Aspect conforme de l'opérateur de Dirac sur une variété à bord

Simon Raulot

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

Simon RAULOT

Aspect conforme de l'opérateur de Dirac sur une variété à bord

Soutenue publiquement le 6 juin 2006

Membres du jury :

Rapporteurs :	**Marc Herzlich**	Professeur, Montpellier II
	Sebastián Montiel	Professeur, Grenade
Examinateurs :	**Sylvestre Gallot**	Professeur, Grenoble I
	Rod Gover	Professeur, Auckland (Invité)
	Oussama Hijazi	Professeur, Nancy I (Co-Directeur de Thèse)
	Emmanuel Humbert	MCF habilité, Nancy I (Co-Directeur de Thèse)
	Michel Vaugon	Professeur, Paris VI

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mes directeurs de thèse. Tout d'abord Oussama Hijazi qui a su me faire confiance dès la fin de ma maîtrise et qui m'a permis de découvrir et de continuer jusqu'à présent à faire les mathématiques que j'aime. Je le remercie également pour avoir toujours su trouver les bons mots aux bons moments pour m'indiquer quel chemin pourrait être le mien. Un immense merci à Emmanuel Humbert pour tout ce qu'il m'a apporté durant ces trois années tant au niveau mathématique qu'au niveau humain. La porte de son bureau est toujours restée ouverte (et le restera encore...je l'espère) pour que je puisse profiter de ses conseils sur des problèmes mathématiques mais aussi personnels. Pour ces raisons je leur en serai toujours infiniment reconnaissant.

Je suis très sensible au grand honneur que m'a fait Sylvestre Gallot en présidant ce jury. Un grand merci aussi à Rod Gover et Michel Vaugon d'avoir accepté d'en faire partie.

Durant ma thèse, j'ai beaucoup travaillé sur des articles de Marc Herzlich et Sebastián Montiel, c'est donc un grand honneur pour moi qu'ils aient accepté d'être rapporteurs. Je les remercie grandement pour le travail qu'ils ont accompli.

J'ai une pensée particulière pour Thomas Branson, et surtout pour sa famille, qui avait accepté d'être rapporteur pour ma thèse mais qui nous a malheureusement quitté... trop tôt.

Merci à toute l'équipe de Géométrie Différentielle de l'Institut Élie Cartan pour leurs nombreux conseils : Bernd Ammann, Jean-François Grosjean, Julien Maubon, Marie-Amélie Paillusseau, Julien Roth, George Habib et Lars Schäfer.

Je tiens aussi à remercier l'Institut Élie Cartan (en particulier les secrétaires et les bibliothéquaires) pour le cadre qu'il offre aux jeunes chercheurs pour effectuer leurs travaux.

Mon travail n'aurait pas pu être mené à bien sans la bonne humeur de tous mes camarades doctorants autour de la machine à café du deuxième qui tourne et tournera toujours à plein régime. Un grand merci à vous : Pierre D., François, Manon, Lucas, Marie-Amélie, Lars, Julien, George, Stéphane, Benoît... et bien sûr Pierre L.G., mon co-bureau.

J'ai aussi une pensée particulière pour une personne très chère à mes yeux et à mon cœur, qui a partagé ma vie pendant cinq années et avec qui j'ai passé des moments qui resteront à jamais gravés en moi. Sans elle je ne serais pas ce que je suis aujourd'hui... merci Ludi.

Merci aussi à tous mes amis "de chez moi" qui ont toujours été là pour me faire garder la tête sur les épaules et qui surtout m'ont montré que je pouvais compter sur

eux à n'importe quel instant. Merci Fred, Delphine, Clémence, Audrey, Freddy...et tous les autres.

Enfin un grand merci à ceux sans qui je ne serais pas là à écrire ces remerciements : mes parents et mes deux petits frères Victorien et Félicien. Merci d'avoir toujours été présents, de m'avoir soutenu dans mes choix et de m'avoir poussé à faire ce que j'aime. Je ne pourrai jamais assez vous remercier pour tous les sacrifices que vous avez fais pour moi, merci pour tout.

Table des matières

Introduction 9

Présentation des résultats 13

Chapitre 1. Estimations de valeurs propres pour l'opérateur de Dirac sur une variété à bord 19

1. Introduction 21
2. Préliminaires géométriques 22
3. Le problème de Yamabe sur les variétés à bord 27
4. L'inégalité d'Hijazi sur les variétés à bord 30
5. Minoration du spectre de l'opérateur de Dirac pour la condition MIT 41

Chapitre 2. Un invariant spinoriel conforme sur les variétés à bord 47

1. Introduction 49
2. Définitions et premières propriétés 50
3. Le cas de l'hémisphère $\mathbb{S}^n_+$ 59
4. Construction d'une trivialisation adaptée du fibré des spineurs 61
5. Le spineur-test 69
6. Une majoration de l'invariant spinoriel conforme $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ 72
7. Fonction de Green de l'opérateur de Dirac 94

Bibliographie 117

Introduction

La principale motivation des travaux de cette thèse est de faire apparaître les liens étroits entre géométrie riemannienne et géométrie spinorielle sur une variété compacte à bord par l'étude des propriétés conformes de l'opérateur de Yamabe et de l'opérateur de Dirac.

Sur une variété riemannienne compacte (M^n, g) de dimension n, le laplacien conforme (ou opérateur de Yamabe) est un opérateur différentiel elliptique d'ordre deux agissant sur les fonctions définies sur M. Cet opérateur est défini par

$$\mathrm{L} := \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta + \mathrm{R},$$

où Δ est le laplacien scalaire et R la courbure scalaire de (M, g). Il apparaît de manière naturelle dans un célèbre problème de géométrie riemannienne conforme, le problème de Yamabe. Une des principales particularités de cet opérateur est sa covariance conforme qui provient du fait qu'il relie les courbures scalaires de deux métriques conformes. Le problème de Yamabe s'énonce de la façon suivante : *Étant donnée une variété riemannienne compacte* (M^n, g) *de dimension* $n \geq 3$*, existe-t-il une métrique* $\overline{g}$ *conforme à* g *dont la courbure scalaire est constante ?* Plusieurs raisons naturelles motivent ce problème. En particulier, on sait que toute surface possède dans sa classe conforme une métrique à courbure de Gauss constante (donc à courbure scalaire constante). Est-ce que ce résultat se généralise au cas d'une variété de dimension $n \geq 3$? C'est ainsi que ce problème trouve son origine dans un article de Yamabe [**Yam60**] dans lequel ce dernier donne une preuve au problème posé ci-dessus. Cependant, en 1968, Trüdinger [**Tru68**] trouve une erreur majeure dans l'article de Yamabe, mais il réussit malgré tout à prouver que cet énoncé reste vrai dans certains cas. Il a fallu alors attendre les travaux d'Aubin [**Aub76**] et de Schoen [**Sch84**] pour obtenir une preuve rigoureuse de ce qui était devenu le problème de Yamabe. La richesse de ce problème et la diversité des outils développés afin de le résoudre en font un cadre privilégié où géométrie, analyse et relativité générale se lient de manière assez surprenante.

Si la variété M est munie d'une structure spinorielle, on peut définir un autre opérateur partageant cette propriété de covariance conforme, l'opérateur de Dirac. Cet opérateur est un opérateur différentiel elliptique d'ordre un agissant sur les sections du fibré des spineurs (un champ de spineurs pouvant être vu comme une racine carrée de formes différentielles). Un des principaux outils dans l'étude de l'opérateur de Dirac est la formule de Schrödinger-Lichnerowicz, qui est une formule de type Böchner reliant le carré de l'opérateur de Dirac au laplacien brut spinoriel. Plus précisément, elle est donnée par :

$$\mathrm{D}^2 = \nabla^*\nabla + \frac{\mathrm{R}}{4}\mathrm{Id} \tag{1}$$

où D est l'opérateur de Dirac et ∇ (resp. ∇^*) est la dérivée covariante spinorielle (resp. l'adjoint de la dérivée covariante spinorielle). Cette relation a été prouvée par Schrödinger [**Sch32**] dans le cadre local puis par Lichnerowicz dans le cadre global grâce à la théorie des fibrés. Cette formule trouve toute sa profondeur dans un célèbre résultat de Lichnerowicz [**Lic63**]. En effet, sous l'hypothèse faible de positivité de la courbure scalaire et combinée au théorème de l'indice d'Atiyah-Singer [**AS62**], elle fournit une obstruction topologique à l'existence de métriques à courbure scalaire positive sur une variété. Ce résultat peut être vu comme une estimation du spectre de l'opérateur de Dirac qui n'est pas optimale dans le sens où aucune variété à courbure scalaire positive ne caractérise son cas limite. On voit alors que le spectre de l'opérateur de Dirac sur une variété compacte sans bord permet de détecter des informations subtiles sur la géométrie et la topologie de telles variétés. Il a fallu cependant attendre une quinzaine d'années pour que l'inégalité de Lichnerowicz soit améliorée. En effet, T. Friedrich [**Fri80**] prouve que le carré de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac est minoré par un nombre proportionnel à l'infimum de la courbure scalaire. La cas d'égalité est alors caractérisé par l'existence d'un champ de spineurs satisfaisant une équation différentielle surdéterminée. De tels champs sont appelés champs de spineurs de Killing et avaient déjà été introduits par les physiciens dans diverses théories tentant d'unifier mécanique quantique et relativité générale.

Dans [**Hij86**] et [**Hij91**], O. Hijazi met en évidence un lien étroit entre le spectre du laplacien conforme et celui de l'opérateur de Dirac. Cette relation repose fortement sur la propriété de covariance conforme partagée par ces deux opérateurs. En effet, il prouve que si l'invariant de Yamabe est positif (ce qui est équivalent à l'existence d'une métrique conforme à g dans laquelle la courbure scalaire est strictement positive), alors :

$$\lambda_1^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\mu_1(\mathrm{L}), \tag{2}$$

où λ_1^2 est la plus petite valeur propre du carré de l'opérateur de Dirac et $\mu_1(\mathrm{L})$ celle du laplacien conforme. Le cas où la dimension de la variété est $n = 2$ a été traité par C. Bär [**Bär92**] et fait intervenir la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface. En utilisant l'inégalité de Hölder, Hijazi prouve que :

$$\lambda_1^2(g)\mathrm{Vol}(\mathrm{M}, g)^{\frac{2}{n}} \geq \frac{n}{4(n-1)}\mu(\mathrm{M}), \tag{3}$$

où $\mu(\mathrm{M})$ est l'invariant de Yamabe de M. Parallèlement, J. Lott [**Lot86**] montre, en utilisant des techniques d'opérateurs pseudo-différentiels, l'existence d'une constante $C > 0$ ne dépendant que de la classe conforme de g telle que :

$$\lambda_1^2(g)\mathrm{Vol}(\mathrm{M}, g)^{\frac{2}{n}} \geq C \tag{4}$$

dès que l'opérateur de Dirac est inversible. Ce résultat est plus général que (3) (car le fait de supposer l'invariant de Yamabe positif implique immédiatement que l'opérateur de Dirac est inversible) mais l'inégalité (3) fournit une borne explicite ce qui fait défaut au résultat de Lott. En utilisant les mêmes techniques que J. Lott, B. Ammann [**Amm03a**] étend le domaine de validité de cette inégalité au cas où l'opérateur de Dirac possède un noyau non trivial et prouve de plus (voir aussi [**AHM03**]) que si $n \neq 2$ ou D inversible :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \sigma, [g]) \leq \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n, \sigma_{\mathrm{st}}, [g_{\mathrm{st}}]), \tag{5}$$

où σ est une structure spinorielle sur M, $[g]$ la classe conforme de la métrique riemannienne g et $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \sigma, [g])$ est l'invariant spinoriel conforme défini par :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \sigma, [g]) := \inf_{\overline{g} \in [g]} \big\{ \lambda_1(\overline{g}) \mathrm{Vol}(\mathrm{M}, \overline{g})^{\frac{1}{n}} \big\}.$$

L'étude de cet invariant a suscité de nombreux travaux (voir [**Amm03b**], [**Amm**], [**AHM03**] ou bien [**AHM**]) ces dernières années. En effet dans [**Amm03b**], B. Ammann montre que si l'inégalité (5) est stricte, il existe des solutions à une équation de type Yamabe pour l'opérateur de Dirac (qui est critique dans le sens des injections de Sobolev). C'est une des motivations qui a poussé Ammann, Humbert et Morel à définir rigoureusement la fonction de Green de l'opérateur de Dirac et d'étudier en détails ses propriétés. Cela leur a ainsi permis d'obtenir certains types de variétés pour lesquelles (5) est stricte (voir [**AHM**]). La construction de la fonction de Green les a aussi conduit à donner une preuve très simple du théorème de la masse positive pour des variétés asymptotiquement plates obtenues par éclatement conforme par la fonction de Green de l'opérateur de Yamabe ([**AH**]). Cette preuve utilise fortement la covariance conforme de l'opérateur de Dirac. Là encore les liens entre le cadre riemannien et spinoriel et entre géométrie et analyse apparaissent de manière claire. Cependant, de nombreuses difficultés surgissent du fait que les objets manipulés sont des champs de spineurs et non plus des fonctions.

Le passage aux variétés à bord

Une question naturelle en géométrie différentielle est de savoir si étant donnée (M^n, g) une variété riemannienne compacte à bord, il existe une métrique conforme à g dans laquelle la courbure scalaire est constante et la courbure moyenne du bord est nulle. Ce problème a été étudié par Escobar dans [**Esc92b**] et est appelé "le problème de Yamabe sur les variétés à bord". Ce problème fait intervenir le laplacien conforme sous une certaine condition à bord. Cette condition à bord apparaît naturellement en géométrie et elle a aussi la particularité de posséder une propriété de covariance conforme.

Si la variété M possède une structure spinorielle, on peut aussi considérer l'opérateur de Dirac agissant sur les sections du fibré des spineurs de M. Outre l'aspect analytique, le cadre spinoriel fait intervenir des difficultés supplémentaires par rapport au cas du laplacien (scalaire ou conforme). Une de ces différences est par exemple qu'il faut restreindre au bord (ou plus généralement à une hypersurface de M) le fibré des spineurs ambiant (voir par exemple [**Bur93**], [**Tra95**] ou [**Bär98**]). Cependant, l'opérateur de Dirac se trouve être un outil très puissant dans l'étude de la géométrie des variétés à bord. Un exemple qui met en évidence le rôle des spineurs dans ce contexte est donné par le travail de Witten (voir [**Wit81**], [**PT82**] ou [**LP87**]) dans sa preuve du théorème de la masse positive issu de la relativité générale. En effet, à une variété asymptotiquement plate (c'est-à-dire une variété non compacte qui "ressemble" à l'espace euclidien à l'infini), on associe un invariant géométrique défini de manière non tensorielle, la masse. La conjecture de la masse positive stipule alors que si la courbure scalaire de la variété est intégrable et positive sa masse est positive et elle est nulle si et seulement si la variété est isométrique à l'espace euclidien. Schoen et Yau (voir [**SY79b**] et [**SY79a**]) ont prouvé ce résultat pour une variété de dimension inférieure ou égale à 7 à l'aide de surfaces minimales. La preuve proposée par Witten n'impose quant à elle aucune restriction sur la dimension mais oblige cependant la variété à possèder une structure spinorielle. En fait, Witten remarqua qu'une fois intégrée (sur des domaines de plus en plus grands), la formule de Schrödinger-Lichnerowicz évaluée sur un champ de spineurs asymptotiquement constant fait apparaître un terme de bord qui tend vers un multiple de la masse. La résolution de la conjecture de la masse positive était alors ramenée à prouver l'existence d'une solution à un problème à bord pour l'opérateur de Dirac.

Cette approche développée par Witten a inspiré de nombreux travaux sur les théorèmes de la masse positive. On pourra entre autres mentionner les travaux de Herzlich qui prouve ce type de théorèmes pour des trous noirs (c'est-à-dire pour des variétés asymptotiquement plates possèdant un bord intérieur) dans le cadre lorentzien [**Her98b**], dans le cadre asymptotiquement hyperbolique [**CH03**] ou bien pour une inégalité de type Penrose [**Her98a**].

Toujours dans l'esprit de l'approche de Witten de la masse positive, O. Hijazi, S. Montiel et X. Zhang [**HMZ02**] relient le spectre de l'opérateur de Dirac d'une hypersurface bordant un domaine compact d'une variété à la première valeur propre de l'opérateur de courbure moyenne conforme (voir [**Esc92a**] pour des renseignements sur cet opérateur). Leur approche repose une fois de plus sur le caractère conforme du laplacien conforme, de l'opérateur de courbure moyenne conforme et de l'opérateur de Dirac mais aussi sur celui de la condition à bord utilisée (pour l'opérateur de Dirac).

Des travaux plus récents (voir [**FS98**], [**HMZ01b**] ou bien [**HMR02**]) mettent en œuvre l'étude spectrale de l'opérateur de Dirac sur une variété à bord. Diverses conditions à bord sont étudiées et il est particulièrement apparent que le spectre de l'opérateur de Dirac dépend de manière conséquente de la condition à bord imposée.

Puisque le laplacien conforme (sous la condition à bord décrite dans le paragraphe suivant) et l'opérateur de Dirac partagent toujours cette propriété de covariance conforme, on peut naturellement se demander s'il existe un lien analogue à celui du cas des variétés fermées dans le cas des variétés à bord. L'existence d'une telle relation passe évidemment par un choix adapté (dans un sens à préciser) d'une condition à bord pour l'opérateur de Dirac et par une bonne compréhension du problème de Yamabe sur les variétés à bord.

Le problème de Yamabe sur les variétés à bord

Soit (M^n, g) une variété compacte riemannienne de dimension n dont le bord $\partial\mathrm{M}$ est lisse. Le problème de Yamabe sur les variétés à bord se pose de la manière suivante : *Existe-t-il sur* M *une métrique* $\overline{g}$ *conforme à* g *dont la courbure scalaire est constante et la courbure moyenne est nulle ?* Ce problème a été résolue par Escobar pour un grand nombre de variétés. Les techniques qu'il emploie reposent sur les idées développées par Aubin et Schoen mais demandent un travail considérable tant au niveau géométrique qu'analytique. Nous présentons brièvement les grandes lignes de son travail effectué dans [**Esc92b**]. Soit donc (M^n, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ dont le bord $\partial\mathrm{M}$ est non vide et soit $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ une fonction lisse strictement positive. Si on note $\mathrm{N} = \frac{2n}{n-2}$ et $\overline{g} = f^{\frac{4}{n-2}} g \in [g]$, où $[g]$ est la classe conforme de g, les courbures scalaires et moyennes de g et $\overline{g}$ sont reliées par :

$$\mathrm{L}_g(f) = \mathrm{R}_{\overline{g}}\, f^{N-1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}_g(f_{|\partial \mathrm{M}}) = \mathrm{H}_{\overline{g}}\, f_{|\partial \mathrm{M}}^{\frac{N}{2}} \tag{6}$$

où $\mathrm{R}_{\overline{g}}$ (resp. $\mathrm{H}_{\overline{g}}$) est la courbure scalaire de la variété $(\mathrm{M}^n, \overline{g})$ (resp. la courbure moyenne de $(\partial \mathrm{M}, \overline{g})$ dans $(\mathrm{M}, \overline{g})$) et L_g (resp. B_g) est le laplacien conforme (resp. l'opérateur de courbure moyenne conforme) donné par :

$$\mathrm{L}_g := \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g + \mathrm{R}_g \quad (\text{resp.} \quad \mathrm{B}_g := \frac{2}{n-2}\frac{\partial}{\partial \nu} + \mathrm{H}_g).$$

Trouver une métrique conforme à g dont la courbure scalaire est constante et la courbure moyenne du bord est nulle consiste alors à trouver une solution lisse strictement positive f du système (6) avec $\mathrm{R}_{\overline{g}}$ constante et $\mathrm{H}_{\overline{g}} = 0$. En utilisant des méthodes classiques de minimisation, le problème à bord (6) se résout assez facilement si l'exposant N est remplacé par un exposant $q \in]1, \mathrm{N}[$. Cependant, le cas où $q = \mathrm{N}$ (et donc le cas qui permet la résolution du problème de Yamabe) ne peut se résoudre par ces méthodes car la compacité de l'inclusion $\mathrm{H}_1^2(\mathrm{M}) \hookrightarrow \mathrm{L}^{\mathrm{N}}(\mathrm{M})$ est perdue tandis que si $q < \mathrm{N}$, elle est conservée. Dans [**Esc92b**], Escobar considère la fonctionnelle définie par :

$$\mathrm{Y}(u) \;=\; \frac{\int_{\mathrm{M}} \big(\frac{2}{n-2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2(n-1)}\mathrm{R}u^2\big)dv(g) + \int_{\partial \mathrm{M}} \mathrm{H}u^2 ds(g)}{\Big(\int_{\mathrm{M}} |u|^N dv(g)\Big)^{\frac{2}{N}}} \tag{7}$$

pour $u \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$, $u \neq 0$ et montre que si f est une fonction minimisante normalisée par $||f||_{\mathrm{L}^N(\mathrm{M})} = 1$ de cette fonctionnelle alors elle satisfait au sens faible le système :

$$\begin{cases} \mathrm{L}_g(f) = \mu(\mathrm{M}, \partial \mathrm{M})\, f^{\mathrm{N}-1} & \text{sur M} \\ \mathrm{B}_g(f_{|\partial \mathrm{M}}) = 0 & \text{le long de } \partial \mathrm{M} \end{cases}$$

où $\mu(\mathrm{M}, \partial \mathrm{M}) := \inf \mathrm{Y}(u)$ est l'invariant de Yamabe de M (cet invariant est un invariant conforme, c'est-à-dire il ne dépend que de la classe conforme de la métrique g). Les théorèmes de régularité classiques et le principe du maximum permettent ensuite de vérifier que dans ce cas $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ et $f \geq 0$. Cependant, la situation $f \equiv 0$ n'est en aucun cas exclue. Escobar remarqua alors que si :

$$\mu(\mathrm{M}, \partial \mathrm{M}) < \mu(\mathbb{S}^n_+, \partial \mathbb{S}^n_+), \tag{8}$$

où $\mu(\mathbb{S}^n_+, \partial \mathbb{S}^n_+)$ est l'invariant de Yamabe de l'hémisphère de dimension n muni de sa structure conforme standard, la fonction f est strictement positive. La résolution du problème de Yamabe est ainsi ramenée à une étude fine de l'invariant de Yamabe qui a été entreprise dans les travaux d'Escobar.

Présentation des résultats

L'objectif principal des travaux de cette thèse est de mettre en évidence que l'étude spectrale de l'opérateur de Dirac liée à sa propriété de covariance conforme permet de relier des invariants conformes riemanniens et spinoriels d'une variété à bord. Une fois ce lien établi, on étudiera plus en profondeur l'invariant spinoriel conforme obtenu.

Le premier chapitre a pour but de mettre en évidence le fait qu'on puisse lier ces deux cadres faisant intervenir des outils complétement différents. Le choix de la condition à bord pour l'opérateur de Dirac constitue un élément crucial pour mener à bien ce travail.

Dans le cas où la variété ne possède pas de bord, l'élément clé qui constitue le point de départ et de jonction de tous les travaux précédemment cités est l'inégalité d'Hijazi. Dans le cadre qui nous intéresse ici, il paraît donc naturel de se poser la question suivante :

Peut-on obtenir une inégalité de type Hijazi pour l'opérateur de Dirac sur une variété à bord ?

La réponse à cette question passe évidemment par une étude détaillée des différentes conditions à bord dont on dispose pour l'opérateur de Dirac et par un choix concernant leurs comportements par un changement conforme de métriques. Dans [**HMR02**], les auteurs montrent une inégalité de type Friedrich pour le spectre de l'opérateur de Dirac sous quatre conditions à bord : deux conditions de type Atiyah-Patodi-Singer et deux conditions locales. Les conditions de type Atiyah-Patodi-Singer sont données par des projections spectrales associées à des opérateurs elliptiques auto-adjoints agissant sur le fibré des spineurs du bord. Les conditions à bord locales sont quant à elles déterminées par des projections point par point d'involutions agissant fibres à fibres sur le fibré des spineurs du bord. Le caractère inhérent de l'aspect conforme dans ce travail conduit à désigner les conditions à bord locales comme canditates naturelles à l'objectif de cette thèse. Les conditions à bord que l'on va étudier dans cette première partie sont introduites ci-dessous.

(1) La condition associée à un opérateur de chiralité :

La condition associée à un opérateur de chiralité Γ (condition que l'on désignera souvent par condition CHI dans ces travaux) est définie par la projection associée à la valeur propre ± 1 de l'involution :

$$\gamma(\nu)\Gamma : \Gamma(\mathbf{S}(\partial \mathrm{M})) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{S}(\partial \mathrm{M})),$$

où $\mathbf{S}(\partial\mathrm{M}) := \Sigma\mathrm{M}_{|\partial\mathrm{M}}$ désigne le fibré des spineurs du bord, $\Sigma\mathrm{M}$ le fibré des spineurs de M et $\gamma(\nu)$ l'action du champ de vecteurs unitaire normal rentrant à $\partial\mathrm{M}$ par multiplication de Clifford. Il est à noter qu'une telle condition n'existe pas sur toutes les variétés puisqu'elle nécessite l'existence d'un opérateur de chiralité Γ (opérateur agissant sur le fibré des spineurs de M et qui vérifie des propriétés bien spécifiques données par (29) dans la section 4.4.2 du chapitre 1). On montre alors le résultat suivant :

Théorème 0.1. *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension* n *à bord lisse* $\partial\mathrm{M}$. *Sous la condition à bord* CHI *associée à un opérateur de chiralité, le spectre de l'opérateur de Dirac* D *de* M *est une suite non bornée de nombres réels* $\{\lambda_k^{\mathrm{CHI}} \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$. *Pour* $n \geq 3$, *toute valeur propre* λ^{CHI} *de l'opérateur de Dirac satisfait :*

$$\left(\lambda^{\mathrm{CHI}}\right)^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\,\mu_1(\mathrm{L}).$$

Pour $n = 2$, on a :

$$|\lambda^{\mathrm{CHI}}|^2 \geq \frac{2\pi\chi(\mathrm{M}^2)}{\mathrm{Aire}(\mathrm{M}^2, g)}.$$

De plus, on a égalité si et seulement si la variété M *est isométrique à l'hémisphère standard $\mathbb{S}^n_+(r)$ de rayon r, où r dépend de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac sous cette condition.*

Dans l'énoncé de ce théorème, le nombre réel $\mu_1(\mathrm{L})$ désigne la première valeur propre du problème à bord :

$$\begin{cases} \mathrm{L}u = \mu_1(\mathrm{L})u & \text{sur M} \\ \mathrm{B}u_{|\partial\mathrm{M}} = 0 & \text{le long de } \partial\mathrm{M}. \end{cases}$$

De plus, si $n = 2$, le réel $\chi(\mathrm{M}^2)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface à bord donnée par :

$$4\pi\chi(\mathrm{M}^2) = \int_{\mathrm{M}} \mathrm{R}dv(g) + 2\int_{\partial\mathrm{M}} \mathrm{H}ds(g).$$

(2) La condition MIT *:*

La deuxième condition à bord locale que l'on étudie ici est la condition à bord MIT définie par la projection associée à la valeur propre ± 1 de l'involution :

$$i\gamma(\nu) : \Gamma(\mathbf{S}(\partial\mathrm{M})) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{S}(\partial\mathrm{M}))$$

La différence fondamentale avec la condition précédente provient du fait que dans ce cas toute valeur propre de l'opérateur de Dirac possède une partie imaginaire non nulle. Cependant, on montre qu'on peut obtenir une inégalité de type Hijazi donnée par le résultat suivant :

Théorème 0.2. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension n à bord lisse ∂M. Sous la condition à bord* MIT*, le spectre de l'opérateur de Dirac* D *est une suite de nombres complexes $\{\lambda_k^{\mathrm{MIT}} \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$ dont la partie imaginaire est strictement positive. Pour $n \geq 3$, toute valeur propre λ^{MIT} de l'opérateur de Dirac satisfait :*

$$|\lambda^{\mathrm{MIT}}|^2 > \frac{n}{4(n-1)}\,\mu_1(\mathrm{L}).$$

Pour $n = 2$, on a :

$$|\lambda^{\mathrm{MIT}}|^2 > \frac{2\pi\chi(\mathrm{M}^2)}{\mathrm{Aire}(\mathrm{M}^2, g)}.$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, on pourra utiliser ces deux inégalités afin d'obtenir une relation entre un invariant riemannien conforme et un invariant spinoriel conforme. Une application de ce résultat sera alors donnée dans le deuxième chapitre.
Ces estimations sur le spectre de l'opérateur de Dirac permettent donc de relier deux invariants conformes définis de manière différente, l'un scalaire et l'autre spinoriel. Un choix sur la condition à bord à privilégier s'impose alors naturellement. La nature du spectre de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord MIT constitue une difficulté

incontestable à l'objectif de cette thèse. Il est donc naturel de privilégier la condition associée à un opérateur de chiralité.

Cependant, en s'attardant un peu plus sur la condition MIT, on obtient tout de même une estimation classique (c'est-à-dire qui n'utilise pas le caractère de l'opérateur de Dirac et de cette condition) améliorant ainsi une inégalité de type Friedrich démontrée par O. Hijazi, S. Montiel et A. Roldán dans [**HMR02**]. En effet, on montre :

THÉORÈME 0.3. *Soit* Ω *un domaine compact d'une variété riemannienne spinorielle compacte dont le bord* $\partial\Omega$ *satisfait la condition* $\mathrm{H} > 0$. *Alors sous la condition à bord* MIT, *toute valeur propre* λ^{MIT} *satisfait :*

$$|\lambda^{\mathrm{MIT}}|^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \inf_{\Omega} (\mathrm{R}) + n \,\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}}) \inf_{\partial\Omega} (\mathrm{H}). \tag{9}$$

De plus, on a égalité si et seulement si le domaine Ω *possède un spineur de Killing imaginaire pur et si le bord* $\partial\Omega$ *est une hypersurface à courbure moyenne constante.*

Le deuxième chapitre de cette thèse est consacré à l'étude analytique d'un invariant spinoriel conforme défini sur une variété riemannienne compacte (M^n, g) munie d'une structure spinorielle σ et dont le bord lisse $\partial\mathrm{M}$ est non vide. En utilisant les résultats du chapitre précédent, cet invariant apparaît de façon naturelle sous la forme :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) := \inf_{\overline{g}\in[g]} \{|\lambda_1(\overline{g})| \mathrm{vol}(\mathrm{M}, \overline{g})^{\frac{1}{n}}\} \tag{10}$$

où $\lambda_1(g)$ est la première valeur propre non nulle de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord associée à un opérateur de chiralité Γ. Les estimations prouvées dans le premier chapitre permettent de considérer cet invariant comme un analogue de l'invariant de Yamabe dans le cadre spinoriel. Plusieurs questions se posent alors naturellement. Tout d'abord, dans le problème de Yamabe étudié par Escobar, l'hémisphère $\mathbb{S}^n_+$ joue le même rôle que la sphère standard $\mathbb{S}^n$ dans le problème de Yamabe standard. La question suivante se pose alors :

Peut-on comparer cet invariant défini sur M *à celui sur l'hémisphère* $\mathbb{S}^n_+$ *munie de ses structures conforme et spinorielle standard ?*

Dans un premier temps, on va donc donner une réponse à cette question. Le premier pas dans l'étude de cet invariant consiste à l'exprimer comme l'infimum d'une certaine fonctionnelle et à le calculer explicitement sur l'hémisphère. En particulier, on construira un champ de spineurs de Killing sur $\mathbb{S}^n_+$ qui satisfait le problème à bord étudié. Ce champ de spineurs ainsi obtenu et la fonctionnelle déterminée conduisent à la construction d'un spineur-test qui va permettre la comparaison de $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ et $\lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)$. Il est cependant clair que le cadre spinoriel nécessite beaucoup plus de précautions que le cadre scalaire. En effet, dans le cas du laplacien conforme, on peut facilement à partir d'une fonction sur $\mathbb{S}^n_+$ construire une fonction sur M. Dans le cadre spinoriel, la dépendance des champs de spineurs par rapport à la métrique impose la construction d'une trivialisation adéquate du fibré des spineurs. Cette trivialisation est fournie par le système de coordonnées de Fermi au voisinage d'un point du bord et par les travaux de Bourguignon-Gauduchon [**BG92**]. En effet, ces derniers construisent une identification du fibré des spineurs au dessus d'une variété munie de deux métriques riemanniennes. La carte "spéciale" qui va permettre une telle construction ici est celle associée aux coordonnées de Fermi. Ce système de coordonnées est celui qui apparaît naturellement lorsque l'on considère un point $q \in \partial\mathrm{M}$. Il consiste à transporter parallèlement un système de coordonnées normales au point q (dans la variété $\partial\mathrm{M}$) le long de la géodésique partant de q et orthogonale à $\partial\mathrm{M}$. On verra ainsi que le choix de la condition à bord dans la définition de $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ intervient encore de manière cruciale puisque le spineur-test défini sur la variété M à partir de cette trivialisation doit satisfaire la condition à bord. Puisque le changement de métrique n'est plus conforme, cette condition n'est apparemment plus satisfaite. Cependant, on montre le lemme suivant, crucial pour le reste du travail :

LEMME 0.1. *Soient* U *et* V *les ouverts de trivialisation induits par le système de coordonnées de Fermi et soit* $\Phi_0 \in \Gamma\big(\Sigma(\mathbb{R}^n_+)\big)$ *un spineur parallèle tel que :*

$$\gamma(\nu)\Gamma\overline{\Phi}_0(q) = \overline{\Phi}_0(q)$$

en un point $q \in \mathrm{V} \cap \partial\mathrm{M}$ *et où* $\gamma(\nu)$ *désigne la multiplication de Clifford par le champ de vecteurs unitaire normal à* $\partial\mathrm{M}$. *On a alors :*

$$\gamma(\nu)\Gamma\overline{\Phi}_{0|\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}} = \overline{\Phi}_{0|\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}}.$$

Dans cet énoncé, $\mathbb{R}^n_+$ désigne le demi-espace euclidien, le champ Φ_0 est un champ de spineurs parallèle sur U et $\overline{\Phi}_0$ son image par la trivialisation construite précédemment dans le fibré des spineurs au-dessus de V. Ce lemme assure en fait qu'il suffit de prendre un spineur-test vérifiant la condition à bord *en un point pour qu'il vérifie la condition à bord sur tout le bord.* En combinant tous les résultats précédemment énoncés, on parvient à donner une réponse à la question posée au début de ce paragraphe. On obtient alors un des principaux résultats de ce chapitre :

THÉORÈME 0.4. *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne spinorielle compacte à bord lisse non vide* $\partial\mathrm{M}$ *possédant un opérateur de chiralité* Γ, *alors si* $n \geq 2$, *on a :*

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) \leq \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+) = \frac{n}{2}\Big(\frac{\omega_n}{2}\Big)^{\frac{1}{n}}, \tag{11}$$

où $\omega_n = \mathrm{vol}(\mathbb{S}^n, g_{st})$.

Ayant ainsi répondu par l'affirmative à la question posée au début de cette section et à la vue de l'inégalité (8), on est naturellement amené à se demander :

Dans quels cas l'inégalité (11) est-elle stricte ?

Afin de donner une réponse (partielle) à cette question, on va définir la fonction de Green pour l'opérateur de Dirac sous la condition à bord associée à un opérateur de chiralité, qu'on désignera alors par "fonction de Green chirale". Ensuite à la manière d'Escobar, on va montrer que si le "terme constant" (qu'on appellera opérateur de masse chirale par analogie avec [**AHM**]) dans le développement de la fonction de Green chirale au voisinage d'un point du bord n'est pas nul (dans un sens à préciser) alors l'inégalité est stricte.

Pour finir ces travaux, on donnera une preuve simple de la forme faible du théorème de la masse positive démontré par Escobar dans [**Esc92b**]. La preuve de ce théorème repose sur la construction de la fonction de Green pour l'opérateur de Dirac sous la condition à bord MIT et s'inspire des travaux de Ammann et Humbert [**AH**]. L'énoncé que l'on présente ici n'apporte pas de résultats nouveaux (si ce n'est qu'elle généralise un peu le type des variétés pour lequelles Escobar l'a prouvée) mais permet de simplifier considérablement les preuves existantes. Plus précisément, on prouve :

THÉORÈME 0.5. *Soit* $(\mathrm{M}^n, g, \sigma)$ *une variété riemannienne spinorielle connexe compacte de dimension* $n \geq 3$ *à bord lisse* $\partial\mathrm{M}$. *Supposons de plus qu'il existe une métrique conforme à* g *et un point* $q \in \partial\mathrm{M}$ *tels que dans cette métrique, on puisse trouver un voisinage* V *de* q *dans* M *isométrique à un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n_+$ *contenant* 0. *Alors la masse* A *de* M *satisfait* $\mathrm{A} \geq 0$. *De plus, on a égalité si et seulement si* M *est conforme à l'hémisphère ronde* $\mathbb{S}^n_+$.

Dans ce résultat, la masse est définie comme le terme constant de la partie régulière dans le développement de la fonction de Green du laplacien conforme au voisinage du point q.

CHAPITRE 1

Estimations de valeurs propres pour l'opérateur de Dirac sur une variété à bord

Ce chapitre a fait l'objet de deux publications [**Rau06**] et [**Rau05**].

Estimations de valeurs propres pour l'opérateur de Dirac sur une variété à bord

1. Introduction

Ce chapitre a pout objectif principal d'amener naturellement à la définition de l'invariant spinoriel conforme présenté dans le deuxième chapitre. Les justifications que l'on fournit ici passent par l'étude du spectre de l'opérateur de Dirac sous diverses conditions à bord.

Dans le cas des variétés compactes fermées (c'est-à-dire sans bord), de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude spectrale de l'opérateur de Dirac comme [**Fri80**], [**Hij86**] ou [**Bär92**] par exemple. Dans ce cas, l'opérateur de Dirac est un opérateur différentiel elliptique d'ordre un qui admet une extention L^2 auto-adjointe et en particulier son spectre est une suite non bornée de nombres réels. Outre les estimations elles-mêmes, il est important de pouvoir caractériser les cas limites de ces minorations qui donnent lieu à des géométries spéciales. Ces géométries sont en fait liées à l'existence sur la variété d'un champ de spineurs particulier tel que les spineurs de Killing par exemple (voir [**Bau89a**], [**Bau89b**] ou [**Bär93**]). Une inégalité importante est l'inégalité d'Hijazi, inégalité qui relie la première valeur propre du carré de l'opérateur de Dirac et celle du laplacien conforme. La démonstration de ce résultat est basée sur les propriétés conformes de ces deux opérateurs et constitue le point de départ de nombreux travaux récents.

Dans le cas où la variété possède un bord lisse, le spectre de l'opérateur de Dirac dépend de la condition à bord utilisée et on doit donc s'attendre à obtenir différentes estimations sur ses valeurs propres selon la condition à bord étudiée. En effet, dans [**HMR02**], les auteurs étudient quatre conditions à bord et obtiennent une estimation de type Friedrich dont les cas d'égalités diffèrent totalement suivant la condition imposée. Dans ce chapitre, on va étudier deux conditions à bord pour l'opérateur de Dirac qui ont la particularité d'être invariantes par changement conforme, ce qui nous amènera à prouver une inégalité de type Hijazi. Cette inégalité constituera le point de départ des travaux du deuxième chapitre.

Dans cette optique, on commencera tout d'abord par donner de brefs rappels concernant la géométrie spinorielle sur une variété à bord. Cette section sera consacrée à poser les différentes notations et les différents outils qui vont intervenir dans la suite de ce travail. On rappellera en particulier les principales propriétés de l'opérateur de Dirac ainsi que la façon dont les structures riemannienne et spinorielle induisent de telles structures sur le bord. Une fois ces notions rappelées, on donnera une version intégrale de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz, principal outil pour obtenir des estimations sur le spectre de l'opérateur de Dirac. On finira ces rappels par les propriétés de covariance conforme des opérateurs de Dirac et on résumera les principaux résultats concernant le problème de Yamabe sur les variétés à bord. On rappellera enfin la notion d'ellipticité pour des conditions à bord associées à un opérateur différentiel afin de regarder plus en détails cette notion pour l'opérateur de Dirac.

On arrivera alors aux principaux résultats de ce chapitre qui donnent des minorations explicites du spectre de l'opérateur de Dirac (sous deux conditions à bord) en fonction de la première valeur propre du laplacien conforme. Cette inégalité est appelée "Inégalité d'Hijazi" par analogie avec l'inégalité du même nom sur les variétés fermées. Ces résultats font l'objet d'une publication [**Rau06**].

Pour clore ce chapitre, une étude plus approfondie du spectre de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord MIT permettra d'obtenir une estimation ne faisant pas intervenir ses propriétés conformes (voir Section 4.3). Comme on le verra, cette minoration améliore un résultat de Hijazi, Montiel et Roldán (voir [**HMR02**]). Sa preuve est basée sur une modification de la connexion "à la Friedrich" donnant lieu à la formulation d'une formule de Reilly modifiée. Le cas d'égalité est caractérisé par l'existence d'un champ de spineurs de Killing imaginaire. Ce résultat fait l'objet d'une publication [**Rau05**].

2. Préliminaires géométriques

Dans cette section, on rappelle brièvement les principaux résultats de base de la géométrie spinorielle sur une variété à bord. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter les excellents ouvrages [**BHMM**], [**Fri00**] ou [**LM89**] pour le cas des variétés fermés et les articles de [**Bär98**], [**HMR02**] ou [**Mor01**] pour la restriction au bord des objets ambiants. On ne s'attarde pas ici sur l'aspect algébrique basique des algèbres de Clifford, du groupe spinoriel et des représentations de ce groupe afin de ne pas alourdir le texte qui suit.

2.1. Variétés spinorielles à bord. On considère (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension n possédant un bord lisse $\partial\mathrm{M}$. Dans toute la suite, on notera par $\sigma := (\mathrm{Spin}\,(\mathrm{M}), \eta)$ une structure spinorielle sur M qui est la donnée d'un fibré principal $\mathrm{Spin}\,(\mathrm{M})$ de groupe structural Spin_n et d'un revêtement η à deux feuillets du fibré principal SO(M) des repères linéaires g-orthonormés par le fibré $\mathrm{Spin}\,(\mathrm{M})$. L'existence d'une telle structure est de nature topologique et elle est équivalente à la nullité de la deuxième classe de Stiefel-Withney. Sur une variété, il peut exister plusieurs structures spinorielles et on suppose alors que si c'est le cas, on en choisit une et on la fixe pour la suite. En utilisant alors les résultats classiques sur les représentations complexes du groupe spinoriel, on construit de façon naturelle un fibré vectoriel associé au fibré principal $\mathrm{Spin}\,(\mathrm{M})$. Ce fibré est appelé fibré des spineurs complexes (ou fibré des spineurs) et on le notera alors $\Sigma\mathrm{M}$ (ou bien $\Sigma_g(\mathrm{M})$) si on veut faire référence à la métrique de la variété). De la même manière, on peut aussi construire un fibré vectoriel dont la fibre au-dessus d'un point est donnée par l'algèbre de Clifford complexe. Ce fibré vectoriel est appelé fibré de Clifford et on le notera $\mathbb{C}l(\mathrm{M})$. On peut le voir comme une généralisation du fibré extérieur puisque l'on peut vérifier qu'ils sont isomorphes en tant qu'espace vectoriel.

On s'intéresse alors aux différents objets que l'on peut construire sur le fibré $\Sigma\mathrm{M}$. Tout d'abord, on a une action naturelle du fibré de Clifford sur le fibré des spineurs appelée multiplication de Clifford. Cette action est donnée par

$$\begin{array}{rcccc} \gamma & : & Cl(\mathrm{M})\otimes\Sigma\mathrm{M} & \longrightarrow & \Sigma\mathrm{M} \\ & & \phi\otimes\psi=[\widetilde{s},\varphi]\otimes[\widetilde{s},\sigma] & \longmapsto & [\widetilde{s},\rho_n(\varphi)\sigma], \end{array}$$

où $[\widetilde{s},\varphi]$ et $[\widetilde{s},\sigma]$ sont les expressions locales des sections $\phi\in\Gamma(Cl(\mathrm{M}))$ et $\psi\in\Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ et où ρ_n est la représentation spinorielle. De la même manière, on construit un produit hermitien unitaire sur $\Sigma\mathrm{M}$, noté $\langle .,.\rangle$, qui provient de celui de l'espace des spineurs. On peut alors facilement vérifier qu'il satisfait la relation

$$\langle\gamma(X)\psi,\varphi\rangle=-\langle\psi,\gamma(X)\varphi\rangle, \tag{1}$$

pour tout $X\in\Gamma(\mathrm{TM})$ et pour tout $\psi,\varphi\in\Gamma(\Sigma\mathrm{M})$. On peut aussi vérifier que grâce à la structure spinorielle, la 1-forme de connexion induite par la connexion de Levi-Civita riemannienne ∇ agissant sur le fibré tangent se relève en une connexion sur le fibré principal spinoriel. Cette 1-forme de connexion permet alors de construire la dérivée covariante associée qui est appelée connexion de Levi-Civita spinorielle. On la notera

$$\nabla:\Gamma(\Sigma\mathrm{M})\longrightarrow\Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M}\otimes\Sigma\mathrm{M}).$$

On peut facilement vérifier que si U est un ouvert de trivialisation de $\Sigma\mathrm{M}$, la connexion de Levi-Civita est donnée par

$$\nabla_X\psi=X(\psi)+\frac{1}{4}\sum_{1\le i,j\le n}g(\nabla_Xe_i,e_j)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\psi, \tag{2}$$

pour tout $\psi\in\Gamma(\Sigma\mathrm{M})$, $X\in\Gamma(\mathrm{TM})$ et où $\{e_1,...,e_n\}$ est un repère g-orthonormé local. Un calcul simple permet alors de voir que cette connexion est compatible avec la multiplication de Clifford et avec le produit hermitien, c'est-à-dire

$$\nabla_X\big(\gamma(Y)\varphi\big) = \gamma(\nabla_XY)\varphi+\gamma(Y)\nabla_X\varphi \tag{3}$$

$$X\langle\varphi,\psi\rangle = \langle\nabla_X\varphi,\psi\rangle+\langle\varphi,\nabla_X\psi\rangle \tag{4}$$

pour tout φ, $\psi\in\Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ et X, $Y\in\Gamma(\mathrm{TM})$. Le tenseur de courbure spinoriel associé est défini par

$$\mathfrak{R}_{X,Y}:=[\nabla_X,\nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]},$$

et de la même manière que ci-dessus, on vérifie que localement on a

$$\mathfrak{R}_{X,Y}\psi=\frac{1}{4}\sum_{1\le i,j\le n}g(\mathrm{R}_{X,Y}e_i,e_j)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\psi, \tag{5}$$

où R est le tenseur de courbure de Riemann. On est maintenant en mesure de définir rigoureusement l'opérateur de Dirac. En effet, l'opérateur de Dirac est défini par

$$\mathrm{D}:=\gamma\circ\nabla,$$

et il est localement donné par

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{D} & : & \Gamma(\Sigma\mathrm{M}) & \longrightarrow & \Gamma(\Sigma\mathrm{M}) \\ & & \psi & \longmapsto & \sum_{1\le i\le n}\gamma(e_i)\nabla_{e_i}\psi. \end{array} \tag{6}$$

On le notera aussi D_g si on a besoin de faire apparaître explicitement la métrique dans laquelle on travaille. L'opérateur de Dirac est un opérateur différentiel d'ordre un qui est elliptique puisque son symbole principal est donné par

$$\sigma(\mathrm{D})(x)(\xi)\psi_x=i\gamma(\xi)\psi_x, \tag{7}$$

pour tout $x \in \mathrm{M}$, $\xi \in \mathrm{T}^*_x\mathrm{M}$ et $\psi_x \in \Sigma_x\mathrm{M}$.

Remarque 1.1. Examinons un peu plus en détail le cas où la dimension de la variété est paire. Il est connu que dans ce cas, le fibré des spineurs se décompose en deux facteurs irréductibles sous l'action de l'élément de volume défini par :

$$\omega_n^{\mathbb{C}} = i^{[\frac{n+1}{2}]}\gamma(e_1)\cdot ... \cdot\gamma(e_n), \tag{8}$$

où $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base g_x-orthonormée de $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$. En effet, on a :

$$\Sigma\mathrm{M} = \Sigma^+\mathrm{M} \oplus \Sigma^-\mathrm{M}, \tag{9}$$

où $\Sigma^{\pm}\mathrm{M}$ sont les sous-fibrés propres associés aux valeurs propres ± 1 sous l'action de l'élément de volume. Cette décomposition est souvent appelée décomposition chirale. En se plaçant dans un système de coordonnées normales au point x, on voit que $\omega_n^{\mathbb{C}}$ est parallèle pour la dérivéee covariante ∇. Il devient alors clair que ∇ préserve la décomposition chirale et donc que l'opérateur de Dirac échange cette décomposition, c'est-à-dire

$$\mathrm{D} : \Gamma(\Sigma^{\pm}\mathrm{M}) \longrightarrow \Gamma(\Sigma^{\mp}\mathrm{M}).$$

Avant d'étudier la restriction des structures au bord, on énonce la célèbre formule de Schrödinger-Lichnerowicz qui relie le carré de l'opérateur de Dirac, le laplacien brut spinoriel et la courbure scalaire de la variété. Elle est donnée par

$$\mathrm{D}^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}\mathrm{R}\ \mathrm{Id}_{\Sigma\mathrm{M}}, \tag{10}$$

où ∇^* est l'adjoint formel de la connexion de Levi-Civita pour le produit scalaire L^2 et R est la courbure scalaire de la variété (M, g).

On s'intéresse maintenant au bord $\partial\mathrm{M}$ de la variété M que l'on peut considérer comme une hypersurface orientée de M. Le bord $\partial\mathrm{M}$ hérite de façon naturelle de la structure riemannienne de M et on notera alors $g := g_{|\partial\mathrm{M}}$ la métrique induite sur $\partial\mathrm{M}$ par la métrique g de M. De plus, puisque le bord est orienté (par l'orientation de M) il existe un champ de vecteurs unitaire ν normal à $\partial\mathrm{M}$ (que l'on choisit rentrant à $\partial\mathrm{M}$). Ce champ de vecteurs permet en premier lieu d'identifier le fibré principal des repères linéaires g-orthonormés au-dessus de $\partial\mathrm{M}$, que l'on note $\mathrm{SO}(\partial\mathrm{M})$, comme un sous-fibré du fibré $SO(\mathrm{M})_{|\partial\mathrm{M}}$. En effet, cette identification est donnée par l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi\ : & \mathrm{SO}(\partial\mathrm{M}) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(\mathrm{M})_{|\mathrm{N}} \\ & (e_1, ..., e_{n-1}) & \longmapsto & (e_1, ..., e_{n-1}, \nu) \end{array}$$

et on construit facilement une structure spinorielle au-dessus de $\partial\mathrm{M}$ en remarquant que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spin}\,(\partial\mathrm{M}) := \Phi^*\big(\mathrm{Spin}(\mathrm{M})_{|\partial\mathrm{M}}\big) \arrow[r, "\Phi^*"] \arrow[d] & \mathrm{Spin}(\mathrm{M})_{|\partial\mathrm{M}} \arrow[d] \\ \mathrm{SO}(\partial\mathrm{M}) \arrow[r, "\Phi"'] & \mathrm{SO}(\mathrm{M})_{|\partial\mathrm{M}} \end{tikzcd}$$

.

On voit alors immédiatement que le bord est naturellement muni d'une structure spinorielle induite par celle de la variété M qui en fait donc une variété spinorielle. On définit ainsi le fibré des spineurs extrinsèque au bord comme étant la restriction à ∂M du fibré ΣM, c'est-à-dire qu'on pose $\mathbf{S}(\partial \mathrm{M}) := \Sigma \mathrm{M}_{|\partial \mathrm{M}}$ (que l'on notera aussi $\mathbf{S}_g(\partial \mathrm{M})$). Ce fibré est, de la même manière que précédemment, muni d'une multiplication de Clifford $\gamma^{\mathbf{S}}$, d'une métrique hermitienne $\langle\, , \,\rangle$ et d'une dérivée covariante $\nabla^{\mathbf{S}}$ compatible avec $\langle\, , \,\rangle$ et $\gamma^{\mathbf{S}}$. Par analogie avec le fibré des spineurs ambiant, on définit l'opérateur de Dirac du bord comme le composé de la multiplication de Clifford et de la dérivée covariante de $\mathbf{S}(\partial \mathrm{M})$, c'est-à-dire qu'on pose $\mathrm{D}^{\mathbf{S}} = \gamma^{\mathbf{S}} \circ \nabla^{\mathbf{S}}$.

Comme pour les objets riemanniens, on peut relier multiplication de Clifford et dérivée covariante ambiantes restreintes au bord avec celles définies sur $\mathbf{S}(\partial \mathrm{M})$. Pour les multiplications de Clifford, on a

$$\gamma^{\mathbf{S}}(X) = \gamma(X)\gamma(\nu)$$

et pour les dérivés covariantes, on a la formule de Gauss spinorielle

$$\nabla_X \varphi = \nabla^{\mathbf{S}}_X \varphi + \frac{1}{2}\gamma(\mathrm{h}(X))\gamma(\nu)\varphi, \tag{11}$$

pour tout $X \in \Gamma(\mathrm{T}(\partial \mathrm{M}))$, pour tout $\varphi \in \Gamma(\mathbf{S}(\partial \mathrm{M}))$ et où $\mathrm{h}(X) = -\nabla_X \nu$ est l'application de Weingarten. Cette formule permet en particulier de relier l'opérateur de Dirac ambiant D restreint au bord avec l'opérateur de Dirac du bord. En effet, on a :

$$\mathrm{D}^{\mathbf{S}}\varphi = \frac{n-1}{2}\mathrm{H}\varphi - \gamma(\nu)\mathrm{D}\varphi - \nabla_\nu \varphi, \tag{12}$$

où $\mathrm{H} = \frac{1}{n-1}\mathrm{tr}\,(\mathrm{h})$ est la courbure moyenne de ∂M. On peut de plus vérifier que le spectre de l'opérateur de Dirac du bord est symétrique par rapport à zéro. Pour cela, il suffit de remarquer que l'action de ν par la multiplication de Clifford anti-commute avec $\mathrm{D}^{\mathbf{S}}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{D}^{\mathbf{S}}\big(\gamma(\nu)\varphi\big) = -\gamma(\nu)\mathrm{D}^{\mathbf{S}}\varphi. \tag{13}$$

Remarque 1.2. Puisque le bord est une variété spinorielle, il est donc muni d'un fibré des spineurs intinsèque $\Sigma(\partial \mathrm{M})$ qui ne dépend pas de sa géométrie extrinsèque. Ce fibré est un fibré de Dirac, c'est-à-dire qu'il est muni d'une multiplication de Clifford $\gamma^{\partial \mathrm{M}}$, d'une métrique hermitienne $\langle\, , \,\rangle$ et d'une dérivée covariante $\nabla^{\partial \mathrm{M}}$ compatible avec la multiplication de Clifford et la métrique hermitienne. On notera $\mathrm{D}^{\partial \mathrm{M}}$ l'opérateur de Dirac intrinsèque de ∂M. On peut alors identifier ce fibré avec le fibré des spineurs $\mathbf{S}(\partial \mathrm{M})$ ce qui permet d'étudier la géométrie de la variété ∂M de manière extrinsèque. En effet, on a les identifications suivantes

(1) Si la dimension n de la variété M est impaire, on a :

$$(\mathbf{S}(\partial \mathrm{M}), \gamma^{\mathbf{S}}, \nabla^{\mathbf{S}}, \mathrm{D}^{\mathbf{S}}) \equiv (\Sigma(\partial \mathrm{M}), \gamma^{\partial \mathrm{M}}, \nabla^{\partial \mathrm{M}}, \mathrm{D}^{\partial \mathrm{M}}),$$

et la décomposition $\mathbf{S}(\partial \mathrm{M}) = \mathbf{S}(\partial \mathrm{M})^+ \oplus \mathbf{S}(\partial \mathrm{M})^-$ donnée par

$$\mathbf{S}(\partial \mathrm{M})^{\pm} := \{\varphi \in \mathbf{S}(\partial \mathrm{M}) \ : \ i\gamma(\nu)\varphi = \pm\varphi\}$$

correspond à la décomposition chirale du fibré des spineurs $\Sigma(\partial \mathrm{M})$. L'opérateur $\mathrm{D}^{\mathbf{S}}$ échange alors les sous-fibrés $\mathbf{S}(\partial \mathrm{M})^+$ et $\mathbf{S}(\partial \mathrm{M})^-$.

