



HAL
open science

Résolution de l'équation du transport par une méthode d'éléments finis mixtes-hybrides et approximation par la diffusion de problèmes de transport

Julien Cartier

► To cite this version:

Julien Cartier. Résolution de l'équation du transport par une méthode d'éléments finis mixtes-hybrides et approximation par la diffusion de problèmes de transport. Mathématiques [math]. Université d'Orléans, 2006. Français. NNT : . tel-00092407

HAL Id: tel-00092407

<https://theses.hal.science/tel-00092407>

Submitted on 9 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE
PRÉSENTÉE À L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

par

Julien CARTIER

Discipline : **Mathématiques**

**Résolution de l'équation du transport par
une méthode d'éléments finis mixtes-hybrides
et approximation par la diffusion de
problèmes de transport**

Soutenue le : **25 avril 2006**

MEMBRES DU JURY :

-Jean-François CLOUËT		Ingénieur Chercheur, <i>CEA Bruyères le Châtel</i>
-Stéphane CORDIER	Directeur de thèse	Professeur, <i>Université d'Orléans</i>
-Laurent DESVILLETES	Rapporteur	Professeur, <i>ENS Cachan</i>
-Thierry GOUDON	Rapporteur	Professeur, <i>Université de Lille 1</i>
-Jean-Jacques LAUTARD		Ingénieur Chercheur, <i>CEA Saclay</i>
-Dominique LÉPINGLE	Président du Jury	Professeur, <i>Université d'Orléans</i>

Résolution de l'équation du transport par une méthode d'éléments finis mixtes-hybrides et approximation par la diffusion de problèmes de transport.

Cette thèse est consacrée à l'analyse mathématique, la résolution numérique et la modélisation des équations de transport. Dans un premier temps, on s'intéresse à l'approximation numérique de la solution des équations de transport par un schéma mixte-hybride. On introduit et étudie une formulation mixte de l'équation du transport. L'étude du problème variationnel mixte est menée avant d'en présenter sa discrétisation et les propriétés fondamentales du schéma obtenu. On s'attache en particulier à démontrer l'efficacité de la méthode dans la limite de diffusion (lorsque le libre parcours moyen des particules est petit devant les dimensions caractéristiques du domaine physique). On présente des cas tests académiques permettant de comparer notre schéma à d'autres méthodes dans des configurations physiques variées et de valider notre schéma sur des cas tests analytiques. On s'applique à valider le schéma sur des maillages non structurés même très déformés tels que ceux issus de l'hydrodynamique lagrangienne. Une seconde partie de la thèse consiste à étudier deux problèmes de transport. Le premier problème est une étude de la diffusion due aux conditions aux limites dans un problème de transport entre deux plaques planes. L'autre problème consiste à modéliser et simuler les phénomènes de transfert radiatif dans le cadre industriel de la fusion par confinement inertiel.

Mixed-hybrid finite element method for the transport equation and diffusion approximation of transport problems.

This thesis focuses on mathematical analysis, numerical resolution and modelling of the transport equations. First of all, we deal with numerical approximation of the solution of the transport equations by using a mixed-hybrid scheme. We derive and study a mixed formulation of the transport equation, then we analyse the related variational problem and present the discretization and the main properties of the scheme. We particularly pay attention to the behavior of the scheme and we show its efficiency in the diffusion limit (when the mean free path is small in comparison with the characteristic length of the physical domain). We present academical benchmarks in order to compare our scheme with other methods in many physical configurations and validate our method on analytical test cases. Unstructured and very distorted meshes are used to validate our scheme. The second part of this thesis deals with two transport problems. The first one is devoted to the study of diffusion due to boundary conditions in a transport problem between two plane plates. The second one consists in modelling and simulating radiative transfer phenomenon in case of industrial context of inertial confinement fusion.

DISCIPLINE : Mathématiques

MOTS CLÉS : équation de transport, éléments finis, mixtes-hybrides, limite diffusion, transfert radiatif, approximation par la diffusion, neutronique.

Laboratoire MAPMO - Université d'Orléans - B.P. 6759
45067 Orléans Cedex 2, France

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

En premier lieu, je voudrais remercier Stéphane Cordier pour avoir accepté de diriger ma thèse, pour ses conseils avisés sur la façon de mener mon travail doctoral, pour son soutien dans les périodes difficiles et pour son optimisme et son enthousiasme constants. Travailler sous sa direction aura été une grande satisfaction.

Je voudrais aussi remercier Gérald Samba et Jean-François Clouët. Depuis le stage de DEA jusqu'à la rédaction de ce manuscrit, leur encadrement au sein du Commissariat à l'Énergie Atomique a participé de mon enrichissement personnel et scientifique. Je les remercie pour leur disponibilité, la confiance qu'ils ont placée en moi, leur patience et leurs compétences pédagogiques. Je leur suis gré de m'avoir fait partager au cours de ces quatre années leur grande sympathie et leurs très hautes connaissances scientifiques.

J'exprime également toute ma gratitude à Laurent Desvillettes et Thierry Goudon pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse et pour le temps qu'ils ont consacré à l'évaluation de mes travaux. Je remercie aussi Jean-Jacques Lautard et Dominique Lépingle pour l'intérêt porté à mon travail doctoral en acceptant de participer à mon jury de thèse.

J'adresse aussi des remerciements particuliers à Alexandre (où Auguste, je ne sais plus bien...) Munnier ne serait-ce que pour les heures passées à acquérir nos galons d'experts en calcul d'angles solides (!) au CEMRACS 2003 à Luminy.

Je voudrais remercier Vincent Siess pour s'être intéressé à mes travaux et pour ses commentaires sur ce manuscrit.

J'adresse mes remerciements à tous les membres du MAPMO, thésards ou permanents, pour leur accueil toujours sympathique au cours de ces dernières années lors de mes passages éclairs sur Orléans.

Je remercie Guillaume Bal et Brigitte Lucquin pour leur relecture d'une partie de mes travaux, leurs commentaires et recommandations judicieuses.

Je voudrais remercier l'ensemble de ceux qui ont partagé mon quotidien de thésard au CEA, à Chevaleret où à Orléans. Dans l'ordre d'apparition, je remercie Constant le châtelain, Paul-Edouard Pollux, Benjamin Le Creurer, Céline Baranger, Seb d'Osaka, Sylvain Desroziers, Stéphane Delpino, Philippe Hoch, Gwen (grand merci pour les squats à Orléans!), Lisl Puzzle Sudoku, Julien (docteur ès NBA), H. Ball, Sosso, N2R1 (Patin quoi!), Christophe Audouze!, Pascal Havé, MA, Virginie, Olivier Soulard et les secrétaires (Maryline, Michèle et Mme Thomas). Un petit coucou aux stagiaires qui sont passés au CEA, je pense à Nico l'auvergnat, Valérie, Manue, Pierre, Seb, Astrid avec une mention particulière vers MC (pour Ma Coloc) qui a supporté courageusement mon mauvais caractère au cours de ces derniers mois de thèse. Merci aussi à Alexandra Franchitti, Martin Campos Pinto, Laurent Boudin et Frédéric Lagoutière pour leur accueil toujours chaleureux au Laboratoire Jacques Louis-Lions à Chevaleret.

Je remercie aussi tous les membres du labo LCDT au CESTA qui m'ont formidablement accueilli ces derniers mois et pour leur aide précieuse pour reprographier ce mémoire.

Mes remerciements vont enfin vers ma famille (mes nièces, Maëlys et Nina fêtent leurs trois ans, l'âge de cette thèse!) et mes amis, notamment mes compagnons de DEA, Kikito, Pierre et Seb dont le soutien au cours de ces dernières années aura été plus que précieux.

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1	
L'équation du transport	7
1.1 Le problème d'évolution du transport des neutrons	7
1.1.1 L'équation intégró-différentielle du transport des neutrons	7
1.1.2 Adimensionnement	10
1.1.3 Conditions aux limites	11
1.1.4 Théorèmes d'existence et d'unicité	12
1.2 Le problème à source stationnaire	14
1.2.1 Problèmes stationnaires	15
1.2.2 Résolution dans le cas des conditions aux limites homogènes	15
1.2.3 Résolution dans le cas des conditions aux limites non homogènes	16
1.3 Approximation multigroupe	18
1.4 Discrétisation angulaire et problème de la source itérée	20
1.4.1 Discrétisation angulaire	20
1.4.2 Résolution par la méthode de la source itérée	22
1.4.3 Accélération par diffusion synthétique	22
1.5 Forme intégrale de l'équation du transport	23
1.6 Formulation en flux pair	24
1.7 Quelques méthodes classiques de résolution en espace	26
1.7.1 Résolution en espace par le schéma diamant	26
1.7.2 Méthodes d'éléments finis continus et discontinus	27
1.7.3 Méthode de projection sur les harmoniques sphériques et méthode P_N	27
Chapitre 2	
Formulation mixte de l'équation du transport	31
2.1 Cadre fonctionnel général du transport	32
2.2 Formulation du second ordre auto-adjointe du transport	39

2.3	Formulation mixte	40
2.4	Equivalence entre la formulation mixte et le problème modèle	43
2.5	Cadre fonctionnel pour la formulation mixte	44
2.6	Existence et unicité du problème mixte du transport	45
2.7	Cas du vide	46
2.7.1	Formulation du second ordre	47
2.7.2	Formulation mixte	48
2.7.3	Interfaces vide-matière	48

Chapitre 3

Formes variationnelles de l'équation du transport 51

3.1	Formulations variationnelles classiques du transport	51
3.1.1	Formulation variationnelle du flux pair	51
3.1.2	Une formulation variationnelle directe	52
3.2	Formulation variationnelle mixte du transport	53
3.3	Existence et unicité	57
3.4	Convergence des itérations sur le terme source	61

Chapitre 4

Espaces d'approximation et analyse discrète 65

4.1	Approximation du problème	66
4.1.1	Discrétisation de l'espace physique	66
4.1.2	L'espace d'approximation du flux angulaire sur une maille donnée Q_k	66
4.1.3	L'espace de Raviart-Thomas d'ordre 0 sur un exemple simple	66
4.1.4	L'espace d'approximation de $Y(\mathcal{D})$	67
4.2	Formulation mixte discrète	69
4.3	Formulation mixte-hybride discrète	70
4.4	Estimations d'erreur	72

Chapitre 5

Discrétisation 75

5.1	Discrétisation angulaire aux ordonnées discrètes	75
5.2	Approximation d'un vecteur à partir de ses flux dans le cas des quadrilatères	79
5.3	Formulation variationnelle mixte-hybride discrète pour le transport	82
5.4	Discrétisation	82
5.4.1	Discrétisation de l'équation de bilan	83
5.4.2	Discrétisation de l'équation de la densité de courant angulaire	83

5.4.3	Continuité de la densité de courant angulaire	84
5.5	Étude du système linéaire	84
5.6	Résolution matricielle	90
5.6.1	Assemblage de la matrice globale	90
5.6.2	Résolution du système linéaire	91
5.6.3	A propos de M_h^λ	94

Chapitre 6

Approximation par la diffusion

97

6.1	Approximations physiques	98
6.1.1	Etablissement d'une équation de diffusion	98
6.1.2	Approximation P1	99
6.1.3	Conditions aux limites	100
6.2	Résultats d'approximation	100
6.2.1	Changement d'échelle et régime de diffusion	100
6.2.2	Notion de limite de diffusion	100
6.2.3	Théorèmes d'approximation par la diffusion	101
6.3	Généralisation de l'approximation par la diffusion pour la formulation mixte . . .	102
6.4	Analyse asymptotique discrète du schéma 1D	105
6.4.1	Equation du transport 1D en régime de diffusion	105
6.4.2	Éléments finis mixtes-hybrides pour le transport en 1D	106
6.4.3	Analyse de la limite diffusion discrète	108
6.4.4	Analyse limite diffusion sur la frontière	110
6.4.5	Analyse d'un problème hétérogène	111
6.5	Analyse asymptotique discrète en dimension $d > 1$	113
6.5.1	Propriétés des matrices élémentaires	114
6.5.2	Limite diffusion du schéma mixte-hybride	116
6.6	Accélération par diffusion synthétique pour la formulation mixte	119
6.6.1	Principe général de la DSA	119
6.6.2	Algorithme de la DSA	120
6.6.3	Remarques sur la discrétisation des opérateurs de transport et de diffusion dans la DSA	121

Chapitre 7

Résultats numériques

123

7.1	Problèmes en une dimension d'espace	123
7.1.1	Résultats dans un milieu purement absorbant	124

7.1.2	Résultats dans le vide : résultats aux interfaces	124
7.1.3	Résultats en milieux diffusifs, ε -problème	126
7.1.4	Problèmes pour des milieux hétérogènes	129
7.1.5	Cas d'un problème à incidence normale	132
7.1.6	Cas d'un problème à incidence rasante	133
7.2	Problèmes en deux dimensions d'espace	134
7.2.1	Problèmes pour une direction angulaire	134
7.2.2	Cas d'une source anisotrope : comparaison avec une solution exacte	140
7.2.3	ε -problème bidimensionnel et conditions de réflexion spéculaire	141

Chapitre 8	
Étude du transport entre deux plaques infinies	145

8.1	Présentation du problème	146
8.2	Asymptotique formelle	148
8.3	Étude probabiliste d'un problème de transport	152
8.3.1	Étude du processus de Markov	152
8.3.2	Preuve du lemme 8.2.1	153
8.4	Asymptotique formelle pour le modèle aux moments P1	157
8.5	Calcul du coefficient de diffusion	160
8.5.1	Expression probabiliste du coefficient de diffusion	160
8.5.2	Cas de la diffusion anormale	162
8.5.3	Cas où $\sigma_t h \gg 1$	164
8.5.4	Simulations Monte-Carlo du coefficient de diffusion	164
8.6	Résultats numériques	167

Chapitre 9	
Approximation du transport par la diffusion dans une cavité laser	171

9.1	Introduction aux phénomènes de transfert radiatif dans une cavité laser	172
9.2	Modèles disponibles	174
9.2.1	Diffusion standard	175
9.2.2	Diffusion Monte Carlo	175
9.2.3	Diffusion à flux limité	176
9.3	Calcul d'un tenseur d'Eddington géométrique ad hoc	177
9.3.1	Calcul d'un facteur d'Eddington dans le cas d'une sphère opaque centrée .	177
9.3.2	Calcul du tenseur d'Eddington	179
9.4	Calcul d'un facteur d'Eddington scalaire et d'un limiteur de flux associé	184
9.4.1	Calcul d'un facteur d'Eddington scalaire γ	184

9.4.2	Calcul d'un limiteur de flux λ	185
9.4.3	Propriétés de γ et λ	186
9.5	Schémas numériques	187
9.6	Résultats Numériques	188
9.6.1	Limiteurs de flux utilisés dans les simulations numériques	188
9.6.2	Résultats obtenus pour le tenseur d'Eddington géométrique	189
9.6.3	Résultats obtenus pour le limiteur de flux géométrique	190
9.6.4	Comparaison des modèles	192

Conclusions et perspectives	195
------------------------------------	------------

Annexe A	
Éléments finis mixtes-hybrides pour un problème elliptique simple	197

Annexe B	
Construction des matrices élémentaires sur maillages cartésiens	201

Annexe C	
Ébauche de décomposition de domaine en 1D	203

Annexe D	
Lien avec les équations elliptiques dégénérées	205

Bibliographie	209
----------------------	------------

Introduction

Les travaux menés au cours de cette thèse ont eu pour principal objet l'approximation et la résolution numérique de problèmes de transport.

Les phénomènes de transport de particules (neutrons, photons, particules supra-thermiques, etc...) interviennent notamment dans les calculs d'exploitation et de contrôle des réacteurs nucléaires ou dans des problèmes issus de l'hydrodynamique radiative. Ces phénomènes de transport sont modélisés par l'équation de transport linéaire intégral-différentielle de Boltzmann (voir G.Bell, S.Glasstone [18], J.Bussac, P.Reuss [28], J.J.Duderstadt, W.R.Martin [45]). Cette équation, posée dans l'espace des phases (position, vitesse et énergie) fournit une excellente approximation du comportement des particules. L'équation de transport traduit un bilan de particules dans un domaine fini dont les caractéristiques déterminent la nature du déplacement des particules. Ainsi, dans un milieu tel que le libre parcours moyen des particules est de l'ordre de la dimension caractéristique du problème à étudier, les particules subissent peu de chocs et la nature des phénomènes physiques mis en jeu sont essentiellement décrits par l'opérateur de transport, on parle alors de milieu transparent. En revanche, lorsque le libre parcours moyen des particules est petit devant les dimensions caractéristiques du problème et si l'absorption des particules est faible (le milieu est dit opaque ou diffusif), les particules subissent de nombreux chocs et les problèmes de transport peuvent être modélisés à une échelle macroscopique par un processus de diffusion (voir E.W.Larsen, J.B.Keller [53]). L'une des difficultés de l'approximation numérique de problèmes de transport réside dans la construction de méthodes numériques qui soient performantes à la fois dans des milieux opaques et dans des milieux transparents. La résolution numérique de cette équation pose aussi de réelles difficultés en raison notamment de la dimension élevée du problème à étudier. En effet, dans le cas de l'équation de transport, il convient de décrire l'évolution d'une population de particules se déplaçant à l'intérieur d'un domaine physique donné dans une direction donnée et pour une énergie donnée.

Les méthodes de résolution numérique des phénomènes de transport se divisent en deux grandes classes, d'une part les méthodes probabilistes de Monte-Carlo et d'autre part les méthodes déterministes. Historiquement, les méthodes probabilistes de Monte-Carlo (sur le sujet, on citera par exemple E.Pardoux, R.Sentis [52]) ont été privilégiées car elles sont peu sensibles au nombre de dimension du problème et nécessitent une capacité mémoire limitée des ordinateurs. Cependant, ces méthodes sont très coûteuses dès que le milieu physique devient collisionnel, sont bruitées par nature et ne permettent pas d'obtenir d'informations locales sur la répartition des particules. Les méthodes déterministes sont basées sur une discrétisation (ou un maillage) de l'espace des phases. Les méthodes déterministes résolvant directement la forme du premier ordre de l'équation du transport utilisent en grande majorité la méthode des ordonnées discrètes [29, 30] utilisant des formules de quadrature pour calculer les intégrales en la variable angulaire (directions de la vitesse des particules). Il est aussi possible d'utiliser la méthode de projection

sur les harmoniques sphériques en effectuant un développement en polynômes en la variable angulaire (méthodes P_N ou SP_N [72, 73]) permettant de résoudre des équations elliptiques. Nous nous intéressons ici à la méthode des ordonnées discrètes qui est plus répandue, notamment dans l'industrie. Pour la discrétisation en espace des équations de transport, il existe plusieurs approches. Les approches types différences finies permettant de relier les valeurs aux centres des mailles aux valeurs aux interfaces en utilisant des interpolations sont très performantes sur des maillages cartésiens. Cependant, il est important de prendre en compte le cas de maillages irréguliers tels que ceux issus de l'hydrodynamique lagrangienne. Les méthodes de différences finies sont inefficaces sur des maillages présentant de fortes irrégularité. Les schémas d'éléments finis sont privilégiés sur de tels maillages. La méthode d'éléments finis discontinus [59, 42, 75] est la plus utilisée mais se heurte à un problème d'ordonnancement et le système linéaire résultant est difficile à inverser. En général, les méthodes déterministes résolvant directement l'équation du transport sont défaillantes dès que le nombre de dimensions du problème augmente, que le maillage de l'espace physique est déformé ou que le problème considéré est très collisionnel. Dans le cas où l'espace physique est très collisionnel, il existe une technique très efficace d'accélération de la convergence des méthodes déterministes pour le transport, l'accélération par diffusion synthétique (voir R.E.Alcouffe [7]). Cependant, cette technique ne peut être appliquée que lorsque la méthode utilisée pour la résolution du problème de transport possède la limite de diffusion discrète, c'est à dire que la limite du schéma de transport lorsque l'opacité tend vers l'infini soit une discrétisation consistante de l'équation de diffusion associée. D'autres techniques déterministes consistent à utiliser des modèles de fermeture non linéaire des équations de moments via un tenseur d'Eddington adapté [20] ou des modèles de diffusion à flux limité [61, 63] ou d'utiliser l'approximation par la diffusion des problèmes de transport pour résoudre une équation elliptique de diffusion dans des milieux appropriés. Ces techniques permettent de s'affranchir de la variable angulaire. Les objectifs de cette thèse sont les suivants :

- construire une méthode déterministe de résolution de l'équation du transport valide pour toute dimension de l'espace des phases, efficace sur des maillages non structurés même très déformés, performante dans des milieux opaques et permettant l'application de la méthode d'accélération par diffusion synthétique,
- dans le cadre des phénomènes de transfert radiatif intervenant dans les problèmes de fusion par confinement inertiel (F.C.I.) dans une cavité laser : étudier l'approximation par la diffusion de l'équation du transport et une fermeture non linéaire des équations de moment adaptées aux caractéristiques géométriques de la cavité laser.

Récemment, J.E.Morel et J.M.McGhee [62] ont étudié une forme du second ordre de l'équation du transport (introduite dans un premier temps par G.C.Pomraning et M.Clark [64, 65] et R.T.Ackroyd [1, 2, 3]) équivalente à la forme du premier ordre et proche des formes standard du second ordre telle que l'équation de diffusion mais ne vérifiant pas la condition d'ellipticité pour une direction de propagation des particules fixée. À l'instar des équations du flux pair [42, ?], cette forme du second-ordre est adaptée à l'usage de l'approximation variationnelle [23] et des techniques d'éléments finis. Par ailleurs, les éléments finis mixtes-hybrides [25, 37, 69] sont très efficaces pour la résolution numérique des problèmes elliptiques du second ordre. Les éléments finis mixtes-hybrides sont particulièrement adaptés à l'usage de maillages non structurés même très déformés et restent efficaces pour des problèmes présentant de fortes hétérogénéités. En particulier, le schéma mixte-hybride fournit une approximation d'ordre deux en espace de la solution d'une équation de type diffusion. La matrice du système linéaire résultant est symétrique définie positive et donc facile à inverser par des algorithmes usuels du type gradient conjugué ou gradient conjugué préconditionné. Enfin, les méthodes mixtes sont particulièrement adaptées à

l'usage du calcul parallèle. Des premiers travaux ont été menés par C.J.Gesh [5, 47] qui introduit une formulation mixte de l'équation du transport et applique la méthode des éléments finis mixtes en utilisant une approximation de Raviart-Thomas [25, 37] classiquement utilisée pour l'approximation des équations elliptiques du second-ordre. Ces travaux donnent une première approche intéressante mais ne permettent pas d'obtenir des résultats satisfaisants sur des maillages très déformés. En effet, l'approximation de Raviart-Thomas ne permet pas de tenir compte de l'aspect directionnel des problèmes de transport.

Notre étude s'articule donc sur l'application de la méthode des éléments finis mixtes-hybrides à l'équation du transport. Il convient dans un premier temps d'étudier les propriétés des formulations mixtes continues et abstraites du transport. Nous étudions le caractère bien posé de telles formulations. Nous montrons que les éléments finis mixtes-hybrides peuvent s'appliquer à l'équation de transport via l'utilisation de fonctions de bases adaptées à la spécificité du transport. Nous exhibons les propriétés fondamentales du schéma ainsi obtenu. Les avantages des éléments finis mixtes-hybrides pour l'équation du transport sont les suivants :

- la discrétisation est efficace et facile à implémenter même sur des maillages non-structurés en 2-D et 3-D,
- le système algébrique résultant de la discrétisation mixtes-hybrides pour l'équation du transport peut s'inverser à l'aide d'un algorithme du gradient conjugué,
- le schéma se réduit à la discrétisation mixtes-hybrides d'une équation de diffusion dans un régime collisionnel.

Cependant, certains inconvénients existent :

- sur des maillages non structurés, les matrices élémentaires doivent être évaluées en utilisant des formules de quadrature,
- sur des maillages non structurés, les valeurs propres et vecteurs propres de certaines matrices élémentaires doivent être calculés numériquement (sur des maillages cartésiens, ces quantités peuvent être calculées analytiquement),
- la méthode des ordonnées discrètes est utilisée et on constate des effets de raie,
- la méthode ne peut s'appliquer directement dans le cas du vide.

Dans la suite de ce manuscrit, nous nous attachons à valider notre méthode sur des cas tests numériques académiques simples. Nous utilisons ces cas test pour mettre en évidence les propriétés fondamentales du schéma.

Dans la dernière partie de ce manuscrit, nous nous intéressons à un problème bien connu (voir F.Golse [48], G.Bal[13], H.Babovsky[12]) de transport entre deux plaques infinies, on démontre un résultat d'approximation par la diffusion pour ce problème en utilisant quelques arguments probabilistes basés sur des résultats de A.Bensoussan, J.L.Lions, G.Papanicolaou [19]. Nous illustrons ces résultats théoriques par des tests numériques utilisant la méthode mixtes-hybrides pour l'équation du transport et des simulations Monte-Carlo. Enfin, nous proposons et testons différentes techniques de fermeture non-linéaire géométrique de modèles aux moments appliquées à un problème de transfert radiatif dans le cadre de la fusion par confinement inertiel.

Présentation de la thèse

Nous présentons ici le plan de la thèse, nous donnons les éléments principaux des chapitres composant ce manuscrit. Notre étude s'articule donc comme suit.

Chapitre 1

Le chapitre 1 est consacré à la présentation de la théorie du transport des particules. Nous introduisons l'équation intégro-différentielle de Boltzmann et nous rappelons les résultats principaux d'existence de solutions de l'équation du transport instationnaire et stationnaire [42, 13]. Nous introduisons le cadre mathématique (notamment le cadre fonctionnel) nécessaire à l'analyse des équations du transport. Nous présentons quelques formes particulières de l'équation de transport et quelques méthodes classiques de résolution numérique de ces équations.

Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler le cadre fonctionnel [23] nécessaire à l'étude variationnelle de problème de transport. Nous proposons la preuve de quelques estimations importantes sur la solution de l'équation du transport et nous présentons la forme du second ordre auto-adjointe de l'équation du transport [62]. Nous introduisons ensuite une formulation mixte de l'équation du transport et un cadre fonctionnel adapté. Nous en étudions quelques propriétés mathématiques fondamentales de cette formulation mixte.

Chapitre 3

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques formulations variationnelles usuelles de problèmes de transport [13, 23] dans le but de préparer le lecteur à l'étude de la formulation variationnelle mixte du transport. On établit ensuite la formulation abstraite du problème mixte du transport, on montre l'existence et l'unicité de solution à cette formulation variationnelle en utilisant les résultats classiques sur l'approximation variationnelle de problèmes mixtes [25, 69]. Nous présentons un résultat sur la convergence de la méthode de la source itérée appliquée à la formulation mixte abstraite du transport.

Chapitre 4

Nous introduisons dans ce chapitre les espaces d'approximation en espace nécessaires à la mise en oeuvre d'une discrétisation spatiale mixte puis mixte-hybride du problème mixte abstrait du transport. L'établissement des résultats d'existence et à la mise en oeuvre de la discrétisation mixtes-hybrides des équations du transport. Nous établissons les résultats d'existence de solutions du problème mixte abstrait discret du transport en nous appuyant sur les résultats de F. Brezzi, M. Fortin [25]. Nous rappelons quelques estimations d'erreurs connues [25, 69, 21] en géométrie uni-dimensionnelle.

Chapitre 5

Le chapitre 5 a pour but de présenter en détail la mise en oeuvre de la discrétisation angulaire et spatiale des équations du transport. Nous présentons dans un premier temps la technique de discrétisation angulaire aux ordonnées discrètes utilisée [30] puis nous détaillons la discrétisation mixtes-hybrides en espace en utilisant les espaces d'approximation introduits au chapitre 4. Nous étudions ensuite les propriétés du système linéaire résultant et proposons une manière d'inverser ce système.

Chapitre 6

Dans ce chapitre, nous rappelons un résultat mathématique justifiant l'approximation de l'équation de transport par une équation de diffusion en régime collisionnel [53, 42]. Nous généralisons ce résultat classique d'approximation de la diffusion au système mixte du transport. Nous étudions ensuite le comportement du schéma mixte-hybride discret dans des milieux opaques et nous montrons qu'il possède la limite de diffusion [53, 54]. Nous étudions le comportement du schéma sur les bords d'un domaine diffusif et à l'interface entre un milieu transparent (où l'approximation de la diffusion n'est pas valide) et un milieu opaque en une dimension d'espace. Enfin, nous montrons que la technique d'accélération par diffusion synthétique peut être appliquée au schéma mixte-hybride pour le transport en utilisant une discrétisation mixte-hybride de l'équation de diffusion associée.

Chapitre 7

Nous présentons dans ce chapitre quelques résultats numériques permettant d'illustrer les propriétés du schéma aux éléments finis mixtes-hybrides pour le transport. Nous nous intéressons dans un premier temps à des résultats en une dimension d'espace pour des milieux homogènes ou hétérogènes. Nous étudions l'ordre de convergence de la méthode. Nous comparons les estimations d'erreurs obtenues numériquement aux estimations théoriques présentées au chapitre 4. Nous montrons ensuite des résultats obtenus en deux dimensions d'espace. Nous nous attachons à illustrer les propriétés asymptotiques du schéma présentées au chapitre 6 et nous comparons les résultats obtenus avec notre schéma mixte-hybride aux résultats obtenus avec quelques schémas de transport usuels. Nous utilisons enfin des maillages très déformés pour apprécier la qualité de l'approximation obtenue sur de tels maillages. Nous illustrons aussi l'amélioration de la convergence du système itératif de la source itérée utilisant un algorithme d'accélération par diffusion synthétique.

Chapitre 8

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un problème de transport entre deux plaques planes parallèles infinies. Nous nous appliquons à retrouver quelques résultats bien connus [13, 43, 44, 12, 22] sur l'approximation de diffusion d'un tel problème de transport et nous illustrons ces résultats théoriques par des tests numériques. Nous utilisons des arguments probabilistes pour réaliser notre étude théorique. Le but de ce chapitre est d'étudier le comportement asymptotique du problème de transport et d'évolution d'une densité de particules dans un milieu confiné entre deux plaques planes parallèles. Nous cherchons à montrer que lorsque la distance entre ces deux plaques tend vers zéro, nous obtenons un régime diffusif. Le coefficient de diffusion dépend à la fois du noyau de collision du milieu et de la loi de réflexion sur les parois. Nous étudions dans un premier temps ce comportement asymptotique pour le problème général du transport en utilisant un développement asymptotique [19] puis pour le modèle aux moments P1. Nous utilisons des simulations Monte-Carlo pour calculer des coefficients de diffusion et illustrer les résultats théoriques précédents à l'aide d'un cas test numérique.

Chapitre 9

Dans ce chapitre, nous considérons un problème de transfert radiatif dans une cavité laser décrit par une équation de transport des photons. On s'appuie sur un modèle proposé par M.Rampp, H.T.Janka [68] pour mettre en évidence de nouvelles relations de fermeture dans

l'approximation par la diffusion d'un problème de transfert radiatif. Ce chapitre a fait l'objet de travaux en collaboration avec J.F.Clouët, S.Cordier, A.Munnier et G.Samba, à l'occasion de l'édition 2003 du CEMRACS (Centre d'Été de Mathématiques et Recherche Avancées en Calcul Scientifique). Ces travaux ont fait l'objet d'un proceeding en collaboration avec A.Munnier [33].

Annexes

Dans l'annexe A, nous présentons la méthode des éléments finis mixtes-hybrides appliquée à l'équation de diffusion des neutrons. Dans l'annexe B, nous détaillons la structure des matrices intervenant dans la discrétisation mixte-hybride de l'équation du transport sur un maillage cartésien. En annexe C, nous proposons un algorithme de décomposition de domaine adapté aux méthodes mixtes pour le transport en géométrie uni-dimensionnelle. Enfin, en annexe D, nous évoquons et illustrons numériquement un lien existant entre les équations elliptiques dégénérées dans leur forme la plus simple et les équations de transport en nous basant sur les travaux de A.M.Oberman [66].

Chapitre 1

L'équation du transport

Sommaire

1.1	Le problème d'évolution du transport des neutrons	7
1.1.1	L'équation intégro-différentielle du transport des neutrons	7
1.1.2	Adimensionnement	10
1.1.3	Conditions aux limites	11
1.1.4	Théorèmes d'existence et d'unicité	12
1.2	Le problème à source stationnaire	14
1.2.1	Problèmes stationnaires	15
1.2.2	Résolution dans le cas des conditions aux limites homogènes	15
1.2.3	Résolution dans le cas des conditions aux limites non homogènes	16
1.3	Approximation multigroupe	18
1.4	Discrétisation angulaire et problème de la source itérée	20
1.4.1	Discrétisation angulaire	20
1.4.2	Résolution par la méthode de la source itérée	22
1.4.3	Accélération par diffusion synthétique	22
1.5	Forme intégrale de l'équation du transport	23
1.6	Formulation en flux pair	24
1.7	Quelques méthodes classiques de résolution en espace	26
1.7.1	Résolution en espace par le schéma diamant	26
1.7.2	Méthodes d'éléments finis continus et discontinus	27
1.7.3	Méthode de projection sur les harmoniques sphériques et méthode P_N	27

Dans ce chapitre, nous allons présenter de manière générale l'équation du transport des neutrons. Nous introduirons les définitions et notations spécifiques à ce contexte et nous donnerons les théorèmes généraux d'existence et d'unicité de solution au problème du transport. Nous rappellerons brièvement les méthodes classiques de résolution de ces équations.

1.1 Le problème d'évolution du transport des neutrons

1.1.1 L'équation intégro-différentielle du transport des neutrons

(Sources : G.Bal [13] ; J.Bussac, P.Reuss [28] ; R.Dautray, J.L.Lions [42] ; J.J.Duderstadt, W.R.Martin [45])

L'équation intégro-différentielle du transport décrit l'évolution d'une population de certaines particules (neutrons, photons, particules supra-thermiques, ...) dans un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^d ($d = 1, 2$ ou 3) occupé par un milieu en interaction avec les neutrons. La plupart du temps, on considérera le cas où $d = 3$. Le domaine \mathcal{D} est un ouvert convexe de \mathbb{R}^3 (que l'on munira de la mesure de Lebesgue dx), de frontière $\partial\mathcal{D} = \bar{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$ continûment différentiable. On notera \mathcal{S}^2 la sphère unité de \mathbb{R}^3 . On choisit ν une mesure de Radon positive sur \mathcal{S}^2 avec $\nu(\{0\}) = 0$ et on note $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}^2$ le support de ν dans \mathcal{S}^2 qui sera l'espace des vitesses. L'espace physique \mathcal{D} est en général un coeur de réacteur composé de différents constituants que l'on suppose connus.

Les neutrons sont repérés dans l'espace des phases $X_E = \mathcal{D} \times \mathcal{S}^2 \times [\alpha, \beta]$ par

- leur position x dans $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$;
- la direction $\vec{\Omega}$ appartenant à \mathcal{S}^2 (la sphère unité de \mathbb{R}^3) de leur vitesse \vec{v} ;
- leur énergie cinétique $E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$ (m est la masse de la particule et $\vec{v} = \sqrt{\frac{2E}{m}}\vec{\Omega}$) appartenant à $F = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+^*$, sous-ensemble fermé de \mathbb{R}_+^* des énergies possibles, que nous supposons compact.

La population de neutrons est décrite par sa densité neutronique notée $n(x, \vec{\Omega}, E, t)$ de sorte que la quantité $n(x, \vec{\Omega}, E, t) dx d\nu(\vec{\Omega}) dE$ représente le nombre de neutrons au temps t à l'intérieur du volume élémentaire dx autour du point x , possédant une énergie comprise entre E et $E + dE$ et se déplaçant dans la direction $\vec{\Omega}$ à l'intérieur de l'élément d'angle solide $d\nu(\vec{\Omega})$. Le problème du transport neutronique permet de caractériser la distribution des neutrons présents dans \mathcal{D} . Considérons un neutron pris individuellement ; avec une vitesse initiale donnée, celui-ci se déplace en ligne droite suivant la direction portée par $\vec{\Omega}$ jusqu'à ce qu'il entre en interaction avec certains constituants du milieu. Dans notre cas, ce sont les noyaux atomiques des constituants du milieu qui vont interagir avec ce neutron. En effet, lorsque le neutron s'approche suffisamment près d'un noyau atomique, deux types d'interactions entrent en jeu. Soit le neutron est entièrement absorbé, soit il est dévié de sa trajectoire avec éventuellement perte d'énergie (collision non élastique). On peut ainsi caractériser les interactions des neutrons avec le milieu qui l'entoure. Il est donc nécessaire de connaître les fonctions modélisant leur absorption, leur diffusion et leur fission.

On définit :

- $\Sigma_t(x, E)$: la section efficace totale qui prend en compte toutes les interactions des neutrons d'énergie E en x ,
- $\Sigma_s(x, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E)$: la section efficace de diffusion (ou scattering) qui prend en compte les neutrons d'énergie E' et de direction $\vec{\Omega}'$, qui par collision en x , prennent l'énergie E et la direction $\vec{\Omega}$,
- $\Sigma_f(x, E')$: la section efficace de fission qui prend en compte les neutrons d'énergie E' qui induisent la fission en x ,
- $\chi(x, E')$: le nombre moyen de neutrons émis lors d'une fission en x induite par un neutron d'énergie cinétique E' ,
- $\kappa(E)$: le spectre des neutrons émis par une fission, normalisé par $\int \kappa(E) dE = 1$.

Par ailleurs, il existe une source de neutrons décrite par une fonction scalaire donnée et notée $S(x, \vec{\Omega}, E, t)$.

Les grandeurs physiques intéressantes sont les taux de réaction définis pour chaque section efficace Σ par :

$$\tau_\Sigma(x, \vec{\Omega}, E) = \Sigma(x, \vec{\Omega}, E) |\vec{v}| n(x, \vec{\Omega}, E, t). \quad (1.1)$$

C'est pourquoi on cherche en général à calculer la fonction scalaire $\Psi(x, \vec{\Omega}, E, t)$ qui représente la densité de flux angulaire ou flux angulaire du nombre de neutrons en $(x, \vec{\Omega}, E)$ à l'instant t et

donnée par :

$$\Psi(x, \vec{\Omega}, E, t) = |\vec{v}| n(x, \vec{\Omega}, E, t). \quad (1.2)$$

On définit aussi la densité totale $\mathcal{N}(x, E, t)$ et le flux scalaire total $\Phi(x, E, t)$ de neutrons d'énergie E en un point x à l'instant t par les formules suivantes :

$$\mathcal{N}(x, E, t) = \int_{\mathcal{S}^2} n(x, \vec{\Omega}, E, t) d\nu(\vec{\Omega}), \quad (1.3)$$

$$\Phi(x, E, t) = \int_{\mathcal{S}^2} \Psi(x, \vec{\Omega}, E, t) d\nu(\vec{\Omega}). \quad (1.4)$$

La densité de flux angulaire Ψ vérifie l'équation de transport suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, \vec{\Omega}, E, t) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Psi(x, \vec{\Omega}, E, t) + \Sigma_t(x, E) \Psi(x, \vec{\Omega}, E, t) \\ & - \int_{\alpha}^{\beta} dE' \int_{\mathcal{S}^2} \Sigma_s(x, \vec{\Omega}' \longrightarrow \vec{\Omega}, E' \longrightarrow E) \Psi(x, \vec{\Omega}', E, t) d\nu(\vec{\Omega}') \\ & - \frac{\kappa(E)}{4\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \chi(x, E') \Sigma_f(x, E') dE' \int_{\mathcal{S}^2} \Psi(x, \vec{\Omega}', E, t) d\nu(\vec{\Omega}') = S(x, \vec{\Omega}, E, t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Cette équation intégral-différentielle du transport des neutrons sur le flux angulaire est l'expression mathématique du bilan des pertes et des productions de neutrons dans le domaine \mathcal{D} au cours du temps.

Les différents termes qui composent cette équation s'interprètent de la façon suivante :

- $\frac{1}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, \vec{\Omega}, E, t)$ représente la variation temporelle de la densité neutronique ;
- $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Psi(x, \vec{\Omega}, E, t)$ est le terme de transport des neutrons, intégré sur $\mathcal{D} \times \mathcal{S}^2$, il représente le bilan des pertes (voir paragraphe 1.1.3) ;
- $\Sigma_t(x, E) \Psi(x, \vec{\Omega}, E, t)$ représente les interactions des neutrons avec le milieu (absorption et collisions) ;
- $\int_{\alpha}^{\beta} dE' \int_{\mathcal{S}^2} \Sigma_s(x, \vec{\Omega}' \longrightarrow \vec{\Omega}, E' \longrightarrow E) \Psi(x, \vec{\Omega}', E, t) d\nu(\vec{\Omega}')$ désigne la source de diffusion de toutes les énergies vers E et de toutes les directions vers $\vec{\Omega}$;
- $\frac{\kappa(E)}{4\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \chi(x, E') \Sigma_f(x, E') dE' \int_{\mathcal{S}^2} \Psi(x, \vec{\Omega}', E, t) d\nu(\vec{\Omega}')$ est la source de fission.

Le problème d'évolution du transport ou problème de Cauchy consiste à déterminer $\Psi(x, \vec{\Omega}, E, t)$ satisfaisant (1.5) avec la condition initiale

$$\Psi(x, \vec{\Omega}, E, 0) = \Psi^0(x, \vec{\Omega}, E) \quad (1.6)$$

où $\Psi^0(x, \vec{\Omega}, E)$ représente le flux angulaire au temps $t = 0$, et avec des conditions aux limites sur la frontière $\partial\mathcal{D}$ appropriées que nous expliciterons par la suite.

1.1.2 Adimensionnement

Pour simplifier les écritures et l'analyse théorique du problème du transport, il convient de regrouper les variables de directions et d'énergie sous la notion de vecteur vitesse, défini par

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{2E}{m_0}} \vec{\Omega} \quad (1.7)$$

où m_0 est la masse au repos d'un neutron. Notons que le module $v = |\vec{v}| = \sqrt{\frac{2E}{m_0}}$ de la vitesse des neutrons est proportionnelle à la racine carrée de leur énergie, de sorte que :

$$E = \frac{m_0 v^2}{2}. \quad (1.8)$$

Nous pouvons alors écrire et adimensionner l'équation du transport écrite sous la forme (1.5) en utilisant le jeu de variables (x, \vec{v}, t) où $\vec{v} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{S}^2$ est donc le vecteur vitesse du neutron et on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, \vec{v}, t) = \frac{m_0}{|\vec{v}|} \Psi(x, \vec{\Omega}, E, t) \text{ avec } E = \frac{1}{2} m_0 |\vec{v}|^2, \vec{\Omega} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \\ \sigma_t(x, \vec{v}) = |\vec{v}| \Sigma_t(x, E), \\ f(x, \vec{v}, \vec{v}') = m_0 \frac{|\vec{v}'|}{|\vec{v}|} \left[\Sigma_s(x, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) + \kappa(E) \chi(x, E') \Sigma_f(x, E') \right], \\ q(x, \vec{v}, t) = \frac{m_0}{|\vec{v}|} S(x, \vec{\Omega}, E, t). \end{array} \right. \quad (1.9)$$

On définit $X = \mathcal{D} \times \mathcal{V}$. Compte tenu de (1.5) et du fait que $d\vec{v} = |\vec{v}| d\nu(\vec{\Omega})$, la fonction inconnue $u(x, \vec{v}, t)$ doit vérifier l'équation d'évolution du transport

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(x, \vec{v}, t) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{v}, t) + \sigma_t(x, \vec{v}) u(x, \vec{v}, t) \\ - \int_{\mathcal{V}} f(x, \vec{v}', \vec{v}) u(x, \vec{v}', t) d\vec{v}' = q(x, \vec{v}, t) \\ \text{avec } (x, \vec{v}) \in X \text{ et } t > 0. \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Le problème de Cauchy consiste donc à résoudre (1.10) muni de la condition initiale

$$u(x, \vec{v}, 0) = u^0(x, \vec{v}), \quad (1.11)$$

où $u^0(x, \vec{v})$ est connue et munie de conditions aux limites appropriées.

On introduit la densité de courant angulaire $\vec{g}(x, \vec{\Omega}, E, t)$:

$$\vec{g}(x, \vec{v}, t) = \vec{v} u(x, \vec{v}, t). \quad (1.12)$$

On définit aussi la notion de libre parcours moyen d'une particule (noté lpm) comme la distance moyenne que peut parcourir la particule entre deux chocs ou la distance moyenne de collision.

1.1.3 Conditions aux limites

On suppose que \mathcal{D} est un ouvert de \mathbb{R}^3 . On note $ds(x)$ la mesure de surface de la frontière $\partial\mathcal{D}$ de l'ouvert \mathcal{D} . On suppose que la frontière $\partial\mathcal{D}$ est continûment différentiable avec \mathcal{D} localement d'un seul côté de $\partial\mathcal{D}$. Dans le but de définir des conditions aux limites appropriées au problème (1.10)-(1.11), on introduit les notations suivantes :

$$\Gamma = \partial\mathcal{D} \times \mathcal{V}, \quad (1.13)$$

$$\Gamma^+ = \{(x, \vec{v}) \in \Gamma \text{ et } \vec{v} \cdot \vec{n}(x) > 0\}, \quad (1.14)$$

$$\Gamma^- = \{(x, \vec{v}) \in \Gamma \text{ et } \vec{v} \cdot \vec{n}(x) < 0\}, \quad (1.15)$$

$$\Gamma_0 = \{(x, \vec{v}) \in \Gamma \text{ et } \vec{v} \cdot \vec{n}(x) = 0\}. \quad (1.16)$$

L'ensemble Γ^- (respectivement Γ^+) est l'ensemble des points de l'espace des phases correspondant à des des particules entrantes (respectivement sortantes).

Pour une direction fixée $\vec{\Omega}$ dans \mathcal{S}^2 , on introduit aussi les espaces

$$\partial\mathcal{D}^+ = \{x \in \partial\mathcal{D} \text{ tels que } \vec{v} \cdot \vec{n}(x) > 0\}, \quad (1.17)$$

$$\partial\mathcal{D}^- = \{x \in \partial\mathcal{D} \text{ tels que } \vec{v} \cdot \vec{n}(x) < 0\}, \quad (1.18)$$

où $\vec{n}(x)$ est le vecteur unitaire normal sortant en un point x de la frontière $\partial\mathcal{D}$. On introduit aussi l'espace Γ^* des points de la frontière $\partial\mathcal{D}$ pour lesquels la normale extérieure n'est pas définie, on suppose que les espaces Γ^* et Γ_0 sont de mesure nulle sur Γ pour la mesure $ds d\mathcal{V}$ où ds est la mesure induite sur $\partial\mathcal{D}$ par la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^3 . Nous donnons ci-dessous quelques conditions aux limites usuelles en transport, et qui, associées à (1.10)-(1.11), donnent un problème bien posé.

Conditions aux limites homogènes (ou absorbantes)

On considère ici que le domaine \mathcal{D} est un domaine convexe, et que l'extérieur $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{D}$ est occupé par le vide, le flux entrant de neutrons est alors égal à zéro (i.e. aucun neutron ne rentre dans \mathcal{D}), soit

$$\forall t, u(x, \vec{v}, t) = 0, \text{ pour } (x, \vec{v}) \in \Gamma^-. \quad (1.19)$$

Cette condition aux limites est aussi appelée condition de flux entrant nul ou condition de vide.

Conditions aux limites non-homogènes

Le flux entrant dans \mathcal{D} à partir de la frontière $\partial\mathcal{D}$ est égal à une fonction donnée u_b :

$$\forall t, u(x, \vec{v}, t) = u_b(x, \vec{v}, t), \text{ pour } (x, \vec{v}) \in \Gamma^-. \quad (1.20)$$

Condition de réflexion spéculaire

Toujours pour un domaine \mathcal{D} convexe, le flux entrant est ici égal au flux sortant, i.e.

$$\forall t, u(x, \vec{v}, t) = u(x, \vec{v}', t), \text{ pour } (x, \vec{v}) \in \Gamma^- \text{ et } \vec{v}' = \vec{v} - 2(\vec{n}(x) \cdot \vec{v})\vec{n}(x). \quad (1.21)$$

Ces conditions reviennent à supposer que le milieu $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{D}$ est réfléchissant.

Condition de réflexion diffuse

On impose la condition suivante sur le flux entrant :

$$\forall t, u(x, \vec{v}, t) = \omega \int_{\vec{v}' \cdot \vec{n}(x) > 0} u(x, \vec{v}', t) d\nu(\vec{v}'), \text{ pour } (x, \vec{v}) \in \Gamma^-. \quad (1.22)$$

La quantité ω est un albédo qui mesure le degré de réflexion de sorte que $0 \leq \omega \leq 1$. Le milieu $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{D}$ est donc supposé ici semi-réfléchissant.

Il existe d'autres types de conditions aux limites (condition de translation, de rotation, etc...) mais nous utiliserons principalement les quatre types de conditions présentés ci-dessus dans la suite de cette thèse. Pour les autres types de conditions aux limites, le lecteur peut consulter G.Bell, S.Glasstone [18] ou J.J.Duderstadt, W.R.Martin [45] par exemple.

Remarque 1.1.1

Remarquons qu'en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_X \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u dx d\nu(\vec{v}) = \int_{\Gamma^+} |\vec{v} \cdot \vec{n}| u ds d\nu(\vec{v}) - \int_{\Gamma^-} |\vec{v} \cdot \vec{n}| u ds d\nu(\vec{v}). \quad (1.23)$$

On voit donc apparaître le terme de flux entrant sur Γ^- et le terme de fuite sur Γ^+ .

1.1.4 Théorèmes d'existence et d'unicité

(Sources : G.Bal [13] ; E.Bonneaux [20] ; R.Dautray, J.L.Lions [42])

Nous énonçons ci-après le théorème assurant l'existence et l'unicité de solutions au problème (1.10) associé à l'une des conditions aux limites présentées ci-dessus. Nous renvoyons le lecteur à [42] (chapitre XXI, paragraphe 3.1) pour la démonstration complète.

On s'intéressera ici au problème du transport (1.10) posé dans l'espace des phases $X = \mathcal{D} \times \mathcal{V}$ dans le cas d'une condition aux limites absorbante. Il s'agit donc de trouver une fonction $u = u(x, \vec{v}, t)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u = Ku + q, & \text{dans } X \times]0, \tau[\\ u|_{\Gamma^-} = 0, & t \in]0, \tau[, \\ u(x, \vec{v}, 0) = u^0(x, \vec{v}), & \text{sur } X, \end{cases} \quad (1.24)$$

où u^0 est une fonction donnée, σ_t est une fonction positive donnée de x et \vec{v} et où l'opérateur intégral K est donné par :

$$(Ku)(x, \vec{v}, t) = \int_{\mathcal{V}} f(x, \vec{v}, \vec{v}') u(x, \vec{v}', t) d\nu(\vec{v}'). \quad (1.25)$$

Dans ce qui précède, la fonction f est donnée, positive et mesurable sur \mathcal{S}^2 . Pour résoudre le problème (1.24), il convient d'introduire un cadre fonctionnel adapté. On cherche la solution $u = u(x, \vec{\Omega}, t)$ comme une fonction du temps à valeurs dans l'espace $L^p(X)$, ($p \in [1, +\infty[$ des fonctions f mesurables pour la mesure produit $dx d\nu(\vec{\Omega})$) telles que :

$$\|f\|_{L^p(X)} = \left(\int_X |f(x, \vec{v})|^p dx d\nu(\vec{v}) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \quad (1.26)$$

On introduit aussi l'espace fonctionnel \mathcal{W}_p suivant pour $\tau > 0$ fixé :

$$\mathcal{W}_p = \left\{ u \in L^p(X \times]0, \tau[); \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u \in L^p(X \times]0, \tau[); \right. \\ \left. u(\cdot, 0) \in L^p(X), u|_{\Gamma^- \times (0, \tau)} \in L^p(\Gamma^- \times (0, \tau)) \text{ pour la mesure } |\vec{v} \cdot \vec{n}| ds d\nu(\vec{v}) dt \right\}. \quad (1.27)$$

D'autre part, nous utilisons souvent par la suite l'espace de Banach W^p :

$$W^p = \left\{ u \in L^p(X); \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u \in L^p(X) \right\}, \quad (1.28)$$

pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^p}^2 = \|u\|_{L^p}^2 + \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u\|_{L^p}^2. \quad (1.29)$$

On peut alors résoudre le problème de Cauchy (1.24) en énonçant le théorème d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 1.1.1

On suppose que les données du problème (1.24) vérifient :

- $\sigma_t \in L^\infty(X)$, $\sigma_t \geq 0$ et $f \in L^\infty(X)$,
- K est l'opérateur défini par (1.25) où la donnée f est une fonction positive $d\nu$ mesurable en \vec{v} , \vec{v}' . On suppose d'autre part qu'il existe des constantes M_a et M_b positives telles que

$$\begin{cases} i) & \int_{\mathcal{V}} f(x, \vec{v}', \vec{v}) d\nu(\vec{v}) \leq M_a, \quad \forall (x, \vec{v}') \in X, \\ ii) & \int_{\mathcal{V}} f(x, \vec{v}', \vec{v}) d\nu(\vec{v}') \leq M_b, \quad \forall (x, \vec{v}) \in X. \end{cases} \quad (1.30)$$

- $q \in L^p(X \times [0, \tau])$, $p \in [1, \infty[$,
- $u^0 \in L^p(X)$.

Alors le problème (1.24) admet une unique solution faible u dans l'espace \mathcal{W}_p et on a :

$$u \in C^0([0, \tau]; L^p(X))$$

Si, de plus, u^0 est telle que

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} u^0 \in L^p(X) \quad \text{et} \quad u^0|_{\Gamma^-} = 0,$$

et q telle que

$$q \in C^1([0, \tau]; L^p(X)),$$

alors u est solution forte de (1.24) et vérifie :

$$u \in C^1([0, \tau]; L^p(X)), \quad \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u \in C^0([0, \tau]; L^p(X)), \quad u(t)|_{\Gamma^-} = 0, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Si $q \geq 0$, alors $u^0 \geq 0$ entraîne $u \geq 0$.

DÉMONSTRATION - Le théorème et sa démonstration sont présentés sous une forme plus générale notamment dans [42] au chapitre XXI, paragraphe 2. Nous donnerons ici les 3 grandes étapes de la démonstration, qui s'appuie sur la théorie des semi-groupes.

Étape 1 : On s'intéresse tout d'abord au problème non collisionnel, on définit l'opérateur d'advection A tel que :

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in W^p\} \\ Au(x, \vec{v}) = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{v}) \end{cases} \quad (1.31)$$

On montre alors que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C^0 dans $L^p(\mathbb{R}^N \times \mathcal{S}^{N-1})$, pour $1 \leq p < +\infty$, défini par :

$$(G(t)u)(x, \vec{v}) = u(x - \vec{v}t, \vec{v}), \quad \forall t \in [0, \tau], \quad \forall (x, \vec{v}) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{V} \text{ et } u \in D(A)$$

avec $\|G(t)u\|_{L^p(\mathbb{R}^N \times \mathcal{V})} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N \times \mathcal{V})}$, $\forall u \in L^p(\mathbb{R}^N \times \mathcal{V})$ et $t \in [0, \tau]$, ce qui nous assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème du transport sans terme source sur l'espace entier $\mathcal{D} = \mathbb{R}^N$ avec $\sigma_t = 0$ et $f = 0$. De plus, ce groupe opère sur le cône des fonctions positives de $L^p(\mathbb{R}^N \times \mathcal{V})$.

Étape 2 : Il convient ensuite d'étendre ce résultat à un domaine $X = \mathcal{D} \times \mathcal{V}$ où \mathcal{D} est un ouvert de \mathbb{R}^N . On étudie alors le problème de transport homogène en montrant que l'opérateur A tel que

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in W^p; u = 0 \text{ sur } \Gamma^-\} \\ Au(x, \vec{v}) = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{v}) \end{cases} \quad (1.32)$$

est le générateur d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ de contraction, de classe C^0 , qui opère dans le cône des fonctions positives de $L^p(X)$ pour $1 \leq p < +\infty$. On s'appuie alors sur le fait que les fonctions u de W^p possèdent une trace u_{Γ^-} dans $L^p_{loc}(\Gamma^-)$. On définit ce semi-groupe par la famille d'opérateurs $G(t)$, $t > 0$ donnés par :

$$(G(t)u)(x, \vec{v}) = \begin{cases} u(x - t\vec{v}, \vec{v}) & \text{si } t < t(x, \vec{v}), \\ 0 & \text{si } t \geq t(x, \vec{v}) \end{cases} \quad (1.33)$$

où $t(x, \vec{v}) = \sup\{s; x - s\vec{v} \in \mathcal{D}; 0 \leq s < t\}$.

Étape 3 : On généralise ces résultats en étudiant l'opérateur de transport collisionnel défini par :

$$\begin{cases} D(T) = D(A) = \{u \in W^p; u = 0 \text{ sur } \Gamma^-\} \\ Tu(x, \vec{v}) = Au(x, \vec{v}) - \sigma_t u(x, \vec{v}) + (Ku)(x) \end{cases} \quad (1.34)$$

où K est l'opérateur de scattering défini en (1.25). L'opérateur T est lui aussi générateur d'un semi-groupe qui opère sur le cône des fonctions positives $L^p(X)$.

Notons que pour toutes les étapes présentées dans cette preuve, nous pourrions donner l'expression de chaque solution sous forme intégrale, nous reviendrons sur ce point au cours de ce chapitre. ■

1.2 Le problème à source stationnaire

(Sources : R.Dautray, J.L.Lions [42], chapitre XXI, paragraphe 4)

1.2.1 Problèmes stationnaires

Nous allons présenter dans cette partie la forme stationnaire de l'équation du transport, c'est sous cette forme que nous étudions principalement l'équation du transport dans les chapitres qui suivent. Par solutions stationnaires, on entend solutions des équations du transport (1.5), (1.24) qui ne dépendent pas du temps. Nous considérons donc l'équation (1.24) avec q indépendant de t , et une condition aux limites du type (1.20) où u_b ne dépend plus de t .

Le problème stationnaire du transport s'écrit : trouver $u(x, \vec{v})$ vérifiant (pour q et u_b donnés) :

$$\begin{cases} -Tu(x, \vec{v}) = q(x, \vec{v}) & \text{p.p.}(x, \vec{v}) \in X, \\ u(x, \vec{v}) = u_b(x, \vec{v}) & \text{p.p.}(x, \vec{v}) \in \Gamma^-. \end{cases} \quad (1.35)$$

L'opérateur T est appelé opérateur de transport, il est défini pour tout (x, \vec{v}) dans X par :

$$Tu(x, \vec{v}) = Au(x, \vec{v}) - \sigma_t(x, \vec{v})u(x, \vec{v}) + Ku(x, \vec{v}), \quad (1.36)$$

où A est l'opérateur d'advection défini par (1.31) et K est l'opérateur de collision défini par (1.25).

1.2.2 Résolution dans le cas des conditions aux limites homogènes

On considère donc dans cette section le problème à source stationnaire homogène (avec conditions aux limites absorbantes) qui consiste en la résolution du problème

$$\begin{cases} i) & -Tu(x, \vec{v}) = q(x, \vec{v}) & \text{p.p.}(x, \vec{v}) \in X, \\ ii) & u(x, \vec{v}) = 0 & \text{p.p.}(x, \vec{v}) \in \Gamma^-. \end{cases} \quad (1.37)$$

Nous donnerons ici les théorèmes d'existence et d'unicité énoncés dans [42].

Théorème 1.2.1

On suppose que les données du problème (1.24) vérifient :

- $\sigma_t \in L^\infty(\mathcal{D} \times V)$,
- $f(x, \vec{v}', \vec{v})$ est une fonction réelle positive, mesurable en \vec{v} et \vec{v}' et il existe des constantes M_a et M_b positives telles que

$$\begin{cases} i) & \int_{\mathcal{V}} f(x, \vec{v}', \vec{v}) d\nu(\vec{v}) \leq M_a, \quad \forall (x, \vec{v}') \in X \\ ii) & \int_{\mathcal{V}} f(x, \vec{v}', \vec{v}) d\nu(\vec{v}') \leq M_b, \quad \forall (x, \vec{v}) \in X. \end{cases} \quad (1.38)$$

- $q \in L^p(X)$, $p \in [1, \infty[$,
- σ_t et f vérifient (p.p. $(x, \vec{v}) \in X$)

$$\begin{cases} i) & \sigma_t(x, \vec{v}) - \int_{\mathcal{V}} f(x, \vec{v}', \vec{v}) d\nu(\vec{v}') \geq \alpha \\ ii) & \sigma_t(x, \vec{v}) - \int_{\mathcal{V}} f(x, \vec{v}, \vec{v}') d\nu(\vec{v}') \geq \alpha \end{cases} \quad \alpha > 0, \quad (1.39)$$

Alors, pour $1 \leq p < +\infty$, le problème (1.24) admet une unique solution dans

$$D(A) = \{u \in W^p; u = 0 \text{ sur } \Gamma^-\}.$$

DÉMONSTRATION - Le théorème et sa démonstration sont présentés sous une forme plus générale notamment dans [42] au chapitre XXI, paragraphe 4. ■

Les conditions (1.39) sont communément appelées conditions de sous-criticité. On peut définir la section efficace d'absorption par

$$\sigma_a(x, \vec{v}) = \sigma_t(x, \vec{v}) - \int_{\mathcal{V}} f(x, \vec{v}, \vec{v}') d\nu(\vec{v}'). \quad (1.40)$$

La quantité $\sigma_a(x, \vec{v})$ mesure le taux de particules qui ont interagi dans le milieu mais qui n'ont pas été réémises. Ces particules ont donc été absorbés. Autrement dit, l'hypothèse (1.39) impose ainsi que l'absorption du problème (1.37) est strictement positive. On notera aussi

$$\sigma_s(x, \vec{v}) = \int_{\mathcal{V}} f(x, \vec{v}, \vec{v}') d\nu(\vec{v}'). \quad (1.41)$$

Notons que lorsque la section efficace de scattering ne dépend pas de la direction de la vitesse (par exemple dans le cas d'un milieu isotrope), on écrit :

$$\sigma_s(x) = c(x)\sigma_t(x), \quad (1.42)$$

où $c(x)$ représente le nombre moyen de particules secondaires émises lors d'un choc ayant lieu en x (on l'appelle le "scattering ratio"). La condition (1.39) correspond alors à

$$c(x) < 1.$$

Le problème (1.37) peut aussi être traité dans $L^\infty(X)$, on peut montrer le théorème :

Proposition 1.2.1

On se place dans le cadre des hypothèses du théorème 1.2.1 et on suppose que les données du problème (1.24) vérifient :

- $\sigma_t \geq \sigma_0 > 0$,
- $f(x, \vec{v}', \vec{v})$ et σ_t vérifient pour tout $(x, \vec{v}) \in X$

$$\int_{\mathcal{V}} f(x, \vec{v}', \vec{v}) d\vec{v}' \leq \beta \sigma_t(x, \vec{v}), \quad 0 \leq \beta < 1,$$

- $q \in L^\infty(X)$.

Alors, le problème (1.24) admet une unique solution dans $L^\infty(X)$.

1.2.3 Résolution dans le cas des conditions aux limites non homogènes

Proposition 1.2.2

On se place dans le cadre des hypothèses de la proposition (1.2.1) et on considère le problème :

$$\begin{cases} i) & -Tu(x, \vec{v}) = q(x, \vec{v}) & \text{dans } X, \\ ii) & u = u_b & \text{sur } \Gamma^-. \end{cases} \quad (1.43)$$

où on suppose que

$$u_b \in L^\infty(\Gamma^-).$$

Alors, le problème (1.24) admet une unique solution dans $L^\infty(X)$ qui vérifie :

$$\|u\|_{L^\infty(X)} \leq C (\|q\|_{L^\infty(X)} + \|u_b\|_{L^\infty(\Gamma^-)}),$$

où C est une constante positive.

On peut aussi généraliser ce résultat au cadre $L^p(X)$ en effectuant un relèvement de la condition aux limites $u = u_b$ sur Γ^- et, par linéarité des équations du transport, on se ramène au théorème 1.2.1. Pour cela, nous devons introduire les notions de temps de passage (voir figure 1.2.3) et de temps de sortie. Le temps de passage dans \mathcal{D} d'une particule en $x \in \partial\mathcal{D}$ avec la vitesse $\vec{v} \in \mathcal{V}$ est défini par :

– pour $(x, \vec{v}) \in \Gamma^+$:

$$\begin{aligned} \tau(x, \vec{v}) &= \inf\{t > 0, x - t\vec{v} \notin X\} \\ &= \sup\{s > 0, x - \tau\vec{v} \in X, \forall \tau \in (0, s)\}, \end{aligned} \quad (1.44)$$

– pour $(x, \vec{v}) \in \Gamma^-$:

$$\begin{aligned} \tau(x, \vec{v}) &= \inf\{t > 0, x + t\vec{v} \notin X\} \\ &= \sup\{s > 0, x + \tau\vec{v} \in X, \forall \tau \in (0, s)\}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

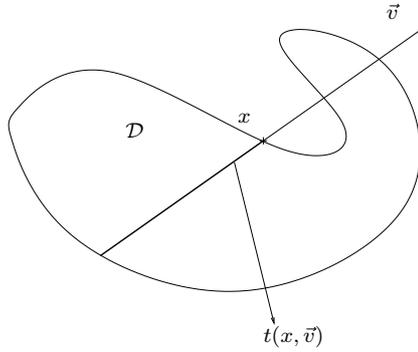


FIG. 1.1 – Temps de passage d'une particule de vitesse \vec{v} dans \mathcal{D} en $x \in \partial\mathcal{D}$.

Pour une constante positive C , on notera

$$\tau_C(x, \vec{v}) = \min(\tau(x, \vec{v}), C).$$

Pour $1 \leq p < \infty$, on définit une mesure $d\xi$ sur Γ^\pm par

$$d\xi = |\vec{v} \cdot \vec{n}| \tau_C(x, \vec{v}) ds d\nu(\vec{v}). \quad (1.46)$$

On peut alors écrire le résultat de trace suivant

Lemme 1.2.1

Les applications traces $\chi_\pm : u \rightarrow u|_{\Gamma^\pm}$ sont continues, surjectives, avec relèvement continu de $W^p(X)$ dans $L^p(\Gamma^\pm, d\xi)$.

qui nous permet d'énoncer la proposition suivante

Proposition 1.2.3

On se place dans le cadre des hypothèses de la proposition (1.2.1) où on suppose que

$$u_b \in L^p(\Gamma^-, d\xi).$$

Alors, le problème (1.24) admet une unique solution dans $L^p(X)$ qui vérifie :

$$\|u\|_{L^p(X)} \leq C (\|q\|_{L^p(X)} + \|u_b\|_{L^p(\Gamma^-)}),$$

où C est une constante positive.

Remarque 1.2.1

Dans le cadre L^2 , on peut écrire l'estimation suivante

$$\|u\|_{W^2(X)} \leq C (\|q\|_{L^2(X)} + \|u_b\|_{L^2(\Gamma^-)}),$$

où C est une constante positive. Nous reviendrons sur ce point au chapitre suivant.

1.3 Approximation multigroupe

(Sources : G.Bal [13]; E.Varin [73])

Nous revenons à la formulation de l'équation du transport posée dans l'espace des phases X_E . D'autre part, par abus de notation, tout au long de ce paragraphe, l'espace Γ^- désignera l'espace

$$\Gamma^- = \left\{ (x, \vec{\Omega}, E) \in \partial\mathcal{D} \times \mathcal{S}^2 \times F, \vec{\Omega} \cdot \vec{n}(x) < 0 \right\}. \quad (1.47)$$

On considère le problème stationnaire avec conditions aux limites absorbantes soit :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Psi(x, \vec{\Omega}, E) + \Sigma_t(x, E) \Psi(x, \vec{\Omega}, E) \\ = \int_{\alpha}^{\beta} dE' \int_{\mathcal{S}^2} \Sigma_s(x, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \Psi(x, \vec{\Omega}', E) d\nu(\vec{\Omega}') + q(x, \vec{\Omega}, E) \\ \Psi(x, \vec{\Omega}, E) = 0, \text{ sur } \Gamma^-. \end{cases} \quad (1.48)$$

Nous allons donc expliciter le passage de cette forme stationnaire continue de l'équation du transport à la forme discrétisée en énergie. La variable d'énergie évolue dans un espace monodimensionnel et n'intervient dans aucun opérateur de différenciation, c'est donc a priori la variable la plus aisée à discrétiser. L'approximation multigroupe consiste donc à découper l'espace des énergies F en G intervalles correspondant aux différents groupes d'énergie de sorte que

$$F = \bigcup_{g=1}^G [E_g, E_{g-1}],$$

avec $E_G < \dots < E_g < E_{g-1} < \dots < E_0$. Les particules du groupe d'énergie g sont celles qui ont pour énergie E telle que $E_g < E < E_{g-1}$. On remarque donc que le numéro du groupe croît lorsque l'énergie décroît. Nous noterons pour simplifier :

$$\int_g dE = \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE.$$

On suppose ensuite que le flux angulaire est approché sur chacun de ces intervalles d'énergie par le produit d'une fonction qui ne dépend que de l'énergie $\psi_g(E) > 0$ et du flux angulaire de groupe $\Psi_g(x, \vec{\Omega})$:

$$\Psi(x, \vec{\Omega}, E) \simeq \psi_g(E) \Psi_g(x, \vec{\Omega}), \text{ pour } E_g < E < E_{g-1},$$

où

$$\psi_g(E) = \frac{\psi(E)}{\int_g \psi(E) dE}.$$

On définit alors les sections efficaces, spectres et sources multigroupes

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{tg}(x) = \int_g \Sigma_t(x, E) \psi_g(E) dE, \\ \Sigma_{sgg'}(x, \vec{\Omega}' \longrightarrow \vec{\Omega}) = \int_g \int_{g'} \Sigma_s(x, \vec{\Omega}' \longrightarrow \vec{\Omega}, E' \longrightarrow E) \Psi(x, \vec{\Omega}', E') \psi_{g'}(E') dE' dE, \\ q_g(x, \vec{\Omega}) = \int_g q(x, \vec{\Omega}, E) \psi_g(E) dE. \end{array} \right. \quad (1.49)$$

L'équation (1.49) s'écrit donc sous la forme multigroupe suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Psi_g(x, \vec{\Omega}) + \Sigma_{tg}(x) \Psi_g(x, \vec{\Omega}) \\ = \sum_{g'=1}^G \int_{S^2} \Sigma_{sgg'}(x, \vec{\Omega}' \longrightarrow \vec{\Omega}) \Psi_{g'}(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') + q_g(x, \vec{\Omega}) \\ \Psi_g(x, \vec{\Omega}, E) = 0, \text{ sur } \Gamma^-. \end{array} \right. \quad (1.50)$$

Résultats d'existence du problème multigroupe

Les résultats d'existence ne font pas directement l'objet de cette thèse. Notons simplement que dans le cas particulier où l'espace des vitesses est égal à la réunion de G sphères correspondant aux différents groupes d'énergie, il suffit d'appliquer le théorème 1.2.1.

Schéma de résolution du problème multigroupe

On définit l'opérateur de transport pour le groupe g en posant :

$$H_{gg}^0 \Psi_g(x, \vec{\Omega}) = [\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma_{tg}] \Psi_g(x, \vec{\Omega}). \quad (1.51)$$

De plus, on définit l'opérateur de scattering entre le groupe g et le groupe g' par :

$$H_{gg'}^1 \Psi_{g'}(x, \vec{\Omega}) = \int_{S^2} \Sigma_{sgg'}(x, \vec{\Omega}' \longrightarrow \vec{\Omega}) \Psi_{g'}(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}'). \quad (1.52)$$

A partir des définitions (1.51) et (1.52), on définit l'opérateur de transport multigroupe en posant :

$$H_{gg'} = \delta_{gg'} H_{gg}^0 - H_{gg'}^1. \quad (1.53)$$

On peut alors écrire l'équation (1.50) de la façon suivante (les conditions aux limites étant sous-entendues) :

$$\begin{pmatrix} H_{11} & \cdot & \cdot & H_{1G} \\ H_{21} & \cdot & \cdot & H_{2G} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{G1} & \cdot & \cdot & H_{GG} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \cdot \\ \Psi_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ q_G \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

Nous supposons qu'il n'y a pas de transfert d'un groupe de bas niveau d'énergie vers un groupe de haut niveau d'énergie (i.e. une particule ne peut pas gagner d'énergie lors d'un choc). On a alors :

$$H_{gg'} = 0, \text{ si } g' > g.$$

Le système d'équations (1.54) ci dessus est donc triangulaire inférieur et s'écrit

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= H_{11}^{-1}q_1, \\ \Psi_2 &= H_{22}^{-1}(q_2 - H_{21}\Psi_1), \\ &\vdots \\ \Psi_G &= H_{GG}^{-1}(q_G - \sum_{g'=1}^G H_{Gg'}\Psi_{g'}).\end{aligned}$$

L'avantage de ce type de méthode est de se ramener à la résolution d'un problème à un groupe d'énergie. Le problème adimensionné à un groupe d'énergie s'écrit donc sous la forme (1.10) avec un espace des vitesses \mathcal{V} qui se réduit à la sphère unité de \mathbb{R}^3 , \mathcal{S}^2 . Ce problème est aussi appelé problème stationnaire monogroupe ou monocinétique du transport; c'est ce problème auquel nous nous intéressons dans la suite de ce manuscrit.

1.4 Discrétisation angulaire et problème de la source itérée

(Sources : G.Bal [13]; J.J.Duderstadt, W.R.Martin [45])

Nous nous intéressons dans ce paragraphe au problème du transport stationnaire monocinétique, écrit sous la forme

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t(x)u(x, \vec{\Omega}) = \int_{\mathcal{S}^2} f(x, \vec{\Omega}', \vec{\Omega})u(x, \vec{\Omega}')d\nu(\vec{\Omega}') + q(x, \vec{\Omega}), & \text{dans } X, \\ u(x, \vec{\Omega}) = 0, & \text{sur } \Gamma^-. \end{cases} \quad (1.55)$$

Dans ce paragraphe, nous allons présenter une façon de discrétiser cette équation selon la variable $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}^2$. Nous présentons la méthode utilisée dans la réalisation du code mixte-hybride de résolution de l'équation du transport. Par la suite, nous exposons la méthode dite de la source itérée, un schéma itératif classiquement utilisé pour résoudre les équations intégro-différentielles du transport neutronique.

1.4.1 Discrétisation angulaire

Nous présentons dans ce paragraphe la méthode aux ordonnées discrètes qui est l'une des méthodes les plus utilisées pour la résolution déterministe des équations de transport. Sur le sujet, citons notamment les travaux de B.G.Carlson et K.D.Lathrop [30, 57] et ceux de M.Asadzadeh pour une analyse d'erreur [9, 10].

Méthodes aux ordonnées discrètes

Les méthodes aux ordonnées discrètes (on parle aussi de discrétisation angulaire S_N) visent à discrétiser la sphère unité de \mathbb{R}^3 en un nombre fini de directions angulaires. On commence donc par se donner une quadrature constituée de M directions. Nous notons \mathcal{Q} cette quadrature de sorte que

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_M = \left\{ \vec{\Omega}_m \in \mathcal{S}^2, 1 \leq m \leq M \right\}.$$

Nous notons $\omega_m, 1 \leq m \leq M$, les M poids associés à cette quadrature \mathcal{Q} . Ces poids sont choisis de sorte que l'on réalise de la façon la plus satisfaisante l'approximation suivante :

$$\int_{\mathcal{S}^2} u(x, \vec{\Omega}) d\nu(\vec{\Omega}) \simeq \sum_{\vec{\Omega} \in \mathcal{Q}_M} \omega_{\vec{\Omega}} u(x, \vec{\Omega}).$$

L'équation (1.55) s'écrit alors sous forme approchée

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t(x) u(x, \vec{\Omega}) = \sum_{\vec{\Omega}' \in \mathcal{Q}_M} \omega_{\vec{\Omega}'} f(x, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}) u(x, \vec{\Omega}') + q(x, \vec{\Omega}), \text{ dans } X \times \mathcal{Q}_M \\ u(x, \vec{\Omega}) = 0, \text{ sur } \Gamma_{\vec{\Omega}}^- \times \mathcal{Q}_M \end{cases} \quad (1.56)$$

où

$$\Gamma_{\vec{\Omega}}^- = \left\{ x \in \partial\mathcal{D}; \vec{\Omega} \cdot \vec{n}(x) < 0 \right\}.$$

On obtient alors un système de M équations d'advection couplées qui ne varient plus que suivant la variable d'espace x .

