérer.

• 3 ème choix!: étudier si chaque couleur a un décalage distinct :

Cette méthode de validation repose sur le théorème-en-acte:

> ***$P^{(n,n)}$! : les décalages entre la position sur le disque intérieur et celle sur le disque extérieur doivent être tous distincts et sont compris entre 0 et n-1.!***

Elle a été utilisée par trois élèves de CM2, de trois groupes différents. Ils ont «!calculé!» le décalage associé à chaque couleur et invalidé les dispositions pour lesquelles un même décalage apparaissait pour plusieurs couleurs!.



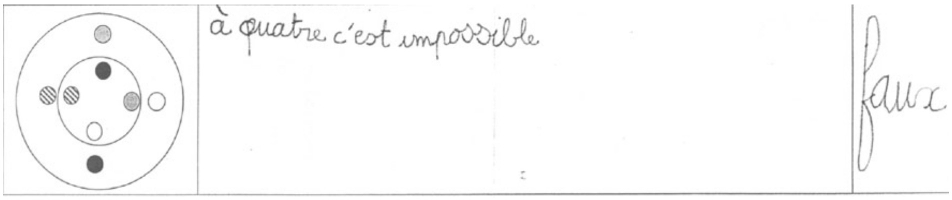
Marine, CM2

Nous pouvons aussi noter chez Marine, une de ces trois élèves, un début de représentation en colonne, comportant les couleurs et leur décalage respectif.

c) M3!: Reconnaître un résultat

Cette méthode est apparue chez quelques élèves, qui se sont appuyés, lors du remplissage de cette tâche, sur ce qu'ils avaient déjà vu au cours de leurs recherches en groupes.
Par exemple, un élève de CM1 a reconnu **S_{ordre}** dans D_2 ce qui l'a amené à affirmer que!*: «!ça marche parce que si on échange le sens des chercheurs avec celui des dossiers cela marche!»*

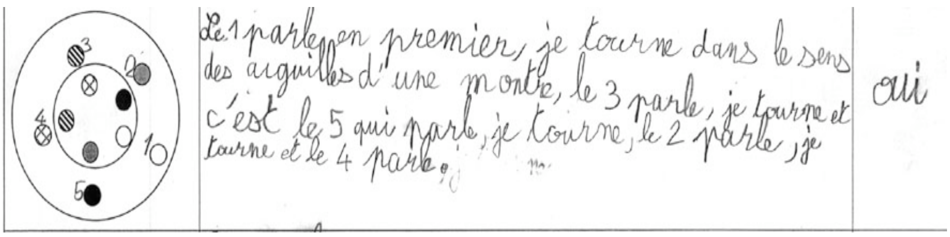
Une élève, par contre, a invalidé D_3 et D_5 car *«!il y a deux façons de placer les dossiers pour que ça marche et les dossiers ne sont pas placés d'une des deux manières!»* mais n'a pas reconnu $\mathbf{S}_{\mathbf{ordre}}$ dans D_2.
Enfin, seul un élève de CM2 du groupe 2B, un a rejeté D_6 car *«!là 4, c'est impossible!»* sans chercher à vérifier la disposition proposée. Tous les autres, y compris Nicolas, celui qui souhaitait tant qu'il y ait une solution et a fini par se convaincre qu'il n'y en avait pas, ont fait tourner la roue avant d'affirmer qu'elle était incorrecte et ne se sont pas prononcés sur le cas (4,4) de façon générale. Les réponses à ce cas montrent donc bien que, même si plusieurs élèves des deux classes ont supposé que le cas (4,4) n'admettait pas de solution, ils étaient loin d'en être persuadés, comme pour le cas (2,2), puisque là aussi, ils ont tous, sauf un, jugé nécessaire de vérifier la disposition qu'ils leur était proposée.



Quentin, CM2

Codage des couleurs

Dans la plupart des cas, les élèves ont repris les différents motifs des pions proposés. Certains ont choisi de se ramener au jeu matériel et de recolorier chaque pion d'une couleur uniforme car ils trouvaient ça plus pratique.
Parmi ceux qui faisaient «!tourner dans leur tête!», quelques-uns, enfin ont introduit des nombres afin que leur explication soit plus simple à rédiger.



Introduction d'un codage par des nombres, Romain, CM1

Cette seconde partie de la tâche 1 a donc amené les élèves à mettre en oeuvre des méthodes de validation sur le support papier-crayon et donc à aller plus en avant dans la représentation de la situation et la traduction de la rotation. Nous avons alors retrouvé chez quelques uns les nombres mais aussi des types de représentation que nous n'avions rencontrés jusqu'à présent qu'en DEUG.

Dans l'ensemble la tâche 1 apparait donc comme un outil supplémentaire pour amener les élèves à se détacher de la situation concrète. Même si certains ont trouvé que c'était difficile de chercher sans le jeu, la majorité est parvenue à identifier les dispositions valides et à fournir des réponses correctes.

III-2 TACHE 2! : PRODUIRE DES SOLUTIONS

La tâche 2 demandait aux élèves de colorier les dossiers pour que chacun des chercheurs puisse parler.

La recherche d'une solution pour le cas (3,3) ne leur a pas posé de difficultés, quel que soit leur niveau. Certains ont utilisé directement la méthode qu'ils avaient découverte, d'autres ont procédé comme sur le support matériel, par forçage. Les réponses incorrectes apportées par les élèves de la classe de CE2/CM1 sont dues, soit à un manque de temps (trois élèves n'ont pas pu terminer), soit suite à une mauvaise lecture ou une réinterprétation de la consigne (quatre élèves ont fourni une solution à (3,1)).

Par contre, les deux classes sont très différenciées par les taux de réussite aux cas (5,5) et (7,7).

	CE2/CM1	CM1/CM2
(3,3)	16/23 70%	21/22 95%
(5,5)	4/23 17%	15/22 68%
(7,7)	3/23 13%	13/22 59%

Taux de réussite par classe pour les cas (3,3), (5,5) et (7,7)

Comme nous l'avons déjà précisé, notre hypothèse est que, si l'on n'a pas de méthode, la tâche de construction de solution sans le support matériel change de niveau de complexité entre (3,3) et (5,5) et encore plus pour (7,7).

Cela semble confirmé par les réponses fournies par les élèves. Ainsi, afin de pouvoir tout de même proposer une solution, les quatre élèves de CE2/CM1 qui avaient étudié (3,1) au lieu de (3,3) et un autre élève de la même classe ont décidé à nouveau de modifier les données et ont considéré (5,1) et (7,1) au lieu de (5,5) et (7,7). Finalement, seuls les élèves qui avaient découvert des méthodes, autres que la méthode gloutonne, ont répondu correctement, comme nous l'avions prévu.

Parmi les méthodes utilisées, nous avons trouvé:

- la méthode $\mathbf{M}_{\mathbf{graphe!}}$: une élève de CM2 a positionné les couleurs centrales en considérant celles de l'extérieur de 2 en 2.
- la méthode $\mathbf{M}_{\mathbf{sym}}$ pour le cas (5,5) et pour quelques uns pour (7,7). Certaines réponses incorrectes sont dues à une erreur dans l'inversion des pions, au lieu

de les inverser par rapport à l'axe de symétrie les élèves intervertissaient deux pions consécutifs.

• la méthode **M$_{dec}$**!: **S$_{dec}$** est apparue chez plusieurs élèves. Certains ont proposé une solution en plaçant une couleur en face à face puis en décalant toutes les couleurs d'un cran sauf une, décalée de deux. Cette disposition fonctionne donc dans la position zéro, contient l'idée de décalage mais est invalide car elle comprend trois faces à faces au premier cran.

• Par contre, un élève de CE2, deux de CM1 et treize de CM2, qui avaient découvert **M$_{dec}$**, ont su la réinvestir et sont parvenus à une disposition correcte.

Cette tâche peut donc être un outil supplémentaire pour mettre en valeur auprès des élèves l'importance de généraliser ses observations, d'avoir des méthodes tout en les amenant à une recherche sur le support papier-crayon.

III-3 CONCLUSION! : RECHERCHE A L'ECRIT ET OUTIL D'EVALUATION INDIVIDUELLE

Nous pouvons donc considérer que les objectifs des tâches individuelles ont été atteints.

De façon générale, compte tenu du fait que les réponses sont différentes entre les membres d'un même groupe, elles peuvent être un outil indiquant l'avancée individuelle des élèves, sous réserve de leur laisser un temps suffisament long pour répondre. Les deux enseignantes les ont d'ailleurs utilisées comme outil d'évaluation[46] du travail de chaque élève, sans que nous ne leur ayons suggéré. Cependant, ce ne peut être qu'un élément permettant cette évaluation, car ces deux tâches sont destinées avant tout à susciter le recours à l'écrit et non à évaluer à elles seules l'avancée des élèves dans la recherche.

La première partie de la tâche 1 permet de se rendre compte de la compréhension de la consigne par chacun et peut être proposée seule, pour un premier bilan, dans un temps différent de la tâche de validation pour les cas (5,5), (7,7) et (4,4) ainsi que de la tâche 2. Elle permet aussi de juger de l'expression écrite et de la capacité à argumenter sur des cas simples, compétences à développer lors de la résolution de problème comme cela est précisé dans les programmes officiels.

La deuxième partie de la tâche 1 poursuit dans ce sens et amène les élèves à mettre en oeuvre des méthodes de validation. Comme nous l'avons présenté, elle les a incités à enrichir leurs modèles pseudo-concrets et à traduire la rotation sur le support papier-crayon et pour quelques-uns, à introduire un codage des couleurs par des nombres, étapes qui représentent toutes deux une avancée vers la mise à jour d'un modèle mathématique de la situation. D'autre part, elle a permis de juger du degré de

[46] *L'évaluation consistait à distinguer les élèves selon trois catégories!: acquis (AQ), en voie d'aquisition (VA) ou non acquis '(NA)*

confiance qu'avaient les élèves vis-à-vis de **Conj**$^{(n,n)}$ et ainsi d'expliciter collectivement le fait que, tant que rien n'a été démontré, le doute subsiste.

La recherche de solution dans la tâche 2, enfin, permet le réinvestissement des résultats précédemment découverts et montre l'importance d'avoir des méthodes, notamment lorsque le nombre de couleurs devient important, comme pour (7,7). De plus, elle peut aussi conduire à juger de l'efficacité de certaines méthodes par rapport à d'autres et par exemple à montrer en quoi la méthode gloutonne, bien qu'efficace avec le support, devient difficile à utiliser sans celui-ci et n'est donc pas la plus performante pour trouver des solutions sur le papier avec un nombre élevé de couleurs.

IV- LE SEMINAIRE

Cette ultime étape de la mise en place de cette situation recherche dans les deux classes a nécessité quatre séances de préparation. Elles ont été organisées, d'une part autour de la définition du contenu des transparents et de la répartition entre les groupes, à la charge des adultes accompagnateurs, d'autre part autour de la rédaction des transparents par les élèves, de la préparation de leurs commentaires et des répétitions...

IV-1 QUI FAIT QUOI! ?

Nous nous sommes servie des observations de l'accompagnateur, des cahiers de recherche et des feuilles individuelles pour déterminer l'avancée de chaque groupe et ensuite répartir au mieux les résultats à présenter entre, d'une part, les deux classes, puis, pour chacune d'entre elles, les différents groupes.
Le parrain scientifique s'est chargé de présenter aux élèves ce qui était apparu comme remarquable pour lui dans leurs productions, tant du point de vue des résultats mis à jour que des questions restées sans réponse. Suite à cette intervention, et avec son aide, l'accompagnateur principal et les enseignantes sont parvenus à l'organisation suivante!:

Groupes	CE2/CM1	CM1/CM2
1	T3!: présentation du cas (2,2)	T4'!: présentation des conjectures émises
2	T2!: présentation de (n,1)	T6'!: preuve de l'inexistence de solution pour (4,4)
3	T6!: les questions que nous nous posons encore	T2'!: méthode $M_{dec}^{(n,n)}$
4	T5!: (5,5) avec la méthode $M_{gloutonne}^{(n,n)}$	T3'!: méthode $M_{graph}^{(n,n)}$ de 2 en 2
5	T4!: (3,3) vec M_{sym}	T4'!: tests des méthodes découvertes pour les impairs sur les nombres pairs.
6	T1!: Présentation du problème	T 1'!: méthode $M_{sym}^{(n,n)}$

Les transparents ont été rédigés par les élèves, les enseignantes et l'accompagnateur les aidaient pour la syntaxe et la rigueur des explications. La clarté des propos, quant à elle, a été validée lors des répétitions par les élèves eux-mêmes!: les groupes s'écoutaient deux par deux puis se critiquaient afin d'améliorer leur discours.

IV-2 LES TRANSPARENTS

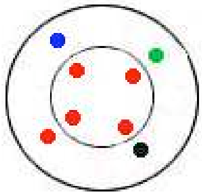
Nous allons maintenant présenter, dans l'ordre dans lequel ils se sont enchaînés durant les 20 minutes qu'a duré le séminaire, les différents transparents ainsi que les commentaires qui les accompagnaient, hormis pour le premier. En effet, il ne contenait que l'énoncé du problème que nous avons déjà donné et un exemple introductif à (5,5) constitué de deux disques concentriques transparents dont le plus petit pouvait tourner, pour illustrer les contraintes. Cet exemple présentait une solution trouvée par tâtonnement. Les élèves ont aussi jugé bon de préciser que «!*cela marchait dans les deux sens.*!»
Dans la plupart des cas, les propos des élèves reprennaient le texte écrit sur le transparent, aussi nous nous contenterons de les reproduire, sauf lorsque des remarques complémentaires sont apparues.
Pour des raisons techniques, nous avons choisi de ne scanner que les transparents les plus difficiles à retranscrire sous support électronique. Les autres ont été reproduits.

1- Classe de CE2/CM1!

<u>*Présentation de (n,1)*</u>

Ce transparent présentait la résolution générale du cas (n,1), à partir d'un exemple à (4,4), ce cas étant celui qui a incité les élèves à se tourner vers (n,1) afin de pouvoir tout de même fournir une disposition valide pour quatre chercheurs.

4 chercheurs et 4 dossiers de la même couleur
exemple!:

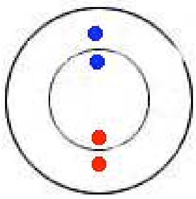


Il y a quatre possibiltés!: soit mettre des dossiers tous rouges ou tous bleus ou tous verts ou tous noirs.
On peut mettre autant de chercheurs qu'on veut (des milliers!!) du moment qu'il y a toujours un chercheur de la même couleur que tous les dossiers qui sont au milieu.

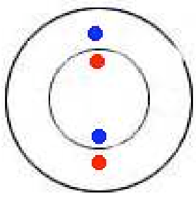
<u>Le cas (2,2)</u>

Ce transparent avait pour but de présenter le cas (2,2) et de prouver qu'il ne comportait pas de solution, par exhaustivité des cas.

2 chercheurs et 2 dossiers de couleurs différentes



Premier cas!: puisqu'ils ont tous les deux leur dossier devant eux, ils parlent en même temps



Deuxième cas!: puisqu'il n'y a aucun chercheur qui a son dossier en face de lui, personne ne parle.
Conclusion!: ça ne marche pas et ça ne marchera jamais!!!

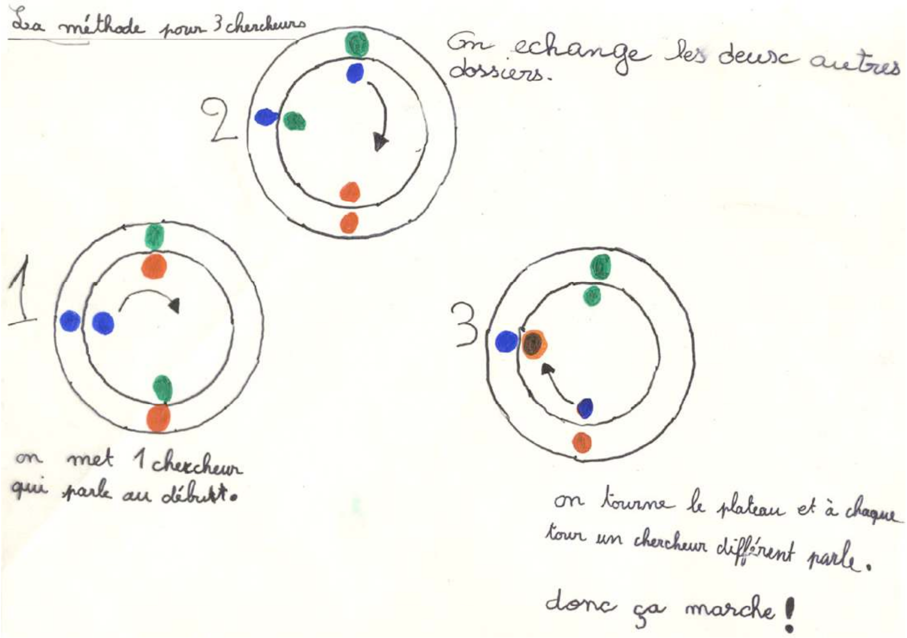
Les élèves ont repris les textes figurant sur le transparent, tout en montrant à l'aide d'une baguette les schémas correspondants. Ils ont terminé la présentation de ce cas par:

El1!: «!ça ne marche pas et ça ne marchera jamais!!!
El2!: puisqu'on vous a montré les deux cas possibles et qu'il n'y en a aucun des deux qui marche.!»

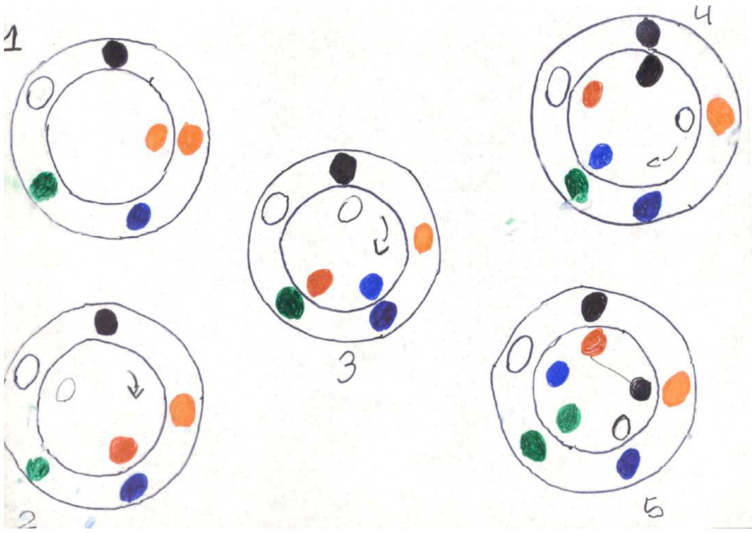
ce dont nous pouvons déduire qu'ils étaient convaincus de l'inexistence de solution et étaient capables de la prouver.

Le cas (3,3)

Ce transparent présentait la méthode de construction locale qui avait été établie dans la classe pour (3,3).



Même si les élèves ont eu recours aux couleurs dans leurs schémas afin d'illustrer leur propos, nous pouvons remarquer que le texte n'y fait pas référence, il s'agit donc bien d'une méthode de construction générale.



$M_{gloutonne}^{(5,5)}$

Les commentaires décrivaient la méthode!:

> *El3!: nous mettons le dossier rouge en face de son chercheur*
>
> *El 4!: nous tournons la plaque et nous mettons le chercheur blanc en face de son dossier*
>
> *El5!: nous tournons la plaque et nous mettons le chercheur bleu en face de son dossier*
>
> *El6!: nous tournons encore une fois la plaque, nous mettons le dossier noir avec son chercheur noir.*
>
> *El 4!: nous tournons une dernière fois la plaque et nous mettons le dossier vert avec son chercheur vert. Nous allons vous montrer la preuve... que ça marche!»*

Deux disques transparents concentriques reprenant la disposition obtenue étaient ensuite présentés. Les élèves faisaient tourner le plus petit de cran en cran en faisant le lien avec les commentaires précédents pour chaque position!:*«!nous avons le dossier rouge en face de son chercheur, nous tournons la plaque et nous avons le dossier blanc en face du chercheur blanc!»*, etc..

Les questions que nous nous posons encore.

L'identification des questions restées en suspens fait partie intégrante de l'activité de recherche en mathématiques telles que nous l'avons définie au début de notre thèse. Ce transparent a été préparé par les CE2 à l'aide de l'accompagnateur. Ils ont listé les questions qu'ils se posaient puis cela a été validé par la classe. On y retrouve l'idée de généralisation, l'impossibilité, l'ouverture éventuelle sur d'autres questions! et l'envie de savoir à quoi tout cela peut-il bien servir.

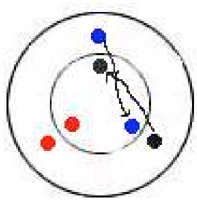
Les questions que nous nous posons encore!:
1) est-ce que vous avez essayé à 10 chercheurs ou plus!?
2) est-ce qu'il y a des méthodes et est ce qu'elles marchent pour tous les nombres!?
3) est-ce qu'il y a des cas où l'on ne peut pas trouver des réponses!?
4) est-ce qu'il y a beaucoup de questions que l'on peut se poser sur le problème!?
5) est-ce que vous savez déjà à quoi vont servir nos recherches!?

Dans la deuxième partie préparée par la classe de CM1/CM2, les élèves ont apporté des réponses aux trois premières questions. Deux chercheurs de notre équipe ont répondu en partie aux deux dernières à la fin de la présentation, notamment en rappelant le fait que l'énoncé proposé était très ouvert.

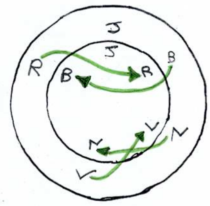
2- Classe de CM1/CM2!

M_{sym}

Méthode «!symétrie!»
Pour trois chercheurs!:
on met un dossier en face de son chercheur puis on inverse les deux autres.
Dessin



Pour 5 chercheurs!:
on met un dossier en face du chercheur correspondant et on inverse les 4 autres!:



Conjecture!: cela marche pour tous les nombres impairs!: 11, 13, 15, 17, 21, 23, 25, 27…

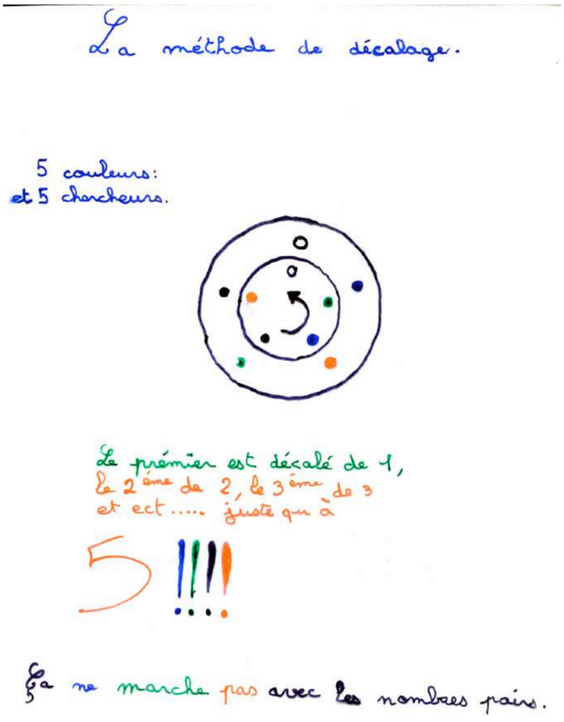
Il est remarquable que les élèves aient été prudents dans leurs propos et n'aient pas fait de généralisation abusive. Ils ont attribué le statut de conjecture au fait que la méthode $\mathbf{M_{sym}}$ soit applicable quel que soit n impair. Peut être cela est-il dû au fait que le séminaire se tienne dans le laboratoire Leibniz en présence de chercheurs, et à une anticipation chez les élèves de leurs critiques éventuelles.

$M_{décalage}$

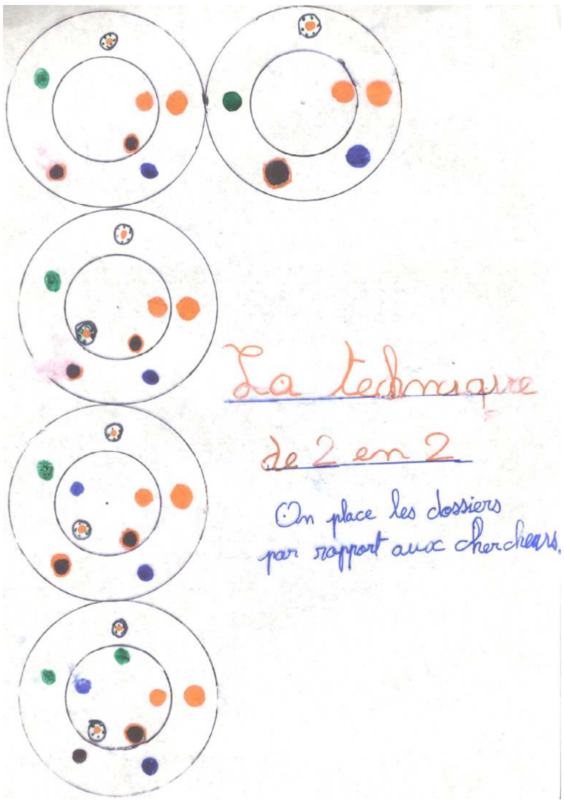
Lors de l'élaboration de ce transparent, la question du point de départ de la numérotation des couleurs s'est posée. Ils ont choisi de les numéroter de 1 à 5 et non de 0 à 4 comme ils l'avaient fait dans leur cahier de recherche, car ils trouvaient bizarre de dire *«!la $0^{ème}$ couleur est décalée de 0!»*. D'un autre côté, ils ne voulaient pas non plus dire *«!la couleur 1 est décalée de 0!»* car ils voulaient que chaque décalage soit égal au numéro de la couleur correspondant. Finalement, ils ont choisi de commencer par «!*la couleur 1 est décalée de 1!*» et de finir par *«!la couleur 5 est décalée de 5 ou de 0.»*

Lors de la présentation, ils ont montré sur leur schéma ce qu'ils entendaient par décalage et ont terminé par!:

«!on peut tourner dans les deux sens, comme le noir c'est le premier, le vert c'est le deuxième et ainsi de suite et si on dit le cinquième de 0 ou le cinquième de 5, c'est la même chose parce que si on décale de 5, ça revient au point de départ.!»
Nous pouvons donc noter la prise en compte de la rotation et la mise en valeur d'une propriété-en-acte liée au modulo!: 0 et 5 appartiennent à la même classe modulo 5.



<u>*La méthode de 2 en 2*</u>



Au travers de leurs commentaires, les élèves expliquaient les «!sauts de 2 en 2!».
«je choisis de mettre le rouge en face du rouge puis j'avance de deux et je place le pion rouge et noir en face du bleu, comme ça il parlera au prochain tour, puis je saute encore de deux et je place le dossier blanc et noir en face du noir et rouge!» etc...
Il s'agit donc implicitement de la méthode $\mathbf{M}_{graphe}^{(5,5)}$ avec la recherche d'un polygone régulier, le pentagone croisé, obtenu en parcourant les chercheurs de 2 en 2.

Les conjectures

Les élèves ont commencé par définir ce qu'était une conjecture, terme qu'ils n'avaient pas rencontré auparavant dans leurs cours de mathématiques. À l'aide de l'accompagnateur, ils ont consulté le dictionnaire de la classe où cela est défini comme «!une supposition, une thèse!» puis ont établi la définition suivante!:

conjecture: quand on
est sûr sûr sûr, mais
qu'on a un petit
doute.

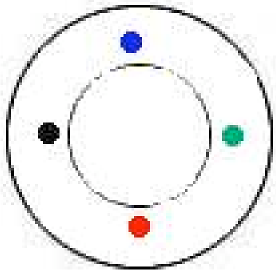
Ils ont ensuite listé les conjectures qui avaient été émises par les deux classes.

Nous avons fait des conjectures car nous n'avons pas pu essayer avec des grands nombres de chercheurs et que nous ne savons pas le démontrer.
<u>Conjectures dans le cas où!</u>: les chercheurs sont tous de couleurs différentes ainsi que les dossiers.
1ère conjecture!:
Nous supposons que ça marche lorsqu'il y a un nombre impair de chercheurs.
exemple!: avec 3 chercheurs et 3 dossiers.
2ème conjecture!:
Nous supposons que ça ne marche pas avec les nombres pairs.
exemple!: avec 4 chercheurs et 4 dossiers.

Pour les deux exemples, ils avaient préparé un transparent sur lequel figuraient une table à 3 chercheurs et une à 4 et ils ont montré pour la première que ça marchait tandis que pour la deuxième, non, tout du moins pour la disposition qu'ils proposaient. Du fait de ces différences, nous retrouvons dans les deux conjectures énoncées, les deux statuts des résultats liés aux choix des valeurs de la variable de recherche. La validité de la première peut être établie par l'étude de couples (2p+1,2p+1) et la donnée d'une solution particulière, comme les élèves l'ont fait pour (3,3) dans ce transparent et pour plusieurs autres couples dans leurs recherches, solution rapidement accessible du fait des méthodes mises à jour dans la classe, qui sont effectivement généralisables. Celle de la deuxième est plus difficile. Si l'on ne dispose pas d'arguments généraux, il faudra prouver pour chaque couple (2p,2p) qu'il n'admet pas de solution par exhaustivité, ce qui devient très vite laborieux. Cependant, le fait d'avoir introduit les décalages peut simplifier cette étude, en fournissant un moyen d'organiser les essais.

<u>*Test des méthodes établies pour les cas «!impairs!» sur les cas pairs*</u>

Le groupe 5B a repris les différentes méthodes découvertes pour les impairs et a montré qu'elles ne fonctionnaient pas pour les pairs, en se servant toujours du même exemple à (4,4) pour illustrer leurs propos.

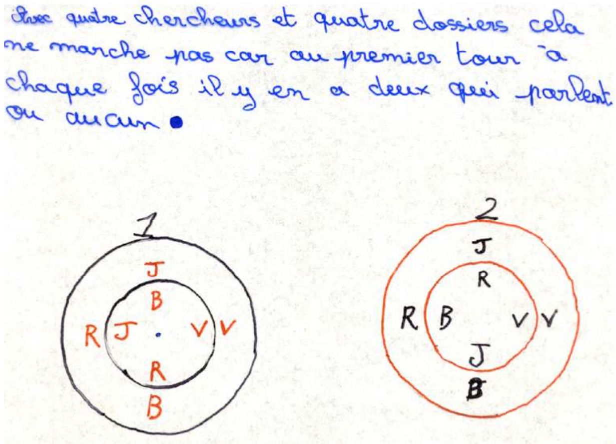


Dans chaque cas, ils complétaient leurs schémas, au fur et à mesure de leurs commentaires.

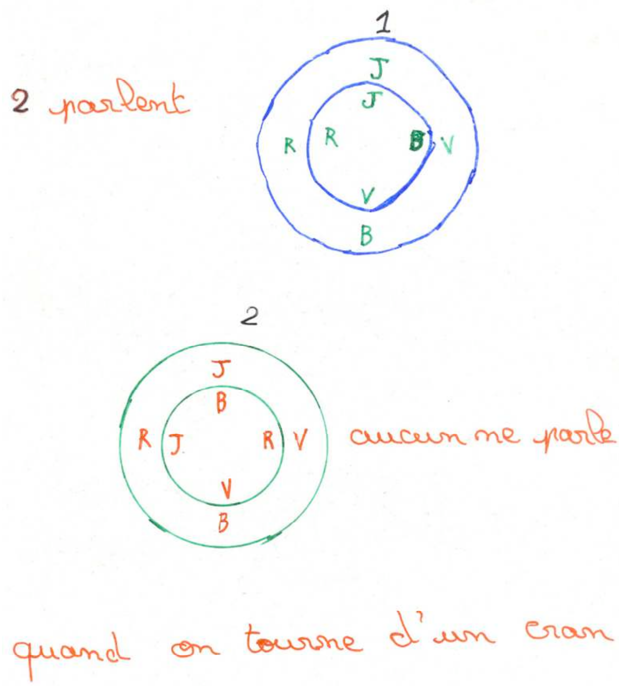
El 4!: «!La méthode par symétrie.
Ça ne marche pas car si on échange le vert et le noir par exemple, ben pour les deux autres, ça ne va pas car soit il y en a deux qui parlent, soit zéro, donc c'est pas possible!»
El 5!: «!la méthode de 2 en 2.
On va dire que c'est le rouge qui parle donc on va décaler de 2 et on met le bleu en face du noir puis encore de deux mais ça ne va pas car on retombe sur le rouge et il parle déjà.!»
El 6!: «!la méthode par «!décalage!».
On décale le bleu de zéro, (ils le mettent en face à face), le vert de un, le rouge de deux mais il y a déjà le dossier bleu on ne peut pas le poser, donc c'est pas possible pour les cas pairs.!»

<u>*Etude de (4,4)*</u>

Dans ce transparent, afin de lever les doutes subsistant dans les deux classes au sujet du cas (4,4), les élèves ont montré par exhaustivité qu'il n'avait pas de solution.
«!Nous allons vous prouver que cela ne marche pas avec 4 chercheurs et 4 dossiers.!»



«!On place le vert en face du vert, le rouge, on peut soit le mettre en face du bleu soit en face du jaune.
Dans le 1, le jaune, on peut soit le mettre en face du jaune mais on peut pas sinon après il y en a deux qui parleraient donc il reste en face du rouge et le bleu en face du jaune.
Dans le 2, on a choisi de mettre le rouge en face du jaune, on peut mettre le jaune soit en face du rouge soit en face du bleu, on choisit de le mettre en face du bleu car sinon après il y aura deux bleus et on met le bleu en face du rouge.!»



«!Quand on tourne d'un cran.
À la première méthode, il y en a deux qui parlent.
À la deuxième méthode, il n'y en a aucun.!»

IV-3 QUELS APPORTS?

Les apports du séminaire sont indéniables. Ce temps fort a permis la mise en commun des résultats, a incité les élèves à les exposer intelligiblement, à les compléter... Les retours que nous avons eus ne sont que positifs, même si certains élèves ont avoué que parler dans cette grande salle inconnue les a beaucoup impressionnés. Les élèves ont également apprécié d'écouter l'exposé de ceux de 6ème venus leur parler des polyminos puis d'échanger avec eux.
À titre d'exemple, vous trouverez en annexe 4 un exemplaire du journal de l'école au sein duquel les élèves font part de leurs témoignages, dont en voici deux extraits!:

> Bilan des jeux de maths
>
> Nous avons présenté un cas avec deux chercheurs et deux dossiers de couleurs différentes. Nous avons aimé le séminaire car on expliquait nos méthodes aux autres. Les jeux de math nous on apporté beaucoup de plaisir en apprenant autrement. Les jeux de la table tournante étaient « super » !!!
>
> Marine M, Elodie, Manon D et Ugo

> **Bilan des jeux de maths.**
>
> Cela nous a changé des maths actuelles car, d'habitude, nous posons des opérations.
>
> Quand c'était notre tour, nous avons eu un peu peur parce que c'était la première fois que nous présentions un problème devant plein de personnes.
>
> J'ai bien aimé le problème des 6ème car il parlé des dominos : c'était différent de la table ronde avec ses chercheurs et ses dossiers. KEVIN LAURA MORGANE

Les chercheurs invités à la présentation, quant à eux, ont été particulièrement sensibles à l'avancée des élèves sur le problème (n,n) ainsi qu'à la rigueur des propos!: rien n'était affirmé sans être argumenté sinon prouvé. L'un d'entre eux a tout de même posé une quetion à la fin de la présentation, afin de savoir comment ils étaient parvenus à $\mathbf{Conj}^{(n,n)}$**!** :

Chercheur!: tout à l'heure vous avez montré plein de méthodes pour les cas impairs, vous les avez montrées sur 5 et je voulais savoir si vous les aviez essayées sur d'autres cas que 3 et 5!? si elles avaient l'air de bien marché...
El!1: on a essayé sur 7 aussi et 9, 11 et 13 ..
Chercheur!: et a priori vous aviez l'impression que ça pouvait marcher tout le temps ces méthodes!?
El2!: c'est une conjecture!!
Chercheur: mais la conjecture elle s'appuie sur la méthode!? Est-ce que les 3 méthodes elles marchent dans tous les cas!?
Elèves!: oui.
Chercheur: d'accord.

Dans ces réponses encore, de la rigueur et pas de généralisation abusive!: la généralisation de leurs méthodes à tout n impair conserve le statut de conjecture.

V- CONCLUSION

À la fois proches et plus complètes, car menées sur un temps plus long, que celles des autres groupes que nous avons étudiés, les productions de ces deux classes confirment nos choix quant à l'organisation didactique, sociale et matérielle de la gestion d'une situation recherche en cycle 3. Le support matériel a permis la dévolution du problème et sa recherche dès le CE2. Les enseignantes ont vu dans cette situation recherche présentée à l'aide d'un jeu matériel une approche complémentaire aux situations proposées dans les manuels, comme le souligne l'une d'entre elles!: *«!cela est beaucoup plus concret pour les élèves. Cela les stimule et les aide à cheminer vers l'abstraction.!»*

Comme nous le supposions, le séminaire s'est avéré un apport important car sa préparation a amené les élèves à revenir sur leurs résultats, à les expliquer aux autres élèves de la classe, les rédiger par écrit, tout en essayant d'être le plus compréhensible possible.
Il a également donné lieu à la preuve d'inexistence de solution pour (4,4), en garantissant l'exhaustivité afin d'être sûr de ce que l'on affirme, ainsi qu'à l'introduction et l'utilisation de la notion de conjecture.

Les tâches individuelles ont permis d'orienter les élèves vers le support papier-crayon, de mettre en valeur les méthodes, la généralisation, d'induire des représentations de la rotation et l'utilisation des décalages. Elles ont permis également d'avoir des éléments relatifs à l'avancée de chacun. De ce fait, elles se sont avérées également utiles pour les enseignantes qui se sentaient démunies devant une telle situation pour évaluer les élèves. Il est à noter que nous n'avions pas prévu la composante 'évaluation' dans notre organisation didactique, elle s'est imposée suite à la demande des enseignantes mais surtout des élèves!!

Nous avons donc établi des outils de gestion que nous jugeons adaptés à la mise en oeuvre d'une situation recherche à l'école primaire et aux apprentissages inhérents.

Toutefois, au cours des discussions avec les enseignantes est revenue la nécessité pour elles de suivre une formation préalable car il est difficile pour un enseignant de se lancer seul dans la gestion d'une telle situation, elles pensent en particulier que s'il cherche seul, l'enseignant peut *«!ne pas avoir songé à toutes les solutions possibles, que sa "preuve" ne soit pas "la preuve «!irréfutable»!" (l'unique solution au problème soulevé).!»* (on peut noter à ce propos que même cette enseignante semble penser qu'il y ait unicité dans la preuve et la solution...)
Cependant, elles estiment que, suite à ce trimestre de recherche et donc à la formation intrinsèque qu'il a induite, elles sont prêtes à gérer, avec l'aide d'un parrain voire seules, la situation *La roue aux couleurs* dans les années futures. En attendant, elles nous attendent à la rentrée prochaine pour se lancer, avec notre aide, dans la découverte d'une nouvelle situation recherche.

Chapitre I. 5

RETOUR SUR NOS QUESTIONS DE RECHERCHE

Nous avons montré tout d'abord que la situation recherche ***La roue aux couleurs*** **était dévoluable dès le cycle 3** de l'école primaire. Son contrat didactique inhabituel n'a pas perturbé les élèves, ils se sont tous approprié le problème, même ceux qui avaient le plus de difficultés en mathématiques. Les deux tiers des élèves de primaire et $6^{ème}$ estiment avoir *«!aimer chercher!»*, n'être pas d'accord pour dire que *«!ce n'est pas assez guidé, on est trop libre!»* et plus de la moitié «!*aimerait recommencer ce genre d'activités!*».

Le support matériel s'est avéré **une aide à la recherche** et a permis à chacun, quel que soit son niveau de connaissance en mathématiques, d'avancer dans la résolution du problème, en mettant en oeuvre les différentes composantes de la recherche en mathématiques.

Cependant, sa mise à disposition doit être relative au niveau des élèves. Alors qu'il nous semble nécessaire en primaire et $6^{ème}$, pour des lycéens ou des étudiants, nous faisons l'hypothèse qu'il ne doit être fourni qu'au début de la recherche puis sur demande et pour finir plus du tout, afin de les inciter à s'en détacher et à passer d'un modèle pseudo-concret à un modéle mathématique du problème, via l'introduction des nombres, des décalages accompagné d'une formulation formelle de leurs résultats.

Nous faisons l'hypothèse, par ailleurs, que ***La roue aux couleurs*** **peut être source d'apprentissages tranversaux aux mathématiques, relatifs à la démarche de recherche**, en la donnant à vivre aux élèves, en leur offrant l'occasion de mettre en oeuvre ses différents aspects!: essais, erreurs, observations, généralisation, conjecture, preuve, formulation de nouvelles questions, recours à l'intuition, l'imagination... Elle les conduit en particulier à se confronter à l'impossibilité, à vouloir «!réduire le doute!», objectif qui de tout temps a contribué au développement des mathématiques et est pourtant très peu présent dans les manuels scolaires, comme nous l'avons souligné. De plus, elle tranche avec les problèmes (ou supposés comme tels) proposés dans les manuels que nous avons étudiés, qui peuvent induire selon nous une conception erronée de ce qu'est un problème et présentent l'activité de recherche en la réduisant à une application d'algorithmes et en suggérant une bijectivité entre problème et solution.

La mise en parallèle des résultats de nos expérimentations et de notre étude de la place de l'heuristique dans l'institution scolaire, nous conduit à penser que **les situations recherche peuvent être des outils amenant à développer les compétences mises en avant dans les directives officielles**, du fait qu'elles sont *«!de véritables problèmes de recherche.!»* Il est remarquable d'ailleurs que l'activité de recherche en mathématiques soit mentionnée tout au long du cursus, quasiment sous les mêmes termes, comme élément majeur de l'enseignement de cette discipline. Cela nous amène à considérer que l'institution scolaire souhaite lui offrir *un habitat* récurrent et lui accorde *une niche* primordiale, au sens de la *théorie anthropologique* de Y. Chevallard [Chevallard 1992 et 1994]. Habitat et niche dans lesquels s'insèrent les situations recherche, cela d'autant plus que l'étude des manuels que nous avons faite, nous a révélé un découpage de l'activité de résolution de problèmes en micro-compétences qui ne permet pas selon nous l'apprentissage de l'heuristique mathématique.