(2) Si la dimension n de la variété M est paire, la décomposition chirale du fibré des spineurs $\Sigma\mathrm{M}$ induit une décomposition orthogonale, $\gamma^{\mathbf{S}}$ et $\mathrm{D}^{\mathbf{S}}$-invariante

$$\mathbf{S}(\partial\mathrm{M}) = \mathbf{S}(\partial\mathrm{M})^{+} \oplus \mathbf{S}(\partial\mathrm{M})^{-}, \ \textit{avec} \quad \mathbf{S}(\partial\mathrm{M})^{\pm} := \Sigma\mathrm{M}^{\pm}_{|\partial\mathrm{M}},$$

de façon à ce que l'on ait

$$(\mathbf{S}(\partial\mathrm{M})^{\pm}, \gamma^{\mathbf{S}}, \mathrm{D}^{\mathbf{S}}_{|\mathbf{S}(\partial\mathrm{M})^{\pm}}) \equiv (\Sigma\partial\mathrm{M}, \pm\gamma, \pm\mathrm{D}^{\partial\mathrm{M}}).$$

Plus précisément, on a les identifications suivantes :

$$(\mathbf{S}(\partial\mathrm{M}), \gamma^{\mathbf{S}}, \nabla^{\mathbf{S}}, \mathrm{D}^{\mathbf{S}}) \equiv (\Sigma(\partial\mathrm{M}) \oplus \Sigma(\partial\mathrm{M}), \gamma^{\partial\mathrm{M}} \oplus -\gamma^{\partial\mathrm{M}}, \nabla^{\partial\mathrm{M}} \oplus \nabla^{\partial\mathrm{M}}, \mathrm{D}^{\partial\mathrm{M}} \oplus -\mathrm{D}^{\partial\mathrm{M}}).$$

De plus, les fibrés $\mathbf{S}(\partial\mathrm{M})^{+}$ et $\mathbf{S}(\partial\mathrm{M})^{-}$ sont isomorphes par l'action de ν :

$$\gamma(\nu) : \mathbf{S}(\partial\mathrm{M})^{\pm} \longrightarrow \mathbf{S}(\partial\mathrm{M})^{\mp}.$$

Ces identifications permettent entre autres de donner des estimations du spectre de l'opérateur de Dirac d'une hypersurface bordant un domaine d'une variété. De tels résultats ont été obtenus dans [**HMZ01a**], [**HMZ02**] ou [**HMR03**] et permettent par exemple de démontrer des résultats en géométrie des sous-variétés tels que le théorème d'Alexandrov (voir aussi [**Mon99**]).

2.2. Formule de Reilly spinorielle et covariance conforme de l'opérateur de Dirac. Dans ce paragraphe, on donne la formule de Reilly spinorielle et on rappelle les principaux résultats traitant de la covariance conforme de l'opérateur de Dirac. On se réfère aux mêmes ouvrages et articles que la section précédente pour obtenir plus de détails sur ces sujets.

La formule de Reilly spinorielle est en fait une version intégrale de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz (44). En effet, en utilisant la formule de Stokes, on peut vérifier que pour tout champ de spineurs $\psi \in \Gamma(\Sigma\mathrm{M})$, on a :

$$\int_{\mathrm{M}} \Big(\frac{1}{4}\mathrm{R}|\psi|^2 - \frac{n-1}{n}|\mathrm{D}\psi|^2\Big)dv(g) \leq \int_{\partial\mathrm{M}} \Big(\langle \mathrm{D}^{\mathbf{S}}\psi, \psi\rangle - \frac{n-1}{2}\mathrm{H}|\psi|^2\Big)ds(g), \tag{14}$$

où R est la courbure scalaire de la variété M et $\mathrm{H} = \frac{1}{n-1}\mathrm{tr}\,(\mathrm{h})$ est la courbure moyenne du bord. De plus, on a égalité si et seulement si le champ de spineurs ψ est un spineur-twisteur, c'est-à-dire qu'il vérifie l'identité $\mathrm{P}\psi = 0$ où P est l'opérateur de twisteur (ou opérateur de Penrose) localement donné par :

$$\mathrm{P}_X\psi = \nabla_X\psi + \frac{1}{n}\gamma(X)\mathrm{D}\psi, \tag{15}$$

pour tout $X \in \Gamma(\mathrm{TM})$. On trouvera une preuve de ce résultat dans [**HMZ01a**] par exemple.

Pour une bonne compréhension de la suite de ce travail, il est indispensable de rappeler quelques notions concernant la covariance conforme des différents opérateurs de Dirac qui entrent en jeu. Soit donc f une fonction lisse partout non nulle sur la variété M, et considérons la métrique conforme à g donnée par $\bar{g} = f^2 g$. On commence tout d'abord par remarquer qu'on peut facilement identifier les deux SO_n-fibrés principaux des repères

g et $\bar{g}$-orthonormés que l'on note respectivement par $\mathrm{SO}_g(\mathrm{M})$ et $\mathrm{SO}_{\bar{g}}(\mathrm{M})$. En effet, cette identification est donnée par

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{SO}_g(\mathrm{M}) & \longrightarrow & \mathrm{SO}_{\overline{g}}(\mathrm{M}) \\ e = (e_1, ..., e_n) & \longmapsto & \bar{e} = \big(\frac{1}{f}e_1, ..., \frac{1}{f}e_n\big). \end{array}$$

On peut ainsi, en relevant cet isomorphisme, identifier les Spin_n-fibrés principaux $\mathrm{Spin}_g\,(\mathrm{M})$ et $\mathrm{Spin}_{\overline{g}}\,(\mathrm{M})$ des repères spinoriels et on obtient alors une isométrie de fibrés F entre les deux fibrés des spineurs $\Sigma_g\,(\mathrm{M})$ et $\Sigma_{\overline{g}}\,(\mathrm{M})$. On peut aussi relier les connexions de Levi-Civita correspondantes ainsi que les multiplications de Clifford. En effet, si on note par $\overline{\nabla}$ et $\overline{\gamma}$ la dérivée covariante et la multiplication de Clifford agissant sur le fibré $\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M})$, on peut facilement montrer que

$$\begin{aligned} \mathrm{F}^{-1}\big(\overline{\nabla}_X \mathrm{F}\big(\psi\big)\big) - \nabla_X\psi &= \Big(-\frac{1}{2f}\gamma(X)\gamma(\nabla f)\psi - \frac{1}{2f}g(\nabla f, X)\psi\Big) && (16) \\ \overline{\gamma} &= \mathrm{F}(f\gamma). && (17) \end{aligned}$$

De la même manière, Hitchin montre dans [**Hit74**] une formule permettant de relier les opérateurs de Dirac d'une variété munie de deux métriques conformes. En effet, on a

$$\mathrm{F}^{-1}\big(\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{F}(\psi))\big) = f^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{D}(f^{\frac{n-1}{2}}\psi), \tag{18}$$

pour tout champ de spineurs $\psi \in \Gamma(\Sigma_g(\mathrm{M}))$ et où l'application $\psi \mapsto \mathrm{F}(\psi)$ est l'isométrie construite précédemment entre les fibrés $\Sigma_g(\mathrm{M})$ et $\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M})$. Ce changement conforme de métriques sur M induit aussi un changement conforme sur le bord ∂M. De plus, ce facteur conforme reste identique pour la métrique induite. En utilisant les propriétés de la Remarque 1.2, on obtient alors les identifications qui relient les connexions et les multiplications de Clifford des fibrés $\mathbf{S}_g(\partial\mathrm{M})$ et $\mathbf{S}_{\overline{g}}(\partial\mathrm{M})$. En effet, on a

$$\overline{\gamma} = \mathrm{F}(f\gamma), \quad \overline{\gamma}(\overline{\nu}) = \mathrm{F}(\gamma(\nu)) \tag{19}$$

$$\mathrm{F}^{-1}\big(\overline{\nabla}^{\mathbf{S}}_X \mathrm{F}(\psi)\big) - \nabla^{\mathbf{S}}_X\psi = \big(-\frac{1}{2f}\gamma^{\mathbf{S}}(X)\gamma^{\mathbf{S}}(\nabla^{\partial\mathrm{M}}f)\psi - \frac{1}{2f}g(\nabla^{\partial\mathrm{M}}f, X)\psi\big), \tag{20}$$

pour tout $X \in \Gamma(\mathrm{T}(\partial\mathrm{M})), \psi \in \Gamma(\mathbf{S}_g(\partial\mathrm{M})$, où $\overline{\nu} = \frac{1}{h}\nu$ est le champ de vecteurs unitaire normal au bord pour la métrique $\overline{g}$ et où F désigne la restriction de F au fibré $\mathbf{S}_g(\partial\mathrm{M})$. On peut ainsi donner un analogue de l'identité (18) dans le cas des opérateurs de Dirac du bord. En effet, on a

$$\mathrm{F}^{-1}\big(\overline{\mathrm{D}}^{\mathbf{S}}(\mathrm{F}(\psi))\big) = f^{-\frac{n}{2}}\mathrm{D}^{\mathbf{S}}(f^{\frac{n-2}{2}}\psi), \tag{21}$$

pour tout champ de spineurs $\psi \in \Gamma(\mathbf{S}_g(\partial\mathrm{M}))$ et où $\overline{\mathrm{D}}^{\mathbf{S}}$ désigne l'opérateur de Dirac du bord agissant sur le fibré $\mathbf{S}_{\overline{g}}(\partial\mathrm{M})$.

3. Le problème de Yamabe sur les variétés à bord

Les minorations que l'on va donner relient le spectre de l'opérateur de Dirac et le spectre du laplacien conforme sous différentes conditions à bord. On va en plus pouvoir comparer un invariant spinoriel à un certain invariant conforme, l'invariant de Yamabe pour les variétés à bord. Cet invariant est apparu en premier lieu dans le cas des variétés compactes sans bord. En effet, dans les années soixante, Yamabe (voir [**Yam60**]) annonce avoir démontré que toute variété riemannienne compacte est conforme à une variété à courbure scalaire constante. Il ramène en fait ce problème de nature géométrique à la résolution d'une équation aux dérivées partielles. Cependant, Trüdinger [**Tru68**] montre qu'il y a une erreur dans l'article de Yamabe mais prouve que le résultat reste vrai lorsqu'un certain invariant conforme, l'invariant de Yamabe, est négatif ou nul. Le cas où cet invariant est positif a été résolu en deux temps. Tout d'abord par T. Aubin (voir [**Aub76**]), dans le cas où la variété n'est pas localement conformément plate et de dimension $n \geq 6$, et deuxièment dans les cas restant par R. Schoen (voir [**Sch84**]). Le problème de Yamabe était ainsi résolu. Le cas des variétés à bord fut considéré par J. Escobar. En effet, il paraît naturel de se demander si toute variété à bord est conforme à une variété à courbure scalaire constante et à bord minimal. On considère donc (M^n, g) une variété riemannienne de dimension n à bord non vide $\partial\mathrm{M}$, et on note R sa courbure scalaire et H la courbure moyenne de son bord pour la métrique g. De la même manière que dans le cas sans bord, le problème est ramené à la résolution d'une équation aux dérivées partielles à laquelle on impose une condition au bord. En effet, le problème de Yamabe à bord est résolu si le système

$$\begin{cases} \mathrm{L}u = \mathrm{C}\,\mathrm{u}^{\frac{n+2}{n-2}} & \text{sur M} \\ \mathrm{B}u_{|\partial\mathrm{M}} = 0 & \text{le long de } \partial\mathrm{M}, \end{cases} \qquad \text{(PY)}$$

admet une solution lisse $u > 0$, où C est une constante, $\mathrm{L} := 4\frac{n-1}{n-2}\Delta + \mathrm{R}$ est le laplacien conforme et $\mathrm{B} := \frac{2}{n-2}\frac{\partial}{\partial\nu} + \mathrm{H}$ est l'opérateur de courbure moyenne conforme. Pour se ramener à ce problème à bord, on se sert des expressions suivantes reliant les courbures scalaires et moyennes dans deux métriques conformes :

$$\overline{R} = f^{-\frac{n+2}{n-2}}\mathrm{L}f \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{H}} = f^{-\frac{n}{n-2}}\mathrm{B}f, \tag{22}$$

si les métriques sont données par la relation $\overline{g} = f^{\frac{4}{n-2}}g$ avec $n \geq 3$. On vérifie alors sans trop de difficulté que ce problème possède une solution lisse $u \geq 0$ si et seulement si la fonction u est un point critique de la fonctionnelle

$$\mathrm{Q}(v) = \frac{\int_{\mathrm{M}} \left(4\frac{n-1}{n-2}|\nabla v|^2 + \mathrm{R}\,v^2\right)dv(g) + \int_{\partial\mathrm{M}} \mathrm{H}\,v^2 ds(g)}{\left(\int_{\mathrm{M}} |v|^{\frac{2n}{n-2}} dv(g)\right)^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{23}$$

La difficulté pour résoudre ce problème vient du fait qu'il est critique dans le sens où l'inclusion $\mathrm{H}_1^2(\mathrm{M}) \hookrightarrow \mathrm{L}^{\frac{2n}{n-2}}(\mathrm{M})$ n'est pas compacte et une approche variationnelle classique ne permet donc pas de conclure. L'idée est alors de construire, pour tout $2 \leq q < \frac{2n}{n-2}$, une famille (u_q) de solutions strictement positives aux équations sous-critiques données par :

$$\begin{cases} \mathrm{L}u_q = \mathrm{C_q}\mathrm{u_q^{q-1}} & \text{sur M} \\ \mathrm{B}u_{q|\partial\mathrm{M}} = 0 & \text{le long de } \partial\mathrm{M}. \end{cases}$$

L'intérêt de considérer ce système vient du fait que l'on récupère la compacité de l'inclusion $\mathrm{H}_1^2(\mathrm{M}) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(\mathrm{M})$ pour tout $2 \leq q < \frac{2n}{n-2}$ et on peut donc utiliser une approche variationnelle classique. On montre ensuite que la suite $(u_q)_q$ converge vers une fonction $u \geq 0$ qui est solution du problème à bord (PY). Reste alors à montrer que la fonction u est strictement positive. Pour cela, Escobar remarque, par analogie avec le cas où la variété est sans bord, que si l'invariant de Yamabe de la variété M est strictement inférieur à celui de l'hémisphère de même dimension, alors la fonction est strictement positive. En d'autres termes, on a :

$$\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) < \mu(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+) \quad \Rightarrow \quad u > 0, \tag{24}$$

où $\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ est l'invariant de Yamabe donné par :

$$\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) = \inf_{v \in \mathrm{C}^1(\mathrm{M}), \mathrm{B}v=0} \mathrm{Q}(v). \tag{25}$$

Cette quantité est en fait un invariant conforme, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la métrique choisie tant qu'elle est conforme à la métrique de départ. Escobar prouve le théorème suivant (voir [**Esc92b**]) :

Théorème 1.1. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte à bord lisse de dimension $n \geq 3$ dont l'invariant de Yamabe $\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ est positif. Supposons que* M *satisfait une des propriétés suivantes :*

(1) $n = 3$, 4 *ou* 5,
(2) M *possède un point non ombilique sur* $\partial\mathrm{M}$,
(3) *le bord* $\partial\mathrm{M}$ *est totalement ombilique et soit* M *est localement conformément plate ou soit* $n \geq 6$ *et le tenseur de Weyl de* M *ne s'annule pas identiquement sur* $\partial\mathrm{M}$.

Alors il existe une métrique conforme à g dont la courbure scalaire est constante et positive et dont le bord $\partial\mathrm{M}$ *est minimal.*

Pour la suite de ce travail, il est intéressant de donner une autre caractérisation de l'invariant de Yamabe. En effet, on peut l'exprimer en fonction de la première valeur propre du laplacien conforme. Considérons donc le problème à bord suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{L}u = \mu_1(\mathrm{L})u & \text{sur M} \\ \mathrm{B}u_{|\partial\mathrm{M}} = 0 & \text{le long de } \partial\mathrm{M}, \end{cases} \qquad \text{(PVY)}$$

où $\mu_1(\mathrm{L})$ est la première valeur propre non nulle du laplacien conforme. Il est alors facile de vérifier que ce problème admet une solution unique lisse $f_1 > 0$ (ce résultat est dû à Cherrier dans [**Che84**]). De la même manière que pour l'invariant de Yamabe, on peut lui donner une caractérisation variationnelle :

$$\mu_1(\mathrm{L}) = \inf_{v \in \mathrm{C}^1(\mathrm{M}),\, \mathrm{B}v=0} \left\{ \frac{\int_{\mathrm{M}} \left(4\frac{n-1}{n-2}|\nabla v|^2 + \mathrm{R}\, v^2\right) dv(g) + \int_{\partial\mathrm{M}} \mathrm{H}\, v^2 ds(g)}{\int_{\mathrm{M}} v^2 dv(g)} \right\}. \tag{26}$$

Contrairement à l'invariant de Yamabe, cette valeur propre n'est pas un invariant conforme, mais on peut cependant vérifier que son signe ne dépend que de la structure conforme considérée. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_1(\mathrm{L}) > 0 \quad (\text{resp. } < 0,\ = 0) \iff & \ \mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) > 0 \quad (\text{resp. } < 0,\ = 0) \\ \iff & \ \exists\, \overline{g} \in [g] \quad \text{telle que} \quad \overline{\mathrm{R}} > 0 \quad (\text{resp. } < 0,\ = 0) \\ & \ \text{et} \quad \overline{\mathrm{H}} = 0. \end{aligned}$$

On peut le vérifier en exprimant l'invariant de Yamabe en fonction de la valeur propre $\mu_1(\mathrm{L})$. En effet, si $\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) \geq 0$, on a :

$$\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) = \inf_{\overline{g} \in [g]} \left\{ \mu_1(\overline{\mathrm{L}}) \operatorname{vol}(\mathrm{M}, \overline{g})^{\frac{2}{n}} \right\},$$

où $\mu_1(\overline{\mathrm{L}})$ est la première valeur propre du problème à bord (PVY) dans la métrique $\overline{g}$. On se contentera de ces quelques rappels, puisque ce seront les seuls qui nous serviront pour la suite. Pour plus de détails sur les démonstrations des différents résultats énoncés dans ce paragraphe, on pourra consulter les articles [**Esc92b**] ou [**Esc92a**].

4. L'inégalité d'Hijazi sur les variétés à bord

Dans cette section, on prouve les principaux résultats de ce chapitre. En effet, à partir des rappels effectués dans les paragraphes précédents, on est maintenant en mesure d'étudier plus en détail le spectre de l'opérateur de Dirac sous certaines conditions à bord. Pour cela, on consacre la première sous-partie à quelques rappels sur la notion d'ellipticité pour des conditions à bord. Ensuite, on arrivera aux principaux théorèmes donnant des estimations de valeurs propres pour l'opérateur de Dirac sous la condition associée à un opérateur de chiralité et sous la condition MIT (plus connue sous le nom de MIT *bag boundary condition*).

4.1. Conditions à bord elliptiques pour l'opérateur de Dirac. Dans cette section, on donne un bref rappel sur la notion d'ellipticité au sens de Lopatinsky-Shapiro pour des conditions à bord à imposer à des opérateurs linéaires différentiels elliptiques et plus particulièrement pour l'opérateur de Dirac. Ces notions étant assez courantes dans la littérature, on donnera donc seulement les principaux résultats nécessaires pour la suite de ce travail. Pour avoir plus de détails sur ce sujet, on pourra consulter [**Lop53**], [**See68**], [**BBW93**] ou encore [**HMR02**].

Considérons tout d'abord le cas général d'un opérateur différentiel quelconque agissant sur les sections d'un fibré hermitien pour pouvoir appliquer ces différents résultats à l'opérateur de Dirac.

L'étude de conditions à bord "satisfaisantes" pour un opérateur elliptique P (de tout ordre, bien que pour simplifier, on considérera seulement des opérateurs d'ordre un) agissant sur les sections lisses d'un fibré vectoriel hermitien $\mathrm{E} \to \mathrm{M}$ a été entreprise dans les années cinquante par Lopatinsky et Shapiro, mais le principal outil fut découvert par Calderón dans les années soixante. Cet outil est appelé *projecteur de Calderón* et il est donné par

$$\mathcal{P}_+(P) : H^{\frac{1}{2}}(\mathrm{E}_{|\partial\mathrm{M}}) \longrightarrow \{\psi_{|\partial\mathrm{M}} \ / \ \psi \in \mathrm{H}^1(\mathrm{E}),\ \mathrm{P}\psi = 0\}. \tag{27}$$

C'est un opérateur différentiel d'ordre zéro dont le symbole principal

$$\sigma(\mathcal{P}_+(P)) : \mathrm{T}(\partial\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{E})$$

ne dépend que du symbole principal $\sigma(P)$ de l'opérateur P. Le principal intérêt de cet opérateur est que son symbole principal détecte l'ellipticité de conditions à bord. On rappelle qu'un opérateur différentiel

$$\mathbb{B} : \mathrm{L}^2(\mathrm{E}_{|\partial\mathrm{M}}) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathrm{V})$$

où $\mathrm{V} \to \partial\mathrm{M}$ est un fibré vectoriel complexe au dessus du bord $\partial\mathrm{M}$ est appelé une condition à bord elliptique (globale) lorsque son symbole principal

$$\sigma(\mathbb{B}) : \mathrm{T}(\partial\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}_{|\partial\mathrm{M}}, \mathrm{V})$$

satisfait pour tout $u \in \mathrm{T}(\partial\mathrm{M}) \setminus \{0\}$ et pour tout $p \in \partial\mathrm{M}$:

$$\sigma(\mathbb{B})(u)_{|\mathrm{Im}\ \sigma(P_+(P))(u)} : \mathrm{Im}\ \sigma(\mathcal{P}_+(P))(u) \subset \mathrm{E_p} \longrightarrow \mathrm{V_p}$$

est un isomorphisme sur l'image $\sigma(\mathbb{B})(u) \subset \mathrm{V}_p$. De plus, si le rang du fibré V est égal à la dimension de l'image de l'endomorphisme $\sigma(\mathcal{P}_+(P))(u)$, on dit que $\mathbb{B}$ est une condition à bord elliptique locale. Cette définition de l'ellipticité est souvent appelée *condition de*

Lopatinsky-Shapiro pour l'ellipticité.

On peut alors appliquer ce résultat lorsque l'opérateur différentiel considéré est l'opérateur de Dirac D et le fibré vectoriel hermitien E est le fibré des spineurs ΣM. Remarquons tout d'abord que contrairement au cas où la variété n'a pas de bord, l'opérateur de Dirac possède en général une image fermée dont la codimension est finie mais un noyau de dimension infinie. Afin de récupérer de bonnes propriétés, on se doit alors d'imposer des conditions sur la restriction au bord des champs de spineurs. Rappelons aussi que dans ce cas, la formule de Stokes permet de détecter un défaut de symétrie de l'opérateur de Dirac (contrairement au cas fermé). En effet, on a :

$$\int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{D}\psi, \varphi\rangle dv(g) - \int_{\mathrm{M}} \langle \psi, \mathrm{D}\varphi\rangle dv(g) = -\int_{\partial\mathrm{M}} \langle \gamma(\nu)\psi, \varphi\rangle ds(g), \tag{28}$$

pour tout $\psi, \varphi \in \Gamma(\Sigma\mathrm{M})$. En utilisant alors la définition de l'ellipticité pour une condition à bord, on la spécifie au cas de l'opérateur de Dirac. Un opérateur

$$\mathbb{B} : \mathrm{L}^2(\mathbf{S}(\partial\mathrm{M})) \longrightarrow \mathrm{L}^2(V),$$

où V est un fibré vectoriel hermitien au dessus de ∂M, est une condition à bord elliptique pour l'opérateur de Dirac fondamental D de M si et seulement si son symbole principal

$$\sigma(\mathbb{B}) : \mathrm{T}(\partial\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbf{S}(\partial\mathrm{M}), \mathrm{V})$$

satisfait les deux conditions suivantes :

(1) $\ker \sigma(\mathbb{B})(u) \cap \Big\{\eta \in \Sigma_p\mathrm{M} \;/\; i\gamma(\nu)\gamma(u)\eta = -|u|\eta\Big\} = \{0\}$

(2) $\dim \mathrm{Im}\, \sigma(\mathbb{B})(u) = \frac{1}{2}\dim(\Sigma_p\mathrm{M}) = 2^{[\frac{n}{2}]-1}$.

De plus, si le fibré V est de rang $\frac{1}{2}\dim(\Sigma_p\mathrm{M}) = 2^{[\frac{n}{2}]-1}$, on a une condition à bord locale. Lorsque ces conditions d'ellipticité sont satisfaites, le problème à bord de valeurs propres

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{D}\psi = \lambda\psi & \text{sur M} \\ \mathbb{B}(\psi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0 & \text{le long de } \partial\mathrm{M} \end{array}\right. \qquad (EBP)$$

possède un spectre discret et les sous-espaces propres associés sont de dimension finie, à moins que ce soit le plan complexe tout entier.

Ayant ainsi défini la notion d'ellipticité d'une condition à bord pour l'opérateur de Dirac fondamental, on va pouvoir en étudier plusieurs en suivant l'article [**HMR02**]. Dans les sections qui suivent, on rappelle brièvement les définitions des conditions à bord que l'on va utiliser, puis on montrera pour chacune que l'inégalité d'Hijazi, reliant le carré des valeurs propres de l'opérateur de Dirac fondamental de la variété ambiante M et la première valeur propre non nulle du laplacien conforme (sous une certaine condition à bord) peut être obtenue.

4.2. La condition CHI **associé à un opérateur de chiralité.** Ce type de condition à bord a déjà été utilisé dans différents contextes. En effet, on la retrouve par exemple dans [**Her98b**] où M. Herzlich s'en sert pour donner une démonstration d'un théorème de masse positive pour les trous noirs. On peut aussi noter l'article [**FS98**] de S. Farinelli et G. Schwarz dans lequel les auteurs montrent que cette condition définit une "bonne" condition à bord pour l'opérateur de Dirac en utilisant des techniques classiques d'analyse fonctionnelle. Dans [**HMZ01b**], O. Hijazi, S. Montiel et X. Zhang démontrent l'inégalité d'Hijazi pour cette condition à bord. Ici, on en redonne une preuve tout en raffinant le cas d'égalité et on obtient une inégalité analogue en dimension 2.

Redonnons maintenant une définition rigoureuse de cette condition à bord. On remarque tout d'abord que contrairement à d'autres, cette condition à bord n'existe pas toujours sur une variété riemannienne spinorielle. En effet, ce type de condition à bord recquiert l'existence sur la variété M d'une application linéaire

$$\Gamma : \Gamma(\Sigma\mathrm{M}) \longrightarrow \Gamma(\Sigma\mathrm{M}),$$

qui satisfait les relations suivantes :

$$\Gamma^2 = \mathrm{Id}, \quad \langle \Gamma\psi, \Gamma\varphi\rangle = \langle \psi, \varphi\rangle \tag{29}$$

$$\nabla_X(\Gamma\psi) = \Gamma(\nabla_X\psi), \quad \gamma(X)\Gamma(\psi) = -\Gamma(\gamma(X)\psi), \tag{30}$$

pour tout $X \in \Gamma(\mathrm{TM})$ et tout champ de spineurs $\psi, \varphi \in \Gamma(\Sigma\mathrm{M})$. Cet opérateur est appelé opérateur de chiralité puisque lorsque la dimension n de la variété M est paire, le candidat standard pour l'application Γ est donné par la multiplication de Clifford par l'élément de volume $\omega_n^{\mathbb{C}}$. Dans ce cas, Γ n'est rien d'autre que l'opérateur de conjugaison échangeant la décomposition chirale. Un autre cas important où ce type de condition existe toujours apparaît dans le cas d'une hypersurface de type espace d'une variété lorentzienne spinorielle. En effet, dans ce cas, on sait qu'il existe un vecteur T unitaire normal à l'hypersurface de type temps, et on peut alors vérifier que l'opérateur $\Gamma = \gamma(\mathrm{T})$ est un opérateur de chiralité. Supposons donc qu'il existe sur la variété M un tel opérateur. On considère l'endomorphisme

$$\gamma(\nu)\Gamma : \Gamma(\mathbf{S}(\partial\mathrm{M})) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{S}(\partial\mathrm{M})),$$

qui agit sur la restriction au bord du fibré des spineurs ambiant. Cet endomorphisme est auto-adjoint par rapport au produit hermitien sur $\mathbf{S}(\partial\mathrm{M})$ et il est clairement involutif. Le fibré $\mathbf{S}(\partial\mathrm{M})$ se décompose alors en sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1 de l'endomorphisme $\gamma(\nu)\Gamma$, qui sont isomorphes par l'application $\gamma(\nu)$. En suivant les notations de la section 4.1, on prend pour fibré $\mathrm{V} = \mathrm{V}^{\pm}$ le sous-fibré propre associé à la valeur propre ± 1 de l'endomorphisme $\gamma(\nu)\Gamma$. Il vérifie alors rang $(\mathrm{V}^{\pm}) = \frac{1}{2}\mathrm{rang}\,(\mathbf{S}(\partial\mathrm{M})) = 2^{[\frac{n}{2}]-1}$. On définit donc la condition à bord associée à un opérateur de chiralité par

$$\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{CHI}} = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} \pm \gamma(\nu)\Gamma),$$

qui est la projection orthogonale sur le sous-fibré propre $\mathrm{V}^{\pm}$. C'est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre zéro et son symbole principal $\sigma(\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{CHI}})(u)$, pour $u \in \mathrm{T}(\partial\mathrm{M})$, coïncide alors avec l'opérateur lui-même, c'est-à-dire qu'on a

$$\sigma(\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{CHI}})(u) = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} \pm \gamma(\nu)\Gamma),$$

et en particulier, $\dim\mathrm{Im}(\sigma(\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{CHI}})(u)) = \mathrm{rang}\,(\mathrm{V}^{\pm}) = 2^{[\frac{n}{2}]-1}$. Cet opérateur définit donc bien une condition à bord elliptique locale au sens de Lopatinsky-Shapiro. On est alors en mesure d'énoncer et de démontrer l'un des principaux résultats de ce chapitre :

THÉORÈME 1.2. *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension* $n \geq 3$, *à bord non vide* $\partial\mathrm{M}$ *et possédant un opérateur de chiralité* Γ. *Alors,* *sous la condition à bord* $\mathbb{B}^-_{\mathrm{CHI}}$*, le spectre de l'opérateur de Dirac fondamental de* M *est une suite non bornée de nombres réels* $\{\lambda_k^{\mathrm{CHI}}\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$ *satisfaisant l'inégalité*

$$\big(\lambda_k^{\mathrm{CHI}}\big)^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\mu_1(\mathrm{L}),$$

pour tout $k\in\mathbb{Z}$*. De plus, on a égalité si et seulement si* M *est conformément isométrique à l'hémisphère de rayon* $\frac{n}{|\lambda_{\pm1}^{\mathrm{CHI}}\,\mathrm{C}|}$*, où* C *est une constante que l'on déterminera.*

Preuve : Montrons tout d'abord que sous la condition CHI, le spectre de l'opérateur de Dirac D est réel. Soit donc $\psi,\varphi\in\Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ des champs de spineurs vérifiant $\mathbb{B}^-_{\mathrm{CHI}}(\psi)=\mathbb{B}^-_{\mathrm{CHI}}(\varphi)=0$. En utilisant ces conditions, on otient :

$$\langle\gamma(\nu)\psi,\varphi\rangle=\langle\Gamma(\gamma(\nu)\psi),\Gamma(\varphi)\rangle=-\langle\gamma(\nu)\psi,\varphi\rangle,$$

et alors le terme de bord dans la formule (28) est nul. Sous cette condition à bord, l'opérateur de Dirac fondamental de M est donc symétrique, et son spectre est alors constitué d'une suite non bornée de nombres réels $\{\lambda_k^{\mathrm{CHI}}\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$. Considérons maintenant un changement conforme de métrique, c'est-à-dire qu'on pose $\overline{g}=f^{\frac{4}{n-2}}g$ où f est une fonction lisse strictement positive sur M. Puisque la condition à bord est elliptique au sens de Loptinsky-Shapiro, il existe une solution lisse au problème

$$\begin{cases}\mathrm{D}\varphi=\lambda_k^{\mathrm{CHI}}\varphi & \text{sur M}\\ \mathbb{B}^-_{\mathrm{CHI}}(\varphi)=0 & \text{le long de }\partial\mathrm{M}.\end{cases}$$

En utilisant la covariance conforme de l'opérateur de Dirac, si on pose $\psi=f^{-\frac{n-1}{n-2}}\varphi\in\Gamma(\Sigma_g(\mathrm{M}))$, alors le champ $\mathrm{F}(\psi)\in\Gamma(\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M}))$ vérifie

$$\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{F}(\psi))=\lambda_k^{\mathrm{CHI}}f^{-\frac{2}{n-2}}\mathrm{F}(\psi).$$

En appliquant l'inégalité de Reilly spinorielle (14) dans la métrique $\overline{g}$ au champ de spineurs $\mathrm{F}(\psi)$, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{M}}\Big(\frac{1}{4}\overline{\mathrm{R}}\,|\mathrm{F}(\psi)|^2-\frac{n-1}{n}\ \ \big(\lambda_k^{\mathrm{CHI}}\big)^2\ \ f^{-\frac{4}{n-2}}|\mathrm{F}(\psi)|^2\Big)dv(\overline{g})\\ \leq\quad\int_{\partial\mathrm{M}}\Big(\langle\overline{\mathrm{D}}^{\mathbf{S}}(\mathrm{F}(\psi)),\mathrm{F}(\psi)\rangle-\frac{n-1}{2}\overline{\mathrm{H}}\,|\mathrm{F}(\psi)|^2\Big)ds(\overline{g}).\end{aligned}$$

En utilisant les relations (22), cette inégalité s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{M}}\Big(\frac{1}{4}(f^{-1}\mathrm{L}f)-\frac{n-1}{n}\ \ \big(\lambda_k^{\mathrm{CHI}}\big)^2\Big)\ \ f^{-\frac{4}{n-2}}|\mathrm{F}(\psi)|^2dv(\overline{g})\\ \leq\quad\int_{\partial\mathrm{M}}\Big(\langle\overline{\mathrm{D}}^{\mathbf{S}}(\mathrm{F}(\psi)),\mathrm{F}(\psi)\rangle-\frac{n-1}{2}(f^{-\frac{n}{n-2}}\mathrm{B}f)|\mathrm{F}(\psi)|^2\Big)ds(\overline{g}).\end{aligned}$$

On choisit maintenant le facteur conforme comme étant une fonction propre strictement positive f_1 du problème à bord (PVY) (voir la section 3) et on obtient :

$$\int_{\mathrm{M}}\Big(\frac{1}{4}\mu_1(\mathrm{L})-\frac{n-1}{n}\big(\lambda_k^{\mathrm{CHI}}\big)^2\Big)f_1^{-\frac{4}{n-2}}|\mathrm{F}(\psi)|^2dv(\overline{g})\leq\int_{\partial\mathrm{M}}\langle\overline{\mathrm{D}}^{\mathbf{S}}(\mathrm{F}(\psi)),\mathrm{F}(\psi)\rangle ds(\overline{g}).$$

Vérifions maintenant que le terme de bord est nul. Pour cela, on utilise la covariance conforme de l'opérateur de Dirac du bord $\overline{\mathrm{D}}^{\mathbf{S}}$. La relation (21) permet d'écrire :

$$\mathrm{F}^{-1}\Big(\overline{\mathrm{D}}^{\mathbf{S}}\big(\mathrm{F}(\psi)\big)\Big)=f_1^{-\frac{n}{n-2}}\mathrm{D}^{\mathbf{S}}\big(f_1^{-\frac{1}{n-2}}\varphi\big).$$

L'élément de volume du bord ∂M dans la métrique $\overline{g}$ étant donné par

$$ds(\overline{g}) = f_1^{\frac{2(n-1)}{n-2}} ds(g),$$

l'inégalité précédente s'écrit alors :

$$\int_{\mathrm{M}} \Big(\frac{1}{4}\mu_1(\mathrm{L}) - \frac{n-1}{n}\big(\lambda_k^{\mathrm{CHI}}\big)^2\Big) \quad f_1^{-\frac{4}{n-2}} \quad |\mathrm{F}(\psi)|^2 dv(\overline{g})$$
$$\leq \quad \int_{\partial\mathrm{M}} \langle \mathrm{D}^{\mathbf{S}}(f_1^{-\frac{1}{n-2}}\varphi), f_1^{-\frac{1}{n-2}}\varphi\rangle ds(g). \qquad (31)$$

On vérifie maintenant que le terme de bord est nul. Pour cela, on remarque que :

$$\mathrm{D}^{\mathbf{S}}(f_1^{-\frac{1}{n-2}}\varphi) = \gamma\big(d(f_1^{-\frac{1}{n-2}})\big)\varphi + f_1^{-\frac{1}{n-2}}\mathrm{D}^{\mathbf{S}}(\varphi),$$

et puisque la quantité $\langle\gamma\big(d(f_1^{-\frac{1}{n-2}})\big)\varphi,\varphi\rangle$ est imaginaire pure, l'inégalité (31) donne :

$$\int_{\mathrm{M}} \big(\frac{1}{4}\mu_1(\mathrm{L}) - \frac{n-1}{n}\big(\lambda_k^{\mathrm{CHI}}\big)^2\big) f_1^{-\frac{4}{n-2}}|\mathrm{F}(\psi)|^2 dv(\overline{g}) \leq \int_{\partial\mathrm{M}} f_1^{-\frac{2}{n-2}}\langle \mathrm{D}^{\mathbf{S}}\varphi,\varphi\rangle ds(g). \qquad (32)$$

Puisque le long du bord, le champ φ vérifie $\gamma(\nu)\Gamma(\varphi) = \varphi$, on a, en utilisant la propriété (13) :

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{D}^{\mathbf{S}}\varphi,\varphi\rangle &= \langle \Gamma(\mathrm{D}^{\mathbf{S}}\varphi),\Gamma\varphi\rangle \\ &= \langle \gamma(\nu)\mathrm{D}^{\mathbf{S}}(\Gamma\varphi),\gamma(\nu)\Gamma\varphi\rangle \\ &= -\langle \mathrm{D}^{\mathbf{S}}(\gamma(\nu)\Gamma\varphi),\gamma(\nu)\Gamma(\varphi)\rangle \\ &= -\langle \mathrm{D}^{\mathbf{S}}\varphi,\varphi\rangle, \end{aligned}$$

et on obtient donc que $\langle \mathrm{D}^{\mathbf{S}}\varphi,\varphi\rangle = 0$, ce qui permet de conclure que le terme de bord dans l'inégalité (32) est nul et on a donc bien montré que :

$$\big(\lambda_k^{\mathrm{CHI}}\big)^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\mu_1(\mathrm{L}).$$

Examinons maintenant le cas d'égalité. Dans [**HMZ01b**], les auteurs concluent que si le cas d'égalité est atteint, alors la variété M est à bord minimal et possède un spineur de Killing réel. Cependant, en suivant l'argument donné dans [**HMR02**], on peut raffiner ce cas d'égalité. En effet, si on suppose que l'égalité est atteinte, on a alors égalité dans l'inégalité de Reilly, ce qui implique que le champ de spineurs $\mathrm{F}(\psi) \in \Gamma(\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M}))$ est un champ de spineurs-twisteurs et il vérifie, en plus, l'équation

$$\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{F}(\psi)) = \lambda^{\mathrm{CHI}} f_1^{-\frac{2}{n-2}}\mathrm{F}(\psi),$$

où λ^{CHI} est la première valeur propre de l'opérateur de Dirac D sous la condition à bord CHI. Le champ $\mathrm{F}(\psi) \in \Gamma(\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M}))$ est donc solution de l'équation de Killing généralisée :

$$\overline{\nabla}_X\mathrm{F}(\psi) + \frac{\lambda^{\mathrm{CHI}}}{n} f_1^{-\frac{2}{n-2}}\overline{\gamma}(X)\mathrm{F}(\psi) = 0,$$

pour tout $X \in \Gamma(\mathrm{TM})$. Dans ce cas, comme la fonction f_1 est à valeurs réelles, elle est forcément constante (voir [**Hij86**]). Le champ ψ est donc un spineur de Killing réel dont la constante de Killing est donnée par $\frac{c}{2} = \frac{\lambda^{\mathrm{CHI}}}{n}$ (il est clair que puisque f_1 est constante, le champ $\varphi = f_1^{\frac{n-1}{n-2}}\psi$ est lui aussi un champ de Killing de même constante), c'est-à-dire qu'il vérifie l'équation de Killing

$$\nabla_X\varphi + \frac{c}{2}\gamma(X)\varphi = 0, \tag{33}$$

pour tout $X \in \Gamma(\mathrm{TM})$. Dans ce cas, la variété (M, g) est d'Einstein et sa courbure de Ricci est donnée par $\mathrm{Ric} = (n-1)c^2 g$. On montre maintenant que (M, g) est isométrique à l'hémisphère $\mathbb{S}^n_+$ muni de sa métrique canonique. Pour cela, on définit la fonction $v = \langle\Gamma(\varphi), \varphi\rangle$. Il est clair que v est définie sur M tout entier puisque l'opérateur de chiralité Γ est (par définition) défini sur M. Cette fonction est à valeurs réelles puisque l'on a :

$$\mathrm{Conj}\ (v) = \langle\varphi, \Gamma(\varphi)\rangle = \langle\Gamma(\varphi), \varphi\rangle = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}(v) = 0,$$

où Conj (v) est le conjugué complexe de la fonction v et $\mathrm{Im}(v)$ est sa partie imaginaire. On peut ainsi montrer que $v \neq 0$ et $\lambda^{\mathrm{CHI}} \neq 0$. En effet, une intégration par partie donne :

$$\int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{D}\varphi, \phi\rangle dv(g) - \int_{\mathrm{M}} \langle\varphi, \mathrm{D}\phi\rangle dv(g) = -\int_{\partial\mathrm{M}} (\gamma(\nu)\varphi, \phi\rangle ds(g),$$

pour tout $\phi \in \Gamma(\Sigma_g(\mathrm{M}))$. Prenons $\phi = \Gamma\varphi$. L'expression précédente donne alors :

$$2\lambda^{\mathrm{CHI}} \int_{\mathrm{M}} v\, dv(g) = \int_{\partial\mathrm{M}} |\varphi|^2 ds(g) \quad \Rightarrow \quad \lambda^{\mathrm{CHI}} \neq 0 \ \text{ et } \ v \neq 0,$$

car la restriction au bord du champ de spineurs φ ne peut pas être nulle (puisque c'est un spineur de Killing réel sa norme est constante non nulle) et $c > 0$. La fonction v est donc à valeurs réelles et non identiquement nulle. En utilisant l'équation de Killing (33), on montre alors que le hessien de v vérifie satisfait $\nabla^2 v = -c^2 v\, g$, ce qui en traçant, s'écrit $\Delta v = nc^2 v$. Vérifions maintenant que la restriction au bord de la fonction v est identiquement nulle. En effet, on a

$$v_{|\partial\mathrm{M}} = \langle\Gamma(\varphi), \varphi\rangle = \langle\gamma(\nu)\Gamma(\varphi), \gamma(\nu)\varphi\rangle = \langle\varphi, \gamma(\nu)\varphi\rangle.$$

Or le dernier terme est imaginaire pur et puisque la fonction est à valeurs réelles, on a $v_{|\partial\mathrm{M}} = 0$. On a donc construit une fonction v qui vérifie le problème à bord

$$\begin{cases} \Delta v = nc^2 v & \text{sur M} \\ v_{|\partial\mathrm{M}} = 0 & \text{le long de } \partial\mathrm{M}. \end{cases}$$

Le théorème d'Obata pour les variétés riemanniennes compactes à bord (voir [**Rei77**]) permet donc de conclure que (M, g) est isométrique à l'hémisphère de rayon $\frac{1}{c}$. $\square$

Il est clair que la démonstration précédente ne s'applique pas dans le cas où la dimension de la variété M est $n = 2$. Cependant, on peut donner une minoration analogue à celle démontrée par C. Bär [**Bär92**] (voir aussi [**Hij91**]) pour des surfaces compactes fermées. En effet, on a :

THÉORÈME 1.3. *Soit* (M^2, g) *une surface riemannienne compacte à bord non vide. Sous la condition à bord* $\mathbb{B}^-_{\mathrm{CHI}}$*, le spectre de l'opérateur de Dirac* D *de* M *est une suite non bornée de nombres réels* $\{\lambda_k^{\mathrm{CHI}} \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$ *qui satisfait*

$$\left(\lambda_k^{\mathrm{CHI}}\right)^2 \geq \frac{2\pi\chi(\mathrm{M}^2)}{\mathrm{Aire}(\mathrm{M}^2, g)}, \tag{34}$$

où $\chi(\mathrm{M}^2)$ *est la caractéristique d'Euler-Poincaré de* M^2*. De plus, l'égalité est atteinte pour la première valeur propre pour l'hémisphère ronde.*

Preuve : Tout d'abord, on remarque que puisque l'on est en dimension 2, il existe sur M une structure spinorielle ainsi qu'un opérateur de chiralité donné par l'élément de volume complexe. De plus, par un raisonnement analogue à celui donné dans la preuve du théorème précédent, on montre facilement que le spectre de l'opérateur de Dirac est bien une suite non bornée de nombres réels. On vérifie alors que sous cette condition à bord, toute valeur propre λ_k^{CHI} de l'opérateur de Dirac satisfait

$$\Big(\lambda_k^{\mathrm{CHI}}\Big)^2 \geq \frac{1}{2}\sup_u \inf_{\mathrm{M}}(\overline{\mathrm{R}}\, e^{2u}), \tag{35}$$

où le supremum est pris sur toutes les fonctions u qui satisfont $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \mathrm{H} = 0$, où $\overline{\mathrm{H}}$ est la courbure géodésique de $\partial\mathrm{M}$ dans M et $\overline{\mathrm{R}}$ est la courbure scalaire de M dans la métrique $\overline{g}$ conforme à g donnée par $\overline{g} = e^{2u}g$. Si $\overline{g}$ est une métrique conforme définie comme précédemment, les opérateurs de Dirac D et $\overline{\mathrm{D}}$ associés aux fibrés des spineurs $\Sigma_g(\mathrm{M})$ et $\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M})$ sont reliés par l'identité

$$\mathrm{F}^{-1}\Big(\overline{\mathrm{D}}\big(\mathrm{F}(\psi)\big)\Big) = e^{-\frac{3}{2}u}\mathrm{D}\big(e^{\frac{1}{2}u}\psi\big),$$

pour tout $\psi \in \Gamma(\Sigma_g(\mathrm{M}))$. En utilisant alors le même raisonnement que dans la preuve du théorème précédent, l'inégalité de Reilly que l'on écrit dans la métrique $\overline{g}$ (où $\overline{\mathrm{H}} = 0$, car le facteur conforme u vérifie $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \mathrm{H} = 0$) donne

$$\int_{\mathrm{M}} \Big(\frac{\overline{\mathrm{R}}}{4}e^{2u} - \frac{(\lambda_k^{\mathrm{CHI}})^2}{2}\Big)e^{-2u}|\mathrm{F}(\varphi)|^2 dv(\overline{g}) \leq \int_{\partial\mathrm{M}} \langle \overline{\mathrm{D}}^{\mathbf{S}}(\mathrm{F}(\varphi)), \mathrm{F}(\varphi)\rangle ds(\overline{g}), \tag{36}$$

où $\varphi = e^{-\frac{1}{2}u}\psi$ et $\psi \in \Gamma(\Sigma_g(\mathrm{M}))$ satisfait le problème à bord

$$\begin{cases} \mathrm{D}\psi = \lambda_k^{\mathrm{CHI}}\psi & \text{sur } M \\ \mathbb{B}^-_{\mathrm{CHI}}(\varphi) = 0 & \text{le long de } \partial\mathrm{M}. \end{cases}$$

On conclut de la même manière que dans le théorème précédent pour montrer que le terme de bord dans l'inégalité (36) est nul. L'inégalité (35) s'obtient alors immédiatement. On montre maintenant que le terme de droite de l'inégalité (35) est atteint et on le calcule explicitement. Pour cela, on remarque tout d'abord que, pour $n = 2$, si $\overline{g} = e^{2u}g$ est une métrique conforme à g, les courbures scalaires et géodésiques sont reliées par les identités suivantes :

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{R}}\, e^{2u} & = & \mathrm{R} + 2\Delta u \\ \overline{\mathrm{H}}\, e^{u} & = & \mathrm{H} + \frac{\partial u}{\partial \nu}. \end{cases}$$

Or, par hypothèse sur la fonction u, on obtient $\overline{\mathrm{H}} = 0$. Soit donc u une telle fonction, on a :

$$\begin{aligned} \inf_{\mathrm{M}}(\overline{\mathrm{R}}\, e^{2u}) &\leq \frac{1}{\mathrm{Aire}(\mathrm{M}^2, g)}\Big(\int_{\mathrm{M}} \overline{\mathrm{R}}\, e^{2u} dv(\mathrm{g}) + 2\int_{\partial\mathrm{M}} \overline{\mathrm{H}} ds(g)\Big) \\ &\leq \frac{1}{\mathrm{Aire}(\mathrm{M}^2, g)}\Big(\int_{\mathrm{M}} \mathrm{R}\, e^{2u} dv(g) + 2\int_{\partial\mathrm{M}} \mathrm{H} ds(g)\Big) = \frac{4\pi\chi(\mathrm{M}^2)}{\mathrm{Aire}(\mathrm{M}^2, \mathrm{g})}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule de Stokes et la formule de Gauss-Bonnet pour les surfaces à bord (voir [**Car91**]). Considérons alors le problème à bord suivant

$$\begin{cases} 2\Delta f = \frac{1}{\mathrm{Aire}(\mathrm{M}^2,\mathrm{g})}\Big(\int_{\mathrm{M}} \mathrm{R}dv(g) + 2\int_{\partial\mathrm{M}} \mathrm{H}ds(g)\Big) - \mathrm{R} & \text{sur M} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \mathrm{H} = 0 & \text{le long de } \partial\mathrm{M} \end{cases}$$

qui possède une solution u_1 unique à une constante additive près (on pourra consulter [**Tay96**] pour une résolution complète de ce type de problème). Un calcul direct donne :

$$\inf_{\mathrm{M}}(\overline{\mathrm{R}}\, e^{2u_1}) = \frac{4\pi\chi(\mathrm{M}^2)}{\mathrm{Aire}(\mathrm{M}^2, g)},$$

et on obtient bien l'inégalité annoncée. Le cas d'égalité se traite de la même manière que celui du théorème précédent. □

Ce résultat permet de relier le spectre de l'opérateur de Dirac fondamental de la variété M avec l'invariant de Yamabe. En effet, on a :

COROLLAIRE 1.1. *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension* $n \geq 3$ *dont le bord lisse est non vide et possédant un opérateur de chiralité* Γ. *Sous la condition à bord* $\mathbb{B}^-_{\mathrm{CHI}}$, *toute valeur propre* λ^{CHI} *de l'opérateur de Dirac sur* (M, g) *satisfait l'inégalité*

$$\big(\lambda^{\mathrm{CHI}}\big)^2 \mathrm{vol}(\mathrm{M}, g)^{\frac{2}{n}} \geq \frac{n}{4(n-1)}\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}), \qquad (37)$$

où $\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ *est l'invariant de Yamabe de la variété* M.

Preuve : Pour $n \geq 3$, on remarque, en utilisant l'inégalité de Hölder, que pour tout $u \in \mathrm{C}^1(\mathrm{M})$ on a :

$$\int_{\mathrm{M}} u^2 dv(g) \leq \Big(\int_{\mathrm{M}} u^{\frac{2n}{n-2}} dv(g)\Big)^{\frac{n-2}{n}} \mathrm{vol}(\mathrm{M}, g)^{\frac{2}{n}}$$

et en utilisant les caractérisations variationnelles (25) de $\mu(\mathrm{M})$ et (26) de $\mu_1(\mathrm{L})$, on obtient

$$\mu_1(\mathrm{L}) \geq \mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})\mathrm{vol}(\mathrm{M}, g)^{-\frac{2}{n}}.$$

Le Théorème 1.2 permet de conclure. □

REMARQUE 1.3. On peut vérifier que tous les résultats précédents sont aussi valables pour la condition à bord $\mathbb{B}^+_{\mathrm{CHI}}$.

4.3. La condition MIT**.** Passons maintenant à l'étude de la condition MIT. Cette condition à bord a été introduite dans les années soixante-dix par des physiciens du Massachusetts Institute of Technology afin de donner un modèle pour des particules élémentaires situées dans une région finie de l'espace (voir [**CJJ**$^+$**74**], [**CJJT74**] ou [**Joh75**]). Cette condition sera appelée “MIT bag model”. Il paraît naturel que cette condition initialement construite dans le cadre lorentzien ait un analogue dans le cas riemannien. Cette analogie a été établie par O. Hijazi, S. Montiel et A. Roldán dans leur article [**HMR02**]. On suivra donc la définition qu'ils en ont donné pour le cas qui nous intéresse ici. On peut noter que, outre l'aspect physique intéressant de cette condition à bord, son intérêt mathématique l'est lui aussi. En effet, dans [**HMZ02**], les auteurs utilisent la covariance conforme de cette condition pour donner une minoration conforme de la première valeur propre non nulle de l'opérateur de Dirac d'une variété riemannienne compacte de dimension n vue comme le bord d'un domaine d'une variété riemannienne spinorielle de dimension $n+1$.

Décrivons maintenant cette condition de manière plus rigoureuse. Considérons donc l'endomorphisme

$$i\gamma(\nu) : \Gamma(\mathbf{S}(\partial \mathrm{M})) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{S}(\partial \mathrm{M}))$$

agissant sur les sections du fibré des spineurs d'une variété riemannienne spinorielle compacte M restreint à son bord ∂M. Cet endomorphisme étant clairement involutif, le fibré $\mathbf{S}(\partial \mathrm{M})$ se décompose en une somme directe de deux sous-fibrés propres associés aux valeurs propres 1 et -1 (qui ont même multiplicité). De la même manière que dans le cas de la condition CHI, on va noter $\mathrm{V}^{\pm} \longrightarrow \partial \mathrm{M}$ le sous-fibré propre associé à la valeur propre ± 1 au-dessus de ∂M, et on a donc encore

$$\mathrm{rang}\, \mathrm{V}^{\pm} = \frac{1}{2} \mathrm{rang}\, \mathbf{S}(\partial \mathrm{M}) = 2^{[\frac{n}{2}]-1}.$$

La condition à bord $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}$ est donc définie comme étant la projection orthogonale sur $\mathrm{V}^{\pm}$ donnée par :

$$\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{MIT}} = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} \pm i\gamma(\nu)).$$

On peut alors vérifier que cet opérateur définit bien une condition à bord elliptique pour l'opérateur de Dirac fondamental de la variété M. Pour cela, il suffit de calculer le symbole principal de $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}$. L'opérateur $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}$ étant un opérateur pseudo-différentiel d'ordre zéro, son symbole principal est donné par l'opérateur lui-même, c'est-à-dire

$$\sigma(\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{MIT}})(u) = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} \pm i\gamma(\nu)),$$

pour tout $u \in \mathrm{T}(\partial \mathrm{M})$. On peut alors vérifier que l'opérateur $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}$ satisfait les conditions d'ellipticité au sens de Lopatinsky-Shapiro, et il définit donc bien une condition à bord elliptique locale pour D. On est en mesure de démontrer l'inégalité d'Hijazi pour cette condition.