Résultat d'existence et critère de convergence

On peut montrer l'existence de solutions à cette équation. On peut trouver ces résultats d'existence notamment dans les travaux de M.Asadzadeh [9, 10]. Par ailleurs, M.Asadzadeh propose une estimation d'erreur qui permet d'obtenir une idée de la convergence de la suite des problèmes approchés (1.56) vers le problème continu (1.55). Si on suppose que les sections efficaces et la source sont isotropes et si on note

$$\phi(x) = \int_{\mathcal{S}^2} u(x, \vec{\Omega}) d\nu(\vec{\Omega}),$$

le flux scalaire et

$$\phi_M(x) = \sum_{\vec{\Omega} \in \mathcal{Q}_M} \omega_{\vec{\Omega}} u_M(x, \vec{\Omega}),$$

où u et u_M sont respectivement les solutions des problèmes (1.55) et (1.56), on a l'estimation suivante (pour C constante positive)

$$\|\phi - \phi_M\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq \frac{C}{\sqrt{M}} (\|\phi\|_{H^1(\mathcal{D})} + \|q\|_{H^1(\mathcal{D})}). \quad (1.57)$$

En pratique, on découpe la sphère unité en M morceaux M_i et on choisit comme points de la quadrature les M directions $\vec{\Omega}_i$ associées à M_i , les poids de la quadrature sont alors les mesures des éléments M_i . Nous reviendrons sur le choix et la présentation d'une quadrature adaptée pour la discrétisation angulaire de notre problème de transport dans le chapitre 5. Remarquons aussi que l'un des inconvénients majeurs de la méthode S_N réside dans l'apparition d'effets de raies (voir K.D.Lathrop [57]) sur la solution numérique du problème de transport associé. Par ailleurs, pour qu'un schéma de transport soit compatible avec la limite diffusion (voir chapitre 6), il convient d'adapter le choix de la quadrature, citons F. Golse, S. Jin et C.D. Levermore [49].

1.4.2 Résolution par la méthode de la source itérée

On revient sur la formulation du transport discrétisée angulairement. Les méthodes de résolution classiquement utilisées en transport consistent à itérer sur l'opérateur de collision suivant le schéma

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^{i+1}(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t(x) u^{i+1}(x, \vec{\Omega}) = \sum_{\vec{\Omega}' \in Q} \omega_{\vec{\Omega}'} f(x, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}) u^i(x, \vec{\Omega}') + q(x, \vec{\Omega}), & \text{dans } X \times Q, \\ u^{i+1}(x, \vec{\Omega}) = 0, & \text{sur } \Gamma_{\vec{\Omega}}^- \times Q. \end{cases} \quad (1.58)$$

où u^i est le flux angulaire calculé à l'itération i , $i \geq 1$, et u^0 est un flux angulaire initial donné (en général 0). Cependant, la vitesse de convergence d'une telle méthode peut s'avérer extrêmement lente (en particulier pour des régimes très collisionnels). C'est pourquoi on a souvent recours à une technique d'accélération telle que celle que nous allons présenter ci-après.

1.4.3 Accélération par diffusion synthétique

Cette technique consiste à utiliser l'approximation du transport dans un régime de diffusion (voir R.E.Alcouffe [7], voir le chapitre 6 notamment pour une généralisation de la technique aux méthodes mixtes). Nous revenons dans ce paragraphe à l'équation du transport continue pour simplifier. On note

$$Lu(x, \vec{\Omega}) = \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t u(x, \vec{\Omega}) \text{ l'opérateur de transport libre,}$$

$$Ku(x, \vec{\Omega}) = \sigma_s \int_{S^2} u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \text{ l'opérateur de collision.}$$

Pour les autres notations, voir le paragraphe 1.2.3. La généralisation aux équations discrétisées étant immédiate. Nous supposons de plus que la section efficace de scattering est isotrope : $f = \sigma_s(x)$.

Le schéma itératif accéléré s'écrit alors :

- On choisit un flux angulaire initial u^0 (par exemple 0).
- Pour $i \geq 1$, on résout un problème de transport :

$$u^{i+\frac{1}{2}} = L^{-1} K u^i + L^{-1} q.$$

- On résout un problème de diffusion :

$$-\vec{\nabla} \cdot D \vec{\nabla} e^{i+1} = K(u^{i+\frac{1}{2}} - u^i) \text{ dans } \mathcal{D}$$

$$e^{i+1} = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{D},$$

avec $D = \frac{1}{3\sigma_t}$ et on pose alors $u^{i+1} = u^{i+\frac{1}{2}} + e^{i+1}$. Évidemment, le terme $K(u^{i+\frac{1}{2}} - u^i)$ ne dépend plus ici que de la seule variable spatiale x .

Nous reviendrons plus en détail sur l'accélération par diffusion synthétique, l'établissement d'une équation de diffusion à partir d'un problème de transport et l'accélération par diffusion synthétique adaptée à la formulation mixte du transport dans le chapitre 6.

1.5 Forme intégrale de l'équation du transport

(Sources : G.Bal [13] ; R.Dautray, J.L.Lions [42])

Nous nous intéressons ici au problème du transport monocinétique ($\mathcal{V} = \mathcal{S}^2$) pour lequel la section efficace de scattering est supposée isotrope ($f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = \sigma_s(x)$). En suivant ces hypothèses, on écrit le problème stationnaire du transport sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t(x)u(x, \vec{\Omega}) = \sigma_s(x) \int_{\mathcal{S}^2} u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') + q(x) & \text{dans } X, \\ u = u_b, & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \end{cases} \quad (1.59)$$

On cherche alors à inverser l'opérateur d'advection A défini en (1.31), ainsi, nous écrivons le problème (1.59) sous la forme :

$$u(x, \vec{\Omega}) = T_{\Omega}(\sigma_s \phi + q)(x) + u_b(x_s, \vec{\Omega}) \exp(-\alpha(x, x_s)). \quad (1.60)$$

Dans cette équation, on a introduit :

- $\alpha(x, x')$ est appelé le parcours optique défini par

$$\alpha(x, x') = \int_0^{|x-x'|} ds \sigma_t \left(x + s \frac{x' - x}{|x - x'|} \right). \quad (1.61)$$

- T_{Ω} est l'opérateur d'intégration dans la direction $\vec{\Omega}$ donné par :

$$T_{\Omega} f(x) = \int_0^{d(x, \vec{\Omega})} ds \exp(-\alpha(x, x - s\vec{\Omega})) f(x - s\vec{\Omega}). \quad (1.62)$$

- $d(x, \vec{\Omega})$ est la distance de $x \in \mathcal{D}$ à $\partial\mathcal{D}$ dans la direction $-\vec{\Omega}$.
- x_s est le point du bord $\partial\mathcal{D}$ défini par

$$x_s = x - d(x, \vec{\Omega})\vec{\Omega}. \quad (1.63)$$

- $\phi(x)$ est le flux scalaire défini par :

$$\phi(x) = \int_{\mathcal{S}^2} u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}'). \quad (1.64)$$

Pour obtenir une formulation intégrale de l'équation du transport portant sur le flux scalaire ϕ , on utilise le changement de variable permettant de passer des coordonnées cartésiennes sur \mathcal{D} aux coordonnées surfaciques, on a :

$$\begin{aligned} dx' &= s^2 ds d\nu(\vec{\Omega}), \\ dx_s &= s^2 |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}(x_s)|^{-1} d\vec{\Omega}. \end{aligned}$$

On exprime alors les formes intégrales classiques de l'équation du transport des neutrons :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\exp(-\alpha(x, x'))}{|x - x'|^2} (\sigma_s(x')\phi(x') + q(x')) dx' \\ &+ \int_{\mathcal{S}^2} u_b(x_s, \vec{\Omega}) \exp(-\alpha(x, x_s)) d\nu(\vec{\Omega}), \end{aligned}$$

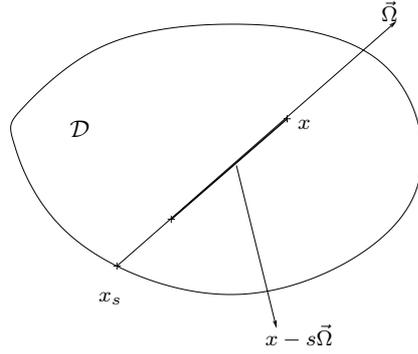


FIG. 1.2 – Distance $x - s\vec{\Omega}$ dans \mathcal{D} .

et

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\exp(-\alpha(x, x'))}{|x - x'|^2} (\sigma_s(x')\phi(x') + q(x')) dx' \\ &+ \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\exp(-\alpha(x, x_s))}{|x - x_s|^2} \left[-\vec{J}_{in}(x_s, \frac{x - x_s}{|x - x_s|}) \cdot \vec{n}(x_s) \right] dx_s, \end{aligned}$$

où \vec{J}_{in} est le courant entrant défini par

$$\vec{J}_{in} = \vec{\Omega} u_b(x_s, \vec{\Omega}).$$

A partir de ces expressions, on peut alors calculer les solutions exactes de nombreux problèmes de transport pour estimer par exemple les erreurs d'approximation des schémas numériques. Cette forme de l'équation du transport est aussi utilisée dans la méthode des caractéristiques ou dans des méthodes probabilistes.

1.6 Formulation en flux pair

(Sources : G.Bal [13]; R.Dautray, J.L.Lions [42])

Une autre possibilité consiste à s'intéresser à des formes du second ordre de cette équation : nous présenterons la formulation en flux pair qui permet l'introduction d'une forme bilinéaire coercive sur l'espace de Hilbert W^2 et d'un cadre fonctionnel adapté proche de celui que l'on rencontre pour traiter des problèmes elliptiques. Au chapitre 2, nous présenterons une autre forme du second ordre que nous utiliserons plus particulièrement pour introduire la formulation mixte du transport.

Comme au paragraphe précédent, nous considérerons un problème stationnaire monocinétique avec $V = \mathcal{S}^2$ et nous supposons que les sections efficaces de scattering et les sources sont isotropes, soit $f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = \sigma_s(x)$ et $q(x, \vec{\Omega}) = q(x)$, pour simplifier, on s'intéressera au cas d'une condition aux limites absorbante, ce qui nous donne

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t(x)u(x, \vec{\Omega}) = \sigma_s(x) \int_{\mathcal{S}^2} u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') + q(x) & \text{dans } X, \\ u = 0, & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-. \end{cases} \quad (1.65)$$

On décompose alors le flux angulaire u en deux parties, une partie symétrique et l'autre antisym-

métrique en angle : $u = u^+ + u^-$, où le flux pair u^+ et le flux impair u^- sont définis par :

$$\begin{cases} u^+(x, \vec{\Omega}) = \frac{u(x, \vec{\Omega}) + u(x, -\vec{\Omega})}{2}, \\ u^-(x, \vec{\Omega}) = \frac{u(x, \vec{\Omega}) - u(x, -\vec{\Omega})}{2}. \end{cases} \quad (1.66)$$

On note toujours le flux scalaire $\phi(x) = \int_{\mathcal{S}^2} u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}')$, l'équation (1.65) s'écrit :

$$\left(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \sigma_t \right) (u^+ + u^-) = \sigma_s(x)\phi + q, \quad (1.67)$$

et en changeant $\vec{\Omega}$ en $-\vec{\Omega}$, on obtient :

$$\left(-\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \sigma_t \right) (u^+ - u^-) = \sigma_s(x)\phi + q. \quad (1.68)$$

En ajoutant et soustrayant ces deux équations, on a :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^- + \sigma_t u^+ = \sigma_s(x)\phi + q, \quad (1.69)$$

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^+ + \sigma_t u^- = 0. \quad (1.70)$$

Si on suppose que σ_t est strictement positif sur \mathcal{D} (en respectant l'hypothèse de sous-criticité par exemple), on en déduit que :

$$u^- = -\frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^+, \quad (1.71)$$

et, en injectant cette expression dans l'équation (1.69), on obtient l'équation du second ordre sur le flux pair :

$$-\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^+ + \sigma_t u^+ = \sigma_s(x)\phi + q, \quad (1.72)$$

un problème que l'on peut écrire sous la forme :

$$Pu^+ = \sigma_s\phi + q, \quad (1.73)$$

avec

$$Pu^+ = -\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^+ + \sigma_t u^+. \quad (1.74)$$

Les conditions aux limites du problème (1.65) $u = 0$ sur Γ^- s'écrivent :

$$\begin{cases} u^+ + u^- = 0 & \text{sur } \Gamma^-, \\ u^+ - u^- = 0 & \text{sur } \Gamma^+. \end{cases} \quad (1.75)$$

Ce qui donne, en utilisant (1.71),

$$\begin{cases} u^+ - \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^+ = 0 & \text{sur } \Gamma^-, \\ u^+ + \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^+ = 0 & \text{sur } \Gamma^+. \end{cases} \quad (1.76)$$

La formulation en flux pair de l'équation du transport est donc constituée par l'équation (1.73) associée aux conditions aux limites (1.76). Notons que le problème du flux pair ainsi défini est bien

posé, en effet il est strictement équivalent au problème initial du transport (1.65), lorsque l'on connaît le flux pair u^+ , on peut recalculer le flux angulaire total en remarquant que $u = u^+ + u^-$ et en utilisant la relation (1.71). On peut aussi montrer ce résultat en considérant une approche variationnelle : nous présenterons sommairement cette approche au cours du chapitre 3. Notons aussi que la structure de l'équation du flux-pair est similaire à celle de l'équation du second-ordre auto-adjointe du transport que nous présentons en détail au chapitre 2.

1.7 Quelques méthodes classiques de résolution en espace

Nous présentons dans cette partie différentes méthodes de résolution spatiale (i.e. après discrétisation angulaire) de l'équation du transport monocinétique .

1.7.1 Résolution en espace par le schéma diamant

(Sources : J.J.Duderstadt, W.R.Martin [45])

Nous explicitons cette méthode dans le cas d'un problème 1D (l'espace physique sera toujours noté $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$). On considère l'équation du transport sur l'intervalle $\mathcal{D} = [a, b]$ pour un groupe d'énergie, dans un cas isotrope :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial x}(x, \mu) + \sigma_t(x)u(x, \mu) = \sigma_s(x)\phi(x) + q(x, \mu) & \text{pour } (x, \mu) \in \mathcal{D} \times [-1, 1], \\ u(a, \mu) = u(a, -\mu) & \text{pour } \mu > 0, \\ u(b, \mu) = h(\mu) & \text{pour } \mu < 0. \end{cases} \quad (1.77)$$

Nous utiliserons fréquemment cette technique qui fait référence sur maillages cartésiens. On a l'habitude de parler de méthode DSN lorsque la discrétisation diamant en espace est associée à une discrétisation angulaire de type S_N (nous reviendrons sur une discrétisation angulaire du type S_N au chapitre 5). On s'intéresse donc à la résolution en espace du problème suivant :

On découpe donc le domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ en I segments définis pour $i \in \{1, \dots, I\}$ par $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ et on notera x_i le milieu de ce segment. La relation diamant décrit le flux au milieu de chaque segment comme :

$$u_{i,m} = \frac{1}{2} \left(u_{i+\frac{1}{2},m} + u_{i-\frac{1}{2},m} \right),$$

où $u_{i,m} = u(x_i, \mu_m)$ et $u_{i\pm\frac{1}{2},m} = u(x_{i\pm\frac{1}{2}}, \mu_m)$. L'équation (1.77) s'écrit pour un segment i suivant une direction m :

$$\mu_m \frac{u_{i+\frac{1}{2},m} - u_{i-\frac{1}{2},m}}{h_i} + \sigma_{t,i} u_{i,m} = \sigma_{s,i} \phi_i + q_i,$$

où $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ est la longueur de l'intervalle i . On obtient donc le système d'équations :

$$\begin{cases} \mu_m \frac{u_{i+\frac{1}{2},m} - u_{i-\frac{1}{2},m}}{h_i} + \sigma_{t,i} u_{i,m} = \sigma_{s,i} \phi_i + q_i, \\ u_{i,m} = \frac{1}{2} (u_{i+\frac{1}{2},m} + u_{i-\frac{1}{2},m}), \\ u_{\frac{1}{2},m} = u_{\frac{1}{2},M-m+1} & \text{pour } \mu_m > 0, \\ u_{I+\frac{1}{2},m} = h(\mu_m) & \text{pour } \mu_m < 0, \end{cases} \quad (1.78)$$

où $\mu_m = -\mu_{M-m+1}$ (on suppose que la quadrature est symétrique). Suivant le signe de μ_m , on détermine le sens de parcours de l'espace. On résout le système en exprimant soit le flux $u_{i,m}$

au milieu de la maille soit le flux $u_{i\pm\frac{1}{2},m}$ aux noeuds. Si on pose $Q_i = \sigma_{s,i}\phi_i + q_i$ et si on choisit d'éliminer le flux $u_{i,m}$, on peut écrire la résolution du système suivante :

- pour $\mu_m < 0$, $u_{I+\frac{1}{2},m} = h(\mu_m)$ par la condition aux limites à droite alors, pour $i = I, \dots, 1$ on calcule

$$u_{i,m} = \left[1 + \frac{\sigma_{t,i}h_i}{2|\mu_m|} \right]^{-1} \left[u_{i+\frac{1}{2},m} + \frac{Q_{i,m}h_i}{2|\mu_m|} \right],$$

$$u_{i-\frac{1}{2},m} = 2u_{i,m} - u_{i+\frac{1}{2},m}.$$

- pour $\mu_m > 0$, $u_{\frac{1}{2},m} = u_{\frac{1}{2},M-m+1}$ par la condition aux limites à gauche alors, pour $i = 1, \dots, I$ on calcule

$$u_{i,m} = \left[1 + \frac{\sigma_{t,i}h_i}{2|\mu_m|} \right]^{-1} \left[u_{i-\frac{1}{2},m} + \frac{Q_{i,m}h_i}{2|\mu_m|} \right],$$

$$u_{i+\frac{1}{2},m} = 2u_{i,m} - u_{i-\frac{1}{2},m}.$$

On calcule ensuite le nouveau flux scalaire ϕ_i par intégration numérique du flux angulaire $u_{i,m}$ et on procède par la méthode de la source itérée.

Remarque 1.7.1

Cette technique peut évidemment s'étendre à des dimensions spatiales supérieures sur des maillages cartésiens (voir [45]). Récemment, C.Aussourd a adapté et mis en oeuvre des techniques de raffinement dynamique de maillages pour le schéma DSN; voir [11].

1.7.2 Méthodes d'éléments finis continus et discontinus

Il est aussi possible d'utiliser des méthodes d'éléments finis appliquée à la forme du premier ordre de l'équation du transport. Deux principales méthodes sont utilisées : les éléments finis continus et les éléments finis discontinus. Les éléments finis continus sont une généralisation du schéma DSN à des maillages quelconques, cependant les fortes irrégularités de maillage rendent ce schéma très imprécis. La méthode des éléments finis continus est construite suivant la méthode de Galerkin (voir R.Dautray, J.L.Lions [42], pp 1004-1006 et P.Lesaint [59]). Cependant, cette méthode conduit à un système d'équations qui n'est pas symétrique et dont la solution est fortement oscillante lorsque le maillage est grossier (voir [45]). Une autre alternative réside en l'utilisation de la méthode des éléments finis discontinus (voir [75] notamment) dans laquelle on suppose que le flux angulaire est discontinu de part et d'autre d'une face du maillage. Cette méthode est stable mais elle génère un nombre d'inconnues plus grand que pour la méthode des éléments finis continus. De plus, en deux et trois dimensions d'espace, on obtient un système linéaire difficile à inverser. Le fait de choisir un sens de parcours du maillage de l'espace physique permet de calculer explicitement les flux aux noeuds ou aux centres des mailles suivant les directions de propagation (i.e. un ordonnancement permettant d'aboutir à un système linéaire triangulaire selon les directions). Ce sens de parcours n'existe en deux dimensions d'espace que si les éléments du maillage que l'on utilise sont convexes. Par contre, ce sens de parcours est impossible à déterminer de façon générale en géométrie tridimensionnelle.

1.7.3 Méthode de projection sur les harmoniques sphériques et méthode P_N

(Sources : G.Bal [13]; R.Dautray, J.L.Lions [42]; E.Varin [73])

Une autre grande classe de méthode d'approximation angulaire pour la résolution de l'équation du transport est la méthode des harmoniques sphériques. Nous supposons dans ce paragraphe que le noyau de collision est de la forme

$$f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = f(x, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}').$$

Cette hypothèse caractérise une propriété d'isotropie du milieu. Ainsi, la probabilité pour qu'une particule de direction $\vec{\Omega}$ qui subit un choc en x reparte dans la direction $\vec{\Omega}'$ ne dépend que de l'angle entre les deux directions $\vec{\Omega}$ et $\vec{\Omega}'$. L'idée est alors de décomposer le flux angulaire, les sources et les sections efficaces dans la base des harmoniques sphériques notées Y_{lm} et Y_{lm}^* :

$$u(x, \vec{\Omega}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} u_{lm}(x) Y_{lm}(\vec{\Omega}),$$

$$f(x, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l f_l(x) Y_{lm}^*(\vec{\Omega}) Y_{lm}(\vec{\Omega}'),$$

$$q(x, \vec{\Omega}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} q_{lm}(x) Y_{lm}(\vec{\Omega}).$$

On injecte alors ces relations dans (1.55), soit :

$$\sum_{l,m} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_{lm} + \sigma_t u_{lm} - f_l u_{lm} - q_{lm}) Y_{lm}(\vec{\Omega}) = 0.$$

On multiplie alors cette relation par Y_{lm}^* et on intègre en $\vec{\Omega}$ pour obtenir des équations couplées indépendantes de la variable $\vec{\Omega}$. La méthode P_N consiste alors à résoudre ces équations en supposant que tous les moments sont nuls pour $l > N$.

Remarque 1.7.2

Dans le cas où $N = 1$, on trouve la représentation P_1 du flux angulaire (voir chapitre 6) :

$$u(x, \vec{\Omega}) = \phi(x) + 3\vec{\Omega} \cdot \vec{G}(x)$$

où $\vec{G}(x)$ est une fonction vectorielle ne dépendant que de la variable x . Le système d'équations P_1 associé est une formulation mixte d'un problème elliptique de diffusion. L'idée de la méthode de projection sur les harmoniques sphériques consiste donc à approcher un problème de transport de l'espace des phases par des équations elliptiques (dans le cas de la résolution d'un problème stationnaire) de l'espace physique uniquement (donc beaucoup plus aisées à résoudre numériquement).

Remarque 1.7.3

Signalons les travaux de V.Siess [72] sur l'équation du transport simplifiée basée sur une approximation P_N du flux angulaire et ceux de J.J.Lautard et S.Van Crielingen [58] sur l'application des éléments finis mixtes-hybrides aux équations P_N .

Méthode P_N dans le cas unidimensionnel

On considère dans la suite de ce paragraphe le problème du transport monocinétique unidimensionnel. La méthode P_N correspond en une dimension d'espace au développement du flux angulaire sur la base des polynômes de Legendre de la façon suivante :

$$u(x, \vec{\Omega}) = \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) P_l(\mu) \phi_l(x),$$

où

$$\phi_l(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu') u(x, \mu') d\mu',$$

et

$$P_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l.$$

L'approximation P_N consiste à considérer que pour tout $l \geq N+1$ on a :

$$\phi_l = 0.$$

Les termes ϕ_l sont appelés les moments du flux angulaire. Si on remplace ces développements dans l'équation de transport, on obtient le système à $N+1$ inconnues suivant :

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{dx} \sum_{l=0}^N (2l+1) P_l(\mu) \phi_l(x) + \sigma_t(x) \sum_{l=0}^N (2l+1) P_l(\mu) \phi_l(x) = \\ \frac{\sigma_s(x)}{2} \int_{-1}^1 \sum_{l=0}^N (2l+1) P_l(\mu') \phi_l(x) d\mu' + q(x, \mu). \end{aligned} \quad (1.79)$$

On exprime ensuite le terme $\mu P_l(\mu)$ en utilisant la relation de récurrence des polynômes de Legendre

$$\mu P_l(\mu) = \frac{1}{2l+1} [l P_{l-1}(\mu) + (l+1) P_{l+1}(\mu)].$$

Les polynômes de Legendre forment une base orthonormale telle que :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu') P_{l'}(\mu') d\mu' = \delta_{ll'},$$

où $\delta_{ll'}$ représente le symbole de Kronecker. Dans le cas d'une diffusion isotrope, on a

$$\frac{1}{2} \sum_{l=0}^N \int_{-1}^1 P_l(\mu') P_0(\mu') \phi_l(x) d\mu' = \delta_{l0} \phi_l(x).$$

Le terme intégral se réduit alors au terme $\sigma_s \phi_0(x)$. On multiplie alors l'équation (1.79) par chacun des polynômes et on intègre en μ pour obtenir un système d'équations :

$$(l+1) \frac{d}{dx} \phi_{l+1} + l \frac{d}{dx} \phi_{l-1} + (2l+1) \sigma_t \phi_l = \sigma_s \phi_0 \delta_{l0} + q_l \text{ pour } l = 0, \dots, N,$$

où q_l est le moment d'ordre l de la source.

Remarque 1.7.4

La méthode P_N est équivalente au schéma DSN si les points de discrétisation angulaire correspondent aux points de Gauss (voir [18]).

Bilan du chapitre 1

Nous avons donc mis en évidence toutes les notions et tous les outils qui vont être utilisés dans la suite de ce manuscrit. Nous pouvons à présent introduire les formulations mixtes de l'équation du transport et en étudier quelques propriétés fondamentales. C'est ce que nous allons voir dans le chapitre qui suit.

Chapitre 2

Formulation mixte de l'équation du transport

Sommaire

2.1	Cadre fonctionnel général du transport	32
2.2	Formulation du second ordre auto-adjointe du transport	39
2.3	Formulation mixte	40
2.4	Equivalence entre la formulation mixte et le problème modèle . . .	43
2.5	Cadre fonctionnel pour la formulation mixte	44
2.6	Existence et unicité du problème mixte du transport	45
2.7	Cas du vide	46
2.7.1	Formulation du second ordre	47
2.7.2	Formulation mixte	48
2.7.3	Interfaces vide-matière	48

Dans ce chapitre, nous commençons par introduire le cadre fonctionnel nécessaire pour l'étude des formes variationnelles du transport avant de présenter la forme dite du second ordre auto-adjointe de l'équation du transport ou Self-Adjoint Angular Flux (SAAF) equation, équivalente à la forme du premier ordre de l'équation du transport, introduite par C.J.Pomraning et M.Clark [64, 65] et étudiée plus en détail par J.E.Morel et J.M.McGhee dans [62]. Nous exhibons ensuite une formulation mixte dérivée de cette forme du second ordre, cette formulation a aussi été évoquée par C.J. Gesh dans [47] sous une forme quelque peu différente. Nous montrons l'existence et l'unicité de solutions au problème mixte en introduisant un nouveau cadre fonctionnel adapté à l'étude de cette formulation. Tout au long de ce chapitre, nous nous intéressons à la forme stationnaire suivante de l'équation du transport :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t u(x, \vec{\Omega}) = (Ku)(x) + q(x, \vec{\Omega}) & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in X, \\ u(x, \vec{\Omega}) = u_b(x, \vec{\Omega}) & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-. \end{cases} \quad (2.1)$$

où $q(x, \vec{\Omega})$ et $u_b(x, \vec{\Omega})$ sont des fonctions données indépendantes du temps. Dans ce chapitre, on considère le cas où $d = 3$. On considérera dans tout ce chapitre un domaine \mathcal{D} convexe et borné de \mathbb{R}^3 (notamment pour donner un sens aux traces de la solution u sur Γ^- et Γ^+ , voir [34, 35]).

2.1 Cadre fonctionnel général du transport

On introduit les espaces fonctionnels nécessaires à l'analyse variationnelle des équations du transport. On notera

$$L^2 = L^2(X, dx d\nu), \quad (2.2)$$

$$L^2_- = L^2(\Gamma^-, |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| ds d\nu), \quad (2.3)$$

$$L^2_+ = L^2(\Gamma^+, |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| ds d\nu), \quad (2.4)$$

les espaces des fonctions de l'espace des phases de carré intégrable respectivement sur X , Γ^- et Γ^+ .

Remarque 2.1.1

On se place par la suite dans le cadre d'un domaine \mathcal{D} ouvert borné.

On rappelle que l'on a introduit au chapitre précédent l'espace du transport

$$W^2 = \left\{ u \in L^2; \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u \in L^2 \right\}, \quad (2.5)$$

dans la suite nous utiliserons aussi les espaces suivant

$$W_0 = \left\{ u \in W^2; u|_{\Gamma^-} = 0 \right\}, \quad (2.6)$$

et

$$W = \left\{ u \in W^2; u|_{\Gamma^-} \in L^2_- \right\}. \quad (2.7)$$

M.Cessenat [34, 35] montre que l'espace W peut aussi être défini par

$$W = \left\{ u \in W^2; u|_{\Gamma^+} \in L^2_+ \right\}. \quad (2.8)$$

On définit alors un produit scalaire sur W de la façon suivante :

$$(u, v)_W = \int_X u v + \int_X (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v) + \int_{\Gamma^+} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) u v. \quad (2.9)$$

La norme correspondante sur W est donnée par :

$$\|u\|_W^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2_+}^2. \quad (2.10)$$

L'espace W associé au produit scalaire correspondant $(\cdot, \cdot)_W$ est un espace de Hilbert (voir par exemple [42]). L'espace W_0 est un sous espace fermé de W , W_0 est donc un espace de Hilbert pour le produit scalaire induit par W .

Remarque 2.1.2

Pour tout $(u, v) \in W \times W$ on a la formule de Green suivante

$$\int_X (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u) v dx d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v) u dx d\nu(\vec{\Omega}) = \int_{\Gamma} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) u v ds d\nu(\vec{\Omega}). \quad (2.11)$$

Introduisons l'opérateur R défini pour tout u dans L^2 par :

$$Ru(x, \vec{\Omega}) = (\sigma_t - K)u(x, \vec{\Omega}) = \sigma_t u(x, \vec{\Omega}) - \int_{\mathcal{S}^2} \sigma_s(x) u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}'), \quad \forall (x, \vec{\Omega}) \in X. \quad (2.12)$$

L'opérateur R est un opérateur auto-adjoint et sous les hypothèses (1.39) d'un milieu sous-critique, il est inversible. Nous résumons ces propriétés dans la proposition suivante.

Proposition 2.1.1

On suppose que

- $\sigma_t(x, \vec{\Omega}) \in L^\infty(X)$, $0 < \sigma_0 \leq \sigma_t(x, \vec{\Omega}) \leq \sigma_\infty$,
- $\sigma_t(x, \vec{\Omega}) - \int_{\mathcal{S}^2} \sigma_s(x, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}) d\nu(\vec{\Omega}') \geq \alpha > 0$,
- $\sigma_t(x, \vec{\Omega}) - \int_{\mathcal{S}^2} \sigma_s(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \geq \alpha > 0$.

Alors, l'opérateur R agissant de L^2 dans L^2 est auto-adjoint, continu et inversible. Son inverse, R^{-1} est aussi continu. De plus, il existe $\alpha > 0$ (voir hypothèse (1.39)) tel que :

$$\int_X (Ru)u \geq \alpha \|u\|_{L^2}^2. \quad (2.13)$$

DÉMONSTRATION - Pour la preuve de cette proposition, voir R.Dautray et J.L.Lions [42]. ■

Nous allons à présent énoncer le théorème d'existence et d'unicité de solution pour (2.1) dans le cadre L^2 , nous donnons une estimation sur la solution en norme L^2 et nous proposons une démonstration de cette estimation.

Théorème 2.1.1

On suppose que les données du problème (2.1) vérifient

- $q(x, \vec{\Omega}) \in L^2$,
- $u_b(x, \vec{\Omega}) \in L^2_-$,
- $\sigma_t(x, \vec{\Omega}) \in L^\infty(X)$, $0 < \sigma_0 \leq \sigma_t(x, \vec{\Omega}) \leq \sigma_\infty$,
- $\sigma_t(x, \vec{\Omega}) - \int_{\mathcal{S}^2} \sigma_s(x, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}) d\nu(\vec{\Omega}') \geq \alpha > 0$,
- $\sigma_t(x, \vec{\Omega}) - \int_{\mathcal{S}^2} \sigma_s(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \geq \alpha > 0$.

Alors le problème du transport (2.1) possède une unique solution dans W et il existe une constante strictement positive C telle que :

$$\|u\|_{L^2} \leq C \left(\|q\|_{L^2} + \|u_b\|_{L^2_-} \right). \quad (2.14)$$

DÉMONSTRATION - L'existence et l'unicité sont obtenues en utilisant le théorème 1.2.1 dans le cadre L^2 . Nous donnons ci-après la preuve de l'estimation (2.14). On considère donc le problème stationnaire non homogène à source suivant :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t u(x, \vec{\Omega}) = (Ku)(x) + q(x, \vec{\Omega}) \text{ pour } (x, \vec{\Omega}) \in X \quad (2.15)$$

avec les conditions aux limites

$$u(x, \vec{\Omega}) = u_b(x, \vec{\Omega}) \text{ pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-. \quad (2.16)$$

Nous allons décomposer la solution u du problème (2.15) comme la somme $u = u_0 + v$ de la solution u_0 du problème (2.15) pour $u_b = 0$ et de la solution v du problème (2.15) pour $q = 0$.

On commence par considérer le problème stationnaire homogène à source suivant :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t u_0(x, \vec{\Omega}) = (K u_0)(x) + q(x, \vec{\Omega}) \text{ pour } (x, \vec{\Omega}) \in X \quad (2.17)$$

avec les conditions aux limites homogènes

$$u_0(x, \vec{\Omega}) = 0 \text{ pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-. \quad (2.18)$$

Multiplions l'équation (2.17) par u_0 et intégrons sur l'espace des phases, on obtient donc

$$\begin{aligned} & \int_X \sigma_t u_0^2 dx d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0) u_0 dx d\nu(\vec{\Omega}) \\ &= \int_X q u_0 dx d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X \sigma_s u_0 \left(\int_{S^2} u_0(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \right) dx d\nu(\vec{\Omega}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (\mathcal{D} étant borné), on majore le terme de gauche dans le second membre de (2.19)

$$\int_X q u_0 dx d\nu(\vec{\Omega}) \leq \|q\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2}.$$

En utilisant le caractère auto-adjoint de l'opérateur R défini dans la proposition 2.1.1 et la constante α de l'énoncé du théorème, on obtient la minoration suivante

$$\begin{aligned} & \int_X \sigma_t u_0^2 dx d\nu(\vec{\Omega}) - \int_X \sigma_s u_0 \left(\int_{S^2} u_0(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \right) dx d\nu(\vec{\Omega}) \\ &= \int_X (R u_0) u_0 \geq \alpha \|u_0\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

On utilise alors la formule de Green (2.11) dans le but de faire intervenir les termes de bord, soit

$$\int_X 2u_0(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0) dx d\nu(\vec{\Omega}) = \int_{\Gamma^+} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) u_0^2 ds d\nu(\vec{\Omega}).$$

Au final, on obtient donc l'inégalité suivante

$$\alpha \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2_+}^2 \leq \|q\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2}.$$

On obtient donc l'estimation suivante en norme L^2

$$\|u_0\|_{L^2} \leq \frac{1}{\alpha} \|q\|_{L^2}. \quad (2.20)$$

On s'intéresse maintenant à la résolution (dans W) du problème stationnaire non homogène suivant :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t v(x, \vec{\Omega}) = (K v)(x) \text{ pour } (x, \vec{\Omega}) \in X \quad (2.21)$$

avec les conditions aux limites non homogènes suivantes

$$v(x, \vec{\Omega}) = u_b \text{ pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-. \quad (2.22)$$

Nous allons chercher à montrer l'estimation suivante : il existe C constante positive telle que :

$$\|v\|_{L^2} \leq C \|u_b\|_{L^2_-}.$$

Multiplions l'équation (2.21) par v et intégrons sur l'espace des phases, on trouve

$$\begin{aligned} & \int_X \sigma_t v^2 dx d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v) v dx d\nu(\vec{\Omega}) \\ &= \int_X \sigma_s v \left(\int_{\mathcal{S}^2} v(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \right) dx d\nu(\vec{\Omega}). \end{aligned}$$

En utilisant le caractère auto-adjoint de l'opérateur R défini dans la proposition 2.1.1 et la constante α de l'énoncé du théorème, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_X \sigma_t v^2 dx d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v) v dx d\nu(\vec{\Omega}) \\ & - \int_X \sigma_s v \left(\int_{\mathcal{S}^2} v(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \right) dx d\nu(\vec{\Omega}) \\ & \geq \alpha \|v\|_{L^2}^2 + \int_X (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v) v dx d\nu(\vec{\Omega}). \end{aligned}$$

D'où

$$\alpha \|v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|v\|_{L^2_+}^2 - \frac{1}{2} \|u_b\|_{L^2_-}^2 \leq 0.$$

On obtient donc l'estimation suivante

$$\|v\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\alpha} \|u_b\|_{L^2_-}. \quad (2.23)$$

On combine alors les estimations sur u_0 (2.20) et v (2.23) pour obtenir l'estimation (2.14) sur la solution u de (2.15), on écrit

$$\|u\|_{L^2} = \|u_0 + v\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\alpha} \|u_b\|_{L^2_-} + \frac{1}{\alpha} \|q\|_{L^2},$$

soit

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\alpha} \left(\|u_b\|_{L^2_-} + \|q\|_{L^2} \right).$$

■

Nous allons à présent énoncer le théorème d'existence et d'unicité de solution pour (2.1) dans le cadre W , nous donnons aussi une estimation de la norme W de la solution. Cette estimation est un résultat très utilisé notamment pour l'étude des formes variationnelles de l'équation du transport. Nous proposons une preuve de cette estimation.

Théorème 2.1.2

Sous les hypothèses du théorème 2.1.1, le problème du transport (2.1) possède une unique solution dans W et il existe une constante strictement positive C telle que :

$$\|u\|_W \leq C \left(\|q\|_{L^2} + \|u_b\|_{L^2_-} \right). \quad (2.24)$$

DÉMONSTRATION - L'existence et l'unicité sont obtenues en utilisant le théorème 1.2.1 dans le cadre L^2 . Nous proposons une preuve de l'estimation (2.24) dont nous n'avons trouvé aucune démonstration. On considère donc le problème stationnaire non homogène à source suivant :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t u(x, \vec{\Omega}) = (Ku)(x) + q(x, \vec{\Omega}) \text{ pour } (x, \vec{\Omega}) \in X \quad (2.25)$$

avec les conditions aux limites

$$u(x, \vec{\Omega}) = u_b(x, \vec{\Omega}) \text{ pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-. \quad (2.26)$$

Nous allons chercher à décomposer la solution u du problème (2.25) comme la somme $u = u_0 + v$ de la solution u_0 du problème (2.25) pour $u_b = 0$ et de la solution v du problème (2.25) pour $q = 0$. On supposera dans le cadre de cette démonstration que $\sigma_s = \sigma_s(x)$ et $\sigma_t = \sigma_t(x)$ pour simplifier. L'hypothèse de sous-criticité s'écrit donc $\frac{\sigma_s}{\sigma_t} < 1$. On rappelle que l'estimation standard donnée au théorème 1.2.3 s'écrit (pour C constante positive)

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\alpha} \left(\|q\|_{L^2} + \|u_b\|_{L^2_-} \right). \quad (2.27)$$

On commence par considérer le problème stationnaire homogène à source suivant :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t u_0(x, \vec{\Omega}) = (K u_0)(x) + q(x, \vec{\Omega}) \text{ pour } (x, \vec{\Omega}) \in X \quad (2.28)$$

avec les conditions aux limites homogènes

$$u_0(x, \vec{\Omega}) = 0 \text{ pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-. \quad (2.29)$$

Multiplions l'équation (2.28) par $u_0 + \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0$ et intégrons sur l'espace des phases, on obtient donc

$$\begin{aligned} & \int_X \sigma_t u_0 \left(u_0 + \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0 \right) dx d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0) \left(u_0 + \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0 \right) dx d\nu(\vec{\Omega}) \\ &= \int_X q \left(u_0 + \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0 \right) dx d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X \sigma_s \left(u_0 + \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0 \right) \left(\int_{S^2} u_0(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \right) dx d\nu(\vec{\Omega}). \end{aligned}$$

Cette égalité s'écrit aussi

$$\begin{aligned} & \int_X (R u_0) u_0 + 2 \int_X u_0 (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0) dx d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X \frac{1}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0)^2 dx d\nu(\vec{\Omega}) \\ &= \int_X q \left(u_0 + \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0 \right) dx d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X \frac{\sigma_s}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0) \left(\int_{S^2} u_0(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \right) dx d\nu(\vec{\Omega}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Commençons par majorer les termes du membre de droite de l'égalité (2.30). En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (\mathcal{D} étant borné), on trouve

$$\int_X q u_0 dx d\nu(\vec{\Omega}) \leq \|q\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2},$$

et

$$\int_X q \frac{1}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0) dx d\nu(\vec{\Omega}) \leq \frac{1}{\sigma_0} \|q\|_{L^2} \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0\|_{L^2}.$$

De plus, par l'hypothèse de sous-criticité, on a $\frac{\sigma_s}{\sigma_t} < 1$ et :

$$\begin{aligned} & \left| \int_X \frac{\sigma_s}{\sigma_t} \left(\int_{S^2} u_0(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \right) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0(x, \vec{\Omega})) dx d\nu(\vec{\Omega}) \right| \\ & \leq \int_{\mathcal{D}} \left(\int_{S^2} |u_0(x, \vec{\Omega}')| d\nu(\vec{\Omega}') \right) \left(\int_{S^2} |\vec{\Omega}' \cdot \vec{\nabla} u_0(x, \vec{\Omega}')| d\nu(\vec{\Omega}') \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_{\mathcal{D}} \left(\int_{S^2} u_0^2(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{S^2} (\vec{\Omega}' \cdot \vec{\nabla} u_0(x, \vec{\Omega}'))^2 d\nu(\vec{\Omega}') \right)^{\frac{1}{2}} dx \\
 &\leq \|u_0\|_{L^2} \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0\|_{L^2} \\
 &\leq \frac{1}{\alpha} \|q\|_{L^2} \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0\|_{L^2}.
 \end{aligned}$$

On obtient donc l'inégalité suivante pour les termes de droite de (2.30)

$$\begin{aligned}
 &\int_X q(u_0 + \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0) dx d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X \frac{\sigma_s}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0) \left(\int_{S^2} u_0(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \right) dx d\nu(\vec{\Omega}) \\
 &\leq \|q\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} + \frac{1}{\sigma_0} \|q\|_{L^2} \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0\|_{L^2} + \frac{1}{\alpha} \|q\|_{L^2} \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0\|_{L^2}.
 \end{aligned}$$

Minorons le terme de gauche de l'égalité (2.30). En utilisant le caractère auto-adjoint de l'opérateur R défini dans la proposition 2.1.1 et la constante α de l'énoncé du théorème, on obtient

$$\begin{aligned}
 &\int_X (Ru_0)u_0 + 2 \int_X u_0(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0) dx d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X \frac{1}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0)^2 dx d\nu(\vec{\Omega}) \\
 &\geq \alpha \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\sigma_\infty} \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0\|_{L^2}^2 + \int_X 2u_0(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0) dx d\nu(\vec{\Omega}).
 \end{aligned}$$

On utilise alors la formule de Green (2.11) dans le but de faire intervenir les termes de bord, soit

$$\int_X 2u_0(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0) dx d\nu(\vec{\Omega}) = \int_{\Gamma^+} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) u_0^2 ds d\nu(\vec{\Omega}).$$

Au final, on obtient donc l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
 &\alpha \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\sigma_\infty} \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2_+}^2 \\
 &\leq \|q\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} + \frac{1}{\sigma_0} \|q\|_{L^2} \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0\|_{L^2} + \frac{1}{\alpha} \|q\|_{L^2} \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0\|_{L^2}.
 \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
 \|u_0\|_W^2 &= \|u_0\|_{L^2}^2 + \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2_+}^2 \\
 &\leq \beta_0 \|q\|_{L^2} \|u_0\|_W
 \end{aligned}$$

où $\beta_0 = \frac{\max\left(1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\sigma_0}\right)}{\min\left(1, \alpha, \frac{1}{\sigma_\infty}\right)}$ est une constante positive dépendant uniquement de α , σ_∞ et σ_0 . On

s'intéresse maintenant à la résolution (dans W) du problème stationnaire non homogène suivant :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t v(x, \vec{\Omega}) = (Kv)(x) \text{ pour } (x, \vec{\Omega}) \in X \quad (2.31)$$

avec les conditions aux limites non homogènes suivantes

$$v(x, \vec{\Omega}) = u_b \text{ pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-. \quad (2.32)$$

Nous allons chercher à montrer l'estimation suivante : il existe C constante positive telle que :

$$\|v\|_W \leq C \|u_b\|_{L^2}.$$

Multiplions l'équation (2.31) par $\frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v$ et intégrons sur l'espace des phases, on a

$$\begin{aligned} & \int_X v(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v) dx d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X \frac{1}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v)^2 dx d\nu(\vec{\Omega}) \\ &= \int_X \frac{\sigma_s}{\sigma_t} \left(\int_{S^2} v(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \right) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v) dx d\nu(\vec{\Omega}). \end{aligned} \quad (2.33)$$

. On utilise alors l'inégalité de Young pour tout $\lambda > 0$ dans le but de majorer le second membre, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_X \left(\int_{S^2} v(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \right) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v) dx d\nu(\vec{\Omega}) \\ & \leq \frac{1}{2\lambda} \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|v\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

On utilise alors la formule de Green dans W pour faire apparaître les termes de bord, on trouve l'inégalité suivante

$$\frac{1}{\sigma_\infty} \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|v\|_{L^2_+}^2 \leq \|u_b\|_{L^2_-}^2 + \frac{1}{2\lambda} \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|v\|_{L^2}^2.$$

Par ailleurs, on a vu dans la démonstration du théorème 2.1.1 que

$$\|v\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\alpha} \|u_b\|_{L^2_-}^2,$$

où α est la constante positive donnée dans la proposition 2.1.1. On utilise alors cette estimation L^2 et on choisit alors $\lambda > \frac{\sigma_\infty}{2}$, par exemple $\lambda = \sigma_\infty$, pour obtenir

$$\|v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\sigma_\infty} \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|v\|_{L^2_+}^2 \leq \|u_b\|_{L^2_-}^2 + \frac{1}{2\sigma_\infty} \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v\|_{L^2}^2 + \frac{\sigma_\infty}{4\alpha} \|u_b\|_{L^2_-}^2 + \frac{1}{2\alpha} \|u_b\|_{L^2_-}^2.$$

On obtient donc au final

$$\|v\|_W^2 \leq \gamma_0 \|u_b\|_{L^2_-}^2,$$

où $\gamma_0 = \frac{\max(2, \frac{\sigma_\infty}{2\alpha}, \frac{1}{\alpha})}{\min(1, \frac{1}{\sigma_\infty})}$ est une constante positive dépendant uniquement de α et σ_∞ . En

combinant les estimations sur v et u_0 , on obtient l'estimation souhaitée pour u solution du problème à source stationnaire non homogène (2.25)

$$\|u\|_W \leq C \left(\|q\|_{L^2} + \|u_b\|_{L^2_-} \right). \quad (2.34)$$

où $C = C(\sigma_0, \sigma_\infty, \alpha)$ est une constante positive indépendante de u . ■

Par la suite, nous utiliserons le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.1

La solution $u(x, \vec{\Omega})$ dans W_0 du problème :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t(x) u(x, \vec{\Omega}) = K u(x, \vec{\Omega}), & \text{dans } X, \\ u|_{\Gamma^-} = 0, & \text{sur } \Gamma^- \end{cases}$$

est identiquement nulle dans W_0 .

DÉMONSTRATION - La preuve est triviale. ■

On rappelle aussi le résultat suivant (utile pour démontrer des propriétés de coercivité notamment) établi par G.Bal dans sa thèse [13] et qui consiste en une généralisation de l'inégalité de Poincaré dans les espaces fonctionnels du transport présentés ci-avant

Théorème 2.1.3 (Inégalité de Poincaré en transport)

Soit $u(x, \vec{\Omega}) \in W$. Alors $u \in L^2$ et il existe une constante C indépendante de u telle que

$$\|u\|_{L^2} \leq C \left(\|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2_-} \right) \quad (2.35)$$

DÉMONSTRATION - Voir [13] pour la démonstration. ■

Nous allons maintenant introduire la forme du second ordre auto-adjointe du transport.

2.2 Formulation du second ordre auto-adjointe du transport

On se propose d'établir la forme du second ordre auto-adjointe de l'équation du transport. On commence par énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.2.1

Dans le cas où les sections efficaces sont isotropes (i.e. $\sigma_s = \sigma_s(x)$ et $\sigma_a = \sigma_a(x)$) et sous les hypothèses du théorème 2.1.2, l'opérateur R^{-1} agissant de L^2 dans L^2 est donné par

$$R^{-1}u(x, \vec{\Omega}) = \frac{\sigma_s}{\sigma_a \sigma_t} \int_{\mathcal{S}^2} u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') + \frac{1}{\sigma_t} u(x, \vec{\Omega}). \quad (2.36)$$

DÉMONSTRATION - On vérifie que

$$\begin{aligned} R^{-1}Ru(x, \vec{\Omega}) &= \frac{\sigma_s}{\sigma_a \sigma_t} \int_{\mathcal{S}^2} Ru(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') + \frac{1}{\sigma_t} Ru(x, \vec{\Omega}) \\ &= \frac{\sigma_s \sigma_t}{\sigma_a \sigma_t} \int_{\mathcal{S}^2} u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') - \frac{\sigma_s \sigma_s}{\sigma_a \sigma_t} \int_{\mathcal{S}^2} u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') + u(x, \vec{\Omega}) - \frac{\sigma_s}{\sigma_t} \int_{\mathcal{S}^2} u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \\ &= u(x, \vec{\Omega}). \end{aligned}$$

On cherche donc à établir la forme du second ordre de l'équation du transport, on part de l'équation du premier ordre suivante, pour $(x, \vec{\Omega}) \in X$:

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u - Ku = q \quad (2.37)$$

d'où on déduit la relation :

$$u = -R^{-1} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + R^{-1}q, \quad (2.38)$$

puis, en substituant (2.38) dans (2.37), on obtient la forme auto-adjointe du second ordre de l'équation du transport souhaitée :

$$-\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\Omega} R^{-1} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u \right] + Ru = q - \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} [R^{-1}q]. \quad (2.39)$$

On remarque que cette équation possède la même structure que les équations du flux pair et du flux impair qui est décrite dans le paragraphe 1.6. Il est nécessaire d'exhiber les conditions aux

limites induites par cette nouvelle formulation. Les conditions de flux entrant pour la formulation SAAF sont identiques à celles qu'on utilise pour les formes standards de l'équation du transport. Sur la portion de frontière Γ^- correspondant aux directions entrantes dans le domaine \mathcal{D} , on impose donc la condition suivante :

$$u(x, \vec{\Omega}) = u_b(x, \vec{\Omega}). \quad (2.40)$$

Pour les formes du premier ordre de l'équation du transport, il n'est pas nécessaire d'avoir une condition aux limites sur la portion de frontière Γ^+ correspondant aux directions entrantes. En revanche, la formulation SAAF requiert une condition aux limites supplémentaires sur Γ^+ . Cette condition est obtenue en imposant au flux angulaire sur Γ^+ de satisfaire à l'équation du premier ordre du transport, i.e. :

$$u(x, \vec{\Omega}) + R^{-1}\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u = R^{-1}q(x, \vec{\Omega}) \text{ p.p. sur } \Gamma^+. \quad (2.41)$$

Notons que la prise en compte des conditions de réflexion spéculaire (voir chapitre 1) s'effectue de la même manière que pour l'équation du premier ordre.

Remarque 2.2.1

Notons que l'un des inconvénients majeurs de cette formulation du second ordre réside dans la régularité des sources et des sections efficaces. En effet, nous remarquons la présence d'un terme source supplémentaire dans l'équation (2.39) :

$$\tilde{q} = \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} [R^{-1}q].$$

On doit donc imposer plus de régularité sur les sources et les sections efficaces que pour un problème du premier ordre. Typiquement, dans un milieu hétérogène marqué par la succession de milieux transparents et de milieux opaques (nous reviendrons au chapitre 6 sur la définition de ces notions et l'étude de ces problèmes particuliers), les sources et/ou les sections efficaces peuvent être discontinues, on s'attend donc à des difficultés numériques lors de la résolution de tels problèmes.

2.3 Formulation mixte

Nous continuons de nous intéresser à la forme (2.1) de l'équation du transport. Nous établissons dans un premier temps une forme mixte de l'équation du transport en utilisant directement la forme du premier ordre (2.1), puis nous effectuons le lien qui existe entre la forme du second ordre présentée au paragraphe précédent et ces formes mixtes.

On introduit les notations suivantes :

$$P_{\Omega} = \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega} = (\Omega_i \Omega_j)_{1 \leq i, j \leq d}, \quad (2.42)$$

on a donc pour tout \vec{g} de \mathbb{R}^d :

$$P_{\Omega} \vec{g} = (\vec{\Omega} \cdot \vec{g}) \vec{\Omega}.$$

On introduit aussi

$$P_{\Omega^{\perp}} = I_{\mathbb{R}^3} - P_{\Omega}, \quad (2.43)$$

où P_Ω représente la projection sur le vecteur $\vec{\Omega}$ et P_{Ω^\perp} la projection sur l'hyperplan orthogonal à $\vec{\Omega}$ dans \mathbb{R}^3 .

On rappelle que l'on a introduit la densité de courant angulaire $\vec{g} = \vec{\Omega}u$. On cherche désormais à exhiber une formulation mixte du transport. On part de l'équation (2.37) pour obtenir la relation

$$u = -R^{-1}\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}u + R^{-1}q, \quad (2.44)$$

alors, en multipliant cette équation par $\vec{\Omega}$ et en introduisant la densité de courant angulaire $\vec{g} = \vec{\Omega}u$, on obtient

$$\vec{g} = -\vec{\Omega}R^{-1}\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}u + \vec{\Omega}R^{-1}q. \quad (2.45)$$

En prenant le produit scalaire (de \mathbb{R}^3) de l'équation (2.45) avec le vecteur $\vec{\Omega}$, on trouve

$$\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = -R^{-1}\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}u + R^{-1}q. \quad (2.46)$$

En appliquant l'opérateur R puis en multipliant par $\vec{\Omega}$ on obtient la relation suivante

$$\vec{\Omega}R(\vec{g} \cdot \vec{\Omega}) = -P_\Omega \vec{\nabla}u + \vec{\Omega}q, \quad (2.47)$$

soit

$$\sigma_t \vec{g} + P_\Omega \vec{\nabla}u = \vec{\Omega}K(\vec{g} \cdot \vec{\Omega}) + \vec{\Omega}q. \quad (2.48)$$

La présence des deux quantités u et \vec{g} suggère alors une formulation mixte qui consiste à calculer simultanément le flux angulaire u et la densité de courant angulaire \vec{g} . La formulation mixte du problème du transport s'écrit alors : chercher $u(x, \vec{\Omega})$ et $\vec{g}(x, \vec{\Omega})$, solutions du système :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} + \sigma_t u = q + Ku & \text{dans X,} \\ P_\Omega \vec{\nabla}u + \sigma_t \vec{g} = \vec{\Omega}q + \vec{\Omega}K(\vec{\Omega} \cdot \vec{g}) & \text{dans X,} \end{cases} \quad (2.49)$$

où les conditions aux limites associées sont :

$$\begin{cases} u = u_b & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \\ \vec{g} = \vec{\Omega}u & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^+. \end{cases} \quad (2.50)$$

En éliminant l'inconnue vectorielle densité de courant angulaire \vec{g} (en utilisant (2.45)), on retrouve la forme dite du second ordre de l'équation du transport :

$$\begin{cases} -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\sigma_t} P_\Omega \vec{\nabla}u \right) + \sigma_t u = Ku + q - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\Omega}Ku + \vec{\Omega}q}{\sigma_t} \right), & \text{dans X,} \\ u = u_b, & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \\ \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}u + \sigma_t u = Ku + q, & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^+ \end{cases} \quad (2.51)$$

Remarquons que pour une direction fixée $\vec{\Omega}$, cette équation est une équation elliptique dégénérée (sur le sujet voir H.Brezis [24], J.J.Kohn, L.Nirenberg [51], A.M.Oberman [66] et O.Oleinik, E.Radkevitch [67]). Nous étudierons succinctement un problème elliptique très simple en annexe.

Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, cette forme des équations du transport a été introduite dans [62] sous le nom de Self-Adjoint Angular Flux Equation (SAAF), on notera la présence (indispensable) d'une condition aux limites supplémentaire sur Γ^+ pour que le problème soit bien posé, cette condition aux limites imposant au flux angulaire de satisfaire à la forme standard du premier ordre de l'équation du transport sur Γ^+ . Cette condition aux limites particulière est d'ailleurs retrouvée dans la théorie des équations elliptiques dégénérées dans un cadre plus général [51]. Dans le cadre de la formulation mixte, on impose donc sur Γ^+

$$u = R^{-1}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u) + R^{-1}q,$$

donc, avec (2.45)

$$\vec{\Omega} u = \vec{\Omega} R^{-1}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u) + \vec{\Omega} R^{-1}q = \vec{g}.$$

On retrouve la condition aux limite (2.50) sur Γ^+ .

Remarque 2.3.1

On pourrait aussi introduire une formulation mixte en partant directement de l'équation (2.39) et en posant

$$\vec{g} = -\frac{1}{\sigma_t} P_\Omega \vec{\nabla} u, \quad (2.52)$$

et en considérant le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} + \sigma_t u = Ku + q - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\Omega} Ku + \vec{\Omega} q}{\sigma_t} \right) & \text{dans } X, \\ P_\Omega \vec{\nabla} u + \sigma_t \vec{g} = 0 & \text{dans } X, \\ u = u_b & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \\ \vec{g} = \vec{\Omega} u - \frac{1}{\sigma_t} (\vec{\Omega} q + \vec{\Omega} Ku) & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^+. \end{array} \right. \quad (2.53)$$

La quantité \vec{g} n'a ici plus de signification physique cependant la forme du système (2.53) est plus proche des formulations mixtes standards dans le sens où la quantité duale \vec{g} est directement reliée au gradient de la quantité primale u . Néanmoins, cette formulation impose une régularité plus forte sur la source q et sur le flux scalaire et la formulation (2.49) est sans doute plus naturelle en s'obtenant directement à partir de la forme du premier ordre de l'équation du transport. Nous conserverons la formulation (2.49) dans la suite de ce manuscrit.

Remarque 2.3.2

Dans ces travaux [47], C.J.Gesh utilise la formulation mixte suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} + \sigma_t u = Ku + q & \text{dans } X, \\ P_\Omega \vec{\nabla} u + \sigma_t \vec{g} = \vec{\Omega} Ku + \vec{\Omega} q & \text{dans } X, \\ u = u_b & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \\ \vec{g} = \vec{\Omega} u & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^+. \end{array} \right. \quad (2.54)$$

Cette formulation (2.54) est obtenue directement à partir de l'équation du premier ordre (2.37) en multipliant simplement cette équation par $\vec{\Omega}$ et en remplaçant formellement $\vec{\Omega}u$ par \vec{g} . L'inversibilité de l'opérateur R n'est donc pas utilisée. Nous verrons (chapitre 6) que cela engendre quelques désagréments numériques.

2.4 Equivalence entre la formulation mixte et le problème modèle

Dans cette section, nous proposons de montrer l'équivalence entre la formulation mixte (2.49) associée aux conditions aux limites (2.50) et le problème initial (2.1). Nous démontrons donc la proposition suivante

Proposition 2.4.1

La formulation mixte du transport (2.49) associée aux conditions aux limites (2.50) est équivalente au problème standard du transport (2.1).

DÉMONSTRATION - Soient (u, \vec{g}) solution du système (2.49).

On introduit $\vec{w} = \vec{g} - \vec{\Omega}u$, le système (2.49) et les conditions aux limites (2.50) donne :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{g} - \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u \right) - \sigma_t \left(\vec{g} - \vec{\Omega}u \right) = \vec{\Omega}Ku - \vec{\Omega}K(\vec{\Omega} \cdot \vec{g}), & \text{dans } X, \\ u|_{\Gamma^-} = u_b, \\ \vec{g}|_{\Gamma^+} = \vec{\Omega}u|_{\Gamma^+}, \end{cases} \quad (2.55)$$

soit :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{w} \right) - \sigma_t \vec{w} + \vec{\Omega}K(\vec{\Omega} \cdot \vec{w}) = 0, & \text{dans } X, \\ \vec{w}|_{\Gamma^-} = \vec{g} - u_b \vec{\Omega}, \\ \vec{w}|_{\Gamma^+} = \vec{0}. \end{cases} \quad (2.56)$$

On a donc $\vec{w} = \frac{1}{\sigma_t} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{w} \right) \vec{\Omega} - \vec{\Omega}K(\vec{\Omega} \cdot \vec{w})$, le vecteur \vec{w} est donc colinéaire à $\vec{\Omega}$ donc \vec{g} l'est aussi.

Il existe donc une fonction ϕ telle que

$$\vec{g} = \phi \vec{\Omega}.$$

Montrons alors que $\phi = u$. On a

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}(\phi - u) - (\sigma_t - K)(\phi - u) = 0, & \text{dans } X, \\ \phi|_{\Gamma^+} = u|_{\Gamma^+}, \end{cases} \quad (2.57)$$

soit, en notant $\beta = u - \phi$:

$$\begin{cases} (-\vec{\Omega}) \cdot \vec{\nabla}\beta + (\sigma_t - K)\beta = 0, & \text{dans } X, \\ \beta|_{\Gamma^+} = 0, \end{cases} \quad (2.58)$$

et d'après le corollaire (2.1.1), $\beta = 0$ d'où $u = \phi$, donc $\vec{g} = \vec{\Omega}u$. La réciproque est immédiate.

■

2.5 Cadre fonctionnel pour la formulation mixte

Dans ce paragraphe, nous introduisons un nouveau cadre fonctionnel adapté à l'étude des formulations mixtes du transport. Nous considérerons uniquement le cadre $L^2(X)$ dans ce paragraphe. L'analyse mathématique et l'utilisation des formulations mixtes nécessitent la définition et l'utilisation de l'espace de Hilbert $H(\text{div}; \mathcal{D})$ défini sur \mathcal{D} comme suit :

$$H(\text{div}; \mathcal{D}) = \{ \vec{g} \in (L^2(\mathcal{D}))^3, \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \in L^2(\mathcal{D}) \}, \quad (2.59)$$

avec la norme

$$\|\vec{g}\|_{H(\text{div}; \mathcal{D})}^2 = \|\vec{g}\|_{(L^2(\mathcal{D}))^3}^2 + \|\vec{\nabla} \cdot \vec{g}\|_{L^2(\mathcal{D})}^2. \quad (2.60)$$

Il est alors possible de définir $\vec{g} \cdot \vec{n}|_{\partial \mathcal{D}}$, la trace normale de \vec{g} sur $\partial \mathcal{D}$.

On a le lemme suivant :

Lemme 2.5.1

Pour $\vec{g} \in H(\text{div}; \mathcal{D})$, on peut définir $\vec{g} \cdot \vec{n}|_{\partial \mathcal{D}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{D})$ et on a la formule de Green,

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} u + \int_{\mathcal{D}} \vec{\nabla} u \cdot \vec{g} = \langle \vec{g} \cdot \vec{n}, u \rangle, \quad \forall u \in H^1(\mathcal{D}).$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{D})$ et $H^{\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{D})$.

Pour l'étude du problème variationnel mixte du transport, on introduit l'espace :

$$H_{\Omega}(\text{div}; X) = \{ \vec{g} \in (L^2)^3; \vec{\nabla} \cdot (P_{\Omega} \vec{g}) \in L^2 \}, \quad (2.61)$$

et

$$Y(X) = \{ \vec{g} \in H_{\Omega}(\text{div}; X); P_{\Omega} \vec{g} = \vec{g}; \vec{g} \in (L^2(\Gamma^+))^3 \}. \quad (2.62)$$

On définit alors un produit scalaire sur Y de la façon suivante :

$$(\vec{g}, \vec{h})_Y = \int_X \vec{g} \cdot \vec{h} + \int_X \vec{\nabla} \cdot (P_{\Omega} \vec{g}) \vec{\nabla} \cdot (P_{\Omega} \vec{h}) + \int_{\Gamma^+} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \vec{g} \cdot \vec{h}. \quad (2.63)$$

La norme correspondante sur Y est donnée par :

$$\|\vec{g}\|_Y^2 = \|\vec{g}\|_{(L^2)^3}^2 + \|\vec{\nabla} \cdot (P_{\Omega} \vec{g})\|_{L^2}^2 + \|\vec{g}\|_{(L^2_+)^3}^2. \quad (2.64)$$

Proposition 2.5.1

L'espace Y muni du produit scalaire défini par (2.63) est un espace de Hilbert.

DÉMONSTRATION - Le produit scalaire que l'on a défini sur Y est une forme bilinéaire symétrique et positive par conséquence de la définition du produit scalaire usuel de L^2 , Y est donc un espace pré-hilbertien. Montrons que $(Y, \|\cdot\|_Y)$ est complet; soit \vec{g}_n une suite de Cauchy de $(Y, \|\cdot\|_Y)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N; \forall (p, q), p > N, q > N \Rightarrow \|\vec{g}_p - \vec{g}_q\|_Y < \varepsilon$$

alors

$$\begin{cases} \|\vec{g}_p - \vec{g}_q\|_{(L^2)^3} < \varepsilon, \\ \|\vec{\nabla} \cdot (P_{\Omega} \vec{g}_p) - \vec{\nabla} \cdot (P_{\Omega} \vec{g}_q)\|_{L^2} < \varepsilon, \\ \|\vec{g}_p - \vec{g}_q\|_{(L^2_+)^3} < \varepsilon, \end{cases}$$

donc les suites \vec{g}_n , $\vec{\nabla} \cdot (P_\Omega \vec{g}_n)$ et $\vec{g}_n|_{\Gamma^+}$ sont de Cauchy respectivement dans $(L^2)^3$, L^2 et $(L^2_+)^3$ qui sont des espaces de Hilbert complets donc il existe $\vec{g} \in (L^2)^3$, $v \in L^2$ et $\vec{g}^+ \in (L^2_+)^3$ tels que :

$$\vec{g}_n \longrightarrow \vec{g} \text{ dans } (L^2)^3,$$

$$\vec{\nabla} \cdot (P_\Omega \vec{g}_n) \longrightarrow v \text{ dans } L^2,$$

et

$$\vec{g}_n|_{\Gamma^+} \longrightarrow \vec{g}^+|_{\Gamma^+} \text{ dans } (L^2_+)^3.$$

Montrons que $v = \vec{\nabla} \cdot (P_\Omega \vec{g})$, soit $\varphi \in C_c^\infty(X)$, au sens des distributions, on a :

$$\begin{aligned} \left| \langle v - \vec{\nabla} \cdot (P_\Omega \vec{g}), \varphi \rangle \right| &= \left| \langle v - \vec{\nabla} \cdot (P_\Omega \vec{g}_n), \varphi \rangle + \langle \vec{\nabla} \cdot (P_\Omega \vec{g}_n) - \vec{\nabla} \cdot (P_\Omega \vec{g}), \varphi \rangle \right| \\ &\leq \left| \langle v - \vec{\nabla} \cdot (P_\Omega \vec{g}_n), \varphi \rangle \right| + \left| \langle \vec{g}_n - \vec{g}, P_\Omega \vec{\nabla} \varphi \rangle \right|. \end{aligned}$$

D'où $v = \vec{\nabla} \cdot (P_\Omega \vec{g})$ et donc $\vec{g} \in H_\Omega(\text{div}; X)$.

De plus, montrons que $P_\Omega \vec{g} = \vec{g}$, soit \vec{h} une fonction vectorielle test, au sens des distributions, on a :

$$\begin{aligned} \left| \langle \vec{g} - P_\Omega \vec{g}, \vec{h} \rangle \right| &\leq \left| \langle \vec{g} - P_\Omega \vec{g}_n, \vec{h} \rangle \right| + \left| \langle P_\Omega \vec{g}_n - P_\Omega \vec{g}, \vec{h} \rangle \right| \\ &= \left| \langle \vec{g} - \vec{g}_n, \vec{h} \rangle \right| + \left| \langle \vec{g}_n - \vec{g}, P_\Omega \vec{h} \rangle \right|. \end{aligned}$$

On a donc aussi $P_\Omega \vec{g} = \vec{g}$. Par ailleurs, la suite $\vec{g}_n \in Y$ donc $\vec{g}_n = \vec{\Omega} \phi_n$ où $\phi_n \in W$, on a donc $\phi_n \longrightarrow \phi$ dans W car W est un Hilbert. En particulier, $\phi_n|_{\Gamma^+} \longrightarrow \phi^+$ et $\phi^+ = \phi|_{\Gamma^+}$. On a donc $\vec{g}^+|_{\Gamma^+} = \vec{g}|_{\Gamma^+}$ et $\vec{g} \in Y$. ■

Remarque 2.5.1

L'espace de Hilbert Y est un sous espace fermé de $H(\text{div}; X)$ pour la norme de $H(\text{div}; X)$.

Remarque 2.5.2

Notons que pour tout $u \in W$ et $\vec{g} \in Y$, on a la formule de Green :

$$\int_X P_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{g} \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X u \vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{g}] \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) = \int_\Gamma (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{g}) u \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}). \quad (2.65)$$

2.6 Existence et unicité du problème mixte du transport

Nous pouvons énoncer le résultat d'existence suivant :

Proposition 2.6.1

Sous les hypothèses du théorème 2.1.2 et de la proposition 1.2.3 (pour $p = 2$), le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} + \sigma_t u = Ku + q & \text{dans } X, \\ P_\Omega \vec{\nabla} u + \sigma_t \vec{g} = \vec{\Omega} \left(K(\vec{\Omega} \cdot \vec{g}) + q \right) & \text{dans } X, \\ u = u_b & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \\ \vec{g} = \vec{\Omega} u & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^+. \end{array} \right. \quad (2.66)$$

admet une unique solution $(\vec{g}, u) \in Y \times L^2(X)$ et on a

$$(\|u\|_{L^2(X)} + \|\vec{g}\|_Y) \leq C (\|q\|_{L^2(X)} + \|u_b\|_{L^2(\Gamma^-)}),$$

où C est une constante positive.

DÉMONSTRATION - On utilise la proposition 2.4.1 pour montrer l'équivalence entre le problème mixte du transport et le problème initial du transport. La proposition 1.2.3 et le théorème 2.1.2 pour conclure à l'existence et l'unicité de la solution. De plus la solution u du problème de transport initial appartient à l'espace W , on a donc $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u \in L^2(X)$ soit $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\Omega} u) \in L^2(X)$ or, $\vec{g} = \vec{\Omega} u$ ce qui donne la régularité $L^2(X)$ sur $\vec{\nabla} \cdot \vec{g}$ et $u|_{\Gamma^+} \in L^2(\Gamma^+)$ pour un domaine ouvert convexe borné d'où $\vec{g} \cdot \vec{n} \in L^2_+$. On obtient donc bien que \vec{g} appartient à Y et la régularité $L^2(X)$ suffit pour u et on a

$$\begin{aligned} \|\vec{g}\|_Y^2 &= \|u\|_{L^2(X)}^2 + \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u\|_{L^2(X)}^2 + \|u\|_{L^2(\Gamma^+)}^2 \\ &= \|u\|_W^2 \\ &\leq C (\|q\|_{L^2(X)} + \|u_b\|_{L^2(\Gamma^-)})^2. \end{aligned}$$

On en déduit l'estimation voulue d'après le théorème 2.1.2. ■

2.7 Cas du vide

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la résolution de l'équation du transport dans le vide et dans quelle mesure notre formulation mixte peut apporter des réponses à la prise en compte de ce cas extrême. En effet, lors de la construction d'une méthode de résolution numérique de l'équation du transport, il est appréciable qu'elle prenne en compte tout type de milieux.

On rappelle qu'un milieu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ est vide si :

- la section efficace totale σ_t est nulle dans \mathcal{D} ,
- la source q est nulle dans \mathcal{D} .

Nous allons présenter dans ce paragraphe la forme du second ordre de l'équation du transport dans le vide. Nous montrerons les difficultés liées à cette approche et nous essaierons de répondre à certaines d'entre elles via l'introduction d'une formulation mixte dans le vide. Nous nous intéressons en particulier aux problèmes liés aux interfaces entre un milieu vide et un autre type de milieu.

2.7.1 Formulation du second ordre

Pour obtenir l'équation du second ordre du transport dans le vide, on considère l'équation (2.39) dans un milieu purement absorbant (i.e. $q = 0$ et $f = 0$), on suppose en outre que la section efficace est constante en espace, on obtient :

$$-\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\Omega} \frac{1}{\sigma_a} \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u \right) \right] + \sigma_a u = 0. \quad (2.67)$$

La section efficace étant supposée constante, on peut multiplier l'équation par σ_a pour obtenir

$$-\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\Omega} \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u \right) \right] + \sigma_a^2 u = 0. \quad (2.68)$$

Enfin, lorsque σ_a tend vers zéro, on obtient la forme désirée du second ordre de l'équation du transport dans le vide, soit

$$-\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\Omega} \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u \right) \right] = 0. \quad (2.69)$$

Il reste à spécifier les conditions aux limites. Les conditions aux limites de flux entrant restent inchangées et on impose toujours :

$$u = u_b \text{ sur } \Gamma^-. \quad (2.70)$$

Pour les conditions sortantes, on procède comme dans le paragraphe 2.1 en imposant au flux scalaire de satisfaire à l'équation du premier ordre sur Γ^+ , on a donc :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u = 0 \text{ sur } \Gamma^+. \quad (2.71)$$

Nous renvoyons le lecteur vers l'article de Morel et McGhee [62] pour des précisions au sujet de cette forme (2.67) de l'équation du transport. On peut écrire la proposition suivante

Proposition 2.7.1

Le problème du transport dans le vide

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) = 0 & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in X, \\ u(x, \vec{\Omega}) = u_b(x, \vec{\Omega}) & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-. \end{cases} \quad (2.72)$$

est équivalent au problème

$$\begin{cases} -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega} \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) \right) = 0 & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in X, \\ u(x, \vec{\Omega}) = u_b(x, \vec{\Omega}) & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \\ \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) = 0 & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^+. \end{cases} \quad (2.73)$$

DÉMONSTRATION - L'unique solution du problème (2.72) s'écrit sous forme intégrale

$$u(x, \vec{\Omega}) = u_b(x_s, \vec{\Omega}) \exp(-\alpha(x, x_s))$$

où x_s est le point du bord défini au paragraphe I.1.6 par (1.63) et $\alpha(x, x_s)$ est le parcours optique défini au paragraphe I.1.6 par (1.61). Or, dans notre cas, $\alpha(x, x_s)$ est évidemment nul. Donc, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $u(x, \vec{\Omega}) = u_b(x_s)$. De même, on montre (essentiellement en résolvant une équation de diffusion 1D dans la direction $\vec{\Omega}$) que l'unique solution du problème (2.73) vaut, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $u(x, \vec{\Omega}) = u_b(x_s)$. Ce qui termine la preuve. ■

La forme du second-ordre du transport peut donc prendre en compte le vide en introduisant une condition aux limite adaptée sur la frontière Γ^+ .

2.7.2 Formulation mixte

Intéressons nous à l'équation (2.67), on introduit l'inconnue supplémentaire $\vec{g} = P_\Omega \vec{\nabla} u$. Le problème du transport du second ordre dans un domaine \mathcal{D} entièrement vide s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0 & \text{dans } X, \\ P_\Omega \vec{\nabla} u + \vec{g} = \vec{0} & \text{dans } X, \\ u = u_b & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \\ \vec{g} \cdot \vec{n} = 0 & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^+. \end{array} \right. \quad (2.74)$$

Notons que la quantité $\vec{g} = P_\Omega \vec{\nabla} u$ est différente de celle introduit précédemment. En particulier, nous n'avons plus l'égalité $\vec{g} = \vec{\Omega} u$. La formulation (2.74) est équivalente à la formulation (2.69) associée aux conditions aux limites (2.70) et (2.71).

2.7.3 Interfaces vide-matière

On considère ici le cas d'un domaine \mathcal{D} divisé en deux sous-domaines, \mathcal{D}_1 est domaine vide \mathcal{D}_2 contient de la matière, nous noterons $\partial\mathcal{D}_{12}$ la frontière entre ces deux domaines. Nous nous intéressons ici aux conditions de transmissions associées aux formulations mixtes de l'équation du transport dans chacun des sous-domaines. Nous supposons en outre que le scattering est nul dans le sous-domaine \mathcal{D}_2 pour simplifier les notations et on notera X_i la restriction de X au sous-domaine \mathcal{D}_i , idem pour les espaces de bords.