Cependant, comme G. Glaeser, nous supposons que **l'ensemble de ces apprentissages ne peut se faire que sous condition d'une pratique régulière**.

> *«!L'heuristique ne peut s'enseigner puisque sa matière est la part imprévisible et créative de toute recherche de problème. On ne peut que donner un entraînement à l'heuristique en habituant l'étudiant aux situations de recherche!»*[Glaeser, 1999, !p 112]

L'étude des différentes productions nous a permis, de plus, d'identifier une variable inhérente aux situations recherche, que nous avons appelée **variable de recherche**. Cette variable définit différents sous-problèmes qui peuvent conduire à des phases de formulation et de validation différentes. Dans la gestion que nous avons mise en oeuvre, elle n'est pas une variable didactique, les choix de ses valeurs étant laissés à la charge des élèves. Cependant, selon le temps disponible pour la recherche, l'enseignant peut réduire le nombre de ces valeurs, par exemple en orientant ses élèves vers (n,n) ou (n,2) dans le cas de *La roue aux couleurs*.

Nos différentes expérimentations nous ont permis d'établir **des outils de gestion adaptés dès l'école primaire**, que nous supposons applicables aux autres situations recherche.

La recherche en groupes permet les échanges, stimulent les élèves.

Les feuilles de recherche conduisent à garder des traces, à formuler, à mettre en oeuvre des modèles pseudo-concrets du problème, même si les difficultés liées à l'écrit peuvent être un frein à la rédaction de certains résultats. Elles peuvent être complétées par des exposés oraux, notamment lors **des séances de mise en commun**.

Ces dernières amènent à mettre en débat les découvertes des différents groupes, à les institutionnaliser et contribuent à créer une unité dans la classe, unité nécessaire à la poursuite des recherches.
Le séminaire, «!la cerise sur le gâteau!», finalise la recherche, la valorise, stimule la formulation des résultats, encourage.
Il est également possible de proposer **des tâches individuelles** afin d'inciter les plus jeunes élèves à utiliser le support papier-crayon, d'avoir un aperçu de l'avancée de chacun et de mettre en valeur le fait d'avoir découvert des méthodes.
Du fait de ses interventions, **l'accompagnateur** s'est avéré indispensable. Ses interventions ont aidé à rendre les recherches fécondes, éviter les dispersions, relancer les recherches, il est là pour inciter les élèves à généraliser, à étudier d'autres cas, à argumenter leurs propos...
Ce n'est pas tant le fait qu'il soit extérieur à la classe qui importe mais le fait qu'il soit dans «!l'esprit de la recherche!» qu'il accepte de ne pas forcément tout savoir sur le problème, qu'il soit capable de remettre en cause les propos des élèves mais sans leur fournir de réponses.

Pour que l'enseignant tienne ce rôle, nous faisons l'hypothèse qu'il doit pouvoir suivre une formation préalablement, en formation professionnelle dans le cadre de l'IUFM ou en formation continue. Cette «!**formation à la recherche!**» a par ailleurs été jugée primordiale dans plusieurs des rapports que nous avons cités pour introduire nos travaux, notamment dans le rapport établi par la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques!:

> *«Plus généralement, on engage les enseignants à proposer aux élèves des problèmes «!riches!», permettant des réinvestissements transversaux. (...) Un objectif [de la formation] serait d'apprendre aux futurs enseignants à ne pas trop réduire, pendant la phase de recherche, les tâche proposées initialement, sous la pression des élèves et sous la pression du temps. Leur apprendre à laisser les élèves chercher seuls un maximum de temps, à résister aux demandes de réponse en développant des relances appropriées, tout en suivant leurs cheminements (pour la synthèse). Leur apprendre à calibrer selon les classes les indications qu'ils donnent lorsqu'ils ne peuvent plus simplement relancer les élèves... Apprendre à jouer sur le couple activités/temps est une compétence à acquérir, qui doit être travaillée en formation, notamment parce que la gestion de situations ouvertes est difficile.!»* [Kahane, 2002, rapport sur la formation des maîtres en mathématiques, p62]

Nous estimons donc que les situations recherche présentées sous forme de jeu matériel peuvent contribuer à développer les compétences relatives à l'heuristique mathématique dès l'école primaire. Cependant, en plus de ces apprentissages transversaux, nous faisons l'hypothèse que du fait de leurs caractéristiques et de leurs différences avec les pratiques habituelles, elles peuvent participer à développer le goût des mathématiques chez les élèves, en leur montrant l'aspect expérimental de cette discipline et en enrichissant l'image qu'ils en ont. Dans la deuxième partie de notre thèse, nous allons nous attacher à identifier quels peuvent être leurs apports dans ce domaine.

PARTIE II! :

SITUATIONS RECHERCHE

ET

DIFFUSION DE LA CULTURE MATHEMATIQUE

Nous avons analysé dans la première partie de notre thèse quels peuvent être les apprentissages relatifs aux mathématiques, notionnels et transversaux susceptibles d'être développés par la pratique régulière de situations recherche ludiques en primaire, début de collège et première année d'université.
Cependant, nous estimons qu'en plus de ces apprentissages, les situations recherche, du fait de leurs caractéristiques et des composantes de l'activité de recherche qu'elles induisent, inhabituelles dans l'enseignement, peuvent influencer l'image des mathématiques du joueur, et cela dans les cadres scolaire et extrascolaire.

Dans cette deuxième partie, nous allons chercher, à travers diverses études, à identifier quels peuvent être leurs apports dans ce sens.
Tout d'abord, nous regarderons quelles peuvent être les conceptions vis-à-vis des mathématiques susceptibles d'être induites par l'institution de loisir scientifique, en étudiant les différentes actions qui y sont menées pour la diffusion de la culture mathématique.
Nous nous placerons ensuite dans l'institution scolaire et étudierons, via un questionnaire, quel peut être le rapport personnel d'un élève aux mathématiques à différents niveaux scolaires.
Enfin, nous analyserons une expérimentation de la situation recherche ludique, *La roue aux couleurs*, dans un cadre de vulgarisation afin de vérifier son accessibilité, accessibilité supposée compte tenu des résultats de nos expérimentations en cycle 3 et en 6ème présentés précédemment.

Chapitre II.1

QUELLE IMAGE DES MATHEMATIQUES DANS L'INSTITUTION « LOISIR SCIENTIFIQUE »?

«!Plusieurs millions de personnes en France sont adeptes de jeux et de culture mathématiques.
Les très nombreuses rencontres et compétitions entre jeunes et moins jeunes, l'importante littérature sur la culture mathématique ou les diverses rubriques de jeux proposées par les différents média, sont bien le signe que les mathématiques peuvent être une source inépuisable de plaisirs.!»[47]

Notre objectif est d'évaluer quels peuvent être les apports des situations recherche ludiques dans la diffusion de **la culture mathématique**. Par culture mathématique, nous entendons, comme les experts de l'OCDE[48] dans le cadre du rapport PISA 2000:

> *«l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre les divers rôles joués par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie présente et future en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi »*[49]

Ainsi, développer **la culture mathématique** amène à donner des clefs pour **identifier où sont les mathématiques**, pouvoir juger de leur rôle dans le monde, **savoir les**

---

[47] *extrait de la présentation du salon des jeux mathématiques disponible sur le site internet associé*
[48] *Organisation de Coopération et Développement Economique*
[49] *«!Connaissances et compétences!: des atouts pour la vie!: premiers résultats du programme international de l'OCDE pour le suivi des acquis des élèves – PISA – visant à évaluer régulièrement les savoirs etcompétences acquis par les jeunes de quinze ans d'une trentaine de pays.2000*

utiliser dans la vie quotidienne. Nous pensons que cela nécessite aussi de **comprendre ce qu'elles sont**, leurs principes et fondements.

Nous allons maintenant nous placer dans ce que nous désignerons par **institution «loisir scientifique» française**. Nous rassemblerons dans cette terminologie tous les acteurs et supports de communication prenant part à la diffusion de la culture scientifique, l'école mise à part.

Afin de mettre en évidence les apports des situations recherche dans la diffusion de la culture mathématique, nous allons d'abord chercher à les positionner au sein de cette institution, en identifiant les initiatives existantes, toutes disciplines scientifiques confondues. Pour en dresser une liste, certes non exhaustive mais la plus complète qu'il soit, nous nous appuierons sur nos travaux antérieurs et notamment sur notre mémoire de DESS dans le cadre duquel nous avons étudié les différents supports de communication scientifique destinée à la jeunesse [Godot 1999].

Nous nous attacherons ensuite à déterminer pour chacun de ces acteurs, les actions qu'il mène en vue de la diffusion de la culture mathématique proprement dite et ferons des hypothèses sur leurs influences possibles sur l'image des mathématiques que peut avoir le public.

I- PRESENTATION DE L'INSTITUTION « LOISIR SCIENTIFIQUE »

Comme nous l'avons développé dans notre mémoire de DESS, l'institution «loisir scientifique» rassemble un panel d'acteurs, développant un panel de supports.
Nous les classerons en deux catégories!:

- ceux qui ne rencontrent le public qu'indirectement, via un support de communication tel que la télévision, la radio, internet, la presse ou l'édition. Nous les désignerons sous le terme d'**acteurs indirects.**
- ceux qui vont à la rencontre **physique** du public que nous nommerons les **acteurs directs! :** musées des sciences, CCSTI, associations, scientifiques...

Nous ne pouvons redétailler chacune de ces catégories aussi allons-nous, à partir de la liste des acteurs de la diffusion de la culture scientifique que nous avions recencés, cherché à établir quelle est, pour chacun d'entre eux, la proportion d'actions en vue d'une diffusion de la culture mathématique proprement dite, leur forme et leur contenu.
A chaque fois, nous nous appuierons sur un exemple que nous jugeons significatif.

II- ETUDE DES DIFFERENTES ACTIONS AXEES SUR LA DIFFUSION DE LA CULTURE MATHEMATIQUE

II-1 LES ACTEURS INDIRECTS

1- La place des émissions scientifiques à la télévision et à la radio! : les maths font-elles peur! ?

Afin d'évaluer quelle pouvait être la place accordée aux mathématiques dans les médias de masse radio et télévision, nous allons nous appuyer sur les programmes du service public, la diffusion d'émissions scientifiques faisant partie à part entière de ses cahiers des charges et de missions.

France télévision: pas de maths à la télé

La place des émissions de diffusion de culture scientifique dans les programmes de *France télévisions* n'est pas négligeable, tout du moins en terme quantitatif, comme le souligne le rapport d'information du sénat sur la diffusion de la culture scientifique [Rapport Sénat, 2003].
Voici, dressée par ce dernier, la liste des programmes scientifiques en 2002-2003 sur *France télévisions!*:

Emission	Chaîne	Diffusion	Horaire	Format
On vous dit pourquoi	France 2	Mensuel	22h30	90'
Rayons X	France 2	Hebdo	20h40	5'
Savoir plus santé	France 2	Bimensuel,	13h45	52'
Les grandes énigmes de la science	France 2	Mensuel	13h45	52'
les documents santé	France 2	Mensuel,	13h45	52'
Téléthon	France 2	Annuel	18h50	30h
La nuit des étoiles	France 2	Annuel (août)	22h40	1h30
Télématin/chronique santé	France 2	quotidien	8h20	4'
C'est au programme/chronique santé	France 2	Hebdo	9h30	40'
C'est pas sorcier	France 3	Quotidien	17h45 10h10	26'
Thalassa	France 3	Hebdo	20h50	1h30
Le journal de la santé	France 5	Quotidien	13h45	17'
Le magazine de la santé	France 5	Hebdo	18h05	52'
Magazine sur les sciences	France 5	?	?	52'

Depuis 2003, certaines émissions ont été déplacées, d'autres ont disparu, des nouvelles ont été proposées, mais globalement, cette liste nous semble représentative de la situation actuelle. Nous le voyons, *France télévisions* propose une offre diversifiée dans la diffusion des connaissances scientifiques, faisant appel à des émissions d'un format et d'une périodicité variable.
Cependant, comme l'évoquent les titres, la plupart des sujets scientifiques abordés sont relatifs à la santé. Une fois décompté le temps consacré à la médecine et la biologie, il n'en reste que très peu pour les autres disciplines scientifiques. Dans cette

peau de chagrin, où les mathématiques peuvent-elles être abordées!? Dans l'émission «!On vous dit pourquoi!»?! Au regard de la liste des thèmes abordés depuis sa création, non. Dans «!rayons X!»? non, les frères Bogdanov proposent principalement des sujets autour de l'astronomie et la conquête de l'espace. Apparaissaient-elles parmi «!les grandes énigmes de la science!» ? Difficile à dire puisque cette émission n'existe plus.
Reste «!C'est pas sorcier!» mais là encore, après consultation de leurs archives, aucune trace des mathématiques.

Au regard de cette étude, nous pouvons conclure que même si la télévision propose plusieurs programmes autour des sciences, qu'elle a pour mission de diffuser la culture scientifique, **très peu voire aucun programme n'aborde les mathématiques**. A l'heure où tout le monde s'inquiète de la désertion des disciplines scientifiques, y compris des mathématiques, on peut s'en étonner. Le regretter aussi si l'on pense qu'elle est pour beaucoup de personnes, le vecteur privilégié de toute culture. Aborder les mathématiques risquerait-il de faire fuir le téléspectateur!? Quelle peut être l'image des mathématiques indirectement véhiculée par cette absence!? Cela pourrait-il conduire à établir un lien très fort entre les mathématiques et l'école, seul endroit où tout un chacun les rencontre!? Dès lors, nous supposons que l'image des mathématiques induite serait très proche de celle suscitée par l'institution scolaire.

<u>*Radio France!: une place discrète*</u>

Nous ne pouvons pas étudier l'ensemble des programmes des radios du service public, les sciences y apparaissant de façon régulière sous forme de chroniques, le plus souvent en relation avec l'actualité. Aussi avons-nous choisi de prendre comme exemple représentatif *France culture*, qui est la filière qui propose le plus de programmes réguliers autour des sciences. Trois émissions sont actuellement diffusées!:

- ***Science culture***, le mardi de 19h30 à 20h30. Ce magazine scientifique s'axe sur les implications des progrès scientifiques ou médicaux et veut permettre à l'auditeur de *«!se forger une opinion citoyenne sur les grandes questions posées par la science.!»*
- ***Continent Sciences***, le jeudi de 9h10 à 10h00 *«!invite à comprendre les sciences à travers les femmes et les hommes qui les font!».*
- ***Science frictions***, le samedi de 18h00 à 18h30. Coproduite en partenarait avec le journal Le Monde, cette émission propose chaque semaine un débat autour d'une question scientifique.

Pour chacune d'entre elles, nous allons présenter les sujets abordés au cours des 3 dernières années.

Décompte des sujets scientifiques par disciplines ou thèmes abordés depuis 2003.

Science culture

	Epistémologie Philosophie Histoire Sceince et société Enseignement…	Santé! Alimentation bioéthique	Origines de la vie, de l'homme. Les animaux	Informatique, robotique Place des technologies dans la société	Physique Astronomie Espace	Chimie	Climat environnement	Mathématiques	Autres	Nombre démission sur l'année
2003	4	9		1	2		3			18
2004	14	25	3	1			1	1		45
2005	4	12	1	1			2	1	1	22[50]

Continent Sciences

	Epistémologie Philosophie Histoire Sceince et société Enseignement…	Santé! Alimentation bioéthique	Origines de la vie, de l'homme. Les animaux	Informatique, robotique Place des technologies dans la société	Physique Astronomie Espace	Chimie	Climat environnement	Mathématiques	Autres	Nombre démission sur l'année
2003	6	5	12	1	9	1	4	3	4	45
2004	5	6	10	1	7	2	10	1	4	46
2005	2	2	6		9		4	1		24[50]

Science frictions

	Epistémologie Philosophie Histoire Enseignement…	Santé! Alimentation bioéthique	Origines de la vie, de l'homme. Les animaux	Informatique, robotique Place des technologies dans la société	Physique Astronomie Espace	Chimie	Climat environnement	Mathématiques	Autres	Nombre démission sur l'année
2003	9	18	2	8	3	1	4		1	46
2004	7	15	4	9	8	1			3	47
2005	5	8	2	2	6		1	3	1	28[50]

[50] *nombre d'émissions de début janvier à fin juillet*

Comme le montrent les contenus de ces tableaux, les mathématiques et la chimie sont les deux disciplines les moins évoquées dans ces trois émissions du service public!: 16 émissions sur 321 pour les mathématiques (et 5 pour la chimie!!) contre, par exemple, 44 pour la physique et 100 pour la santé et la biologie, sujets semble-t'il jugés plus vulgarisables et bien plus «!porteurs!».
Afin d'évaluer quelle image des mathématiques les quelques émissions diffusées peuvent apporter, regardons plus précisément les sujets traités!,:

Science culture!:

2005!: Les mathématiques peuvent elles être exotiques!?
2004!: Quelles mathématiques pour l'école!?

Continent Sciences!:

2005!: Mathématiques de la chine ancienne
2004!: La langue mathématique
2003!: L'humanité des mathématiques
L'inquiétante étrangeté des mathématiques
L'école polonaise de la logique

Science frictions!:

2005!: A quoi peuvent servir les fractales!? (2 volets)
comment enseigner les mathématiques!?

Les mathématiques sont donc abordées sous trois angles!:

• leur histoire
• leurs objets, savoirs, curiosités : théories, langages et concepts (les fractales par exemple)
• leur enseignement

Au regard des titres des différentes émissions, il nous semble qu'elles peuvent être perçues sous deux aspects!: d'une part, **une discipline «! étrange! » où l'humanité n'est pas évidente à trouver** puisqu'il faut l'expliciter, d'autre part, cette discipline peut apparaître, là encore, comme **fortement rattachée à l'école**, étant donné que deux émissions sur neuf questionnent son enseignement et que très peu d'applications dans la vie quotidienne semblent présentées.

Ainsi, les deux grands groupes du service public semblent «!bouder!» les mathématiques. Si l'on regarde les titres choisis, on peut se demander si cela est dû aux réticences qu'ont les concepteurs d'émissions envers elles... Si non, sont-elles moins «!vulgarisables!» que les autres sciences? Nous avons vu des programmes très populaires diffusés par une chaîne japonaise et des films édités par le CNDP[51] qui nous donnent des éléments pour penser qu'il n'en est rien. **L'absence à la télévision et l'image véhiculée par les quelques émissions radiophoniques nous amènent à penser qu'aux yeux de «! Monsieur tout le monde! » les mathématiques doivent être fortement rattachées à l'école, institution qui leur accorde une place de choix**

[51] *voir le site http://mediamaths.asso.fr/*

tout au long du cursus. De ce fait, nous supposons que l'image qu'il peut en avoir doit être proche de celle d'un élève de niveau fin de collège, ou de lycée, s'il a poursuivi jusque là.

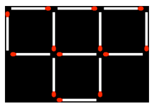
2- Internet! : une ribambelle de jeux

Après la télévision et la radio, Internet est devenu l'un des principaux vecteurs de connaissances. Bien évident, comme pour tous les domaines, on y trouve de tout aux niveaux des sites participant à la diffusion de la culture mathématique. Certains retracent la vie de grands mathématiciens, d'autres des grandes découvertes, d'autres sont rattachés à l'enseignement... mais **ce qui caractérise Internet selon nous, c'est le nombre important de sites qui proposent des jeux mathématiques**. Quelques-uns présentent des jeux à deux joueurs comme les jeux des Jeux de Nîm ou les jeux de soustraction!: la course à n, jeu de Marienbad, jeu du chocolat... mais la plupart offre des jeux à un joueur.
Nous n'avons, bien entendu, pas pu tout consulter mais après en avoir visité une vingtaine[52] nous sommes parvenue à identifier des types de jeux récurrents. En voici la liste en guise d'aperçu.

↳ Des jeux faisant appel uniquement à la logique, la déduction

- des jeux autour de dispositions d'allumettes!:

A partir de la disposition suivante
déplacer 2 allumettes pour former 5 carrés



- des problèmes de déduction logique tels que!:

Sur l'île des chevaliers et des brigands, chaque habitant est soit un chevalier, soit un brigand.
Les chevaliers disent toujours la vérité, et les brigands mentent toujours.
Vous êtes en visite sur l'île et vous rencontrez un habitant qui vous dit: "Ceci n'est pas la première fois que je dis ce que je dis en ce moment."
Est-il un chevalier ou un brigand?

- des suites logiques à compléter
- des problèmes à tableau de vérité du type!:

[52] *voir la liste dans les références bibliographiques.*

Un petit garçon est de retour d'une fête pour des enfants et, tout excité, n'arrive pas à répondre tout à fait exactement aux questions de sa mère.
Il se rappelait qu'il y avait cinq fillettes à la fête, que Berthe portait du bleu et qu'Edith portait du rouge.
Il ne se rappelait plus de la couleur portée par Marguerite, mais était certain que ce n'était pas le jaune.
Il a affirmé que Solange et la fillette en vert ont gagné au ping-pong contre Berthe et la fillette en jaune.
Et, il trouvait la fillette vétue de brun la plus sympathique.
Quelle couleur était portée par Jeannine et quel est le nom de la fillette la plus sympathique?

↳ Des jeux arithmétiques

- des problèmes du type «!j'ai deux fois l'âge que tu auras quand tu auras l'âge que j'ai!» ou bien la croissance du Nénuphar!

Dans un étang, un nénuphar double à chaque jour. Il met 100 jours à recouvrir tout l'étang. Combien de temps mettront deux nénuphars dans les mêmes conditions?

- des problèmes de!partage

Un vieil homme possédait 17 chameaux lorsqu'il est mort. Son testament stipulait que le fils aîné devait recevoir la moitié de ses chameaux, que le deuxième fils devait en recevoir le tiers et que le dernier fils devait en recevoir le neuvième.
Il était bien sûr hors de question de couper un chameau en deux, puisque dans le désert, ces animaux sont beaucoup plus précieux vivants que morts!
Les trois fils se creusèrent la tête pendant un bon moment, mais n'arrivèrent pas à voir comment le testament pouvait être exécuté correctement sans dépecer des chameaux.
Ils firent finalement appel à une vieille et sage dame, chamelière de son métier. Elle réfléchit quelques instants, puis trouva la solution à leur problème. Quelle était sa solution?

- des carrés magiques

↳ Des jeux conduisant à la recherche d'algorithmes!

- Tour de Hanoï
- problème dit «!du passeur!», qui peut être enrichi de contraintes pondérales:

Une dame doit emmener de l'autre côté d'une rivière un renard, un canard et un sac de maïs. Elle ne peut pas laisser le renard et le canard ensemble, car le renard mangerait le canard. Elle ne peut pas laisser le canard et le maïs ensemble, car le canard mangerait le maïs.
Comment peut-elle transporter ses trois charges sur l'autre rive si elle ne peut emmener qu'une charge à la fois!?

• des problèmes de transvasement ou équivalents

> Vous disposez de deux sabliers: un gros de 7 minutes et un petit de 4 minutes
> Comment faire pour chronométrer 9 minutes?

• des problèmes de pesées

> On vous présente 8 boules parfaitement identiques à tout point de vue, sauf qu'une d'entre elles est légèrement plus lourde que les autres. La différence de poids est tellement petite qu'il est nécessaire d'utiliser une balance à plateaux pour distinguer la boule lourde des autres.
> Quel est le nombre minimum de pesées nécessaires pour identifier la boule plus lourde?.. et ...Quelle est la séquence des pesées?

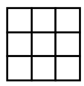
↪ Des problèmes relevant des mathématiques discrètes!

• des problèmes combinatoires, comme *Les poignées de main* ou celui-ci!:

> Un tiroir contient dix chaussettes noires et quinze chaussettes bleues, pêle-mêle. Vous désirez en retirer une paire, qu'importe la couleur, mais l'ampoule est brûlée et il fait trop noir pour distinguer les couleurs.
> Quel est le nombre minimum de chaussettes que vous devez retirer du tiroir pour vous assurer d'obtenir une paire assortie?

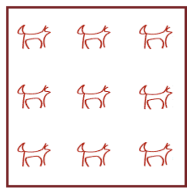
• des problèmes de déplacement sur une grille, par exemple!:

> Est-il possible en 4 coups de crayon et sans lever celui-ci de trouver un chemin qui passe par toutes les cases une et une seule fois.!?



• des problèmes de découpages

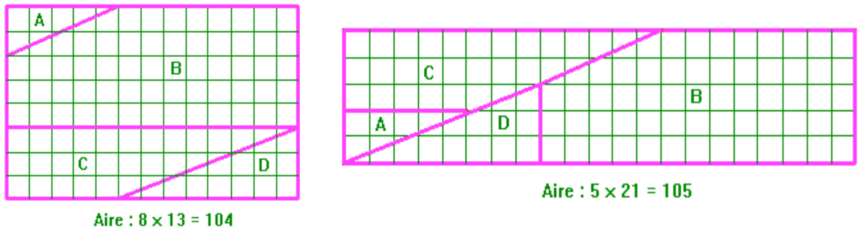
> Neuf loups se retrouvent dans une enceinte carrée au jardin zoologique. Vous devez y ajouter deux nouvelles enceintes carrées de telle sorte qu'il sera possible d'isoler chaque loup dans sa propre enceinte.
> Comment faire?



• des problèmes de pavages à l'aide de polyminos
• des problèmes liés au théorème des 4 couleurs

↪ Des paradoxes logiques ou géométriques

• Zénon et l'infini
• le paradoxe du barbier!: «!je ne rase évidemment pas ceux qui se rasent eux-mêmes, mais j'ai le bonheur de raser tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes.!Qui rase le barbier!?!»



Curieux, les figures paraissent composées des mêmes morceaux.
Pourtant elles n'ont pas la même aire. Où est le problème ?

Internet fourmille donc de jeux invitant à se creuser la tête. La plupart font appel à la logique proprement dite, d'autres au calcul mais plusieurs amènent à essayer, tâtonner, chercher, donc à amorcer une démarche de recherche en mathématiques... Cependant, au regard de ceux que nous avons identifiés, tous les énoncés amènent ici aussi à une solution, certes plus ou moins rapidement selon les cas, et elle peut être fournie ou pas, mais quoi qu'il en soit cette solution existe et est souvent unique. Aussi pensons-nous que **cela peut contribuer encore à évincer l'impossibilité en mathématiques**, impossibilité déjà très peu présente dans l'institution scolaire comme nous l'avons vu lors de notre étude des manuels de primaire, alors qu'elle est s'avérée déroutante pour les élèves lors de nos expérimentations en classe et implique un recours à la preuve si l'on veut pouvoir trancher entre «!difficulté à trouver!» et «!inexistence de solution!».

De plus, même si le style est plus ludique, qu'on ne peut rattacher les situations mathématiques proposées à un chapitre particulier, la plupart ne diffère pas, du point de vue de leur schéma de résolution, de ce que nous avons observé dans l'institution scolaire!: **une seule solution est bien souvent à déterminer en mettant en oeuvre la bonne procédure.**

Notre hypothèse est donc que **l'image des mathématiques susceptible d'être induite par les jeux proposés sur Internet est double.**
D'une part, compte tenu des caractéristiques de la plupart des problèmes proposés, **elle peut être proche de celle développée dans l'institution scolaire!**: les mathématiques amènent à se creuser la tête pour trouver **le** moyen de parvenir à **la** solution du problème proposé, et est donc, dans ces cas-là, !en désaccord avec notre définition de l'activité de recherche en mathématiques.
D'autre part, **la formulation des énoncés (ton, contexte...) peut conduire à penser que les mathématiques peuvent être ludiques et donc source d'amusements**, ce qui n'apparaît pas forcément lors de leur enseignement et dans les autres médias de masse que nous venons de présenter mais se rapproche d'un des objectifs du projet *Maths à modeler*.

3- Les CD Roms

A quelques exceptions prêts (par exemple le CD-rom *«!les 7 énigmes de K' stêt!»* édité par Génération 5 en collaboration avec l'erté *Maths à modeler*), les CD-roms disponibles autour des mathématiques semblent très proches des programmes scolaires, dont ils reprennent les contenus sous une présentation ludique!: jeux, contes... L'image des mathématiques qu'ils sont susceptibles d'apporter peut donc être rapprochée de celle de l'institution scolaire, agrémentée, comme pour Internet, de la composante «!source de plaisir et d'amusement!».

4- La presse: des jeux pour tous, des magazines spécialisés pour les jeunes

<u>*Exemple de la presse généraliste!quotidienne*</u>

Selon les actes du colloque sur la publicisation de la science qui s'est tenu en 2004 à Grenoble, très peu de sujets sur les mathématiques sont traités dans la presse généraliste!:

> *«!Les thèmes les moins présents, à l'intérieur des discours médiatiques portant sur la science, sont les mathématiques et la matière, thème regroupant notamment la physique et la chimie.»* [Buchs, 2004]

Cependant, contrairement à ces deux sciences «!expérimentales», les mathématiques sont tout de même présentes régulièrement dans de nombreuses revues sous la forme de jeux ou casse-tête, comme dans la rubrique «!Affaire de logique!» du journal Le Monde, initiatrice du problème de *La roue aux couleurs*. Les énoncés proposés sont, pour la plupart, dans la lignée de ceux que nous avons répertoriés sur Internet, nous avons même retrouvé certains des jeux que nous avions listés. Ils comportent tous une solution (parfois fausse!!), donnée dans le même numéro ou dans le suivant. **L'image des mathématiques induite peut donc être rapprochée de celle que nous avons supposée être transmise par Internet.**

<u>*La presse magazine!: deux magazines à destination des 10/15 ans*</u>

Nous avions relevé dans notre mémoire de DESS, plusieurs magazines spécialisés diffusant la culture scientifique auprès du grand public et de la jeunesse [Godot, 1999]. Tous abordent la physique, la chimie, la biologie, l'informatique... mais ils accordent seulement une toute petite place aux mathématiques, généralement reléguées là encore à la rubrique Jeux.
Cependant, deux magazines destinés aux jeunes leur réservent un espace de choix.

Le magazine Cosinus!

Le magazine mensuel *Cosinus* existe depuis 1999. Parrainé par un conseil scientifique et pédagogique regroupant des chercheurs et des pédagogues, physiciens, chimistes ou mathématiciens de formation, il est destiné aux 10/15 ans et a pour but :

«!- ***de rendre les mathématiques attrayantes et de montrer leur utilité dans la vie courante, dans ses aspects les plus modernes***

- de développer la curiosité des jeunes pour les sciences dont ils voient tous les jours les applications : physique, chimie, astronomie, sciences de la terre et biologie.!»

On peut noter tout d'abord dans cette présentation par les auteurs, une distinction entre les objectifs visés pour les mathématiques et ceux pour les autres sciences. Les mathématiques doivent être rendues «!attrayantes!», alors que rien de la sorte n'est précisé pour les autres disciplines. Quelle peut en être la raison!? Un préalable à la diffusion de la culture mathématique serait-il de les rendre plaisantes!? Pourquoi cela n'est-il pas le cas pour les sciences dites expérimentales!? Aurait-on d'un côté des sciences intrinsèquement attirantes et de l'autre les mathématiques qui nécessitent d'être rendues plus sympathiques!? Quelle peut être l'origine de cet a priori négatif!? Leur rencontre dans le cadre scolaire!?

Regardons à présent quels peuvent être les choix de ce magazine pour parvenir à ce que son lecteur soit «!attiré!» par les mathématiques.

Sur une trentaine de numéros depuis 2003, plus de la moitié comporte une rubrique sur les mathématiques, de une à plusieurs pages, en plus des jeux régulièrement proposés dans une chronique intitulée «!A vous de joueur!» qui rassemble des défis issus des différentes disciplines scientifiques. Comme dans l'ensemble du magazine, le ton est enjoué, direct, le vocabulaire est issu du langage courant. Les termes mathématiques sont introduits et définis, les concepts abordés sont présentés de leur genèse à leurs applications. Chaque article est illustré de schémas, dessins, photos, graphiques, tableaux... très colorés. Quand cela est possible (ce qui semble être rarement le cas), le lecteur est invité à fabriquer chez lui, comme cela est le cas pour les autres sciences, un objet mathématique (un boulier chinois, un pantographe) ou réaliser une expérience (les aiguilles de Buffon par exemple).

Au regard des titres, nous définirons deux grandes catégories de sujets!: des sujets rattachés à l'histoire des mathématiques, comme nous l'avions aussi trouvé à la radio, d'autres qui montrent leurs applications dans la vie quotidienne, par exemple à travers leurs capacités à modéliser des phénomènes naturels. On retrouve également disséminés à travers les articles quelques objets, savoirs et curiosités mathématiques!: les fractales et le nombre d'or notamment.

Sujets proposés pour chacune des deux grandes catégories identifiées

Catégorie	Sujets traités s'y référant
Histoire des maths	Numération!: Les maths des Babyloniens Le mystère de l'oeil d'Horus (numération égyptienne) Nombres et calculs chez les Grecs Aventures mathématiques dans les mystérieuses cités d'Amérique précolombienne Géométrie Le système métrique La mesure du rayon de la Terre Pi!: 3,1416!: histoire de la découverte de Π et de l'aventure du calcul de ses décimales. Les mathématiques chinoises, contenus et spécificités Les mathématiques des ensembles Portraits de mathématiciens!: Pythagore, Euclide, Neper
Mise en perspective des mathématiques dans la vie quotidienne	Mathématiques dans la nature La forme des plantes et de leurs fleurs La géométrie des plantes Fractales Autres applications Le principe des tiroirs (combinatoire) Calculer le meilleur choix à faire (statistique) *Écrire des messages confidentiels grâce aux codes secrets (combinatoire)* L'intelligence des jeux de stratégie Les mathématiques pour lire une carte (repérage dans le plan) Précision et rigueur d'une mesure.(maîtriser l'approximation.) Chambord!: les mathématiques (maths et architecture)

Ainsi, *Cosinus* n'isole pas les mathématiques des autres sciences. Elles sont abordées régulièrement, dans la rubrique «!A vous de jouer!» qui présentent problèmes et expériences et sous forme d'articles. Pour les rendre «!attrayantes!», les auteurs les présentent de la même manière que les autres disciplines. Parmi les thèmes abordés, une large place est accordée à la numération et aux mathématiques grecques mais plusieurs autres aspects plus récents des mathématiques sont développés au travers de leurs applications dans la vie quotidienne. Elles ne sont donc pas données à voir comme une science à part mais à l'instar de toutes les autres disciplines scientifiques, elles apparaissent, nous semble-t-il, comme une aventure humaine, pleine de rebondissements, dont les découvertes peuvent profiter à tous, aventure à laquelle il est important de s'intéresser car les mathématiques se révèlent un outil efficace pour comprendre notre monde, au regard de leurs capacités à décrire la nature.

Le magazine Tangente

Créé en 1988, le magazine *Tangente* invite les 15/20 ans à découvrir les mathématiques. À l'origine, ce magazine était destiné aux élèves, comme le montre cet extrait de l'édito du n°6!: *«!Ce numéro coïncide avec la rentrée des classes. Et là, une nouvelle constatation!: si les professeurs nous suivent,* ***les élèves auxquels Tangente est essentiellement destiné****, ne sont pas encore assez nombreux à être abonnés.!»* puis peu à peu son offre s'est diversifiée, afin d'entraîner le plus grand nombre dans *«!l'aventure mathématique!»* comme le souligne son sous titre.

En plus de ses parutions mensuelles et des numéros «!Jeux et stratégie!» regroupant exclusivement des énoncés de jeux, le magazine *Tangente* propose 4 hors séries par an. Afin de donner une idée des approches employées, nous allons étudier le contenu des Hors Série publiés de Janvier 2003 à Juin 2005!:

Titres des Hors Série pour chaque catégorie

Catégorie	Sujets traités s'y référant
Histoire des maths	Mille d'ans d'histoire des maths
Objets, savoirs et curiosités mathématiques	La magie des fractales La logique L'infini, le fini, le discret et le continu Le monde étonnant des jeux mathématiques Probabilité!: le hasard apprivoisé Les graphes
Mise en perspective des mathématiques dans la vie quotidienne	Maths et sports Maths et architecture Maths et musique Maths pour littéraires et autres réfractaires L'astronomie

Nous retrouvons les deux grandes catégories de sujets relevées dans *Cosinus*. Les thèmes abordés restent proches de ce que nous avons déjà observé: mathématiques grecques, mathématiques dans la nature, mathématiques et architecture, probabilités, jeux,... en les mettant en relation avec le quotidien du lecteur. Certains Hors série toutefois sont traités en relation avec l'enseignement, par exemple celui sur les graphes est paru suite à l'introduction de ce concept mathématique dans les programmes de Terminale.

Cependant, contrairement à *Cosinus*, plusieurs articles offrent une place à part entière à ce que nous avons appelé «!objets, savoirs et curiosités mathématiques!». *Tangente* consacre plusieurs Hors Série à des découvertes mathématiques «!étonnantes!» tout en faisant un lien avec leur histoire et leurs applications dans la vie quotidienne: les fractales, le nombre d'or qui figuraient aussi dans *Cosinus* mais aussi les paradoxes logiques, l'infini, l'anneau de Möbius, les oeuvres de l'OULIPO...

Enfin, une place régulière est accordée à la rubrique «!jeux!», mais, comme pour Internet, une large majorité des jeux et casse-tête présentés comportent une solution et une seule. Ceux qui conduisent à l'impossibilité sont bien souvent les plus difficiles. Les auteurs estimeraient-ils que cela requiert un niveau de connaissance important!?

Un point de vue élargi et détaché de l'école

Alors que la presse généraliste ne donne à voir les mathématiques que par les jeux, la presse spécialisée élargit ce point de vue et propose donc en plus trois autres angles d'approche!:

- l'histoire des mathématiques
- les mathématiques dans la vie quotidienne
- les objets, savoirs et curiosités mathématiques

Contrairement à la radio, même si certains des thèmes et contenus abordés sont en lien avec les programmes scolaires, nous estimons que les choix de présentation conduisent à détacher les mathématiques de leur enseignement. En effet, elles ne sont pas présentées dans cette perspective, mais sont rattachées à l'histoire des découvertes et à l'univers quotidien du lecteur via leurs applications. Les concepts ne sont décontextualisés comme cela est fréquemment le cas à l'école mais au contraire mis en parallèle avec des situations problématiques concrètes, afin d'en montrer l'intérêt. Comme pour Internet, les problèmes sont posés de manière ludique.

Au regard de ces choix de présentation et des titres développés, nous faisons l'hypothèse qu'elle peut amener son lecteur à penser que les mathématiques sont!:

- une science
- aux origines lointaines et diverses,
- une aventure humaine,
- constituée de différentes branches!: arithmétique, géométrie, statistiques et probabilité, combinatoire, théorie des graphes...
- un outil puissant pour comprendre le monde,
- et enfin, propices aux jeux et source d'amusement, de plaisir, comme cela apparaît aussi dans la presse en général.

5- L'édition

Selon le rapport «!Développement et diffusion de la culture scientifique et technique, un enjeu national!» *«!pour les éditeurs français, le marché des sciences porte essentiellement sur les ouvrages d'enseignement et dans une moindre mesure sur les ouvrages à destination du monde professionnel».* [Rapport Hamelin, 2003]

Plusieurs éditeurs, cependant, proposent dans leurs collections de vulgarisation des sciences, des ouvrages autour des mathématiques sous des formes variées!:

- des portraits de grands mathématiciens. L'ouvrage *Les mathématiciens*, édité par Pour la Science, présente par exemple, quinze grands mathématiciens.
- des recueils de jeux et casse-tête mathématiques, comme ceux de Raymond Smullyan, auteur de plusieurs livres dont *le livre qui rend fou,* l'ouvrage *Affaire de logique* qui rassemble les 100 premiers jeux proposés dans la rubrique

éponyme du journal Le Monde (dont l'un nous a inspiré le problème de *La roue aux couleurs*) ou les nombreux ouvrages proposés par les éditions du Kangourou.

• des curiosités et autres amusements mathématiques (Les éditions du Kangourou par exemple proposent des livres respectivement sur l'infini, le nombre d'or, les suites, les pavages, les frises, les probabilités... ou encore un ouvrage de D.Souder intitulé *Maths et magie* invitant à «!*découvrir plus de 100 tours de magie à clé mathématique*' [Souder, 2001]!)

• des encyclopédies, (les éditions Gamma par exemple ont édité en 2003 un *Atlas de mathématiques* qui présente différents savoirs mathématiques et leurs applications)

• des dictionnaires,

• des romans (les livres de Denis Guedj, par exemple)

• des bandes dessinées (les albums *Le géométricon* et *Le Topologicon* de la série *Les aventures d'Anselme Lanturlu* de Jean Pierre Petit chez Belin, *Histoire des maths* édité par les éditions du Kangourou qui présente la vie de quinze grands mathématiciens (es))

•...

Nous n'avons pu faire une étude détaillée, mais après consultation de quelques collections, nous avons constaté que les thèmes abordés sont semblables à ceux que nous avions relevés dans la presse généraliste et spécialisée. De nombreux ouvrages proposent des jeux mathématiques proches de ce que nous avons présentés. D'autres invitent à découvrir les mathématiques par leur histoire, leurs applications ou certaines de leurs découvertes, notamment la numération.

L'originalité de l'offre éditoriale tient avant tout, selon nous, au fait qu'une partie de ses productions a recours au style romanesque, afin de rendre encore plus palpitante la grande aventure des mathématiques.

6- Des différences remarquables entre généralistes et spécialistes

Alors que cela n'est pas forcément le cas pour les autres disciplines scientifiques, une différence importante apparaît donc, d'un point de vue quantitatif et qualitatif, entre les supports développés en vue de la diffusion de la culture mathématique dans les médias généralistes comme la télévision ou la radio et ceux mis en oeuvre sur Internet, dans les CD-Roms, la presse spécialisée ou l'édition.

Les premiers, qui sont les plus populaires, semblent avoir des difficultés à aborder les mathématiques aussi faisons-nous l'hypothèse que cela peut contribuer à leur donner une place à part aux yeux du public et en particulier à en faire **une discipline fortement liée au cadre scolaire.**

Les acteurs plus spécialisés quant à eux les abordent sous plusieurs angles!: histoire, applications, jeux, savoirs, curiosités... en adoptant une approche qui diffère de celle usuellement rencontrée dans l'enseignement. Pour les présenter de façon

«!attrayante!», ils ont recours à un ton ludique, donnent de nombreuses occasions de se rendre compte qu'elles peuvent être source d'amusement, de plaisir. Certains cherchent également à montrer à leur public, où sont les mathématiques, à quoi elles servent, à lui faire comprendre à quel point elles sont un outil adapté pour comprendre le monde... **Ils établissent donc un lien entre les mathématiques et la vie courante** et les montrent comme une science tout aussi abstraite que la physique ou la chimie par exemple, ni plus, ni moins, ce qui diffère des approches répandues dans l'institution scolaire.