Théorème 1.4. *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension* $n \geq 3$ *dont le bord* ∂M *est non vide. Sous la condition* $\mathbb{B}^{-}_{\mathrm{MIT}}$*, le spectre de l'opérateur de Dirac fondamental de* M *est un ensemble* $\{\lambda_k^{\mathrm{MIT}} \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$ *discret non borné de nombres complexes dont la partie imaginaire est positive qui satisfont*

$$|\lambda_k^{\mathrm{MIT}}|^2 > \frac{n}{4(n-1)} \mu_1(\mathrm{L}).$$

Preuve : Montrons tout d'abord que le spectre de l'opérateur D est bien comme décrit dans l'énoncé du théorème. Soit donc $\varphi \in \Gamma(\Sigma \mathrm{M})$ un champ de spineurs propre pour l'opérateur de Dirac sous la condition à bord MIT, c'est-à-dire

$$\mathrm{D}\varphi = \lambda^{\mathrm{MIT}} \varphi \quad \text{et} \quad \mathbb{B}^{-}_{\mathrm{MIT}}(\varphi) = 0.$$

En utilisant alors la formule de d'intégration par partie (28) sur le champ φ, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{M}}\langle \mathrm{D}\varphi,\varphi\rangle dv(g)-\int_{\mathrm{M}}\langle\varphi,\mathrm{D}\varphi\rangle dv(g) &= 2i\,\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}})\int_{\mathrm{M}}|\varphi|^2dv(g)\\ &= i\int_{\partial\mathrm{M}}|\varphi|^2ds(g), \qquad (38)\end{aligned}$$

c'est-à-dire $2\,\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}})\int_{\mathrm{M}}|\varphi|^2dv(g)=\int_{\partial\mathrm{M}}|\varphi|^2ds(g)$. Si $\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}})=0$, alors la restriction au bord du champ de spineurs φ est identiquement nulle, et donc par le principe de prolongement analytique (voir [**BBW93**]), le spineur φ est nul sur toute la variété M, ce qui est impossible car un spineur propre est par définition non trivial. On a alors $\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}})>0$ et le spectre de D est donc une suite de nombres complexes non bornée dont la partie imaginaire est strictement positive. Passons alors à la démonstration de l'inégalité désirée. Pour cela, on raisonne de la même manière que pour le Théorème 1.2. Par ellipticité de la condition à bord $\mathbb{B}^-_{\mathrm{MIT}}$, on sait qu'il existe un champ de spineurs $\varphi\in\Gamma(\Sigma_g(\mathrm{M}))$ vérifiant le problème à bord

$$\begin{cases}\mathrm{D}\varphi=\lambda_k^{\mathrm{MIT}}\varphi & \text{sur M}\\ \mathbb{B}^-_{\mathrm{MIT}}(\varphi)=0 & \text{le long de }\partial\mathrm{M}.\end{cases}$$

Si on pose $\psi=f^{-\frac{n-1}{n-2}}\varphi$, la covariance conforme de l'opérateur de Dirac D et de l'opérateur $\mathbb{B}^-_{\mathrm{MIT}}$ (qui se vérifie simplement en utilisant les relations (16)) permettent d'écrire dans la métrique $\overline{g}=f^{\frac{4}{n-2}}g$ que le champ de spineurs $\mathrm{F}(\psi)\in\Gamma\big(\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M})\big)$ satisfait le problème à bord :

$$\begin{cases}\overline{\mathrm{D}}\big(\mathrm{F}(\psi)\big)=\lambda_k^{\mathrm{MIT}}f^{-\frac{2}{n-2}}\mathrm{F}(\psi) & \text{sur M}\\ \overline{\mathbb{B}}^-_{\mathrm{MIT}}(\mathrm{F}(\psi))=0 & \text{le long de }\partial\mathrm{M}.\end{cases}$$

L'inégalité de Reilly appliquée au champ de spineurs $\mathrm{F}(\psi)\in\Gamma(\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M}))$ dans la métrique $\overline{g}$ donne :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{M}}\Big(\frac{1}{4}\overline{\mathrm{R}}|\mathrm{F}(\psi)|^2-\frac{n-1}{n}\quad|\lambda_k^{\mathrm{MIT}}|^2\quad f^{-\frac{4}{n-2}}|\mathrm{F}(\psi)|^2\Big)dv(\overline{g})\\ &\qquad\leq\quad\int_{\partial\mathrm{M}}\Big(\langle\overline{\mathrm{D}}^{\mathbf{S}}(\mathrm{F}(\psi)),\mathrm{F}(\psi)\rangle-\frac{n-1}{2}\overline{\mathrm{H}}|\mathrm{F}(\psi)|^2\Big)ds(\overline{g}).\end{aligned}$$

On choisit maintenant $f_1>0$ une fonction propre du laplacien conforme (solution du problème à bord (PVY) de la section 3) comme facteur conforme, et ainsi dans la métrique $\overline{g}$, la courbure scalaire de la variété M est de signe constant et la courbure moyenne du bord est nulle. On a donc :

$$\int_{\mathrm{M}}\Big(\frac{1}{4}\mu_1(\mathrm{L})-\frac{n-1}{n}|\lambda_k^{\mathrm{MIT}}|^2\Big)f_1^{-\frac{4}{n-2}}|\mathrm{F}(\psi)|^2dv(\overline{g})\leq\int_{\partial\mathrm{M}}\langle\overline{\mathrm{D}}^{\mathbf{S}}(\mathrm{F}(\psi)),\mathrm{F}(\psi)\rangle ds(\overline{g}).$$

On montre maintenant que le terme de bord dans l'inégalité précédente est nul. Pour cela, on remarque que :

$$\langle\overline{\mathrm{D}}^{\mathbf{S}}(\mathrm{F}(\psi),\mathrm{F}(\psi)\rangle=\langle i\overline{\gamma}(\overline{\nu})\overline{\mathrm{D}}^{\mathbf{S}}(\mathrm{F}(\psi)),i\overline{\gamma}(\overline{\nu})\mathrm{F}(\psi)\rangle=-\langle\overline{\mathrm{D}}^{\mathbf{S}}(\mathrm{F}(\psi)),\mathrm{F}(\psi)\rangle,$$

et donc $\langle\overline{\mathrm{D}}^{\mathbf{S}}(\mathrm{F}(\psi)),\mathrm{F}(\psi)\rangle=0$. Cela permet d'obtenir pour tout $k\in\mathbb{Z}$:

$$|\lambda_k^{\mathrm{MIT}}|^2\geq\frac{n}{4(n-1)}\mu_1(\mathrm{L}).$$

Reste à vérifier que le cas d'égalité ne peut pas être atteint. Supposons donc qu'il le soit. On remarque tout d'abord que puisque la partie imaginaire d'une valeur propre λ^{MIT} est strictement positive, la première valeur propre du laplacien conforme est elle-aussi strictement positive, c'est-à-dire $\mu_1(\mathrm{L}) > 0$. De plus, puisque l'on est dans le cas d'égalité et que le champ de spineurs $\mathrm{F}(\psi) \in \Gamma(\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M}))$ satisfait le problème à bord précédemment donné, il vérifie alors l'équation

$$\overline{\mathrm{P}}\big(\mathrm{F}(\psi)\big) = \overline{\nabla}_X \mathrm{F}(\psi) + \frac{\lambda^{\mathrm{MIT}}}{n} f_1^{-\frac{2}{n-2}} \overline{\gamma}(X)\mathrm{F}(\psi) = 0,$$

pour tout $X \in \Gamma(\mathrm{TM})$. De plus, on a $|\lambda^{\mathrm{MIT}}|^2 = \frac{n}{4(n-1)}\mu_1(\mathrm{L})$, donc $\mathrm{F}(\psi)$ est un champ de spineurs de Killing généralisé dont la fonction de Killing est donnée par $u = \lambda^{\mathrm{MIT}} f_1^{-\frac{2}{n-2}}$. Or puisque toute valeur propre de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord MIT est à partie imaginaire strictement positive, la fonction u possède une partie imaginaire non nulle. Cependant, c'est un résultat classique que u est alors imaginaire pure (voir [**BFGK90**]), c'est-à-dire que $\mathrm{Re}(u) = 0$. En utilisant l'équation vérifiée par le champ de spineurs $\mathrm{F}(\psi)$, on calcule facilement que dans la métrique $\overline{g}$, la courbure scalaire est donnée par

$$\overline{\mathrm{R}} = \frac{4(n-1)}{n} u^2 \leq 0,$$

puisque u est imaginaire pure, ce qui contredit le fait que $\mu_1(\mathrm{L}) > 0$. Le cas d'égalité n'est donc jamais atteint dans cette situation. □

Un raisonnement analogue au Théorème 1.3 donne le cas où la dimension n est égale à 2. On a en effet :

THÉORÈME 1.5. *Soit* (M^2, g) *une surface riemannienne compacte à bord non vide. Sous la condition à bord* $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}$*, le spectre de l'opérateur de Dirac* D *de* M *est une suite non bornée de nombres complexes à partie imaginaire strictement positive* $\{\lambda_k^{\mathrm{MIT}} \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$ *qui satisfait*

$$\left(\lambda_k^{\mathrm{MIT}}\right)^2 > \frac{2\pi\chi(\mathrm{M}^2)}{\mathrm{Aire}(\mathrm{M}^2, g)}, \tag{39}$$

où $\chi(\mathrm{M}^2)$ *est la caractéristique d'Euler-Poincaré de* M^2.

On peut alors de la même manière que pour la condition CHI relier le spectre de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord MIT à l'invariant de Yamabe de la variété M. En effet, on a :

COROLLAIRE 1.2. *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension* $n \geq 3$ *dont le bord est non vide. Sous la condition à bord* $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}$*, toute valeur propre* λ^{MIT} *de l'opérateur de Dirac sur* (M, g) *satisfait l'inégalité*

$$|\lambda^{\mathrm{MIT}}|^2 \mathrm{vol}(\mathrm{M}, g)^{\frac{2}{n}} > \frac{n}{4(n-1)} \mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}), \tag{40}$$

où $\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ *est l'invariant de Yamabe de la variété ambiante.*

5. Minoration du spectre de l'opérateur de Dirac pour la condition MIT

Pour finir ce chapitre, on donne une minoration des valeurs propres de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord MIT dans la cas classique. En effet, dans [**HMR02**], les auteurs montrent une inégalité du type Friedrich dans lequel le cas d'égalité n'est jamais atteint. Plus précisément, ils montrent que si Ω est un domaine compact d'une variété riemannienne spinorielle et si en plus le bord de Ω est à courbure moyenne positive alors toute valeur propre λ^{MIT} de l'opèrateur de Dirac sous la condition à bord MIT satisfait

$$\left(\lambda^{\mathrm{MIT}}\right)^2 > \frac{n}{4(n-1)}\inf_{\mathrm{M}} \mathrm{R}. \tag{41}$$

La question naturelle que l'on peut se poser est de savoir si on peut premièrement améliorer cette inégalité et deuxièmement si il existe alors des variétés satisfaisant le cas limite. On montre tout d'abord qu'on peut en effet raffiner l'inégalité (41) et on discutera ensuite le deuxième point mentionné ci-dessus. Plus précisément, on prouve :

Théorème 1.6. *Soit Ω un domaine compact d'une variété riemannienne spinorielle compacte dont le bord $\partial\Omega$ satisfait la condition $\mathrm{H} > 0$. Alors sous la condition à bord $\mathbb{B}^-_{\mathrm{MIT}}$, toute valeur propre λ^{MIT} satisfait*

$$|\lambda^{\mathrm{MIT}}|^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\inf_{\Omega}(\mathrm{R}) + n\,\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}})\inf_{\partial\Omega}(\mathrm{H}). \tag{42}$$

De plus, on a égalité si et seulement si le domaine Ω possède un spineur de Killing imaginaire pur et si le bord $\partial\Omega$ est une hypersurface totalement ombilique à courbure moyenne constante.

La technique employée ici est classique, dans le sens où elle est basée sur une modification de la connexion de Levi-Civita spinorielle du type de celle utilisée par Friedrich dans [**Fri80**]. À partir de cette connexion modifiée, on pourra alors donner une inégalité spinorielle de type Reilly que l'on peut voir comme l'analogue de (14) dans le cas hyperbolique. On pourra la comparer à celle donner dans [**HMR03**]. À partir de cette formule, on obtiendra le résultat énoncé précédemment.

Dans cette partie, on considère un domaine compact Ω d'une variété riemannienne spinorielle et on note $\partial\Omega$ le bord de Ω. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la connexion modifiée

$$\nabla^{\alpha}_X\varphi := \nabla_X\varphi + i\alpha\gamma(X)\varphi, \tag{43}$$

pour tout $\varphi \in \Gamma(\Sigma\Omega)$, où $\Sigma\Omega$ est le fibré des spineurs complexes de Ω. On est maintenant en mesure de donner une version intégrale de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz faisant intervenir la connexion ∇^{α}. En effet, on a :

Proposition 1.1. *Pour tout $\varphi \in \Gamma(\Sigma\Omega)$, on a :*

$$\langle(\nabla^{\alpha})^*\nabla^{\alpha}\varphi,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} = \langle \mathrm{D}^2\varphi,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} - \langle\frac{\mathrm{R}}{4}\varphi,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} + n\alpha^2||\varphi||^2_{\mathrm{L}^2} - \int_{\partial\Omega}\langle\nabla^{\alpha}_{\nu}\varphi,\varphi\rangle ds(g), \tag{44}$$

où $(\nabla^{\alpha})^*$ est l'adjoint formel de ∇^{α} et R est la courbure scalaire du domaine Ω.

Preuve : On remarque tout d'abord que l'adjoint formel de la connexion ∇^{α} pour le produit scalaire L^2 est par définition donné par

$$\langle(\nabla^{\alpha})^*\nabla^{\alpha}\varphi,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} = ||\nabla^{\alpha}\varphi||^2_{\mathrm{L}^2} = \sum_{j=1}^n\int_{\Omega}\langle\nabla^{\alpha}_{e_j}\varphi,\nabla^{\alpha}_{e_j}\varphi\rangle dv(g),$$

pour tout $\varphi \in \Gamma(\Sigma\Omega)$ et où $\{e_1, ..., e_n\}$ est un repère orthonormé local de $\mathrm{T}\Omega$. Un calcul direct permet d'obtenir

$$\sum_{j=1}^{n} \langle \nabla^{\alpha}_{e_j}\varphi, \nabla^{\alpha}_{e_j}\varphi\rangle = \sum_{j=1}^{n} \Big(e_j\langle \nabla^{\alpha}_{e_j}\varphi, \varphi\rangle - \langle \nabla^{-\alpha}_{e_j}\nabla^{\alpha}_{e_j}\varphi, \varphi\rangle \Big).$$

La formule de Stokes donne :

$$\langle (\nabla^{\alpha})^{*}\nabla^{\alpha}\varphi, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} = \langle -\sum_{j=1}^{n} \nabla^{-\alpha}_{e_j}\nabla^{\alpha}_{e_j}\varphi, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} - \int_{\partial\Omega} \langle \nabla^{\alpha}_{\nu}\varphi, \varphi\rangle ds(g).$$

où ν est le champ de vecteurs unitaire normal sortant à $\partial\mathrm{M}$. On calcule facilement

$$\begin{aligned} \langle -\sum_{j=1}^{n} \nabla^{-\alpha}_{e_j}\nabla^{\alpha}_{e_j}\varphi, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} &= \langle -\sum_{j=1}^{n} \nabla_{e_j}\nabla_{e_j}\varphi, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} + n\alpha^2||\varphi||^2_{\mathrm{L}^2} \\ &= \langle \nabla^{*}\nabla\varphi, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} + n\alpha^2||\varphi||^2_{\mathrm{L}^2}, \end{aligned}$$

et on peut donc conclure en utilisant la formule de Schrödinger-Lichnerowicz. □

Cette formule est une première étape pour obtenir l'inégalité désirée. Cependant, on doit définir l'opérateur de Dirac et l'opérateur de twisteur associés à la connexion ∇^{α}. L'opérateur de Dirac modifié est localement défini par

$$\mathrm{D}^{\alpha}\varphi = \sum_{j=1}^{n} \gamma(e_j)\nabla^{\alpha}_{e_j}\varphi,$$

et l'opérateur de twisteur associé

$$\mathrm{P}^{\alpha}_{X}\varphi = \nabla^{\alpha}_{X}\varphi + \frac{1}{n}\gamma(X)\mathrm{D}^{\alpha}\varphi,$$

pour tout $X \in \Gamma(\mathrm{T}\Omega)$ et $\varphi \in \Gamma(\Sigma\Omega)$. Remarquons que pour $\alpha = 0$, les opérateurs P^0 et D^0 sont les opérateurs de Dirac et de twisteur classiques. On vérifie sans aucune difficulté que :

$$|\nabla^{\alpha}\varphi|^2 = |\mathrm{P}^{\alpha}\varphi|^2 + \frac{1}{n}|\mathrm{D}^{\alpha}\varphi|^2. \tag{45}$$

On peut maintenant donner la version hyperbolique annoncée de la formule de Reilly spinorielle. Plus précisément, on montre :

Proposition 1.2. *Pour tout champ de spineurs $\varphi \in \Gamma(\Sigma\Omega)$, on a :*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |P^{\alpha}\varphi|^2 dv(g) &= \int_{\Omega} \Big(\frac{n-1}{n}|\mathrm{D}^{\alpha}\varphi| - (\frac{\mathrm{R}}{4} - n(n-1)\alpha^2)|\varphi|^2 \Big) dv(g) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \langle \mathrm{D}^{\mathbf{S}}\varphi + \frac{n-1}{2}(2\alpha\, i\gamma(\nu)\varphi - \mathrm{H}\varphi), \varphi\rangle ds(g), \end{aligned} \tag{46}$$

où H *est la courbure moyenne du bord $\partial\Omega$ dans Ω.*

Preuve : Remarquons tout d'abord que pour $\varphi \in \Gamma(\Sigma\Omega)$, on a :

$$\mathrm{D}^2\varphi = \mathrm{D}^{-\alpha}\mathrm{D}^{\alpha}\varphi - n^2\alpha^2\varphi,$$

et donc, si on utilise cette identité dans la formule (44), on obtient :

$$\langle(\nabla^\alpha)^*\nabla^\alpha\varphi,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^2}=\langle\mathrm{D}^{-\alpha}\mathrm{D}^\alpha\varphi,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^2}-\langle\frac{\mathrm{R}}{4}\varphi,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^2}-n(n-1)\alpha^2||\varphi||^2_{\mathrm{L}^2}-\int_{\partial\Omega}\langle\nabla^\alpha_\nu\varphi,\varphi\rangle ds(g).$$

La formule d'intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\langle(\nabla^\alpha)^*\nabla^\alpha\varphi,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} &= ||\mathrm{D}^\alpha\varphi||^2_{\mathrm{L}^2}-\langle\frac{\mathrm{R}}{4}\varphi,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^2}-n(n-1)\alpha^2||\varphi||^2_{\mathrm{L}^2}\\ &\quad-\int_{\partial\Omega}\langle\gamma(\nu)\mathrm{D}^\alpha\varphi+\nabla^\alpha_\nu\varphi,\varphi\rangle ds(g),\end{aligned}$$

et en utilisant la relation (45), on a :

$$\begin{aligned}||\mathrm{P}^\alpha\varphi||^2_{\mathrm{L}^2} &= \frac{n-1}{n}||\mathrm{D}^\alpha\varphi||_{\mathrm{L}^2}-\langle\frac{\mathrm{R}}{4}\varphi,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^2}-n(n-1)\alpha^2||\varphi||^2_{\mathrm{L}^2}\\ &\quad-\int_{\partial\Omega}\langle\gamma(\nu)\mathrm{D}^\alpha\varphi+\nabla^\alpha_\nu\varphi,\varphi\rangle ds(g).\end{aligned}$$

L'identité (12) permet d'écrire le terme de bord

$$-\gamma(\nu)\mathrm{D}^\alpha\varphi-\nabla^\alpha_\nu\varphi = \mathrm{D}^{\mathbf{S}}\varphi-\frac{n-1}{2}\mathrm{H}\varphi+(n-1)\alpha\, i\gamma(\nu)\varphi.$$

La formule (46) est ainsi prouvée. □

On est maintenant en mesure de donner la preuve du Théorème 1.6.

Preuve du Théorème 1.6 : On considère donc un domaine Ω d'une variété riemannienne spinorielle dont la courbure moyenne du bord H satisfait $\mathrm{H}\geq 2\alpha$ pour $\alpha>0$. Par ellipticité de la condition à bord $\mathbb{B}^-_{\mathrm{MIT}}$, soit $\varphi\in\Gamma(\Sigma\Omega)$ un champ de spineurs lisse satisfaisant le problème à bord

$$\begin{cases}\mathrm{D}\varphi=\lambda^{\mathrm{MIT}}\varphi & \text{sur } \Omega\\ \mathbb{B}^-_{\mathrm{MIT}}(\varphi)=0 & \text{le long de } \partial\Omega\end{cases}$$

avec $\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}})>0$ (voir la section 4.3). On applique ce champ de spineurs dans la formule de Reilly hyperbolique (46) et on obtient

$$\begin{aligned}||\mathrm{P}^\alpha\varphi||^2_{\mathrm{L}^2} &= \left(\frac{n-1}{n}|\lambda^{\mathrm{MIT}}-n\alpha i|^2-n(n-1)\alpha^2\right)||\varphi||_{\mathrm{L}^2}-\langle\frac{\mathrm{R}}{4}\varphi,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^2}\\ &\quad+\int_{\partial\Omega}\langle\mathrm{D}^{\mathbf{S}}\varphi+\frac{n-1}{2}(2\alpha\, i\gamma(\nu)\varphi-\mathrm{H}\varphi),\varphi\rangle ds(g).\end{aligned}$$

Or sur le bord, on a $i\gamma(\nu)\varphi=\varphi$ et $\langle\mathrm{D}^{\mathbf{S}}\varphi,\varphi\rangle=0$. L'identité précédente donne :

$$\begin{aligned}0 &\leq ||\mathrm{P}^\alpha\varphi||^2_{\mathrm{L}^2}+\int_{\partial\Omega}\langle\frac{n-1}{2}(\mathrm{H}-2\alpha)\varphi,\varphi\rangle ds(g) \qquad (47)\\ &= \frac{n-1}{n}\left(|\lambda^{\mathrm{MIT}}|^2-2n\,\alpha\,\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}})\right)||\varphi||_{\mathrm{L}^2}-\langle\frac{\mathrm{R}}{4}\varphi,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^2}\end{aligned}$$

L'hypothèse sur la courbure moyenne permet de conclure et il est évident que pour $\alpha_0=\inf_{\partial\Omega}\mathrm{H}$, l'inégalité est optimale. Supposons maintenant que le cas d'égalité est atteint, on a alors :

$$||\mathrm{P}^{\alpha_0}\varphi||^2_{\mathrm{L}^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{2}\int_{\partial\Omega}(\mathrm{H} - 2\alpha_0)|\varphi|^2 ds(g) = 0.$$

De plus, le champ de spineur φ est propre pour l'opérateur de Dirac, il satisfait donc l'équation de Killing

$$\nabla_X\varphi = -\frac{\lambda^{\mathrm{MIT}}}{n}\gamma(X)\varphi,$$

pour tout $X \in \Gamma(\mathrm{T}\Omega)$. Puisqu'un tel champ de spineurs ne possède aucun zéro (voir [**Fri00**] par exemple), la courbure moyenne du bord est constante et vaut $2\alpha_0$. De plus, on vérifie facilement que la valeur propre λ^{MIT} doit être soit réelle soit imaginaire pure [**BFGK90**]. Or ici on a $\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}}) > 0$, et donc $\lambda^{\mathrm{MIT}} \in i\mathbb{R}^+_*$. Le domaine Ω est donc une variété d'Einstein à courbure scalaire négative. On peut aussi vérifier que l'on a $\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}}) = n\alpha_0 = \frac{n\mathrm{H}_0}{2}$; pour cela, il suffit de réecrire le terme de bord en utilisant la formule (12) et on obtient

$$\int_{\partial\Omega}\langle \mathrm{D}^{\mathbf{S}}\varphi - \frac{n-1}{2}\mathrm{H}\varphi + (n-1)\alpha_0\varphi, \varphi\rangle = -\int_{\partial\Omega}\langle \nabla_\nu\varphi + \gamma(\nu)\mathrm{D}\varphi - (n-1)\alpha_0\varphi, \varphi\rangle.$$

Ce terme est nul car on est dans le cas d'égalité de (47). En se servant alors du fait que le champ de spineurs φ est de Killing, on a

$$\nabla_\nu\varphi + \gamma(\nu)\mathrm{D}\varphi = \frac{n-1}{n}\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}})\varphi.$$

En remplaçant cette expression dans l'identité précédente, on obtient

$$(n-1)\int_{\partial\Omega}(\alpha_0 - \frac{\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}})}{n})|\varphi|^2 ds(g) = 0,$$

et puisque le champ φ ne possède pas de zéros, on conclut que $\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}}) = n\alpha_0 = \frac{n\mathrm{H}_0}{2}$. Reste maintenant à montrer que le bord est totalement ombilique. Pour cela, on utilise la condition à bord satisfaite par le champ de spineurs φ. En effet, pour tout $X \in \Gamma(\mathrm{T}\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
\nabla_X(i\gamma(\nu)\varphi) &= i\gamma(\nabla_X\nu)\varphi + i\gamma(\nu)\nabla_X\varphi \\
&= i\gamma(\nabla_X\nu)\varphi + \alpha_0\gamma(\nu)\gamma(X)\varphi \\
&= i\gamma(\nabla_X\nu)\varphi - \alpha_0\gamma(X)\gamma(\nu)\varphi \\
&= i\gamma(\nabla_X\nu)\varphi + i\alpha_0\gamma(X)\varphi.
\end{aligned}$$

Cependant sur le bord, on a $i\gamma(\nu)\varphi = \varphi$ et on obtient donc

$$\gamma(\nabla_X\nu)\varphi = -2\alpha_0\gamma(X)\varphi.$$

Puisque φ ne s'annule jamais, on en conclut que $\mathrm{h}(X) = -\nabla_X\nu = 2\alpha_0 X$ et le bord $\partial\Omega$ est totalement ombilique. □

Remarques 1.1. (1) La projection orthogonale $\mathbb{B}^+_{\mathrm{MIT}}$ définissant une condition elliptique locale pour l'opérateur de Dirac D de Ω, on peut montrer que toute valeur propre λ^{MIT} de D vérifie $\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}}) < 0$. L'inégalité (42) s'écrit alors

$$|\lambda^{\mathrm{MIT}}|^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\inf_{\Omega}(\mathrm{R}) - n\,\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}})\inf_{\partial\Omega}(\mathrm{H}).$$

(2) Il est clair que pour $\alpha = 0$, on retrouve l'inégalité stricte. En effet, si on a égalité alors $\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}}) = n\alpha = 0$, ce qui est impossible car $\mathrm{Im}(\lambda^{\mathrm{MIT}}) > 0$.

(3) Les variétés riemanniennes spinorielles qui possèdent un spineur de Killing imaginaire pur de nombre de Killing $i\alpha$ ont été classifiées par H. Baum dans [**Bau89a**] et [**Bau89b**]. De telles variétés sont appelées pseudo-hyperboliques et elles sont données par

$$(\mathbb{R} \times_{\exp} \mathrm{M}_0, g) = (\mathbb{R} \times \mathrm{M}_0, dt^2 \oplus e^{-4\alpha t} g_{\mathrm{M}_0}),$$

où $(\mathrm{M}_0, g_{\mathrm{M}_0})$ est une variété riemannienne spinorielle complète qui possède un spineur parallèle non trivial. On peut pour la suite supposer que le nombre de Killing d'un tel spineur est $\frac{i}{2}$ ou $-\frac{i}{2}$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\nabla_X \phi = \pm \frac{i}{2} \gamma(X)\phi.$$

De plus, les hypersurfaces à courbure moyenne constante d'un espace pseudo-hyperbolique ont été classifiées par S. Montiel dans [**Mon99**]. Cette classification est connue sous le nom de Théorème d'Alexandrov hyperbolique par analogie avec le Théorème d'Alexandrov qui classifie les hypersurfaces à courbure moyenne constante dans l'espace euclidien. Dans le cas hyperbolique, une hypersurface compacte à courbure moyenne constante est soit une hypersphère géodésique (et dans ce cas, M_0 est plate et $\mathrm{H} > 1$), soit une tranche $\{s\} \times \mathrm{M}_0$ (et dans ce cas, M_0 est compacte et $\mathrm{H} = 1$).

On peut alors maintenant se demander si il existe des variétés qui satisfont le cas d'égalité de (42). On a alors le résultat suivant :

Corollaire 1.3. *Si le bord est connexe, alors il n'existe pas de domaines compacts satisfaisant le cas limite de l'inégalité (42).*

Preuve : Soit Ω est un domaine compact dont le bord $\partial\Omega$ est connexe et qui satisfait le cas d'égalité de (42). Il existe alors sur ce domaine un champ de spineurs de Killing imaginaire et son bord $\partial\Omega$ est une hypersurface totalement ombilique à courbure moyenne constante $\mathrm{H} = 1$. Cependant, en utilisant le point 3 de la remarque ci-dessus, on en déduit que $\partial\Omega$ est une tranche $\{s\} \times \mathrm{M}_0$ dans un espace pseudo-hyperbolique. Or il n'existe aucun domaine *compact* dont le bord est une tranche et connexe. $\square$

La remarque qui suit montre qu'on peut tout de même construire un domaine compact qui possède un spineur de Killing imaginaire satisfaisant (à une modification près) la condition à bord MIT.

Remarque 1.4. On rappelle que l'on distingue deux types de spineurs de Killing imaginaires (voir [**Bau89a**] et [**Bau89b**]). En effet, soit φ un spineur de Killing imaginaire et soit $f = |\varphi|^2$ la norme de ce champ. Contrairement au cas des spineurs de Killing réels, la fonction f n'est pas constante. Cependant, on peut vérifier que la fonction définie par

$$q_\varphi := f^2 - \frac{1}{4\alpha^2} |\nabla f|^2$$

est constante et positive. On dira alors qu'un spineur de Killing imaginaire est de type I si $q_\varphi = 0$ et de type II si $q_\varphi > 0$. Si (M^n, g) est une variété riemannienne spinorielle complète et connexe qui possède un spineur de Killing imaginaire de nombre $i\alpha$ et de type II, alors (M^n, g) est isométrique à l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n_{-4\alpha^2}$ (de courbure sectionnelle constante $-4\alpha^2$). Si (M^n, g) possède un spineur de Killing imaginaire de type I, alors (M^n, g) est isométrique au produit tordu $(\mathbb{R} \times \mathrm{M}_0, dt^2 \oplus e^{-4\alpha t} g_{\mathrm{M}_0})$, où M_0 est une variété riemannienne spinorielle complète possédant un spineur parallèle non trivial. De plus, $q_\varphi = 0$ (donc de type I) si et seulement si il existe un champ de vecteurs unitaire ξ sur M tel que $\gamma(\xi)\varphi = i\varphi$. On peut vérifier que ce champ de vecteurs ξ est le champ normal à chaque tranche $\{t\} \times \mathrm{M}_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Considérons alors le domaine donné par le produit tordu $\Omega := ([a, b] \times \mathrm{M}_0, dt^2 \oplus e^{-4\alpha t} g_{\mathrm{M}_0})$, où M_0 est une variété riemannienne spinorielle compacte possédant un spineur de Killing parallèle non trivial et $-\infty < a < b < +\infty$. Ce domaine est clairement compact mais son bord possède deux composantes connexes. De plus, il existe sur Ω un spineur de Killing imaginaire de type I, et donc un champ de vecteurs unitaire $\xi \in \Gamma(\mathrm{T}\Omega)$ normal aux tranches $\{t\} \times \mathrm{M}_0$ (et donc aux deux composantes connexes $\partial\Omega_1 \simeq \{a\} \times \mathrm{M}_0$ et $\partial\Omega_2 \simeq \{b\} \times \mathrm{M}_0$ du bord) qui vérifie $\gamma(\xi)\varphi = i\varphi$. On a donc construit un domaine compact Ω dont le bord $\partial\Omega$ possède deux composantes connexes $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ qui sont à courbure moyenne constante 2α et qui possède un champ de spineurs de Killing imaginaire satisfaisant

$$i\gamma(\nu_1)\varphi_{|\partial\Omega_1} = \varphi_{|\partial\Omega_1} \qquad \text{et} \qquad i\gamma(\nu_2)\varphi_{|\partial\Omega_2} = -\varphi_{|\partial\Omega_2}, \tag{48}$$

où ν_1 (resp. ν_2) désigne le champ de vecteurs unitaire normal (rentrant) à $\partial\Omega_1$ (resp. $\partial\Omega_2$).

CHAPITRE 2

Un invariant spinoriel conforme sur les variétés à bord

1. Introduction

Dans ce chapitre, on se propose de définir un invariant spinoriel conforme sur une variété à bord à partir de la première valeur propre non nulle de l'opérateur de Dirac sous une condition à bord étudiée dans le chapitre précédent.

Dans le cas d'une variété riemannienne spinorielle compacte sans bord, de nombreux travaux ont été et sont encore consacrés à l'étude d'un tel invariant. On se réfère entre autres à [**Lot86**], [**Hij86**], [**Bär92**], [**Amm03b**] ou [**AHM04**]. Dans ce cadre, on rappelle que l'opérateur de Dirac définit un opérateur différentiel elliptique d'ordre un qui admet une extension essentiellement auto-adjointe. En particulier, son spectre est constitué d'une suite non bornée de nombres réels. Dans les travaux cités précédemment, l'étude porte sur l'invariant défini par :

$$\inf_{\overline{g}\in[g]}\big\{\lambda_1(\overline{g})\mathrm{Vol}(\mathrm{M},\overline{g})^{\frac{1}{n}}\big\},$$

où $[g]$ est la classe conforme de la métrique riemannienne g et $\lambda_1(\overline{g})$ est la première valeur propre de l'opérateur de Dirac. Cet objet ainsi défini, on peut le considérer comme un analogue spinoriel de l'invariant de Yamabe. L'inégalité d'Hijazi permet en effet de relier cet invariant à l'invariant de Yamabe. Il paraît naturel qu'une étude plus "analytique" de cet objet puisse donner des résultats analogues au problème de Yamabe dans le cadre spinoriel. De telles réponses ont été apportées dans [**Amm03b**], [**AHM03**] et [**AHM**].

Les résultats du chapitre précédent amène naturellement à se demander si on peut définir sur une variété à bord un invariant spinoriel conforme qu'on pourrait voir comme un analogue de l'invariant de Yamabe $\mu(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})$ (voir le paragraphe 3). On remarque tout d'abord que la définition d'un tel objet à partir du spectre de l'opérateur de Dirac va, sur une variété à bord, dépendre de la condition à bord choisie. Il est donc nécessaire d'utiliser des conditions à bord invariantes par changement conforme ce qui est le cas de celles étudiées dans le chapitre précédent. Si on s'attarde quelques instants sur la condition à bord MIT, on remarque qu'une difficulté apparaît : l'opérateur de Dirac n'est pas essentiellement auto-adjoint et son spectre est complexe. De plus, le cas d'égalité n'est jamais atteint dans l'inégalité d'Hijazi, ce qui laisse à penser que cette condition à bord n'est pas satisfaisante pour notre problème.

Dans ce chapitre, on va, à partir de la condition à bord associée à un opérateur de chiralité, définir un invariant spinoriel conforme analogue à l'invariant de Yamabe d'une variété à bord. Cet invariant sera donné par :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M}) := \inf_{\overline{g}\in[g]}\{|\lambda_1(\overline{g})|\mathrm{vol}(\mathrm{M},\overline{g})^{\frac{1}{n}}\},$$

où σ est une structure spinorielle de M, et $\lambda_1(\overline{g})$ est la première valeur propre non nulle de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord CHI.

Dans une première partie, on donnera les premières propriétés de cet invariant comme par exemple sa caractérisation variationnelle. On étudiera ensuite le cas particulier de l'hémisphère qui s'avérera très utile pour la suite. En effet, sur l'hémisphère, on va construire un champ de spineurs pour lequel l'invariant défini est atteint. L'objectif principal de ce chapitre étant de comparer cet invariant défini sur une variété riemannienne spinorielle compacte à bord à celui de l'hémisphère, on devra construire une trivialisation du fibré des spineurs analogue à celle donnée dans [**BG92**] (voir aussi [**AHM03**]). Ainsi à partir du champ de spineurs propre de l'hémisphère et de la trivialisation obtenue, on construira un spineur-test afin de l'évaluer dans la caractérisation variationnelle de $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ et on obtiendra un résultat permettant de le comparer à $\lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)$.

Ces résultats auront plusieurs applications. Tout d'abord, ils permettent, dans les cas que l'on va prouver, de donner une preuve spinorielle du problème de Yamabe sur une variété à bord en utilisant l'inégalité d'Hijazi prouvée dans le premier chapitre. Une deuxième application, beaucoup moins évidente, est l'existence d'une solution à un problème à bord non linéaire et critique (dans le sens des injections de Sobolev) pour l'opérateur de Dirac (nous n'aborderons pas ce problème). Ce travail fait l'objet d'un article en cours de rédaction mais n'apparaît pas dans cette thèse.

2. Définitions et premières propriétés

On considère (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte à bord lisse $\partial\mathrm{M}$ dont les structures riemannienne et spinorielle sont celles induites par la variété M. On note ν le champ de vecteurs unitaire normal rentrant à $\partial\mathrm{M}$ dont l'existence est déduite de l'orientation de M. Dans tout ce qui suit, on sera amené à effectuer des changements conformes de métriques. Afin de rester rigoureux dans la manipulation de ces différents changements, on doit pouvoir distinguer dans quelle métrique on travaille et donc poser des notations adaptées. Si $\overline{g} = f^2 g \in [g]$ (où $[g]$ désigne la classe conforme de g), on notera $\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M}) := \Sigma(\mathrm{M}, \overline{g})$ le fibré des spineurs au-dessus de $(\mathrm{M}, \overline{g})$, $\mathbf{S}_{\overline{g}}(\partial\mathrm{M}) = \Sigma(\mathrm{M}, \overline{g})_{|\partial\mathrm{M}}$ sa restriction au bord $(\partial\mathrm{M}, \overline{g})$, $\overline{\gamma}$ (resp. $\overline{\gamma}^{\mathbf{S}}$) la multiplication de Clifford agissant sur $\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M})$ (resp. $\mathbf{S}_{\overline{g}}(\partial\mathrm{M})$) et de la même manière, $\mathrm{D}_{\overline{g}}$ (resp. $\mathrm{D}^{\mathbf{S}}_{\overline{g}}$) l'opérateur de Dirac agissant sur $\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M})$ (resp. $\mathbf{S}_{\overline{g}}(\partial\mathrm{M})$). Si aucune appartenance à la métrique n'apparaît, c'est qu'il n'y a pas de confusion possible pour discerner la métrique dans laquelle on travaille. On est maintenant en mesure de donner une définition rigoureuse de l'invariant qui fait l'objet de ce chapitre.

DÉFINITION 2.1. *Soit* $(\mathrm{M}^n, g, \sigma)$ *une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension* $n \geq 2$ *à bord lisse non vide* $\partial\mathrm{M}$ *qui possède un opérateur de chiralité* Γ *et où* σ *est une structure spinorielle sur* M. *On pose :*

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) := \inf_{\overline{g} \in [g]} \{ |\lambda_1(\overline{g})| \mathrm{vol}(\mathrm{M}, \overline{g})^{\frac{1}{n}} \}, \qquad (1)$$

où $\lambda_1(\overline{g})$ est la première valeur propre non nulle de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord CHI, *c'est-à-dire*

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{D}_{\overline{g}}\varphi = \lambda_1(\overline{g})\varphi & \textit{sur}\ \mathrm{M} \\ \mathbb{B}^{\pm}_{\overline{g}}(\varphi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0 & \textit{le long de}\ \partial\mathrm{M}, \end{array}\right. \qquad \text{(PVB)}$$

où $\mathbb{B}^{\pm}_{\overline{g}}$ est la projection définissant la condition à bord associée à un opérateur de chiralité donnée par

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{B}^{\pm}_{\overline{g}}: & \mathrm{L}^2(\mathbf{S}_{\overline{g}}(\partial\mathrm{M})) & \longrightarrow & \mathrm{L}^2(\mathrm{V}^{\pm}) \\ & \varphi_{|\partial\mathrm{M}} & \longmapsto & \frac{1}{2}(\mathrm{Id} \pm \overline{\gamma}(\overline{\nu})\overline{\Gamma})\varphi_{|\partial\mathrm{M}} \end{array}$$

et où $\mathrm{V}^{\pm}$ est le sous-fibré $\mathbf{S}_{\overline{g}}(\partial\mathrm{M})$ propre associé à la valeur propre ± 1 de l'endomorphisme $\overline{\gamma}(\overline{\nu})\overline{\Gamma}$.

Remarque 2.1. (1) La définition de l'invariant $\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})$ dépend à première vue de la condition à bord choisie, c'est-à-dire que la valeur de $\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})$ diffère selon que, dans le problème (PVB), on impose à φ de satisfaire $\mathbb{B}^{+}_{g}(\varphi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0$ ou $\mathbb{B}^{-}_{g}(\varphi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0$. On va cependant voir que ce n'est pas le cas. En effet, soit $\mathrm{Spec}^{\pm}(\mathrm{D}_g)$ le spectre de l'opérateur de Dirac D_g sous la condition à bord $\mathbb{B}^{\pm}_{g}$. En utilisant le Théorème 1.2, on sait que $\mathrm{Spec}^{\pm}(\mathrm{D}_g)$ est une suite non bornée de nombres réels, qu'on peut donc écrire $\big(\lambda^{\pm}_k(g)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ avec :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{D}_g\varphi^{\pm}_k = \lambda^{\pm}_k(g)\varphi^{\pm}_k & \textit{sur}\ \mathrm{M} \\ \mathbb{B}^{\pm}_{g}(\varphi^{\pm}_{k\,|\partial\mathrm{M}}) = 0 & \textit{le long de}\ \partial\mathrm{M} \end{array}\right.$$

On peut alors vérifier que $\mathrm{Spec}^{+}(\mathrm{D}_g) = -\mathrm{Spec}^{-}(\mathrm{D}_g)$, c'est-à-dire que si $\lambda^{+}_k(g)$ est une valeur propre pour l'opérateur de Dirac sous la condition $\mathbb{B}^{+}_{g}$, alors $-\lambda^{+}_k(g)$ est une valeur propre pour l'opérateur de Dirac sous la condition $\mathbb{B}^{-}_{g}$. En effet, soit φ un champ de spineurs propre associé à la valeur propre λ pour la condition à bord $\mathbb{B}^{-}_{g}$, on a :

$$\mathrm{D}_g\varphi = \lambda\varphi \qquad \textit{et} \qquad \gamma(\nu)\Gamma\varphi_{|\partial\mathrm{M}} = \varphi_{|\partial\mathrm{M}}.$$

Décomposons alors le champ de spineurs φ suivant la chiralité du fibré des spineurs et on obtient $\varphi = \varphi^{+} + \varphi^{-}$ avec $\varphi^{\pm} \in \Sigma^{\pm}_{g}\big(\mathrm{M}\big) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Id} \pm \Gamma\big)\Sigma_g(\mathrm{M})$. En utilisant les propriétés (29) d'un opérateur de chiralité, on montre que l'opérateur de Dirac échange la chiralité des spineurs, et on a :

$$\mathrm{D}_g\varphi^{\pm} = \lambda\varphi^{\mp}.$$

En posant $\widetilde{\varphi} = \varphi^{+} - \varphi^{-}$, on obtient facilement que $\mathrm{D}_g\widetilde{\varphi} = -\lambda\widetilde{\varphi}$. Reste alors à vérifier que $\mathbb{B}^{+}_{g}(\widetilde{\varphi}_{|\partial\mathrm{M}}) = 0$. Pour cela, puisque $\mathbb{B}^{-}_{g}(\varphi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0$, on a :

$$\gamma(\nu)\widetilde{\varphi}_{|\partial\mathrm{M}} = \varphi_{|\partial\mathrm{M}},$$

ce qui, en utilisant le fait que la multiplication de Clifford par le champ de vecteurs ν échange aussi la chiralité des spineurs, permet l'identification $\gamma(\nu)\varphi^{\pm}_{|\partial\mathrm{M}} = \pm\varphi^{\mp}_{|\partial\mathrm{M}}$. On obtient :

$$\gamma(\nu)\Gamma\widetilde{\varphi}_{|\partial\mathrm{M}} = \gamma(\nu)\varphi^{+}_{|\partial\mathrm{M}} + \gamma(\nu)\varphi^{-}_{|\partial\mathrm{M}} = \varphi^{-}_{|\partial\mathrm{M}} - \varphi^{+}_{|\partial\mathrm{M}} = -\overline{\varphi}_{|\partial\mathrm{M}},$$

et $\mathbb{B}_g^+(\widetilde{\varphi}_{|\partial\mathrm{M}}) = 0$. Le champ de spineurs $\widetilde{\varphi}$ vérifie donc le problème à bord

$$\begin{cases} \mathrm{D}_g\widetilde{\varphi} = -\lambda\widetilde{\varphi} & \textit{sur}\ \mathrm{M} \\ \mathbb{B}_g^+(\widetilde{\varphi}_{|\partial\mathrm{M}}) = 0 & \textit{le long de}\ \partial\mathrm{M} \end{cases}$$

On a bien montré que $\lambda \in \mathrm{Spec}^+(\mathrm{D}_g) \Leftrightarrow -\lambda \in \mathrm{Spec}^-(\mathrm{D}_g)$, et donc $\mathrm{Spec}^+(\mathrm{D}_g) = -\mathrm{Spec}^-(D_g)$. En particulier, si $\mathrm{Ker}^+(\mathrm{D}_g)$ (resp. $\mathrm{Ker}^-(\mathrm{D}_g)$) désigne le noyau de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord $\mathbb{B}_g^-$ (resp. $\mathbb{B}_g^+$), on a $\mathrm{Ker}^+(\mathrm{D}_g) \simeq \mathrm{Ker}^-(\mathrm{D}_g)$. De même si $\lambda_1^+(g)$ (resp. $\lambda_1^-(g)$) désigne la première valeur propre non nulle de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord $\mathbb{B}_g^-$ (resp. $\mathbb{B}_g^+$), il est clair que $|\lambda_1^+(g)| = |\lambda_1^-(g)|$, et ainsi

$$\inf_{\overline{g}\in[g]} \left\{|\lambda_1^+(\overline{g})|\mathrm{vol}(\mathrm{M},\overline{g})^{\frac{1}{n}}\right\} = \inf_{\overline{g}\in[g]} \left\{|\lambda_1^-(\overline{g})|\mathrm{vol}(\mathrm{M},\overline{g})^{\frac{1}{n}}\right\}.$$

Dans toute la suite, on pourra donc se restreindre à la condition à bord $\mathbb{B}_g^-$.

(2) Rappelons aussi que, si on pose

$$\mathcal{H}_g^{\pm} := \{\varphi \in \mathrm{H}_1^2\big(\Sigma_g(\mathrm{M})\big)\ /\ \mathbb{B}_g^{\pm}(\varphi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0\},$$

où $\mathrm{H}_1^2\big(\Sigma_g(\mathrm{M})\big) = \{\varphi \in \Gamma\big(\Sigma_g(\mathrm{M})\big)\ /\ ||\varphi||^2_{\mathrm{H}_1^2} = ||\varphi||_2^2 + ||\nabla\varphi||_2^2 < \infty\}$, alors l'opérateur de Dirac

$$\mathrm{D}_g : \mathcal{H}_g^+ \longrightarrow \mathrm{L}^2\big(\Sigma_g(\mathrm{M})\big)$$

définit un opérateur auto-adjoint continu de Fredholm. En effet, dans [**FS98**], Farinelli et Schwarz montrent que la dimension du noyau de D_g sur $\mathcal{H}_g^+$ est finie et que son image est fermée dans $\mathrm{L}^2\big(\Sigma_g(\mathrm{M})\big)$. On a donc une décomposition L^2-orthogonale :

$$\mathcal{H}_g^+ = \mathrm{Ker}^+(\mathrm{D}_g) \oplus \mathcal{C}_g^+, \tag{2}$$

où $\mathcal{C}_g^+$ est le L^2-supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Ker}^+(\mathrm{D}_g)$ dans $\mathcal{H}_g^+$. Cet espace est clairement fermé. Il paraît intéressant pour la suite d'étudier l'action de la multiplication de Clifford par le champ de vecteurs ν sur les composantes de $\mathcal{H}_g^+$. On a montré dans le point (1) de cette remarque que si $\varphi \in \mathcal{H}_g^+$ alors un champ de spineurs Φ tel que $\Phi_{|\partial\mathrm{M}} = \gamma(\nu)\varphi_{|\partial\mathrm{M}}$ satisfait $\Phi \in \mathcal{H}_g^-$. Or $\mathcal{H}_g^- = \mathrm{Ker}^-(\mathrm{D}_g) \oplus \mathcal{C}_g^-$, où $\mathcal{C}_g^-$ est le L^2-supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Ker}^-(\mathrm{D}_g)$ dans $\mathcal{H}_g^-$ avec $\mathrm{Ker}^+(\mathrm{D}_g) \simeq \mathrm{Ker}^-(\mathrm{D}_g)$ par l'opération de conjugaison suivant la chiralité et de la même manière, on montre que si $\varphi \in \mathcal{C}_g^+$ et si Φ est un champ de spineurs tel que $\Phi_{|\partial\mathrm{M}} = \gamma(\nu)\varphi_{|\partial\mathrm{M}}$ alors $\Phi \in \mathcal{C}_g^-$. Cette propriété s'avérera très utile par la suite.

(3) Grâce au Théorème 1.4, on voit que l'on peut comparer cet invariant à l'invariant de Yamabe $\mu(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})$ de la variété M (voir la partie 3 du chapitre 1 pour un bref rappel sur le problème de Yamabe sur les variétés à bord). En effet, si $n \geq 3$, on a montré que :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\mu(\mathrm{M},\partial\mathrm{M}). \tag{3}$$

Il paraît alors naturel qu'une étude plus approfondie de cet invariant puisse apporter des informations sur le problème de Yamabe sur les variétés à bord. On rappelle que ce problème consiste à prouver l'existence d'une métrique conforme à g pour laquelle la courbure scalaire de la variété ambiante est constante et dont la courbure moyenne est nulle (c'est-à-dire que le bord $\partial\mathrm{M}$ est minimal). On verra par la suite que l'on peut résoudre (dans certains cas) ce problème grâce à l'invariant $\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})$.

Pour faciliter l'étude de cet invariant, on va explicitement l'écrire comme l'infimum d'une fonctionnelle. On procèdera de la même manière que dans [**Lot86**] ou [**Amm03a**]. Avant cela, on va donner une caractérisation variationnelle de la première valeur propre du problème à bord (PVB). En effet, on montre :

Proposition 2.1. *Si $\lambda_1(g)$ désigne la première valeur propre non nulle du problème à bord* (PVB)*, on a alors :*

$$\lambda_1(g)^2=\inf_{\psi\in\mathcal{C}_g^-\setminus\{0\}}\Big\{\frac{\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}_g\psi|^2dv(g)}{\int_{\mathrm{M}}|\psi|^2dv(g)}\Big\},$$

où $\mathcal{C}_g^-$ est le L^2-supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Ker}^-(\mathrm{D}_g)$ dans $\mathcal{H}_g^-$.