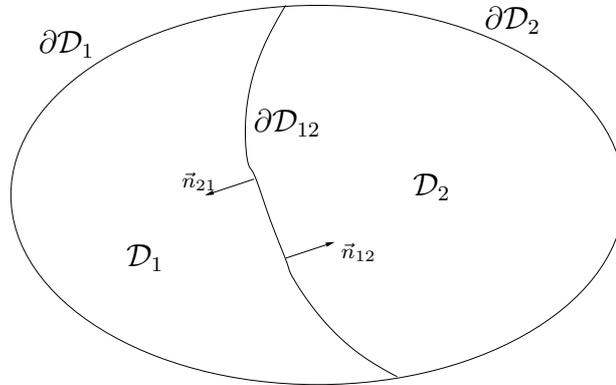


FIG. 2.1 – Domaine \mathcal{D}

Montrons la proposition suivante

Proposition 2.7.2

Le problème du transport dans \mathcal{D}

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t u = q & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in X, \\ u(x, \vec{\Omega}) = u_b(x, \vec{\Omega}) & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \\ \sigma_t = 0 & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in X_1, \\ q = 0 & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in X_1. \end{array} \right. \quad (2.75)$$

est équivalent aux problèmes mixtes couplés

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{g}_1 = 0 & \text{dans } X_1, \\ P_\Omega \vec{\nabla} u_1 + \vec{g}_1 = \vec{0} & \text{dans } X_1, \\ u_1 = u_b & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma_1^-, \\ u_1 = u_2 & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma_1^- \cap \Gamma_{12}, \\ \vec{g}_1 \cdot \vec{n} = 0 & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma_1^+. \end{cases} \quad (2.76)$$

et

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{g}_2 + \sigma_t u_2 = q & \text{dans } X_2, \\ P_\Omega \vec{\nabla} u_2 + \sigma_t \vec{g}_2 = q \vec{\Omega} & \text{dans } X_2, \\ u_2 = u_b & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma_2^-, \\ u_2 = u_1 & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma_2^- \cap \Gamma_{12}, \\ \vec{g}_2 = \vec{\Omega} u_2 & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma_2^+. \end{cases} \quad (2.77)$$

DÉMONSTRATION - On utilise la formulation intégrale des équations de transport (voir chapitre 1). ■

Le traitement d'un problème à interfaces vide-matière peut donc être traité en formulation mixte par une méthode du type décomposition de domaine. Nous reviendrons sur l'établissement d'une méthode générale de décomposition de domaine en annexe. Cela conduit donc à coupler deux formulations mixtes et donc deux schémas.

Bilan du chapitre 2

Nous avons donc mis en évidence toutes les notions et tous les outils qui vont être utilisés dans la suite de ce manuscrit. Nous sommes prêts à introduire les formulations variationnelles de l'équation du transport et en étudier quelques propriétés fondamentales ; c'est ce que nous allons voir dans le chapitre qui suit.

Chapitre 3

Formes variationnelles de l'équation du transport

Sommaire

3.1 Formulations variationnelles classiques du transport	51
3.1.1 Formulation variationnelle du flux pair	51
3.1.2 Une formulation variationnelle directe	52
3.2 Formulation variationnelle mixte du transport	53
3.3 Existence et unicité	57
3.4 Convergence des itérations sur le terme source	61

Dans ce chapitre, nous présentons les dernières évolutions théoriques concernant l'approximation variationnelle des équations du transport des neutrons. Nous montrons quelques problèmes abstraits présentés et étudiés notamment par L.Bourhara (voir [23]). Nous présentons ensuite une nouvelle approximation variationnelle basée sur la formulation mixte du transport. Nous prouvons l'existence et l'unicité de solution pour ce problème variationnel mixte. Nous montrons un résultat de convergence du problème variationnel de la source itérée. On considère le cas où la dimension $d = 3$ dans ce chapitre.

3.1 Formulations variationnelles classiques du transport

On rappelle ici les formulations variationnelles existantes pour les problèmes du second ordre du transport qui ont inspiré l'étude variationnelle du problème mixte.

3.1.1 Formulation variationnelle du flux pair

On rappelle la formulation du flux pair introduite à partir de l'équation stationnaire monocinétique du transport (en conservant les mêmes notations qu'au paragraphe 1.6) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} i) & -\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^+ + \sigma_t u^+ = \sigma_s(x)\phi + q \quad \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in X, \\ ii) & u^+ - \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^+ = 0 \quad \text{sur } \Gamma^- \\ iii) & u^+ + \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^+ = 0 \quad \text{sur } \Gamma^+. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

On remarque que l'opérateur de dérivation dans l'équation (3.1-i) est un opérateur du second ordre qui se rapproche de l'opérateur de diffusion classique. Pour étudier l'approche variationnelle du problème du flux pair, on introduit l'espace fonctionnel :

$$\mathcal{P} = \left\{ v \in W^2, |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|^{\frac{1}{2}} v \in L^2(\Gamma), v(\cdot, \vec{\Omega}) = v(\cdot, -\vec{\Omega}) \right\} \quad (3.2)$$

où l'espace W^2 est défini par (2.5). Cet espace \mathcal{P} est un espace de Hilbert pour la norme définie par :

$$\|v\|_{\mathcal{P}}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v\|_{L^2}^2 + \|\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|v\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

On écrit maintenant (3.1) sous forme variationnelle en multipliant l'équation (3.1-i) par une fonction test $v \in \mathcal{P}$ et en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_X \frac{1}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^+) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v) - \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^+) v + \int_X \sigma_t u^+ v = \int_X (\sigma_s \phi + q) v.$$

En tenant compte des conditions aux limites (3.1-ii) et (3.1-iii), on obtient :

$$- \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^+) v = \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma_t} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| u^+ v.$$

On peut alors définir la forme bilinéaire

$$a(u^+, v) = \int_X \frac{1}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^+) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v) + \int_X \sigma_t u^+ v + \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma_t} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| u^+ v \quad (3.3)$$

qui est coercive sur l'espace \mathcal{P} . On revient alors à la notation

$$Ku^+ = \sigma_s \phi$$

pour écrire le problème abstrait

$$a(u^+, v) - (Ku^+, v) = (q, v), \quad \forall v \in \mathcal{P}. \quad (3.4)$$

Sous l'hypothèse de sous-criticité

$$\sigma_t(x) > \sigma_s(x), \quad \forall x \in \mathcal{D},$$

on obtient l'existence d'une constante C strictement positive telle que

$$a(v, v) - (Kv, v) = a(v, v) - \int_X \sigma_s v^2 \geq Ca(v, v).$$

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui nous assure l'existence et l'unicité d'une solution $u^+ \in \mathcal{P}$ au problème abstrait (3.4).

3.1.2 Une formulation variationnelle directe

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'équation suivante :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t(x) u(x, \vec{\Omega}) = (Ku)(x) + q(x, \vec{\Omega}) & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in X \\ u(x, \vec{\Omega}) = u_b(x) & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-. \end{cases} \quad (3.5)$$

On introduit pour tout $(u, v) \in W \times W$ (W est l'espace fonctionnel introduit en (2.7)) :

$$a(u, v) = \int_X \frac{1}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v) dx d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X \sigma_t u v dx d\nu(\vec{\Omega}) + \int_{\Gamma^+} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| u v ds d\nu(\vec{\Omega}), \quad (3.6)$$

$$b(u, v) = \int_X \frac{1}{\sigma_t} (Ku) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v + \sigma_t v) dx d\nu(\vec{\Omega}) \quad (3.7)$$

et pour tout $v \in W$:

$$L(v) = \int_X \frac{1}{\sigma_t} q (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v + \sigma_t v) dx d\nu(\vec{\Omega}) - \int_{\Gamma^-} u_b v |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| ds d\nu(\vec{\Omega}). \quad (3.8)$$

On considère le problème abstrait suivant :

Trouver $u \in W_0 = \{u \in W; u|_{\Gamma^-} = 0\}$ tel que :

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in W_0. \quad (3.9)$$

Théorème 3.1.1

Sous les hypothèses du théorème (2.1.2), ce problème possède une unique solution et cette solution est celle du problème de transport (3.5).

DÉMONSTRATION - La preuve de ce théorème a été présentée par L.Bourhara [23], nous n'en donnerons ici que les grandes lignes. On suppose que le problème (3.5) admet une solution $u(x, \vec{\Omega})$ dans W . On multiplie alors l'équation (3.5) par $(\frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v + v)$ où $v(x, \vec{\Omega})$ est une fonction test dans W . On intègre ensuite sur l'espace des phases X et, via des manipulations adéquates, on retrouve (3.9). L'existence et l'unicité d'une solution au problème abstrait sont données par le théorème de Lax-Milgram via l'hypothèse de sous-criticité. ■

Nous présentons dans la suite de ce chapitre une formulation variationnelle (ou abstraite) associée aux formulations mixtes du transport introduites dans le chapitre 2. Nous montrons quelques résultats d'existence et d'unicité de solutions à ces problèmes abstraits en nous inspirant de Brezzi-Fortin [25] et Thomas-Roberts [69]. Le point clé de cette étude consiste en l'introduction d'espaces fonctionnels ad hoc pour l'étude du problème variationnel mixte. Nous ne sommes plus dans la situation de la théorie classique utilisant l'espace $H(\text{div}; \mathcal{D})$ mais il convient d'utiliser un espace plus contraignant introduit précédemment (2.62) et qui pour une direction angulaire $\vec{\Omega}$ fixée s'écrirait :

$$Y(\mathcal{D}) = \left\{ \vec{g} \in (L^2(\mathcal{D}))^3; \vec{\nabla} P_\Omega \vec{g} \in (L^2(\mathcal{D})); P_\Omega \vec{g} = \vec{g}; \vec{g} \in (L^2(\partial \mathcal{D}^+))^3 \right\}. \quad (3.10)$$

3.2 Formulation variationnelle mixte du transport

On s'intéresse dans ce paragraphe au cas d'une section efficace de scattering nulle (i.e. $f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = 0$) dans le but de simplifier les notations.

On rappelle que l'on étudie la formulation mixte du problème du transport suivante :

$$\begin{cases} \sigma_t \vec{g}(x, \vec{\Omega}) + P_\Omega \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) = \vec{\Omega} q(x, \vec{\Omega}) & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in X, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(x, \vec{\Omega}) + \sigma_t u(x, \vec{\Omega}) = q(x, \vec{\Omega}) & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in X, \\ u(x, \vec{\Omega}) = u_b(x, \vec{\Omega}) & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \\ \vec{g}(x, \vec{\Omega}) = \vec{\Omega} u & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^+. \end{cases} \quad (3.11)$$

Comme \vec{g} est colinéaire à $\vec{\Omega}$ ($P_{\Omega}\vec{g} = \vec{g}$), cette formulation mixte est évidemment équivalente à la formulation mixte suivante :

$$\begin{cases} \sigma_t \vec{g}(x, \vec{\Omega}) + P_{\Omega} \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) = \vec{\Omega} q(x, \vec{\Omega}) & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in X, \\ \vec{\nabla} \cdot [P_{\Omega} \vec{g}(x, \vec{\Omega})] + \sigma_t u(x, \vec{\Omega}) = q(x, \vec{\Omega}) & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in X, \\ u(x, \vec{\Omega}) = u_b(x, \vec{\Omega}) & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \\ \vec{g}(x, \vec{\Omega}) = \vec{\Omega} u & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^+. \end{cases} \quad (3.12)$$

Nous introduisons cette formulation (3.12) dans le but d'obtenir une écriture symétrique du système mixte. Cette forme symétrique du système mixte facilitera notre étude théorique par la suite. Nous allons à présent définir le problème variationnel mixte associé au système (3.12).

Pour tout $(\vec{g}, \vec{h}) \in Y \times Y$, on introduit :

$$a(\vec{g}, \vec{h}) = \int_X \sigma_t \vec{g} \cdot \vec{h} \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_{\Gamma^+} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \vec{g} \cdot \vec{h} \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}). \quad (3.13)$$

Pour tout $(u, \vec{h}) \in L^2 \times Y$, on introduit :

$$b(u, \vec{h}) = - \int_X u \vec{\nabla} \cdot [P_{\Omega} \vec{h}] \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}). \quad (3.14)$$

Pour tout $(u, v) \in L^2 \times L^2$, on introduit :

$$d(u, v) = \int_X \sigma_t u v \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}), \quad (3.15)$$

pour tout $\vec{h} \in Y$:

$$l_1(\vec{h}) = \int_X q(x, \vec{\Omega}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{h}) \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_{\Gamma^-} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| u_b (\vec{\Omega} \cdot \vec{h}) \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}), \quad (3.16)$$

et pour tout $v \in L^2$:

$$l_2(v) = - \int_X q(x, \vec{\Omega}) v \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}). \quad (3.17)$$

On introduit alors les opérateurs A , B et D liés aux formes bilinéaires a , b et d de la façon suivante :

$$a(\vec{g}, \vec{h}) = (A\vec{g}, \vec{h}), \quad (3.18)$$

$$b(u, \vec{h}) = (Bu, \vec{h}) \quad (3.19)$$

et

$$d(u, v) = (Du, v). \quad (3.20)$$

On s'intéresse au problème variationnel suivant : trouver $(\vec{g}, u) \in Y \times L^2$ tels que :

$$\begin{cases} a(\vec{g}, \vec{h}) + b(u, \vec{h}) = l_1(\vec{h}) & \text{pour tout } \vec{h} \in Y \\ b(v, \vec{g}) - d(u, v) = l_2(v) & \text{pour tout } v \in L^2. \end{cases} \quad (3.21)$$

Remarque 3.2.1

Les formes bilinéaires $a(.,.)$ et $d(.,.)$ étant symétriques, ce problème correspond au problème de point selle suivant :

$$\inf_{\vec{g} \in Y} \sup_{u \in L^2} \frac{1}{2} a(\vec{g}, \vec{g}) + b(u, \vec{g}) - l_1(\vec{g}) - \frac{1}{2} d(u, u) + l_2(u). \quad (3.22)$$

Nous pouvons énoncer le résultat suivant qui assure l'équivalence entre le problème variationnel mixte du transport et le problème initial du transport (2.1).

Théorème 3.2.1

Le problème (3.21) est équivalent au problème initial du transport (2.1) dans le sens où, si $(u, \vec{g}) \in W \times Y$ sont solutions de (3.21) alors u est solution de (2.1) et $\vec{g} = \vec{\Omega}u$; réciproquement, si u est solution dans W de (2.1) alors u et $\vec{\Omega}u$ sont solutions de (3.21).

DÉMONSTRATION - Soient $(u, \vec{g}) \in W \times Y$ solutions du problème (3.21). On a donc pour tout $\vec{h} \in Y$:

$$\begin{aligned} \int_X \sigma_t \vec{g} \cdot \vec{h} \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_{\Gamma^+} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \vec{g} \cdot \vec{h} \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}) - \int_X u \vec{\nabla} \cdot [P_{\Omega} \vec{h}] \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) = \\ \int_X q (\vec{\Omega} \cdot \vec{h}) \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_{\Gamma^-} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|_{u_b} (\vec{\Omega} \cdot \vec{h}) \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

et pour tout v dans L^2 :

$$\int_X \sigma_t u v \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X v \vec{\nabla} \cdot [P_{\Omega} \vec{g}] \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) = \int_X q v \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}). \quad (3.24)$$

Comme \vec{g} et \vec{h} sont dans Y , il existe ϕ et ψ dans W tels que $\vec{g} = \vec{\Omega}\phi$ et $\vec{h} = \vec{\Omega}\psi$. On a donc pour tout $\psi \in W$:

$$\begin{aligned} \int_X \sigma_t \phi \psi \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_{\Gamma^+} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \phi \psi \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}) - \int_X u \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) = \\ \int_X q \psi \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_{\Gamma^-} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|_{u_b} \psi \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

et pour tout $v \in L^2$

$$\int_X \sigma_t u v \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X v \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \phi \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) = \int_X q v \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}). \quad (3.26)$$

L'équation (3.25) s'écrit aussi en utilisant la formule de Green pour $(u, \psi) \in W \times W$:

$$\begin{aligned} \int_X \sigma_t \phi \psi \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_{\Gamma^+} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \phi \psi \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}) \\ + \int_{\Gamma^-} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|_{u_b} \psi \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X \psi \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) = \\ \int_{\Gamma^+} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) u \psi \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X q \psi \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_{\Gamma^-} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|_{u_b} \psi \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

On obtient donc en soustrayant (3.27) à (3.26) (avec $v = \psi$ dans (3.26)), pour tout $\psi \in W$:

$$\begin{aligned} & \int_X \sigma_t (u - \phi) \psi \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) - \int_{\Gamma^+} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (\phi - u) \psi \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}) \\ & + \int_{\Gamma^-} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| (u - u_b) \psi \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X \psi \, \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} (\phi - u) \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

On a donc :

$$\sigma_t(u - \phi) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}(\phi - u) = 0 \quad \text{presque partout dans } X, \quad (3.29)$$

$$(u - u_b) = 0 \quad \text{presque partout sur } \Gamma^-, \quad (3.30)$$

et

$$(u - \phi) = 0 \quad \text{presque partout sur } \Gamma^+. \quad (3.31)$$

En utilisant le corollaire 2.1.1, on conclut à l'égalité de u et ϕ presque partout dans X et on a $\vec{g} = \vec{\Omega}u$ presque partout dans X .

En substituant u à ϕ dans (3.26), on obtient que :

$$\sigma_t u + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u = q \quad \text{presque partout dans } X. \quad (3.32)$$

u est donc solution du problème de transport initial.

Réciproquement, on considère u solution dans W de (2.1), u vérifie donc :

$$\begin{cases} \sigma_t u + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u = q & \text{dans } X, \\ u = u_b & \text{sur } \Gamma^-. \end{cases} \quad (3.33)$$

On introduit $\vec{g} = \vec{\Omega}u$ pour obtenir la formulation mixte (3.11). On multiplie alors les deux équations de (3.12) par des fonctions tests, respectivement $\vec{h} \in Y$ et $v \in L^2$ pour obtenir :

$$\begin{cases} \sigma_t \vec{g} \cdot \vec{h} + P_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{h} = (\vec{\Omega} \cdot \vec{h}) q & \text{dans } X, \\ \vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{g}] v + \sigma_t u v = q v & \text{dans } X. \end{cases} \quad (3.34)$$

En intégrant ces équations sur X , on obtient :

$$\int_X \sigma_t \vec{g} \cdot \vec{h} \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X P_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{h} \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) = \int_X q \vec{\Omega} \cdot \vec{h} \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) \quad (3.35)$$

et

$$\int_X \sigma_t u v \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X v \, \vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{g}] \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) = \int_X q v \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}). \quad (3.36)$$

On utilise ensuite la formule de Green (2.65) pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \int_X \sigma_t \vec{g} \cdot \vec{h} \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X P_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{h} \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) = \\ & \int_X \sigma_t \vec{g} \cdot \vec{h} \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_{\Gamma^+} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{h}) u \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}) \\ & - \int_X u \, \vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{h}] \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) - \int_{\Gamma^-} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| u_b (\vec{\Omega} \cdot \vec{h}) \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}), \end{aligned} \quad (3.37)$$

puis en utilisant le fait que $\vec{g} = \vec{\Omega}u$ sur Γ^+ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \int_X \sigma_t \vec{g} \cdot \vec{h} \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_X P_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{h} \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) = \\
 & \int_X \sigma_t \vec{g} \cdot \vec{h} \, dx \, d\nu(\vec{\Omega}) + \int_{\Gamma^+} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \vec{g} \cdot \vec{h} \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}) \\
 & - \int_X u \vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{h}] - \int_{\Gamma^-} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| u_b (\vec{\Omega} \cdot \vec{h}) \, ds \, d\nu(\vec{\Omega}).
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Ce qui prouve que u et $\vec{g} = \vec{\Omega}u$ sont solutions de (3.21). ■

3.3 Existence et unicité

Dans le but de prouver l'existence et l'unicité de solutions pour notre problème variationnel, nous utiliserons le résultat suivant (présenté en particulier dans [25], les notations restent locales à l'énoncé du théorème) :

Théorème 3.3.1

Soient $q \in W$ et $u_b \in L^2_-$. On considère le problème variationnel suivant : trouver $\vec{g} \in Y$ et $u \in L^2$ tels que

$$\begin{cases} a(\vec{g}, \vec{h}) + b(u, \vec{h}) = l_1(\vec{h}) & \text{pour tout } \vec{h} \in Y \\ b(v, \vec{g}) - d(u, v) = l_2(v) & \text{pour tout } v \in L^2. \end{cases} \tag{3.39}$$

Si $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ et $d(\cdot, \cdot)$ sont des formes bilinéaires continues sur $Y \times Y$, sur $Y \times L^2$ et sur $L^2 \times L^2$ respectivement. Supposons de plus que $d(\cdot, \cdot)$ est semi définie positive (i.e. $d(v, v) \geq 0$, pour tout $v \in L^2$) et que $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique semi définie positive. On suppose aussi que l'on a :

- Il existe $k_0 > 0$ tel que :

$$\sup_{v \in L^2} \frac{|b(v, \vec{g})|}{\|v\|_{L^2}} \geq k_0 \|\vec{g}\|_{Y/KerB^t}, \tag{3.40}$$

où B est l'opérateur associé à $b(\cdot, \cdot)$ et $\|\vec{g}\|_{Y/KerB^t} = \inf_{\vec{g}_0 \in KerB^t} \|\vec{g} + \vec{g}_0\|_Q$,
 - $a(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $KerB^t$ (voir remarque 3.3.2),
 - $d(\cdot, \cdot)$ est inversible (voir remarque 3.3.3) sur $KerB$.

Alors le problème (3.39) possède une solution (u, \vec{g}) , qui est unique sur $L^2 \times Y/M$, où

$$M = KerB^t \cap KerA. \tag{3.41}$$

De plus, on a :

$$\|u\|_{L^2} + \|\vec{g}\|_{Y/KerB^t} \leq C(\|q\|_W + \|u_b\|_{L^2_-}), \tag{3.42}$$

où C est une constante positive.

DÉMONSTRATION - Voir F.Brezzi, M.Fortin [25] par exemple. ■

Remarque 3.3.1

La notation \cdot/\cdot désigne l'espace quotient et pour deux espaces de Hilbert Y et M , on a pour tout $\vec{g} \in Y$

$$\|\vec{g}\|_{Y/M} = \inf_{\vec{g}_0 \in M} \|\vec{g} + \vec{g}_0\|_Y.$$

Remarque 3.3.2

On dit que la forme bilinéaire symétrique semi définie positive $a(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $\text{Ker} B^t \subset Y$ si et seulement si

$$a(\vec{g}_0, \vec{g}_0) \geq \gamma_0 \|\vec{g}_0\|_Y^2, \quad \forall \vec{g}_0 \in \text{Ker} B^t,$$

où γ_0 est une constante positive.

Remarque 3.3.3

On dit que la forme bilinéaire semi définie positive $d(\cdot, \cdot)$ est inversible sur $\text{Ker} B \subset L^2$ si et seulement si

$$\inf_{u_0 \in \text{Ker} B} \sup_{v_0 \in \text{Ker} B} \frac{d(u_0, v_0)}{\|u_0\|_{L^2} \|v_0\|_{L^2}} \geq \alpha_0 > 0,$$

et

$$\inf_{v_0 \in \text{Ker} B} \sup_{u_0 \in \text{Ker} B} \frac{d(u_0, v_0)}{\|u_0\|_{L^2} \|v_0\|_{L^2}} \geq \alpha_0 > 0.$$

Nous allons donc énoncer dans ce qui suit plusieurs propositions visant à valider les hypothèses du théorème 3.3.1 dans le cas de notre problème variationnel (3.21).

Proposition 3.3.1

Sous les hypothèses du théorème (2.1.2), on a les propriétés suivantes :

- La forme bilinéaire a (3.13) est continue sur $Y \times Y$. Elle est symétrique, positive et coercive sur le noyau de l'opérateur B^t .
- La forme bilinéaire b (3.14) est continue sur $L^2 \times Y$.
- La forme bilinéaire d (3.15) est continue sur $L^2 \times L^2$. Elle est symétrique, positive et coercive sur L^2 .
- La forme linéaire l_1 (3.16) est continue sur Y .
- La forme linéaire l_2 (3.17) est continue sur L^2 .

DÉMONSTRATION -

- **continuité de a** : Pour tout $(\vec{g}, \vec{h}) \in Y \times Y$ on a :

$$\begin{aligned} |a(\vec{g}, \vec{h})| &\leq \sigma_\infty \|\vec{g}\|_{(L^2)^3} \|\vec{h}\|_{(L^2)^3} + \|\vec{g}\|_{(L^2_+)^3} \|\vec{h}\|_{(L^2_+)^3} \\ &\leq \sigma_\infty \|\vec{g}\|_{(L^2)^3} \|\vec{h}\|_{(L^2)^3} + \|\vec{g}\|_{(L^2_+)^3} \|\vec{h}\|_{(L^2_+)^3} + \|\vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{g}]\|_{L^2} \|\vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{h}]\|_{L^2} \\ &\leq c_a \left(\|\vec{g}\|_{(L^2)^3} \|\vec{h}\|_{(L^2)^3} + \|\vec{g}\|_{(L^2_+)^3} \|\vec{h}\|_{(L^2_+)^3} + \|\vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{g}]\|_{L^2} \|\vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{h}]\|_{L^2} \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

où $c_a = \max(\sigma_\infty, 1)$ avec $\sigma_\infty = \|\sigma_t\|_{L^\infty(X)}$. En utilisant l'inégalité de Hölder il vient :

$$|a(\vec{g}, \vec{h})| \leq c_a \|\vec{g}\|_Y \|\vec{h}\|_Y. \quad (3.44)$$

- **continuité de b** :

$$|b(u, \vec{g})| \leq \|u\|_{L^2} \|\vec{g}\|_Y. \quad (3.45)$$

- **continuité de d** :

$$|d(u, v)| \leq \sigma_\infty \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}. \quad (3.46)$$

- **continuité de l_1** :

$$|l_1(\vec{g})| \leq (\|q\|_{L^2} + \|u_b\|_{L^2_-}) \|\vec{g}\|_Y. \quad (3.47)$$

- **continuité de l_2** :

$$|l_2(u)| \leq \|q\|_{L^2} \|u\|_{L^2}. \quad (3.48)$$

- **coercivité de a** : On rappelle que $Ker(B^t) = \{\vec{g} \in Y; \vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{g}] = 0\}$. Pour tout $\vec{g} \in Ker(B^t)$, $\|\vec{\nabla} \cdot P_\Omega \vec{g}\|_{L^2} = 0$ et on a :

$$\begin{aligned} a(\vec{g}, \vec{g}) &\geq \sigma_0 \|\vec{g}\|_{(L^2)^3}^2 + \|\vec{g}\|_{(L^2_+)^3}^2 \\ &\geq \alpha_a \|\vec{g}\|_Y^2, \end{aligned} \quad (3.49)$$

où $\alpha_a = \min(\sigma_0, 1)$.

- **inversibilité de d** : La forme bilinéaire d (3.15) est symétrique et $Ker B = 0$. Pour tout $u \in L^2$ on a :

$$d(u, u) \geq \sigma_0 \|u\|_{L^2}^2. \quad (3.50)$$

La forme bilinéaire d est donc inversible sur $Ker B$. ■

Proposition 3.3.2

L'opérateur β défini par :

$$\begin{cases} W \longrightarrow L^2 \\ u \longrightarrow \beta u = \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u, \end{cases}$$

est surjectif dans W ; i.e.,

$$\forall f \in L^2, \exists u_f \in W \text{ tel que } \beta u_f = f. \quad (3.51)$$

DÉMONSTRATION - Soit f dans L^2 , on peut alors exhiber la solution suivante de l'équation $\beta u_f = f$ en intégrant le long de la caractéristique portée par $\vec{\Omega}$:

$$u_f(x, \vec{\Omega}) = c(x_s) + T_\Omega f(x), \quad (3.52)$$

où x_s est le point du bord défini par (1.63), c est une fonction définie sur le bord Γ^- et T_Ω est donné par (1.62). ■

Proposition 3.3.3

L'opérateur γ défini pour tout \vec{g} dans Y par :

$$\begin{cases} Y \longrightarrow L^2 \\ \vec{g} \longrightarrow \gamma \vec{g} = \vec{\nabla} \cdot (P_\Omega \vec{g}), \end{cases}$$

est surjectif dans Y .

DÉMONSTRATION - Soit f dans L^2 , montrons qu'il existe \vec{g}_f dans Y tel que :

$$\gamma \vec{g}_f = f. \quad (3.53)$$

En introduisant ϕ_f dans W tel que $\vec{g}_f = \vec{\Omega} \phi_f$, (3.53) s'écrit :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \phi_f = \beta \phi_f = f. \quad (3.54)$$

On conclut en utilisant la proposition 3.3.2. ■

Proposition 3.3.4

Il existe $k_0 > 0$ tel que :

$$\sup_{v \in L^2} \frac{|b(v, \vec{g})|}{\|v\|_{L^2}} \geq k_0 \|\vec{g}\|_{Y/KerB^t}. \quad (3.55)$$

où B est l'opérateur associé à $b(\cdot, \cdot)$ définie en (3.14) et $\|\vec{g}\|_{Y/KerB^t} = \inf_{\vec{g}_0 \in KerB^t} \|\vec{g} + \vec{g}_0\|_Y$.

DÉMONSTRATION - Nous avons vu (proposition 3.3.3) que l'opérateur B^t est surjectif dans l'espace Y ; i.e,

$$\forall f \in L^2, \exists \vec{g}_f \in Y \text{ avec } B^t \vec{g}_f = \vec{\nabla} \cdot P_\Omega \vec{g}_f = f. \quad (3.56)$$

Pour prouver (3.55), on considère le problème auxiliaire suivant : soit ϕ_u l'unique solution dans W_0 du problème suivant :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \phi_u = u \text{ dans } X \quad (3.57)$$

pour u appartenant à L^2 , alors $\vec{g}_u = \vec{\Omega} \phi_u$ appartient à Y et

$$|b(u, \vec{g}_u)| = |b(u, \vec{\Omega} \phi_u)| = \int_X u (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \phi_u) = \int_X u^2 = \|u\|_{L^2}^2. \quad (3.58)$$

Par ailleurs,

$$\|\vec{g}_u\|_Y^2 = \|\phi_u\|_W^2 = \|\phi_u\|_{L^2}^2 + \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \phi_u\|_{L^2}^2 = \|\phi_u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré de la proposition 2.1.3 dans W_0 , on obtient

$$\|\phi_u\|_{L^2} \leq C_0 \|\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \phi_u\|_{L^2} = C_0 \|u\|_{L^2},$$

où C_0 est une constante strictement positive. Au final, on trouve

$$\|\phi_u\|_{L^2} \leq C_0 \|u\|_{L^2},$$

soit en notant $k_0 = \frac{1}{C_0 + 1}$

$$\|\vec{g}_u\|_Y \leq (C_0 + 1) \|u\|_{L^2} = \frac{1}{k_0} \|u\|_{L^2}.$$

On a donc pour tout u dans L^2 ,

$$\begin{aligned} k_0 \|\vec{g}_u\|_Y &\leq \|u\|_{L^2} = \frac{|b(u, \vec{g}_u)|}{\|u\|_{L^2}} \\ &\leq \sup_{u \in L^2} \frac{|b(u, \vec{g}_u)|}{\|u\|_{L^2}} \\ &\leq \sup_{v \in L^2} \frac{|b(v, \vec{g}_u)|}{\|v\|_{L^2}}. \end{aligned}$$

■

Remarque 3.3.4

La condition (3.55) est équivalente à la condition inf-sup (voir F.Brezzi, M.Fortin [25])

$$\inf_{\vec{g} \in Y} \sup_{v \in L^2} \frac{|b(v, \vec{g})|}{\|v\|_{L^2} \|\vec{g}\|_{Y/KerB^t}} \geq k_0 > 0.$$

Théorème 3.3.2

Sous les hypothèses du théorème 3.3.1, le problème variationnel (3.21) possède une unique solution $(u, \vec{g}) \in L^2 \times Y$. De plus, on a l'estimation suivante :

$$\|u\|_{L^2} + \|\vec{g}\|_{Y/KerB^t} \leq C \left(\|q\|_{L^2} + \|u_b\|_{L^2_-} \right). \quad (3.59)$$

DÉMONSTRATION - On applique le théorème 3.3.1 en utilisant les propositions précédentes. ■

3.4 Convergence des itérations sur le terme source

Il convient dans ce paragraphe d'étudier notre système mixte en conservant l'opérateur K défini pour u dans L^2 par :

$$(Ku)(x, \vec{\Omega}) = \int_{\mathcal{S}^2} f(x, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}) u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}'), \quad \forall (x, \vec{\Omega}) \in X. \quad (3.60)$$

On supposera par la suite que $f(x, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}) = f(x, \vec{\Omega}', \vec{\Omega})$. Pour tout $(\vec{g}, \vec{h}) \in Y \times Y$, on introduit :

$$d_1(\vec{g}, \vec{h}) = \int_X K(\vec{\Omega} \cdot \vec{g})(x, \vec{\Omega}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{h}) dx d\nu(\vec{\Omega}), \quad (3.61)$$

et pour tout $(u, v) \in L^2 \times L^2$, on introduit :

$$d_2(u, v) = \int_X Ku(x, \vec{\Omega}) v dx d\nu(\vec{\Omega}). \quad (3.62)$$

On considère le problème abstrait suivant :

$$\begin{cases} a(\vec{g}, \vec{h}) - d_1(\vec{g}, \vec{h}) + b(u, \vec{h}) = l_1(\vec{h}) & \text{pour tout } \vec{h} \in Y \\ b(v, \vec{g}) + d_2(u, v) - d(u, v) = l_2(v) & \text{pour tout } v \in L^2. \end{cases} \quad (3.63)$$

Théorème 3.4.1

Sous les hypothèses du théorème 3.3.1, le problème variationnel (3.63) possède une unique solution $(u, \vec{g}) \in L^2 \times Y$.

DÉMONSTRATION - On étend le résultat du théorème 3.39 en utilisant la continuité et le coercivité des formes $a - d_1$ et $d - d_2$.

- **continuité de $a - d_1$** : Pour tout $(\vec{g}, \vec{h}) \in Y \times Y$ on a :

$$\begin{aligned} |(a - d_1)(\vec{g}, \vec{h})| &\leq 2\sigma_\infty \|\vec{g}\|_{(L^2)^3} \|\vec{h}\|_{(L^2)^3} + \|\vec{g}\|_{(L^2_+)^3} \|\vec{h}\|_{(L^2_+)^3} \\ &\leq 2\sigma_\infty \|\vec{g}\|_{(L^2)^3} \|\vec{h}\|_{(L^2)^3} + \|\vec{g}\|_{(L^2_+)^3} \|\vec{h}\|_{(L^2_+)^3} + \|\vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{g}]\|_{L^2} \|\vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{h}]\|_{L^2} \\ &\leq c_1 \left(\|\vec{g}\|_{(L^2)^3} \|\vec{h}\|_{(L^2)^3} + \|\vec{g}\|_{(L^2_+)^3} \|\vec{h}\|_{(L^2_+)^3} + \|\vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{g}]\|_{L^2} \|\vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{h}]\|_{L^2} \right) \end{aligned} \quad (3.64)$$

où $c_1 = \max(2\sigma_\infty, 1)$ avec $\sigma_\infty = \|\sigma_t\|_{L^\infty(X)}$. En utilisant l'inégalité de Hölder il vient :

$$|(a - d_1)(\vec{g}, \vec{h})| \leq c_a \|\vec{g}\|_Y \|\vec{h}\|_Y. \quad (3.65)$$

- **continuité de $d - d_2$** :

$$|(d - d_2)(u, v)| \leq 2\sigma_\infty \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}. \quad (3.66)$$

- **coercivité de $a - d_1$** : On rappelle que $Ker(B^t) = \left\{ \vec{g} \in Y; \vec{\nabla} \cdot [P_\Omega \vec{g}] = 0 \right\}$. En utilisant le résultat et la constante positive α donnés dans la proposition 2.1.1, on obtient pour tout $\vec{g} \in Ker(B^t)$:

$$\begin{aligned} (a - d_1)(\vec{g}, \vec{g}) &\geq \alpha \|\vec{g}\|_{(L^2)^3}^2 + \|\vec{g}\|_{(L^2_+)^3}^2 \\ &\geq \alpha_1 \|\vec{g}\|_Y^2 \end{aligned} \quad (3.67)$$

où $\alpha_1 = \min(\alpha, 1)$.

- **coercivité de $d - d_2$** : En utilisant le résultat et la constante positive α donnés dans la proposition (2.1.1), pour tout $u \in L^2$ on a :

$$(d - d_2)(u, u) \geq \alpha \|u\|_{L^2}^2. \quad (3.68)$$

■

Nous allons à présent énoncer un lemme qui sera très utile pour la démonstration du théorème suivant présentant la convergence de la méthode de la source itérée appliquée au problème variationnel mixte du transport.

Lemme 3.4.1

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- $\sigma_t(x, \vec{\Omega}) \in L^\infty(X)$, $0 < \sigma_0 \leq \sigma_t(x, \vec{\Omega}) \leq \sigma_\infty$,
- $f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = f(x, \vec{\Omega}', \vec{\Omega})$,
- $\sigma_t(x, \vec{\Omega}) - \int_{S^2} f(x, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}) d\nu(\vec{\Omega}') \geq \alpha > 0$,
- $\sigma_t(x, \vec{\Omega}) - \int_{S^2} f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \geq \alpha > 0$,
- $\sigma_s(x, \vec{\Omega}) = \int_{S^2} f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \leq \beta \sigma_t(x, \vec{\Omega})$ où $0 \leq \beta < 1$.

alors pour tous $\vec{g} \in Y$ et $\vec{h} \in Y$, on a

$$d_1(\vec{g}, \vec{h}) \leq \sqrt{\beta} \|\sqrt{\sigma_t} \vec{h}\|_{(L^2)^3} \|\sqrt{\sigma_s} \vec{g}\|_{(L^2)^3}, \quad (3.69)$$

et pour tous $u \in L^2$ et $v \in L^2$, on a

$$d_2(u, v) \leq \sqrt{\beta} \|\sqrt{\sigma_t} v\|_{L^2} \|\sqrt{\sigma_s} u\|_{L^2}. \quad (3.70)$$

DÉMONSTRATION - Soient $\vec{g} \in Y$ et $\vec{h} \in Y$, on écrit

$$d_1(\vec{g}, \vec{h}) = \int_X (\vec{\Omega} \cdot \vec{h}(x, \vec{\Omega})) \left(\int_{S^2} f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') (\vec{\Omega}' \cdot \vec{g}(x, \vec{\Omega}')) d\nu(\vec{\Omega}') \right) dx d\nu(\vec{\Omega}).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur S^2 et le fait que pour tout $\vec{\Omega}' \in S^2$, $P_{\Omega'} \vec{g} = \vec{g}$, on obtient

$$\begin{aligned} d_1(\vec{g}, \vec{h}) &\leq \int_X (\vec{\Omega} \cdot \vec{h}) \left(\int_{S^2} f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{S^2} f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') |\vec{g}(x, \vec{\Omega}')|^2 d\nu(\vec{\Omega}') \right)^{\frac{1}{2}} dx d\nu(\vec{\Omega}) \\ &\leq \sqrt{\beta} \int_X \sqrt{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{h}) \left(\int_{S^2} f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') |\vec{g}(x, \vec{\Omega}')|^2 d\nu(\vec{\Omega}') \right)^{\frac{1}{2}} dx d\nu(\vec{\Omega}) \\ &\leq \sqrt{\beta} \|\sqrt{\sigma_t} \vec{h}\|_{(L^2)^3} \|\sqrt{\sigma_s} \vec{g}\|_{(L^2)^3}. \end{aligned}$$

On a donc montré (3.69). La relation (3.70) s'obtient de la même manière en posant $\vec{g} = \vec{\Omega}u$ et $\vec{h} = \vec{\Omega}v$. \blacksquare

Intéressons nous maintenant à la convergence des itérations sur le terme source (classique en transport, voir chapitre 1, paragraphe 1.4.2). On a le résultat suivant :

Théorème 3.4.2

Soit (u^0, \vec{g}^0) un élément de $L^2 \times Y$. On construit la suite (u^n, \vec{g}^n) de $L^2 \times Y$ telle que :

$$\begin{cases} a(\vec{g}^{n+1}, \vec{h}) + b(u^{n+1}, \vec{h}) = d_1(\vec{g}^n, \vec{h}) + l_1(\vec{h}) & \text{pour tout } \vec{h} \in Y \\ -b(v, \vec{g}^{n+1}) + d(u^{n+1}, v) = d_2(u^n, v) - l_2(v) & \text{pour tout } v \in L^2. \end{cases} \quad (3.71)$$

Sous les hypothèses du théorème 2.1.2, le problème variationnel (3.63) possède une unique solution (u, \vec{g}) dans $L^2 \times Y$ et la suite (u^n, \vec{g}^n) de $L^2 \times Y$ converge vers cette solution si

$$0 \leq \beta < 1. \quad (3.72)$$

DÉMONSTRATION - L'existence et l'unicité de solutions (u, \vec{g}) dans $L^2 \times Y$ découle directement du théorème 3.4.1. Pour la convergence des itérations sur le terme source, on écrit :

$$\begin{cases} a(\vec{g}^{n+1}, \vec{h}) + b(u^{n+1}, \vec{h}) = d_1(\vec{g}^n, \vec{h}) + L_1(\vec{h}) & \text{pour tout } \vec{h} \in Y \\ -b(v, \vec{g}^{n+1}) + d(u^{n+1}, v) = d_2(u^n, v) - L_2(v) & \text{pour tout } v \in L^2. \end{cases} \quad (3.73)$$

d'où

$$\begin{cases} a(\vec{g}^{n+1} - \vec{g}, \vec{h}) + b(u^{n+1} - u, \vec{h}) = d_1(\vec{g}^n - \vec{g}, \vec{h}) & \text{pour tout } \vec{h} \in Y \\ -b(v, \vec{g}^{n+1} - \vec{g}) + d(u^{n+1} - u, v) = d_2(u^n - u, v) & \text{pour tout } v \in L^2. \end{cases} \quad (3.74)$$

On a donc :

$$\begin{cases} a(\vec{g}^{n+1} - \vec{g}, \vec{g}^{n+1} - \vec{g}) + b(u^{n+1} - u, \vec{g}^{n+1} - \vec{g}) = d_1(\vec{g}^n - \vec{g}, \vec{g}^{n+1} - \vec{g}) \\ -b(u^{n+1} - u, \vec{g}^{n+1} - \vec{g}) + d(u^{n+1} - u, u^{n+1} - u) = d_2(u^n - u, u^{n+1} - u). \end{cases} \quad (3.75)$$

En additionnant les deux équations de (3.75), on obtient :

$$a(\vec{g}^{n+1} - \vec{g}, \vec{g}^{n+1} - \vec{g}) + d(u^{n+1} - u, u^{n+1} - u) = d_1(\vec{g}^n - \vec{g}, \vec{g}^{n+1} - \vec{g}) + d_2(u^n - u, u^{n+1} - u). \quad (3.76)$$

Posons $\vec{\Gamma}^n = \vec{g}^n - \vec{g}$ et $\gamma^n = u^n - u$. On a clairement que

$$d(\gamma^{n+1}, \gamma^{n+1}) = \|\sqrt{\sigma_t} \gamma^{n+1}\|_{L^2}^2, \quad (3.77)$$

et

$$a(\vec{\Gamma}^{n+1}, \vec{\Gamma}^{n+1}) \geq \|\sqrt{\sigma_t} \vec{\Gamma}^{n+1}\|_{(L^2)^3}^2. \quad (3.78)$$

En utilisant le résultat du lemme 3.4.1 et les relations (3.77) et (3.78), il vient

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\sigma_t} \vec{\Gamma}^{n+1}\|_{(L^2)^3}^2 + \|\sqrt{\sigma_t} \gamma^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & \leq \sqrt{\beta} \left(\|\sqrt{\sigma_t} \vec{\Gamma}^{n+1}\|_{(L^2)^3} \|\sqrt{\sigma_s} \vec{\Gamma}^n\|_{(L^2)^3} + \|\sqrt{\sigma_t} \gamma^{n+1}\|_{L^2} \|\sqrt{\sigma_s} \gamma^n\|_{L^2} \right). \end{aligned} \quad (3.79)$$

En utilisant le fait que $\sigma_s \leq \sigma_t$, on obtient

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\sigma_t}\vec{\Gamma}^{n+1}\|_{(L^2)^3}^2 + \|\sqrt{\sigma_t}\gamma^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & \leq \sqrt{\beta} \left(\|\sqrt{\sigma_t}\vec{\Gamma}^{n+1}\|_{(L^2)^3} \|\sqrt{\sigma_t}\vec{\Gamma}^n\|_{(L^2)^3} + \|\sqrt{\sigma_t}\gamma^{n+1}\|_{L^2} \|\sqrt{\sigma_t}\gamma^n\|_{L^2} \right). \end{aligned} \quad (3.80)$$

soit, en posant $X_n = (\|\sqrt{\sigma_t}\vec{\Gamma}^n\|_{(L^2)^3}, \|\sqrt{\sigma_t}\gamma^n\|_{L^2})^t$

$$\|X_{n+1}\|^2 \leq \sqrt{\beta}(X_{n+1}, X_n). \quad (3.81)$$

On a donc

$$\|X_{n+1}\|^2 \leq \sqrt{\beta}\|X_{n+1}\|\|X_n\|. \quad (3.82)$$

Par récurrence, on obtient la relation

$$\|X_{n+1}\| \leq \left(\sqrt{\beta}\right)^{n+1} \|X_0\|. \quad (3.83)$$

La suite (\vec{g}^n, u^n) converge donc vers la solution (\vec{g}, u) du problème (3.63) si et seulement si

$$\beta < 1.$$

■

Bilan du chapitre 3

Nous avons donc présenté dans ce chapitre quelques formes variationnelles classiques du transport et étudié une nouvelle formulation variationnelle basée sur la forme mixte de l'équation du transport, nous en avons donné quelques propriétés essentielles. Nous allons maintenant introduire dans le chapitre suivant les espaces d'approximation et présenter la démarche permettant de discrétiser notre problème mixte variationnel.

Chapitre 4

Espaces d'approximation et analyse discrète

Sommaire

4.1	Approximation du problème	66
4.1.1	Discrétisation de l'espace physique	66
4.1.2	L'espace d'approximation du flux angulaire sur une maille donnée Q_k	66
4.1.3	L'espace de Raviart-Thomas d'ordre 0 sur un exemple simple	66
4.1.4	L'espace d'approximation de $Y(\mathcal{D})$	67
4.2	Formulation mixte discrète	69
4.3	Formulation mixte-hybride discrète	70
4.4	Estimations d'erreur	72

Nous introduisons dans ce chapitre les espaces d'approximations nécessaires pour la discrétisation du problème variationnel mixte du transport. Précisons qu'en pratique, on choisit une formule de quadrature pour la discrétisation angulaire de type S_N (nous reviendrons sur ce point au chapitre 5). Dans ce chapitre, on s'intéresse donc à la résolution en espace du problème modèle où on a fixé $\vec{\Omega}$ (qui est par exemple une direction fixe d'une quadrature S_N choisie pour la discrétisation angulaire) :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x) + \sigma_t(x)u(x) = q(x) & \text{pour } x \in \mathcal{D}, \\ u(x) = u_b(x) & \text{pour } x \in \partial\mathcal{D}^-. \end{cases} \quad (4.1)$$

Tout au long de ce chapitre, on effectue l'abus de notations suivant :

$$L^2 = L^2(\mathcal{D}).$$

Nous explicitons notamment la façon d'approcher convenablement l'espace des densités de courant angulaire $Y(\mathcal{D}) = \left\{ \vec{g} \in (L^2)^d; \vec{\nabla} \cdot (P_{\Omega}\vec{g}) \in L^2; P_{\Omega}\vec{g} = \vec{g}; \vec{g} \in (L^2(\partial\mathcal{D}^+))^d \right\}$. De la même façon, on continue d'utiliser les mêmes notations pour décrire les formes bilinéaires introduites au chapitre précédent en précisant qu'elles ne sont plus définies que sur l'espace \mathcal{D} et non plus sur l'espace des phases tout entier. Comme on l'a vu dans les paragraphes précédents, la formulation mixte abstraite de l'équation (4.1) s'écrit :

$$\begin{cases} a(\vec{g}, \vec{h}) + b(u, \vec{h}) = l_1(\vec{h}) & \text{pour tout } \vec{h} \in Y, \\ b(v, \vec{g}) - d(u, v) = l_2(v) & \text{pour tout } v \in L^2, \end{cases} \quad (4.2)$$

où u , q et u_b sont les mêmes fonctions que dans (4.1) et $\vec{g} = \vec{\Omega}u$.

4.1 Approximation du problème

Nous allons détailler dans ce paragraphe les étapes permettant d'aboutir à une discrétisation mixte puis mixte-hybride du problème mixte abstrait (4.2).

4.1.1 Discrétisation de l'espace physique

On suppose dans ce qui suit que \mathcal{D} admet une décomposition \mathcal{D}_h d'un nombre fini d'éléments ouverts (des hexaèdres dans le cas 3D par exemple) où h représente la longueur maximale de chaque élément (notés Q_k) de \mathcal{D}_h :

$$\overline{\mathcal{D}} = \bigcup_{k=1}^K \overline{Q_k} \quad \text{et} \quad Q_k \cap Q_{k'} = \emptyset \quad 1 \leq k \neq k' \leq K \quad (4.3)$$

où K est le nombre d'éléments de \mathcal{D}_h . Dans ce manuscrit, on ne considérera que le cas d'éléments quadrilatéraux en 2D et hexaèdres en 3D. On note \mathcal{F}_h l'ensemble des faces de la discrétisation \mathcal{D}_h et on notera \mathcal{F}_h^{int} l'ensemble des faces situées à l'intérieur de \mathcal{D} . Nous supposons par ailleurs que l'intersection des frontières de chaque éléments ∂Q_k avec $\partial \mathcal{D}$, si elle est non vide, est un côté ou une face de Q_k . Pour $1 \leq k \leq K$, on note $\Gamma_{k,l}$, $1 \leq l \leq L(k)$ les faces de l'élément Q_k où $L(k) = 2d$ est le nombre de faces pour l'élément Q_k . On note $\vec{n}_{k,l}$ le vecteur normal unitaire sortant par la face $\Gamma_{k,l}$ de l'élément Q_k . Pour décrire les espaces d'approximation, on définit sur chaque élément Q_k , respectivement $\Gamma_{k,l}$, l'espace $P_0(Q_k)$, respectivement $P_0(\Gamma_{k,l})$, des restrictions sur chaque élément Q_k , respectivement $\Gamma_{k,l}$, aux fonctions constantes par morceaux et l'espace $P_1(Q_k)$, respectivement $P_1(\Gamma_{k,l})$, des restrictions sur chaque élément Q_k , respectivement $\Gamma_{k,l}$, des polynômes de degré inférieur ou égal à un. En outre, on suppose pour simplifier dans ce qui suit que $\forall k \in \{1, \dots, K\}$ et $\forall j \in \{1, \dots, L(k)\}$,

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j} \neq 0.$$

4.1.2 L'espace d'approximation du flux angulaire sur une maille donnée Q_k

Dans le but d'approcher le flux angulaire (variable primale) u , on considère le sous espace d'approximation suivant

$$L_0(\mathcal{D}_h) = \{v_h \in L^2(\mathcal{D}); v_h|_{Q_k} \in P_0(Q_k); Q_k \in \mathcal{D}_h\}.$$

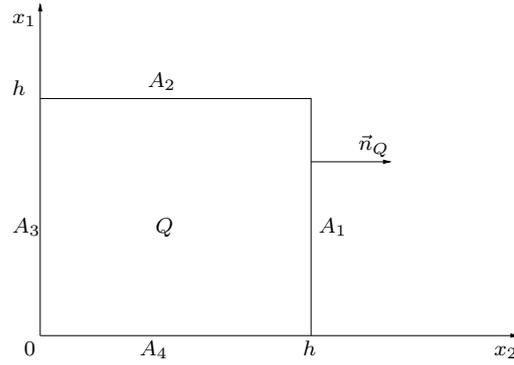
Nous noterons donc $u_k \in P_0(Q_k)$ la valeur moyenne du flux angulaire sur la maille Q_k .

4.1.3 L'espace de Raviart-Thomas d'ordre 0 sur un exemple simple

Dans une discrétisation mixte-hybride classique, on utilise une approximation locale de l'espace $H(\text{div}; \mathcal{D})$. L'espace le plus couramment utilisé pour approcher $H(\text{div}; Q)$ (où Q est une maille donnée) est l'espace de Raviart Thomas d'ordre zéro noté $RT_0(Q)$. Nous présentons cet espace d'approximation (que nous utilisons dans la suite) sur un exemple très simple. On considère le quadrilatère $Q = [0, h]^2 \subset \mathbb{R}^2$ avec les arêtes A_i , $i = 1, \dots, 4$ parallèles aux axes.

L'espace de Raviart-Thomas d'ordre zéro $RT_0(Q)$ des fonctions vectorielles sur Q est un sous espace de dimension fini de l'espace

$$H(\text{div}; Q) = \left\{ \vec{g} \in (L^2(Q))^2; \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \in L^2(Q) \right\},$$


 FIG. 4.1 – Élément fini Q

qui possède les propriétés suivantes :

- $\forall \vec{g} \in RT_0(Q)$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{g}$ est constant sur Q ,
- $\forall i = 1, \dots, 4$, $\vec{g} \cdot \vec{n}_Q$ est constant chaque arête A_i ,
- Tout vecteur $\vec{g} \in RT_0(Q)$ est entièrement déterminé par la donnée de ses quatre flux g_i sur les arêtes A_i .

On a (en 2D)

$$RT_0(Q) = \{(a + bx_1, c + bx_2); a, b, c \in \mathbb{R}\} \subseteq (P_1(Q))^2, \quad (4.4)$$

qui permet d'approcher l'espace $H(\text{div}; Q)$.

4.1.4 L'espace d'approximation de $Y(\mathcal{D})$

Comme nous l'avons vu précédemment, l'approximation usuelle de la variable duale (la densité de courant angulaire dans notre cas) est basée sur une approximation adaptée de l'espace $H(\text{div}; Q_k) = \{\vec{g} \in (L^2(Q_k))^d; \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \in L^2(Q_k)\}$ obtenue notamment à l'aide de l'espace de Raviart-Thomas d'ordre zéro $RT_0(Q_k)$ (voir [37, 25] et le paragraphe précédent) défini sur une maille Q_k par

$$RT_0(Q_k) = Q_{1,0,\dots,0}(Q_k) \times \dots \times Q_{0,\dots,0,1}(Q_k),$$

où

$$Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}(Q_k) = \left\{ p : Q_k \rightarrow \mathbb{R}; p(x) = \sum_{\beta_i \leq \alpha_i} a_{\beta_1, \dots, \beta_N} x_1^{\beta_1} \dots x_N^{\beta_N} \right\}.$$

Dans le cas d'éléments plus généraux, on doit utiliser la transformation de Piola décrite dans le chapitre 5 en deux dimensions d'espace (voir aussi [25]). Il est naturel d'utiliser le champ de vecteurs $\vec{w}_{k,j}$ pour engendrer l'espace $RT_0(Q_k)$ vérifiant :

$$\int_{\Gamma_{k,j}} \vec{w}_{k,j}(x) \cdot \vec{n}_{k,i} ds = \delta_{ij}, \quad (4.5)$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker. La famille $\{\vec{w}_{k,j}\}_{1 \leq j \leq 2d}$ forme une base de l'espace $RT_0(Q_k)$. L'espace $RT_0(Q_k)$ est un espace de dimension $2d = 6$ soit le nombre de faces d'une maille hexaédrale en dimension $d = 3$.

Notre but est de construire un espace d'approximation $Y_0(Q_k)$ du sous-espace $Y(Q_k)$ de sorte que $Y_0(Q_k)$ soit inclus dans $Y(Q_k)$ (i.e. une approximation conforme). On choisit

$$Y_0(Q_k) = \left\{ \vec{g} = P_\Omega \vec{f}; \vec{f} \in RT_0(Q_k) \right\}.$$

On définit pour une maille donnée $Q_k \in \mathcal{D}_h$ un nouveau champ de vecteur $\vec{\gamma}_{k,j} = P_\Omega \vec{w}_{k,j}$ pour chaque face j de l'élément Q_k de sorte que chaque fonction vectorielle $\vec{g} \in Y(Q_k)$ puisse s'écrire

$$\vec{g} = \sum_{j=1}^{2d} g_j \vec{\gamma}_{k,j}.$$

Ce choix de champ de vecteur permet d'assurer la colinéarité de la densité de courant angulaire \vec{g} avec la direction de propagation angulaire $\vec{\Omega}$ même au niveau discret en accord avec la définition de l'espace fonctionnel continu $Y(\mathcal{D})$. Cependant, ce champ de vecteur n'est pas une base de l'espace $Y_0(Q_k)$.

Remarque 4.1.1

Remarquons que, si on utilise le champ de vecteur $\vec{w}_{k,j}$ pour discrétiser le problème abstrait (4.2), on perd alors le caractère conforme de l'approximation et on obtient des résultats numériques désastreux sur des maillages très déformés comme nous l'illustrerons dans le chapitre 7.

Contrairement à l'espace $RT_0(Q_k)$ qui est de dimension $2d$, l'espace $Y_0(Q_k)$ est de dimension $d+1$. En effet, considérons une base orthonormale de l'hyperplan de dimension $d-1$ orthogonal à $\vec{\Omega}$ dans \mathbb{R}^d et notons $\{\vec{\Omega}_i^\perp\}_{i=1,\dots,d-1}$ les vecteurs générateurs de cette base orthonormale. On introduit pour une maille donnée $Q_k \in \mathcal{D}_h$ leur décomposition dans $RT_0(Q_k)$,

$$\forall i, \vec{\Omega}_i^\perp = \sum_{j=1}^{2d} \Omega_{i,j}^\perp \vec{w}_{k,j},$$

alors, pour chaque $1 \leq i \leq d-1$, on a les relations de liaisons suivantes entre chaque $\vec{\gamma}_{k,j}$:

$$\sum_{j=1}^{2d} \Omega_{i,j}^\perp \vec{\gamma}_{k,j} = 0.$$

Donc, les $2d$ fonctions vectorielles $\vec{\gamma}_{k,j}$ vérifient ces $d-1$ relations de liaison indépendantes. L'espace engendré par le champ de vecteur $\vec{\gamma}_{k,j}$ est de dimension $d+1$. On peut donc exhiber pour chaque maille Q_k un autre champ de vecteur $\{\vec{\xi}_{k,i}\}_{i=1,\dots,d+1}$ formant une base de l'espace $Y_0(Q_k)$ de sorte que chaque fonction vectorielle $\vec{g} \in Y(Q_k)$ puisse s'écrire

$$\vec{g} = \sum_{j=1}^{2d} g_{k,j} \vec{\gamma}_{k,j} = \sum_{i=1}^{d+1} \tilde{g}_{k,i} \vec{\xi}_{k,i}.$$

Cependant, on choisit de présenter la discrétisation mixte-hybride du problème abstrait en utilisant le champ de vecteurs $\{\vec{\gamma}_{k,i}\}_{i=1,\dots,2d}$ car on ne peut pas obtenir d'expression analytique générale du champ de vecteurs $\{\vec{\xi}_{k,i}\}_{i=1,\dots,d+1}$. On effectuera le changement de base approprié en utilisant des manipulations algébriques directement sur le système linéaire. Nous reviendrons sur ce point au cours du chapitre suivant.

On a donc défini les espaces d'approximations sur une maille donnée Q_k , nous allons à présent étudier les problèmes abstraits discrets sur tout l'espace physique \mathcal{D} .

4.2 Formulation mixte discrète

Introduisons les espaces d'approximations sur tout l'espace physique \mathcal{D} . Pour approcher la densité de courant angulaire, on utilisera l'espace

$$Y_0(\mathcal{D}_h) = \{\vec{g}_h \in Y(\mathcal{D}); \vec{g}_h|_{Q_k} \in Y_0(Q_k); Q_k \in \mathcal{D}_h\}, \quad (4.6)$$

pour l'approximation du flux angulaire, on utilisera l'espace

$$L_0(\mathcal{D}_h) = \{v_h \in L^2(\mathcal{D}); v_h|_{Q_k} \in P_0(Q_k); Q_k \in \mathcal{D}_h\}, \quad (4.7)$$

introduit précédemment. La version discrète de (4.2) s'écrit donc : trouver $u_h \in L_0(\mathcal{D}_h)$ et $\vec{g}_h \in Y_0(\mathcal{D}_h)$ tels que

$$\begin{cases} i) & a(\vec{g}_h, \vec{h}_h) + b(u_h, \vec{h}_h) = l_1(\vec{h}_h) \quad \text{pour tout } \vec{h}_h \in Y_0(\mathcal{D}_h), \\ ii) & b(v_h, \vec{g}_h) - d(u_h, v_h) = l_2(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in L_0(\mathcal{D}_h), \end{cases} \quad (4.8)$$

où on cherche $\vec{g}_h \in Y_0(\mathcal{D}_h)$ et $u_h \in L_0(\mathcal{D}_h)$.

La proposition suivante (voir F.Brezzi, M.Fortin [25]) permet d'assurer l'existence et l'unicité du problème discret (les notations utilisées sont conformes à celles utilisées par F.Brezzi et M.Fortin et restent locales à l'énoncé du théorème).

Proposition 4.2.1

Soient $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ et $d(\cdot, \cdot)$ les formes bilinéaires continues sur $Y(\mathcal{D}) \times Y(\mathcal{D})$, sur $Y(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D})$ et $L^2(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D})$ respectivement définies par (3.13), (3.14) et (3.15), et les espaces de dimension finie $Y_0(\mathcal{D}_h) \subset Y(\mathcal{D})$ et $L_0(\mathcal{D}_h) \subset L^2(\mathcal{D})$. On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in L_0(\mathcal{D}_h) \text{ et } \vec{g}_h \in Y_0(\mathcal{D}_h) \text{ tels que :} \\ a(\vec{g}_h, \vec{h}_h) + b(u_h, \vec{h}_h) = l_1(\vec{h}_h) \quad \text{pour tout } \vec{h}_h \in Y_0(\mathcal{D}_h), \\ b(v_h, \vec{g}_h) - d(u_h, v_h) = l_2(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in L_0(\mathcal{D}_h). \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Supposons que les hypothèses du théorème 3.3.1 soient vérifiées. Supposons aussi qu'il existe une constante positive α_h telle que

$$\inf_{u_h \in \text{Ker} B_h} \sup_{v_h \in \text{Ker} B_h} \frac{d(u_h, v_h)}{\|u_h\|_{L^2} \|v_h\|_{L^2}} \geq \alpha_h, \quad (4.10)$$

et que

$$\inf_{u_h \in Y_0(\mathcal{D}_h)} \sup_{v_h \in L_0(\mathcal{D}_h)} \frac{b(v_h, q_h)}{\|q_h\|_Y \|v_h\|_{L^2}} \geq k_0 > 0. \quad (4.11)$$

Alors, pour tout $f \in W$ et $g \in \text{Im} B$ le problème (4.9) admet une unique solution.

Pour vérifier les hypothèses de la proposition 4.2.1, on utilise le résultat suivant.

Proposition 4.2.2

$$\text{Ker} B_h^t = \{\vec{g}_h \in Y_0(\mathcal{D}_h); b(v_h, \vec{g}_h) = 0; \forall v_h \in L_0(\mathcal{D}_h)\} \subset \text{Ker} B^t,$$

et

$$\text{Ker} B_h \subset \text{Ker} B.$$

DÉMONSTRATION - On a construit $L_0(\mathcal{D}_h)$ et $Y_0(\mathcal{D}_h)$ de sorte que $L_0(\mathcal{D}_h) \subset L^2(\mathcal{D})$ et $Y_0(\mathcal{D}_h) \subset Y(\mathcal{D})$ donc $\text{Ker}B_h \subset \text{Ker}B$. Idem pour $\text{Ker}B_h^t \subset \text{Ker}B^t$. ■

La proposition 4.2.2 et la coercivité de a sur $\text{Ker}B^t$ suffit à donner (4.10) pour notre problème mixte du transport. La condition (4.11) équivalente à la condition inf-sup discrète est aussi vérifiée en utilisant la proposition 4.2.2 et la condition inf-sup continue (3.3.4) (cet argument s'appuie sur F.Brezzi et M.Fortin [25] page 58). On peut donc appliquer la proposition 4.2.1 pour obtenir l'existence et l'unicité du problème mixte du transport discret (4.8).

Le système linéaire associé au problème (4.8) s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

où la matrice de ce système est inversible mais n'est pas définie positive. En particulier, la structure globale de la matrice A ne permet pas d'éliminer facilement le vecteur inconnu des densités de courant angulaire. C'est pourquoi il convient d'introduire une inconnue supplémentaire. Cette procédure est appelée procédure d'hybridisation et conduit à la formulation mixte-hybride discrète. C'est ce que nous allons voir dans la suite.

4.3 Formulation mixte-hybride discrète

Pour introduire une inconnue supplémentaire, on utilise la procédure d'hybridisation de Fraeijns de Veubeke [46] et mentionnée en particulier dans [25] qui consiste à introduire des multiplicateurs de Lagrange sur chaque face de \mathcal{D}_h . Nous décrirons dans ce qui suit cette procédure pour notre cas particulier. Comme on l'a vu précédemment, si on choisit l'espace d'approximation de la densité de courant angulaire suivant

$$Y_0(\mathcal{D}_h) = \{ \vec{g} \in Y(\mathcal{D}); \vec{g}|_{Q_k} \in Y_0(Q_k) \},$$

alors le système linéaire résultant est difficile à inverser. En particulier, en reprenant les notations de la relation (A.10), la matrice A couple les densités de courant angulaire des mailles voisines. La matrice A a donc une structure globale (sur tout le maillage), on doit donc inverser le système linéaire d'un bloc, ce qui peut être très coûteux. C'est pourquoi on introduit l'espace suivant

$$M_0(\mathcal{D}_h) = \left\{ \mu_h \in L^2(\mathcal{F}_h^{int}); \mu_h|_f \in P_0(f); f \in \mathcal{F}_h^{int} \right\}.$$

En effet, un champ de vecteurs $\vec{g}_h \in \prod_k Y_0(Q_k)$ appartient à $Y_0(\mathcal{D}_h)$ si et seulement si pour tout $\mu_h \in M_0(\mathcal{D}_h)$ on a

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_h^{int}} \int_f \mu_h \left[(\vec{g}_h \cdot \vec{\Omega})(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \right] ds = \sum_{f \in \mathcal{F}_h^{int}} \int_f \mu_h [\vec{g}_h \cdot \vec{n}] ds = 0,$$

où $[\vec{g}_h \cdot \vec{n}]$ représente le saut de la composante normale de \vec{g}_h entre deux éléments de \mathcal{D}_h . Ainsi, on impose une contrainte de continuité inter-éléments sur les bords par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange de l'espace $M_0(\mathcal{D}_h)$. En introduisant la forme bilinéaire $c : M_0(\mathcal{D}_h) \times \prod_k Y_0(Q_k) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$c(\mu_h, \vec{g}_h) = \sum_{f \in \mathcal{F}_h^{int}} \int_f \mu_h \left[(\vec{g}_h \cdot \vec{\Omega})(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \right] ds,$$

l'approximation mixte-hybride du problème (4.2) consiste donc à trouver

$(\vec{g}_h, u_h, \lambda_h) \in \prod_k Y_0(Q_k) \times L_0(\mathcal{D}_h) \times M_0(\mathcal{D}_h)$ tels que

$$\begin{cases} a(\vec{g}_h, \vec{h}_h) + b(u_h, \vec{h}_h) + c(\lambda_h, \vec{h}_h) = l_1(\vec{h}_h) & \text{pour tout } \vec{h}_h \in \prod_k Y_0(Q_k), \\ b(v_h, \vec{g}_h) - d(u_h, v_h) = l_2(v_h) & \text{pour tout } v_h \in L_0(\mathcal{D}_h), \\ c(\mu_h, \vec{g}_h) = 0 & \text{pour tout } \mu_h \in M_0(\mathcal{D}_h). \end{cases} \quad (4.13)$$

On note $\lambda_{k,l} \in P_0(\Gamma_{k,l})$ la valeur moyenne du flux angulaire sur la face $\Gamma_{k,l}$ de l'élément fini Q_k . Remarquons que l'inconnue $\lambda_{k,l}$ joue le rôle du multiplicateur de Lagrange qui permet d'assurer la continuité inter-élément de l'approximation de la densité de courant angulaire \vec{g}_h .

Dans les quelques lignes qui suivent, nous allons justifier l'introduction d'une inconnue supplémentaire à notre système mixte. On note aussi

$$\Lambda_0 = \{\lambda_h \in M_0(\mathcal{D}_h), \lambda_h = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h \cap \partial\mathcal{D}\}.$$

On introduit alors, pour $\vec{g}_h \in Y_0(\mathcal{D}_h)$ et $\lambda_h \in L_0(\mathcal{D}_h)$,

$$c(\lambda_h, \vec{g}_h) = \sum_{k=1}^K \int_{\partial Q_k} \lambda_h (\vec{\Omega} \cdot \vec{g}_h) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}). \quad (4.14)$$

On peut énoncer les lemmes suivant :

Lemme 4.3.1

Soit $\vec{g}_h \in \prod_k Y_0(Q_k)$. Alors

$$(c(\lambda_h, \vec{g}_h) = 0, \forall \lambda_h \in \Lambda_0) \Leftrightarrow (\vec{g}_h \in Y_0(\mathcal{D}_h) \text{ et } (\vec{\Omega} \cdot \vec{n})(\vec{\Omega} \cdot \vec{g}_h) = (\vec{\Omega} \cdot \vec{n})\lambda_h \text{ sur } \partial\mathcal{D}^+) \quad (4.15)$$

Soit alors (\vec{g}_h, u_h) la solution unique du problème (4.8), on considère l'application :

$$\Phi : \vec{f}_h \rightarrow \int_{\mathcal{D}} \vec{g}_h \cdot \vec{f}_h + \int_{\partial\mathcal{D}^+} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \vec{g}_h \cdot \vec{f}_h - \int_{\mathcal{D}} u_h \vec{\nabla} \cdot (P_{\Omega} \cdot \vec{f}_h) - \int_{\mathcal{D}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{f}_h) q.$$

Pour tout $\vec{f}_h \in Y_0(\mathcal{D}_h)$, $\Phi(\vec{f}_h) = 0$ (ce n'est rien d'autre que (4.8-i)). De plus, (4.15) implique qu'il existe $\lambda_h^0 \in \Lambda_0$, $\lambda_h^0 = \vec{\Omega} \cdot \vec{g}_h$ sur $\partial\mathcal{D}^+$ tel que

$$\Phi(\vec{f}_h) = c(\lambda_h^0, \vec{f}_h) \quad \forall \vec{f}_h \in Y_0(\mathcal{D}_h).$$

L'unicité de λ_h^0 est donnée par le lemme suivant

Lemme 4.3.2

Soit $\mu_h \in \Lambda_0$ tel que $\vec{g}_h = \vec{\Omega} \lambda_h$ sur $\partial\mathcal{D}^+$. Si

$$\forall \vec{f}_h \in Y_0(\mathcal{D}_h), \quad c(\lambda_h, \vec{f}_h) = 0,$$

alors $\lambda_h \equiv 0$.

Arnold et Brezzi [8] ont prouvé l'existence et l'unicité d'une solution au système (4.13).

4.4 Estimations d'erreur

L'introduction de multiplicateurs de Lagrange et l'utilisation des éléments finis mixtes-hybrides permet d'obtenir une erreur relative sur la variable primale (ici le flux angulaire) plus petite qu'avec les éléments finis mixtes, c'est l'un des multiples intérêts de la procédure d'hybridisation détaillée plus haut. En nous basant sur les résultats de F.Brezzi et M.Fortin, nous donnons les principales estimations d'erreur sur la solution de notre problème mixte-hybride discret. Dans un premier temps, nous présentons les estimations d'erreur obtenue en appliquant directement la théorie de F.Brezzi et M.Fortin en une dimension d'espace ($d = 1$). Ensuite, nous donnons quelques estimations globales connues [25, 8, 69] du problème (4.9) en deux dimensions d'espace ($d = 2$) puis nous discuterons des propriétés induites par l'approximation (4.7) qui n'est plus classique dès que $d > 1$.

En dimension 1, l'espace $Y_0(Q_k)$ coïncide avec l'espace $RT_0(Q_k)$ qui lui même coïncide avec l'espace $P_1(Q_k)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à un définis sur Q_k . Dès que la dimension de l'espace physique est supérieure à 1, ce n'est évidemment plus le cas.

On considère dans ce paragraphe un problème de transport en dimension $d = 1$. On prendra $\mathcal{D} = (a, b)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et on choisit $\mu > 0$ une direction angulaire fixée et $u_a \in \mathbb{R}_*^+$. On s'intéresse donc à l'approximation numérique du problème simplifié du transport :

$$\begin{cases} i) & \mu u'(x) + \sigma_t u(x) = q(x), \quad \text{pour } x \in \mathcal{D}, \\ ii) & u(a) = u_a. \end{cases} \quad (4.16)$$

La formulation mixte de ce problème s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} i) & \sigma_t g(x) + \mu^2 u'(x) = \mu q(x), \quad \text{pour } x \in \mathcal{D}, \\ ii) & g'(x) + \sigma_t u(x) = q(x), \quad \text{pour } x \in \mathcal{D}, \\ iii) & u(a) = u_a, \\ iv) & g(b) = \mu u(b). \end{cases} \quad (4.17)$$

Ce problème de transport correspond exactement à un problème de diffusion avec des conditions aux limites adaptées, on peut donc utiliser tous les résultats classiques de la théorie des éléments finis mixtes-hybrides. On peut donc aussi écrire ce problème sous forme abstraite en utilisant les espaces fonctionnels classiques pour la diffusion [25]. On cherche donc $u \in L^2(\mathcal{D})$ et $g \in H^1(\mathcal{D})$ tels que

$$\begin{cases} i) & a(g, h) + b(u, h) = l_1(h) \quad \text{pour tout } h \in H^1(\mathcal{D}), \\ ii) & b(v, g) - d(u, v) = l_2(v) \quad \text{pour tout } v \in L^2(\mathcal{D}) \end{cases} \quad (4.18)$$

où

$$a(g, h) = \mu g(b)h(b) + \int_a^b \sigma_t g(x)h(x)dx,$$

$$b(u, g) = - \int_a^b \mu^2 u(x)g'(x)dx,$$

$$d(u, v) = \int_a^b \sigma_t \mu^2 u(x)v(x)dx,$$

$$l_1(h) = \int_a^b \mu h(x)q(x)dx,$$

et

$$l_2(v) = -u_a v(a) - \int_a^b \mu^2 v(x)q(x)dx.$$

Ce problème variationnel admet une unique solution en vertu du théorème 3.3.1. On cherche maintenant à approcher ce problème en utilisant les espaces d'approximation introduits précédemment. Soit donc $L_0(\mathcal{D}_h) \subset L^2(\mathcal{D})$ et $Y_0(\mathcal{D}_h) \subset H^1(\mathcal{D})$ des sous-espaces de dimension finie. On s'intéresse au problème discret suivant

$$\begin{cases} i) & a(g_h, h_h) + b(u_h, h_h) = l_1(h_h) \quad \text{pour tout } h_h \in Y_0(\mathcal{D}_h), \\ ii) & b(v_h, g_h) - d(u_h, v_h) = l_2(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in L_0(\mathcal{D}_h). \end{cases} \quad (4.19)$$

On peut alors écrire l'estimation globale suivante :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|g - g_h\|_{H^1(\mathcal{D})} \leq K \left(\inf_{v_h \in L_0(\mathcal{D}_h)} \|u - v_h\|_{L^2(\mathcal{D})} + \inf_{h_h \in Y_0(\mathcal{D}_h)} \|g - h_h\|_{H^1(\mathcal{D})} \right) \quad (4.20)$$

On peut alors écrire les estimations d'erreurs connues (voir F. Brezzi, M. Fortin [25] ou A. Burbeau [21]) suivantes :

$$\begin{cases} \|g - g_h\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq Ch \|g\|_{L^2(\mathcal{D})}, \\ \|u - u_h\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq Ch \|u\|_{H^2(\mathcal{D})}, \\ \|P_h u - u_h\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq Ch^2 \|u\|_{H^3(\mathcal{D})}. \end{cases} \quad (4.21)$$

L'opérateur P_h représente la projection orthogonale de L^2 sur l'espace L_0 et C est une constante positive. La convergence est d'ordre deux en espace si la solution du problème est suffisamment régulière.

Remarque 4.4.1

Le cas de la dimension $d > 1$ fait l'objet de travaux en collaboration avec V. Siess.

Bilan du chapitre 4

Nous avons donc introduit les espaces d'approximation nécessaires pour la discrétisation mixte-hybride en espace du problème variationnel mixte du transport. Nous avons donné quelques estimations d'erreur pour le problème discret en 1D et une estimation globale en dimension quelconque. Nous allons maintenant détailler la discrétisation de notre problème modèle en utilisant les espaces d'approximation introduits dans ce chapitre.