Cependant, nous pensons qu'ils offrent **très peu d'occasion de comprendre ce qu'elles sont**, même à travers les nombreux problèmes qu'ils proposent, compte tenu du fait qu'hormis leur forme ludique, ils sont généralement fermés, ont une solution, et sont plus proches des exercices donnés à résoudre à l'école que de véritables situations de recherche.

II-2 LES ACTEURS DIRECTS

1- Les grandes expositions! : exemple des grands musées parisiens.

Les expositions sont un des supports couramment utilisés dans la diffusion de la culture scientifique.

Pour chercher à établir quels peuvent être les contenus, tant aux niveaux des savoirs présentés que des supports de communication utilisés, des expositions participant à la diffusion de la culture mathématique, nous nous appuierons sur l'exemple des deux grands musées parisiens qui y participent!: *La Cité des sciences* et *le Palais de la découverte.*

La Cité des sciences!: on manipule mais on ne fabrique pas

Créée en 1986, *la Cité des sciences* est, comme le souligne le rapport du Sénat n°392, *«!de loin, le plus important des établissements français de diffusion de la culture scientifique et technique, de par ses dimensions et les moyens qui lui sont consacrés.!».*

Une exposition sur les mathématiques y est proposée de façon permanente. Elle comporte des panneaux à lire, des objets mathématiques à observer ou manipuler et des vidéos. Voici les différents thèmes développés ainsi que leurs angles d'approche.

Thèmes[53]	A voir A lire	À manipuler
Géométries	Géométrie euclidienne	
	Symétrie!: audiovisuel sur les propriétés géométriques de la symétrie	**Pythagore**!:jeu d'eau et de réservoirs pour vérifier le fameux théorème **Figures! :** objets à toucher pour découvrir quelques propriétés fondamentales de la géométrie **Surfaces du moindre effort!** :quand des films de savon matérialisent des surfaces minimales. **Rotation du cube!** : manipulation interactive sur la notion de transformation. **Orbitogramme!** : dispositif **interactif** pour visualiser les ellipses décrites par une bille d'acier lancée sur une surface courbe. **Coniques**!: dispositif **interactif** pour visualiser cercles, ellipses, paraboles et hyperboles.
	Géométries non euclidiennes	
	Monde des courbures! :audiovisuel sur les propriétés des surfaces courbes	**Le chemin le plus rapide…! est-il toujours le plus court!** ? Dispositif **interactif** sur la notion de cycloïde.
	Géométrie analytique	
		Jeu des coordonnées! : jeu de morpions introduisant au repérage algébrique de l'espace en trois dimensions.
Analyse	**Mouvement et calcul!** : audiovisuel introduisant à l'analyse du mouvement	**Réservoirs et graphiques!** : jeu sur la notion de fonction.
Infini	**Obélix et l'infini!** : dessin animé introduisant à l'un des paradoxes de Zénon. **Chou-fleur!** : maquette d'un objet fractal naturel, le chou-fleur!!	**Fractals**!: logiciel **interactif** pour approfondir et expérimenter la géométrie fractale. **Dimension fractale!** : dispositif **interactif** sur l'une des propriétés de la géométrie fractale!: la dimension non entière.

[53] *source!: le site http://www.cite-sciences.fr qui propose une visite virtuelle*

Chaos, probabilité	**Fontaine turbulente!** : sculpture animée où simplicité et perfection initiales engendrent du chaos **Complexité et prédiction!** : audiovisuel sur le hasard et l'analyse de la complexité. **Chaos**!: livre sonore et audiovisuel sur le concept de chaos déterministe	**Mouvement brownien!** : dispositif **interactif** montrant un mouvement imprédictible. **Planche de Galton!** : objet figurant la courbe de Gauss à travers la répartition expérimentale de 256 billes. **Marches aléatoires!** : logiciel **interactif** pour approfondir les lois évoquées au-dessus. **Sondages et statistiques** : logiciel **interactif** introduisant, à travers une enquête Insee, à la méthode statistique. **Échecs et maths!** : logiciel **interactif** sur l'explosion combinatoire des coups possibles dans une partie d'échecs. **Equilibre du double pendule instable!** : objet **interactif**, exemple de simulation analogique et d'automatisme. **Chaoteur**!: pendule **interactif** sur le problème de la sensibilité aux conditions initiales.
Les mathématiques dans la vie de tous les jours	**Toutes les cartes sont fausses!** : livre sonore sur la difficulté de projeter une surface courbe sur un plan.	**Manège inertiel!** : salle **interactive** pour expérimenter la force de Coriolis. **Triangulation de Delaunay!** : logiciel **interactif** sur l'un des algorithmes géométriques qui permettent de construire les paysages de synthèse. **CFAO**!: logiciel **interactif** montrant l'apport des mathématiques dans la modélisation et la simulation industrielle.
Epistémologie	**La démonstration!** : salle audiovisuelle sur la démarche centrale de l'activité mathématique inventée par les Grecs. **La modélisation!** : salle audiovisuelle sur la distinction opérée par les mathématiciens entre l'objet réel et sa description mathématique, souvent appelée modèle. **Le village des mathématiques!** : audiovisuel de conclusion, des mathématiciens parlent de leur métier, de leur passion.	

Les thèmes mathématiques abordés sont donc très proches de ceux développés dans la presse, complétés par des sujets plus récents, géométries non euclidiennes et théorie du chaos, et par une présentation épistémologique de deux notions transversales aux mathématiques !: la démonstration et la modélisation. La recherche apparaît par le biais de témoignages de mathématiciens contemporains.

Nous retrouvons aussi, dispatchées dans ces différents thèmes, les différentes catégories d'approche que nous avons précédemment relevées!: «!Histoire des mathématiques!», «!Objets, savoirs, curiosités!» et «!Mise en perspective des mathématiques dans la vie quotidienne!», complétées par une quatrième catégorie axant sur une approche épistémologique de la discipline et sur une présentation de l'activité des mathématiciens.

La principale caractéristique de l'apport de cette exposition par rapport aux actions que nous avons présentées précédemment est **qu'elle invite le public à être actif dans sa découverte des mathématiques!** : les 2/3 des supports utilisés sont **interactifs** dans le sens où le public manipule, joue ou agit sur le dispositif, comme pour les surfaces minimales ou la planche de Galton.

Donc le public observe, touche des objets mathématiques mais fait-il des essais!? Met-il en oeuvre une démarche de recherche!? Non, rien de ce qui est proposé n'amène le visiteur à faire des mathématiques au sens où nous l'entendons. plus ludiques, **on les montre sous un angle attractif et ludique, on peut toucher certains de leurs objets, interagir sur leur fonctionnement mais on ne propose toujours pas d'en faire.**

Le Palais de la découverte!: une approche originale

Le Palais de la découverte, établissement public à caractère scientifique, culturel et professionnel placé sous la tutelle du ministère de la recherche, existe depuis 1937. Il est reconnu par le Sénat comme «!*l'une des institutions les plus prestigieuses dans la diffusion de l'ensemble des sciences fondamentales, de la chimie-physique aux mathématiques.!*»

Ses actions envers la diffusion de la culture mathématique se développent sous deux angles!:

- une **partie exposition** qui regroupe la salle Π qui présente le nombre Π, les étapes de sa découverte et ses multiples applications (trigonométrie, série, rationnels, géométrie...), quelques «curiosités!» ainsi que plusieurs panneaux!: présentation des différentes preuves du théorème de Pythagore à l'aide de formes géométriques, regards les liens entre les mathématiques et la littérature notamment par le biais de palindromes, interpellation sur la somme des angles d'un triangle sphérique, le mouvement brownien...
- les **ateliers «récréations mathématiques»**. Alors que pour les autres sciences, «!le Palais!» propose, en plus de la partie exposition, des «exposés!», forme originale de communication où un chercheur présente des manipulations en direct au public, pour les mathématiques des ateliers intitulés «récréations mathématiques!» sont mis en place. Ils ont lieu certains week-end, ou en période de vacances scolaires. Il n'y a pas d'inscription, on arrive et on repart quand on veut.

Parmi les récréations proposées, on trouve des suites logiques, des problèmes de mathématiques discrètes (problème d'alignement, problèmes de pavages semblables à ceux que nous proposons) des jeux (jeux de Wang). En voici quelques exemples!:

Comment doit-on disposer les briques disponibles pour réussir à reconstituer le cube ?
Peut-on toujours tracer un dessin sans lever le crayon en passant sur chaque trait une fois et une seule ?
Savez-vous planter les choux à la mode de chez nous ? Il faut les disposer de façon telle qu'un bicou qui en mangerait deux pourra toujours en manger un troisième aligné avec les deux premiers. Et peu importe lesquels il choisit en premier !

Nous retrouvons donc dans la partie exposition des éléments communs avec ce que nous avons relevé à *La Cité des sciences*. Y figurent la géométrie grecque, le théorème de Pythagore, les géométries euclidiennes, la théorie du chaos... mais **l'originalité du *Palais de la découverte*** vient du fait que, contrairement à l'exposition visible à *La Cité des sciences*, **il invite le public à faire effectivement des mathématiques,** en lui proposant des jeux, généralement issus des mathématiques discrètes, qui n'ont pas tous une solution et pour lesquels plusieurs démarches de recherche peuvent être suivies. Il est à noter que cela fait d'ailleurs plusieurs années que l'erté *Maths à modeler* travaille en partenariat avec cet organisme, ce qui explique que certaines des situations présentées soient proches de quelques-unes de nos situations recherche.

L'offre des deux grands musées parisiens peut donc être mise en parallèle avec celles de la presse et de l'édition. Les mathématiques y sont présentées selon les mêmes angles d'approche, de nombreux thèmes sont en commun.

L'apport principal de ces deux grandes expositions est dans la présentation d'aspects transversaux aux mathématiques comme la démonstration ou la modélisation, la présence de la recherche actuelle via le témoignage de mathématiciens à *la Cité des sciences*, et surtout la recherche de problèmes ouverts dans le cadre des *récréations mathématiques* du *Palais de la découverte*, invitant, dans l'esprit du projet *Maths à modeler*, le public à découvrir les mathématiques en en faisant.

2- Les CCSTI! : le CCSTI Centre Sciences, un centre productif

Créés à partir de 1979[54], les Centres de Culture Scientifique et Industrielle ont pour mission de contribuer à l'intégration des sciences et techniques dans le champ culturel. Leurs actions sont diverses!: organisation d'évènements tels que la Fête de la Science ou les exposciences, proposition d'ateliers thématiques, de rencontres autour des sciences, diffusion et élaboration d'expositions itinérantes, le plus souvent interactives...

[54] *Le premier fut inauguré à Grenoble!!*

Parmi toutes ces activités, nous allons nous intéresser à la dernière, l'élaboration d'expositions, en nous centrant bien sûr sur celles qui ont pour sujet les mathématiques. Ces expositions sont destinées à être présentées dans les locaux du CCSTI producteur mais aussi dans les autres CCSTI. Elles peuvent également être louées par toute personne ou organisme intéressé.

Hormis quelques initiatives isolées, les expositions autour des mathématiques présentées dans les CCSTI sont élaborées par le *CCSTI Centre Sciences*. Cette spécificité n'est pas un hasard!: son président est mathématicien de formation. Aussi allons-nous nous appuyer sur son catalogue pour illustrer quelle peut être l'offre disponible sur le réseau.

Titre de l'exposition	Partenaires	Contenus
Pourquoi les mathématiques!?	Unesco Académie des Sciences	Voir présentation de l'exposition ci-dessous
Jeux, hasards et stratégies		Introduction à la théorie des jeux Rechercher les stratégies gagnantes... quand elles existent!!
Maths en méditerranée	FFJM	Histoire des mathématiques liées aux grandes civilisations méditerranéennes. Théorème de Thalès, de Pythagore, pavages, nombres ...
Ordre et chaos dans la nature	CNRS Université d'Orléans	Théorie du chaos Aléas et déterminisme Fractales
Jeux logiques et mathématiques	FFJM	Jeux inspirés du championnat de France des jeux mathématiques et logiques.
Maths dans la nature	Comité de l'Année mondiale des mathématiques	Fibonacci. Nombre d'or. Théorème des 4 couleurs Cartographie Fractales...
Maths dans la vie quotidienne	Comité de l'Année mondiale des mathématiques	Codes secrets Pavages et chemins Traitements d'images Météorologie Crash tests et modèles...
Pythagore, tout est nombre.	IREM Orléans Tours	Pairs, impairs Nombres triangulaires, carrés. Nombres cubiques Pentacle Théorème de Pythagore L'escargot de Pythagore

Nous retrouvons, au travers des différentes expositions recensées dans ce catalogue, les types d'approche que nous avions déjà relevés précédemment:

- Histoire des mathématiques, leurs origines diverses.
- Leurs applications!: cryptologie, pavages, modélisation de la nature.

• Quelques-uns de leurs objets savoirs et curiosités!: théorème de Pythagore, Thalès, fractales, nombre d'or, table de Galton...

• Les jeux mathématiques, avec la recherche de stratégies gagnantes... éventuellement inexistantes!!

Même si les thèmes et les sujets abordés sont proches de ceux déjà recensés pour la presse, l'édition et la radio, l'apport principal du CCSTI se place, selon nous, au niveau des deux expositions qu'il a mises en place sur les jeux et les mathématiques ainsi que sur certaines des manipulations qu'il propose dans les autres. Nous allons chercher à identifier en quels termes il y invite le public à faire des mathématiques.

L'exposition *Jeux, hasards et stratégies* est axée sur les jeux de hasard, comme la roulette ou la martingale, et introduit à la théorie des jeux. Le public joue mais la modélisation mathématique des jeux proposés est dans la plupart des cas inaccessible voire inexistante. Même s'il est actif, qu'on lui parle de mathématiques, il semblerait que celui-ci n'a que très peu d'occasions d'en faire au sens où nous l'entendons.

Jeux logiques et mathématiques a été élaborée avec *la Fédération française des jeux mathématiques et logiques* (FFJM) que nous avons précédemment présentée. Alliant jeu, image, humour et manipulation concrète, elle regroupe plusieurs des types de jeu présents dans la presse et sur Internet!:jeux de logique, arithmétiques, dénombrement, déduction, Tours de Hanoi, problèmes de pavages et d'empilement. Cependant, encore une fois, chaque jeu a une solution. Le public est donc amené à chercher, il peut faire des mathématiques mais, comme à l'école, il sera conforté encore une fois dans l'idée que «!tout problème mathématique a une solution! », comme cela était le cas dans le manuel de CM1 que nous avons présenté lors de notre étude des manuels de primaire dans la partie précédente. Nous supposons que cela peut contribuer encore une fois à donner une vision erronée de l'activité de recherche en mathématiques, en la réduisant à la recherche d'un bon outil, de la bonne technique, du «!truc!», pour obtenir la solution.

Regardons maintenant de plus près sa dernière production, l'exposition *Pourquoi les mathématiques!?!* élaborée en partenariat avec l'UNESCO, qui rassemble à elle seule plusieurs des expositions disponibles dans le catalogue et comporte des manipulations originales.

<u>L'exposition internationale «!Pourquoi les mathématiques!? »! produite pour l'UNESCO!</u>

Le fait que l'année 2000 ait été promue "année mondiale des mathématiques" a donné lieu à un projet d'exposition internationale itinérante sur les mathématiques, dans le but *«!d'améliorer l'image des mathématiques dans le grand public.!*[55]» en montrant

[55] *Source le site de l'UNESCO et plus particulièrement http://www.mathex.org/MathExpo*

- «!qu'elles sont intéressantes, étonnantes et utiles, accessibles à tous,
- très présentes dans la vie quotidienne
- qu'elles débouchent sur de nombreux métiers
- qu'elles jouent un rôle primordial dans la culture, le développement et le progrès. »

Cette exposition a été élaborée sous le haut patronage de l'UNESCO et de l'Académie des Sciences en 2004 et présentée pour la première fois lors du congrès international ICME 10, à Copenhague.

Le *CCSTI Centre Sciences* l'a réalisée en collaboration avec le Palais de la découverte et Jin Akiyama, mathématicien de l'université de Tokay au Japon et créateur de nombreux modules interactifs, notamment pour le musée «!Okhotsk mathematical wonderland!» et les émissions très populaires qu'il animait pour une chaîne de télévision japonaise.

Dans un premier temps, nous pouvons noter dans cette présentation, le désir annoncé par les commanditaires, qui peut être rapproché de celui des auteurs de *Cosinus* qui mettaient en pré requis à la vulgarisation des mathématiques la nécessité de les rendre «!attrayantes!», «!*d'améliorer l'image des mathématiques dans le grand public!*», ce qui laisserait supposer à nouveau que cette image est perçue comme a priori négative.

	Thèmes	A lire	A manipuler et observer
Les mathématiques dans la nature	Lire la nature 	Formes dans la nature!: Spirale logarithmique Suite de Fibonacci Nombre d'or Conique Le monde est-il fractal!? Tous en orbites	Présentation d'objets naturels!: bulles de savon, ananas, pommes de pin, nautiles. Xylophone spirale Puzzles fractals Surface curviligne, billes, modèle Terre!: faire tourner la bille autour de la Terre, sa trajectoire peut-elle être circulaire!? Les paraboles
Problèmes de pavages	Paver un sol 	Sous les pavages, la liberté!? Pavages réguliers, périodiques et non périodiques La Nature est-elle symétrique!? Où suis je!? Combien faut-il de satellites en orbite autour de la Terre pour savoir à tout instant où l'on se trouve?	Avec différentes formes réaliser un pavage sans trou Une mosaïque et des miroirs!: mettre le bon miroir à la bonne place pour réaliser la mosaïque en plus grand À partir des polyèdres réguliers et de divers kaléidoscopes, faire apparaître les solides de Platon
Problèmes d'empilement!	Remplir l'espace 	Bien empiler les oranges La sphère, de l'atome aux cristaux Empilements : un problème complexe (et ouvert)	Combien de disques peut-on placer dans un carré de côté 1, 2 3…100!? Boîtes de différentes formes, des billes!: empiler le plus de billes. Avec des petites pyramides, en faire une deux fois plus grande. Plusieurs activités de remplissage d'une forme donnée avec des formes régulières plus petites
Théorie des graphes	Relier d'un trait 	Des points et des traits, Königsberg, 1736 Quatre couleurs suffisent!! Allo!! m'entends-tu!?	Chemins dans un cube Colorier l'Afrique à l'aide de 6 couleurs maximum Un globe découpé en hexagone, chaque hexagone comporte un piquet!: trouver le chemin qui passe une et une seule fois par chaque piquet.

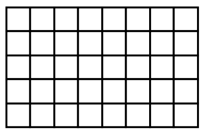
Approximation, et cryptographie	Pourquoi calculer!? 	Trompé par son ordinateur!? @cheter en toute sécurité Débruitage à Corfou	Calculer rapidement avec les mains!: 1+2+3+4+… avec mètre ruban 1/2+1/4+1/8+… avec cubes Illustration de la formule du calcul du volume de la sphère à l'aide d'un dispositif adéquat Illustration du calcul d'une intégrale
Mathématiques et architecture	Construire 	Tout en douceur Clothoïde Des ponts de génie!! Révolutionnaire, le moteur rotatif	Le plus court chemin!: une bille sur des pans inclinés de différentes courbures Problèmes de rigidité Roues à courbures constantes!: exemple d'un vélo aux roues carrées et d'!«!épitrochoide!». La forme des bouches d'égout Comment «!tourner!» un carré!?
Statistiques et probabilités	Estimer-Prévoir 	Tous dans la moyenne!? Comment acheter à crédit!? Gagner à l'euroloto	Distribution de Gauss!:table de Galton Course à n Jeu de stratégie à 2 joueurs Jeu de hasard en bois
Optimisation	Optimiser 	La nature est économe La Terre sous surveillance La cartographie Des formes efficaces	Surfaces minimales!:bulles de savon Balles en mousse dans un disque compressible
Epistémologie	Prouver démontrer 	Preuves et démonstrations De Pythagore à Wiles!: Théorème de Pythagore Théorème de Fermat Vrai et pourtant… indémontrable!!	Comment transformer une table pour 4 personnes en une pour 3!? À partir de 4 pièces bifaces, construire un carré puis un triangle Faire un carré avec 5 pièces non carrées Différentes démonstrations du théorème de Pythagore Puzzles!: Carré+ carré= carré!? Cube + cube= cube!?

Cette exposition, de par les thèmes abordés, a beaucoup de points communs avec celles proposées à *la Cité des Sciences* et au *Palais de la découverte* ainsi qu'avec les

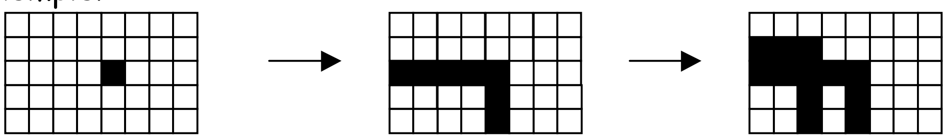
articles publiés dans la presse spécialisée. On retrouve également certaines des manipulations présentes dans les expositions parisiennes!: bulles de savon et surfaces minimales, table de Galton, démonstration «!matérielle!» du théorème de Pythagore... Cependant, dans l'esprit des *récréations mathématiques* du *Palais de la découverte,* l'interactivité ne se limite plus à la manipulation de ces curiosités mais demande une participation effective du public. À plusieurs reprises, il est amené à chercher des casse-tête, des puzzles, des jeux. Toutefois, là encore, tous comporte une solution sauf la construction «!cube+cube= cube!?» mais elle est très complexe, aussi le joueur doit-il avoir du mal à trancher entre impossibilité et difficulté.
Deux jeux à deux joueurs sont également proposés!:

- la course à 20 avec deux pions avançant de 1 ou 2 cases à chaque coup sur un plateau en bois. Le fait que la stratégie gagnante de ce problème soit accessible dès l'école primaire nous conduit à penser qu'il permet au public de rentrer effectivement dans une démarche de recherche et qu'elle pourra être féconde.

- un jeu de plateau dont voici l'énoncé!:



Une grille rectangulaire 5x8.
40 pions dont une face est blanche et une noire.
Chaque pion est placé sur une case, face blanche visible.
Quand on retourne un pion, on retourne tous les pions blancs qui sont à sa gauche et en dessous. Les pions déjà retournés restent noirs.
Un pion ne peut donc être retourné qu'une seule fois.
Exemple!:



Joueur 1 Joueur 2

Règle du jeu!: à tour de rôle les joueurs retournent un pion puis ceux qu'induit le retournement.
Est perdant le joueur qui retourne le dernier pion en haut à gauche.

Sorte de mixe entre *Le jeu du chocolat* et *Tout noir tout blanc* (dont les énoncés sont en annexe 10), ce problème est dans la lignée de certains de ceux que nous proposons dans le cadre du projet *Maths à modeler.* Il est possible de trouver une stratégie toutefois, compte tenu du nombre de cases et donc de possibilités, nous pensons que cela est laborieux, difficile et nécessite une recherche sur le support papier-crayon. Il aurait été préférable que la grille puisse être réduite ou que plusieurs tailles de grilles soient disponibles afin de favoriser la recherche et l'élaboration d'une stratégie gagnante.

Quoi qu'il en soit, la présence de ces deux jeux et des activités demandant la participation active du public dans cette exposition et au *Palais de la découverte*, montre qu'un petit nombre parmi les acteurs de l'institution loisir scientifique ne se limite pas à exposer ou montrer les mathématiques sous un ton attractif et cherche à enrichir l'offre en proposant des supports amenant à en faire.

3- Les chercheurs en mathématiques et le grand public!

La participation des scientifiques à la diffusion de la culture mathématique a majoritairement lieu, soit indirectement dans des activités de validation, soit directement dans le cadre scolaire, lors d'ateliers comme ceux mis en place par les associations *Animath* et *MATHs.en.JEANS* que nous avons déjà présentées.

Cependant, ils sont aussi amenés à aller à la rencontre du grand public lors d'événements tels que la Fête de la science. Afin d'avoir un aperçu de leur participation, nous allons nous référer à l'exemple grenoblois. On constate que d'années en années, ce sont toujours les mêmes laboratoires qui participent, aussi allons-nous étudier à tire d'exemple, quel a été le contenu de l'offre sous le chapiteau lors de la Fête de la science 2003 et 2004, afin d'évaluer quelle image des mathématiques peut être suscitée.

Pour les deux années, deux expositions étaient présentées. Une, proposée par l'équipe *Maths à modeler*, invitait à chercher des situations recherche ... nous ne nous étendrons donc pas plus sur sa présentation. L'autre était organisée par l'Université Joseph Fourier et le CNRS. En 2003, elle présentait les probabilités, les statistiques, mettait en garde contre les sondages, en 2004, elle abordait la théorie du chaos. Dans les deux cas, les documents et supports présentés étaient proches de ceux que nous avons relevés pour ce domaine dans les expositions présentées à *la Cité des Sciences* et l'UNESCO, quelques manipulations étaient proposées, la table de Galton par exemple, mais le public n'y faisaient pas de mathématiques. Par contre, le stand était animé par des chercheurs et permettait ainsi la rencontre, la discussion.

L'apport principal des scientifiques vis-à-vis de l'image des mathématiques peut donc, selon nous, consister à **montrer que les mathématiques sont toujours vivantes**, intéressantes, qu'elles ont une vie en dehors de l'enseignement, qu'il leur reste plein de choses à découvrir, et que **les hommes et femmes qui les font avancer, les pratiquent sont des gens comme tout le monde**.

4- L'animation socioculturelle: les mathématiques, une discipline problématique

Né en 1985, Le CIRASTI! (Collectif Inter associatif pour la Réalisation d'Activités Scientifiques et Techniques Internationales) regroupe 13 associations nationales d'éducation populaire[56]. Ces associations mettent en avant l'activité de l'enfant et sont

---

[56] Afa (astronomie), Céméa, CMJCF, CRILJ, EEDF, FNLèoLagrange, FFMJC, La ligue de l'enseignement, Les Francas, Les Petits débrouillards, Planète science, PIE (insectes).

toutes actives dans la diffusion de la culture scientifique, que ce soit en physique, chimie, mécanique, astronomie, biologie... mais aucune d'elles ne proposent d'activités destinées à la diffusion de la culture mathématique. Afin d'en comprendre les raisons, nous avons interrogé la responsable des animations de l'association *Rhône Alpes Petits Débrouillards*, association qui propose aux enfants à partir de 6 ans, des ateliers (ponctuels ou réguliers) de découverte des sciences, fortement axés non seulement sur une participation active du public mais surtout sur la mise en oeuvre de la démarche expérimentale à travers des questionnements issus de situations concrètes relevant principalement de la physique ou de la chimie. Par exemple, le public peut avoir à relever le défi de faire tenir en équilibre un bouchon planté sur un cure-dents. Il pourra essayer, faire varier différents paramètres, chercher à comprendre les raisons de la chute, afin de les contrer en rajoutant des éléments au système bouchon-cure-dents. Ainsi, il pourra découvrir petit à petit le concept de centre de gravité.

Cela fait quelques temps que la question de l'approche des mathématiques se pose au sein du réseau des petits débrouillards. En effet, selon notre 'correspondante locale' , «!*il est important de réconcilier le public avec cette discipline, présente dans la vie de tous les jours sans qu'on s'en rende compte* ». Pour ce faire, on doit «!*la rendre ludique.*!», proposer «!*des activités où le public apprend à réfléchir, a envie de chercher une solution, fait appel à une logique, fait des hypothèses, des calculs, argumente...*!», l'amener «!*à trouver une solution en étant astucieux, imaginatif, tout en étant rigoureux*!». Mais cela n'est pas chose aisée, car, à son avis, «!*l'abstraction est difficile et les maths sont trop abstraites pour être abordées comme les autres sciences, ce qu'on a l'habitude de faire, elles sont plus dans la démarche de recherche, c'est moins évident de proposer une situation concrète... Il est plus facile de faire faire autre chose que des maths et d'intégrer les maths dedans*».

Selon cette membre active, l'obstacle principal à la mise en place d'activités autour des mathématiques pour cette association reconnue comme moteur dans la diffusion de la démarche expérimentale est qu'elle ne parvient pas à reproduire ce qu'elle fait dans les autres sciences, du fait qu'elle est freinée par le caractère abstrait des mathématiques, obstacle à leur mise en situation concrète. Nous pensons que cela vient avant tout du fait que, comme elle le fait pour les autres sciences et comme cela a lieu habituellement à l'école, elle a à l'esprit la transmission de concepts notionnels et non de l'activité des mathématiques en elle-même. Elle ne semble donc pas voir les mathématiques comme une science expérimentale.

Ainsi, vulgariser les mathématiques par une participation active du public semble problématique, même pour les principales associations actives dans la diffusion de la démarche de recherche scientifique. Elles disent manquer d'outils pour concrétiser les problèmes afin de les rendre accessibles et attractifs et se tournent bien souvent vers une approche des mathématiques à travers leurs applications dans les autres sciences.

5- Deux initiatives spécifiques! : Aventure scientifique[57] et les universités d'été de la FFJM

Aventure scientifique

Créée il y a plus de 10 ans par un petit groupe de doctorants des filières scientifiques françaises, la société *Aventure scientifique* propose des séjours de vacances à dominante scientifique pour les jeunes de 6 à 18 ans, axés sur une *«!approche ludique et expérimentale!»,* dans le cadre desquels plusieurs thèmes mathématiques sont abordés.

Au regard de leur catalogue, nous retrouvons plusieurs des thèmes développés par les acteurs que nous avons déjà présentés!: les mathématiques des pyramides, les codes secrets, les probabilités, le nombre d'or, les fractales, l'infini, jeux de logique et échecs. Pour les 14/18 ans est proposée en plus une approche des mathématiques sociales et de la logique.

L'apport de cette initiative tient avant tout aux scénarii qu'elle met en place pour introduire ces notions!: cela peut être des exposés ou des observations d'objets ou de phénomènes comme nous l'avons déjà rencontré mais aussi des jeux de rôle, de construction, des simulations informatiques... Les jeunes semblent plus actifs dans la découverte des mathématiques que dans les expositions que nous avons présentées, les ateliers du *Palais de la Découverte* mis à part. Ils sont amenés à construire des objets mathématiques, à «!vivre!» certains problèmes. Nous n'avons pas pu assister à ces animations mais si l'on s'en tient à leur présentation, il semblerait, de plus, que les plus âgés, puissent y avoir effectivement l'occasion de chercher.

Les universités d'été de la FFJM

La *Fédération Française de Jeux Mathématiques* organise depuis 1990 une université d'été d'une semaine destinée aux enfants à partir de 11/12 ans (niveau 6ème). *«!Les mathématiques que l'on y pratique **ne sont pas du tout des mathématiques scolaires**, mais plutôt des **mathématiques ludiques** qui montrent qu'autour de ce que l'on apprend à l'école se trouvent de nombreuses **applications passionnantes** et **distrayantes** des mathématiques.!»*

> *«!Au programme:*
>
> *• Des ateliers de découverte des mathématiques (au choix du participant): Fractales, ensembles de points, constructions à la règle et au compas, perspective, nombres curieux...*
>
> *• Des travaux pratiques permettant au participant de se familiariser avec des outils liés aux mathématiques: programmation de*

[57] *Source!: http://www.aventure-scientifique.com*

calculatrices (HP49 ou TI 83), création de pages web, création de jeux, création d'un journal, astronomie,...

• Un tournoi multijeux.

• Des séances d'étude de textes en liaison avec les mathématiques ou les sciences en général.

• Des conférences : discrétisation d'une droite, images mentales en mathématiques,...

• Visite d'un site à caractère scientifique ou technique

• Des sessions de problèmes.

• Un rallye mathématique.

• Du sport (Tennis ou piscine)

• Beaucoup de plaisir !!!!»[58]

Au regard de cette présentation, nous ne pouvons que supposer que certains des ateliers, jeux, problèmes ou rallye proposés invitent les participants à faire des mathématiques au sens où nous l'entendons. Quoi qu'il en soit, nous retrouvons la distinction entre les mathématiques scolaires et celles de l'institution de loisir scientifique, présentées comme plus amusantes et comme source de nombreuses applications dans la vie quotidienne.

Ainsi, l'existence de telles offres montre qu'il est possible de proposer des activités conduisant à faire des mathématiques dans un cadre extrascolaire. Cependant, nous trouvons regrettable qu'elles soient isolées. En dehors de l'école, faire des maths dans le cadre d'un atelier, comme on peut faire de la physique, de la chimie, de l'astronomie, etc semble donc encore réservé à quelques privilégiés très motivés...

6- Le salon de la culture et des jeux mathématiques

À l'initiative de la CIJM[59], le salon de la culture et des jeux mathématiques existe depuis 1999. Il se déroule tous les ans à Paris, sur quatre jours, du jeudi au Dimanche, Place Saint Sulpice. Il réunit différents partenaires internationaux actifs dans la diffusion de la culture mathématique, notamment par le biais de jeux.

Même si le salon est ouvert le week-end, le public visé est avant tout élève ou étudiant étant donné que, selon ses organisateurs, «*!des dizaines d'ateliers et de très nombreux éditeurs permettent aux **collégiens comme aux étudiants** de découvrir les mille et une facettes du monde mathématique!*». Nous retrouvons donc là encore une

[58] *Source!: site http://ffjm.jeux-mathematiques.org/new/*

[59] *Comité International de Jeux Mathématiques*

référence à l'enseignement.

Les 25000 visiteurs annuels s'y voient proposer, dès l'âge de 4 ans, plusieurs animations, regroupant l'essentiel de ce que nous avions relevé par ailleurs, que ce soit dans certaines initiatives proposées au sein de l'école ou chez les autres acteurs de l'institution de loisir scientifique que nous venons de présenter!: des pliages, anamorphoses, maths et magie (par D.Souder), polyèdres et art, découpages, jeux (dont ceux présents au *Palais de la découverte* ou présentés par *MATHs.en.JEANS*), casse-tête, labyrinthe, jeux sur ordinateurs, topographie, astronomie, quizz de culture mathématique, tests logiques, Math'ernelle (espace d'éveil mathématique pour les tout petits), réglettes, littérature à contraintes en référence à l'OULIPO, puzzles...
Des expositions présentent aussi diverses facettes des mathématiques, que nous avons déjà relevées notamment dans les autres expositions et dans la presse!: «les mathématiques et l'art", «Mathématiques et nature» et «Mathématiques et vie quotidienne», «Rivages Mathématiques» (en partenariat avec le CCSTI Centre Science), «les métiers des mathématiques», «Laurent Schwartz» (exposition rendant hommage au grand mathématicien). D'autres sont axées sur des aspects plus notionnels également fréquemment développés: «Raconte-moi les graphes», «Raconte moi les fractales», «la cryptographie et le codage», «Raconte-moi le Nombre d'Or»...
On trouve aussi plusieurs jeux de société à «!thèmes mathématiques!» traditionnels comme le bridge, les échecs, le jeu de go, ou plus récents. Par exemple, le public peut y découvrir Mathador, Magix34 (tous deux jeux autour du calcul), et les jeux proposés par le magazine «!Tangente jeux et stratégie!»....
Enfin, chaque année, plusieurs concours sont organisés en partenariat avec différents organismes tels que le *Kangourou des mathématiques*, le magazine *Tangente,* la FFJM, etc...

Le *salon de la culture et des jeux mathématiques* est donc en quelque sorte une synthèse des différentes initiatives visant à développer la culture mathématique que nous avons présentées. Ainsi, le visiteur y a l'opportunité de rencontrer les mathématiques sous diverses formes. Des aspects de leur histoire lui sont présentés, des applications, des métiers... Certaines des animations proposées lui font toucher les mathématiques, les manipuler (pliages, découpages, puzzles...) **mais il peut aussi être amené à en faire, par le biais de certains des jeux présentés**.

7- De multiples rencontres amusantes et quelques invitations à chercher

Nous avons donc retrouvé chez les acteurs directs les thèmes et approches que nous avions relevés chez les acteurs indirects, notamment la présentation des mathématiques au public à travers leur histoire, leurs applications et leurs curiosités. La spécificité des initiatives des acteurs directs tient avant tout dans les démarches que nous avons relevées chez certains parmi eux qui diffusent des expositions ou proposent des ateliers, et amènent le public à être actif dans sa rencontre avec les mathématiques. Cependant, alors qu'il a de multiples occasions d'observer, toucher, manipuler des objets mathématiques, il n'est que rarement invité à faire effectivement des mathématiques au sens où nous l'avons défini. Certains acteurs de la diffusion de la culture mathématique apparaissent réfrénés dans leur envie de faire découvrir les mathématiques à travers la démarche expérimentale, alors que cela est couramment répandu pour les autres sciences. Une des causes de cette carence serait la difficulté de trouver des outils adaptés ou disponibles. Nous pensons que cela peut aussi être dû à une vision des mathématiques réduite à une juxtaposition de savoirs notionnels, vision qui conduit à occulter leurs aspects expérimentaux. Convier le public à chercher en mathématiques semble donc réservé à quelques actions et loin d'être accessible au plus grand nombre.

Nous allons par la suite chercher à synthétiser quelles peuvent être les influences de l'ensemble des initiatives que nous avons relevées, directes ou indirectes, sur l'image du grand public vis-à-vis des mathématiques.

III- HYPOTHESES SUR L'IMAGE DES MATHEMATIQUES DANS L'INSTITUTION «LOISIR SCIENTIFIQUE»

Notre étude des différentes actions menées en vue de la diffusion de la culture mathématique, est certes loin d'être exhaustive compte tenu des nombreuses initiatives isolées susceptibles d'exister, mais nous permet tout de même de constater de grandes disparités entre d'une part les acteurs généralistes comme la télévision, la radio, qui parlent peu ou pas de mathématiques, les journaux et revues, où, mis à part les magazines spécialisés, elles ne sont visibles qu' au sein de la rubrique «!jeux!», Internet, qui regorge de sites proposant là aussi des jeux et les acteurs spécialisés!: édition, musées des sciences, CCSTI, animation scientifique, qui les montrent sous des angles multiples et variés.
Nous allons chercher quelle peut être l'image des mathématiques suscitée par ces différentes approches.

III-1 QUE PEUT PENSER «! MONSIEUR TOUT LE MONDE! » DES MATHEMATIQUES! ?

Pas de maths à la télé, très peu à la radio... Et dans les journaux!? des jeux. Sur Internet!? des jeux...

Les mathématiques sont très peu présentes chez les acteurs généralistes, qu'ils soient directs ou indirects, mis à part sous la forme de jeux. Nous pensons que cela peut induire deux caractéristiques sur l'image des mathématiques que peut avoir le grand public non sensibilisé.

Tout d'abord, la première caractéristique peut être développée si le grand public non sensibilisé ne lit pas de journaux et de revues et préfère regarder la télé, les mathématiques pourront être perçues, au regard de leur absence dans les médias de masse, comme une science ayant très peu de lien avec la vie courante et dont la transmission des connaissances est fortement rattachée à l'école.

D'autre part, s'il lit la presse et joue, au regard des jeux proposés, les mathématiques peuvent alors apparaître, d'une part, comme la reine des disciplines pour «!se creuser la tête!», sur des problèmes de logique principalement, et cela «!avec plaisir!», les problèmes étant présentés sous forme ludique. Le public cherche les jeux pour s'amuser et a donc une vision très différente de celle qu'il peut (ou a pu) avoir à l'école. Du fait de ces différences nous ne sommes d'ailleurs pas surs qu'il intègre ces deux appréhensions dans son image des mathématiques, cela d'autant plus que les modèles mathématiques ne sont généralement pas explicités ou accessibles. Aussi, nous nous interrogeons!: **le grand public identifierait-il deux types de mathématiques! : celles de l'école, les «! vraies! » et celles de l'institution de loisir scientifique, les «! pour s'amuser! »! ?**

Cependant, les problèmes proposés comportent toujours une solution et il faut bien souvent trouver «!le truc!». Cette vision très éloignée de ce qu'est la recherche en mathématiques nous conforte donc dans notre idée qu'il est important, dans l'état actuel, de donner aux élèves de véritables occasions de chercher, comme nous l'avons souligné dans la première partie de cette thèse, l'école apparaissant pour beaucoup la seule institution où ils sont susceptibles d'appréhender cet aspect des mathématiques.

Compte tenu de ces deux caractéristiques, nous pouvons supposer que, globalement, l'image qu'il en aura alors peut être rapprochée de celle d'un élève de l'institution scolaire, niveau collège ou lycée. Aussi allons-nous dans le chapitre suivant chercher à établir quel peut être le rapport personnel aux mathématiques des sujets de l'institution scolaire par le biais d'un questionnaire posé du primaire à l'université.

III-2 CULTURE MATHEMATIQUE ET ACTEURS SPECIALISES! : VOIR, IDENTIFIER, MANIPULER... FAIRE! ?

Alors que le grand public a très peu d'occasion de rencontrer les mathématiques en dehors de l'école, un public, que nous jugerons d'initié, peut compléter cette rencontre par celles proposées par les acteurs spécialisés dans la diffusion de la culture scientifique. Cependant, de nombreuses initiatives existent, pour tous les âges, pour les sciences dites expérimentales, mais très peu sont développées vis-à-vis des

mathématiques, qui, à la différence des autres sciences, nécessitent semble-t-il d'être rendues «!attrayantes!» avant d'être «!vulgarisables!».
Parmi les quelques initiatives que nous avons recensées, plusieurs méthodes d'approches peuvent être distinguées:

- **S'appuyer sur l'histoire des mathématiques** et de leurs découvertes!: portraits de mathématiciens plus ou moins romancés, histoire des découvertes (la numération, le zéro par exemple)
- **Montrer où sont les mathématiques!** : leur place, leur contribution dans la vie quotidienne, par exemple, les mathématiques dans la nature
- **Faire du spectaculaire!** : présentation de leur «!bestiaire!»! accompagnée le plus souvent d'une action du public: table de Galton, surfaces minimales et bulles de savon, fractales...
- **Expliquer ce que sont les mathématiques** en abordant par exemple des notions transversales aux mathématiques comme la modélisation, la démonstration, ou à travers le témoignage, la rencontre de mathématiciens. On peut noter que cette approche est plutôt rare.
- **Inciter les gens à faire des maths**, à les fabriquer!: quelques initiatives isolées proposent des jeux mathématiques mais les problèmes sont le plus souvent fermés et comportent tous une solution. De plus, le modèle mathématique n'étant pas toujours accessible, le hasard a donc le plus souvent une large place dans la recherche.

Les thèmes abordés par le biais de ces différentes approches sont bien souvent les mêmes de l'une à l'autre et sont proches de ceux développés au collège ou au lycée, agrémentés d'un ton plus ludique et de quelques curiosités.