Preuve : Afin de ne pas alourdir les notations (du moins dans cette démonstration), on peut supprimer tout ce qui est relatif à la métrique car on ne considère pas ici l'aspect conforme. On doit donc vérifier que :

$$\lambda_1^2=\inf_{\psi\in\mathcal{C}^-\setminus\{0\}}\Big\{\frac{\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}\psi|^2dv(g)}{\int_{\mathrm{M}}|\psi|^2dv(g)}\Big\}.$$

Pour montrer cette égalité, on effectue une approche variationnelle classique. Tout d'abord, remarquons que $\mathcal{H}^-$ est un espace de Hilbert pour la norme H_1^2. Considérons alors la fonctionnelle définie sur $\mathcal{C}^-$ par :

$$J(\psi)=\frac{\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}\psi|^2dv(g)}{\int_{\mathrm{M}}|\psi|^2dv(g)},$$

et montrons que $\lambda_1^2=\inf J(\psi)$ où l'infimum est pris pour $\psi\in\mathcal{C}^-\setminus\{0\}$. Puisque $\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}\psi|^2dv(g)\geq 0$, il existe une suite $(\Phi_i)\subset\mathcal{C}^-$ telle que :

$$J(\Phi_i)\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}\alpha=\inf_{\psi\in\mathcal{C}^-}J(\psi).$$

Remarquons que par homogénéité de J, on peut supposer que pour tout i, $\int_{\mathrm{M}}|\Phi_i|^2dv(g)=1$. Or puisque l'opérateur de Dirac D sur $\mathcal{H}^-$ définit un opérateur de Fredohlm, il existe une constante réelle $C_0>0$ telle que pour tout $\psi\in\mathcal{C}^-\setminus\{0\}$, on ait (voir [**Sch95**] par exemple) :

$$||\psi||^2_{\mathrm{H}_1^2}\leq C_0||\mathrm{D}\psi||^2_{\mathrm{L}^2}.$$

En particulier, la suite (Φ_i) est uniformément bornée dans $\mathrm{H}_1^2(\Sigma\mathrm{M})$ puisque $||\mathrm{D}\Phi_i||_2^2\to\alpha$. Or par le théorème d'injection de Sobolev, l'inclusion $\mathrm{H}_1^2(\Sigma\mathrm{M})\hookrightarrow\mathrm{L}^2(\Sigma\mathrm{M})$ est compacte et il existe alors un champ de spineurs $\Phi\in\mathrm{L}^2(\Sigma\mathrm{M})$ tel que $\Phi_i\to\Phi$ fortement dans $\mathrm{L}^2(\Sigma\mathrm{M})$. De plus, $\mathrm{H}_1^2(\Sigma\mathrm{M})$ étant réflexif, il existe un champ de spineurs $\widetilde{\Phi}$ tel que $\Phi_i\to\widetilde{\Phi}$ faiblement dans $\mathrm{H}_1^2(\Sigma\mathrm{M})$. On vérifie facilement que $\Phi=\widetilde{\Phi}$. En effet, la convergence forte de (Φ_i) vers Φ dans $\mathrm{L}^2(\Sigma\mathrm{M})$ implique la convergence faible de (Φ_i) vers Φ dans $\mathrm{H}_1^2(\Sigma\mathrm{M})$ et par unicité de la limite, on conclut que $\Phi=\widetilde{\Phi}$. Notons $\Phi=\widetilde{\Phi}\in\mathcal{C}^-$ puisque $\mathcal{C}^-$ est fermé dans $\mathcal{H}^-$ et que $\Phi_i\in\mathcal{C}^-$. Montrons maintenant que ce champ de spineurs est un spineur propre pour le carré de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord CHI, c'est-à-dire que le champ Φ satisfait le problème à bord

$$\begin{cases} \mathrm{D}^2\Phi = \alpha\Phi & \text{sur M} \\ \mathbb{B}^-(\mathrm{D}\Phi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0,\ \mathbb{B}^-(\Phi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0 & \text{le long de } \partial\mathrm{M}. \end{cases} \qquad \text{(PVB1)}$$

Pour cela, on remarque que la convergence faible dans $\mathrm{H}_1^2(\Sigma\mathrm{M})$ implique que :

$$||\Phi||^2_{\mathrm{H}_1^2} \leq \liminf_{i\to\infty} ||\Phi_i||^2_{\mathrm{H}_1^2}, \quad \text{c'est-à-dire} \int_{\mathrm{M}} |\nabla\Phi|^2 dv(g) \leq \liminf_{i\to\infty} \int_{\mathrm{M}} |\nabla\Phi_i|^2 dv(g). \qquad (4)$$

En utilisant l'expression intégrale de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz (14), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{M}} |\mathrm{D}\Phi|^2 - \frac{1}{4}\int_{\mathrm{M}} \mathrm{R}|\Phi|^2 + \int_{\partial\mathrm{M}} \big(\langle \mathrm{D}^{\mathbf{S}}\Phi, \Phi\rangle - \frac{n-1}{2}\mathrm{H}|\Phi|^2\big) \leq \liminf_{i\to\infty} \Big\{ \int_{\mathrm{M}} |\mathrm{D}\Phi_i|^2 \\ -\frac{1}{4}\int_{\mathrm{M}} \mathrm{R}|\Phi_i|^2 + \int_{\partial\mathrm{M}} \big(\langle \mathrm{D}^{\mathbf{S}}\Phi_i, \Phi_i\rangle - \frac{n-1}{2}\mathrm{H}|\Phi_i|^2\big)\Big\}. \qquad (5) \end{aligned}$$

Par convergence forte dans $\mathrm{L}^2(\Sigma\mathrm{M})$, on a :

$$\Big| \int_{\mathrm{M}} \mathrm{R}|\Phi|^2 dv(g) - \int_{\mathrm{M}} \mathrm{R}|\Phi_i|^2 dv(g)\Big| \leq ||\mathrm{R}||_\infty ||\Phi - \Phi_i||^2_{\mathrm{L}^2} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et puisque l'injection $\mathrm{H}_1^2(\Sigma\mathrm{M}) \hookrightarrow \mathrm{L}^2\big(\mathbf{S}(\partial\mathrm{M})\big)$ est compacte, on obtient de la même manière que :

$$\Big| \int_{\partial\mathrm{M}} \mathrm{H}|\Phi|^2 ds(g) - \int_{\partial\mathrm{M}} \mathrm{H}|\Phi_i|^2 ds(g)\Big| \leq ||\mathrm{H}||_\infty ||\Phi - \Phi_i||^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{S})} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, puisque les champs de spineurs Φ et Φ_i sont dans $\mathcal{C}^-$, on a :

$$\int_{\partial\mathrm{M}} \langle \mathrm{D}^{\mathbf{S}}\Phi, \Phi\rangle ds(g) = \int_{\partial\mathrm{M}} \langle \mathrm{D}^{\mathbf{S}}\Phi_i, \Phi_i\rangle ds(g) = 0.$$

L'inégalité (5) s'écrit alors :

$$\int_{\mathrm{M}} |\mathrm{D}\Phi|^2 dv(g) \leq \liminf_{i\to\infty} \int_{\mathrm{M}} |\mathrm{D}\Phi_i|^2 dv(g) = \alpha = \inf_{\psi\in\mathcal{C}^-} J(\psi). \qquad (6)$$

Puisque $\Phi \in \mathcal{C}^-$, on a $\alpha = J(\Phi) = \inf J(\psi)$ où l'infimum est pris pour $\psi \in \mathcal{C}^-$. On a donc prouvé l'existence d'un champ de spineurs $\Phi \in \mathcal{C}^-$ qui minimise la fonctionnelle J. Il reste à vérifier que ce champ satisfait bien le problème à bord (PVB1). Pour cela, soit $\psi \in \mathcal{C}^-$ et pour $t \in]-\epsilon, \epsilon[$ (où $\epsilon > 0$), on pose $\Phi_t = \Phi + t\psi$ de façon à ce que l'on ait $\Phi_0 = \Phi$ et $\frac{d}{dt}_{|t=0}(\Phi_t) = \psi$. On utilise maintenant le fait que le champ Φ est un point critique de la fonctionnelle J, c'est-à-dire que l'on a :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}_{|t=0}\big[J(\Phi_t)\big] &= \frac{d}{dt}_{|t=0}\Big[\frac{\int_{\mathrm{M}} |\mathrm{D}\Phi_t|^2 dv(g)}{\int_{\mathrm{M}} |\Phi_t|^2 dv(g)}\Big] \\ &= \frac{1}{||\Phi||^4_{\mathrm{L}^2}}\Big[\frac{d}{dt}_{|t=0}\big(\int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{D}\Phi_t, \mathrm{D}\Phi_t\rangle dv(g)\big)\big(\int_{\mathrm{M}} |\Phi|^2 dv(g)\big) \\ &\quad -\big(\int_{\mathrm{M}} |\mathrm{D}\Phi|^2 dv(g)\big)\frac{d}{dt}_{|t=0}\big(\int_{\mathrm{M}} |\Phi_t|^2 dv(g)\big)\Big] \\ &= \frac{2}{||\Phi||^4_{\mathrm{L}^2}}\Big[\mathrm{Re}\big(\int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{D}\Phi, \mathrm{D}\psi\rangle dv(g)\big)||\Phi||^2_{\mathrm{L}^2} - ||\mathrm{D}\Phi||^2_{\mathrm{L}^2}\mathrm{Re}\big(\int_{\mathrm{M}} \langle \Phi, \psi\rangle dv(g)\big)\Big]. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\mathrm{Re}\big(\int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{D}\Phi, \mathrm{D}\psi\rangle dv(g)\big) = \alpha\ \mathrm{Re}\big(\int_{\mathrm{M}} \langle \Phi, \psi\rangle dv(g)\big), \tag{7}$$

pour tout $\psi \in \mathcal{C}^-$. En remplaçant ψ par $i\psi$ dans l'identité (7) (ce qui est possible car si $\psi \in \mathcal{C}^-$ alors $i\psi \in \mathcal{C}^-$), on a :

$$\mathrm{Im}\big(\int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{D}\Phi, \mathrm{D}\psi\rangle dv(g)\big) = \alpha\ \mathrm{Im}\big(\int_{\mathrm{M}} \langle \Phi, \psi\rangle dv(g)\big), \tag{8}$$

pour tout $\psi \in \mathcal{C}^-$, car si $z \in \mathbb{C}$ alors $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$. En combinant les égalités (7) et (8), on obtient :

$$\int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{D}\Phi, \mathrm{D}\psi\rangle dv(g) = \alpha \int_{\mathrm{M}} \langle \Phi, \psi\rangle dv(g),$$

pour tout $\psi \in \mathcal{C}^-$. Le champ de spineurs Φ vérifie au sens des distributions l'équation $\mathrm{D}^2\Phi = \alpha\Phi$ à l'intérieur de M. En utilisant le théorème d'injection de Sobolev et les estimations elliptiques classiques (voir [**Sch95**] par exemple), on vérifie facilement que Φ est lisse à l'intérieur de M. Les théorèmes de trace permettent de conclure que Φ est lisse jusqu'au bord. Une intégration par partie permet donc d'obtenir :

$$\int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{D}^2\Phi, \psi\rangle dv(g) + \int_{\partial\mathrm{M}} \langle \gamma(\nu)\mathrm{D}\Phi, \psi\rangle ds(g) = \alpha \int_{\mathrm{M}} \langle \Phi, \psi\rangle dv(g),$$

pour tout $\psi \in \mathcal{C}^-$. En testant cette identité avec des spineurs ψ dont le support ne rencontre pas le bord, on a :

$$\int_{\partial\mathrm{M}} \langle \mathrm{D}\Phi, \gamma(\nu)\psi\rangle ds(g) = 0.$$

Or le point (2) de la Remarque 2.1 permet de vérifier que si $\psi \in \mathcal{C}^-$ le champ $\gamma(\nu)\psi$ satisfait $\mathbb{B}^+\big(\gamma(\nu)\psi_{|\partial\mathrm{M}}\big) = 0$ et donc $\mathrm{D}\Phi \in \mathcal{C}^-$. On a ainsi construit un champ de spineurs lisse $\Phi \in \Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ orthogonal à $\mathrm{Ker}^-(\mathrm{D})$ qui vérifie le problème à bord :

$$\begin{cases} \mathrm{D}^2\Phi = \alpha\Phi & \text{sur M} \\ \mathbb{B}^-(\mathrm{D}\Phi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0,\ \mathbb{B}^-(\Phi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0 & \text{le long de } \partial\mathrm{M}. \end{cases}$$

D'autre part, il est prouvé dans [**FS98**] que :

$$\mathrm{D}^2 : \{\phi \in \mathrm{L}^2(\Sigma\mathrm{M}) \,/\, \mathbb{B}^-(\mathrm{D}\phi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{B}^-(\phi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0\} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{L}^2(\Sigma\mathrm{M})$$

est un opérateur essentiellement auto-adjoint dont le spectre est donné par :

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{D}^2)=\{\lambda^2\,/\,\lambda\in\mathrm{Spec}^-(\mathrm{D})\}.$$

Donc si λ_1 désigne la première valeur propre non nulle de D sous la condition à bord $\mathbb{B}^-$ il est clair que l'on a $\alpha\leq\lambda_1^2$, car en évaluant la fonctionnelle J sur un spineur propre pour λ_1, on obtient bien l'inégalité voulue. On a ainsi bien montré que $\alpha=\lambda_1^2$, ce qui termine la preuve de cette proposition. □

L'invariant que l'on veut étudier fait intervenir la première valeur propre de l'opérateur de Dirac sous la condition CHI. On va donc, à partir de la proposition précédente, donner une caractérisation variationnelle de cette valeur propre. En fait, on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.1. *Si λ_1 désigne la première valeur propre non nulle du problème à bord* (PVB)*, on a alors :*

$$|\lambda_1(g)|=\inf_{\psi\in\mathcal{C}_g^-}\Big\{\frac{\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}_g\psi|^2dv(g)}{\big|\int_{\mathrm{M}}\mathrm{Re}\langle\mathrm{D}_g\psi,\psi\rangle dv(g)\big|}\Big\}.\tag{9}$$

Preuve : Dans cette preuve, on omet toute référence à la métrique. Remarquons tout d'abord que si on pose $\widetilde{\Phi}=\Phi+\frac{1}{\lambda_1}\mathrm{D}\Phi\in\Gamma(\Sigma\mathrm{M})$, où $\Phi\in\Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ est solution du problème à bord (PVB1) (où on rappelle que $\alpha=\lambda_1^2$ est la première valeur propre non nulle de l'opérateur de Dirac D^2 pour le problème à bord (PVB1)), on vérifie que :

$$\begin{cases}\mathrm{D}\widetilde{\Phi}=\lambda_1\widetilde{\Phi} & \text{sur M}\\ \mathbb{B}^-(\widetilde{\Phi}_{|\partial\mathrm{M}})=0 & \text{le long de }\partial\mathrm{M}.\end{cases}$$

En utilisant la caractérisation variationnelle de λ_1^2 donnée dans la Proposition 2.1, on obtient :

$$|\lambda_1|=\inf_{\varphi\in\mathcal{C}^-}\Big\{\Big(\frac{\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}\psi|^2dv(g)}{\int_{\mathrm{M}}|\psi|^2dv(g)}\Big)^{\frac12}\Big\}\tag{10}$$

On considère maintenant la fonctionnelle I définie sur $\mathcal{C}^-$ et donnée par :

$$I(\psi)=\frac{\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}\psi|^2dv(g)}{\big|\int_{\mathrm{M}}\mathrm{Re}\langle\mathrm{D}\psi,\psi\rangle dv(g)\big|}.$$

On montre alors que $|\lambda_1|=\inf I(\psi)$ où l'infimum est pris pour $\psi\in\mathcal{C}^-$. Pour cela, on remarque immédiatement que si $\varphi\in\Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ est un spineur propre pour l'opérateur de Dirac associé à la valeur propre λ_1, on a $I(\varphi)=|\lambda_1|$ et donc pour tout $\psi\in\mathcal{C}^-$, on obtient que $\inf I(\psi)\leq|\lambda_1|$. D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet décrire que pour tout $\psi\in\mathcal{C}^-$, on a :

$$\Big|\int_{\mathrm{M}}\langle\mathrm{D}\psi,\psi\rangle dv(g)\Big|\leq\Big(\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}\psi|^2dv(g)\Big)^{\frac12}\Big(\int_{\mathrm{M}}|\psi|^2dv(g)\Big)^{\frac12},$$

Finalement, on conclut que :

$$J(\psi)^{\frac12}=\frac{\int_M|\mathrm{D}\psi|^2dv(g)}{\big(\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}\psi|^2dv(g)\big)^{\frac12}\big(\int_{\mathrm{M}}|\psi|^2dv(g)\big)^{\frac12}}\leq\frac{\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}\psi|^2dv(g)}{\big|\int_{\mathrm{M}}\mathrm{Re}\langle\mathrm{D}\psi,\psi\rangle dv(g)\big|}=I(\psi).$$

Ainsi en passant à la borne inférieure dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$|\lambda_1| = \inf_{\psi\in\mathcal{C}^-} J(\psi)^{\frac{1}{2}} \leq \inf_{\psi\in\mathcal{C}^-} I(\psi) \leq |\lambda_1| \Rightarrow |\lambda_1| = \inf_{\psi\in\mathcal{C}^-} I(\psi).$$

□

Pour faciliter la manipulation de l'invariant $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$, on va l'écrire sous forme variationnelle. Le travail est quelque peu simplifié par les deux résultats précédents. De plus, le fait d'avoir cet invariant comme l'infimum d'une certaine fonctionnelle permettra ensuite d'adapter les techniques d'analyse classique sur les variétés au cadre spinoriel.

Proposition 2.2. *L'invariant spinoriel conforme défini par (1) s'écrit :*

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) = \inf_{\varphi\in\mathcal{C}_g^-}\Big\{\frac{\big(\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}_g\varphi|^{\frac{2n}{n+1}}dv(g)\big)^{\frac{n+1}{n}}}{\big|\int_{\mathrm{M}}\mathrm{Re}\langle\mathrm{D}_g\varphi,\varphi\rangle dv(g)\big|}\Big\}, \tag{11}$$

où $\mathcal{C}_g^-$ est le L^2-supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Ker}^-(\mathrm{D}_g)$ dans $\mathcal{H}_g^-$.

Preuve : La démonstration de cette proposition suit la méthode employée dans [**Amm03a**]. Considérons une métrique conforme à g, c'est-à-dire une métrique de la forme $\overline{g} = f^2 g$ où $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse strictement positive, et soit $\lambda_1(\overline{g})$ la première valeur propre de l'opérateur de Dirac $\mathrm{D}_{\overline{g}}$ sous la condition à bord CHI. Grâce au Corollaire 2.1, on peut écrire :

$$|\lambda_1(\overline{g})| = \inf_{\varphi\in\mathcal{C}_{\overline{g}}^-}\Big\{\frac{\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}_{\overline{g}}\varphi|^2 dv(\overline{g})}{\big|\int_{\mathrm{M}}\mathrm{Re}\langle\mathrm{D}_{\overline{g}}\varphi,\varphi\rangle dv(\overline{g})\big|}\Big\}.$$

Étudions alors la transformation conforme des sous-espaces $\mathrm{Ker}^-(\mathrm{D}_{\overline{g}})$ et $\mathcal{C}_{\overline{g}}^-$. On rappelle que la donnée d'une métrique conforme $\overline{g} = f^2 g$ permet une identification des fibrés des spineurs au-dessus de $(\mathrm{M}, \overline{g})$ et (M, g). En effet, il existe un isomorphisme de fibrés vectoriels (qui est une isométrie sur les fibres) :

$$\mathrm{F} : \Sigma_g(\mathrm{M}) \longrightarrow \Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M}), \tag{12}$$

tel que si D_g (resp. $\mathrm{D}_{\overline{g}}$) désigne l'opérateur de Dirac agissant sur $\Sigma_g(\mathrm{M})$ (resp. $\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M})$), on a la relation :

$$\mathrm{F}^{-1}\Big(\mathrm{D}_{\overline{g}}\big(\mathrm{F}(\psi)\big)\Big) = f^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{D}_g(f^{\frac{n-1}{2}}\psi)$$

pour tout $\psi \in \Gamma(\Sigma_g\mathrm{M})$. On voit alors clairement que :

$$\psi \in \mathrm{Ker}(\mathrm{D}_g) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f^{-\frac{n-1}{2}}\mathrm{F}(\psi) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{D}_{\overline{g}}).$$

En particulier, la dimension du noyau est invariante par changement conforme. Ainsi, on vérifie que :

$$\psi \in \mathcal{C}_g^- \qquad \Longleftrightarrow \qquad f^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{F}(\psi) \in \mathcal{C}_{\overline{g}}^-.$$

En effet, pour tout $\phi \in \mathrm{Ker}^-(\mathrm{D}_g)$, on a :

$$\begin{aligned}
\psi \in \mathcal{C}_g^- \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_{\mathrm{M}} \langle \psi, \phi \rangle dv(g) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{F}(\psi), \mathrm{F}(\phi) \rangle f^{-n} dv(\overline{g}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \int_{\mathrm{M}} \langle f^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{F}(\psi), f^{-\frac{n-1}{2}} \mathrm{F}(\phi) \rangle dv(\overline{g}) = 0.
\end{aligned}$$

Or si $\phi \in \mathrm{Ker}^-(\mathrm{D}_g)$, le champ $f^{-\frac{n-1}{2}}\mathrm{F}(\phi) \in \mathrm{Ker}^-(\mathrm{D}_{\overline{g}})$ et donc $f^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{F}(\psi) \in \mathcal{C}_{\overline{g}}^-$. Puisque F est un isomorphisme, on peut écrire tout champ de spineurs $\Psi \in \mathcal{H}_{\overline{g}}^-$ comme l'image par F d'un champ $\psi \in \mathcal{H}_g^-$. On se sert aussi ici du fait que la condition à bord CHI est invariante par changement conforme, car il est facile de vérifier en utilisant les relations (16) de la partie 2.2 du chapitre 1 que : $\psi \in \mathcal{H}_g^- \Longleftrightarrow \mathrm{F}(\psi) \in \mathcal{H}_{\overline{g}}^-$ où l'opérateur de chiralité et la condition à bord CHI sur $(\mathrm{M}, \overline{g})$ sont définis par :

$$\overline{\Gamma} := \mathrm{F} \circ \Gamma \circ \mathrm{F}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{B}_{\overline{g}}^{\pm} := \frac{1}{2}\big(\mathrm{Id} \pm \overline{\gamma}(\overline{\nu})\overline{\Gamma}\big).$$

Donc si on pose $\Psi = f^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{F}(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{C}_g^-$ et $\Psi \in \mathcal{C}_{\overline{g}}^-$, la caractérisation variationnelle de $\lambda_1(\overline{g})$ donne :

$$\begin{aligned}
|\lambda_1(\overline{g})| &= \inf_{\Psi \in \mathcal{C}_{\overline{g}}^-} \left\{ \frac{\int_{\mathrm{M}} |\Psi|^2 dv(\overline{g})}{\left| \int_{\mathrm{M}} \mathrm{Re}\langle \Psi, \mathrm{D}_{\overline{g}}^{-1} \Psi \rangle dv(\overline{g}) \right|} \right\} \\
&= \inf_{\Psi \in \mathcal{C}_g^-} \left\{ \frac{\int_{\mathrm{M}} |f^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{F}(\varphi)|^2 f^n dv(g)}{\left| \int_{\mathrm{M}} \mathrm{Re}\langle f^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{F}(\varphi), \mathrm{D}_{\overline{g}}^{-1}\big(f^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{F}(\varphi)\big) \rangle f^n dv(g) \right|} \right\} \\
&= \inf_{\varphi \in \mathcal{C}_g^-} \left\{ \frac{\int_{\mathrm{M}} f^{-1} |\varphi|^2 dv(g)}{\left| \int_{\mathrm{M}} \mathrm{Re}\langle \varphi, \mathrm{D}_g^{-1}\varphi) \rangle dv(g) \right|} \right\} \qquad (13)
\end{aligned}$$

où l'on s'est servi du fait que l'application F est une isométrie sur les fibres et que les éléments de volume de (M, g) et $(\mathrm{M}, \overline{g})$ sont reliés par la formule $dv(\overline{g}) = f^n dv(g)$. En utilisant la formule de Hölder, on remarque que l'on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{M}} |\varphi|^{\frac{2n}{n+1}} dv(g) &= \int_{\mathrm{M}} \big(f^{-\frac{n}{n+1}} |\varphi|^{\frac{2n}{n+1}}\big) f^{\frac{n}{n+1}} dv(g) \\
&\leq \Big(\int_{\mathrm{M}} f^{-1} |\varphi|^2 dv(g)\Big)^{\frac{n}{n+1}} \Big(\int_{\mathrm{M}} f^n dv(g)\Big)^{\frac{1}{n+1}},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\Big(\int_{\mathrm{M}} |\varphi|^{\frac{2n}{n+1}} dv(g)\Big)^{\frac{n+1}{n}} \leq \Big(\int_{\mathrm{M}} f^{-1} |\varphi|^2 dv(g)\Big) \mathrm{vol}(\mathrm{M}, \overline{g})^{\frac{1}{n}},$$

pour tout $f \in \mathrm{C}_+^\infty(\mathrm{M})$ et $\varphi \in \mathcal{C}_g^-$. De plus, on a égalité si et seulement si il existe une constante $c > 0$ telle que $f = c\,|\varphi|^{\frac{2}{n+1}}$ ou si $\varphi \equiv 0$ (ce qui est exclu par hypothèse). On a donc pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_g^-$:

$$\inf_{f \in \mathrm{C}_+^\infty(\mathrm{M})} \left\{ \Big(\int_{\mathrm{M}} f^{-1} |\varphi|^2 dv(g)\Big)^{\frac{n}{n+1}} \mathrm{vol}(\mathrm{M}, \overline{g})^{\frac{1}{n}} \right\} \geq ||\varphi||^2_{\frac{2n}{n+1}}. \qquad (14)$$

Or si le champ de spineurs φ ne s'annule en aucun point, on peut poser $f = |\varphi|^{\frac{2}{n+1}}$, et on a égalité dans (14). Sinon on construit, à partir de ce champ de spineurs, une suite de fonctions $f_k : \mathrm{M} \to \mathbb{R}^+_*$ telle que :

$$\Big(\int_{\mathrm{M}} f_k^{-1}|\varphi|^2 dv(g)\Big)^{\frac{n}{n+1}} \mathrm{vol}(\mathrm{M}, g_{f_k})^{\frac{1}{n}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} ||\varphi||^2_{2n/(n+1)},$$

où $g_{f_k} = f_k^2 g$. On a donc montré qu'il y a égalité dans (14). Revenons maintenant à l'expression de $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$. En utilisant les relations (13) et (14), on obtient pour $\overline{g} = f^2 g \in [g]$:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) &= \inf_{f\in \mathrm{C}^\infty_+(\mathrm{M})} \Big\{ |\lambda_1(\overline{g})| \mathrm{vol}(\mathrm{M}, \overline{g})^{\frac{1}{n}} \Big\} \\
&= \inf_{f\in \mathrm{C}^\infty_+(\mathrm{M})} \inf_{\varphi\in \mathcal{C}^-_g} \Big\{ \frac{\big(\int_{\mathrm{M}} f^{-1}|\varphi|^2 dv(g)\big)}{\big|\int_{\mathrm{M}} \mathrm{Re}\langle\varphi, \mathrm{D}_g^{-1}\varphi\rangle dv(g)\big|} \mathrm{vol}(\mathrm{M}, \overline{g})^{\frac{1}{n}} \Big\} \\
&= \inf_{\varphi\in \mathcal{C}^-_g} \inf_{f\in \mathrm{C}^\infty_+(\mathrm{M})} \Big\{ \frac{\big(\int_{\mathrm{M}} f^{-1}|\varphi|^2 dv(g)\big) \mathrm{vol}(\mathrm{M}, \overline{g})^{\frac{1}{n}}}{\big|\int_{\mathrm{M}} \mathrm{Re}\langle\varphi, \mathrm{D}_g^{-1}\varphi\rangle dv(g)\big|} \Big\} \\
&= \inf_{\varphi\in \mathcal{C}^-_g} \Big\{ \frac{\big(\int_{\mathrm{M}} |\varphi|^{\frac{2n}{n+1}} dv(g)\big)^{\frac{n+1}{n}}}{\big|\int_{\mathrm{M}} \mathrm{Re}\langle\varphi, \mathrm{D}_g^{-1}\varphi\rangle dv(g)\big|} \Big\},
\end{aligned}$$

et on obtient alors le résultat annoncé. □

C'est donc sous cette forme que l'on va pouvoir étudier cet invariant spinoriel conforme qu'on a défini plus en détail. En fait, on va pouvoir le comparer à celui de l'hémisphère de même dimension $\mathbb{S}^n_+$. C'est dans cette optique que l'on consacre la section suivante à l'évaluation de cet invariant sur l'hémisphère $\mathbb{S}^n_+$.

3. Le cas de l'hémisphère $\mathbb{S}^n_+$

Le but de cette section est de donner explicitement la valeur de l'invariant introduit dans la section précédente lorsque la variété considérée est l'hémisphère

$$\mathbb{S}^n_+ := \{x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;/\; x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+1} \geq 0\}$$

muni de sa structure conforme canonique $[g_{\mathrm{st}}]$ (où g_{st} est la métrique induite de la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$) et de sa structure spinorielle σ_{st}. On se place toujours dans le cadre décrit au début de cette partie. On notera cet invariant $\lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)$ et on montre alors :

Proposition 2.3. *Sur l'hémisphère $\mathbb{S}^n_+$ muni de ses structures spinorielle et conforme standard, on a :*

$$\lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+) = \frac{n}{2}\Big(\frac{\omega_n}{2}\Big)^{\frac{1}{n}}, \tag{15}$$

où $\omega_n = \mathrm{vol}(\mathbb{S}^n, g_{\mathrm{st}})$. De plus, on sait alors qu'il existe au moins un champ de spineurs de Killing sur $\mathbb{S}^n_+$ qui vérifie le problème à bord (PVB).

Preuve : La démonstration de cette proposition est une simple application du Théorème 1.2. En effet, considérons un champ de spineurs $\varphi \in \Gamma\big(\Sigma_{g_{\rm st}}(\mathbb{S}^n_+)\big)$ vérifiant le problème à bord suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{D}^{\mathbb{S}^n_+}\varphi = \lambda_1(g_{\rm st})\,\varphi & \text{sur } \mathbb{S}^n_+ \\ \mathbb{B}^-_{g_{\rm st}}(\varphi_{|\partial\mathbb{S}^n_+}) = 0 & \text{le long de } \partial\mathbb{S}^n_+ \simeq \mathbb{S}^{n-1}, \end{array}\right.$$

où $\mathrm{D}^{\mathbb{S}^n_+}$ est l'opérateur de Dirac sur $(\mathbb{S}^n_+, g_{\rm st})$. On remarque alors que l'on est dans le cas d'égalité du Théorème 1.2. En effet, le cas d'égalité est atteint dans (1.2) si et seulement si la variété considérée est isométrique à un hémisphère de rayon donné. Comme ici la variété considérée est exactement l'hémisphère $\mathbb{S}^n_+$, on est bien dans le cas d'égalité, c'est-à-dire que l'on a :

$$\lambda_1(g_{\rm st})^2 = \frac{n}{4(n-1)}\mu_1(\mathrm{L}_{g_{\rm st}}).$$

Or sur $\mathbb{S}^n_+$, la première valeur propre du problème à bord :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{L}(u) = \mu_1(\mathrm{L})u & \text{sur } \mathbb{S}^n_+ \\ \mathrm{B}(u_{|\partial\mathbb{S}^n_+}) = 0 & \text{le long de } \partial\mathbb{S}^n_+, \end{array}\right. \qquad \text{(PVY)}$$

est $n(n-1)$ et on obtient alors que $\lambda_1(g_{\rm st})^2 = \frac{n^2}{4}$. On peut en particulier affirmer qu'il existe au moins un champ de spineurs de Killing vérifiant le problème à bord (PVB). En utilisant la relation (3) qui compare l'invariant de Yamabe $\mu(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)$ et l'invariant $\lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)$, on peut écrire :

$$\frac{n}{4(n-1)}\mu(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+) \leq \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)^2 \leq \frac{n^2}{4}\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n_+)^{\frac{2}{n}}.$$

Or dans [**Esc92b**], Escobar montre que l'invariant de Yamabe $\mu(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)$ de l'hémisphère muni de sa classe conforme standard vaut :

$$\mu(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+) = n(n-1)\Big(\frac{\omega_n}{2}\Big)^{\frac{2}{n}}.$$

On a donc :

$$\frac{n}{4(n-1)}\mu(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+) = \frac{n^2}{4}\Big(\frac{\omega_n}{2}\Big)^{\frac{2}{n}} \leq \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)^2 \leq \frac{n^2}{4}\Big(\frac{\omega_n}{2}\Big)^{\frac{2}{n}},$$

ce qui permet de conclure que $\lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+) = \frac{n}{2}\big(\frac{\omega_n}{2}\big)^{\frac{1}{n}}$. □

On verra dans la section 5 une construction explicite d'un champ de spineurs de Killing qui vérifie le problème à bord (PVB) et qui en plus sera très utile pour pouvoir comparer l'invariant spinoriel conforme $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ à celui de l'hémisphère $\mathbb{S}^n_+$. Une des motivations qui peut amener à comparer ces deux invariants vient du problème de Yamabe sur les variétés à bord. En effet, on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.2. *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne spinorielle compacte à bord non vide* $\partial\mathrm{M}$*, dont l'invariant de Yamabe* $\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ *est strictement positif. On suppose de plus que la variété* M *possède un opérateur de chiralité. Alors si :*

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) < \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+), \tag{16}$$

il existe une métrique conforme à g *dans laquelle la courbure scalaire est constante et dont le bord est minimal.*

Preuve : Ce résultat découle comme le précédent d'une simple application de l'inégalité (3). En effet, la résolution du problème de Yamabe sur une variété à bord est équivalente à la validité d'une inégalité fine sur l'invariant de Yamabe $\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ de M. Plus précisement, si $\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) < \mu(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)$, alors le problème de Yamabe est résolu. On va donc montrer cette inégalité sous les hypothèses de ce corollaire. Par (3) et (16), on a :

$$\frac{n}{4(n-1)}\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) \leq \lambda_{\min}(\mathrm{M}, \sigma, [g])^2 < \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+)^2 = \frac{n^2}{4}2^{-\frac{2}{n}}\omega_n^{\frac{2}{n}},$$

et donc $\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) < n(n-1)2^{-\frac{2}{n}}\omega_n^{\frac{2}{n}} = \mu(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)$, ce qui résout le problème de Yamabe.
□

Pour pouvoir comparer ces deux invariants, on va utiliser les méthodes employées par Ammann, Humbert et Morel dans [**AHM**] et [**AHM03**]. Ces méthodes se rapprochent de celles utilisées par Aubin [**Aub76**] et Schoen [**Sch84**] dans le cas des variétés compactes sans bord ou bien encore Escobar [**Esc92b**] dans le cas des variétés à bord. En effet, à partir du champ de spineurs que l'on vient d'obtenir sur l'hémisphère, on va pouvoir explicitement construire de "bons" spineurs que l'on évaluera dans la caractérisation variationnelle de $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ obtenue dans la Proposition 2.2. Cependant de nombreuses difficultés apparaissent du fait que l'on manipule des spineurs et non plus des fonctions. En effet, il faut tenir compte que le fibré des spineurs dépend de la métrique riemannienne et la construction de spineurs-tests à partir de champs de Killing sur $\mathbb{S}^n_+$ nécessitent beaucoup de précautions comme on va le voir dans la section suivante.

4. Construction d'une trivialisation adaptée du fibré des spineurs

Dans cette section, on va construire une trivialisation du fibré des spineurs au voisinage d'un point $q \in \partial\mathrm{M}$ à partir d'un système de coordonnées adapté au voisinage de ce point. Cette trivialisation va permettre d'identifier le fibré des spineurs au-dessus de la variété (M, g) avec celui au-dessus de M munie d'une autre métrique.

On considère donc (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte à bord non vide $\partial\mathrm{M}$ munie des structures riemannienne et spinorielle induites par celles de la variété ambiante M. On notera g la restriction au bord $\partial\mathrm{M}$ de la métrique sur M. Considérons alors un point $q \in \partial\mathrm{M}$ et soit $(x_1, ..., x_{n-1})$ un système de coordonnées normales en ce point. Si $t \mapsto \gamma(t) = t$ désigne la géodésique orthogonale à $\partial\mathrm{M}$ paramétrée par la longueur d'arc, il existe alors deux ouverts $\mathrm{U} \subset \mathrm{T}_q\mathrm{M}$ et $\mathrm{V} \subset \mathrm{M}$ tels que l'application donnée par

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}_q : & \mathrm{U} \subset \mathrm{T}_q\mathrm{M} & \longrightarrow & \mathrm{V} \subset \mathrm{M} \\ & (x_1, ..., x_{n-1}, t) & \longmapsto & m \end{array}$$

soit un difféomorphisme préservant l'orientation. C'est donc un système de coordonnées locales de M en un point q du bord qui est appelé "système de coordonnées de Fermi". Remarquons que $\mathrm{T}_q\mathrm{M} \simeq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$, et donc que U est un ouvert du type $\mathrm{U}' \times [0, \epsilon[$, où U' est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\epsilon > 0$. De plus, si $t > 0$, alors $m \in \overset{\circ}{\mathrm{V}}$, et si t=0, $m \in \mathrm{V} \cap \partial\mathrm{M}$. Dans ce système de coordonnées, la métrique ds^2 est donné par :

$$ds^2 = dt^2 + g_{ij}(x,t)dx^i dx^j, \tag{17}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq n-1$ et pour tout $(x,t) \in \mathrm{U}$. Posons alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{G}: & \mathrm{V} \subset \mathrm{M} & \longrightarrow & \mathrm{S}^2_+(n,\mathbb{R}) = \{\text{matrices symétriques définies-positives } n \times n\} \\ & m & \longmapsto & \mathrm{G}_m = \big(g_{ij}(m)\big)_{1 \leq i,j \leq n}. \end{array}$$

Cette application est clairement lisse, car la métrique g dépend de manière lisse du point m. Comme dans ce système de coordonnées, la métrique est donnée par (17), on peut alors poser :

$$\mathrm{G}_m = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathrm{G}}_m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \widetilde{\mathrm{G}}_m = \big(g_{ij}(m)\big)_{1 \leq i,j \leq n-1}.$$

De plus, puisque la variété M est riemannienne, la métrique est définie positive en chaque point de V et la matrice G_m est donc définie positive pour tout $m \in \mathrm{V}$. De la même manière, pour tout $m \in \mathrm{V}$, $\widetilde{\mathrm{G}}_m$ est une matrice définie positive. Il existe alors une matrice symétrique $\widetilde{\mathrm{B}}_m \in \mathrm{S}^2(n-1,\mathbb{R})$ telle que :

$$\widetilde{\mathrm{B}}^2_m = \widetilde{\mathrm{G}}^{-1}_m \tag{18}$$

et qui dépend aussi de manière lisse du point $m \in \mathrm{V}$. Si on pose :

$$\mathrm{B}_m = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathrm{B}}_m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{S}^2(n,\mathbb{R}),$$

cette matrice satisfait la relation $\mathrm{B}^2_m = \mathrm{G}^{-1}_m$ pour tout $m \in \mathrm{V}$. Remarquons que pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, ..., x_{n-1}, t) \in \mathbb{R}^n \;/\; t \geq 0\}$, on a :

$$^t\big(\mathrm{B}_m X\big)\mathrm{G}_m\big(\mathrm{B}_m Y\big) = \;^tX\;\mathrm{I}_n Y = \xi(X,Y), \tag{19}$$

où ξ est le produit scalaire euclidien standard sur $\mathbb{R}^n_+$. En tout point $m \in \mathrm{V}$, on a donc construit un isomorphisme :

$$\mathrm{B}_m : \; \big(\mathrm{T}_{\mathcal{F}_q^{-1}(m)}\mathrm{U} \simeq \mathbb{R}^n_+, \xi\big) \;\; \longrightarrow \;\; \big(\mathrm{T}_m\mathrm{V}, g_m\big),$$

qui dépend de façon lisse du point m. De plus, cette application est une isométrie grâce à la propriété (19) (par construction). On est alors en mesure d'identifier localement grâce aux coordonnées de Fermi les SO_n-fibrés principaux des repères linéaires :

$$\mathrm{SO}(\mathrm{U},\xi) = \mathrm{U} \times \mathrm{SO}\big(\mathrm{T}_{\mathcal{F}_q^{-1}(m)}\mathrm{U}, \xi\big) \quad \text{et} \quad \mathrm{SO}(\mathrm{V},g) = \mathrm{V} \times \mathrm{SO}\big(\mathrm{T}_m\mathrm{V}, g_m\big),$$

où $\mathrm{SO}(\mathrm{T}_{\mathcal{F}_q^{-1}(m)}\mathrm{U},\xi)$ (resp. $\mathrm{SO}(\mathrm{T}_m\mathrm{V}, g_m)$) est le groupe spécial ortoghonal de $\mathrm{T}_{\mathcal{F}_q^{-1}(m)}\mathrm{U}$ (resp. $\mathrm{T}_m\mathrm{V}$) qui présèrve le produit scalaire ξ (resp. g_m). En effet, l'action de B permet d'écrire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \times \mathrm{SO}\big(\mathrm{T}_{\mathcal{F}_q^{-1}(m)}\mathrm{U}, \xi\big) \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d] & \mathrm{V} \times \mathrm{SO}\big(\mathrm{T}_m\mathrm{V}, g_m\big) \arrow[d] \\ \mathrm{U} \subset \mathrm{T}_q\mathrm{M} \arrow[r, "\mathcal{F}_q"'] & \mathrm{V} \subset \mathrm{M} \end{tikzcd}$$

où l'application $\zeta := \mathcal{F}_q \times \mathrm{B}$ est donnée par l'action naturelle de B sur chaque section de $\mathrm{SO}(\mathrm{U},\xi)$. On peut relever l'application ζ à $\mathrm{U} \times \mathrm{Spin}\big(\mathrm{T}_{\mathcal{F}_q^{-1}(m)}\mathrm{U}, \xi\big)$ et $\mathrm{V} \times \mathrm{Spin}\big(\mathrm{T}_m\mathrm{V}, g_m\big)$ au-dessus des ouverts U et V, où $\mathrm{Spin}(\mathrm{T}_{\mathcal{F}_q^{-1}(m)}\mathrm{U},\xi)$ (resp. $\mathrm{Spin}(\mathrm{T}_m\mathrm{V}, g_m)$) est le groupe spinoriel de $(\mathrm{T}_{\mathcal{F}_q^{-1}(m)}\mathrm{U},\xi)$ (resp. $(\mathrm{T}_m\mathrm{V}, g_m)$) qui est le revêtement universel du groupe

$\mathrm{SO}(\mathrm{T}_{\mathcal{F}_q^{-1}(m)}\mathrm{U},\xi)$ (resp. $\mathrm{SO}(\mathrm{T}_m\mathrm{V},g_m)$) pour $n\geq 3$. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U}\times\mathrm{Spin}\big(\mathrm{T}_{\mathcal{F}_q^{-1}(m)}\mathrm{U},\xi\big) \arrow[r, "\widetilde{\zeta}"] \arrow[d] & \mathrm{V}\times\mathrm{Spin}\big(\mathrm{T}_m\mathrm{V},g_m\big) \arrow[d] \\
\mathrm{U}\subset\mathrm{T}_q\mathrm{M} \arrow[r, "\mathcal{F}_q"'] & \mathrm{V}\subset\mathrm{M}.
\end{tikzcd}$$

Cet isomorphisme $\widetilde{\zeta}$ permet d'obtenir unr trivialisation du fibrés des spineurs $\Sigma_g(\mathrm{M})$ au-dessus de V donnée par l'isomorphisme (qui est une isométrie sur les fibres) :

$$\begin{array}{rcl}
\Sigma_\xi(\mathrm{U}):=\Big(\mathrm{U}\times\mathrm{Spin}\big(\mathrm{T}_{\mathcal{F}_q^{-1}(m)}\mathrm{U},\xi\big)\Big)\times_{\rho_n}\Sigma_n & \longrightarrow & \Sigma_g(\mathrm{V}):=\Big(\mathrm{V}\times\mathrm{Spin}\big(\mathrm{T}_m\mathrm{V},g_m\big)\Big)\times_{\rho_n}\Sigma_n \\
\psi=[s,\varphi] & \longmapsto & \overline{\psi}=[\widetilde{\zeta}(s),\varphi],
\end{array} \tag{20}$$

où ρ_n est la représentation spinorielle. De la même manière, cette trivialisation induit une trivialisation de la restriction au bord du fibré des spineurs qui, on le rappelle, est définis par :

$$\mathbf{S}_g(\mathrm{V}) \ := \ \Big(\big(\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}\big)\times\mathrm{Spin}\big(\mathrm{T}_m(\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}),g_m\big)\Big)\times_{\rho_n\circ\alpha}\Sigma_n,$$

où l'application α est l'application qui permet d'identifier l'algèbre de Clifford complexe $\mathbb{C}l_{n-1}$ avec la partie paire de l'algèbre de Clifford complexe $\mathbb{C}l_n$.

On conclut cette section par un point essentiel pour la suite. En effet, on va exprimer l'opérateur de Dirac D_g agissant sur les sections du fibré $\Sigma_g(\mathrm{V})$ en fonction de l'opérateur de Dirac D_ξ agissant sur les sections du fibré $\Sigma_\xi(\mathrm{U})$ dans la trivialisation que l'on vient de construire. Pour cela, on pose :

$$e_i:=b_i^j\partial_j,$$

de telle sorte que $\big(e_1,...,e_n\big)$ est un repère orthonormé de (TV,g), où :

$$\partial_j=\left\{\begin{array}{ll}\frac{\partial}{\partial x_j} & \text{pour } 1\leq j\leq n-1\\ \frac{\partial}{\partial x_n}=\frac{\partial}{\partial t} & \end{array}\right.$$

dans le système de coordonnées de Fermi. De plus, par les identifications effectuées précédemment, on peut supposer que le champ de vecteurs unitaire e_n normal rentrant à $\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}$ est donné par :

$$e_n=\nu=\partial_t, \tag{21}$$

et on a donc $b_n^j=\delta_n^j$ et $b_i^n=\delta_i^n$ pour tout $1\leq i,j\leq n$. On vérifie alors que les multiplications de Clifford et les produits scalaires hermitiens sur $\Sigma_\xi(\mathrm{U})$ et $\Sigma_g(\mathrm{V})$ sont reliés par :

$$\overline{\gamma_\xi(\partial_i)\psi}=\gamma_g(e_i)\overline{\psi} \qquad \text{et} \qquad \langle\overline{\psi},\overline{\varphi}\rangle_g=\langle\psi,\varphi\rangle_\xi \tag{22}$$

pour tout ψ, $\varphi\in\Gamma\big(\Sigma_\xi(\mathrm{U})\big)$ et où γ_ξ (resp. γ_g) désigne la multiplication de Clifford sur $\Sigma_\xi(\mathrm{U})$ (resp. $\Sigma_g(\mathrm{V})$) et $\langle\ ,\ \rangle_\xi$ (resp. $\langle\ ,\ \rangle_g$) le produit scalaire hermitien sur $\Sigma_\xi(\mathrm{U})$ (resp. $\Sigma_g(\mathrm{V})$).

Dans la suite, on notera ∇ (resp. $\overline{\nabla}$) les connexions de Levi-Civita riemannienne et spinorielle de (U,ξ) (resp. (V,g)). Cependant, on notera indifféremment par γ les multiplications de Clifford agissant sur $\Sigma_\xi(\mathrm{U})$ et $\Sigma_g(\mathrm{V})$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.4. *Si* D_ξ *et* D_g *désignent les opérateurs de Dirac agissant respectivement sur* $\Sigma_\xi(\mathrm{U})$ *et* $\Sigma_g(\mathrm{V})$*, on a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_g\overline{\psi} &= \overline{\mathrm{D}_\xi\psi}+\sum_{i,j=1}^{n}\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}+\gamma(\mathrm{W})\overline{\psi}+\gamma(\mathrm{T})\overline{\psi}\\ &\quad+\gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi}-\frac{n-1}{2}\mathrm{H}_t\gamma(\widetilde{\nu})\overline{\psi}, \end{aligned}\tag{23}$$

où $\widetilde{\nu}\in\Gamma(\mathrm{TV})$ *est une extention locale du champ de vecteurs unitaire normal* $\nu\in\Gamma(\mathrm{TV}_{|\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}})$ *et où* $\mathrm{W}\in\Gamma(\Lambda^3(\mathrm{T}^*\mathrm{V}))$, $\mathrm{T}\in\Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{V})$ *et* $\mathrm{U}\in\Gamma(\Lambda^2(\mathrm{T}^*\mathrm{V}))$ *sont donnés par :*

$$\begin{aligned}\mathrm{W} &= \frac14\sum_{\substack{1\le i,j,k\le n-1\\ i\neq j\neq k}} b_i^r\partial_r(b_j^l)(b^{-1})_k^l\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\\ \mathrm{T} &= \frac14\sum_{1\le i,j\le n-1}(\widetilde{\Gamma}_{ij}^i-\widetilde{\Gamma}_{ii}^j)\gamma(e_j)\\ \mathrm{Z} &= \frac14\sum_{\substack{1\le i,j\le n-1\\ i\neq j}}\big(\partial_n(b_i^l)(b^{-1})_j^l+b_j^r\Gamma_{rn}^l(b^{-1})_i^l\big)\gamma(e_i)\gamma(e_j),\end{aligned}$$

avec H_t *la courbure moyenne de* $\partial\mathrm{M}_t:=\{\mathcal{F}_p(x,t)\ /\ t \text{ est fixé}\}$ *et où, pour tout* $m\in\mathrm{V}$*, les coefficients* $(b^{-1})_l^k$ *sont les coefficients de la matrice inverse de* B_m*.*

Preuve : Rappelons tout d'abord que la connexion de Levi-Civita spinorielle est donnée par :

$$\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\psi}=e_i(\overline{\psi})+\frac14\sum_{1\le j,k\le n}\widetilde{\Gamma}_{ij}^k\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi},\tag{24}$$

où $\psi\in\Gamma(\Sigma_\xi(\mathrm{U}))$, $\overline{\psi}\in\Gamma(\Sigma_g(\mathrm{V}))$ est son image par l'identification (20) et $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ sont les symboles de Christoffel dans le repère $\{e_1,...,e_n\}$ définis par $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k=g(\overline{\nabla}_{e_i}e_j,e_k)$. En utilisant l'expression locale de l'opérateur de Dirac D^g agissant sur $\Sigma_g(\mathrm{V})$, on obtient :

$$\mathrm{D}_g\overline{\psi}=\overline{\mathrm{D}_\xi\psi}+\sum_{i,j=1}^{n}\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}+\frac14\sum_{1\le i,j,k\le n}\widetilde{\Gamma}_{ij}^k\,\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}.$$

Développons maintenant le dernier terme de cette identité. Pour cela, on décompose cette somme en une sommation sur les vecteurs tangents au bord et une autre sur le vecteur normal. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j,k\leq n} \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} + \sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{\Gamma}^n_{ij}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_n)\overline{\psi} \\
&= \sum_{j,k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Gamma}^k_{in}\gamma(e_i)\gamma(e_n)\gamma(e_k)\overline{\psi} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Gamma}^n_{ij}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_n)\overline{\psi} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Gamma}^n_{in}\gamma(e_i)\gamma(e_n)\gamma(e_n)\overline{\psi} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} + \sum_{k,j=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^k_{nj}\gamma(e_n)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} \\
&\quad + \sum_{i,k}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^k_{in}\gamma(e_i)\gamma(e_n)\gamma(e_k)\overline{\psi} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^n_{ij}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_n)\overline{\psi} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\Gamma}^k_{nn}\gamma(e_k)\overline{\psi} + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\Gamma}^n_{nj}\gamma(e_j)\overline{\psi} - \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Gamma}^n_{in}\gamma(e_i)\overline{\psi}.
\end{aligned}$$

On obtient donc, puisque $\widetilde{\Gamma}^n_{nn}(m) = 0$ pour tout $m \in \mathrm{V}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j,k\leq n} \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} &= \sum_{i,j,k=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} + \gamma(\widetilde{\nu})\sum_{i,j=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^j_{ni}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi} \\
&\quad -\gamma(\widetilde{\nu})\sum_{i,j=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^j_{in}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi} + \gamma(\widetilde{\nu})\sum_{i,j=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^n_{ij}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^i_{nn}\gamma(e_i)\overline{\psi} + \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^n_{ni}\gamma(e_i)\overline{\psi} - \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^n_{in}\gamma(e_i)\overline{\psi}.
\end{aligned}$$

Or remarquons que $\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = g(\overline{\nabla}_{e_i}e_j, e_k) = -g(e_j, \overline{\nabla}_{e_i}e_k) = -\widetilde{\Gamma}^j_{ik}$ (mais ces symboles de Christoffel ne sont pas symétriques car $[e_i, e_j] \neq 0$) et que puisque le champ de vecteurs $\widetilde{\nu} = \partial_t$ est obtenu par transport parallèle le long d'une géodésique, on a $\widetilde{\Gamma}^i_{nn} = g(\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, e_i) = 0$. De plus,

$$\widetilde{\Gamma}^n_{in} = e_i(g(\widetilde{\nu}, \widetilde{\nu})) - g(e_i, \overline{\nabla}_{\widetilde{\nu}}\widetilde{\nu}) = -\widetilde{\Gamma}^n_{in},$$

et alors $\widetilde{\Gamma}^n_{in} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k=1}^{n} \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} &= \sum_{i,j,k=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} + \gamma(\widetilde{\nu})\sum_{i,j=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^j_{ni}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi} \\
&\quad -2\gamma(\widetilde{\nu})\sum_{i,j=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^j_{in}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi}.
\end{aligned}$$

Cependant, on peut développer le dernier terme de l'expression précédente en :

$$\begin{aligned}
2\sum_{i,j=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{in}^{j}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi} &= \sum_{i,j=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{in}^{j}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi}+\sum_{i,j=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{jn}^{i}\gamma(e_j)\gamma(e_i)\overline{\psi}\\
&= \sum_{i,j=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{in}^{j}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi}-\sum_{i,j=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{jn}^{i}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi}-2\sum_{i,j=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{jn}^{i}\delta_{ij}\overline{\psi}\\
&= \sum_{i,j=1}^{n-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{in}^{j}-\widetilde{\Gamma}_{jn}^{i}\big)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi}-2\sum_{i=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{in}^{i}\overline{\psi}\\
&= \sum_{i,j=1}^{n-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{in}^{j}-\widetilde{\Gamma}_{jn}^{i}\big)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi}+2(n-1)\mathrm{H}_t\overline{\psi},
\end{aligned}$$

où $\mathrm{H}_t=-\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}g(\overline{\nabla}_{e_i}\nu,e_i)$ est la courbure moyenne de $\partial\mathrm{M}_t:=\{\mathcal{F}_p(x,t)\ /\ t \text{ est fixé}\}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k=1}^{n}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} &= \sum_{i,j,k=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}-2(n-1)\gamma(\widetilde{\nu})\mathrm{H}_t\overline{\psi}\\
&\quad+\gamma(\widetilde{\nu})\sum_{i,j=1}^{n-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{ni}^{j}+\widetilde{\Gamma}_{jn}^{i}-\widetilde{\Gamma}_{in}^{j}\big)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi}. \qquad (25)
\end{aligned}$$

Remarquons encore que puisque $\widetilde{\Gamma}_{ni}^{i}=0$, on a :

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i=j}}^{n-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{ni}^{j}+\widetilde{\Gamma}_{jn}^{i}-\widetilde{\Gamma}_{in}^{j}\big)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi}=0,$$

et l'opérateur de Dirac est donc donné par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_g\overline{\psi} &= \overline{\mathrm{D}_\xi\psi}+\sum_{i,j=1}^{n}\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}+\frac{1}{4}\sum_{i,j,k=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}\\
&\quad+\frac{1}{4}\gamma(\widetilde{\nu})\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{ni}^{j}+\widetilde{\Gamma}_{jn}^{i}-\widetilde{\Gamma}_{in}^{j}\big)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi}-\frac{n-1}{2}\mathrm{H}_t\gamma(\widetilde{\nu})\overline{\psi}.
\end{aligned}$$

Développons maintenant le troisième terme de l'égalité précédente. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} &= \sum_{i\neq j\neq k\neq i}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}+\sum_{i=j\neq k}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}\\
&\quad+\sum_{i\neq j=k}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}+\sum_{j\neq i=k}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}\\
&\quad+\sum_{i=j=k}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}. \qquad (26)
\end{aligned}$$

Or d'une part, on a :

$$\sum_{i=j\neq k}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}=-\sum_{j\neq k}\widetilde{\Gamma}_{jj}^{k}\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}=-\sum_{i\neq j}\widetilde{\Gamma}_{ii}^{j}\gamma(e_j)\overline{\psi}.$$

D'autre part, on a :

$$\sum_{i\neq j=k}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}=-\sum_{i\neq j}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{j}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi}=\sum_{i\neq j}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{j}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi}=0$$

et

$$\sum_{j\neq i=k}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}=\sum_{i\neq j}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{i}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_i)\overline{\psi}=\sum_{i\neq j}\widetilde{\Gamma}_{ii}^{j}\gamma(e_j)\overline{\psi}.$$

Le terme (26) s'écrit donc finalement :

$$\sum_{i,j,k=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}\;=\;\sum_{i\neq j\neq k\neq i}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}+\sum_{i,j=1}^{n-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{ij}^{i}-\widetilde{\Gamma}_{ii}^{j}\big)\gamma(e_j)\overline{\psi},$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_g\overline{\psi}\;=\;&\overline{\mathrm{D}_\xi\psi}+\sum_{i,j=1}^{n}\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}+\overbrace{\frac{1}{4}\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}}^{(1)}\\
&\underbrace{+\frac{1}{4}\gamma(\widetilde{\nu})\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{ni}^{j}+\widetilde{\Gamma}_{jn}^{i}-\widetilde{\Gamma}_{in}^{j}\big)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi}}_{(2)} \qquad (27)\\
&+\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{ij}^{i}-\widetilde{\Gamma}_{ii}^{j}\big)\gamma(e_j)\overline{\psi}-\frac{n-1}{2}\mathrm{H}_t\gamma(\widetilde{\nu})\overline{\psi}.
\end{aligned}$$

On va pouvoir maintenant développer cette expression en fonction des coefficients $(b_i^j)_{1\leq i,j\leq n}$ afin d'avoir exactement le développement annoncé. Regardons le terme (1) de l'expression (27) ; on rappelle que le repère orthonormé local $\{e_1,...,e_n\}$ est défini par la relation $e_i=b_i^j\partial_j$, où $\{\partial_1,...,\partial_{n-1},\partial_n\}$ est le repère local induit par les coordonnées de Fermi, on a donc : $\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}e_k=\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}b_k^l\partial_l$ (où on a adopté la convention de sommation d'Einstein). D'autre part,

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}e_k=\overline{\nabla}_{e_i}e_j=b_i^r\overline{\nabla}_{\partial_r}(b_j^s\partial_s)=b_i^r\partial_r(b_j^s)\partial_s+b_i^rb_j^s\Gamma_{rs}^{l}\partial_l,$$

où les symboles de Christoffel Γ_{rs}^{l} sont définis par $\Gamma_{rs}^{l}=g(\overline{\nabla}_{\partial_r}\partial_s,\partial_l)$, donc :

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}e_k=\big(b_i^r\partial_r(b_j^l)+b_i^rb_j^s\Gamma_{rs}^{l}\big)\partial_l,$$

et alors

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}=\big(b_i^r\partial_r(b_j^l)+b_i^rb_j^s\Gamma_{rs}^{l}\big)(b^{-1})_k^l. \qquad (28)$$

Le terme (1) est donc donné par :

$$\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{n-1} \widetilde{\Gamma}_{ij}^k\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} = \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{n-1} \big(b_i^r\partial_r(b_j^l)+b_i^rb_j^s\Gamma_{rs}^l\big)(b^{-1})_k^l\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi}.$$

Cependant, en utilisant la symétrie des symboles de Christoffel Γ_{rs}^l et le fait que $\gamma(e_i)\gamma(e_j)=-\gamma(e_j)\gamma(e_i)$ pour $i\neq j$, on vérifie que :

$$\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{n-1} b_i^rb_j^s\Gamma_{rs}^l(b^{-1})_k^l\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} = -\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{n-1} b_i^rb_j^s\Gamma_{rs}^l(b^{-1})_k^l\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi},$$

et donc :

$$\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{n-1} b_i^rb_j^s\Gamma_{rs}^l(b^{-1})_k^l\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} = 0.$$

On a donc bien montré que le terme (1) vaut :

$$\frac{1}{4}\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{n-1} \widetilde{\Gamma}_{ij}^k\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} = \frac{1}{4}\sum_{\substack{1\leq i,j,k\leq n-1\\ i\neq j\neq k}} b_i^r\partial_r(b_j^l)(b^{-1})_k^l\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\psi} = \gamma(\mathrm{W})\overline{\psi},$$

où

$$\mathrm{W} = \frac{1}{4}\sum_{\substack{1\leq i,j,k\leq n-1\\ i\neq j\neq k}} b_i^r\partial_r(b_j^l)(b^{-1})_k^l\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k) \in \Gamma(\Lambda^3(\mathrm{T}^*\mathrm{V})).$$

Passons maintenant au terme (2) de l'expression (27) ; pour cela, on procède de la même manière que pour obtenir (28). On a :

$$\widetilde{\Gamma}_{ni}^je_j = \widetilde{\Gamma}_{ni}^jb_j^l\partial_l = \overline{\nabla}_\nu e_i = b_n^r\overline{\nabla}_{\partial_r}(b_i^l\partial_l) = \overline{\nabla}_{\partial_n}(b_i^l\partial_l) = \partial_n(b_i^l)\partial_l + b_i^l\Gamma_{nl}^r\partial_r,$$

et alors :

$$\widetilde{\Gamma}_{ni}^j = \big(\partial_n(b_i^l)+b_i^r\Gamma_{nr}^l\big)(b^{-1})_j^l.$$

De plus, on a :

$$\widetilde{\Gamma}_{jn}^ie_i = \widetilde{\Gamma}_{jn}^ib_i^l\partial_l = \overline{\nabla}_{e_j}\nu = b_j^r\overline{\nabla}_{\partial_r}\partial_t = b_j^r\Gamma_{rn}^l\partial_l,$$

et donc $\widetilde{\Gamma}_{jn}^i = b_j^r\Gamma_{rn}^l(b^{-1})_i^l$. En remplaçant ces quantités dans l'expression que l'on veut calculer, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n-1} \big(\widetilde{\Gamma}_{ni}^j+\widetilde{\Gamma}_{jn}^i-\widetilde{\Gamma}_{in}^j\big)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi} &= \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n-1}\Big(\partial_t(b_i^l)(b^{-1})_j^l + b_i^r\Gamma_{nr}^l(b^{-1})_j^l \\ &\quad + b_j^r\Gamma_{rn}^l(b^{-1})_i^l - b_i^r\Gamma_{rn}^l(b^{-1})_i^l\Big)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi}.\end{aligned}$$

Or par symétrie des symboles de Christoffel Γ_{ij}^k, on a alors pour (2) :

$$\frac{1}{4}\gamma(\widetilde{\nu})\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n-1} \big(\widetilde{\Gamma}_{ni}^j+\widetilde{\Gamma}_{jn}^i-\widetilde{\Gamma}_{in}^j\big)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\overline{\psi} = \gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi}, \tag{29}$$

où on a posé

$$\mathrm{Z} = \frac{1}{4}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n-1} \big(\partial_t(b_i^l)(b^{-1})_j^l + b_j^r\Gamma_{rn}^l(b^{-1})_i^l\big)\gamma(e_i)\gamma(e_j) \in \Gamma\big(\Lambda^2(\mathrm{T}^*\mathrm{V})\big)$$

Cela termine la preuve de cette proposition. $\square$

Dans la suite, cette expression va nous permettre de donner un développement limité de l'opérateur de Dirac D, et donc de la fonctionnelle de la Proposition 2.2, au voisinage d'un point $q \in \partial\mathrm{M}$. On verra alors qu'un choix judicieux de métrique ainsi que la construction d'un champ de spineurs s'imposent afin de comparer les invariants $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ et $\lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)$.