Chapitre 5

Discrétisation

Sommaire

5.1	Discrétisation angulaire aux ordonnées discrètes	75
5.2	Approximation d'un vecteur à partir de ses flux dans le cas des quadrilatères	79
5.3	Formulation variationnelle mixte-hybride discrète pour le transport	82
5.4	Discrétisation	82
5.4.1	Discrétisation de l'équation de bilan	83
5.4.2	Discrétisation de l'équation de la densité de courant angulaire	83
5.4.3	Continuité de la densité de courant angulaire	84
5.5	Étude du système linéaire	84
5.6	Résolution matricielle	90
5.6.1	Assemblage de la matrice globale	90
5.6.2	Résolution du système linéaire	91
5.6.3	A propos de M_h^λ	94

Dans cette partie, nous allons détailler l'élaboration d'une discrétisation de notre problème modèle. Nous nous plaçons ici dans le cadre de maillages hexaédraux, on notera \mathcal{D}_h l'espace d'approximation de l'espace physique \mathcal{D} . Nous commençons par détailler l'approximation angulaire de notre problème. Nous donnons ensuite un moyen d'approcher une fonction vectorielle à partir de ses flux en présentant une technique classique d'approximation des éléments de $H(\text{div}, \mathcal{D})$. Nous détaillons ensuite les propriétés du système linéaire résultant de la discrétisation en espace.

5.1 Discrétisation angulaire aux ordonnées discrètes

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, l'approximation angulaire d'un problème de transport peut se faire de diverses manières. Nous avons choisi d'utiliser une méthode aux ordonnées discrètes pour discrétiser la variable $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}^2$ de notre problème de transport. Nous précisons tout d'abord les avantages et les inconvénients des formules de quadrature utilisées par la méthode. Nous présenterons ensuite la méthode utilisée : une quadrature S_N de type Carlson [30] pour notre discrétisation en angle.

Quadratures S_N : choix, avantages et inconvénients

Il est important de prêter attention au choix d'une quadrature dans les méthodes S_N . Dans un problème de transport, aucune direction de la sphère n'est privilégiée, il est donc important

que la quadrature soit préservée par des rotations. En pratique, on utilise des quadratures (par exemple les quadratures "level symmetric", voir J.J.Duderstadt, W.Martin [45]) dont l'ensemble des directions discrètes reste invariant par rotation d'un angle $\frac{\pi}{2}$ ou π autour des axes de coordonnées cartésiennes (voir figure 5.2). Après avoir défini l'ensemble des directions discrètes, il convient de leur associer certains poids de quadrature en imposant que certaines intégrales de polynômes simples soient calculées exactement par la quadrature. Les quadratures utilisées dans la pratique donnent de bons résultats. Néanmoins, il existe quelques inconvénients ; en particulier, pour un nombre suffisamment grand de directions discrètes, il est parfois impossible d'assurer la positivité de tous les poids de la quadrature (voir B.G.Carlson [29] par exemple).

Le découpage S_N (B.G.Carlson [30])

Nous nous plaçons ici dans le cadre d'un problème tridimensionnel ($d = 3$). On muni alors \mathbb{R}^3 d'un repère cartésien $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et on notera, pour $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. On commence par décomposer le vecteur direction $\vec{\Omega}$ sur la sphère unité centrée en O de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_2 + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_3 \\ &= \mu \vec{e}_1 + \sqrt{1 - \mu^2} (\cos \varphi \vec{e}_2 + \sin \varphi \vec{e}_3), \end{aligned}$$

où θ est l'angle que fait le vecteur direction $\vec{\Omega}$ avec l'axe porté par \vec{e}_1 et φ l'angle que fait la projection de $\vec{\Omega}$ dans le plan (\vec{e}_2, \vec{e}_3) avec l'axe porté par \vec{e}_2 (voir figure 5.2). Nous avons aussi noté $\mu = \cos \theta$.

La demi sphère unité est donc paramétrée par la longitude $\varphi \in [0, \pi]$ et par le cosinus de la latitude $\mu = \cos \theta \in [-1, 1]$.

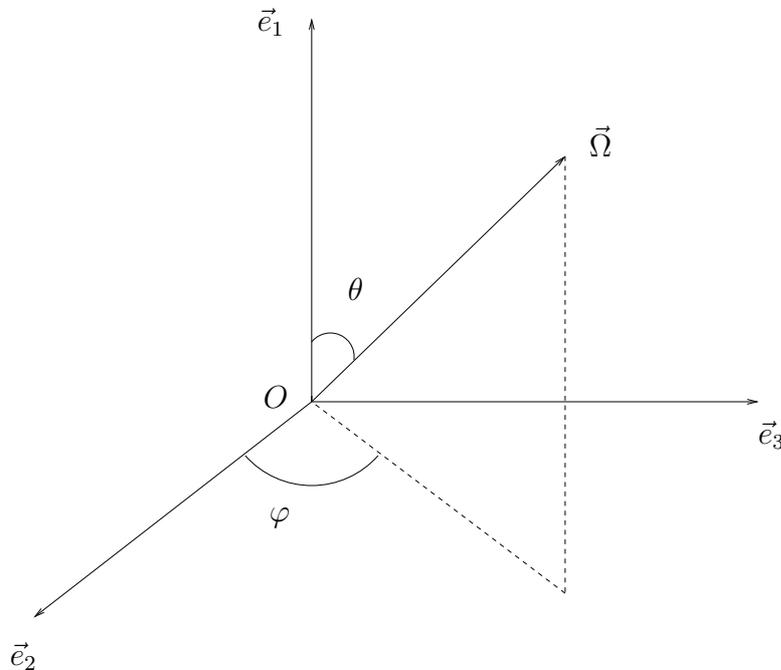


FIG. 5.1 – Représentation du vecteur direction $\vec{\Omega}$.

Le principe du découpage S_N consiste à découper l'espace des directions $(\mu, \varphi) \in [-1, 1] \times [0, \pi]$ en $\frac{n(n+2)}{2}$ surfaces élémentaires d'aires égales, n étant nécessairement choisi pair. On découpe donc l'intervalle des latitudes en n intervalles, ce qui génère n points de discrétisations notés

$$\mu_m, 1 \leq m \leq n$$

numérotés dans le sens des μ croissants. Ensuite, on choisit L_m longitudes discrètes pour chaque latitude μ_m de la façon suivante :

- si $m \leq \frac{n}{2}$ alors $L_m = 2m$;
- si $m \geq \frac{n}{2} + 1$ alors $L_m = 2(n+1-m)$.

Chaque surface élémentaire a pour aire $\frac{4\pi}{n(n+2)}$ et est définie par

$$[\mu_{m-\frac{1}{2}}, \mu_{m+\frac{1}{2}}] \times [\varphi_{m,l-\frac{1}{2}}, \varphi_{m,l+\frac{1}{2}}], \text{ avec } l \in \{1, \dots, L_m\}.$$

Le découpage en longitude est régulier, et on a donc :

$$\varphi_{m,l-\frac{1}{2}} - \varphi_{m,l+\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{L_m},$$

les points de discrétisation étant placés au centre des intervalles de sorte que

$$\varphi_{m,l} = \pi - \frac{\pi}{L_m} \left(l - \frac{1}{2} \right),$$

numérotés pour l variant de 1 à L_m dans le sens des φ décroissant de π à 0. Pour les latitudes, les $\mu_{m+\frac{1}{2}}$ sont calculés à partir de la formule :

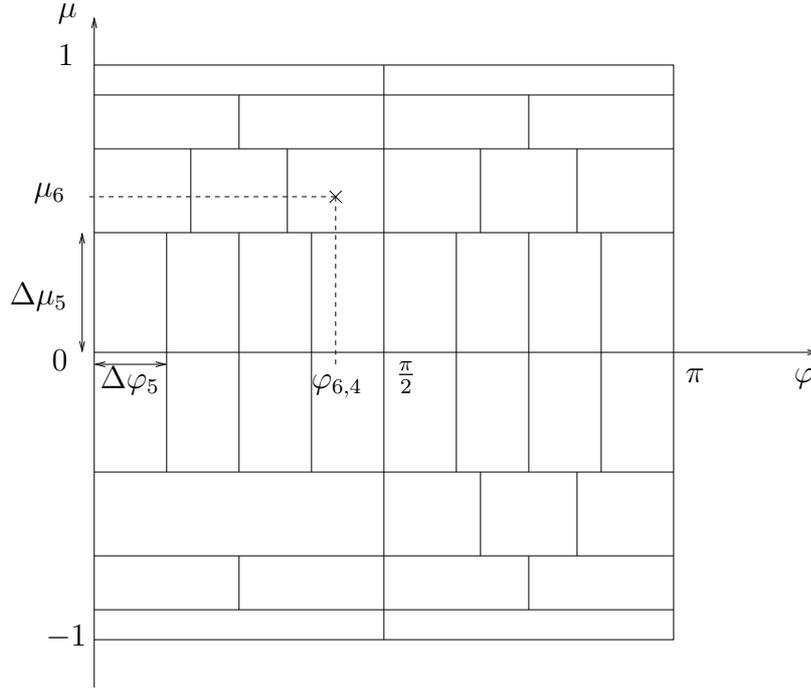
$$\frac{4\pi}{n(n+2)} = (\mu_{m+\frac{1}{2}} - \mu_{m-\frac{1}{2}}) \times (\varphi_{m,l+\frac{1}{2}} - \varphi_{m,l-\frac{1}{2}}) = \frac{\pi}{L_m} (\mu_{m+\frac{1}{2}} - \mu_{m-\frac{1}{2}}),$$

soit $\mu_{m+\frac{1}{2}} = \frac{4L_m}{n(n+2)} + \mu_{m-\frac{1}{2}}$ en ayant choisi $\mu_{\frac{1}{2}} = -1$ et $\mu_{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} = 0$. Ce qui donne

$$\mu_{m+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{4m(m+1)}{n(n+2)} - 1, & \text{si } m \leq \frac{n}{2}, \\ 1 - \frac{4(n+1-m)(n-m)}{n(n+2)}, & \text{si } m \geq \frac{n}{2} + 1. \end{cases}$$

Au lieu de choisir les μ_m au centre des intervalles, on les décale à l'aide d'un coefficient multiplicatif $\sqrt{\frac{n(n+2)}{n(n+2)-2}}$, de sorte que les formules de quadrature utilisées soient exactes pour le calcul des moments jusqu'à l'ordre 2, i.e.

$$\int_{-1}^1 \int_0^\pi \frac{d\varphi d\mu}{\pi} = \sum_{m,l} \omega = 1,$$


 FIG. 5.2 – Découpage S_N de la demi sphère unité dans le cas où $N = 8$.

$$\int_{-1}^1 \int_0^\pi \vec{\Omega} \frac{d\varphi}{\pi} \frac{d\mu}{2} = \sum_{m,l} \omega \vec{\Omega}_{m,l} = \vec{0},$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^\pi \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega} \frac{d\varphi}{\pi} \frac{d\mu}{2} = \sum_{m,l} \omega \vec{\Omega}_{m,l} \otimes \vec{\Omega}_{m,l} = \frac{1}{3} Id_{\mathbb{R}^3},$$

où ω représente le poids de quadrature associé à chaque surface élémentaire

$$\omega = \frac{2}{n(n+2)},$$

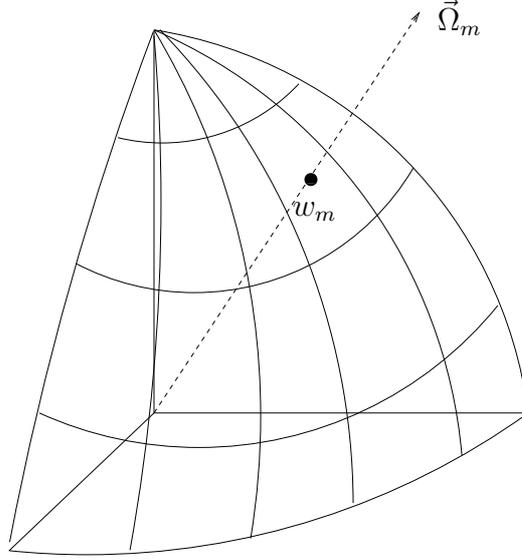
où les directions discrètes $\vec{\Omega}_{m,l}$ sont données par

$$\vec{\Omega}_{m,l} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_m}{\sqrt{1-\mu_m^2}} \cos \varphi_{m,l} \\ \frac{\mu_m}{\sqrt{1-\mu_m^2}} \sin \varphi_{m,l} \\ 1 \end{pmatrix},$$

où les μ_m sont donnés par les formules :

$$\mu_m = \begin{cases} \left(\frac{4m^2}{n(n+2)} - 1 \right) \sqrt{\frac{n(n+2)}{n(n+2)-2}}, & \text{si } m \leq \frac{n}{2}, \\ \left(\frac{4(n+1-m)^2}{n(n+2)} + 1 \right) \sqrt{\frac{n(n+2)}{n(n+2)-2}}, & \text{si } m \geq \frac{n}{2} + 1. \end{cases}$$

Remarquons que la quadrature utilisée est une quadrature symétrique.


 FIG. 5.3 – Découpage S_N du quart de sphère unité.

Dans la suite de ce chapitre, on considère une direction $\vec{\Omega}$ fixée et on s'intéressera à la résolution du problème suivant :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_\Omega(x) + \sigma_t(x) u_\Omega(x) = S_\Omega(x) & \text{pour } x \in \mathcal{D}, \\ u_\Omega = u_b & \text{pour } x \in \partial\mathcal{D}^-. \end{cases} \quad (5.1)$$

5.2 Approximation d'un vecteur à partir de ses flux dans le cas des quadrilatères

Dans cette section, nous présentons une méthode permettant d'approcher des fonctions vectorielles sur des mailles quelconques. Cette méthode est très importante pour manipuler sur des mailles quelconques les fonctions vectorielles approchées dans l'espaces RT_0 . Nous présentons cette technique dans le cas de quadrilatères en 2D, mais elle peut s'étendre au cas des triangles ou des hexaèdres et tétraèdres en 3D. Soit un vecteur $\vec{F} = (F_1, F_2)$ défini sur un quadrilatère Q . Nous allons définir une approximation polynômiale du vecteur \vec{F} à l'aide des quatre flux $\vec{F} \cdot \vec{n}$ associés aux quatre arêtes du quadrilatère Q . Le quadrilatère Q est l'image d'un carré de référence \hat{Q} par une application F_Q telle que :

$$F_Q : \hat{Q} = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Q \\ (\eta, \xi) \rightarrow (x, y), \quad (5.2)$$

avec

$$\begin{cases} x = x(\eta, \xi) = \sum_{k=1}^4 x_k l_k(\eta, \xi), \\ y = y(\eta, \xi) = \sum_{k=1}^4 y_k l_k(\eta, \xi), \end{cases} \quad (5.3)$$

où l_k , $1 \leq k \leq 4$ désignent les fonctions de base Q_1 usuelles, c'est à dire :

$$\begin{cases} l_1(\eta, \xi) = \xi\eta, \\ l_2(\eta, \xi) = \xi(1 - \eta), \\ l_3(\eta, \xi) = (1 - \xi)(1 - \eta), \\ l_4(\eta, \xi) = (1 - \xi)\eta. \end{cases} \quad (5.4)$$

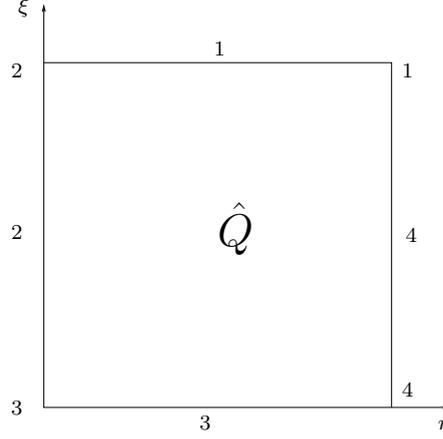


FIG. 5.4 – Carré de référence.

On introduit l'application linéaire $\frac{DF_Q}{\det(DF_Q)}$ (transformation de Piola) en définissant :

$$DF_Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

qui s'écrit explicitement :

$$DF_Q = \begin{pmatrix} (y_1 - y_2)\xi + (y_3 - y_4)(1 - \xi) & (y_1 - y_4)\eta + (y_2 - y_3)(1 - \eta) \\ (x_1 - x_2)\xi + (x_3 - x_4)(1 - \xi) & (x_1 - x_4)\eta + (x_2 - x_3)(1 - \eta) \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

À chaque arête de \hat{Q} , on associe une mesure $d\hat{s}$ et un couple (\vec{T}, \vec{N}) constitué de la tangente unitaire et de la normale extérieure unitaire. Pour chaque arête de Q , on introduit pareillement une mesure ds et un couple (\vec{T}, \vec{N}) constitué de la tangente unitaire et de la normale extérieure unitaire.

On vérifie par un calcul direct que :

$$\vec{T} = \frac{DF_Q \vec{T}}{\|DF_Q \vec{T}\|},$$

et

$$\vec{N} = \frac{(DF_Q^t)^{-1} \vec{N}}{\|(DF_Q^t)^{-1} \vec{N}\|}.$$

On en déduit :

$$ds = \|DF_Q \vec{T}\| d\hat{s} = \|(DF_Q^t)^{-1} \vec{N}\| |\det(DF_Q)| d\hat{s}.$$

Alors, si $\vec{\hat{F}}$ est un vecteur défini sur \hat{Q} , on lui associe le vecteur \vec{F} tel que :

$$\vec{F} = \frac{1}{\det(DF_Q)} DF_Q \vec{\hat{F}}. \quad (5.7)$$

Cette définition est justifiée par le lemme :

Lemme 5.2.1

$\vec{F} \cdot \vec{N} ds = \vec{\hat{F}} \cdot \vec{N} d\hat{s}$ sur chaque arête de Q (ou de \hat{Q}).

DÉMONSTRATION - On calcule

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{N} ds &= \frac{1}{\det(DF_Q)} DF_Q \vec{\hat{F}} \cdot \frac{(DF_Q^t)^{-1} \vec{N}}{\|(DF_Q^t)^{-1} \vec{N}\|} ds \\ &= DF_Q \vec{\hat{F}} \cdot (DF_Q^t)^{-1} \vec{N} d\hat{s} \\ &= \vec{\hat{F}} \cdot \vec{N} d\hat{s}. \end{aligned}$$

■

Nous pouvons à présent définir l'approximation polynômiale de \vec{F} , pour chaque arête a ($1 \leq a \leq 4$) de \hat{Q} , on considère le degré de liberté : $\vec{F} \cdot \vec{N}(a) = \hat{f}_a$.

On construit alors $\vec{\hat{F}} = (\hat{F}_\eta, \hat{F}_\xi)$ dans \hat{Q} par une interpolation linéaire en η (respectivement en ξ) de la composante \hat{F}_η (respectivement \hat{F}_ξ) de $\vec{\hat{F}}$ à partir de \hat{f}_4 et \hat{f}_2 (respectivement \hat{f}_1 et \hat{f}_3).

On en déduit alors que :

$$\begin{cases} \hat{F}_\eta = \hat{f}_4 \eta + \hat{f}_2 (\eta - 1), \\ \hat{F}_\xi = \hat{f}_1 \xi + \hat{f}_3 (\xi - 1). \end{cases} \quad (5.8)$$

Alors, à partir de l'interpolation de $\vec{\hat{F}}$, on construit celle de \vec{F} par l'intermédiaire de (5.7). Par l'intermédiaire du lemme précédent (valable pour toute arête), il résulte que :

$$L_a \vec{F} \cdot \vec{N}(a) = \vec{\hat{F}} \cdot \vec{N}(a) = \hat{f}_a, \quad (5.9)$$

où L_a désigne la longueur de l'arête a .

On introduit alors les fonctions de base $\vec{w}_a(\eta, \xi)$ associées à chaque arête a de \hat{Q} , et des degrés de liberté \hat{f}_a .

On peut écrire :

$$\vec{\hat{F}} = \sum_{a=1}^4 \hat{f}_a \vec{w}_a = \sum_{a=1}^4 \vec{\hat{F}} \cdot \vec{N}(a) \vec{w}_a,$$

où

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = (0, \xi), \\ \vec{w}_2 = (\eta - 1, 0), \\ \vec{w}_3 = (0, \xi - 1), \\ \vec{w}_4 = (\eta, 0). \end{cases} \quad (5.10)$$

Nous allons maintenant détailler la discrétisation spatiale du problème variationnel mixte du transport.

5.3 Formulation variationnelle mixte-hybride discrète pour le transport

Dans ce paragraphe, on s'applique à présenter le problème variationnel discret qui nous aidera à détailler la discrétisation. On introduit pour chaque maille Q_k et chaque face $\Gamma_{k,j}$ de Q_k le multiplicateur de Lagrange $\lambda_{k,j} \in L^2(\Gamma_{k,j})$. Nous présentons cette discrétisation pour $\vec{\Omega}$ fixé et pour un terme source fixé.

Remarque 5.3.1

Attention, pour chaque face interne notée $e_0 \in \mathcal{F}_h^{int}$, il existe un unique multiplicateur de Lagrange λ_{e_0} et il existe deux éléments finis adjacents (notés Q_k et $Q_{k'}$) par la face e_0 . On note alors j_0 (resp. j'_0) l'indice local de la face interne e_0 pour la maille Q_k (resp. $Q_{k'}$). Suivant nos notations (locales aux mailles) on a donc

$$\lambda_{e_0} = \lambda_{k,j_0} = \lambda_{k',j'_0}.$$

En vertu du paragraphe 5.4, on peut écrire la formulation variationnelle mixte-hybride suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall Q_k \in D_h, \text{ trouver } (u_k, \vec{g}_k, \lambda_k) \in L_0(Q_k) \times Y_0(Q_k) \times L^2(\partial Q_k) \text{ tels que :} \\ \\ \forall (v_k, \vec{f}_k, \mu_k) \in L_0(Q_k) \times Y_0(Q_k) \times L^2(\partial Q_k) \\ \\ \int_{Q_k} \vec{\nabla} \cdot \vec{g}_k v_k dx + \int_{Q_k} \sigma_t u_k v_k dx = \int_{Q_k} q_k v_k dx, \\ \\ \int_{Q_k} \sigma_t (\vec{g}_k \cdot \vec{f}_k) dx - \int_{Q_k} u_k \vec{\nabla} \cdot (P_\Omega \vec{f}_k) dx + \sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} \lambda_{k,j} (P_\Omega \vec{f}_k \cdot \vec{n}_{k,j}) ds \\ \\ = \int_{Q_k} q_k (\vec{\Omega} \cdot \vec{f}_k) dx, \tag{5.11} \\ \\ \sum_{j=1}^{2d} g_{k,j} \int_{\Gamma_{k,j_0}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_{k,j}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j_0}) ds + \sum_{j=1}^{2d} g_{k',j} \int_{\Gamma_{k',j'_0}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_{k',j}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k',j'_0}) ds = 0, \\ \\ \text{où } Q_k \text{ et } Q_{k'} \text{ sont deux mailles adjacentes,} \\ \\ \lambda_{k,j} = u_b \text{ pour } j \in \partial \mathcal{D}, \\ \\ g_{k,j} = (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j}) \lambda_{k,j} \text{ pour } j \in \partial \mathcal{D}^+. \end{array} \right.$$

5.4 Discrétisation

Nous pouvons maintenant détailler la discrétisation du problème (5.11) en utilisant les éléments finis mixtes-hybrides.

5.4.1 Discrétisation de l'équation de bilan

Commençons par écrire la discrétisation de l'équation de bilan. On peut écrire la forme variationnelle de l'équation de bilan sur un élément fini donné $Q_k \in \mathcal{D}_h$:

$$\int_{Q_k} \vec{\nabla} \cdot \vec{g}_k v_k dx + \int_{Q_k} \sigma_t u_k v_k dx = \int_{Q_k} q_k v_k dx. \quad (5.12)$$

On choisit $v_k = \mathbf{1}_{Q_k}(x)$ pour tout $Q_k \in \mathcal{D}_h$. En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_{Q_k} v_k \vec{\nabla} \cdot \vec{g}_k dx = v_k \int_{\partial Q_k} \vec{g}_k \cdot \vec{n} ds.$$

Alors, on découpe le terme intégral $\int_{\partial Q_k} \vec{g} \cdot \vec{n} ds$ sur les différentes faces de Q_k , on a

$$\sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} \sum_{j'=1}^{2d} g_{k,j'} (\vec{\gamma}_{k,j'} \cdot \vec{n}_{k,j}) ds + \sigma_{t,k} u_k V_k = q_k V_k, \quad (5.13)$$

où

$$V_k = \int_{Q_k} \mathbf{1}_{Q_k}(x) dx, \quad (5.14)$$

est la mesure de l'élément fini Q_k et $\sigma_{t,k}$ est la valeur moyenne de σ_t sur Q_k .

En remplaçant $\vec{\gamma}_{k,j}$ par $P_\Omega \vec{w}_{k,j}$, on obtient au final

$$\sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} \sum_{j'=1}^{2d} g_{k,j'} (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_{k,j'}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j}) ds + \sigma_{t,k} u_k V_k = q_k V_k. \quad (5.15)$$

5.4.2 Discrétisation de l'équation de la densité de courant angulaire

On discrétise à présent l'équation de la densité de courant angulaire qui relie la densité de courant angulaire aux gradients du flux angulaire. La forme abstraite sur une maille Q_k de l'équation de la densité de courant angulaire est donnée par

$$\int_{Q_k} \sigma_t (\vec{g}_h \cdot \vec{f}_h) dx - \int_{Q_k} u_k \vec{\nabla} \cdot (P_\Omega \vec{f}_h) dx + \sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} \lambda_{k,j} (P_\Omega \vec{f}_h \cdot \vec{n}) ds = \int_{Q_k} q_k (\vec{\Omega} \cdot \vec{f}_h) dx. \quad (5.16)$$

On utilise les fonctions de base $\vec{\gamma}_{k,j}$ introduites au chapitre 4. Pour chaque face $\Gamma_{k,i}$ de Q_k , en choisissant $\vec{f}_h = \vec{\gamma}_{k,j}$ on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2d} g_{k,j} \sigma_{t,k} \int_{Q_k} \vec{\gamma}_{k,i} \cdot \vec{\gamma}_{k,j} dx &= u_k \sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\gamma}_{k,i}) ds \\ &- \sum_{j=1}^{2d} \lambda_{k,j} \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\gamma}_{k,i}) ds + q_k \int_{Q_k} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\gamma}_{k,i}) dx, \end{aligned} \quad (5.17)$$

soit

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2d} g_{k,j} \sigma_{t,k} \int_{Q_k} (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_{k,i}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_{k,j}) dx &= u_k \sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_{k,i}) ds \\ &- \sum_{j=1}^{2d} \lambda_{k,j} \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_{k,i}) ds + q_k \int_{Q_k} (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_{k,i}) dx. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Notons que sur des maillages cartésiens de l'espace physique, on peut calculer analytiquement les termes intégrales. Ce n'est plus le cas dès que le maillage est déformé ou non structuré. On doit alors utiliser des formules de quadrature.

5.4.3 Continuité de la densité de courant angulaire

Comme on l'a vu précédemment, on doit assurer la continuité de la densité de courant angulaire par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange. Ainsi, pour chaque face interne notée $e_0 \in \mathcal{F}_h^{int}$ il existe deux éléments finis adjacents (notés Q_k et $Q_{k'}$) et deux densités de courant angulaire notées \vec{g}_k et $\vec{g}_{k'}$. On note alors j_0 (resp. j'_0) l'indice local de la face interne e_0 pour la maille Q_k (resp. $Q_{k'}$). L'équation de continuité pour la densité de courant angulaire pour la face e_0 s'écrit alors

$$\sum_{j=1}^{2d} g_{k,j} \int_{\Gamma_{k,j_0}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_{k,j}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j_0}) ds + \sum_{j=1}^{2d} g_{k',j} \int_{\Gamma_{k',j'_0}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_{k',j}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k',j'_0}) ds = 0. \quad (5.19)$$

5.5 Étude du système linéaire

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le système linéaire résultant de la discrétisation mixte-hybride issue du problème abstrait (4.2). Ce système linéaire s'écrit de la façon suivante

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h & C_h \\ B_h^t & -D_h & 0 \\ C_h^t & 0 & L_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_h \\ u_h \\ \lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_h \\ S_h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

où G_h est le vecteur inconnu des densités de courant angulaire sur chaque face de chaque maille de \mathcal{D}_h , U_h est le vecteur inconnu contenant les valeurs moyennes du flux angulaire sur chaque maille de \mathcal{D}_h , λ_h est le vecteur inconnu contenant du flux angulaire sur chaque face du maillage. La matrice du système est une matrice bloc 3×3 symétrique mais qui n'est pas définie. En effet, contrairement aux éléments finis mixtes-hybrides appliqués à l'équation de diffusion par exemple, la matrice A_h n'est pas inversible. A_h est une matrice diagonale par bloc de dimension $2dK$ avec $2d \times 2d$ blocs A_h^k sur la diagonale, chaque bloc correspondant à une matrice élémentaire sur chaque maille Q_k , $1 \leq k \leq K$ et donnée par

$$A_h^k = \{(A_h^k)_{ab}\}_{1 \leq a,b \leq 2d} \text{ où } (A_h^k)_{ab} = \sigma_{t,k} \int_{Q_k} \vec{\gamma}_{k,a} \cdot \vec{\gamma}_{k,b} dx.$$

Remarque 5.5.1

En pratique, on calcule les termes $(A_h^k)_{ab}$ en utilisant la transformation de Piola introduite au paragraphe 5.2 de sorte que

$$(A_h^k)_{ab} = \sigma_{t,k} \int_{\hat{Q}_k} \frac{1}{J_{Q_k}} [\vec{\Omega} \cdot (DF_{Q_k} \vec{w}_a)] [\vec{\Omega} \cdot (DF_{Q_k} \vec{w}_b)] d\hat{x}.$$

On utilise alors une formule de quadrature pour calculer ce terme intégral.

Nous allons maintenant donner quelques propositions visant à caractériser les différentes matrices intervenant dans le système linéaire discret (5.20).

Proposition 5.5.1

La matrice $A_h^k = \{(A_h^k)_{ab}\}_{1 \leq a, b \leq 2d}$ est symétrique avec

$$(A_h^k)_{ab} = \sigma_{t,k} \int_{Q_k} \vec{\gamma}_{k,a} \cdot \vec{\gamma}_{k,b} dx = \sigma_{t,k} \int_{Q_k} (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_a) (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_b) dx.$$

Cette matrice est de rang $d + 1$. De plus, son noyau est engendré par la représentation dans la base induite par l'approximation RT_0 sur la maille Q_k des $d - 1$ vecteurs $\{\vec{\Omega}_i^\perp\}_{1 \leq i \leq d-1}$ formant une base du sous-espace orthogonal à $\vec{\Omega}$ dans \mathbb{R}^d .

DÉMONSTRATION - A_h^k est clairement symétrique et positive. Soit $\vec{\Omega}_i^\perp, i \in \{1, \dots, d-1\}$ un vecteur de base du sous espace orthogonal à $\vec{\Omega}$ dans \mathbb{R}^d . $\vec{\Omega}_i^\perp$ s'écrit

$$\vec{\Omega}_i^\perp = \sum_{j=1}^{2d} \Omega_{i,j}^\perp \vec{w}_{k,j}.$$

Et on a

$$A_h^k \begin{pmatrix} \Omega_{i,1}^\perp \\ \Omega_{i,2}^\perp \\ \vdots \\ \Omega_{i,2d}^\perp \end{pmatrix} = 0. \quad (5.21)$$

En effet, $P_\Omega \vec{\Omega}_i^\perp = \vec{0}$ soit $\sum_{j=1}^{2d} \Omega_{i,j}^\perp \vec{\gamma}_{k,j} = 0$.

On a donc, pour toute face $\Gamma_{k,a}$ de Q_k , la relation $\int_{Q_k} \vec{\gamma}_{k,a} \cdot \sum_{j=1}^{2d} \Omega_{i,j}^\perp \vec{\gamma}_{k,j} dx = 0$ d'où (5.21).

Le noyau de A_h^k contient donc les vecteurs $(\Omega_{i,1}^\perp, \Omega_{i,2}^\perp, \dots, \Omega_{i,2d}^\perp)^t$ pour tout $i \in \{1, \dots, d-1\}$. Montrons maintenant que la famille $\{\vec{\Omega}_i^\perp\}_{1 \leq i \leq d-1}$ forme une base du noyau de A_h^k . Soit $\vec{v}(x)$ une fonction vectorielle représentée dans la base de $RT_0(Q_k)$ par

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{2d} v_j \vec{w}_{k,j}.$$

Supposons que la relation suivante soit vérifiée

$$A_h^k \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{2d} \end{pmatrix} = 0. \quad (5.22)$$

Alors, on a

$$\int_{Q_k} \vec{\gamma}_{k,a} \cdot \sum_{j=1}^{2d} v_j \vec{\gamma}_{k,j} dx = 0, \quad (5.23)$$

soit

$$\int_{Q_k} (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_{k,a}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{v}) dx = 0. \quad (5.24)$$

Donc, $\int_{Q_k} (\vec{\Omega} \cdot \vec{v})^2 dx = 0$ donc $\vec{\Omega} \cdot \vec{v} = 0$ presque partout sur Q_k et \vec{v} est donc nécessairement orthogonal au vecteur $\vec{\Omega}$. Il existe donc une famille $\{f_i\}_{1 \leq i \leq d-1}$ de fonctions de x telle que la fonction vectorielle \vec{v} s'écrive

$$\vec{v}(x) = \sum_{i=1}^{d-1} f_i(x) \vec{\Omega}_i^\perp.$$

Or,

$$\sum_{i=1}^{d-1} f_i(x) \vec{\Omega}_i^\perp = \sum_{i=1}^{d-1} f_i(x) \sum_{j=1}^{2d} \Omega_{i,j}^\perp \vec{w}_{k,j} = \sum_{j=1}^{2d} \vec{w}_{k,j} \sum_{i=1}^{d-1} f_i(x) \Omega_{i,j}^\perp = \sum_{j=1}^{2d} v_j \vec{w}_{k,j}.$$

Par unicité de la décomposition sur la base de $RT_0(Q_k)$, on obtient, pour tout $j \in \{1, \dots, 2d\}$

$$v_j = \sum_{i=1}^{d-1} f_i(x) \Omega_{i,j}^\perp.$$

Cette relation peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{2d} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_{d-1}(x) \end{pmatrix},$$

où $M = (M_{ij})$ est la matrice de dimension $2d \times (d-1)$ définie par $M_{ij} = \Omega_{j,i}^\perp$. Les vecteurs $\vec{\Omega}_i^\perp$ n'étant pas colinéaires, il existe une sous matrice M_{d-1} de M de dimension $d-1$ et inversible de sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, d-1\}$

$$f_i(x) = c_i$$

où c_i est une constante donnée en fonction des v_j et des coefficients de M . Les fonctions f_i sont donc constantes, ce qui termine la preuve. ■

Remarque 5.5.2

En dimension 1, la matrice A_h^k est inversible et on peut traiter la résolution matricielle comme pour les problèmes de diffusion.

Nous donnons ci-après l'expression analytique de la matrice A_h^k pour $Q_k = [0, 1]^2$, carré de référence.

$$A_h^k = \sigma_{t,k} \begin{pmatrix} \frac{\Omega_1^2}{3} & \frac{\Omega_1 \Omega_2}{4} & -\frac{\Omega_1^2}{6} & -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{4} \\ \frac{\Omega_1 \Omega_2}{4} & \frac{\Omega_2^2}{3} & -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{4} & -\frac{\Omega_1^2}{6} \\ -\frac{\Omega_1^2}{6} & -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{4} & \frac{\Omega_1^2}{3} & \frac{\Omega_1 \Omega_2}{4} \\ -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{4} & -\frac{\Omega_1^2}{6} & \frac{\Omega_1 \Omega_2}{4} & \frac{\Omega_2^2}{3} \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Proposition 5.5.2

Il existe une matrice de passage orthogonale V_h^k de dimensions $2d \times (d+1)$ constituée des vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles de A_h^k et une matrice diagonale Λ_h^k de degré $d+1$ telles que

$$\Lambda_h^k = (V_h^k)^t A_h^k V_h^k.$$

et les éléments diagonaux de la matrice Λ_h^k sont les $d+1$ valeurs propres non nulles de la matrice A_h^k .

B_h est une matrice rectangulaire par blocs de dimension $2dK \times K$ avec K blocs rectangulaires B_h^k de dimension $2d \times 1$ donnés par

$$B_h^k = \{(B_h^k)_a\}_{1 \leq a \leq 2d} \text{ où } (B_h^k)_a = - \sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j})(\vec{\Omega} \cdot \vec{\gamma}_{k,a}) ds.$$

Proposition 5.5.3

La matrice $B_h^k = \{(B_h^k)_a\}_{1 \leq a \leq 2d}$ est composée des éléments

$$(B_h^k)_a = - \sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j})(\vec{\Omega} \cdot \vec{\gamma}_{k,a}) ds.$$

D'autre part, $\text{Ker}(A_h^k) \subset \text{Ker}((B_h^k)^t)$.

DÉMONSTRATION - Soit $\vec{v}(x)$ une fonction vectorielle représentée dans la base de $RT_0(Q_k)$ par

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{2d} v_j \vec{w}_{k,j}.$$

Supposons que la relation suivante soit vérifiée

$$(B_h^k)^t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{2d} \end{pmatrix} = 0. \quad (5.26)$$

Alors, on a

$$\sum_{i=1}^{2d} v_i \sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j})(\vec{\Omega} \cdot \vec{\gamma}_{k,i}) ds = 0, \quad (5.27)$$

soit

$$\sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j})(\vec{\Omega} \cdot \vec{v}) ds = 0, \quad (5.28)$$

ou encore

$$\int_{Q_k} \vec{\nabla} \cdot (P_{\Omega} \vec{v}) dx = 0. \quad (5.29)$$

On a donc que $\text{Ker}(A_h^k) \subset \text{Ker}((B_h^k)^t)$. ■

Remarque 5.5.3

La matrice B_h^k définit une forme linéaire, son noyau $\text{Ker}((B_h^k)^t)$ est donc un hyperplan de \mathbb{R}^{2d} de dimension $2d-1$. De plus, soit $\vec{\Omega}_i^\perp$, $i \in \{1, \dots, d-1\}$ un vecteur de base du sous espace orthogonal à $\vec{\Omega}$ dans \mathbb{R}^d . $\vec{\Omega}_i^\perp$ s'écrit

$$\vec{\Omega}_i^\perp = \sum_{j=1}^{2d} \Omega_{i,j}^\perp \vec{w}_{k,j}.$$

Et on a

$$(B_h^k)^t \begin{pmatrix} \Omega_{i,1}^\perp \\ \Omega_{i,2}^\perp \\ \vdots \\ \Omega_{i,2d}^\perp \end{pmatrix} = 0.$$

En effet, $P_\Omega \vec{\Omega}_i^\perp = \vec{0}$ soit $\sum_{j=1}^{2d} \Omega_{i,j}^\perp \vec{w}_{k,j} = 0$, on a donc la relation suivante

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{2d} \sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_{k,l}) \Omega_{i,l}^\perp ds &= \sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} (P_\Omega \vec{n}_{k,j}) \cdot \left(\sum_{l=1}^{2d} \Omega_{i,l}^\perp \vec{w}_{k,l} \right) ds \\ &= \sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_{k,l}) ds = 0. \end{aligned}$$

Le noyau de $(B_h^k)^t$ contient donc tous les vecteurs $(\Omega_{i,1}^\perp, \Omega_{i,1}^\perp, \dots, \Omega_{i,1}^\perp)^t$ pour tout $i \in \{1, \dots, d-1\}$.

Voici l'expression de B_h^k sur le carré de référence $Q_k = [0, 1]^2$:

$$B_h^k = \begin{pmatrix} -\Omega_1^2 \\ -\Omega_2^2 \\ -\Omega_1^2 \\ -\Omega_2^2 \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

C_h est une matrice rectangulaire par blocs de dimension $2dK \times n_e$ (où n_e est la dimension de \mathcal{F}_h) dont les matrices élémentaires sur chaque maille C_h^k sont de dimension $2d \times 2d$ et données par

$$C_h^k = \{(C_h^k)_{ab}\}_{1 \leq a, b \leq 2d} \text{ où } (C_h^k)_{ab} = \int_{\Gamma_{k,b}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,b}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\gamma}_{k,a}) ds.$$

Proposition 5.5.4

La matrice $C_h^k = \{(C_h^k)_{ab}\}_{1 \leq a, b \leq 2d}$ est composée des éléments $(C_h^k)_{ab} = \int_{\Gamma_{k,b}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,b}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\gamma}_{k,a}) ds$.

C'est une matrice symétrique de rang $d+1$ et les vecteurs propres associés aux $d-1$ valeurs propres nulles de C_h^k sont les vecteurs correspondant à la décomposition des vecteurs $\{\vec{\Omega}_i^\perp\}_{1 \leq i \leq d-1}$ dans la base induite par l'approximation RT_0 sur la maille Q_k .

DÉMONSTRATION - Soit $\vec{v}(x)$ une fonction vectorielle représentée dans la base de $RT_0(Q_k)$ par

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{2d} v_j \vec{w}_{k,j}.$$

Supposons que la relation suivante soit vérifiée

$$(C_h^k)^t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{2d} \end{pmatrix} = 0. \quad (5.31)$$

Alors, on a pour tout $j \in \{1, \dots, 2d\}$

$$\sum_{i=1}^{2d} v_i \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j})(\vec{\Omega} \cdot \vec{\gamma}_{k,i}) ds = 0, \quad (5.32)$$

soit pour tout $j \in \{1, \dots, 2d\}$

$$\int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j})(\vec{\Omega} \cdot \vec{v}) ds = 0, \quad (5.33)$$

ou encore, en sommant sur j

$$\int_{Q_k} \vec{\nabla} \cdot (P_{\Omega} \vec{v}) dx = 0. \quad (5.34)$$

On a donc que $\text{Ker}(A_h^k) \subset \text{Ker}((C_h^k)^t)$. ■

Remarque 5.5.4

Nous verrons au chapitre 6 lemme 6.5.1 qu'il existe une matrice inversible A_d telle que pour tout $v \in Y_0(Q_k)$,

$$(A_d)^{-1} A_h^k v = C_h^k v.$$

On a donc $\dim(\text{Im}((C_h^k)^t)) \geq d + 1$ soit $\dim(\text{Ker}((C_h^k)^t)) \leq d - 1$. On en déduit que $\dim(\text{Ker}((C_h^k)^t)) = \dim(\text{Ker}(A_h^k))$ donc $\text{Ker}((C_h^k)^t) = \text{Ker}(A_h^k)$.

Voici l'expression de la matrice C_k sur le carré de référence $Q_k = [0, 1]^2$:

$$C_k = - \begin{pmatrix} \frac{\Omega_1^2}{2} & \frac{\Omega_2 \Omega_1}{2} & 0 & -\frac{\Omega_2 \Omega_1}{2} \\ \frac{\Omega_2 \Omega_1}{2} & \frac{\Omega_2^2}{2} & -\frac{\Omega_2 \Omega_1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\Omega_2 \Omega_1}{2} & \frac{\Omega_1^2}{2} & \frac{\Omega_2 \Omega_1}{2} \\ -\frac{\Omega_2 \Omega_1}{2} & 0 & \frac{\Omega_2 \Omega_1}{2} & \frac{\Omega_2^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

D_h est une matrice diagonale définie positive de dimension K dont les coefficients sont $\sigma_{t,k} V_k$ et $L_h = \{(L_h)_{ab}\}_{1 \leq a, b \leq \dim(\mathcal{F}_h)}$ est une matrice diagonale résultant de la prise en compte des conditions aux limites. En effet, pour chaque face e_0 appartenant à la frontière de \mathcal{D} correspondant à $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{e_0} > 0$, si on note j_0 l'indice local de la face e_0 sur la maille Q_k et i_0 l'indice global de la face e_0 dans \mathcal{F}_h alors

$$(L_h)_{i_0 i_0} = (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j_0}) \int_{\Gamma_{k,j_0}} ds.$$

L'expression et les propriétés du vecteur second membre élémentaire F_h^k sont données dans la proposition suivante.

Proposition 5.5.5

La matrice $F_h^k = \{(F_h^k)_a\}_{1 \leq a \leq 2d}$ est composée des éléments $(F_h^k)_a = \int_{Q_k} S_k(\vec{\Omega} \cdot \vec{\gamma}_{k,a}) dx$, D'autre part, $\text{Ker}(A_h^k) \subset \text{Ker}((F_h^k)^t)$.

Les différentes propositions énoncées dans cette section permettent de justifier matriciellement le changement de base évoqué au chapitre 4. Nous reviendrons sur l'intérêt de ces propositions et sur le changement de base matriciel dans la section 5.6.2.

Forme matricielle de la loi de comportement

L'équation de consistance peut ainsi se mettre sous la forme suivante pour la maille Q_k :

$$A_h^k G_h^k + B_h^k u_h^k + C_h^k \lambda_h^k = F_h^k \quad (5.36)$$

Dans cette équation, A_h^k , B_h^k et C_h^k désignent respectivement une matrice $2d \times 2d$, $2d \times 1$ et $2d \times 2d$. G_h^k est le vecteur composés des $2d$ composantes g_h^k , u_h^k est un scalaire représentant la valeur moyenne de u sur la maille Q_k et le vecteur λ_h^k est constitué des valeurs de u sur les $2d$ faces de Q_k .

Forme matricielle de l'équation de bilan

L'équation de bilan peut aussi s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$B_h^{k,t} G_h^k - D_h^k u_h^k = S_h^k, \quad (5.37)$$

où D_h^k est un scalaire qui vaut $-\sigma_{t,k} V_k$.

Continuité des densités de courant angulaire

La continuité des densités de courant angulaire d'une maille à l'autre se traduit par la relation matricielle suivante sur une maille Q_k :

$$(C_h^k)^t G_h^k = 0.$$

Traitement des conditions aux limites

Sur les faces internes du maillage, on assure la continuité de la densité de courant angulaire par l'intermédiaire de la matrice $(C_h^k)^t$, mais pour un bras frontière, il convient de prendre en compte les conditions aux limites de notre problème. C'est la matrice L_h qui permet de prendre en compte ces conditions aux limites. Soit une maille Q_k de \mathcal{D}_h , supposons qu'une des faces γ_{k,j_0} de Q_k appartient à $\partial\mathcal{D}$ et notons i_0 l'indice global de cette face e_0 dans \mathcal{F}_h , alors il convient de distinguer deux cas :

- si $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j_0} < 0$ alors, on doit imposer $\lambda_{i_0} = u_{b,i_0}$,
- si $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j_0} > 0$ alors, on doit imposer $g_{k,j_0} + \lambda_{i_0} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{k,j_0}) \int_{\Gamma_{k,j_0}} ds = 0$.

5.6 Résolution matricielle

Nous allons maintenant expliciter la façon d'assembler le système linéaire obtenu après discrétisation du problème et présenter la résolution de ce système linéaire.

5.6.1 Assemblage de la matrice globale

La construction précédente est locale à une maille Q_k . On en déduit immédiatement la discrétisation de (5.11) par sommation sur les mailles. On obtient alors la relation matricielle suivante pour la loi de comportement :

$$A_h G_h + B_h u_h + C_h \lambda_h = F_h, \quad (5.38)$$

où A_h et B_h sont les matrices blocs diagonales où chaque bloc correspond à A_h^k et B_h^k . La structure de la matrice C_h est moins évidente à déterminer, nous y reviendrons par la suite. G_h est le vecteur contenant les valeurs des flux de densité angulaire de taille 4 fois le nombre de mailles, u_h est le vecteur de dimension égale au nombre de mailles qui contient les valeurs du flux angulaire au centre des mailles et λ_h contient les valeurs du flux angulaire sur les arêtes, de dimension égale au nombre d'arêtes du maillage. Si on note n_e le nombre de faces (ou arêtes) du maillage (i.e. la dimension de \mathcal{F}_h), les dimensions des matrices sont les suivantes :

- $A_h : 4K \times 4K$,
- $B_h : 4K \times K$,
- $C_h : 4K \times n_e$.

L'équation de bilan peut s'écrire (après assemblage de la matrice globale) :

$$(B_h)^t G_h - D_h u_h = S_h, \quad (5.39)$$

où la matrice $(B_h)^t$ est la transposée de la matrice B_h , c'est donc une matrice par bloc de la forme :

$$(B_h)^t = \begin{pmatrix} (B_h^1)^t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (B_h^2)^t & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (B_h^K)^t \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

On a aussi les dimensions :

- $(B_h)^t : K \times 4K$,
- $D_h : K \times K$.

Voici donc la structure globale de la matrice M (voir figure 5.6.2).

5.6.2 Résolution du système linéaire

On rappelle que la matrice issue de la discrétisation mixte-hybride s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} A_h & B_h & C_h \\ (B_h)^t & -D_h & 0 \\ (C_h)^t & 0 & L_h \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

On utilise alors le changement de base V_h représentant une matrice de changement de base rectangulaire par bloc. Les propositions 5.5.1, 5.5.2, 5.5.3 et 5.5.4 permettent de justifier ce changement de base. Chaque bloc noté V_h^k représente une matrice élémentaire sur chaque maille Q_k dont les vecteurs colonnes sont les $d+1$ vecteurs propres associés aux $d+1$ valeurs propres non nulles de A_h^k . V_h^k est une matrice de dimension $2d \times d+1$ qui vérifie

$$V_h^k (V_h^k)^t = Id_{\mathbb{R}^{2d}},$$

$$(V_h^k)^t V_h^k = Id_{\mathbb{R}^{d+1}}$$

(où $Id_{\mathbb{R}^d}$ représente la matrice identité de dimension d) et $\Lambda_h = V_h A_h V_h^t$ est une matrice diagonale définie positive de dimension $[(d+1)K] \times [(d+1)K]$ dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres non nulles de la matrice A_h . L'idée est donc la suivante : le rôle des matrices élémentaires V_h^k consiste à restreindre le système sur l'orthogonal du noyau des matrices A_h^k , i.e. là où le problème est bien posé.

Remarque 5.6.1

Autrement dit, numériquement, si on utilisait la matrice des vecteurs propres de A_h pour effectuer le changement de base, la matrice finale serait constituée de $(d-1)K$ colonnes de zéros et $(d-1)K$ lignes symétriques de zéros qui correspondraient à $(d-1)K$ zéros au second membre. On ne perd donc pas d'"informations" sur la solution en effectuant ce changement de base.

On considère alors un nouveau vecteur inconnu noté $\tilde{G}_h = V_h G_h$ et un nouveau système linéaire

$$\tilde{M} \begin{pmatrix} \tilde{G}_h \\ u_h \\ \lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_h & \tilde{B}_h & \tilde{C}_h \\ \tilde{B}_h^t & -D_h & 0 \\ \tilde{C}_h^t & 0 & L_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{G}_h \\ u_h \\ \lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_h \\ S_h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.42)$$

où \tilde{M} est une matrice 3×3 par blocs, symétrique mais indéfinie où Λ_h et $-D_h$ sont des matrices définies positives, \tilde{B}_h et \tilde{C}_h sont des matrices rectangulaires données par

$$\tilde{B}_h = V_h B_h, \quad \tilde{C}_h = V_h C_h, \quad \tilde{F}_h = V_h F_h.$$

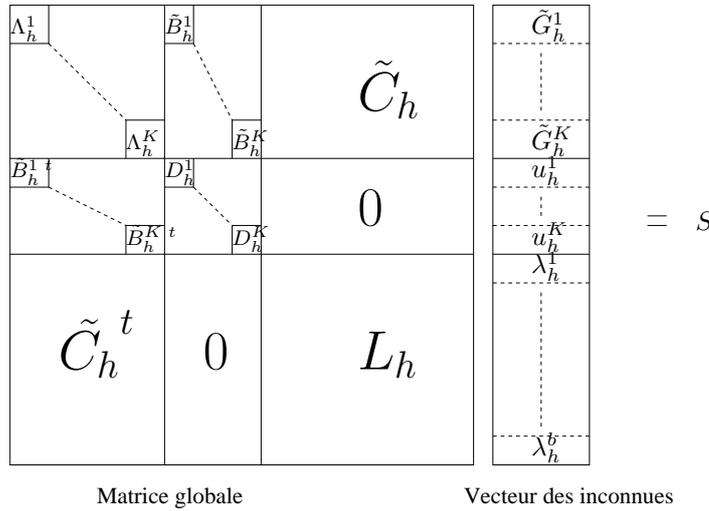


FIG. 5.5 – Système final à résoudre

On met alors en oeuvre une élimination de Gauss. Introduisons alors les matrices $E_h = D_h + \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h$ (qui est une matrice diagonale) et $R_h = \tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h$ pour se ramener au système triangulaire supérieur par blocs suivant

$$\begin{pmatrix} \Lambda_h & \tilde{B}_h & \tilde{C}_h \\ 0 & E_h & R_h \\ 0 & 0 & M_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{G}_h \\ u_h \\ \lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}'_h \\ S'_h \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Alors, en éliminant l'inconnues \tilde{G}_h , on obtient le système linéaire suivant

$$M_h^{u,\lambda} \begin{pmatrix} u_h \\ \lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_h & -R_h^t \\ -R_h & L_h - \tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{C}_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h \\ \lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{F}_h + S_h \\ \tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{F}_h \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

où $M_h^{u,\lambda}$ est symétrique définie positive. On peut aussi éliminer l'inconnue u_h pour obtenir le système linéaire suivant

$$M_h^\lambda \lambda_h = R_h E_h^{-1} S_h + R_h E_h^{-1} \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{F}_h + \tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{F}_h \quad (5.45)$$

dans lequel intervient le complément de Schur symétrique $M_h^\lambda = \tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{C}_h - R_h E_h^{-1} R_h^t$.

Remarque 5.6.2

Dans la pratique, on élimine mailles par mailles d'abord les densités de courant angulaire puis les valeurs du flux angulaire aux mailles. On utilise un algorithme du gradient conjugué pour inverser le système final.

Dans ce qui suit, on nous décrivons le processus d'éliminations successives. Λ_h est diagonale définie-positive, on peut donc écrire :

$$\tilde{G}_h = \Lambda_h^{-1} (-\tilde{B}_h u_h - \tilde{C}_h \lambda_h + V_h F_h),$$

on peut alors éliminer \tilde{G}_h du système (5.42), on a

$$-\tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} (\tilde{B}_h u_h + \tilde{C}_h \lambda_h) - D_h u_h = S_h - \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} V_h F_h.$$

Proposition 5.6.1

La matrice $D_h + \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h$ de dimension K est diagonale et définie positive.

DÉMONSTRATION - Notons respectivement α_D^+ et α_D^- la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice D_h symétrique définie positive et α_Λ^+ et α_Λ^- la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice Λ_h symétrique définie positive. Soit $X \in \mathbb{R}^K$, on a

$$\begin{aligned} (D_h X + \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h X, X)_{\mathbb{R}^K} &= (D_h X, X)_{\mathbb{R}^K} + (\Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h X, \tilde{B}_h X)_{\mathbb{R}^{2dK}} \\ &\geq \alpha_D^- \|X\|_{\mathbb{R}^K}^2 + \frac{1}{\alpha_\Lambda^+} \|X\|_{\mathbb{R}^K}^2 \\ &\geq \beta_0 \|X\|_{\mathbb{R}^K}^2, \end{aligned}$$

où $\beta_0 = \min(\alpha_D^-, \frac{1}{\alpha_\Lambda^+})$ est une constante positive. Comme $\text{Ker} \tilde{B}_h = \{0\}$, la matrice $D_h + \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h$ est symétrique définie positive. ■

On peut donc écrire à présent un système équivalent à (5.42) où on a éliminé les inconnues \tilde{G}_h :

$$\begin{cases} (-D_h - \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h) u_h - \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{C}_h \lambda_h = \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{F}_h + S_h \\ -\tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h u_h + (L_h - \tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{C}_h) \lambda = \tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{F}_h, \end{cases} \quad (5.46)$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -D_h - \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h & -\tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{C}_h \\ -\tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h & L_h - \tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{C}_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h \\ \lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{F}_h + S_h \\ \tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{F}_h \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

On notera

$$M_h^{u,\lambda} = - \begin{pmatrix} -D_h - \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h & -\tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{C}_h \\ -\tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h & L_h - \tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{C}_h \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

La matrice $M_h^{u,\lambda}$ est une matrice diagonale par blocs constituée de K blocs $M_h^{k,u,\lambda}$ définis par

$$M_h^{k,u,\lambda} = - \begin{pmatrix} -D_h^k - (\tilde{B}_h^k)^t (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{B}_h^k & -(\tilde{B}_h^k)^t (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{C}_h^k \\ -(\tilde{C}_h^k)^t (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{B}_h^k & L_h - (\tilde{C}_h^k)^t (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{C}_h^k \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

Proposition 5.6.2

La matrice $M_h^{u,\lambda}$ est symétrique définie positive.

DÉMONSTRATION - La matrice $M_h^{u,\lambda}$ est clairement symétrique (on rappelle que Λ_h^{-1} est diagonale). Soit Q_k un élément du maillage. Montrons que la matrice $M_h^{k,u,\lambda}$ est symétrique définie positive. Soit alors u un élément de \mathbb{R} et un vecteur λ de \mathbb{R}^{2d} , on écrit :

$$\begin{aligned} p(u, \lambda) &= M_h^{k,u,\lambda} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} \\ &= \left((D_h^k + (\tilde{B}_h^k)^t (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{B}_h^k) u, u \right) + \left((\tilde{B}_h^k)^t (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{C}_h^k \lambda, u \right)_{\mathbb{R}^{2d}} \\ &\quad + \left((\tilde{C}_h^k)^t (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{B}_h^k u, \lambda \right)_{\mathbb{R}^{2d}} + \left(-L_h^k + (\tilde{C}_h^k)^t (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{C}_h^k \lambda, \lambda \right)_{\mathbb{R}^{2d}} \\ &\geq \alpha_D^+ (u, u) + \alpha_\Lambda^+ \left(\tilde{C}_h^k \lambda + \tilde{B}_h^k u, \tilde{C}_h^k \lambda + \tilde{B}_h^k u \right)_{\mathbb{R}^{2d}} \\ &\geq \alpha_0 (|u|^2 + \|\lambda\|_{\mathbb{R}^{2d}}^2), \end{aligned}$$

où α_0 est une constante positive. La matrice $M_h^{u,\lambda}$ est donc symétrique définie positive. ■

D'après la proposition (5.6.1), la matrice $-D_h - \tilde{B}_h \Lambda_h^{-1} B_h$ est inversible, on peut écrire :

$$u_h = (-D_h - \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h)^{-1} \left[\tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{C}_h \lambda_h + \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{F}_h + S_h \right].$$

On en déduit que :

$$\tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h (D_h + \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h)^{-1} \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{C}_h \lambda_h - \tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{C}_h \lambda_h + L_h \lambda_h = Q_h,$$

que l'on peut écrire $M_h^\lambda \lambda_h + L_h \lambda_h = Q_h$ et où

$$Q_h = -\tilde{C}_h^t (D_h + \tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{B}_h)^{-1} (\tilde{B}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{F}_h + S_h) + \tilde{C}_h^t \Lambda_h^{-1} \tilde{F}_h.$$

L'intérêt de ces éliminations est de fournir une matrice $M_h^\lambda + L_h$ symétrique définie-positive et donc facilement inversible à l'aide de techniques du type gradient conjugué.

5.6.3 A propos de M_h^λ

Nous allons ici nous intéresser à la matrice du système linéaire ne portant plus que sur les inconnues aux arêtes. Il peut être commode de se ramener à la résolution d'un tel système linéaire. L'inversion de la matrice $M_h^\lambda + L_h$ est en effet moins coûteuse que celle de la matrice $M_h^{u,\lambda}$. Encore faut-il que la matrice $M_h^\lambda + L_h$ ait de bonnes propriétés. C'est ce que nous allons voir dans la suite. La matrice M_h^λ est constituée de l'assemblage éléments finis des matrices élémentaires $(M_h^k)^\lambda$ définies sur une maille Q_k par

$$(M_h^k)^\lambda = \tilde{C}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{B}_h^k (D_h + \tilde{B}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{B}_h^k)^{-1} \tilde{B}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{C}_h^k - \tilde{C}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{C}_h^k.$$

Proposition 5.6.3

$M_h^\lambda + L_h$ est une matrice symétrique définie positive.

DÉMONSTRATION - Pour montrer que la matrice $M_h^\lambda + L_h$ est une matrice symétrique définie positive, il suffit de montrer que la matrice M_h^λ est une matrice symétrique définie positive car la matrice L_h ne contient que des termes diagonaux positifs. La matrice M_h^λ est clairement symétrique. Comme dans la proposition 5.6.2, on considère un vecteur λ de \mathbb{R}^{2d} , on écrit

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= \left(((M_h^k)^\lambda) \lambda, \lambda \right) \\ &= \left(\left(\tilde{C}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{B}_h^k (D_h + \tilde{B}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{B}_h^k)^{-1} \tilde{B}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{C}_h^k - \tilde{C}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{C}_h^k \right) \lambda, \lambda \right). \end{aligned}$$

Posons $u_\lambda = -(D_h + \tilde{B}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{B}_h^k)^{-1} \tilde{B}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{C}_h^k \lambda$ appartenant à \mathbb{R} . On a donc

$$q(\lambda) = \left(-\tilde{C}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{B}_h^k u_\lambda, \lambda \right) - \left(\tilde{C}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{C}_h^k \lambda, \lambda \right).$$

En utilisant α_0 défini dans la proposition 5.6.2, on peut écrire

$$\begin{aligned} q(\lambda) &\geq \alpha_0 (|u_\lambda|^2 + \|\lambda\|_{\mathbb{R}^{2d}}^2) - \left(\tilde{B}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{C}_h^k \lambda, u_\lambda \right) - \left((D_h + \tilde{B}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{B}_h^k)^{-1} u_\lambda, u_\lambda \right) \\ &= \alpha_0 (|u_\lambda|^2 + \|\lambda\|_{\mathbb{R}^{2d}}^2) - \left(\tilde{B}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{C}_h^k \lambda, u_\lambda \right) + \left(\tilde{B}_h^{k,t} (\Lambda_h^k)^{-1} \tilde{C}_h^k \lambda, u_\lambda \right) \\ &= \alpha_0 (|u_\lambda|^2 + \|\lambda\|_{\mathbb{R}^{2d}}^2) \\ &\geq \alpha_0 \|\lambda\|_{\mathbb{R}^{2d}}^2. \end{aligned}$$

où α_0 est la constante positive donnée dans la proposition 5.6.1. Ce qui termine la preuve. ■

On peut donc utiliser avantageusement un algorithme de résolution du type gradient conjugué pour inverser le système final. Nous reviendrons sur les possibilités de préconditionnement de ce système linéaire en annexe.

Bilan du chapitre 5

Nous avons présenté dans ce chapitre les propriétés essentielles liées à la discrétisation angulaire et spatiale de notre problème mixte abstrait. Nous avons mis en évidence une méthode de résolution du système linéaire résultant. Nous allons à présent nous intéresser à des problèmes de transport en régime de diffusion et nous allons en particulier caractériser le comportement des formulations mixtes (continues, abstraites ou discrètes) dans de tels régimes.

Chapitre 6

Approximation par la diffusion

Sommaire

6.1	Approximations physiques	98
6.1.1	Etablissement d'une équation de diffusion	98
6.1.2	Approximation P1	99
6.1.3	Conditions aux limites	100
6.2	Résultats d'approximation	100
6.2.1	Changement d'échelle et régime de diffusion	100
6.2.2	Notion de limite de diffusion	100
6.2.3	Théorèmes d'approximation par la diffusion	101
6.3	Généralisation de l'approximation par la diffusion pour la formulation mixte	102
6.4	Analyse asymptotique discrète du schéma 1D	105
6.4.1	Equation du transport 1D en régime de diffusion	105
6.4.2	Éléments finis mixtes-hybrides pour le transport en 1D	106
6.4.3	Analyse de la limite diffusion discrète	108
6.4.4	Analyse limite diffusion sur la frontière	110
6.4.5	Analyse d'un problème hétérogène	111
6.5	Analyse asymptotique discrète en dimension $d > 1$	113
6.5.1	Propriétés des matrices élémentaires	114
6.5.2	Limite diffusion du schéma mixte-hybride	116
6.6	Accélération par diffusion synthétique pour la formulation mixte	119
6.6.1	Principe général de la DSA	119
6.6.2	Algorithme de la DSA	120
6.6.3	Remarques sur la discrétisation des opérateurs de transport et de diffusion dans la DSA	121

Sous certaines conditions physiques, typiquement lorsque le libre parcours moyen des particules est très petit devant les dimensions caractéristiques du domaine physique (on parle de milieu diffusif ou opaque), la solution de l'équation de transport (2.37) est très "proche" de sa moyenne angulaire. Cette solution peut alors être convenablement approchée par la solution d'une équation de diffusion. Dans de tels problèmes physiques, la résolution numérique de l'équation du transport peut être très coûteuse. Dans ces situations, il apparaît donc avantageux de résoudre une équation de diffusion, moins coûteuse à résoudre. Dans ce chapitre, nous précisons le concept

de milieu diffusif ou opaque et de la limite de diffusion d'un problème de transport. Nous rappe-
 lions un résultat mathématique justifiant l'approximation de l'équation de transport par une
 équation de diffusion dans de tels milieux. Nous généralisons ce résultat classique d'approxima-
 tion de la diffusion au système mixte du transport. Nous étudions ensuite le comportement du
 schéma mixte-hybride discret dans des milieux opaques et nous étudions son comportement sur
 les bords d'un domaine diffusif et à l'interface entre un problème transparent (où l'approximation
 de la diffusion n'est pas valide) et un milieu opaque en une dimension d'espace. Enfin, nous reve-
 nons sur la technique d'accélération par diffusion synthétique évoquée dans le chapitre 1 et nous
 montrons que cette technique peut être appliquée au schéma mixte-hybride pour le transport en
 utilisant une discrétisation mixte-hybride de l'équation de diffusion associée.

6.1 Approximations physiques

(Sources : G.Bal [13] ; J.Bussac, P.Reuss [28] ; R.Dautray, J.L.Lions [42])

Nous nous contentons ici de considérer le problème du transport à source monocinétique par
 souci de simplicité. Les hypothèses physiques d'un milieu diffusif sont les suivantes :

1. Les sections efficaces sont isotropes $\sigma_t = \sigma_t(x)$, $\sigma_s = \sigma_s(x)$.
2. Les sources q et l'absorption $\sigma_a = \sigma_t - \sigma_s$ sont faibles devant la section efficace totale σ_t .
3. La section efficace totale σ_t et le flux varient lentement.

6.1.1 Etablissement d'une équation de diffusion

Nous allons détailler dans ce qui suit la façon d'établir une équation de la diffusion à partir
 du problème de transport sous les hypothèses énoncés plus haut. L'hypothèse 3 nous permet
 d'écrire un développement de Taylor du flux angulaire $u(x, \vec{\Omega})$ sous la forme

$$\phi(x, \vec{\Omega}) = \phi(0, \vec{\Omega}) + x\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\phi(0, \vec{\Omega}).$$

On utilise alors la formulation intégrale de l'équation du transport pour exprimer le courant \vec{j}
 traversant un élément de surface dS provenant d'un volume dV à une distance x de dS dans une
 direction $\vec{\Omega}$

$$\vec{j} \cdot d\vec{S} = \exp(-\sigma_t x) \sigma_s \phi \frac{\vec{\Omega} \cdot d\vec{S}}{x^2}.$$

En injectant le développement limité de u dans l'expression du courant et en intégrant sur la
 sphère unité, on obtient

$$\vec{J} = -\frac{1}{3} \frac{\sigma_s}{\sigma_t^2} \vec{\nabla}\phi.$$

Ce qui permet d'écrire la loi de Fick

$$\vec{J} = -D\vec{\nabla}\phi,$$

où

$$D \simeq \frac{1}{3\sigma_t}.$$

En intégrant l'équation du transport en angle, on obtient aussi que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \sigma_a \phi = q_0,$$

où q_0 est la moyenne du flux angulaire de la source q . En injectant la loi de Fick dans cette dernière équation, on trouve l'équation de diffusion :

$$-\vec{\nabla} \cdot D\vec{\nabla}\phi + \sigma_a\phi = q_0.$$

6.1.2 Approximation P1

On suppose que la variation angulaire du flux angulaire est linéaire (on parle aussi d'approximation P1, voir chapitre 1). On écrit

$$u(x, \vec{\Omega}) = \phi(x) + 3\vec{\Omega} \cdot \vec{J}(x), \quad (6.1)$$

où

$$\phi = \int_{S^2} u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}'),$$

est le flux scalaire et

$$\vec{J} = \int_{S^2} \vec{\Omega}' u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}'),$$

est le courant neutronique. Lorsqu'on intègre l'équation (1.35) sur les directions $\vec{\Omega}$, on trouve l'équation de conservation ou de bilan neutronique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(x) + \sigma_a(x)\phi(x) = q_0(x), \quad (6.2)$$

où q_0 est le moment d'ordre zéro de la source q :

$$q_0 = \int_{S^2} q(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}').$$

Pour exprimer \vec{J} en fonction de ϕ , on calcule le moment d'ordre 1 de l'équation de transport (1.37), en la multipliant par $\vec{\Omega}$ puis en substituant l'expression (6.1) du flux angulaire avant d'intégrer sur les directions. On a :

$$\vec{J}(x) = -\frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla}\phi(x) = -D\vec{\nabla}\phi(x), \quad (6.3)$$

où D est appelé le coefficient de diffusion. Cette expression est connue sous le nom de loi de Fick. On remarque que le courant est opposé au gradient du flux scalaire, ce qui signifie que les neutrons ont tendance à diffuser des régions de haute densité neutronique vers les régions de moins grande densité. Si on utilise la loi de Fick (6.3) pour éliminer le courant dans l'équation de conservation (6.2), on obtient l'expression de l'équation de diffusion :

$$-\vec{\nabla} \cdot D(x)\vec{\nabla}\phi(x) + \sigma_a(x)\phi(x) = q_0(x). \quad (6.4)$$

Dans un milieu diffusif, le flux scalaire solution de l'équation de transport (1.35) est approché par le flux scalaire solution de l'équation de diffusion, nous présenterons dans les prochaines parties les théorèmes mathématiques illustrant ce constat. Remarquons que cette équation de diffusion traduit le comportement au premier ordre de la solution à l'intérieur d'un domaine considéré.

6.1.3 Conditions aux limites

Il convient donc d'exhiber les conditions aux limites adaptées. Si un considère une condition aux limites pour l'équation du transport du type $u = u_b$ sur Γ^- , on obtient la condition de Dirichlet sur $\partial\mathcal{D}$ pour le flux scalaire ϕ :

$$\phi(x) = \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} W(|\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}|) u_b(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}'), \quad (6.5)$$

où W dépend de la fonction H de Chandrasekhar (voir [36]) et est approchée par un polynôme simple de la façon suivante :

$$W(|\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}|) = \frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}| H(|\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}|) \simeq |\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}| + \frac{3}{2} |\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}|^2. \quad (6.6)$$

6.2 Résultats d'approximation

6.2.1 Changement d'échelle et régime de diffusion

Nous réécrivons (1.35) avec des notations quelque peu différentes :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) + \bar{\sigma}_t(x) u(x, \vec{\Omega}) = \bar{\sigma}_s(x) K_0 u(x, \vec{\Omega}) + \bar{q}(x, \vec{\Omega}), & \text{dans } X \\ u(x, \vec{\Omega}) = 0, & \text{sur } \Gamma^-, \end{cases} \quad (6.7)$$

où

$$K_0 u(x, \vec{\Omega}) = \int_{\mathcal{S}^2} f(x, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}) u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}').$$

Le développement asymptotique utilisé dans un milieu diffusif consiste à supposer que le libre parcours moyen est petit par rapport aux dimensions caractéristiques de \mathcal{D} . On utilise donc le changement de notations suivant (avec le petit paramètre $\varepsilon > 0$) :

$$\bar{\sigma}_t(x) = \frac{\sigma_t(x)}{\varepsilon}, \quad \bar{\sigma}_s(x) = \frac{\sigma_s(x)}{\varepsilon}.$$

On suppose aussi que l'absorption est faible devant la section efficace totale de sorte que l'on ait

$$\sigma_t(x) = \sigma_s(x) + \varepsilon^2 \sigma_a(x).$$

Les sources sont aussi supposées petites :

$$\bar{q} = \varepsilon^2 q.$$

On parlera alors d'un problème de transport (6.9) en régime de diffusion.

6.2.2 Notion de limite de diffusion

Dans la suite de ce chapitre, nous employons très souvent le terme "limite de diffusion". L'étude de la limite de diffusion d'un problème de transport du type (6.9) consiste à étudier le comportement asymptotique en régime de diffusion de sa solution u^ε . On montre que u^ε converge vers U quand ε tend vers zéro où U est la solution d'une équation de diffusion du type (6.4), nous en présenterons une justification mathématique dans le paragraphe suivant. Dans la suite, nous utilisons le terme "d'équation de diffusion associée". Dans le même esprit, l'étude de la limite

de diffusion d'une formulation variationnelle du transport consiste à étudier le comportement asymptotique en régime de diffusion de sa solution u^ε , on montre que la solution du problème variationnel mixte u^ε converge vers U quand ε tend vers zéro où U est la solution du problème variationnel mixte de l'équation de diffusion associée. Au niveau discret, si on note u_h^ε la solution d'un problème de transport discrétisé en régime diffusion, on cherche à étudier le comportement asymptotique de u_h^ε quand ε tend vers zéro. Si on peut montrer que u_h^ε tend vers U_h quand ε tend vers zéro où U_h est la solution du problème de diffusion associé discrétisé, on dira que le schéma de transport associé à u_h^ε possède la limite de diffusion et on parlera de consistance entre les deux schémas. Dans le paragraphe qui suit, nous allons justifier mathématiquement l'approximation par la diffusion d'un problème de transport continu.

6.2.3 Théorèmes d'approximation par la diffusion

On peut alors montrer le

Théorème 6.2.1

Soit \mathcal{D} un ouvert borné de \mathbb{R}^3 de frontière régulière, et soit f , σ_s et σ_a vérifiant :

$$\begin{aligned} f(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') &= f(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}), \quad \vec{\Omega}, \vec{\Omega}' \in \mathcal{S}^2, \\ \int_{\mathcal{S}^2} f(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}' &= 1, \\ \exists \beta_0 > 0, \beta_1 > 0, \quad \beta_0 &\leq f(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \leq \beta_1, \\ \beta_0 &\leq \sigma_s(x) \leq \beta_1, \quad 0 < \sigma_0 \leq \sigma_a(x), \\ \exists \alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \sigma_s &\in C^{2,\alpha}(\bar{\mathcal{D}}), \quad \sigma_a \in C^{1,\alpha}(\bar{\mathcal{D}}). \end{aligned}$$

Alors, l'unique solution u^ε dans $L^\infty(X)$ du problème stationnaire du transport :

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^\varepsilon + \sigma_a u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma_s \left(u^\varepsilon - \int_{\mathcal{S}^2} f(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) u^\varepsilon(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \right) = q, & \text{dans } X \\ u^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = 0, & \text{sur } \Gamma^- \end{cases} \quad (6.8)$$

a une limite U dans L^∞ quand ε tend vers zéro vérifiant

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) + \sigma_a U = q, & \text{dans } \mathcal{D} \\ U = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{D}, \end{cases} \quad (6.9)$$

où la matrice $(a_{ij}(x))$ est symétrique définie positive.

De plus, u^ε et U vérifient :

$$\|u^\varepsilon - U\|_{L^\infty(X)} \leq \varepsilon C_q \quad (6.10)$$

où C_q est une constante positive indépendante de ε .

Lorsque les collisions sont isotropes ($f \equiv 1$), on montre que les coefficients a_{ij} vérifient

$$a_{ij} = \frac{1}{3\sigma_s} \delta_{ij},$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Pour la preuve de ce théorème et ses extensions (notamment sa généralisation au cadre $L^p(X)$ et au problème d'évolution), nous renvoyons le lecteur à [42]. La preuve de ce théorème 6.2.1 s'appuie sur le lemme suivant (alternative de Fredholm) que nous utilisons par la suite

Lemme 6.2.1

On suppose que les hypothèses du théorème 2.1.2 sont satisfaites. Soit $h \in L^p(\mathcal{S}^2)$, $p \in]1, +\infty]$. Pour qu'il existe une solution y dans $L^p(\mathcal{S}^2)$ de l'équation

$$(K_0 - I)y + h = 0,$$

il faut et il suffit que

$$\int_{\mathcal{S}^2} h \, d\nu(\vec{\Omega}) = 0.$$

De plus, y est unique à une constante (en $\vec{\Omega}$) près. D'autre part, il existe un unique $d_i \in L^\infty(\mathcal{S}^2)$ ($i = 1, 2$ ou 3 tel que

$$(K_0 - I)d_i + \Omega_i = 0, \quad \int_{\mathcal{S}^2} d_i \, d\nu(\vec{\Omega}) = 0.$$

Et si on pose

$$\alpha_{ij} = \int_{\mathcal{S}^2} d_i \, \Omega_j \, d\nu(\vec{\Omega}),$$

alors la matrice α_{ij} est symétrique définie positive.