Compte tenu des initiatives que nous avons recensées, nous pensons que les acteurs spécialisés dans la diffusion scientifique et en particulier mathématique peuvent amener à considérer que les mathématiques sont:

- une science faite par des hommes et riche de nombreuses découvertes
- une science qui a une longue histoire, transversale à plusieurs civilisations
- une science qui a de nombreuses applications dans notre vie quotidienne
- une science qui a mis à jour et étudie des objets troublants!: l'infini, les fractales, la table de Galton...
- une science qui regroupe différentes branches!: arithmétique, géométrie, statistiques et probabilité, combinatoire, théorie des graphes, logique...
- une science qui peut être source de plaisir, d'amusement.

Alors que l'on retrouve dans cette vision des mathématiques des éléments en communs avec la manière dont elles sont abordées à l'école, d'autres par contre diffèrent totalement!: les savoirs mathématiques sont couramment mis en relation avec leurs applications dans la réalité quotidienne, des découvertes mathématiques récentes sont présentées alors qu'elles ne sont abordées que tardivement dans l'enseignement comme les probabilités, les fractales, les graphes, enfin tout est mis en oeuvre pour que le public trouve du plaisir avec les mathématiques, alors que cela est loin d'être une des priorités dans l'institution scolaire.

Si nous revenons à la définition de la culture mathématique que nous avons formulée au début de ce chapitre, nous pensons que les initiatives mises en place participent à la diffusion de cette culture au niveau de ses deux premiers aspects !: **identifier où sont les mathématiques et pouvoir juger de leur rôle dans le monde**.

Par contre, le faible nombre d'actions développées abordant l'épistémologie d'une part et proposant des activités de recherche d'autre part nous amène à penser qu'en dehors de ce qu'il a pu rencontrer à l'école, le public a **très peu l'occasion de comprendre ce que sont les mathématiques, leurs fondements ainsi que d'avoir des éléments pour savoir les utiliser dans la vie quotidienne.**

En quelque sorte ce qui est proposé justifie le fait de faire des mathématiques mais ne donne que très peu de clefs pour comprendre ce que cela signifie.

Cela peut s'expliquer par le fait que faire faire des mathématiques en dehors de l'école est jugé a priori difficile comme l'a souligné la responsable des Petits débrouillards Rhône-Alpes, association très active dans la diffusion de la démarche expérimentale auprès des jeunes *: «!faire faire des maths à l'école primaire de façon ludique me semble beaucoup plus facile que de le faire en dehors de l'école.!»*.

Selon elle, cette difficulté tient du fait que «!*les maths sont trop abstraites pour être abordées comme les autres sciences, ce qu'on a l'habitude de faire. Elles sont plus dans la démarche de recherche, c'est moins évident de proposer une situation concrète…!*»

Or, comme le souligne le Sénat dans son rapport, il nous semble fondamental que le grand public prenne conscience, *que «!la connaissance scientifique est le résultat complexe d'une construction théorique et technique qui repose sur une définition précise des concepts utilisés, et des protocoles expérimentaux de validation de ces hypothèses.»* et que cela ne peut se faire sans *«!la participation active du sujet qui apprend.!»* [Sénat, 2003, p44]

Au regard de notre étude, nous faisons l'hypothèse que si le grand public n'a que très peu d'occasions de faire des mathématiques, ce n'est pas un manque de volonté de la part des participants à la diffusion de la culture mathématique mais c'est avant tout dû à une vision réduite de l'activité de recherche en mathématiques et au manque d'outils adaptés. Aussi, pensons-nous que, compte tenu du fait qu'elles sont accessibles dès l'école primaire comme nous l'avons montré dans la première partie de notre thèse, les situations recherche, présentées sous forme de jeu, peuvent être un support pour combler ce «!presque vide!» et amener le public à mettre en oeuvre une démarche de recherche en mathématiques dans un cadre de vulgarisation.

Nous allons donc chercher à vérifier cette hypothèse par le biais d'une expérimentation au sein de l'institution loisir scientifique que nous analyserons au chapitre II.3.

Chapitre II.2

ETUDE DU RAPPORT PERSONNEL AUX MATHEMATIQUES

«- À ton avis, ceci est-il un problème de mathématiques!?
- Non.
- Et pourquoi!?
- Parce qu'il faut réfléchir[60]»

Notre étude des différentes actions visant à la diffusion de la culture mathématique existant (ou pas) chez les acteurs de l'institution de loisir scientifique, nous a amenée à supposer l'existence d'un lien fort entre les mathématiques et l'école. Dès lors, l'image des mathématiques de «!Monsieur tout le monde!» doit être fortement rattachée à leur enseignement, ce serait donc la rencontre tenue dans le cadre scolaire qui contribuerait principalement à construire le rapport personnel de tout un chacun aux mathématiques, défini ainsi par Chevallard!:

> *«!Supposons que la personne X entre dans l'institution I et soit O un objet institutionnel pour I. L'objet O va se mettre à «!vivre!» pour X sous la contrainte du rapport institutionnel $R_I(O)$. En d'autres termes, un rapport personnel R(X,O) va se construire, ou va changer, sous la contrainte $R_I(O)$.!»* [Chevallard 1992]

Aussi allons-nous chercher à identifier quel peut être le rapport personnel d'un élève de l'institution scolaire française vis-à-vis des mathématiques, et cela à différents niveaux scolaires. Nous souhaitons ainsi savoir quel point de vue sur les mathématiques l'enseignement en mathématiques français peut induire, du fait des outils proposés, peu enclin à «!faire faire des mathématiques aux élèves!» au sens où nous l'entendons, comme nous l'avons montré à partir de notre étude des manuels de primaire, et quelles peuvent être les différences avec l'image qu'en ont les chercheurs

[60] *réponse d'un élève de CM2 recueillie au cours de nos expérimentations.*

en mathématiques. Cela nous permettra d'avoir des éléments pour évaluer ensuite quels peuvent être les apports des situations recherche.

Pour cela, nous avons choisi de partir des conceptions que pouvaient avoir les élèves d'un problème de mathématiques, élément indispensable à toute activité mathématique, comme nous l'avons déjà souligné. Un questionnaire a été distribué comportant des énoncés de problèmes. Dans chaque cas, il n'était pas demandé de résoudre les problèmes proposés, mais il était possible de le faire si cela aidait à répondre. Les personnes interrogées devaient dire si pour elles, il s'agissait oui ou non de problèmes de mathématiques en justifiant leur réponse. Dans l'intitulé, nous n'avons pas fait de distinction entre les termes exercice et problème car nous avons supposé que ces deux termes avaient le même sens au moins pour les élèves. En effet, tous les manuels que nous avons étudiés utilisaient «résolution de problèmes» comme intitulé de chapitres alors que, selon notre définition, seuls des exercices étaient proposés, comme nous l'avons déjà montré au chapitre I.1.

I-LE QUESTIONNAIRE

I-1 CHOIX DES PROBLEMES

Nos choix de problèmes ont été guidés par plusieurs variables didactiques. Tout d'abord la forme ostensive du problème:

- **Présence d'une question**, **forme de la question** (question posée sous une forme couramment utilisée dans les exercices proposés dans les manuels (notée QC) ou question posée sous une forme différente (notée QD)
- **Présence de marqueurs à caractère mathématique** (dessin géométrique, vocabulaire, présence de nombres dans l'énoncé) ou non (colorier)
- **Cadre du problème**. Pour cela nous nous sommes inspirée des différents types de problèmes que nous avons recensés dans l'étude des manuels présentée dans la partie 1 ainsi que dans l'institution de loisir scientifique et en particulier sur Internet. Ainsi, les énoncés ont été choisis soit dans le cadre de la déduction logique, de la géométrie, de l'arithmétique ou de la combinatoire.

Nous cherchons ainsi à identifier quels critères apparaissent aux yeux des élèves comme déterminants pour garantir le statut mathématique à un énoncé.

Nous avons également fait varier **le type de tâche!**: calculs, mesures, réflexion/déduction, colorier...!ainsi que le fait que **le problème ait un sens ou pas,** en particulier en incluant un problème dit absurde.

De plus, nous avons choisi de proposer des énoncés de degré de difficulté tel que même de jeunes élèves puissent répondre au questionnaire.

Ces variables ont été ainsi distribuées!:

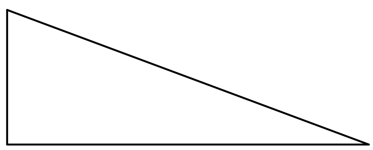
énoncés	nombres	question	marqueurs langagiers ou autres	type de problème	type de tâche	sens
1-champ			triangle rectangle surface, moitié	géométrie arithmétique	explicite: coloriage implicite: calcul de surface	X
2-passeur		X QC		logique	déduction	X
3-bus	X	X QC		arithmétique	calculs	
4-brioche		X QD		logique	déduction	X
5-gâteaux		X QD	triangle losange combien	combinatoire	Arbre multiplication	X
6-pull	X	X QC	combien	arithmétique	calculs	X

Finalement, nous sommes donc parvenue à un questionnaire comportant 6 énoncés, certains issus de l'institution scolaire (énoncés 1 et 6), d'autres de l'institution loisir scientifique (énoncé 2), d'autres enfin présents dans les deux (énoncés 4 et 5). **Tous sont donc reconnus institutionnellement comme problèmes de mathématiques.**

I-2 LE QUESTIONNAIRE

<u>Enoncé 1:</u>

Un agriculteur possède un champ de la forme suivante!:



Il souhaite y planter une moitié de blé et une moitié de maïs.
Colorie en jaune la surface où il doit planter du maïs et en vert celle du blé.

❑ Oui, c'est un problème de mathématiques ❑ Non, ce n'en est pas un.

Pourquoi:

<u>Enoncé 2</u>

Une dame doit emmener de l'autre côté d'une rivière un renard, un canard et un sac de maïs. Elle ne peut pas laisser le renard et le canard ensemble, car le renard mangerait le canard. Elle ne peut pas laisser le canard et le maïs ensemble, car le canard mangerait le maïs.
Comment peut-elle transporter ses trois charges sur l'autre rive si elle ne peut emmener qu'une charge à la fois!?

❏ Oui, c'est un problème de mathématiques ❏ Non, ce n'en est pas un.

Pourquoi!:

Enoncé 3:

Dans un bus, il y a 30 personnes.
Au premier arrêt, 3 personnes montent et 2 descendent.
Au deuxième arrêt, 5 personnes montent et une descend.
Au troisième arrêt, 2 personnes montent et 10 descendent.
A quelle vitesse a roulé le bus!?

❏ Oui, c'est un problème de mathématiques ❏ Non, ce n'en est pas un.

Pourquoi!:

Enoncé 4!:

Sur la table, il y a des gâteaux pour le goûter!: un croissant, une brioche, un palmier, un pain au chocolat et un pain aux raisins. Pierre a invité ses camarades et chacun doit avoir un gâteau.
Manon n'aime pas le chocolat et déteste les croissants.
Isabelle a choisi le pain aux raisins.
Pierre et Sophie n'ont pas voulu de pains au chocolat.
Pierre et Julie sont les seuls à aimer le palmier.
Qui a mangé la brioche!?

❏ Oui, c'est un problème de mathématiques ❏ Non, ce n'en est pas un.

Pourquoi!:

Enoncé 5!:

Paul organise une petite fête. Il décide de fabriquer des gâteaux rigolos, tous différents.
Il veut faire des gâteaux ronds ou triangulaires ou en forme de losange.
Il veut aussi qu'ils aient goût au chocolat ou à la fraise ou à la pomme.
Il se demande combien de sortes de gâteaux différents il va pouvoir fabriquer. Peux-tu l'aider!?

❑ Oui, c'est un problème de mathématiques ❑ Non, ce n'en est pas un.

Pourquoi!:

Enoncé 6!:

Pour faire un pull à Natacha, sa grand mère a acheté 4 pelotes de laine à 3 euros pièce et 4 boutons à 2,50 euros pièces. Combien a t!'elle dépensé pour le pull!?

❑ Oui, c'est un problème de mathématiques ❑ Non, ce n'en est pas un.

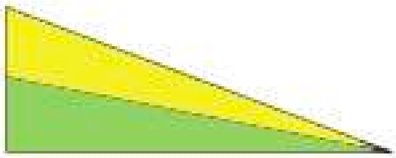
Pourquoi!:

I-3 ANALYSE MATHEMATIQUE

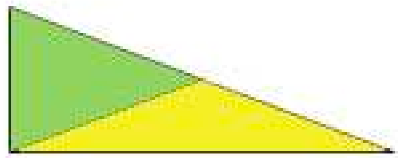
Nous allons maintenant analyser chacun des énoncés proposés afin d'identifier leurs caractéristiques en vue de faire des hypothèses sur les réponses susceptibles d'être apportées.

1- Le champ

Il s'agit d'un problème inspiré par un exercice proposé dans un manuel de primaire. Il comporte plusieurs solutions, En effet, rien n'est dit sur la manière d'obtenir les deux moitiés, on doit découper le rectangle en deux parties de même surface mais cela peut être fait de différentes manières. Par exemple:

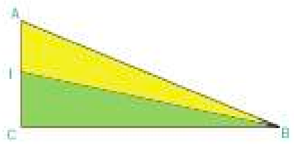


exemple 1



exemple 2

Les deux parties maïs et blé peuvent être inversées. On montre facilement que les deux parties verte et jaune sont de même aire. A titre d'exemple, en voici une démonstration dans le cas de l'exemple 1.
Notons A, B et C les sommets du triangle et I le milieu du segment [AC].



La formule du calcul de l'aire d'un triangle!nous amène à :
aire (IBC)=(1/2) x BC x CI
aire (ABI)!= (1/2)x AI x BC
Or CI= AI car I est le milieu de [AC]
Donc aire (IBC)= aire (ABI)!

On peut aussi choisir de planter alternativement un grain de maïs, un de blé, ou deux, puis deux etc...!à condition de mettre autant de grains de blé que de maïs mais nous supposons que les solutions que nous avons proposées, suggérées par les termes "moitié" et le "la" de la surface, sont plus susceptibles d'être fournies.

2- Le passeur

Cet énoncé est la version modifiée d'un énoncé célèbre parmi les jeux mathématiques «!le passeur, la chèvre, le loup et le chou!». Il a été notamment repris dans la littérature enfantine sous forme de conte[61] et est présent dans de nombreux sites de jeux mathématiques, ateliers, musées... Selon le Hors série Tangente sur les jeux mathématiques, il aurait été inventé par le précepteur de Charlemagne!!
Nous n'avons pas choisi la formulation la plus connue afin que les élèves qui le connaîtraient ne soient pas influencés par son caractère familier[62].
Il ne comporte pas de nombres, sa résolution implique la mise en oeuvre d'une démarche de recherche, d'un raisonnement déductif afin de trouver une des deux solutions en tenant compte des contraintes. En voici une rédaction possible!:
Notons D la dame, C le canard, M le maïs et R le renard.
Selon les contraintes de l'énoncé, les couples (C,M) et (C,R) sont tous les deux impossibles. Reste donc (M,R).
Donc, au premier passage, D fait traverser C et laisse R et M. Elle revient.
Elle a le choix!: soit elle emmène M soit elle emmène R.

---

[61] *L'ogre, le loup, la petite fille et le gâteau, Philippe Corentin, l'école des loisirs, 1995.*

[62] *On le retrouve sous cette formulation par exemple sur plusieurs sites Internet ainsi qu'au musée des sciences de Copenhague où il est présenté sous une forme matérielle (personnages, barques, maquette).*

Supposons qu'elle emmène M.

Une fois arrivée de l'autre côté, elle ne peut laisser (C,M) puisqu'il fait partie des couples interdits. Elle laisse donc M et reprend C. **Cette étape nécessite de s'autoriser à pouvoir ne pas revenir à vide, du fait que rien dans l'énoncé ne l'interdise, type de décision ce qui n'est pas habituel dans l'enseignement des mathématiques (alors que cela est très fréquent dans les situations recherche).**

Elle retraverse. Dépose C, prend R.

Traverse à nouveau. Pose R. Sur la deuxième rive, se trouve donc (M,R).

Puis elle va chercher C.

Supposons qu'elle emmène R.

Une fois arrivée de l'autre côté elle ne peut laisser (C,R). Elle laisse donc R et reprend C.

Elle retraverse. Dépose C, prend M. Traverse à nouveau. Pose M. Sur la deuxième rive, se trouve donc (M,R). Puis elle va chercher C.

La résolution comporte donc deux étapes, guidées par la satisfaction des contraintes.

3- Le bus

Nous considérons que cet énoncé est dans la lignée de «l'âge du capitaine» et autres énoncés proposés par l'IREM de Grenoble lors de son évaluation réalisée dans les années 80. Il s'agit d'un problème absurde dans le sens où il comporte des données numériques et une question sans rapport avec ces données.

Nous cherchons par ce biais à identifier en quoi la présence de nombres peut tout de même accorder à un énoncé incohérent un statut mathématique.

Toutefois, contrairement aux résultats de l'expérimentation de l'IREM, nous pensons qu'il sera majoritairement reconnu comme non mathématique car dénué de sens. En effet, dans le cas du questionnaire, le contrat didactique n'est pas le même que celui mis en place par l'IREM puisqu'il est demandé à celui qui répond au questionnaire d'avoir un regard critique sur les énoncés qui lui sont proposés alors que dans le cadre de l'IREM, le statut mathématique des énoncés n'était pas remis en cause.

4- La brioche

Cet énoncé provient d'un cahier d'activités pour les élèves de CM2: *«Français-Maths, tout le programme»*, Bordas, 1998. Il figurait dans une des activités intitulées «Remue méninges», répertoriées sous la rubrique «problèmes de logique».

Cinq enfants ont mangé un gâteau différent pour leur goûter: un croissant, une brioche, un palmier, un pain au chocolat et un pain aux raisins.

Manon n'aime pas le chocolat et déteste les croissants.

Isabelle a choisi le pain aux raisins.

Pierre et Sophie n'ont pas voulu de pains au chocolat.

Pierre et Julie sont les seuls à aimer le palmier.
Retrouve ce que chacun des 5 enfants a mangé pour son goûter.

	Manon	Isabelle	Pierre	Sophie	Julie
croissant					
brioche					
palmier					
pain au chocolat					
pain aux raisins					

Le fichier comportait plusieurs autres problèmes de ce genre, le tableau n'était pas fourni systématiquement.
Sa résolution implique la mise en oeuvre d'une démarche de recherche, d'un raisonnement déductif, cela d'autant plus que le tableau n'était pas fourni dans le questionnaire.

Notons les prénoms des enfants par leurs initiales et C le croissant, B la brioche P le palmier, Pc le pain au chocolat et Pr le pain aux raisins.
Remplissons le tableau en tenant compte des contraintes de l'énoncé.
«!P1!: Manon n'aime pas le chocolat et déteste les croissants!». Les couples (M, Pc) et (M,C) sont donc interdits. Nous grisons donc les cases correspondantes dans le tableau.
«!P2!: Isabelle a choisi le pain aux raisins!». Nous mettons donc une croix dans la case (I,Pr) et grisons toutes les autres cases de la ligne correspondant à Pr, puisque aucun autre enfant ne mangera le pain aux raisins, ainsi que celles de la colonne I.
«!P3!: Pierre et Sophie n'ont pas voulu de pains au chocolat!» implique de griser les cases (P,Pc) et (S,Pc).
«!P4!: Pierre et Julie sont les seuls à aimer le palmier.!» Cela entraîne indirectement que les couples (M,P) et (S,P) sont à rejeter.
Maintenant que nous avons traduit toutes les contraintes de l'énoncé, nous disposons du tableau suivant!:

	M	I	P	S	J
C	P1	P2			
B		P2			
P	P4	P2		P4	
Pc	P1	P2	P3	P3	
Pr	P2		P2	P2	P2

qu'il nous reste à interpréter.
A sa lecture,nous pouvons en déduire que!:

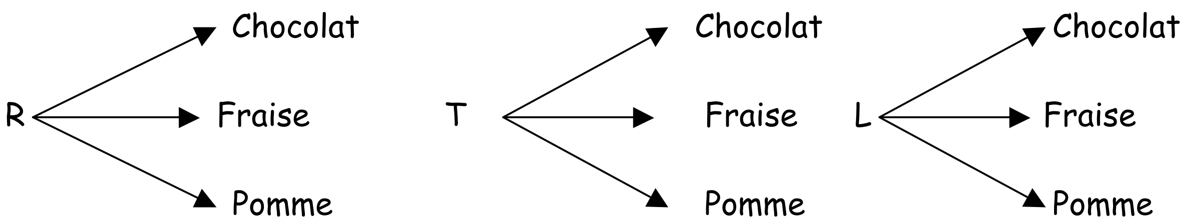
La brioche est la seule chose qu'a pu manger M. Hormis (M,B), nous grisons donc les autres cases de la ligne B!. On peut donc répondre d'ores et déjà à la question posée!: c'est Marion qui a mangé la brioche.
Poursuivons tout de même la résolution.
Dans la colonne S, il ne reste que (S,C) donc S a mangé C et nous grisons donc (P,C) et (J,c) les deux dernières cases de la ligne C non encore grisées.
(P,P) est la seule case qui est encore blanche dans la colle P, donc Pierre a mangé le palmier et on grise(J,P).
Dans la colonne J il ne reste que (J,Pc) donc J a mangé Pc.
La tableau final est donc!:

	M	I	P	S	J
C	P1	P2		X	
B	X	P2			
P	P4	P2	X	P4	
Pc	P1	P2	P3	P3	X
Pr	P2	X	P2	P2	P2

5- Les gâteaux

Cet énoncé est inspiré d'un énoncé proposé dans le manuel Diagonale CM1, Nathan, 1993, p150, mis en annexe 3.
Il n'y a pas de nombres dans l'énoncé mais on y parle de formes géométriques. Le contexte du problème est un contexte familier.
Il s'agit d'un problème de dénombrement. Si on n'a jamais rencontré ce genre de problème, sa résolution implique d'avoir recours soit à une recherche exhaustive, soit à un arbre de combinatoire ou à un tableau, sinon, il suffit d'utiliser directement la multiplication.!: 3x3=9.
Partons des formes possibles notées R, T, L. Voici, à titre d'exemple, deux stratégies de résolution.

S1!: résolution avec un arbre.



On compte finalement le nombre de sortes de gâteaux!: 9.

S2!: Pour chaque forme, le nombre de gâteaux possible sera identique. Déterminons le par exemple pour R. 3 goûts sont disponibles donc 3 sortes de gâteaux.
Comme il en est de même pour chacune des formes, au total, Paul pourra fabriquer 3+3+3!: 9 sortes de gâteaux.

6- Le pull

Il s'agit d'une tâche classique dans l'enseignement des mathématiques, tant par la forme que par le type de techniques induites pour la résolution. Il provient du cahier d'activités "*Français, Maths" tout le programme de CE1*, Bordas, 1998. Il est donc a priori sans difficulté même pour des "cycle 3", sa résolution conduisant à un calcul faisant appel à la technique de l'addition et la multiplication des décimaux!: 4x3+4x2,5

Nous supposons qu'il sera reconnu comme un problème mathématique par tous, mis à part des réponses prenant en compte plus l'aspect problématique que l'aspect mathématique. L'objectif de sa présence au sein du questionnaire est de mesurer la qualité des réponses apportées, de s'assurer que les élèves ont bien compris ce qu'il leur était demandé.

II-ANALYSE DIDACTIQUE DU QUESTIONNAIRE

II-1 REPONSES DES CHERCHEURS

Dans un premier temps, nous avons fait remplir notre questionnaire à des chercheurs en mathématiques. Nous souhaitions ainsi identifier quelles peuvent être les réponses d'experts reconnus en mathématiques. Afin d'avoir un point de vue le plus riche possible, nous aurions aimé que les chercheurs interrogés oeuvrent dans plusieurs branches des mathématiques mais les seuls qui ont bien voulu consacrer un peu de leur temps à répondre à nos questions sont ceux de notre laboratoire, qui regroupe mathématiques discrètes, informatique quantique et recherche opérationnelle.

Arguments énoncés par les chercheurs interrogés

Enoncés	oui	Arguments associés	non	Arguments associés
Champ	15	**Raisonnement mathématique** ▪ Après observation de la forme du contenu du champ, il faut imaginer un découpage puis raisonner pour prouver que les parties sont de surfaces égales. ▪ Il faut appliquer un raisonnement pour justifier la réponse. ▪ Il faut réfléchir à la question du partage mais la question n'est pas formulée de manière mathématique ▪ Nécessité d'abstraction et de		

		recherche ▪ Plusieurs solutions possibles!; Problème ouvert ▪ Si on remplace 'la' surface par 'une' surface(2) **Modélisation** ▪ On pourrait trouver une formulation mathématique ▪ problème de géométrie et raisonnement ▪ partition d'un ensemble en deux parties c'est de la géométrie (2) ▪ calcul géométrique ▪ objets géométrique (triangle) et numérique (moitié) mais il y a beaucoup de solutions. ▪ il faut savoir la moitié de la surface d'un triangle ▪ partage d'aire		
Passeur	13	**Raisonnement mathématique** ▪ c'est de la logique (2) ▪ Il faut imaginer les scénarios possibles pour prouver qu'aucun d'entre eux ne satisfait les contraintes **Modélisation** ▪ trouver le bon modèle ▪ formalisation en termes d'ensembles et de relation ▪ possibilité de modéliser + esprit de déduction ▪ problème combinatoire, élimination des cas!; (4) ▪ Exemple classique en théorie des graphes. ▪ On définit un modèle (transformation, état) et on l'étudie ▪ problème combinatoire, modélisation utile.	2	**Raisonnement mathématique** ▪ ce n'est qu'un problème de bon sens voire de logique **Modélisation** ▪ pas de modélisation ou d'abstraction à faire
Bus	4	**Raisonnement mathématique** ▪ Après observation des données et de la question, un raisonnement simple permet de prouver qu'il n'y a pas les données nécessaires pour trouver la réponse **Modélisation** ▪ on demande une valeur numérique, les données ne permettent pas de le résoudre. ▪ on définit un ensemble de	11	**Raisonnement mathématique** ▪ je ne trouve pas qu'il faille faire un raisonnement mathématique pour répondre à ça. C'est juste une blague. ▪ absence de logique et de déduction ▪ ça a l'air d'un problème mathématique mais il n'y a pas l'information requise pour répondre mais le fait de

		contraintes et on cherche une solution. Toutes les vitesses sont valides. ▪ on peut définir un modèle à partir de l'énoncé		déterminer cette impossibilité peut nécessiter un certain raisonnement **Modélisation** ▪ je n'arrive pas à trouver des outils mathématiques pour répondre ▪ question non liée aux informations données (6) Autres!: pas de problème, énoncé absurde
Brioche	13	**Raisonnement mathématique** ▪ un raisonnement par satisfaction de contraintes permet d'éliminer les combinaisons non satisfaisantes, ce qui réduit l'espace de recherche jusqu'à une solution ▪ c'est un problème de logique (7) ▪ problème de propagation de contraintes, raisonnement logique et déductif ▪ faire abstraction de l'énoncé. Aspect logique et déductif **Modélisation** ▪ trouver le bon modèle ▪ formalisation en termes d'ensembles et de relation ▪ c'est un problème de couplage dans un graphe biparti.	2	**Raisonnement mathématique** ▪ ce n'est qu'un problème de bon sens voire de logique Autres!: Pierre et Julie veulent avoir le palmier, ce qui n'est pas réalisable.
Gâteaux	13	**Modélisation** ▪ oui à condition qu'on fasse un petit pas en plus en direction de la généralisation, n objets, p couleurs->np objets différents ▪ il faut un peu modéliser (2) ▪ trouver le bon modèle ▪ il faut raisonner et calculer. On pourrait donner une formulation mathématique ▪ exercice de multiplication ▪ besoin de modélisation et de raisonnement ▪ problème de mathématiques discrètes (2) ▪ problème de combinatoire (5)	2	▪ réponse non déterminée ▪ seulement du calcul
Pull	8	**Modélisation** ▪ il faut raisonner et calculer. On pourrait donner une formulation	7	**Modélisation** ▪ c'est un problème de calcul une forme assez appauvrie des

		mathématique. ▪ calcul arithmétique (5) ▪ somme et produit ▪ il y a une équation sous jacente à déterminer et à résoudre		mathématiques ▪ seulement du calcul (3) ▪ pas de modélisation, pas de raisonnement juste du calcul (2) Autre!: c'est peut être des maths mais pas un problème

Un premier constat s'impose!: seul un énoncé fait l'unanimité. Relever des mathématiques ne signifie donc pas la même chose pour chacun des mathématiciens interrogés.

Au regard des réponses apportées, nous pouvons dégager deux types d'arguments pour justifier qu'il s'agit de mathématique ou pas. Ils se réfèrent tous deux à l'activité qui doit être mise en place pour résoudre le problème : un premier type d'arguments renvoie à la mobilisation d'un modèle (en en parlant ou en donnant le modèle), l'autre s'appuie sur le fait qu'il faut mettre en place un raisonnement mathématique et donc avoir recours au raisonnement hypothético-déductif. Parmi ceux-là, certains classent l'énoncé *Bus* comme un problème mathématique car le fait de déterminer qu'il est absurde demande de mettre en oeuvre un raisonnement logique.

Les différences de réponses sont l'indice de points de vue divergents à deux niveaux. Avoir recours uniquement à un raisonnement logique au sens courant du terme n'est pas pour tous synonyme d'une activité mathématique puisqu'un chercheur rejette les énoncés *Passeur* et *Brioche* car *«!ce ne sont que des problèmes de bon sens voire de logique!»*. Déboucher sur la seule mise en oeuvre d'un calcul est également un cas de litiges!: la moitié des chercheurs juge l'énoncé *Pull* comme non mathématique car *«!c'est un problème de calcul, une forme assez appauvrie des mathématiques!»*.

Nous retrouvons, par ailleurs pour l'énoncé *Pull*, un argument basé sur la difficulté relative inhérente à tout problème, comme le souligne la définition que nous en avons prise au début de cette thèse.

Enfin, un chercheur sûrement un peu distrait a invalidé les énoncés Brioche et Gâteaux, comme il l'a fait pour l'énoncé Bus, car il estimait qu'on ne pouvait apporter des solutions, leur résolution ne pouvant aboutir faute de données suffisantes.

Ces réponses vont nous servir de base pour analyser celles des élèves et voir en quoi leur vision d'un problème mathématique, et intrinsèquement des mathématiques, diffère ou s'accorde avec celles de ceux qui les font, en regardant en particulier le statut qu'ils accordent au raisonnement logique et aux calculs.

II-2 HYPOTHESES SUR LES REPONSES DES ELEVES ET ETUDIANTS

Afin de faire des hypothèses sur les réponses susceptibles d'être apportées par les élèves, nous allons chercher à déterminer les réponses que peuvent induire nos choix relatifs à nos deux principales variables!: forme du problème et tâche associée.

Pour ce dernier type d'argument nous n'attendons bien évidemment pas que les plus jeunes fassent référence à un modèle comme les chercheurs mais nous cherchons à savoir s'ils s'appuient sur la forme du problème ou sur le type de tâche, et dans ce cas, quelles tâches sont pour eux mathématiques.

Nous supposons, compte tenu des caractéristiques des problèmes rencontrés le plus souvent dans l'institution scolaire que nous avons relevées lors de notre étude de manuels, ainsi que dans l'institution loisir scientifique, qu'un autre type d'arguments peut apparaître lié au nombre de solutions. Si la solution n'est pas unique, (plusieurs solutions au aucune), nous supposons que certains élèves peuvent répondre «!non!». Inversement, s'ils sont parvenus à donner une réponse, ils répondront «!oui!».

Nous faisons l'hypothèse que si l'énoncé fait clairement référence au cadre arithmétique ou géométrique, il sera reconnu comme mathématique par les élèves car en lien avec ce qu'ils ont l'habitude de faire durant le cours de mathématique. Nous nous attendons donc à ce qu'ils répondent «!oui!» pour les énoncés 1 et 6. L'énoncé 3 nous permettra d'avoir un aperçu de l'influence de la forme sur la tâche et en particulier celle de la présence de nombres.

Les énoncés 2, 4 et 5 nous donneront des indices sur les conceptions des élèves sur les mathématiques elles-mêmes, la mise en oeuvre d'un raisonnement mathématique étant une des deux caractéristiques propres à un problème mathématique mises en avant par plusieurs chercheurs.

Voici, classées en fonction des réponses et des arguments, les réponses des élèves attendues.

Enoncés	réponse oui!: Arguments associés	réponse non!: Arguments associés
Champ	Forme du problème ▪ Il y a un triangle rectangle ▪ Il y a le mot surface ▪ Il faut faire une moitié Tâche ▪ Il faut faire des calculs pour déterminer l'aire ▪ Il faut mesurer ▪ C'est de la géométrie	Forme du problème ▪ Il n'y a pas de nombres ▪ Il n'y a pas de question Tâche ▪ Il faut colorier ▪ Il n'y a pas de calculs à faire Solution ▪ Il y a plusieurs réponses possibles
Passeur	Forme du problème ▪ Il y a une question Tâche ▪ Il faut réfléchir en tenant compte des contraintes ▪ Il faut tenir un raisonnement logique Solution ▪ J'ai la réponse	Forme du problème ▪ C'est une histoire, un jeu ▪ Il n'y a pas de nombres Tâche ▪ On ne fait pas de calculs Solution ▪ On ne peut pas répondre

		▪ Il y a deux solutions
Bus	Forme du problème ▪ Il y a des nombres ▪ Il y a une question Tâche ▪ On peut ou doit calculer Solution ▪ J'ai la réponse	Solution ▪ Il manque des données on ne peut pas répondre ▪ La question n'a rien à voir avec le texte, on ne peut pas répondre
Brioche	Forme du problème ▪ Il y a une question Tâche ▪ Il faut tenir un raisonnement logique ▪ Il faut réfléchir en tenant compte des contraintes ▪ Il faut faire un tableau de vérité Solution ▪ J'ai la réponse	Forme du problème ▪ Il n'y a pas de nombre ▪ C'est une histoire Tâche ▪ Il n'y a pas de calculs à faire Solution ▪ Il manque des données, on ne peut pas répondre
Gâteaux	Forme du problème ▪ On parle de formes géométriques Tâche ▪ C'est du dénombrement ▪ Il faut trouver combien donc calculer Solution ▪ J'ai la réponse	Forme du problème ▪ Il n'y a pas de nombres ▪ C'est de la cuisine Tâche ▪ On ne doit pas calculer Solution ▪ on ne peut pas répondre
Pull	Forme du problème! ▪ Il y a une question ▪ Il y a des nombres ▪ Il ressemble à ce qu'on fait d'habitude en cours de maths Tâche ▪ Il faut faire des calculs Solution ▪ J'ai la réponse	*Aucun argument envisagé*

III- ANALYSE DES REPONSES DES ELEVES ET DES ETUDIANTS

III- 1 PUBLICS INTERROGES

Afin d'avoir un aperçu le plus complet possible sur le rapport personnel d'un élève de l'institution scolaire française, ce questionnaire a été posé à différentes classes, dont certaines ont ensuite participé à nos expérimentations présentées dans la première partie de cette thèse:

- Plusieurs classes de niveau primaire!: une de CM1/CM2, une de cycle 3 (CE2/CM1/CM2), une de CE2/CM1, et une de CM2.
- Trois de collège!: une de 6ème, une de 4ème et une de 3ème.
- Une de lycée!: 1èreSTL.
- Nous l'avons également soumis à des étudiants issus de Science du Langage, Langue ou Lettres modernes[63].

L'effectif total est de 161 élèves interrogés. Dans chaque cas, les réponses ont été données individuellement, les élèves disposaient d'une heure prise sur le temps du cours de mathématiques.

III- 2 ANALYSE DES RESULTATS

1- Réponses des élèves et étudiants par niveaux

Le tableau suivant indique pour chaque niveau les réponses fournies. Pour chaque énoncé, nous soulignerons les réponses majoritaires.

Réponses des élèves et étudiants par niveaux

			Champ	**Passeur**	**Bus**	**Brioche**	**Gâteaux**	**Pull**
Primaire	CM	Oui	33%	45%	16%	32%	55%	95%
		Non	67%	55%	84%	62%	45%	5%
	Cycle 3	Oui	81%	32%	50%	59%	32%	86%
		Non	18%	64%	40%	31%	59%	9%
	CE2CM1	Oui	78%	22%	43%	35%	35%	100%
		Non	22%	78%	56%	65%	65%	0%

[63] *participant à un module d'ouverture que nous encadrions mis en place au sein de leur université pour obtenir des points supplémentaires afin de rentrer à l'IUFM pour y préparer le concours de professeur des écoles.*

Primaire	CM2	Oui	61%	26%	13%	35%	17%	100%
		Non	39%	74%	87%	65%	83%	0%
Collège	6ème	Oui	79%	50%	51%	49%	50%	100%
		Non	21%	50%	49%	51%	50%	0%
	4ème	Oui	83%	29%	1%	12%	30%	100%
		Non	17%	65%	94%	88%	62%	0%
	3ème	Oui	89%	45%	11%	55%	50%	100%
		Non	11%	55%	89%	44%	33%	0%
Lycée	1ère STL	Oui	73%	0%	0%	55%	82%	91%
		Non	27%	100%	100%	45%	18%	9%
Université	Licence L	Oui	82%	47%	11%	35%	88%	non posé
		Non	18%	53%	82%	59%	11%	non posé

2- Analyse globale des résultats! : deux catégories d'énoncés

Les élèves et étudiants sont parvenus assez rapidement à identifier si les énoncés proposés étaient pour eux des problèmes de mathématiques ou pas. Toutefois, ils ont trouvé difficile, quel que soit le niveau, de justifier leur réponse, ce qu'ils sont tout de même parvenus à faire dans la majorité des cas.

Certains ont jugé l'aspect problématique et non le fait de relever des mathématiques, et se sont prononcés, comme les chercheurs, sur la difficulté relative du problème. Cependant, la plus grande partie des réponses, tous niveaux confondus, a consisté à déterminer si oui ou non il s'agissait de mathématique. Au regard des résultats, on peut classer les énoncés proposés selon les deux catégories que nous avions pressenties: les énoncés 1, 3 et 6 d'une part, et les énoncés 2, 4, 5 d'autre part.

Enoncés 1, 3 et 6

Pour les énoncés de cette première catégorie, la majorité des réponses attendues quel que soit le niveau correspondent à celles que nous avions prévues. Les arguments utilisés sont ceux que nous avions établis dans notre analyse a priori.

L'énoncé 1 a majoritairement été considéré comme mathématique (64% des réponses), soit parce que sa résolution impliquait des calculs (50% des réponses positives), soit parce qu'il a été reconnu comme un énoncé de géométrie (13%), soit parce qu'il comportait des termes faisant référence à l'un ou à l'autre, en particulier, la donnée du triangle, les mots «!moitié!» et «!surface!» (20%) et enfin par le fait qu'il «!posait problème!»(3%).

Comme l'illustrent ceux avancés par les élèves de CM2 présentés ci-après, les arguments fournis pour l'invalider s'appuyaient sur la forme et le fait qu'il fallait colorier et donc sur un marqueur langagier (22% des réponses non) ou que l'énoncé ne comportait pas de question explicitement formulée (22%) et enfin sur l'absence supposée de calculs lors de la résolution (17%).

Un autre argument basé sur des critères que nous avons répertoriés sous le terme «!solution!» a été formulé, rejetant le problème 2 car il comportait plusieurs solutions (22%). Cela peut trouver son origine dans le fait que la grande majorité des exercices ou problèmes rencontrés au sein de l'institution scolaire comporte une solution et une seule, ce qui peut amener à penser qu'un problème de mathématiques en a forcément une, comme nous l'avons supposé en conclusion de l'étude des manuels que nous avons faite dans la première partie de cette thèse.

Enfin, un argument que nous n'avions pas prévu est revenu à plusieurs reprises chez quelques élèves de primaire. Il invalidait l'énoncé 1 car celui-ci relevait de la géométrie (5%).

La géométrie n'est donc pas forcément identifiée pour tous les élèves de ce niveau comme une branche des mathématiques, plusieurs d'entre eux ayant classé cet énoncé comme non mathématique car il ne ressemblait pas à un problème (pas de question, consigne=colorier) et qu'!«!*on n'avait pas besoin de calculs pour répondre!*». Cela nous amène à penser que, pour ces élèves, les mathématiques semblent être fortement liées, voire réduites, au calcul.

Exemples des arguments pour invalider l'énoncé 1 en CM2

	Forme!	Tâche	Solution
9/23 39%	Pas de question à la fin	Pas de calculs à faire(2) C'est de la géométrie et tu ne calcules pas. Il n'y a pas de calculs, c'est juste du coloriage Pas de choses à résoudre (2)	On ne peut pas couper le triangle en deux car il n'a pas la même longueur.(2) On ne sait pas la surface qu'il faut colorier

L'énoncé 6, quant à lui, a été très généralement reconnu comme mathématique (à 98%!!), du fait que la tâche induit un calcul et qu'il comporte une question et toutes les données pour répondre. Les trois élèves qui l'ont rejeté l'ont jugé trop facile, il ne leur posait donc pas de problème, comme le montrent par exemple les réponses de élèves de 1ère STL.

Exemples des arguments pour l'énoncé 6 en $1^{ère}$ STL

Oui	Arguments	Non	Arguments
10/11 91%	Il y a un calcul à effectuer (5) Certains calculs sont obligatoires pour répondre à la question L'énoncé nous demande de manipuler des nombres On déduit un résultat à partir de données précises Il nécessite quelques opérations mathématiques On peut savoir la réponse	1/11 9%	Ce n'est pas un problème mathématique pour moi, ça peut être un problème mathématique pour un élève de primaire

Comme nous le supposions, l'énoncé 3 a été le plus souvent considéré comme non mathématique car la question n'a rien à voir avec les données. Toutefois, dans presque toutes les classes, des élèves ont répondu «!oui!» et en particulier dans les classes Cycle 3 et 6ème où les réponses ont été partagées!; dans chaque cas, la moitié de la classe l'a considéré comme mathématique, l'autre moitié «non».

Au regard des arguments avancés pour justifier le fait qu'il soit un problème de mathématiques, on s'aperçoit que la forme du problème et en particulier la présence de nombres dans l'énoncé, qui s'accompagne là encore implicitement par la tâche d'avoir à faire un calcul pour les élèves, est pour eux un argument important et fréquemment mis en avant, comme le montre le tableau récapitulatif suivant!

Arguments tous niveaux pour valider l'énoncé 3

		Forme	Tâche
Cycle3	CM2:2/6 CM1:3/7 ?=2 CE2:5/7 ?=1	En CE2, il y avait le même genre de problème C'est un exercice C'est un exemple	Il y a **des additions et des soustractions** **Il faut faire des calculs** mais on ne peut pas savoir à quelle vitesse a roulé le bus Il faut voir la vitesse du bus Il y a des calculs Il faut réfléchir
$6^{ème}$	10/19 ?=4	C'est un problème de maths mais blagueur C'est un problème de maths mais l'énoncé ne veut rien dire	**Calculs à faire** **On doit compter** **Il y a une question de calcul** Il demande à faire un travail

CM2	3/23		**Il faut faire une addition** **Il faut calculer** (2)
CE2/CM1	CM1:7/19 ?=1 CE2:3/4	il y a une question il y a des nombres et un bus c'est des maths il faut trouver la moitié du bus (on ne peut pas savoir)	**si l'on veut le résoudre il faut faire une opération, un calcul** (5)
CM	CM1!:1/6 CM2:2/12	CM2!: il faut savoir la vitesse du bus Opération et problème à résoudre mais on peut aussi dire que ce n'est pas des maths car on n'est pas sur que ce soit la bonne réponse	CM1!:**Opérations à faire**
3ème	1/9	Oui mais on ne peut pas répondre	

Ainsi, la forme du problème est importante pour les élèves. Le fait d'avoir des nombres dans un énoncé, ce qui induit pour eux un calcul à faire, peut être un critère suffisamment important à leurs yeux pour qu'ils reconnaissent l'énoncé 3 comme celui d'un problème mathématique, sans chercher à en savoir plus. Qu'il ait un sens n'est pas une condition nécessaire puisque certains ont noté que «*C'est un problème de maths mais l'énoncé ne veut rien dire.* »

Enoncés 2, 4 et 5

Ces trois énoncés sont ceux dont la classification a été la plus problématique chez les élèves, quel que soit le niveau.

L'énoncé 5, *les gâteaux*, n'a pas été toujours bien compris, il a généralement été invalidé soit parce que les élèves pensaient qu'il manquait des données, soit parce qu'il ne comportait pas de nombres, on retrouve donc cet argument comme un critère fort du fait ou non d'être mathématique,

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux arguments avancés pour valider ou invalider l'énoncé 2, *le passeur* et l'énoncé 4, *la brioche.*

Ces deux énoncés relèvent de la logique mathématique. Ils n'impliquent aucun calcul, leurs formulations ne contiennent pas de nombres, la tâche est introduite par une question, la résolution implique la recherche d'une modélisation de la situation.

D'autre part, ils sont présents dans les deux institutions étudiées. L'énoncé *Le passeur* est un grand classique de l'institution «loisir scientifique» et peut apparaître dans les manuels scolaires, l'énoncé *la brioche* ou similaire est présent d'une part dans certains manuels, d'autre part dans les rallyes mathématiques ou autres kangourous des mathématiques et enfin, il apparaît également fréquemment dans les rubriques «jeux mathématiques» parues dans la presse. Il sont donc tous les deux présents dans les deux institutions étudiées même si le passeur est plus fréquemment rencontré dans l'institution loisir scientifique.

Nous considèrerons donc que le fait de les considérer ou pas comme des énoncés de problèmes mathématiques en argumentant sa réponse est un indice révélateur du point de vue que l'on peut avoir des mathématiques.
Nous allons étudier pour chacun d'entre eux les arguments avancés.

3- Etude des arguments avancés sur deux énoncés particuliers

Voici les arguments sur lesquels se sont appuyés les élèves, tous niveaux confondus, pour valider ou invalider les deux problèmes considérés, le passeur et la brioche. Certains élèves ont avancé plusieurs arguments pour le même énoncé, c'est pourquoi le nombre total d'arguments par catégorie est parfois supérieur aux nombres de réponses.

Arguments tous niveaux pour les deux problèmes considérés.

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Arguments associés au oui
et fréquence</td><td></td><td colspan="2">Arguments associés au non
et fréquence</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Passeur</td><td rowspan="3">52 réponses ouisoit32%</td><td>Forme</td><td>Tâche</td><td rowspan="3">102 réponses non soit 63%</td><td>Forme</td><td>Tâche</td></tr>
<tr><td>Il y a une question (10/52,19%)</td><td>Il faut réfléchir,! c'est de la réflexion, de la déduction, de la logique (21/52, 40%)
Il faut faire des hypothèses, chercher (6/52, 12%)
Il demande à faire un travail, c'est une situation problématique!(5/52,9%)
Il n'y a pas des calculs à faire (1/52, 2%)</td><td>C'est un jeu, une blague ou une devinette (10/102, 10%)
Pas de chiffres (8/102, 8%)
C'est un problème mais pas de maths (6/102, 6%)
Pas de modèle maths (3/102, 3%)</td><td>Il faut réfléchir, c'est de la logique, de la réflexion (32/102, 30%)
Pas de calculs (22/102, 21%)
Problème impossible, manque des données (2/102, 1%)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Autres: 15/52, 29%</td><td colspan="2">Autres: 20/102, 20%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Brioche</td><td rowspan="2">62 réponses oui soit 38%</td><td>Le problème est bien formulé, on peut répondre, on a toutes les infos (7/62, 11%)
Il y a une question (6/62 10%)
Il demande à faire un travail, c'est une situation problématique!(2/62, 3%)</td><td>Il faut réfléchir, c'est de la réflexion, de la déduction, de la logique (16/62, 26%)
Il faut calculer (13/62, 21%)
Il faut faire des hypothèses, chercher (6/62, 10%)
Identification ou recours à un modèle (3/62, 5%)</td><td rowspan="2">93 réponses non soit 57%</td><td>C'est un problème mais pas de maths (8/93, 7%)
Pas de chiffres (5/93, 5%)</td><td>Il faut réfléchir, c'est de la logique, de la réflexion (29/93, 29%)
Pas de calculs (14/93, 14%)
Problème impossible, manque des données (11/93, 11%)
Trop facile (3/93, 3%)
Plusieurs solutions (2/93, 2%)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Autres: 9/62, 14%</td><td colspan="2">Autres: 21/93, 21%</td></tr>
</table>

Effectif total =161

Alors que nous pensions que le fait d'avoir recours à un raisonnement déductif est un argument suffisant pour justifier le fait que ces problèmes soient des problèmes mathématiques, comme le font la plupart des chercheurs, cet argument a été utilisé par la majorité des élèves dans le sens contraire et cela quel que soit le niveau. **Nous n'avions pas prévu que des réponses du type: *«ce n'est pas un problème de maths car il faut réfléchir»* puissent apparaître aussi fréquemment** (pour *le passeur*, 32 élèves sur 161 l'ont mentionné soit près de 20%), cela d'autant plus que cet argument est utilisé de manière récurrente du primaire à l'université!

Le fait que la résolution n'implique pas de calculs est à nouveau un critère caractéristique d'un problème mathématique, c'est le deuxième argument le plus fréquemment utilisé pour les deux énoncés. Toutefois, dans le cas de *la brioche*, cet argument apparaît aussi pour valider cet énoncé comme mathématique. Cela nous amène à penser que le verbe «calculer» peut avoir un sens différent que le sens commun pour certains élèves. Il semble alors avoir un sens proche du sens familier que l'on retrouve dans l'expression familière: «je calcule cette personne» au sens où l'on cerne sa personnalité, ses projets. Nous pensons qu'il aurait alors un sens plus proche de «analyser et comprendre», et se rapprocherait donc de la mise en oeuvre d'un raisonnement déductif.

Regardons maintenant plus en détail les réponses individuelles, tous niveaux confondus, pour chacun des deux problèmes. Quatre catégories de réponses peuvent être distinguées:

- Non/non: réponse non pour les deux énoncés
- Non/oui: réponse non pour l'énoncé *le passeur* et oui pour *la brioche*.
- Oui/non: réponse oui pour l'énoncé *le passeur* et non pour *la brioche*.
- Oui/oui: réponse oui pour les deux énoncés

Elles sont réparties de la façon suivante:

Non/Non	Non/Oui	Oui/Non	Oui/Oui
76/161 47%	26 16%	17 10%	33 20%

Incomplets: 9

Au regard de ce tableau, une première remarque apparaît. À la différence des mathématiciens, les quatre types de réponses sont apparus, ce qui nous conduit à distinguer les élèves en deux sous-groupes!:

- ceux qui identifient les deux énoncés comme relevant de la même catégorie!: les non/non et les oui/oui!
- ceux pour qui ils sont différents!: les non/oui et les oui/non.

Les «!non/non!» et les «!oui/oui!»!

Ainsi, comme les chercheurs que nous avons interrogés, près de 70% des élèves et étudiants ont utilisé les mêmes arguments, pour valider conjointement les deux

problèmes ou les invalider, nous estimons donc qu'ils les ont identifiés comme relevant de la même catégorie.
Les 20% qui ont répondu «oui/oui», par exemple, ont eu recours, pour les deux, au même type d'argument que les chercheurs en mettant en avant le recours à un raisonnement mathématique.
Les 47% qui ont répondu «non/non», ont rejeté les deux énoncés car ils relèvent *«!uniquement de la réflexion et pas des calculs!»*, que *«!c'est un problème de logique!»* et qu'!*«!on n'a pas besoin de maths pour résoudre le problème!»*. On retrouve donc comme un critère non mathématique le fait de relever de la logique, de la réflexion et de ne pas comporter de calculs.
Cependant, il est remarquable que les deux autres catégories de réponses soient également apparues.

Les «!oui/non!» et les «!non/oui!»

Les 30% des élèves et étudiants restants n'ont pas validé les deux énoncés de la même manière.

Dans le cas des réponses «!oui/non!», les moins fréquentes, l'énoncé 4 a été rejeté car, soit il était jugé trop facile, soit incomplet, étant donné qu'aucune des phrases de l'énoncé ne précisait qui aimait la brioche.

D'autre part, plusieurs élèves ont répondu «!non/oui!» car ils ont rejeté l'énoncé 2 parce que pour eux c'était un jeu, une devinette, une blague, qu'un proche leur avait déjà posé mais on ne retrouve pas ce type d'arguments pour l'énoncé 4. Le fait de n'appartenir qu'à l'institution «loisir scientifique» ou «famille» semble être un critère d'exclusion, tout du moins si l'on est interrogé au sein de l'institution scolaire, avec le fait d'être mathématique, **ce qui conforte notre hypothèse du lien fort existant pour beaucoup de personnes entre les mathématiques et l'école** et nous interroge à nouveau!: dans quelle mesure les jeux proposés dans l'institution de loisir scientifique (presse, Internet, édition...) sont-ils reconnus comme relevant effectivement des mathématiques!?
Mis à part ce type d'arguments, on peut noter d'autres différences quant au jugement de ces deux énoncés, comme cela apparaît notamment dans la classe de 1ère STL. Les élèves de ce niveau ont tous rejeté l'énoncé 2 alors que la moitié d'entre eux a reconnu l'énoncé 4 comme étant mathématique et a répondu «!non/oui!». Nous allons chercher à analyser quels peuvent être les arguments avancés afin de comprendre cette différence de classification.

Ceux qui ont validé l'énoncé 4 comme mathématique se sont appuyés sur le fait qu'ils sont parvenus à identifier une modélisation possible du problème (calculs, système d'équations...), contrairement à l'énoncé 2. Leur argumentation se rapproche alors de celles des chercheurs, la présence d'un modèle apparaissant dès lors comme caractéristique d'un problème mathématique. S'ils ne parviennent pas à l'identifier, ils considèrent qu'il faudra juste avoir recours à un raisonnement logique ce qui n'est pas suffisant à leurs yeux pour être du ressort des mathématiques. Ces différences sont également présentes dans les réponses des autres niveaux considérés.

Arguments « non/oui » avancés par chaque élève de 1ère STL

Passeur Arguments pour réponse **non**	Brioche Arguments pour réponse **oui**
Problème de logique	On doit résoudre des calculs afin de trouver le résultat
Aucun chiffre algébrique n'intervient, c'est un problème de logique	Plus à notre niveau mais pour des petits oui (CM1/CM2)
C'est un problème de logique et non de maths même si les maths sont composées de logique	?
On ne peut pas traduire cet énoncé sous forme d'équations, d'inéquations... etc	C'est un problème de maths qui met en scène diverses personnes avec divers objets au lieu de chiffres. Pour résoudre ce problème, on devra effectuer un système

Parmi les arguments avancés pour valider les deux énoncés, nous avons donc retrouvé, comme pour les réponses des chercheurs, des arguments basés sur le fait qu'il fallait **mettre en oeuvre un raisonnement mathématique**, accompagné, à partir du lycée par **une modélisation**.

L'analyse des autres réponses a montré que **le fait de comporter des calculs était nécessaire** pour de nombreux élèves pour être un problème de mathématiques.

Ainsi, les énoncés 2 et 4 qui nécessitent le recours au raisonnement hypothético-déductif n'ont pas été identifiés par tous comme mathématiques, car « *ils ne comportaient aucun calcul.* »

A travers la comparaison des réponses à ces deux énoncés, nous avons pu relever aussi plusieurs différences qui nous conduisent à faire l'hypothèse **qu'un énoncé issu de l'institution «loisir scientifique»** peut être classé comme **non mathématique,** seulement parce qu'il existe dans cette institution et non à l'école.

IV-CONCLUSION : DES CALCULS AVANT TOUT

Les réponses recueillies à notre questionnaire nous permettent de faire des hypothèses sur le rapport personnel que peut avoir un élève de l'institution scolaire française vis-à-vis des mathématiques.

Au regard des arguments avancés, elles se limitent pour plusieurs élèves bien souvent au cadre numérique, à faire des calculs et cela même pour des étudiants de Licence. Devoir calculer est même pour certains une condition nécessaire à toute activité mathématique, allant même jusqu'à exclure la géométrie.

Ainsi, **la présence de nombres dans un énoncé est** pour eux **une «! garantie mathématique! »**, car elle ne peut déboucher que sur un calcul.
À l'inverse, le fait de ne relever que de la logique, terme employé par les élèves sous son sens courant, synomyne de *«!réflechir en tenant compte des contraines!»,* est pour beaucoup loin d'être significatif d'une activité mathématique. **La mise en oeuvre d'un raisonnement hypothético-déductif n'est pas suffisante pour tous pour relever des mathématiques**, si aucun calcul ne rentre en jeu Nous avons, par ailleurs, retrouvé ces considérations au cours d'entretiens individuels d'élèves, menés au cours de nos expérimentations[64].

L'image des mathématiques induite par l'institution scolaire française, du fait des choix de programmes et des activités proposées, nous semble donc très éloignée de celle que peuvent en avoir les chercheurs et donc de ce que sont les mathématiques.
Nous avons fait l'hypothèse, à la fin du chapitre précédent, que les mathématiques étaient pour de nombreuses personnes fortement attachées à leur enseignement, à la manière dont elles sont présentées à l'école, l'institution où elles sont le plus visibles.
Aussi, pouvons-nous supposer que **l'image des mathématiques que peut avoir un élève et par extrapolation le grand public, peut être celle d'une discipline où il faut faire des calculs, dont il faut se servir pour résoudre des problèmes numériques.** Par contre, **il n'est pas certain qu'il ait conscience de ce que sont les mathématiques**, les spécificités de cette discipline, et en particulier de l'importance et des spécificités du raisonnement mathématique.

Dans la mesure où, d'une part elles invitent le public à la recherche d'un problème sans calcul, où seuls le raisonnement et la démarche sont prioritaires, d'autre part, elles sont dévoluables dès le cycle 3 (nous l'avons montré pour *La roue aux couleurs* mais nous avons testé d'autres situations depuis), **nous faisons l'hypothèse que les situations recherche peuvent contribuer à enrichir l'image des mathématiques, quelle que soit l'institution où elles sont mises en oeuvre**.
Nous allons à présent chercher à voir comment elles peuvent être proposées dans l'institution loisir scientifique.

---

[64] *nous les présenterons dans le chapitre suivant.*

Chapitre II.3

SITUATIONS RECHERCHE ET DEVOLUTION DANS UN CADRE DE VULGARISATION

Nous avons montré dans la première partie de cette thèse que la situation recherche *La roue aux couleurs* accompagnée du support matériel était dévoluable dès le cycle 3 de l'école primaire. Cela nous conforte dans notre idée qu'elle est accessible sans savoirs mathématiques complexes et donc qu'elle pourrait être utilisable dans un cadre de vulgarisation. Reste à déterminer si elle est effectivement dévoluable dans l'institution de loisir scientifique et sous quelles conditions.

Dans cette institution, la rencontre entre le public et les mathématiques peut prendre différentes formes, comme nous l'avons étudié précédemment. Parmi celles-ci, nous en avons retenu deux que nous jugeons les plus adaptées à notre problématique: une forme **«! atelier! »** dans l'esprit des *récréations mathématiques* mises en place au *Palais de la découverte*, une forme **«! animation stand! »** comme cela peut avoir lieu lors d'événements comme le salon de la culture et des jeux mathématiques ou *La Fête de la science*.

Nous faisons l'hypothèse que du fait de leurs différences, ces deux formes impliquent des choix didactiques et de gestion appropriés. Nous les présenterons suivis des productions du public.

I- HYPOTHESES SUR UN CONTRAT DIDACTIQUE POSSIBLE

Du fait que l'institution loisir scientifique soit une institution rattachée aux loisirs, **le contrat didactique** relatif aux rencontres qu'elle organise sous forme d'animations diffère sous certains aspects de celui de l'école. Au regard de notre étude des différentes actions menées en vue de la diffusion de la culture scientifique, de l'observation de divers ateliers de vulgarisation et des animations que nous avons également personnellement encadrées, nous faisons l'hypothèse que les caractéristiques générales du contrat didactique existant au sein de l'institution loisir scientifique sont telles que!:

• ce que l'on nous propose est porteur de connaissances susceptibles de nous intéresser

• l'animateur est là pour expliquer ce qu'il faut faire, vérifier qu'on a bien compris et apporter éventuellement son aide

• on est actif, on touche, on fabrique, on manipule...

Alors que ces trois premières peuvent être mises en parallèle avec les pratiques de la classe de mathématiques d'autres s'en démarquent, voire s'y opposent, complètement!:

• les activités proposées doivent procurer du plaisir

• on est libre de faire ou de ne pas faire

• on nous invite à apprendre des choses mais ce que l'on apprend ne sera pas évalué

• on peut consacrer le temps que l'on souhaite aux activités proposées.

Le contrat didactique inhérent à l'institution «loisir scientifique» où **le plaisir et le libre choix ont une place importante**, est donc éloigné de celui habituellement établi dans l'institution scolaire lors de l'enseignement des mathématiques, bien qu'ils aient des points en commun. A contrario, du fait de ses caractéristiques, il comporte de nombreuses similarités avec le contrat didactique associé aux situations recherche en classe que nous avons présenté au début de notre thèse, ce qui est un aspect prometteur supplémentaire pour notre projet d'utilisation des situations recherche dans une perspective de vulgarisation.

Cependant, un tel contrat didactique implique que les situations de vulgarisation soit suffisamment attirantes, d'une part pour que le public ait envie d'y participer et d'autre part pour qu'il ait envie d'y rester, d'y consacrer de son temps. Nous allons par la suite chercher à identifier les conditions de présentation et de gestion susceptibles de permettre la dévolution des situations recherche sous un tel contrat.

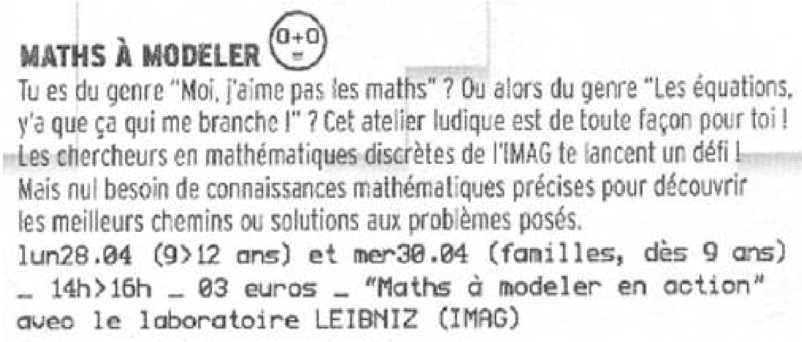
II- EXPERIMENTATION SOUS FORME D'ATELIER

L'atelier de découverte scientifique est une des formes de communication utilisées par les acteurs directs de l'institution «loisir scientifique» pour permettre la rencontre entre les sciences et le grand public. Il peut être libre d'accès comme au *Palais de la découverte* ou d'un temps défini, ponctuel ou régulier... Du fait des contraintes institutionnelles liées à la rédaction d'une thèse, nous n'avons pu mettre en place un atelier sur le long terme, aussi avons-nous proposé, pendant les vacances scolaires, un atelier ponctuel dans les locaux du CCSTI de Grenoble, d'une durée de deux heures[65]. Comme tous les autres ateliers proposés par le CCSTI, une

[65] *initialement deux ateliers ont été proposés mais vu le nombre d'inscriptions, il a été finalement décidé de n'en maintenir qu'un seul.*

participation financière[66] était demandée afin, selon les responsables du CCSTI, que le public soit impliqué dans l'activité et non pas simple consommateur. Dans la lignée de nos expérimentations précédentes, nous avons choisi de l'ouvrir aux enfants de 9 à 12 ans, dans le but d'identifier quelles peuvent être les différences et points communs entre les productions d'enfants dans deux institutions différentes, sous deux contrats didactiques différents.

Le responsable de la communication du CCSTI s'est chargé de la publicité. Un encart fut diffusé dans la presse locale:



MATHS À MODELER

Tu es du genre "Moi, j'aime pas les maths" ? Ou alors du genre "Les équations, y'a que ça qui me branche !" ? Cet atelier ludique est de toute façon pour toi ! Les chercheurs en mathématiques discrètes de l'IMAG te lancent un défi ! Mais nul besoin de connaissances mathématiques précises pour découvrir les meilleurs chemins ou solutions aux problèmes posés.

lun28.04 (9>12 ans) et mer30.04 (familles, dès 9 ans) _ 14h>16h _ 03 euros _ "Maths à modeler en action" avec le laboratoire LEIBNIZ (IMAG)

Restait à espérer que cela soit suffisamment attractif pour donner envie à des enfants de s'inscrire...

II-1 Public, conditions et choix didactiques

Le jour de notre expérimentation, nous fûmes soulagés!: six enfants, trois filles et trois garçons, avaient répondu présents et sur les six, cinq venaient pour la première fois au CCSTI, un seul y avait déjà participé à des animations organisées autour des autres sciences.

Afin d'en savoir un peu plus sur nos participants et leur «!ressenti!» vis-à-vis des mathématiques, nous leur avons fait remplir un petit questionnaire. Au regard des réponses recueillies, quatre se disaient férus de mathématiques, alors que deux estimaient «!*les aimer moyen!*». D'autre part, deux enfants se sentaient très bons en mathématiques, trois, bons et une moyenne. Nos six participants n'étaient donc pas tous des «!premiers de la classe en mathématiques!» même si aucun ne se sentait en difficulté.

Trois jeux leur étaient proposés!: *La roue aux couleurs*, *Les polyminos* et *La course à n*, dont vous trouverez les énoncés en Annexe 10.Trois groupes de deux se sont constitués puis se sont répartis les jeux. Il leur avait été précisé que, quand ils le souhaiteraient, ils pourraient passer d'un jeu à un autre.

Les résultats de nos expérimentations précédentes ont guidé nos choix relatifs à la présentation du problème ainsi qu'aux conditions de gestion.

---

[66] *3 euros*

Comme l'accompagnateur dans nos expérimentations précédentes, deux animateurs circulaient entre les groupes pour vérifier que le problème avait été bien compris, faire répéter ou éclaircir certains arguments et enfin relancer la recherche quand cela était nécessaire.
Afin de les inciter à garder des traces, formuler..., les animateurs avaient précisé, une fois les différents jeux présentés, que les enfants seraient éventuellement amenés à leur présenter les résultats de leurs recherches à la fin des deux heures.
En plus des supports matériels, les enfants disposaient de feuilles blanches, qu'ils pouvaient utiliser pour chercher s'ils en avaient besoin ou pour noter leurs remarques, solutions... et d'un stylo d'une seule couleur, afin de les inciter par exemple à introduire un codage des couleurs dans le cas de La roue aux couleurs, comme nous l'avions fait lors de notre expérimentation en classe de 6ème.
Dans notre analyse, nous ne présenterons que les productions générées par la recherche de la roue aux couleurs, que nous avons recueillies sous forme vidéo.
Compte tenu du temps imparti, nous avons choisi, comme pour nos expérimentations précédentes, d'orienter la recherche vers (n,n) ou (n,2), les enfants étant libres de choisir d'étudier l'un des deux, à la différence que **ce choix de deux couples particuliers pour (n,k) s'est fait dès la présentation du jeu.** Nous nous sommes servie de deux exemples, un à (4,4) et un à (4,2), pour illustrer la contrainte de l'unique face à face et les différentes possibilités de choisir les deux couleurs dans le cas de (n,2).

II-2 ETUDE DES PRODUCTIONS

Dans un premier temps, une différence majeure apparaît!entre les productions des différents binômes. Alors qu'au bout de 45 minutes, les deux binômes qui avaient choisi *Les polyminos* ou *la course à n* ont interverti leurs jeux, les deux enfants (Y et S âgés respectivement de 10 et 11 ans) qui ont choisi *La roue aux couleurs* au début de la séance, y ont joué pendant un peu plus d'une heure avant de demander de changer. Ils sont donc les seuls à avoir cherché cette situation recherche. Nous pensons que cette différence dans la durée de la recherche tient avant tout au fait que les deux autres situations recherche sont plus rapidement résolvables.
Les polyminos, d'abord, parce que le problème général a été réduit, pour être accessible à notre public et du fait de sa présentation matérielle, à la recherche de pavages par des dominos d'une grille 8x8 comportant deux trous.
La course à n, d'autre part, car la stratégie gagnante obtenue pour de petites valeurs est généralisable à tout n.
A contrario, le fait de présenter *La roue aux couleurs* par le biais d'un support matériel permet tout de même l'étude de ses différents sous-problèmes, comme nous l'avons vu lors de nos expérimentations dans l'institution scolaire. De plus, même si la

recherche a été initialement orientée vers (n,n) ou (n,2), cette présentation laisse la possibilité de choisir plusieurs valeurs de la variable de recherche (n,k), de les étudier toutes jusqu'au plus n=k=8, le nombre maximum de couleurs d'aimants disponible.

1- Organisation de la recherche

Les deux enfants que nous avons suivis ne se connaissaient pas, cependant ils ont su se concerter mutuellement dans le choix des couples étudiés. D'un commun accord, ils ont choisi de s'intéresser au sous-problème (n,2). Le choix des valeurs était organisé, ils ont eu envie d'avancer progressivement pour comprendre ce qu'il se passe au fur et à mesure et ont étudié!: (4,2), (5,2), (6,2), (7,2), (3,2), (4,2) et (2,2). Nous retrouvons donc, en plus de critères de choix des valeurs de la variable de recherche raisonnés, l'influence de l'exemple introductif puisque (4,2) est le cas par lequel ils ont débuté.

2- Stratégie de recherche

Comme lors de nos expérimentations auprès d'enfants d'âge équivalent, les recherches se sont faites à l'aide du support matériel. Les deux joueurs posaient les pions puis tournaient dans le sens des aiguilles d'une montre (sans justifier ce choix) afin de vérifier la validité de la disposition, en anticipant parfois la rotation pour rejeter une disposition. Cependant, nous n'avons pas retrouvé les stratégies que nous avions déjà relevées, nos deux participants n'ont pas eu recours aux diagonales ou à la symétrie mais ont choisi d'étudier les différents couples (n,2) à partir des critères de choix des deux couleurs centrales.
Par exemple, dans le cas de (6,2), ils ont étudié

- 5 pions de la couleur c1 et 1 de la couleur c2
- 4 pions de la couleur c1 et 2 pions de la couleur c2
- 3 pions de la couleur c1 et 3 pions de la couleur c2

tout en considérant différents choix de c1 et c2!: consécutives, séparées par un pion, deux...

3- Déroulement de la recherche et résultats mis à jour

Même si le temps de recherche n'a pas excédé 75 min, ils sont parvenus, du fait de leur progression organisée et de leur recherche méticuleuse, à énoncer plusieurs résultats.

Tout d'abord, ils ont étudié (4,2) et se sont vite mis d'accord sur $\textbf{Rem}_{\textbf{coul}}$.

Ils ont ensuite délaissé ce cas car ils ne parvenaient pas à trouver de solution, du fait qu'ils cherchaient uniquement à placer d'abord deux pions de la même couleur puis deux autres de l'autre, et se sont penchés sur (5,2), qu'ils ont très vite abandonné pour (6,2), en étudiant les différentes dispositions possibles.

Ainsi, très vite, ils ont énoncé $\mathbf{P_{consec}}^{(n,2)}$, le fait qu'il ne faut pas choisir deux couleurs consécutives dans le cas de (n,2)!:

> *Y!: ça marche jamais quand on a deux couleurs à côté, à chaque fois qu'on l'a fait ça a pas marché.*

et ont rejeté tout d'abord les types de répartition 5+1 et 3+3

> *S!:3 et 3, ça marche pas et 1 et 5 aussi ça marche pas, c'est comme 4 et 1 tout à l'heure.*

Ils sont ensuite revenus sur le choix 3+3, suite à une discussion avec un des animateurs qui leur a demandé de lui montrer pourquoi ils pensaient que ce n'était pas possible. Dès lors, ils se sont rendu compte qu'ils n'avaient considéré, comme pour (4,2), que les dispositions pour lesquelles ils plaçaient les trois pions de la couleur c_1 consécutifs puis les trois de c_2.

> *Y!: qu'on est nul, heureusement qu'on a persévéré!!*

Finalement, ils sont parvenus à identifier les deux seuls types de solution!:

> «!*si séparées de 1* (i. e séparées par une couleur donc décalées de 2) *sur le côté, pas séparées au milieu!*» (alternées)
> «!*si en face* (i. e choisies diamétralement opposées), *on en met 4 d'une et 2 de l'autre!*»

Toutefois, là encore, rien n'a été dit sur la relation entre n et dec2, le décalage entre les deux couleurs choisies.

En s'appuyant sur la même stratégie, ils sont ensuite revenus à l'étude de (5,2), qui les a conduits à la conjecture! $\mathbf{Conj}^{(5,2)!}$ **: (5,2) n'a pas de solution** notée!: «!(5,2) ça ne marche pas du tout!».
Pour cela, ils ont étudié les différents choix des couleurs c1 et c2, par essais-erreurs et forçage en considérant les répartitions possibles et en remarquant peu à peu les cas équivalents!:
Disposition extérieure: 1 2 3 4 5!

- choix des couleurs 1 et 2 -> pas de solution, preuve par forçage
- choix des couleurs 1 et 3!-> pas de solution, preuve par forçage et exhaustivité (presque garantie)
- choix des couleurs 1 et 4!: équivalent au choix de 1 et 3
- choix des couleurs 1 et 5!: équivalent au choix de 1 et 2

et sont arrivés à se convaincre que le cas (5,2) n'admettait pas de solution.
Ils ont ensuite choisi de passer à (7,2), en essayant d'étudier par exhaustivité les choix de répartition, sans en oublier!: 1+6, 2+5, 3+4, ...

> *Y!: !ça va faire beaucoup de cas à étudier.!*

Pendant ce temps, les deux autres groupes s'échangeaient les jeux. Même si cela a quelque peu ébranlé leur motivation, Y et S ont tout de même poursuivi leurs investigations.
La difficulté à trouver des solutions pour (7,2) alors qu'ils étaient loin de jouer au hasard, combinée avec le fait qu'il n'y ait pas de diagonale et donc «!d'en face!» comme pour (6,2) et avec la conviction qu'il n'y avait pas de solution pour (5,2) qu'ils avaient réussi à se construire, les ont conduits à distinguer les cas où n est pair des cas où il est impair!:

> *Y!: «!Peut être que ça marche que pour les nombres pairs car pour les impairs à chaque fois, on n'arrive pas à trouver.!Déjà, on peut pas faire les diagonales, il n'y a pas!» d'en fac!e!»...»*

Pour vérifier cette conjecture, un animateur leur a proposé d'étudier d'autres couples (n,2). Ils se sont vite convaincus que (3,2) n'avait pas de solution, par forçage et exhaustivité!:

> *S!:il faut un argenté devant le bleu **obligatoiremen**t.*

Ils sont ensuite revenus sur leur première impression et ont affirmé finalement qu'il n'y avait qu'un seul type de solution pour (4,2)!:

> *Y: on peut choisir que comme ça parce que sinon, c'est à côté et à côté, ça marche jamais.*

et que le cas (2,2) était une exception!:

> *Y!:ça marche pour les pairs sauf 2 car 2 c'est une exception, 2 et 2, c'est impossible.*

Leur curiosité les a poussés par la suite à changer de jeu car ils I Avant de s'affronter à la course à n, ils ont conclu leurs recherches autour de *La roue aux couleurs* en énonçant: *«!on pense que ça marche pour les pairs mais pas pour les impairs!».*

Plusieurs indices d'une activité de recherche en mathématiques apparaissent donc dans la variété des cas étudiés, l'organisation méthodique de la recherche, les résultats mis à jour par ce binôme, ce qui atteste le passage de l'état de joueur à celui d'actant chez ce jeune public, et cela, bien que nous supposions que le contrat didactique soit différent, étant donné qu'il s'agit d'une activité de loisirs, sans obligation, sans enseignant, proposée durant les vacances scolaires dans les locaux d'un organisme reconnu dans la vulgarisation des sciences, où l'on vient pour s'amuser comme le précisait le texte diffusé dans la presse.

4- Retour sur les choix didactiques

Notre choix de centrer la recherche dès le début sur un sous-problème particulier a été profitable!: bien que le temps de recherche soit court, cela a permis aux enfants d'étudier plusieurs cas, d'énoncer **Conj**$^{(5,2)}$ suivie d'une preuve par exhaustivité ainsi que **Pconsec**$^{(n,2)}$ et **Conj**$^{(n,2)}$.

Les productions de ce binôme nous ont confortés dans l'idée que la recherche du sous-problème (n,2) était accessible dès le plus jeune âge, même si elle implique la prise en compte de plusieurs variables. Si le temps de recherche est suffisamment long, quelle que soit l'institution dans laquelle il est recherché, des solutions peuvent être mises à jour, suivies de l'énoncé de méthodes de construction, de conjectures et de la recherche d'arguments de preuve. **Que ce soit dans un cadre scolaire ou extrascolaire, la recherche de La roue aux couleurs permet donc la mise en oeuvre des différentes composantes de la recherche en mathématiques**.

5- Où l'on retrouve les apports du travail en groupe et de la présentation publique sur la modélisation et la formulation

Ici aussi, **le fait de chercher à deux** a permis dès le début de la recherche **la verbalisation des actions**, la justification des choix, les débats, discussions autour du problème, la motivation, et cela alors que les enfants ne se connaissaient pas.

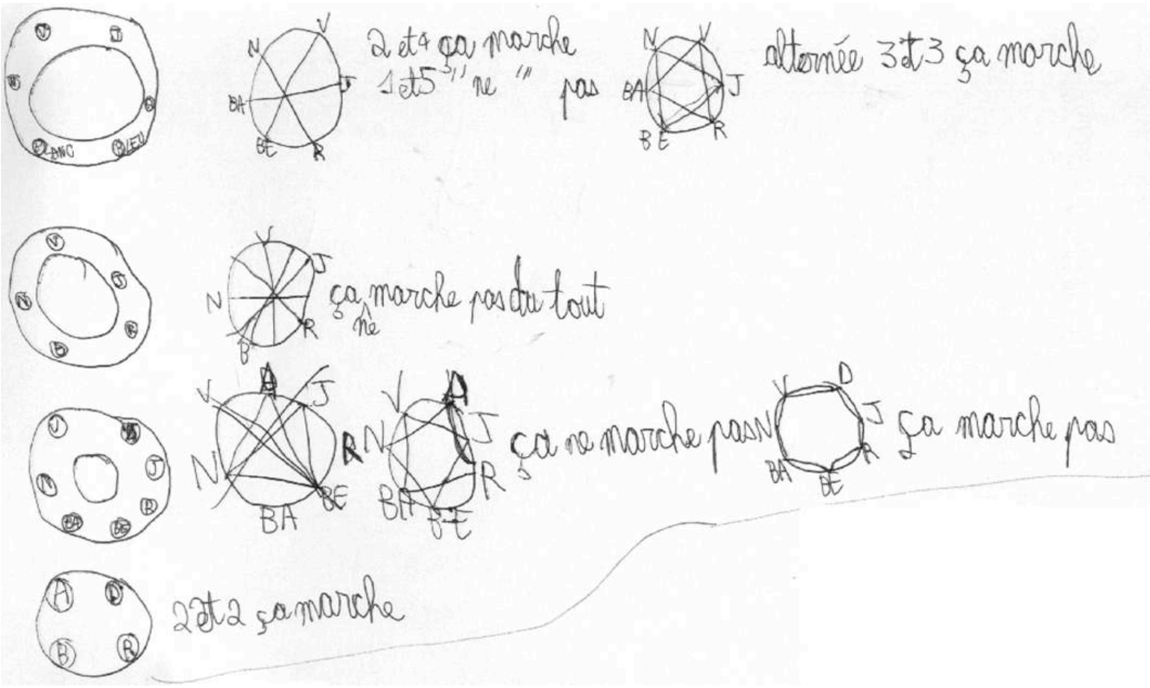
t=2 min

En accord avec Y, S dispose les pions centraux et commence à tourner.
Y!: non, ça ne se peut pas regarde...c'est impossible. c'est peut être impossible tout le temps.
S!: mais non, mais non...il faut essayer autre chose.
Y!: ah, je sais il faut prendre du jaune et du vert, ça va marcher, parce qu'ils sont pas juste à côté.
S et Y!: ça marche, ça marche, ... ça marche pas
Y!: attends, il faut peut être changer la position.

Aussi estimons-nous que **le travail en groupe est un élément de gestion stimulant la recherche**, non seulement **dans un cadre scolaire** comme nous l'avons vu dans la partie I de cette thèse, mais aussi **dans un cadre extrascolaire**, lors de la mise en place d'ateliers de vulgarisation.

Par ailleurs, le fait que les animateurs aient précisé aux différents groupes qu'ils devraient leur présenter leurs découvertes à la fin de la séance, a incité chacun d'entre eux à observer plus en détail ses actions, chercher à formuler ses résultats, décrire ses méthodes, et cela en particulier pour le binôme que nous étudions.

Cette présentation à autrui a ici aussi eu des influences sur l'avancée des enfants dans la modélisation du problème, à travers la mise en oeuvre d'un **premier modèle pseudo-concret**. Ainsi, afin de garder des traces des différentes répartitions qu'ils ont considérées, ils ont choisi d'avoir recours au support papier-crayon. Ne disposant que d'un seul stylo noir, le binôme a, de lui-même, choisi d'utiliser $\mathbf{C}_{ini}$ et donc de représenter les couleurs à l'aide de leurs initiales.



Feuille de recherche produite lors de la recherche de *La roue aux couleurs*

Bien que mise en place dans un cadre extrascolaire, les productions des enfants sous les conditions de gestion mises en place sont donc assez proches de celles relevées dans l'institution scolaire et attestent de la mise en oeuvre d'une démarche heuristique en mathématiques. Cela nous conduit à penser que la situation recherche *La roue aux couleurs*, ainsi que les deux autres situations qui étaient proposées même si nous ne les avons pas présentées, sont **dévoluables dans un cadre de vulgarisation**. En effet, elles semblent inviter le public à chercher, quel que soit le contrat didactique, juste pour comprendre.

Les situations recherche ludiques apparaissent donc comme un outil adapté pour amener le public, les enfants tout du moins, à chercher en mathématiques lors d'ateliers de vulgarisation car elles en donnent intrinsèquement envie.

II- EXPERIMENTATION SOUS FORME D'UNE ANIMATION STAND LORS DE *LA FETE DE LA SCIENCE*

Avec l'atelier de vulgarisation, l'animation stand est une des principales formes de communication utilisées par les acteurs directs de l'institution de loisir scientifique.

Elle a le plus souvent lieu lors d'événements «!grand public!», qui regroupent généralement plusieurs stands invitant à découvrir les sciences. L'accès y est libre, «!on arrive et on part quand on veut!».

II-1 ROLE DE L'ANIMATEUR ET CHOIX DIDACTIQUES!

Comme pour un atelier, la présence d'un animateur (au moins) est requise lors d'une animation stand. Cependant, son rôle varie d'un acteur de la vulgarisation à l'autre. Aussi avons-nous été amenés, pour cette expérimentation, à définir, compte tenu de nos expérimentations dans l'institution scolaire ainsi que des nombreuses interventions menées par les membres de l'erté *Maths à modeler* lors de tels événements «!grand public!», le rôle que devait avoir un animateur lors de la présentation des situations recherche ludiques dans de telles conditions.

Alors que différents jeux sont disposés sur des tables, l'animateur a la charge de convier le visiteur à jouer, de lui expliquer les règles, lever certains de ses doutes, l'inviter à considérer d'autres cas, à verbaliser ses actions, éventuellement répondre à ses questions ou l'aider dans la validation de ses dispositions, relancer la recherche, mais, comme dans toutes nos expérimentations, il ne doit pas fournir d'éléments de réponses au problème mathématique.

Compte tenu des conditions temporelles très particulières, le joueur pouvant rester le temps qu'il le souhaite, nous avons également dû faire des choix quant à la présentation du problème *La roue aux couleurs*. **La variable de recherche (n,k) est devenue une variable didactique!** : ce n'est plus le joueur qui fixe le couple (n,k) qu'il souhaite étudier mais l'animateur. Ce changement de statut nous semble nécessaire si l'on considère que le temps de recherche sera a priori court. Dès lors, le joueur n'a pas le temps de choisir le sous-problème à considérer, pas plus que de papillonner. De plus, nous faisons l'hypothèse que cette réduction de la situation recherche peut permettre d'amener le public à étudier plusieurs valeurs choisies d'un même sous-problème et de le conduire ainsi progressivement à les mettre en relation, observer ses différentes actions afin d'amorcer une démarche de recherche en mathématiques. Nous avons choisi d'orienter les recherches vers le sous-problème (n,n) afin de confirmer son accessibilité supposée. Trois supports matériels étaient disposés l'un à côté de l'autre. Sur le premier, l'animateur avait disposé 4 couleurs différentes, sur le second 5 et le dernier 6, afin que le public soit confronté à des cas possibles et impossibles.

II-2 CONDITIONS D'EXPERIMENTATION

Notre expérimentation s'est déroulée lors de la *Fête de la science*, dans une petite ville de l'agglomération grenobloise qui avait décidé d'organiser un événement «!tout public dès 8 ans!», autour des mathématiques. En plus d'une exposition «Maths dans le nature!» accompagnée de manipulations, de quelques casse-tête et d'un atelier d'écriture «!pour imaginer des explications non mathématiques, sous forme de conte!», l'équipe de *Maths à modeler* y avait été invitée à présenter ses jeux.
Les enfants circulaient librement dans notre stand ainsi que de stands en stands, et y passaient donc le temps qu'ils souhaitaient.
Trois animateurs étaient présents sur notre stand, chacun avait à sa charge la présentation d'un jeu différent!: *Les polyminos*, *La chasse à la bête* et *La roue aux couleurs.*

II-3 Presentation des productions

Durant la bonne heure qu'a duré notre intervention, une quinzaine d'enfants de 8 à 12 ans et quelques adultes sont venus visiter notre stand. Ils pouvaient choisir le cas qu'ils souhaitaient étudier si plusieurs roues étaient disponibles, si non, le support libre à leur arrivée sur le stand leur était proposé. L'animateur a su les encourager dans leurs recherches, par ses questions, il les a amenés à verbaliser leurs actions, justifier leurs propos, fournir des arguments, notamment lorsqu'ils pensaient qu'il n'y avait pas de solution, chercher des méthodes... et cela sans leur fournir de réponses.

En moyenne, ils ont cherché un quart d'heure autour de *La roue aux couleurs* avant d'aller découvrir un autre jeu ou un autre stand. Certains sont même revenus à plusieurs reprises se confronter aux cas qu'ils n'avaient pas réussi à résoudre, les derniers participants, enfin, ont été déçus d'écourter leurs recherches faute de temps.

Au regard des productions que nous avons recueillies sous forme vidéo, nous pouvons considérer que la situation a, dans ces conditions aussi, rapidement été dévoluée aux enfants. Le support matériel leur a permis d'autovalider leurs dispositions. Certains parvenaient peu à peu à anticiper la rotation.

> *«!Fille!: il faut que ce soit ici par exemple parce que si on tourne dans ce sens, il faut que le blanc soit ici mais le vert ne doit pas être ici, car quand on va tourner, ils vont se retrouver tous les deux en face à face.!»*

La dualité possible/impossible des cas à étudier a été un facteur stimulant à la recherche. En effet, tous ont cherché des solutions, quel que soit le cas considéré, encouragés par le fait que certains trouvaient rapidement des solutions pour (5,5), même au hasard. A contrario, le fait que les cas (6,6) et (4,4) soient impossibles les a conduits à organiser leurs essais, pour parvenir à trouver des solutions, comme eux-mêmes ou d'autres y étaient parvenus pour (5,5).

Certains avaient à l'esprit le fait qu'il puisse exister des méthodes, plusieurs cherchaient à anticiper la rotation quand ils plaçaient leurs pions, deux enfants ont découvert $\mathbf{M}_{sym}^{(5,5)}$. Pour (4,4) et (6,6), la majorité est restée dans le doute ou a conclu que *«!ceux-là, ils sont beaucoup plus durs!»* ou *«!à 4, c'est presque impossible car il y a toujours 2 ou 0 à un moment!»*. Cependant, quelques-uns ont évoqué l'idée que les cas pairs pouvaient être distingués des impairs et l'un d'entre eux a énoncé $\mathbf{Conj}^{(n,n)}$. Guidé par l'animateur, il a ensuite étudié (3,3) et (2,2) pour vérifier cette idée. Comme dans les classes, la preuve de l'inexistence de solution pour (2,2) a alors été formulée.

II-4 CONCLUSION! : DES CHOIX DIDACTIQUES ADAPTES POUR INVITER A CHERCHER

Au regard de cette expérimentation, nous estimons que nos choix didactiques relatifs à la présentation du problème sont adaptés pour la dévolution du problème de *La roue aux couleurs* lors d'une animation stand.
En effet, il semble important de ne pas proposer aux visiteurs uniquement des cas où il y a une solution, ce que l'on pourrait être tenté de faire de crainte de démotiver le joueur en le confrontant à un cas où il lui est impossible de fournir une solution. La co-présence de cas possibles et de cas impossibles semble un facteur stimulant au passage du statut de *joueur* à celui d'*actant*, du fait que, dans la mesure où le public ne sait pas qu'il existe des cas impossibles, il est conduit à exclure peu à peu le hasard, à organiser ses recherches afin «!de régler leur compte!» aux cas (4,4) et (6,6), qui lui semblent plus durs. Pour ce sous-problème, une autre possibilité pourrait être de proposer une roue à (5,5), une à (4,4) et une à (7,7), ce dernier cas comportant une solution plus difficile à trouver au hasard que (5,5) et donc pouvant inciter à organiser sa recherche.

Ainsi, même si rien dans le contrat didactique de notre situation ne force les enfants à continuer à chercher, leur seule curiosité et envie de trouver, comprendre, les poussent ici aussi à persévérer, se creuser la tête, essayer, recommencer... et donc à amorcer une démarche de recherche mathématique du problème.
Bien entendu, le temps de recherche étant plus court, cela ne peut être aussi abouti que dans le cadre d'un atelier, mais permet tout de même de rencontrer les mathématiques sous leur forme expérimentale. Si apports il y a[67], nous supposons qu'ils seront, dans une moindre mesure bien entendu, analogues à ceux développés par la pratique de situations recherche dans le cadre d'un atelier. Ce qui est valable à l'école l'est aussi pour l'institution de loisir scientifique!:une seule rencontre ne suffit pas pour enrichir fondamentalement le rapport que l'on peut avoir avec les mathématiques, cela ne peut avoir lieu qu'à la suite de rendez-vous réguliers...

[67] *ce que nous n'avons pu évaluer dans le cadre de cette thèse*

La roue aux couleurs est donc dévoluable lors d'événements «!grand public!». Sous des conditions de présentation et de gestion adaptées, le visiteur peut parvenir à amorcer une recherche mathématique du problème!: essayer, observer, rechercher des méthodes, être confronter à l'impossibilité, conjecturer...

Cependant, il nous semble important de relever un point qui n'est pas apparu lors de notre expérimentation mais auquel nous avons été confrontée lors d'autres événements similaires. En plus de la gestion inhérente de notre stand, il est important de prendre en compte son voisinage, les autres stands qui proposent des activités en parallèle. S'ils parlent tous de mathématiques, comme c'était le cas lors de cette expérimentation, pas de problème, par contre cela peut se compliquer si plusieurs disciplines scientifiques cohabitent. Par exemple, nous avons encadré pendant deux jours une animation stand durant une exposcience[68]. Les enfants s'inscrivaient préalablement et devaient rester une heure. Nous étions là deux jours. Le premier jour, une salle nous avait été attribuée et tout s'est déroulé sans encombre, les enfants se sont «!creusé la tête!» sur différentes situations recherche. Le second fut très différent. Nous avions été déplacée et nous trouvions juste en face du stand de *l'association des Petits débrouillards*, que nous avons présentée précédemment, qui proposait des manipulations et des défis autour de la physique et de la chimie. Face aux explosions, mélanges et autres patouilles, il nous est devenu très difficile de motiver notre public! Aussi estimons-nous que *La roue aux couleurs*, ainsi que toutes les autres situations recherche, est dévoluable dans le cadre d'une animation stand sous réserve qu'elle ne soit pas en concurrence directe avec des stands plus attractifs. Dès lors, même si elle donne intrinsèquement envie de chercher, cela peut ne plus être assez fort pour parvenir à lutter contre la concurrence!!

[68] événement de vulgarisation scientifique sous la forme d'une exposition rassemblant des projets d'enfants autour des sciences, chaque projet étant présenté par ses jeunes protagonistes. Parallèlement des ateliers de découvertes sont proposés aux participants. Nous en encadrions un.

Chapitre II.4

HYPOTHESES SUR LES APPORTS DES SITUATIONS RECHERCHE VIS-A-VIS DE LA CULTURE MATHEMATIQUE

«!Pour moi, il y a les maths classiques, que l'on fait d'habitude, à l'école, et celles que l'on fait avec vous où le raisonnement est plus important mais je ne les mets pas ensemble, c'est deux sortes de mathématiques pour moi.»[69]

Faisons le point!: d'un côté, que ce soit dans l'institution scolaire ou dans l'institution «loisir scientifique», nous avons, au regard des outils proposés pour découvrir les mathématiques, une image des mathématiques fortement rattachée à leur enseignement, réduite aux nombres et aux calculs et détachée pour beaucoup du raisonnement hypothético-déductif, donc éloignée de ce que sont réellement les mathématiques.

De l'autre!: des situations recherche présentées sous forme ludique qui semblent dévoluables dans les deux institutions considérées et apparaissent très différentes des problèmes rencontrés habituellement, notamment dans un cadre scolaire.

Ces disparités nous interrogent!: du fait de leur présentation sous forme de jeu et de leurs différences intrinsèques par rapport au type d'activité attendue face à un problème de mathématiques dans l'institution scolaire, les situations recherche ludiques sont-elles effectivement perçues comme des situations mathématiques!? Dans ce cas, quels peuvent être les apports de telles situations vis-à-vis de l'image des mathématiques dans les deux institutions qui organisent la rencontre entre les mathématiques et le public !?

[69] *Commentaire d'une étudiante recueilli lors d'un entretien individuel.*

I- EST-CE DES MATHS ?

Afin d'identifier si les situations recherche ludiques relevaient pour le joueur, élève ou grand public, des mathématiques, nous avons profité des diverses rencontres mises en place dans le cadre du projet *Maths à modeler* pour interroger le public. À l'occasion de nos expérimentations en classe, après la mise en commun, mais aussi au cours des activités menées par les chercheurs de l'erté *Maths à modeler*, enseignement ou vulgarisation, nous avons demandé oralement aux participants si *La roue aux couleurs* était pour eux un jeu, un problème de mathématiques, les deux ou bien ni l'un ni l'autre.

I-1 REPONSES DANS L'INSTITUTION SCOLAIRE

Alors que les élèves interrogés sont d'accord pour considérer *La roue aux couleurs* comme un jeu, au regard des réponses, les avis sont partagés quel que soit le niveau scolaire en ce qui concerne l'aspect mathématique. Nous retrouvons dans les arguments avancés les disparités relevées lors de l'analyse de notre questionnaire sur les problèmes au chapitre II.2.

Parmi les 35% qui estiment, après plusieurs séances de recherche, que « *La roue aux couleurs, ce n'est pas des mathématiques* », certains s'appuient sur le fait qu'il n'y ait pas de nombres, ni de calculs, comme par exemple Justine, élève de CM2 :

> *Karine : Alors, tu en penses quoi de La roue aux couleurs, est-ce que c'est des maths, est-ce que c'est pas des maths, est-ce que c'est un jeu, est-ce que c'est pas un jeu?*
> *Justine:ben c'est plutôt un jeu.*
> *K : Pourquoi c'est un jeu?*
> *J: ben je sais pas moi, **on n'additionne pas, je trouve pas qu'on fait des maths**. On n'additionne pas, on fait pas des problèmes enfin si on fait des problèmes mais **on ne fait pas des divisions, des soustractions, multiplications etc... donc je ne trouve pas que ce soit des maths**.*
> *K : Donc c'est pas des mathématiques?*
> *J: non.*
> *K : Et quand tu fais de la géométrie, par exemple, c'est des maths?*
> *J: oui.*
> *K : Et pourtant il y a pas de calculs.*
> *J: oui, mais tu dois mesurer, c'est avec des chiffres aussi. Si tu veux faire exactement ce qu'il y a sur le livre, tu dois mesurer donc il y a des chiffres.*
> *K : Tu mesures, donc il y a des chiffres, donc c'est des maths, c'est ça?*
> *J: oui.*
> *K : **Donc si il n'y a pas du tout de chiffres, de calculs, d'opérations, c'est pas des mathématiques pour toi?***
> ***J: non.***

Nous avons également retrouvé, dans les réponses de certains élèves, le fait que la logique, la réflexion, ne relèvent pas pour tous des mathématiques, comme pour Johann, élève de CM1!:

> *Karine!: Est-ce que tu penses que La roue aux couleurs, c'est des mathématiques ou est-ce que c'est juste un jeu ou est-ce que c'est ni l'un ni l'autre ou les deux?*
> *J: j'ai trouvé que c'était des mathématiques et aussi que **c'était un petit peu de la logique parce qu'il fallait bouger les aimants**...*
> *K!: Et pour toi, les mathématiques et la logique c'est pas la même chose?*
> *J: Non, pas trop.*
> *K!:C'est quoi la différence?*
> *J: ben **les mathématiques, des fois, c'est...** parce qu'il faut calculer, mesurer, des trucs comme ça, donc là aussi c'est un petit peu des mathématiques et la logique, c'est... par exemple, quand on fait une enquête, on n'a pas besoin des mathématiques, on utilise la logique...*
> *K!: Et pour toi c'est pas des maths?*
> *J: ben si on voit une trace par terre c'est pas des mathématiques, pour trouver, il faut de la logique.*
> *K!: Et là, tu utilisais de la logique comme quand tu faisais une enquête?*
> *J: oui.*
> *K!: Comment ça, tu faisais de la logique comment quand tu fais une enquête?*
> *J: non, mais si je faisais une enquête j'utiliserais de la logique.*
> *K!: Oui, mais là, tu me dis qu'il y a de la logique?*
> *J: ben oui, il faut un petit peu de logique, par exemple, on met l'aimant rouge à cet endroit, le vert à celui là, après on les tourne, on bouge...et on voit ce qui va ou pas...*
> *K!: **Donc ça c'est pas des mathématiques, c'est de la logique comme dans les enquêtes, parce que c'est pas des calculs**?*
> *J: **oui.***

A contrario, 65% des élèves interrogés reconnaissent *La roue aux couleurs* comme relevant des mathématiques, car chercher des solutions implique d'avoir recours à un raisonnement, comme Roxane, élève de la même classe que Justine!:

> *Karine!: Est-ce que pour toi c'est des mathématiques ce qu'on fait avec le jeu de la roue aux couleurs?*
> *Roxane: Euh, ouais assez.*
> *K!: En quoi est-ce des mathématiques?*
> *R: ben **il faut chercher**, il faut s'amuser et aussi il faut un peu calculer avec le jeu de la roue.*
> *K!: Comment ça il faut calculer?*
> *R: il faut calculer comment faire pour pas qu'il y ait de fautes.*
> *K!: Mais ce n'est pas calculs, des additions, des soustractions des choses comme ça?*
> *R: non, non, c'est pas des calculs comme ça.*
> *K!: Et est-ce que c'est un jeu ou est-ce un problème de maths ou les deux?*
> *R: Ben moi je le prends comme un jeu parce que j'aime bien travailler dessus donc voilà moi je le prends comme un jeu, pas comme du travail.*

ou encore Quentin, pour qui *La roue aux couleurs* comporte des similitudes dans sa résolution avec les énoncés habituellement proposés en classe:

Karine!: Est-ce que tu penses que La roue aux couleurs, c'est des mathématiques ou est-ce que c'est juste un jeu ou est-ce que c'est ni l'un ni l'autre ou les deux?
Quentin: les deux.
K!: Alors, en quoi c'était des mathématiques?
Q: ***ben il fallait rechercher, c'est comme un énoncé de problème, il faut chercher et ensuite il faut trouver.***
K!:Et en quoi c'était un jeu?
Q: ben il fallait placer les pions, c'était amusant.

Contrairement à Quentin, certains parmi eux marquaient tout de même une différence entre les mathématiques de *La roue aux couleurs* et celles de la classe, comme Kévin, élève de CM1!:

Karine!: Est-ce que tu penses que La roue aux couleurs, c'est des mathématiques ou est-ce que c'est juste un jeu ou est-ce que c'est ni l'un ni l'autre ou les deux?
Kévin: une sorte de mathématiques, ***il y avait beaucoup de recherche*** *mais il n'y avait pas beaucoup d'opérations, c'est juste les calculs pour voir si un aimant allait sur l'autre aimant quand on tournait la roue,* ***c'est pas des mathématiques classiques, c'est des mathématiques plutôt en s'amusant*** *et tout ça...*
K!: Mais c'est quand même des mathématiques pour toi?
K: ben ouais quand même mais ***c'est plus rigolo que des vraies mathématiques.***
k!:Et t'as trouvé que c'était aussi un jeu?
K: ben ouais. C'est un jeu de mémoire, de recherche....

ou Marie, étudiante en Licence de Science du langage!:

Marie!: Je ne considère pas La roue aux couleurs comme un problème de mathématique parce que pour moi, il y a les maths classiques, que l'on fait d'habitude, à l'école, et celles que l'on fait avec vous où le raisonnement est plus important mais je ne les mets pas ensemble, c'est deux sortes de mathématiques pour moi.

Ces avis partagés montrent encore une fois que certains élèves ont un rapport aux mathématiques très éloigné de celui du chercheur!: pour un certain nombre d'entre eux, les mathématiques sont ici encore rattachées aux calculs et au cadre numérique, le raisonnement qui les caractérise n'est que très peu identifié.

I-2 REPONSES DANS L'INSTITUTION «LOISIR SCIENTIFIQUE»

Nos expérimentations dans l'institution de loisir scientifique nous ont permis de recueillir l'avis de nos visiteurs sur la situation *La roue aux couleurs*. Nous avons complété leurs réponses par des entretiens menés lors d'autres événements «!grand public!» auxquels l'erté *Maths à modeler* participait. Au total, une cinquantaine de personnes ont été interrogées, âgées de 8 à 66 ans...

Nous retrouvons dans l'institution de loisir scientifique les deux points de vue rencontrés dans l'institution scolaire.

54% des personnes que nous avons interrogées pensent que les situations recherche relèvent des mathématiques car leur recherche nécessite le recours au raisonnement, la recherche de méthodes, la généralisation, et cela quel que soit leur âge, comme l'illustrent les réponses suivantes!:

à 8 ans!:

- oui, parce qu'on doit chercher où ça se met...c'est des maths, c'est un jeu mais c'est des maths... On réfléchit.

- oui, il faut trouver la bonne chose, il faut bien trouver ce qui va marcher et ce qui ne va pas marcher avant de se lancer

à 11 ans!: (réponse donnée après avoir trouver une méthode pour 5 et l'avoir utilisée pour 7, puis avoir essayé de montrer pourquoi ce n'était pas possible pour 2 et 4 et cherché pour 6…)

- non… si, parce que ça dépend des méthodes, parce que si je veux placer un vert, je dois trouver en combien de fois c'est bon… si je dois faire en trois fois, tourner le vert trois fois, (etc.…) …!Ma méthode, c'est de la logique… c'est des maths, ça dépend des méthodes… Je ferais la même chose pour 23…

à 12 ans!:

- oui c'est des gros problèmes… Je ne suis pas forte en problèmes mais en maths, en calcul mais pas en calcul mental… Des problèmes, c'est quand on a une énigme et qu'il faut réfléchir beaucoup avant de la résoudre… Les problèmes, c'est pas facile, comme ici, il faut réfléchir à la solution...

à 13 ans!:

- c'est des maths parce qu'il y a des propriétés.

- oui, car il faut bien calculer comment on fait quand on tourne.

à 14 ans:

- c'est des maths parce c'est logique, qu'il faut réfléchir...trouver des stratégies. Il faut être malin et intelligent.

à 54 ans!:

- oui, on doit chercher les combinaisons possibles... il faut un raisonnement pour trouver.

à 58 ans!:

- ce genre de problème on le démontre par les maths...il doit y avoir une explication mathématique, une formule.

à 66 ans!:

- ça a l'air d'être des maths, pas le hasard, on peut y arriver en réfléchissant.

Les 46% restants ont affirmé que *La roue aux couleurs* n'était pas du ressort des mathématiques. Quelques-uns ont été influencés par sa présentation ludique, mais la plupart s'est appuyée sur le fait que la recherche ne nécessitait pas de calculs mais juste un raisonnement et cela là encore, quel que soit l'âge.

à 8 ans:

- non… C'est des jeux… c'est pas des maths parce qu'on réfléchit… À l'école, on calcule…

à 9 ans!:

- c'est un jeu mais pas vraiment des maths. Il faudrait avoir quelque chose à compter et là il y a rien à compter.!

à 13 ans!:

- c'est pas des maths parce que c'est logique, il faut réfléchir.
- c'est pas des maths car c'est pas beaucoup fait avec des formules.

à 14 ans:

- non c'est plutôt de la logique. Les maths, c'est plutôt des calculs…
- c'est pas des maths parce qu'on s'amuse.
- pour moi, c'est pas des maths, c'est un jeu de société

à 19 ans

-je verrais plutôt ça comme un jeu de logique, de créativité… Certains jeux, ça peut être des maths, mais ici c'est plutôt un jeu de logique… Les maths c'est tout ce qui est théorème, scolaire, à l'école…

à 36 ans!:

- non c'est un jeu...Les maths, c'est des chiffres.

Quelle que soit l'institution considérée, les réponses recueillies auprès des joueurs, tous âges confondus, corroborent donc les différents points de vue autour des mathématiques que nous avions identifiés lors de l'analyse de notre questionnaire. Soit, comme les chercheurs en mathématiques, le public a conscience que relever du domaine des mathématiques implique la mise en oeuvre d'un raisonnement mathématique et de tout ce qui en découle... dans ce cas-là, il reconnaîtra les situations recherche comme mathématiques et elles seront pour lui une occasion de s'amuser en cherchant et vice-versa... Soit, les mathématiques sont réduites pour lui au champ numérique, alors, la plupart de nos situations recherche ne remplissant pas ce critère, il ne les assimilera pas seul à des problèmes de mathématiques. C'est pour lui que nous estimons que la rencontre régulière avec des situations recherche est susceptible d'être la plus enrichissante. Nous allons par la suite chercher à identifier quels pourraient en être les apports.

II- SITUATIONS RECHERCHE ET IMAGE DES MATHEMATIQUES

L'image des mathématiques de nos joueurs peut être, comme nous l'avons vue, éloignée de ce que sont réellement les mathématiques. Ces différences tiennent avant tout au fait, d'une part que les mathématiques apparaissent pour beaucoup comme fortement rattachées à leur enseignement et d'autre part, que la majorité des activités mises en place dans le cadre scolaire offrent une vision réductrice de l'heuristique en mathématiques, comme nous l'avons vu à travers notre étude des manuels scolaires de primaire au chapitre!I.1 ou comme le soulignent les auteurs d'*ERMEL*!:

«!L'enseignement laisse ainsi s'installer une conception des mathématiques comme détachées, la plupart du temps, des questions qui ont été à l'origine de leur production et réduites aux théories telles qu'elles sont exposées. L'activité du mathématicien est en partie masquée.(...) Toute théorie mathématique aboutit comme un cristal sans défaut dans des traités et des manuels.!» [ERMEL, 2004, p39]

Du fait qu'elles sont dévoluables dès le plus jeune âge, nous faisons donc l'hypothèse que, en plus des apprentissages transversaux que nous avons relevés dans la première partie de notre thèse, **la pratique régulière de la recherche de situations recherche peut enrichir l'image des mathématiques des élèves** si elle a lieu dans un cadre scolaire, ou du grand public et en particulier des enfants, si elle est menée dans le cadre d'un atelier de vulgarisation scientifique et ainsi participer à la diffusion de la culture mathématique.

II-1 POINT DE VUE DE QUELQUES ENSEIGNANTS!

Afin d'identifier quels peuvent être les apports des situations recherche dans la diffusion de la culture mathématique, nous avons interrogé, d'une part, les enseignants de primaire et 6ème qui ont participé à nos expérimentations, d'autre part des enseignants de lycée qui ont suivi un atelier autour des situations recherche, notamment *La roue aux couleurs,* lors de la troisième université d'été *Animath* à laquelle nous avions été invitée, avec d'autres membres de l'erté *Maths à modeler.*

Au regard des réponses apportées, ces enseignants estiment que la pratique régulière de situations recherche peut **élargir le rapport aux mathématiques** proposée le plus souvent à l'école et faire prendre conscience aux élèves que *«!les mathématiques ne sont pas seulement des calculs!»*, que *«!cela les a rassurés de voir que les maths, ça se ne résume pas à une personne (l'enseignant), un livre, des exercices. C'était aussi quelqu'un d'autre qui arrivait, autre matériel, autre démarche, et certains ont eu ensuite une attitude plus de chercheurs entre guillemets…!»*. Les situations recherche sont vues par ces enseignants comme un moyen de «!*changer le rapport aux maths de l'élève (son prof n'a pas nécessairement la réponse à tout et il peut le voir chercher tout comme lui…) et à l'erreur… tout en participant (espérons le) à casser l'image caricaturale des mathématiques comme d'une matière où «!on applique…!» pour en faire une matière qui permet de développer l'autonomie, la prise d'initiative, de faire appel à l'imagination, de développer la créativité, d'attiser la curiosité, de déclencher l'envie et le plaisir d'apprendre, de réfléchir, de comprendre et de… trouver!! c'est-à-dire des qualités transférables au-delà des maths…!»*

Nous trouvons également l'idée que les situations recherche puissent **modifier**

l'image que l'on peut avoir de l'activité de recherche en mathématiques, notamment car elles peuvent permettre *«!de façon plus immédiate, de supprimer le "réflexe" d'un encore trop grand nombre d'élèves, qui après une lecture rapide d'énoncé d'un exercice, se réfugient derrière un!: «!Je ne sais pas faire ...!» comme si le fait de n'en avoir jamais fait du même type que celui proposé devenait une condition suffisante pour ne pas tenter de le résoudre… Le sentiment d'échec est souvent écrasant pour qui n'est jamais en situation de réussite mais si les élèves prennent l'habitude, voire le plaisir, de sécher et d'exposer les diverses étapes de leur démarche, un autre intérêt pourra être de les libérer de la peur de la copie vide à condition, bien entendu, de les évaluer sur leurs démarches, qu'elles soient fructueuses ou non, pourvu qu'elles soient explicitées quant à leur intention.!»*
D'autres, enfin, insistent sur le fait que cela pourrait **participer à une «! réconciliation! » de certains élèves avec les mathématiques**. En effet, les situations recherche peuvent être l'occasion de **«!** *dédramatiser les mathématiques, montrer que tout le monde a besoin d'y passer du temps, d'échanger avec les autres pour avancer.!Les montrer comme plus vivantes. Les élèves ont alors plus de chance de se les approprier. »*. De plus, *«!cela peut être valorisant pour un élève de voir l'une de ses pistes explorée avec toute la classe.!»*

II-2 NOS HYPOTHESES

Compte tenu des expérimentations menées dans l'institution scolaire et dans l'institution de loisir scientifique, des réponses des enseignants et des réticences de certains participants à voir dans *La roue aux couleurs* un problème mathématique, nous faisons plusieurs hypothèses quant aux apports potentiels sur l'image des mathématiques de la pratique régulière de situations recherche, en classe ou dans le cadre d'ateliers réguliers.

Le fait que l'image des mathématiques majoritairement répandue établisse un lien fort entre les mathématiques et l'école et qu'ainsi le rapport personnel vis-à-vis des mathématiques du grand public soit très proche de celui d'un élève, nous conduit à supposer que ces apports peuvent être identiques d'une institution à l'autre.
Cependant, nous estimons que la rencontre régulière avec les situations recherche sera d'autant plus profitable qu'elle aura lieu dans l'institution scolaire. En effet, l'activité induite acquerra alors une crédibilité aux yeux de tous, une «!mathématicité!», les mathématiques rencontrées à l'école étant souvent reconnues comme **«! les vraies! »** par le grand public, celles proposées dans un cadre de vulgarisation étant jugées, du fait qu'elles sont souvent différentes dans leurs approches et leurs contenus, comme d'autres mathématiques, des mathématiques moins sérieuses, «!pour rire!», ou des jeux.

Si tel n'est pas le cas, leur rencontre dans l'institution de loisir scientifique (si elle a lieu, ce qui n'est pas le cas pour tout le monde), si elle est régulière, peut tout de même contribuer à enrichir l'image que l'on peut avoir de cette discipline scientifique mais au détriment de celle transmise par l'école. Les «!vraies!» mathématiques seraient alors toujours perçues de la même manière!: une discipline rattachée au calcul, où il faut trouver **la** bonne méthode, utiliser **le** bon outil, tandis que les «!pour rire!» apparaîtraient comme vivantes, fourmillant de questions, permettant à tout un chacun de cheminer dans la résolution, d'imaginer, tout en s'amusant...
Par la suite, compte tenu de ces remarques, nous considèrerons avant tout les apports des situations recherche dans un cadre scolaire, et supposerons similaires les contributions apportées par leur rencontre dans le cadre extrascolaire.

Tout d'abord, dans la mesure où les avis sont partagés, que dans une même classe par exemple, certains estiment que *La roue aux couleurs* relève des mathématiques et d'autres non, cela peut amener à **instaurer un débat autour des mathématiques**, de ce qu'elles sont, comme nous l'avons fait pour clore chacune de nos expérimentations, débat qui a rarement l'occasion de se produire dans l'institution scolaire, et encore plus en primaire. Chacun cherche alors à définir ce qu'il entend par «!mathématiques!», ce qui pour lui caractérise l'activité mathématique... Identifier *La roue aux couleurs* comme un problème de mathématiques nécessitera donc de chercher des exemples, de se référer aux pratiques de la classe présentes et passées, de revenir sur sa recherche, ses différentes étapes... et conduire ainsi à porter un **regard épistémologique** sur la discipline, regard qui peut participer à lui donner plus de sens.

D'autre part, une fois le statut mathématique établi (par les élèves ou les enfants après débats ou par l'institution scolaire si les situations recherche sont intégrées aux pratiques régulières de la classe en mathématique ou encore par la présence d'un chercheur), les situations recherche peuvent **enrichir le regard que l'on porte sur les mathématiques**, et **combler les disparités qu'il semble exister entre le rapport personnel d'un sujet de l'institution scolaire et celui d'un expert dans la discipline, le chercheur en mathématiques**. En particulier, du fait qu'elles ne se situent généralement pas dans le champ numérique, elles peuvent amener à **détacher les mathématiques du calcul et mettre en valeur le raisonnement, la démarche de recherche comme critères significatifs d'une activité mathématique**, comme en témoigne une des étudiantes de Licence Science du Langage après plusieurs séances de recherche autour de situations recherche que nous avons encadrées: «*je me rends bien compte avec ce qu'on a fait que les maths ce n'est pas que calculer, qu'il y a autre chose...* »
Par ailleurs, les situations recherche ludiques peuvent **réconcilier certains élèves avec les mathématiques**. Dans chacune de nos expérimentations, aucun élève ne s'est retrouvé en profondes difficultés, tous, quel que soit leur niveau, sont parvenus à être

acteurs de la recherche. La très grande majorité de nos «!cobayes!» affirme qu'elle a aimé chercher, qu'elle a envie de recommencer ce genre d'activité. Le fait que plusieurs pistes puissent être suivies et qu'aucun savoir notionnel ne fasse obstacle à l'avancée dans la résolution nous conduit à penser que la confrontation régulière avec une telle activité peut donc redonner confiance à certains, en leur montrant, comme le souligne un enseignant, *«!les mathématiques comme un savoir vivant et riche et non comme un ensemble de règles à apprendre par cœur qui empêchent toute initiative, toute créativité.!»*.

Ainsi, la pratique régulière de situations recherche peut-elle, selon nous, contribuer à développer un aspect de la culture mathématique très peu traité, que ce soit dans l'institution scolaire ou dans l'institution de loisir scientifique!: **comprendre ce qu'elles sont** et ainsi participer à *«!établir un rapport personnel aux mathématiques qui soit un rapport personnel à un domaine de connaissances et pas seulement un rapport à une activité scolaire où par exemple, il s'agit de deviner quelles sont les attentes du maître.!»*, objectif inhérent à l'enseignement des mathématiques comme le soulignent les auteurs d'*ERMEL* [ERMEL, 2004, p28].

BILAN ET PERSPECTIVES

Nous espérons que nos travaux contribueront au développement des situations recherche ludiques à l'école et en dehors, car, nous l'avons montré, elles peuvent participer à donner *« le goût des mathématiques »,* comme le préconisent les différents rapports ministériels et autres qui se sont succédé ces dernières années. Elles complètent les initiatives existantes, montrent et font vivre les mathématiques sous leur aspect expérimental, « les mathématiques en train de se faire ». Nos différentes expérimentations nous ont permis de conclure que leur pratique peut conduire à développer des compétences relatives à la démarche de recherche en mathématiques et enrichissent l'image que l'on peut avoir de cette discipline. Elles permettent de faire des mathématiques, au sens où nous l'avons défini, dès le plus jeune âge, que ce soit dans l'institution scolaire ou dans l'institution de loisir scientifique. Ainsi, elles peuvent contribuer à *«rompre avec une vision des mathématiques portée par la société où la culture mathématique apparaît comme une culture réservée par essence à une petite frange de la société. »* comme cela est souligné dans le rapport Kahane [Kahane, 2002, rapport sur la formation des maîtres en mathématiques, p 75], en montrant à chacun qu'il est capable de produire des mathématiques, comme le chercheur.

Afin de poursuivre nos recherches, nous allons tout d'abord expérimenter d'autres situations recherche à l'école primaire, étudier leur dévolution, et vérifier la pertinence des outils de gestion que nous avons identifiés.
D'autre part, nous allons mettre en place un atelier de mathématiques régulier, sur le temps périscolaire, à l'instar de ceux que nous proposons dans le cadre de l'association « *Sciences et malice* » pour les autres sciences. Par ce biais, nous étudierons la mise en place d'un atelier sur le long terme dans l'institution « loisir scientifique», ce que nous n'avons pas pu faire durant ces trois années.
Enfin, nous avons commencé à organiser des formations afin de répondre aux attentes de plusieurs acteurs de l'institution de loisir scientifique désireux d'enrichir leur approche des mathématiques. Nous avons encadré un premier atelier sur les situations recherche au cours d'une formation organisée par l'association des *« Petits débrouillards »* autour des pratiques innovantes. Une autre est prévue prochainement en partenariat avec une des directions régionales de *« Jeunesse et Sports ».*

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ANIMATH [2000] *Les mathématiques autrement!: Créer et animer un club de mathématiques en collège et lycée*, actes de la première université d'été, coordonnateur HENNEQUIN P.L, IREM de Clermont Ferrand.

ANIMATH [2002] *Créer et animer un atelier de mathématiques en collège et lycée, actes de la deuxième université d'été*, coordonnateur HENNEQUIN P.L, IREM de Clermont Ferrand.

ANIMATH [2005] *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire*, actes de la troisième université d'été, coordonnateur HENNEQUIN P.L, IREM de Clermont Ferrand.

ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M. [1988]!*Problème ouvert et situation-problème.* Ed. IREM de Lyon.

AUDIN P., DUCHET P. [1992] *La recherche à l'école : Maths.en.Jeans*, Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique. n°121, pp. 107-131, Grenoble 1.

BALMES M.R, COPPE S. [1999*],* Les activités d'aide à la résolution de problèmes dans les manuels de cycle 3*, Grand N n° 63*, p39 à 57.

BKOUCHE R., CHARLOT B, ROUCHE N. [1991]!*Faire des mathématiques: le plaisir du sens.* Bibliothèque européenne des sciences de l'éducation. Armand Colin.

BROUSSEAU G. [1998]!, *Théorie des situations didactiques*, ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

BROUSSEAU G [2005], *séminaire didatech, 7 fev 2005*, Laboratoire Leibniz, Grenoble.

BRUN J. [1990] Etude de problèmes arithmétiques/ bilan et perspectives, *MATHS ECOLE, n°141*, in ERMEL CM1, p 46.

BUCHS M. [2004] *La médiatisation de la science dans la grande presse quotidienne française (Le Monde, Le Figaro, Libération)*, in actes du colloque «!La publicisation de la science!», ICM, Grenoble 3, mars 2004.

CHEVALLARD Y. [1992] Concepts fondamentaux de la didactique!: perspectives apportées par une approche anthropologique, *RDM 12-1*, La pensée sauvage, Grenoble, p 73-112.

CHEVALLARD Y. [1994] Les processus de transposition didactique et leur théorisation, in Arsac et al, *La transposition didactique à l'épreuve.* La Pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, BOSCH ET GASCON [1997] in *Balises en didactiques des mathématiques, cours de la XIIème école d'été de didactique des mathématiques,* ed. La Pensée sauvage, Grenoble, 2005, p113.
COPPE S., HOUDEMENT C., [2002]: Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire, *Grand N n°69*, p 53 à 62.
COULANGE L, [1997], Les problèmes concrets à mettre en équations dans l'enseignement, *Petit X n°47*, p33-58.
DARCHE.M., Populariser les mathématiques, *bulletin APMEP n°436*, p 628-632.
DELOUSTAL-JORRAND V. [2004], *L'implication mathématique!: étude épistémologique et didactique, étude sous trois points de vue!: raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une dituation didactique qui problématise l'implication.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, décembre 2004.
Dictionnaire des Mathématiques de A.BOUVIER & M.GEORGE & F.LE LIONNAIS [1979]
Dictionnaire de l'académie française [1992]
Dictionnaire Le petit Robert, [2003]
Dictionnnaire du petit Larousse illustré, [2005], Larousse, Paris
EYSSERIC P. ET AL [1996]!, Le plaisir de chercher*, in Le plaisir de chercher et autres textes…,* IUFM Nice
EYSSERIC P. [2002] Les ateliers de recherche en mathématiques (expérimentation dans les classes et formation des professeurs d'école)*, Grand N n° 70*, p 7 à 34.
FROMENTIN J., TOUSSAINT N., Des jeux et des mathématiques, *Bulletin APMEP n°424,* p 672-680
GARDNER M. [1982], *Maths circus, jeux mathématiques*, ed. Bibliothèque Pour la scienc, Diffusin. Belin.
GASQUET S [1989]!. *Apprivoiser les maths,* l'école des parents, Syros alternatives.
GODOT K [1999] *Etude de la communication scientifique destinée à la jeunesse*, mémoire de DESS ,Université Stendhal, Grenoble.
GODOT K [2002] *Les situations recherche comme situations d'apprentissage. Etude didactique et analyse d'une situation expérimentale (la roue aux couleurs)*, mémoire de DEA, Université Joseph Fourier, Grenoble.
GODOT K, GRAVIER S. [2003], ECSITE (European Collaborative for Science, Industry and Technology Exhibitions) Annual Conference 2003!: «!Mathematics in Science Museums!- The challenge and strategies!for meeting it!», Munich, novembre 2003.
GODOT K, GRAVIER S. [2003], *Situations recherche et jeux mathématiques: de l''élève au grand public*, 25ème journées internationales sur la communication, l'éducation et la culture scientifiques, techniques et industrielles, «!Ignorances et questionnements!», Chamonix, décembre 2004.

GODOT K, GRENIER D. [2004], *Research situations for teaching: a modelling proposal and examples*, ICME 10, Copenhague, juillet 2004.(TSG 14!: Innovative approaches to the teaching of mathematics).
GODOT K, GRENIER D. [2004], *Situations de recherche pour la classe!: objectifs, caractéristiques pour une dévolution à l'élève, condition pour une gestion pour l'enseignant*, 3ème Université d'été Animath, «!La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire!», Saint Flour, août 2004.
GLAESER G. [1971], *Mathématiques pour l'élève professeur,* Paris!: Herman.
GLAESER G. [1999], *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*, ed. La penseé Sauvage, Grenoble.
GRENIER D. et PAYAN C. [1998] Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes, *RDM n°18,* n°1, pp59-100.
GRENIER D. ET PAYAN, C. [2002] Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Paris, 19 Octobre 2002.
GRANETTI L., JAQUET F. [1998], La résolution de problèmes par classe, *Grand n°61,* p61-69.
HILBERT D. COHN-VOSSEN S. [1932], *Geometry and the imagination* (traduction Nemenyi), New York, 1952, réédition Chelsea.
HOUDEMENT C. [1999], Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes!; *Grand N n°63*, p59 -76.
APMEP [2002] *JEUX 6, des activités mathématiques pour la classe*, Brochure APMEP n°144, ed. APMEP et ACL-Les éditions Kangourou.
JULO J. [1995]! *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*, Presses Universitaires de Rennes.
LAKATOS I. [1984], *Preuves et réfutations*, Hermann.
LEGRAND M. [1993]. Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères IREM n°10*, p.123-159. Topics editions
MENSOURI D. [1994], *Essai de délimitation en termes de problématiques des effets de contrat et de transposition!: le cas des relations entre droites et équations dans les classes de seconde et première*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.
NIMIER J. [1989]!*Entretiens avec des mathématiciens,* Irem de Lyon.
OUVRIER-BUFFET C. [2003]! *Construction de définitions / construction de concept!: vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques.!». Etude épistémologique et didactique de la définition. Etude théorique et expérimentale auprès d'étudiants de 1ère année d'université.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, décembre 2003.
PEAULT H. [1993]!Vers une pratique collective des mathématiques, le rallye de Maine et Loire, *Grand n°51*, p 55-65.
QUINTRIC C. [1998]!, Jeux de société et apprentissages mathématiques, *Grand n°61,* p9-23.

POISARD C. [2005]! *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer*, Thèse de l'université de Marseille, soutenance prévue en décembre 2005.
POLYA G. [1989]!*Comment poser et résoudre un problème,* Paris!:J.Gabay
RANNOU J.M [2004] *Dévolution d'une situation de modélisation, étude didactique et analyse d'une situation expérimentale*, mémoire de DEA, Université Joseph Fourier, Grenoble.
ROLLAND J. [1998]!, *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication.* Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble.

RAPPORTS! (PAR ORDRE DE PARUTION)

La culture scientifique et technique en 2001!: constats pour agir demain, rapport aux ministres de l'éducation nationale et de la recherche, sous la direction de R.Jantzen, Juillet 2001.
Enseignement des sciences mathématiques!: Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, rapport au ministre de l'éducation nationale, sous la direction de J.P Kahane ; O.Jacob/Centre National de Documentation Pédagogique, Paris 2002 ; 284 p.; 19 cm.
La culture scientifique pour tous!: une priorité nationale, rapport d'information du Sénat n° 192, par M.C Blandin, I. Renar au nom de la commission des affaires culturelles, Juillet 2003.
Développement et diffusion de la culture scientifique et technique. Un enjeu national, rapport établi à la demande du Premier ministre auprès du ministre de l'éducation nationale, du ministre de la culture et de la communication et de la ministre déléguée à la recherche et aux nouvelles technologies, par E.Hammelin, Novembre 2003.
Apprendre aujourd'hui, réussir demain. Premiers résultats de PISA 2003, OCDE 2004.
Avis de l'Académie des sciences sur l'enseignement scientifique et technique dans la scolarité obligatoire!: école et collège, sous la présidence de Le Douarin, Fondation pour l'innovation politique, Janvier 2005.