5. Le spineur-test

Dans cette partie, on va construire un champ de spineurs permettant d'évaluer la fonctionnelle donnant l'invariant $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ sur une variété riemannienne spinorielle (M^n, g) à bord non vide $\partial\mathrm{M}$ possédant un opérateur de chiralité. On rappelle que l'on a montré dans la Proposition 2.2 que :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) := \inf_{\overline{g}\in[g]}\big\{|\lambda_1(\overline{g})|\mathrm{vol}(\mathrm{M}, \overline{g})^{\frac{1}{n}}\big\} = \inf_{\varphi\in\mathcal{H}_g^{\pm}}\Big\{\frac{\big(\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}_g\varphi|^{\frac{2n}{n+1}}dv(g)\big)^{\frac{n+1}{n}}}{\big|\int_{\mathrm{M}}\mathrm{Re}\langle \mathrm{D}_g\varphi, \varphi\rangle dv(g)\big|}\Big\}.$$

Rappelons aussi que le but de ce chapitre est de comparer cet invariant de la variété M à celui de l'hémisphère $\mathbb{S}^n_+$ que l'on a explicitement calculé dans le paragraphe 3. Pour cela, le spineur-test qui apparaît naturellement, suivant les travaux de Aubin ([**Aub76**]) et de Ammann, Humbert et Morel ([**AHM03**]), va être construit à partir d'un champ de spineurs de Killing sur $\mathbb{S}^n_+$ vérifiant la condition à bord étudiée. En effet, on va tout d'abord construire explicitement un champ de spineurs $\psi^{\pm} \in \Gamma\big(\Sigma_\xi(\mathbb{R}^n_+)\big)$ sur $\mathbb{R}^n_+$ vérifiant le problème à bord :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{D}_\xi\psi^{\pm} = \pm\frac{n}{2}f\psi^{\pm} & \text{sur } \mathbb{R}^n_+ \\ \mathbb{B}^-_\xi(\psi^{\pm}_{|\partial\mathbb{R}^n_+}) = 0 & \text{le long de } \partial\mathbb{R}^n_+, \end{array}\right. \tag{30}$$

où D_ξ est l'opérateur de Dirac agissant sur le fibré $\Sigma_\xi\big(\mathbb{R}^n_+\big)$ et $f : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}^+_*$ est une fonction à valeurs strictement positive. Ensuite, on se servira du fait que le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$ muni de la métrique canonique euclidienne ξ est conformément isométrique à l'hémisphère $\mathbb{S}^n_+ \setminus \{q\}$ (où q est un point du bord $\partial\mathbb{S}^n_+$) muni de sa métrique standard qu'on notera g_{st}. Grâce à cette isométrie, on pourra alors, par l'identification donnée en (12), construire un champ de spineurs de Killing sur $\mathbb{S}^n_+$ vérifiant le problème à bord étudié. C'est ce champ de spineurs qui interviendra par la suite dans l'étude de l'invariant $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$.

L'identification conforme entre le demi-espace $(\mathbb{R}^n_+, \xi)$ et l'hémisphère $(\mathbb{S}^n_+ \setminus \{q\}, g_{\mathrm{st}})$, où g_{st} est la métrique canonique induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $q \in \partial\mathbb{S}^n_+$ est décrite ci-dessous. On effectue une projection stéréographique en prenant le point q sur le bord de $\mathbb{S}^n_+$, et on peut ainsi vérifier que l'on a une isométrie entre :

$$\Big(\mathbb{R}^n_+, \frac{4}{(1+r^2)^2}\,\xi\Big) \quad \text{et} \quad \big(\mathbb{S}^n_+ \setminus \{q\}, g_{\mathrm{st}}\big), \tag{31}$$

où $r^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$ si $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Les variétés $\big(\mathbb{R}^n_+, \xi\big)$ et $\big(\mathbb{S}^n_+ \setminus \{q\}, g_{\mathrm{st}}\big)$ sont donc conformément isométriques. Cette application permet alors une identification des fibrés des spineurs au-dessus de ces deux variétés. En effet, on a l'isomorphisme :

$$\mathrm{F} : \Sigma_\xi\big(\mathbb{R}^n_+\big) \longrightarrow \Sigma_{f^2\xi}\big(\mathbb{R}^n_+\big) \simeq \Sigma_{g_{\mathrm{st}}}\big(\mathbb{S}^n_+ \setminus \{q\}\big), \tag{32}$$

où $f^2(r) = \frac{4}{(1+r^2)^2}$. De plus, il vérifie la relation suivante :

$$\mathrm{F}^{-1}\Big(\mathrm{D}^{\mathbb{S}^n_+}\big(\mathrm{F}(\psi)\big)\Big) = f^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{D}_\xi(f^{\frac{n-1}{2}}\psi), \tag{33}$$

pour tout $\psi \in \Gamma\big(\Sigma_\xi(\mathbb{R}^n_+)\big)$ et où $\mathrm{D}^{\mathbb{S}^n_+}$ (resp. D_ξ) est l'opérateur de Dirac fondamental agissant sur le fibré des spineurs au-dessus de $\big(\mathbb{S}^n_+ \setminus \{q\}, g_{\mathrm{st}}\big)$ $\big($resp. $\big(\mathbb{R}^n_+, \xi\big)\big)$. On s'inspire alors de [**AHM**] pour montrer l'existence d'un champ de spineurs sur $\big(\mathbb{R}^n_+, \xi\big)$ vérifiant le problème à bord (30). En effet, on a :

Proposition 2.5. *Sur le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$ muni de la métrique canonique euclidienne ξ, il existe un champ de spineurs non nul $\psi^\pm \in \Gamma\big(\Sigma_\xi(\mathbb{R}^n_+)\big)$ vérifiant le problème à bord :*

$$\begin{cases} \mathrm{D}_\xi\psi^\pm = \pm\frac{n}{2}f\psi^\pm & \textit{sur } \mathbb{R}^n_+ \\ \mathbb{B}^-_\xi(\psi^\pm_{|\partial\mathbb{R}^n_+}) = 0 & \textit{le long de } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases}$$

Preuve : On commence par construire un champ $\psi^\pm$ vérifiant $\mathrm{D}_\xi\psi^\pm = \pm\frac{n}{2}f\psi^\pm$ sur $\mathbb{R}^n_+$ et on montre ensuite qu'un tel champ peut être choisi vérifiant la condition à bord étudiée. Pour cela, fixons un champ de spineurs parallèle $\Phi_0 \in \Gamma\big(\Sigma_\xi(\mathbb{R}^n_+)\big)$, et posons pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+$:

$$\Psi^\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}f^{\frac{n}{2}}(r)\gamma(1 \mp x)\Phi_0(x), \tag{34}$$

où $r^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$. En rappelant que l'opérateur de Dirac D_ξ est localement donné par :

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{D}_\xi : & \Gamma\big(\Sigma_\xi(\mathbb{R}^n_+)\big) & \longrightarrow & \Gamma\big(\Sigma_\xi(\mathbb{R}^n_+)\big) \\ & \varphi & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \gamma(\partial_i)\partial_i\varphi, \end{array}$$

où $(\partial_i)_{1\leq i\leq n}$ vérifie $\gamma(\partial_i)\gamma(\partial_j) + \gamma(\partial_j)\gamma(\partial_i) = -2\delta_{ij}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. On calcule maintenant explicitement l'expression de $\mathrm{D}_\xi\Psi^+$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_\xi\Psi^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^n\gamma(\partial_i)\partial_i\big(f^{\frac{n}{2}}(r)\gamma(1-x)\Phi_0\big)(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^n\partial_i\big(f^{\frac{n}{2}}(r)\big)\gamma(\partial_i)\gamma(1-x)\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^n f^{\frac{n}{2}}(r)\gamma(\partial_i)\gamma\big(\partial_i(1-x)\big)\Phi_0 \\
&= \frac{n}{2\sqrt{2}}\sum_{i=1}^n\partial_i(f(r))f^{\frac{n}{2}-1}(r)\gamma(\partial_i)\gamma(1-x)\Phi_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^n f^{\frac{n}{2}}(r)\gamma(\partial_i)\gamma(\partial_i)\Phi_0 \\
&= -\frac{n}{2\sqrt{2}}\sum_{i=1}^n x_i f^{\frac{n}{2}+1}(r)\gamma(\partial_i)\gamma(1-x)\Phi_0 + \frac{n}{\sqrt{2}}f^{\frac{n}{2}}(r)\Phi_0,
\end{aligned}$$

et alors :

$$\mathrm{D}_\xi\Psi^+(x) \;=\; -\frac{n}{2\sqrt{2}}f^{\frac{n}{2}+1}(r)\gamma(x)\Phi_0 - \frac{n}{2\sqrt{2}}f^{\frac{n}{2}+1}(r)r^2\Phi_0 + \frac{n}{\sqrt{2}}f^{\frac{n}{2}}(r)\Phi_0.$$

En remarquant que :

$$2 - f(r)r^2 = f(r),$$

on obtient alors :

$$\mathrm{D}_\xi\Psi^+(x) = \frac{n}{2}f(r)\Psi^+(x). \tag{35}$$

Reste alors à montrer que ce champ de spineurs peut être choisi vérifiant la condition à bord CHI. Pour cela, on considère le champ de vecteurs ν unitaire normal à $\partial\mathbb{R}^n_+$ et on le prolonge à $\mathbb{R}^n_+$ tout entier par transport parallèle, c'est-à-dire qu'on le prolonge en un champ de vecteurs $\widetilde{\nu} \in \Gamma(\mathrm{T}\mathbb{R}^n_+)$ tel que $\widetilde{\nu}(x) = \nu(x)$ pour tout $x \in \partial\mathbb{R}^n_+$. On pose :

$$\Psi_0 = \frac{1}{2}(\Phi_0 + \gamma(\widetilde{\nu})\Gamma\Phi_0),$$

où Γ est l'opérateur de chiralité de $\Sigma_\xi\big(\mathbb{R}^n_+\big)$. Il est alors immédiat que ce champ de spineurs vérifie :

$$\gamma(\nu)\Gamma\Psi_{0|\partial\mathbb{R}^n_+} = \Psi_{0|\partial\mathbb{R}^n_+}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathbb{B}^-_\xi(\Psi_{0\,|\partial\mathbb{R}^n_+}) = 0, \tag{36}$$

et c'est encore un champ parallèle (puisque le bord $\partial\mathbb{R}^n_+$ est totalement géodésique dans $\mathbb{R}^n_+$). La relation (35) ne reposant que sur le parallélisme du spineur Φ_0 dans l'expression (34), un calcul immédiat permet de vérifier que le champ de spineurs

$$\psi^+(x) = f^{\frac{n}{2}}(r)\gamma(1-x)\Psi_0(x) \tag{37}$$

vérifie bien le problème à bord (30). Remarquons pour finir la preuve de cette proposition que le champ de spineurs ψ^+ peut être construit de manière à vérifier $\mathbb{B}^+_\xi(\psi^+_{|\partial\mathbb{R}^n_+}) = 0$. $\square$

On peut alors énoncer la proposition annoncée dans la section 3 donnant une construction explicite d'un champ de spineurs de Killing sur $\mathbb{S}^n_+$ vérifiant le problème à bord (PVB). En effet, on a :

Proposition 2.6. *Il existe un champ de spineurs de Killing $\varphi^\pm \in \Gamma\big(\Sigma_{g_{\mathrm{st}}}\big(\mathbb{S}^n_+\big)\big)$ vérifiant le problème à bord*

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{D}^{\mathbb{S}^n_+}\varphi^\pm = \pm\frac{n}{2}\varphi^\pm & \textit{sur } \mathbb{S}^n_+ \\ \mathbb{B}^-_{g_{\mathrm{st}}}(\varphi^\pm_{|\partial\mathbb{S}^n_+}) = 0 & \textit{le long de } \partial\mathbb{S}^n_+. \end{array}\right. \tag{38}$$

Preuve : On sait par la Proposition 2.5 qu'il existe un champ de spineurs $\psi^\pm \in \Gamma(\Sigma_\xi(\mathbb{R}^n_+)\big)$ vérifiant le problème à bord (30). Si on pose $\varphi^\pm := f^{-\frac{n-1}{2}}\mathrm{F}(\psi^\pm)$, où F est l'isomorphisme de fibrés donné en (32), alors $\varphi^\pm \in \Gamma\big(\Sigma_{g_{\mathrm{st}}}(\mathbb{S}^n_+ \setminus \{q\})\big)$ et par la relation (33), on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{\mathbb{S}^n_+}\varphi^\pm &= \mathrm{D}^{\mathbb{S}^n_+}\big(f^{-\frac{n-1}{2}}\mathrm{F}(\psi^\pm)\big) \\
&= f^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{F}\big(\mathrm{D}_\xi\psi^\pm\big) \\
&= \pm\tfrac{n}{2}f^{-\frac{n+1}{2}}f\,\mathrm{F}(\psi^\pm) \\
&= \pm\tfrac{n}{2}\varphi^\pm.
\end{aligned}$$

De plus, puisque la condition à bord étudiée est invariante par changement conforme, on a :

$$\mathbb{B}^-_{g_{\mathrm{st}}}(\varphi^{\pm}_{|\partial\mathbb{S}^n_+}) = 0.$$

Le champ de spineurs $\varphi^{\pm}$ est donc un champ de spineurs de Killing qui vérifie le problème à bord (38) sur $\mathbb{S}^n_+ \setminus \{q\}$. On montre alors que ce champ de spineurs satisfait (2.6) sur $\mathbb{S}^n_+$ tout entier. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta_\varepsilon : \mathrm{U} \to [0,1]$ une fonction de cut-off sur un ouvert U de $\mathbb{S}^n_+$ contenant q et qui vérifie $\eta_\varepsilon \equiv 1$ sur $\mathrm{B}^+_\varepsilon(q)$, $\mathrm{supp}\,(\eta_\varepsilon) \subset \mathrm{B}^+_{2\varepsilon}(q)$ et $|\nabla\eta_\varepsilon| \leq C/\varepsilon$ où C est une constante réelle strictement positive. On remarque que pour tout $\Phi \in \mathcal{H}^-$ on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{U}} \langle\varphi, \mathrm{D}^{\mathbb{S}^n_+}\Phi\rangle dv(g_{\mathrm{st}}) &= \int_{\mathrm{U}} \langle\varphi, \mathrm{D}^{\mathbb{S}^n_+}\big(\eta_\varepsilon\Phi + (1-\eta_\varepsilon)\Phi\big)\rangle dv(g_{\mathrm{st}}) \\ &= \int_{\mathrm{U}} \langle\varphi, \mathrm{D}^{\mathbb{S}^n_+}\big((1-\eta_\varepsilon)\Phi\big)\rangle dv(g_{\mathrm{st}}) + \int_{\mathrm{U}} \langle\varphi, \eta_\varepsilon\mathrm{D}^{\mathbb{S}^n_+}\Phi\rangle dv(g_{\mathrm{st}}) \\ &\quad + \int_{\mathrm{U}} \langle\varphi, \gamma(\nabla\eta_\varepsilon)\Phi\rangle dv(g_{\mathrm{st}}) \end{aligned} \tag{39}$$

Puisque φ est une solution du problème à bord (38) sur $\mathbb{S}^n_+ \setminus \{q\}$, on obtient :

$$\int_{\mathrm{U}} \langle\varphi, \mathrm{D}^{\mathbb{S}^n_+}\big((1-\eta_\varepsilon)\Phi\big)\rangle dv(g_{\mathrm{st}}) = \frac{n}{2}\int_{\mathrm{U}} \langle\varphi, (1-\eta_\varepsilon)\Phi\rangle dv(g_{\mathrm{st}}) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{n}{2}\int_{\mathrm{U}} \langle\varphi, \Phi\rangle dv(g_{\mathrm{st}}).$$

D'autre part, le deuxième terme de l'identité (39) peut être estimé par :

$$\Big|\int_{\mathrm{U}} \langle\varphi, \eta_\varepsilon\mathrm{D}^{\mathbb{S}^n_+}\Phi\rangle dv(g_{\mathrm{st}})\Big| \leq ||\varphi||_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}^+_{2\varepsilon})}||\mathrm{D}^{\mathbb{S}^n_+}\Phi||_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}^+_{2\varepsilon})}.$$

Il est alors facile de voir que le terme de droite tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$. Reste à estimer le dernier terme de (39). Pour cela, on remarque que :

$$\Big|\int_{\mathrm{U}} \langle\varphi, \gamma(\nabla\eta_\varepsilon)\Phi\rangle dv(g_{\mathrm{st}})\Big| \leq \mathrm{vol}\big(\mathrm{B}^+_{2\varepsilon}(q)\big)^{\frac{1}{2}}\,||\nabla\eta||_{\mathrm{C}^0}\,||\varphi||_{\mathrm{L}^2}\,||\Phi||_{\mathrm{L}^2} \leq C||\varphi||_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}^+_{2\varepsilon})}\,\varepsilon^{\frac{n}{2}-1}$$

et puisque $n \geq 2$, ce terme tend bien vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$. On a ainsi prouver que le champ de spineurs vérifie au sens faible mais sur tout l'ouvert U le problème (38). Les résultats classiques de régularité permettent de conclure qu'il satisfait ce problème au sens fort sur $\mathbb{S}^n_+$ tout entier. $\square$

On verra alors dans la section 6 qu'à partir du champ de spineurs de la Proposition 2.6, on pourra construire un spineur-test adapté au problème permettant ainsi la comparaison de $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ et $\lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)$. En effet, en utilisant une fonction de cut-off à support compact dans l'ouvert de trivialisation $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n_+$ introduit dans le paragraphe 4, on construit un champ de spineurs à support compact contenu dans cet ouvert. Ensuite, grâce à la trivialisation étudiée dans la section 4, on obtient un champ de spineurs dont le support est contenu dans l'ouvert $\mathrm{V} \subset \mathrm{M}$ constituant un candidat naturel pour atteindre l'objectif fixé.

6. Une majoration de l'invariant spinoriel conforme $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$

Dans ce chapitre, on donne une majoration de $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ par $\lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)$ pour toute variété compacte riemannienne (M^n, g) à bord munie d'une structure spinorielle σ et d'un opérateur de chiralité Γ. En effet, on va voir qu'un développement de la métrique et de l'opérateur de Dirac au voisinage d'un point du bord, ainsi que l'utilisation du spineur-test construit à l'aide du champ de Killing de la section 5 permettent alors de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne spinorielle compacte à bord non vide* $\partial\mathrm{M}$ *possédant un opérateur de chiralité. Alors si* $n \geq 2$*, on a :*

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M}) \leq \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+) = \frac{n}{2}\Big(\frac{\omega_n}{2}\Big)^{\frac{1}{n}}, \tag{40}$$

où $\omega_n = \mathrm{vol}(\mathbb{S}^n, g_{st})$.

La démonstration de ce résultat sera découpée en deux parties selon que la dimension de la variété M satisfait $n \geq 3$ ou $n = 2$. En effet, on verra que la démonstration dans le cas où $n \geq 3$ ne permet pas de conclure lorsque $n = 2$ et on devra alors effectuer une petite modification afin de la rendre valide.

6.1. Développement de l'opérateur de Dirac au voisinage d'un point du bord. Dans cette partie, on va donner un développement limité (au voisinage d'un point $q \in \partial\mathrm{M}$) de l'opérateur de Dirac fondamental d'une variété riemannienne spinorielle compacte à bord non vide en fonction des composantes du tenseur de courbure de Riemann, de celles du tenseur de Ricci ainsi que de celles de la seconde forme fondamentale. Ceci fait, on pourra alors déterminer une métrique conforme à la métrique initiale (ce qui est permis par covariance conforme de $\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})$) facilitant les estimations qui suivront. Rappelons que la Proposition 2.4 de la section 4 permet d'écrire (dans la trivialisation construite dans cette même partie) :

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_g\overline{\psi} &= \overline{\mathrm{D}_\xi\psi} + \sum_{i,j=1}^{n}\big(b_i^j - \delta_i^j\big)\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi} + \gamma(\mathrm{W})\overline{\psi} + \gamma(\mathrm{T})\overline{\psi}\\ &\quad+\gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi} - \frac{n-1}{2}\mathrm{H}_t\gamma(\widetilde{\nu})\overline{\psi},\end{aligned}$$

où $\mathrm{W} \in \Gamma(\Lambda^3(\mathrm{T}^*\mathrm{V}))$, $\mathrm{T} \in \Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{V})$ et $\mathrm{U} \in \Gamma(\Lambda^2(\mathrm{T}^*\mathrm{V}))$ sont donnés par :

$$\mathrm{W} = \frac{1}{4}\sum_{\substack{1\leq i,j,k\leq n-1\\ i\neq j\neq k}} b_i^r\partial_r(b_j^l)(b^{-1})_k^l\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k) \tag{41}$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{4}\sum_{1\leq i,j\leq n-1}(\widetilde{\Gamma}_{ij}^i - \widetilde{\Gamma}_{ii}^j)\gamma(e_j) \tag{42}$$

$$\mathrm{Z} = \frac{1}{4}\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n-1\\ i\neq j}}\big(\partial_n(b_i^l)(b^{-1})_j^l + b_j^r\Gamma_{rn}^l(b^{-1})_i^l\big)\gamma(e_i)\gamma(e_j), \tag{43}$$

où $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n_+$ et $\mathrm{V} \subset \mathrm{M}$ sont les ouverts de trivialisation définis dans la section 4, D_ξ (resp. D_g) est l'opérateur de Dirac fondamental agissant sur le fibré $\Sigma_\xi\big(\mathrm{U}\big)$ $\big($resp. $\Sigma_g(\mathrm{V})\big)$ et $\psi \in \Gamma\big(\Sigma_\xi(\mathrm{U})\big)$ (et alors $\overline{\psi} \in \Gamma\big(\Sigma_g(\mathrm{V})\big)$. Pour les autres notations, on se réfère à la section 4. On va donner, au voisinage de $q \in \partial\mathrm{M}$, un développement limité des coefficients b_i^j, ce qui permettra de déduire un développement limité de l'opérateur de Dirac $\overline{\mathrm{D}}$. Pour cela, on rappelle (voir [**Esc92a**]) que dans le système de coordonnées de Fermi au voisinage d'un point $q \in \partial\mathrm{M}$, le développement des coefficients g^{ij} est donné par :

$$\begin{array}{rcl} g^{ij} & = & \delta^{ij} + 2h^{ij}(q)t - \frac{1}{3}R^{i}_{\ \alpha\beta}{}^{j}(q)\ x^\alpha x^\beta + g^{ij}_{\ ,t\alpha}(q)\ x^\alpha t \\ & & +\big(3h^{im}(q)h_m{}^{j}(q) + \widetilde{R}^{i\ j}_{\ n\ n}(q)\big)\ t^2 + O(|(x,t)|^3), \end{array} \tag{44}$$

pour tout $1 \leq i,j \leq n-1$ et où $h^{ij} = g^{ik}g^{jl}h_{kl}$ (h_{kl} sont les composantes de la seconde forme fondamentale), $R^{i}_{\ \alpha\beta}{}^{j}$ les composantes du tenseur de courbure de Riemann de $\partial\mathrm{M}$, $\widetilde{R}^{i}_{\ \alpha\beta}{}^{j}$ celles du tenseur de courbure de Riemann de M, et où $g^{ij}_{\ ,t\alpha}$ est la dérivée $\partial^2_{\alpha t}g^{ij}$ de g^{ij} exprimée dans les coordonnées de Fermi et $m = (x_1, ..., x_{n-1}, t) \in \mathrm{V}$. On peut encore écrire cette expression :

$$\mathrm{G}_m^{-1} = \mathrm{Id} + \mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2 + \mathrm{G}_3 + \mathrm{G}_4 + O(|(x,t)|^3),$$

où $(\mathrm{G}_m^{-1})^{ij} = g^{ij}$ et les matrices $(\mathrm{G}_l)_{1\leq l\leq 4}$ sont données par :

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{G}_1)^{ij} = 2h^{ij}(q)t, & (\mathrm{G}_2)^{ij} = -\frac{1}{3}R^{i}_{\ \alpha\beta}{}^{j}(q)\ x^\alpha x^\beta \\ (\mathrm{G}_3)^{ij} = g^{ij}_{\ ,t\alpha}(q)\ x^\alpha t, & (\mathrm{G}_4)^{ij} = \big(3h^{im}(q)h_m{}^{j}(q) + \widetilde{R}^{i\ j}_{\ n\ n}(q)\big)\ t^2. \end{array}$$

Posons alors maintenant :

$$\widetilde{\mathrm{B}}_m = \widetilde{\mathrm{B}}_1 + \widetilde{\mathrm{B}}_2 + \widetilde{\mathrm{B}}_3 + \widetilde{\mathrm{B}}_4 + \widetilde{\mathrm{B}}_5 + O(|(x,t)|^3), \tag{45}$$

où l'on a supposé que :

$$\begin{array}{ll} (\widetilde{\mathrm{B}}_1)_{ij} = \widetilde{\mathrm{B}}_{ij\alpha}x^\alpha, & (\widetilde{\mathrm{B}}_2)_{ij} = \widetilde{\mathrm{B}}_{ijt}t \\ (\widetilde{\mathrm{B}}_3)_{ij} = \widetilde{\mathrm{B}}_{ij\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, & (\widetilde{\mathrm{B}}_4)_{ij} = \widetilde{\mathrm{B}}_{ij\alpha t}x^\alpha t, \\ (\widetilde{\mathrm{B}}_5)_{ij} = \widetilde{\mathrm{B}}_{ijt^2}t^2, & \end{array}$$

pour $1 \leq \alpha, \beta \leq n-1$. Ainsi, pour obtenir les matrices $(\widetilde{\mathrm{B}}_k)_{1\leq k\leq 5}$ explicitement, on utilise la relation reliant $\widetilde{\mathrm{B}}_m$ et G_m donnée en (18) par $\widetilde{\mathrm{B}}_m^2 = \mathrm{G}_m^{-1}$. On obtient donc :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\mathrm{B}}_m^2 & = & \Big(\widetilde{\mathrm{B}}_1 + \widetilde{\mathrm{B}}_2 + \widetilde{\mathrm{B}}_3 + \widetilde{\mathrm{B}}_4 + \widetilde{\mathrm{B}}_5 + O(|(x,t)|^3)\Big)^2 \\ & = & \mathrm{Id} + 2\widetilde{\mathrm{B}}_1 + 2\widetilde{\mathrm{B}}_2 + (2\widetilde{\mathrm{B}}_3 + \widetilde{\mathrm{B}}_1^2) + (2\widetilde{\mathrm{B}}_4 + \widetilde{\mathrm{B}}_1\widetilde{\mathrm{B}}_2 + \widetilde{\mathrm{B}}_2\widetilde{\mathrm{B}}_1) \\ & & +(2\widetilde{\mathrm{B}}_5 + \widetilde{\mathrm{B}}_2^2) + O(|(x,t)|^3) \\ & = & \mathrm{Id} + \mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2 + \mathrm{G}_3 + \mathrm{G}_4 + O(|(x,t)|^3). \end{array}$$

Remarquons que puisque G_m^{-1} ne possède pas de terme en x^α dans son développement, on a $\widetilde{\mathrm{B}}_1 = 0$. En identifiant alors les termes, on obtient les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\widetilde{\mathrm{B}}_2 & = & \mathrm{G}_1 \\ 2\widetilde{\mathrm{B}}_3 & = & \mathrm{G}_2 \\ 2\widetilde{\mathrm{B}}_4 & = & \mathrm{G}_3 \\ 2\widetilde{\mathrm{B}}_5 + \widetilde{\mathrm{B}}_2^2 & = & \mathrm{G}_4 \end{array} \right.$$

ce qui permet d'écrire plus précisément que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} (\widetilde{\mathrm{B}}_2)_{ij} & = & h^{ij}(q)t \\ (\widetilde{\mathrm{B}}_3)_{ij} & = & -\frac{1}{6}R^{i}_{\ \alpha\beta}{}^{j}(q)\ x^\alpha x^\beta \\ (\widetilde{\mathrm{B}}_4)_{ij} & = & \frac{1}{2}g^{ij}_{\ ,t\alpha}(q)\ x^\alpha t \\ (\widetilde{\mathrm{B}}_4)_{ij} & = & \frac{1}{2}\big(3h^{im}(q)h_m{}^{\ j}(q)+\widetilde{R}^{i}{}_{nn}{}^{j}(q)-h^{im}(q)h^m{}_{\ j}(q)\big)\,t^2. \end{array}\right. \tag{46}$$

En utilisant ces expressions dans (45), on obtient alors le développement :

$$\begin{array}{lcl} b_i^j & = & \delta_i^j+h^{ij}(q)t-\frac{1}{6}R^{i}_{\ \alpha\beta}{}^{j}(q)\ x^\alpha x^\beta+\frac{1}{2}g^{ij}_{\ ,t\alpha}(q)\ x^\alpha t \\ & & +\frac{1}{2}\big(2h^{im}(q)h_m{}^{\ j}(q)+\widetilde{R}^{i}{}_{n}{}^{j}{}_{n}(q)\big)\,t^2+O(|(x,t)|^3). \end{array} \tag{47}$$

Remarquons aussi que dans le développement de l'opérateur de Dirac $\overline{\mathrm{D}}$ donnée dans la Proposition 2.4, des termes $(b^{-1})_i^j$ apparaissent et on en donne donc aussi un développement limité au voisinage du point $q\in\partial\mathrm{M}$. Pour cela, on se sert du fait que $(\widetilde{\mathrm{B}}_m^{-1})=(b^{-1})_i^j$ et on procède de la même manière que pour obtenir le développement de $\widetilde{\mathrm{B}}_m$. En effet, on pose :

$$\widetilde{\mathrm{B}'}_m=\widetilde{\mathrm{B}'}_1+\widetilde{\mathrm{B}'}_2+\widetilde{\mathrm{B}'}_3+\widetilde{\mathrm{B}'}_4+\widetilde{\mathrm{B}'}_5+O(|(x,t)|^3),$$

et on utilise la relation $\widetilde{\mathrm{B}}_m\widetilde{\mathrm{B}}_m^{-1}=\mathrm{Id}$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{lcl} (\widetilde{\mathrm{B}'}_1)_{ij} & = & 0 \\ (\widetilde{\mathrm{B}'}_2)_{ij} & = & -h^{ij}(q)t \\ (\widetilde{\mathrm{B}'}_3)_{ij} & = & \frac{1}{6}R^{i}_{\ \alpha\beta}{}^{j}(q)\ x^\alpha x^\beta \\ (\widetilde{\mathrm{B}'}_4)_{ij} & = & -\frac{1}{2}g^{ij}_{\ ,t\alpha}(q)\ x^\alpha t \\ (\widetilde{\mathrm{B}'}_4)_{ij} & = & -\frac{1}{2}\widetilde{R}^{i}{}_{n}{}^{j}{}_{n}(q)\big)\,t^2. \end{array}\right. \tag{48}$$

On a alors le développement suivant pour $(b^{-1})_i^j$:

$$\begin{array}{lcl} (b^{-1})_i^j & = & \delta_i^j-h^{ij}(q)t+\frac{1}{6}R^{i}_{\ \alpha\beta}{}^{j}(q)\ x^\alpha x^\beta-\frac{1}{2}g^{ij}_{\ ,t\alpha}(q)\ x^\alpha t \\ & - & \frac{1}{2}\widetilde{R}^{i}{}_{n}{}^{j}{}_{n}(q)\big)\,t^2+O(|(x,t)|^3). \end{array} \tag{49}$$

On constate de la même manière que dans l'expression (2.4) apparaissent des termes contenant des dérivées des coefficients b_i^j. En se servant de l'identité (47), on peut alors écrire pour tout $1\le k\le n-1$:

$$\begin{array}{lcl} \partial_k b_i^j & = & -\frac{1}{6}R^{i}_{\ \alpha\beta}{}^{j}(q)\ \partial_k(x^\alpha)x^\beta-\frac{1}{6}R^{i}_{\ \alpha\beta}{}^{j}(q)\ x^\alpha\partial_k(x^\beta)+\frac{1}{2}g^{ij}_{\ ,t\alpha}(q)\ \partial_k(x^\alpha)t+O(|(x,t)|^2) \\ & = & -\frac{1}{6}R^{i}_{\ \alpha\beta}{}^{j}(q)\ \delta_k^\alpha x^\beta-\frac{1}{6}R^{i}_{\ \alpha\beta}{}^{j}(q)\ x^\alpha\delta_k^\beta+\frac{1}{2}g^{ij}_{\ ,t\alpha}(q)\ \delta_k^\alpha t+O(|(x,t)|^2) \\ & = & -\frac{1}{6}R^{i}_{\ k\beta}{}^{j}(q)\ x^\beta-\frac{1}{6}R^{i}_{\ \alpha k}{}^{j}(q)\ x^\alpha+\frac{1}{2}g^{ij}_{\ ,tk}(q)\ t+O(|(x,t)|^2), \end{array}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\partial_k b_i^j=-\frac{1}{6}\big(R^{i}_{\ k\alpha}{}^{j}(q)+R^{i}_{\ \alpha k}{}^{j}(q)\big)\ x^\alpha+\frac{1}{2}g^{ij}_{\ ,tk}(q)\ t+O(|(x,t)|^2), \tag{50}$$

pour tout $1\le i,j,k\le n-1$. De la même manière, on calcule la dérivée par rapport au champ normal, et on a alors :

$$\partial_t b_i^j=h^{ij}(q)+\frac{1}{2}g^{ij}_{\ ,t\alpha}(q)\ x^\alpha+\big(2h^{im}(q)h_m{}^{\ j}(q)+\widetilde{R}^{i}{}_{n}{}^{j}{}_{n}(q)\big)\,t+O(|(x,t)|^2). \tag{51}$$

On est maintenant en mesure de donner les différents développements limités des champs W, T et U apparaissant dans le développement de l'opérateur de Dirac D_g. Commençons par la 3-forme $\mathrm{W} \in \Gamma\big(\Lambda^3(\mathrm{T}^*\mathrm{V})\big)$:

PROPOSITION 2.7. *La 3-forme* $\mathrm{W} \in \Gamma\big(\Lambda^3(\mathrm{T}^*\mathrm{V})\big)$ *apparaissant dans le développement de l'opérateur de Dirac* D_g *et donnée par :*

$$\mathrm{W} \;=\; \frac{1}{4} \sum_{\substack{1\leq i,j,k\leq n-1 \\ i\neq j\neq k}} b_i^r \partial_r(b_j^l)(b^{-1})_k^l \gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k)$$

vérifie :

$$|\mathrm{W}| = O(|(x,t)|^2). \tag{52}$$

Preuve : On remarque tout d'abord que puisque $\partial_k(b_j^l)$ ne possède pas de terme constant, tous les termes d'ordre 1 de $b_i^r \partial_r(b_j^l)(b^{-1})_k^l$ sont produits de termes d'ordre 0 de b_i^r et $(b^{-1})_k^l$ et de termes d'ordre 1 de $\partial_r(b_j^l)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{W} \;&=\; \frac{1}{4} \sum_{\substack{1\leq i,j,k\leq n-1 \\ i\neq j\neq k}} \Big(\delta_i^r \partial_r(b_j^l)\delta_k^l + O(|(x,t)|^2)\Big)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k) \\
&=\; \frac{1}{4} \sum_{\substack{1\leq i,j,k\leq n-1 \\ i\neq j\neq k}} \Big(\partial_i(b_j^k) + O(|(x,t)|^2)\Big)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k).
\end{aligned}$$

Or par symétrie des coefficients b_j^k, on a $\partial_i(b_j^k) = \partial_i(b_k^j)$. D'autre part, comme $j \neq k$, on a $\gamma(e_j)\gamma(e_k) = -\gamma(e_k)\gamma(e_j)$, et on vérifie alors que :

$$\sum_{\substack{1\leq i,j,k\leq n-1 \\ i\neq j\neq k}} \partial_i(b_j^k)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\gamma(e_k) = 0.$$

On a aussi montré que $|\mathrm{W}| = O(|(x,t)|^2)$. □

Passons maintenant au développement du champ de vecteurs $\mathrm{T} \in \Gamma(\mathrm{TV})$:

PROPOSITION 2.8. *Le champ de vecteurs* $\mathrm{T} \in \Gamma(\mathrm{TV})$ *apparaissant dans le développement de l'opérateur de Dirac* D_g *et donné par :*

$$\mathrm{T} \;=\; \frac{1}{4} \sum_{1\leq i,j\leq n-1} (\widetilde{\Gamma}_{ij}^i - \widetilde{\Gamma}_{ii}^j)\gamma(e_j)$$

admet, au voisinage de q, le développement limité suivant :

$$\mathrm{T} = \sum_{j=1}^{n-1} \Big(-\frac{1}{4}\mathrm{Ric}(q)_{\alpha j} x^\alpha - \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{Ric}}(q)_{tj} t + O(|(x,t)|^2)\Big)\gamma(e_j), \tag{53}$$

où $\mathrm{Ric}(q)_{\alpha j}$ *(resp.* $\widetilde{\mathrm{Ric}}(q)_{tj}$*) sont les composantes du tenseur de Ricci de* $\partial\mathrm{M}$ *(resp. de* M*) évalué au point q.*

Preuve : On va maintenant exprimer le champ de vecteurs T en fonction des symboles de Christoffel de première espèce définis par :

$$\Gamma_{ij}^k = g(\overline{\nabla}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k),$$

pour $1\leq i,j,k\leq n-1$. Pour cela, on rappelle que les coefficients b_i^j ont été construits dans la section 4 de façon à ce que $\{e_1,...,e_{n-1},e_n=\nu\}$ soit un repère orthonormé local de TV. Plus précisément, on a posé :

$$e_i=b_i^j\partial_j.$$

On rappelle aussi la formule (28) reliant ces symboles de Christoffel avec les symboles de Christoffel de deuxième espèce définis par $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k=g(\overline{\nabla}_{e_i}e_j,e_k)$:

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^k=\big(b_i^r\partial_r(b_j^l)+b_i^rb_j^s\Gamma_{rs}^l\big)(b^{-1})_k^l.$$

On va donc calculer le développement limité de ces symboles en fonction des différents tenseurs de courbure en utilisant la formule classique :

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}\big(\partial_ig_{jl}+\partial_jg_{il}-\partial_lg_{ij}\big), \tag{54}$$

qui donne les symboles de Christoffel de première espèce en fonction de la métrique. Développons les symboles Γ_{ij}^k, pour tout $1\leq i,j,k\leq n-1$, au voisinage de q. Cependant, on voit clairement que l'on va avoir besoin du développement des coefficients g_{ij} de la métrique. Pour cela, on procède de la même manière que dans le début de ce paragraphe en utilisant la relation $\mathrm{G}_m\mathrm{G}_m^{-1}=\mathrm{Id}$ pour tout $m\in\mathrm{V}$. On pose donc :

$$\mathrm{G}_m=\mathrm{Id}+\mathrm{G}'_1+\mathrm{G}'_2+\mathrm{G}'_3+\mathrm{G}'_4+O(|(x,t)|^3),$$

avec :

$$\begin{array}{ll}(\mathrm{G}'_1)_{ij}=\mathrm{G}'_{ijt}t, & (\mathrm{G}'_2)_{ij}=\mathrm{G}'_{ij\alpha\beta}x^\alpha x^\beta\\ (\mathrm{G}'_3)_{ij}=\mathrm{G}'_{ij\alpha t}x^\alpha t, & (\mathrm{G}'_4)_{ij}=\mathrm{G}'_{ijt^2}\,t^2,\end{array} \tag{55}$$

et alors une simple identification permet de trouver :

$$\begin{array}{rcl}g_{ij}&=&\delta_{ij}-2h_{ij}(q)t+\frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}(q)x^\alpha x^\beta+g_{ij,t\alpha}(q)x^\alpha t\\ &+&\big(h_{im}(q)h^m{}_j(q)-\widetilde{R}_{injn}(q)\big)t^2+O(|(x,t)|^3).\end{array} \tag{56}$$

On désire aussi connaître l'expression des dérivées premières de la métrique. Pour cela, il suffit de dériver l'expression (56) et on obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}\partial_kg_{ij}&=&\frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}(q)\partial_k(x^\alpha x^\beta)+g_{ij,t\alpha}(q)\partial_k(x^\alpha)t+O(|(x,t)|^2)\\ &=&\frac{1}{3}R_{ik\beta j}(q)x^\beta+\frac{1}{3}R_{i\alpha kj}(q)x^\alpha+g_{ij,tk}(q)t+O(|(x,t)|^2)\\ &=&\frac{1}{3}\big(R_{ik\alpha j}(q)+R_{i\alpha kj}(q)\big)x^\alpha+g_{ij,tk}(q)t+O(|(x,t)|^2),\end{array} \tag{57}$$

pour tout $1\leq k\leq n-1$. On est maintenant en mesure de donner un développement à l'ordre 2 des Γ_{ij}^k au voisinage de $q\in\partial\mathrm{M}$. En effet, par la formule (54) et en utilisant le fait que ∂_kg_{ij} ne possède pas de terme constant, on a :

$$\begin{array}{rcl}\Gamma_{ij}^k&=&\frac{1}{2}\delta^{kl}\big(\partial_ig_{jl}+\partial_jg_{il}-\partial_lg_{ij}\big)+O(|(x,t)|^2)\\ &=&\frac{1}{2}\big(\partial_ig_{jk}+\partial_jg_{ik}-\partial_kg_{ij}\big)+O(|(x,t)|^2)\\ &=&\frac{1}{6}\Big(R_{ji\alpha k}(q)+R_{j\alpha ik}(q)+R_{ij\alpha k}(q)+R_{i\alpha jk}(q)-R_{ik\alpha j}(q)-R_{i\alpha kj}(q)\Big)x^\alpha\\ &&+\frac{1}{2}\big(g_{jk,ti}(q)+g_{ik,tj}(q)-g_{ij,tk}(q)\big)t+O(|(x,t)|^2).\end{array}$$

En utilisant les différentes symétries des coefficients R_{ijkl} du tenseur de courbure de Riemman, cette dernière égalité peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^{k} &= -\frac{1}{3}\Big(R_{ik\alpha j}(q)+R_{i\alpha kj}(q)\Big)x^{\alpha}+\frac{1}{2}\big(g_{jk,ti}(q)+g_{ik,tj}(q)-g_{ij,tk}(q)\big)t \\ &\quad +O(|(x,t)|^{2}),\end{aligned} \tag{58}$$

pour tout $1\leq i,j,k\leq n-1$. Revenons maintenant au développement de $\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}$. Remarquons que Γ_{ij}^{k} ne possèdant pas de terme constant, la formule (28) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k} &= \Big(\delta_{i}^{r}\partial_{r}(b_{j}^{l})+\delta_{i}^{r}\delta_{j}^{s}\Gamma_{rs}^{l}\Big)\delta_{k}^{l}+O(|(x,t)|^{2}) \\ &= \Big(\partial_{i}(b_{j}^{l})+\Gamma_{ij}^{l}\Big)\delta_{k}^{l}+O(|(x,t)|^{2}) \\ &= \partial_{i}(b_{j}^{k})+\Gamma_{ij}^{k}+O(|(x,t)|^{2}).\end{aligned} \tag{59}$$

En combinant la partie vectorielle de l'expression de T et l'expression (59), on obtient :

$$\sum_{1\leq i\leq n-1}\Big(\widetilde{\Gamma}_{ij}^{i}-\widetilde{\Gamma}_{ii}^{j}\Big)=\sum_{1\leq i\leq n-1}\Big(\partial_{i}(b_{j}^{i})+\Gamma_{ij}^{i}-\partial_{i}(b_{i}^{j})-\Gamma_{ii}^{j}\Big)+O(|(x,t)|^{2}),$$

et puisque les coefficients b_{i}^{j} vérifient $b_{i}^{j}=b_{j}^{i}$, on a :

$$\sum_{1\leq i\leq n-1}\Big(\widetilde{\Gamma}_{ij}^{i}-\widetilde{\Gamma}_{ii}^{j}\Big)=\sum_{1\leq i\leq n-1}\Big(\Gamma_{ij}^{i}-\Gamma_{ii}^{j}\Big)+O(|(x,t)|^{2}).$$

On se sert maintenant du développement (58) de Γ_{ij}^{k} pour $1\leq i,j,k\leq n-1$, et on arrive à :

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^{i}-\Gamma_{ii}^{j} &= -\frac{1}{3}\Big(R_{ii\alpha j}(q)+R_{i\alpha ij}(q)\Big)x^{\alpha}+\frac{1}{2}\big(g_{ji,ti}(q)+g_{ii,tj}(q)-g_{ij,ti}(q)\big)t \\ &\quad +\frac{1}{3}\Big(R_{ij\alpha i}(q)+R_{i\alpha ji}(q)\Big)x^{\alpha}-\frac{1}{2}\big(g_{ij,ti}(q)+g_{ij,ti}(q)-g_{ii,tj}\big)t+O(|(x,t)|^{2}).\end{aligned}$$

En utilisant encore une fois les symétries de la métrique et celles du tenseur de courbure de Riemann, on peut écrire :

$$\sum_{1\leq i\leq n-1}\Big(\widetilde{\Gamma}_{ij}^{i}-\widetilde{\Gamma}_{ii}^{j}\Big)=-\mathrm{Ric}(q)_{\alpha j}x^{\alpha}+\sum_{1\leq i\leq n-1}\big(g_{ii,tj}(q)-g_{ij,ti}(q)\big)t+O(|(x,t)|^{2}).$$

On vérifie alors que $g_{ij,t}=-2h_{ij}$ et le dernier terme de l'identité précédente s'écrit donc :

$$g_{ii,tj}-g_{ij,ti} = 2\big(h_{ij,i}-h_{ii,j}\big).$$

L'équation de Codazzi étant donnée par

$$R_{ijkn}=h_{ik,j}-h_{jk,i}, \tag{60}$$

on peut facilement vérifier que pour tout $1\leq i,j\leq n-1$ on a :

$$2\big(h_{ij,i}-h_{ii,j}\big)=-2\big(h_{ii,j}-h_{ij,i}\big)=-2\widetilde{R}_{ijin},$$

et donc en remplaçant dans l'expression de T, on obtient :

$$\mathrm{T}=\sum_{j=1}^{n-1}\Big(-\frac{1}{4}\mathrm{Ric}(q)_{\alpha j}x^\alpha-\frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{Ric}}(q)_{tj}t+O(|(x,t)|^2)\Big)\gamma(e_j),$$

ce qui est bien l'expression attendue. □

Donnons maintenant le développement de la 2-forme $\mathrm{Z}\in\Gamma\big(\Lambda^2(\mathrm{T}^*\mathrm{V})\big)$:

Proposition 2.9. *La 2-forme $\mathrm{Z}\in\Gamma\big(\Lambda^2(\mathrm{T}^*\mathrm{V})\big)$ apparaissant dans le développement de l'opérateur de Dirac D_g et donnée par*

$$\mathrm{Z}\;=\;\frac{1}{4}\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n-1\\ i\neq j}}\big(\partial_n(b_i^l)(b^{-1})_j^l+b_j^r\Gamma_{rn}^l(b^{-1})_i^l\big)\gamma(e_i)\gamma(e_j)$$

vérifie :

$$|\mathrm{Z}|=O(|(x,t)|^2). \tag{61}$$

Preuve : On va, comme dans la Proposition 2.8, développer les symboles de Christoffel Γ_{rn}^l au voisinage de q pour $1\leq r,l\leq n-1$. Pour cela, on utilise encore une fois la formule (54) et on obtient :

$$\Gamma_{rn}^l=\frac{1}{2}g^{lk}\big(\partial_r g_{nk}+\partial_n g_{rk}-\partial_k g_{rn}\big).$$

On remarque que pour $1\leq k,r\leq n-1$, on a $g_{nk}=g_{rn}=0$ et on a donc :

$$\Gamma_{rn}^l=\frac{1}{2}g^{lk}\partial_n g_{rk}. \tag{62}$$

En utilisant le développement de la métrique donnée en (56), on calcule :

$$\partial_n g_{rk}=-2h_{rk}(q)+g_{rk,t\alpha}(q)x^\alpha+2\big(h_{rm}(q)h^m{}_k(q)-\widetilde{R}_{rnkn}(q)\big)t+O(|(x,t)|^2). \tag{63}$$

De même pour obtenir un développement de Γ_{rn}^l à l'ordre 2, on écrit :

$$g^{lk}=\delta^{lk}+2h^{lk}(q)t+O(|(x,t)|^2),$$

et alors :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rn}^l &= \tfrac{1}{2}g^{lk}\partial_n g_{rk}\\
&= \tfrac{1}{2}\big(\delta^{lk}+2h^{lk}(q)t+O(|(x,t)|^2)\big)\big(-2h_{rk}(q)+g_{rk,t\alpha}(q)x^\alpha+2\mathrm{K}_{rk}(q)t+O(|(x,t)|^2)\big)\\
&= \tfrac{1}{2}\big(-2h_{rl}(q)+g_{rl,t\alpha}(q)x^\alpha+2\mathrm{K}_{rl}(q)t-4h^{lk}(q)h_{rk}(q)t+O(|(x,t)|^2)\big)\\
&= -h_{rl}(q)+\tfrac{1}{2}g_{rl,t\alpha}(q)x^\alpha+\big(\mathrm{K}_{rl}(q)-2h^{lk}(q)h_{rk}(q)\big)t+O(|(x,t)|^2,
\end{aligned}$$

où l'on a posé $\mathrm{K}_{rk}=h_{rm}h^m{}_k-\widetilde{R}_{rnkn}$. En se servant des développements limités de b_j^r et $(b^{-1})_i^l$ donnés en (47) et (49), on est en mesure de donner un développement de

$b_j^r\Gamma_{rn}^l(b^{-1})_i^l$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma_{rn}^l(b^{-1})_i^l &= \big(-h_{rl}(q)+\tfrac{1}{2}g_{rl,t\alpha}(q)x^\alpha+\big(\mathrm{K}_{rl}(q)-2h^{lk}(q)h_{rk}(q)\big)t+O(|(x,t)|^2\big)\\ &\quad\times\big(\delta_i^l-h^{il}(q)t+O(|(x,t)|^2\big)\\ &= -h_{ri}(q)+\tfrac{1}{2}g_{ri,t\alpha}(q)x^\alpha+\big(\mathrm{K}_{ri}(q)-2h^{ik}(q)h_{rk}(q)\big)t+h_{rl}(q)h^{il}(q)t\\ &\quad+O(|(x,t)|^2\\ &= -h_{ri}(q)+\tfrac{1}{2}g_{ri,t\alpha}(q)x^\alpha+\big(\mathrm{K}_{ri}(q)-h^{ik}(q)h_{rk}(q)\big)t+O(|(x,t)|^2.\end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}b_j^r\Gamma_{rn}^l(b^{-1})_i^l &= \big(\delta_j^r+h^{rj}(q)t+O(|(x,t)|^2\big)\\ &\quad\times\big(-h_{ri}(q)+\tfrac{1}{2}g_{ri,t\alpha}(q)x^\alpha+\big(\mathrm{K}_{ri}(q)-h^{ik}(q)h_{rk}(q)\big)t+O(|(x,t)|^2\big)\\ &= -h_{ij}(q)+\tfrac{1}{2}g_{ij,t\alpha}(q)x^\alpha+\big(\mathrm{K}_{ji}(q)-h^{ik}(q)h_{jk}(q)\big)t-h_{ir}(q)h^{rj}(q)t\\ &\quad+O(|(x,t)|)^2,\end{aligned}$$

et alors :

$$\begin{aligned}b_j^r\Gamma_{rn}^l(b^{-1})_i^l &= -h_{ij}(q)+\tfrac{1}{2}g_{ij,t\alpha}(q)x^\alpha+\big(\mathrm{K}_{ji}(q)-2h^{ik}(q)h_{kj}(q)\big)t\\ &\quad+O(|(x,t)|^2).\end{aligned}\tag{64}$$

Il reste maintenant à développer le premier terme dans l'expression de Z. Pour cela, on doit calculer la dérivée par rapport au champ normal de b_i^l qu'on obtient facilement en se servant de l'identité (47) :

$$\partial_n(b_i^l)=h^{il}(q)+\frac{1}{2}g^{il}{}_{,t\alpha}(q)x^\alpha+\widetilde{\mathrm{K}}^{il}(q)t+O(|(x,t)|^2),$$

où on a posé $\widetilde{\mathrm{K}}^{il}=2h^{im}h_m{}^l+\widetilde{R}^{i}{}_{n}{}^{j}{}_{n}(q)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\partial_n(b_i^l)(b^{-1})_j^l &= \big(h^{il}(q)+\tfrac{1}{2}g^{il}{}_{,t\alpha}(q)x^\alpha+\widetilde{\mathrm{K}}^{il}(q)t+O(|(x,t)|^2)\big)\big(\delta_j^l-h^{jl}(q)t+O(|(x,t)|^2\big)\\ &= h^{ij}(q)+\tfrac{1}{2}g^{ij}{}_{,t\alpha}(q)x^\alpha+\big(\widetilde{\mathrm{K}}^{ij}(q)-h^{il}(q)h^{jl}(q)\big)t+O(|(x,t)|^2).\end{aligned}$$

En sommant les deux termes que l'on vient de calculer, on arrive à :

$$\begin{aligned}\partial_n(b_i^l)(b^{-1})_j^l+b_j^r\Gamma_{rn}^l(b^{-1})_i^l &= \tfrac{1}{2}\big(g_{ij,t\alpha}(q)+g^{ij}{}_{,t\alpha}(q)\big)x^\alpha+\big(\mathrm{K}_{ji}(q)+\widetilde{\mathrm{K}}^{ij}(q)\\ &\quad-3h^{ik}(q)h_{kj}(q)\big)t+O(|(x,t)|^2).\end{aligned}\tag{65}$$

Remarquons qu'en dérivant l'identité $g^{ik}g_{kj}=\delta_{ij}$, on obtient $g^{ij}{}_{,t}=-g^{ik}g_{kl,t}g^{lj}$. Si on dérive encore une fois par rapport à un vecteur tangent au bord, et qu'on utilise le fait que le repère $\{\partial_1,...,\partial_{n-1}\}$ est normal au point q, on obtient $g^{ij}{}_{,t\alpha}=-g_{ij,t\alpha}$. Le premier terme dans l'identité (65) est donc nul. De plus, le deuxième terme se calcule explicitement et donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_{ji}(q)+\widetilde{\mathrm{K}}^{ij}(q)-3h^{ik}(q)h_{kj}(q) &= h_{jm}(q)h^{m}{}_{i}(q)-\widetilde{R}_{jnin}(q)+2h^{im}(q)h_{m}{}^{j}(q)\\ &+ \widetilde{R}^{i\ j}_{\ n\ n}(q)\big)-3h^{ik}(q)h_{kj}(q)\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\mathrm{K}_{ji}(q)+\widetilde{\mathrm{K}}^{ij}(q)-3h^{ik}(q)h_{kj}(q)=0$. La 2-forme Z vérifie donc bien $|\mathrm{Z}|=O(|(x,t)|^2)$. □

On peut alors regrouper ces trois résultats et on obtient ainsi :

PROPOSITION 2.10. *Si* D_ξ *et* D_g *désignent les opérateurs de Dirac agissant respectivement sur* $\Sigma_\xi(\mathrm{U})$ *et* $\Sigma_g(\mathrm{V})$*, alors on a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_g\overline{\psi} &= \overline{\mathrm{D}_\xi\psi}+\sum_{i,j=1}^{n}\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}+\gamma(\mathrm{W})\overline{\psi}+\gamma(\mathrm{T})\overline{\psi}\\ &\quad+\gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi}-\frac{n-1}{2}\mathrm{H}_t\gamma(\nu)\overline{\psi},\end{aligned}$$

où $\mathrm{W}\in\Gamma(\Lambda^3(\mathrm{T}^*\mathrm{V}))$, $\mathrm{T}\in\Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{V})$ *et* $\mathrm{Z}\in\Gamma(\Lambda^2(\mathrm{T}^*\mathrm{V}))$ *vérifient :*

$$|\mathrm{W}|=O(|(x,t)|^2),\qquad |\mathrm{Z}|=O(|(x,t)|^2),\qquad |\mathrm{T}|=O(|(x,t)|). \tag{66}$$

Plus précisément le champ de vecteurs T *est donné par :*

$$\mathrm{T}=\sum_{j=1}^{n-1}\Big(-\frac{1}{4}\mathrm{Ric}(q)_{\alpha j}x^\alpha-\frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{Ric}}(q)_{tj}t+O(|(x,t)|^2)\Big)\gamma(e_j).$$

6.2. Une inégalité large dans le cas général. On est maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer un résultat permettant, comme annoncé, de comparer les invariants conformes $\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})$ et $\lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+,\partial\mathbb{S}^n_+)$. En effet, dans le problème de Yamabe (pour des variétés avec ou sans bord), Trüdinger (voir [**Tru68**]) ou encore Escobar (voir [**Esc92b**]) montrent que l'invariant de Yamabe d'une variété est inférieur à celui de la sphère (dans le cas sans bord) ou à celui de l'hémisphère (dans le cas où le bord est non vide). De la même manière, Ammann (voir [**Amm03a**]) ou encore Ammann, Humbert et Morel (voir[**AHM03**]) montrent que l'invariant spinoriel conforme sur les variétés compactes sans bord est lui aussi inférieur ou égale à celui de la sphère. On se propose donc dans cette partie de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2. *Soit* (M^n,g) *une variété riemannienne spinorielle compacte à bord lisse non vide* $\partial\mathrm{M}$ *possédant un opérateur de chiralité, alors si* $n\geq 3$*, on a :*

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})\leq\lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+,\partial\mathbb{S}^n_+)=\frac{n}{2}\Big(\frac{\omega_n}{2}\Big)^{\frac{1}{n}},$$

où $\omega_n=\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n,g_{st})$.