DÉMONSTRATION - Voir R.Dautray, J.L.Lions [42], chapitre XXI, pages 1233-1234. ■

6.3 Généralisation de l'approximation par la diffusion pour la formulation mixte

Les notations sont les mêmes qu'au paragraphe précédent mais nous choisissons cependant $f \equiv 1$ par souci de simplicité, nous noterons

$$K_0 u = \int_{\mathcal{S}^2} u(x, \vec{\Omega}) d\nu(\vec{\Omega}),$$

et nous nous bornerons au seul cadre $L^2(X)$. On considère à présent le problème suivant :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} + \bar{\sigma}_t u = \bar{\sigma}_s K_0 u + \bar{q} & \text{dans } X, \\ P_\Omega \vec{\nabla} u + \bar{\sigma}_t \vec{g} = \vec{\Omega} \left(\bar{\sigma}_s K_0 (\vec{\Omega} \cdot \vec{g}) + \bar{q} \right) & \text{dans } X, \end{cases} \quad (6.11)$$

où les conditions aux limites associées sont :

$$\begin{cases} u = 0 & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \\ \vec{g} = \vec{\Omega} u & \text{pour } (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^+. \end{cases} \quad (6.12)$$

Nous allons montrer le

Théorème 6.3.1

Soit \mathcal{D} un ouvert borné de \mathbb{R}^3 de frontière régulière, et soient σ_s et σ_a vérifiant :

$$\begin{aligned} \exists \beta_0 > 0, \beta_1 > 0, \\ \beta_0 \leq \sigma_s(x) \leq \beta_1, \quad 0 < \sigma_0 \leq \sigma_a(x), \\ \exists \alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \sigma_s \in C^{2,\alpha}(\bar{\mathcal{D}}), \quad \sigma_a \in C^{1,\alpha}(\bar{\mathcal{D}}). \end{aligned}$$

Alors, l'unique couple de solutions $(u^\varepsilon, \vec{g}^\varepsilon)$ dans $L^2(X) \times Y$ du problème stationnaire du transport :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} \quad \frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{g}^\varepsilon + \sigma_a u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma_s (u^\varepsilon - K_0 u^\varepsilon) = q, & \text{dans } X, \\ \text{ii)} \quad \frac{1}{\varepsilon} P_\Omega \vec{\nabla} u^\varepsilon + \sigma_a \vec{g}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma_s \left(\vec{g}^\varepsilon - \vec{\Omega} K_0 (\vec{\Omega} \cdot \vec{g}^\varepsilon) \right) = \vec{\Omega} q & \text{dans } X, \\ \text{iii)} \quad u^\varepsilon = 0, & \text{sur } \Gamma^-, \\ \text{iv)} \quad \vec{g}^\varepsilon = \vec{\Omega} u^\varepsilon, & \text{sur } \Gamma^+. \end{array} \right. \quad (6.13)$$

et l'unique couple de solutions (U, \vec{G}) dans $L^2(\mathcal{D}) \times H(\text{div}, \mathcal{D})$ du problème de diffusion :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{G} + \sigma_a U = q, & \text{dans } \mathcal{D} \\ \text{ii)} \quad \vec{G} + \frac{1}{3\sigma_s} \vec{\nabla} U = 0, & \text{dans } \mathcal{D} \\ \text{iii)} \quad U = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{D}. \end{array} \right. \quad (6.14)$$

vérifient :

$$\|u^\varepsilon - U\|_{L^2(X)} \leq \varepsilon C_q, \quad (6.15)$$

et

$$\|\vec{g}^\varepsilon - \vec{G}\|_{H(\text{div}, X)} \leq \varepsilon C'_q, \quad (6.16)$$

où C_q et C'_q sont des constantes positives indépendantes de ε .

DÉMONSTRATION - Pour cette démonstration, on utilise la méthode dite du développement de Hilbert. On écrit u^ε et \vec{g}^ε sous la forme suivante :

$$u^\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \psi^\varepsilon, \quad (6.17)$$

$$\vec{g}^\varepsilon = \vec{g}^0 + \varepsilon \vec{g}^1 + \varepsilon^2 \vec{g}^2 + \vec{\Gamma}^\varepsilon. \quad (6.18)$$

On remplace u^ε et \vec{g}^ε par ces développements dans (6.13-i) et (6.13-ii) et on cherche à déterminer les (u_i, \vec{g}_i) tels que :

$$(K_0 - I)u_0 = 0, \quad (6.19)$$

$$\vec{g}_0 - \vec{\Omega} K_0 (\vec{\Omega} \cdot \vec{g}_0) u_0 = 0, \quad (6.20)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}_0 + \sigma_s (I - K_0) u_1 = 0, \quad (6.21)$$

$$P_\Omega \vec{\nabla} u_0 + \sigma_s \vec{g}_1 - \vec{\Omega} \sigma_s, K_0 (\vec{\Omega} \cdot \vec{g}_1) = 0 \quad (6.22)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}_1 + \sigma_s (I - K_0) u_2 + \sigma_a u_0 - q = 0, \quad (6.23)$$

$$P_\Omega \vec{\nabla} u_1 + \sigma_s \vec{g}_2 - \vec{\Omega} \sigma_s K_0(\vec{\Omega} \cdot \vec{g}_2) + \sigma_a \vec{g}_0 - \vec{\Omega} q = 0. \quad (6.24)$$

L'équation (6.19) nous donne (d'après le lemme 6.2.1)

$$u_0 = u_0(x),$$

et l'équation (6.20) implique

$$\vec{g}_0 = \vec{\Omega} K_0(\vec{\Omega} \cdot \vec{g}_0),$$

soit

$$\int_{S^2} \vec{g}_0 d\nu(\vec{\Omega}) = 0.$$

Pour satisfaire (6.21), on prendra (alternative de Fredholm)

$$u_1 = -\frac{1}{\sigma_s} \vec{\nabla} \cdot \vec{g}_0 + C, \quad (6.25)$$

où C est une constante indépendante de $\vec{\Omega}$. L'équation (6.22) nous donne

$$\sigma_s \vec{g}_1 - \vec{\Omega} \sigma_s K_0(\vec{\Omega} \cdot \vec{g}_1) = -P_\Omega \vec{\nabla} u_0, \quad (6.26)$$

et, en utilisant l'alternative de Fredholm pour l'équation (6.22) projetée sur $\vec{\Omega}$, on trouve

$$\sigma_s \vec{g}_1 = -P_\Omega \vec{\nabla} u_0 + \vec{\Omega} C,$$

où C est une constante indépendante de $\vec{\Omega}$. En intégrant suivant $\vec{\Omega}$ l'équation (6.22) on obtient une loi de Fick

$$\int_{S^2} \vec{g}_1 d\nu(\vec{\Omega}) = -\frac{1}{3\sigma_s} \vec{\nabla} u_0,$$

ce qui donne (6.14-ii) avec $\vec{G} = \int_{S^2} \vec{g}_1 d\nu(\vec{\Omega})$.

Pour qu'il existe u_2 vérifiant (6.23), il faut et il suffit (d'après le lemme (6.2.1)) que :

$$\int_{S^2} \left(\sigma_a u_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{g}_1 - q \right) d\nu(\vec{\Omega}) = 0, \quad (6.27)$$

soit

$$\sigma_a u_0 + \vec{\nabla} \cdot \int_{S^2} \vec{g}_1 d\nu(\vec{\Omega}) = q, \quad (6.28)$$

ce qui donne (6.14-i). Prenons donc $U = u_0$ et $\vec{G} = \int_{S^2} \vec{g}_1 d\nu(\vec{\Omega})$. Prenons aussi u_1 donné par (6.25), u_2 la solution de (6.23) avec la condition (6.27), \vec{g}_1 donné par (6.26) et enfin \vec{g}_2 dont l'existence et l'expression sont données par (6.24). Notons que l'on a

$$\vec{g}_2 = -P_\Omega \vec{\nabla} u_1 - \sigma_a \vec{g}_0 + \vec{\Omega} q + \vec{\Omega} C,$$

où C est une constante indépendante de $\vec{\Omega}$. On écrit alors le système vérifié par le couple $(\psi^\varepsilon, \vec{\Gamma}^\varepsilon)$ obtenu en remplaçant u^ε et \vec{g}^ε par leurs développements en tenant compte de (6.19)-(6.24) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Gamma}^\varepsilon + \sigma_t \psi^\varepsilon - \sigma_s K_0 \psi^\varepsilon = \varepsilon k_1, & \text{dans } X, \\ P_\Omega \vec{\nabla} \psi^\varepsilon + \sigma_t \vec{\Gamma}^\varepsilon - \vec{\Omega} \sigma_s K_0(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Gamma}^\varepsilon) = \varepsilon \vec{k}_2, & \text{dans } X, \\ \psi^\varepsilon = \varepsilon k_3, & \text{sur } \Gamma^-, \\ \vec{\Gamma}^\varepsilon - \vec{\Omega} \psi^\varepsilon = \vec{k}_4, & \text{sur } \Gamma^+, \end{array} \right. \quad (6.29)$$

avec

$$\begin{cases} k_1 = -\vec{\nabla} \cdot \vec{g}_2 - \sigma_a u_1 - \varepsilon \sigma_a u_2, \\ \vec{k}_2 = -P_\Omega \vec{\nabla} u_2 - \sigma_a \vec{g}_1 - \varepsilon \sigma_a \vec{g}_2, \\ k_3 = -u_1 - \varepsilon u_2, \\ \vec{k}_4 = \vec{0}. \end{cases} \quad (6.30)$$

Les théorèmes de régularité des fonctions Hölderiennes permettent un contrôle en norme de ces différentes quantités compte tenu des régularités de q , σ_s et σ_a . Le couple $(\psi^\varepsilon, \vec{\Gamma}^\varepsilon)$ est donc solution du problème mixte du transport (6.30) et, d'après le théorème 2.1.2 et en vérifiant que $\vec{g}_1 = \vec{\Omega} u_1$ et $\vec{g}_2 = \vec{\Omega} u_2$, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \|\psi^\varepsilon\|_{L^2} &\leq \varepsilon C \left(\|k_1\|_{L^2} + \|k_3\|_{L^2_-} \right), \\ \|\vec{\Gamma}^\varepsilon\|_Y &\leq \varepsilon C \left(\|k_1\|_{L^2} + \|k_3\|_{L^2_-} \right). \end{aligned}$$

On en déduit le théorème 6.2.1. ■

6.4 Analyse asymptotique discrète du schéma 1D

Dans cette section, nous allons utiliser une analyse asymptotique formelle pour caractériser le comportement du schéma numérique mixte-hybride en une dimension d'espace dans des milieux opaques et à l'interface entre un milieu transparent et un milieu opaque. Nous montrons que la solution du schéma mixte-hybride du transport satisfait à la discrétisation mixte-hybride de l'équation de diffusion associée dans la limite de diffusion. De plus, cette solution satisfait à une condition aux limites de Dirichlet donnée par une pondération satisfaisante du flux angulaire incident. Nous commençons cette section en rappelant le résultat classique d'approximation par la diffusion en 1D puis nous présentons une analyse asymptotique formelle du schéma mixte-hybride en régime de diffusion avant d'étudier le comportement du schéma aux interfaces. Ce paragraphe est fortement inspirée des études menées par J.F.Clouët, G.Samba [39] sur la limite de diffusion de la méthode de Monte-Carlo symbolique, G.Samba [70] qui présente une analyse asymptotique discrète des éléments finis discontinus lumpés, E.W.Larsen, J.E.Morel (voir [54, 55]) et M.L.Adams [4]. Ces travaux ont fait l'objet d'une publication en collaboration avec G.Samba [32].

6.4.1 Equation du transport 1D en régime de diffusion

On considère l'équation de transport adimensionnée en régime de diffusion suivante

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial x}(x, \mu) + \frac{\sigma_t(x)}{\varepsilon} u(x, \mu) \\ = \left(\frac{\sigma_t(x)}{\varepsilon} - \varepsilon \sigma_a(x) \right) \phi(x) + \varepsilon q(x) & \text{pour } (x, \mu) \in [0, L] \times [-1, 1], \\ u(0, \mu) = \alpha(\mu) & \text{pour } \mu > 0, \\ u(L, \mu) = \beta(\mu) & \text{pour } \mu < 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

où σ_t , σ_a et q sont indépendants de ε et

$$\phi(x) = \int_{-1}^1 u(x, \mu) \frac{d\mu}{2}.$$

Dans le cas où ε est petit devant la dimension caractéristique du domaine considéré, on parle d'un problème opaque. On peut montrer que, lorsque ε tend vers zéro, le problème (6.31) tend vers le problème de diffusion suivant

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3\sigma_t} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right) + \sigma_a \phi(x) = q(x) & \text{pour } x \in [0, L], \\ \phi(0) = 2 \int_{\mu > 0} W(\mu) \alpha(\mu) d\mu, \\ \phi(L) = 2 \int_{\mu < 0} W(-\mu) \beta(\mu) d\mu, \end{cases} \quad (6.32)$$

où

$$W(\mu) = \frac{\sqrt{3}}{2} \mu H(\mu),$$

et H est la fonction de Chandrasekhar (voir [36]). On rappelle que l'on peut approcher la fonction W par le polynôme

$$W(\mu) \simeq \bar{W}(\mu) = 0.956\mu + 1.565\mu^2 \pm 0.0035 \simeq \mu + \frac{3}{2}\mu^2.$$

On trouvera plus de détails au sujet de ce résultat classique dans les travaux de C.G.Pomraning [63] par exemple.

6.4.2 Éléments finis mixtes-hybrides pour le transport en 1D

On commence par introduire une quadrature $\mathcal{Q}_M = \{\mu_m, w_m; m = 1, \dots, M\}$ pour la discrétisation en angle μ de sorte que

$$\sum_{m=1}^M w_m = 1, \quad \sum_{m=1}^M \mu_m w_m = 0, \quad \sum_{m=1}^M \mu_m^2 w_m = \frac{1}{3}.$$

On partitionne le domaine 1D, $\mathcal{D} = [0, L]$, en I intervalles $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ où $0 = x_{\frac{1}{2}} < \dots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_{i+\frac{1}{2}} < \dots < x_{I+\frac{1}{2}} = L$.

On considère alors le schéma mixte-hybride lumpé (voir la remarque 6.4.1) de l'équation mono-énergétique aux ordonnées discrètes du transport :

$$\begin{cases} i) & g_{i+\frac{1}{2},m}^l + g_{i-\frac{1}{2},m}^r + \sigma_{t,i} h_i u_{i,m} = h_i \sigma_{s,i} \phi_i + h_i q_i, \\ ii) & \frac{\sigma_{t,i} h_i}{2} g_{i+\frac{1}{2},m}^l + \mu_m^2 (u_{i+\frac{1}{2},m} - u_{i,m}) = \frac{\mu_m \sigma_{s,i} h_i}{2} \phi_{i+\frac{1}{2}}^l + \frac{\mu_m h_i}{2} q_{i+\frac{1}{2}}, \\ iii) & \frac{\sigma_{t,i} h_i}{2} g_{i-\frac{1}{2},m}^r + \mu_m^2 (u_{i-\frac{1}{2},m} - u_{i,m}) = -\frac{\mu_m \sigma_{s,i} h_i}{2} \phi_{i-\frac{1}{2}}^r - \frac{\mu_m h_i}{2} q_{i-\frac{1}{2}}, \\ iv) & g_{i-\frac{1}{2},m}^l + g_{i-\frac{1}{2},m}^r = 0, \\ v) & g_{i+\frac{1}{2},m}^l + g_{i+\frac{1}{2},m}^r = 0, \end{cases} \quad (6.33)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} i) & u_{\frac{1}{2},m} = \alpha_m, \mu_m > 0, \\ ii) & u_{I+\frac{1}{2},m} = \beta_m, \mu_m < 0, \\ iii) & g_{\frac{1}{2},m}^r = -\mu_m u_{\frac{1}{2},m}, \mu_m < 0, \\ iv) & g_{I+\frac{1}{2},m}^l = \mu_m u_{I+\frac{1}{2},m}, \mu_m > 0, \end{cases} \quad (6.34)$$

où on a choisit un maillage de l'espace tel que $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ représente la taille de la maille i , $u_{i,m}$ représente la valeur du flux angulaire pour la maille i dans la direction μ_m , $u_{i-\frac{1}{2},m}$ correspond à la valeur du flux angulaire pour le noeud $i - \frac{1}{2}$ dans la direction μ_m , $u_{i+\frac{1}{2},m}$ est la valeur du flux angulaire pour le noeud $i + \frac{1}{2}$ dans la direction μ_m , $g_{i+\frac{1}{2},m}^l$ est la valeur de la densité de courant angulaire pour la maille i au noeud $i + \frac{1}{2}$ dans la direction μ_m , $g_{i-\frac{1}{2},m}^r$ est la valeur de la densité de courant angulaire pour la maille i au noeud $i - \frac{1}{2}$ dans la direction μ_m . On définit $q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(q_i + q_{i+1})$ pour $1 \leq i \leq I-1$, $q_{\frac{1}{2}} = q_1$, $q_{I+\frac{1}{2}} = q_I$, $\phi_i = \sum_{m=1}^M w_m u_{i,m}$,

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^l = \sum_{m=1}^M \frac{w_m}{\mu_m} g_{i+\frac{1}{2},m}^l \quad \text{et} \quad \phi_{i+\frac{1}{2}}^r = \sum_{m=1}^M \frac{w_m}{\mu_m} g_{i+\frac{1}{2},m}^r.$$

Remarque 6.4.1

Pour simplifier les notations, on considère une version "lumpée" du schéma mixte-hybride pour la discrétisation en espace. C'est une procédure classique qui n'affecte pas les propriétés fondamentales du schéma. Pour obtenir la discrétisation mixte-hybride classique, il convient de remplacer les équations discrètes (6.33-ii) et (6.33-iii) par

$$\begin{aligned} & \sigma_{t,i} h_i \left(\frac{1}{3} g_{i+\frac{1}{2},m}^l + \frac{1}{6} g_{i-\frac{1}{2},m}^r \right) + \mu_m^2 \left(u_{i+\frac{1}{2},m} - u_{i,m} \right) \\ & = \mu_m \sigma_{s,i} h_i \left(\frac{1}{3} \phi_{i+\frac{1}{2}}^l + \frac{1}{6} \phi_{i-\frac{1}{2}}^r \right) + \mu_m h_i \left(\frac{1}{3} q_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} q_{i-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \sigma_{t,i} h_i \left(\frac{1}{3} g_{i-\frac{1}{2},m}^r + \frac{1}{6} g_{i+\frac{1}{2},m}^l \right) + \mu_m^2 \left(u_{i-\frac{1}{2},m} - u_{i,m} \right) \\ & = \mu_m \sigma_{s,i} h_i \left(\frac{1}{3} \phi_{i-\frac{1}{2}}^r + \frac{1}{6} \phi_{i+\frac{1}{2}}^l \right) + \mu_m h_i \left(\frac{1}{3} q_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} q_{i+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Remarque 6.4.2

En utilisant la relation (6.33-iv), on peut éliminer la densité de courant angulaire pour obtenir un schéma dans lequel n'intervient plus que les valeurs du flux angulaire aux noeuds et aux mailles.

$$\begin{cases} \frac{2\mu_m^2}{\sigma_{t,i} h_i} \left(-u_{i-\frac{1}{2},m} + 2u_{i,m} - u_{i+\frac{1}{2},m} \right) + \sigma_{t,i} h_i u_{i,m} \\ = h_i \sigma_{s,i} \phi_i + h_i q_i - \mu_m c_i \left(\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}} \right) - \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i}} \left(q_{i+\frac{1}{2}} - q_{i-\frac{1}{2}} \right), \\ \\ -\frac{2\mu_m^2}{\sigma_{t,i} h_i} \left(u_{i+\frac{1}{2},m} - u_{i,m} \right) - \frac{2\mu_m^2}{\sigma_{t,i+1} h_{i+1}} \left(u_{i+\frac{1}{2},m} - u_{i+1,m} \right) \\ = \mu_m c_{i+1} \phi_{i+\frac{1}{2}}^r - \mu_m c_i \phi_{i+\frac{1}{2}}^l + \mu_m \left(\frac{1}{\sigma_{t,i+1}} - \frac{1}{\sigma_{t,i}} \right) q_{i+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (6.35)$$

où $c_i = \frac{\sigma_{s,i}}{\sigma_{t,i}}$ est (définition) le taux d'absorption de la maille i .

Remarque 6.4.3

Remarquons que la façon de définir les quantités $\phi_{i+\frac{1}{2}}^l$ et $\phi_{i+\frac{1}{2}}^r$ n'est pas usuelle (dans le sens où intervient la densité de courant angulaire et non pas le flux angulaire comme dans la plupart des schémas existants). On pourrait aussi utiliser l'expression $\phi_{i+\frac{1}{2}}^{l,r} = \sum_{m=1}^M w_m u_{i+\frac{1}{2}}$ (c'est le cas du schéma utilisé par C.J.Gesh [47]) mais dans ce cas, le comportement asymptotique près des frontières dans un régime de diffusion de la solution discrète ne serait pas correctement capturé.

6.4.3 Analyse de la limite diffusion discrète

Dans ce paragraphe, on considérera uniquement le cas de mailles internes au domaine, i.e., $1 \leq i \leq N-1$. On réécrit alors le système (6.33) en tenant compte du changement d'échelle (6.31) :

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad g_{i+\frac{1}{2},m}^l + g_{i-\frac{1}{2},m}^r + \frac{\sigma_{t,i} h_i}{\varepsilon} u_{i,m} = \frac{\sigma_{t,i} h_i}{\varepsilon} \phi_i - \varepsilon h_i \sigma_{a,i} \phi_i + \varepsilon h_i q_i, \\ ii) \quad \frac{\sigma_{t,i} h_i}{2\varepsilon} g_{i+\frac{1}{2},m}^l + \mu_m^2 (u_{i+\frac{1}{2},m} - u_{i,m}) \\ \quad = \frac{\mu_m \sigma_{t,i} h_i}{2\varepsilon} \phi_{i+\frac{1}{2}}^l - \frac{\mu_m \varepsilon \sigma_{a,i} h_i}{2} \phi_{i+\frac{1}{2}}^l + \frac{\varepsilon \mu_m h_i}{2} q_{i+\frac{1}{2}}, \\ iii) \quad \frac{\sigma_{t,i} h_i}{2\varepsilon} g_{i-\frac{1}{2},m}^r + \mu_m^2 (u_{i-\frac{1}{2},m} - u_{i,m}) \\ \quad = -\frac{\mu_m \sigma_{t,i} h_i}{2\varepsilon} \phi_{i-\frac{1}{2}}^r + \frac{\mu_m \varepsilon \sigma_{a,i} h_i}{2} \phi_{i-\frac{1}{2}}^r - \frac{\varepsilon \mu_m h_i}{2} q_{i-\frac{1}{2}}, \\ iv) \quad g_{i+\frac{1}{2},m}^l + g_{i+\frac{1}{2},m}^r = 0, \end{array} \right. \quad (6.36)$$

avec les conditions aux limites appropriées (6.34). Dans le but de réaliser notre étude asymptotique, on introduit les développements de Hilbert suivants

$$u_{i,m} \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_{i,m}^{(k)}, \quad g_{i+\frac{1}{2},m}^{l,r} \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k g_{i+\frac{1}{2},m}^{l,r,(k)},$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}, \quad \phi_i \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \phi_i^{(k)}, \quad \phi_{i+\frac{1}{2}}^{l,r} \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \phi_{i+\frac{1}{2}}^{l,r,(k)},$$

dans les équations (6.33), on égalise alors les coefficients d'une même puissance de ε ($\varepsilon^{-1}, \varepsilon^0$ et ε^1), et on résout chacun des systèmes d'équations résultant. Les équations d'ordre $O(\varepsilon^{-1})$ nous donnent

$$\sigma_{t,i} h_i u_{i,m}^{(0)} = \sigma_{t,i} h_i \phi_i^{(0)}, \quad (6.37)$$

donc $u_{i,m}^{(0)}$ ne dépend pas de m (alternative de Fredholm discrète), on écrit :

$$u_{i,m}^{(0)} = U_i, \quad (6.38)$$

où U_i sera déterminé par la suite.

Les équations d'ordre $O(\varepsilon^0)$ sont

$$g_{i+\frac{1}{2},m}^{l,(0)} + g_{i-\frac{1}{2},m}^{r,(0)} + \sigma_{t,i} h_i u_{i,m}^{(1)} = \sigma_{t,i} h_i \phi_i^{(1)}, \quad (6.39)$$

$$\frac{\sigma_{t,i}h_i}{2}g_{i+\frac{1}{2},m}^{l,(1)} + \mu_m^2 \left(u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)} - u_{i,m}^{(0)} \right) = \mu_m \frac{\sigma_{t,i}h_i}{2}\phi_{i+\frac{1}{2}}^{l,(1)}, \quad (6.40)$$

$$\frac{\sigma_{t,i}h_i}{2}g_{i-\frac{1}{2},m}^{r,(1)} + \mu_m^2 \left(u_{i-\frac{1}{2},m}^{(0)} - u_{i,m}^{(0)} \right) = -\mu_m \frac{\sigma_{t,i}h_i}{2}\phi_{i-\frac{1}{2}}^{r,(1)}, \quad (6.41)$$

$$g_{i+\frac{1}{2},m}^{l,(1)} + g_{i+\frac{1}{2},m}^{r,(1)} = 0, \quad g_{i-\frac{1}{2},m}^{l,(1)} + g_{i-\frac{1}{2},m}^{r,(1)} = 0, \quad (6.42)$$

$$u_{m,\frac{1}{2}}^{(0)} = \alpha_m, \quad \mu_m > 0, \quad u_{m,I+\frac{1}{2}}^{(0)} = \beta_m, \quad \mu_m < 0, \quad (6.43)$$

$$g_{m,\frac{1}{2}}^{l,(0)} = -\mu_m u_{m,\frac{1}{2}}^{(0)}, \quad \mu_m < 0, \quad g_{m,I+\frac{1}{2}}^{r,(0)} = \mu_m u_{m,I+\frac{1}{2}}^{(0)}, \quad \mu_m > 0. \quad (6.44)$$

On introduit les relations (6.40) et (6.41) dans l'équation (6.42), on obtient

$$\frac{\mu_m^2}{\sigma_{t,i}h_i} \left(u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)} - u_{i,m}^{(0)} \right) + \frac{\mu_m^2}{\sigma_{t,i+1}h_{i+1}} \left(u_{i-\frac{1}{2},m}^{(0)} - u_{i+1,m}^{(0)} \right) = 0, \quad (6.45)$$

soit

$$u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)} = \frac{\sigma_{t,i+1}h_{i+1}U_i + \sigma_{t,i}h_iU_{i+1}}{\sigma_{t,i}h_i + \sigma_{t,i+1}h_{i+1}}. \quad (6.46)$$

L'équation (6.46) montre que $u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)}$ est isotrope pour les noeuds internes du maillage. On introduit les notations suivantes (pour tout $1 \leq i \leq I-1$)

$$U_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{m=1}^M 3\mu_m^2 w_m u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)}, \quad (6.47)$$

$$G_{i+\frac{1}{2}}^l = \sum_{m=1}^M w_m g_{i+\frac{1}{2},m}^{l,(1)}, \quad (6.48)$$

et

$$G_{i-\frac{1}{2}}^r = \sum_{m=1}^M w_m g_{i-\frac{1}{2},m}^{r,(1)}. \quad (6.49)$$

Par soucis de simplicité, on introduit une définition (6.47) qui n'est pas naturelle mais qui simplifiera les calculs par la suite. Pour les noeuds internes, on peut utiliser indépendamment la définition précédente de $U_{i+\frac{1}{2}}$ (6.47) ou

$$U_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{m=1}^M w_m u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)}, \quad (6.50)$$

car $u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)}$ est isotrope. Cependant, les calculs seront bien plus compliqués avec la définition (6.50) mais le résultat final serait le même. En multipliant l'équation (6.46) par $\mu_m^2 w_m$ et en sommant sur m , on a

$$U_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_{t,i+1}h_{i+1}U_i + \sigma_{t,i}h_iU_{i+1}}{\sigma_{t,i}h_i + \sigma_{t,i+1}h_{i+1}}. \quad (6.51)$$

En multipliant les équations (6.40) et (6.41) par w_m et en sommant sur m , on obtient

$$\frac{\sigma_{t,i}h_i}{2}G_{i+\frac{1}{2}}^l + \frac{1}{3} \left(U_{i+\frac{1}{2}} - U_i \right) = 0, \quad (6.52)$$

$$\frac{\sigma_{t,i}h_i}{2}G_{i-\frac{1}{2}}^r + \frac{1}{3}(U_{i-\frac{1}{2}} - U_i) = 0, \quad (6.53)$$

qui représente une discrétisation mixtes-hybrides lumpée de la loi de Darcy

$$\vec{G} + \frac{1}{3\sigma_t}\vec{\nabla}U = 0 \quad (6.54)$$

sauf sur les noeuds frontières (on étudiera le comportement du schéma aux bords dans le paragraphe suivant).

Examinons à présent l'équation d'ordre $O(\varepsilon^1)$

$$g_{i+\frac{1}{2},m}^{l,(1)} + g_{i-\frac{1}{2},m}^{r,(1)} + \sigma_{t,i}h_i u_{i,m}^{(2)} = \sigma_{t,i}h_i \phi_i^{(2)} - \sigma_{a,i}h_i \phi_i^{(0)} + h_i q_i. \quad (6.55)$$

En multipliant l'équation par w_m , en sommant sur m et en utilisant l'alternative de Fredholm discrète pour $u_{i,m}^{(2)}$, on trouve

$$G_{i+\frac{1}{2}}^l + G_{i-\frac{1}{2}}^r + \sigma_{a,i}h_i U_i = h_i q_i, \quad (6.56)$$

qui est une discrétisation mixte-hybride de l'équation de bilan suivante

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} + \sigma_a U = q. \quad (6.57)$$

consistante avec les équations discrètes (6.52), (6.53) et la relation (6.54). On a donc montré que, pour des problèmes diffusifs, la solution de l'équation de transport discrétisée par les éléments finis mixte-hybride tend vers la solution de l'équation de diffusion associée discrétisée par les éléments finis mixte-hybride. On remarque que le choix de $\phi_{i+\frac{1}{2}}^{l,r}$ n'influe pas sur le comportement asymptotique du schéma pour les mailles internes. Nous allons à présent étudier le comportement du schéma en régime de diffusion pour les mailles frontières.

6.4.4 Analyse limite diffusion sur la frontière

On examine l'expression du flux scalaire sur la frontière gauche. On utilise la définition (6.47) et la condition aux limites données dans le paragraphe 1, on note

$$U_{\frac{1}{2}} = \sum_m 3\mu_m^2 w_m u_{\frac{1}{2},m}^{(0)}.$$

En introduisant la condition frontière (6.34-iii) dans l'équation (6.36-iii), on obtient, pour $\mu_m < 0$:

$$-\mu_m u_{\frac{1}{2},m}^{(0)} = g_{\frac{1}{2},m}^{r,(0)} = -\mu_m \phi_{\frac{1}{2}}^{(0)}. \quad (6.58)$$

Le flux angulaire sur le bord $u_{\frac{1}{2},m}^{(0)}$ est donc isotrope pour $\mu_m < 0$. On considère l'équation (6.36) à l'ordre $O(\varepsilon^0)$ sur la frontière gauche

$$\frac{\sigma_{t,1}h_1}{2}g_{\frac{1}{2},m}^{r,(1)} + \mu_m^2 \left(u_{\frac{1}{2},m}^{(0)} - u_{1,m}^{(0)} \right) = \mu_m \frac{\sigma_{t,1}h_1}{2} \sum_m \frac{w_m}{\mu_m} g_{\frac{1}{2},m}^{r,(1)}. \quad (6.59)$$

L'alternative de Fredholm discrète pour $\frac{1}{\mu_m}g_{\frac{1}{2},m}^{r,(1)}$ implique

$$\sum_m w_m \mu_m \left(u_{\frac{1}{2},m}^{(0)} - u_{1,m}^{(0)} \right) = 0. \quad (6.60)$$

Or, on a montré que $u_{1,m}^{(0)}$ est isotrope donc

$$\sum_m w_m \mu_m u_{\frac{1}{2},m}^{(0)} = 0,$$

soit

$$\sum_{\mu_m > 0} w_m \mu_m \alpha_m + \sum_{\mu_m < 0} w_m \mu_m u_{\frac{1}{2},m}^{(0)} = 0.$$

De plus, $u_{\frac{1}{2},m}^{(0)}$ est isotrope pour $\mu_m < 0$ et $u_{\frac{1}{2},m}^{(0)} = \alpha_m$ pour $\mu_m > 0$, l'équation (6.60) devient

$$u_{\frac{1}{2},m}^{(0)} = \sum_{\mu_m > 0} 4\mu_m w_m \alpha_m, \quad (6.61)$$

car

$$\sum_{\mu_m > 0} \mu_m w_m = -\frac{1}{4}.$$

L'équation (6.61) fournit une expression de $u_{\frac{1}{2},m}^{(0)}$ pour $\mu_m < 0$. En utilisant les conditions aux limites (6.34-i), on a

$$U_{\frac{1}{2}} = \sum_{\mu_m > 0} 3\mu_m^2 w_m \alpha_m + \sum_{\mu_m < 0} 3\mu_m^2 w_m u_{\frac{1}{2},m}^{(0)}. \quad (6.62)$$

Donc, en injectant (6.61) dans (6.70), on a

$$U_{\frac{1}{2}} = 2 \sum_{\mu_m > 0} \left(\frac{3}{2}\mu_m^2 + \mu_m \right) w_m \alpha_m. \quad (6.63)$$

C'est une bonne approximation de la condition de Dirichlet donné par la fonction de Chandrasekhar du problème de diffusion.

6.4.5 Analyse d'un problème hétérogène

On considère un problème unidimensionnel divisé en deux régions : un milieu transparent à gauche du noeud $x_{i+\frac{1}{2}}$ et un milieu diffusif à sa droite. En supposant que le flux angulaire entrant dans la région diffusive est connu, on cherche à calculer l'expression du flux scalaire à l'interface :

$$U_{i+\frac{1}{2}} = \sum_m 3\mu_m^2 w_m u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)}.$$

On cherche à obtenir une expression de la condition de Dirichlet sur l'interface pour l'équation de diffusion issue de l'analyse asymptotique du problème dans la région diffusive.

Analyse du schéma mixte-hybride

Malheureusement, il est impossible de calculer explicitement cette expression dans le cas du schéma mixte-hybride. En effet, l'équation régissant le comportement du schéma sur l'interface s'écrit (pour tout μ_m , positif ou négatif) :

$$g_{i+\frac{1}{2},m}^l + g_{i+\frac{1}{2},m}^r = 0.$$

Les courants entrant et sortant sont donc couplés sur l'interface. De plus, la condition aux limites transport sur la frontière correspondant aux directions sortantes du domaine transparent (i.e. pour μ_m positif) devrait s'écrire

$$g_{i+\frac{1}{2},m}^l = \mu_m u_{i+\frac{1}{2},m},$$

mais ce n'est pas le cas avec le schéma mixte-hybride. Si on effectue le changement d'échelle représenté sur la figure 6.4.5 et si on introduit un développement de Hilbert de la solution discrète comme dans ce qui précède, on obtient

$$g_{i+\frac{1}{2},m}^l = -g_{i+\frac{1}{2},m}^{r,(0)} = \mu_m \phi_{i+\frac{1}{2}}^{r,(0)}.$$

On ne résout donc pas le bon problème de transport dans la région transparente car $u_{i+\frac{1}{2},m} \neq$

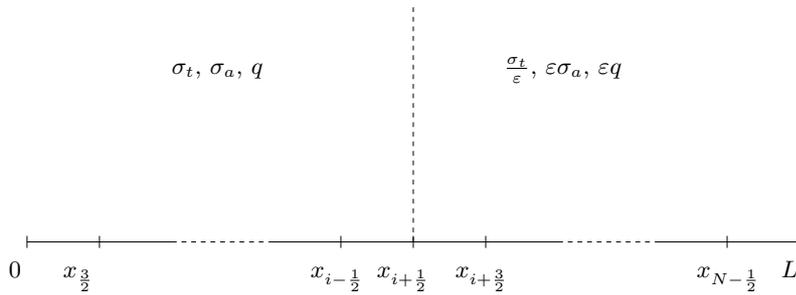


FIG. 6.1 – Problème hétérogène modèle

$\phi_{i+\frac{1}{2}}^{r,(0)}$ pour $\mu_m > 0$. Les résultats numériques montrent que la condition de Dirichlet obtenue par le schéma mixte-hybride est une pondération en $3\mu^2$ du flux entrant sur l'interface au lieu de $\frac{3}{2}\mu^2 + \mu$ (voir figure 7.6 et les résultats numériques de [47]). Nous proposons dans la section qui suit une technique permettant d'obtenir de meilleurs résultats sur l'interface.

Analyse du schéma mixte-hybride en décomposition de domaine

Un moyen d'éviter le problème constaté dans le paragraphe précédent consiste à remplacer l'équation sur l'interface

$$g_{i+\frac{1}{2},m}^l + g_{i+\frac{1}{2},m}^r = 0.$$

par la condition de flux sortant suivante

$$g_{i+\frac{1}{2},m}^l = \mu_m u_{i+\frac{1}{2},m}, \quad \text{pour } \mu_m > 0,$$

et

$$g_{i+\frac{1}{2},m}^r = -\mu_m u_{i+\frac{1}{2},m}, \quad \text{pour } \mu_m < 0. \quad (6.64)$$

Cette technique correspond à une technique de décomposition de domaine (évoquée dans le chapitre 2 et détaillée en annexe) qui consiste à diviser le domaine de calcul en deux domaines distincts et d'utiliser un raccord satisfaisant à l'interface. L'idée est donc de remplacer l'équation de continuité des densités de courant angulaire dans le but de résoudre le bon problème de transport dans chacun des sous-domaines. En notant $u_{i+\frac{1}{2},m}^e$ le flux angulaire incident provenant

de la région transparente (i.e. pour $\mu_m > 0$) et en supposant que la région transparente est suffisamment finement maillée, on trouve

$$\mu_m u_{i+\frac{1}{2},m}^e = g_{i+\frac{1}{2},m}^l. \quad (6.65)$$

En utilisant la relation (6.64) sur le noeud $i + \frac{1}{2}$ et l'expression de $g_{i+\frac{1}{2},m}^r$ sur la maille $i + 1$, on obtient à l'ordre zéro pour $\mu_m < 0$:

$$-\mu_m u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)} = g_{i+\frac{1}{2},m}^{r,(0)} = -\mu_m \phi_{i+\frac{1}{2}}^{r,(0)}. \quad (6.66)$$

Alors, pour $\mu_m < 0$, $u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)}$ est isotrope.

En considérant l'équation (6.36) d'ordre $O(\varepsilon^0)$ pour l'interface du côté de la maille $i + 1$, on obtient

$$\frac{\sigma_{t,i+1} h_{i+1}}{2} g_{i+\frac{1}{2},m}^{r,(1)} + \mu_m^2 \left(u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)} - u_{i+1,m}^{(0)} \right) = \mu_m \frac{\sigma_{t,i+1} h_{i+1}}{2} \sum_m \frac{w_m}{\mu_m} g_{i+\frac{1}{2},m}^{r,(1)}. \quad (6.67)$$

En utilisant l'alternative de Fredholm discrète pour $\frac{1}{\mu_m} g_{i+\frac{1}{2},m}^{r,(1)}$, on a

$$\sum_m w_m \mu_m \left(u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)} - u_{i+1,m}^{(0)} \right) = 0. \quad (6.68)$$

On sait que $u_{i+1,m}^{(0)}$ est isotrope, $u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)}$ est isotrope pour $\mu_m < 0$ et $u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)} = u_{i+\frac{1}{2},m}^e$ pour $\mu_m > 0$ donc l'équation (6.68) devient

$$u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)} = \sum_{\mu_m > 0} 4\mu_m w_m u_{i+\frac{1}{2},m}^e, \quad (6.69)$$

qui est une expression explicite de $u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)}$ pour $\mu_m < 0$. De plus, en utilisant encore la relation (6.34-i) on trouve

$$U_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{\mu_m > 0} 3\mu_m^2 w_m u_{i+\frac{1}{2},m}^e + \sum_{\mu_m < 0} 3\mu_m^2 w_m u_{i+\frac{1}{2},m}^{(0)}. \quad (6.70)$$

Et en utilisant l'expression (6.61) dans (6.70), on obtient

$$U_{i+\frac{1}{2}} = 2 \sum_{\mu_m > 0} \left(\frac{3}{2} \mu_m^2 + \mu_m \right) w_m u_{i+\frac{1}{2},m}^e. \quad (6.71)$$

On obtient donc une approximation correcte de la condition de Dirichlet sur l'interface pour l'équation de diffusion approchant le problème de transport dans la région diffusive en utilisant une technique de décomposition de domaine comme montré dans le chapitre suivant sur la figure 7.6.

6.5 Analyse asymptotique discrète en dimension $d > 1$

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'analyse asymptotique discrète de notre schéma en dimension $d > 1$. Pour simplifier, nous considérons le schéma mixte hybride sur une maille

donnée interne d'une discrétisation \mathcal{D}_h de l'espace physique \mathcal{D} . On reprend les matrices introduites au chapitre 5 mais on omet les indices h et k pour simplifier les notations. On commence par introduire une quadrature $\mathcal{Q}_M = \{\vec{\Omega}_m, w_m; m = 1, \dots, M\}$ pour la discrétisation en angle $\vec{\Omega}$ de sorte que

$$\sum_{m=1}^M w_m = 1, \quad \sum_{m=1}^M \vec{\Omega}_m w_m = \vec{0}, \quad \sum_{m=1}^M \vec{\Omega}_m \otimes \vec{\Omega}_m w_m = \frac{1}{3}[Id].$$

On suppose que les sections efficaces sont indépendantes de m . On considère une maille interne $Q_k \in \mathcal{D}_h$ et on s'intéresse à la discrétisation mixte-hybride du transport locale à la maille Q_k , on indice par m les matrices élémentaires et les vecteurs inconnues de sorte à illustrer leur dépendance angulaire. On note donc $A_m = \{(A_m)_{ab}\}_{1 \leq a, b \leq 2d}$, $B_m = \{(B_m)_{ab}\}_{1 \leq a, b \leq 2d}$, $C_m = \{(C_m)_{ab}\}_{1 \leq a, b \leq 2d}$, D_m , S et $F_m = \{(F_m)_a\}_{1 \leq a \leq 2d}$ données par

$$(A_m)_{ab} = \sigma_{t,k} \int_{Q_k} (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{w}_a) (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{w}_b) dx, \quad (6.72)$$

$$(B_m)_a = - \sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{k,j}) (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{w}_{k,a}) ds, \quad (6.73)$$

$$(C_m)_{ab} = \int_{\Gamma_{k,b}} (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{k,b}) (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{w}_{k,a}) ds, \quad (6.74)$$

$$D_m = \sigma_{t,k} \int_{Q_k} dx = \sigma_{t,k} V_k \quad (6.75)$$

$$(F_m)_a = \int_{Q_k} q_k (\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_{k,a}) dx \quad \text{et} \quad S = q_k V_k \quad (6.76)$$

où V_k représente le volume de la maille Q_k . On s'intéresse donc au système suivant :

$$\begin{pmatrix} A_m & B_m & C_m \\ B_m^t & -D_m & 0 \\ C_m^t & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_m \\ u_m \\ \lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_m \\ -S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{s,k} R_m \sum_{m'=1}^M w_{m'} K_{m'} G_{m'} \\ -\sigma_{s,k} V_k \sum_{m'=1}^M w_{m'} u_{m'} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.77)$$

où la matrice $K_m = (K_m)_{ij}_{1 \leq i, j \leq 2d}$ de dimension $2d$ est donnée par

$$(K_m)_{ij} = \delta_{ij} (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{k,i}),$$

et la matrice $R_m = (R_m)_{ij}_{1 \leq i, j \leq 2d}$ de dimension $2d$ est donnée par

$$(R_m)_{ij} = \int_{Q_k} (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{w}_{k,i}) dx.$$

6.5.1 Propriétés des matrices élémentaires

Nous commençons par donner quelques propriétés fondamentales des matrices élémentaires. Ces propriétés facilitent l'étude de la limite de diffusion du système (6.77). L'idée est de faire apparaître explicitement les matrices élémentaires issues de la discrétisation mixte-hybride de l'équation de diffusion associée.

Proposition 6.5.1

La matrice A_m s'écrit comme un produit de deux matrices $A_m = \sigma_{t,k} A_d T_m$ où la matrice $A_d = \{(A_d)_{ab}\}_{1 \leq a, b \leq 2d}$ est indépendante de m et est donnée par

$$(A_d)_{ab} = \int_{Q_k} (\vec{w}_a \cdot \vec{w}_b) dx.$$

et la matrice T_m est une matrice de dimension $2d$ dépendant de m .

DÉMONSTRATION - On vérifie que la matrice A_d est symétrique définie positive. On définit alors la matrice T_m à l'aide de la relation

$$T_m = \frac{1}{\sigma_{t,k}} (A_d)^{-1} A_m.$$

■

Proposition 6.5.2

La matrice B_m s'écrit comme un produit de deux matrices $B_m = C_m B_d$ où la matrice $B_d = \{(B_d)_a\}_{1 \leq a \leq 2d}$ est indépendante de m et est donnée par

$$(B_d)_a = - \sum_{j=1}^{2d} \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{n}_{k,j} \cdot \vec{w}_{k,a}) ds = -1.$$

DÉMONSTRATION - On utilise simplement la définition de B_m donnée dans le chapitre 5 pour une direction $\vec{\Omega}_m$ fixée. ■

Proposition 6.5.3

La matrice C_m s'écrit comme un produit de deux matrices $C_m = C_d C_m$ où la matrice $C_d = \{(C_d)_{ab}\}_{1 \leq a, b \leq 2d}$ est indépendante de m et est composée des éléments

$$(C_d)_{ab} = \int_{\Gamma_{k,b}} (\vec{n}_{k,b} \cdot \vec{w}_{k,a}) ds = \delta_{ab}.$$

Notons que la matrice D_m ne dépend pas de m , on la décompose donc comme suit :

$$D_m = D_a + D_s$$

où

$$D_a = \sigma_{a,k} \int_{Q_k} dx,$$

et

$$D_s = \sigma_{s,k} \int_{Q_k} dx.$$

En utilisant les propositions 6.5.1, 6.5.2 et 6.5.3 on peut écrire le système (6.77) de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{t,k} A_d T_m & C_m B_d & C_m \\ C_m B_d^t & -D_a - D_s & 0 \\ (C_m)^t & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_m \\ u_m \\ \lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_m \\ -S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{s,k} R_m \sum_{m'=1}^M w_{m'} K_{m'} G_{m'} \\ -\sigma_{s,k} V_k \sum_{m'=1}^M w_{m'} u_{m'} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.78)$$

Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés de ce système linéaire et de ses solutions en régime de diffusion.

6.5.2 Limite diffusion du schéma mixte-hybride

Nous considérons dans ce paragraphe la discrétisation mixte-hybride de l'équation du transport. Une propriété importante du schéma est qu'il possède la limite diffusion, c'est à dire que la solution discrète du problème de transport dans un milieu diffusif tend vers la solution discrète du problème de diffusion associé. La discrétisation mixte-hybride de l'équation du transport est donc dans ce cas consistante avec la discrétisation mixte-hybride de l'équation de diffusion associée. Par la suite, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 6.5.1

Soit $v = (v_j)_{1 \leq j \leq 2d}$ appartenant au sous-espace de dimension finie $Y_0(Q_k)$ pour une direction $\vec{\Omega}_m$ fixée alors

$$T_m v = C_m {}^t v.$$

DÉMONSTRATION - On cherche à montrer l'égalité

$$T_m v = (A_d)^{-1} A_m v = C_m {}^t v.$$

Ce qui est équivalent à montrer l'égalité suivante

$$A_m v = A_d C_m {}^t v.$$

Calculons tout d'abord la composante i notée $(A_m v)_i$ du vecteur $A_m v$ de dimension $2d$.

$$\begin{aligned} (A_m v)_i &= \sum_{j=1}^{2d} \int_{Q_k} (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{w}_{k,i}) (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{w}_{k,j}) v_j dx \\ &= \int_{Q_k} \vec{w}_{k,i} \cdot P_{\Omega_m} \vec{v} dx. \end{aligned}$$

Calculons maintenant la composante i notée $(A_d C_m {}^t v)_i$ du vecteur $A_d C_m {}^t v$ de dimension $2d$. En utilisant le fait que $P_{\Omega_m} \vec{v} = \vec{v}$, on obtient

$$\begin{aligned} (A_d C_m {}^t v)_i &= \int_{Q_k} \vec{w}_{k,i} \cdot \left[\sum_{j=1}^{2d} \vec{w}_{k,j} (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{k,j}) \int_{\Gamma_{k,j}} \vec{\Omega}_m \cdot \left(\sum_{l=1}^{2d} v_l \vec{w}_{k,l} \right) ds \right] dx \\ &= \int_{Q_k} \vec{w}_{k,i} \cdot \left[\sum_{j=1}^{2d} \vec{w}_{k,j} (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{k,j}) \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{v}) ds \right] dx \\ &= \int_{Q_k} \vec{w}_{k,i} \cdot \left[\sum_{j=1}^{2d} \vec{w}_{k,j} \int_{\Gamma_{k,j}} (\vec{n}_{k,j} \cdot \vec{v}) ds \right] dx \\ &= \int_{Q_k} \vec{w}_{k,i} \cdot P_{\Omega_m} \vec{v} dx. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Lemme 6.5.2

Soit C_m définie par (6.74) alors

$$\sum_{m=1}^M w_m C_m = \frac{1}{3} I_{\mathbb{R}^{2d}}.$$

DÉMONSTRATION - On calcule

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M w_m (C_m)_{ab} &= \sum_{m=1}^M w_m \int_{\Gamma_{k,b}} (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{k,b}) (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{w}_{k,a}) ds \\ &= \int_{\Gamma_{k,b}} \sum_{m=1}^M w_m (P_{\Omega_m} \vec{n}_{k,b} \cdot \vec{w}_{k,a}) ds \\ &= \frac{1}{3} \delta_{ab} \int_{\Gamma_{k,b}} \vec{n}_{k,b} \cdot \vec{w}_{k,a} ds \\ &= \frac{1}{3} \delta_{ab}^2. \end{aligned}$$

■

Ces lemmes permettent de montrer la proposition de limite de diffusion suivante :

Proposition 6.5.4

La solution $(G_m^\varepsilon, u_m^\varepsilon, \lambda_m^\varepsilon)$ du problème du transport en régime diffusif discrétisé sur une maille donnée Q_k de \mathcal{D}_h par la méthode des éléments finis mixtes-hybrides :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad \frac{\sigma_{s,k}}{\varepsilon} A_d T_m G_m^\varepsilon + \varepsilon \sigma_{a,k} A_d T_m G_m^\varepsilon + C_m B_d u_m^\varepsilon + C_m \lambda_m^\varepsilon \\ \quad = \varepsilon F_m + \frac{\sigma_{s,k}}{\varepsilon} R_m \sum_{m'=1}^M w_{m'} K_{m'} G_{m'}^\varepsilon, \\ \text{ii)} \quad B_d^t C_m^t G_m^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} D_s u_m^\varepsilon - \varepsilon D_a u_m^\varepsilon = -\varepsilon S - \frac{\sigma_{s,k}}{\varepsilon} V_k \sum_{m'=1}^M w_{m'} u_{m'}^\varepsilon, \\ \text{iii)} \quad C_m^t G^\varepsilon = 0, \end{array} \right. \quad (6.79)$$

tend (formellement) quand ε tend vers 0 vers la solution (G_d, u_d, λ_d) du problème de diffusion associé discrétisé sur la maille Q_k de \mathcal{D}_h par la méthode des éléments finis mixtes-hybrides :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad A_d G_d + \frac{1}{3} B_d u_d + \frac{1}{3} C_d \lambda_d = 0, \\ \text{ii)} \quad (B_d)^t G_d - D_a u_d = -S, \\ \text{iii)} \quad (C_d)^t G_d = 0, \end{array} \right. \quad (6.80)$$

où les notations matricielles et vectorielles sont explicitées dans la preuve.

DÉMONSTRATION - On introduit les développements formels suivants :

$$G_m^\varepsilon = G_m^0 + \varepsilon G_m^1 + \varepsilon^2 G_m^2 + O(\varepsilon^2),$$

$$U_m^\varepsilon = U_m^0 + \varepsilon U_m^1 + \varepsilon^2 U_m^2 + O(\varepsilon^2),$$

$$\lambda_m^\varepsilon = \lambda_m^0 + \varepsilon \lambda_m^1 + \varepsilon^2 \lambda_m^2 + O(\varepsilon^2).$$

On injecte ces développements dans le système (6.79) et on écrit les équations vérifiées par $(G_m^i, U_m^i, \lambda_m^i)$ en annulant les termes de même puissance de ε , on obtient :

$$\sigma_{s,k} A_d T_m G_m^0 = \sigma_{s,k} R_m \sum_{m'=1}^M w_{m'} K_{m'} G_{m'}^0, \quad (6.81)$$

$$D_s u_m^0 = \sigma_{s,k} V_k \sum_{m'=1}^M w_{m'} u_{m'}^0, \quad (6.82)$$

$$\sigma_{s,k} A_d T_m G_m^1 + C_m B_d u_m^0 + C_m \lambda_m^0 = \sigma_{s,k} R_m \sum_{m'=1}^M w_{m'} K_{m'} G_{m'}^1, \quad (6.83)$$

$$B_d^t C_m^t G_m^0 - D_s u_m^1 = -\sigma_{s,k} V_k \sum_{m'=1}^M w_{m'} u_{m'}^1, \quad (6.84)$$

$$\sigma_{s,k} A_d T_m G_m^2 + \sigma_{a,k} A_d T_m G_m^0 + C_m B_d u_m^1 + C_m \lambda_m^1 = F_m + \sigma_{s,k} R_m \sum_{m'=1}^M w_{m'} K_{m'} G_{m'}^2, \quad (6.85)$$

$$B_d^t C_m^t G_m^1 - D_s u_m^2 - D_a u_m^0 = -S - \sigma_{s,k} V_k \sum_{m'=1}^M w_{m'} u_{m'}^2. \quad (6.86)$$

L'équation (6.82) nous donne :

$$u_m^0 = \sum_{m'=1}^M w_{m'} u_{m'}^0,$$

le flux angulaire au centre de la maille Q_k est donc isotrope (i.e. indépendant de m).

On multiplie l'équation (6.81) par w_m et on somme sur m pour obtenir :

$$A_d \sum_{m=1}^M w_m T_m G_m^0 = 0. \quad (6.87)$$

D'autre part, multiplions l'équation (6.83) par w_m et sommons sur m , on obtient en utilisant le fait que u_m^0 est isotrope et le lemme 6.5.2, on obtient

$$\sigma_{s,k} A_d \sum_{m=1}^M w_m T_m G_m^1 + \frac{1}{3} B_d u_m^0 + \frac{1}{3} \sum_{m=1}^M 3w_m C_m \lambda_m^0 = 0. \quad (6.88)$$

Cette équation nous donne (6.80-i) à condition de poser

$$G_d = \sum_{m=1}^M w_m T_m G_m^1, \quad u_d = u_m^0, \quad \lambda_d = \sum_{m=1}^M 3w_m C_m \lambda_m^0. \quad (6.89)$$

On note aussi que la condition d'existence d'une solution u_m^1 pour l'équation (6.84) (alternative de Fredholm discrète) est automatiquement satisfaite par (6.87). On s'intéresse à présent à l'équation (6.86), une condition d'existence (alternative de Fredholm discrète) d'une solution u_m^2 s'écrit

$$B_d^t \sum_{m=1}^M w_m C_m^t G_m^1 - D_a u_m^0 = -S.$$

Ce qui nous donne (6.80-ii) avec les conditions (6.89). On obtient aussi (6.80-iii) en utilisant le lemme 6.5.1

$$C_d G_d = \sum_{m=1}^M w_m C_m^t G_m^1 = 0,$$

où $C_d = I_{\mathbb{R}^{2d}}$ et en remarquant que

$$G_d = \sum_{m=1}^M w_m C_m^t G_m^1 = \sum_{m=1}^M w_m T_m G_m^1.$$

■

Remarque 6.5.1

On obtient le résultat de limite diffusion discret sur le système linéaire global en utilisant la proposition 6.5.4 associée à un assemblage de la matrice globale et la technique de résolution du système linéaire présentée dans le chapitre 5. Il convient néanmoins de porter attention aux conditions aux limites discrètes, ce que nous n'avons fait qu'en dimension $d = 1$.

6.6 Accélération par diffusion synthétique pour la formulation mixte

L'accélération par diffusion synthétique (diffusion synthetic acceleration en anglais qu'on abrège par DSA) est une méthode bien connue et très performante permettant d'accélérer la convergence du schéma de la source itérée présenté au chapitre 1. On suppose dans ce paragraphe pour simplifier que les sections efficaces et les sources ne dépendent pas de la variable angulaire $\vec{\Omega}$ et nous utilisons des conditions aux limites de flux entrant nul.

6.6.1 Principe général de la DSA

La technique de l'accélération par diffusion synthétique consiste à utiliser l'approximation du transport par la diffusion comme un préconditionnement (en un certain sens) du schéma de la source itérée. On considère le problème de transport (en reprenant les notations du paragraphe) suivant

$$\begin{cases} Lu = Ku + q, & \text{dans } X, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma^-, \end{cases} \quad (6.90)$$

Pour résoudre ce système (notamment lorsque l'on utilise la méthode des ordonnées discrètes), on utilise l'algorithme de la source itérée suivant (présenté au chapitre 1),

$$\begin{cases} Lu^{i+1} = Ku^i + q, & \text{dans } X, \\ u^{i+1} = 0, & \text{sur } \Gamma^-, \end{cases} \quad (6.91)$$

où u^i est le flux angulaire calculé à l'itération i , $i \geq 1$, et u^0 est un flux angulaire initial donné (en général 0). Remarquons que pour toute étape du processus itératif, on peut écrire la solution exacte du problème de transport associé

$$u = u^{i+1} + (L - K)^{-1}K\delta u^{i+1} \quad (6.92)$$

où

$$\delta u^{i+1} = u^{i+1} - u^i.$$

L'utilisation de la relation (6.92) requiert l'inversion de l'opérateur $L-K$, ce qui revient à résoudre directement le problème de transport initial, ce que l'on cherche précisément à éviter en utilisant le processus itératif (6.96). L'idée est donc de remplacer l'opérateur $(L - K)^{-1}$ dans (6.92) par un opérateur \tilde{D}^{-1} qui soit plus facile à calculer et qui fournisse une bonne approximation de la solution de (6.90). La méthode d'accélération par diffusion synthétique consiste donc à utiliser pour \tilde{D} l'opérateur de l'équation de diffusion approchant (6.90). Pour chaque étape du processus itératif (6.96), on utilise donc une étape intermédiaire permettant d'aboutir à la relation suivante

$$u^{i+1} = L^{-1}Ku^i - \tilde{D}^{-1}(L - K)L^{-1}Ku^i + L^{-1}q - \tilde{D}^{-1}KL^{-1}q.$$

On utilise donc l'opérateur \tilde{D} comme un préconditionnement du problème (6.90). Remarquons aussi qu'en régime de diffusion (i.e. lorsque le libre parcours moyen d'ordre ε est d'autant plus petit par rapport aux dimensions caractéristiques du domaine physique), \tilde{D}^{-1} fournit une très bonne approximation de $(L - K)^{-1}$. Donc, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, le préconditionnement sera d'autant plus fiable.

6.6.2 Algorithme de la DSA

L'idée est donc d'introduire les corrections suivantes

$$\gamma^{i+\frac{1}{2}} = u - u^{i+\frac{1}{2}} \quad (6.93)$$

et

$$\Gamma^{i+\frac{1}{2}} = K_0(u - u^{i+\frac{1}{2}}) \quad (6.94)$$

En pratique, on utilise l'algorithme suivant (faisant intervenir une étape supplémentaire pour chaque étape du système (6.96)) : on commence par résoudre le problème

$$\begin{cases} Lu^{i+\frac{1}{2}} = Ku^i + q, & \text{dans } X, \\ u^{i+\frac{1}{2}} = 0, & \text{sur } \Gamma^-, \end{cases} \quad (6.95)$$

où u^i est le flux angulaire calculé à l'itération i , $i \geq 1$, et u^0 est un flux angulaire initial donné (en général 0). On résout alors un problème de diffusion pour $\Gamma^{i+\frac{1}{2}}$ tel que

$$\begin{cases} \tilde{D}\Gamma^{i+\frac{1}{2}} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla}\Gamma^{i+\frac{1}{2}} \right) + \sigma_a\Gamma^{i+\frac{1}{2}} = K(u^i - u^{i+\frac{1}{2}}), & \text{dans } \mathcal{D}, \\ \Gamma^{i+\frac{1}{2}} = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{D}. \end{cases} \quad (6.96)$$

On définit alors

$$u^{i+1} = u^{i+\frac{1}{2}} + \Gamma^{i+\frac{1}{2}}.$$

On poursuit alors le processus itératif jusqu'à convergence.

6.6.3 Remarques sur la discrétisation des opérateurs de transport et de diffusion dans la DSA

Dans ce paragraphe, nous voulons insister sur un point crucial de l'élaboration d'un schéma DSA dans le cadre d'une discrétisation (éléments finis, différences finies, etc...) de l'opérateur de transport. En effet, la discrétisation de l'opérateur de diffusion intervenant dans le schéma DSA ne doit pas être réalisée indépendamment de la discrétisation de l'opérateur de transport. En général, le schéma de diffusion utilisé pour l'accélération par diffusion synthétique d'un schéma de transport est obtenu en prenant les moments angulaires du schéma de transport. Le schéma ainsi obtenu ne coïncide pas nécessairement avec le schéma obtenu par une analyse asymptotique discrète (il arrive parfois que le schéma obtenu par une analyse asymptotique d'un schéma de transport ne soit pas un schéma de diffusion). Dans notre cas du schéma mixte-hybride pour le transport, les deux schémas de diffusion coïncident et correspondent au schéma mixte-hybride pour l'équation de diffusion associée. C'est un avantage majeur de la méthode car le schéma mixte-hybride est un excellent schéma pour résoudre un problème de diffusion (ordre de convergence élevé, valide sur tous types de maillages en toutes dimensions d'espace, etc...). Ainsi, lors de la mise en oeuvre de l'algorithme de DSA pour le schéma mixte-hybride du transport, on utilisera le schéma mixte-hybride de l'équation de diffusion associée.

Bilan du chapitre 6

Nous avons donc montré dans ce chapitre que la formulation mixte possédait bien la limite de diffusion de même que le schéma mixte-hybride qui en découle. Nous avons explicités quelques propriétés essentielles du schéma en régime de diffusion et nous avons présenté la méthode d'accélération par diffusion synthétique qui lui est associée. Nous allons ensuite présenter quelques résultats numériques visant à illustrer les propriétés énoncées dans ce chapitre et dans les chapitres précédents.

Chapitre 7

Résultats numériques

Sommaire

7.1	Problèmes en une dimension d'espace	123
7.1.1	Résultats dans un milieu purement absorbant	124
7.1.2	Résultats dans le vide : résultats aux interfaces	124
7.1.3	Résultats en milieux diffusifs, ε -problème	126
7.1.4	Problèmes pour des milieux hétérogènes	129
7.1.5	Cas d'un problème à incidence normale	132
7.1.6	Cas d'un problème à incidence rasante	133
7.2	Problèmes en deux dimensions d'espace	134
7.2.1	Problèmes pour une direction angulaire	134
7.2.2	Cas d'une source anisotrope : comparaison avec une solution exacte . .	140
7.2.3	ε -problème bidimensionnel et conditions de réflexion spéculaire	141

Nous présentons dans ce chapitre quelques résultats numériques permettant d'illustrer les propriétés du schéma aux éléments finis mixtes-hybrides pour le transport. Nous nous intéressons dans un premier temps à des résultats en une dimension d'espace pour des milieux homogènes ou hétérogènes. Nous étudions l'ordre de convergence de la méthode. Nous comparons les estimations d'erreurs obtenues numériquement aux estimations théoriques présentées au chapitre 4. Nous montrons ensuite des résultats obtenus en deux dimensions d'espace. Nous nous attachons à illustrer les propriétés asymptotiques du schéma présentées au chapitre 6 et nous comparons les résultats obtenus avec notre schéma mixte-hybride aux résultats obtenus avec un schéma DSN (voir section 1.7.1) sur un maillage cartésien. Nous utilisons enfin des maillages non structurés très déformés pour apprécier la qualité de l'approximation obtenue sur de tels maillages. Nous illustrons aussi l'amélioration de la convergence du système itératif de la source itérée utilisant un algorithme d'accélération par diffusion synthétique.

7.1 Problèmes en une dimension d'espace

Nous commençons par présenter différents cas test en une dimension d'espace. Nous montrons tout d'abord le comportement de notre schéma dans un milieu purement absorbant. Nous présentons ensuite des résultats obtenus dans des milieux opaques pour illustrer les conclusions du chapitre 6 sur l'approximation de la diffusion. Nous illustrons par des applications numériques la limite diffusion du schéma mixte-hybride constatée dans la partie théorique. Nous nous

intéressons enfin à des milieux hétérogènes et au comportement du schéma aux interfaces entre différents milieux (en particulier entre un milieu transparent et un milieu opaque).

7.1.1 Résultats dans un milieu purement absorbant

On considère dans ce paragraphe le problème suivant

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u(x, \mu)}{\partial x} + u(x, \mu) = 0, & \text{pour } x \in [0, 1] \text{ et } \mu \in [-1, 1] \\ u(0, \mu) = 1, & \text{pour } 0 < \mu < 1, \\ u(1, \mu) = 0, & \text{pour } -1 < \mu < 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Nous considérons donc le cas d'un problème purement absorbant sans collisions ($\sigma_s = 0$). La

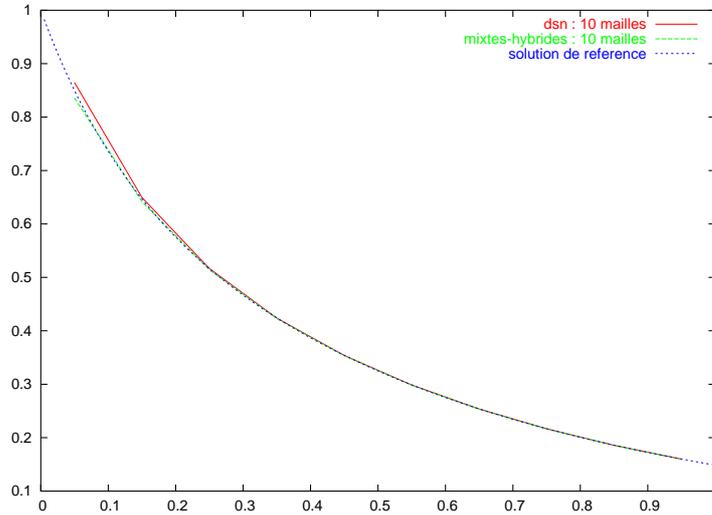


FIG. 7.1 – Flux scalaire pour un problème purement absorbant

solution exacte de ce problème est donnée par

$$u(x, \mu) = \exp^{-\frac{x}{\mu}} \mathbb{I}_{\mu > 0}.$$

La figure 7.1 illustre les résultats obtenus pour ce cas test avec le schéma mixte-hybride et le schéma DSN pour 10 mailles. Nous traçons aussi le flux scalaire ϕ défini par (1.4) avec ici $d\nu(\mu) = \frac{d\mu}{2}$ et

$$\phi(x) = \int_0^1 \exp^{-\frac{x}{\mu}} d\mu.$$

Comme attendu, le schéma est très précis même sur des maillages grossiers et donne des résultats comparables aux résultats obtenus par un code DSN.

7.1.2 Résultats dans le vide : résultats aux interfaces

Dans ce paragraphe, nous considérons deux cas très simples (pour une direction donné $\mu = 1$) qui permettent d'explicitier quelques résultats dans des milieux hétérogènes comportant du vide.

Interface vide-matière

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \sigma(x)u(x) = 0 \quad \text{pour } x \in [0, 1], \\ u(0) = 1, \\ \sigma(x) = 0 \quad \quad \quad \text{pour } x \in [0, 0.5], \\ \sigma(x) = 1 \quad \quad \quad \text{pour } x \in [0.5, 1]. \end{array} \right. \quad (7.2)$$

La résolution de ce problème a été effectuée à l'aide du code mixte-hybride 1D pour 100 mailles sur deux sous-domaines. On résout d'abord le problème de gauche (i.e. dans le sens de parcours de $\mu = 1$) puis on assure la transmission en imposant une condition de Dirichlet pour le problème de droite en utilisant la valeur du flux angulaire calculée dans le problème du transport à gauche. La figure 7.2 présente les résultats numériques obtenus et illustre le bon comportement du schéma sur ce type de problèmes.

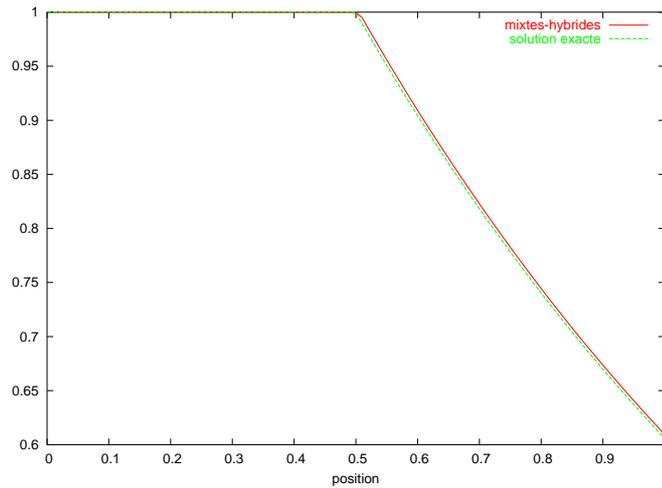


FIG. 7.2 – Flux scalaire pour le cas test vide-matière

Interface matière-vide

On considère ici le problème suivant symétrique du problème précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \sigma(x)u(x) = 0 \quad \text{pour } x \in [0, 1], \\ u(0) = 1, \\ \sigma(x) = 1 \quad \quad \quad \text{pour } x \in [0, 0.5], \\ \sigma(x) = 0 \quad \quad \quad \text{pour } x \in [0.5, 1]. \end{array} \right. \quad (7.3)$$

La figure 7.3 présente le résultat obtenu qui confirme le choix de décomposition de domaine proposé au paragraphe 2.2.3.

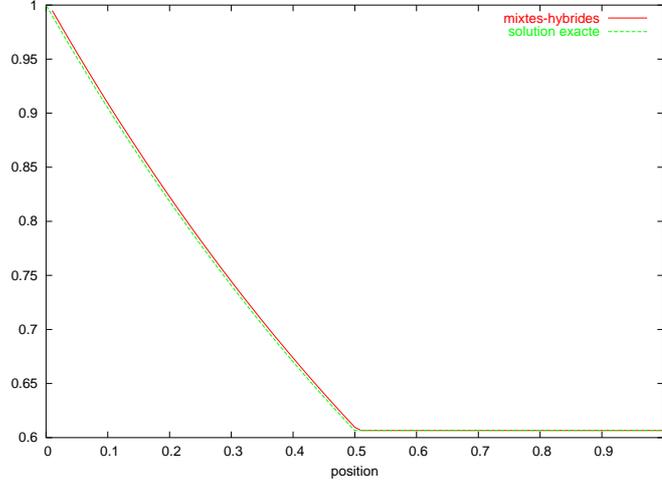


FIG. 7.3 – Flux scalaire pour le cas test matière-vide

7.1.3 Résultats en milieux diffusifs, ε -problème

Nous présentons ici les résultats obtenus à l'aide de la méthode des éléments finis mixtes-hybrides en géométrie 1D dans le cadre d'un régime diffusif. Nous considérons donc le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial u(x, \mu)}{\partial x} + \frac{\sigma_t(x)}{\varepsilon} u(x, \mu) \\ = \left[\frac{\sigma_t(x)}{\varepsilon} - \varepsilon \sigma_a(x) \right] \phi(x) + \varepsilon q(x), \text{ pour } 0 < x < 1 \text{ et } -1 \leq \mu \leq 1 \\ u(0, \mu) = u_g(\mu), \quad 0 < \mu \leq 1, \\ u(1, \mu) = u_d(\mu), \quad -1 \leq \mu < 0, \\ \phi(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x, \mu') d\mu'. \end{array} \right. \quad (7.4)$$

Ainsi, quand ε tend vers 0, on peut montrer (voir [53]) que la solution du problème (7.4) satisfait aux conditions suivantes :

$$u(x, \mu) = \phi(x) + O(\varepsilon), \quad 0 < x_0 \leq x \leq x_1 < 1, \quad (7.5)$$

où $\phi(x)$ vérifie le problème de diffusion suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dx} \frac{1}{3\sigma_t(x)} \frac{d}{dx} \phi(x) + \sigma_a(x)\phi(x) = q(x), \\ \phi(0) = 2 \int_0^1 W(\mu)u_g(\mu)d\mu, \\ \phi(1) = 2 \int_{-1}^0 W(-\mu)u_d(\mu)d\mu, \end{array} \right. \quad (7.6)$$

où, dans l'équation (7.5), x_0 et x_1 sont des points fixés arbitrairement sur l'intervalle $[0,1]$; ce résultat n'est généralement pas valable près de $x = 0$ et $x = 1$ car les conditions aux limites d'ordre $O(\varepsilon)$ apparaissent dans la solution de l'équation de transport mais qui n'existent pas dans la solution du problème de diffusion simple. Comme on l'a vu précédemment, $W(\mu) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mu H(\mu)$ où $H(\mu)$ est la fonction de Chandrasekhar (voir paragraphe 6.1.3).

Lorsque ε tend vers zéro, on peut comparer la solution du cas test (7.4) à la solution de l'équation de diffusion associée (pour $\sigma_t = 1$ et $u_b = 0$) :

$$-\frac{1}{3} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = 1$$

qui est $\phi(x) = -\frac{3}{2}(x^2 + x)$.

- Sur la figure 7.4, nous avons choisi de montrer le comportement du schéma mixte-hybride pour une valeur de ε fixée (on prendra $\varepsilon = 0.01$ simulant un milieu très opaque), pour des flux entrants nuls (i.e. $u_g = u_d = 0$) et pour différentes valeurs du pas d'espace Δx . On observe que même pour un maillage grossier (Δx est alors grand devant le libre parcours moyen des particules d'ordre ε), on obtient d'excellents résultats. Ces résultats numériques illustrent la propriété de limite de diffusion du schéma 1D démontrée au chapitre 6. Certains schémas de transport ne possèdent pas cette propriété et donnent des résultats désastreux lorsque le pas de maillage est grand devant le libre parcours moyen des particules (voir [39]).
- Sur la figure 7.5, nous avons fixé le pas d'espace $\Delta x = 0.01$ et nous avons fait varier ε de 10^{-1} à 10^{-5} . On s'aperçoit donc que lorsque ε tend vers 0, les résultats obtenus tendent aussi vers la solution asymptotique de l'équation de diffusion associée. Comme prévu, le schéma aux éléments finis mixtes hybrides semblent donc donner de très bons résultats en régime de diffusion. De plus, même lorsque les mailles sont très opaques (dans le sens où le libre parcours moyen est très petit devant la taille des mailles), on reste proche de la solution exacte dans ce cas diffusif.

Dans le tableau suivant 7.7, nous présentons les résultats d'estimations d'erreur en norme L^2 obtenus pour une valeur fixe $\varepsilon = 10^{-5}$. On observe une convergence d'ordre 2 comme évoqué dans le chapitre 4.

Δx	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
DSN	1.8465.10 ⁻²	2.0156.10 ⁻⁴	3.4585.10 ⁻⁶	7.2563.10 ⁻⁸	3.2539.10 ⁻⁹
Mixtes-hybrides	1.8395.10 ⁻²	2.0899.10 ⁻⁴	3.8311.10 ⁻⁶	7.1896.10 ⁻⁸	3.3654.10 ⁻⁹

(7.7)

Sur le tableau 7.8, on illustre l'efficacité de la méthode d'accélération par diffusion synthétique, pour différentes valeurs de ε pour un pas d'espace fixé $\Delta x = 0.001$, on compare le nombre

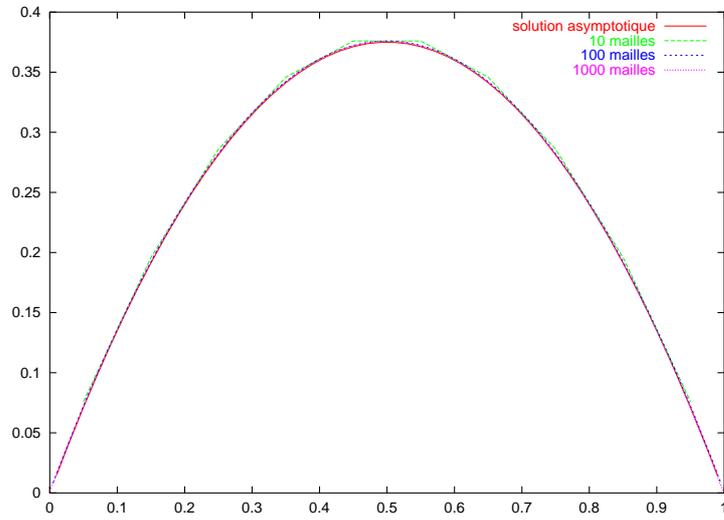


FIG. 7.4 – Flux scalaire pour différents nombre de mailles

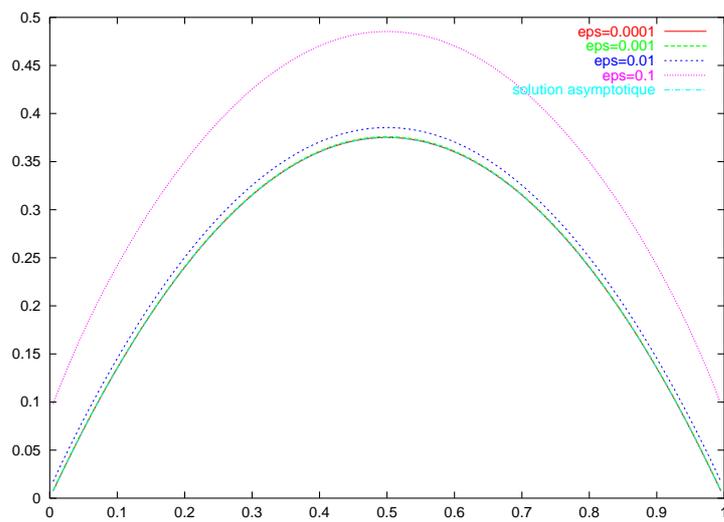


FIG. 7.5 – Flux scalaire pour différentes valeurs de ϵ

d'itérations obtenues par la méthode de la source itérée sans et avec la technique d'accélération par diffusion synthétique.

ε	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
itérations avec DSA	20	28	27	25	20
itérations sans DSA	24	598	32625	998100	1802584

(7.8)

7.1.4 Problèmes pour des milieux hétérogènes

Dans ce paragraphe, on considère deux problèmes qui illustrent le comportement de notre schéma sur des problèmes de type couches limites (interface entre un milieu transparent et un milieu opaque). En effet, les méthodes de résolution des équations du transport doivent permettre de fournir de bonnes approximations aux interfaces entre des milieux hétérogènes. E.W.Larsen et J.E.Morel propose dans [54, 55] plusieurs cas test visant à étudier le comportement de nombreux schémas de transport. Nous utilisons ces cas tests similaires pour comparer notamment notre schéma mixte-hybride avec le schéma DSN aux différences finies.

Premier cas test de Larsen et Morel

Le premier problème que nous considérerons est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial u(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_t(x)u(x, \mu) = \sigma_s(x)\phi(x), \quad \text{pour } x \in [0, 2] \text{ et } \mu \in [-1, 1] \\ u(0, \mu) = 1, \quad \text{pour } 0 < \mu < 1, \\ u(2, \mu) = 0, \quad \text{pour } -1 < \mu < 0, \\ \phi(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x, \mu') \frac{d\mu'}{2}, \end{array} \right. \quad (7.9)$$

où

$$\sigma_t(x) = \begin{cases} 2, & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 100, & \text{pour } 1 < x < 2, \end{cases} \quad (7.10)$$

$$\sigma_s(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 100, & \text{pour } 1 < x < 2. \end{cases} \quad (7.11)$$

La configuration spatiale de ce problème est donc séparée en deux parties distinctes, la première purement absorbante (avec un libre parcours grand devant les dimensions caractéristiques du domaine) et la seconde diffusive (avec un libre parcours très petit par rapport aux dimensions géométriques du problème). On impose un flux entrant $u(x, \mu) = 1$ isotrope dans la partie absorbante du domaine qui est atténué en un flux anisotrope $u(x, \mu) = e^{-2x/\mu}$ à l'entrée dans la région opaque. On observe alors un phénomène de couche limite à l'interface milieu transparent-milieu opaque où le flux de neutrons tend à "s'isotropiser". On résout ce problème en utilisant un découpage angulaire S_{16} et nous précisons par la suite le pas d'espace utilisé pour chaque figure. Notons que si l'on ne maille pas suffisamment finement dans la région opaque, le nombre de libre parcours par maille devient suffisamment prohibitif pour que la condition aux limites obtenue en $x = 2$ ne soit pas la bonne (voir E.W.Larsen et J.E.Morel [54, 55]). La solution de référence est obtenue à partir du schéma diamant aux différences finies (DSN) pour un pas d'espace $\Delta x = 0.001$. Sur la figure 7.6, on montre que pour des maillages de l'espace suffisamment fins, les

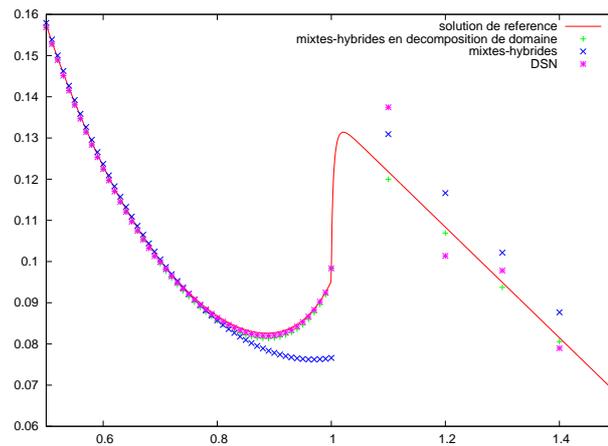


FIG. 7.6 – Flux scalaire pour le premier cas test de Larsen et Morel

solutions obtenues par les schémas DSN et mixte-hybride tendent bien vers la solution exacte. E.W.Larsen et J.E.Morel ont montré que le schéma DSN retranscrivait bien le comportement à l'interface même pour un maillage grossier dans la région diffusive. La condition de Dirichlet obtenue sur l'interface pour le problème de diffusion est une pondération en $\frac{3}{2}\mu^2 + \mu$ du flux angulaire anisotrope entrant, ce qui est une bonne approximation de la condition de Dirichlet donnée par la fonction de Chandrasekhar. Cependant, on observe de fortes oscillations de la solution DSN autour de la couche limite. Avec le schéma mixte-hybrides, comme nous l'avons montré au chapitre 6, la solution de diffusion n'est pas bien capturée. Il s'agit d'un inconvénient majeur du schéma. Cependant, nous avons montré qu'en résolvant deux problèmes de transport couplés sur les deux domaines, on peut alors capturer le bon comportement à l'interface (voir figure 7.6).

Second cas test de Larsen et Morel

Le second problème que nous considérons est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial u(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_t(x)u(x, \mu) = \sigma_s(x)\phi(x) + q(x), \quad \text{pour } x \in [0, 1] \text{ et } \mu \in [-1, 1], \\ u(0, \mu) = 0, \quad \text{pour } 0 < \mu < 1, \\ u(1, \mu) = 0, \quad \text{pour } -1 < \mu < 0, \\ \phi(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x, \mu') d\mu'. \\ \text{où} \\ \sigma_t(x) = 100, \\ \sigma_s(x) = \begin{cases} 90, & \text{pour } 0 < x < 0.5, \\ 100, & \text{pour } 0.5 < x < 1, \end{cases} \\ q(x) = \begin{cases} 10, & \text{pour } 0 < x < 0.5, \\ 0, & \text{pour } 0.5 < x < 1. \end{cases} \end{array} \right. \quad (7.12)$$

Le système est décomposé en deux régions. La première région est composée de 1000 fibres parcourus moyen avec de l'absorption et une source intérieure. La seconde région est purement diffusive sans aucune source.

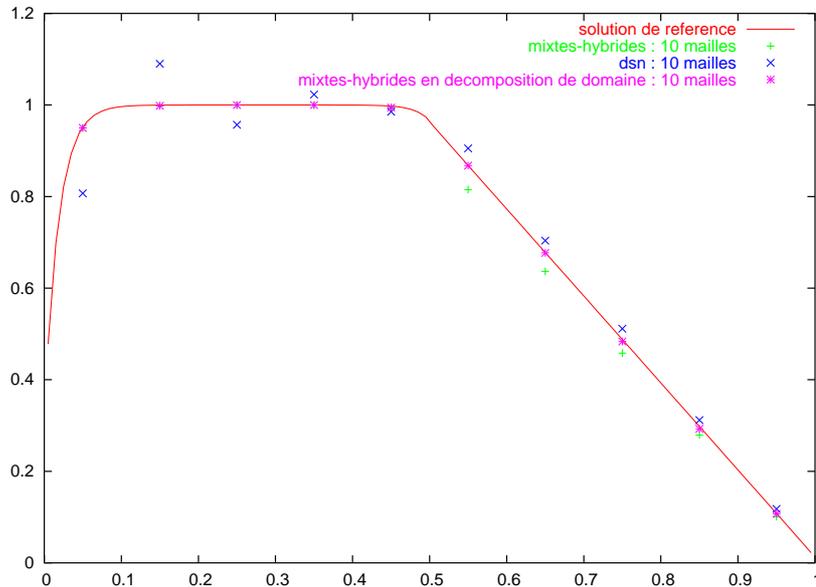


FIG. 7.7 – Flux scalaire pour le second problème de Larsen et Morel

La solution de ce problème consiste en un flux scalaire qui varie quasi-linéairement $\phi \simeq 1$ dans la première région puis décroît linéairement de $\phi = 1$ vers $\phi = 0$ lorsque x croît de $x = 0.5$

vers $x = 1$. Bien que la première région ne soit pas totalement diffusive car σ_a n'est pas assez petit, la solution donnée par l'approximation de la diffusion est cependant très précise.

On résout ce problème en utilisant une quadrature angulaire S_8 et en comparant deux cas à une solution de référence donnée par le schéma DSN pour un nombre de mailles suffisamment grand (1000 mailles).

1. cas du schéma DSN pour 10 mailles,
2. cas du schéma mixte-hybride pour 10 mailles,
3. cas du schéma mixte-hybride pour 10 mailles avec décomposition de domaine.

On constate sur la figure 7.7 que la solution mixte-hybride (cas 2) ne traduit pas le comportement dans la région de diffusion pour un maillage grossier. Pour un maillage fin, le schéma fournit tout de même une très bonne approximation de la solution. Le schéma DSN oscille autour de la solution de référence lorsque le maillage n'est pas assez fin. Dans le cas 3, le schéma mixte-hybride utilisé en décomposition de domaine permet d'obtenir une excellente approximation de la solution de (7.12) même pour un maillage grossier. Nous retrouvons ainsi les résultats du chapitre 6.

7.1.5 Cas d'un problème à incidence normale

On choisit une quadrature $\mathcal{Q}_M = \{\mu_m, w_m; m = 1, \dots, M\}$ pour la discrétisation en $\mu \in [-1, 1]$ telle que $-1 < \mu_1 < \dots < \mu_M < 1$, μ_M est donc l'élément le plus proche de 1. On considère dans ce paragraphe le cas d'un problème à incidence normale dans un milieu diffusif défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + 100u_m = 100 \sum_m^M u_m w_m, \quad \text{pour } x \in [0, 1] \text{ et } \mu_m \in \mathcal{Q}_M, \\ u_m(0) = \frac{\delta_{m,M}}{w_M}, \quad \text{pour } \mu_m > 0, \\ u_m(1) = 0, \quad \text{pour } \mu_m < 0. \end{array} \right. \quad (7.13)$$

Ce problème correspond donc au cas d'un flux entrant "ponctuel" sur le bord gauche du domaine dans une direction normale. La solution de ce problème traduit un effet de couche limite sur le bord gauche qui exprime l'entrée dans un domaine diffusif (une région isotrope avec un libre parcours très petit) d'un flux entrant très anisotrope. Dès que l'on s'éloigne de cette couche limite le flux angulaire redevient très isotrope et il est très bien approché par l'équation de diffusion associée. Ce cas est très intéressant pour comparer le comportement de schémas numériques pour le transport (même ceux qui possèdent la limite de diffusion) sur des maillages très grossiers. En effet, pour un nombre de mailles faible, l'effet de couche limite ne peut être retranscrit, les résultats obtenus sont donc médiocres même si la région diffusive est majoritaire. La question est donc de savoir si les schémas numériques retrouvent un bon niveau de précision à la sortie de la couche limite. La figure 7.8 présente les résultats obtenus par les schémas mixtes-hybrides et DSN pour 10 mailles en comparaison d'une solution de référence obtenue sur un maillage très fin par le schéma DSN et mixte-hybride. Dans notre analyse théorique des conditions aux limites en régime diffusif 1D, nous avons montré que le schéma mixte-hybride satisfaisait à une condition aux limites pondérée par $\frac{3}{2}\mu^2 + \mu$. Le schéma DSN satisfaisait à une condition aux limites pondérée par $\frac{3}{2}\mu^2 + \mu$ qui est très proche de la pondération donnée par la fonction de Chandrasekhar (6.6). Le profil donné par le schéma DSN pour des maillages grossiers permet de

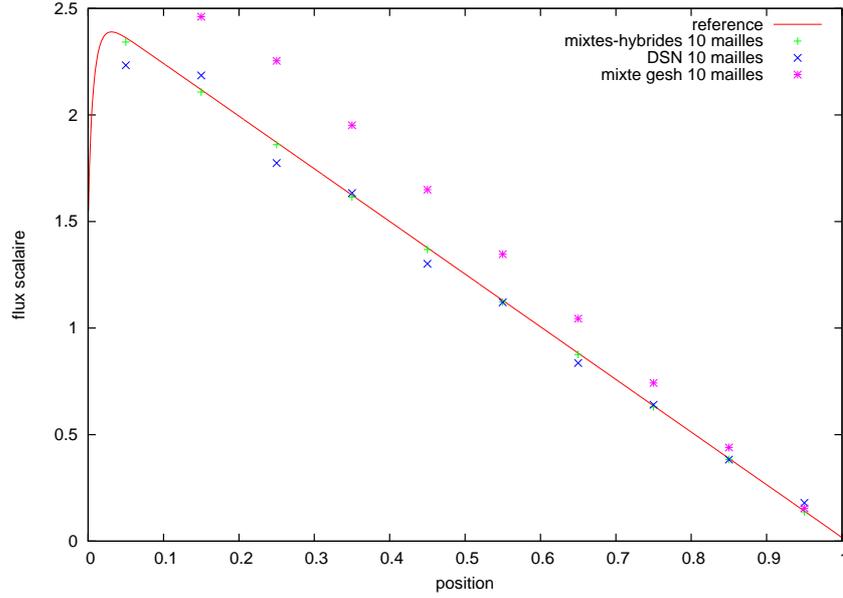


FIG. 7.8 – Flux scalaire pour le problème à incidence normale

garder le même niveau que la solution exacte. En revanche, on retrouve toujours les oscillations du schéma DSN. Le schéma mixte-hybride donne d'excellents résultats dans ce problème à incidence normale. Remarquons que la méthode mixte proposée par C.J.Gesh [47] ne permet pas de décrire convenablement la couche limite (la condition aux limites de C.J.Gesh n'est pas une pondération en $\frac{3}{2}\mu^2 + \mu$, voir figure 7.8).

7.1.6 Cas d'un problème à incidence rasante

On choisit une quadrature $\mathcal{Q}_M = \{\mu_m, w_m; m = 1, \dots, M\}$ pour la discrétisation en $\mu \in [-1, 1]$ telle que $-1 < \mu_1 < \dots < \mu_M < 1$, μ_M est donc l'élément le plus proche de 1. On considère dans ce paragraphe le cas d'un problème à incidence rasante dans un milieu diffusif défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + 100u_m = 100 \sum_m^M u_m w_m, \quad \text{pour } x \in [0, 1] \text{ et } \mu_m \in \mathcal{Q}_M \\ u_m(0) = \frac{\delta_{m, \frac{M}{2}+1}}{w_{\frac{M}{2}+1}}, \quad \text{pour } \mu_m > 0, \\ u_m(1) = 0, \quad \text{pour } \mu_m < 0. \end{array} \right. \quad (7.14)$$

Ce problème correspond donc au cas d'un flux entrant "ponctuel" sur le bord gauche du domaine dans une direction rasante (μ proche de zéro). De la même manière que précédemment, la solution de ce problème traduit un effet de couche limite sur le bord gauche qui exprime l'entrée dans un domaine diffusif (une région isotrope avec un libre parcours très petit) d'un flux entrant très anisotrope. Le profil donné sur la figure 7.9 par le schéma DSN pour des maillages grossiers permet toujours de garder le même niveau que la solution exacte malgré les oscillations. Le

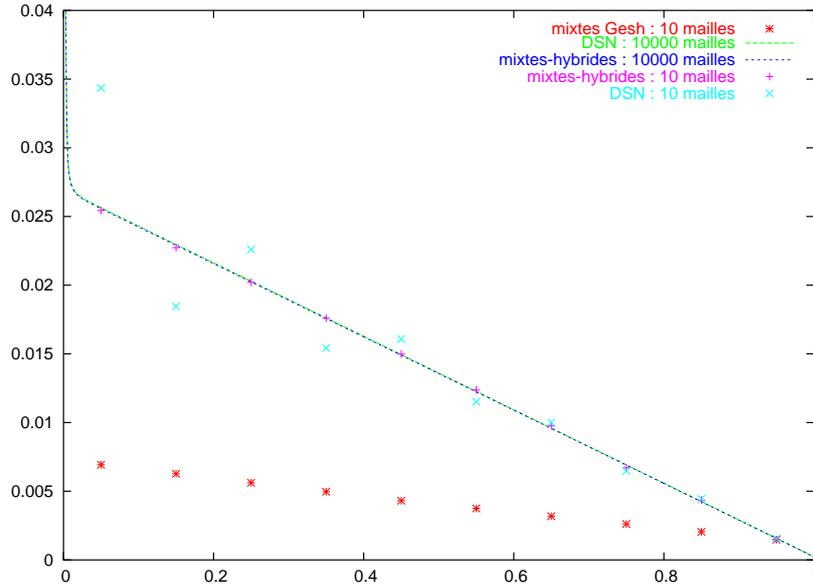


FIG. 7.9 – Flux scalaire pour le problème à incidence rasante

schéma mixtes-hybrides donne une excellente approximation de la solution exacte sur un maillage grossier. Ce n'est pas le cas de la méthode mixte de C.J.Gesh [47].

7.2 Problèmes en deux dimensions d'espace

On s'intéresse à présent à des cas tests bi-dimensionnels. Le schéma de référence que nous avons choisi pour effectuer des comparaisons sur maillages cartésiens est le schéma DSN aux différences finies présentés dans le paragraphe 1.7.1. Nous présentons tout d'abord le cas d'un problème uni-directionnel très simple dans le but de comparer l'efficacité de notre schéma mixte-hybride sur un maillage très déformé. Nous illustrons les défauts d'une discrétisation mixte-hybride non conforme (i.e. basée uniquement sur l'espace d'approximation RT_0). Nous présentons ensuite un cas test bi-dimensionnel à source anisotrope permettant une comparaison des résultats numériques avec une solution exacte analytique. On termine en présentant les résultats obtenus sur un " ε -problème" bi-dimensionnel avec conditions de réflexion spéculaire.

7.2.1 Problèmes pour une direction angulaire

Premier problème

On considère un problème pour une direction angulaire en deux dimensions d'espace défini par

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x) + u(x) = 0, \text{ pour } x = (x_1, x_2) \in \mathcal{D} = [0, 1]^2, \vec{\Omega} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ u = 1, \text{ sur } \partial\mathcal{D}, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \quad (7.15)$$

La solution exacte du problème (7.15) est donnée par

$$u(x) = \begin{cases} \exp(-x_2\sqrt{3}) & \text{si } x_2 \leq x_1, \\ \exp(-x_1\sqrt{3}) & \text{si } x_1 < x_2. \end{cases} \quad (7.16)$$

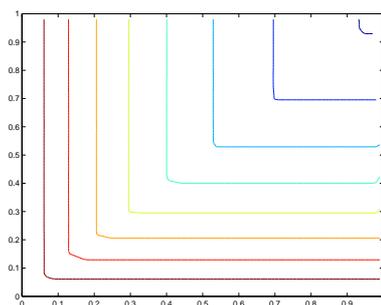


FIG. 7.10 – Solution exacte

Dans ce cas, nous comparons différentes discrétisations de la formulation mixte du problème (7.15) sur des maillages très déformés (voir figure 7.11).

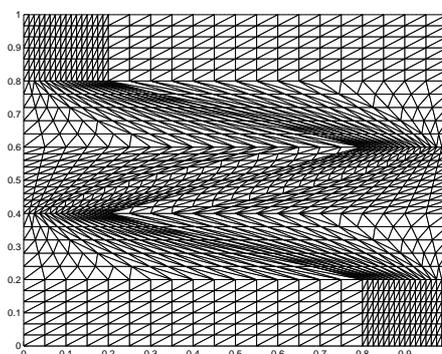


FIG. 7.11 – Maillage (très déformé) de Kershaw

1. Dans un premier temps, on considère la formulation mixte suivante du problème (7.15) :

$$\begin{cases} \vec{g} + P_{\Omega} \vec{\nabla} u = \vec{0}, \\ u + \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0, \end{cases} \quad (7.17)$$

avec des conditions aux limites adaptées. L'idée est d'approcher la solution numérique de ce système en utilisant l'espace d'approximation classique des éléments finis mixtes-hybrides, l'espace de Raviart-Thomas d'ordre zéro, RT_0 . Dans ce cas, le système linéaire discret résultant n'est plus symétrique et nous obtenons des résultats numériques mauvais avec quelques distorsions correspondant aux déformations du maillage (voir figure 7.12).

2. Dans le but d'obtenir un système linéaire symétrique, on utilise la formulation mixte équivalente suivante (7.18) :

$$\begin{cases} \vec{g} + P_{\Omega} \vec{\nabla} u = \vec{0}, \\ u + \frac{1}{|\Omega|^2} \vec{\nabla} \cdot (P_{\Omega} \vec{g}) = 0, \end{cases} \quad (7.18)$$

avec des conditions aux limites adaptées. Comme pour le cas précédent, on garde une approximation du type RT_0 . Les résultats numériques obtenus sont désastreux (voir figure 7.13) probablement à cause du fait que l'approximation utilisée n'est pas conforme (cette approximation ne permet notamment pas de garantir la colinéarité de la quantité duale \vec{g} avec le vecteur direction $\vec{\Omega}$).

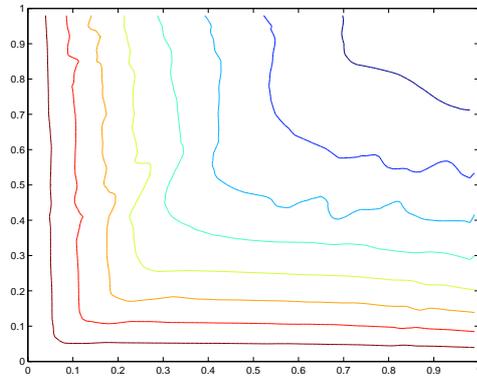


FIG. 7.12 – Isovaleurs du flux angulaire (problème 7.15, cas 1)

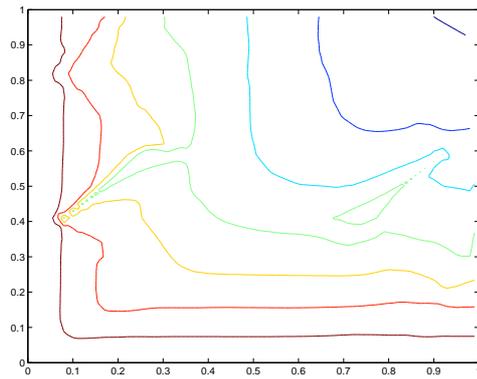


FIG. 7.13 – Isovaleurs du flux angulaire (problème 7.15, cas 2)

3. A présent, on utilise un espace d'approximation conforme (voir chapitre 4) et on améliore cette fois significativement les résultats numériques obtenus (voir figure 7.14).

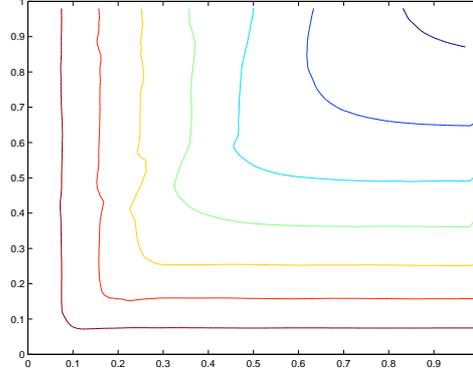


FIG. 7.14 – Isovaleurs du flux angulaire (problème 7.15, cas 3)

Second problème

On considère ici un problème présenté dans la thèse de P.Lesaint [59]. On veut résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x) + u(x) = q(x), \text{ pour } x = (x_1, x_2) \in \mathcal{D} = \left[0, \frac{1}{2}\right]^2, \\ \vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ u = 0, \text{ sur } \partial\mathcal{D}, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0, \\ q(x) = \frac{\Omega_2 x_1 + \Omega_1 x_2}{1 - x_1^2 x_2^2} + \operatorname{arctanh}(x_1 x_2). \end{cases} \quad (7.19)$$

Le second membre q a été choisi pour que la solution exacte du problème (7.19) soit donnée par

$$u(x) = \operatorname{arctanh}(x_1 x_2). \quad (7.20)$$

On cherche à tester la précision du schéma mixte-hybride sur des maillages déformés représentés sur les figures 7.15 et 7.16. On cherche aussi à comparer l'erreur relative du schéma mixte-hybride aux erreurs relatives des schémas aux éléments finis continus et discontinus données dans [59]. On définit l'erreur entre la solution approchée u_h et la solution exacte u par :

$$\text{Erreur} = \left(\sum_{Q_k \in \mathcal{D}_h} (u(G_k) - u_h(G_k)) V_k \right)^{\frac{1}{2}},$$

où G_k désigne le barycentre de la maille Q_k . Dans le tableau 7.21, on donne les valeurs de l'erreur pour le schéma mixte-hybride, le schéma aux éléments finis continus et le schéma aux éléments finis discontinus.

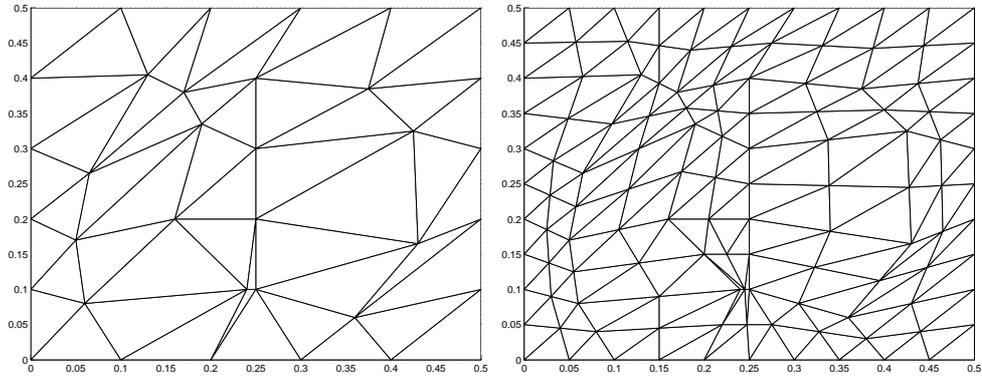


FIG. 7.15 – Maillages déformés 5×5 et 10×10

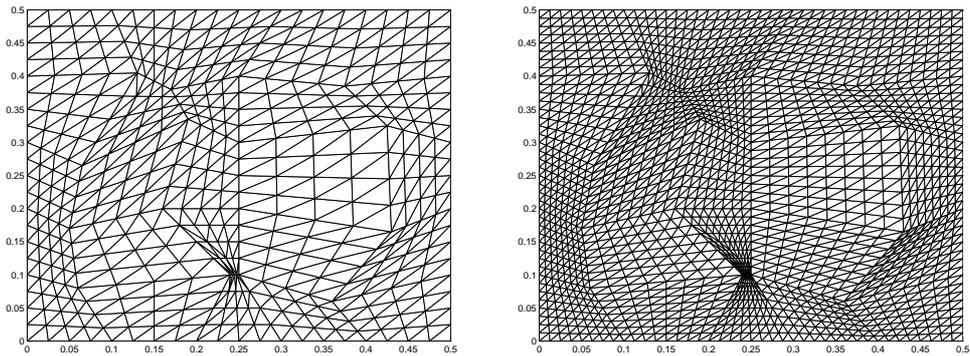
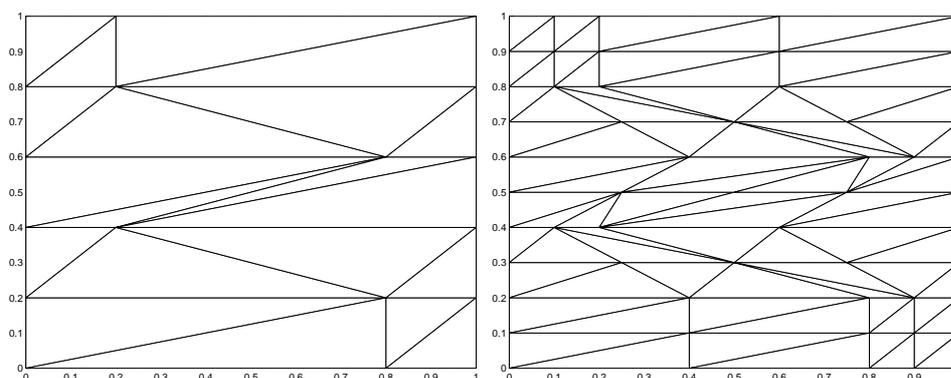
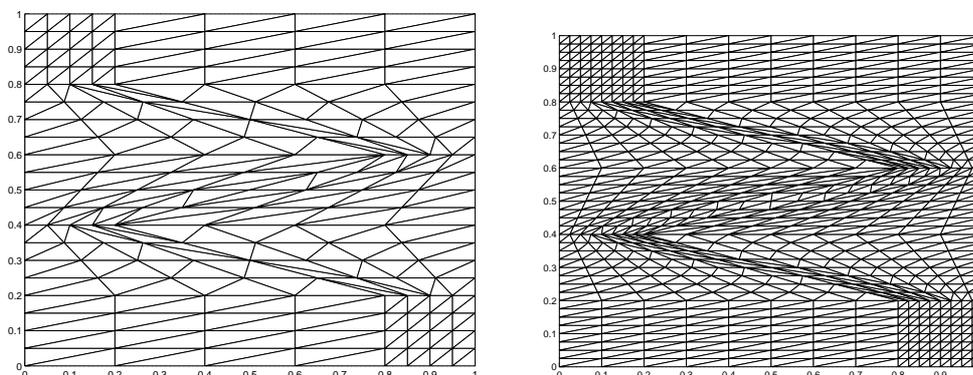


FIG. 7.16 – Maillages déformés 20×20 et 40×40

Maillage	Méthode continue	Méthode discontinue	Méthode mixte-hybride
5×5	0.00444	0.000172	0.00256
10×10	0.00172	0.000057	0.000739
20×20	0.00040	0.000015	0.000209
40×40	0.000010	0.000004	0.0000512

(7.21)

Les résultats obtenus dans le tableau 7.21 montrent que les trois schémas sont d'ordre h^2 . Les résultats montrent que pour un maillage donné, la méthode discontinue est la plus précise. La méthode mixte-hybride est cependant plus précise que la méthode continue. Cependant, les maillages utilisés ici sont en fait peu déformés. Il est connu [59] que lorsque le maillage est très déformés (maillage de Kershaw par exemple) la méthode discontinue est défailante et ne garantit même plus une convergence d'ordre h . Nous testons donc la méthode mixte-hybride sur des maillages de Kershaw représentés sur les figures 7.17 et 7.18 pour montrer que l'on conserve bien un ordre de convergence en h^2 . Le tableau 7.22 montre que la méthode mixte-hybride reste

FIG. 7.17 – Maillages très déformés 2×5 et 4×10 FIG. 7.18 – Maillages très déformés 8×20 et 16×40

précise d'ordre h^2 même sur des maillages très déformés du type Kershaw.

Maillage	Méthode mixte-hybride
2×5	0.00922
4×10	0.00207
8×20	0.000661
16×40	0.000192

(7.22)

7.2.2 Cas d'une source anisotrope : comparaison avec une solution exacte

On s'intéresse ici à un domaine $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 1]$, on notera $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{D}$ et $\vec{\Omega} = (\mu, \sqrt{1 - \mu^2} \cos \theta)$ pour $\mu \in [-1, 1]$ et $\theta \in [0, \pi]$, on notera $\mathcal{V} = [-1, 1] \times [0, \pi]$. On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(x, \vec{\Omega}) + u(x, \vec{\Omega}) = \phi(x) + q(x, \vec{\Omega}), \text{ pour } x \in \mathcal{D}, (\mu, \theta) \in \mathcal{V} \\ u = 0, \text{ sur } \Gamma^-, \\ \phi(x) = \int_{\mathcal{V}} u(x, \mu, \theta) \frac{d\mu d\theta}{2\pi}, \\ q(x, \mu, \theta) = \mu(2x_2 - 1)x_1(x_1 - 1) + \sqrt{1 - \mu^2} \cos \theta(2x_1 - 1)x_2(x_2 - 1). \end{array} \right. \quad (7.23)$$

La solution exacte de ce problème est donnée par

$$\phi(x) = x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2).$$

En utilisant cette solution exacte nous pouvons réaliser des calculs d'erreurs relatives et les comparer avec celles obtenues pour le schéma DSN. On utilise un découpage angulaire S_8 donc des maillages cartésiens uniformes dont nous ferons varier le pas d'espace. La figure 7.19 présente la solution du problème (7.23) obtenue sur un maillage 100×100 par les éléments finis mixtes-hybrides. On calcule donc pour différents pas d'espace l'erreur relative en norme L^2 obtenue pour

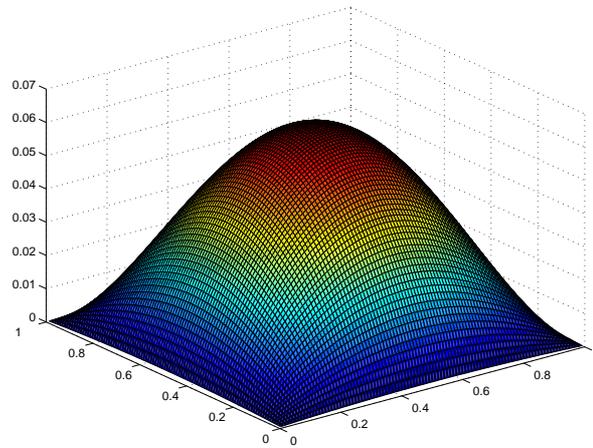


FIG. 7.19 – Flux scalaire

les méthodes DSN et mixtes-hybrides, les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

h	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01
DSN	0.33333	0.085061	0.013516	0.0033754	0.00054017	0.00013528
Mixtes-hybrides	0.33394	0.084916	0.013534	0.0035121	0.00054089	0.00013522

On peut alors tracer la courbe des erreurs relatives en échelle logarithmique sur la figure 7.20.

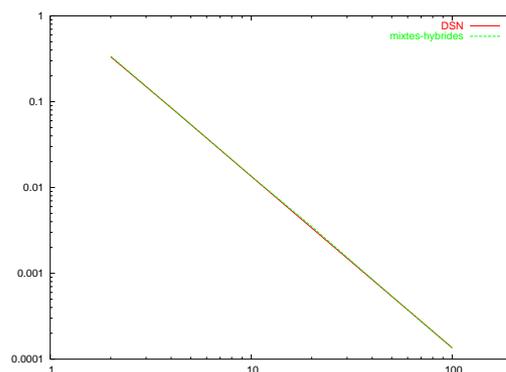


FIG. 7.20 – Erreurs relatives

On observe donc sur la figure 7.20 une erreur relative en $O(h^2)$ comme l'indiquent les pentes des deux droites tracées. Le schéma mixte-hybride semble donc aussi précis que le schéma DSN sur des maillages cartésiens. On a vu au chapitre 5 que cette ordre de convergence n'est possible que si la solution exacte du problème considéré est suffisamment régulière, ce qui est le cas ici. Nous avons testé ce cas test sur différents types de maillages (voir figure 7.21) pour montrer que la solution n'est pas altérée sur des maillages déformés.

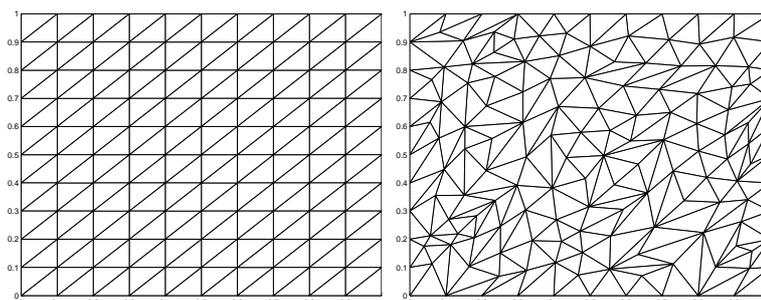


FIG. 7.21 – maillage cartésien et maillage "aléatoire" déformé

7.2.3 ε -problème bidimensionnel et conditions de réflexion spéculaire

On considère un domaine $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 1]$, on note $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{D}$ et $\vec{\Omega} = (\mu, \sqrt{1 - \mu^2} \cos \theta)$ pour $\mu \in [-1, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$, et on note $\mathcal{V} = [-1, 1] \times [0, \pi]$. On considère le problème suivant en

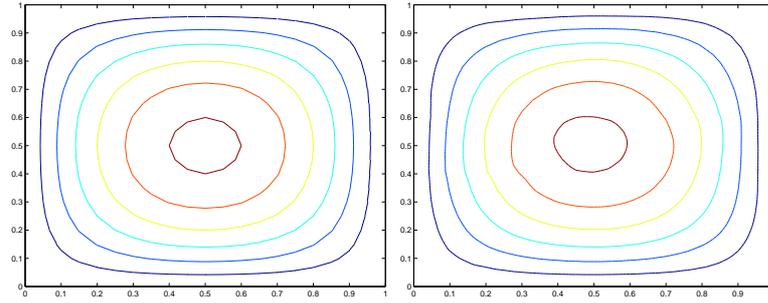


FIG. 7.22 – isovaleurs du flux scalaire pour le problème (7.23) sur les maillages de la figure 7.21

régime diffusif :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + 100u = 100\phi + 0.01, \text{ pour } x \in \mathcal{D}, (\mu, \theta) \in \mathcal{V} \\ u = 0, \text{ sur } \Gamma^- \cap \{x_1 = 0\} \text{ et } \Gamma^- \cap \{x_1 = 1\}, \\ u(\vec{\Omega}) = u(\vec{\Omega} - 2(\vec{n} \cdot \vec{\Omega})\vec{n}), \text{ sur } \Gamma^- \cap \{x_2 = 0\} \text{ et } \Gamma^- \cap \{x_2 = 1\}, \\ \phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{V}} u(x, \mu, \theta) d\mu d\theta. \end{array} \right. \quad (7.24)$$

La figure 7.23 présente la solution du problème (7.24) obtenue sur un maillage cartésien. On

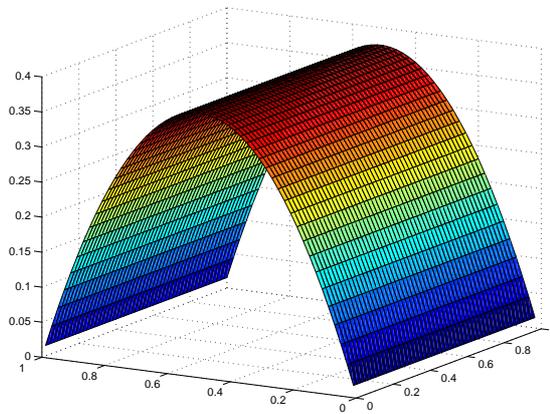


FIG. 7.23 – Solution mixtes-hybrides pour le ε -problème bidimensionnel

observe la symétrie du problème induite par les conditions de réflexion spéculaire. On aboutit aux mêmes conclusions que pour le ε -problème uni-dimensionnel.

Bilan du chapitre 7

On a donc présenté dans ce chapitre des résultats numériques permettant d'illustrer le comportement en régime de diffusion du schéma mixte-hybride. Nous avons tout d'abord illustré la

limite de diffusion du schéma et les problèmes rencontrés à l'interface entre un milieu transparent et un milieu opaque. Nous avons montré la remarquable approximation par le schéma mixte-hybride des phénomènes de couche limite à l'entrée d'un flux anisotrope dans un milieu diffusif. Nous avons aussi illustrés les avantages liés à l'utilisation d'une technique DSA pour l'amélioration du schéma mixte-hybride. Enfin, les résultats numériques présentés sur des maillages très déformés sont très satisfaisants même pour des cas tests extrêmes.

Chapitre 8

Étude du transport entre deux plaques infinies

Sommaire

8.1	Présentation du problème	146
8.2	Asymptotique formelle	148
8.3	Étude probabiliste d'un problème de transport	152
8.3.1	Étude du processus de Markov	152
8.3.2	Preuve du lemme 8.2.1	153
8.4	Asymptotique formelle pour le modèle aux moments P1	157
8.5	Calcul du coefficient de diffusion	160
8.5.1	Expression probabiliste du coefficient de diffusion	160
8.5.2	Cas de la diffusion anormale	162
8.5.3	Cas où $\sigma_t h \gg 1$	164
8.5.4	Simulations Monte-Carlo du coefficient de diffusion	164
8.6	Résultats numériques	167

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un problème de transport entre deux plaques planes parallèles infinies. Nous nous appliquons à retrouver quelques résultats bien connus (G.Bal [13], P. Degond, S. Mancini [43, 44] pour une approche déterministe et H. Babovsky [12], C.Börger, C.Greengard, E.Thomann [22] pour une approche probabiliste) sur l'approximation de diffusion d'un tel problème de transport et nous illustrons ces résultats théoriques par des tests numériques. Nous cherchons ainsi à construire un cas test pertinent pour la validation du code de transport déterministe mixte-hybride. Nous utilisons des arguments probabilistes pour réaliser notre étude théorique. Le but de ce chapitre est d'étudier le comportement asymptotique du problème de transport et d'évolution d'une densité de particules dans un milieu confiné entre deux plaques planes parallèles. Nous cherchons à montrer que lorsque la distance entre ces deux plaques tend vers zéro, nous obtenons un régime diffusif. Le coefficient de diffusion dépend à la fois du noyau de collision du milieu et de la loi de réflexion sur les parois. Nous étudions dans un premier temps ce comportement asymptotique pour le problème général du transport en utilisant un développement asymptotique [19] puis pour le modèle aux moments P1. Nous utilisons des simulations Monte-Carlo pour calculer des coefficients de diffusion et illustrer les résultats théoriques précédents à l'aide d'un cas test numérique.

8.1 Présentation du problème

On considère un domaine $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \times (-h, h)$ où $h \in \mathbb{R}_+^*$.

On s'intéresse au problème d'évolution du transport suivant

$$\begin{aligned} & \partial_t u(t, x, \vec{\Omega}) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(t, x, \vec{\Omega}) + \sigma_t(x, \vec{\Omega}) u(t, x, \vec{\Omega}) \\ &= \int_{\mathcal{S}^2} f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') u(t, x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') + q(x, \vec{\Omega}) \text{ dans } [0, T] \times \mathcal{D} \times \mathcal{S}^2, \end{aligned}$$

avec la condition initiale

$$u(0, x, \vec{\Omega}) = u^0(x) \text{ dans } \mathcal{D} \times \mathcal{S}^2 \quad (8.1)$$

avec les conditions aux limites

$$u(t, x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u(t, x, \vec{\Omega})) \text{ sur } \Gamma^-$$

où

$$\mathcal{R}(u(t, x, \vec{\Omega})) = c_{\mathcal{R}} \int_{\Gamma_+} |\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}(x)| u(t, x, \vec{\Omega}') P(d\nu(\vec{\Omega}')), \quad (8.2)$$

avec

$$\frac{1}{c_{\mathcal{R}}} = \int_{\Gamma_+} |\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}(x)| P(d\nu(\vec{\Omega}')),$$

où $P(d\nu(\vec{\Omega}))$ est une loi de probabilité du type $P(d\nu(\vec{\Omega})) = |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}(x)|^q d\nu(\vec{\Omega})$ avec $q \geq 0$. L'opérateur \mathcal{R} est appelé opérateur de réflexion diffuse. La loi de réflexion diffuse usuellement utilisée dans les problèmes physiques de transport et transfert radiatif est la loi de Lambert ($P(d\nu(\vec{\Omega})) = d\nu(\vec{\Omega})$) donnée par

$$\mathcal{R}(u(t, x, \vec{\Omega})) = 4 \int_{\Gamma_+} |\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}(x)| u(t, x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}'). \quad (8.3)$$

Remarque 8.1.1

Le facteur 4 dans l'expression de l'opérateur \mathcal{R} vient de la renormalisation de l'intégrale, en effet

$$\int_{\Gamma_+} |\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}(x)| d\nu(\vec{\Omega}') = \frac{1}{4}.$$

La position des particules est notée $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}$. Dans ce chapitre on note $\xi = (x_1, x_2)$ et $z = x_3$ de sorte que le problème (8.1) décrit l'évolution d'une population de particules dans un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 délimité par deux plaques planes infinies suivant la coordonnée z ($(\xi, z) \in \mathbb{R}^2 \times (-h, h)$). Nous supposons que

$$\sigma_t(x, \vec{\Omega}) - \int_{\mathcal{S}^2} f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \geq 0 \text{ dans } \mathcal{D} \times \mathcal{S}^2.$$

On décompose alors le coefficient σ_t comme suit :

$$\sigma_t(x, \vec{\Omega}) = \sigma_a(x, \vec{\Omega}) + \sigma_s(x, \vec{\Omega}),$$

où $\sigma_s(x, \vec{\Omega}) = \int_{\mathcal{S}^2} f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}')$. Pour alléger les notations et pour simplifier notre étude, nous considérons dans la suite le cas isotrope où la section efficace de scattering est indépendante des directions angulaires, i.e.

$$f(x, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \equiv \sigma_s(x).$$

Cependant, les résultats que nous énonçons peuvent être étendu pour des sections efficaces de scattering plus complexes. Le régime de diffusion est atteint lorsque le libre parcours moyen est petit en comparaison avec la taille du domaine. Notons ε le libre parcours moyen. Comme dans le chapitre 6, on effectue les changements d'échelle adaptés à l'étude d'un régime de diffusion :

$$\begin{aligned} \sigma_s(x) &\mapsto \frac{1}{\varepsilon} \bar{\sigma}_s(x), & \sigma_a(x, \vec{\Omega}) &\mapsto \varepsilon \bar{\sigma}_a(x, \vec{\Omega}), \\ q(x, \vec{\Omega}) &\mapsto \varepsilon \bar{q}(x, \vec{\Omega}), & t &\mapsto \frac{\bar{t}}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (8.4)$$

où $\bar{\sigma}_s(x)$, $\bar{\sigma}_a(x, \vec{\Omega})$, $\bar{q}(x, \vec{\Omega})$ et \bar{t} sont d'ordre 1 par rapport au libre parcours moyen. Par ailleurs, on suppose que la distance entre les deux plaques planes est de l'ordre du libre parcours moyen. On a donc $2h = O(\varepsilon)$. Pour simplifier, on prendra $h = \varepsilon \bar{h}$ et nous supposons que la donnée initiale est indépendante de z , $u^0(x) \equiv u^0(\xi)$. En prenant en compte tous ces changements de variables et en omettant la notation $\bar{\cdot}$, le problème (8.1) devient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \sigma_s u^\varepsilon + \varepsilon \sigma_a u^\varepsilon \\ = \frac{1}{\varepsilon} \sigma_s \int_{\mathcal{S}^2} u^\varepsilon(t, x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') + \varepsilon q & \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D}^\varepsilon \times \mathcal{S}^2, \\ u(0, x, \vec{\Omega}) = u^0(x) & \text{dans } \mathcal{D} \times \mathcal{S}^2, \\ u^\varepsilon(t, x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u^\varepsilon(t, x, \vec{\Omega})) & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^- \end{array} \right. \quad (8.5)$$

où \mathcal{D}^ε est le domaine $\mathbb{R}^2 \times (-\varepsilon h, \varepsilon h)$ et Γ_ε^- est la frontière correspondante.

On note $\vec{\Omega}_\xi = (\Omega_1, \Omega_2)$, la composante vectorielle de la vitesse parallèle aux deux plaques. Ainsi, nous décomposons l'opérateur vectoriel gradient (en espace) comme suit :

$$\vec{\nabla} = (\vec{\nabla}_\xi, \partial_z) = (\vec{\nabla}_\xi, \partial_{x_3}),$$

où

$$\vec{\nabla}_\xi = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}).$$

On effectue alors le changement d'échelle suivant pour travailler sur un domaine indépendant de ε

$$z \mapsto \frac{\bar{z}}{\varepsilon}$$

de sorte que le problème (8.5) devienne

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \vec{\Omega}_\xi \cdot \vec{\nabla}_\xi u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \Omega_z \partial_z u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \sigma_s u^\varepsilon + \varepsilon \sigma_a u^\varepsilon \\ = \frac{1}{\varepsilon} \sigma_s \int_{\mathcal{S}^2} u^\varepsilon(t, x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') + \varepsilon q & \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D} \times \mathcal{S}^2 \\ u(0, x, \vec{\Omega}) = u^0(x) & \text{dans } \mathcal{D} \times \mathcal{S}^2, \\ u^\varepsilon(t, x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u^\varepsilon(t, x, \vec{\Omega})) & \text{sur } \Gamma^-. \end{array} \right. \quad (8.6)$$

Le domaine $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \times (-h, h)$ est cette fois indépendant de ε . Dans la suite, nous montrons tout d'abord que la solution u^ε du problème (8.6) converge, lorsque ε tend vers zéro, vers la solution d'une équation de diffusion en ξ dont le coefficient de diffusion dépend de l'opérateur de

réflexion \mathcal{R} . Ce résultat est donc différent du résultat standard d'approximation par la diffusion d'un problème de transport donné par le théorème 6.2.1. Il est alors intéressant de savoir si d'autres modèles simplifiés utilisés pour décrire le transport permettent de retrouver ce résultat, en particulier pour les modèles aux moments P1 et leurs dérivés non linéaire (diffusion à flux limité par exemple).

8.2 Asymptotique formelle

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à démontrer un résultat d'approximation par la diffusion du problème (8.6) en utilisant un développement asymptotique de type Hilbert. Pour établir la preuve de ce théorème, il est nécessaire d'étudier et de caractériser les solutions du problème suivant

$$\begin{cases} \Omega_z \partial_z u + \sigma_s u - \sigma_s \int_{\mathcal{S}^2} u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') = q(x, \vec{\Omega}) & \text{dans } (0, 1) \times \mathcal{S}^2 \\ u(x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u(x, \vec{\Omega})) & \text{sur } \Gamma^-. \end{cases} \quad (8.7)$$

Nous commençons donc par donner un lemme établissant un critère d'existence et d'unicité de solution pour (8.7), nous repoussons cependant la preuve (très technique) de ce lemme au paragraphe suivant. Nous présentons ensuite un second résultat permettant de caractériser à l'aide d'éléments probabilistes le tenseur de diffusion associé. Dans la suite de ce chapitre, nous notons $d\pi(z, \vec{\Omega})$ la mesure définie par

$$d\pi(z, \vec{\Omega}) = \frac{d\vec{\Omega}}{4\pi} \frac{dz}{2h} = d\nu(\vec{\Omega}) \frac{dz}{2h}.$$

Pour fixer les idées, on introduit pour tout $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}^2$ et tout $z \in \mathcal{A} = (-h, h)$, le processus de Markov de sauts $(\vec{\Omega}_t, z_t)$ sur $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$.

En $t = 0$, on prend :

$$\begin{cases} z_0 = z, \\ \vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}, \end{cases} \quad (8.8)$$

pour $t > 0$, l'évolution est décrite et définie par

$$\partial_t z_t = -\mu_t,$$

où μ_t est la composante du vecteur $\vec{\Omega}_t$ suivant z .

Nous verrons (paragraphe suivant) que le processus $(\vec{\Omega}_t, z_t)$ est un processus de Markov de sauts dont le générateur infinitésimal agissant sur u (mesurable et bornée) est donné par :

$$\mathcal{L}u(z, \vec{\Omega}) = -\Omega_z \partial_z u + \sigma_s Qu, \quad (8.9)$$

et, pour $\vec{\Omega} \in \Gamma^-$

$$u(x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u(x, \vec{\Omega})) \text{ en } z = -h \text{ ou } h,$$

avec $Qu = \int_{\mathcal{S}^2} u d\nu(\vec{\Omega}) - u$. On commence donc par énoncer le

Lemme 8.2.1

Le problème :

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u = q & \text{dans } (-h, h) \times \mathcal{S}^2 \\ u = \mathcal{R}(u(z, \vec{\Omega})) & \text{sur } \Gamma^- \end{cases} \quad (8.10)$$

admet une unique solution de moyenne nulle (pour la mesure $d\pi(z, \vec{\Omega})$) si et seulement si

$$\int_{-h}^h \int_{\mathcal{S}^2} q \, d\pi(z, \vec{\Omega}) = 0,$$

et

$$\int_{-h}^h \int_{\mathcal{S}^2} \mathcal{R}(u(z, \vec{\Omega})) \, d\pi(z, \vec{\Omega}) = 0.$$

Cette solution peut s'écrire sous la forme

$$u(z, \vec{\Omega}) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[q(z_t, \vec{\Omega}_t) / \vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}, z_0 = z] dt$$

où \mathbb{E} représente l'espérance mathématique.

En particulier, le noyau de l'opérateur \mathcal{L} (associé aux conditions aux limites) est constitué des fonctions constantes (pour la mesure $d\pi(z, \vec{\Omega})$), i.e. si

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u = 0 & \text{dans } (-h, h) \times \mathcal{S}^2, \\ u(x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u(x, \vec{\Omega})) & \text{sur } \Gamma^-, \end{cases} \quad (8.11)$$

alors

$$u \equiv u(t, \xi).$$

Dans ce paragraphe, nous admettons ce lemme, ce qui nous permet d'énoncer et de démontrer le théorème suivant :

Théorème 8.2.1

Sous les hypothèses introduites précédemment, la solution $u^\varepsilon(t, x, \vec{\Omega})$ du problème de transport (8.6) converge formellement lorsque ε tend vers zéro vers la solution $u_0(t, \xi)$ de l'équation de diffusion suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u_0(t, \xi) + \sigma_a u_0(t, \xi) - \vec{\nabla}_\xi \cdot D \vec{\nabla}_\xi u_0(t, \xi) = q(\xi) & \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^2, \\ \text{où } u_0(0, \xi) = u^0(\xi) \end{cases} \quad (8.12)$$

D représente la matrice de diffusion ($D = D(\xi) = \{d_{ij}\}_{i,j \in \{x,y\}}$) qui est définie positive.

DÉMONSTRATION - En suivant les conventions introduites précédemment, l'opérateur $\vec{\Omega} \cdot \nabla$ peut se décomposer en $\Omega_z \partial_z + \vec{\Omega}_\xi \cdot \vec{\nabla}_\xi$ où $\vec{\Omega}_\xi = (\Omega_1, \Omega_2)$.

Dans le but d'exhiber le comportement asymptotique de la solution u^ε du problème (8.6) lorsque ε tend vers zéro, on considère le développement asymptotique de Hilbert suivant,

$$u^\varepsilon(t, x, \vec{\Omega}) = u_0(t, x, \vec{\Omega}) + \varepsilon u_1(t, x, \vec{\Omega}) + \varepsilon^2 u_2(t, x, \vec{\Omega}) + o(\varepsilon^2). \quad (8.13)$$

On introduit alors le développement (8.13) dans (8.6). On considère alors toutes les expressions d'une même puissance de ε pour obtenir trois relations. Tout d'abord, on obtient à l'ordre zéro

$$\begin{cases} \Omega_z \partial_z u_0 + \sigma_s u_0 = \sigma_s \int_{\mathcal{S}^2} u_0(t, x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') & \text{dans } \mathcal{D} \times \mathcal{S}^2, \\ u_0(t, x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u_0(t, x, \vec{\Omega})) & \text{sur } \Gamma^-. \end{cases} \quad (8.14)$$

En utilisant le lemme 8.3.3 appliqué au problème (8.14), on montre que u_0 ne dépend que de x_1 et x_2 . La seconde relation obtenue à l'aide de (8.13) s'écrit

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_\xi \cdot \vec{\nabla}_\xi u_0 + \Omega_z \partial_z u_1 + \sigma_s u_1 = \sigma_s \int_{\mathcal{S}^2} u_1(t, x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') & \text{dans } \mathcal{D} \times \mathcal{S}^2, \\ u_1(t, x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u_1(t, x, \vec{\Omega})) & \text{sur } \Gamma^-. \end{cases} \quad (8.15)$$

soit

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u_1 = q_1 & \text{dans } \mathcal{D} \times \mathcal{S}^2, \\ u_1(t, x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u_1(t, x, \vec{\Omega})) & \text{sur } \Gamma^-. \end{cases} \quad (8.16)$$

où $q_1 = \vec{\Omega}_\xi \cdot \vec{\nabla}_\xi u_0$. On vérifie que les hypothèses du lemme sont vérifiées (la condition de compatibilité), i.e.

$$\int_{-h}^h \int_{\mathcal{S}^2} q_1 dz d\nu(\vec{\Omega}) = \int_{-h}^h \int_{\mathcal{S}^2} \vec{\Omega}_\xi \cdot \vec{\nabla}_\xi u_0 dz d\nu(\vec{\Omega}) = 0$$

avant d'appliquer les résultats du lemme 8.3.3 au problème (8.16). Le problème (8.16) admet donc une unique solution de moyenne nulle telle que

$$u_1(z, \vec{\Omega}) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[q_1(z_t, \vec{\Omega}_t) / z_0 = z, \vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}] dt. \quad (8.17)$$

Il existe alors une fonction $\vec{C}(z, \vec{\Omega}) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\vec{\Omega}_t / z_0 = z, \vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}] dt$ telle que

$$u_1(t, x, \vec{\Omega}) = -\vec{C}(z, \vec{\Omega}) \cdot \vec{\nabla}_\xi u_0.$$

La troisième relation provenant de (8.13) s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u_0 + \sigma_a u_0 + \vec{\Omega}_\xi \cdot \vec{\nabla}_\xi u_1 + \Omega_z \partial_z u_2 + \sigma_s u_2 = \sigma_s \int_{\mathcal{S}^2} u_2(t, x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') + q & \text{dans } \mathcal{D} \times \mathcal{S}^2 \\ u_2(t, x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u_2(t, x, \vec{\Omega})) & \text{sur } \Gamma^-. \end{cases} \quad (8.18)$$

Le problème suivant admet donc une solution si la condition de compatibilité suivante est vérifiée

$$\int_{-h}^h \int_{\mathcal{S}^2} \left(\partial_t u_0 + \sigma_a u_0 + \vec{\Omega}_\xi \cdot \vec{\nabla}_\xi u_1 - q \right) dz d\nu(\vec{\Omega}) = 0. \quad (8.19)$$

Cette condition de compatibilité associée à la relation (8.17) nous donne l'équation de diffusion du théorème vérifiée par u_0 . Il est possible de montrer que ce développement formel converge (au sens où le terme $O(\varepsilon^2)$ est bien d'ordre ε^2 , voir par exemple E.W.Larsen, J.B.Keller [53]). ■

La matrice de diffusion est donnée par le théorème suivant :

Théorème 8.2.2

Soit $(z_t, \vec{\Omega}_t = (\Omega_t^1, \Omega_t^2, \mu_t))$ le processus de Markov dans $((-h, h) \times \mathcal{S}^2)$ défini par :

- $z_0 \in (-h, h)$.
- $\vec{\Omega}_0$ est une variable aléatoire avec une distribution uniforme sur la sphère \mathcal{S}^2 .
- $\partial_t z_t = -\mu_t$.
- Entre les deux plaques, $\vec{\Omega}_t$ est un processus de saut dont le temps entre deux événements est une distribution exponentielle de paramètre σ , pour un choc entre les deux plaques, $\vec{\Omega}_t$ est ensuite redistribué uniformément sur la sphère unité \mathcal{S}^2 .
- Lors d'une collision avec les plaques μ_t est distribué suivant la loi de réflexion diffuse aux parois.

Alors, la matrice de diffusion du processus est donné pour tous (i, j) dans $\{1, 2\}$ par

$$d_{ij} = \int_0^\infty \mathbb{E} \Omega_0^i \Omega_t^j dt. \quad (8.20)$$

La matrice de diffusion sera étudiée plus en détail au paragraphe 8.5.1.

DÉMONSTRATION - En utilisant le théorème 8.2.1, sa preuve et les mêmes notations, on écrit l'opérateur de diffusion :

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \int_{\mathcal{S}^2} \vec{\Omega}_\xi \cdot \vec{\nabla}_\xi (\vec{C}(z, \vec{\Omega}) \cdot \vec{\nabla}_\xi) d\pi(\vec{\Omega}, z) &= \int_{-h}^h \int_{\mathcal{S}^2} \int_0^{+\infty} \vec{\Omega}_\xi \cdot \vec{\nabla}_\xi \mathbb{E}(\vec{\Omega}_{\xi s} / \vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}, z_0 = z) \cdot \vec{\nabla}_\xi ds d\pi(\vec{\Omega}, z) \\ &= \int_{-h}^h \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(\vec{\Omega}_{\xi 0} \vec{\nabla}_\xi \cdot \vec{\Omega}_{\xi s} / z_0 = z) \cdot \vec{\nabla}_\xi ds dz \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(\vec{\Omega}_{\xi 0} \nabla_\xi \cdot \vec{\Omega}_{\xi s}) ds \cdot \nabla_\xi \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \int \vec{\Omega}_\xi \cdot \vec{\nabla}_\xi (\vec{C}(\Omega, z) \cdot \vec{\nabla}_\xi) u_0(x, y, t) d\pi(\vec{\Omega}, z) &= \\ &= \left(\sum_{i, j \in \{1, 2\}} d_{ij} \partial_{x_i x_j}^2 \right) u_0(x, y, t) \end{aligned}$$

où, pour $i, j \in \{1, 2\}$:

$$d_{ij} = \int_0^\infty \mathbb{E} \Omega_0^i \Omega_t^j dt \quad (8.21)$$

Cela termine la preuve du théorème. ■

Nous avons donc montré le résultat d'approximation par la diffusion 8.2.1 et caractérisé le coefficient de diffusion associé dans le théorème 8.2.2 en admettant le lemme 8.3.3. Dans le paragraphe suivant, nous présentons la preuve du lemme 8.3.3 en nous appuyant sur l'étude probabiliste (voir E.Pardoux, R.Sentis [52] et A.Bensoussan, J.L.Lions, G.Papanicolaou [19]) du processus de transport associé au problème (8.7).

8.3 Étude probabiliste d'un problème de transport

Dans cette section, on se propose d'étudier le problème suivant

$$\begin{cases} \Omega_z \partial_z u + \sigma_s u - \sigma_s \int_{\mathcal{S}^2} u(x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') = q(x, \vec{\Omega}) & \text{dans } (0, 1) \times \mathcal{S}^2 \\ u(x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u(x, \vec{\Omega})) & \text{sur } \Gamma^-. \end{cases} \quad (8.22)$$

Pour simplifier, nous utilisons dans ce paragraphe l'opérateur de réflexion diffuse en loi de Lambert donné par (8.3), mais tous les résultats que nous présentons se généralisent à des opérateurs de réflexions génériques du type (8.2). Nous allons montrer qu'une alternative de Fredholm est valide pour ce problème et nous allons ainsi caractériser ses solutions. Pour ce faire, nous utilisons des arguments probabilistes en introduisant un processus de Markov de transport dont le générateur infinitésimal correspond au problème (8.22). Nous concluons en utilisant des résultats présentés par A.Bensoussan, J.L.Lions, G.Papanicolaou [19] en suivant notamment le même cheminement que celui utilisé par J.F.Clouët dans [38]. L'étude de ce problème est nécessaire pour mener à bien l'analyse asymptotique du problème (8.6) présentée dans le paragraphe précédent. Notons que ce résultat peut être obtenu en utilisant la théorie classique des opérateurs (voir G.Bal [15]).

8.3.1 Étude du processus de Markov

Pour tout $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}^2$ et tout $z \in \mathcal{A} = (-h, h)$, on commence par définir le processus de Markov de sauts $(\vec{\Omega}_t, z_t)$ sur $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$.

En $t = 0$, on prend :

$$\begin{cases} z_0 = z, \\ \vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}, \end{cases} \quad (8.23)$$

pour $t > 0$, l'évolution est décrite et définie par

$$\partial_t z_t = -\mu t.$$

On peut écrire le lemme suivant :

Lemme 8.3.1

$(\vec{\Omega}_t, z_t)$ est un processus de Markov de sauts dont le générateur infinitésimal agissant sur u (mesurable et bornée) est donné par :

$$\mathcal{L}u(z, \vec{\Omega}) = -\Omega_z \partial_z u + \sigma_s Qu \text{ pour } (z, \vec{\Omega}) \in \mathcal{A} \times \mathcal{S}^2, \quad (8.24)$$

et, pour $\vec{\Omega} \in \Gamma^-$

$$u(x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u(x, \vec{\Omega})) \text{ en } z = -h \text{ ou } h.$$

avec $Qu = \int_{\mathcal{S}^2} u d\nu(\vec{\Omega}) - u$.

DÉMONSTRATION - Voir E.Pardoux et R.Sentis [52]. ■

Dans ce paragraphe, nous utilisons les deux lemmes suivants. Le premier identifie la mesure invariante pour le processus de Markov, le second montre que l'opérateur \mathcal{L} associé aux conditions aux limites (8.2) satisfait à l'alternative de Fredholm.

Lemme 8.3.2

La mesure de probabilité $d\pi(\vec{\Omega}, z) = \frac{d\nu(\vec{\Omega})}{4\pi} \times \frac{dz}{2h}$ est invariante pour le processus $(\vec{\Omega}_t, z_t)$.

DÉMONSTRATION - En effet, pour toute fonction intégrable u , on a

$$\int_{\mathcal{S}^2} Qu(\vec{\Omega}, z) d\nu(\vec{\Omega}) = 0.$$

De plus, en utilisant les valeurs de u sur les plaques, on peut calculer (ici dans le cas d'une loi de Lambert)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}^2} \int_{-h}^h \Omega_z \partial_z u(z, \vec{\Omega}) d\pi(\vec{\Omega}, z) &= \int_{\mathcal{S}^2} \Omega_z [u(h, \vec{\Omega}) - u(-h, \vec{\Omega})] d\nu(\vec{\Omega}), \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mu [u(h) - u(-h)] d\mu d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^1 \mu [u(h) - u(-h)] d\mu d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 \mu \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^1 \mu' (u(h) - u(-h)) d\mu' d\theta' \right] d\mu d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^1 \mu [u(h) - u(-h)] d\mu d\theta + 2\pi \times \left(-\frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^1 \mu' (u(h) - u(-h)) d\mu' d\theta' \right] \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré la propriété d'invariance pour la mesure $d\pi(z, \vec{\Omega})$. ■

Il convient de prouver la propriété d'ergodicité du processus. C'est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant en proposant la démonstration du lemme 8.3.3.

8.3.2 Preuve du lemme 8.2.1

Nous commençons par introduire la notation suivante, pour tout $A \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{A}$, $\pi(A) = \int_{\mathcal{S}^2 \times \mathcal{A}} \mathbb{I}_A(\vec{\Omega}, z) d\pi(\vec{\Omega}, z)$ où \mathbb{I}_A représente l'indicatrice de l'ensemble A . Pour montrer l'ergodicité du processus $(\vec{\Omega}_t, z_t)$, il suffit de montrer la propriété de Doeblin (voir A.Bensoussan, J.L.Lions, G.Papanicolaou [19]). Nous pouvons énoncer et présenter la démonstration du lemme suivant (admis au paragraphe précédent)

Lemme 8.3.3

Le problème :

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u = q & \text{dans } (-h, h) \times \mathcal{S}^2, \\ u(x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u(z, \vec{\Omega})) & \text{sur } \Gamma^-. \end{cases} \quad (8.25)$$

admet une unique solution de moyenne nulle (pour la mesure $d\pi(z, \vec{\Omega})$) si et seulement si

$$\int_{-h}^h \int_{\mathcal{S}^2} q d\pi(z, \vec{\Omega}) = 0,$$

et

$$\int_{-h}^h \int_{\mathcal{S}^2} \mathcal{R}(u(z, \vec{\Omega})) d\pi(z, \vec{\Omega}).$$

Et on a

$$u(z, \vec{\Omega}) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[q(z_t, \vec{\Omega}_t) / \vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}, z_0 = z] dt,$$

où \mathbb{E} représente l'espérance mathématique.

En particulier, le noyau de l'opérateur \mathcal{L} (associé aux conditions aux limites) est constitué des fonctions constantes (pour la mesure $d\pi(z, \vec{\Omega})$ i.e.

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u = 0 & \text{dans } (-h, h) \times \mathcal{S}^2 \\ u(x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u(x, \vec{\Omega})) & \text{sur } \Gamma^-. \end{cases} \quad (8.26)$$

alors

$$u \equiv u(t, \xi).$$

DÉMONSTRATION - Pour démontrer ce lemme, nous commençons par montrer l'ergodicité du processus $(\vec{\Omega}_t, z_t)$, nous nous appuyons sur un résultat présenté dans [19], il est suffisant de montrer que la condition dite de Doeblin est satisfaite, i.e.,

$$\begin{aligned} \exists t_0 > 0, \exists \delta > 0, \forall (\vec{\Omega}, z) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{A}, \forall A \subset \mathcal{S}^2 \times \mathcal{A} \\ \mathbb{P}((\vec{\Omega}_{t_0}, z_{t_0}) \in A / \vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}, z_0 = z) \geq \delta \pi(A) \end{aligned}$$

où $\pi(A)$ représente le volume de A pour la mesure $d\pi(\vec{\Omega}, z)$. La démonstration du lemme est très technique. L'idée est d'introduire deux temps de chocs pour faire apparaître explicitement la mesure d'un pavé $A \subset \mathcal{S}^2 \times \mathcal{A}$. On cherche donc à minorer la probabilité $\mathbb{P}((\vec{\Omega}_{t_0}, z_{t_0}) \in A / \vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}, z_0 = z)$ pour montrer l'ergodicité du processus $(\vec{\Omega}_t, z_t)$. Considérons le sous-ensemble A de $\mathcal{S}^2 \times (-h, h)$, on peut écrire $A = B \times C$ où $B = [0, 2\pi] \times [\mu_1, \mu_2] \subset \mathcal{S}^2$ et $C = [z_1, z_2] \subset (-h, h)$. On note $\sigma \equiv \sigma_s$ le temps de la preuve. Notons p la probabilité que l'on cherche à minorer :

$$p = \mathbb{P}((\vec{\Omega}_{t_0}, z_{t_0}) \in B \times C / \vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}, z_0 = z).$$

Soit alors T_1 , le temps pour lequel se produit la première interaction pour le processus sachant que l'on part de $(\vec{\Omega}_0, z_0)$ (collision avec les parois ou non). Pour simplifier les notations, on notera

$$\mathbb{P}_0((\vec{\Omega}_{t_0}, z_{t_0}) \in B \times C) = \mathbb{P}((\vec{\Omega}_{t_0}, z_{t_0}) \in B \times C / \vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}, z_0 = z)$$

la probabilité conditionnée au départ du processus de $\vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}$ et de $z_0 = z$, on supposera au départ que $0 < \mu_0 < \mu_1$ et $0 < z_0 < z_1$. On a alors :

$$\begin{aligned} p = \mathbb{P}_0((\vec{\Omega}_{t_0}, z_{t_0}) \in B \times C) &\geq \mathbb{P}_0((\vec{\Omega}_{t_0}, z_{t_0}) \in B \times C / T_1 \leq t_0) \mathbb{P}_0(T_1 \leq t_0) \\ &\geq \int_0^{t_0} \mathbb{P}_0((\vec{\Omega}_{t_0}, z_{t_0}) \in B \times C / T_1 = s) \mathbb{P}_0(T_1 = s) ds. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Notons que l'on peut calculer $\mathbb{P}_0(T_1 = s)$ en décomposant l'événement " $T_1 = s$ " suivant que l'interaction soit une collision avec la paroi ou non :

$$\mathbb{P}_0(T_1 = s) = \mathbb{P}_0(T_1 = s, \text{ choc}) + \mathbb{P}_0(T_1 = s, \text{ collision}).$$

Le terme $\mathbb{P}_0(T_1 = s, choc)$ représente la probabilité que l'événement " $T_1 = s$ " ait lieu et qu'il y ait un choc au temps T_1 (on notera cet événement $T_1 = T_{choc}$).

$$\mathbb{P}_0(T_1 = s, choc) = \mathbb{P}_0(T_1 = s/T_1 = T_{choc})\mathbb{P}_0(T_1 = T_{choc}).$$

Si au temps T_1 la particule subit un choc, alors

$$\mathbb{P}_0(T_1 = s/T_1 = T_{choc}) = \sigma e^{-\sigma s}$$

et

$$\mathbb{P}_0(T_1 = T_{choc}) = 1 - \mathbb{P}_0(T_1 = T_{collision}) = \left(1 - e^{-\sigma \frac{h-z_0}{\mu_0}}\right).$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{P}_0(T_1 = s/T_1 = T_{collision}) = \delta\left(s - \frac{h-z_0}{\mu_0}\right)$$

en effet, au temps s une particule partant de z_0 dans la direction verticale μ_0 a parcouru la distance $\mu_0 s$, elle arrive donc en $z = h$ si et seulement si $\mu_0 s = h - z_0$. On a donc :

$$\mathbb{P}_0(T_1 = s) = \sigma e^{-\sigma s} \left(1 - e^{-\sigma \frac{h-z_0}{\mu_0}}\right) + \delta\left(s - \frac{h-z_0}{\mu_0}\right) e^{-\sigma \frac{h-z_0}{\mu_0}}.$$

Nous cherchons à minorer la probabilité p , nous n'allons donc considérer que le cas pour lequel il se produit un choc au temps T_1 . Cette dernière hypothèse induit la minoration suivante

$$\mathbb{P}_0((\vec{\Omega}_{t_0}, z_{t_0}) \in B \times C/T_1 = s)\mathbb{P}_0(T_1 = s) \geq \mathbb{P}_0((\vec{\Omega}_{t_0}, z_{t_0}) \in B \times C/T_1 = s, choc)\mathbb{P}_0(T_1 = s, choc)$$

La relation (8.27) peut être réécrite en utilisant la nouvelle direction $\vec{\Omega}_{T_1}$ du processus en utilisant la stationnarité du processus :

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0} \mathbb{P}_0((\vec{\Omega}_{t_0}, z_{t_0}) \in B \times C/T_1 = s)\mathbb{P}_0(T_1 = s) ds \\ & \geq \int_0^{t_0} \int_{\mathcal{S}^2} \mathbb{P}_0((\vec{\Omega}_{t_0-s}, z_{t_0-s}) \in B \times C/\vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}_{T_1}, z_0 = z_{T_1}) \frac{d\vec{\Omega}_{T_1}}{4\pi} \mathbb{P}_0(T_1 = s) ds. \end{aligned}$$

Soit alors T_2 le second temps de choc du processus, on indicera à présent la probabilité conditionnée par $\vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}_{T_1}, z_0 = z_{T_1}$ à l'aide de l'indice 1 et, comme pour T_1 , nous nous placerons dans le cas d'un choc au temps T_2 . L'introduction de ce second temps de choc est nécessaire pour faire intervenir explicitement la mesure $\pi(A)$ de A dans le minorant de p .

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}_0((\vec{\Omega}_{t_0}, z_{t_0}) \in B \times C) \\ & \geq \\ & \int_0^{t_0} \int_{\mathcal{S}^2} \int_s^{t_0} \int_{\mathcal{S}^2} \mathbb{P}_1((\vec{\Omega}_{t_0-u}, z_{t_0-u}) \in B \times C/T_2 = u, choc) \\ & \quad \times \mathbb{P}_1(T_2 = u, choc)\mathbb{P}_0(T_1 = s, choc) \frac{d\vec{\Omega}_{T_2}}{4\pi} du \frac{d\vec{\Omega}_{T_1}}{4\pi} ds. \end{aligned}$$

Notons que la probabilité $\mathbb{P}_1((\vec{\Omega}_{t_0-u}, z_{t_0-u}) \in B \times C/T_2 = u, choc)$ est égal à la probabilité que t_0 appartienne à l'intervalle $[T_2 + \frac{z_1 - (z_0 + \mu_0 s + \mu_{T_1}(u-s))}{\mu_{T_2}}, T_2 + \frac{z_2 - (z_0 + \mu_0 s + \mu_{T_1}(u-s))}{\mu_{T_2}}]$ pourvu qu'il

n'y ait pas de changement de direction avant le temps $T_2 + \frac{z_2 - (z_0 + \mu_0 s + \mu T_1 (u-s))}{\mu T_2}$. On introduit enfin un troisième temps (de contrôle cette fois) T_3 pour s'assurer que l'on reste bien dans la cible A entre les temps T_2 et t_0 , nous obtenons donc une nouvelle minoration de la probabilité p . Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
 p &\geq \\
 &\int_0^{t_0} \int_{S^2} \int_s^{t_0} \int_{S^2} \mathbb{P}_2(T_3 > T_2 + \frac{z_2 - z_{T_2}}{\mu T_2}) \mathbb{I}_{\{t_0 \in [u + \frac{z_1 - (z_0 + \mu_0 s + \mu T_1 (u-s))}{\mu T_2}, u + \frac{z_2 - (z_0 + \mu_0 s + \mu T_1 (u-s))}{\mu T_2}]\}} \\
 &\quad \times \mathbb{P}_1(T_2 = u, choc) \mathbb{P}_0(T_1 = s, choc) \frac{d\vec{\Omega}_{T_2}}{4\pi} du \frac{d\vec{\Omega}_{T_1}}{4\pi} ds \\
 &\geq \\
 &\int_0^{t_0} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_s^{t_0} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mathbb{P}_2(T_3 > T_2 + \frac{z_2 - z_{T_2}}{\mu T_2}) \mathbb{I}_{\{t_0 \in [u + \frac{z_1 - (z_0 + \mu_0 s + \mu(u-s))}{\mu'}, u + \frac{z_2 - (z_0 + \mu_0 s + \mu(u-s))}{\mu'}]\}} \\
 &\quad \times \mathbb{P}_1(T_2 = u, choc) \mathbb{P}_0(T_1 = s, choc) \frac{d\mu'}{2} du \frac{d\mu}{2} ds \\
 &\geq \\
 &\int_0^{t_0} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_s^{t_0} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{u + \frac{z_2 - z_{T_2}}{\mu T_2}}^{\infty} \mathbb{P}_2(T_3 = v) dv \mathbb{I}_{\{t_0 \in [u + \frac{z_1 - (z_0 + \mu_0 s + \mu(u-s))}{\mu'}, u + \frac{z_2 - (z_0 + \mu_0 s + \mu(u-s))}{\mu'}]\}} \\
 &\quad \times \mathbb{P}_1(T_2 = u, choc) \mathbb{P}_0(T_1 = s, choc) \frac{d\mu'}{2} du \frac{d\mu}{2} ds.
 \end{aligned}$$

Nous allons à présent exprimer explicitement les différentes probabilités, on obtient :

$$\begin{aligned}
 p &\geq \\
 &\int_0^{t_0} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_s^{t_0} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{u + \frac{z_2 - z_{T_2}}{\mu T_2}}^{\infty} \sigma e^{-\sigma v} dv \mathbb{I}_{\{t_0 \in [u + \frac{z_1 - (z_0 + \mu_0 s + \mu(u-s))}{\mu'}, u + \frac{z_2 - (z_0 + \mu_0 s + \mu(u-s))}{\mu'}]\}} \\
 &\quad \times \sigma e^{-\sigma u} \left(1 - e^{-\sigma \frac{h - z_{T_1}}{\mu T_1}}\right) \sigma e^{-\sigma s} \left(1 - e^{-\sigma \frac{h - z_0}{\mu_0}}\right) \frac{d\mu'}{2} du \frac{d\mu}{2} ds.
 \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{P}_1(T_2 = u, T_2 = T_{choc}) = \sigma e^{-\sigma u} \left(1 - e^{-\sigma \frac{h - z_{T_1}}{\mu T_1}}\right)$ et, rappelons que l'on est parti de $h > z_1 > z_0 > 0$ et avec $1 > \mu_0 > 0$, la quantité $h - z_{T_1} = h - z_0 - \mu_0 T_1$ est donc positive. On rappelle que $z_{T_1} = z + \mu T_1$, de même, $z_{T_2} = z_{T_1} + \mu T_1 T_2$. On peut donc écrire

$$\frac{h - z_{T_1}}{\mu T_1} \geq h - z_{T_1} = h - z_0 - \mu_0 T_1 = h - z_0 - \mu_0 s \geq h - z_0 - \mu_0 t_0.$$

on déduit la minoration suivante :

$$1 - e^{-\sigma \frac{h - z_{T_1}}{\mu T_1}} \geq 1 - e^{-\sigma(h - z_0 - \mu_0 t_0)}. \quad (8.28)$$

Au total, on obtient donc une minoration de p :

$$p = \mathbb{P}_0((\Omega_{t_0}, z_{t_0}) \in B \times C)$$

$$\begin{aligned} &\geq \int_0^{t_0} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_s^{t_0} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{u+\frac{z_2-zT_2}{\mu T_2}}^{\infty} \sigma e^{-\sigma v} dv \mathbb{I}_{\{t_0 \in [u+\frac{z_1-(z_0+\mu_0 s+\mu(u-s))}{\mu'}, u+\frac{z_2-(z_0+\mu_0 s+\mu(u-s))}{\mu'}]\}} \\ &\quad \times \sigma e^{-\sigma u} \left(1 - e^{-\sigma(h-z_0-\mu_0 t_0)}\right) \sigma e^{-\sigma s} \left(1 - e^{-\sigma \frac{h-z_0}{\mu_0}}\right) \frac{d\mu'}{2} du \frac{d\mu}{2} ds. \end{aligned}$$

or,

$$\int_{u+\frac{z_2-zT_2}{\mu T_2}}^{\infty} \sigma e^{-\sigma v} dv = e^{-\sigma(u+\frac{z_2-zT_2}{\mu T_2})} \geq e^{-\sigma(t_0+\frac{h-z_0}{\mu_0})},$$

et, en utilisant un changement de variable approprié, on obtient une minoration de l'intégrale :

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mathbb{I}_{\{t_0 \in [u+\frac{z_1-(z_0+\mu_0 s+\mu(u-s))}{\mu'}, u+\frac{z_2-(z_0+\mu_0 s+\mu(u-s))}{\mu'}]\}} \frac{d\mu'}{2} \frac{d\mu}{2} \geq \frac{|\mu_2 - \mu_1|}{t_0} |z_2 - z_1|$$

par ailleurs,

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_0} \int_s^{t_0} \sigma e^{-\sigma u} \sigma e^{-\sigma s} du ds \\ &= \int_0^{t_0} \sigma e^{-\sigma s} (e^{-\sigma} - e^{-\sigma t_0}) ds, \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-\sigma t_0})^2 \end{aligned}$$

On a donc, une minoration finale de p :

$$p \geq \frac{1}{2} (1 - e^{-\sigma t_0})^2 \frac{|\mu_2 - \mu_1|}{t_0} |z_2 - z_1| e^{-\sigma(t_0+\frac{1-z_0}{\mu_0})} \left(1 - e^{-\sigma(1-z_0-\mu_0 t_0)}\right) \left(1 - e^{-\sigma \frac{1-z_0}{\mu_0}}\right),$$

soit :

$$p \geq C(t_0, z_0, \mu_0) |\mu_2 - \mu_1| |z_2 - z_1| = C(t_0, z_0, \mu_0) \pi(A)$$

où $C(t_0, z_0, \mu_0)$ est une constante strictement positive. Ce qui termine la preuve du lemme.

■

8.4 Asymptotique formelle pour le modèle aux moments P1

Dans ce paragraphe, nous montrons un résultat d'approximation par la diffusion du problème (8.6) dans le cas très simple où la solution de (8.6) se décompose de la façon suivante (approximation P1) pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \times (-h, h)$:

$$u(t, x, \vec{\Omega}) = \varphi(t, x) + 3\vec{\Omega} \cdot \vec{F}(t, x), \quad (8.29)$$

où $\vec{F} = (\vec{F}_\xi, F_z)^t \in \mathbb{R}^2 \times (-h, h)$, $\vec{F} \equiv \vec{F}(t, x)$ et $\varphi \equiv \varphi(t, x)$. Nous nous plaçons dans le cas d'une condition de réflexion du type Lambert. Rappelons que l'on peut écrire :

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\mu^2} \cos \theta \\ \sqrt{1-\mu^2} \sin \theta \\ \mu \end{pmatrix}, \quad (8.30)$$

où $\mu \in [-1, 1]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. On s'intéresse donc au problème aux moments suivant

$$\begin{cases} \partial_t \vec{F} + \sigma_t \vec{F} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} \varphi = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (-h, h), \\ \partial_t \varphi + \sigma_a \varphi + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = q, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (-h, h), \\ F_z = 0, & \text{en } z = \pm h. \end{cases} \quad (8.31)$$

Remarque 8.4.1

La condition de bord $F_z = 0$ en $z = -h$ et $z = h$ dans (8.31) s'obtient de la façon suivante, traitons le cas $z = h$, en intégrant la solution u de (8.1) sur Γ^- , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^-} (\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}) u(t, \xi, h, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' &= \int_{\Gamma^-} (\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}) (\varphi(t, \xi, h) + \vec{\Omega}' \cdot \vec{F}(t, \xi, h)) d\vec{\Omega}' \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 \mu (\varphi(t, \xi, h) + 3\mu F_z(t, \xi, h)) \frac{d\mu d\theta}{2 \cdot 2\pi} = -\frac{1}{2} \varphi(t, \xi, h) - F_z(t, \xi, h). \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0$, on a

$$u(t, \xi, h, \vec{\Omega}) = \int_{\Gamma^+} (\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}) u(t, \xi, h, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}'.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^-} (\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}) u(t, \xi, h, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' &= \int_{\Gamma^-} 4(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \int_{\Gamma^+} (\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}) u(t, \xi, h, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' d\nu(\vec{\Omega}) \\ &= -\frac{1}{2} \varphi(t, \xi, h) + F_z(t, \xi, h). \end{aligned}$$

d'où $F_z = 0$ sur le bord $z = h$. Le résultat s'obtient de la même manière pour $z = -h$.

On écrit le système aux moments en régime de diffusion vérifié par φ et \vec{F} . Injectons le développement (8.29) dans (8.6) pour obtenir

$$\varepsilon \partial_t (\varphi + 3\vec{\Omega} \cdot \vec{F}) + \varepsilon \sigma_a (\varphi + 3\vec{\Omega} \cdot \vec{F}) + \vec{\Omega}_\xi \cdot \vec{\nabla}_\xi (\varphi + 3\vec{\Omega} \cdot \vec{F}) + \frac{1}{\varepsilon} \Omega_z \partial_z (\varphi + 3\vec{\Omega} \cdot \vec{F}) + \frac{3\sigma_s}{\varepsilon} \vec{\Omega} \cdot \vec{F} = \varepsilon q. \quad (8.32)$$

On intègre (8.32) en $\vec{\Omega}$:

$$\varepsilon \partial_t \varphi + \varepsilon \sigma_a \varphi + \vec{\nabla}_\xi \cdot \vec{F}_\xi + \frac{1}{\varepsilon} \partial_z F_z = \varepsilon q. \quad (8.33)$$

Multiplions (8.32) par $\vec{\Omega}$ et intégrons en $\vec{\Omega}$:

$$\varepsilon \partial_t \vec{F} + \varepsilon \sigma_a \vec{F} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_\xi \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z \varphi \end{pmatrix} + \frac{\sigma_s}{\varepsilon} \vec{F} = 0. \quad (8.34)$$

On montre alors le résultat suivant

Proposition 8.4.1

Sous les hypothèses introduites précédemment, la solution $(\varphi^\varepsilon, \vec{F}^\varepsilon)$ du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \partial_t \vec{F}^\varepsilon + \varepsilon \sigma_a \vec{F}^\varepsilon + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_\xi \varphi^\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z \varphi^\varepsilon \end{pmatrix} + \frac{\sigma_s}{\varepsilon} \vec{F}^\varepsilon = 0, \quad \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times (-h, h), \\ \varepsilon \partial_t \varphi^\varepsilon + \varepsilon \sigma_a \varphi^\varepsilon + \vec{\nabla}_\xi \cdot \vec{F}_\xi^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \partial_z F_z^\varepsilon = \varepsilon q, \quad \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times (-h, h), \\ F_z^\varepsilon = 0, \quad \text{en } z = \pm h, \end{array} \right. \quad (8.35)$$

converge (formellement) lorsque ε tend vers zéro vers la solution (φ_0, \vec{F}_1) du problème de diffusion

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\xi,1} + \frac{1}{3\sigma_s} \vec{\nabla}_\xi \varphi_0 = 0, \quad \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times (-h, h), \\ \partial_t \varphi_0 + \sigma_a \varphi_0 + \vec{\nabla}_\xi \cdot \vec{F}_{\xi,1} = q, \quad \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times (-h, h). \end{array} \right. \quad (8.36)$$

DÉMONSTRATION - On utilise un développement asymptotique de Hilbert des inconnues φ et \vec{F} de la forme

$$\begin{aligned} \varphi^\varepsilon &= \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + o(\varepsilon^2), \\ \vec{F}_\xi^\varepsilon &= \vec{F}_{\xi,0} + \varepsilon \vec{F}_{\xi,1} + \varepsilon^2 \vec{F}_{\xi,2} + o(\varepsilon^2), \\ F_z^\varepsilon &= F_{z,0} + \varepsilon F_{z,1} + \varepsilon^2 F_{z,2} + o(\varepsilon^2), \\ \vec{F}^\varepsilon &= (\vec{F}_\xi^\varepsilon, F_z^\varepsilon)^t. \end{aligned}$$

On identifie à présent les termes de même puissance en ε pour obtenir les relations suivantes. L'équation (8.33) nous donne :

$$\begin{aligned} i) \quad & \partial_z F_{z,0} = 0, \\ ii) \quad & \vec{\nabla}_\xi \cdot \vec{F}_{\xi,0} + \partial_z F_{z,1} = 0, \\ iii) \quad & \partial_t \varphi_0 + \sigma_a \varphi_0 + \vec{\nabla}_\xi \cdot \vec{F}_{\xi,1} + \partial_z F_{z,2} = q. \end{aligned} \quad (8.37)$$

L'équation (8.34) nous donne :

$$\begin{aligned} i) \quad & \sigma_s \vec{F}_{\xi,0} = 0, \\ ii) \quad & \vec{\nabla}_\xi \varphi_0 + \sigma_s \vec{F}_{\xi,1} = 0, \\ iii) \quad & \partial_t \vec{F}_{\xi,0} + \sigma_a \vec{F}_{\xi,0} + \vec{\nabla}_\xi \varphi_1 + \sigma_s \vec{F}_{\xi,2} = q. \end{aligned} \quad (8.38)$$

$$\begin{aligned} i) \quad & \partial_z \varphi_0 + \sigma_s F_{z,0} = 0, \\ ii) \quad & \partial_z \varphi_1 + \sigma_s F_{z,1} = 0, \\ iii) \quad & \partial_t F_{z,0} + \sigma_a F_{z,0} + \partial_z \varphi_2 + \sigma_s F_{z,2} = q. \end{aligned} \quad (8.39)$$

En utilisant l'équation (8.37-i) et la remarque 8.4.1 sur les conditions de bord, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \times (0, 1)$

$$F_{z,0}(t, x) = 0.$$

L'équation (8.39-i) et l'égalité précédente nous assure que φ_0 ne dépend que de ξ . Par ailleurs, $\vec{F}_0 = 0$, l'équation (8.37-ii) montre donc que $F_{z,1}$ ne dépend que de ξ . Remarquons que les

relations (8.38-ii) et (8.39-ii) traduisent une loi de Fick dans le plan (x_1, x_2) . En effet, on peut écrire

$$\vec{F}_{\xi,1} = -\frac{1}{3\sigma_s} \vec{\nabla}_{\xi} \varphi_0.$$

En injectant les relations (8.38-ii) et (8.39-ii) dans (8.37-iii), on obtient alors

$$\partial_t \varphi_0 + \sigma_a \varphi_0 - \vec{\nabla}_{\xi} \cdot \left(\frac{1}{3\sigma_s} \vec{\nabla}_{\xi} \varphi_0 \right) + \partial_z \gamma_2 = q. \quad (8.40)$$

En intégrant cette équation suivant la coordonnée z , en tenant compte de la remarque 8.4.1, du fait que φ_0 est indépendant de z et en posant $Q(\xi) = \int_{-h}^h q(\xi, z) dz$, on obtient l'équation de diffusion suivante

$$\partial_t \varphi_0 + \sigma_a \varphi_0 - \vec{\nabla}_{\xi} \cdot \left(\frac{1}{3\sigma_s} \vec{\nabla}_{\xi} \varphi_0 \right) = Q. \quad (8.41)$$

■

Nous constatons donc que l'approximation P1 ne possède pas le bon comportement asymptotique : le coefficient de diffusion obtenu $\frac{1}{3\sigma_s}$ n'est pas le bon coefficient de diffusion. Nous allons présenter dans la section suivante quelques calculs analytiques et numériques du coefficient de diffusion.

8.5 Calcul du coefficient de diffusion

L'objectif de cette section est d'utiliser la représentation probabiliste de l'opérateur \mathcal{L} introduit en (8.24) pour calculer le coefficient de diffusion associé au problème (8.1). Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié l'approximation par la diffusion du problème (8.6). Dans ce problème, nous avons supposé que la distance entre les deux plaques était de l'ordre du libre parcours moyen, i.e. h d'ordre ε . Dans le cas où la distance entre les deux plaques est d'ordre 1, nous pouvons appliquer les résultats classiques d'approximation de la diffusion et le coefficient de diffusion est alors indépendant de la loi de renvoi sur les plaques. Dans [12], H.Babovsky étudie le problème (8.6), il donne notamment des bornes pour le coefficient de diffusion, nous allons dans ce paragraphe comparer notre calcul du coefficient de diffusion avec les bornes de H.Babovsky pour un cas très simplifié. Dans toute cette section, nous notons $D = D(\sigma_s, h)$, le coefficient de diffusion. Nous cherchons à caractériser le comportement de D pour différents régimes de diffusion. L'idée de cette section est donc de chercher à dresser une "carte" du coefficient de diffusion en fonction de h , σ_t et $P(d\nu(\vec{\Omega}))$ (intervenant dans l'opérateur de réflexion) éventuellement à l'aide de "fits" numériques.

8.5.1 Expression probabiliste du coefficient de diffusion

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler un résultat classique permettant d'approcher le coefficient de diffusion par l'intermédiaire de simulations numériques Monte-Carlo. Nous avons vu (théorème 8.2.2) que le coefficient de diffusion associé au problème (8.12) s'écrit

$$d_{ij} = \int_0^{\infty} \mathbb{E} \Omega_0^i \Omega_t^j dt.$$

On peut généraliser ce résultat aux divers problèmes de transport et on peut alors calculer à l'aide de cette relation une expression du coefficient de diffusion fonction de déplacement carré moyen et du temps (en temps long). On peut montrer la proposition suivante

Proposition 8.5.1

Soit (z_t, μ_t) un processus de Markov de sauts défini pour tout $t > 0$ sur $(-h, h) \times (-1, 1)$ par

- $z_0 \in (-h, h)$.
- μ_0 est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $(-1, 1)$.
- $\partial_t z_t = -\mu_t$.

Alors,

$$\int_0^\infty \mathbb{E} \mu_0 \mu_t dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} z_t^2}{2t}. \quad (8.42)$$

DÉMONSTRATION - Compte tenu de la définition du processus de Markov (z_t, μ_t) , il apparaît clairement que

$$z_t^2 = \left(\int_0^t \mu_s ds \right)^2.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} z_t^2 &= \int_0^t \int_0^t \mathbb{E} \mu_s \mu_{s'} ds ds' \\ &= 2 \int_0^t \int_0^s \mathbb{E} \mu_s \mu_{s'} ds ds' \\ &= 2 \int_0^t \int_0^s \mathbb{E} \mu_{s-s'} \mu_0 ds ds' \\ &= 2 \int_0^t \int_0^s \mathbb{E} \mu_\tau \mu_0 d\tau ds \\ &= 2 \int_0^t \int_\tau^t \mathbb{E} \mu_\tau \mu_0 ds d\tau \\ &= 2 \int_0^t \mathbb{E} \mu_\tau \mu_0 (t - \tau) d\tau \\ &= 2t \int_0^t \mathbb{E} \mu_\tau \mu_0 d\tau - 2 \int_0^t \tau \mathbb{E} \mu_\tau \mu_0 d\tau. \end{aligned}$$

En divisant par $2t > 0$, on obtient l'égalité suivante

$$\frac{\mathbb{E} z_t^2}{2t} = \int_0^t \mathbb{E} \mu_\tau \mu_0 d\tau - \frac{1}{t} \int_0^t \tau \mathbb{E} \mu_\tau \mu_0 d\tau,$$

et on conclut en passant à la limite en t . ■

On donne aussi le résultat suivant qui permet de calculer analytiquement le coefficient de diffusion.

Proposition 8.5.2

Soit (z_t, μ_t) un processus de Markov de sauts défini pour tout $t > 0$ sur $(-h, h) \times (-1, 1)$ par

- $z_0 \in (-h, h)$.
- μ_0 est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $(-1, 1)$.
- $\partial_t z_t = -\mu_t$.

On note t_1, \dots, t_n les instants de collision contre les parois en $z = \pm h$. Ce sont des temps d'arrêt pour le processus de sorte que

$$\begin{pmatrix} z_{t_2} - z_{t_1}, & z_{t_3} - z_{t_1}, & \dots \\ t_2 - t_1, & t_3 - t_1, & \dots \end{pmatrix},$$

sont des variables aléatoires indépendantes de loi notée $(\delta z, \delta t)$. Alors,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}z_t^2}{2t} = \frac{\mathbb{E}(\delta z^2)}{2\mathbb{E}(\delta t)}. \quad (8.43)$$

DÉMONSTRATION - Nous donnons uniquement une idée de la preuve. Soit $n = N_t$, le nombre de collisions avec les parois au temps t . On écrit

$$z_t^2 = ((z_t - z_{t_n}) + (z_{t_n} - z_{t_{n-1}}) + \dots + (z_{t_2} - z_{t_1}) + z_{t_1})^2.$$

Les variables aléatoires $z_{t_i} - z_{t_{i-1}}$ étant indépendante, on peut écrire

$$\mathbb{E}(z_t^2) = \mathbb{E}(z_t - z_{t_n})^2 + N_t \mathbb{E}(\delta z^2).$$

Par la loi des grands nombres, $\frac{N_t}{t}$ tend presque sûrement vers $\frac{1}{\mathbb{E}(\delta t)}$ donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}z_t^2}{2t} = \frac{\mathbb{E}(\delta z^2)}{2\mathbb{E}(\delta t)}.$$

■

Nous avons donné ces résultats dans un cas très simple. On peut généraliser ces résultats à tout processus de Markov de transport pour toute dimension d'espace. On pourra ainsi calculer les composantes du tenseur de diffusion associé en utilisant la même façon de faire que dans les propositions 8.5.1 et 8.5.2.

8.5.2 Cas de la diffusion anormale

Dans le cas purement non collisionnel ($\sigma_t = 0$), la valeur du coefficient de diffusion est entièrement déterminée par la nature des conditions de réflexion sur les plaques et donc de la densité de probabilité $P(d\nu(\vec{\Omega}))$ intervenant dans l'opérateur (8.2). Dans ce cas, l'espérance du déplacement carré n'est plus proportionnel au temps (en temps long), i.e.

$$D = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}z_t^2}{2t} = +\infty.$$

On peut illustrer ce phénomène sur un exemple simple, on considère le problème de transport suivant, pour $x = (\xi, z) \in \mathcal{D} = \mathbb{R} \times (-h, h)$

$$\partial_t u(t, x, \vec{\Omega}) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(t, x, \vec{\Omega}) = q(x, \vec{\Omega}) \text{ dans } [0, T] \times \mathcal{D} \times \mathcal{S}^2 \quad (8.44)$$

avec

$$u(t, x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u(t, x, \vec{\Omega})) \text{ sur } \Gamma^- \quad (8.45)$$

où

$$\mathcal{R}(u(t, x, \vec{\Omega})) = c_{\mathcal{R}} \int_{\Gamma_+} |\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}(x)| u(t, x, \vec{\Omega}') P(d\nu(\vec{\Omega}')) \quad (8.46)$$

avec, pour tout $q \in [1, +\infty[$

$$P(d\nu(\vec{\Omega})) = |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|^{q-1} d\nu(\vec{\Omega}).$$

En utilisant le processus de Markov associé au problème (8.44)-(8.46), partant de $x_0 = 0$ et $z_0 = -h$ par exemple, on peut calculer le coefficient de diffusion, si $\vec{\Omega} = (\Omega_\xi, \Omega_z) = (\sqrt{1 - \mu^2} \cos(\theta), \mu)$, on écrit

$$\begin{aligned} z_t &= \mu t, \\ x_t &= \sqrt{1 - \mu^2} \cos(\theta) t \end{aligned}$$

On en déduit la valeur du premier temps de choc en $z = h$, soit $t = \frac{2h}{\mu}$ et l'expression de x_t :

$$x_t = \frac{2h}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2} \cos(\theta).$$

En utilisant le résultat (8.5.2), on calcule l'expression

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}z_t^2}{2t} = \frac{2h^2 \int_0^1 (1 - \mu^2) \mu^{q-2} d\mu}{4h \int_0^1 \mu^{q-1} d\mu}$$

qui converge si et seulement si $q > 1$ et qui vaut

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}z_t^2}{2t} = \frac{qh}{q^2 - 1}.$$

Le critère $q > 1$ agissant sur les conditions de réflexion permet d'éviter l'émission de particules se propageant dans une direction presque parallèle aux plaques en privilégiant les directions orthogonales. Il est intéressant de calculer une section efficace de diffusion effective notée σ_{eff} et liée au coefficient de diffusion par la relation

$$D = \frac{1}{3\sigma_{eff}}. \quad (8.47)$$

On peut donc écrire le diagramme suivant pour le coefficient de diffusion D et la section efficace effective σ_{eff} (valable pour le problème modèle bidimensionnel (8.44))

$0 \leq q \leq 1$	$1 < q < +\infty$	(8.48)
$D = +\infty$	$D = \frac{qh}{q^2 - 1}$	
$\sigma_{eff} = 0$	$\sigma_{eff} = \frac{q^2 - 1}{3qh}$	

Dans le cas où $\sigma_t h$ tend vers zéro dans le problème collisionnel on s'attend donc à retrouver ces résultats.

Remarque 8.5.1

On peut chercher à caractériser le comportement du coefficient de diffusion dans le cas de la loi de Lambert ($q=1$). Soit $\varepsilon > 0$, on calcule

$$\frac{2h^2 \int_{\varepsilon}^1 \frac{(1-\mu^2)}{\mu} d\mu}{4h \int_{\varepsilon}^1 d\mu} \sim -\log(\varepsilon) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

8.5.3 Cas où $\sigma_t h \gg 1$

Dans le cas où $\sigma_t h \gg 1$, nous pouvons appliquer le résultat classique d'approximation par la diffusion et on montre que u^ε tend vers la solution U du problème de diffusion suivant

$$\begin{cases} \partial_t U - \vec{\nabla} \cdot D \vec{\nabla} U + \sigma_a U = q & \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D} \\ U(0, x) = u^0(x) & \text{dans } \mathcal{D}, \\ \vec{\nabla} U \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{D}. \end{cases} \quad (8.49)$$

où

$$D = \frac{1}{3\sigma_t}.$$

8.5.4 Simulations Monte-Carlo du coefficient de diffusion

Dans ce paragraphe, nous étudions des simulations Monte-Carlo pour calculer le coefficient de diffusion d'un problème modèle bidimensionnel pour différentes valeurs des paramètres σ_t et h . Nous nous appliquons à retrouver numériquement les limites asymptotiques présentées dans les paragraphes précédents et nous proposons des approximations numériques (à partir des résultats Monte-Carlo) permettant de tenir compte de ces limites asymptotiques et approchant convenablement le coefficient de diffusion pour toute la gamme de paramètres. Nous commençons par présenter l'algorithme Monte-Carlo permettant de calculer le coefficient de diffusion puis nous exhibons les résultats numériques obtenus afin d'en déduire des approximations du coefficient de diffusion.

Algorithme Monte-Carlo

Dans ce sous-paragraphe, nous présentons rapidement l'algorithme Monte-Carlo permettant de calculer notre coefficient de diffusion (nous supposons que $\sigma_a = 0$ et que σ_s est constant sur tout le domaine $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times (-h, h)$). On conserve les notations usuelles précédemment introduites dans ce chapitre et on note r un nombre tiré uniformément sur $[0, 1]$, pour N particules (N suffisamment grand) on suit les étapes suivantes,

- **Étape 1** : On initialise les coordonnées de la particule

$$x_0 = (\xi_0 = 0, z_0 = -h + 2hr).$$

et la première direction $\vec{\Omega}_0$ définie par

$$\mu_t = -1 + 2r, \theta_t = 2\pi r.$$

- **Étape 2** : On calcule un libre parcours aléatoire λ suivant une loi exponentielle de paramètre σ_s , puis la distance L entre la particule et les parois dans la direction $\vec{\Omega}$ parcourue par une particule se déplaçant en ligne droite sans subir de collisions. Si $\lambda < L$, la particule subit une collision dans le milieu, alors $x_t = \lambda \vec{\Omega}_t$ et $t = t + \lambda$, on tire une nouvelle direction aléatoire uniformément distribuée ; si $\lambda \geq L$, alors $x_t = L \vec{\Omega}_t$ et $t = t + L$, la particule rencontre la paroi et on tire une nouvelle direction dépendante de la loi de réflexion sur les parois.
- **Étape 3** : On incrémente le calcul du coefficient de diffusion

$$D = D + \frac{\xi_t}{2t}$$

et on reprend l'algorithme à l'étape 2 jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit vérifié. Finalement, on calcule le coefficient de diffusion $D = \frac{D}{N}$ où N est le nombre d'itérations de l'algorithme.

Simulations numériques dans le cas où $q > 1$

Dans ce sous-paragraphe, nous présentons des courbes représentant $3\sigma_s D$ en fonction de $\sigma_s h$ dans différents cas. On se propose de chercher des approximations numériques (dans le cas où $q > 1$) permettant d'approcher le coefficient de diffusion. On cherche donc une fonction $f_q \equiv f_q(\sigma_s h)$ telle que

$$\lim_{\sigma_s h \rightarrow +\infty} f_q(\sigma_s h) = 1$$

et

$$\lim_{\sigma_s h \rightarrow 0} f_q(\sigma_s h) = \frac{3\sigma_s q h}{q^2 - 1}.$$

On peut proposer les fonctions suivantes

$$f_q^1(\sigma_s h) = 1 - \exp\left(-3\frac{q\sigma_s h}{q^2 - 1}\right) \text{ ou } f_q^2(\sigma_s h) = \frac{3q\sigma_s h}{3q\sigma_s h + q^2 - 1}.$$

Sur les figures 8.1 et 8.3, on compare les coefficients de diffusion obtenus par l'intermédiaire des simulations numériques aux fonctions d'approximations numériques f_q^1 et f_q^2 . La figure 8.1 présente les résultats de simulations pour une valeur fixe $h = 1$ de la distance entre les deux plaques pour différentes valeurs de σ_s ($\sigma_a = 0$) dans le cas où $q = 2$ et $q = 3$. La figure 8.2 présente les résultats de simulations pour une valeur fixe $h = 0.01$ de la distance entre les deux plaques pour différentes valeurs de σ_s ($\sigma_a = 0$) dans le cas où $q = 2$ et $q = 3$. Ces courbes permettent d'illustrer le comportement du taux $\frac{\sigma_s}{\sigma_{eff}}$ en fonction du paramètre $\sigma_s h$. Nous comparons qualitativement l'approximation de ce taux par les fonctions f_q^1 et f_q^2 , c'est la fonction f_q^1 qui donne une meilleure approximation des résultats numériques. Ces fonctions, construites pour préserver le comportement asymptotique du coefficient de diffusion en fonction de $\sigma_s h$, sont moins proches de la courbe numérique dans la zone intermédiaire. En particulier, pour des valeurs de $\sigma_s h$ de l'ordre de 0.1, le comportement du coefficient de diffusion est mal rendu.

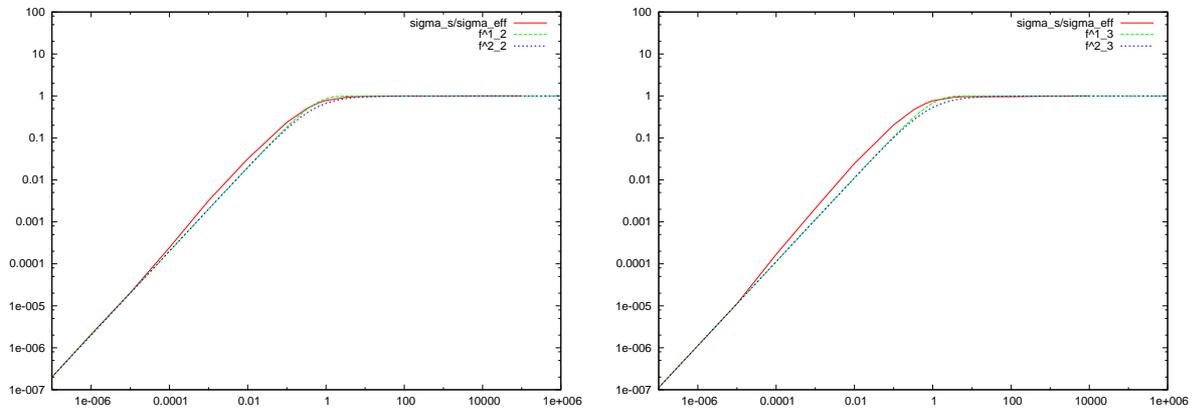


FIG. 8.1 – Comparaison de $\frac{\sigma_s}{\sigma_{eff}}$, f_q^1 et f_q^2 en fonction de $\sigma_s h$ dans le cas $q = 2$ et $q = 3$ pour $h = 1$.

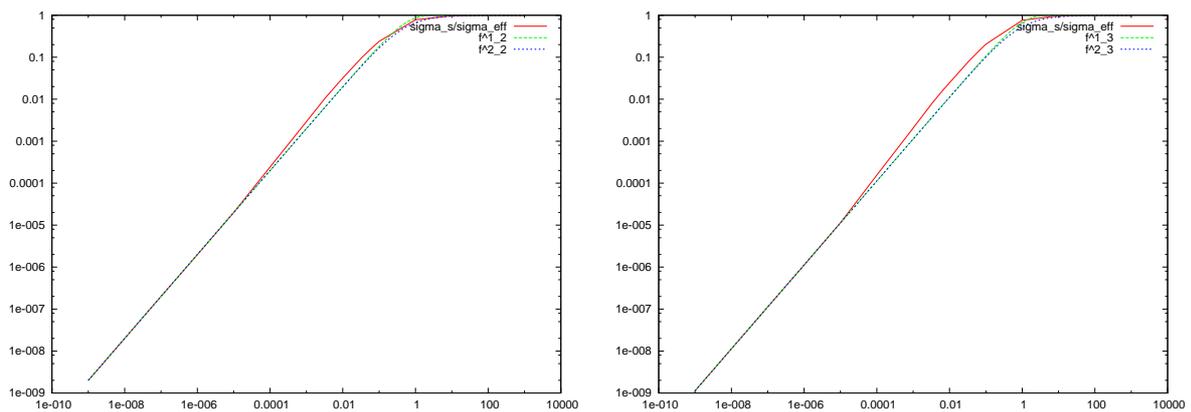


FIG. 8.2 – Comparaison de $\frac{\sigma_s}{\sigma_{eff}}$, f_q^1 et f_q^2 en fonction de $\sigma_s h$ dans le cas $q = 2$ et $q = 3$ pour $h = 0.01$.

Simulations numériques dans le cas de la diffusion anormale

Nous présentons sur la figure 8.3 un résultat illustrant le comportement du coefficient de diffusion en fonction du paramètre q dans le cas de la diffusion anormale pour une valeur de $h = 10^{-5}$. On observe que le coefficient de diffusion diverge lorsque q tend vers zero (condition limite de type Marshak).

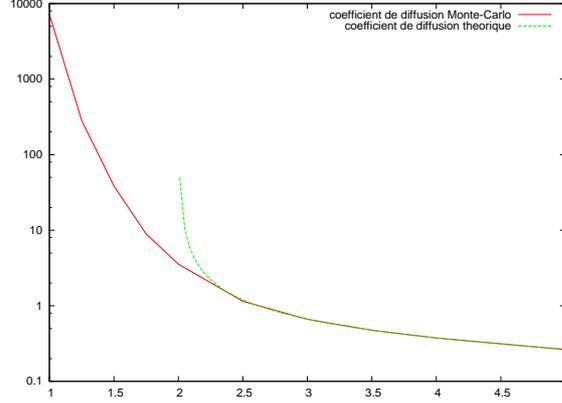


FIG. 8.3 – Coefficient de diffusion en fonction de $q + 1$ dans le cas de la diffusion anormale.

8.6 Résultats numériques

Dans ce paragraphe, nous présentons un cas test numérique simple pour illustrer les résultats présentés dans ce chapitre et valider le schéma numérique présenté dans les chapitres précédents. On considère le cas test bidimensionnel suivant

$$\begin{aligned} & \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u(t, x, \vec{\Omega}) + \sigma_t(x, \vec{\Omega}) u(t, x, \vec{\Omega}) \\ & = \sigma_s(x, \vec{\Omega}) \int_{\mathcal{S}^2} u(t, x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') + q(x, \vec{\Omega}) \text{ dans } (0, 1) \times (-h, h) \times \mathcal{S}^2, \end{aligned} \quad (8.50)$$

avec les conditions aux limites

$$u(t, x, \vec{\Omega}) = \mathcal{R}(u(t, x, \vec{\Omega})) \text{ sur } \Gamma^-,$$

où

$$\mathcal{R}(u(t, x, \vec{\Omega})) = c_{\mathcal{R}} \int_{\Gamma_+} |\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}(x)|^2 u(t, x, \vec{\Omega}') d\nu(\vec{\Omega}') \text{ avec } \frac{1}{c_{\mathcal{R}}} = \int_{\Gamma_+} |\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}(x)| P(d\nu(\vec{\Omega}')).$$

On résout numériquement le problème (8.50) en utilisant plusieurs méthodes :

- la première méthode utilisée est la méthode des éléments finis mixtes-hybrides appliquée à l'équation de transport, la solution numérique obtenue servira de référence (courbe transport) ;
- la seconde méthode consiste en la résolution d'un problème de diffusion approchant le problème (8.50) en utilisant un coefficient de diffusion (ou une section efficace effective σ_{eff}) obtenu à l'aide des simulations Monte-Carlo présentées au paragraphe précédent (courbe σ_{eff}) ;

- la troisième méthode consiste en la résolution d'un problème de diffusion utilisant l'approximation $P1$;
- la quatrième méthode résout numériquement un problème de diffusion approché en utilisant un limiteur de flux (nous reviendrons sur cette notion dans le chapitre suivant, voir C.D.Levermore [61] ou C.J.Pomraning [63]).

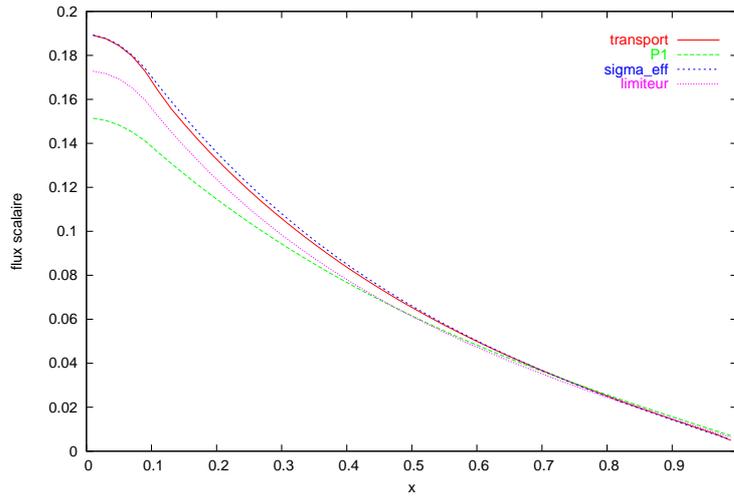


FIG. 8.4 – Flux scalaire pour le problème (8.50) et $h = 0.1$ fonction de la position x

Les figures 8.4 et 8.5 présentent le profil d'une coupe horizontale du flux scalaire dans le cas où $\sigma_s = 10$, $\sigma_a = 0.1$, $q = 0.1 \times \mathbb{I}_{0 \leq x \leq 0.1}$. La figure 8.4 concerne un cas pour lequel $h = 0.1$ et la figure 8.5 concerne un cas pour lequel $h = 0.01$. Comme prévu par la théorie, on observe

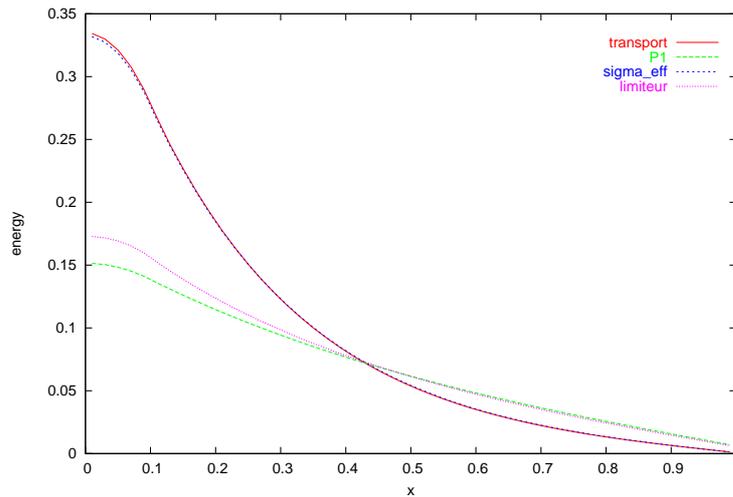


FIG. 8.5 – Flux scalaire pour le problème (8.50) et $h = 0.01$ fonction de la position x

la proximité de la courbe de référence (transport) et de la courbe obtenue par un problème de diffusion en utilisant un coefficient de diffusion calculé numériquement par une méthode Monte-

Carlo. En revanche, l'approximation P1 ne permet pas de capturer la bonne solution de transport et l'utilisation d'un limiteur de flux, censé corriger les effets de l'approximation P1 pour obtenir une approximation plus proche du transport, ne donne pas de résultats sensiblement meilleurs.

Bilan du chapitre 8

Nous avons étudié l'approximation par la diffusion d'un problème de transport entre deux plaques infinies. De plus, nous avons exhibé des approximations numériques du coefficient de diffusion non standard régissant l'équation de diffusion associée. Nous avons illustré nos résultats théoriques par des simulations numériques Monte-Carlo et par un cas test déterministe permettant de valider le schéma mixte-hybride présenté dans les chapitres précédents.

Chapitre 9

Approximation du transport par la diffusion dans une cavité laser

Sommaire

9.1	Introduction aux phénomènes de transfert radiatif dans une cavité laser	172
9.2	Modèles disponibles	174
9.2.1	Diffusion standard	175
9.2.2	Diffusion Monte Carlo	175
9.2.3	Diffusion à flux limité	176
9.3	Calcul d'un tenseur d'Eddington géométrique ad hoc	177
9.3.1	Calcul d'un facteur d'Eddington dans le cas d'une sphère opaque centrée	177
9.3.2	Calcul du tenseur d'Eddington	179
9.4	Calcul d'un facteur d'Eddington scalaire et d'un limiteur de flux associé	184
9.4.1	Calcul d'un facteur d'Eddington scalaire γ	184
9.4.2	Calcul d'un limiteur de flux λ	185
9.4.3	Propriétés de γ et λ	186
9.5	Schémas numériques	187
9.6	Résultats Numériques	188
9.6.1	Limiteurs de flux utilisés dans les simulations numériques	188
9.6.2	Résultats obtenus pour le tenseur d'Eddington géométrique	189
9.6.3	Résultats obtenus pour le limiteur de flux géométrique	190
9.6.4	Comparaison des modèles	192

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à un problème de transfert radiatif dans une cavité laser décrit par une équation de transport des photons. Nous utiliserons des notations usuelles dans l'étude des problèmes de transfert radiatif qui diffèrent quelque peu des notations introduites précédemment. On s'appuie sur un modèle proposé par M.Rampp, H.T.Janka [68] pour mettre en évidence de nouvelles relations de fermeture dans l'approximation par la diffusion d'un problème de transfert radiatif. Ce chapitre a fait l'objet de travaux en collaboration avec J.F.Clouët, S.Cordier, A.Munnier et G.Samba, à l'occasion d'un groupe de travail proposé lors de l'édition 2003 du fameux CEMRACS (Centre d'Été de Mathématiques et Recherche Avancées en Calcul Scientifique), à Luminy. Ces travaux ont fait l'objet d'un proceeding en collaboration avec A.Munnier [33].

9.1 Introduction aux phénomènes de transfert radiatif dans une cavité laser

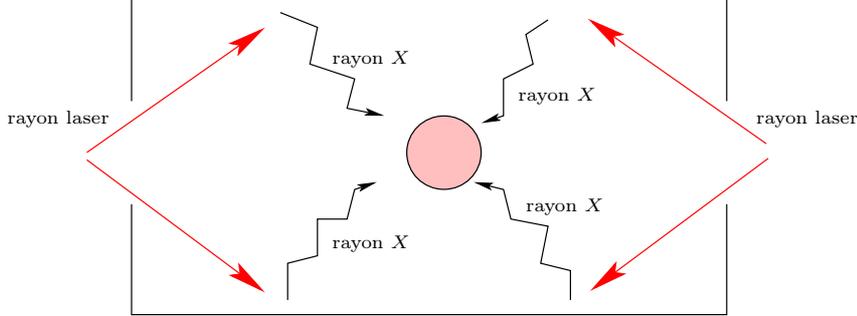


FIG. 9.1 – Cavité laser

La Fusion par Confinement Inertiel (FCI) permet de réaliser des expériences de fusion thermonucléaire : il s'agit de faire implorer une petite cible de Deuterium-Tritium de sorte que les hautes températures et hautes densités atteintes produisent une réaction de combustion du carburant. La façon la plus efficace d'obtenir une implosion quasi isotrope est d'utiliser les radiations créées par la conversion de l'énergie laser en rayons X sur les parois d'une cavité laser (voir figure 9.1).

Les équations du transfert radiatif décrivent le transport d'énergie des rayons X à l'intérieur de la cavité laser, en négligeant les phénomènes hydrodynamique, le problème s'écrit :

$$\frac{1}{c} \partial_t I + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_x I + \sigma_\nu I = \frac{c}{4\pi} \sigma_\nu S(\nu, T), \quad (9.1)$$

où $I(x, \vec{\Omega}, \nu, t)$ représente l'intensité radiative (la direction de propagation $\vec{\Omega}$ est à valeur dans la sphère unité \mathcal{S}^2 et la fréquence ν est strictement positive), c est la vitesse de la lumière et σ_ν représente l'opacité. L'intensité $I(x, \vec{\Omega}, \nu, t)$ est liée à la distribution d'une population de photons se déplaçant en ligne droite dans la direction $\vec{\Omega}$ à la vitesse de la lumière c . La fonction source $S(\nu, T)$ est appelée fonction de Planck, elle est dépendante de la température T de sorte que l'équation (9.1) soit couplée avec une équation de bilan d'énergie :

$$\partial_t E_i(T) + \int_{\mathcal{S}^2} d\vec{\Omega} \int_{\nu>0} d\nu \sigma_\nu (I - \frac{c}{4\pi} S(\nu, T)) = 0, \quad (9.2)$$

où E_i représente l'énergie interne du système. Remarquons que dans ce chapitre nous notons $d\vec{\Omega}$ la mesure angulaire de sorte que

$$\int_{\mathcal{S}^2} d\vec{\Omega} = 4\pi.$$

Si on utilise une méthode de Monte-Carlo implicite pour résoudre ce système (9.1),(9.2) (voir [52] par exemple). Les oscillations dues aux méthodes de Monte-Carlo perturbent la symétrie du champ radiatif et ne permettent pas de simuler correctement l'implosion de la cible sphérique. D'autre part, les méthodes déterministes (voir [4]) restent très coûteuses pour simuler ce type de problèmes. C'est pourquoi il est utile de rechercher des modèles approchés pour le transfert radiatif. L'objectif de ce chapitre est de présenter des modèles alternatifs pour (9.1),(9.2) basés

sur l'approximation par la diffusion et pouvant être utilisés dans le contexte de la FCI. Dans le but de simplifier notre analyse, nous considérons une version simplifiée de (9.1),(9.2). D'une part, nous considérons uniquement le cas d'un régime stationnaire (i.e. indépendant du temps). D'autre part, nous supposons que la fonction source est indépendante de la fréquence de sorte que (9.1) devienne :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_x I + \sigma I = \frac{c}{4\pi} \sigma S. \quad (9.3)$$

Enfin, on impose des conditions aux limites qui prennent en compte l'albedo des parois d'or. Ainsi, pour tout x sur le bord et pour chaque direction entrante $\vec{\Omega}$, on impose :

$$I(x, \vec{\Omega}) = \frac{1 - \omega}{\pi} \int_{\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}_b > 0} I(x, \vec{\Omega}') (\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}_b) d\vec{\Omega}', \quad (9.4)$$

où \vec{n}_b est la normale unitaire sortante sur la frontière au point x . Pour simplifier, on considérera une géométrie modèle (voir figure 9.2).

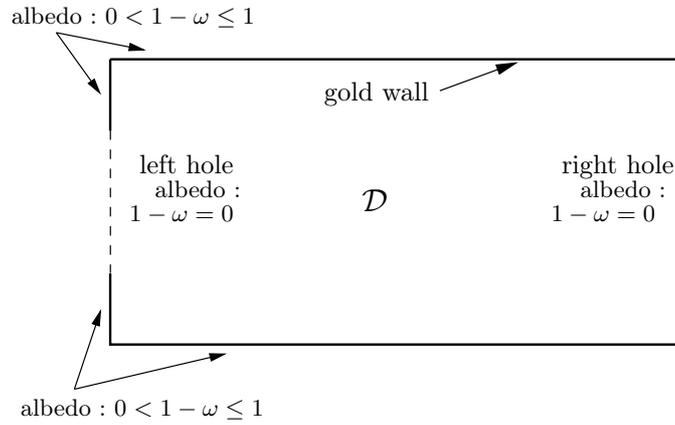


FIG. 9.2 – Géométrie modèle

Lorsque l'opacité est grande devant les dimensions caractéristiques du domaine, l'approximation par la diffusion est valide (voir [54]) pour le système (9.3)-(9.4). Dans ce régime, l'énergie radiative E_r est solution d'une équation de diffusion

$$-\text{div} \left(\frac{1}{3\sigma} \nabla E_r \right) + \sigma E_r = \sigma S, \quad E_r := \frac{1}{c} \int_{S^2} I(x, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}. \quad (9.5)$$

Dans une cavité laser, cette hypothèse n'est plus valide : le libre parcours moyen (σ^{-1}) des photons est grand devant les dimensions caractéristiques du domaine. La limite (9.5) qui correspond à des libres parcours moyens petits devant les dimensions caractéristiques du domaine n'est plus valide. Cependant, on peut toujours définir une équation de diffusion corrigée

$$-\text{div} \left(\frac{\lambda}{\sigma} \nabla E_r \right) + \sigma E_r = \sigma S, \quad E_r := \frac{1}{c} \int_{S^2} I(x, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}, \quad (9.6)$$

où λ est lié au tenseur d'Eddington $[\gamma]$ (dont la définition est donnée au paragraphe suivant par (9.10)) de sorte que l'équation (9.6) fournisse une bonne approximation de la solution du

problème de transfert radiatif (9.3). Nous renvoyons le lecteur aux travaux de J.F.Coulombel, F.Golse, T.Goudon [41] pour une analyse mathématique de l'approximation par la diffusion des problèmes de transfert radiatif et l'étude de nouveaux modèles du type (9.6). Dans ce chapitre, nous proposons divers modèles basés sur cette diffusion corrigée en utilisant la configuration géométrique de la cavité laser pour déterminer un tenseur d'Eddington adapté à notre problème de transport, nous exhibons aussi un facteur d'Eddington et un limiteur de flux prenant en compte les caractéristiques géométriques du domaine, sur le sujet, citons aussi C.Buet, S.Cordier [26] et C.Buet, B.Després [27].

Notre étude s'organise comme suit, nous rappelons brièvement les différents modèles existants liés à l'approximation par la diffusion des problèmes de transfert radiatif (diffusion standard, diffusion flux limitée, etc...), puis nous proposons un modèle permettant de tenir compte de la géométrie du domaine qui nous permet de construire un tenseur d'Eddington adapté. Nous analysons les propriétés de ce tenseur d'Eddington, du facteur d'Eddington et d'un limiteur de flux associé en se basant l'étude de C.D.Levermore [61]. Enfin, nous proposons des schémas numériques pour la résolution du problème de diffusion non linéaire associé et nous présentons des résultats numériques pour lesquels nous comparons les divers modèles.

9.2 Modèles disponibles

On considère l'équation du transfert radiatif suivante :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} I(x, \vec{\Omega}) + \sigma I(x, \vec{\Omega}) = \frac{c}{4\pi} \sigma S(x), & (x, \vec{\Omega}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \\ I(x, \vec{\Omega}) = \frac{1-\omega}{\pi} \int_{\vec{\Omega}' \cdot \vec{n} > 0} I(x, \vec{\Omega}') \vec{\Omega}' \cdot \vec{n} d\vec{\Omega}', & x \in \partial\mathcal{D}, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \quad (9.7)$$

Dans ce qui précède, $1 - \omega$ représente l'albedo des parois qui se définit comme le ratio entre les flux radiatifs entrant et sortant par la frontière. La configuration géométrique du domaine que l'on considère dans la suite est donnée par la figure 9.3.

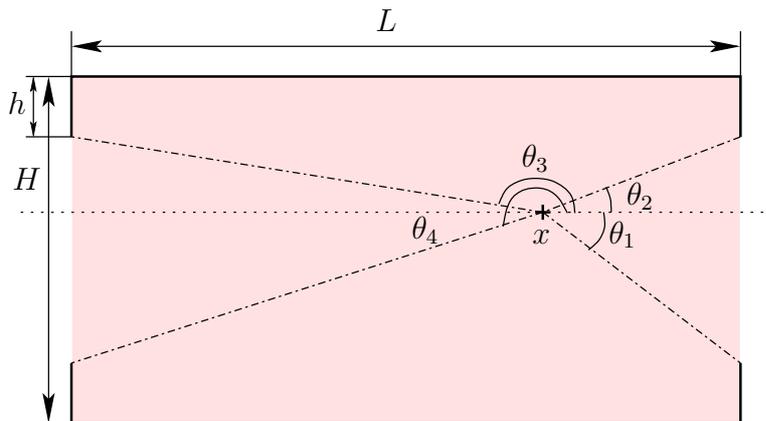


FIG. 9.3 – Configuration géométrique

On définit

$$E(x) = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I(x, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}, \quad (\text{énergie radiative}), \quad (9.8)$$

$$\vec{F}(x) = \int_{4\pi} I(x, \vec{\Omega}) \vec{\Omega} d\vec{\Omega}, \quad (\text{flux radiatif}), \quad (9.9)$$

$$[P(x)] = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I(x, \vec{\Omega}) \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega} d\vec{\Omega}, \quad (\text{pression radiative}),$$

et le tenseur d'Eddington $[\gamma]$ défini par

$$[\gamma] := \frac{[P]}{E}. \quad (9.10)$$

On applique alors la méthode des moments qui consiste à intégrer la première équation de (9.7) sur tous les angles solides $\vec{\Omega}$. On obtient :

$$\frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \sigma E = \sigma S \quad \text{dans } \mathcal{D}. \quad (9.11)$$

En multipliant la première ligne de (9.7) par $\vec{\Omega}$ et en intégrant sur les directions angulaires $\vec{\Omega}$, on a :

$$\vec{\nabla} [P] + \frac{\sigma}{c} \vec{F} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}, \quad (9.12)$$

soit :

$$-\vec{\nabla} \left(\frac{1}{\sigma} \vec{\nabla} ([\gamma] E) \right) + \sigma E = \sigma S \quad \text{dans } \mathcal{D}. \quad (9.13)$$

Le système d'équation (9.11)-(9.13) n'est pas fermé dans le sens où on ne connaît pas a priori l'expression du tenseur d'Eddington $[\gamma]$. Il convient d'effectuer ce qu'on appelle une hypothèse de fermeture en choisissant une expression du tenseur d'Eddington adaptée aux caractéristiques physiques du problème.

9.2.1 Diffusion standard

Lorsque σ est grand devant les longueurs caractéristiques du domaine, on peut appliquer l'approximation par la diffusion (voir [54]) et le tenseur d'Eddington est alors constant

$$[\gamma] = \frac{1}{3} [Id]. \quad (9.14)$$

Dans ce cas, l'équation du transfert radiatif est remplacée par une équation de diffusion (voir chapitre 6).

9.2.2 Diffusion Monte Carlo

Comme dans le chapitre précédent, on peut approcher l'équation du transfert radiatif par un problème de diffusion en calculant le coefficient de diffusion ou le tenseur d'Eddington par l'intermédiaire de simulations Monte-Carlo. Cependant, les dimensions caractéristiques d'une cavité laser ne permettent pas d'appliquer cette théorie. Sur l'approximation du transport par un problème de diffusion utilisant un tenseur d'Eddington, on citera en particulier les travaux de E.Bonneaux [20].

9.2.3 Diffusion à flux limité

Dans ce paragraphe, nous présentons brièvement la théorie de la diffusion à flux limité présentée notamment par C.D.Levermore [61], G.C.Pomraning [63]. L'idée de la diffusion à flux limité est de remplacer l'équation (9.12) par une loi de Fick :

$$\lambda \vec{\nabla} E + \frac{\sigma}{c} \vec{F} = 0, \quad (9.15)$$

où le coefficient de diffusion λ est une fonction de E , σ_a , σ_s et S . On choisit une fonction λ ad hoc, de sorte que le problème de diffusion résultant soit à "flux limité", i.e.

$$|\vec{F}| \leq cE. \quad (9.16)$$

En général, la fonction $\lambda = \lambda(R, \eta)$ dépend du gradient adimensionné

$$R = \frac{|\vec{\nabla} E|}{\eta \sigma E}$$

où η représente l'albédo effectif

$$\eta = \frac{\sigma_a S + \sigma_s E}{\sigma E}.$$

De plus, il est courant d'introduire la fonction scalaire γ , le facteur d'Eddington, directement relié au tenseur d'Eddington par la formule

$$[\gamma] = \frac{1-\gamma}{2} [Id] + \frac{3\gamma-1}{2f^2} \vec{f} \otimes \vec{f},$$

où $[Id]$ représente le tenseur identité, et

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{cE},$$

avec $f = |\vec{f}|$. L'expression du facteur d'Eddington est donné par

$$\gamma = \frac{\int_{-1}^1 \zeta^2 I(\vec{\Omega}) d\zeta}{\int_{-1}^1 I(\vec{\Omega}) d\zeta},$$

où $\zeta = \frac{\vec{\Omega} \cdot \vec{f}}{f}$. Le facteur d'Eddington γ est en général une fonction de f et η . Nous pouvons énoncer quelques propriétés simples sur $D(R, \eta)$ et $\gamma(f, \eta)$

- $f^2 \leq \gamma \leq 1$,
- $\gamma(0, \eta) = \frac{1}{3}$,
- $\gamma(1, \eta) = 0$,
- $\lambda(0, 1) = \frac{1}{3}$,
- $\lim_{R \rightarrow \infty} \lambda(R, \eta) = 0$.

Dans [61], C.D.Levermore propose une méthode permettant d'obtenir une relation entre les quantités D et γ , nous reviendrons rapidement sur cette relation dans la suite, notons simplement qu'en utilisant certaines hypothèses simplificatrices, C.D.Levermore aboutit à la relation

$$D = \frac{\gamma}{\eta(1 + fR)}.$$

9.3 Calcul d'un tenseur d'Eddington géométrique ad hoc

Dans notre cas, l'approximation standard de la diffusion (9.5) n'est pas valide mais il est toujours possible de remplacer formellement l'équation du transport par une équation de diffusion avec un tenseur d'Eddington correctement défini (prise en compte de la géométrie du domaine physique ou théorie de C.D.Levermore [61] par exemple). Dans la suite de ce paragraphe nous allons détailler une procédure permettant de calculer un tenseur d'Eddington prenant en compte la géométrie du domaine. Pour cela, nous nous appuyons sur une hypothèse proposée par M.Rampp, H.T.Janka [68], que nous explicitons dans le paragraphe qui suit sur un exemple simple.

9.3.1 Calcul d'un facteur d'Eddington dans le cas d'une sphère opaque centrée

Nous allons tout d'abord nous intéresser à l'étude d'une relation de fermeture proposée par M.Rampp et H.T.Janka pour l'équation du transfert radiatif dans un milieu à symétrie sphérique. On considère donc le cas d'un domaine à symétrie sphérique, très souvent rencontré dans les problèmes issus de la physique (par exemple les cibles sphériques irradiées par une onde laser). Dans ce cas, l'intensité spécifique $I(r, \mu)$ dépend uniquement de la variable d'espace r (rayon de la frontière sphérique) et de la variable angulaire $\mu = \vec{\Omega} \cdot \vec{n}$, où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la frontière sphérique. Par ailleurs, on considère uniquement la composante normale du flux radiatif \vec{F} et de la pression radiative \vec{P} compte tenu des symétries du problème (le flux et la pression sont normaux à la frontière). On se ramène donc, par raisons de symétries à un cas 1D.

Calcul du facteur d'Eddington

On se place dans une configuration du type 9.4, si on considère une sphère opaque centrée entourée d'un milieu absorbant (typiquement le cas où la sphère est compressée par l'irradiation d'un laser), on peut calculer analytiquement une expression du facteur d'Eddington en utilisant le modèle suivant : dans la sphère, la radiation est isotrope, alors le facteur d'Eddington $\gamma \simeq \frac{1}{3}$. Dans le reste du domaine, on procède comme suit :

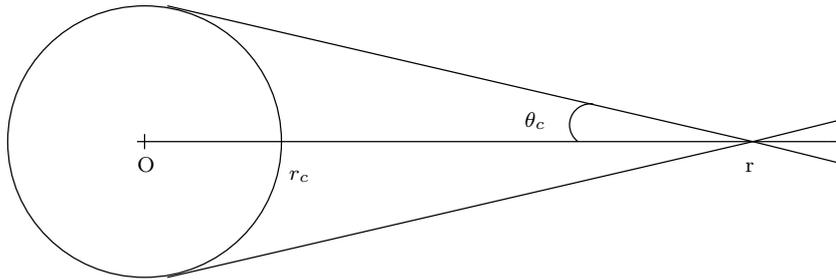


FIG. 9.4 – Configuration du problème à symétrie sphérique

On définit μ_c , le cosinus de l'angle θ_c (voir figure 9.4),

$$\mu_c = \cos \theta_c = \left(1 - \frac{r_c^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9.17)$$

L'idée du modèle est de décomposer l'intensité $I(r, \mu)$ comme suit

$$I(r, \mu) = \begin{cases} I_0(r) & \text{pour } -1 \leq \mu < \mu_c \\ I_1(r) & \text{pour } \mu_c \leq \mu \leq 1. \end{cases} \quad (9.18)$$

où I_0 représente l'intensité spécifique résultant de l'émission dans le milieu et I_1 représente l'intensité résultant de l'émission directe de la sphère.

On introduit S_T l'ensemble des angles solides pour lesquels la sphère est visible et S_T^c son complémentaire dans $[0, 2\pi] \times [-1, 1]$.

On peut alors écrire :

– l'énergie radiative :

$$E = \frac{1}{c} I_1 \int_{S_T} d\vec{\Omega} + \frac{1}{c} I_2 \int_{S_T^c} d\vec{\Omega} = \frac{2\pi}{c} I_1 (1 - \mu_c) + \frac{2\pi}{c} I_2 (1 + \mu_c), \quad (9.19)$$

– le flux radiatif :

$$F = \frac{1}{c} I_1 \int_{S_T} \vec{\Omega} d\vec{\Omega} + \frac{1}{c} I_2 \int_{S_T^c} \vec{\Omega} d\vec{\Omega} = 2\pi \left(\frac{1 - \mu_c^2}{2} \right) (I_1 - I_2), \quad (9.20)$$

– la pression radiative :

$$P = \frac{1}{c} I_1 \int_{S_T} \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega} d\vec{\Omega} + \frac{1}{c} I_2 \int_{S_T^c} \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega} d\vec{\Omega} = 2\pi \left(\frac{1 - \mu_c^3}{3c} \right) I_1 + \left(\frac{1 + \mu_c^3}{3c} \right) I_2. \quad (9.21)$$

On obtient donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} E = \frac{2\pi}{c} I_1 (1 - \mu_c) + \frac{2\pi}{c} I_2 (1 + \mu_c), \\ F = \pi (1 - \mu_c^2) (I_1 - I_2), \\ \frac{c\gamma E}{2\pi} = \left(\frac{1 - \mu_c^3}{3c} \right) I_1 + \left(\frac{1 + \mu_c^3}{3c} \right) I_2. \end{cases} \quad (9.22)$$

Notons

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{I_1}{cE} \text{ et } u_2 = \frac{I_2}{cE}, \\ \alpha_1 &= 2\pi(1 - \mu_c) = 4\pi - \alpha_2, \\ v_1 &= \pi(1 - \mu_c^2) = -v_2, \end{aligned}$$

et

$$m_1 = \frac{2\pi}{3}(1 - \mu_c^3) = \frac{4\pi}{3} - m_2.$$

Le système (9.22) s'écrit alors :

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \\ \frac{F}{cE} = v_1 (u_1 - u_2), \\ \gamma = m_1 u_1 + m_2 u_2. \end{cases} \quad (9.23)$$

Notons $\bar{u}_1 = u_1 - u_2$, le système (9.23) s'écrit alors :

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 \bar{u}_1 u_1 + 4\pi u_2, \\ \frac{F}{cE} = v_1 \bar{u}_1, \\ \gamma = m_1 \bar{u}_1 + \frac{4\pi}{3} u_2. \end{cases} \quad (9.24)$$

On a alors, en multipliant (8.1) par v_1 :

$$v_1 = \alpha_1 \frac{F}{cE} + 4\pi v_1 u_2. \quad (9.25)$$

D'où :

$$v_1 \gamma = m_1 \frac{F}{cE} + \frac{v_1}{3} - \frac{\alpha_1}{3} \frac{F}{cE} \quad (9.26)$$

soit :

$$v_1 \left(\gamma - \frac{1}{3} \right) = \left(m_1 - \frac{\alpha_1}{3} \right) \frac{F}{cE}. \quad (9.27)$$

Or,

$$m_1 - \frac{\alpha_1}{3} = \frac{2\pi}{3} \mu_c (1 - \mu_c^2) = \frac{2v_1}{3} \mu_c, \quad (9.28)$$

d'où l'expression finale du facteur d'Eddington :

$$\gamma = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{\mu_c F}{cE}. \quad (9.29)$$

Tests numériques

Les tests numériques présentés sur la figure 9.5 ont été effectués en utilisant un code de transport 1D pour la solution de référence et un code de diffusion 1D pour tester la validité du calcul présenté ci-avant. Les résultats numériques sont obtenus pour $\sigma = 1$, $\omega = 0.2$ et $r_c = 0.2$. On constate la qualité de l'approximation obtenue en utilisant le modèle proposé par M.Rampp et H.T.Janka par rapport à la solution de référence. En revanche le code de diffusion utilisant l'approximation d'Eddington (i.e. $\gamma = \frac{1}{3}$) est très loin de cette solution de référence. Nous allons donc à présent nous inspirer du modèle proposé par M.Rampp et H.T.Janka pour l'étude d'un problème de transfert radiatif dans une cavité laser.

9.3.2 Calcul du tenseur d'Eddington

On cherche maintenant à appliquer cette technique dans notre cas en utilisant les propriétés géométriques du domaine dans le but de calculer un tenseur d'Eddington approprié (et un facteur d'Eddington et un limiteur de flux associé) pour obtenir des résultats plus satisfaisants. On considère donc le modèle de diffusion suivant :

$$\begin{cases} -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{[\gamma]}{\sigma} \vec{\nabla} E \right) + \sigma E = \sigma S & \text{in } \mathcal{D}, \\ \omega E + 2(2 - \omega) \frac{[\gamma]}{\sigma} \vec{\nabla} E \cdot \vec{n}_b = 0 & \text{on } \partial\mathcal{D}, \end{cases} \quad (9.30)$$

où $[\gamma]$ représente le tenseur d'Eddington (voir section 10.3.2). Notre but est de déterminer une expression analytique de $[\gamma]$ de sorte que la solution du problème (9.30) soit suffisamment proche

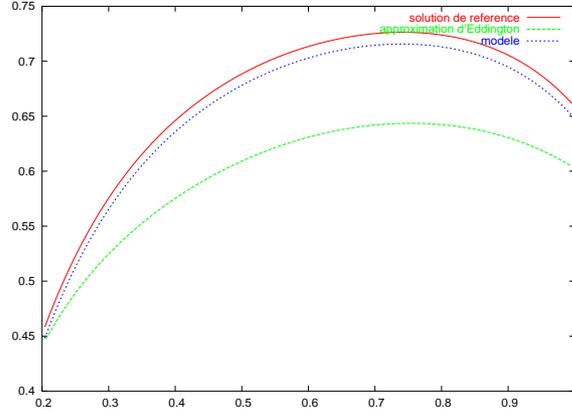


FIG. 9.5 – Test numérique 1D

(formellement) de la solution du problème de transport associé. Nous chercherons $[\gamma]$ dépendant de :

- une longueur de gradient $\frac{|\vec{\nabla} E|}{E}$.
- des données géométriques du problème.

Décrivons brièvement la façon d'obtenir les conditions aux limites pour l'équation de diffusion : Introduisons les quantités $F := \vec{F} \cdot \vec{n}_b$ sur $\partial\mathcal{D}$ et

$$F^+ := \int_{\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}_b > 0} I(x, \vec{\Omega}') \vec{\Omega}' \cdot \vec{n}_b d\vec{\Omega}',$$

et

$$F^- := \int_{\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}_b < 0} I(x, \vec{\Omega}') \vec{\Omega}' \cdot \vec{n}_b d\vec{\Omega}',$$

tels que $F = F^+ - F^-$. En utilisant la définition de l'albedo $1 - \omega$, on obtient $F^- = (1 - \omega)F^+$ donc $F^+ - F^- = \omega F^+ = F$.

D'autre part,

$$F = \vec{F} \cdot \vec{n}_b = -\frac{c}{\sigma} \vec{\nabla}[\gamma] E \cdot \vec{n}_b. \quad (9.31)$$

De plus, on suppose que l'intensité radiative satisfait à l'approximation P1 sur le bord :

$$I(x, \vec{\Omega}) = \frac{cE}{4\pi} + \frac{3}{4\pi} \vec{\Omega} \cdot \vec{F}. \quad (9.32)$$

On obtient donc

$$\omega F^+ = \omega \int_{\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}_b > 0} \left(\frac{cE}{4\pi} + \frac{3}{4\pi} \vec{\Omega}' \cdot \vec{F} \right) \vec{\Omega}' \cdot \vec{n}_b d\vec{\Omega}', \quad (9.33)$$

et

$$\omega F^+ = 2\pi\omega \int_0^1 \left(\frac{cE}{4\pi} - \frac{3\mu\lambda c}{4\pi\sigma} \vec{\nabla} E \cdot \vec{n}_b \right) \mu d\mu = \omega \frac{cE}{4} - \frac{\omega}{2} \frac{c\lambda}{\sigma} \vec{\nabla} E \cdot \vec{n}_b. \quad (9.34)$$

En utilisant (9.31) et (9.34), on obtient une condition aux limites sur l'énergie radiative E :

$$\omega E + 2(2 - \omega) \frac{1}{\sigma} \vec{\nabla}[\gamma] E \cdot \vec{n}_b = 0. \quad (9.35)$$

Remarque 9.3.1

La quantité

$$\frac{2(2 - \omega)}{\sigma\omega},$$

représente la longueur d'extrapolation.

Dans le but de calculer $[\gamma]$, on applique donc la même méthode que celle introduite dans [68] et décrite brièvement sur un exemple simple au paragraphe 9.2.1. Nous supposons qu'en un point donné x dans \mathcal{D} , l'intensité radiative est constante par morceaux en fonction de la variable angulaire $\vec{\Omega}$.

Modèle à deux intensités

On introduit tout d'abord $S_T(x)$ le sous ensemble de \mathcal{S}^2 contenant tous les angles solides pointant vers les trous du domaine à partir du point x et $S_T^c(x) = \mathcal{S}^2 \setminus S_T(x)$. On effectue l'hypothèse suivante

$$I(x, \vec{\Omega}) = \begin{cases} I_1(x) & \text{pour } \vec{\Omega} \in S_T(x) \\ I_2(x) & \text{pour } \vec{\Omega} \in S_T^c(x). \end{cases} \quad (9.36)$$

Cette hypothèse peut être justifiée en considérant la solution numérique de l'équation de transport obtenue avec la méthode DSN, la figure 9.6 présente l'intensité radiative en fonction de $\vec{\Omega}$ en un point donné x de \mathcal{D} proche du trou de droite. On distingue clairement deux paliers sur S_T et S_T^c .

L'intensité $I_1(x)$ est l'intensité radiative moyenne résultant de l'émission des trous (et du milieu) et $I_2(x)$ est l'intensité radiative moyenne résultant de l'émission des parois (et du milieu). On définit aussi :

$$\alpha_1 := \int_{S_T} d\vec{\Omega} \quad \text{et} \quad \alpha_2 := \int_{S_T^c} d\vec{\Omega}, \quad (9.37a)$$

les vecteurs :

$$\vec{v}_1 := \int_{S_T} \vec{\Omega} d\vec{\Omega} \quad \text{and} \quad \vec{v}_2 := \int_{S_T^c} \vec{\Omega} d\vec{\Omega}, \quad (9.37b)$$

et les tenseurs :

$$[m_1] := \int_{S_T} \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega} d\vec{\Omega} \quad \text{and} \quad [m_2] := \int_{S_T^c} \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega} d\vec{\Omega}. \quad (9.37c)$$

Toutes ces expressions peuvent être calculées analytiquement en effectuant des calculs d'angles solides. En utilisant l'hypothèse (9.38), on obtient le système de trois équations à trois inconnues

suivant :

$$\begin{cases} E = \frac{1}{c} I_1 \int_{S_T} d\vec{\Omega} + \frac{1}{c} I_2 \int_{S_T^c} d\vec{\Omega} \\ \vec{F} = I_1 \int_{S_T} \vec{\Omega} d\vec{\Omega} + I_2 \int_{S_T^c} \vec{\Omega} d\vec{\Omega} \\ [\gamma] E = \frac{1}{c} I_1 \int_{S_T} \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega} d\vec{\Omega} + \frac{1}{c} I_2 \int_{S_T^c} \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega} d\vec{\Omega}, \end{cases} \quad (9.38)$$

où les inconnues sont I_1 , I_2 et $[\gamma]$. On peut par exemple résoudre ce système en projetant les seconde et troisième équations du système suivant une direction appropriée ou calculer directement un tenseur d'Eddington en fonction de \vec{f} .

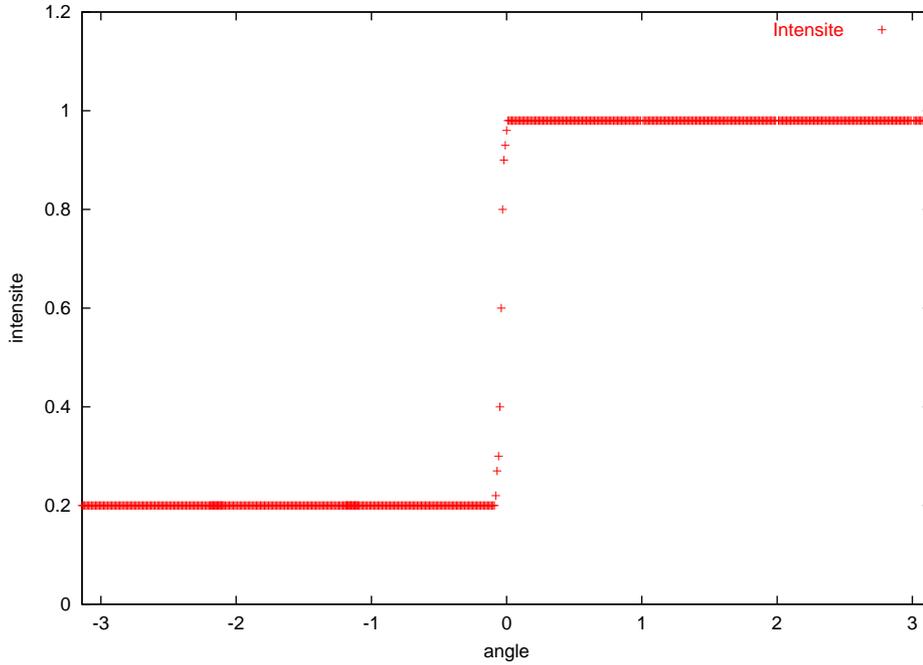


FIG. 9.6 – Intensité radiative fonction de l’angle, proche du trou de droite du domaine \mathcal{D} (résultats obtenus sur une grille uniforme 100×100 en espace et en utilisant une quadrature S_{64} en angle).

Solution du système

On vérifie aisément que :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 4\pi, \quad (9.39a)$$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 0, \quad (9.39b)$$

et

$$[m_1] + [m_2] = \frac{4}{3} \pi [Id]. \quad (9.39c)$$

En substituant les relations (9.39) dans (9.38), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 \bar{u}_1 + 4\pi u_2 \\ \vec{f} = \vec{v}_1 \bar{u}_1 \\ [\gamma] = [m_1] \bar{u}_1 + \frac{4\pi}{3} [Id] u_2, \end{cases} \quad (9.40)$$

où

$$\vec{f} := \frac{\vec{F}}{cE}. \quad (9.41)$$

Les nouvelles inconnues sont :

$$\bar{u}_1 := \frac{1}{cE} (I_1 - I_2), \quad u_2 := \frac{1}{cE} I_2 \quad \text{et} \quad [\gamma].$$

Remarquons que f doit satisfaire la relation suivante (critère indispensable dans la théorie flux-limitée) :

$$|\vec{f}| \leq 1. \quad (9.42)$$

De plus, \vec{f} et $[\gamma]$ (les moments d'ordre 1 et 2 de l'intensité radiative $\frac{I}{cE}$) doivent satisfaire aux contraintes suivantes :

$$\text{tr}([\gamma]) = 1, \quad (9.43)$$

$$[\gamma] - \vec{f} \otimes \vec{f} \geq 0. \quad (9.44)$$

En multipliant la première équation du système (9.40) par $\frac{1}{3}[Id]$ et en la soustrayant à la troisième équation, on obtient :

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 \bar{u}_1 + 4\pi u_2 \\ \vec{f} = \vec{v}_1 \bar{u}_1 \\ [\gamma] = \frac{1}{3}[Id] + \left([m_1] - \frac{\alpha_1}{3} [Id] \right) \frac{\vec{f} \cdot \vec{v}_1}{|\vec{v}_1|^2}. \end{cases} \quad (9.45)$$

Calcul du tenseur d'Eddington

Pour résoudre le système surdéterminé (9.45), l'idée est de projeter l'équation

$$\vec{f} = \vec{v}_1 \bar{u}_1 \quad (9.46)$$

sur une direction appropriée. On peut par exemple utiliser le vecteur \vec{v}_1 (ce vecteur ne s'annule qu'au centre du domaine) de sorte que $\bar{u}_1 = \frac{\vec{f} \cdot \vec{v}_1}{|\vec{v}_1|^2}$ ou utiliser le vecteur \vec{R} . On déduit de (9.45) une expression du tenseur d'Eddington fonction de f et des données géométriques du domaine. On peut ainsi comparer le tenseur d'Eddington obtenu en projetant l'équation (9.46) suivant \vec{v}_1 et le tenseur d'Eddington exact obtenu à l'aide d'une simulation numérique d'un problème de transport (cas d'une géométrie plane avec $\frac{H}{L} = 0.3$, $\sigma = 0.1$, figures 9.7 et 9.8)

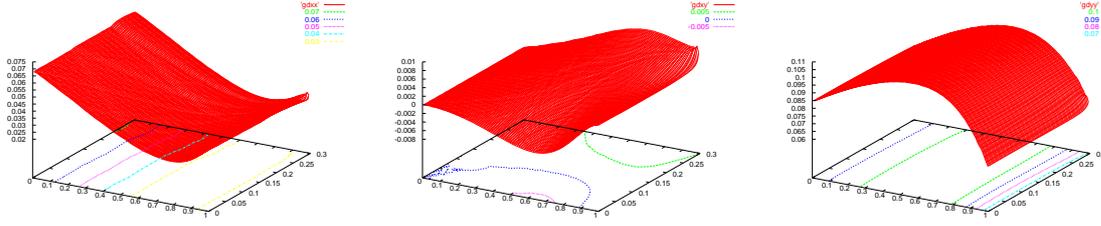


FIG. 9.7 – Carte des composantes du tenseur d'Eddington issu du modèle à deux intensités

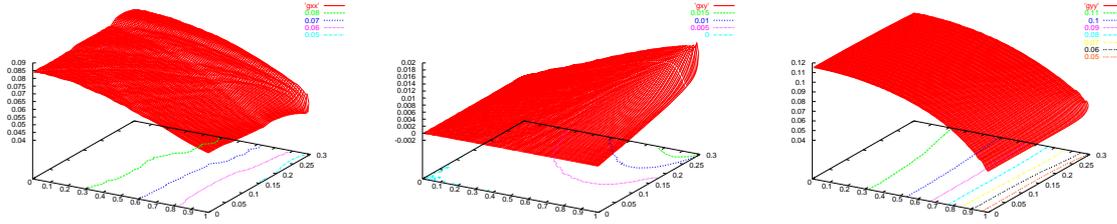


FIG. 9.8 – Carte des composantes du tenseur d'Eddington exact obtenu par une simulation numérique transport

9.4 Calcul d'un facteur d'Eddington scalaire et d'un limiteur de flux associé

9.4.1 Calcul d'un facteur d'Eddington scalaire γ

Suivant la théorie de D.Levermore [61], nous cherchons dans ce paragraphe un facteur d'Eddington scalaire γ défini par :

$$\gamma \vec{n} = [\gamma] \vec{n}. \quad (9.47)$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire $\vec{f}/|\vec{f}|$. On obtient alors la relation suivante (voir [61]) :

$$[\gamma] = \frac{1-\gamma}{2} [Id] + \frac{3\gamma-1}{2} \vec{n} \otimes \vec{n}. \quad (9.48)$$

Ce modèle est une généralisation de l'approximation d'Eddington (9.14). Pour pouvoir calculer γ , il convient d'utiliser le tenseur $[\gamma]$ introduit dans la section précédente.

Remarquons tout d'abord que le vecteur \vec{v}_1 est un vecteur propre de la matrice $[m_1]$ et notons m_1 la valeur propre associée. On a donc :

$$[m_1] \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = m_1 \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|}. \quad (9.49)$$

La troisième équation de (9.45) montre que \vec{v}_1 est aussi un vecteur propre de $[\gamma]$. En utilisant (9.47) on obtient :

$$\gamma = \frac{1}{3} + m_1 \bar{u}_1 - \frac{\alpha_1}{3} \bar{u}_1. \quad (9.50)$$

On peut alors exprimer \bar{u}_1 en fonction de \vec{f} . La seconde équation de (9.45) montre que \vec{v}_1 est de même direction que \vec{n} ($\vec{n} = -\frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|}$) et on a :

$$\bar{u}_1 = \frac{|\vec{f}|}{|\vec{v}_1|}.$$

Finalement, on obtient :

$$\gamma = \frac{1}{3} + \frac{m_1 - \frac{\alpha_1}{3}}{|\vec{v}_1|} \frac{|\vec{F}|}{cE}. \quad (9.51)$$

On peut réécrire cette équation comme suit :

$$\gamma(f) = \frac{1}{3} - h_1 f, \quad (9.52)$$

où h_1 est défini par :

$$h_1 = \frac{\frac{\alpha_1}{3} - m_1}{|\vec{v}_1|} = \frac{\frac{1}{3} \int_{S_T} d\vec{\Omega} - \int_{S_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n})^2 d\vec{\Omega}}{|\int_{S_T} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} d\vec{\Omega}|}, \quad (9.53)$$

et

$$f = \frac{|\vec{F}|}{cE}.$$

9.4.2 Calcul d'un limiteur de flux λ

Dans cette section, on cherche à relier le facteur d'Eddington γ à un limiteur de flux λ . On considère le système :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{f}E) + \sigma(E - S) = 0 \quad (9.54)$$

$$\vec{\nabla} \cdot ([\gamma]E) + \sigma \vec{f}E = 0. \quad (9.55)$$

En multipliant l'équation (9.54) par \vec{f} et en soustrayant cette expression à l'équation (9.55), on trouve :

$$\vec{\nabla} \cdot ([\gamma] - \vec{f} \otimes \vec{f})E + \sigma \vec{f}S = 0. \quad (9.56)$$

On suppose à présent que l'on peut négliger les variations spatiales de $[\gamma]$ et \vec{f} , et on en déduit, voir [61], une relation algébrique entre $[\gamma]$, \vec{f} , E and $\vec{\nabla}E$:

$$([\gamma] - \vec{f} \otimes \vec{f}) \vec{R} = \vec{f}, \quad (9.57)$$

où \vec{R} est le gradient sans dimension donné par :

$$\vec{R} = -\frac{\vec{\nabla}E}{\sigma S}. \quad (9.58)$$

Les quantités $R := |\vec{R}|$ et f sont liées par la relation suivante :

$$R = \frac{f}{\gamma(f) - f^2}. \quad (9.59)$$

Cette relation nous permet de définir un limiteur de flux λ tel que

$$f = \lambda(R)R \text{ ou } \lambda(R) = \gamma(f) - f^2, \quad (9.60)$$

et donc le flux :

$$\vec{F} = -\frac{c\lambda(R)\vec{\nabla}E}{\sigma}. \quad (9.61)$$

On calcule donc le limiteur de flux $\lambda(R)$ associé au facteur d'Eddington $\gamma(f)$. On a :

$$\lambda(R) = \frac{1}{3} - h_1\lambda(R)R - \lambda^2(R)R^2, \quad (9.62)$$

soit :

$$\lambda(R) = \frac{2}{3(h_1R + 1)^2 + \sqrt{9(1 + h_1R)^2 + 12R^2}}. \quad (9.63)$$

9.4.3 Propriétés de γ et λ

Dans ce paragraphe, nous proposons d'étudier le comportement du facteur d'Eddington scalaire γ (et du limiteur de flux λ) en fonction de σ et f .

Dans [61], C.D.Levermore donnent quatre conditions sur γ et λ :

$$(C1) \quad \lambda(R) + \lambda(R)^2R^2 \leq 1.$$

$$(C2) \quad \gamma(0) = \frac{1}{3} \text{ et } \lambda(0) = \frac{1}{3}.$$

$$(C3) \quad \lambda(R) + \lambda(R)^2R^2 \text{ est une fonction croissante de } R.$$

$$(C4) \quad \gamma(f) - f^2 \text{ est une fonction décroissante de } f.$$

Les conditions (C1), (C2) et (C4) sont satisfaites par notre facteur d'Eddington et notre limiteur de flux, mais notre limiteur de flux ne satisfait pas la condition (C3). Pour satisfaire à la condition (C3), le facteur d'Eddington doit être une fonction croissante de f mais ce n'est pas le cas car h_1 est toujours positif, donc $\lambda(R) + \lambda(R)^2R^2$ est une fonction décroissante de R .

Influence du paramètre géométrique h_1

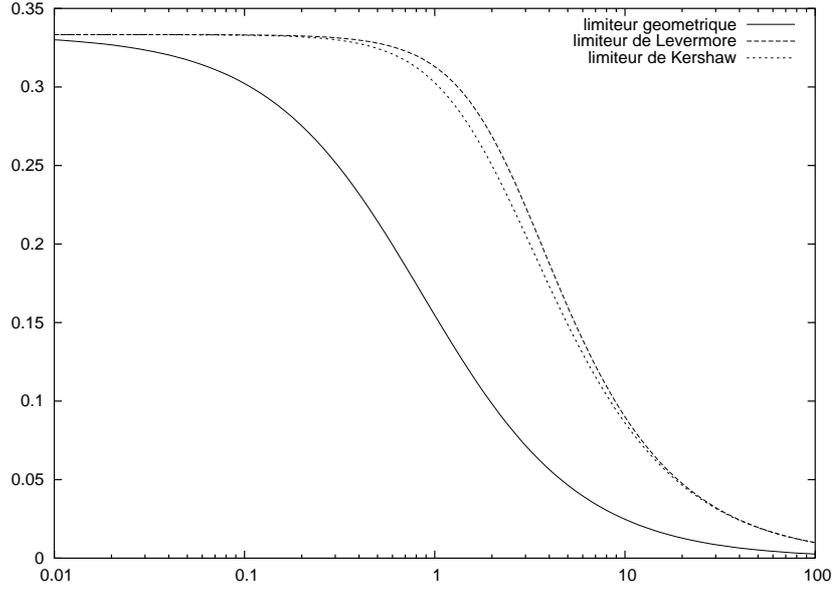
On peut voir que lorsque h_1 est nul, notre limiteur géométrique correspond à la première partie du limiteur de Minerbo (voir [61]) lié au facteur d'Eddington $\gamma(f) = \frac{1}{3}$.

Comportement de λ dans le cas d'un régime diffusif et dans le cas du vide

Dans le cas d'un régime diffusif, i.e. $\sigma \gg 1$, l'approximation d'Eddington est valide et on a $\lambda = \frac{1}{3}$. Pour notre limiteur de flux, on obtient : $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \lambda = \frac{1}{3}$, et dans le cas du vide : $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \lambda = 0$.

Influence du gradient

Une des propriétés essentielles d'un limiteur de flux est de décroître lorsque la norme du gradient de l'énergie radiative croît, on a donc : $\lim_{R \rightarrow 0} \lambda = \frac{1}{3}$, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \lambda = 0$. Le cas $f = 0$ correspond à un régime isotrope et l'approximation d'Eddington est valide $\gamma(0) = \frac{1}{3}$ et $\lambda(0) = \frac{1}{3}$. Nous comparons sur la figure 9.9 le comportement de notre limiteur avec d'autres limiteurs classiques en fonction de R pour $h_1 = 1$.


 FIG. 9.9 – Comportement de limiteurs de flux en fonction de R

9.5 Schémas numériques

Pour résoudre l'équation du transfert radiatif, on utilise la méthode des éléments finis mixtes-hybrides sur un maillage Cartésien très fin.

Pour résoudre les équations de la diffusion, on utilise le schéma mixte-hybride pour la diffusion.

Remarquons qu'il n'existe pas de résultats généraux sur l'existence et l'unicité de solutions pour un tel problème de diffusion. En effet, le coefficient de diffusion dépend du gradient de la solution, on résout donc un problème de diffusion non linéaire. Cependant, on observe la convergence des algorithmes du point fixe suivant.

Algorithme pour le tenseur d'Eddington géométrique (algorithme 1)

Étape 1 : Initialisation : résolution de l'équation de diffusion avec $[\gamma^0] = \frac{1}{3}[Id]$ (approximation d'Eddington) et donc le coefficient de diffusion scalaire $\tilde{\gamma}^0 = \frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{3\sigma} \nabla E^0 \right) + \sigma E^0 = \sigma S & \text{dans } \mathcal{D}, \\ \omega E^0 + 2(2 - \omega) \frac{1}{3\sigma} \vec{\nabla} E^0 \cdot \vec{n}_b = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D}. \end{cases} \quad (9.64)$$

Pour tout $k \geq 0$, on calcule $\vec{F}_0 = \frac{-c\tilde{\gamma}^0}{\sigma} \vec{\nabla} E^0$ soit $\vec{f}_0 = \frac{\vec{F}_0}{cE^0}$.

Étape 2 : On calcule $[\gamma^k]$ à l'aide du modèle et de \vec{f}^{k-1} .

Étape 3 : Pour tout $k \geq 0$, on calcule la solution E^k du problème de diffusion avec $\tilde{\gamma}^k$ donné par

$$\tilde{\gamma}^k = \frac{\vec{\nabla}[\gamma^k]E^k \cdot \vec{\nabla}E^k}{|\vec{\nabla}E^k|^2},$$

$$\begin{cases} -\vec{\nabla} \left(\frac{\tilde{\gamma}^k}{\sigma} \nabla E^k \right) + \sigma E^k = \sigma S & \text{dans } \mathcal{D}, \\ \omega E^k + 2(2 - \omega) \frac{\tilde{\gamma}^k}{\sigma} \vec{\nabla} E^k \cdot \vec{n}_b = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D}. \end{cases} \quad (9.65)$$

Étape 4 : On boucle sur l'étape 3 tant que $\|E^k - E^{k-1}\|_1$ reste plus grande qu'un paramètre de convergence fixé.

Algorithme pour le limiteur de flux géométrique (algorithme 2)

Étape 1 : Initialisation : résolution de l'équation de diffusion avec $\lambda(R) = \frac{1}{3}$ (approximation d'Eddington) :

$$\begin{cases} -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{3\sigma} \nabla E^0 \right) + \sigma E^0 = \sigma S & \text{dans } \mathcal{D}, \\ \omega E^0 + 2(2 - \omega) \frac{1}{3\sigma} \vec{\nabla} E^0 \cdot \vec{n}_b = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D}. \end{cases} \quad (9.66)$$

Étape 2 : On calcule $R^0 = -\frac{|\vec{\nabla} E^0|}{S}$.

Étape 3 : Pour tout $k \geq 0$, on calcule la solution E^k du problème de diffusion avec λ donné par l'expression du limiteur géométrique, en fonction de R^{k-1} :

$$\begin{cases} -\vec{\nabla} \left(\frac{\lambda}{\sigma} (R^{k-1}) \nabla E^k \right) + \sigma E^k = \sigma S & \text{dans } \mathcal{D}, \\ \omega E^k + 2(2 - \omega) \frac{\lambda(R^{k-1})}{\sigma} \vec{\nabla} E^k \cdot \vec{n}_b = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D}. \end{cases} \quad (9.67)$$

Étape 4 : On calcule $R^k = -\frac{|\vec{\nabla} E^k|}{S}$ et on boucle sur l'étape 3 tant que $\|E^k - E^{k-1}\|_1$ reste plus grande qu'un paramètre de convergence fixé.

9.6 Résultats Numériques

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques résultats numériques permettant de comparer les différents modèles d'approximation par la diffusion proposés.

9.6.1 Limiteurs de flux utilisés dans les simulations numériques

Dans ce paragraphe, nous cherchons notamment à comparer les résultats obtenus par notre modèle géométrique avec les résultats obtenus en utilisant quelques limiteurs de flux classiques de la littérature, nous en donnons ici une liste non exhaustive :

limiteur de Wilson :

$$\lambda(R) = \frac{1}{3 + R},$$

associé au facteur d'Eddington

$$\gamma(f) = \frac{1 - f + 3f^2}{3}.$$

limiteur de Chapman-Enskog :

$$\lambda(R) = \frac{1}{R} \left(\coth R - \frac{1}{R} \right),$$

associé au facteur d'Eddington

$$\gamma = \coth R \left(\coth R - \frac{1}{R} \right),$$

avec

$$f = \coth R - \frac{1}{R}.$$

limiteur de Kershaw :

$$\lambda(R) = \frac{2}{3 + \sqrt{9 + 4R^2}},$$

associé au facteur d'Eddington

$$\gamma(f) = \frac{1 + 2f^2}{3}.$$

9.6.2 Résultats obtenus pour le tenseur d'Eddington géométrique

On présente sur les figures 9.10 et 9.11 les résultats obtenus pour $\sigma = 0.1$ et $\frac{H}{L} = 0.3$ (les notations sont celles de la figure 9.3). Nous sommes donc dans une situation où l'approximation d'Eddington ne s'applique. D'autre part, nous ne sommes pas non plus dans la situation du théorème 8.2.1 car $H \sim \sigma$. Nous présentons les résultats obtenus pour un calcul de transport comparé avec l'approximation de la diffusion, la résolution d'un problème de diffusion à flux limité, la résolution d'un problème de diffusion utilisant un coefficient de diffusion calculé par une simulation Monte-Carlo et la résolution d'un problème de diffusion utilisant l'algorithme 1 présenté précédemment. On observe que les résultats obtenus par la résolution d'un problème de diffusion utilisant l'algorithme 1 et notre modèle à deux intensités sont sensiblement meilleurs que les résultats obtenus en utilisant la théorie de la diffusion flux-limitée.

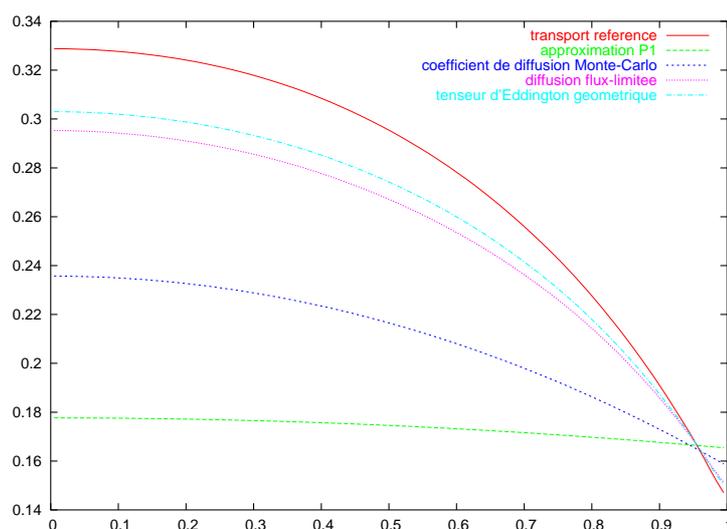
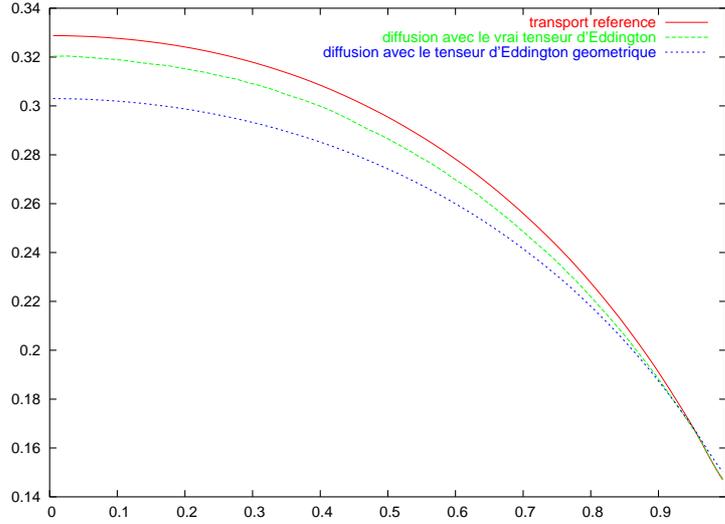


FIG. 9.10 – Coupe de l'énergie dans le cas où $\sigma = 0.1$ et $\frac{H}{L} = 0.3$.


 FIG. 9.11 – Coupe de l'énergie dans le cas où $\sigma = 0.1$ et $\frac{H}{L} = 0.3$.

Comme on l'a vu dans les paragraphes précédents, on peut approcher, en utilisant un code de transport, le tenseur d'Eddington idéal en calculant en tout point du domaine :

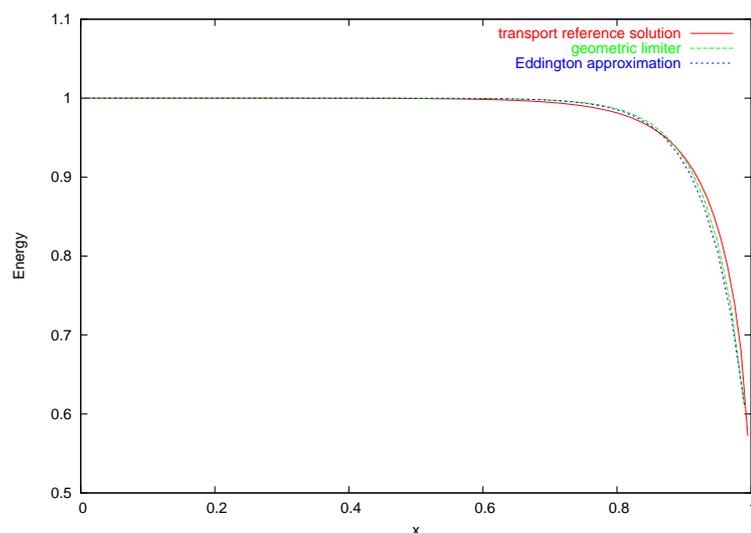
$$[\gamma](x) = \frac{1}{cE} \int_{4\pi} I(x, \vec{\Omega}) \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega} d\vec{\Omega}. \quad (9.68)$$

Ce tenseur d'Eddington, le facteur d'Eddington et le limiteur de flux associés sont optimaux pour l'approximation numérique par la diffusion d'un problème de transport. On compare ainsi sur la figure 9.11 les résultats obtenus par l'algorithme 1 en utilisant un tenseur d'Eddington calculé par un code de transport et un tenseur d'Eddington obtenu par le modèle à deux intensités. Le résultat pour le tenseur d'Eddington issu d'un code de transport montre les limites d'un modèle de diffusion utilisant un coefficient de diffusion scalaire. Notons que si on résolvait un problème de diffusion en conservant le tenseur d'Eddington, nous obtiendrions exactement le même résultat que pour le transport.

9.6.3 Résultats obtenus pour le limiteur de flux géométrique

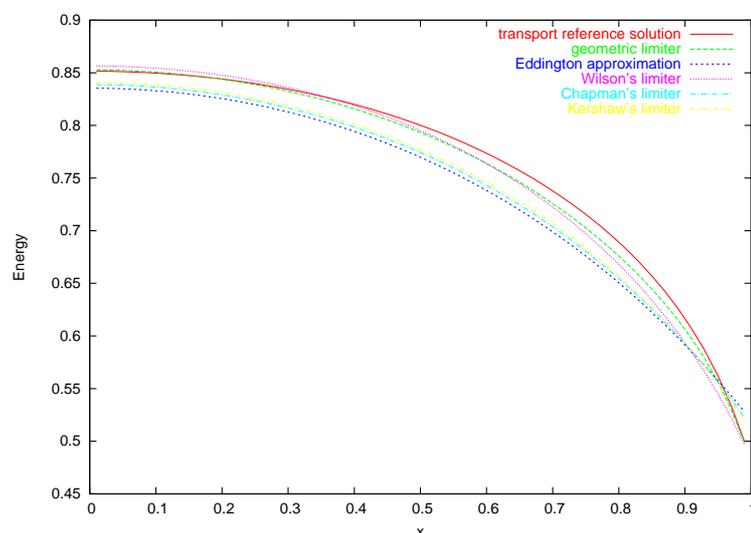
On considère dans le cas d'un problème confiné entre deux plaques planes avec des conditions de réflexion sur les parois des plaques, un flux entrant nul sur les trous et une source constante égale à 1 ($S=1$) sur tout le domaine. Sur les figures 9.12, 9.13 et 9.14, on compare une solution de référence (obtenus par la résolution du problème de transport) à une solution obtenue avec l'approximation d'Eddington et une solution obtenue avec notre limiteur de flux géométrique. Ces résultats numériques sont calculés en deux dimensions d'espace (sur une grille uniforme 50×50) mais les résultats présentent une coupe du profil de l'énergie sur un quart du domaine \mathcal{D} en raison des symétries du problème considéré. En reprenant les notations introduites sur la figure 9.3, ces résultats numériques sont obtenus pour les valeurs suivantes des paramètres : $L = 2$, $H = 1$, $h = 0$ et l'albedo sur les parois vaut $\omega = 0$.

On constate que dans tous les cas considérés, l'énergie est mieux approchée par le limiteur géométrique que par l'approximation standard de la diffusion (approximation d'Eddington P1)

FIG. 9.12 – Coupe de l'énergie pour $\sigma = 10$

ou par tout autre limiteur de flux. C'est particulièrement vrai dans les zones proches des trous où le gradient d'énergie est le plus élevé.

La figure 9.12 présente le profil de l'énergie pour une valeur élevée de σ par rapport aux grandeurs caractéristiques du problème. Nous résolvons donc un cas isotrope où tous les modèles sont construits pour donner des résultats semblables.

FIG. 9.13 – Coupe de l'énergie pour $\sigma = 1$

Sur la figure 9.13, on présente un cas où l'opacité σ est plus petite, le libre parcours moyen des particules est donc plus grand et on atteint les limites de validité de l'approximation standard de la diffusion. Il semble que le limiteur géométrique soit plus performant que les autres limiteurs. Lorsque l'opacité σ est proche de zero, le limiteur géométrique semble toujours donner

de meilleurs résultats que les autres limiteurs mais les résultats obtenus restent tout de même relativement loin de la solution de référence (comme on peut le voir sur la figure 9.14) à cause des limites de validité des modèles de diffusion flux limitée. Comme dans le paragraphe précédent, on utilise le limiteur de flux idéal issu d’une simulation du transport (limiteur de flux du transport).

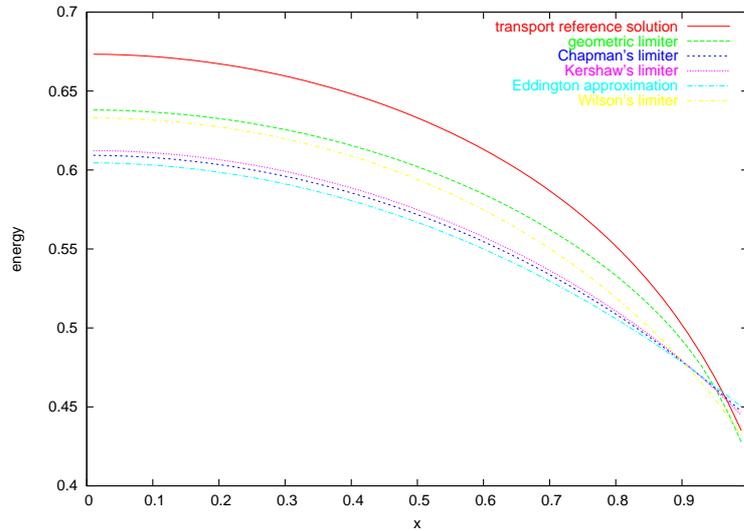


FIG. 9.14 – Coupe de l’énergie pour $\sigma = 0.5$

9.6.4 Comparaison des modèles

Dans ce paragraphe, nous comparons sous forme de tableau les erreurs relatives en norme L^1 (sur un maillage cartésien fixé 50×50) des différents modèles proposés comparés à une solution de référence obtenue par le schéma de transport mixte-hybride. Les résultats sont obtenus pour une valeur de $\frac{H}{L} = 0.3$ (les notations sont celles de la figure 9.2). Nous comparons les modèles suivants :

- **Modèle 1** : Diffusion suivant l’algorithme 1 avec le “vrai” tenseur d’Eddington calculé à partir du code de transport,
- **Modèle 2** : Diffusion suivant l’algorithme 1 avec le tenseur d’Eddington obtenu à partir du modèle géométrique,
- **Modèle 3** : Diffusion suivant l’algorithme 2 avec le limiteur de flux issu du modèle géométrique,
- **Modèle 4** : Diffusion suivant l’algorithme 2 avec le limiteur de flux de Kershaw,
- **Modèle 5** : Approximation d’Eddington (coefficient de diffusion constant égal à $\frac{1}{3\sigma}$,
- **Modèle 6** : Diffusion avec un coefficient de diffusion obtenu par des simulations Monte-Carlo (voir chapitre 8).

Modèles proposés	$\sigma = 10$	$\sigma = 5$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.1$
Modèle 1	$2,5632.10^{-3}$	$3,2084.10^{-3}$	$4,1265.10^{-3}$	$5,0162.10^{-3}$	$5,4229.10^{-3}$
Modèle 2	$1,9720.10^{-3}$	$3,5023.10^{-3}$	$6,4054.10^{-3}$	$8,7881.10^{-3}$	$4,0256.10^{-2}$
Modèle 3	$2,0265.10^{-3}$	$3,4520.10^{-3}$	$9,8965.10^{-3}$	$2,7842.10^{-2}$	$8,2900.10^{-2}$
Modèle 4	$1,8863.10^{-3}$	$3,7582.10^{-3}$	$2,1658.10^{-2}$	$7,5568.10^{-2}$	0,11035
Modèle 5	$2,0301.10^{-3}$	$5,1092.10^{-3}$	$5,9752.10^{-2}$	0,14065	0,34017
Modèle 6	$2,6084.10^{-3}$	$5,0012.10^{-3}$	$3,7087.10^{-2}$	0,10123	0,17891

Pour les valeurs de $\sigma = 10$ et $\sigma = 5$, l'approximation d'Eddington (modèle 5) est valide et tous les modèles proposés sont construits pour préserver cette limite asymptotique. Les résultats obtenus pour ces cas tests sont donc sensiblement les mêmes pour tous les modèles.

Au contraire, pour $\sigma = 0.1$, l'approximation d'Eddington (modèle 5) n'est plus valide et l'approximation obtenue par ce modèle n'est pas bonne. De même, le calcul d'un coefficient de diffusion via un calcul Monte-Carlo (modèle 6) n'est plus licite. Par ailleurs, les résultats obtenus à l'aide des limiteurs de flux (modèle 3 et modèle 4) ne sont pas satisfaisants lorsque σ tend vers zéro. Les résultats obtenus avec le tenseur d'Eddington obtenu à l'aide d'un code de transport et l'algorithme 1 (modèle 1) sont optimaux aux erreurs numériques près. Enfin, les résultats obtenus à l'aide d'un tenseur d'Eddington géométrique (modèle 2) sont sensiblement meilleurs que ceux obtenus par l'intermédiaire de limiteurs de flux. Ces résultats ne rivalisent cependant pas avec les résultats du modèle 1.

Bilan du chapitre 9

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle expression du tenseur d'Eddington, d'un facteur d'Eddington associé et du limiteur de flux résultant adaptés pour l'approximation numérique des problèmes de transfert radiatif dans une cavité laser. Dans ce cas, l'approximation standard de la diffusion et la théorie classique de la diffusion flux limitée ne s'applique plus car le libre parcours moyen des photons et la longueur de gradient caractéristique sont grandes devant les dimensions caractéristiques de la cavité. Ainsi, le tenseur d'Eddington proposé tient compte des caractéristiques géométriques de la cavité.

Cependant, les résultats obtenus avec ce nouveau tenseur d'Eddington (ou du limiteur de flux correspondant), bien que meilleur que ceux obtenus avec les limiteurs de flux classiques, ne sont

pas encore complètement satisfaisants. Il faudrait étudier le problème posé par les conditions aux limites et envisager un modèle à trois intensités en dissociant chacun des deux trous par exemple.

Conclusions et perspectives

Au cours de cette thèse, nous avons proposé un nouveau schéma numérique de résolution de l'équation du transport des neutrons, basé sur une méthode d'éléments finis mixtes-hybrides. Nous avons détaillé l'analyse mathématique de la méthode et présenté sa mise en oeuvre numérique et nous avons illustré sur des exemples simples les propriétés essentielles de la méthode.

Un des points clé de cette thèse réside dans l'introduction d'une formulation mixte de l'équation du transport et d'un cadre fonctionnel adapté à l'étude de cette formulation et dans la construction d'espaces d'approximation associés. Les espaces d'approximations utilisés en général dans la mise en oeuvre d'une méthode d'éléments finis mixtes-hybrides pour des équations du second-ordre elliptiques ne sont plus valide dans le cas du transport. Nous avons présenté dans cette thèse un moyen de prendre en compte la spécificité du transport en adaptant ces espaces d'approximation.

Nous avons vu que le schéma possédait la propriété de limite diffusion et avait l'avantage majeur de coïncider avec le schéma mixte-hybride de l'équation de diffusion associée en régime collisionnel. Le schéma permet d'obtenir une excellente approximation de la solution dans des milieux diffusifs. Cependant, dans des milieux à forts contrastes d'opacité, le schéma est mis en défaut dès que le maillage n'est pas suffisamment fin (pas d'espace de l'ordre du libre parcours moyen). Nous avons proposé une méthode de décomposition de domaine qui permet d'éviter ce type de problèmes mais cela conduit à coupler deux schémas mixtes-hybrides indépendants. Pour cette raison, il pourrait être intéressant d'adapter le schéma de sorte à bien rendre compte des phénomènes à l'interface entre un milieu opaque et un milieu transparent.

Les résultats numériques obtenus sont aussi très satisfaisants sur des maillages déformés même dans des milieux très diffusifs. Nous avons constaté numériquement qu'à l'instar d'un schéma mixte-hybride pour la diffusion, le schéma mixte-hybride pour le transport reste précis d'ordre deux en espace même sur des maillages déformés. Il serait intéressant de justifier théoriquement cette ordre de convergence en espace de la méthode.

Par ailleurs, les essais de décomposition de domaine en dimension un se sont révélés concluants et mériteraient d'être étendus en dimension quelconque. L'un des intérêt des méthodes mixtes est d'être adapté à la décomposition de domaine. Il conviendrait en outre d'approfondir ces essais pour pouvoir utiliser les avantages du calcul parallèle notamment.

En ce qui concerne les problèmes de transport entre deux plaques infinies, il conviendrait d'étudier plus en avant le cas de la diffusion anormale et de l'illustrer par des simulations numériques.

Dans une cavité laser, le modèle géométrique que nous proposons pour l'approximation par la diffusion des équations du transfert radiatif permet d'améliorer les résultats obtenus par des limiteurs de flux classiques et par l'approximation d'Eddington. Cette amélioration n'est cependant pas suffisamment significative. Il conviendrait de prendre en compte plus en détails le problème posé par les conditions aux limites et envisager un modèle à trois intensités en dissociant chacun

des deux trous par exemple.

Annexe A

Éléments finis mixtes-hybrides pour un problème elliptique simple

L'objectif de cette annexe est de présenter la méthode des éléments finis mixtes-hybrides dans son cadre classique des équations elliptiques sur un exemple simple : l'équation de diffusion des neutrons. Cette annexe permet de préciser le schéma mixte-hybride associé à une équation de type diffusion en complément du chapitre 6. On considère un domaine ouvert borné \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 et le problème de diffusion homogène des neutrons suivant :

$$\begin{cases} i) & -\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla} u + \sigma_a u = q, & \text{dans } \mathcal{D}, \\ ii) & u = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{D}. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où u représente le flux scalaire, q est un terme source, σ_t et σ_a sont les sections efficaces totale et d'absorption. Les méthodes d'éléments finis mixtes sont basées sur une formulation duale du problème elliptique (A.1). En introduisant le courant

$$\vec{g} = -\frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla} u,$$

et l'espace fonctionnel

$$H(\text{div}; \mathcal{D}) = \left\{ \vec{g} \in L^2(\mathcal{D})^3; \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \in L^2(\mathcal{D}) \right\},$$

le problème (A.1) peut s'écrire formellement sous forme variationnelle de la façon suivante : trouver $(\vec{g}, u) \in H(\text{div}; \mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D})$ tels que :

$$\begin{cases} a(\vec{g}, \vec{h}) + b(u, \vec{h}) = 0 & \text{pour tout } \vec{h} \in H(\text{div}; \mathcal{D}) \\ b(v, \vec{g}) - d(u, v) = l(v) & \text{pour tout } v \in L^2(\mathcal{D}), \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où, pour tout $(\vec{g}, \vec{h}) \in H(\text{div}; \mathcal{D}) \times H(\text{div}; \mathcal{D})$,

$$a(\vec{g}, \vec{h}) = \int_{\mathcal{D}} 3\sigma_t \vec{g} \cdot \vec{h} \, dx, \quad (\text{A.3})$$

pour tout $(u, \vec{h}) \in L^2(\mathcal{D}) \times H(\text{div}; \mathcal{D})$,

$$b(u, \vec{h}) = - \int_{\mathcal{D}} u \vec{\nabla} \cdot \vec{h} \, dx, \quad (\text{A.4})$$

pour tout $(u, v) \in L^2(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D})$,

$$d(u, v) = \int_{\mathcal{D}} \sigma_a u v \, dx, \quad (\text{A.5})$$

et pour tout $v \in L^2(\mathcal{D})$,

$$l(v) = - \int_{\mathcal{D}} q v \, dx. \quad (\text{A.6})$$

On suppose que \mathcal{D} admet une décomposition \mathcal{D}_h d'un nombre fini d'éléments ouverts où h représente la longueur maximale de chaque élément (notés Q_k) de \mathcal{D}_h :

$$\overline{\mathcal{D}} = \bigcup_{k=1}^K \overline{Q_k} \quad \text{et} \quad Q_k \cap Q_{k'} = \emptyset \quad 1 \leq k \neq k' \leq K \quad (\text{A.7})$$

où K est le nombre d'éléments de \mathcal{D}_h . Dans ce manuscrit, on ne considérera que le cas d'éléments quadrilatéraux en 2D et hexaédraux en 3D. On note \mathcal{F}_h l'ensemble des faces de la discrétisation \mathcal{D}_h et on notera \mathcal{F}_h^{int} l'ensemble des faces situées à l'intérieur de \mathcal{D} . Nous supposons par ailleurs que l'intersection des frontières de chaque éléments ∂Q_k avec $\partial \mathcal{D}$, si elle est non vide, est un côté ou une face de Q_k . Pour $1 \leq k \leq K$, on note $\Gamma_{k,l}$, $1 \leq l \leq L(k)$ les faces de l'élément Q_k où $L(k) = 2d$ est le nombre de faces pour l'élément Q_k . On note $\vec{n}_{k,l}$ le vecteur normal unitaire sortant par la face $\Gamma_{k,l}$ de l'élément Q_k . Pour décrire les espaces d'approximation, on définit sur chaque élément Q_k , respectivement $\Gamma_{k,l}$, l'espace $P_0(Q_k)$, respectivement $P_0(\Gamma_{k,l})$, des restrictions sur chaque élément Q_k , respectivement $\Gamma_{k,l}$, aux fonctions constantes par morceaux et l'espace $P_1(Q_k)$, respectivement $P_1(\Gamma_{k,l})$, des restrictions sur chaque élément Q_k , respectivement $\Gamma_{k,l}$, des polynômes de degré inférieur ou égal à un. Dans le but d'approcher l'inconnue u , on considère le sous espace d'approximation suivant

$$L_0(\mathcal{D}_h) = \{v_h \in L^2(\mathcal{D}); v_h|_{Q_k} \in P_0(Q_k); Q_k \in \mathcal{D}_h\}.$$

Comme nous l'avons vu précédemment, l'approximation usuelle du flux est basée sur une approximation adaptée de l'espace $H(div; Q_k) = \{\vec{g} \in (L^2(Q_k))^d; \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \in L^2(Q_k)\}$ obtenue notamment à l'aide de l'espace de Raviart-Thomas d'ordre zéro $RT_0(Q_k)$. Il est naturel d'utiliser le champ de vecteurs $\vec{w}_{k,j}$ pour engendrer l'espace $RT_0(Q_k)$ vérifiant :

$$\int_{\Gamma_{k,j}} \vec{w}_{k,j}(x) \cdot \vec{n}_{k,i} \, ds = \delta_{ij}, \quad (\text{A.8})$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker. La famille $\{\vec{w}_{k,j}\}_{1 \leq j \leq 2d}$ forme une base de l'espace $RT_0(Q_k)$. L'espace $RT_0(Q_k)$ est un espace de dimension $2d = 6$ soit le nombre de faces d'une maille hexaédrale en dimension $d = 3$.

La version discrète de (A.2) s'écrit donc : trouver $u_h \in L_0(\mathcal{D}_h)$ et $\vec{g}_h \in RT_0(\mathcal{D}_h)$ tels que

$$\begin{cases} i) & a(\vec{g}_h, \vec{h}_h) + b(u_h, \vec{h}_h) = 0 \quad \text{pour tout } \vec{h}_h \in RT_0(\mathcal{D}_h), \\ ii) & b(v_h, \vec{g}_h) - d(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in L_0(\mathcal{D}_h). \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Le système linéaire associé au problème (A.9) s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h \\ B_h^t & D_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_h \\ U_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_h \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

où la matrice de ce système est inversible mais n'est pas définie positive. En particulier, la structure globale de la matrice A_h ne permet pas d'éliminer facilement le vecteur inconnu des courants. C'est pourquoi on introduit une inconnue supplémentaire. Cette procédure est appelée procédure d'hybridisation et conduit à la formulation mixte-hybride discrète. On introduit l'espace suivant

$$M_0(\mathcal{D}_h) = \left\{ \mu_h \in L^2(\mathcal{F}_h^{int}); \mu_{h|f} \in P_0(f); f \in \mathcal{F}_h^{int} \right\}.$$

En introduisant la forme bilinéaire $c : M_0(\mathcal{D}_h) \times \prod_k RT_0(Q_k) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$c(\mu_h, \vec{g}_h) = \sum_{f \in \mathcal{F}_h^{int}} \int_f \mu_h [\vec{g}_h \cdot \vec{n}] ds,$$

l'approximation mixte-hybride du problème (A.2) consiste donc à trouver

$(\vec{g}_h, u_h, \lambda_h) \in \prod_k RT_0(Q_k) \times L_0(\mathcal{D}_h) \times M_0(\mathcal{D}_h)$ tels que

$$\begin{cases} a(\vec{g}_h, \vec{h}_h) + b(u_h, \vec{h}_h) + c(\lambda_h, \vec{h}_h) = 0 & \text{pour tout } \vec{h}_h \in \prod_k RT_0(Q_k), \\ b(v_h, \vec{g}_h) - d(u_h, v_h) = l(v_h) & \text{pour tout } v_h \in L_0(\mathcal{D}_h), \\ c(\mu_h, \vec{g}_h) = 0 & \text{pour tout } \mu_h \in M_0(\mathcal{D}_h). \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Le système linéaire résultant de la discrétisation mixte-hybride issue du problème abstrait (A.2) s'écrit de la façon suivante

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h & C_h \\ B_h^t & -D_h & 0 \\ C_h^t & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_h \\ u_h \\ \lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

où G_h est le vecteur inconnu des courants sur chaque face de chaque maille de \mathcal{D}_h , U_h est le vecteur inconnu contenant les valeurs moyennes du flux scalaire sur chaque maille de \mathcal{D}_h , λ_h est le vecteur inconnu contenant les valeurs moyennes du flux scalaire sur chaque face du maillage. La matrice du système est une matrice bloc 3×3 symétrique mais qui n'est pas définie. Contrairement au transport, la matrice A_h est inversible. On peut donc éliminer directement le vecteur G_h . On élimine ensuite le vecteur U_h pour inverser une matrice symétrique définie positive pour résoudre un système portant uniquement sur le vecteur inconnu λ_h . La matrice de ce système linéaire est symétrique définie positive. En reprenant les notations du chapitre 5, on peut expliciter les coefficients des matrices élémentaires pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$ et tous $(a, b) \in \{1, \dots, L(k)\}^2$:

$$(A_h^k)_{ab} = 3\sigma_{t,k} \int_{Q_k} \vec{w}_a \cdot \vec{w}_b dx, \quad (B_h^k)_a = -1, \quad (C_h^k)_{ab} = \delta_{ab}, \quad (D_h^k) = \sigma_{a,k} \int_{Q_k} dx.$$

Annexe B

Construction des matrices élémentaires sur maillages cartésiens

L'objectif de cette annexe est de décrire précisément la construction et la structure des matrices élémentaires qui interviennent dans l'élaboration du schéma et du code mixte-hybride 2D sur un maillage cartésien uniforme. On se restreint à une direction fixée notée $\vec{\Omega}$ et une source fixée q . Nous détaillons l'expression des matrices élémentaires sur une maille de référence.

On note $\vec{\Omega} = (\alpha, \beta)^t$. On suppose dans cette annexe que $|\vec{\Omega}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1$. En reprenant les notations du chapitre 4, nous nous plaçons sur une maille Q_k quelconque d'un maillage cartésien \mathcal{D}_h de l'espace physique \mathcal{D} , $Q_k = [x_0, x_0 + h] \times [y_0, y_0 + h]$.

On rappelle que l'on introduit alors les fonctions de base $w_{k,i}^{\vec{\Omega}}(x, y)$ associées à chaque arête i de Q_k qui engendrent l'espace de dimension 4, $RT_0(Q_k) = P_{0,1}(Q_k) \times P_{0,1}(Q_k)$.

Pour tout vecteur \vec{g} , on écrit alors :

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^4 (\vec{g} \cdot \vec{n}_{k,i}) w_{k,i}^{\vec{\Omega}},$$

où

$$\begin{cases} w_{k,1}^{\vec{\Omega}} = \left(\frac{x-x_0}{h}, 0 \right), & w_{k,2}^{\vec{\Omega}} = \left(0, \frac{y-y_0}{h} \right), \\ w_{k,3}^{\vec{\Omega}} = \left(\frac{x-x_0-h}{h}, 0 \right), & w_{k,4}^{\vec{\Omega}} = \left(0, \frac{y-y_0-h}{h} \right). \end{cases}$$

Par soucis de conformité avec les espaces fonctionnels introduits dans la partie théorique, nous utilisons les fonctions de base suivantes pour chaque arêtes i de Q_k

$$\gamma_{k,i}^{\vec{\Omega}} = P_{\Omega} \vec{w}_{k,i}.$$

L'équation de la densité de courant angulaire s'écrit donc sous forme matricielle localement à la maille Q_k (voir le chapitre 5 pour les notations et le vocabulaire) de la façon suivante

$$A_h^k G_h^k + B_h^k U_h^k + C_h^k \lambda_h^k = F_h^k \tag{B.1}$$

où

$$A_h^k = \sigma_{t,k} h^2 \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{3} & \frac{\alpha\beta}{4} & -\frac{\alpha^2}{6} & -\frac{\alpha\beta}{4} \\ \frac{\alpha\beta}{4} & \frac{\beta^2}{3} & -\frac{\alpha\beta}{4} & -\frac{\beta^2}{6} \\ -\frac{\alpha^2}{6} & -\frac{\alpha\beta}{4} & \frac{\alpha^2}{3} & \frac{\alpha\beta}{4} \\ -\frac{\alpha\beta}{4} & -\frac{\beta^2}{6} & \frac{\alpha\beta}{4} & \frac{\beta^2}{3} \end{pmatrix}, B_h^k = -h \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \\ \alpha^2 \\ \beta^2 \end{pmatrix},$$

$$C_h^k = h \begin{pmatrix} \alpha^2 & \frac{\alpha\beta}{2} & 0 & -\frac{\alpha\beta}{2} \\ \frac{\alpha\beta}{2} & \beta^2 & -\frac{\alpha\beta}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha\beta}{2} & \alpha^2 & \frac{\alpha\beta}{2} \\ -\frac{\alpha\beta}{2} & 0 & -\frac{\alpha\beta}{2} & \beta^2 \end{pmatrix} \text{ et } F_h^k = \frac{q_k h^2}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}.$$

La matrice A_h^k est une matrice symétrique 4×4 qui n'est pas inversible, elle est diagonalisable en base orthonormale et s'écrit

$$A_h^k = (V_h^k)^t \Lambda_h^k V_h^k,$$

où

$$V_h^k (V_h^k)^t = Id = (V_h^k)^t V_h^k.$$

Les matrices de passage sont données par

$$V_h^k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\beta & \alpha & \beta & -\alpha \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta & \alpha & \beta \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda_h^k = \sigma_{t,k} h^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On note :

$$\tilde{\Lambda}_h^k = \sigma_k h^2 \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{V}_h^k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\tilde{V}_h^k A_h^k (\tilde{V}_h^k)^t = \tilde{\Lambda}_h^k.$$

On introduit aussi :

$$\tilde{G}_h^k = \tilde{V}_h^k G_h^k.$$

L'équation (B.1) s'écrit donc de façon équivalente :

$$\tilde{\Lambda}_h^k \tilde{G}_h^k + \tilde{V}_h^k B_h^k U_h^k + \tilde{V}_h^k C_h^k \lambda_h^k = \tilde{V}_h^k F_h^k.$$

Notons $\tilde{F}_h^k = \tilde{V}_h^k F_h^k$, on a :

$$\tilde{F}_h^k = -\frac{q h^2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons $D_h^k = -h^2 \sigma_k$, $S_h^k = -q_k h^2$, $\tilde{B}_h^k = \tilde{V}_h^k B_h^k$ et $\tilde{C}_h^k = \tilde{V}_h^k C_h^k$, on a

$$\tilde{C}_h^k = \frac{h}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 & \beta^2 \\ -\alpha & -\beta & \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}_h^k = -\sqrt{2} h \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le système linéaire élémentaire final s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_h^k & \tilde{B}_h^k & \tilde{C}_h^k \\ (\tilde{B}_h^k)^t & -D_h^k & 0 \\ (\tilde{C}_h^k)^t & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{G}_h^k \\ u_h^k \\ \lambda_h^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_h^k \\ S_h^k \\ 0 \end{pmatrix},$$

Annexe C

Ébauche de décomposition de domaine en 1D

Nous nous plaçons ici dans le cadre du problème du transport monocinétique pour une direction fixée. On considère donc dans cette annexe un problème de transport en dimension $d = 1$. On prendra $\mathcal{D} = (0, 1)$ et on choisit $\mu > 0$ une direction angulaire fixée et $u_a \in \mathbb{R}_*^+$. On s'intéresse à l'approximation numérique du problème simplifié du transport :

$$\begin{cases} i) & \mu u'(x) + \sigma_t u(x) = q(x), \quad \text{pour } x \in \mathcal{D}, \\ ii) & u(a) = u_a. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Discrétisation

On partitionne le domaine 1D, $\mathcal{D} = (0, 1)$, en I intervalles $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ où $0 = x_{\frac{1}{2}} < \dots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_{i+\frac{1}{2}} < \dots < x_{I+\frac{1}{2}} = 1$.

On considère alors le schéma mixte-hybride lumpé (voir la remarque 6.4.1) de l'équation mono-énergétique aux ordonnées discrètes du transport :

$$\begin{cases} i) & g_{i+\frac{1}{2}}^l + g_{i-\frac{1}{2}}^r + \sigma_{t,i} h_i u_i = h_i q_i, \\ ii) & \frac{\sigma_{t,i} h_i}{2} g_{i+\frac{1}{2}}^l + \mu^2 (u_{i+\frac{1}{2}} - u_i) = \frac{\mu h_i}{2} q_{i+\frac{1}{2}}, \\ iii) & \frac{\sigma_{t,i} h_i}{2} g_{i-\frac{1}{2}}^r + \mu^2 (u_{i-\frac{1}{2}} - u_i) = -\frac{\mu h_i}{2} q_{i-\frac{1}{2}}, \\ iv) & g_{i-\frac{1}{2}}^l + g_{i-\frac{1}{2}}^r = 0, \\ v) & g_{i+\frac{1}{2}}^l + g_{i+\frac{1}{2}}^r = 0, \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} i) & u_{\frac{1}{2}} = u_a, \\ ii) & g_{I+\frac{1}{2}}^l = \mu u_{I+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

où on a choisit un maillage de l'espace tel que $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ représente la taille de la maille i , u_i représente la valeur du flux angulaire pour la maille i dans la direction μ_m , $u_{i-\frac{1}{2}}$ correspond à la valeur du flux angulaire pour le noeud $i - \frac{1}{2}$ dans la direction μ_m , $u_{i+\frac{1}{2}}$ est la valeur du flux angulaire pour le noeud $i + \frac{1}{2}$ dans la direction μ , $g_{i+\frac{1}{2}}^l$ est la valeur de la densité de courant angulaire pour la maille i au noeud $i + \frac{1}{2}$ dans la direction μ , $g_{i-\frac{1}{2}}^r$ est la valeur de la densité de courant angulaire pour la maille i au noeud $i - \frac{1}{2}$ dans la direction μ_m . On définit

$q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(q_i + q_{i+1})$ pour $1 \leq i \leq I-1$, $q_{\frac{1}{2}} = q_1$, $q_{I+\frac{1}{2}} = q_I$. Pour notre exposé et dans un but de clarté nous ferons jouer aux éléments le rôle des sous-domaines, nous prendrons la convention un sous domaine = un élément. Pour un noeud d'une maille interne i , par exemple le noeud $i + \frac{1}{2}$, on introduit un de gré de liberté supplémentaire en supposant que le flux angulaire $u_{i+\frac{1}{2}}$ est discontinu de part et d'autre du noeud $i + \frac{1}{2}$. On note $u_{i+\frac{1}{2}}^l$ et $u_{i+\frac{1}{2}}^r$ les valeurs du flux angulaire de part et d'autre du noeud $i + \frac{1}{2}$. L'équation de continuité (C.2-v) devient

$$g_{i+\frac{1}{2}}^l + g_{i+\frac{1}{2}}^r = \alpha(u_{i+\frac{1}{2}}^r - u_{i+\frac{1}{2}}^l) \quad (\text{C.4})$$

où le paramètre α est à choisir convenablement. Cette dernière égalité permet donc à l'information d'être transmise d'un sous-domaine à un autre, cette équation est dite "équation de transmission".

Algorithme de résolution

En reprenant les notations introduites précédemment, on va définir un processus itératif (dans le cas où un domaine est égal à un élément) :

Initialisation

u_i^0 , $g_{i+\frac{1}{2}}^{l,0}$, $g_{i+\frac{1}{2}}^{r,0}$, $u_{i+\frac{1}{2}}^{l,0}$ et $u_{i+\frac{1}{2}}^{r,0}$ sont choisis à l'itéré 0,

Itérer sur $n \geq 1$ pour toute maille i

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad g_{i+\frac{1}{2}}^{l,n} + g_{i-\frac{1}{2}}^{r,n} + \sigma_{t,i} h_i u_i^n = h_i q_i, \\ ii) \quad \frac{\sigma_{t,i} h_i}{2} g_{i+\frac{1}{2}}^{l,n} + \mu^2 \left(u_{i+\frac{1}{2}}^{l,n} - u_i^n \right) = \frac{\mu h_i}{2} q_{i+\frac{1}{2}}, \\ iii) \quad \frac{\sigma_{t,i} h_i}{2} g_{i-\frac{1}{2}}^{r,n} + \mu^2 \left(u_{i-\frac{1}{2}}^{r,n} - u_i^n \right) = -\frac{\mu h_i}{2} q_{i-\frac{1}{2}}, \\ iv) \quad g_{i-\frac{1}{2}}^{r,n} + \alpha u_{i-\frac{1}{2}}^{r,n} = -g_{i-\frac{1}{2}}^{l,n-1} + \alpha u_{i-\frac{1}{2}}^{l,n-1}, \\ v) \quad g_{i+\frac{1}{2}}^{l,n} + \alpha u_{i+\frac{1}{2}}^{l,n} = -g_{i+\frac{1}{2}}^{r,n-1} + \alpha u_{i+\frac{1}{2}}^{r,n-1}, \end{array} \right. \quad (\text{C.5})$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad u_{\frac{1}{2}} = u_a, \\ ii) \quad g_{I+\frac{1}{2}}^l = \mu u_{I+\frac{1}{2}}, \end{array} \right. \quad (\text{C.6})$$

où on a introduit une valeur de u au noeud à gauche et à droite dans le but d'assurer la transmission entre les sous-domaines. En pratique, on réalise une partition de \mathcal{D} en plusieurs sous-domaines et on assure la transmission uniquement sur la frontière des sous-domaines de \mathcal{D} (qui peuvent évidemment contenir plusieurs mailles). Notons que l'on peut trouver des valeurs optimales pour le choix du paramètre α .

Annexe D

Lien avec les équations elliptiques dégénérées

Dans son article [66], A.M.Oberman décrit des classes générales de schémas admissibles pour les équations elliptiques dégénérées sur des maillages cartésiens orthogonaux. Il définit la notion de schémas discrètement elliptiques. Cette propriété est indispensable pour tout schéma numérique valable pour la discrétisation d'équations elliptiques dégénérées. Les problèmes elliptiques dégénérés parmi les plus simples en deux dimensions d'espace sont les suivants : soient $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $c = ab$, on considère le problème

$$-\vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & c \\ c & b^2 \end{pmatrix} \vec{\nabla} u + \lambda u = f \quad (\text{D.1})$$

où f est une fonction donnée et avec des conditions aux limites adaptées. On remarque donc que (D.1) n'est rien d'autre qu'une forme du second ordre d'une équation du transport pour les directions (a, b) ou $(-a, -b)$. Oberman propose un cas test simple possédant une solution exacte dans $\mathcal{D} = (0, 1]^2$:

$$\begin{cases} -\vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{\nabla} u(x, y) = 0 & \text{pour } (x, y) \in \mathcal{D}, \\ u(x, y) = \sin(6\pi(x - y)) & \text{pour } (x, y) \in \partial\mathcal{D}^-, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{\nabla} u(x, y) = 0 & \text{pour } (x, y) \in \partial\mathcal{D}^+. \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

La solution exacte est donc $u(x, y) = \sin(6\pi(x - y))$. A.M.Oberman teste ensuite trois types de schémas numériques dont il montre que deux d'entre eux, pourtant raisonnablement construits, ne convergent pas vers la solution exacte (l'un d'eux diverge même). Nous avons donc testé notre méthode numérique en l'appliquant à la forme du premier ordre correspondante (du type transport dans le vide) :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{\nabla} u(x, y) = 0 & \text{pour } (x, y) \in \mathcal{D}, \\ u(x, y) = \sin(6\pi(x - y)) & \text{pour } (x, y) \in \partial\mathcal{D}^-. \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

On constate alors sur les figures suivantes que notre schéma converge effectivement vers la solution exacte.

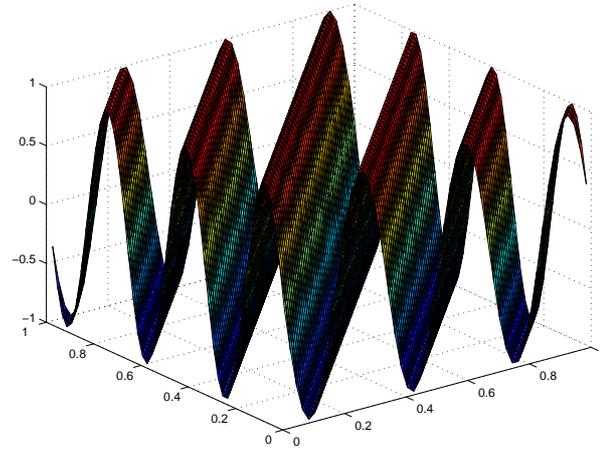


FIG. D.1 – Solution exacte en 2D du cas test d'Oberman

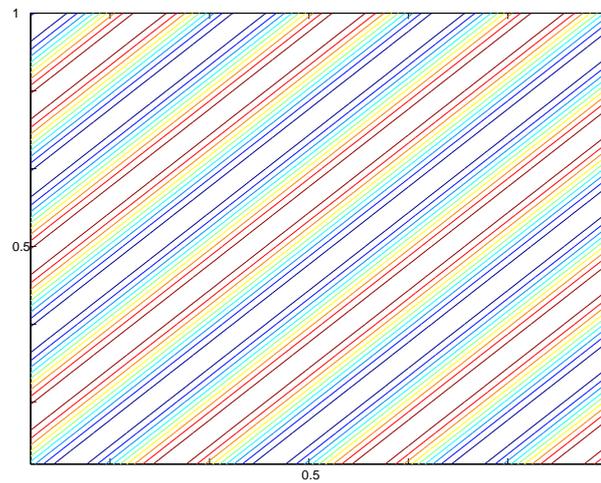


FIG. D.2 – Projection de la solution mixtes-hybrides du cas test d'Oberman

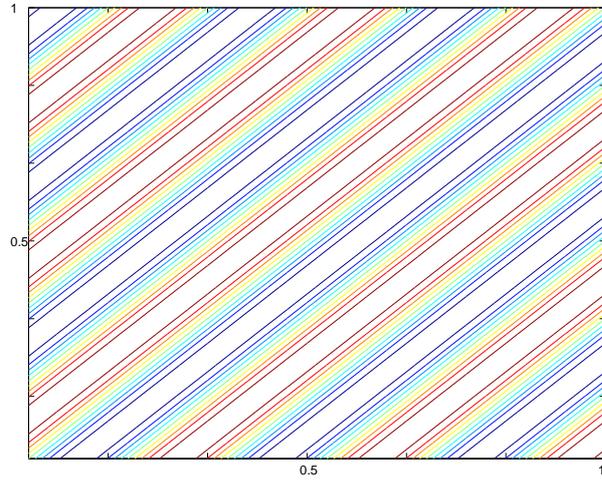


FIG. D.3 – Projection de la solution exacte du cas test d'Oberman

Bibliographie

- [1] R.T.Ackroyd, *Least-squares derivation of extremum and weighted-residual methods for equations of reactor physics*, Ann. Nucl. Energy, 10, 65-99, (1983).
- [2] R.T.Ackroyd, *A Finite Element Method for the Neutron Transport, Some Theoretical Considerations*, Ann. Nucl. Energy, 5, 75-94, (1978).
- [3] R.T.Ackroyd, *Finite Element Methods for the Neutron Transport Based on Maximum and Minimum Principles for Discontinuous Trial Functions*, Ann. Nucl. Energy, 19, 565-592, (1992).
- [4] M.L.Adams, *Discontinuous Finite Element Methods in Thick Diffusive Problems*, Nucl. Sci. Eng. 137, 298-333 (2001).
- [5] M.L.Adams, C.J.Gesh, *Finite Element Solutions of Second-Order Forms of the Transport Equation at the Interface Between Diffusive and Non-Diffusive Regions*, Proc. M&C 2001 Salt Lake City, Utah, USA, (2001).
- [6] A.Agouzal, J.M.Thomas, *Une Méthode d'Éléments Finis Hybrides en Décomposition de Domaines*, M2AN, 29, 749-764, (1995).
- [7] R.E.Alcouffe, *Diffusion Synthetic Acceleration Methods for the Diamond Differenced Discrete Ordinates Equations*, Nucl.Sci.Eng. 64, 344-355, (1977).
- [8] D.N.Arnold, F.Brezzi, *Mixed and Nonconforming Finite Element Methods : Implementation, Postprocessing and Error Estimates*, M2AN, 19, 7-32 (1985).
- [9] M.Asadzadeh, *Analysis of a fully discrete scheme for neutron transport in two-dimensional geometry*, SIAM J. Numer. Anal. 23(1986), 543-561.
- [10] M.Asadzadeh, *L^2 -error estimates for discrete ordinates method for three-dimensional neutron transport*, Transport Theory and Statistical Physics, 17(1988), 1-24.
- [11] C.Aussourd, *Styx : A Multidimensional AMR SN Scheme*, Nucl.Sci.Eng. 143, 281-290, (2003).
- [12] H.Babovsky, *Diffusion Limits for Flows in Thin Layers*, SIAM J. Appl. Math., 56, 1280-1294, (1996).
- [13] G.Bal, *Couplage d'Équations et Homogénéisation en Transport Neutronique*, Thèse de Doctorat, (1997).
- [14] G.Bal, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Ed. F. Graziani, Proceedings of the Computational Methods in Transport Workshop, Lake Tahoe, September 2004, 48, 373-400, (2006)
- [15] G.Bal, *Diffusion Approximation of Radiative Transfer Equations in a Channel*, Transport Theory and Statistical Physics, 30, (2-3), (2001)
- [16] G.Bal, Y.Maday, *Coupling of Transport and Diffusion Models in Linear Transport Theory*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., 36(1), 69-86, (2002)

- [17] C.Bardos, *Problèmes aux Limites pour les Équations aux Dérivées Partielles du Premier Ordre à Coefficients Réels; Théorèmes d'Approximation; Application à l'Équation du Transport*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 3, 185-233, (1970).
- [18] G.Bell, S.Glasstone, *Nuclear Reactor Theory*, Reinhold, (1970).
- [19] A.Bensoussan, J.-L.Lions, G.Papanicolaou, *Boundary Layers and Homogenization of Transport Processes*, Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., 15, (1979).
- [20] E.Bonneaux, *Résolution de Problèmes de Transport par Fermeture Non Linéaire des Équations de Moments. Application à la Neutronique.*, Thèse de Doctorat, (1997).
- [21] A.Burbeau, Rapport de DEA, (2001).
- [22] C.Börger, C.Greengard, E.Thomann, *The Diffusion Limit of Free Molecular Flow in Thin Plane Channels*, SIAM J. Appl. Math., 52, 1057-1075, (1992).
- [23] L.Bourhrara, *New Variational Formulations for the Neutron Transport Equation*, Transport Theory and Statistical Physics, (2004).
- [24] H.Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Dunod, (1999).
- [25] F.Brezzi, M.Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, New York (1991).
- [26] C.Buet, S.Cordier, *Asymptotic Preserving Scheme for Radiative Hydrodynamics Model*, CRAS Série I, 334, p. 1-6, (2002).
- [27] C.Buet, B.Després, *Asymptotic analysis of fluid models for the coupling of radiation and hydrodynamics*, JQSRT, Volume 85, Issues 3-4, 385-418, (2004).
- [28] J.Bussac, P.Reuss, *Traité de Neutronique*, Hermann, (1986).
- [29] B.G.Carlson, *Transport theory : discrete ordinates quadratures over the unit sphere*, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-4554, (1970).
- [30] B.G.Carlson, K.D.Lathrop, *Transport theory—The method of discrete-ordinates*, in Computing Methods in Reactor Physics, edited by H. Greenspan, C. N. Kelber, and D. Okrent (Gordon & Breach, New York, 1968), 171.
- [31] J.Cartier, *Mixed Variational Formulation and Mixed-Hybrid Finite Element Discretization of the Transport Equation*, soumis dans Transp. Theory Stat. Phys.
- [32] J.Cartier, G.Samba, *Mixed-Hybrid Finite Element Method for the Transport Equation*, à paraître dans Nucl. Sci. Eng.
- [33] J.Cartier, A.Munnier, *Geometric Eddington Factors for Radiative Transfer Problems*, Numerical Methods for Hyperbolic and Kinetic Problems, Proceeding of CEMRACS, (2003),
- [34] M.Cessenat, *Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 299, Série I, 16, 831-834, (1984).
- [35] M.Cessenat, *Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 300, Série I, 3, 89-92, (1985).
- [36] S.Chandrasekhar, *Radiative transfer*, Dover, New York (1960).
- [37] G.Chavent, J.E.Roberts, *A Unified Physical Presentation of Mixed-Hybrid Finite Elements and Usual Finite Differences for the Determination of Velocities in Waterflows Problems*, RR-1107, INRIA, (1989).
- [38] J.F.Clouët, *Diffusion Approximation of a Transport Process in Random Media*, SIAM J. Appl. Math., 58, 1604-1621, (1998).

-
- [39] J.F.Clouët, G.Samba, *Asymptotic Diffusion Limit of the Symbolic Monte-Carlo Method for the Transport Equation*, J. Comp. Phys., 195, (2003).
- [40] B.Cockburn, J.Gopalakrishnan, *A Characterization of Hybridized Mixed Methods for Second Order Elliptic Problems*, SIAM J. Numer. Anal., 42, 283-301, (2004).
- [41] J.F. Coulombel, F.Golse, T.Goudon *Diffusion approximation and entropy-based moment closure for kinetic equations*, Asymptotic Analysis **45** (1-2), 1-39, (2005).
- [42] R.Dautray, J.L.Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, (1985).
- [43] P.Degond, V.Latocha, S.Mancini, A.Mellet, *Diffusion Dynamics of an Electron Gas Confined Between Two Plates*, Methods and Applications of Analysis, 9, 127-150, (2002)
- [44] P.Degond, S.Mancini, *Diffusion driven by collision with the boundary*, Asympt. Anal., 27, 47-73, (2001)
- [45] J.J.Duderstadt, W.R.Martin, *Transport Theory*, New-York, Wiley, (1979).
- [46] B. Fraeijs de Veubeke, *A conforming finite element for plate bending*, Int. J. Solids and Structure 4, 95-108, (1968).
- [47] C.J.Gesh, *Finite Element Method for Second Order Forms of the Transport Equation*, Ph.Thesis, Texas A&M University, (1999).
- [48] F.Golse, *Anomalous Diffusion Limit for the Knudsen Gas*, Asympt. Anal., 17, 1-12, (1998).
- [49] F. Golse, S. Jin and C.D. Levermore, *The Convergence of Numerical Transfer Schemes in Diffusive Regimes I : the Discrete-Ordinate Method*, SIAM J. Num. Anal., 36, 1333-1369, (1999).
- [50] J.-P.Hennart, *Nodal Schemes, Mixed-Hybrid Finite Elements and Block-Centered Finite Differences*, RR-0386, INRIA, (1985).
- [51] J.J.Kohn, L.Nirenberg, *Degenerate Elliptic Parabolic Equations of Second Order*, Comm. Pure Appl. Math. 20, 797-872, (1967).
- [52] B.Lapeyre, E.Pardoux, R.Sentis, *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*, Springer, (1998).
- [53] E.W.Larsen, J.B.Keller, *Asymptotic Solution of Neutron Transport Problems for Small Mean Free Paths*, J.Math. Phys, 15, 75 (1974).
- [54] E.W.Larsen, J.E.Morel, W.F.Miller Jr., *Asymptotic Solutions of Numerical Transport Problems in Optically Thick, Diffusive Regimes*, Journal of Computational Physics, 69, 283-324, (1987).
- [55] E.W.Larsen, J.E.Morel, *Asymptotic Solutions of Numerical Transport Problems in Optically Thick, Diffusive Regimes II*, Journal of Computational Physics, 83, 212-236, (1989).
- [56] E.W.Larsen, *The Asymptotic Diffusion Limit of Discretized Transport Problem*, Nucl. Sci. Eng., 112, 336-346, (1992).
- [57] K.D.Lathrop, *Ray effects in discrete ordinates equations*, Nucl. Sci. Eng.32, 357, (1968).
- [58] J.J.Lautard, S.Van Criekingen, *Generalizing Raviart-Thomas Elements to PN Transport*, Proc. M&C 2005 Avignon, France, (2005).
- [59] P.Lesaint, *Sur la Résolution des Systèmes Hyperboliques du Premier Ordre par des Méthodes d'Éléments Finis*, Thèse de Doctorat, (1975).
- [60] P.Lesaint, *Nodal Methods for the Transport Equation*, The Mathematics of Finite Elements and Applications V, 563-569, (1985).

- [61] C.D.Levermore, *Relating Eddington factors to flux limiters* , J.Quant.Spec.Radia.Transfer, 26 (1984).
- [62] J.E.Morel, J.M.McGhee, *A Self-Adjoint Angular Flux Equation*, Nucl. Sci. Eng. 132, 312-325, (1999).
- [63] G.C.Pomraning, *Diffusive Limits for Linear Transport Equations*, Nucl. Sci. Eng. 112, 239-255, (1992).
- [64] G.C.Pomraning, M.Clark, *The Variational Method Applied to the Monoenergetic Boltzmann Equation. Part I*, Nucl. Sci. Eng. 16, 147-154, (1963).
- [65] G.C.Pomraning, M.Clark, *The Variational Method Applied to the Monoenergetic Boltzmann Equation. Part II*, Nucl. Sci. Eng. 16, 155-164, (1963).
- [66] A.M.Oberman, *Convergent Difference Schemes for Degenerate Elliptic and Parabolic Equations : Hamilton-Jacobi Equations and Free Boundary Problems*, (2003).
- [67] O.Oleinik, E.Radkevitch, *Second Order Equations with non Negative Characteristic Form*, Plenum, (1973).
- [68] M.Rampp, H.T.Janka, *Variable Eddington Factor Method for Core-Collapse Supernova Simulations*, A& A, (2003).
- [69] J.E.Roberts, J.M.Thomas, *Mixed and Hybrid Methods*, Handbook of Numerical Analysis, Vol.II, North-Holland, Amsterdam, (1989).
- [70] G.Samba, *Limite Asymptotique d'un Schéma d'Éléments Finis Linéaires Discontinus Lumpés en Régime de Diffusion*, Rapport CEA-R-5960, (2001)
- [71] G.Samba, E.Varin, *Spherical Harmonics Finite Element Transport Equation Solution Using a Least Square Approach*, Nucl. Sci. Eng. 151, 167-183, (2005).
- [72] V.Siess, *Homogénéisation des Équations de Criticité en Transport Neutronique*, Thèse, Université Paris VI, (2004).
- [73] E.Varin, *Résolution de l'Équation de Transport Neutronique par une Méthode de Moindres Carrés en Trois Dimensions*, Thèse, École Centrale des Arts et Manufactures (2001).
- [74] D.Verwaerde, *Résolution de l'Équation de Transport par la Méthode du Flux Pair*, Rapport CEA-N-2352, (1983)
- [75] T.A.Wareing, J.M.McGhee, J.E.Morel, S.D.Pautz, *Discontinuous Finite Element SN Methods on Three-Dimensional Unstructured Grids* , Nucl.Sci.Eng. 138, 256-268, (2001).