MANUELS SCOLAIRES

Diagonale CE2, ed Nathan, 1993
Collection Diagonale,CM1, ed Nathan, 1993
Nouvelle Collection Thévenet, CM1, ed Bordas, 1996
Collection Quadrillage, CM1, ed Istra, 1997.
L'heure des maths CE2, ed. Hatier, 1999

Objectif Calcul, CE2, ed Hatier, 2001
Objectif Calcul, CM1, ed Hatier, 2001
Objectif Calcul CM1, le livre du maître, ed Hatier, 1995.
Objectif Calcul, CM2, ed Hatier, 2001
Cap maths, CM1, ed. Hatier, 2003
Cap maths, le guide des activités, ed. Hatier, 2003.

ERMEL [1995]!*Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CE2,* Paris, Hatier.
ERMEL [1997]!*Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CM1,* Paris, Hatier.
ERMEL [1999]!*Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CM2,* Paris, Hatier.
ERMEL [2004]!*Vrai!? Faux!?...On en débat!! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3,* INRP.

QUELQUES LIVRES SUR LES MATHEMATIQUES!

Atlas de mathématiques, Gamma, école active, 2003
Histoire de maths, collection maths pour tous, ACL-éditions du Kangourou, 2000 et de façon générale toutes les publications de ACL - les Éditions du Kangourou.
BARROW J!.D [2003], *Pourquoi le monde est-il mathématique!?* éditions Odile Jacob poche.
BUSSER E. et COHEN G. [1999],*Affaire de logique,* Pôle édition.
BUSSER E. et COHEN G. [1999],*Affaire de logique2,* Pôle édition.
ENSZENBERGER H.M, [1998],*Le démon des maths,* éditions Seuil/Métaillé.
EDWARDS H. et PITUCCI E. [1996], *Les mathématiciens,* éditions Pour la science.
GHATTAS R. [2005]!*Petite salade de mathématiques, pour amateurs et gourmands*, First éditions.
GIUSTI E. [2000]!*La naissance des objets mathématiques,* Coll. L'esprit des sciences, éditions Elllipses.
GUEDJ D [1996]!*L'empire des nombres,* éditions Gallimard.
GUEDJ D. [1998]!*Le théorème du perroquet,* éditions du Seuil
GUEDJ D [2004]!*Les cheveux de Bérénice*, éditions du Seuil
GUEDJ D [2000]!*Le mètre du monde,* Points, éditions du Seuil
HERSCOVICI A., [2000], *La spirale de l'escargot, contes mathématiques,* éditions du Seuil.
PETIT J.P. [1982] *Le géométricon* de la série *Les aventures d'Anselme Lanturlu*, éditions Belin.

PETIT J.P. [1988] *Le Topologicon*, de la série *Les aventures d'Anselme Lanturlu*, éditions Belin.
PERELMAN Y. [2001] *Oh les maths!* éditions Dunod.
SHASHA D. [1995], *Les aventures du Dr Eco,* éditions O.Jacob.
SHASHA D. [1996], *Jeux d'esprit et énigmes mathématiques, codes, mystères et complots,* éditions O.Jacob.
SMULLYAN R. [1981], *Quel est le titre de ce livre ?* éditions Dunod
SMULLYAN R. [1984], *Ce livre qui rend fou,* éditions Belin.
SMULLYAN R. [1993],*Ca y est, je suis fou !,* éditions Dunod.
SOUDER D. [2001] , *Maths et magie*, ACL- éditions du Kangourou, ed. Pentaèdre, Paris.
TAHAN M. [2001] , *L'homme qui calculait,* éditions Hachette.
TSOBGNY B. [2002],*Ponok, Ponok, drôles d'histoires mathématiques,* éditions Odin.
VERDIER N. [1998], *A quoi servent les mathématiques ?* Les essentiels Milan.
VERDIER N. [2000], *Qu'est-ce que les mathématiques ?* Quatre à Quatre, Editions Le Pommier.
SCIESZKA J., SMITH L., [1997],*La malédiction des maths* éditions du Seuil.

QUELQUES SITES INTERNET SUR LES MATHEMATIQUES

http://www.momes.net/education/problemes/problemes.html
http://mediamaths.asso.fr/
http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/panorama/amusante.html
http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau/
http://perso.wanadoo.fr/sc-sc/
http://perso.wanadoo.fr/mathador
http://www.univ-rouen.fr/LMRS/Vulgarisation/
http://www.ilemaths.net/
http://www.carrefour.usherb.ca/amusegueule/aG.html
http://www.enigmathic.com/
http://Devi-Net.com/
http://perso.wanadoo.fr/aupaysdesmaths/
http://www.diophante.fr/index.htm
http://www.mathenpoche.net
http://perso.wanadoo.fr/yoda.guillaume/index.htm
http://www.recreomath.qc.ca/
http://carredas.free.fr/
http://www.crdp.ac-grenoble.fr/imel/jeux.htm
http://perso.wanadoo.fr/marco.butte/#probleme
http://www.crocodilus.org/
http://lemalstudios.free.fr/enigm/

http://www.enigmatum.com/index.php
http://www-leibniz.imag.fr/LAVALISE/debut.htm
http://trucsmaths.free.fr/
http://membres.lycos.fr/ericmer/
http://jeuxmaths.free.fr/
http://www.mathkang.org/default.html
http://perso.wanadoo.fr/jean-paul.davalan/
http://www.qiqcm.com/enigmes1.htm

ANNEXES

Sommaire des annexes

ANNEXE 1
REMISE DES PRIX "LA MAIN A LA PATE"
DISCOURS DU MINISTRE FRANÇOIS FILLON [01/02/05]

Le 1er février 2005, le ministre de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche!a remis les prix de l'opération «!La Main à la pâte!» lors d'une cérémonie à l'Académie des sciences.
Lancée en France par le professeur Georges Charpak, prix Nobel de physique, cette!initiative pédagogique invite les enfants, a souligné François Fillon, *«!à construire, pas à pas, les différentes étapes de la démarche scientifique!».*
Tout en saluant le succès des élèves récompensés et l'engagement de leurs maîtres, le ministre a indiqué que, dans le contexte de la préparation de la loi sur la recherche, «!donner le goût des sciences aux enfants et éveiller leur curiosité est un enjeu particulièrement important. C'est pourquoi, a-t-il précisé, j'ai d'ailleurs inscrit la culture humaniste et scientifique dans le socle des connaissances et des compétences qui doivent être impérativement maîtrisées à l'issue de la scolarité obligatoire!».

Seul le prononcé fait foi

Mesdames, Messieurs,

Il n'y a pas une journée sans que le dernier de mes enfants –qui a trois ans– ne me dise!: «!Dis papa, comment ça marche!?!»
S'il est parfois difficile d'apporter l'explication qui assouvit la soif de savoir, la question illustre bien la singularité de l'Homme dont toute l'Histoire est fondée sur deux interrogations!: pourquoi et comment!?
Cette curiosité naturelle de l'enfant pour les «!choses!» de son environnement doit être cultivée et entretenue. Et l'École, dès le primaire, doit en être le vecteur.
Nous le savons, cet enseignement de la science et de la technologie a parfois été conçu comme!trop abstrait, voire académique, ne laissant pas suffisamment de place à l'imagination de l'élève…
C'est de ce constat qu'est née «!La main à la pâte!». Portée avec passion par le professeur Charpak, cette formidable initiative part du principe qu'une démarche assise sur la curiosité enracine l'enfant dans le monde qui l'entoure et lui offre les premières clefs de la culture scientifique.
Le soutien de l'Académie des sciences –puis celle des technologies– à ce projet a été précieux… L'éducation nationale sait pouvoir compter sur les académiciens lorsqu'il s'agit de s'engager au service de l'École et de l'enseignement des sciences.
Mesdames, Messieurs,
À!un moment où la crise des vocations scientifiques se fait sentir dans notre pays, au moment où cet enseignement régresse, nous devons faire aimer la science. Celle-ci doit retrouver toutes ses lettres de noblesse.
Pour cela, le projet d'orientation pour l'avenir de l'École fixe deux objectifs ambitieux, qui devront être atteints d'ici 2010!:
- la proportion d'étudiants suivant une formation supérieure scientifique, hors formation de santé, devra augmenter de 15% ;

- la proportion de jeunes filles dans les séries scientifiques, générales et technologiques devra, pour sa part, augmenter de 20%.
En la matière, nous savons qu'il existe une sorte de barrière psychologique et culturelle qui dissuade une large partie des jeunes filles à s'engager dans ces filières. Il faut faire tomber cette barrière!!
Pour atteindre nos objectifs, il faut, c'est un préalable, réconcilier les Français avec la science… Nous vivons un étrange paradoxe!: celui d'une science qui bouleverse notre vie quotidienne, qui est à l'origine de conséquences extraordinaires, mais dont la perception est souvent superficielle, voire caricaturale.
Cette approche réductrice de notre société n'est pas sans risque!:
- risque de voir le progrès scientifique tiraillé entre deux camps!inconciliables : celui qui attend tout de la recherche et celui, à l'inverse, qui craint tout d'elle!;
- risque aussi d'une communauté scientifique engagée dans la course de ses découvertes et livrée à elle-même devant des questions sociales et éthiques qui ne sont pas de son seul ressort.
C'est dire combien la réconciliation de nos concitoyens avec leur recherche est vitale.
C'est précisément l'ambition de notre loi sur la recherche. Celle-ci a une double vocation!: redonner de l'élan et de l'espoir à la communauté scientifique!et replacer la recherche au cœur de la société française.
Dans ce contexte, donner le goût des sciences aux enfants et éveiller leur curiosité est un enjeu particulièrement important. C'est pourquoi, j'ai d'ailleurs inscrit la culture humaniste et scientifique dans le socle des connaissances et des compétences qui doivent être impérativement maîtrisées à l'issue de la scolarité obligatoire.
Placée au service de cette culture scientifique, je crois dans la démarche préconisée par «!La main à la pâte!».
Contournant l'écueil d'une maîtrise parfois trop désincarnée des connaissances, elle invite à construire, pas à pas, les différentes étapes de la démarche scientifique. En plaçant l'enfant au centre de celle-ci, elle l'engage à observer, à raisonner, à réagir à partir de phénomènes et d'objets empruntés à son environnement.
Je trouve cette initiative remarquable!car en faisant des élèves d'apprentis chercheurs, on les encourage à se respecter, à se poser des questions, et à formuler des réponses.
Et à ceux qui considèrent qu'un enfant de 7, 8 ou 9 ans n'est pas prêt à une telle démarche, je les invite à regarder les travaux primés aujourd'hui. Je pense par exemple à «!L'île du naufragé!» par lequel les élèves de Saint-Malo ont réalisé un distillateur solaire; je pense aussi aux «!Robots!», un travail qui a permis aux élèves de Neuville-lès-Dieppe de réaliser de petits robots mobiles pilotés par ordinateurs… Et je m'excuse ici de n'en relever que deux alors que tous mériteraient que je les cite…

Je souhaite féliciter tous les élèves. Du haut de votre jeune âge, vous démontrez votre capacité à aborder, ensemble, des thèmes aussi riches et variés que «!La Terre et son manège!», «!La mission astronomique européenne Mars express!», «!le pendule!», «!Un jardin à l'école!»…
Un tel succès, Mesdames et Messieurs, serait impossible sans l'engagement et l'enthousiasme des maîtres.
En acceptant d'engager leur classe dans cette belle aventure scientifique, ils ont fait la preuve d'une grande maîtrise professionnelle.

Mesdames, Messieurs,

Le succès de «!La main à la pâte!» se mesure également aux émules qu'elle fait de part le monde… Bien que d'origine américaine, la démarche a été «!apprivoisée!» et retravaillée par la France et inspire aujourd'hui nombre de pays en Europe ou encore en Chine.

La France participe ainsi activement à de nombreux échanges à l'échelle internationale... Et je veux ici mentionner tout particulièrement le lancement par le professeur Charpak, en juin 2004, du prix international Purkwa pour l'alphabétisation scientifique des enfants de la planète.

Mesdames, Messieurs,

La science et la recherche font la fierté d'une nation.

Si elles représentent, pour toutes les générations, un facteur d'espoir, elles sont d'abord pour les plus jeunes, un vecteur de rêve.

Cette part de rêve, les enfants qui sont ici l'ont touchée.

Et je forme le vœu que l'expérience qu'ils ont vécue, avec ses moments d'émerveillement, de découverte, et de réalisation préservera leur curiosité et développera, pourquoi pas, des vocations…

Je n'ai pas de plus beau projet à imaginer pour eux!!

Atelier 1 : Problème du forain et des n couleurs

Un forain dispose n pions de n couleurs distinctes sur un grand cercle (appelé "cercle extérieur") comme sommets d'un polygone régulier. Est-il possible de placer sur un petit cercle concentrique (appelé "cercle intérieur"), comme sommets d'un polygone régulier, n pions de k couleurs distinctes de sorte que quelle que soit la manière de tourner le cercle intérieur, un et un seul pion de ce cercle intérieur soit en face d'un pion de même couleur du cercle extérieur ?

Réponse

Oui dans tous les cas sauf les deux cas suivants :

1) si k = 2 et n est premier

2) si k = n ou k = n-1 et k est pair.

Démonstration

Numérotons les couleurs de 0 à n-1, et appelons g(x) la couleur du pion qui, en position initiale, se trouve en face de la couleur x. Après une rotation de $2q\pi/n$, c'est la couleur g(q+x) qui se trouve en face de la couleur x, compte tenu qu'on travaille dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. L'hypothèse signifie que pour tout q, l'équation g(q+x) = x admet une et une seule solution : si l'on pose f(x) = x - g(x), pour tout q, l'équation f(q+x) = q admet une et une seule solution. En d'autres termes, la fonction f est bijective, alors que la fonction $x - f(x) = g(x)$ prend exactement k valeurs distinctes, les k couleurs que l'on choisit pour les pions du cercle intérieur.

Il s'agit donc de chercher les bijections f de **Z**/n**Z** dans lui-même telles que $x - f(x)$ (ou, ce qui revient au même, $f(x) - x$) prenne exactement k valeurs distinctes.

On utilisera le fait que si f(x) est bijectif de **Z**/n**Z** dans lui-même, $\sum f(x) = 0 + 1 + ... + (n-1) = n(n-1)/2$. Si n est pair ($n = 2m$), cette somme vaut $2m^2 - m$, soit m modulo n, alors que si n est impair ($n = 2m+1$), cette somme vaut $m(2m+1) = mn = 0$ modulo n. Dans tous les cas, f étant bijectif, $\sum f(x) - x = 0 \pmod n$.

Si $k = 2$ et n premier, le problème n'admet pas de solution. En effet, si l'on appelle a et b les deux valeurs prises, a étant prise t fois et b (n-t) fois, $\sum f(x) - x = ta + (n-t)b = t(a-b) \pmod n$. Or n étant premier, **Z**/n**Z** est un corps, et pour avoir $t(a-b) = 0 \pmod n$, il faut soit que $t = 0 \pmod n$, soit que $a = b \pmod n$: dans un cas comme dans l'autre, il n'y a plus deux couleurs mais une seule. Par contre, si n est non premier, soit d un diviseur de n autre que 1 et n. Posons $f(x) = x+d$ si x est divisible par d, $f(x) = x$ sinon. f(x) est évidemment bijective : elle permute circulairement l'ensemble des multiples de d et est l'identité sur l'ensemble des non-multiples de d. Or il est clair que
$f(x) - x$ prend exactement deux valeurs : d et 0.

Si n est pair ($n = 2m$), l'hypothèse $k = n$ signifie que la fonction $f(x) - x$ est elle aussi bijective, donc que $\sum f(x) - x = m \pmod n$, ce qui n'est pas possible. Par contre, on peut avoir $k = n-1$: il suffit que $f(x) - x$ prenne deux fois la valeur 0 et aucune fois la valeur m pour que $\sum f(x) - x$ soit nul modulo n, ce qui suggère au moins une solution : $f(x) = 2x$ si x $A = \{0, ... , m-1\}$, $f(x) = 2x+1$ si x $B = \{m, ... , 2m-1\}$. En effet, cette fonction f est bien bijective car elle prend toutes les valeurs paires pour x A, toutes les valeurs impaires pour x B ; $f(x) - x$ s'annule en 0 et en $2m-1$, et prend toutes les valeurs de **Z**/n**Z** hormis m.

Si n est impair, $n = 2m+1$, pour avoir $k = n$ il suffit de choisir la fonction $f(x) = 2x$, qui est évidemment bijective de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $f(x) - x = x$ étant lui aussi bijectif. Par contre, si $k = n-1$, soit a la valeur prise deux fois et b la valeur jamais prise, $\sum f(x) - x = (0 + \dots + 2m) + a - b = a - b \pmod n$, il faudrait donc que $a - b = 0 \pmod n$ ce qui n'est manifestement pas possible.

Dans tous les autres cas, le problème est soluble. *Commençons par le cas où* k est impair, $k = 2p+1$.

$$\text{Si } x \quad \{0, \dots , p\},\ f(x) = 2x \text{ ; si } x \quad \{p+1, \dots , 2p\},\ f(x) = 2x - (2p+1), \text{ et si } x \quad \{2p+1, \dots , n\},\ f(x) = x.$$

Il est clair que f est bijective, et que $f(x) - x$ prend toutes les valeurs de $\{-p, \dots , 0, \dots, p\}$ soit $2p+1$ valeurs distinctes modulo n, vu que $n \geq k = 2p+1$.

Si k est pair, $k = 2p$, avec $p \geq 2$ et $n \geq k+2$, partitionnons notre ensemble $E = \{0, \dots , n-1\}$ en :

- l'ensemble $A = \{0, \dots, 2p-1\}$,
- un nombre quelconque d'ensembles B_i contenant chacun entre 2 et $p+1$ entiers consécutifs : $B_i = \{q_i + 1, \dots , q_{i+1}\}$ pour $1 \leq i < j$, avec

$q_1 = 2p-1 < \dots < q_j = n-1$ et, pour tout i, $2 \leq q_{i+1} - q_i \leq p+1$. *Ceci ne serait pas* possible si n était égal à k ou $k+1$, mais dès lors que $n \geq k+2$, c'est facile à réaliser : on peut par exemple choisir des ensembles de p éléments jusqu'à ce qu'il reste moins de p éléments, s'il n'en reste qu'un seul on l'ajoute au dernier ensemble pour former un ensemble de $p+1$ éléments, s'il en reste au moins deux, on en fait un nouvel et dernier ensemble.

Dans l'ensemble A, on pose :

$$\text{si } x \quad \{0, \dots , p-1\},\ f(x) = 2x+1, \text{ et si } x \quad \{p, \dots , 2p-1\},\ f(x) = 2x - 2p.$$

f réduite à A est manifestement une permutation de A, et sur A, $f(x) - x$ prend toutes les valeurs de $\{-p, \dots , p\}$ sauf 0, soit $2p$ valeurs distinctes modulo n vu que $n > 2p$: appelons C cet ensemble.

Dans l'ensemble B_i, on pose :

$$f(x) = x+1 \text{ si } x \quad \{q_i + 1, \dots, q_{i+1} - 1\}, \text{ et } f(q_{i+1}) = q_i + 1.$$

f réduite à B_i est une permutation de B_i, de sorte que, sur l'ensemble E tout entier, f est clairement bijective. Par ailleurs, si B_i a p_i éléments, $f(x) - x$

prend deux valeurs sur B_i : 1 et $1 - p_i$. Aucune des deux n'est nulle, et toutes deux appartiennent à *C* vu que $2 \leq p_i \leq p+1$.

On en déduit que f(x) - x prend exactement 2p valeurs distinctes sur E (les 2p éléments de *C*), ce qui achève la démonstration.

démarche heuristique

Il a fallu un certain temps pour s'approprier le problème et tester les premiers cas avec le jeu, notamment lorsque n = 4, initialement avec des erreurs (c'est en revenant dessus à la demande de Denise Grenier que l'on a constaté que (4, 3) fournissait des solutions). Le cas k = 1 étant d'emblée évident, c'est ensuite le cas k = n pour n impair qui nous a semblé le plus immédiat : il suffit de placer les couleurs dans l'ordre inverse sur le cercle intérieur (ce qui revient à f(x) = 2x), Si à chaque position du cercle intérieur on associe la position de la couleur qui coïncide, aux positions successives du cercle intérieur on associe une étoile du cercle extérieur. D'autres étoiles fourniraient d'autres solutions, mais l'important est de savoir s'il existe au moins une solution, et de se rendre compte que cela ne se généralise pas à n pair car il n'existe pas de telles étoiles dans un polygone ayant un nombre pair de côtés (cf étoile à 5 branches et étoile de David).

A cette occasion, Michel Tixier et moi sommes revenus sur n = 3, et on a constaté que (3, 2) ne marchait pas alors que (4, 3) marche. La démarche de Michel Tixier était d'ailleurs plus exhaustive et systématique que la mienne, car je cherchais seulement les notions qui allaient être opérationnelles pour la solution générale. J'entendais les groupes voisins utiliser l'expression "point fixe" et je me suis senti obligé de formaliser sous forme de fonction de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans lui-même, mais c'était difficile à mettre en place, et il a fallu longtemps pour que cette approche fonctionnelle soit pleinement opérante dans la mesure où, pour un certain nombre de cas, j'avais du mal à traduire en termes de fonctions ce que je voyais en termes de couleurs. Par exemple, pour le cas (n,

2) lorsque n est pair, il était clair que je choisissais deux couleurs diamétralement opposées, à tout diamètre du cercle extérieur j'associais l'une des deux couleurs arbitrairement, cela fournissait une solution visuellement évidente mais difficile à décrire en termes de fonctions. Cela revient en fait à $f(x) = x + h(2x)$, h étant une fonction quelconque de l'ensemble des nombres pairs de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans lui-même, mais c'est peu avant de rédiger proprement la solution ci-dessus que j'en ai pris conscience.

Le cas $k = 2$ posait problème pour n impair, mais l'idée de l'expérimenter sur $n = 5$ me gênait, je sentais que c'était à ce stade-là qu'il fallait rompre avec l'approche exhaustive pour approfondir la formalisation. D'ailleurs, il est connu que la perception de la quantité n'est pas la même à partir de 5, on peut percevoir globalement jusqu'à 4 alors qu'à partir de 5 il faut compter. J'ai introduit d'abord $g(x)$ en plaçant sous la ligne 1, 2, ... n (ce n'est qu'après que je suis passé à 0, 1, ..., n-1) la ligne : $g(1)$, $g(2)$ ... $g(n)$, puis la ligne $g(2)$, ... $g(n)$, $g(1)$, etc... en faisant tourner de telle sorte que c'est $g(x) - x$ qui était bijectif. J'introduisais $f(x) = g(x) - x$, et c'est $f(x) + x$ qui devait prendre k valeurs. Ce problème de signe ne modifiait pas le raisonnement, mais cela compliquait l'explicitation de f, et cela m'a gêné jusqu'au moment de rédiger la présente solution, où j'ai décidé de faire tourner dans l'autre sens pour faire apparaître $f(x) - x$ (initialement j'avais $x - f(x)$, ce qui était moins compliqué à manipuler que $f(x) + x$, néanmoins non optimal).

Dans le cas $k = 2$ pour n impair, je raisonnais en termes ensemblistes : j'introduisais l'ensemble A des éléments pour lesquels f prenait une des valeurs a, l'ensemble B des éléments pour lesquels f prenait l'autre valeur b, et pour que $f(x) + x$ soit bijectif il fallait que A translaté de (b-a) soit égal à A ; j'avais souvenir d'une démonstration qu'un tel sous-ensemble n'existait pas, sous réserve que — c'est en rédigeant que je m'en suis souvenu — cette démonstration ne marchait que pour n premier. Dès lors que n est non premier, il suffisait de partitionner le polygone extérieur en sous-polygones unicolores pour trouver facilement une solution. Exprimer cette solution en termes fonctionnels (cela revient à choisir $f(x) = x + h(dx)$ avec h quelconque de l'ensemble des multiples de d dans lui-même) m'a demandé plusieurs jours. Gilles Godefroy, à qui j'ai mentionné mon résultat, avait de son côté travaillé sur le cas $k = n$ pour n pair. Cela m'a incité à revenir sur ce cas.

J'ai assez vite vu la solution dans ce cas, liée à la somme de n entiers consécutifs qui n'est pas divisible par n lorsque n est pair. Puis, il m'est apparu que la solution pour k = 2 lorsque n n'est pas premier pouvait se généraliser à tous les $k \leq d$ si $n \geq d^2$ est divisible par d.

J'ai alors étudié le cas k = n-1 lorsque n est pair : il suffisait de faire tomber l'argument que la somme des f(x) - x était non nulle, et pour cela choisir deux fois un nombre et exclure le nombre diamétralement opposé. Cela m'a donné presque aussitôt la réponse pour k = n-1 lorsque n est impair, car le fait que cela se ramenait à a-b = 0 semblait assez immédiat.

L'idée était alors de généraliser au cas k = n-3, k = n - (2p+1) ... pour n pair, avec une fonction f(x) = 2x sur la première moitié de l'ensemble E,
f(x) = 2x + 2p sur la seconde moitié. Les notations n'étaient pas optimales à l'époque, et je mettais un certain temps à voir l'ensemble des valeurs effectivement prises par f(x) + x puisque c'est encore en ces termes que j'abordais le problème. Par ailleurs, cette démonstration ne semblait pas généralisable au cas k < n/2.

Très souvent, j'avais envie d'utiliser des inégalités pour décrire les sous-ensembles de E, bien que je sois conscient qu'il n'y avait pas de relation d'ordre dans **Z**/n**Z**.

Il restait à voir le cas k = 3 pour n = 8 ou n premier. Initialement, j'ai cherché en termes ensemblistes deux ensembles A et B tels que $(A + \{a\}) \approx (B + \{b\}) = A \approx B$, mais cela ne menait pas à grand-chose. Par expérimentation, je me suis rendu compte que les cas n = 7 et n = 8 n'étaient pas différents pour k = 3, ce qui m'a conduit au fait que k = 3 était soluble pour tout n, et c'est en cherchant à rédiger cette solution que je me suis pleinement approprié la formalisation en termes fonctionnels et que je me suis convaincu qu'il devait exister des fonctions simples permettant de résoudre ce problème dans tous les cas. J'ai alors construit la fonction présentée ci-dessus pour n quelconque et k impair, qui résolvait entièrement le cas k impair.

Le cas k pair m'a demandé plus de temps. J'ai voulu construire une fonction identique, mais il fallait qu'une telle fonction ne soit pas constructible dans les cas où j'avais déjà démontré que le problème n'admettait pas de solution, donc k = 2 et k = n ou n-1. Pour k = 2, ce n'était pas très difficile, mais pour k = n ou n-1, je cherchais initialement une fonction qui soit la fonction identité pour x   A, et je ne comprenais pas pourquoi le complémentaire de A devait avoir au moins deux éléments. Mais sur A, il n'était pas possible de construire une fonction telle que la seule valeur non atteinte par f(x) - x soit autre que zéro, vu que la somme des valeurs prises par f(x) - x est nécessairement nulle et f(x) doit être une permutation de A. Cela m'a conduit, après quelque tâtonnement, à la solution rédigée ci-dessus.

A cours de la rédaction, j'ai encore dû optimiser des notations et placer en tête l'argument que la somme des f(x) - x était nulle puisque ceci revenait à plusieurs endroits de la démonstration. Passer de la solution à la rédaction d'une solution publiable n'est pas instantané, d'autant que la seule formulation en termes clairs de l'énoncé (que je n'avais pas copié lors de la séance) n'est pas si simple que cela, et c'est une partie du travail de recherche — même s'il commence lorsque la recherche proprement dite est terminée —, d'autant que pendant la rédaction il est encore possible de trouver des difficultés que l'on avait sous-évaluées et qui, parfois, remettent en cause la démonstration.

ANNEXE 3

ENONCE ORIGINAL PROPOSE DANS LE MANUEL

DIAGONALE CM1

Résoudre un problème : formuler les réponses

Avec les nombres… Ranger dans l'ordre croissant $\frac{417}{100}$ $4 + \frac{9}{100}$ $4 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100}$.

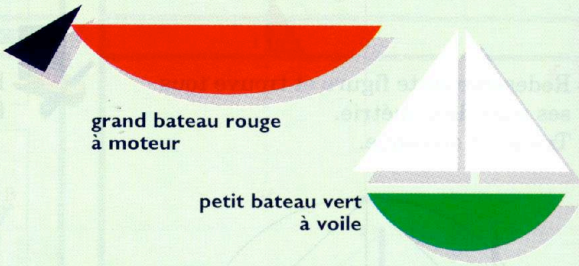
1 Alain, Maxime et Julie veulent construire un jeu pour leur petit frère Olivier qui est à l'école maternelle. Ils décident de découper des gommettes pour que Olivier puisse réaliser des bateaux en les assemblant. Pour cela, ils fixent les règles suivantes :

– les bateaux peuvent être blancs, verts, rouges ou noirs ;
– on peut choisir entre des voiles, un moteur ou des rames ;
– il y a deux tailles de bateaux : les petits et les grands.

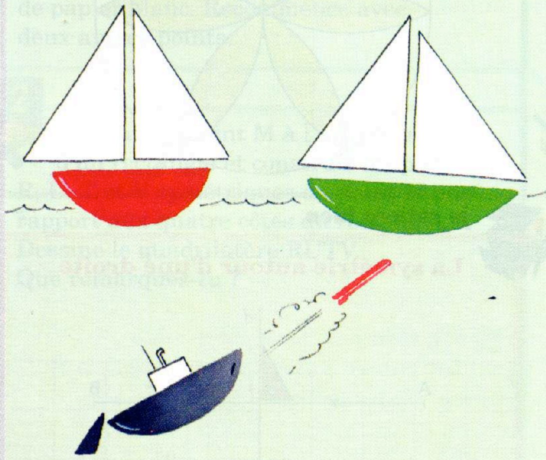
Les trois enfants pensent qu'Olivier pourra ainsi réaliser beaucoup de bateaux…

Ils se mettent alors à chercher le *nombre de bateaux différents* que leur frère pourra construire avec ces gommettes.

Voici comment ils s'y prennent pour répondre à cette question :



Alain commence à dessiner tous les bateaux possibles.



Maxime a commencé un arbre.

- blanc
  - voile
    - petit
    - grand
  - moteur
  - rame
- vert
- rouge
- noir

Julie pense à construire un tableau.

	blanc	vert	rouge	noir
voile				
moteur				
rame				

a Que penses-tu de leurs méthodes ?

b Rédige la réponse détaillée que chacun d'eux donnera quand il aura fini. Compare les différentes phrases ainsi rédigées.

ANNEXE 4
JOURNAL DE L'ECOLE

n°4

Samedi 9 avril 2005

FLASH ECOLE

Bilan des jeux de maths

Nous avons présenté un cas avec deux chercheurs et deux dossiers de couleurs différentes. Nous avons aimé le séminaire car on expliquait nos méthodes aux autres. Les jeux de math nous on apporté beaucoup de plaisir en apprenant autrement. Les jeux de la table tournante étaient « super » !!!

Marine M, Elodie, Manon D et Ugo

Edito

Le printemps est arrivé et surprise, la neige aussi!!

Les bourgeons naissent et le flash info de ce mois lui aussi est né!!!

Cela nous a apporté à mieux résoudre des problèmes, à chercher des solutions ; nous avons aussi appris une autre façon de faire les maths (au séminaire).Nous avons vu des collégiens nous présenter une nouvelle façon de faire des jeux de maths (les dominos). J'ai bien aimé le séminaire car il y avait plein de spectateurs (comme les collégiens). Jennifer

Bilan des jeux de maths.

Cela nous a changé des maths actuelles car, d'habitude, nous posons des opérations.

Quand c'était notre tour, nous avons eu un peu peur parce que c'était la première fois que nous présentions un problème devant plein de personnes.

J'ai bien aimé le problème des 6ème car il parlé des dominos : c'était différent de la table ronde avec ses chercheurs et ses dossiers. KEVIN LAURA MORGANE

Bilan des jeux de math.

Cela nous a simplifié les maths !

Nous avons appris les jeux des dominos, nous avons questionné des chercheurs et c'était très amusant ; cela nous apporté beaucoup de choses, comme réfléchir et résoudre un problème.

Nous avons compris la technique des M barrés et des M pas barrés :Si tu mets le carré rouge sur le M pas barrés cela marche,

Si tu mets le carré rouge sur le M barré cela ne marche pas. Maxime

Bilan des jeux de maths

J ai appris que j'avais peur des plus grands que moi et que j étais très timide; j ai bien aimé nos jeux parce que j ai beaucoup rigolé ; je n'ai pas aimé les jeux des dominos car je n'ai pas compris.

Lucas

Bilan des jeux de maths J'ai bien aimé le séminaire car c'était la première fois que je parlais devant tout ce monde. Cela m'a fait plutôt bizarre car la machine était quasiment de ma taille ! J'ai aussi apprécié d'écouter les collégiens.

Ceci m'a apporté de pouvoir travailler en s'amusant. En classe c'était amusant d'utiliser la table tournante pour faire nos recherches. Maud

Dans ce numéro :

- 1 -

ANNEXE 5
HISTORIQUE DES CAS ETUDIES. GROUPE JAUNE

	Temps	*Cas étudiés*	*Pourquoi?*
1ère séance	t=0	(4,2) avec répartition 2+2 pour les deux couleurs centrales.	Reprennent l'exemple initial donné
	t=52	(4,2) avec répartition 3+1 pour les deux couleurs centrales.	Intervention de A2 *A2!: oui mais peut être qu'il faut pas mettre deux et deux.* *J!: ah ouais peut être qu'il faut mettre trois!?* *Ju: oui, trois.*
	t=100	(4,4)	Intervention de l'enseignant *Ens!: si vous mettez trois, soyons un peu logique. Si vous mettez trois couleurs rouges!;* *Ju!: oui.* *Ens!: par exemple, là,…* *Ju!: là, il y a un rouge aussi.* *Ens!: là, ça va marcher à chaque fois.* *Ju!: ah ben oui.* *Ens!: oui, mais si vous mettiez une autre couleur qui doit être une couleur qui est là. Ben à un moment, qu'est ce qui va se passer!?* *Ju!: ben…* *J!: obligatoire, il va y en avoir deux.* *Ens!: obligatoire, il va y en avoir deux, alors!?* *Ju!: ben c'est pas bon.* *Ens!: alors…* *J!: donc il faut pas mettre les mêmes couleurs au milieu, enfin, une des mêmes couleurs au milieu* *Ens!: essayez peut être de voir…si par exemple, vous mettez…* *J!: ben là, ça fait déjà deux.* *Ens!: une couleur de chaque.*
	t=160	(4,2)	Intervention de A2 à leur demande. *A A2: c'est impossible!!* *A2!: mais il y en a plein qui ont trouvé!!* *Ju!: mais nous, on n'y arrive pas.* *A2!: ah mais vous, vous cherchez avec 4 différentes au milieu…* *E et Ju!: ben c'est ce que l'enseignant nous a dit…* *A2!: bon là, elles sont toutes différentes , là, au bord, mais au milieu, il y en a que deux des couleurs…par exemple si vous choisissez rouge et vert, au milieu, vous pouvez essayer par exemple avec trois verts et un rouge…* Une solution à (4,2).

	t=216	(4,2) en étudiant le choix des deux couleurs du milieu.	Intervention de A2 *A2!: ben maintenant il faut continuer. Est ce que vous pouvez toujours y arriver!? par exemple, si on garde toutes les couleurs autour, est ce que vous pouvez toujours y arriver, ou c'est un coup de bol. Par exemple, là, vous y êtes arrivées avec deux blancs et deux rouges, est ce que vous pouvez y arriver avec deux noirs et deux verts, par exemple*
	t=280	(5,2)	Intervention de A2 *A2: maintenant, vous pouvez essayer avec 5 couleurs par exemple…* *Ju: 5 couleurs?* *A2: si vous avez l'impression que 4 vous avez tout trouvé. ça voudrait dire que vous avez résolu le problème du 4 couleurs au bord et 2 au milieu.*
	t=390		Fin de la séance

	Temps	*Cas étudiés*	Pourquoi?
2ème séance	*t=0*	(4,2)	Vérification de ce qu'elles avaient fait lors de la première séance. *J: allez on réessaye pour voir si ça marche, d'accord?*
	t=55	(5,5)	*J:Maintenant, on va essayer à 5.* Une solution.
	t=68	(5,5)	Recherche d'une autre solution *J: maintenant, on essaye ça.* Elles placent 5 autres couleurs. Une nouvelle solution.
	t=128	(4,2)	Doute lors de la vérification de ce qu'elles avaient fait lors de la première séance. *A1: donc, vous pouvez continuer à chercher avec autant de couleurs au bord qu'au milieu, ou avec autant au bord et deux seulement au milieu comme vous aviez fait la semaine dernière. Vous choisissez.* *J: d'accord. On va faire celui ci.* *E: oui, mais regarde sur celui d'avant je ne sais pas comment on place ceux du milieu.* *Ju: je sais comment on fait.* *Ju: non, je sais plus en fait. Je crois que c'est comme ça…*
	t=250	(4,3)	*A3: Et maintenant, vous faites quoi?* *J: On essaie avec 4 au bord et 3 au milieu. A1 a dit qu'on pouvait essayer avec 4 .* *A3: et moins à l'intérieur?* *Ju: oui, oui, elle nous l'a dit.*

2ème séance	t=300	(2,2)	Intervention de A1 et choix des élèves *A1: alors vous en êtes où?* *J: ben pour l'instant on trouve rien;* *A1: mais vous aviez trouvé des solutions déjà à 4.* *J: oui mais tu nous a dit d'essayer à 4 et 3 au milieu.* *A1: ah non, ah non. Là, t'en choisis 2 mais tu dois les répéter comme la semaine dernière, il faut qu'il y ait le même nombre au bord et au milieu.* *J: ah on peut essayer 2 alors. Mais ça va marcher alors. ça fait…* *A1: voilà, par exemple, est ce que à 2, on va y arriver?* *Ju: ah ben oui…ah ben non…*
	t!=!322	(2,1)	Intervention de A1 *J: à deux, c'est impossible.* *A1: avec deux couleurs au milieu.* *J:oui* *A1: et si on met qu'une couleur au milieu?*
	t=400	(7,7)	*J: bon on va faire avec 7 là, on va essayer avec 7.*
	t=420	(6,6)	*J: il nous manque du noir. On essaye avec …6 couleurs.*
	t=443	(5,5)	Intervention de A1 *A1!: Et si je mets les 5 autrement vous pouvez trouver aussi? Bon, on va essayer. Je choisis 5 autres couleurs.*
	t=485	(6,6)	Intervention de A3. Appliquer méthode découverte pour (5,5) à (6,6) . *A3: donc tu peux me faire une autre solution alors?* *E: ben oui* *A3 place 6 couleurs à l'extérieur.* *E refait sa méthode.* *E: là, il y en a …là…ça marche pas…Il y en a zéro. Là, un, là, deux…* *A3: attends, laisse comme c'est, on continue pour voir où ça ne marche pas…* *E!: ça ne marche pas.*
	t=495	(7,7)	Intervention de A3 *A3!:Alors maintenant, si je mets ça comme ça? (A3 met 7 couleurs à l'extérieur). Je mets le doré avec le doré. Fais ta méthode, comme tu m'as dit tout à l'heure.*
	t=520	(4,4)	Intervention de A3 *E: alors en fait ma méthode ça marche que pour impair, ça marche pas pour pair.* *A3: essaye de le vérifier à d'autres nombres pairs . Par exemple, 2, 4, vous n'avez pas essayé je crois.* *Ju!: On essaye à 2 ou à 4?* *J: à 2, on a déjà fait.*

2ème séance	t=550	(3,3)	Intervention de A3 *A3: donc là, ça ne marche plus. C'est pas pour tous les nombres pairs alors que ça marche alors.* *E: non c'est pour les nombres impairs que ça marche.* *A3: c'était pour les pairs, non?* *E: non, pour les pairs, ça marche pas, là, ça marchait et on avait mis 5 et 5; et 7 et 7.* *A3: ah oui, d'accord. Donc, on peut essayer à 3 couleurs, alors?*
	t=555	(1,1)	Intervention de A2 *A2: alors, vous en êtes où?* *Elles lui montrent leurs notes.* *A2: et avec 1, ça marche?* *E: ben ouais! Bien sûr..* *A2: à 1, ça marche toujours?* *E: oui.*
	t=560	(8,8)!?	*J: on essaye avec 8 maintenant? Ah mais il n'y a que 7 couleurs…*
	t=565		Fin de la séance

	Temps	Cas étudiés	Pourquoi?
3ème séance	t=0	(8,8)	Reprise de la recherche *J: E; la dernière fois on avait dit qu'on essayerait à 7 couleurs.* *J: ah mais on a 8 couleurs en fait.*
	t=30	(8,4)	Difficulté à trouver pour (8,8) *J: ben sinon, essayez avec 8 autour et 4 couleurs au milieu…* *E continue à chercher à (8,8).* *J: non, là, il faut que tu essayes avec 4…mets un bleu, là…* *E continue à chercher à (8,8).* *J: Non, mais si il y a zéro à un moment, ça va pas. Essaye par exemple avec 4 couleurs différentes…* *Une solution à (8,4).*
	t=88	(4,2)	Intervention de A1 *A1: oui, mais il faut que vous concentriez sur un problème où vous avez commencé à trouver plein de choses, au lieu d'en faire un nouveau, ce que vous avez fait, là, c'est un nouveau problème, ne vous dispersez pas, c'est la dernière séance. Vous aviez trouvé des choses avec deux couleurs au milieu et aussi avec autant au milieu qu'au bord. Vous choisissez d'aller plus sur un problème ou un autre, comme vous avez envie, mais vous n'en inventez pas un nouveau, d'accord?* *E: d'accord.*
	t=245	(4,2)	Discussion avec A2 pour remplir la fiche récapitulative.
	t=460	(3,3)	*J: on a déjà essayé avec 3 couleurs?* *E: euh, je sais plus.* *Elles essayent.* Une solution à (3,3)
	t=470		Fin de la séance

ANNEXE 6
HISTORIQUE DES CAS ETUDIES- GROUPE NOIR

	Temps	Cas étudiés	Pourquoi?
1ère séance	t=0	(4,2)	Ils reprennent l'exemple initial donné
	t=55	(4,2)	*M!: bon, on montre!?* *Ils voulaient montrer leur solution à A2 mais ils ne l'avaient pas notée.* *M: ouais tout à l'heure on avait réussi mais ils ont tout changé, alors...* Recherche d'une autre solution avec d'autres couleurs extérieures.
	t=80	(5,2)	Suggestion de A2 *A2: maintenant, vous pouvez changer des choses. Par exemple, est que vous pouvez rajouter des couleurs autour!?* *M!: oui, oui!;* *D: on met un blanc, là.* *A2!: donc disons si vous rajoutez un blanc...* *D: donc il faut rajouter un blanc là aussi.*
	t=100	Abandon du (5,2) Reprise du (4,2)	Ils ne sont pas parvenus à trouver une solution à (5,2) *M!: ouais mais nous il y en avait deux trucs et deux trucs* *D!: mais on a réussi de toutes façons, on s'en fout.* *M: il faut refaire ce qu'on avait fait avant*
	t=180	(4,2)	Une solution à (4,2), recherche d'une autre *P!: et pourquoi tu changes tout!?* *D!: ben j'essaie d'en trouver d'autres..* *D!: non, c'est pas comme ça…ça y est j'ai compris, c'était comme ça…ça y est j'ai déjà trouvé.*
	t=200	(4,2)	Une solution à (4,2), recherche d'une autre *M: Maintenant, il faut en trouver une autre.*
	t=220	(4,2)	Suite à une intervention de A1, recherche d'une autre solution à (4,2) en gardant les couleurs extérieures de la solution précédente et en modifiant le choix des deux couleurs intérieures!. *A1!: est ce que vous avez essayé avec d'autres couleurs au milieu, doré et noir par exemple!ou doré et vert?* *M!: ah, il faut trouver mais avec d'autres couleurs!?* *A1!: oui. Il faut trouver toutes les façons que le joueur a pour gagner…*
	t=440		Fin de la séance

	Temps	Cas étudiés	Pourquoi?
2ème séance	t=0	(4,2)	Reprise de ce qui a été fait lors de la première séance.
	t=2 min	(4,2)	Recherche d'autres solutions *P!: tu fais quoi!?* *E!: ben ouais!, on en fait d'autres. Il faut en faire d'autres.*
	t= 5 min	(8,2)!?	Point sur la recherche avec A3. Généralisation. *E!: là, on a trouvé mais il faut juste changer les couleurs alors on met plein de solutions différentes.* *A3!: et vous n'avez qu'une solution!?* *D!: non, on en a plein!! On en a 5 mais c'est toujours la même chose sauf qu'on change les couleurs.* *A3!: et maintenant qu'est ce que vous voulez tenter!? Vous avez fait toutes les combinaisons de couleurs!?* *E!: on en a fait 5.* *A3!: est ce que ça vaut le coup de toutes les faire ou c'est toujours la même chose!?* *D!: ça va toujours être la même chose sauf que ce ne sera pas les mêmes couleurs.* *A3!: alors vous faîtes quoi maintenant!?* *E!: on pourrait essayer 8 autour.*
	t=6 min	(6,5) en croyant chercher (6,6)	Intervention de A3. *A3!: vous avez fait pour 4, alors vous pouvez choisir un autre nombre de pions, 8 ou peut être moins, comme vous voulez.* *Une solution pour (6,5)*
	t=12 min	(8,2)	Idée d'une progression de 2 en 2. *Ens!: alors maintenant vous passez à quoi!?* *E!: à 8.* *Ens!: à 8. Là, vous êtes à 6.* *E!: oui, on a fait 4, 6, maintenant on fait 8.* *Ens!: vous faîtes pas 5, 6 ,7,... pourquoi!?* *E!: on va de 2 en 2 parce que si là, c'est un nombre impair, là, il faudra un nombre impair…*
	t=16 min	(4,2)	Retour sur (4,2) suite à une intervention de A1, après consultation de leur feuille de recherche. *E: on a trouvé 5 avec 4, une avec 6 et là, on fait avec 8.* *A1 regarde leur feuille de recherche.* *A1: et ça, vous l'avez vérifié, ça marche?* *Tous: oui.* *A1: dans cet ordre là?* *Tous: oui.* *A1: vous pouvez me montrer?* *D: ouais, je le connais par coeur.* *A1!: en fait c'est pas l'ordre que vous avez marqué. Peut être que vos notes ne sont pas assez précises.*

2 ème séance	t=20 min	(8,6)	Intervention de l'enseignant *E!: nous on a réussi à 6 et maintenant à 8.* *M: t'as marqué à 8?* *E: non.* *Ens!: alors montrez moi à 8.* *Ils essaient de retrouver mais en mettant 6 couleurs au milieu.*
	t=26 min	(8,1)!?	Du fait de la difficulté à retrouver leur solution à (8,6), idée de (8,1) *D!: vous avez qu'à mettre que des noirs au milieu, comme ça quand vous tournerez, il y aura toujours un noir en face du noir…* *E!: ah, ben, non quand même.*
	t=27 min	(8,2)	Suggestion de A1. *A1!: ? Essayez avec seulement 2 couleurs au milieu, par exemple, 3 verts et 5 bleus…*
	t=32 min	(8,1)	Du fait de la difficulté à trouver une solution à (8,2), idée de (8,1) *D: mais on a qu'à mettre que du vert* *P!: mais on peut pas!!* *Dans le doute, ils demandent à un accompagnateur, qui les invite à relire l'énoncé:" un, deux, trois…couleurs.* *D!: donc on peut.* *Il s'éxécute.* *D!: voilà, ça marche, un, un, un, un, un, …*
	t=40 min	(1,1)	Abandon du (8,1) suite à une intervention de A3. Idée de (1,1). *A3: alors, vous en êtes toujours à une seule couleur?* *D: ouais maintenant on va faire pareil avec une autre.* *M: ouais.* *P: avec bleu.* *A3: et vous êtes sûrs que vous n'allez pas perdre du temps.* *D: ah ben si, rires..* *A3: si les pions étaient bleus, ça changerait quelque chose?* *D: ben non, ça changerait rien sauf la couleur!*
	t=46 min	(8,1)	D recommence à faire (8,1). *E: c'est bon, on l'a déjà fait ça.*
	t=48 min	(8,8)	Envie de chercher avec le plus de pions possible.
	t=52 min		Fin de la séance.

<u>3ème séance:</u> du fait des notes imprécises, ce groupe n'a pas eu le temps de rechercher de nouveaux cas car il a dû vérifier les différentes solutions particulières qu'il avait découvertes afin de pouvoir remplir la feuille de classement.

ANNEXE 7
HISTORIQUE DES CAS ETUDIES- GROUPE ORANGE

	Temps	Cas étudiés	Pourquoi?
1ère séance	t=0	(4,2)	Ils reprennent l'exemple initial donné.
	t=2 min 38	(7,7)	Intervention de A2 mais choix du groupe *A2: est ce que vous pouvez toujours trouver!? Parce que là, vous avez fait avec 4 couleurs…* *C!: ouais, ben on va essayer avec plus.* *A2!: à 5 ou 6 …* *M!: Ouais!!* *A2!: ou en changeant ce que vous avez mis au milieu. Là vous avez mis 2 gris et 2 verts, si vous mettez 3 gris et 1 vert, est ce que vous allez toujours y arriver!?* *M!: Attends, on va mettre… (ils choisissent 7 couleurs). On va mettre ça là!;* *C à A2!: On doit en mettre que 2 de couleurs au milieu ou on peut en mettre plus!?* *A2: comme vous voulez, relisez l'énoncé si vous avez des doutes.*
	t=6 min 55	abandon du (7,7)	Du fait de la difficulté de trouver une solution à (7,7)! *M!: attends on va peut être faire un peu moins parce que là…*
	t=7 min 43	(1,1)	Idée en replaçant les pions. *F!: j'ai fini!!* *C!: ben voilà déjà quand on met une seule couleur ben ça marche.* *M!: on peut!?* *C!: ben oui, il y a marqué un, deux ou trois…*
		(5,4) en croyant chercher (5,5)	*M!: Là, il y en a 4 au milieu et 5 au bord… c'est pas bon…* *C: Bon, là, il y a toujours rien..*
	t=10 min	(4,4)	Du fait de la difficulté de trouver une solution à (5,4)!; *F: mais c'est quoi déjà ce qu'on avait fait au départ?* *M: avec 2 verts et 2 argentés…Donc on recommence à 4.*
	t=12 min	(6,6)!? (5,5)	*C: Mais on a déjà trouvé le système du 4, on fait 6…(confusion entre (4,2) et (4,4))* *M:On a essayé avec 4, maintenant on essaie avec 5, ça suffit 5 pour l'instant…*

1ère séance	t=15 min 50	(4,2)	Intervention de A1 *A1!: Ok, ça marche. Alors, maintenant, vous pouvez essayer en ne choisissant pas toutes les mêmes couleurs au milieu.* *C!: C'est ce qu'on a déjà fait avec 4 avec 2 argentés et 2 verts. (ils montrent leur feuille de note)* *A1: oui, mais n'oubliez pas de dessiner votre solution pour vous en rappeler. Parce que 2 argentés et 2 verts, selon comment elles étaient placées au bord, vous n'allez pas forcément savoir le refaire.* *F!: le problème, c'est qu'on a oublié de le noter… c'était au début…*
	t=29 min	(8,2)	Envie de mettre le plus de couleurs possible et intervention de A1 *A1: Vous en êtes à combien de couleurs!?* *C!: 4.* *A1!: vous pouvez faire à 5, alors.* *F!: ben là, on a tout mis.* *A1!: donc vous choisissez 2 couleurs au milieu parmi ces 8.* *C: OK, le vert et le rouge.*
	t=37 min		Fin de la séance.

	Temps	Cas étudiés	Pourquoi?
2ème séance	t= 0	(4,2)	Reprise de ce qui a été fait *C!: on refait ce qu'on a déjà fait!?* *M!: ben oui, on révise…ouais, on refait ce qu'on a déjà fait… on commence par celui-là. Jaune.(il place). Rouge, en face…*
	t=45	(5,5)	*M!: celui-là maintenant.* *C!: Non, on n'a pas besoin de le vérifier celui-là, c'est bon, on l'a fait au moins deux fois. Il faut en trouver d'autres.*
	t=104	(7,7) (11,11)!?	Distinction pairs/impairs *M: En fait, c'est vachement plus facile avec les nombres qui sont impairs.* *F!: on n'a pas essayé avec 8!?* *C!:non maintenant on n'a qu'à essayer avec 7!; avec 7 ce sera simple.* *F!: ouais!, 7.* *A2!: ça s'appelle une hypothèse ce que tu viens de me dire. T'as dit, c'est vachement plus facile avec des nombres impairs, ça c'est une hypothèse.* *C!: ouais, c'est pas sûr mais on l'a remarqué. On verra bien.* *A2 s'en va.* *C: On fait avec les nombres impairs et si on trouve que c'est plus facile…c'est que c'est juste.* *M!: avec 11!?* *C!: On va essayer avec 7 d'abord parce que 11, c'est un peu beaucoup.*
	t=200	(9,9)	*A2!: vous partez sur quoi maintenant!?* *M, F, C!: 9!!*

	t=304	(8,8)	Ils ne disposent que de 8 couleurs. *F!: bon alors, c'est parti!!* *C!: j'en mets plein là.* *F!: 6, 7, 8 et ….* *M!: il manque une couleur…* *F!: on regarde d'abord si c'est possible à 8.*
	t=415	(8,1)!	Difficulté à trouver une solution pour (8,8) *M!: c'est fichu, là!. (…)* *M!: à moins que…on enlève cette couleur.* *C!: oui mais ce sera plus 8.* *M!:ou bien si on change ces deux là.* *C!: ça fiche les 2 en l'air.* *M!: allez hop, on recommence.* *C!: c'est con, on était bien parti.* *M!: on essaie à 9!?* *F!: je mets une couleur, fini!!* *M!: non arrête, pas à une seule couleur.*
	t=420	(9,9)	A2 amène une neuvième couleur + difficulté à trouver pour (8,8)
	t=531	(4,4)!?	Suggestion de A1 pour vérifier leur conjecture *A A1!: on a réussi à 5, 7 et 9.* *C!: donc cette hypothèse est vraie.* *A1!; si je vous mets 11 couleurs!?* *C!: On sait faire.* *A1!: essayez avec les pairs, en commençant peut être par des petits!: 2, 4, 6 ..* *M!: on essaie avec 4.*
	t= 539	(2,2)	*C!: non mais attends, avec 2 déjà.* *M!: non pas avec 2,* *C!: arrête, elle a dit avec 2, 4, 6…*
	t=630	(3,3)	*M: On essaie à 3!?*
	t=640		Fin de la séance.

	Temps	Cas étudiés	Pourquoi?
3ème séance	t=0	(7,7) en croyant chercher (8,8)	Ils cherchent à appliquer aux pairs leur méthode pour les impairs .
	t=64	(7,7)	Erreur dans le nombre de pions placés!. *M!: on va tout refaire parce que là…* *F!: et là ça va marcher…* *M!: oui mais il y en a que 7.* *F!:et on a fait à 7!? si, on a fait à 7, je crois…(elle vérifie leurs notes)* *M!: c'est pas grave, on peut encore faire à 7…*
	t=228	(8,8)	Ils cherchent à appliquer leur méthode pour les impairs aux pairs

	t=412	(8,8) abandon	Difficulté à trouver pour (8,8) *M: et si on abandonnait!?* *C: non, pas ça.* *M: bon, ben tu te débrouilles.* *C: attends, jaune, rouge, vert.... bon, on laisse tomber, j'enlève tout.*
	t=460		Fin de la séance

ANNEXE 8

HISTORIQUE DES CAS ETUDIES- GROUPE ROUGE

	Temps	Cas étudiés	Pourquoi?
1ère séance	t=0	(8,8)	Elles ont choisi le plus de couleurs possibles
	t=50	(6,2)	*Ens!: mais là, vous jouez à la loterie, c'est pas ça le jeu. C'est trouver une solution pour que…* *à A1!: là, elles s'amusent à la loterie.* *A1!: ah ben non.* *Ens!: c'est pas ça le jeu.* *A1!: non, c'est pas le jeu. (..) alors déjà vous en avez choisi beaucoup vous.* *Z!: ah mais j'ai compris maintenant.* *J!: il y en a trop, il y en a trop…après on voit plus rien…il faut en enlever.* *R!: donc on va prendre l'argent et l'or. T=55* *J!:et le rouge. Bon alors, un argent…* *Z!: on recommence tout.* *A1!: donc il faut choisir les couleurs au bord.* *Z!: oui. On en a choisi 6*
	t=64	(4,2)	*J!: 4, on en a choisi.* *A1!: d'accord, 4 comme ça, après!?* *J!: euh…après, on choisit quoi comme couleurs!?* *R!: Il y a bleu doré argenté…* *A1!: il faut en choisir deux parmi les 4 que vous avez placées au bord*
	t=170	(4,2)	Une solution à (4,2) *Z!: bon faut trouver une autre technique.*
	t=180	(5,5)	*Ens!: alors qu'est ce que vous faîtes maintenant!?* *J!: on fait une deuxième…mais ça ne marche pas.* *Ens!: vous gardez le même nombre de couleurs!?* *J!: ben oui, il a raison, il faut mettre plus de couleurs.* *Ens!: alors vous gardez le même nombre de couleurs!?* *J!: non, on va changer, heureusement que tu nous l'as dit.* *Ens!: faut un peu compliquer la chose…. Rajoute une couleur*
	t=210	(5,2)	*A1!: vous devez mettre que deux couleurs au milieu.* *Z!: ah ben voilà, c'est pour ça que ça ne marche pas.* *A1!: donc vous choisissez!?* *R!: le jaune et le noir.*
	t=300	(5,2) avec d'autres couleurs	*Z!: il faut changer de couleurs peut être.* *J!: ouais, parce que j'en ai marre de ces couleurs. Vas y bleu.*
	t=370	(5,2) avec d'autres couleurs	*J!: là ça ne marche pas.* *Z!: bon je sais il faut changer de couleurs là.* *R!: bon c'est moi qui choisis, parce que j'ai jamais choisi.* *J!: tu prends des bleus, des jaunes et des rouges.* *R!:non des argentés.* *Z!: non des bleus et des argents, c'est trop beau des bleus et des argents.*
	t=390		Fin de la séance.

	Temps	Cas étudiés	Pourquoi?
2 ème séance	t=0	(5,2)	Reprise de ce qui a été fait lors de la première séance. *J!: bon alors on fait avec 5 pions comme ça.* *Z!: ouais. On va essayer de trouver une technique.*
	t=20	(5,5)	Difficultés à trouver une solution pour (5,2) *J!: oui mais après ça va pas marcher. t=20* *R!: euh voyons voir...là il faudrait mettre plus de couleurs...* *Z!: 6 couleurs!?* *R!: non, je veux dire là (au milieu), il faudrait mettre un rouge.*
	t= 33	(5,2)!	Intervention de A1 *A1!: alors!? Là vous avez choisi 5 couleurs et là tu dois en choisir que deux.* *Z!:ah oui.* *A1!: vous en avez choisi 5 aussi.* *Z!: ah.* *A1!: donc c'est un autre problème, on pourra le chercher plus tard si vous voulez.*
	t=50	(5,2) avec une autre répartition du nombre respectif de pions des deux couleurs centrales	*R!: attends il faudrait mettre trois rouges et deux jaunes. Voilà ça, ça doit marcher.*
	t=124	(6,2)	Intervention de A1 *A1!: bon ben si vous voulez vous continuez à 5 et après vous passerez à 6.* *R!: oui mais on en a marre à 5, on n'y arrive pas.* *A1!: donc 5, ça vous pose problème. Donc vous pouvez noter qu'à 5 vous n'y arrivez pas. Peut être que pour l'instant vous pouvez laisser le 5 de côté et vous faîtes le 6.*
	t=215	(7,2)	*R!:Maintenant on a trouvé la technique, on peut tout faire.* *J!: ouais!!* *Z!: ouais, on en a deux, on en a deux.* *R!: maintenant on garde les couleurs sauf qu'on va mettre par exemple rouge avec du vert.* *Z!: avec combien de pions!?* *R!: avec 6.* *Z!: non, avec 7!!*

	t=244	(7,2) avec une autre répartition du nombre respectif de pions des deux couleurs centrales	*R!: ou sinon, on peut enlever un rouge et mettre un vert à la place.* *J!: ah ouais.*
	t=260	(8,2)	*J!: oui mais à force de changer, on y revient au même.* *R!: ben oui.* *J!: bon, ben on essaye 8 maintenant.* *Z!: ouais 8.*
	t=350	(8,2) avec le choix de deux couleurs consécutives à l'extérieur pour les deux couleurs centrales.	Intervention de A1. *J!: Il faut toujours que ce soit pair au bord et on choisit deux couleurs..* *A1!: n'importe lesquelles!?* *J!: n'importe lesquelles! et ensuite, on les met comme ça mais pas comme ça et à chaque fois ça marche mais ça ne marche jamais quand c'est impair.* *Z!: il faut que ce soit pair pour que ça marche.* *A1!: d'accord. Et si tu prends rouge et bleu par exemple ça marche!?*
	t=459	(8,2) avec le choix de deux couleurs décalées de 3 à l'extérieur pour les deux couleurs centrales .	Intervention de A2 *A2!: oui, si je les mets comme ça mais si je les mets autrement!?* *A2 modifie l'ordre extérieur et s'en va.*
	t= 499		Fin de la séance

La troisième séance a été consacrée à un retour sur les résultats précédemment découverts sur le cas (n,2), à leur apporfondissement puis à leur classement.

ANNEXE 9

HISTORIQUE DES CAS ETUDIES-GROUPE VERT

	Temps	Cas étudiés	Pourquoi?
1ère séance	t=0	(4,2)	Ils reprennent l'exemple initial donné
	t=80	(3pions!,2pions)	Une solution à (4,2). *M!: à 3, il faut essayer à 3.*
	t=95	(3,2) mais avec deux couleurs identiques au bord.	Intervention de A2 suite à leur demande *A: maintenant, attends, on va voir déjà si c'est ça parce que si on s'est gouré…on va oublier cette idée!;* *Ils appellent un accompagnateur.* *A A2!: on a trouvé, à 2!! est ce que tu peux regarder si c'est ça!?* *A2!: alors y a un truc qui va, c'est qu'à chaque fois y en a un en face et un seul. Par contre y a un truc qui va pas, c'est qu'autour, il y en a 3 et au milieu, y en a 2 et là, il est noté, qu'il faut placer le même nombre de pions au bord et au milieu.*
	t=136	(3,2)	Intervention de l'enseignant. *Ens!: vous avez vu qu'autour, ils disent…des pions tous de couleurs différentes, vous en avez posé combien autour!?* *K!:3* *Ens!: de couleurs différentes*
	t=184	(4,2)	Intervention de l'enseignant. *Ens!: alors!, vous avez trouvé?* *Tous!: non, toujours pas…* *Ens!: les autres ont trouvé avec 4 couleurs, vous avez peut être compliqué, là!?* *Tous!: ouais…* *Ens!: au milieu, il vous faut que deux couleurs!, choisissez deux couleurs.*
	t=400		Fin de la séance

	Temps	Cas étudiés	Pourquoi?
2ème séance	t=0	(4,2)	Recherche d'une nouvelle solution à (4,2) à partir de ce qu'ils avaient déjà fait.
	t=10	(5,2)!? (6,2)!? ,	Une nouvelle solution a (4,2) a été trouvée. *M!: on fait à 5!?* *Autres!: ouais.* *M!: on fait pas à 6!?*
	t=16	(4,2)	Recherche d'une nouvelle solution à (4,2) *A!: mais non, on va faire un autre* *K!: pour voir si ça marche ou pas*
	t=27	(5,2)	Idée que (6,2) sera semblable à (4,2). ***A! :** c'est obligé que ça marche avec 4 comme ça. Ben voilà…On peut en faire avec 6, mais il faut pas que les deux couleurs soient comme ça.* *M!: donc on essaie à 5. Et à 5, c'est possible hein,!?* *K!: ben oui, c'est possible.*
	t=45	(6,2)	Difficultés à trouver pour (5,2) avec leur stratégie. *M!: regarde, tu vois, on avait trouvé le système des diagonales, là comme ça, si on en a 5 on peut pas faire de diagonale, donc il faut faire à 6.* *K!:oui!;à 6.*
	t=150	(4,2)	Intervention de A1 *K!à A1: on a réussi à 4 couleurs…* *A1: et si je vous mets 4 couleurs n'importe lesquelles, vous pouvez me trouver une solution!?* *K!:ouais.* *A1!: c'est vrai!?* *A!:oui.* *A1!:alors on essaie!?* *M!: oui, on essaye.* *K!:c'est parti!!*
	t=195	(6,2)	Idée que (6,2) sera semblable à (4,2). *A!: donc on peut y arriver à 6, aussi, c'est la même stratégie!* *M!: alors on fait à 6*
	t=240	(5,2)	*A!: mais non regarde si je fais comme ça…oui mais là,il y en a trop des pions mettez en moins plus il y en a plus c'est difficile, mettez en 5.*
	t=260	(6,2)	*K!:oui mais à 5, tu ne peux pas faire les diagonales.* *A:Tu peux mettre plus, c'est pas grave, on en met 6. Vas y, tourne. C'est bon, c'est bon…*
	t=470	(7,3) en croyant chercher (8,3)	Intervention de l'enseignant. *Ens!: d'accord, donc vous avez mis 2 couleurs, vous pouvez essayer à 3 après, si vous voulez.*

	t=560	recherche à (7,4)? (5,5)?	Une solution pour (7,3) *A A2!: on a réussi à 8 couleurs et 3 au milieu.* *A!: attends, non il y en a 7!* *K!: ouais, on a réussi avec un chiffre impair. Donc avec 5…on a fait avec 5?* *M!: oui mais on avait dit que les impairs ne marchaient pas…donc ça c'est faux ce qu'on a noté.* *K!: donc on essaie un autre!?* *A!: ouais 7* *K!: avec 7, un chiffre impair?* *A: oui et avec 4 à l'intérieur.* *K!: On a réussi avec 5!? non, on essaye avec 5!? la semaine prochaine, on essaye avec 5!?*
	t= 622		Fin de la séance.

3ème séance	t=0	(8,6)	Poursuite de la recherche *C!: on en a 3 qui marchent déjà!? ouais…* *K!: on cherche autre chose.* *A!: maintenant, faut réussir à 8.*
	t=145	(6,4)	Intervention de A1 *A1!: faîtes attention de ne pas trop vous disperser, c'est la dernière séance. La semaine dernière vous aviez trouvé plusieurs choses à 6, essayez de continuer.* *A!: alors on garde les mêmes couleurs et on essaie d'autres trucs au milieu* *A1!: par exemple. Après, vous pourrez essayer à 8 ou autre chose,!d'accord!?*
	t=330	(6,5)	*C!: maintenant on peut regarder plus compliqué, avec 5 ou 6 couleurs.* *A!: OK, avec 5.*
	t=440	(3,3)	Difficulté à trouver une solution pour (6,5) *A!: on essaie à 9 couleurs!?* *K!:il n'y en a pas 9. et si on essaie avec 7 couleurs!?* *C!: on peut essayer avec 3 couleurs, on ne l'a pas fait.* *A!: ah ouais 3 couleurs, mais ça va être facile à 3 couleurs.*
	t=455	(4,3) en croyant chercher (3,3)	*K!: mais là t'as mis plus que 3 couleurs…* *A!: oui, ça fait 4…et voilà, j'ai encore trouvé!! Je la note, alors rouge, noir, en face, c'est du blanc…*
	t=470		Fin de la séance

ANNEXE 10

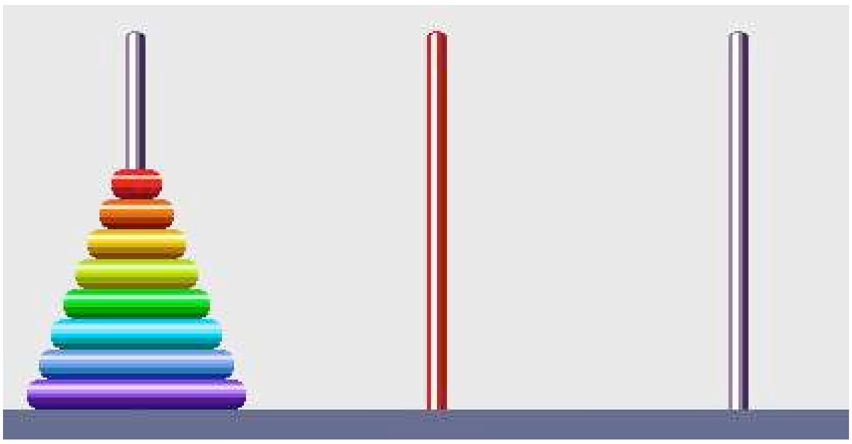
Voici quelques exemples des jeux proposés dans le cadre du projet *"Maths à modeler"*. Pour chacun, vous trouverez une illustration d'une présentation avec un jeu à manipulation directe et une de la version proposée sur le site internet de La Valise (http://www-leibniz.imag.fr/LAVALISE).

LES TOURS DE HANOI

Le but du jeu est de déplacer la tour sur le poteau indiqué en respectant un minimum de règles :

- Déplacer un seul disque à la fois
- Déplacer un disque uniquement sur un disque plus grand

Et tout ceci bien entendu, en un minimum de déplacements.



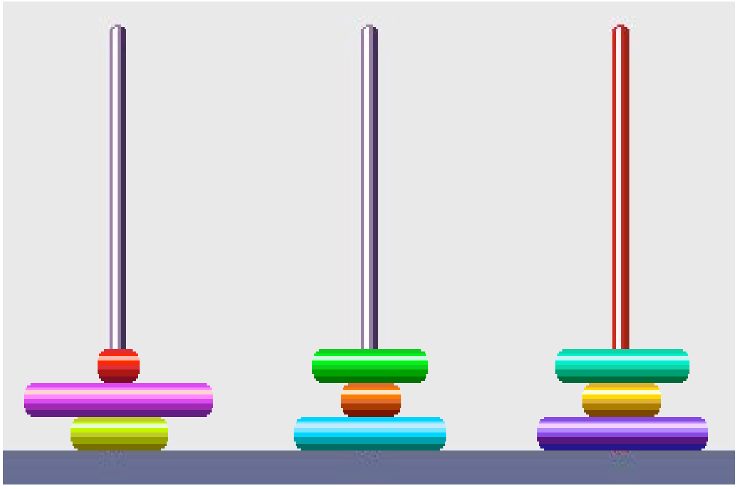
Les tours de Hanoi en désordre

Une nouvelle fonction a été rajoutée : la possibilité de mélanger les disques sur le poteau de départ.

Vous pouvez :

- Mélanger vous même les disques (en cliquant sur le disque à bouger)

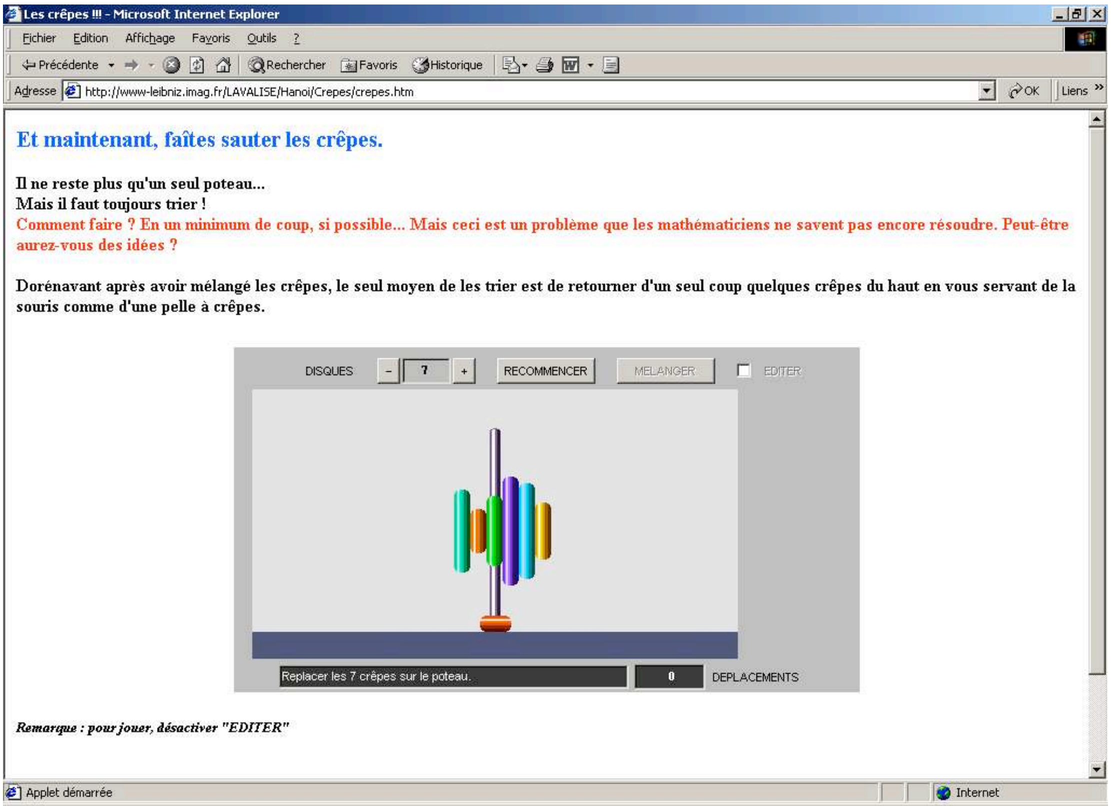
- Cliquer sur le bouton **mélanger** pour mélanger de façon aléatoire

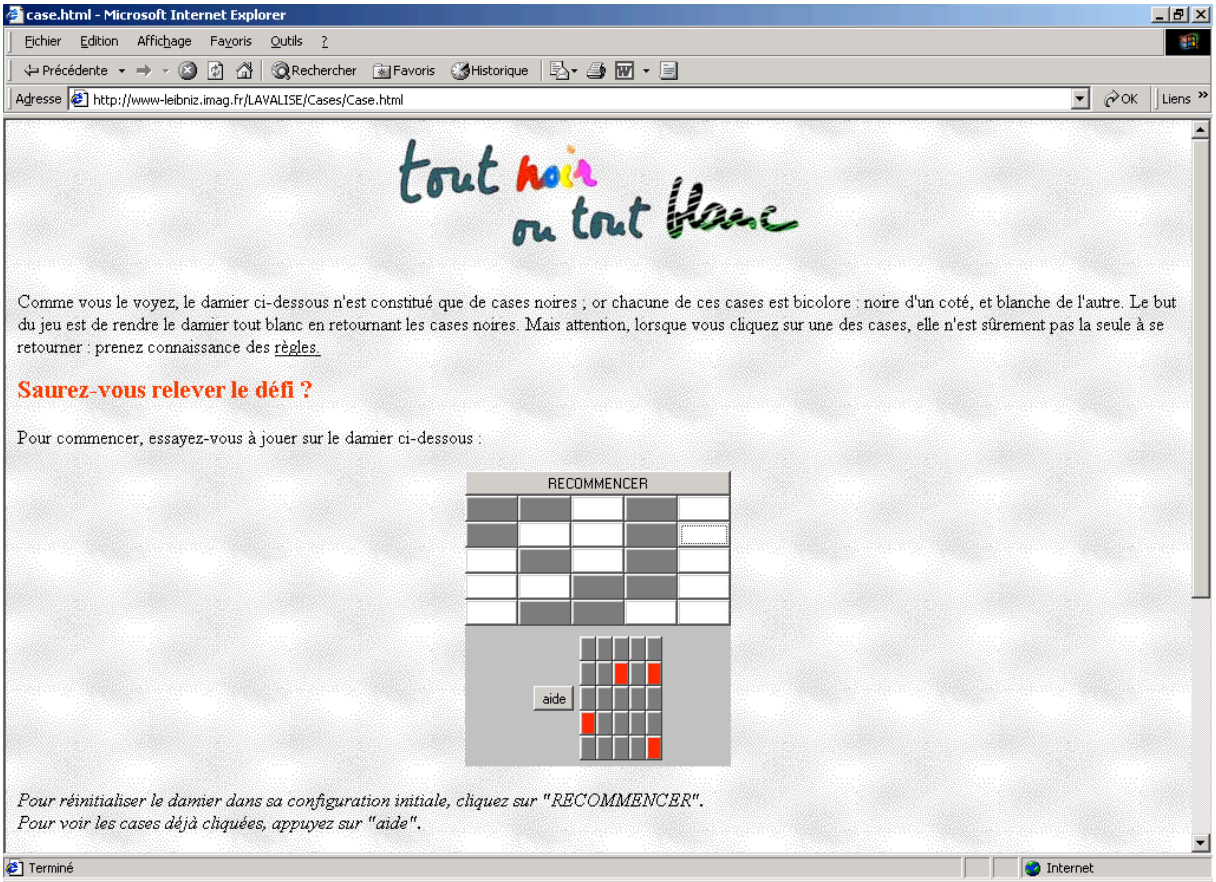


Et maintenant, faites sauter les crêpes

Il ne reste plus qu'un seul poteau... Mais il faut toujours trier !

Comment faire ? En un minimum de coups, si possible... Ceci est un problème que les mathématiciens ne savent pas encore résoudre. Peut-être aurez-vous des idées ?



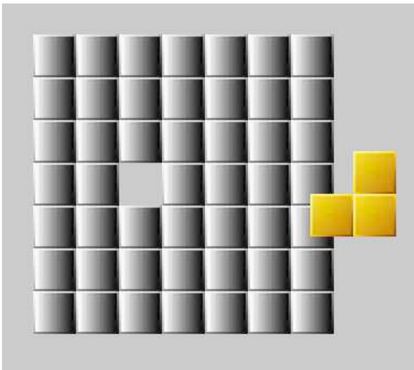


Vous pourrez trouver une analyse détaillée de cette situation in [Rannou J.M 2004].

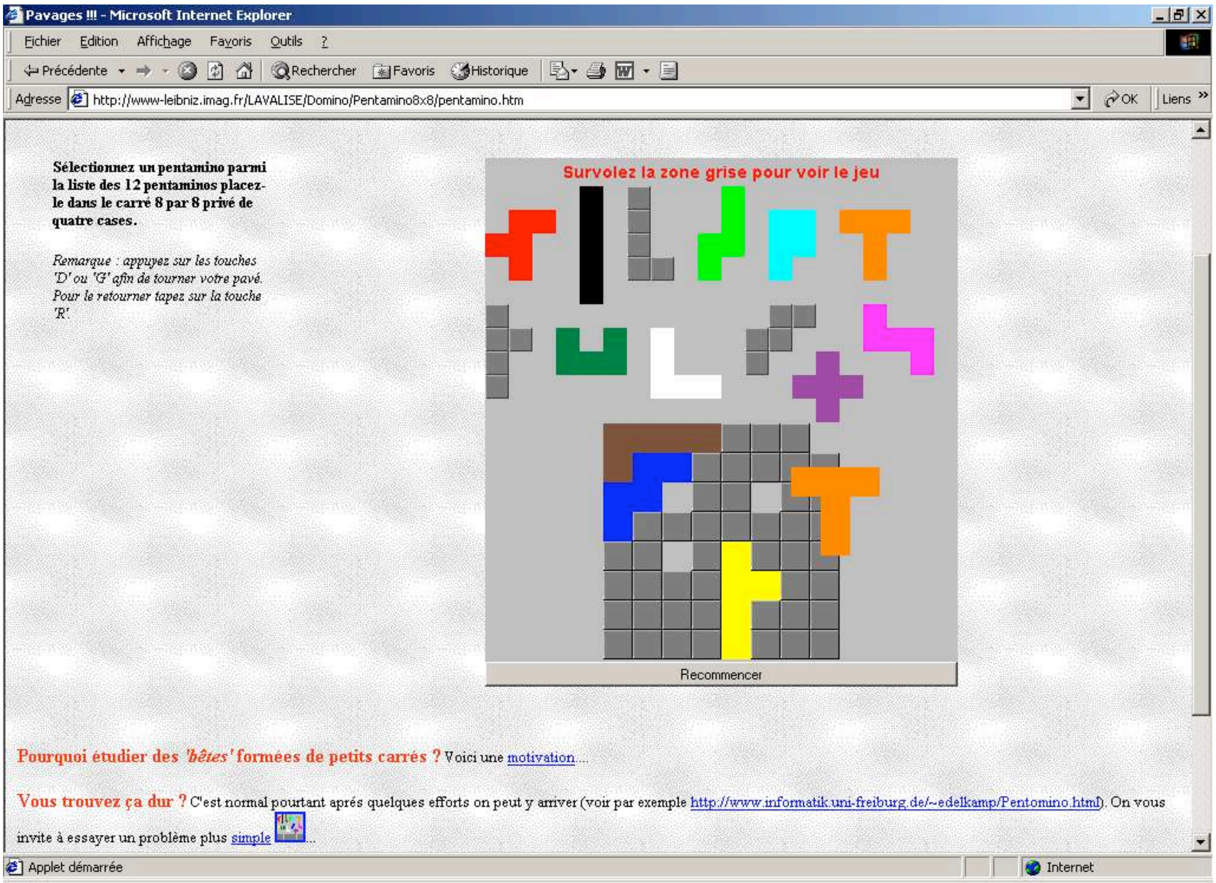
Etant donné un assemblage de petits carrés, que nous appellerons polymino (par exemple, l'ensemble des carrés noirs de la figure ci-dessus), est-il possible de le paver (c'est-à-dire le recouvrir exactement sans chevauchement) par des polyminos plus petits, tous égaux à un polymino donné ?
Actuellement les mathématiciens ne savent pas résoudre de tels problèmes sauf lorsque les "pavés" élémentaires sont très simples.
Afin d'entrevoir la difficulté de ces problèmes nous vous proposons d'abord de chercher à résoudre les cas suivants:

Recherche de pavages avec un domino ou un trimino

Vous pourrez trouver une analyse détaillée de cette situation in [Grenier Payan, 1998]



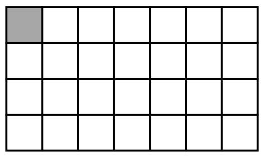
Pavage avec des polyminos



Le jeu du chocolat

jeu à deux joueurs

Mmm..., c'est bon le chocolat ! Par contre, le savon... Un des carrés de la plaquette de chocolat a été remplacé par une bulle de savon.
Les deux joueurs, à tour de rôle, cassent la tablette en deux suivant une ligne horizontale ou verticale, puis mangent. Celui qui se retrouve avec le carré de savon aperdu!!
Si vous êtes gourmand, découvrez la bonne stratégie.!
On peut commencer à jouer avec la bulle de savon dans un coin, avec une tablette de plus en plus grande



puis passer au cas général où elle peut être n'importe où, en étudiant les rectangles 1xn, 2xn etc...

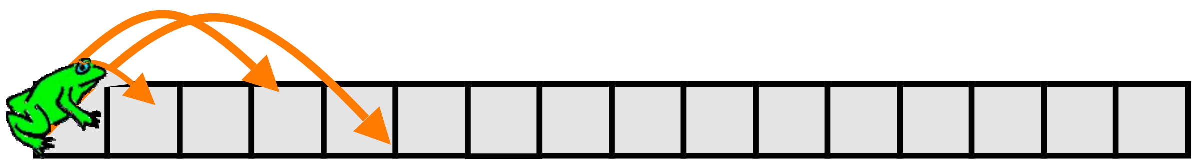
LA COURSE A N
jeu à deux joueurs

Nous vous proposons, deux formulations pour ce jeu.

Les petits cailloux

Deux joueurs ont devant eux un tas de petits cailloux. Chacun à leur tour, ils prennent un certain nombre de cailloux fixé à l'avance. Celui qui ne peut plus jouer a perdu.
Vous devez fixer à l'avance le nombre total de cailloux, et le nombre de cailloux que chaque joueur a le droit de prendre.
Si vous êtes le premier joueur, que devez-vous faire pour être certain de gagner!?
Nous vous proposons d'essayer en décidant que chaque joueur ne pourra prendre que 1 ou 2 cailloux.

La grenouille



Deux joueurs, à tour de rôle, font sauter la grenouille sur une case. Le but du jeu est d'amener la grenouille sur la dernière case. Le joueur qui ne peut plus faire avancer la grenouille a perdu.
Vous devez fixer à l'avance le nombre total de cases, et les longueurs des sauts de la grenouille.
Si vous êtes le premier joueur, que devez-vous faire pour être certain de gagner!?
Nous vous proposons d'essayer en décidant que la grenouille ne pourra faire que des sauts de longueur 1 ou 2.