La démonstration de ce théorème réside, comme on va le voir, dans une bonne utilisation du travail effectué jusqu'à présent. Ce résultat reste vrai en dimension 2, mais la preuve étant légèrement différente on va traiter ce cas à part.

La construction du champ de spineur test effectuée dans la partie 5 utilise la convariance conforme"globale" de la condition à bord. En effet, l'identification conforme des fibrés des spineurs du demi-espace et de l'hémisphère permet la construction sur tout l'hémisphère d'un champ de spineurs de Killing satisfaisant la condition à bord CHI. Cependant, on est amené ici à construire un champ de spineurs qui satisfait cette condition à bord dans la trivialisation du fibré des spineurs induite par le système de coordonnées de Fermi. Pour cela, on énonce le résultat suivant, fondamental pour la suite de ce travail.

LEMME 2.1. *Soit* U *et* V *les deux ouverts de la trivialisation construite dans la section 4 et soit* $\Phi_0 \in \Gamma\big(\Sigma_\xi(\mathbb{R}^n_+)\big)$ *un spineur parallèle tel que*

$$\gamma(\nu)\Gamma\overline{\Phi}_0(q) = \overline{\Phi}_0(q)$$

en un point $q \in \mathrm{V} \cap \partial\mathrm{M}$. *On a alors :*

$$\gamma(\nu)\Gamma\overline{\Phi}_{0|\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}} = \overline{\Phi}_{0|\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}},$$

c'est-à-dire que $\mathbb{B}^-_g(\overline{\Phi}_{0|\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}}) = 0$.

Preuve : On considère la fonction définie sur V par $f(p) = |\gamma(\nu)\Gamma\overline{\Phi}_0 - \overline{\Phi}_0|^2(p)$ et on montre alors que f s'annule sur $\mathrm{V} \cap \partial\mathrm{M}$. En effet, pour $1 \leq i \leq n-1$, on a :

$$\begin{aligned} e_i(f) &= e_i(|\gamma(\nu)\Gamma\overline{\Phi}_0 - \overline{\Phi}_0|^2) \\ &= 2\, e_i\big(|\overline{\Phi}_0|^2 + \mathrm{Re}\langle\gamma(\nu)\Gamma\overline{\Phi}_0, \overline{\Phi}_0\rangle\big) \end{aligned}$$

Cependant, puisque le champ de spineurs Φ_0 est parallèle, on peut supposer que $|\Phi_0|^2 = 1$ et puisque la trivialisation induite sur le fibré des spineurs est une isométrie sur les fibres, on a $|\overline{\Phi}_0|^2 = 1$ et donc $e_i\big(|\overline{\Phi}_0|^2\big) = 0$. En utilisant la compatibilité de la métrique hermitienne avec la connexion de Levi-Civita et les propriétés de l'opérateur de chiralité, on obtient :

$$e_i\big(\mathrm{Re}\langle\gamma(\nu)\Gamma\overline{\Phi}_0, \overline{\Phi}_0\rangle\big) = \mathrm{Re}\langle\gamma\big(\overline{\nabla}_{e_i}\nu\big)\Gamma\overline{\Phi}_0, \overline{\Phi}_0\rangle + 2\mathrm{Re}\langle\gamma(\nu)\Gamma(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\Phi}_0), \overline{\Phi}_0\rangle.$$

Cependant puisque le champ de spineurs Φ_0 est parallèle, la formule (24) reliant les connexions de Levi-Civita spinorielles sur les fibrés des spineurs au-dessus de U et de V donne :

$$\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\Phi}_0 = \frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{n} \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\Phi}_0,$$

et on obtient alors que :

$$2\mathrm{Re}\langle\gamma(\nu)\Gamma(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\Phi}_0), \overline{\Phi}_0\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\,\mathrm{Re}\langle\gamma(\nu)\Gamma(\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\Phi}_0), \overline{\Phi}_0\rangle.$$

On décompose maintenant ce terme en une partie tangente et une autre normale au bord. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{n} \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\Phi}_0 &= \sum_{j,k=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\Phi}_0 - \sum_{j=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^j_{in}\gamma(e_j)\gamma(\nu)\overline{\Phi}_0 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \widetilde{\Gamma}^n_{ij}\gamma(e_j)\gamma(\nu)\overline{\Phi}_0 - \widetilde{\Gamma}^n_{in}\overline{\Phi}_0 \end{aligned}$$

et puisque en coordonnées de Fermi, on a $\widetilde{\Gamma}_{ij}^{n}=-\widetilde{\Gamma}_{in}^{j}$ et $\widetilde{\Gamma}_{in}^{n}=0$, on obtient :

$$\sum_{j,k=1}^{n}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\Phi}_0=\sum_{j,k=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\Phi}_0+2\sum_{j=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{n}\gamma(e_j)\gamma(\nu)\overline{\Phi}_0.$$

Le calcul ci-dessus permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle\gamma(\nu)\Gamma(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\Phi}_0),\overline{\Phi}_0\rangle \;&=\; \mathrm{Re}\langle\gamma(\overline{\nabla}_{e_i}\nu)\Gamma\overline{\Phi}_0,\overline{\Phi}_0\rangle-\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{j}\Big)\,\mathrm{Re}\langle\gamma(\nu)\Gamma\overline{\Phi}_0,\overline{\Phi}_0\rangle\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{1\leq j\neq k\leq n-1}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\,\mathrm{Re}\langle\gamma(\nu)\Gamma\big(\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\Phi}_0\big),\overline{\Phi}_0\rangle\\ &\quad+\sum_{j=1}^{n-1}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{n}\,\mathrm{Re}\langle\gamma(\nu)\Gamma\big(\gamma(e_j)\gamma(\nu)\overline{\Phi}_0\big),\overline{\Phi}_0\rangle\end{aligned}$$

et puisque $\widetilde{\Gamma}_{ij}^{j}=0$ et $\widetilde{\Gamma}_{ij}^{n}e_j=-\overline{\nabla}_{e_i}\nu$, on peut conclure que :

$$e_i(f)\;=\;\sum_{1\leq j\neq k\leq n-1}\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}\,\mathrm{Re}\langle\gamma(\nu)\Gamma\big(\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\Phi}_0\big),\overline{\Phi}_0\rangle.$$

En utilisant les propriétés du produit hermitien et celles de l'opérateur de chiralité, on vérifie que :

$$\langle\gamma(\nu)\Gamma\big(\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\Phi}_0\big),\overline{\Phi}_0\rangle\;=\;-\langle\gamma(\nu)\Gamma\big(\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\Phi}_0\big),\overline{\Phi}_0\rangle,$$

et ainsi on a $\mathrm{Re}\langle\gamma(\nu)\Gamma\big(\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\Phi}_0\big),\overline{\Phi}_0\rangle=0$ pour $1\leq j\neq k\leq n-1$. Pour résumer, on a montré que $e_i(f)=0$ pour tout $1\leq i\leq n-1$. Puisque par hypothèse, on a $f(q)=0$, la fonction f s'annule sur $\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}$ et on obtient alors que :

$$\gamma(\nu)\Gamma\overline{\Phi}_{0|\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}}=\overline{\Phi}_{0|\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}}.$$

□

On peut alors maintenant passer à la démonstration du principal résultat de cette partie.

Preuve du Théorème 2.2 : Supposons donc tout d'abord que $n\geq 3$. Rappelons tout d'abord que dans la Proposition 2.2 on a montré que :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M}):=\inf_{\overline{g}\in[g]}\big\{|\lambda_1(\overline{g})|\mathrm{vol}(\mathrm{M},\overline{g})^{\frac{1}{n}}\big\}=\inf_{\varphi\in\mathcal{H}_g^{\pm}}\Big\{\frac{\big(\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}_g\varphi|^{\frac{2n}{n+1}}dv(g)\big)^{\frac{n+1}{n}}}{\big|\int_{\mathrm{M}}\mathrm{Re}\langle\mathrm{D}_g\varphi,\varphi\rangle dv(g)\big|}\Big\}.$$

La méthode employée ici consiste à évaluer la fonctionnelle apparaissant ci-dessus sur un champ de spineurs approprié afin de faire apparaître l'invariant $\lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+,\partial\mathbb{S}^n_+)$. Dans cette optique, par la Proposition 2.5, on considère un champ de spineurs $\psi\in\Gamma\big(\Sigma_\xi(\mathbb{R}^n_+)\big)$ qui satisfait :

$$\mathrm{D}_\xi\psi=\frac{n}{2}f\,\psi$$

où $f(r) = \frac{2}{1+r^2}$ et $r^2 = x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 + t^2$. Il est alors facile de vérifier que ce champ de spineurs satisfait les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |\psi|^2 & = & f^{n-1} \\ |\mathrm{D}_\xi \psi|^2 & = & f^{n+1}. \end{array}\right. \tag{67}$$

On veut maintenant construire un champ de spineurs sur M à partir de ce champ. Pour cela, on va utiliser la trivialisation construite dans la section 4. On rappelle que le champ de spineurs ψ est donné par :

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f^{\frac{n}{2}}(r)\gamma(1-x)\Phi_0(x)$$

où Φ_0 est un spineur parallèle qu'on choisit tel que pour $q \in \mathrm{V} \cap \partial\mathrm{M}$:

$$\gamma(\nu)\Gamma\overline{\Phi}_0(q) = \overline{\Phi}_0(q). \tag{68}$$

En gardant les notations introduites dans cette section, on considère η une fonction définie par :

$$\eta = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{sur } \mathrm{B}_q^+(\delta) \\ 0 & \text{sur } \mathrm{M} \setminus \mathrm{B}_q^+(2\delta). \end{array}\right.$$

où $\mathrm{B}_q^+(2\delta) \subset \mathrm{V}$. Sans perdre en généralité, on peut choisir $\delta \leq 1$ et η telle que $|\nabla\eta| \leq Cr$, où C est une constante réelle strictement positive. Soit maintenant $\varepsilon > 0$, le champ de spineurs défini par :

$$\overline{\psi}_\varepsilon(x,t) = \eta\,\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) \in \Gamma\big(\Sigma_g(\mathrm{M})\big),$$

puisque $\mathrm{U} \subset (\mathbb{R}^n_+, g_{\mathrm{eucl}})$ est un ouvert de trivialisation. En utilisant le Lemme 2.1, on vérifie que ce champ de spineurs satisfait bien la condition à bord CHI, c'est-à-dire

$$\mathbb{B}_g^-(\overline{\psi}_{\varepsilon\,|\partial\mathrm{M}}) = 0.$$

On se sert maintenant du développement limité de l'opérateur de Dirac D_g donné dans la Proposition 2.10. Avant de passer à l'estimation elle-même, on développe la fonction H_t au voisinage de q intervenant dans ce développement. La formule de Taylor permet d'obtenir :

$$\mathrm{H}_t = \mathrm{H}(q) + \partial_\alpha(\mathrm{H}_t)(q)x^\alpha + \partial_t(\mathrm{H}_t)(q)t + O(|(x,t)|^2).$$

Puisque la valeur de $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ ne dépend que de la classe conforme de la métrique g, on peut se placer dans une métrique conforme à g dans laquelle la courbure scalaire de la variété M est de signe constant et dont le bord est minimal. Un tel choix de métrique est toujours possible, il suffit en effet pour cela de poser $\widetilde{g} = f_1^{\frac{4}{n-2}} g$ où $f_1 > 0$ (voir [**Esc92b**]) est solution du problème à bord

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{L}_g f_1 = \mu_1(\mathrm{L}_g) f_1 & \text{sur M} \\ \mathrm{B}_g f_{1\,|\partial\mathrm{M}} = 0 & \text{le long de } \partial\mathrm{M}. \end{array}\right.$$

Dans la suite, on notera g la métrique $\widetilde{g}$. Dans la trivialisation induite par les coordonnées de Fermi au voisinage du point q, le développement de l'opérateur de Dirac est donné par :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_g\overline{\psi}_\varepsilon \;=\; & \overline{\mathrm{D}_\xi\psi_\varepsilon} + \textstyle\sum_{i,j=1}^n \big(b_i^j - \delta_i^j\big)\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi_\varepsilon} + \gamma(\mathrm{W})\overline{\psi_\varepsilon} + \gamma(\mathrm{T})\overline{\psi_\varepsilon} \\ & + \gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi_\varepsilon} + u\gamma(\nu)\overline{\psi_\varepsilon}, \end{aligned} \tag{69}$$

avec $|\mathrm{W}| = O(|(x,t)|^2)$, $|\mathrm{Z}| = O(|(x,t)|^2)$, $|\mathrm{T}| = O(|(x,t)|)$ et où u est une fonction à valeurs réelles vérifiant $|u| = O(|(x,t)|)$. Développons maintenant l'expression précédente :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_g\overline{\psi}_\varepsilon(x,t) &= \gamma(\overline{\nabla}\eta)\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) + \eta\mathrm{D}_g\big(\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\big) \\
&= \gamma(\overline{\nabla}\eta)\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) + \frac{\eta}{\varepsilon}\overline{\mathrm{D}_\xi\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) + \frac{\eta}{\varepsilon}\sum_{i,j=1}^{n}\big(b_i^j - \delta_i^j\big)\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) \\
&\quad + \eta\gamma(\mathrm{W})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) + \eta\gamma(\mathrm{T})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) + \eta\gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) \\
&\quad + \eta u\gamma(\widetilde{\nu})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big),
\end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_g\overline{\psi}_\varepsilon &= \gamma(\overline{\nabla}\eta)\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) + \frac{\eta}{\varepsilon}\frac{n}{2}f\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) + \frac{\eta}{\varepsilon}\sum_{i,j=1}^{n}\big(b_i^j - \delta_i^j\big)\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) \\
&\quad + \eta\gamma(\mathrm{W})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) + \eta\gamma(\mathrm{T})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) + \eta\gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) \\
&\quad + \eta u\gamma(\widetilde{\nu})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big).
\end{aligned}$$

On développe maintenant le terme $|\mathrm{D}_g\overline{\psi}_\varepsilon|^2(x,t)$, qu'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{D}_g\overline{\psi}_\varepsilon|^2(x,t) &= (1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7)+(8)+(9)+(10)+(11)+(12) \\
&\quad +(13)+(14)+(15)+(16)+(17)+(18)+(19)+(20)+(21)+(22) \\
&\quad +(23)+(24)+(25)+(26)+(27)+(28),
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
(1) &= |\overline{\nabla}\eta|^2|\overline{\psi}|^2\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big) \\
(2) &= \tfrac{\eta^2}{\varepsilon^2}\tfrac{n^2}{4}f^2\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)|\overline{\psi}|^2\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big) \\
(3) &= \tfrac{\eta^2}{\varepsilon^2}\big|\textstyle\sum_{i,j=1}^{n}\big(b_i^j - \delta_i^j\big)\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}\big|^2\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big) \\
(4) &= \eta^2|\mathrm{W}|^2|\overline{\psi}|^2\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)
\end{aligned}$$

$$(5) \quad = \quad \eta^2|\mathrm{T}|^2|\overline{\psi}|^2\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)$$

$$(6) \quad = \quad \eta^2|\mathrm{Z}|^2|\overline{\psi}|^2\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)$$

$$(7) \quad = \quad \eta^2u^2|\overline{\psi}|^2\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)$$

$$(8) \quad = \quad \tfrac{n\eta}{\varepsilon}f\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\mathrm{Re}\langle\gamma\big(\overline{\nabla}\eta\big)\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(9) \quad = \quad \tfrac{2\eta}{\varepsilon}\textstyle\sum_{i,j=1}^n\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\mathrm{Re}\langle\gamma(\overline{\nabla}\eta)\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(10) \quad = \quad 2\eta\mathrm{Re}\langle\gamma(\overline{\nabla}\eta)\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\gamma(\mathrm{W})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(11) \quad = \quad 2\eta\mathrm{Re}\langle\gamma(\overline{\nabla}\eta)\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\gamma(\mathrm{T})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(12) \quad = \quad 2\eta\mathrm{Re}\langle\gamma(\overline{\nabla}\eta)\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(13) \quad = \quad 2u\,\eta\mathrm{Re}\langle\gamma(\overline{\nabla}\eta)\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\gamma(\widetilde{\nu})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(14) \quad = \quad \tfrac{n\eta}{\varepsilon^2}f\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\textstyle\sum_{i,j=1}^n\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\mathrm{Re}\langle\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(15) \quad = \quad n\tfrac{\eta^2}{\varepsilon}f\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\mathrm{Re}\langle\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\gamma(\mathrm{W})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(16) \quad = \quad n\tfrac{\eta^2}{\varepsilon}f\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\mathrm{Re}\langle\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\gamma(\mathrm{T})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(17) \quad = \quad n\tfrac{\eta^2}{\varepsilon}f\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\mathrm{Re}\langle\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(18) \quad = \quad n\tfrac{\eta^2}{\varepsilon}f\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\mathrm{Re}\langle\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),h\,\gamma(\widetilde{\nu})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(19) \quad = \quad \tfrac{\eta^2}{\varepsilon}\textstyle\sum_{i,j=1}^n\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\mathrm{Re}\langle\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\gamma(\mathrm{W})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(20) \quad = \quad \tfrac{\eta^2}{\varepsilon}\textstyle\sum_{i,j=1}^n\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\mathrm{Re}\langle\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\gamma(\mathrm{T})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(21) \quad = \quad \tfrac{\eta^2}{\varepsilon}\textstyle\sum_{i,j=1}^n\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\mathrm{Re}\langle\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(22) \quad = \quad \tfrac{\eta^2}{\varepsilon}u\textstyle\sum_{i,j=1}^n\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\mathrm{Re}\langle\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\gamma(\widetilde{\nu})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(23) \quad = \quad 2\eta^2\mathrm{Re}\langle\gamma(\mathrm{W})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\gamma(\mathrm{T})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(24) \quad = \quad 2\eta^2\mathrm{Re}\langle\gamma(\mathrm{W})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(25) \quad = \quad 2u\eta^2\mathrm{Re}\langle\gamma(\mathrm{W})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\ \gamma(\widetilde{\nu})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$(26) \quad = \quad 2\eta^2\mathrm{Re}\langle\gamma(\mathrm{T})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle$$

$$\begin{aligned}(27) &= 2u\eta^2\mathrm{Re}\langle\gamma(\mathrm{T})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\,\gamma(\widetilde{\nu})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle\\ (28) &= 2u\eta^2\mathrm{Re}\langle\gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\,\gamma(\widetilde{\nu})\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle\end{aligned}$$

où $u=-\frac{n-1}{2}\mathrm{H}_t$. Remarquons que puisque $\overline{\nabla}\eta$ et T sont des champs de vecteurs et que Z est une 2-forme, on a :

$$(8)=0,\qquad(16)=0,\qquad(18)=0,\qquad(27)=0\qquad\text{et}\qquad(28)=0.$$

Développons maintenant le terme $\sum_{i,j=1}^n\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$; on calcule alors en se servant de l'expression du champ de spineurs ψ que :

$$\sum_{i,j=1}^n\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\;=\;\frac{1}{\sqrt{2}}f^{\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^n\big(b_i^i-1\big)\overline{\Phi}_0-\frac{n}{\sqrt{2}}\overline{\gamma(\mathrm{X})\psi}\big(\frac{x}{\varepsilon}\big),$$

où $\mathrm{X}=f\,\sum_{i,j=1}^n\big(b_i^j-\delta_i^j\big)x_j\partial_i\in\Gamma(\mathrm{TU})$. En utilisant le développement des coefficients b_i^j, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}f^{\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^n\big(b_i^i-1\big)\overline{\Phi}_0\;=\;\frac{1}{\sqrt{2}}f^{\frac{n}{2}}\big(O(r)\big)\overline{\Phi}_0.\tag{70}$$

Grâce à cette estimation, aux propriétés des champs W, T, U et u données dans la Proposition 2.10 et puisque par hypothèse $|\overline{\nabla}\eta|\leq Cr$ et $r\leq\delta\leq 1$, on vérifie alors que :

- $(1)+(4)+(5)+(6)+(7)+(10)+(11)+(12)+(13)+(23)+(24)$

  $+(25)+(26)+(27)\leq Cr^2f^{n-1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)$
- $(9)+(15)+(17)+(19)+(20)+(21)+(22)\leq\frac{C}{\varepsilon}r^2f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)+\frac{C}{\varepsilon}r^2f^{n+1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)$
- $(2)+(3)+(14)\leq\frac{n^2}{4\varepsilon^2}f^{n+1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)+\frac{C}{\varepsilon^2}rf^{n+1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)+\frac{C}{\varepsilon^2}r^2f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)$.

On peut donc en déduire que :

$$\begin{aligned}0\leq|\mathrm{D}_g\overline{\psi}_\varepsilon|^2(x,t)\;&\leq\;\frac{n^2}{4\varepsilon^2}f^{n+1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)+\frac{C}{\varepsilon^2}rf^{n+1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)+\frac{C}{\varepsilon^2}r^2f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\\ &\quad+\frac{C}{\varepsilon}r^2f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)+\frac{C}{\varepsilon}r^2f^{n+1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)+Cr^2f^{n-1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\\ &\leq\;\frac{n^2}{4\varepsilon^2}f^{n+1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\big[1+\Lambda\big],\end{aligned}$$

où $\Lambda=Cr+Cr^2f^{-1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)+C\varepsilon r^2+Cr^2\varepsilon f^{-1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)+Cr^2\varepsilon^2f^{-2}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)$. Remarquons que puisque $|\mathrm{D}_g\overline{\psi}_\varepsilon|^2\geq 0$, alors $\Lambda\geq -1$ et comme pour tout $x\geq -1$, on a :

$$(1+x)^{\frac{n}{n+1}}\leq 1+\frac{n}{n+1}x,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}|\mathrm{D}_g\overline{\psi}_\varepsilon|^{\frac{2n}{n+1}}(x,t) &\leq \Big(\frac{n^2}{4\varepsilon^2}f^{n+1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\Big)^{\frac{n}{n+1}}\big[1+\Lambda\big]^{\frac{n}{n+1}}\\ &\leq \Big(\frac{n}{2\varepsilon}\Big)^{\frac{2n}{n+1}}f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\big[1+\frac{n}{n+1}\Lambda\big],\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}|\mathrm{D}_g\overline{\psi}_\varepsilon|^{\frac{2n}{n+1}}(x,t) \leq \Big(\frac{n}{2}\Big)^{\frac{2n}{n+1}}\varepsilon^{-\frac{2n}{n+1}}\Big[&f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)+C\frac{n}{n+1}rf^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\\ &+C\frac{n}{n+1}r^2f^{n-1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)+C\frac{n}{n+1}\varepsilon r^2f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\\ &+C\frac{n}{n+1}\varepsilon r^2f^{n-1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)+C\frac{n}{n+1}\varepsilon^2r^2f^{n-2}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\Big].\end{aligned}$$

En intégrant l'expression précédente, on a :

$$\int_{\mathrm{M}}|\mathrm{D}_g\overline{\psi}_\varepsilon|^{\frac{2n}{n+1}}dv(g) \leq \varepsilon^{-\frac{2n}{n+1}}\Big[\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}+\mathbf{E}+\mathbf{F}\Big],$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)}f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g)\\ \mathbf{B} &= C\frac{n}{n+1}\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)}rf^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g)\\ \mathbf{C} &= C\frac{n}{n+1}\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)}r^2f^{n-1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g)\\ \mathbf{D} &= C\frac{n}{n+1}\varepsilon\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)}r^2f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g)\\ \mathbf{E} &= C\frac{n}{n+1}\varepsilon\int_{B_q^+(2\delta)}r^2f^{n-1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g)\\ \mathbf{F} &= C\frac{n}{n+1}\varepsilon^2\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)}r^2f^{n-2}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g).\end{aligned}$$

On va maintenant donner des estimations des quantités ci-dessus. Commençons par le terme **A**. Pour cela, on remarque que, puisque la fonction f ne dépend que de la variable $r^2=x_1^2+...+x_{n-1}^2+t^2$, en passant en coordonnées sphériques, on a :

$$\mathbf{A} = \frac{\omega_{n-1}}{2}\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)}r^{n-1}f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\mathcal{S}(r)dr,$$

où

$$\mathcal{S}(r)=\frac{2}{\omega_{n-1}}\int_{\mathbb{S}^n_+}\sqrt{\det(g_{rx})}ds(x).$$

Or en utilisant le développement de l'élément de volume (voir [**Esc92a**]), on sait que :

$$\mathcal{S}(r) \leq 1 + Cr,$$

et on obtient alors :

$$\mathbf{A} \leq \frac{\omega_{n-1}}{2}\Big[\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} r^{n-1} f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dr + C\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} r^n f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dr\Big],$$

ce qui, par un changement de variables donne :

$$\mathbf{A} \leq \frac{\omega_{n-1}}{2}\varepsilon^n\Big[\int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} r^{n-1} f^n(r)dr + C\varepsilon\int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} r^n f^n(r)dr\Big].$$

Cependant, il est facile de vérifier que si $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{2\delta}{\varepsilon}}^{+\infty} r^{n-1} f^n(r)dr &= o(1),\\ \int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} r^n f^n(r)dr &= o(\ln\varepsilon),\end{aligned}$$

et donc :

$$\mathbf{A} \leq \frac{\omega_{n-1}}{2}\varepsilon^n\Big[\int_0^{+\infty} r^{n-1} f^n(r)dr + o(1)\Big].$$

Passons maintenant à une estimation de **B**. On procède de la même manière que pour le premier terme. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= C\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} r f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g)\\ &\leq C\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} r f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dx + C\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} r^2 f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dx\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{B} \leq C\varepsilon^{n+1}\int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} r^n f^n(r)dr + C\varepsilon^{n+2}\int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} r^{n+1} f^n(r)dr$$

Il est alors facile de voir que si $n \geq 1$, $\mathbf{B} = o(\varepsilon^n)$. Passons maintenant au terme **C** :

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= C\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} r^2 f^{n-1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g)\\ &\leq C\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} r^2 f^{n-1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dx + C\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} r^3 f^{n-1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dx\end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\mathbf{C} \leq C\varepsilon^{n+2}\int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} r^{n+1} f^{n-1}(r)dr + C\varepsilon^{n+3}\int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} r^{n+2} f^{n-1}(r)dr$$

On peut donc conclure que si $n \geq 3$, $\mathbf{C} = o(\varepsilon^n)$. Le terme $\mathbf{D}$ satisfait :

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= C\varepsilon \int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} r^2 f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) dv(g) \\
&\leq C\varepsilon \int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} r^2 f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) dx + C\varepsilon \int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} r^3 f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big) dx
\end{aligned}$$

et donc :

$$\mathbf{D} \leq C\varepsilon^{n+2} \int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} r^{n+1} f^n(r) dr + C\varepsilon^{n+3} \int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} r^{n+2} f^n(r) dr.$$

On en conclut donc que si $n \geq 1$, $\mathbf{D} = o(\varepsilon^n)$. De la même manière, on montre sans trop de difficultés que si $n \geq 3$, les quantités $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ satisfont $\mathbf{E} = o(\varepsilon^n)$ et $\mathbf{F} = o(\varepsilon^n)$. On a alors montré que si $n \geq 3$:

$$\int_{\mathrm{M}} |\mathrm{D}_g \overline{\psi}_\varepsilon|^{\frac{2n}{n+1}} dv(g) \leq \Big(\frac{n}{2}\Big)^{\frac{2n}{n+1}} \frac{\omega_{n-1}}{2} \varepsilon^{\frac{n(n-1)}{n+1}} \Big[\int_0^\infty r^{n-1} f^n(r) dr + o(1)\Big],$$

ce qui, en élevant à la bonne puissance donne :

$$\Big(\int_{\mathrm{M}} |\mathrm{D}_g \overline{\psi}_\varepsilon|^{\frac{2n}{n+1}} dv(g)\Big)^{\frac{n+1}{n}} \leq \frac{n^2}{4} \Big(\frac{\omega_{n-1}}{2}\Big)^{\frac{n+1}{n}} \mathrm{I}^{\frac{n+1}{n}} \varepsilon^{n-1} \big(1 + o(1)\big), \tag{71}$$

où l'on a posé $\mathrm{I} = \int_0^\infty r^{n-1} f^n(r) dr$. On va maintenant donner une minoration du dénominateur de la fonctionnelle minimisée par $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$. Pour cela, on développe ce terme de la même manière que le numérateur, et on obtient :

$$\mathrm{Re}\langle \mathrm{D}_g \overline{\psi}_\varepsilon, \overline{\psi}_\varepsilon \rangle = (1') + (2') + (3') + (4') + (5') + (6') + (7'),$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}
(1') &= \eta \mathrm{Re}\langle \gamma(\overline{\nabla}\eta)\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big), \overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle \\
(2') &= \frac{n}{2\varepsilon}\eta^2 \mathrm{Re}\langle f\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big), \overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle \\
(3') &= \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i,j=1}^n \eta^2 \big(b_i^j - \delta_i^j\big) \mathrm{Re}\langle \overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big), \overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle \\
(4') &= \eta^2 \mathrm{Re}\langle \gamma(\mathrm{W})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big), \overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle \\
(5') &= \eta^2 \mathrm{Re}\langle \gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big), \overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle \\
(6') &= \eta^2 \mathrm{Re}\langle \gamma(\mathrm{T})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big), \overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle \\
(7') &= \eta^2 \mathrm{Re}\langle u\gamma(\widetilde{\nu})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big), \overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle.
\end{aligned}$$

On vérifie alors que puisque :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\langle\gamma(\overline{\nabla}\eta)\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle & = & 0 & \text{car } \overline{\nabla}\eta\in\Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{V}) \\ \mathrm{Re}\langle\gamma(\mathrm{T})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle & = & 0 & \text{car } \mathrm{T}\in\Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{V}) \\ \mathrm{Re}\langle\gamma(\widetilde{\nu})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle & = & 0 & \text{car } \widetilde{\nu}\in\Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{V}), \end{cases}$$

on a :

$$\Big|\int_{\mathrm{M}}\mathrm{Re}\langle \mathrm{D}_g\overline{\psi}_\varepsilon,\overline{\psi}_\varepsilon\rangle dv(g)\Big| = \mathbf{A}'+\mathbf{B}'+\mathbf{C}'+\mathbf{D}',$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \frac{n}{2\varepsilon}\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} f\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)|\overline{\psi}|^2\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g) = \frac{n}{2\varepsilon}\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g) \\ \mathbf{B}' &= \frac{C}{\varepsilon}\sum_{i,j=1}^n\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)}\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\mathrm{Re}\langle\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle dv(g) \\ \mathbf{C}' &= \int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)}\mathrm{Re}\langle\gamma(\mathrm{W})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle dv(g) \\ \mathbf{D}' &= \int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)}\mathrm{Re}\langle\gamma(\widetilde{\nu})\gamma(\mathrm{Z})\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\overline{\psi}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle dv(g). \end{aligned}$$

Or par la Proposition 2.10, on sait que $|\mathrm{W}| = O(|(x,t)^2|)$ et $|\mathrm{Z}| = O(|(x,t)^2|)$, on a donc :

$$\mathbf{C}'+\mathbf{D}' = C\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} r^2 f^{n-1}\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g),$$

et on obtient alors :

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathrm{M}}\mathrm{Re}\langle \mathrm{D}_g\overline{\psi}_\varepsilon,\overline{\psi}_\varepsilon\rangle \quad dv(g) &= \tfrac{n}{2\varepsilon}\textstyle\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} f^n\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g) + C\textstyle\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} r^2 f^{n-1}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g) \\ &\quad +\tfrac{C}{\varepsilon}\textstyle\sum_{i,j=1}^n\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)}\big(b_i^j-\delta_i^j\big)\mathrm{Re}\langle\overline{\gamma(\partial_i)\nabla_{\partial_j}\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big),\overline{\psi}\big(\tfrac{(x,t)}{\varepsilon}\big)\rangle dv(g). \end{aligned}$$

On calcule de la même manière que pour le numérateur que :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \frac{n}{2\varepsilon}\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g) \\ &= \frac{n}{2\varepsilon}\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} f^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dx + \frac{C}{\varepsilon}\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} rf^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dx \end{aligned}$$

ce qui pour $n\geq 1$, donne :

$$\mathbf{A}' = \frac{n}{4}\,\omega_{n-1}\mathrm{I}\,\varepsilon^{n-1}\big(1+o(1)\big).$$

En se servant de l'estimation de la quantité $\mathbf{B}$, on vérifie que :

$$\mathbf{B}' = \frac{C}{\varepsilon}\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)} rf^n\big(\frac{(x,t)}{\varepsilon}\big)dv(g)$$

et donc que $\mathbf{B}' = o(\varepsilon^{n-1})$ si $n \geq 3$. Un calcul similaire permet de voir que $\mathbf{C}' + \mathbf{D}' = o(\varepsilon^{n-1})$ si $n \geq 3$. Finalement, on obtient :

$$\Big| \int_{\mathrm{M}} \mathrm{Re}\langle \mathrm{D}_g \overline{\psi}_\varepsilon), \overline{\psi}_\varepsilon \rangle dv(g) \Big| \;=\; \frac{n}{2}\,\frac{\omega_{n-1}}{2} \mathrm{I}\, \varepsilon^{n-1}\big(1 + o(1)\big).$$

En utilisant la caractérisation variationnelle de $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ de la Proposition 2.2, on a :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) \leq \frac{\big(\int_{\mathrm{M}} |\mathrm{D}_g \overline{\psi}_\varepsilon|^{\frac{2n}{n+1}} dv(g)\big)^{\frac{n+1}{n}}}{\big|\int_{\mathrm{M}} \mathrm{Re}\langle \mathrm{D}_g \overline{\psi}_\varepsilon, \overline{\psi}_\varepsilon \rangle dv(g)\big|}.$$

L'estimation de la fonctionnelle contre le champ de spineurs $\overline{\psi}_\varepsilon$ permet alors d'obtenir l'estimation suivante :

$$\frac{\big(\int_{\mathrm{M}} |\mathrm{D}_g \overline{\psi}_\varepsilon|^{\frac{2n}{n+1}} dv(g)\big)^{\frac{n+1}{n}}}{\big|\int_{\mathrm{M}} \mathrm{Re}\langle \mathrm{D}_g \overline{\psi}_\varepsilon, \overline{\psi}_\varepsilon \rangle dv(g)\big|} \leq \frac{\frac{n^2}{4}\Big(\frac{\omega_{n-1}}{2}\Big)^{\frac{n+1}{n}} \mathrm{I}^{\frac{n+1}{n}} \varepsilon^{n-1}}{\frac{n}{2}\,\frac{\omega_{n-1}}{2}\,\mathrm{I}\,\varepsilon^{n-1}} \Big(1 + o(1)\Big),$$

ce qui s'écrit encore :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) \leq \frac{\big(\int_{\mathrm{M}} |\mathrm{D}_g \overline{\psi}_\varepsilon|^{\frac{2n}{n+1}} dv(g)\big)^{\frac{n+1}{n}}}{\big|\int_{\mathrm{M}} \mathrm{Re}\langle \mathrm{D}_g \overline{\psi}_\varepsilon), \overline{\psi}_\varepsilon \rangle dv(g)\big|} \leq \frac{n}{2}\Big(\frac{\omega_{n-1}}{2}\Big)^{\frac{1}{n}} \mathrm{I}^{\frac{1}{n}} \Big(1 + o(1)\Big).$$

Cependant, puisque $\omega_{n-1}\mathrm{I} = \omega_n$, on obtient :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) \leq \frac{n}{2}\Big(\frac{\omega_n}{2}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big(1 + o(1)\Big) = \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)\Big(1 + o(1)\Big),$$

et on peut donc conclure que $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) \leq \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)$. □

On voit dans la preuve de ce résultat que les estimations ne sont valables que si la dimension n de la variété M est supérieure ou égale à 3. On peut cependant vérifier que ce résultat reste vrai en dimension 2. On se réfère en particulier à l'article de J.F Grosjean et E. Humbert [**GH06**]. On prouve alors le résultat suivant :

Théorème 2.3. *Soit* (M^2, g) *une surface à bord connexe. On a alors :*

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) \leq \lambda_{\min}(\mathbb{S}^2_+, \partial\mathbb{S}^2_+) = \sqrt{2\pi}. \tag{72}$$

Preuve : On remarque tout d'abord que puisque M est une variété de dimension 2, elle possède toujours une structure spinorielle et un opérateur de chiralité donné par l'élément de volume complexe du fibré des spineurs. À un changement de métrique conforme près, on peut supposer que M est localement conformément plate et que son bord $\partial\mathrm{M}$ est totalement ombilique. Soit donc $q \in \partial\mathrm{M}$ et V un ouvert de carte tel que g soit la métrique plate dans V. Soit $0 < \varepsilon \leq \alpha \leq \delta$ et considérons la fonction définie par :

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + r^2} & \text{si } \mathrm{r} \leq \alpha \\ \frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\alpha^2} & \text{si } \mathrm{r} \geq \alpha \end{cases}$$

où $r = d(q, x)$ et $q \in \partial\mathrm{M}$. En utilisant la Proposition 2.5, on sait qu'il existe un champ de spineurs $\psi \in \Gamma\big(\Sigma\mathbb{R}^2_+\big)$ vérifiant sur $\mathbb{R}^2_+$:

$$\mathrm{D}_\xi \psi = f\psi$$

avec $f(x)=\frac{2}{1+r^2}\in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$. Soit maintenant η une fonction lisse sur M telle que

$$\eta(x)=\begin{cases} 1 & \text{sur } \mathrm{B}_q^+(\delta)\\ 0 & \text{sur } \mathrm{M}\setminus \mathrm{B}_q^+(2\delta)\end{cases} \qquad \text{et} \qquad |\nabla\eta|\leq\frac{1}{\delta}$$

avec $\mathrm{B}_q^+(2\delta)\subset \mathrm{V}$ et où l'on a supposé que V est l'ouvert de trivialisation construit dans le paragraphe 4. On considère alors le spineur-test défini par $\overline{\psi}_\varepsilon(x)=\eta(x)\overline{\psi}(\frac{x}{\varepsilon})\in\mathcal{H}^+$. En utilisant le Corollaire 2.1, on obtient

$$\lambda_1(g_\varepsilon)\leq\frac{\int_\mathrm{M}|\mathrm{D}_\varepsilon\overline{\psi}_\varepsilon|^2 f_\varepsilon^{-1}dv(g_\varepsilon)}{\big|\int_\mathrm{M}\mathrm{Re}\langle \mathrm{D}_\varepsilon\overline{\psi}_\varepsilon,\overline{\psi}_\varepsilon\rangle dv(g_\varepsilon)\big|} \tag{73}$$

où $\lambda_1(g_\varepsilon)$ est la première valeur propre non nulle de l'opérateur de Dirac D_ε sous la condition à bord associée à un opérateur de chiralité dans la métrique $g_\varepsilon=f_\varepsilon^2 g\in[g]$. On a donc clairement que :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})\leq\frac{\int_\mathrm{M}|\mathrm{D}_\varepsilon\overline{\psi}_\varepsilon|^2 f_\varepsilon^{-1}dv(g_\varepsilon)}{\big|\int_\mathrm{M}\mathrm{Re}\langle \mathrm{D}_\varepsilon\overline{\psi}_\varepsilon,\overline{\psi}_\varepsilon\rangle dv(g_\varepsilon)\big|}\mathrm{Vol}(\mathrm{M},g_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}.$$

On passe maintenant à l'estimation du premier terme dans le membre de droite de l'expression précédente. Remarquons tout d'abord que sur $\mathrm{B}_q^+(2\delta)$, on a :

$$|\mathrm{D}_\varepsilon\overline{\psi}_\varepsilon|^2=|\nabla\eta|^2 f(\frac{x}{\varepsilon})+\frac{\eta^2}{\varepsilon^2}f^3(\frac{x}{\varepsilon}).$$

On décompose le numérateur de l'expression précédente de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)}|\mathrm{D}_\varepsilon\overline{\psi}_\varepsilon|^2 f_\varepsilon^{-1}dv(g_\varepsilon) &= \int_{\mathrm{B}_q^+(\alpha)}|\mathrm{D}_\varepsilon\overline{\psi}_\varepsilon|^2 f_\varepsilon^{-1}dv(g_\varepsilon)+\int_{\mathrm{B}_q^+(\delta)\setminus\mathrm{B}_q^+(\alpha)}|\mathrm{D}_\varepsilon\overline{\psi}_\varepsilon|^2 f_\varepsilon^{-1}dv(g_\varepsilon)\\ &\quad+\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)\setminus\mathrm{B}_q^+(\alpha)}|\mathrm{D}_\varepsilon\overline{\psi}_\varepsilon|^2 f_\varepsilon^{-1}dv(g_\varepsilon).\end{aligned}$$

Sur la demi-boule euclidienne $\mathrm{B}_q^+(\alpha)$, on a :

$$(\eta\equiv 1\ \Rightarrow\ \nabla\eta=0)\qquad\text{et}\qquad f_\varepsilon(x)=\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2+r^2}$$

donc :

$$\int_{\mathrm{B}_q^+(\alpha)}|\mathrm{D}_\varepsilon\overline{\psi}_\varepsilon|^2 f_\varepsilon^{-1}dv(g_\varepsilon)=4\varepsilon^2\int_{\mathrm{B}_q^+(\alpha)}\frac{dx}{(\varepsilon^2+r^2)^2}.$$

Sur la couronne euclidienne $\mathrm{B}_q^+(\delta)\setminus\mathrm{B}_q^+(\alpha)$, on a :

$$(\eta\equiv 1\ \Rightarrow\ \nabla\eta=0)\qquad\text{et}\qquad f_\varepsilon(x)=\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\alpha^2}$$

donc :

$$\int_{\mathrm{B}_q^+(\delta)\setminus\mathrm{B}_q^+(\alpha)}|\mathrm{D}_\varepsilon\overline{\psi}_\varepsilon|^2 f_\varepsilon^{-1}dv(g_\varepsilon)=4\varepsilon^2\int_{\mathrm{B}_q^+(\delta)\setminus\mathrm{B}_q^+(\alpha)}\frac{\varepsilon^2+\alpha^2}{(\varepsilon^2+r^2)^3}dx.$$

Sur la couronne euclidienne $\mathrm{B}_q^+(2\delta)\setminus\mathrm{B}_q^+(\delta)$, on a :

$$0\leq\eta\leq 1,\quad |\nabla\eta|\leq\frac{1}{\delta}\quad\text{et}\quad f_\varepsilon(x)=\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\alpha^2}$$

donc :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)\setminus\mathrm{B}_q^+(\alpha)}|\mathrm{D}_\varepsilon\overline{\psi}_\varepsilon|^2 f_\varepsilon^{-1}dv(g_\varepsilon) &\leq \frac{1}{\delta}(\varepsilon^2+\alpha^2)\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)\setminus\mathrm{B}_q^+(\alpha)}\frac{dx}{\varepsilon^2+r^2}\\ &+ 4\varepsilon^2(\varepsilon^2+\alpha^2)\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)\setminus\mathrm{B}_q^+(\alpha)}\frac{dx}{(\varepsilon^2+r^2)^3}.\end{aligned}$$

Passons maintenant à l'estimation du dénominateur de l'expression (73). On écrit

$$\int_{\mathrm{M}}\mathrm{Re}\langle\mathrm{D}_\varepsilon\overline{\psi}_\varepsilon,\overline{\psi}_\varepsilon\rangle dv(g_\varepsilon)=\frac{\eta^2}{\varepsilon}\int_{\mathrm{B}_q^+(2\delta)}f^2\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)dx\geq\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathrm{B}_q^+(\delta)}f^2\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)dx=4\varepsilon\int_{\mathrm{B}_q^+(\delta)}\frac{dx}{(\varepsilon^2+r^2)^2},$$

et donc en combinant toutes les précédentes estimations, on arrive facilement à montrer que

$$\lambda_1(g_\varepsilon)\leq\frac{1}{\varepsilon}+o(1).$$

Donnons maintenant une estimation du volume de M dans la métrique g_ε. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathrm{M},g_\varepsilon) &= \int_{\mathrm{M}}f_\varepsilon^2 dv(g_\varepsilon)\\ &= 4\varepsilon^2\int_{\mathrm{B}_q^+(\frac{\alpha}{\varepsilon})}\frac{dx}{(1+r^2)^2}+o(\varepsilon^3),\end{aligned}$$

ce qui donne $\mathrm{Vol}(\mathrm{M},g_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}=\varepsilon\omega_1^{\frac{1}{2}}\big(1+o(\varepsilon)\big)$. En combinant cette estimation du volume avec celle de la première valeur propre $\lambda_1(g_\varepsilon)$, on obtient :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})\leq\lambda_1(g_\varepsilon)\mathrm{Vol}(\mathrm{M},g_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}=\Big(\frac{\omega_2}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}\big(1+o(1)\big),$$

et donc $\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})\leq\lambda_{\min}(\mathbb{S}^2_+,\partial\mathbb{S}^2_+)$. □

On peut maintenant se demander dans quels cas l'inégalité donnée dans les théorèmes 2.2 et 2.3 est stricte. Cela permettra en particulier de donner une preuve spinorielle du problème de Yamabe ainsi que de prouver l'existence de solutions à un équation non linéaire de type Yamabe pour l'opérateur de Dirac sous la condition à bord associée à un opérateur de chiralité. Pour parvenir à donner des cas dans lesquels cette inégalité est stricte, on va devoir introduire la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord associée à un opérateur de chiralité et en étudier les principales propriétés.

7. Fonction de Green de l'opérateur de Dirac

Dans ce chapitre, on se propose de définir et d'étudier la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sous les deux conditions à bord locales étudiées dans le chapitre 1. Ce travail ainsi effectué on donnera deux applications de ces constructions. La première permet d'obtenir des cas dans lequel l'inégalité (40) est stricte. La deuxième consiste à donner une preuve simple du théorème de la masse positive (dans sa forme faible) pour les variétés asymptotiquement plates obtenues par éclatement conforme par la fonction de Green du laplacien conforme.

La première partie est à la jonction des travaux de R. Schoen [**Sch84**], J. Escobar [**Esc92b**],[**Esc92a**] et de B. Ammann, E. Humbert et B. Morel [**AHM**]. En effet dans [**Sch84**], Schoen remarque que si (M, g) est une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ dont l'invariant de Yamabe est strictement positif alors pour tout $x \in \mathrm{M}$, il existe une unique fonction de Green $\mathcal{G}_x$ du laplacien conforme, définie et de classe C^∞ sur $\mathrm{M} \setminus \{x\}$. Il prouve de plus que si la variété M est localement conformément plate alors, au voisinage de x, la fonction de Green admet le développement suivant :

$$\mathcal{G}_x(y) = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1} r^{n-2}} + \alpha_x(y),$$

où $r = d(x, y)$ et avec $\alpha_x \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$. Le point crucial mis en évidence par Schoen et qui est à l'origine de la résolution complète du problème de Yamabe, est l'existence d'un réel $C > 0$ pour lequel :

$$\alpha_x(x) = C \mathrm{m}(\mathcal{G}_x^{\frac{4}{n-2}} g)$$

où $\mathrm{m}(\mathcal{G}_x^{\frac{4}{n-2}} g)$ est la masse de la variété asymptotiquement plate $(\mathrm{M} \setminus \{x\}, \mathcal{G}_x^{\frac{4}{n-2}} g)$. Le lien entre le problème de Yamabe et le théorème de la masse positive était alors fait. En effet, à une variété asymptotiquement plate (N, g), on associe un invariant qu'on appelle la masse et qui est défini par :

$$m(g) = \frac{1}{16\pi} \int_{S_\infty} (\partial_j g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \nu_j ds(g),$$

où S_∞ est une sphère à l'infini. La conjecture de la masse positive, issu de la relativité générale, stipule que toute variété asymptotiquement plate à courbure scalaire positive et intégrable satisfait $m(g) \geq 0$ et que $m(g) = 0$ si et seulement si la variété (N, g) est isométrique à $(\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{eucl}})$. Ce résultat n'a pas encore été prouvé en toute généralité mais seulement dans des cas particuliers par Schoen et Yau (voir [**SY79b**] et [**SY79a**]) et complètement résolue dans le cas où la variété est spinorielle par E. Witten (voir [**Wit81**],[**PT82**], [**Bar86**] ou bien [**LP87**]).

Dans le cas qui nous intéresse ici, on va voir que la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sous la condition associée à un opérateur de chiralité joue le même rôle pour notre problème que la fonction de Green du laplacien conforme dans le problème de Yamabe.

Pour finir, on construira la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord MIT permettant de donner une preuve simple du théorème de la masse positive pour les variétés asymptotiquement plates obtenues par éclatement conforme par la fonction de Green du laplacien conforme.

7.1. Fonction de Green chirale et invariant spinoriel conforme. Dans ce paragraphe, on définit la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord associée à un opérateur de chiralité et on en donne ses principales propriétés. En particulier, on s'attachera à obtenir son expression au voisinage d'un point du bord lorsque la variété considérée est isométrique (au voisinage de ce même point) au demi-espace $\mathbb{R}^n_+$. Le terme "constant" de la partie régulière de la fonction de Green sera alors étudié et cela permettra de montrer que sous certaines hypothèses, l'inégalité (40) est stricte. Plus précisément, on prouve le résultat suivant :

THÉORÈME 2.4. *Soit* $(\mathrm{M}^n, g, \sigma)$ *une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension* $n \geq 2$ *possédant un opérateur de chiralité* Γ *et dont le bord* $\partial\mathrm{M}$ *est non vide et lisse. Supposons qu'il existe une métrique* $\overline{g}$ *conforme à* g *et un point* $q \in \partial\mathrm{M}$ *tels qu'au voisinage de ce point la variété* $(\mathrm{M}, \overline{g})$ *est isométrique au demi-espace euclidien. Supposons de plus que* D *est inversible sur* $\mathcal{H}^-$ *(ou sur* $\mathcal{H}^+$*) et que l'opérateur de masse chiral* $\mathrm{m}^-_{\mathrm{CHI}}(q)$ *(ou* $\mathrm{m}^+_{\mathrm{CHI}}(q)$*) soit non identiquement nul. On a alors :*

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) < \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+).$$

On considère donc ici (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte à bord non vide dont le fibré des spineurs complexes est muni d'un opérateur de chiralité Γ. On rappelle (voir [**FS98**] ou la section 4.2) que l'opérateur de Dirac

$$\mathrm{D} : \mathcal{H}^{\pm} = \{\varphi \in \mathrm{H}^2_1 \ / \ \mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(\varphi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0\} \longrightarrow \mathrm{L}^2\big(\Sigma(\mathrm{M})\big) \tag{74}$$

est un opérateur de Fredholm et que son spectre est constitué de nombres réels isolés dont la multiplicité est finie. On a alors la résolution spectrale :

$$\mathrm{L}^2(\Sigma\mathrm{M}) = \bigoplus_{\lambda^{\pm} \in \mathrm{Spec}^{\pm}(\mathrm{D})} \mathcal{N}_{\lambda^{\pm}}(\mathrm{D}), \tag{75}$$

où $\mathrm{Spec}^{\pm}(\mathrm{D})$ est le spectre de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}$ et $\mathcal{N}_{\lambda^{\pm}}(\mathrm{D})$ est le sous-espace propre associée à la valeur propre $\lambda^{\pm}$. On donne maintenant un définition de la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord CHI.

DÉFINITION 2.2. *Une fonction de Green chirale pour l'opérateur de Dirac* D *sous la condition à bord associée à un opérateur de chiralité est la donnée d'une section lisse*

$$\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}} : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \setminus \Delta \longrightarrow \Sigma\mathrm{M} \boxtimes \big(\Sigma\mathrm{M}\big)^*,$$

où $\Delta = \{(x, x) \ / \ x \in \mathrm{M}\}$ *et* $\Sigma\mathrm{M} \boxtimes \big(\Sigma\mathrm{M}\big)^*$ *est le fibré vectoriel dont la fibre au-dessus de* (x, y) *est donnée par* $\mathrm{Hom}(\Sigma_y\mathrm{M}, \Sigma_x\mathrm{M})$ *et qui satisfait au sens des distributions le problème à bord :*

$$\begin{cases} \mathrm{D}_x\big(\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(x, y)\big) = \delta_y \mathrm{Id}_{\Sigma_y\mathrm{M}} \\ \mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}\big(\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(x, y)\big) = 0, \quad \textit{pour } x \in \partial\mathrm{M} \setminus \{y\}, \end{cases}$$

pour tout $y \in \mathrm{M}$*. En d'autres termes, pour tout* $y \in \mathrm{M}$*,* $\psi^{\pm}_0 \in \Sigma_y\mathrm{M}$ *vérifiant* $\gamma(\nu)\Gamma\psi^{\pm}_0 = \mp\psi^{\pm}_0$ *et* $\varphi \in \Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ *tel que* $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(\varphi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0$*, on a :*

$$\int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(x, y)\psi^{\pm}_0, \mathrm{D}\varphi(x)\rangle dv(x) = \langle \psi^{\pm}_0, \varphi(y)\rangle$$

et si $x \in \partial\mathrm{M}$ *alors* $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}\big(\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(x, y)\psi^{\pm}_0\big) = 0$.

De la même manière, on définit la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. En effet, la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par une section :

$$\mathrm{G}_{\mathrm{eucl}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \longrightarrow \Sigma\mathbb{R}^n \boxtimes \big(\Sigma\mathbb{R}^n\big)^*$$

qui vérifie au sens des distributions l'équation :

$$(\mathrm{D}_{\xi})_x\big(\mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(x, y)\big) = \delta_y \mathrm{Id}_{\Sigma_y\mathbb{R}^n},$$

où D_{ξ} est l'opérateur de Dirac euclidien. On peut alors obtenir explicitement cette fonction de Green par la proposition suivante :

PROPOSITION 2.11. *La section définie par*

$$\mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(x,y)\psi_0 = -\frac{1}{\omega_{n-1}}\gamma\Big(\frac{x-y}{|x-y|^n}\Big)\psi_0, \tag{76}$$

pour $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ *et* $\psi_0 \in \Sigma_y(\mathbb{R}^n)$ *un spineur constant, est (modulo le noyau de l'opérateur de Dirac* D_ξ*) l'unique fonction de Green de l'opérateur de Dirac.*

Preuve : On commence tout d'abord par vérifier que la section définie par l'expression (76) est bien une fonction de Green pour l'opérateur de Dirac. Sans perdre en généralité, on peut supposer que $y = 0$ et donc que $|x-y| = r$. On doit alors vérifier que pour $\psi_0 \in \Sigma_y\mathbb{R}^n$ et $\phi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n}\langle\gamma\big(\frac{x}{r^n}\big)\psi_0, \mathrm{D}_\xi\phi\rangle dx = \langle\psi_0, \phi(y)\rangle.$$

Pour cela, on considère η une fonction de cut-off telle que :

$$\begin{cases} 0 \leq \eta \leq 1, & \eta \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \eta \equiv 1 \text{ sur } \mathrm{B}_0(1), & \eta \equiv 0 \text{ sur } \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \setminus \mathrm{B}_0(2) \\ \eta \text{ est radiale} & \end{cases}$$

où $\mathrm{B}_0(\delta)$ est la boule euclidienne de centre 0 et de rayon $\delta > 0$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\eta_\varepsilon(x) = \eta\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$ et on écrit (où on a omis l'élément de volume euclidien dx) :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\langle\gamma\big(\frac{x}{r^n}\big)\psi_0, \mathrm{D}_\xi\phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}\langle\gamma\big(\frac{x}{r^n}\big)\psi_0, \gamma\big(\nabla\eta_\varepsilon\big)\big(\phi-\phi(0)\big)\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\langle\gamma\big(\frac{x}{r^n}\big)\psi_0, \gamma\big(\nabla\eta_\varepsilon\big)\phi_0\rangle \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n}\langle\gamma\big(\frac{x}{r^n}\big)\psi_0, \eta_\varepsilon\big(\mathrm{D}_\xi\phi - \mathrm{D}_\xi\phi(0)\big)\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\langle\gamma\big(\frac{x}{r^n}\big)\psi_0, \eta_\varepsilon\mathrm{D}_\xi\phi(0)\rangle \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n}\langle\gamma\big(\frac{x}{r^n}\big)\psi_0, \mathrm{D}_\xi\big((1-\eta_\varepsilon)\phi\big)\rangle. \end{aligned} \tag{77}$$

Examinons tout d'abord le dernier terme. Une simple intégration par partie permet d'écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\langle\gamma\big(\frac{x}{r^n}\big)\psi_0, \mathrm{D}_\xi\big((1-\eta_\varepsilon)\phi\big)\rangle dx = \int_{\mathbb{R}^n}\langle\mathrm{D}_\xi\big(\gamma\big(\frac{x}{r^n}\big)\psi_0\big), (1-\eta_\varepsilon)\phi\rangle dx$$

D'autre part, un calcul direct permet de vérifier que $\mathrm{D}_\xi\big(\gamma\big(\frac{x}{r^n}\big)\psi_0\big) = 0$ et on a ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\langle\gamma\big(\frac{x}{r^n}\big)\psi_0, \mathrm{D}_\xi\big((1-\eta_\varepsilon)\phi\big)\rangle dx = 0.$$

Le quatrième terme de l'identité (77) est lui aussi nul (par un simple changement de variable). On vérifie de la même manière que le premier et le troisième terme de cette identité tendent vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$. On examine alors maintenant le deuxième terme de l'identité (77). Un calcul direct donne :

$$-\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n}\langle\gamma\big(\frac{x}{r^n}\big)\psi_0, \gamma\big(\nabla\eta_\varepsilon\big)\phi_0\rangle dx = \langle\psi, \phi(0)\rangle,$$

et donc la fonction définie en (76) est bien une fonction de Green pour l'opérateur de Dirac. L'unicité modulo le noyau de l'opérateur de Dirac s'obtient facilement. En effet, on montre que si il existe une autre fonction de Green $\widetilde{\mathrm{G}}(\,.\,,y)$ pour l'opérateur de Dirac euclidien, alors le champ de spineurs $\mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(\,.\,,y)\psi_0 - \widetilde{\mathrm{G}}(\,.\,,y)\psi_0 \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{D})$. $\square$

L'expression que l'on vient de donner de la fonction de Green de l'opérateur de Dirac euclidien va permettre de déduire un développement de la fonction de Green chirale de l'opérateur de Dirac pour un certain type de variétés. Plus précisément, on considère une variété riemannienne spinorielle compacte (M^n, g) à bord non vide possédant un opérateur de chiralité Γ. De plus, on suppose qu'il existe un point $q \in \partial\mathrm{M}$ qui satisfait la propriété $(*)$ suivante : il existe un voisinage V de q dans M, U de 0 dans $\mathbb{R}^n_+$ et un difféomorphisme

$$\mathcal{F}_q : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{V}$$

tels que $\partial\mathrm{U} \cap \mathbb{R}^n_+ \subset \mathcal{F}(\partial\mathrm{M} \cap \mathrm{V})$, $\mathcal{F}_q(\overset{\circ}{\mathrm{M}} \cap \mathrm{V}) \subset \mathbb{R}^n_{>+}$ et $\mathcal{F}_q^*(\xi) = g$ où ξ est la métrique euclidienne et $\mathbb{R}^n_{>+} = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+ \,/\, x_n > 0\}$. Remarquons que sur une variété riemannienne (M, g) localement conformément plate dont le bord est totalement ombilique, on peut toujours trouver une telle métrique (dans la classe conforme de g). La carte $\mathcal{F}_q$ permet alors une identification des fibrés des spineurs au-dessus de U et de V, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme de fibrés (qui est une isométrie sur les fibres) donné par :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_\xi(\mathrm{U}) & \longrightarrow & \Sigma_g(\mathrm{V}) \\ \psi & \longmapsto & \overline{\psi}. \end{array}$$

Dans la suite, on notera de la même manière un champ de spineurs sur U ainsi que son image comme champ de spineurs sur V par la trivialisation obtenue ci-dessus. On peut maintenant donner le développement de la fonction de Green chirale au voisinage d'un point possédant la propriété $(*)$. En effet, on a :

Proposition 2.12. *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne spinorielle compacte à bord lisse possédant un opérateur de chiralité* Γ *et dont un point* q *de son bord satisfait la propriété* $(*)$. *Supposons de plus que l'opérateur de Dirac soit inversible sur* $\mathcal{H}^\pm$. *Alors, au voisinage de* q, *la fonction de Green chirale admet le développement suivant :*

$$\mathrm{G}^\pm_{\mathrm{CHI}}(x, q)\psi^\pm_0 = -\frac{2}{\omega_{n-1}}\gamma\Big(\frac{x-q}{|x-q|^n}\Big)\psi^\pm_0 + \mathrm{m}^\pm_{\mathrm{CHI}}(x, q)\psi^\pm_0, \tag{78}$$

où $\psi^\pm_0 \in \Sigma_q\mathrm{M}$ *est un spineur satisfaisant* $\gamma(\nu)\Gamma\psi^\pm_0 = \mp\psi^\pm_0$ *(c'est-à-dire que* $\mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}(\psi^\pm_0) = 0$*) et où*

$$\mathrm{m}^\pm_{\mathrm{CHI}}(x, q) : \Sigma_q\mathrm{M} \longrightarrow \Sigma_x\mathrm{M} \tag{79}$$

est un homomorphisme qui vérifie $\mathrm{D}_x\big(\mathrm{m}^\pm_{\mathrm{CHI}}(\,.\,, q)\psi^\pm_0\big) = 0$ *au voisinage de* q. *De plus, le long de* $\partial\mathrm{M}$, *on a :*

$$\mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}\big(\mathrm{m}^\pm_{\mathrm{CHI}}(.\,, q)\psi^\pm_{0|\partial\mathrm{M}}\big) = 0. \tag{80}$$

Preuve : On prouve ce résultat pour la condition à bord $\mathbb{B}^-_{\mathrm{CHI}}$, en remarquant qu'il se démontre de la même manière pour la condition $\mathbb{B}^+_{\mathrm{CHI}}$. On considère alors les ouverts U de 0 dans $\mathbb{R}^n_+$ et V de q dans M satisfaisant les conditions précédemment données et soit η une fonction cut-off telle que :

$$\begin{cases} 0 \leq \eta \leq 1, & \eta \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}) \\ \eta \equiv 1 \text{ sur } \mathrm{B}^+_q(\delta), & \mathrm{supp}(\eta) \subset \mathrm{B}^+_q(2\delta) \subset \mathrm{V} \end{cases}$$

On pose alors $\Psi = \mathrm{D}\big(\eta\mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(\,.\,, q)\psi_0\big)$ avec $\psi_0 \in \Sigma_q\mathrm{M}$ tel que $\gamma(\nu)\Gamma\psi_0 = \psi_0$. En utilisant le Lemme 2.1, on vérifie alors que cette propriété est satisfaite sur $\partial\mathrm{V} \cap \mathrm{M}$. Le champ de spineurs Ψ est clairement lisse sur $\mathrm{M} \setminus \{q\}$ et un simple calcul permet de vérifier que

$\Psi_{|\mathrm{B}_q^+(\delta)\setminus\{q\}} = 0$. On peut ainsi le prolonger en un champ lisse sur M tout entier en posant $\Psi(q) = 0$. Comme on a supposé l'opérateur de Dirac inversible sur $\mathcal{H}^-$, il existe un unique champ de spineurs dans $\mathcal{H}^-$, qu'on va noter $\mathrm{m}_{\mathrm{CHI}}^-(\,.\,,q)\psi_0$, qui vérifie $\mathrm{D}_x\big(\mathrm{m}_{\mathrm{CHI}}^-(\,.\,,q)\psi_0\big) = -\Psi$. Posons maintenant sur $\mathrm{M}\setminus\{q\}$ (la constante 2 apparaît seulement à des fins de normalisation) :

$$\mathrm{G}_q^-(x)\psi_0 = 2\eta\,\mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(x,q)\psi_0 + \mathrm{m}_{\mathrm{CHI}}^-(x,q)\psi_0$$

Vérifions alors que si $x \in \partial\mathrm{M}\setminus\{q\}$ alors $\mathbb{B}_{\mathrm{CHI}}^-\big(\mathrm{G}_q(x)\psi_0\big) = 0$. Pour cela, on remarque que si $x \in \mathrm{supp}(\eta)^c \cap \partial\mathrm{M}$ alors :

$$\mathbb{B}_{\mathrm{CHI}}^-\big(\mathrm{G}_q^-(x)\psi_0\big) = \mathbb{B}_{\mathrm{CHI}}^-\big(\mathrm{m}_{\mathrm{CHI}}^-(x,q)\psi_0\big) = 0$$

puisque par construction $\mathrm{m}_{\mathrm{CHI}}^{\pm}(\,.\,,q)\psi_0 \in \mathcal{H}^-$. D'autre part, si $x \in \big(\mathrm{supp}(\eta)\cap\partial\mathrm{M}\big)\setminus\{q\}$, on obtient :

$$\mathbb{B}_{\mathrm{CHI}}^-\big(\mathrm{G}_q^-(x)\psi_0\big) = \mathbb{B}_{\mathrm{CHI}}^-\big(\mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(x,q)\psi_0\big).$$

En utilisant l'expression de la fonction de Green euclidienne et les propriétés de l'opérateur de chiralité, on a :

$$\gamma(\nu)\Gamma\big(\gamma(\frac{x-q}{|x-q|^n})\psi_0\big) = \gamma(\frac{x-q}{|x-q|^n})\gamma(\nu)\Gamma\psi_0 = \gamma(\frac{x-q}{|x-q|^n})\psi_0$$

puisque $\gamma(\nu)\Gamma\psi_{0|\partial\mathrm{V}\cap\mathrm{M}} = \psi_{0|\partial\mathrm{V}\cap\mathrm{M}}$ et donc $\mathbb{B}_{\mathrm{CHI}}^-\big(\mathrm{G}_q^-(x)\psi_0\big) = 0$. Reste maintenant à vérifier que :

$$\int_{\mathrm{M}}\langle \mathrm{G}_q^-(x)\psi_0, \mathrm{D}(\phi)\rangle dv(x) = \langle\psi_0,\phi(q)\rangle,$$

pour tout $\phi \in \mathcal{H}^-$. Pour cela, on considère $\widetilde{\eta}(x) = \eta(3x)$ (on a donc $\mathrm{supp}(\widetilde{\eta}) \subset \{\eta \equiv 1\}$) et on écrit :

$$\int_{\mathrm{M}}\langle \mathrm{G}_q^-(x)\psi_0, \mathrm{D}(\phi)\rangle = \int_{\mathrm{M}}\langle \mathrm{G}_q^-(x)\psi_0, \mathrm{D}(\widetilde{\eta}\phi)\rangle + \int_{\mathrm{M}}\langle \mathrm{G}_q^-(x)\psi_0, \mathrm{D}\big((1-\widetilde{\eta})\phi\big)\rangle. \quad (81)$$

Cependant, en intégrant par partie, on obtient :

$$\int_{\mathrm{M}}\langle \mathrm{G}_q^-(x)\psi_0, \mathrm{D}\big((1-\widetilde{\eta})\phi\big)\rangle = \int_{\mathrm{M}}\langle \mathrm{D}\big(\mathrm{G}_q^-(x)\psi_0\big), (1-\widetilde{\eta})\phi\rangle\rangle + \int_{\partial\mathrm{M}}\langle\gamma(\nu)\mathrm{G}_q^-(x)\psi_0, (1-\widetilde{\eta})\phi\rangle.$$

Le terme de bord est nul puisque $\mathbb{B}_{\mathrm{CHI}}^-\big(\mathrm{G}_q^-(x)\psi_0\big) = 0$ et les champs de spineurs $\mathrm{G}_q^-(x)\psi_0$ et $\gamma(\nu)\mathrm{G}_q^-(x)\psi_0$ sont donc orthogonaux le long de $\partial\mathrm{M}$. De plus, le premier terme de cette identité est nul car $\mathrm{D}\big(\mathrm{G}_q^-(x)\psi_0\big) = 0$ pour $x \in \mathrm{M}\setminus\{q\}$. Reste maintenant à calculer le premier terme de (81). Pour cela, on utilise l'expression de $\mathrm{G}_q^-(\,.\,)\psi_0$ au voisinage de q et on a donc :

$$\int_{\mathrm{M}}\langle \mathrm{G}_q^-(x)\psi_0, \mathrm{D}(\widetilde{\eta}\phi)\rangle = \int_{\mathrm{M}}\langle \mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}^-(x,q)\psi_0, \mathrm{D}\phi\rangle + \int_{\mathrm{M}}\langle \mathrm{m}_{\mathrm{CHI}}^-(x,q)\psi_0, \mathrm{D}(\widetilde{\eta}\phi)\rangle$$

et puisque le champ $\mathrm{m}_{\mathrm{CHI}}^-(x,q)\psi_0$ est harmonique sur $\{\eta \equiv 1\}$ (donc sur $\mathrm{supp}(\widetilde{\eta})$), on obtient :

$$\int_{\mathrm{M}}\langle \mathrm{G}_q^-(x)\psi_0, \mathrm{D}(\phi)\rangle dv(x) = \langle\psi_0,\phi(q)\rangle$$

par définition de la fonction de Green euclidienne. L'unicité de la fonction de Green chirale s'obtient facilement puique l'on a supposé l'opérateur de Dirac inversible sur $\mathcal{H}^-$ et on a alors que $\mathrm{G}_{\mathrm{CHI}}^-(x,q) = \mathrm{G}_q(x)$. On procède exactement de la même manière pour la condition à bord $\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{CHI}}$. $\square$

À partir de maintenant, la fonction de Green chirale sera notée indifféremment par $\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(.,q)$ ou $\mathrm{G}^{\pm}_{q}(.)$. Pour la suite de ce travail, il est intéressant d'étudier le comportement de la fonction de Green chirale lorsque l'on effectue un changement conforme de métriques. Pour cela, on énonce la proposition suivante :

PROPOSITION 2.13. *Soit $\overline{g} = f^2 g$ une métrique conforme à g alors si $\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}$ (resp. $\overline{\mathrm{G}}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}$) désigne la fonction de Green chirale pour l'opérateur de Dirac D (resp. $\overline{\mathrm{D}}$), on a :*

$$\overline{\mathrm{G}}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(\,.\,,q) = f^{-\frac{n-1}{2}}(\,.\,)\, f^{-\frac{n-1}{2}}(q)\, \overline{\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(\,.\,,q)} \tag{82}$$

pour $q \in \partial\mathrm{M}$.

Preuve : Rappelons tout d'abord que puisque $\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}$ est une fonction de Green chirale pour l'opérateur de Dirac, on a :

$$\int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{G}^{\pm}_{q}(x)\psi^{\pm}_0, \mathrm{D}\varphi\rangle dv(g) = \langle \psi_0, \varphi(q)\rangle$$

pour tout $\psi^{\pm}_0 \in \Sigma_q\mathrm{M}$ tel que $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(\psi^{\pm}_0) = 0$ et $\varphi \in \Gamma(\Sigma_g\mathrm{M})$ tel que $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(\varphi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0$. Considérons alors $\phi = f^{-\frac{n-1}{2}}\mathrm{F}(\varphi)$ où F est l'isomorphisme entre les fibrés des spineurs dans deux métriques conformes (voir le paragraphe 2.2). Par covariance conforme de la condition à bord associée à un opérateur de chiralité, on a donc que $\overline{\mathbb{B}}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(\phi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0$ et alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{M}} \langle \overline{\mathrm{G}}^{\pm}_{q}(x)\mathrm{F}(\psi^{\pm}_0), \overline{\mathrm{D}}(\phi)\rangle dv(\overline{g}) &= \int_{\mathrm{M}} f^{-\frac{n-1}{2}}(x)\, f^{-\frac{n-1}{2}}(q) f^{-\frac{n+1}{2}}(x) \langle \mathrm{G}^{\pm}_{q}(x)\psi^{\pm}_0, \mathrm{D}\varphi\rangle f^n dv(g)\\
&= f^{-\frac{n-1}{2}}(q) \int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{G}^{\pm}_{q}(x)\psi^{\pm}_0, \mathrm{D}\varphi\rangle dv(g)\\
&= \langle \psi^{\pm}_0, f^{-\frac{n-1}{2}}(q)\varphi(q)\rangle
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathrm{M}} \langle \overline{\mathrm{G}}^{\pm}_{q}(x)\mathrm{F}(\psi^{\pm}_0), \overline{\mathrm{D}}(\phi)\rangle dv(\overline{g}) = \langle \mathrm{F}(\psi^{\pm}_0), \phi(q)\rangle$$

pour tout $\mathrm{F}(\psi^{\pm}_0) \in \Sigma_q\mathrm{M}$ tel que $\overline{\mathbb{B}}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}\big(\mathrm{F}(\psi^{\pm}_0)\big) = 0$ et $\phi \in \Gamma(\Sigma_{\overline{g}}\mathrm{M})$ satisfaisant $\overline{\mathbb{B}}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(\phi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0$. On a donc bien vérifié que $\overline{\mathrm{G}}_q$ est une fonction de Green chirale. Par unicité de la fonction de Green chirale, on en déduit le résultat annoncé. $\square$

REMARQUE 2.2. Une conséquence immédiate des deux propositions précédentes est que toute variété (M, g) localement conformément plate à bord totalement ombilique et dont l'invariant de Yamabe est strictement positif possède une fonction de Green chirale. De plus, il existe une métrique conforme à g telle que cette fonction de Green possède le développement (78). En effet, une telle variété possède une métrique conforme à g telle que la courbure scalaire R soit strictement positive et telle que la courbure moyenne du bord soit nulle (voir la paragraphe 3) et donc l'opérateur de Dirac est inversible (sous la condition à bord CHI). De plus, on peut facilement vérifier qu'une variété localement conformément plate dont le bord est totalement ombilique possède une métrique conforme telle que la propriété $(*)$ est satisfaite. En effet, supposons donc que (M^n, g) soit une variété compacte localement conformément plate dont le bord $\partial\mathrm{M}$ est totalement ombilique et dont l'invariant de Yamabe $\mu(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ est positif. On peut alors supposer (à un changement de métrique conforme près) que la courbure scalaire de M est strictement positive et la courbure moyenne du bord est nulle (pour la métrique g). Puisque M est localement conformément plate, il existe une fonction positive u (définie localement sur M) telle qu'au voisinage de $q \in \partial\mathrm{M}$, la métrique $g_1 = u^{\frac{4}{n-2}} g = \xi$. D'autre part, le bord $\partial\mathrm{M}$ étant totalement ombilique, il est soit un morceau de sphère, soit un hyperplan (toujours au voisinage de q). Puisque ces deux voisinages sont conformément équivalents, on peut supposer que le bord est un hyperplan. Ainsi en recollant la fonction u à la fonction constante à 1 grâce à une fonction satisfaisant la condition de Neumann, on peut supposer que la métrique g_1 est définie globalement sur M et satisfait au voisinage de $q \in \partial\mathrm{M}$: $g_1 = \xi$ et la courbure moyenne de $\partial\mathrm{M}$ est nulle. La métrique $g_1 \in [g]$ satisfait donc clairement la propriété $(*)$.

On énonce maintenant un résultat concernant la symétrie de la fonction de Green chirale que va s'avérer très utile pour la suite. En effet, on a :

Proposition 2.14. *Pour tout $(x, y) \in \mathrm{M} \times \mathrm{M} \setminus \Delta$, on a :*

$$\big(\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}\big)^*(x, y) = \mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(y, x), \tag{83}$$

c'est-à-dire que si $\psi_0^{\pm} \in \Sigma_x\mathrm{M}$ (resp. $\varphi_0^{\pm} \in \Sigma_y\mathrm{M}$) tel que $\gamma(\nu)\Gamma\psi_0^{\pm} = \mp\psi_0^{\pm}$ si $x \in \partial\mathrm{M}$ (resp. $\gamma(\nu)\Gamma\varphi_0^{\pm} = \mp\varphi_0^{\pm}$ si $y \in \partial\mathrm{M}$), alors :

$$\langle \mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(x, y)\varphi_0^{\pm}, \psi_0^{\pm}\rangle_{\Sigma_x\mathrm{M}} = \langle \varphi_0^{\pm}, \mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(y, x)\psi_0^{\pm}\rangle_{\Sigma_y\mathrm{M}}.$$

Preuve : On donne la preuve de cette proposition dans le cas de la condition $\mathbb{B}^{-}_{\mathrm{CHI}}$, la cas de la condition $\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{CHI}}$ se traitant de la même manière. On considère $(\varphi_i)_i$ une base hilbertienne de spineurs propres de $\mathrm{L}^2(\Sigma\mathrm{M})$ donnée par la résolution spectrale de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord $\mathbb{B}^{-}_{\mathrm{CHI}}$, i.e telle que :

$$\begin{cases} \mathrm{D}\varphi_i = \lambda_i\varphi_i & \text{sur M} \\ \mathbb{B}^{-}_{\mathrm{CHI}}(\varphi_{i|\partial\mathrm{M}}) = 0 & \text{le long de } \partial\mathrm{M} \end{cases}$$

et on calcule :

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}\setminus\Delta} \langle \mathrm{G}^{-}_{\mathrm{CHI}}(x, y)\varphi_i, \varphi_j\rangle dv(x)dv(y) &= \int_{\mathrm{M}} \Big(\int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{G}^{-}_{\mathrm{CHI}}(x, y)\varphi_i, \varphi_j\rangle dv(x)\Big) dv(y) \\ &= \int_{\mathrm{M}} \Big(\int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{G}^{-}_{\mathrm{CHI}}(x, y)\varphi_i, \frac{1}{\lambda_j}\mathrm{D}\varphi_j\rangle dv(x)\Big) dv(y) \\ &= \frac{1}{\lambda_j}\int_{\mathrm{M}} \langle \varphi_i, \varphi_j\rangle dv(y) \\ &= \frac{1}{\lambda_j}\delta_{ij}. \end{aligned}$$

D'autre part, on vérifie de la même manière que :

$$\int_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}\setminus\Delta} \langle \varphi_i, \mathrm{G}^{-}_{\mathrm{CHI}}(y, x)\varphi_j\rangle dv(x)dv(y) = \frac{1}{\lambda_i}\delta_{ij}.$$

Donc pour tout $(i,j)\in\mathbb{Z}^2$, on a :

$$\int_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}\setminus\Delta}\langle \mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(x,y)\varphi_i,\varphi_j\rangle dv(x)dv(y)=\int_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}\setminus\Delta}\langle\varphi_i,\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(y,x)\varphi_j\rangle dv(x)dv(y)$$

ce qui par linéarité permet d'écrire que :

$$\int_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}\setminus\Delta}\langle \mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(x,y)\varphi,\phi\rangle dv(x)dv(y)=\int_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}\setminus\Delta}\langle\varphi,\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(y,x)\phi\rangle dv(x)dv(y),$$

pour tout $\phi,\varphi\in\Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ tels que $\mathbb{B}^-_{\mathrm{CHI}}(\phi_{|\partial\mathrm{M}})=\mathbb{B}^-_{\mathrm{CHI}}(\varphi_{|\partial\mathrm{M}})=0$. Considérons maintenant $x_0\in\mathrm{M}$ tel que $y\mapsto\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(y,x_0)$ soit continue et soit une suite de fonctions $f_\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ telle que $f_\varepsilon\to\delta_{x_0}$ où δ_{x_0} est la masse de Dirac en x_0. Si $\psi\in\Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ vérifie $\mathbb{B}^-_{\mathrm{CHI}}(\psi_{|\partial\mathrm{M}})=0$ et $\psi(x_0)=\psi_0$, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}}\langle\varphi,\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(y,x)(f_\varepsilon\psi)\rangle dv(x)dv(y) &= \int_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}\setminus\Delta}\langle\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(x,y)\varphi,f_\varepsilon\phi\rangle dv(x)dv(y)\\ &= \int_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}\setminus\Delta}f_\varepsilon\langle\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(x,y)\varphi,\phi\rangle dv(x)dv(y)\\ &= \int_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}\setminus\Delta}f_\varepsilon\langle\varphi,\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(y,x)\phi\rangle dv(x)dv(y)\end{aligned}$$

et on obtient ainsi :

$$\int_{\mathrm{M}}\langle\varphi(y),\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(y,x_0)\phi\rangle dv(y)=\int_{\mathrm{M}}\langle\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(x_0,y)\varphi(y),\phi_0\rangle dv(y).$$

En procédant de la même manière en la variable y, on arrive à :

$$\langle\varphi_0,\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(y_0,x_0)\phi_0\rangle_{\Sigma_{y_0}\mathrm{M}}=\langle\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(x_0,y_0)\varphi_0,\phi_0\rangle_{\Sigma_{x_0}\mathrm{M}}.$$

Cela termine la preuve de cette proposition. □

De la même manière, on étudie l'action de l'opérateur de chiralité de la variété sur la fonction de Green chirale. On arrive alors au résultat suivant :

PROPOSITION 2.15. *Soit* (M^n,g,σ) *une variété riemannienne spinorielle compacte à bord lisse* $\partial\mathrm{M}$. *Supposons de plus que la variété* M *possède la propriété* $(*)$ *et que l'opérateur de Dirac est inversible sur* $\mathcal{H}^-$. *Soit* $q\in\partial\mathrm{M}$, *on a alors :*

$$\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(\,.\,,q)=-\Gamma\mathrm{G}^+_{\mathrm{CHI}}(\,.\,,q)\Gamma. \tag{84}$$

Preuve : Tout d'abord, on se place dans une métrique conforme à g (qu'on note encore g) telle que au voisinage de q, la fonction de Green chirale $\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(\,.\,,q)$ ait le développement (78). Considérons alors la section de $\Sigma\mathrm{M}$ définie par $\widetilde{\mathrm{G}}(x,q)=-\Gamma\mathrm{G}^+_{\mathrm{CHI}}(x,q)\Gamma$. On remarque premièrement que cette section satisfait bien $\mathbb{B}^-_{\mathrm{CHI}}(\widetilde{\mathrm{G}}(x,q)\psi_0)=0$ dès que $x\in\partial\mathrm{M}\setminus\{q\}$ et $\psi_0\in\Sigma_q\mathrm{M}$ vérifie $\gamma(\nu)\Gamma\psi_0=\psi_0$. En effet, on a déjà montré que si $\psi_0\in\Sigma_q\mathrm{M}$ est tel que $\gamma(\nu)\Gamma\psi_0=\psi_0$ alors le champ de spineurs $\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(\,.\,,q)\psi_0$ satisfait $\mathbb{B}^-_{\mathrm{CHI}}\big(\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(\,.\,,q)\psi_{0|\partial\mathrm{M}}\big)=0$. D'autre part, puisque l'opérateur de chiralité Γ échange le type de la condition à bord du champs de spineurs, on a alors que $\mathbb{B}^-_{\mathrm{CHI}}\big(\widetilde{\mathrm{G}}(x,q)\psi_0\big)=0$. On considère maintenant la section définie par $\mathrm{G}'(x,q)\psi_0=\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(x,q)\psi_0-\widetilde{\mathrm{G}}(x,q)\psi_0$ et on vérifie facilement que ce champ de spineurs est dans le noyau de l'opérateur de Dirac. En utilisant les théorèmes de régularité classiques (voir [**FS98**]), ce champ est lisse et il est donc identiquement nul puisque l'on a supposé l'opérateur de Dirac inversible. On obtient alors que le champ de spineurs $-\Gamma\mathrm{G}^{-}_{\mathrm{CHI}}(\,.\,,q)\Gamma$ est l'unique fonction de Green de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord $\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{CHI}}$ et donc que $\mathrm{G}^{-}_{\mathrm{CHI}}(\,.\,,q)=-\Gamma\mathrm{G}^{+}_{\mathrm{CHI}}(\,.\,,q)\Gamma$. □

On arrive maintenant à la définition de l'opérateur de masse chiral (par analogie avec [**AHM**]). En effet, dans le problème de Yamabe classique, le développement de la fonction de Green du laplacien conforme au voisinage (plat) d'un point de la variété permet de donner une preuve du problème de Yamabe dans les cas non traités par Aubin (voir [**Sch84**] et [**Esc92b**]). De la même manière, dans le cadre spinoriel, Ammann, Humbert et Morel introduisent le terme "constant" de la fonction de Green de l'opérateur de Dirac afin de résoudre un problème non linéaire de géométrie spinorielle conforme. Il est alors naturel de penser que l'on peut procéder de la même manière dans le problème que nous traitons ici et c'est effectivement le cas.

Définition 2.3. *Soit* (M^n,g,σ) *une variété riemannienne spinorielle compacte telle que dans la métrique* g *il existe un point* $q\in\partial\mathrm{M}$ *satisfaisant la propriété* $(*)$*. Supposons de plus que l'opérateur de Dirac soit inversible sur* $\mathcal{H}^{\pm}$*. Soit* $\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}$ *la fonction de Green chirale de l'opérateur de Dirac, on définit alors l'opérateur de masse chiral comme étant le terme constant de la partie régulière de* $\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}$ *:*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{m}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(q):\mathrm{V}^{\pm}_q & \longrightarrow & \mathrm{V}^{\pm}_q \\ \psi^{\pm}_0 & \longmapsto & \mathrm{m}^{\pm}(q,q)\psi^{\pm}_0 \end{array}$$

où $\mathrm{V}^{\pm}_q=\frac{1}{2}\big(\mathrm{Id}\pm\gamma(\nu)\Gamma\big)\Sigma_q\mathrm{M}$.

A l'aide de la Proposition 2.14, on peut énoncer le résultat suivant :

Proposition 2.16. *Pour chaque* $q\in\partial\mathrm{M}$*, l'opérateur de masse chiral* $\mathrm{m}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(q)$ *est linéaire et symétrique.*

Preuve : On prouve ce résultat pour la condition $\mathbb{B}^{-}_{\mathrm{CHI}}$. Montrons tout d'abord que l'opérateur de masse est bien linéaire. Pour cela, on considère la section définie sur $\mathrm{M}\setminus\{q\}$ par :

$$\widetilde{\mathrm{G}}^{-}_q(x)=\widetilde{\mathrm{G}}^{-}_q(x)(\lambda\psi_0+\mu\varphi_0)=\mathrm{G}^{-}_q(x)(\lambda\psi_0+\mu\varphi_0)-\big(\lambda\mathrm{G}^{-}_q(x)\psi_0+\mu\mathrm{G}^{-}_q(x)\varphi_0\big).$$

Au voisinage de q, on a :

$$\widetilde{\mathrm{G}}^{-}_q(x)=\mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(x,q)(\lambda\psi_0+\mu\varphi_0)-\big(\lambda\mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(x,q)\psi_0+\mu\mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(x,q)\varphi_0\big)+\Theta(x,q),$$

où $\Theta(x,q)$ est un spineur harmonique (donc lisse) au voisinage de q. Puisque la fonction de Green euclidienne est linéaire, le premier terme de l'égalité ci-dessus est nul et le champ $\widetilde{\mathrm{G}}^{-}(\,.\,,q)$ est harmonique. Or comme on a supposé l'opérateur de Dirac inversible sur $\mathcal{H}^{-}$, on a $\widetilde{\mathrm{G}}^{-}=0$ et la fonction de Green chirale est donc linéaire. Il est alors clair que l'opérateur de masse chirale est lui-aussi linéaire. De la même manière, en utilisant le fait que la fonction de Green chirale est symétrique, on vérifie que l'opérateur de masse chirale est symétrique. □

De cette proposition, on déduit que les valeurs propres de l'opérateur de masse chiral sont réelles. Cependant, contrairement à l'opérateur de masse introduit et étudié dans [**AHM**], le spectre (ponctuel) de l'opérateur de masse chiral n'est pas symétrique. En effet, dans ce cas, la condition à bord imposée “casse” cette symétrie. Cependant, on a tout de même le résultat suivant (en se plaçant dans les hypothèses de la définition 2.3) :

COROLLAIRE 2.3. *Soit q un point du bord $\partial\mathrm{M}$ et supposons que κ est une valeur propre de l'opérateur de masse chiral* $\mathrm{m}^{-}_{\mathrm{CHI}}(q)$. *Le réel $-\kappa$ est alors une valeur propre de l'opérateur de masse chiral* $\mathrm{m}^{+}_{\mathrm{CHI}}(q)$.

Preuve : On remarque tout d'abord qu'en utilisant la proposition 2.15, les opérateurs de masse $\mathrm{m}^{+}_{\mathrm{CHI}}(q)$ et $\mathrm{m}^{-}_{\mathrm{CHI}}(q)$ sont reliés par l'identité :

$$\Gamma\mathrm{m}^{-}_{\mathrm{CHI}}(q) = -\mathrm{m}^{+}_{\mathrm{CHI}}(q)\Gamma.$$

Soit alors $\psi_0 \in \Sigma_q\mathrm{M}$ tel que $\gamma(\nu)\Gamma\psi_0 = \psi_0$ un spineur propre de l'opérateur de masse chiral $\mathrm{m}^{-}_{\mathrm{CHI}}(q)$ associé à la valeur propre κ, c'est-à-dire que $\mathrm{m}^{-}_{\mathrm{CHI}}(q)\psi_0 = \kappa\psi_0$. En utilisant la formule ci-dessus, on vérifie alors facilement que $\mathrm{m}^{+}_{\mathrm{CHI}}(q)(\Gamma\psi_0) = -\kappa\Gamma\psi_0$ et donc que $-\kappa$ est une valeur propre pour l'opérateur de masse chiral $\mathrm{m}^{-}_{\mathrm{CHI}}(q)$. $\square$

Revenons maintenant au problème qui nous intéresse dans ce travail et qui donne une application des constructions effectuées dans ce paragraphe. En effet, dans les sections précédentes, on a défini et étudié l'invariant spinoriel conforme $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$, où σ est une structure spinorielle sur M et $[g]$ la classe conforme de g. Dans le paragraphe 6, on a montré que si $n \geq 2$, alors :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) \leq \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+).$$

On montre maintenant que grâce au travail effectué sur la fonction de Green chirale, on peut raffiner cette inégalité. Prouvons tout d'abord le résultat suivant :

THÉORÈME 2.5. *Soit (M, g, σ) une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension $n \geq 2$ à bord lisse $\partial\mathrm{M}$ et qui possède la propriété $(*)$. Supposons de plus qu'il existe sur $\mathrm{M} \setminus \{q\}$ un champ de spineurs $\psi^{\pm}$ satisfaisant :*

$$\begin{cases} \mathrm{D}\psi^{\pm} = 0 & \textit{sur}\ \mathrm{M} \setminus \{q\} \\ \mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(\psi^{\pm}_{|\partial\mathrm{M}}) = 0 & \textit{le long de}\ \partial\mathrm{M} \end{cases} \tag{85}$$

et dont le développement au voisinage du point q est donné par :

$$\psi^{\pm} = \gamma(\frac{x}{r^n})\psi^{\pm}_0 + \psi^{\pm}_1 + \theta^{\pm}, \tag{86}$$

où $\psi^{\pm}_0$, $\psi^{\pm}_1 \in \Sigma_q\mathrm{M}$ sont des spineurs vérifiant $\gamma(\nu)\Gamma\psi^{\pm}_0 = \mp\psi^{\pm}_0$, $\gamma(\nu)\Gamma\psi^{\pm}_1 = \mp\psi^{\pm}_1$ et tel que :

$$\mathrm{Re}\,\langle\psi^{\pm}_0, \psi^{\pm}_1\rangle < 0 \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Re}\,\langle\gamma(x)\psi^{\pm}_0, \psi^{\pm}_1\rangle = 0. \tag{87}$$

On suppose de plus que le champ $\theta^{\pm}$ est un champ de spineurs lisse sur M *tout entier satisfaisant $\theta^{\pm} = O(r)$, $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(\theta^{\pm}_{|\partial\mathrm{M}}) = 0$ et qu'il est harmonique au voisinage de q. Sous ces hypothèses, on a alors :*

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) < \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+) = \frac{n}{2}\Big(\frac{\omega_n}{2}\Big)^{\frac{1}{n}}.$$

Preuve : La preuve de ce théorème réside sur la construction d'un spineur-test adapté que l'on estimera dans la caractérisation variationnelle de $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ donnée dans la

Proposition 2.2. Par hypothèse, il existe sur $\mathrm{M} \setminus \{q\}$ ($q \in \partial\mathrm{M}$) un champ de spineurs $\psi^\pm \in \Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ vérifiant le problème à bord :

$$\begin{cases} \mathrm{D}\psi^\pm = 0 & \text{sur } \mathrm{M} \setminus \{q\} \\ \mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}(\psi^\pm_{|\partial\mathrm{M}}) = 0 & \text{le long de } \partial\mathrm{M} \end{cases}$$

et qui, au voisinage de q, possède le développement suivant :

$$\psi^\pm = \gamma(\frac{x}{r^n})\psi_0^\pm + \psi_1^\pm + \theta^\pm,$$

où $\psi_0^\pm$, $\psi_1^\pm \in \Sigma_q\mathrm{M}$ sont tels que $\gamma(\nu)\Gamma\psi_0^\pm = \mp\psi_0^\pm$, $\gamma(\nu)\Gamma\psi_1^\pm = \mp\psi_1^\pm$ et $\theta^\pm \in \Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ est un spineur harmonique au voisinage de q vérifiant $\mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}(\theta^\pm_{|\partial\mathrm{M}}) = 0$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\rho := \varepsilon^{\frac{1}{n+1}}$ et $\varepsilon_0 := \frac{\rho^n}{\varepsilon} f\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}}$ avec $f(r) = \frac{1}{1+r^2}$. On considère alors le champ de spineurs défini par :

$$\psi^\pm_\varepsilon = \begin{cases} f\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\gamma\big(1 - \frac{x}{\varepsilon}\big)\psi_0^\pm - \varepsilon_0\psi_1^\pm & \text{si } r \leq \rho \\ -\varepsilon_0\big(\psi^\pm - \eta\theta^\pm\big) + \eta f\big(\frac{\rho}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}}\psi_0^\pm & \text{si } \rho \leq r \leq 2\rho \\ \varepsilon_0\psi^\pm & \text{si } 2\rho \leq r \end{cases} \tag{88}$$

où $r = d(x,q)$ et où η est une fonction de cut-off qui est identiquement nulle sur $\mathrm{M} \setminus \mathrm{B}^+_q(2\rho)$, qui vaut 1 sur $\mathrm{B}^+_q(\rho)$ et qui satisfait $|\nabla\eta| \leq \frac{2}{\rho}$. Vérifions maintenant que $\mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}(\psi^\pm_{\varepsilon|\partial\mathrm{M}}) = 0$. Pour $r \leq \rho$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}(\psi^\pm_{\varepsilon|\partial\mathrm{M}}) &= \mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}\Big(\big(f\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\gamma\big(1 - \frac{x}{\varepsilon}\big)\psi_0^\pm - \varepsilon_0\psi_1^\pm\big)_{|\partial\mathrm{M}}\Big) \\ &= f\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\gamma\big(1 - \frac{x}{\varepsilon}\big)\, \mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}(\psi^\pm_{0\,|\partial\mathrm{M}}) - \varepsilon_0\, \mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}(\psi^\pm_{1\,|\partial\mathrm{M}}) = 0 \end{aligned}$$

puisque $\mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}(\psi^\pm_{0\,|\partial\mathrm{M}}) = \mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}(\psi^\pm_{1\,|\partial\mathrm{M}}) = 0$. De la même manière, puisque $\psi^\pm$ et $\theta^\pm$ satisfont $\mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}(\psi^\pm_{|\partial\mathrm{M}}) = \mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}(\theta^\pm_{|\partial\mathrm{M}}) = 0$, on vérifie que pour $\rho \leq r \leq 2\rho$ et $r \geq 2\rho$, on a $\mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}(\psi^\pm_{\varepsilon|\partial\mathrm{M}}) = 0$. D'autre part, on peut, sans perdre en généralité, supposer que $|\psi_0^\pm|^2 = 1$. Puisque $\psi^\pm$ et $\theta^\pm$ sont harmoniques au voisinage q, un simple calcul donne :

$$\mathrm{D}\psi^\pm_\varepsilon = \begin{cases} \frac{n}{\varepsilon} f\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}+1}\gamma\big(1 - \frac{x}{\varepsilon}\big)\psi_0^\pm & \text{si } r \leq \rho \\ \varepsilon_0\gamma(\nabla\eta)\theta^\pm + f\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}}\gamma(\nabla\eta)\psi_0^\pm & \text{si } \rho \leq r \leq 2\rho \\ 0 & \text{si } 2\rho \leq r. \end{cases}$$

Pour obtenir une estimation du numérateur de la caractérisation variationnelle de $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$, on vérifie que :

$$|\mathrm{D}\psi^\pm_\varepsilon|^{\frac{2n}{n+1}} = \begin{cases} n^{\frac{2n}{n+1}}\varepsilon^{-\frac{2n}{n+1}} f\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^n & \text{si } r \leq \rho \\ |\varepsilon_0\gamma(\nabla\eta)\theta^\pm + f\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}}\gamma(\nabla\eta)\psi_0^\pm|^{\frac{2n}{n+1}} & \text{si } \rho \leq r \leq 2\rho \\ 0 & \text{si } 2\rho \leq r. \end{cases}$$

On a donc :

$$\int_{\mathrm{B}_q^+(\rho)} |\mathrm{D}\psi_\varepsilon^\pm|^{\frac{2n}{n+1}} dx = \varepsilon^{n-\frac{2n}{n+1}} n^{\frac{2n}{n+1}} \int_{\mathrm{B}_q^+(\frac{\rho}{\varepsilon})} f^n dx \le \int_{\mathbb{R}_+^n} f^n dx$$

et :

$$\int_{\mathrm{B}_q^+(2\rho)\setminus \mathrm{B}_q^+(\rho)} |\mathrm{D}\psi_\varepsilon^\pm|^{\frac{2n}{n+1}} dx \le C\varepsilon^{\frac{n(2n-1)}{n+1}} + C\varepsilon^{\frac{n(3n-1)}{n+1}} \le C\varepsilon^{\frac{n(2n-1)}{n+1}}.$$

On obtient alors :

$$\Big(\int_{\mathrm{M}} |\mathrm{D}\psi_\varepsilon^\pm|^{\frac{2n}{n+1}} dv(g)\Big)^{\frac{n+1}{n}} \le \varepsilon^{n-1} n^2 \mathrm{I}^{1+\frac{1}{n}} \Big(1 + C\varepsilon^{\frac{n^2}{n+1}}\Big) = \varepsilon^{n-1} n^2 \mathrm{I}^{1+\frac{1}{n}} \big(1 + o(\varepsilon^{n-1})\big)$$

où on a posé $\mathrm{I} = \int_{\mathbb{R}_+^n} f^n dx$. Pour la suite de la démonstration, on pose $\kappa = \mathrm{Re}\,\langle \psi_0^\pm, \psi_1^\pm\rangle$ et on s'intéresse maintenant à l'estimation du dénominateur de la caractérisation variationnelle de $\lambda_{\min}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\langle \mathrm{D}\psi_\varepsilon^\pm, \psi_\varepsilon^\pm\rangle_{|\mathrm{B}_q^+(\rho)} &= \mathrm{Re}\langle \frac{n}{\varepsilon} f\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}+1} \gamma\big(1 - \frac{x}{\varepsilon}\big)\psi_0^\pm, f\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}} \gamma\big(1 - \frac{x}{\varepsilon}\big)\psi_0^\pm - \varepsilon_0 \psi_1^\pm\rangle \\
&= \frac{n}{\varepsilon} f\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^n - \frac{n}{\varepsilon}\varepsilon_0 \kappa\, f\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}+1} + \frac{n}{\varepsilon}\varepsilon_0 f\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}+1} \mathrm{Re}\langle \gamma\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\psi_0^\pm, \psi_1^\pm\rangle.
\end{aligned}$$

En intégrant sur $\mathrm{B}_q^+(\rho)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{B}_q^+(\rho)} \mathrm{Re}\langle \mathrm{D}\psi_\varepsilon^\pm, \psi_\varepsilon^\pm\rangle dx &= \frac{n}{\varepsilon} \int_{\mathrm{B}_q^+(\rho)} f\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^n dx - \frac{n}{\varepsilon}\varepsilon_0 \kappa \int_{\mathrm{B}_q^+(\rho)} f\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}+1} dx \\
&\quad + \frac{n}{\varepsilon}\varepsilon_0 \int_{\mathrm{B}_q^+(\rho)} f\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}+1} \mathrm{Re}\langle \gamma\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\psi_0^\pm, \psi_1^\pm\rangle dx \\
&= n\varepsilon^{n-1} \Big(\int_{\mathrm{B}_q^+(\frac{\rho}{\varepsilon})} f(r)^n dx - \varepsilon_0 \kappa \int_{\mathrm{B}_q^+(\frac{\rho}{\varepsilon})} f(r)^{\frac{n}{2}+1} dx + \mathrm{A}_\varepsilon\Big)
\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\mathrm{A}_\varepsilon = n\varepsilon_0 \varepsilon^{-n} \int_{\mathrm{B}_q^+(\rho)} f\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}+1} \mathrm{Re}\langle \gamma\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\psi_0^\pm, \psi_1^\pm\rangle dx.$$

Or $\mathrm{A}_\varepsilon = 0$ car par hypothèse, on a supposé que :

$$\mathrm{Re}\,\langle \gamma(\frac{x}{\varepsilon})\psi_0^\pm, \psi_1^\pm\rangle = 0.$$

De plus, un simple calcul permet de voir que :

$$\int_{\mathrm{B}_q^+(\frac{\rho}{\varepsilon})} f(r)^n dx = \mathrm{I} + O(\varepsilon^{\frac{n^2}{n+1}})$$

et puisque $\varepsilon_0 \sim \varepsilon^{n-1}$ lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient alors :

$$\int_{\mathrm{B}_q^+(\rho)} \mathrm{Re}\langle \mathrm{D}\psi_\varepsilon^\pm, \psi_\varepsilon^\pm\rangle dx \ge n\varepsilon^{n-1}\Big(\mathrm{I} - \mathrm{C}_0 \kappa \varepsilon^{n-1} + o(\varepsilon^{n-1})\Big)$$

où $C_0 = \int_{\mathbb{R}^n_+} f(r)^{\frac{n}{2}+1}dx$. D'autre part, on calcule que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\langle \mathrm{D}\psi^{\pm}_{\varepsilon}, \psi^{\pm}_{\varepsilon}\rangle_{|\mathrm{B}^+_q(2\rho)\setminus \mathrm{B}^+_q(\rho)} &= -\mathrm{Re}\langle \varepsilon_0\gamma(\nabla\eta)\theta^{\pm}, \varepsilon_0(\psi^{\pm}-\eta\theta^{\pm}) + \eta f\big(\frac{\rho}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}}\psi^{\pm}_0\rangle \\
&\quad +\mathrm{Re}\,\langle f\big(\frac{\rho}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}}\gamma(\nabla\eta)\psi^{\pm}_0, \varepsilon_0(\psi^{\pm}-\eta\theta^{\pm}) + \eta f\big(\frac{\rho}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}}\psi^{\pm}_0\rangle \\
&= -\mathrm{Re}\langle \varepsilon_0\gamma(\nabla\eta)\theta^{\pm} + f\big(\frac{\rho}{\varepsilon}\big)^{\frac{n}{2}}\gamma(\nabla\eta)\psi^{\pm}_0, \varepsilon_0\psi^{\pm}\rangle
\end{aligned}$$

puisque $\mathrm{Re}\langle\gamma(\nabla\eta)\theta^{\pm},\theta^{\pm}\rangle = 0$, $\mathrm{Re}\langle\gamma(\nabla\eta)\psi^{\pm}_0,\psi^{\pm}_0\rangle = 0$ et :

$$\mathrm{Re}\langle\gamma(\nabla\eta)\psi^{\pm}_0,\theta^{\pm}\rangle = -\mathrm{Re}\langle\gamma(\nabla\eta)\theta^{\pm},\psi^{\pm}_0\rangle.$$

On obtient alors l'estimation suivante :

$$\mathrm{Re}\langle \mathrm{D}\psi^{\pm}_{\varepsilon}, \psi^{\pm}_{\varepsilon}\rangle_{|\mathrm{B}^+_q(2\rho)\setminus \mathrm{B}^+_q(\rho)} \geq C\varepsilon^{2n-2}\rho^{1-n}$$

ce qui permet de conclure que :

$$\int_{\mathrm{B}^+_q(2\rho)\setminus \mathrm{B}^+_q(\rho)} \mathrm{Re}\langle \mathrm{D}\psi^{\pm}_{\varepsilon}, \psi^{\pm}_{\varepsilon}\rangle dx = o(\varepsilon^{2(n-1)}).$$

En utilisant le fait que $\mathrm{Re}\langle \mathrm{D}\psi^{\pm}_{\varepsilon}, \psi^{\pm}_{\varepsilon}\rangle_{|\mathrm{M}\setminus \mathrm{B}^+_q(2\rho)} = 0$, on a :

$$\int_{\mathrm{M}} \mathrm{Re}\langle \mathrm{D}\psi^{\pm}_{\varepsilon}, \psi^{\pm}_{\varepsilon}\rangle \geq n\varepsilon^{n-1}\mathrm{I}\Big(1 - \mathrm{C}_0\kappa\varepsilon^{n-1} + +o(\varepsilon^{n-1})\Big).$$

La caractérisation variationnelle de $\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})$ donnée dans la proposition 2.2 permet d'aboutir à :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M}) \leq n\mathrm{I}^{\frac{1}{n}}\frac{1+o(\varepsilon^{n-1})}{1-\mathrm{C}_0\kappa\varepsilon^{n-1}+o(\varepsilon^{n-1})} = \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+,\partial\mathbb{S}^n_+) + \mathrm{C}_0\kappa\varepsilon^{n-1} + o(\varepsilon^{n-1})$$

où C_0 est une constante strictement positive par construction. Or par hypothèse, on a supposé que $\kappa := \mathrm{Re}\,\langle\psi^{\pm}_0,\psi^{\pm}_1\rangle < 0$ et on en conclut ainsi facilement que :

$$\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M}) < \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+,\partial\mathbb{S}^n_+).$$

□

La démonstration du Théorème 2.4 consiste alors à prouver (sous les hypothèses de son énoncé) l'existence d'un champ d'un champ de spineurs satisfaisant les propriétés du Théorème 2.5. On va alors voir que la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord associée à un opérateur de chiralité remplit effectivement ces conditions.

Preuve de Théorème 2.4 : Montrons que sous les hypothèses du Théorème 2.4, il existe un champ de spineurs sur $\mathrm{M}\setminus\{q\}$ vérifiant (85), (86) et (87). Sans perdre en généralité, on peut supposer (par invariance conforme de l'invariant $\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})$) que dans la métrique g, il existe un point $q\in\partial\mathrm{M}$ qui satisfait la propriété $(*)$. D'autre part, l'opérateur de Dirac étant supposé inversible sur $\mathcal{H}^{\pm}$, la proposition 2.12 permet d'obtenir pour la fonction de Green associée à un opérateur de chiralité le développement suivant au voisinage du point q :

$$\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(x,q)\psi^{\pm}_0 = -\frac{2}{\omega_{n-1}}\gamma\Big(\frac{x-q}{|x-q|^n}\Big)\psi^{\pm}_0 + \mathrm{m}^{\pm}_{\mathrm{CHI}}(x,q)\psi^{\pm}_0,$$

où $\psi_0^\pm$ vérifient $\gamma(\nu)\Gamma\psi_0^\pm = \mp\psi_0^\pm$ et $\mathbb{B}^\pm_{\mathrm{CHI}}\big(\mathrm{m}^\pm_{\mathrm{CHI}}(\,.\,,q)\psi^\pm_{0|\partial\mathrm{M}}\big) = 0$. Puisque l'opérateur de masse est supposé non identiquement nul, on peut choisir le spineur $\psi_0^\pm$ comme étant un spineur propre pour l'opérateur de masse $\mathrm{m}^\pm_{\mathrm{CHI}}(q)$ associé à la valeur propre $\pm\kappa$ avec $\kappa \in \mathbb{R}$. D'autre part, le Corollaire 2.3 assure que les valeurs propres $\pm\kappa$ sont bien de signes opposés et donc que l'une est soit positive soit négative. Cependant dans la Remarque 2.1, on a vérifié que la définition de l'invariant $\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})$ ne dépend pas de la "chiralité" de la condition à bord choisie et on peut donc choisir ψ_0^- (par exemple) propre pour l'opérateur de masse chiral $\mathrm{m}^-_{\mathrm{CHI}}(q)$ associé à la valeur propre κ avec $\kappa > 0$. Ainsi la fonction de Green $\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(\,.\,,q)\psi_0^-$ possède le développement :

$$\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(x,q)\psi_0^- = -\frac{2}{\omega_{n-1}}\gamma\Big(\frac{x-q}{|x-q|^n}\Big)\psi_0^- + \kappa\psi_0^-.$$

Dans les notations du Théorème 2.5, on a donc $\psi_1^- = -\kappa\psi_0^-$ et on obtient ainsi que :

$$\mathrm{Re}\,\langle\gamma(x)\psi_0^-,\psi_1^-\rangle = \kappa\,\mathrm{Re}\,\langle\gamma(x)\psi_0^-,\psi_0^-\rangle = 0.$$

Le champ de spineurs $-\frac{\omega_{n-1}}{2}\mathrm{G}^-_{\mathrm{CHI}}(\,.\,,q)\psi_0^-$ satisfait bien les propriétés (85), (86) et (87) et le Théorème 2.5 permet donc de conclure. □

Une application immédiate de ce résultat est qu'elle donne une preuve spinorielle du problème de Yamabe sur une variété à bord. En effet, on a :

Corollaire 2.4. *Soit* (M,g,σ) *une variété riemannienne spinorielle compacte à bord lisse* $\partial\mathrm{M}$ *satisfaisant les hypothèses du Théorème 2.4. Il existe alors une métrique conforme à* g *dans laquelle la courbure scalaire de la variété est constante et la courbure moyenne du bord est nulle.*

Ce résultat découle du fait que si $\lambda_{\min}(\mathrm{M},\partial\mathrm{M}) < \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+,\partial\mathbb{S}^n_+)$ alors $\mu(\mathrm{M},\partial\mathrm{M}) < \mu(\mathbb{S}^n_+,\partial\mathbb{S}^n_+)$ (où $\mu(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})$ est l'invariant de Yamabe de la variété M), ce qui donne immédiatement l'existence d'une telle métrique.

Il semble clair que cette preuve du problème de Yamabe ne simplifie pas celle donnée par Escobar. Cependant, on peut s'attendre à ce que l'inégalité stricte prouvée dans ce dernier résultat ait d'autres implications. Ce n'est pas l'objectif du travail présenté ici mais on peut tout de même noter que ce prolongement fait partie de mes travaux actuels. En fait, on peut montrer qu'elle donne l'existence de solutions pour une équation de type Yamabe pour l'opérateur de Dirac sous la condition à bord associée à un opérateur de chiralité. La dénomination "équation de type Yamabe" provient du fait qu'elle possède des propriétés de covariance conforme et qu'elle fait intervenir les mêmes problèmes (au niveau des inclusions de Sobolev) que l'équation qui intervient dans le problème de Yamabe. Ce problème s'apparente fortement à celui étudié par Ammann dans [**Amm03b**] ou bien [**Amm**].

7.2. Un théorème de la masse positive. Dans cette partie, on va donner une preuve simple d'un théorème de masse positive énoncé et démontré par Escobar dans [**Esc92b**]. Plus précisément, il considère une variété riemannienne compacte (M^n,g) localement conformément plate dont le bord lisse $\partial\mathrm{M}$ est totalement ombilique. Il montre alors qui si l'invariant de Yamabe $\mu(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})$ de cette variété est strictement positif et si $q \in \partial\mathrm{M}$ alors le laplacien conforme L_g possède une unique fonction de Green $\mathcal{G}_q$ sous la condition à bord B_g, c'est-à-dire une fonction définie et lisse sur $\mathrm{M} \setminus \{q\}$ satisfaisant, au sens des distributions, le problème à bord :

$$\begin{cases} \mathrm{L}_g \mathcal{G}_q & = \delta_q \quad \text{sur M} \\ \mathrm{B}_g \mathcal{G}_{q|\partial \mathrm{M}} & = \delta_q \quad \text{le long de } \partial \mathrm{M} \end{cases}$$

où δ_q est la masse de Dirac au point q. On peut alors vérifier qu'il existe une métrique conforme à la métrique initiale g dans laquelle la fonction de Green possède au voisinage du point q, le développement suivant :

$$\mathcal{G}_q(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1} r^{n-2}} + \mathrm{A} + \alpha_q(x) \tag{89}$$

où $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et α_q est une fonction harmonique (au voisinage de q) satisfaisant $\alpha_q(q) = 0$ et $\frac{\partial \alpha_q}{\partial \nu} = 0$ où ν est le champ unitaire normal à $\partial \mathrm{M}$. Le théorème de la masse positive démontré par Escobar afin de résoudre le problème de Yamabe dans le cas des variétés à bord est alors énoncé sous la forme suivante :

La constante A *vérifie* $\mathrm{A} \geq 0$. *De plus,* $\mathrm{A} = 0$ *si et seulement si* M *est conformément isométrique à l'hémisphère ronde* $\mathbb{S}^n_+$.

Dans cette section, on se propose alors de donner une preuve de ce résultat en imposant en plus à la variété d'être spinorielle. Cependant, il n'est plus nécessaire d'imposer à la variété d'être localement conformément plate et à son bord d'être totalement ombilique. En effet, il suffit que la variété possède un unique point $q \in \partial \mathrm{M}$ satisfaisant la propriété $(*)$. On considère donc $(\mathrm{M}^n, g, \sigma)$ une variété riemannienne spinorielle compacte à bord lisse $\partial \mathrm{M}$ de dimension $n \geq 3$ où σ est la structure spinorielle de M et on prouve alors le théorème suivant :

THÉORÈME 2.6. *Soit* $(\mathrm{M}^n, g, \sigma)$ *une variété riemannienne spinorielle connexe compacte de dimension* $n \geq 3$ *à bord lisse* $\partial \mathrm{M}$. *Supposons de plus qu'il existe une métrique conforme à* g *et un point* $q \in \partial \mathrm{M}$ *tel que dans cette métrique, ce point possède la propriété* $(*)$. *Alors la masse* A *de* M *satisfait* $\mathrm{A} \geq 0$. *De plus, on a égalité si et seulement si* M *est conformément isométrique à l'hémisphère ronde* $\mathbb{S}^n_+$.

La preuve de ce résultat réside dans la construction de la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sous une certaine à bord. Il est clair que la fonction de Green chirale construite précédemment constitue une "bonne" candidate pour la résolution de ce problème. Elle nécessite cependant l'existence d'un opérateur de chiralité, ce qui n'est pas vérifiée dans toutes les dimensions. On va alors voir que contrairement à ce qui a été fait jusqu'à présent dans ce chapitre, la condition à bord MIT (qui ne nécessite aucune structure additive dans sa définition) permet de résoudre ce problème. Rappelons brièvement cette condition à bord (on consultera le chapitre 1 pour plus de détails) ; la condition à bord MIT est la donnée de la projection orthogonale :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{MIT}} : & \mathrm{L}^2\big(\mathbf{S}(\partial \mathrm{M})\big) & \longrightarrow & \mathrm{L}^2(\mathrm{V}^{\pm}) \\ & \varphi & \longmapsto & \frac{1}{2}(\mathrm{Id} \pm i\gamma(\nu))\varphi, \end{array}$$

où ν est le champ de vecteurs unitaire normal (rentrant) à $\partial \mathrm{M}$ et $\mathrm{V}^{\pm}$ est le sous-fibré propre associé à la valeur propre ± 1 de l'endomorphisme $i\gamma(\nu)$. On prouve alors l'existence de la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sous la condition $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}$ et on en donne le développement au voisinage d'un point $q \in \partial \mathrm{M}$ possédant la propriété $(*)$. Donnons tout d'abord une définition rigoureuse de la fonction de Green MIT.

DÉFINITION 2.4. *Une fonction de Green* MIT *pour l'opérateur de Dirac* D *est la donnée d'une section lisse*

$$\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{MIT}} : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \setminus \Delta \longrightarrow \Sigma\mathrm{M} \boxtimes \big(\Sigma\mathrm{M}\big)^*,$$

où $\Delta = \{(x,x)\ /\ x \in \mathrm{M}\}$ *et* $\Sigma\mathrm{M} \boxtimes \big(\Sigma\mathrm{M}\big)^*$ *est le fibré vectoriel dont la fibre au-dessus de* (x,y) *est donnée par* $\mathrm{Hom}(\Sigma_y\mathrm{M}, \Sigma_x\mathrm{M})$*, qui satisfait au sens des distributions*

$$\begin{cases} \mathrm{D}_x\big(\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}(x,y)\big) = \delta_y \mathrm{Id}_{\Sigma_y\mathrm{M}} \\ \mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}\big(\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}(x,y)\big) = 0, \quad \text{pour } x \in \partial\mathrm{M} \setminus \{y\} \end{cases}$$

pour tout $y \in \mathrm{M}$. *En d'autres termes, pour tout* $y \in \mathrm{M}$, $\psi_0 \in \Sigma_y\mathrm{M}$ *tel que* $i\gamma(\nu)\psi_0 = \pm\psi_0$ *et* $\varphi \in \Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ *satisfaisant* $\mathbb{B}^{\mp}_{\mathrm{MIT}}(\varphi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0$ *on a :*

$$\int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}(x,y)\psi_0, \mathrm{D}\varphi(x)\rangle dv(x) = \langle \psi_0, \varphi(y)\rangle$$

et si $x \in \partial\mathrm{M}$ *alors* $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}\big(\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}(x,y)\psi_0\big) = 0$.

REMARQUE 2.3. *Si on pose :*

$$\mathrm{D}^{\pm} : \mathcal{H}^{\pm} := \{\phi \in \mathrm{H}^2_1(\Sigma\mathrm{M})\ /\ \mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}(\phi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0\} \longrightarrow \mathrm{L}^2(\Sigma\mathrm{M}),$$

on peut facilement vérifier en utilisant la formule de Green que $(\mathrm{D}^{\pm})^* = \mathrm{D}^{\mp}$ *où* $(\mathrm{D}^{\pm})^*$ *est l'adjoint formel de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord* $\mathbb{B}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}$*. Ainsi le domaine* dom $(\mathrm{D}^{\pm})^*$ *de l'adjoint de l'opérateur de Dirac est donné par* $\mathcal{H}^{\mp}$*. La définition que l'on vient de donner de la fonction de Green* MIT *est donc bien consistante avec la notion de solution faible d'une équation. En effet, la section* $\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}(\,.\,,q)\psi_0^{\pm} \in \Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ *satisfait au sens faible sur* $\mathcal{H}^{\pm}$ *l'équation :*

$$\mathrm{D}\big(\mathrm{G}^{\pm}_{\mathrm{MIT}}(\,.\,,q)\psi_0^{\pm}\big) = \delta_q$$

si pour tout $\psi_0^{\pm} \in \Sigma_q\mathrm{M}$ *vérifiant* $i\gamma(\nu)\psi_0^{\pm} = \pm\psi_0^{\pm}$*, on a :*

$$\int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{G}_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0^{\pm}, (\mathrm{D}^{\pm})^*\phi\rangle dv(g) = \langle \psi_0^{\pm}, \phi(q)\rangle_{\Sigma_q\mathrm{M}}$$

pour tout $\phi \in \mathrm{dom}\,(\mathrm{D}^{\pm})^* = \mathcal{H}^{\mp}$*. On peut alors voir que cette définition coïncide avec celle donnée en 2.4.*

Afin de donner un développement au voisinage d'un point q de la fonction de Green MIT, il est intéressant d'étudier le comportement de cette condition par la trivialisation du fibré des spineurs induite par le système de coordonnées de Fermi (voir la section 4). En effet, on a le lemme suivant (qu'on peut voir comme un analogue du Lemme 2.1 pour la condition MIT) :

LEMME 2.2. *Soient* U *et* V *les deux ouverts de trivialisation construits dans la section 4 et soit* $\Phi_0 \in \Gamma\big(\Sigma_\xi(\mathbb{R}^n_+)\big)$ *un spineur parallèle tel que*

$$i\gamma(\nu)\overline{\Phi}_0(q) = \pm\overline{\Phi}_0(q)$$

en un point $q \in \mathrm{V} \cap \partial\mathrm{M}$*. On a alors :*

$$i\gamma(\nu)\overline{\Phi}_{0|\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}} = \pm\overline{\Phi}_{0|\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}},$$

c'est-à-dire que $\mathbb{B}^{\mp}_{\mathrm{MIT}}(\overline{\Phi}_{0|\mathrm{V}\cap\partial\mathrm{M}}) = 0$.

Preuve : On considère la fonction définie sur V par $f(p) = |i\gamma(\nu)\overline{\Phi}_0 - \overline{\Phi}_0|^2(p)$ et on montre alors que f s'annule sur $\mathrm{V} \cap \partial\mathrm{M}$. En effet, pour $1 \leq i \leq n-1$, on a :

$$\begin{aligned} e_i(f) &= e_i(|i\gamma(\nu)\overline{\Phi}_0 - \overline{\Phi}_0|^2) \\ &= 2\,e_i\big(|\overline{\Phi}_0|^2 - i\langle\gamma(\nu)\overline{\Phi}_0, \overline{\Phi}_0\rangle\big) \\ &= 2\,e_i\big(|\overline{\Phi}_0|^2 + 2\,\mathrm{Im}\langle\gamma(\nu)\overline{\Phi}_0, \overline{\Phi}_0\rangle\big), \end{aligned}$$

où $\mathrm{Im}\,(z)$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe $z \in \mathbb{C}$. Cependant, puisque le champ de spineurs Φ_0 est parallèle, on peut supposer que $|\Phi_0|^2 = 1$ et puisque la trivialisation induite sur le fibré des spineurs est une isométrie sur les fibres, on a $|\overline{\Phi}_0|^2 = 1$ et donc $e_i\big(|\overline{\Phi}_0|^2\big) = 0$. En utilisant la compatibilité de la métrique hermitienne avec la connexion de Levi-Civita, on obtient :

$$e_i\big(\mathrm{Im}\langle\gamma(\nu)\overline{\Phi}_0, \overline{\Phi}_0\rangle\big) = \mathrm{Im}\langle\gamma\big(\overline{\nabla}_{e_i}\nu\big)\overline{\Phi}_0, \overline{\Phi_0}\rangle + 2\,\mathrm{Im}\langle\gamma(\nu)\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\Phi}_0, \overline{\Phi}_0\rangle.$$

Un calcul analogue à celui effectué dans la preuve du lemme 2.1 permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\langle\gamma(\nu)\gamma(\overline{\nabla}_{e_i}\nu)\overline{\Phi_0}, \overline{\Phi}_0\rangle &= \frac{1}{4}\sum_{1\leq j\neq k\leq n-1} \widetilde{\Gamma}_{ij}^k \mathrm{Im}\langle\gamma(\nu)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\Phi}_0, \overline{\Phi}_0\rangle \\ &\quad -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\langle\gamma(\overline{\nabla}_{e_i}\nu)\overline{\Phi}_0, \overline{\Phi}_0\rangle. \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\langle\gamma(\nu)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\Phi}_0, \overline{\Phi}_0\rangle = \langle\overline{\Phi}_0, \gamma(\nu)\gamma(e_j)\gamma(e_k)\overline{\Phi}_0\rangle,$$

on vérifie alors que pour tout $1 \leq i \leq n-1$: $e_i(f) = 0$. Puisque par hypothèse $f(q) = 0$, on obtient le résultat annoncé. □

Remarquons que pour la suite de ce travail, on a en fait juste besoin de savoir que cette condition à bord est invariante par la trivialisation de Fermi dans le cas où la variété possède la propriété $(*)$. De plus, dans ce cas, on peut donner son développement au voisinage de ce point particulier. Dans tout ce qui suit, on énonce seulement les résultats pour la condition à bord $\mathbb{B}^-_{\mathrm{MIT}}$, cependant ils restent vrai pour la condition $\mathbb{B}^+_{\mathrm{MIT}}$ et se démontrent de la même manière. On prouve alors :

Proposition 2.17. *Soit* $(\mathrm{M}^n, g, \sigma)$ *une variété riemannienne spinorielle compacte à bord lisse* $\partial\mathrm{M}$ *dont un point satisfait la propriété* $(*)$. *La fonction de Green* MIT *de l'opérateur de Dirac est alors donnée par :*

$$\mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0 = \mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(x,q)\psi_0 + \mathrm{m}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0, \tag{90}$$

où $\psi_0 \in \Sigma_q\mathrm{M}$ *est tel que* $i\gamma(\nu)\psi_0 = -\psi_0$ *et* $\mathrm{m}^-_{\mathrm{MIT}}(\,.\,,q)\psi_0 \in \Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ *est un champ de spineurs harmonique au voisinage de q satisfaisant :*

$$\mathbb{B}^-_{\mathrm{MIT}}\big(\mathrm{m}^-_{\mathrm{MIT}}(\,.\,,q)\psi_{0|\partial\mathrm{M}}\big) = 0.$$

Preuve : On rappelle tout d'abord (voir [**HMZ02**]) que l'opérateur de Dirac

$$\mathrm{D} : \mathcal{H}^- \longrightarrow \mathrm{L}^2(\Sigma\mathrm{M})$$

définit un opérateur inversible, c'est-à-dire que pour tout $\Phi \in \Gamma(\Sigma\mathrm{M})$, le problème à bord

$$\begin{cases} \mathrm{D}\psi = \Phi & \text{sur M} \\ \mathbb{B}^-_{\mathrm{MIT}}(\psi_{|\partial\mathrm{M}}) = 0 & \text{le long de } \partial\mathrm{M} \end{cases}$$

possède une unique solution lisse $\phi \in \Gamma(\Sigma\mathrm{M})$. On procède maintenant de la même manière que dans la preuve de la Proposition 2.12. En effet, on se place dans la métrique conforme à la métrique initiale dans laquelle on peut trouver un point $q \in \partial\mathrm{M}$ tel que la propriété $(*)$ soit vérifiée. Il existe alors un ouvert U de $\mathbb{R}^n_+$ et un ouvert V de M qui fournissent la trivialisation du fibré des spineurs au-dessus de V construite dans la section précédente. Dans la suite, on notera toujours indifféremment un spineur au-dessus de U et son image dans le fibré des spineurs au-dessus de V. Soit alors $\psi_0 \in \Sigma_q\mathrm{M}$ tel que $i\gamma(\nu)\psi_0 = -\psi_0$ et η un fonction de cut-off telle que :

$$\begin{cases} 0 \leq \eta \leq 1, & \eta \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}) \\ \eta \equiv 1 \text{ sur } \mathrm{B}^+_q(\delta), & \mathrm{supp}(\eta) \subset \mathrm{B}^+_q(2\delta) \subset \mathrm{V}. \end{cases}$$

Si on pose alors $\Phi(x) = \eta(x)\mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(x,q)\psi_0$ alors ce champ de spineurs est clairement harmonique sur $\mathrm{B}^+_q(\delta) \setminus \{q\}$ et le champ $\Psi = \mathrm{D}\Phi$ se prolonge donc à M tout entier en un champ de spineurs lisse en posant $\Psi(q) = \mathrm{D}\Phi(q) = 0$. Puisque l'opérateur de Dirac est inversible sur $\mathcal{H}^-$, il existe un unique champ de spineurs, noté $\mathrm{m}^-_{\mathrm{MIT}}(\,.\,,q)\psi_0 \in \mathcal{H}^-$, vérifiant $\mathrm{D}\big(\mathrm{m}^-_{\mathrm{MIT}}(\,.\,,q)\psi_0\big) = -\Psi$. Posons alors :

$$\mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0 := \eta\mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(x,q)\psi_0 + \mathrm{m}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0.$$

Il reste donc à vérifier que cette section satisfait la définition de la fonction de Green MIT sous la condition à bord $\mathbb{B}^-_{\mathrm{MIT}}$. On remarque que par construction on a clairement que le long de $\partial\mathrm{M}$:

$$\mathbb{B}^-_{\mathrm{MIT}}\big(\mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(.\,,q)\psi_{0|\partial\mathrm{M}}\big) = 0.$$

On vérifie maintenant que :

$$\int_\mathrm{M} \langle \mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0, \mathrm{D}\varphi(x)\rangle dv(g) = \langle \psi_0, \varphi(q)\rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{H}^+$. Pour cela, en utilisant la preuve de la Proposition 2.12 (et en conservant les notations introduites dans cette proposition), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_\mathrm{M} \langle \mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0, \mathrm{D}(\varphi)\rangle dv(g) &= \int_\mathrm{M} \langle \mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0, \mathrm{D}(\widetilde{\eta}\varphi)\rangle dv(g) \\ &\quad + \int_\mathrm{M} \langle \mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0, \mathrm{D}\big((1-\widetilde{\eta})\varphi\big)\rangle dv(g). \end{aligned} \tag{91}$$

Cependant, en intégrant par partie, on a :

$$\begin{aligned} \int_\mathrm{M} \langle \mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0, \mathrm{D}\big((1-\widetilde{\eta})\varphi\big)\rangle dv(x) &= \int_\mathrm{M} \langle \mathrm{D}\big(\mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0\big), (1-\widetilde{\eta})\varphi\rangle dv(x) \\ &\quad + \int_{\partial\mathrm{M}} \langle \gamma(\nu)\mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0, (1-\widetilde{\eta})\varphi\rangle dv(x). \end{aligned}$$

Le terme de bord est nul puisque $\mathbb{B}^-_{\mathrm{MIT}}\big(\mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(.\,,q)\psi_{0|\partial\mathrm{M}}\big) = 0$ et les champs de spineurs $\gamma(\nu)\mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(\,.\,,q)\psi_0 \in \mathcal{H}^-$ et $\varphi \in \mathcal{H}^+$ sont donc orthogonaux le long de $\partial\mathrm{M}$. De plus, le premier terme est nul car $\mathrm{D}\big(\mathrm{G}^-_q(\,.\,)\psi_0\big) = 0$ sur $\mathrm{M} \setminus \{q\}$. Reste maintenant à calculer le premier terme de l'identité (91). Pour cela, on écrit :

$$\int_\mathrm{M} \langle \mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0, \mathrm{D}(\widetilde{\eta}\varphi)\rangle = \int_\mathrm{M} \langle \mathrm{G}^-_{\mathrm{eucl}}(x,q)\psi_0, \mathrm{D}\varphi\rangle + \int_\mathrm{M} \langle \mathrm{m}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0, \mathrm{D}(\widetilde{\eta}\varphi)\rangle$$

et puisque le champ $\mathrm{m}^-_{\mathrm{MIT}}(\,.\,,q)\psi_0$ est harmonique sur $\{\eta\equiv 1\}$ (donc sur $\mathrm{supp}(\widetilde{\eta})$), on obtient :

$$\int_{\mathrm{M}}\langle \mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0,\mathrm{D}\varphi\rangle dv(x)=\langle\psi_0,\varphi(q)\rangle$$

par définition de la fonction de Green euclidienne. L'unicité de la fonction de Green MIT s'obtient facilement puisque l'opérateur de Dirac est inversible sur $\mathcal{H}^-$ et on a alors que $\mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}$ est l'unique fonction de Green MIT. On procède exactement de la même manière pour la condition à bord $\mathbb{B}^+_{\mathrm{MIT}}$. □

On est maintenant en mesure d'énoncer et de donner la preuve du théorème de la masse positive annoncée au début de cette section. En effet, on prouve le résultat suivant :

THÉORÈME 2.7. *Soit* (M^n,g,σ) *une variété riemannienne spinorielle connexe compacte de dimension* $n\geq 3$ *à bord lisse* $\partial\mathrm{M}$ *et dont l'invariant de Yamabe est positif. Supposons de plus qu'il existe une métrique conforme à* g *et un point* $q\in\partial\mathrm{M}$ *tel que, dans cette métrique, le point* $q\in\partial\mathrm{M}$ *possède la propriété* $(*)$. *Alors la masse* A *de* M *satisfait* $\mathrm{A}\geq 0$. *De plus, on a égalité si et seulement si* M *est conformément isométrique à l'hémisphère ronde* $\mathbb{S}^n_+$.

Preuve : On peut supposer que dans la métrique g, il existe un point $q\in\partial\mathrm{M}$ qui possède la propriété $(*)$ (à un changement de métriques conformes près), La Proposition 2.17 permet alors de déduire l'existence d'une unique fonction de Green $\mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(\,.\,,q)$ pour la condition à bord MIT possédant au voisinage de q le développement suivant :

$$\mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0 \;=\; \mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(x,q)\psi_0+\mathrm{m}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0, \tag{92}$$

où $\psi_0\in\Sigma_q\mathrm{M}$ est tel que $i\gamma(\nu)\psi_0=-\psi_0$ et $\mathrm{m}^-_{\mathrm{MIT}}(\,.\,,q)\psi_0\in\Gamma(\Sigma\mathrm{M})$ est un champ de spineurs harmonique au voisinage de q satisfaisant :

$$\mathbb{B}^-_{\mathrm{MIT}}\big(\mathrm{m}^-_{\mathrm{MIT}}(.\,,q)\psi_{0|\partial\mathrm{M}}\big)=0.$$

Sans perdre en généralités, on peut supposer que $|\psi_0|^2=1$. D'autre part, puisque par hypothèse on a supposé que $\mu(\mathrm{M},\partial\mathrm{M})>0$, il existe une unique fonction de Green $\mathcal{G}_q$ du laplacien conforme lisse sur $\mathrm{M}\setminus\{q\}$ et vérifiant $\mathcal{G}_q>0$ (voir [**Esc92b**]). De plus, comme le point q satisfait la propriété $(*)$ dans la métrique g, la fonction de Green du laplacien conforme admet au voisinage du point q, le développement suivant :

$$\mathcal{G}_q(x)=\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}r^{n-2}}+\mathrm{A}+\alpha_q(x)$$

où $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$ et α_q est une fonction harmonique (au voisinage de q) satisfaisant $\alpha_q(q)=0$ et $\frac{\partial\alpha_q}{\partial\nu}=0$. On considère alors le changement conforme de métriques sur $\mathrm{M}\setminus\{q\}$ donné par :

$$\overline{g}=\big((n-2)\omega_{n-1}\mathcal{G}_q\big)^{\frac{4}{n-2}}g=\widetilde{\mathcal{G}}_q^{\frac{4}{n-2}}g$$

Puisque la fonction de Green du laplacien conforme satisfait le problème à bord :

$$\left\{\begin{array}{lcll}\mathrm{L}\mathcal{G}_q & = & \delta_q & \text{sur M}\\ \mathrm{B}\mathcal{G}_{q|\partial\mathrm{M}} & = & \delta_q & \text{le long de }\partial\mathrm{M}\end{array}\right.$$

et que les courbures scalaires et moyennes dans g et $\overline{g}$ sont reliées par les formules :

$$\overline{\mathrm{R}}=\widetilde{\mathcal{G}}_q^{-\frac{n+2}{n-2}}\mathrm{L}\widetilde{\mathcal{G}}_q\quad\text{et}\quad\overline{\mathrm{H}}=\widetilde{\mathcal{G}}_q^{-\frac{n}{n-2}}\mathrm{B}\widetilde{\mathcal{G}}_q$$

on obtient que la courbure scalaire de $(\mathrm{M}\setminus\{q\},\overline{g})$ vaut $\overline{\mathrm{R}}=0$ et que la courbure moyenne de $(\partial\mathrm{M}\setminus\{q\},\overline{g})$ dans M vaut $\overline{\mathrm{H}}=0$. La donnée d'une métrique conforme à g permet une identification des fibrés des spineurs au-dessus de $(\mathrm{M}\setminus\{q\},g)$ et $(\mathrm{M}\setminus\{q\},\overline{g})$. En effet, on a un isomorphisme de fibrés donné par :

$$\mathrm{F}:\Sigma_g(\mathrm{M}\setminus\{q\})\longrightarrow\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M}\setminus\{q\})$$

tel que les opérateurs de Dirac satisfont la relation :

$$\overline{\mathrm{D}}\big(\widetilde{\mathcal{G}}_q^{-\frac{n-1}{n-2}}\mathrm{F}(\psi)\big)=\widetilde{\mathcal{G}}_q^{-\frac{n+1}{n-2}}\mathrm{F}(\mathrm{D}\psi)$$

pour tout $\psi\in\Gamma\big(\Sigma_g(\mathrm{M}\setminus\{q\})\big)$ et où D (resp. $\overline{\mathrm{D}}$) désigne l'opérateur de Dirac agissant sur $\Sigma_g(\mathrm{M}\setminus\{q\})$ (resp. $\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M}\setminus\{q\})$). Considérons alors le champ de spineurs donné par :

$$\overline{\mathrm{G}}_q(\,.\,)\overline{\psi}_0=\widetilde{\mathcal{G}}_q^{-\frac{n+1}{n-2}}\mathrm{F}\big(\mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(\,.\,,q)\psi_0\big)\in\Gamma\big(\Sigma_{\overline{g}}(\mathrm{M}\setminus\{q\})\big).$$

Par covariance conforme de l'opérateur de Dirac, on a :

$$\overline{\mathrm{D}}\big(\overline{\mathrm{G}}_q(\,.\,)\overline{\psi}_0\big)=\widetilde{\mathcal{G}}_q^{-\frac{n-1}{n-2}}\mathrm{F}\Big(\mathrm{D}\big(\mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(\,.\,,q)\psi_0\big)\Big)=0 \tag{93}$$

sur $\mathrm{M}\setminus\{q\}$. De plus, puisque la condition à bord MIT est elle-aussi covariante conforme, on a :

$$\overline{\mathbb{B}}^-_{\mathrm{MIT}}\big(\overline{\mathrm{G}}_q(\,.\,)\overline{\psi}_{0|\partial\mathrm{M}}\big)=0,$$

où $\overline{\mathbb{B}}^-_{\mathrm{MIT}}=\frac{1}{2}\big(\mathrm{Id}-i\overline{\gamma}(\overline{\nu})\big)$ désigne la projection associée à la condition à bord MIT dans la métrique $\overline{g}$. Soit maintenant $\varepsilon>0$ et notons $\mathrm{B}^+_q(\varepsilon)$ la demi-boule de centre q et de rayon ε. En utilisant l'identité (93), la formule de Schrödinger-Lichnerowicz et le fait que la courbure scalaire de $\mathrm{M}\setminus\{q\}$ est nulle, on a :

$$0=\int_{\mathrm{M}\setminus\mathrm{B}^+_q(\varepsilon)}\langle\overline{\mathrm{D}}^2\big(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\big),\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\rangle dv(\overline{g})=\int_{\mathrm{M}\setminus\mathrm{B}^+_q(\varepsilon)}\langle\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0),\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\rangle dv(\overline{g}).$$

En intégrant par parties cette identité, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathrm{B}^+_q(\varepsilon)}\langle\overline{\nabla}_{\overline{\nu}_\varepsilon}(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0),\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\rangle ds(\overline{g}) &= \int_{\partial\mathrm{M}_\varepsilon}\langle\overline{\nabla}_{\overline{\nu}}(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0),\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\rangle ds(\overline{g})\\ &\quad+\int_{\mathrm{M}\setminus\mathrm{B}^+_q(\varepsilon)}|\overline{\nabla}(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0)|^2 dv(\overline{g})\end{aligned} \tag{94}$$

où $\partial\mathrm{M}_\varepsilon=\partial\mathrm{M}\setminus\big(\partial\mathrm{M}\cap\partial\mathrm{B}^+_q(\varepsilon)\big)$ et ν (resp. ν_ε) désigne le champ de vecteurs unitaire normal rentrant (resp. sortant) à $\partial\mathrm{M}_\varepsilon$ (resp. $\partial\mathrm{B}^+_q(\varepsilon)$) dans la métrique g. Remarquons alors qu'un calcul permet de voir que :

$$\overline{\nabla}_{\overline{\nu}}(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0)\;=\;\frac{n-1}{2}\overline{\mathrm{H}}\,\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0-\overline{\gamma}(\overline{\nu})\overline{\mathrm{D}}\big(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\big)-\overline{\mathrm{D}}^{\partial\mathrm{M}}\big(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\big)$$

où $\overline{\mathrm{D}}^{\partial\mathrm{M}}$ désigne l'opérateur de Dirac du bord $\partial\mathrm{M}$ muni de la métrique $\overline{g}$. Cependant, sur $\partial\mathrm{M}_\varepsilon$ on a $\overline{\mathrm{H}}=0$ et $\overline{\mathrm{D}}\big(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\big)=0$, donc l'égalité (94) s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathrm{B}^+_q(\varepsilon)}\langle\overline{\nabla}_{\overline{\nu}_\varepsilon}(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0),\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\rangle ds(\overline{g}) &= -\int_{\partial\mathrm{M}_\varepsilon}\langle\overline{\mathrm{D}}^{\partial\mathrm{M}}\big(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\big),\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\rangle ds(\overline{g})\\ &\quad+\int_{\mathrm{M}\setminus\mathrm{B}^+_q(\varepsilon)}|\overline{\nabla}(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0)|^2 dv(\overline{g}).\end{aligned}$$

D'autre part, par covariance conforme de la condition à bord MIT, on a aussi que :

$$i\overline{\gamma}(\overline{\nu})\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0 = \overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0,$$

pour tout $x \in \partial\mathrm{M}_\varepsilon$ et donc :

$$\begin{aligned}\langle \overline{\mathrm{D}}^{\partial\mathrm{M}}\big(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\big), \overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\rangle &= \langle i\overline{\gamma}(\overline{\nu})\overline{\mathrm{D}}^{\partial\mathrm{M}}\big(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\big), i\overline{\gamma}(\overline{\nu})\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\rangle \\ &= -\langle \overline{\mathrm{D}}^{\partial\mathrm{M}}\big(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\big), \overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0\rangle.\end{aligned}$$

L'égalité (94) devient donc :

$$0 \leq \int_{\mathrm{M}\setminus\mathrm{B}_q^+(\varepsilon)} |\overline{\nabla}(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0)|^2 dv(\overline{g}) = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathrm{B}_q^+(\varepsilon)} \overline{\nu}_\varepsilon |\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0|^2 ds(\overline{g}). \tag{95}$$

Le champ de vecteurs $\overline{\nu}_\varepsilon$ étant normal rentrant à $\partial\mathrm{B}_q^+(\varepsilon)$ pour la métrique $\overline{g}$ et puisque $\overline{g}$ est conforme à g (qui est plate au voisinage de q), le champ $\overline{\nu}_\varepsilon$ est colinéaire à $\frac{\partial}{\partial r}$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\overline{\nu}_\varepsilon = -c\frac{\partial}{\partial r}$. Or :

$$1 = \overline{g}(\overline{\nu}_\varepsilon, \overline{\nu}_\varepsilon) = c^2\widetilde{\mathcal{G}}_q^{\frac{4}{n-2}} g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = c^2(n-2)^{\frac{4}{n-2}}\,\omega_{n-1}^{\frac{4}{n-1}}\,\mathcal{G}_q^{\frac{4}{n-2}}$$

et donc puisque la demi-boule $\mathrm{B}_q^+(\varepsilon)$ est contenue dans l'ouvert de trivialisation plat au voisinage du point q, la fonction de Green du laplacien conforme possède le développement (89), c'est-à-dire

$$c^2(n-2)^{\frac{4}{n-2}}\,\omega_{n-1}^{\frac{4}{n-1}}\Big(\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}r^{n-2}} + \mathrm{A} + \alpha_q(x)\Big)^{\frac{4}{n-2}} = 1.$$

Un simple calcul permet alors de voir que $c = \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$ et donc que $\overline{\nu}_\varepsilon = -(\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2))\frac{\partial}{\partial r}$. Donnons maintenant un développement de la quantité $\overline{\nu}_\varepsilon|\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0|^2$ sur la demi-sphère $\partial\mathrm{B}_q^+(\varepsilon)$; pour cela, on écrit :

$$\begin{aligned}|\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0|^2 &= \widetilde{\mathcal{G}}_q^{-2\frac{n-1}{n-2}}|\mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0|^2 \\ &= (n-2)^{-2\frac{n-1}{n-2}}\,\omega_{n-1}^{-2\frac{n-1}{n-2}}\mathcal{G}_q^{-2\frac{n-1}{n-2}}\,|\mathrm{G}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0|^2 \\ &= \Big(\frac{1}{r^{n-2}} + (n-2)\omega_{n-1}\mathrm{A} + \widetilde{\alpha}_q(x)\Big)^{-2\frac{n-1}{n-2}}|\mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(x,q)\psi_0 + \mathrm{m}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0|^2\end{aligned}$$

où $\widetilde{\alpha}_q(x) = (n-2)\,\omega_{n-1}\alpha_q(x)$. En développant cette expression, on arrive à :

$$\begin{aligned}|\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0|^2 &= \Big(1 + (n-2)\omega_{n-1}\mathrm{A}r^{n-2} + \widetilde{\alpha}_q(x)r^{n-2}\Big)^{-2\frac{n-1}{n-2}} \\ &\quad\times\Big(1 + |\mathrm{m}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle\mathrm{G}_{\mathrm{eucl}}(x,q)\psi_0, \mathrm{m}^-_{\mathrm{MIT}}(x,q)\psi_0\rangle\Big).\end{aligned}$$

On peut maintenant calculer $\frac{\partial}{\partial r}|\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0|^2$. En effet, après calculs, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial r}|\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0|^2 = -2(n-1)(n-2)\,\omega_{n-1}\,\mathrm{A}\,\varepsilon^{n-3} + o(\varepsilon^{n-3}).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}ds(\overline{g}) &= \sqrt{\det(\overline{g})}dx \\ &= \widetilde{\mathcal{G}}_q^{2\frac{n-1}{n-2}}dx \\ &= \varepsilon^{-2(n-1)}\big(1 + o(1)\big)dx\end{aligned}$$

où dx est la forme volume canonique de $\mathbb{R}^{n-1}$. Finalement, on arrive à :

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_{\mathrm{M}\setminus \mathrm{B}_q^+(\varepsilon)} |\overline{\nabla}(\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0)|^2 dv(\overline{g}) &= \frac{1}{2}\int_{\partial \mathrm{B}_q^+(\varepsilon)} \overline{\nu}_\varepsilon |\overline{\mathrm{G}}_q(x)\overline{\psi}_0|^2 ds(\overline{g}) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{vol}\big(\partial \mathrm{B}_q^+(\varepsilon)\big)\big(-\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\big)\big(\varepsilon^{-2(n-1)} + o(\varepsilon^{-2(n-1)})\big) \\
&\quad \times\big(-2(n-1)(n-2)\omega_{n-1}\,\mathrm{A}\varepsilon^{n-3} + o(\varepsilon^{n-3})\big) \\
&= (n-1)(n-2)\,\omega_{n-1}^2\,\mathrm{A} + o(1)
\end{aligned}$$

et donc $\mathrm{A} \geq 0$. Supposons maintenant que $\mathrm{A} = 0$; en utilisant l'identité ci-dessus, on obtient que le champ de spineurs $\overline{\mathrm{G}}_q(\,.\,)\overline{\psi}_0$ est un champ de spineurs parallèle sur $\mathrm{M}\setminus\{q\}$, c'est-à-dire que $\overline{\nabla}_X(\overline{\mathrm{G}}_q(\,.\,)\overline{\psi}_0) = 0$ pour tout $X \in \Gamma\big(\mathrm{T}(\mathrm{M}\setminus\{q\})\big)$. Puisque le choix de ψ_0 est arbitraire, on obtient ainsi une base de spineurs parallèles du fibré des spineurs au-dessus de $(\mathrm{M}\setminus\{q\}, \overline{g})$. D'autre part, le champ $\overline{\mathrm{G}}_q(\,.\,)\overline{\psi}_0$ vérifie la condition à bord MIT, c'est-à-dire que l'on a :

$$i\overline{\gamma}(\overline{\nu})\overline{\mathrm{G}}_q(\,.\,)\overline{\psi}_{0|\partial\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{G}}_q(\,.\,)\overline{\psi}_{0|\partial\mathrm{M}}.$$

En dérivant cette expression (le long de $\partial\mathrm{M}$), on obtient que :

$$\overline{\nabla}_X\big(i\overline{\gamma}(\overline{\nu})\overline{\mathrm{G}}_q(\,.\,)\overline{\psi}_0\big) = -i\overline{\gamma}\big(\overline{\mathrm{A}}(X)\big)\overline{\mathrm{G}}_q(\,.\,)\overline{\psi}_0 = 0$$

puisque le spineur $\overline{\mathrm{G}}_q(\,.\,)\overline{\psi}_0$ est parallèle et où $\overline{\mathrm{A}}(X) = -\overline{\nabla}_X\nu$ est l'application de Weingarten du bord $\partial\mathrm{M}$ dans M muni de la métrique $\overline{g}$. Le champ $\overline{\mathrm{G}}_q(\,.\,)\overline{\psi}_0$ étant parallèle, il ne possède pas de zéro et ainsi le bord $\partial\mathrm{M}$ est totalement géodésique dans M. La restriction au bord d'un champ de spineurs parallèle de la base construite précédemment donne un champ de spineurs parallèle sur le fibré des spineurs du bord. Pour vérifier cela, il suffit d'utiliser la formule de Gauss spinorielle et le fait que le bord $\partial\mathrm{M}$ est totalement géodésique dans M. En utilisant alors l'identification des fibrés des spineurs intrinsèque et extrinsèque du bord, on vérifie facilement que $\partial\mathrm{M}$ est isométrique à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n-1}$. La variété $(\mathrm{M}\setminus\{q\}, \overline{g})$ est donc isométrique à une variété possédant un nombre maximal de spineurs parallèles et dont le bord est totalement ombilique et isométrique à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n-1}$. On a donc finalement montré que $(\mathrm{M}\setminus\{q\}, \overline{g})$ est isométrique au demi-espace euclidien $\mathbb{R}^n_+$. Soit maintenant $\mathrm{I} : (\mathrm{M}\setminus\{q\}, \overline{g}) \to (\mathbb{R}^n_+, \xi)$ une isométrie et posons $f(x) = 1 + \xi\big(f(x)\big)/4$ où $\xi\big(f(x)\big) := \xi\big(f(x), f(x)\big)$. Alors $\mathrm{M}\setminus\{q\}$ munie de la métrique $f^{-2}\overline{g} = f^{-2}\widetilde{\mathcal{G}}_q^{\frac{4}{n-2}} g$ est isométrique à l'hémisphère standard $\mathbb{S}^n_+$ (c'est-à-dire muni de sa métrique canonique). La fonction $f^{-2}\widetilde{\mathcal{G}}_q^{\frac{4}{n-2}}$ est lisse sur $\mathrm{M}\setminus\{q\}$ et se prolonge continûment en une fonction positive à M tout entier. On a ainsi bien montré que M est conformément isométrique à $(\mathbb{S}^n_+, g_{\mathrm{st}})$. $\square$

Bibliographie

[AH] B. Ammann and E. Humbert, *Positive mass theorem for the Yamabe problem on spin manifolds*, GAFA.

[AHM] B. Ammann, E. Humbert, and B. Morel, *Mass endomorphism and spinorial Yamabe type problem on conformally flat manifolds*, to appear in Comm. Anal. Geom.

[AHM03] ———, *On a nonlinear Dirac equation of Yamabe type*, Preprint I.E.C.N. (2003).

[AHM04] ———, *Un problème de type Yamabe sur les variétés spinorielles compactes*, C. R. Acad. Sci. Paris **338** (2004), no. 12, 929–934.

[Amm] B. Ammann, *The smallest Dirac eigenvalue in a spin-conformal class and cmc-immersions*, to appear in Comm. Anal. Geom.

[Amm03a] ———, *A spin-conformal lower bound of the first positive Dirac eigenvalue*, Diff. Geom. Appl. **18** (2003), 21–32.

[Amm03b] ———, *A variational problem in conformal spin geometry*, Habilitationsschrift, Universität Hamburg (2003).

[AS62] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators I*, Ann. of Math. **87** (1962), 484–530.

[Aub76] T. Aubin, *Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pur. Appl. IX. Ser. (1976), 269–296.

[Bar86] R. Bartnik, *The mass of an asymptotically flat manifold*, Commun. Pure Appl. Math. **39** (1986), 661–693.

[Bär92] C. Bär, *Lower eigenvalue estimate for Dirac operator*, Math. Ann. **293** (1992), 39–46.

[Bär93] ———, *Real Killing spinors and holonomy*, Comm. Math. Phys. **154** (1993), 525–576.

[Bär98] ———, *Extrinsic bounds of the Dirac operator*, Ann. Glob. Anal. Geom. **16** (1998), 573–596.

[Bau89a] H. Baum, *Complete Riemannian manifolds with imaginary Killing spinors*, Ann. Glob. Anal. Geom. **7** (1989), 205–226.

[Bau89b] ———, *Odd-dimensional Riemannian manifolds admitting imaginary Killing spinors*, Ann. Glob. Anal. Geom. **7** (1989), 141–153.

[BBW93] B. Booß-Bavnbek and K. P. Wojciechowski, *Elliptic boundary problems for the Dirac operator*, Birkhäuser, Basel, 1993.

[BFGK90] H. Baum, T. Friedrich, R. Grünewald, and I. Kath, *Twistor and Killing spinors on Riemannian manifolds*, vol. 108, Seminarbericht, 1990, Humboldt-Universität zu Berlin.

[BG92] J. P. Bourguignon and P. Gauduchon, *Spineurs, opérateurs de Dirac et variations de métriques*, Commun. Math. Phys. **144** (1992), 581–599.

[BHMM] J. P. Bourguignon, O. Hijazi, J. L. Milhorat, and A. Moroainu, *A spinorial approch to Riemannian and conformal geometry*, Monograph (In Preparation).

[Bur93] J. Bureš, *Dirac operator on hypersurfaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **34** (1993), 313–322.

[Car91] M. Do Carmo, *Differential forms and applications*, Springer-Verlag, 1991.

[CH03] P.T. Chrusciel and M. Herzlich, *The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds*, Pac. J. Math. **212** (2003), 231–264.

[Che84] P. Cherrier, *Problèmes de Neumann non linéaires sur les variétés Riemanniennes*, J. Funct. Anal. **57** (1984), 154–207.

[CJJ+74] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf, *New extended model of hadrons*, Phys. Rev. D **9** (1974).

[CJJT74] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn, *Baryon structure in the bag theory*, Phys. Rev. D **10** (1974), 2599–2604.

[Esc92a] J. F. Escobar, *Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary*, Ann. of Math. **136** (1992), 1–50, Addendum in **139** (1994), 749-750.

[Esc92b] ———, *The Yamabe problem on manifolds with boundary*, J. Diff. Geom. **35** (1992), 21–84.

[Fri80] T. Friedrich, *Der erste eigenwert des Dirac-operators einer kompakten Riemannschen manniftigkeit nicht negativer skalarkrümmung*, Math. Nach. **97** (1980), 117–146.

[Fri00] ———, *Dirac operators in Riemannian geometry*, vol. 25, A. M. S. Graduate Studies in Math., 2000.

[FS98] S. Farinelli and G. Schwarz, *On the spectrum of the Dirac operator under boundary conditions*, J. Geom. Phys. **28** (1998), 67–84.

[GH06] J. F. Grosjean and E. Humbert, *The first eigenvalue of Dirac and Laplace operators on surfaces*, En préparation (2006).

[Her98a] M. Herzlich, *A Penrose-like inequality for the mass of Riemannian asymptotically flat manifolds*, Comm. Math. Phys. **188** (1998), 121–133.

[Her98b] ———, *The positive mass theorem for black holes revisited*, J. Geom. Phys. **26** (1998), 97–111.

[Hij86] O. Hijazi, *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors*, Commun. Math. Phys. **25** (1986), 151–162.

[Hij91] ———, *Première valeur propre de l'opérateur de Dirac et nombre de Yamabe*, C. R. Acad. Sci. Paris **313** (1991), 865–868.

[Hit74] N. Hitchin, *Harmonic spinors*, Adv. Math. **14** (1974), 1–55.

[HMR02] O. Hijazi, S. Montiel, and S. Roldán, *Eigenvalue boundary problems for the Dirac operator*, Comm. Math. Phys. **231** (2002), 375–390.

[HMR03] ———, *Dirac operators on hypersurfaces of manifolds with negative scalar curvature*, Ann. Global Anal. Geom. **23** (2003), 247–264.

[HMZ01a] O. Hijazi, S. Montiel, and X. Zhang, *Dirac operator on embedded hypersurfaces*, Math. Res. Lett. **8** (2001), 20–36.

[HMZ01b] ———, *Eigenvalues of the Dirac operator on manifolds with boundary*, Comm. Math. Phys. **221** (2001), 255–265.

[HMZ02] ———, *Conformal lower bounds for the Dirac operator on embedded hypersurfaces*, Asian J. Math. **6** (2002), 23–36.

[Joh75] K. Johnson, *The M.I.T bag model*, Acta Phys. Pol. **B6** (1975), 865–892.

[Lic63] A. Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. **257** (1963), 7–9, Série A-B.

[LM89] H.B. Lawson and M.L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press ed., vol. 38, Princeton Math. Series, 1989.

[Lop53] Ya.B. Lopatinskiĭ, *On a method for reducing boundary problems for a system of differential equations of elliptic type to regular integral equations*, Ukrain. Math. Ž. **5** (1953), 123–151, (Russian).

[Lot86] J. Lott, *Eigenvalue bounds for the Dirac operator*, Pacific J. of Math. **125** (1986), 117–126.

[LP87] J. M. Lee and T. H. Parker., *The Yamabe problem*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. **17** (1987), 37–91.

[Mon99] S. Montiel, *Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 711–748.

[Mor01] B. Morel, *Eigenvalue estimates for the Dirac-Schrödinger operators*, Journal of Geometry and Physics **38** (2001), 1–18.

[PT82] T. Parker and C. Taubes, *On Witten's proof of the positive energy theorem*, Comm. Math. Phys. **84** (1982), 223–238.

[Rau05] S. Raulot, *Optimal eigenvalue estimates for the Dirac operator on domains with boundary*, Letters in Mathematical Physics **73** (2005), no. 2, 135–145.

[Rau06] ———, *The Hijazi inequality on manifolds with boundary*, à paraître dans Journal of Geometry and Physics (2006).

[Rei77] R. C. Reilly, *Application of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 459–472.

[Sch32] E. Schrödinger, *Diracsches Elektron im Schwerefeld I*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl (1932), 105–128.

[Sch84] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Diff. Geom. **20** (1984), 473–495.

[Sch95] G. Schwartz, *Hodge Decomposition-A method for solving boundary value problems*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1995.

[See68] R. Seeley, *Singular integrals and boundary problems*, Amer. J. Math. **88** (1968), 781–809.

[SY79a] R. Schoen and S.T. Yau, *On the proof of the positive-action conjecture in quantum relativity*, Physical Review Letters **42** (1979), 547–548.

[SY79b] ———, *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, Comm. Math. Phys. **65** (1979), 45–79.

[Tay96] M. Taylor, *Partial differentiel equations, Vol. 1 : Basic theory*, Springer, 1996.

[Tra95] A. Trautman, *The Dirac operator on hypersurfaces*, Acta Phys. Polon. **6** (1995), 1283–1310.

[Tru68] N.S. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser. **22** (1968), 265–274.

[Wit81] E. Witten, *A new proof of the positive energy theorem*, Comm. Math. Phys. **80** (1981), 381–402.

[Yam60] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. (1960), 21–37.

La principale motivation des travaux de cette thèse est d'étudier l'aspect conforme du spectre de l'opérateur de Dirac sur une variété à bord. Dans un premier temps, on donnera des estimations de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac fondamental de M sous deux conditions à bord locales prenant en compte leurs propriétés conformes. Une étude détaillée de ces conditions à bord permet alors de clore cette première partie par une estimation classique du spectre de l'opérateur de Dirac, raffinant un résultat antérieur de O. Hijazi, S. Montiel et A. Roldán. Dans un second temps, on construit un invariant spinoriel conforme à partir de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac sous l'une des conditions à bord étudiées dans le premier chapitre. Cet invariant peut être vu comme l'analogue de l'invariant de Yamabe dans le cadre spinoriel. Une étude approfondie de cet invariant conduit de manière naturelle à la construction de la fonction de Green de l'opérateur de Dirac.

Conformal aspect of the Dirac operator on manifolds with boundary :

In this thesis, we study the conformal aspect of the spectrum of the Dirac operator on manifolds with boundary. First, we prove some lower bounds for the first eigenvalue of the Dirac operator under two local boundary conditions using the conformal covariance of these operators. A carefully treatment of these boundary conditions leads to a classical estimation of the eigenvalues of the Dirac operator under one of the preceding boundary conditions which improves a previous result of O. Hijazi, S. Montiel and A. Roldán. In a second time, we construct a spinorial conformal invariant defined from the first eigenvalue of the Dirac operator under the generalized chiral bag boundary condition. This invariant can be seen as an analogous of the Yamabe invariant in the setting of spin geometry. A detailed study of this invariant leads to the construction of the Green function for the Dirac operator.

Discipline : Mathématiques

Mots clés : géométrie spinorielle, variétés à bord, opérateur de Dirac, conditions à bord locales, valeurs propres, invariant de Yamabe, fonction de Green

Institut Élie Cartan Nancy
Laboratoire de Mathématiques
B.P. 239 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex