



HAL
open science

Stratégie de calcul et utilisation de séries de Fourier pour les tubes composites dégradés

Emmanuel Baranger

► **To cite this version:**

Emmanuel Baranger. Stratégie de calcul et utilisation de séries de Fourier pour les tubes composites dégradés. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2005. Français. NNT: . tel-00091789

HAL Id: tel-00091789

<https://theses.hal.science/tel-00091789>

Submitted on 7 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2005 n°63



**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par
Emmanuel BARANGER

pour obtenir le grade de
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE
CACHAN**

Domaine :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse :
**Stratégie de calcul et utilisation de séries de Fourier pour les tubes
composites dégradés**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 17 novembre 2005

devant le jury composé de :

P. LE TALLEC	Professeur - École Polytechnique	Président
P. CARTRAUD	Professeur - École Centrale de Nantes	Rapporteur
C. HOCHARD	Professeur - Université Aix-Marseille I	Rapporteur
L. BLANCHARD	Ingénieur - Alcatel Alenia Space	Examineur
J.-F. MAIRE	Ingénieur - ONERA	Examineur
M. POTIER-FERRY	Professeur - Université de Metz	Examineur
O. ALLIX	Professeur - ENS Cachan	Directeur de thèse

Laboratoire de Mécanique et Technologie
ENS Cachan / CNRS-UMR8535 / Université Paris 6
61, avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX (France)

Je remercie l'ensemble du LMT-Cachan où j'ai effectué ma thèse et en particulier Pierre Ladevèze pour m'avoir accueilli au sein de ce laboratoire.

Je remercie aussi très chaleureusement Olivier Allix pour m'avoir encadré et écouté durant cette période. On n'a pas toujours parlé mécanique, mais ces discussions m'ont toujours fait avancé. Merci de ne m'avoir pas abandonné dans les moments difficiles.

Bien entendu, je remercie messieurs Patrice Cartraud et Christian Hochard d'avoir accepté de rapporter mon mémoire et monsieur Patrick Le Tallec d'avoir présidé le jury. Merci aussi aux autres membres du jury, messieurs Michel Potier-Ferry, Jean-François Maire et Laurent Blanchard. Je tiens à remercier ALCATEL ALENIA SPACE pour son soutien financier et l'intérêt porté à mon travail, ainsi que la DGA/STTC à travers le Programme d'Études Amonts « Analyse Multi-Échelle : Recherche Innovante pour les matériaux COMposites » (AMERICO), coordonné par l'ONERA.

Un grand merci aussi aux copains, Pierrot et Gilles (notre capitaine Americo) mes camarades de jeux sous Matlab, Frisou capable de maintenir le moral de tout le monde (parfois même des imprimantes) ,Mathilde, David, Sandra, Guillaume et ses canulars, et tous les membres du LMT-Cachan.

Enfin, le plus important, je remercie toute ma famille et en particulier ma femme Inès et mon fils Maxime pour leur soutien de tous les jours.

Merci

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Introduction	1
1 Problème à résoudre : contexte, bibliographie, trame de l'étude	5
1.1 Contexte de l'étude, présentation des mécanismes de dégradation	7
1.1.1 Description du tube et de son chargement	7
1.1.2 Présentation des mécanismes de dégradation des plis tissés	10
1.1.3 Modélisation des dégradations, les différentes échelles . .	10
1.1.4 Conclusion	19
1.2 Problématique et outils de calcul associés aux composites	19
1.2.1 Modélisations simplifiées et effets de bord en élasticité .	19
1.2.2 Simulation en présence de non linéarités matériau	27
1.2.3 Conclusion	28
2 Réduction de la zone d'étude : la problématique du raccord	31
2.1 Présentation de la problématique du raccord	33
2.2 Raccord basé sur une théorie de poutre simple	34
2.2.1 Notations	34
2.2.2 Formulation du problème poutre	35
2.2.3 Exploitation et reconstruction du champ solution	38
2.2.4 Résultats numériques	39
2.2.5 Conclusion sur les raccords simples	44
2.3 Principe de Saint-Venant	45
2.4 Théorie exacte des poutres	47
2.4.1 Formulation du problème	47
2.4.2 Identification des opérateurs	48
2.4.3 Illustrations	51

2.5	Conclusion	58
3	Découplage du calcul sur tube sain par l'introduction de modes de Fourier étendus	59
3.1	Motivations et objectifs	61
3.2	Formulation du problème découplé	62
3.2.1	Notations	62
3.2.2	Écriture du problème découplé	64
3.3	Mise en oeuvre éléments finis	67
3.3.1	Description éléments finis	67
3.3.2	Programmation orientée objet d'un code éléments finis .	77
3.4	Estimation du coût de calcul	82
3.4.1	Nombre d'opérations liées à la résolution d'un problème .	82
3.4.2	Estimation de l'encombrement mémoire	84
3.5	Applications	86
3.5.1	Illustrations issues de la littérature	86
3.5.2	Solution sur la zone de bord	87
3.5.3	Prise en compte de défauts de délaminage axisymétriques	92
3.6	Conclusion	95
4	Problème avec défaut : mise en place et analyse	97
4.1	Modélisation des défauts	99
4.2	Discretisation éléments finis	102
4.3	Écriture du problème couplé	104
4.4	Développement de la solution théorique	107
4.5	Convergence de la solution tronquée	109
4.5.1	Présentation d'un cas d'étude simple	110
4.5.2	Estimation de λ_{max}	111
4.5.3	Convergence de la solution tronquée	111
4.5.4	Évaluation a priori de l'ordre de troncature	111
4.6	Cas d'un défaut quelconque	113
4.7	Application	114
4.8	Conclusion	116
5	Problème avec défaut : méthode de résolution et application	117
5.1	Présentation du gradient conjugué	119
5.2	Choix du préconditionneur	121
5.3	Évaluation du conditionnement et validation à posteriori de l'ordre de troncature	123
5.3.1	Conditionnement de la méthode	123
5.3.2	Validation à posteriori de l'ordre de troncature	125

5.4	Mise en oeuvre du gradient conjugué et échantillonnage	125
5.4.1	Influence du repliement de spectre sur la convergence	125
5.4.2	Influence de la représentation du défaut sur la convergence	131
5.5	Application	134
5.6	Conclusion	138
6	Analyse des effets de bord : vers le non linéaire	139
6.1	Modélisation du matériau	141
6.1.1	Modélisation des plis	141
6.1.2	Modélisation des interfaces	153
6.2	Résolution du problème non linéaire global	154
6.2.1	Problème de référence	155
6.2.2	Base des méthodes incrémentales	155
6.2.3	Méthodes de résolution classiques	155
6.2.4	Pilotage des calculs	157
6.2.5	Accélération de convergence	158
6.2.6	Choix des directions de recherche	159
6.2.7	Un premier pilotage des calculs	162
6.3	Conclusion	163
	Conclusion et perspectives	165
	Annexe A : Définition des matrices R et P	167
	Annexe B : Calcul des matrices de Hooke transformées	169
	Annexe C : Maillage 3D du tube	171
	Bibliographie	173

Table des figures

1.1	Mise en situation des différentes bases	8
1.2	Paramétrage de l'angle d'enroulement des plis	9
1.3	Paramétrage de la liaison tube/manchon	9
1.4	Fissures transverses et longitudinales dans un composite tissé	10
1.5	Fissuration transverse et délaminage en pointe de fissure	11
1.6	Fissures longitudinales (intra-toron à gauche et inter-torons à droite)	11
1.7	Ruptures de fibres	11
1.8	Modes d'ouverture de fissures	13
1.9	Restriction de la base d'orthotropie pour un calcul de Fourier classique	23
1.10	Notations pour la décomposition de domaine	24
2.1	Maillage de l'extrémité du tube	40
2.2	Évolution de σ_{XX} suivant l1 : cas homogène isotrope	40
2.3	Évolution de σ_{XX} suivant l1 : cas composite	41
2.4	Évolution de U_X suivant l1 : cas homogène isotrope	42
2.5	Évolution de U_X suivant l1 : cas composite	42
2.6	Évolution de T_X suivant l1 : cas homogène isotrope	43
2.7	Évolution de T_X suivant l1 : cas composite	43
2.8	Évolution de M_Y suivant l1 : cas homogène isotrope	44
2.9	Évolution de M_Y suivant l1 : cas composite	45
2.10	Évolution des contraintes circonférentielle et axiale (en MPa) en fonction de R	53
2.11	Évolution de la contrainte de cisaillement $\sigma_{\theta z}$ (en MPa) en fonction de R	53
2.12	Évolution de Zd_{zz} (en MPa) en fonction de R	54
2.13	Évolution de la contrainte axiale (en MPa) en fonction de R	54
2.14	Évolution de la contrainte axiale (en MPa) dans le tube en flexion simple	56
2.15	Évolution de la contrainte axiale (en MPa) dans une section longitudinale du tube	56

2.16	Évolution de σ_{zr} (MPa) le long de la poutre (z en mm) à l'interface intérieure +20/-20	57
2.17	Évolution du déplacement u_z (mm) dans la section $z = 3r_e$	57
3.1	Le tube composite et sa développée	62
3.2	Représentation de la notion de bande	66
3.3	Description des éléments finis utilisés (pli et interface)	68
3.4	Influence de l'intégration sur le nombre de modes à énergie nulle	69
3.5	Influence du nombre de points de Gauss sur le conditionnement	70
3.6	Influence de l'élanement sur le conditionnement pour 12 points de Gauss	71
3.7	Influence de l'élanement sur le conditionnement pour 25 points de Gauss	71
3.8	Poutre sur appui élastique	72
3.9	Évolution du déplacement en fonction de l (éléments linéaires à gauche et cubiques à droite)	73
3.10	Évolution de la contrainte à l'interface en fonction de l (éléments linéaires à gauche et cubiques à droite)	73
3.11	Évolution du déplacement en fonction du nombre d'éléments N (éléments linéaires à gauche et cubiques à droite)	74
3.12	Évolution de la contrainte à l'interface en fonction de l (éléments linéaires à gauche et cubiques à droite)	74
3.13	Évolution de la contrainte à l'interface pour différentes intégrations	75
3.14	Solution à convergence en fonction de l'intégration numérique	76
3.15	Évolution de la contrainte interfaciale en fonction de l'intégration	76
3.16	Diagramme UML de la classe <i>MATERIAU</i> et des ses descendants	78
3.17	Diagramme UML de la classe <i>MODE_CALC</i> et des ses descendants	79
3.18	Diagramme UML de la classe <i>STRUCTURE</i> et des ses descendants	80
3.19	Diagramme UML de la classe <i>ELEMENT</i> et des ses descendants	81
3.20	Numérotation des noeuds dans une bande	83
3.21	Évolution des déformations en fonction de R : peaux homogénéisées	87
3.22	Évolution des contraintes (MPa) en fonction de R : peaux homogénéisées	88
3.23	Évolution des contraintes pour des peaux homogénéisées	88
3.24	Évolution des contraintes pour des peaux hétérogènes	89
3.25	Évolution des contraintes dans un tube [+55/ - 55/0/ - 55/55] en flexion pure	90
3.26	Évolution de la contrainte axiale dans le tube composite	90

3.27	Évolution de la contrainte σ_{zr} (MPa) aux interfaces (traction)	91
3.28	Évolution de la contrainte σ_{rr} (MPa) aux interfaces (traction)	91
3.29	Évolution de la contrainte $\sigma_{r\theta}$ (MPa) aux interfaces (traction)	91
3.30	Évolution de la contrainte σ_{zr} (MPa) aux interfaces (flexion)	92
3.31	Évolution de la contrainte σ_{rr} (MPa) aux interfaces (flexion)	93
3.32	Évolution de la contrainte $\sigma_{r\theta}$ (MPa) aux interfaces (flexion)	93
3.33	Évolution du taux de restitution d'énergie en fonction de la taille du défaut	94
4.1	Représentation d'un défaut en forme de demi-ellipse	100
4.2	Allure d'un défaut standard modélisé	101
4.3	Représentation d'un défaut après troncature	101
4.4	Erreur commise par la troncature	102
4.5	Évolution de l'erreur en fonction de l'ordre de troncature	112
4.6	Ordre de troncature en fonction de λ pour une erreur inférieure à 1%	112
4.7	Représentation de f	113
4.8	Évolution de l'erreur relative en fonction de la largeur d'un défaut	114
4.9	Maillage fin d'une section du tube	115
4.10	Pré-endommagement dans l'interface intérieure [+20/ - 20]	115
5.1	Évolution de l'erreur au cours des itérations	124
5.2	Évolution de d_{12} pour $k = 2$	130
5.3	Exemple d'endommagement aux points d'échantillonnage	131
5.4	Reconstruction de l'endommagement sur 32 modes	132
5.5	Évolution de l'endommagement maximum en fonction de l'ordre de troncature de la série de Fourier	133
5.6	Non convergence du gradient conjugué	133
5.7	Description circonférentielle d'un défaut	134
5.8	Maillage fin d'une section	135
5.9	Convergence du gradient conjugué	135
5.10	Pré-endommagement dans l'interface intérieure [+20/ - 20]	136
5.11	Évolution de σ_{zr} (en MPa) dans l'interface intérieure [+20/ - 20]	136
5.12	Évolution de σ_{rr} (en MPa) dans l'interface intérieure [+20/ - 20]	137
5.13	Évolution de $\sigma_{r\theta}$ (en MPa) dans l'interface intérieure [+20/ - 20]	137
6.1	Évolution du temps d'intégration en fonction de l'endommagement	151
6.2	Évolution du comportement en cisaillement pur	152
6.3	Définition des axes d'orthotropie de l'interface	153
6.4	Coût de calcul des algorithmes de Newton modifié et Newton sécant : cas de la traction	160

6.5	Coût de calcul des algorithmes de Newton modifié et Newton sécant : cas de la flexion simple	161
6.6	Évolution post-pic du comportement du tube en traction	163
6.7	Numérotation des degrés de liberté par circonférence	172
6.8	Numérotation des degrés de liberté par rayon	172

Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques mécaniques des constituants du pli	7
1.2	Séquences d'empilement et dimensions des tubes	8
2.1	Caractéristiques du T300/934	52
3.1	Différentes répartitions de points de Gauss pour le massif	69
3.2	Coût des différentes méthodes de résolution	83
3.3	Estimation du coût de calcul (nombre d'opérations)	84
3.4	Estimation de l'encombrement mémoire de la matrice de rigidité	85
3.5	Estimation de l'encombrement mémoire de la solution	86
5.1	Comparaison des conditionnements théoriques et calculés	124
5.2	Comparaison entre taux de convergence réel et théorique	124
5.3	Validation à posteriori de l'ordre de troncature	125
5.4	Nombre d'itérations à convergence en fonction de l'échantillonnage	130
6.1	Temps d'intégration numérique du comportement en cisaillement (en secondes)	150
6.2	Nombre de résolutions de problèmes élastiques en fonction de l'algorithme choisi	162

Introduction

Modélisation et simulation sont de nos jours des mots clefs du métier d'ingénieur. En effet, dans ce domaine, une volonté de plus en plus forte tend à mettre en avant la pratique des simulations dans le processus industriel afin de guider, de compléter ou de remplacer une partie de l'approche expérimentale. On parle alors d'essais virtuels (*virtual testing* en anglais). Cette volonté se manifeste actuellement à travers certains programmes de recherche nationaux ou européens dans le domaine de l'aéronautique (MAIA, MUSCA, ...). Un des enjeux du *virtual testing* en mécanique des matériaux et des structures est la prévision de l'évolution des endommagements et de la rupture aussi bien en statique qu'en dynamique. Ceci est d'autant plus vrai pour les matériaux composites qui possèdent une grande diversité de constituants de base et d'architectures car ils engendrent ainsi des campagnes d'essais très lourdes et coûteuses. Qui plus est, la gamme d'essais est très large et s'étend sur différentes échelles, des essais de base aux essais sur structures en passant par différents niveaux d'éprouvettes technologiques. Dans le cadre de l'A340-600, par exemple, le coût des essais de caractérisation concernant les composites atteint plusieurs centaines de millions d'euros. Notons que dans le domaine spatial, dans lequel se situe cette thèse, le recours à la simulation est indispensable afin de valider les modèles utilisés pour la prédiction du comportement en service.

Cette thèse s'inscrit dans la problématique du *virtual testing* et plus particulièrement de la tolérance aux défauts de structures composites. Cette thématique est issue d'un problème industriel rencontré par ALCATEL ALENIA SPACE et prend place dans le plan d'études amont AMERICO (Analyse Multi-Échelles et Recherche Innovante pour les Composites à matrice Organique) financé par la DGA et coordonné par l'ONERA. Notre objectif est de mettre en place un outil numérique permettant, à terme, la vérification de la tenue de tubes composites en présence de défauts et complétant ainsi une base de données expérimentales coûteuse et limitée.

Un préalable nécessaire à la simulation jusqu'à rupture est de disposer d'une base matériau solide. Dans le cas des composites stratifiés, en présence

d'effets localisés, ceci constitue un challenge important car les phénomènes de dégradations gouvernant la réponse jusqu'à rupture de la structure se situent à une échelle mésoscopique, voire microscopique.

Une démarche initiée par Ladevèze (Ladevèze, 1986, 1989) et de plus en plus suivie pour simuler la tenue des structures composites est l'analyse de leurs endommagements à l'échelle mésoscopique mettant en place la notion de pli et d'interface. Cette échelle fait intervenir l'épaisseur d'un pli comme grandeur caractéristique, celle-ci étant de l'ordre de 0.2 mm. Des travaux sur les plis ont été effectués par (Ladevèze et Le Dantec, 1992; Renard et Jeggy, 1989; Aussedat *et al.*, 1994; Hochard *et al.*, 2001) et sur les interfaces par (Allix, 1992; Schellekens et De Borst, 1993; Corigliano, 1993; Chaboche *et al.*, 2001). Ces différentes études ont permis de développer et d'identifier des modèles de comportement permettant de décrire, par l'intermédiaire de la mécanique de l'endommagement, l'effet des différents mécanismes de dégradation du stratifié tels que la rupture des fibres, la décohésion entre fibres et matrice ou le délaminage.

Cependant, le traitement numérique d'un modèle de composite décrit à l'échelle des constituants mésoscopiques conduit très rapidement à des problèmes de très grandes tailles. À titre d'exemple, le maillage d'une liaison entre tubes composites réalisée par un manchon métallique requiert la résolution d'un problème d'environ dix millions de degrés de liberté (ddl). De plus le problème posé est non linéaire et différent pour chaque famille de défauts créés lors des phases de fabrication. Ainsi, le traitement de ce type de problèmes (non linéarités, grand nombre de degrés de liberté) nécessite le développement de méthodes de calcul adaptées.

Pour limiter les temps de calcul, un premier aspect est de simuler de façon fine uniquement la zone où se développent les dégradations, ici les extrémités du tube. Le coût de calcul à l'échelle mésoscopique des extrémités reste très important (voire prohibitif dans la cas de l'étude de familles de défauts). Des techniques de calcul efficaces du problème bord ont été recherchées. Dans le cas de la plaque composite trouée (Allix, 1992) avait utilisé la propriété de géométrie axisymétrique pour coupler des éléments finis classiques avec des développements en séries de Fourier au moyen d'une méthode de résolution itérative avec préconditionneur. Le caractère axisymétrique du tube nous a donc conduits à explorer les possibilités offertes par l'utilisation d'un développement en série de Fourier.

Deux axes principaux ont donc été abordés. Le premier concerne la génération de conditions limites 3D adéquates à partir d'une théorie de poutre. Ce problème de raccord intervient lors de la réduction de la zone d'étude et ne

doit pas perturber l'analyse fine de l'extrémité en créant un endommagement artificiel au raccord. Différentes approches ont été traitées pour cela, elles nous ont mené à l'utilisation de la théorie exacte des poutres (Ladevèze et Simmonds, 1996) qui permet de construire facilement la solution de Saint-Venant du problème.

Le deuxième axe concerne la mise en place d'un élément fini spécialisé dans le traitement de géométries de révolution. Dans le cas d'un tube sain, celui-ci permet de découpler le problème 3D en petits problèmes posés sur une bande. Ce découplage est rendu possible par l'introduction de modes de Fourier étendus. Dans le cas du tube dégradé, un couplage fort intervient entre les modes, une méthode itérative de gradient conjugué adaptée est alors mise en place pour résoudre très efficacement le problème à travers l'utilisation intensive du calcul parallèle et le choix d'un préconditionneur découplant les modes étendus. Les questions de coût de calcul, d'échantillonnage et de troncature du développement en série ont tout particulièrement été examinées. Le dernier chapitre aborde les aspects liés à l'intégration numérique de lois de comportement mésoscopiques endommageables (plis et interfaces) dans l'outil développé. L'efficacité de ce dernier est limitée par l'utilisation de Matlab. Dans ce contexte et en raison du temps de développement d'un nouvel outil, les cas tests conduits permettent uniquement de valider l'intégration correcte du comportement sans pouvoir traiter d'exemples industriels représentatifs.

Ce document est composé de 6 chapitres.

Le premier présente une étude bibliographique sur les thèmes abordés par cette étude, à savoir la modélisation des dégradations dans les matériaux composites et les méthodes de calcul efficaces associées aux structures composites.

Le deuxième chapitre traite de la réduction de la zone d'étude fine par l'utilisation d'une modélisation poutre. La problématique du raccord entre poutre et massif 3D y est traitée.

Le troisième chapitre concerne la mise en place d'une stratégie de calcul adaptée aux problèmes axisymétriques grâce au développement en séries de Fourier, ainsi que l'implantation numérique de cette stratégie.

Le quatrième chapitre étend les résultats précédents au cas d'une géométrie de révolution en présence de défauts. Une étude théorique est menée sur l'influence de la troncature du développement en série.

Le cinquième chapitre présente la mise en oeuvre d'une méthode de gradient conjugué permettant la résolution du problème couplé introduit au chapitre précédent.

Enfin, le sixième chapitre est une ouverture vers le non linéaire et présente sur des cas très simples les techniques à utiliser pour simuler la tenue d'un tube en présence de défauts.

Chapitre 1

Problème à résoudre : contexte, bibliographie, trame de l'étude

La tolérance aux défauts étant une thématique très large, ce chapitre se concentrera sur les aspects touchant à la présente étude. Les structures composites étudiées sont constituées de composites à fibres longues. Deux aspects sont présentés : la modélisation du comportement et les outils de simulation adaptés, ceux-ci étant intimement liés. En effet, une étude fine des mécanismes de dégradation à l'échelle du pli engendre de grands coûts de calcul et impose donc l'utilisation d'une stratégie adaptée.

Sommaire

1.1 Contexte de l'étude, présentation des mécanismes de dégradation	7
1.1.1 Description du tube et de son chargement	7
1.1.2 Présentation des mécanismes de dégradation des plis tissés	10
1.1.3 Modélisation des dégradations, les différentes échelles .	10
1.1.4 Conclusion	19
1.2 Problématique et outils de calcul associés aux composites	19
1.2.1 Modélisations simplifiées et effets de bord en élasticité .	19
1.2.2 Simulation en présence de non linéarités matériau . . .	27

1.1 Contexte de l'étude, présentation des mécanismes de dégradation

La simulation et la prédiction du comportement de structures nécessitent la connaissance de différents modèles de description du réel :

- la modélisation géométrique
- la modélisation du comportement du matériau
- la modélisation du chargement et des conditions limites

Dans ce paragraphe, une brève description des tubes étudiés sera donnée puis on s'attachera plus particulièrement au deuxième point qui concerne la modélisation du comportement du matériau. Ces différents modèles sont utilisés dans le cadre de la tolérance aux dommages pour prédire la ruine de la structure. Il est à noter que dans ce cadre, le dimensionnement est classiquement effectué dans une optique conservatrice en définissant un défaut maximal « non visible » pour lequel l'intégrité de la structure ne doit pas être mise en cause.

1.1.1 Description du tube et de son chargement

Les tubes étudiés sont constitués de plis G969/RTM6. Ces plis sont des plis tissés (taffetas non-équilibrés de fibres de carbone). Dans la direction de chaîne, les torons sont en M55J 6k et dans la direction de trame HR 1k. La contexture du tissu (8 fils/cm pour la chaîne et 3 fils/cm pour la trame) confèrent au tissu un comportement élastique équivalent à un empilement de deux plis unidirectionnels (Whitcomb et Tang, 2001). Le sens chaîne étant beaucoup plus rigide et plus dense que le sens trame, le pli se comporte (en élasticité) quasiment comme un unidirectionnel. La matrice RTM6 est une matrice époxy "équivalente" à la matrice M18 mais possédant de meilleures propriétés pour mise en forme par le procédé RTM ¹. Les propriétés mécaniques des constituants du pli sont données dans le tableau 1.1.

	HR 1k	M55J 6k	RTM6	M18
E (GPa)	230	537	2,890	3,5

Tableau 1.1 – Caractéristiques mécaniques des constituants du pli

Le tube d'une longueur de l'ordre du mètre est composé de différents enroulements de plis tissés. L'angle d'hélice α de ces enroulements dépend du

¹RTM (Resin Transfer Moulding) : La technologie RTM consiste à injecter un mélange réactif liquide sur une préforme fibreuse dans un moule sous pression. Ce moule est ensuite porté à haute température afin de permettre la polymérisation. Les renforts à fibres longues sont nécessairement tissés afin qu'ils restent en place durant l'injection.

pli considéré et de l'application à laquelle la barre est destinée (tableau 1.2 et figure 1.1). Les axes localement définis par la chaîne et la trame du tissu (notés 1 et 2) sont les axes d'orthotropie du matériau (figure 1.2).

diamètre (mm)	épaisseur du tube (mm)	séquence (°)	nombre de plis
32	1	[+20, -20, 0, -20, +20]	5
50	1.6	[0, -24, 0, +24] _S	8

Tableau 1.2 – Séquences d'empilement et dimensions des tubes

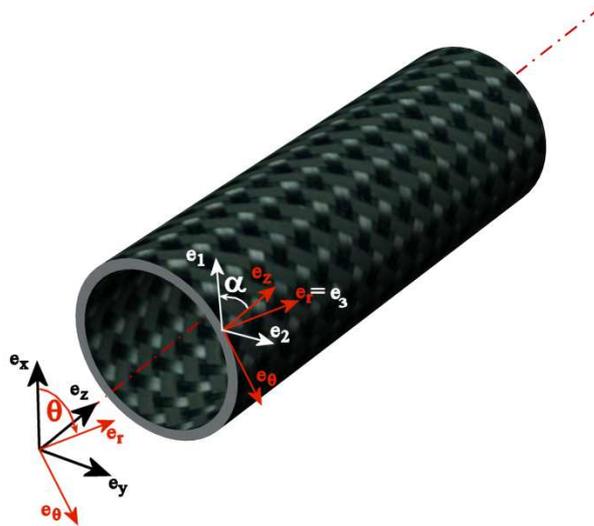


Figure 1.1 – Mise en situation des différentes bases

Les tubes sont organisés en treillis, les liaisons entre ces différents tubes sont assurées par des manchons collés (figure 1.3). Le diamètre des tubes varie entre 20 et 50 mm. Les manchons sont en titane ou en aluminium, la longueur de recouvrement varie entre 15 et 50 mm.

Les tubes sont sollicités mécaniquement (traction et flexion) et thermiquement (entre $-100^{\circ}C$ et $+100^{\circ}C$) suivant leur implantation et leur exposition au soleil. À terme, le cyclage thermique devra donc être pris en compte dans la simulation.

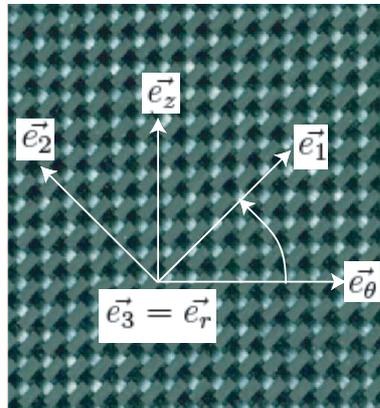


Figure 1.2 – Paramétrage de l'angle d'enroulement des plis

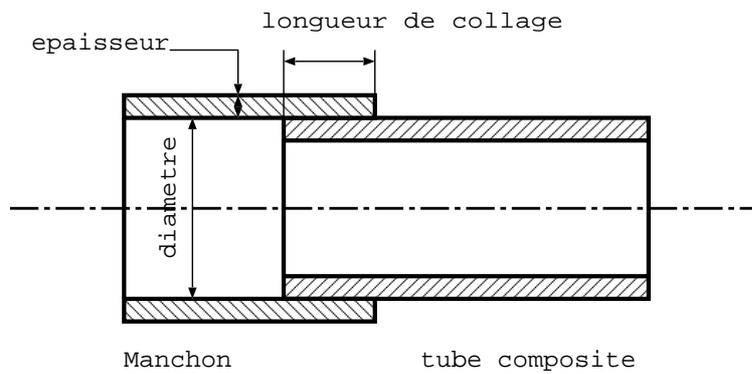


Figure 1.3 – Paramétrage de la liaison tube/manchon

1.1.2 Présentation des mécanismes de dégradation des plis tissés

De nombreux matériaux composites à fibres longues, comme les carbone/époxy, présentent un avantage très particulier par rapport aux métaux : la direction du dommage dépend de l'arrangement géométrique des constituants des composites et non pas du mode de chargement. Il est à noter que ce n'est pas le cas pour les composites à matrice céramique (Aubard, 1992).

Dans le cas des tissus, qui sont composés de torons entrecroisés, trois classes principales de dégradations sont à noter (figure 1.4 d'après (Aussedat *et al.*, 1994; Aussedat, 1997)) : les fissures transverses, les fissures longitudinales et les ruptures de fibres (figure 1.7 d'après (Aussedat, 1997)).

Les fissures transverses apparaissent de manière assez homogène, parallèlement à l'axe des fibres et dans l'épaisseur des torons de chaîne et de trame (figure 1.5 d'après (Aussedat, 1997)), elles sont initiées par des décohésions fibres/matrice. Les fissures longitudinales se développent dans le plan du tissu et parallèlement à l'axe des fibres (figure 1.6 d'après (Aussedat, 1997)). Ce phénomène est à rapprocher du délaminage qui apparaît couramment dans les stratifiés à plis unidirectionnels en pointe de fissures transverses ou près des bords. Grâce aux deux réseaux de fibres, le comportement du stratifié dans les directions de chaîne et de trame peut être assimilé à un comportement élastique fragile. D'autre part, contrairement aux plis unidirectionnels, la présence de fibres en direction transverse permet de reprendre la charge et évite l'ouverture des fissures transverses, qui ne sont sollicitées qu'en cisaillement.

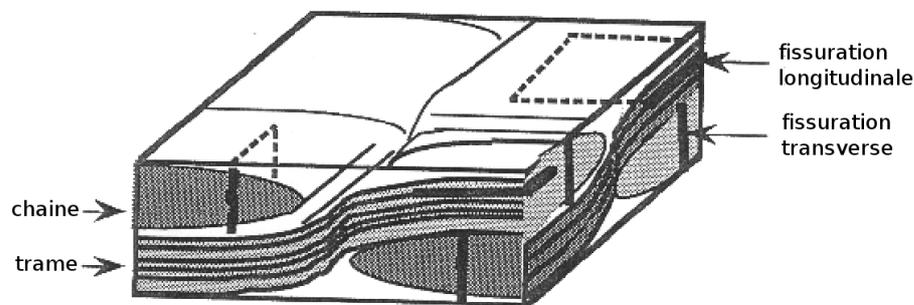


Figure 1.4 – Fissures transverses et longitudinales dans un composite tissé

1.1.3 Modélisation des dégradations, les différentes échelles

Les réglementations de tolérance aux dommages mises en place entre 1975 et 1980 en aéronautique (normes FAR 25 aux États-Unis et JAR 25 en Europe) nécessitent de supposer l'existence de défauts dans la structure. En effet,

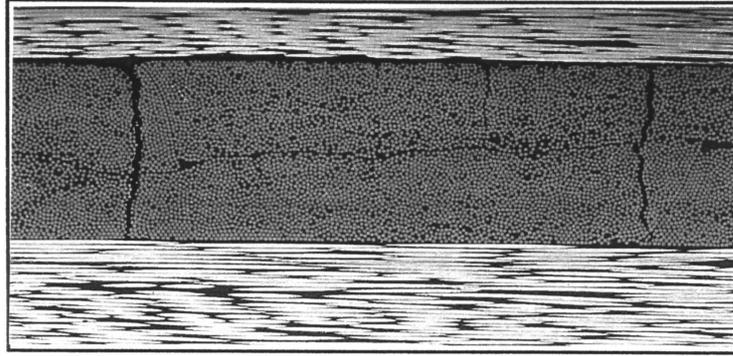


Figure 1.5 – Fissuration transverse et délaminage en pointe de fissure

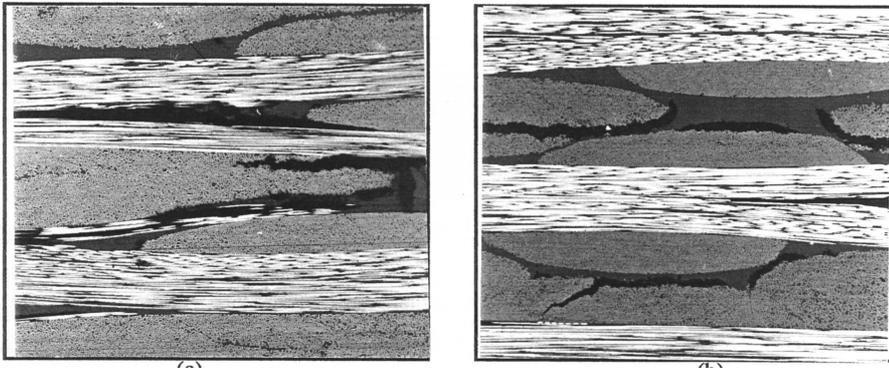


Figure 1.6 – Fissures longitudinales (intra-toron à gauche et inter-torons à droite)

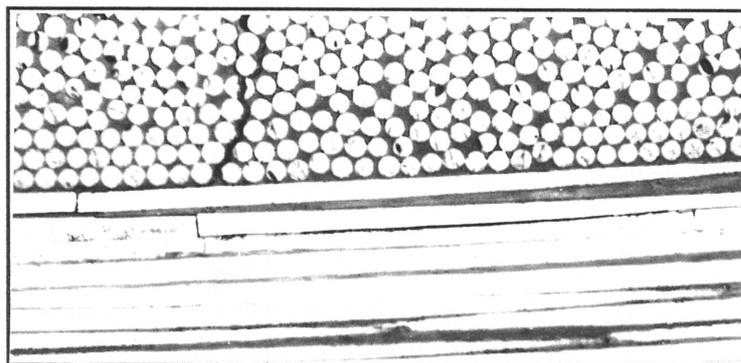


Figure 1.7 – Ruptures de fibres

la structure est dimensionnée telle qu'un défaut engendrant sa ruine doit être détectable. Il est alors nécessaire de représenter les dommages détectables et leur influence. Ce paragraphe présente les deux grandes familles de représentation des défauts (fissures) et les critères associés.

1.1.3.1 Description discrète des fissures par la mécanique de la rupture

Une fissure est une zone qui sépare un solide en deux. Autrement dit, c'est une surface de discontinuité des déplacements et des contraintes. Il est nécessaire de distinguer deux aspects, l'initiation de la fissure et la propagation du défaut.

La mécanique de la rupture (Bui, 1978) met en place différents critères permettant de prédire la propagation d'une telle fissure. Pour cela, la fissure est représentée de manière discrète.

Le premier critère de propagation de fissure est dû à Griffith (Griffith, 1924). Ce critère développé en élasticité linéaire repose sur une approche énergétique de la propagation des fissures en faisant l'hypothèse de l'existence d'une énergie libérée fonction de l'aire de fissure créée. L'accroissement d'énergie potentielle dP pour un accroissement d'aire fissurée dA fait alors intervenir une quantité G , appelée taux de restitution d'énergie. Le bilan d'énergie s'écrit alors :

$$dP + GdA = 0 \quad (1.1)$$

$$G = -\frac{dP}{dA} \quad (1.2)$$

Afin de prédire la propagation, ce taux de restitution d'énergie est comparé à une valeur critique G_c supposée caractéristique du matériau. Si $G = G_c$ alors la fissure se propage. Différentes méthodes sont utilisées pour calculer le taux de restitution d'énergie. Les méthodes de perturbation de maillage, nécessitent plusieurs calculs : le calcul au pas courant et le calcul simulant l'avancée d'une fissure. Une autre méthode consiste à calculer G par l'intermédiaire de l'intégrale J mise au point par Rice dans le cas bidimensionnel (Rice, 1968). Dans le cadre des matériaux composites, les fissures sont sollicitées en mode mixte et un critère souvent utilisé est le suivant :

$$\left(\frac{G_I}{G_{Ic}}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIc}}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{III}}{G_{IIIc}}\right)^\alpha = 1 \quad (1.3)$$

Un exemple d'identification des paramètres intervenant dans ce critère dans le cadre d'interfaces entre plis est donné dans (Allix *et al.*, 1998).

La deuxième famille de critères de propagation de fissure repose sur l'étude du champ de contraintes locales en pointe de fissure (Irwin, 1957). Pour cela le champ de déplacement en pointe de fissure est développé comme suit (r et ϕ sont les coordonnées polaires d'un point relativement à la pointe de fissure) :

$$\vec{U}(r, \phi) = \vec{U}(0) + k_I r^{\lambda_I} \vec{u}_I(\phi) + k_{II} r^{\lambda_{II}} \vec{u}_{II}(\phi) + \dots \quad (1.4)$$

Les k sont les facteurs d'intensité des contraintes et les \vec{u} sont les modes associés aux exposants singuliers λ avec $0 < \lambda_I < \lambda_{II}$, (si $\lambda < 1$ le champ de contrainte devient singulier).

Les coefficients λ et les modes \vec{u} associés ne dépendent que des propriétés locales de la structure. Les facteurs d'intensité quant à eux dépendent des caractéristiques globales de la structure et du chargement. Les différents modes d'ouverture d'une fissure sont décrits sur la figure 1.8.

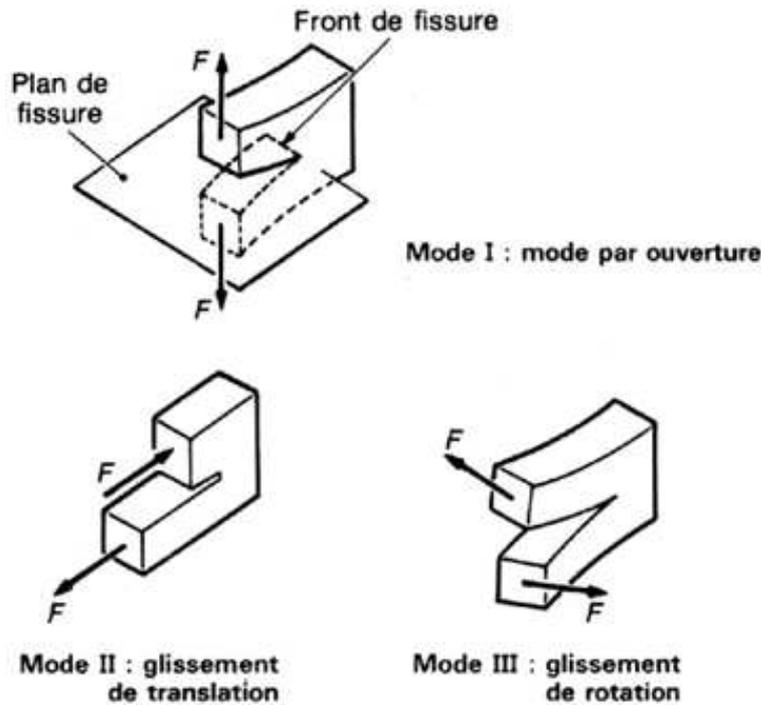


Figure 1.8 – Modes d'ouverture de fissures

On dit qu'il y a propagation lorsqu'un critère basé sur les facteurs d'intensité des contraintes dépasse une valeur critique. Différents critères ont été mis en place suivant les cas de couplage entre modes, notons par exemple (Erdogan et Sih, 1963) pour un critère en contrainte circonférentielle maximale et (Sih, 1973) pour un critère en énergie de déformation minimale. Plusieurs méthodes

permettent de calculer les facteurs d'intensité des contraintes. Les approches locales se basent sur la forme des champs de contraintes (approche statique) ou de déplacement (approche cinématique) en pointe de fissure. Notons aussi qu'il est possible d'extraire ces facteurs à partir du taux de restitution d'énergie par l'intermédiaire de champs auxiliaires (Petit, 1994).

La mécanique de la rupture est un outil permettant de décrire la propagation de fissure en considérant une fissure déjà existante, cependant il faut être en mesure de décrire le défaut préexistant, c'est-à-dire se placer à la même échelle que celui-ci. Cette échelle de modélisation fine peut devenir un inconvénient majeur si elle est petite, en particulier si cette échelle est celle de la fibre. De plus, pour les composites, il est nécessaire de distinguer les modes ce qui rend difficile l'identification des taux de restitution d'énergie critique.

En ce qui concerne l'initiation, les critères énergétiques de la mécanique de la rupture sont mis en défaut car le taux de restitution d'énergie tend vers zéro. De même, comme le champ de contrainte en pointe de fissure tend vers l'infini, les critères en contrainte sont systématiquement satisfaits. L'expérience menée par (Parvizi *et al.*, 1978), met en évidence la complémentarité de ces deux critères d'initiation. L'approche menée par Leguillon (Leguillon, 2002) vise à mettre en place un critère permettant d'unifier ceux en contrainte et en énergie. Cette étude paraît prometteuse et reste à tester pour les composites. Cependant, cette approche ne met pas en place de critère global d'initiation, elle est basée sur l'analyse locale d'une situation existante.

1.1.3.2 Description continue des dégradations par la mécanique de l'endommagement

La mécanique de l'endommagement vulgarisée par (Lemaitre et Chaboche, 1985) et dont le lecteur trouvera des exemples d'application dans (Allix et Hild, 2002) a été initiée par Kachanov et permet de décrire l'influence de porosités ou de micro-fissures sans les décrire géométriquement. Ces défauts sont alors représentés par l'intermédiaire de variables internes appelées variables d'endommagement agissant sur le comportement comme un abattement de rigidité. La mécanique de l'endommagement s'insère dans le contexte thermodynamique classique présenté ici. Les différents modèles dédiés aux composites seront présentés plus tard.

Soit d un ensemble de variables d'endommagement. Soit ε la déformation totale, ε^e la déformation élastique et ε^p la déformation plastique telle qu'on ait la partition : $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$. On fait l'hypothèse que l'état du système peut être décrit par le jeu de variables $(\varepsilon, \varepsilon^p, d)$. Ici d est supposé être un vecteur.

L'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit :

$$\rho(T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt}) - \frac{q}{T} gradT + Tr[\sigma \frac{d\varepsilon}{dt}] \geq 0 \quad (1.5)$$

s est l'entropie, e l'énergie, q le flux de chaleur et T la température. Séparons la dissipation totale en deux parties :

– la dissipation intrinsèque :

$$\Phi_1 = \rho(T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt}) + Tr[\sigma \frac{d\varepsilon}{dt}] \quad (1.6)$$

– la dissipation thermique :

$$\Phi_2 = -\frac{q}{T} gradT \quad (1.7)$$

En isotherme $\Phi_2 = 0$ sinon ce terme mène classiquement à la loi de Fourier qui assure la positivité de la dissipation thermique.

Dans les composites à fibres longues, on introduit l'énergie libre de Helmholtz $\rho\Psi = \rho(e - Ts)$, la dissipation intrinsèque devient :

$$-\rho(\frac{de}{dt} - T \frac{ds}{dt}) + Tr[\sigma \frac{d\varepsilon}{dt}] \geq 0 \quad (1.8)$$

$$-\rho(\frac{d\Psi}{dt} + s \frac{dT}{dt}) + Tr[\sigma \frac{d\varepsilon}{dt}] \geq 0 \quad (1.9)$$

d'où :

$$Tr[(\sigma - \frac{\partial \rho\Psi}{\partial \varepsilon^e}) \frac{d\varepsilon^e}{dt}] + Tr[\sigma \frac{d\varepsilon^p}{dt}] - \frac{\partial \rho\Psi}{\partial p} \frac{dp}{dt} - \frac{\partial \rho\Psi}{\partial d} \frac{dd}{dt} - (\frac{\partial \rho\Psi}{\partial T} + \rho s) \frac{dT}{dt} \geq 0 \quad (1.10)$$

Les variables (ε^e, T) sont supposées indépendantes d'où :

$$\sigma = \left. \frac{\partial \rho\Psi}{\partial \varepsilon^e} \right|_{(T, d, p)} \quad (1.11)$$

$$\rho s = - \left. \frac{\partial \rho\Psi}{\partial T} \right|_{(\varepsilon^e, d, p)} \quad (1.12)$$

Afin d'introduire la différence de comportement entre ouverture et fermeture des fissures, l'énergie est séparée en plusieurs termes relatifs à chaque

partie du comportement. Cela permet d'assurer la bonne régularité des quantités dérivant de l'énergie. L'inégalité 1.10 devient :

$$Tr[\sigma \frac{d\varepsilon^p}{dt}] - Y_p \frac{dp}{dt} + Y_d \frac{dd}{dt} \geq 0 \quad (1.13)$$

Avec les quantités duales des variables internes :

$$Y_p = \left. \frac{\partial \rho \Psi}{\partial p} \right|_{(\varepsilon^e, T, d)} \quad (1.14)$$

$$Y_d = - \left. \frac{\partial \rho \Psi}{\partial d} \right|_{(\varepsilon^e, T, p)} \quad (1.15)$$

$$(1.16)$$

En général on assure séparément :

$$Tr[\sigma \frac{d\varepsilon^p}{dt}] - Y_p \frac{dp}{dt} \geq 0 \quad (1.17)$$

$$Y_d \frac{dd}{dt} \geq 0 \quad (1.18)$$

Pour vérifier $Y_d \cdot \frac{dd}{dt} \geq 0$ il faut $\frac{dd}{dt} \geq 0$. Notons qu'en général, l'endommagement est gouverné par la force thermodynamique associée :

$$d = A_d(Y_d |_{\tau}, \tau \leq t) \quad (1.19)$$

Remarque : Il est à noter que certains problèmes liés à la localisation (Bazant et Bittnar, 1994) peuvent apparaître. Il est alors nécessaire de mettre en place des limiteurs de localisation (Bazant et Pijaudier-Cabot, 1988; Larsy et Belytschko, 1988; Ladevèze et Le Dantec, 1992) afin d'éviter toute dépendance au maillage.

Afin de modéliser le frottement entre les lèvres des fissures refermées, il peut être intéressant d'introduire un modèle de plasticité couplé au modèle d'endommagement. Afin d'utiliser les modèles classiques de plasticité, la contrainte effective et son dual le taux de déformation plastique effectif sont introduits. La contrainte effective s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = K K_0^{-1} \sigma \quad (1.20)$$

où K est le comportement endommagé et K^0 le comportement sain. Cette définition généralise au cas anisotrope, la notion de contrainte effective classique introduite dans le cas isotrope :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - d} \quad (1.21)$$

Le taux de déformation plastique effectif qui n'existait pas dans le cas isotrope, est introduit et vérifie :

$$Tr[\tilde{\sigma}\dot{\tilde{\epsilon}}^p] = Tr[\sigma\dot{\epsilon}^p] \quad (1.22)$$

À partir de ce cadre général, différentes modélisations peuvent être construites comme par exemple (Ladevèze et Le Dantec, 1992; Daudeville et Ladevèze, 1993; Allix, 1992; Allix *et al.*, 1998) pour les plis unidirectionnels et (Hochard *et al.*, 2001) pour les plis tissés. Ce dernier sera détaillé par la suite. Ces modélisations placent l'échelle d'étude au niveau du pli élémentaire. En effet, la mécanique de l'endommagement représente les mécanismes de dégradation de manière homogénéisée, il convient donc de rester à une échelle suffisamment proche de ces mécanismes afin de pouvoir encore les distinguer. Cependant, l'échelle du pli est une échelle assez fine (0.1 mm) vis à vis de celle de la structure (> 50 mm). Un effort devra donc être fait sur la stratégie de calcul afin d'appliquer ce type de modélisation de manière performante.

1.1.3.3 Techniques de changement d'échelle, du micro vers le méso

Les structures composites présentent de nombreuses échelles, celle de la structure (échelle macro), celle du pli (échelle méso) ou encore celle de la fibre (échelle micro). Il est donc légitime de se poser la question du changement d'échelle, c'est à dire de prédire l'influence de paramètres décrits à une échelle sur le comportement vu à une autre échelle. Cette problématique intéresse fortement les industriels dans le cadre de la conception d'un matériau virtuel qui permettrait d'évaluer la pertinence des choix effectués dans l'élaboration d'un composite. Ce type de démarche permet aussi de mieux comprendre les domaines de validité de certaines modélisations.

Ce paragraphe est divisé en deux parties, la première donne les méthodes d'homogénéisation les plus utilisées dans le cas des composites à fibres longues dans le cas élastique. Celles-ci vont permettre d'évaluer l'influence de la texture d'un tissu sur ses propriétés élastiques par exemple (Whitcomb et Tang, 2001). La deuxième partie discute du changement d'échelle en présence de fissures.

1.1.3.3.1 Homogénéisation en élasticité Dans ce chapitre sont présentées les méthodes d'homogénéisations les plus utilisées dans le cadre des composites à fibres longues.

Soit un volume élémentaire représentatif (VER), volume dans lequel les quantités sont supposées plus ou moins homogènes. L'objectif est de construire le comportement élastique reliant la contrainte homogénéisée $\bar{\sigma}$ à la déformation homogénéisée $\bar{\epsilon}$. Dans ce type de technique, trois échelles sont présentes :

- l'échelle de la structure : longueur caractéristique L ;

- l'échelle du VER : longueur caractéristique l ;
- l'échelle des hétérogénéités : longueur caractéristique d ;

On fait alors l'hypothèse que les échelles sont séparées : $d \ll l \ll L$. Le comportement homogénéisé est identifié grâce à un ensemble de calculs élémentaires permettant de décrire la réponse du VER sous sollicitations. Une équivalence énergétique permet alors de calculer les termes de l'opérateur de Hooke homogénéisé. Bien entendu, plus les échelles sont séparées et plus les résultats donnés sont pertinents.

Les différentes approches sont :

1. homogénéisation statique et cinématique : les conditions limites imposées sont compatibles avec des champs de contrainte ou de déformation homogènes dans le VER. Une solution approchée de ces problèmes est de supposer les champs homogènes dans le VER, ce qui donne lieu aux bornes de Voigt et de Reuss. ;
2. homogénéisation périodique : le milieu est considéré comme une répétition périodique du VER (Sanchez-Palencia, 1980). L'idée est de développer le champ de déplacement en fonction d'un paramètre $\eta = \frac{l}{L}$, puis de séparer les échelles suivant les puissances de ce paramètre.

Pour les matériaux composites à fibres longues, l'approche cinématique donne des résultats proches de l'homogénéisation périodique. Ces techniques ont été très utilisées pour obtenir les caractéristiques élastiques des plis tissés. (Dasgupta *et al.*, 1996; Aitharaju et Averill, 1999; Ito et Chou, 1997; Whitcomb et Tang, 2001) utilisent des modèles plus ou moins simplifiés afin de résoudre les différents problèmes élémentaires. Ces résultats permettent d'accéder aux caractéristiques thermo-mécaniques des plis et notamment à l'influence de l'ondulation des torons sur les caractéristiques élastiques. (Huang, 2000; Kwon et Altekin, 2002), utilisent les opérateurs de localisation construits lors de l'homogénéisation pour mettre en place des critères de rupture des différents composants d'un pli tissé.

1.1.3.3.2 Changement d'échelle en non linéaire Dans le cadre non linéaire et en particulier en présence de fissures, différentes approches sont adoptées pour remonter l'information de l'échelle microscopique vers l'échelle mésoscopique. Ces approches sont envisagées en fonction de l'objectif que les auteurs désirent atteindre. Notons deux approches, celle de (Deudé *et al.*, 2002) ou (Andrieux *et al.*, 1986) qui a pour but de construire un modèle à l'échelle mésoscopique en fonction d'une description microscopique. Pour cela, une énergie libre homogénéisée est construite à partir d'un modèle fissuré. Cela leur permet de prendre en compte la différence entre ouverture et fermeture de fissure dans

un modèle d'endommagement. Une deuxième approche, suivie par (Ladevèze et Lubineau, 2001, 2002, 2003; Ladevèze *et al.*, 2003; Lubineau et Ladevèze, 2005; Marsal *et al.*, 2005), consiste à consolider et améliorer un modèle composite existant décrit à l'échelle mésoscopique. Cette démarche d'homogénéisation est réalisée pas par pas pour des états de dégradation admissibles. Elle permet entre autre de justifier de l'utilisation de deux variables d'endommagement par pli UD dont les lois d'évolution sont simulées afin de simplifier la démarche d'identification. Notons que dans le cas des chargements hors plans, cette approche a permis de montrer l'aspect non local de la notion d'interface, aspect introduit de façon pragmatique dans le cadre des petits chocs (Guinard *et al.*, 2002).

1.1.4 Conclusion

La prise en compte des dégradations dans les matériaux composites peut être considérée sous deux angles différents. La première approche est basée sur la description géométrique d'un défaut, c'est la mécanique de la rupture. Il est alors nécessaire de se placer au niveau des mécanismes de dégradation, ce qui devient très difficile si les dégradations se produisent à l'échelle de la fibre. La deuxième approche se place à une échelle supérieure et prend en compte les dégradations de manière continue, c'est la mécanique de l'endommagement. Il est alors possible de rendre compte des dégradations au sein du stratifié en se plaçant à l'échelle du pli, ce qui reste très coûteux et nécessite une stratégie de calcul adaptée. Dans cette thèse, on se placera dans le cadre de la mécanique de l'endommagement avec l'utilisation de méso-modèles, en particulier celui de (Hochard *et al.*, 2001) pour les plis tissés.

1.2 Problématique et outils de calcul associés aux composites

1.2.1 Modélisations simplifiées et effets de bord en élasticité

1.2.1.1 Les théories simplifiées

La description des mécanismes de dégradation à des échelles fines (mésos ou micros) nécessitent des calculs très lourds, des théories plus ou moins simplifiées ont donc été mises au point. Dans ce paragraphe trois d'entre elles sont présentées, la modélisation unidimensionnelle avec les théories de poutres, la modélisation bidimensionnelle avec les théories de plaques (ou de coques) mul-

ticouches ou non. Ces théories étant simplifiées, la solution donnée est souvent erronée aux bords. Ceux-ci font alors l'objet d'un traitement spécial. Enfin une modélisation tridimensionnelle réduite sera présentée avec des calculs axisymétriques ou de Fourier.

1.2.1.1.1 Poutres Une poutre est un solide ayant deux de ses dimensions très inférieures à la troisième. L'objectif des théories de poutre est de réduire un problème tridimensionnel à un problème unidimensionnel posé suivant sa plus grande dimension qu'il est possible de résoudre très rapidement. Différentes théories plus ou moins précises ont été mises en place au fil du temps. Les premières théories de Euler-Bernoulli et Timoshenko (Timoshenko et Goodier, 1970) sont basées sur des hypothèses mixtes. La première hypothèse postule une forme du déplacement de chaque section de la poutre, la deuxième postule la nullité d'une partie de la contrainte. Ces théories ont été justifiées et enrichies par une démarche asymptotique (Rigolot, 1980) qui, en fonction de l'ordre du développement (par rapport à un paramètre d'élançement), permettent d'augmenter la précision de la théorie. Au premier ordre, la théorie de Timoshenko est vérifiée puis c'est au tour des théories de voiles minces de Vlassov (Vlassov, 1962). Bien entendu, plus l'élançement est grand et plus ces théories sont précises. L'utilisation de ces modèles unidimensionnels est en général justifiée par le principe de Saint-Venant qui donne des classes d'équivalence entre chargements assurant la localisation des contraintes près des zones d'application des charges ou de changement de section. C'est à partir de ce concept que Ladevèze (Ladevèze et Simmonds, 1995) construit une théorie de poutre appelée théorie exacte et ne reposant sur aucune hypothèse d'ordre cinématique ou statique. Le chapitre 2 entrera plus en détail sur la formulation de ces différentes théories ainsi que sur leur utilisation.

Notons aussi les travaux plus récents de (Buannic et Cartraud, 2001a,b) développant des théories de poutres basées sur un développement asymptotique. Ces travaux s'appliquent à des poutres ayant une structure périodique suivant la plus grande dimension ; l'objectif étant de construire une solution correcte (fonction de l'ordre du développement asymptotique) loin des zones d'application des conditions limites. Pour cela, un soin particulier est apporté à la construction des conditions limites.

1.2.1.1.2 Plaques et coques multicouches Une plaque ou une coque est un solide ayant une de ses dimensions très inférieure aux deux autres. L'objectif des théories de plaque (coque), est de réduire un problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel posé suivant ses plus grandes dimensions. Les premières théories sont dues à Timoshenko et Reissner-Mindlin, elles sont le pendant de celles d'Euler-Bernoulli et Timoshenko pour les poutres. Pour

l'utilisation dans le cadre des composites, de nombreuses théories prenant en compte les différentes couches du stratifié ont été mises en place (Reddy, 1984; Carreira, 1998; Caron *et al.*, 1999). Tous ces modèles imposent une forme du champ de déplacement dans l'épaisseur, ou du stratifié, ou de chaque pli. Ces hypothèses ne sont donc valides que pour des sollicitations relativement douces dans l'épaisseur du stratifié. Certains, comme les modèles M4 de (Carreira, 1998; Caron *et al.*, 1999; Caron et Sab, 2001; Carreira *et al.*, 2002) permettent de calculer la contrainte aux interfaces entre les plis et ainsi de mettre en oeuvre des critères de délaminage. L'utilisation de ce type de modélisation permet d'éviter la singularité entre plis près d'un bord libre (singularité présente en élasticité 3D (Pipes et Pagano, 1970; Pagano et Pipes, 1978)). Ces modèles multicouches font partie des modèles fins utilisés dans l'industrie car ils sont implantés dans les grands codes de calcul (Nastran, Samcef...).

1.2.1.1.3 Qualité des solutions plaques Contrairement aux structures métalliques, les bords jouent un rôle important dans les structures composites notamment en raison du délaminage. Ainsi, le calcul des structures de type plaque a été remis en cause pour prendre en compte les conditions limites réellement imposées. Différentes évaluations de l'erreur commise sur la solution intérieure pour la théorie de Kirchhoff-Love ont été menées dans (Koiter et Simmonds, 1972; Danielson; Ladevèze, 1975, 1976). Des cinématiques plus riches ont alors été étudiés (Valid, 1977; Cheng, 1979; Levinson, 1980; Reddy, 1984; Rychter, 1986), ne menant à des estimations d'erreur que sur la zone intérieure. Notons les approches de (Verchery, 1974) permettant d'obtenir de façon précise les contraintes d'arrachement et de cisaillement normal, ainsi que les approches directes de (Pagano et Soni, 1983). De nouvelles théories de plaques ont alors été bâties afin d'améliorer la solution au niveau des conditions limites (Ladevèze, 1980; Ladevèze et Pecastaings, 1988; Ciarlet, 1997).

1.2.1.1.4 Calcul des effets de bord Parallèlement aux études visant à améliorer la qualité des solutions plaques, des techniques de calcul d'effets locaux ont été développées. Dans le cas de bords localement droits, les effets locaux sont calculés en résolvant un problème de bande orthogonal au bord. Des méthodes éléments finis peuvent alors être utilisées (Dong et Goetschel, 1982), ou encore des techniques analytiques. Ces dernières techniques reposent sur l'utilisation de fonctions de contrainte de Papkovitch ou analogues (Horgan, 1982; Choi et Horgan, 1977; Zwiers *et al.*, 1982; Wijeyewickrema, 1995; Wijeyewickrema *et al.*, 1996) utilisées sur des problèmes en déformation plane ou déformations planes généralisées. La décroissance exponentielle de l'effet de bord à partir du bord chargé est alors caractérisée en terme de valeurs propres. Dans le cas d'une simple plaque isotrope homogène sur bord droit, les valeurs

propres sont déterminées avec les conditions de bord libre sur les faces intérieures et extérieures de la plaque. La projection sur la base modale est quant à elle déterminée grâce à la forme des conditions limites (résidu imposé). Ces méthodes analytiques, peu coûteuses, permettent des études paramétriques mais aussi de valider l'application quasi-systématique du principe de Saint-Venant à travers l'évaluation de la longueur de pénétration des effets de bord. Cependant ces études sont limitées dans la prise en compte de l'anisotropie du matériau ainsi que par son hétérogénéité.

Les travaux de Ladevèze et Pécastaings (Ladevèze, 1983; Pécastaings, 1985b) sur le principe de Saint-Venant pour les poutres ou les plaques ont alors donné naissance à la technique utilisée par (Pécastaings, 1985a). Ce principe permet de séparer l'effet intérieur à grande longueur d'onde de l'effet localisé. Dans le cadre des poutres, ces travaux ont donné naissance à la théorie exacte des poutres (Ladevèze et Simmonds, 1995). Dans le cadre des plaques, les travaux initialement effectués dans le cas isotrope transverse ont été étendus dans le cadre composite avec bord localement droit notamment par Engrand (Engrand, 1982, 1985). L'idée d'une analyse fine par bande a été exploitée par Allix dans (Allix, 1992, 1989) pour construire une solution approchée dans le cas anisotrope. Celui-ci traite le cas du délaminage dans les plaques composites trouées, un développement en série de Fourier permettant de ce ramener à des problèmes dans une bande. L'idée était de dissocier la variation lente décrite par la série de Fourier des variations rapides décrites par éléments finis.

1.2.1.1.5 Calcul en mode axisymétrique ou Fourier Dans le cadre de géométries de révolutions, il est parfois possible de transformer une résolution 3D en plusieurs résolutions 2D découplées. Ce type de simplifications dites calcul axisymétriques ou calcul de Fourier décrites par exemple dans (Zienkiewicz et Taylor, 2000) ne sont appliquées que dans le cas d'un matériau ayant un des axes d'orthotropie perpendiculaire à la section longitudinale (figure 1.9) étudiée (section représentative de tout le volume). En fait, le champ de déplacement inconnu ainsi que le chargement sont décomposés en série de Fourier et la résolution est effectuée mode par mode. Ce type d'analyse rapide permet d'avoir accès aux champs complets de contrainte et de déplacement pour une résolution peu coûteuse. Malheureusement, ces calculs simplifiés ne sont pas applicables directement aux composites compte tenu de leur anisotropie. Combescure, quant à lui, utilise les développements en séries de Fourier pour étudier le flambage de coques axisymétriques (Combescure et Gusic, 2001) sur des matériaux isotropes. Il introduit un défaut d'épaisseur ou de géométrie de la fibre neutre sous forme de séries de Fourier. Le problème couple alors différents modes qu'il choisit. Les modes sur lesquels la solution est recherchée sont donnés a priori. Ces techniques ont été implantées dans le code de calcul

INCA sous forme d'éléments coques appelés COMI ou COMU.

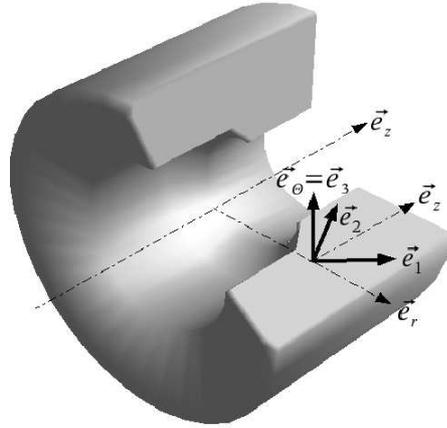


Figure 1.9 – Restriction de la base d'orthotropie pour un calcul de Fourier classique

1.2.1.2 Sous-structuration et approches multi-échelles

Dans certains cas, lorsque des modélisations simplifiées ne suffisent pas, le recours à des modélisations éléments finis 3D peut être indispensable ; ce qui engendre des problèmes de grande taille inabordable avec des moyens de calcul standards. Les stratégies de sous-structuration sont alors mises en oeuvre sur des machines parallèles. L'objectif est de découper un gros problème en plusieurs plus petits. Chaque petit problème est alors résolu presque indépendamment des autres (sur un processeur), les sous-structures dialoguant jusqu'à convergence vers la solution du problème 3D initial. Dans ce paragraphe, trois grandes méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement sont présentées dans le cadre statique linéaire. D'autres méthodes existent comme (Ben Dhia, 1998) qui propose de recoller différents modèles entre eux, cette méthode ne sera pas abordée ici.

Le domaine étudié noté Ω est divisé en deux sous domaines distincts Ω_1 et Ω_2 (figure 1.10), reliés par une interface γ_{12} . Les trois méthodes se différencient par le choix des inconnues au niveau des interfaces : déplacement et/ou effort.

1.2.1.2.1 La méthode de Schur primale Cette méthode, initialement présentée par (Przemieniecki, 1963) et reprise dans de nombreuses études (Mandel, 1993; De Roeck *et al.*, 1992; Roux, 1990) privilégie le déplacement à l'interface. En notant, u_γ les inconnues d'interface et u_1 (resp. u_2) les inconnues

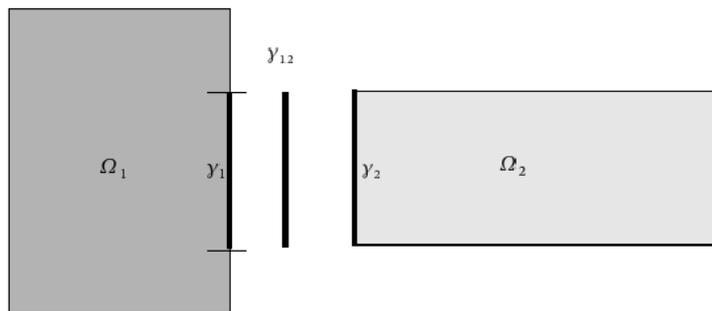


Figure 1.10 – Notations pour la décomposition de domaine

relatives aux noeuds intérieurs à la sous-structure Ω_1 (resp. Ω_2), le problème discrétisé s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{1\gamma} \\ 0 & K_{22} & K_{2\gamma} \\ K_{1\gamma}^T & K_{2\gamma}^T & K_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_\gamma \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

K_{11} et K_{22} ne représentent pas la rigidité complète de chaque sous-structure mais seulement la partie concernée par les degrés de liberté u_1 et u_2 . La méthode de Schur consiste à condenser le problème sur les inconnues de l'interface. Il est alors possible de définir la matrice du complément de Schur S et le problème devient :

$$Su_\gamma = B \quad (1.24)$$

avec :

$$S = K_{\gamma\gamma} - K_{1\gamma}^T K_{11}^{-1} K_{2\gamma} - K_{2\gamma}^T K_{22}^{-1} K_{1\gamma} \quad (1.25)$$

$$B = F_\gamma - K_{1\gamma}^T K_{11}^{-1} F_1 - K_{2\gamma}^T K_{22}^{-1} F_2 \quad (1.26)$$

Les inconnues relatives aux sous-structures sont alors post-traitées à partir des inconnues d'interface par la relation :

$$u_i = K_{ii}^{-1}(F_i - K_{i\gamma}u_\gamma) \quad \forall i \in [1, 2] \quad (1.27)$$

La mise en oeuvre parallèle de la méthode conduit à l'utilisation de méthodes itératives de type gradient conjugué. L'utilisation de préconditionneurs (De Roeck et Le Tallec, 1990) améliore alors grandement l'efficacité de ces méthodes itératives.

1.2.1.2.2 La méthode de Schur duale Cette approche est l'approche duale de la précédente ; ce sont ici les efforts à l'interface qui sont privilégiés (les inconnues statiques sont des multiplicateurs de Lagrange assurant la continuité du champ de déplacement à la traversée de l'interface). Le problème discrétisé s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & 0 & L_{1\gamma} \\ 0 & \tilde{K}_{22} & L_{2\gamma} \\ L_{1\gamma}^T & L_{2\gamma}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \lambda_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Les quantités notées *tilde*, sont ici relatives à une sous-structure (exemple : \tilde{u}_1 représente tous les degrés de liberté de la sous-structure Ω_1). La condensation du problème sur les multiplicateurs de Lagrange donne :

$$\Lambda \lambda_\gamma = C \quad (1.29)$$

avec :

$$\Lambda = L_{1\gamma}^T \tilde{K}_{11}^{-1} L_{1\gamma} + L_{2\gamma}^T \tilde{K}_{22}^{-1} L_{2\gamma} \quad (1.30)$$

$$C = L_{1\gamma}^T \tilde{K}_{11}^{-1} \tilde{F}_1 + L_{2\gamma}^T \tilde{K}_{22}^{-1} \tilde{F}_2 \quad (1.31)$$

Ce problème se résout par l'intermédiaire de techniques de résolution itératives comme pour la méthode primale. Il est à noter que les problèmes liés aux sous-structures ne font pas apparaître de conditions limites en déplacement d'où la nécessité d'un traitement particulier pour calculer le pseudo-inverse de l'opérateur. La méthode FETI (Farhat et Roux, 1991) utilise cette technique en tirant avantage de la faible interconnection entre sous-structures, elle offre ainsi un grand degré de parallélisme.

1.2.1.2.3 Les approches mixtes Les approches mixtes ne privilégient aucune des quantités cinématiques ou statiques. Plusieurs de ces techniques, à base de Lagrangien augmenté ont été proposées (Le Tallec, 1994; Glovinski et Le Tallec, 1990). Ces méthodes sont naturellement très bien adaptées lorsque les interfaces entre sous-structures font intervenir des comportements complexes comme le contact frottant ou l'endommagement. On peut noter aussi la méthode LATIN proposée dans (Ladevèze, 1996) et développée dans (Champagney *et al.*, 1997; Dureisseix et Ladevèze, 1999; Ladevèze *et al.*, 2002). De plus, elle présente dans sa forme la plus récente, une composante multi-échelles (Ladevèze et Nouy, 2003). Les champs d'effort et de vitesse aux interfaces sont alors décomposés en parties dites macro et micro, la partie macro représentant une moyenne du champ et la partie micro étant définie par un principe de localisation.

1.2.1.3 Méthodes de résolution itératives : Krylov

Considérons la résolution du système linéaire $Ax = B$. Il peut être intéressant de résoudre ce problème de manière itérative, dans le cadre de méthodes de sous-structuration par exemple. La i ème itération conduit à l'approximation x_i de la solution x , le résidu associé est alors : $r_i = B - Ax_i$. La donnée du vecteur x_0 permet d'initialiser la procédure.

Les solveurs de Krylov présentés par exemple dans (Saad, 2000; Shewchuk, 1994; Barrett *et al.*, 1994) reposent sur la construction itérative d'un sous espace de Krylov $\kappa_m(A, r_0)$ défini de la manière suivante :

$$\kappa_m(A, r_0) = Vect(r_0, Ar_0, \dots, A^{m-1}r_0) \quad (1.32)$$

où $Vect(v_i)$ désigne l'espace vectoriel engendré par les vecteurs v_i . La résolution du système consiste à rechercher x_m sous les contraintes :

$$x_m \in x_0 + \kappa_m(A, r_0) \quad (1.33)$$

$$r_m \perp \kappa_m(A, r_0) \quad (1.34)$$

Le résidu à l'itération m (r_m) doit être orthogonal au sous espace de Krylov $\kappa_m(A, r_0)$. Le choix d'un opérateur symétrique défini positif M diffère entre les méthodes et permet de définir ($u \perp_M v$) c'est à dire $u^T M v = 0$. Ici seuls les algorithmes de gradient conjugué et de GMRes(m) seront présentés avec préconditionneur.

1.2.1.3.1 GMRes Le principe de recherche de x_m dans un algorithme de GMRes préconditionné à gauche est le suivant :

$$x_m \in x_0 + \kappa_m(M^{-1}A, r_0) \quad (1.35)$$

$$r_m \perp_M \kappa_m(M^{-1}A, r_0) \quad (1.36)$$

La particularité de l'algorithme est de ne pas calculer d'approximation au fur et à mesure des itérations, une mise en oeuvre adroite permettant d'avoir accès à une norme du résidu à chaque itération. L'orthogonalité de la base étant obtenue par rapport au préconditionneur (défini positif), il est possible de résoudre des problèmes non symétriques avec l'algorithme de GMRes.

1.2.1.3.2 Gradient Conjugué L'algorithme du gradient conjugué ne s'applique qu'à des matrices symétriques définies positives permettant ainsi de définir un produit scalaire. Le principe de recherche de x_m dans un algorithme de gradient conjugué préconditionné est le suivant :

$$x_m \in x_0 + \kappa_m(M^{-1}A, r_0) \quad (1.37)$$

$$r_m \perp_A \kappa_m(M^{-1}A, r_0) \quad (1.38)$$

Théoriquement, les nouvelles directions de recherche générées par le processus itératif n'ont besoin d'être réorthogonalisées que par rapport à la dernière direction. Cependant, en pratique la relation de conjugaison est perdue rapidement au fil des itérations, une réorthogonalisation est donc nécessaire. Avec cette procédure supplémentaire le gradient conjugué devient presque aussi coûteux que le GMRes.

1.2.1.3.3 Convergence et préconditionnement Les méthodes de GMRes et gradient conjugué présentent toutes deux des théorèmes de convergence, notamment pour le gradient conjugué :

$$\|x - x_m\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^m \|x - x_0\|_A \quad (1.39)$$

où κ est le conditionnement de la matrice à « inverser » ($M^{-1}A$). De ce fait le choix d'un préconditionneur permet une convergence plus rapide car κ diminue, il est donc crucial. En pratique ces estimations sont souvent trop majorantes car la totalité du spectre n'intervient pas, seule une partie est activée. Une étude plus précise introduisant la notion de spectre de Ritz (Paige *et al.*, 1995) permet de mieux apprécier le taux de convergence de la méthode.

1.2.2 Simulation en présence de non linéarités matériau

Dans ce paragraphe, seuls quelques concepts généraux touchant à notre étude sont présentés, le calcul non linéaire étant un domaine très vaste. Le lecteur pourra se reporter aux ouvrages (Zienkiewicz et Taylor, 2000; Ladevèze, 1996) pour une présentation plus approfondie.

Le cadre de la plasticité étant désormais relativement figé, l'intégration des lois de comportement élasto-plastiques repose sur des algorithmes classiques de type retour radial (Ortiz et Simo, 1986). Dans le cadre des composites à fibres longues, les lois de comportement continuent à évoluer ((Hochard *et al.*, 2001) pour les plis tissés). Ces modélisations font intervenir de l'endommagement couplé à la plasticité. De plus, l'endommagement introduisant des problèmes de localisation, ces modèles sont souvent régularisés par l'introduction d'une longueur caractéristique (Bazant et Pijaudier-Cabot, 1988; Larys et Belytschko, 1988; Ladevèze et Le Dantec, 1992), ce qui les rend non-locaux. Le problème est alors de proposer une intégration cohérente du comportement et d'assurer la convergence. Dans ce contexte plus flou, des algorithmes de type Newton sont utilisés ((Bordreuil *et al.*, 2003) pour le modèle de (Hochard *et al.*, 2001)).

Pour ce qui est de la résolution du problème non linéaire posé sur la structure, les méthodes incrémentales sont souvent utilisées. Celle-ci, contrairement à d'autres non incrémentales comme la méthode LATIN (Ladevèze, 1996), consistent premièrement à décomposer l'intervalle de temps en plusieurs sous-intervalles. L'histoire des inconnues est alors approchée sur chacun d'eux, de manière linéaire par exemple. Le problème à résoudre est donc rendu indépendant du temps, mais reste non linéaire. Un algorithme de type Newton peut être utilisé pour résoudre ce problème. Ce dernier est constitué de deux groupes d'équations, le premier contient les équations linéaires (éventuellement globales) et le second les équations locales (éventuellement non linéaires), la solution se trouvant à l'intersection de ces deux sous espaces. Ces groupes d'équations représentent l'admissibilité statique et cinématique d'une part et la relation de comportement d'autre part. Les algorithmes mis en place consistent à itérer entre les deux sous espaces en suivant des directions de recherche. Le choix de ces directions fait la différence entre les méthodes. Celles de Newton utilisent un retour sur le groupe d'équations non linéaires à déformation constante. Le passage du deuxième groupe vers le premier utilise, suivant les cas, le comportement tangent (Simo et Taylor, 1985), le comportement courant ou le comportement initial. Dans le cadre de l'endommagement, le comportement tangent n'étant pas toujours positif, le choix du comportement courant est effectué. En effet, celui-ci permet une convergence plus rapide que le comportement initial.

Un dernier problème se pose dans la mesure où la structure admet une charge limite car un pilotage en effort n'est pas toujours possible. Des techniques de pilotage sont alors mises en oeuvre, elles consistent à relâcher la contrainte d'effort imposé. Celui-ci devient inconnu, une équation supplémentaire est alors ajoutée pour indiquer à l'algorithme quel chemin suivre, pour cela l'algorithme se base sur une quantité évoluant de manière monotone. La recherche de la solution est classiquement effectuée dans un hyperplan (Riks, 1972; Ramm, 1981) ou dans une hypersphère (Crisfield, 1981; Hellweg et Crisfield, 1998). Ce pilotage dépend fortement des phénomènes mis en jeu, (Alfano et Crisfield, 2003) par exemple étudie le cas du développement du délaminage.

1.2.3 Conclusion

Afin de rendre possible l'utilisation de modèles fins de matériaux composites, une stratégie de calcul efficace est nécessaire. En effet l'échelle mise en jeu, de l'ordre du dixième de millimètre, est très inférieure à celle de la structure. Trois points sont à étudier.

Le premier concerne la réduction de la zone d'étude fine à la zone pertinente

(ici les extrémités du tube), en dehors de celle-ci, une théorie simplifiée doit être utilisée. Le problème est alors de générer des conditions limites correctes, à partir de la théorie simplifiée, à appliquer sur le modèle fin.

La résolution du problème élastique de bord intervenant très souvent dans le cadre d'une résolution non linéaire pour différentes familles de défauts, il est nécessaire de mettre au point un traitement efficace de ce problème (deuxième point). Compte tenu de la géométrie du tube, la piste du développement en séries de Fourier paraît très intéressante. Dans le cas de couplage entre modes, il est possible d'utiliser une méthode de résolution itérative comme pour les techniques de sous structuration qui, par le choix d'un bon préconditionneur permet une résolution parallèle du problème.

Enfin, le troisième point concerne la résolution du problème non linéaire et l'intégration des lois de comportement.

Chapitre 2

Réduction de la zone d'étude : la problématique du raccord

L'utilisation de modèles fins, à l'échelle du pli, engendre des coûts de calcul prohibitifs. Par exemple, le maillage 3D d'un tube mène à la résolution d'un problème non-linéaire d'environ 10 millions de degrés de liberté. Or expérimentalement, les dégradations ont lieu aux extrémités, il est alors intéressant de réduire la zone d'étude fine. Un modèle poutre est utilisé pour prédire la solution à coeur et générer des conditions limites à imposer sur le problème fin d'extrémité. Dans ce chapitre, la problématique du raccord entre modélisation poutre et modèle 3D est traitée. Ce raccord est basé sur la solution de Saint-Venant du problème qui est construite grâce à la théorie exacte des poutres.

Sommaire

2.1	Présentation de la problématique du raccord	33
2.2	Raccord basé sur une théorie de poutre simple	34
2.2.1	Notations	34
2.2.2	Formulation du problème poutre	35
2.2.3	Exploitation et reconstruction du champ solution	38
2.2.4	Résultats numériques	39
2.2.5	Conclusion sur les raccords simples	44

2.3	Principe de Saint-Venant	45
2.4	Théorie exacte des poutres	47
2.4.1	Formulation du problème	47
2.4.2	Identification des opérateurs	48
2.4.3	Illustrations	51
2.5	Conclusion	58

2.1 Présentation de la problématique du raccord

La solution du problème d'élasticité posé sur le tube peut être décomposée en deux zones distinctes. La première, le coeur, reste élastique et relativement homogène. La deuxième, l'extrémité, est le lieu des dégradations et est soumise à des effets de bord tridimensionnels. Dans notre approche, la solution intérieure sera construite à partir de quantités poutres. Une fois cette solution connue, elle sera utilisée pour générer les conditions limites à appliquer à un modèle fin non linéaire de l'extrémité du tube.

Un point essentiel est celui du « raccord » entre la zone d'intérêt, ici les extrémités du tube, et la zone d'analyse à moindre coût (ici l'intérieur du tube). Au raccord, on s'impose la contrainte de ne pas générer d'effets locaux artificiels notamment dans l'optique de calcul non linéaire ou ces effets locaux pourraient venir progressivement « polluer » la solution dans la zone d'intérêt. Un premier type d'approche, qui prend de plus en plus d'importance du fait des besoins de couplage de modèles, est juste de considérer que l'on a à associer deux types de modèles, un de la zone intérieure (modèle poutre) et l'autre de la zone de bord (modèle 3D). Une approche possible dans cet esprit est de suivre la démarche proposée par Ben Dhia (Ben Dhia, 1998), démarche que l'on pourrait qualifier de partition de modèle.

La voie suivie ici est plus classique, il s'agit de considérer que l'on traite un seul modèle (poutre 3D) que l'on cherche à calculer de façon efficace. Une première approche est de bâtir les modèles de façon asymptotique à un ordre suffisant pour générer la solution intérieure. Une difficulté importante dans ce cas est la question du calcul dissocié des effets de bord. Ces aspects ont notamment été regardés dans (Buannic et Cartraud, 2001a,b). La voie suivie ici cherche à calculer une approximation de la solution 3D à l'intérieur en utilisant efficacement une théorie de poutre puis un relèvement 3D de la solution. En effet, cette approche avait donné des résultats tout à fait satisfaisants dans le cas des plaques composites (Allix, 1989)¹. Il s'est avéré que cette idée, mise en application dans un cadre simple, est en échec pour les poutres composites. Dans le cas où les effets de bord ne pénètrent pas à coeur, l'information contenue dans le raccord est la solution de Saint-Venant du problème élastique, celle-ci ne contenant pas d'effet localisée. La théorie exacte des poutres (Ladevèze et

¹En imposant comme conditions limites le champ de déplacement reconstruit à partir de la théorie de plaque, O. Allix remarque que la plaque est surcontrainte dans son épaisseur par la partie normale du déplacement. Pour éviter cette surcontrainte, il suffit alors de ne pas imposer la partie normale du déplacement partout, mais seulement sur le plan moyen de la plaque.

Simmonds, 1995) est alors mise en oeuvre pour construire la solution de Saint-Venant.

Le prochain paragraphe présente l'utilisation d'une théorie simple de poutre et sa mise en défaut, les suivants présentent la théorie exacte des poutres et la construction du raccord.

2.2 Raccord basé sur une théorie de poutre simple

L'objectif de ce paragraphe est l'étude de la faisabilité d'un raccord basé sur une théorie de poutre classique (Euler-Bernoulli ou Timoshenko) ne générant pas d'effet de bord artificiel. Une première étude simplifiée a été menée, celle-ci ne prend pas en compte le gauchissement dans un premier temps. Pour cela les cas tests traités ne devront pas faire intervenir de couplage avec la torsion. La construction du modèle poutre utilisé est présentée puis appliquée pour générer un raccord.

2.2.1 Notations

Soit une poutre droite élastique (domaine Ω) d'axe \vec{e}_z et de section S . Dans la base des coordonnées cartésiennes $(\vec{e}_z, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, les coordonnées d'un point M appartenant à la poutre s'écrivent : $O\vec{M} = z\vec{e}_z + x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = z\vec{e}_z + \vec{X}$ (\vec{X} appartient à la section droite d'abscisse z).

Cette poutre est soumise à un chargement volumique f_d et à des efforts surfaciques F_d ou des déplacements U_d à ses extrémités ($z = 0$ et $z = L$). Le champ de déplacement est noté U , le champ de déformations ε et le champ de contraintes σ . L'opérateur de Hooke représentant le comportement de la poutre est noté K . Les champs de contraintes et de déformations sont décomposés en partie plane (par rapport à la section droite de la poutre) et anti-plane.

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{zz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{zx} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{zy} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_P \end{pmatrix} ; \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{zz} \\ \sqrt{2}\sigma_{zx} \\ \sqrt{2}\sigma_{zy} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sqrt{2}\sigma_{xy} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_A \\ \sigma_P \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

De même le comportement se décompose :

$$K = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AP} \\ K_{PA} & K_{PP} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

2.2.2 Formulation du problème poutre

Les théories classiques de poutre comme Euler-Bernoulli ou Timoshenko sont basées sur des hypothèses mixtes (Timoshenko et Goodier, 1970). (Herakovich, 1998) donne une illustration dans le cas des poutres composites. Le déplacement de chaque section est supposé être un mouvement de corps rigide et la contrainte anti-plane est supposée être nulle, c'est à dire :

$$U(M) = \vec{u}(z) + \vec{\omega}(z) \wedge \vec{X} = \begin{pmatrix} u(z) + \omega_x(z)y - \omega_y(z)x \\ v(z) - \omega_z(z)y \\ w(z) + \omega_z(z)x \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$\sigma_P = 0 \quad (2.4)$$

Ces hypothèses se justifient, d'une part par la comparaison avec des problèmes simple d'élasticité (solutions des problèmes de Saint-Venant) et d'autre part, par l'utilisation de méthodes asymptotiques tronquées aux premiers ordres (Rigolot, 1980; Grillet *et al.*, 2000). En pratique, plus la poutre est élancée et mieux les hypothèses sont vérifiées. Le gauchissement n'étant pas introduit, la torsion ne sera pas étudiée et en pratique $\omega_z(z) = 0$.

Afin de prendre en compte des hypothèses mixtes, une formulation adaptée est utilisée, celle d'Hellinger-Reissner (Reissner, 1950). Le problème est alors de trouver les champs de contrainte σ statiquement admissible et de déplacement U cinématiquement admissible rendant stationnaire la fonctionnelle :

$$HR(\sigma, U) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\sigma}^T \mathbb{K}^{-1} \hat{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \hat{\sigma}^T \hat{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} f_d U d\Omega - \int_{\partial\Omega} F_d U dS \quad (2.5)$$

sous les contraintes 2.3 et 2.4.

La stationnarité par rapport à $\hat{\sigma}$ donne :

$$\int_{\Omega} (\delta\hat{\sigma})^T [\hat{\varepsilon} - \mathbb{K}^{-1} \hat{\sigma}] d\Omega = 0 \quad (2.6)$$

avec $\delta\hat{\sigma}$ statiquement admissible à zéro donc $\delta\sigma_P = 0$. Il vient :

$$\varepsilon_A = (K^{-1})_{AA} \sigma_A \quad (2.7)$$

Le comportement utilisé ne prend en compte que la partie anti-plane du comportement 3D.

$$\sigma_A = ((K^{-1})_{AA})^{-1} \varepsilon_A = K_{poutre} \varepsilon_A \quad (2.8)$$

Remarque :

$$((K^{-1})_{AA})^{-1} \neq K_{AA} \quad (2.9)$$

La stationnarité par rapport à U donne les équations d'équilibre sous forme variationnelle ($\tau(U)$ représente le travail des efforts extérieurs) :

$$\int_{\Omega} \sigma_A^T \varepsilon_A (\delta U) d\Omega - \tau(U) = 0 \quad (2.10)$$

ou sous forme locale :

$$\frac{d\vec{N}}{dz} + f = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{d\vec{M}}{dz} + \vec{e}_z \wedge \vec{N} = 0 \quad (2.12)$$

Il est à noter que ces équations d'équilibre sont exactes. Les contraintes généralisées notées \vec{N} pour ce qui est de l'effort et \vec{M} pour le moment sont définies par :

$$\vec{N} = \int_S \sigma \vec{e}_z dS \quad (2.13)$$

$$\vec{M} = \int_S \vec{X} \wedge \sigma \vec{e}_z dS \quad (2.14)$$

La déformation s'écrit :

$$\varepsilon_{zz} = u' - \vec{\omega}' \cdot (\vec{e}_z \wedge \vec{X}) \quad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{zy} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} + \vec{e}_z \wedge \vec{\omega}' \right] \quad (2.16)$$

La partie du comportement utilisée pour les poutres K_{poutre} s'écrit :

$$\sigma_{zz} = a\varepsilon_{zz} + \vec{b}^T \begin{pmatrix} \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{zy} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \end{pmatrix} = \vec{b}\varepsilon_{zz} + \mathbb{C} \begin{pmatrix} \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{zy} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

La relation de comportement au sens des poutres s'écrit alors (avec $\langle . \rangle = \int_S . dS$) :

$$N_z = \langle \sigma_{zz} \rangle \quad (2.19)$$

$$= \left[\langle a \rangle, \langle \frac{\vec{b}^T}{2} \rangle \right] \vec{\gamma} + \left[\langle \frac{\vec{b}^T}{2} (\vec{e}_z \wedge \vec{X}) \rangle, - \langle a (\vec{e}_z \wedge \vec{X}) \rangle \right] \vec{\chi}$$

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \end{pmatrix} \rangle \quad (2.20)$$

$$= [\langle \vec{b} \rangle, \langle \frac{\mathbb{C}}{2} \rangle] \vec{\gamma} + [\langle \frac{\mathbb{C}}{2} (\vec{e}_z \wedge \vec{X}) \rangle, - \langle \vec{b} (\vec{e}_z \wedge \vec{X})^T \rangle] \vec{\chi}$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \langle \vec{X} \wedge \sigma_{zz} \vec{e}_z \rangle \quad (2.21)$$

$$= [\langle a (\vec{X} \wedge \vec{e}_z) \rangle, \langle (\vec{X} \wedge \vec{e}_z) \frac{\vec{b}^T}{2} \rangle] \vec{\gamma}$$

$$+ [\langle (\vec{X} \wedge \vec{e}_z) \frac{\vec{b}^T}{2} (\vec{e}_z \wedge \vec{X}) \rangle, - \langle a (\vec{X} \wedge \vec{e}_z) (\vec{e}_z \wedge \vec{X})^T \rangle] \vec{\chi}$$

Ces expressions définissent l'opérateur Λ de manière explicite sans avoir recours à des calculs auxiliaires et peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \vec{\gamma} \\ \vec{\chi} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

en introduisant les déformations généralisées :

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} + \vec{e}_z \wedge \vec{\omega} \quad (2.23)$$

$$\vec{\chi} = \vec{\omega}' \quad (2.24)$$

Suivant la forme de la section S de la poutre ainsi que la répartition du matériau dans la section, certains termes de couplage vont disparaître. En pratique $\langle a \rangle$ représente le module d'Young de la poutre et la fibre neutre est choisie pour éliminer le terme $\langle a (\vec{e}_z \wedge \vec{X}) \rangle$ de couplage entre tension et flexion. Dans le cas de la poutre étudiée ici, et contrairement au cas des plaques, la séquence d'empilement « symétrique équilibrée » ne permet pas de supprimer tous les couplages, mais seulement de les diminuer fortement. Dans le cas d'un empilement de plis à 0 et 90 degrés, les couplages avec la torsion disparaissent, ce qui justifie la possibilité de ne pas prendre en compte de gauchissement.

Le problème poutre à résoudre s'écrit :

Trouver (\vec{u}, \vec{w}) et (\vec{N}, \vec{M}) vérifiant :

- Les conditions limites en déplacement
- Les équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{N}}{dz} + f &= 0 \\ \frac{d\vec{M}}{dz} + \vec{e}_z \wedge \vec{N} &= 0 \end{aligned}$$

- La relation de comportement poutre

$$\begin{pmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \vec{\gamma} \\ \vec{\chi} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Remarque : dans la théorie d'Euler-Bernoulli, le terme de cisaillement de l'énergie de déformation est négligé, ce qui conduit à une cinématique simplifiée où les sections droites restent droites (relation entre dérivée de la flèche et rotation de la section).

2.2.3 Exploitation et reconstruction du champ solution

Pour construire le raccord, on cherche à effectuer un relèvement 3D de la solution approchée. L'information a priori pertinente permettant la mise au point d'un raccord en déplacement est contenue dans ε_A (relations 2.15 et 2.16) et $\sigma_P = 0$. Malheureusement, le champ de déformation associé n'est en général pas compatible. En effet, $\sigma_P = 0$ implique :

$$\varepsilon_P = -K_{PP}^{-1} K_{PA} \varepsilon_A \quad (2.26)$$

Ce champ de déformation est bien intégrable pli par pli et ne dépend que des déformations généralisées, mais ne satisfait pas en général les conditions de compatibilité au passage des interfaces. Ces conditions s'écrivent :

$$[\varepsilon_P]_r \vec{e}_r = 0 \quad \forall \vec{\gamma}, \forall \vec{\chi} \quad (2.27)$$

Les crochets $[\varepsilon_P]_r \vec{e}_r$ désignent le saut de déformation anti-plane à la traversée de l'interface de rayon r appliqué au vecteur \vec{e}_r . En écrivant $\varepsilon_A \vec{e}_r$ sous la forme :

$$\varepsilon_A \vec{e}_r = G_\gamma \vec{\gamma} + G_\chi \vec{\chi} \quad (2.28)$$

alors les conditions de compatibilité sont :

$$[K_{PP}^{-1} K_{PA} G_\gamma] = 0 \quad (2.29)$$

$$[K_{PP}^{-1} K_{PA} G_\chi] = 0 \quad (2.30)$$

Ces relations ne sont en général pas vérifiées, c'est pourquoi, on est conduit dans une approche en déplacement à retenir comme approximation le champ de déplacement poutre calculé directement par la relation 2.3. Bien entendu, un tel champ de déplacement surcontraint les sections par rapport au champ de déplacement vrai. En conséquence, on peut s'attendre à ce que la meilleure approximation soit obtenue avec le raccord en contrainte normale à la section de la poutre. Celle-ci est telle que :

$$\sigma_A = K_{poutre} \varepsilon_A \quad (2.31)$$

Il est à noter, que les champs de contraintes sont au mieux linéaires par morceaux, ce qui n'est pas toujours compatible avec les conditions limites sur la surface latérale de la poutre qui est supposée libre de contraintes.

2.2.4 Résultats numériques

Deux exemples sont traités, le premier est une poutre homogène isotrope. Le second est une poutre composite, constituée de plis unidirectionnels ayant pour séquence d'enroulement [0/90/0]. Ces deux cas font disparaître les couplages tension/torsion et flexion/torsion. Dans les deux cas, la section est circulaire et le chargement est de la flexion simple. Les différentes quantités étudiées sont tracées le long d'une génératrice du cylindre (notée : Droite l1 sur la figure 2.1) et ce pour deux distances de raccord différentes (2 et 3 fois le diamètre), ce qui permettra de vérifier que les effets indésirables se déplacent avec la zone de raccord. Les résultats pour la grande distance de raccord sont indiqués avec des croix. De plus, deux raccords sont envisagés, ils sont basés sur :

1. $\vec{U}(M)$: le déplacement poutre
2. $\sigma \vec{e}_z$: la contrainte normale poutre

Chaque graphique tracé ci-après comporte donc 4 courbes, représentant les évolutions de diverses quantités le long de la ligne l1 (figure 2.1) dans l'interface intérieure [0/90] pour le cas composite.

2.2.4.1 Évolution de la contrainte σ_{XX}

Dans le cas d'un raccord correct, il devrait régner un état de contraintes anti-planes dans la zone intérieure du tube et donc en particulier au niveau du raccord. Les figures 2.2 et 2.3 représentent l'évolution de la contrainte σ_{XX} le long de la poutre dans les cas homogène et composite. Celle-ci devrait être nulle dans la zone de coeur et au raccord. On peut remarquer que pour un raccord en contrainte, les effets de bord sont moins forts que pour un raccord en déplacement. En effet, ce dernier ne permet pas à la section de gonfler

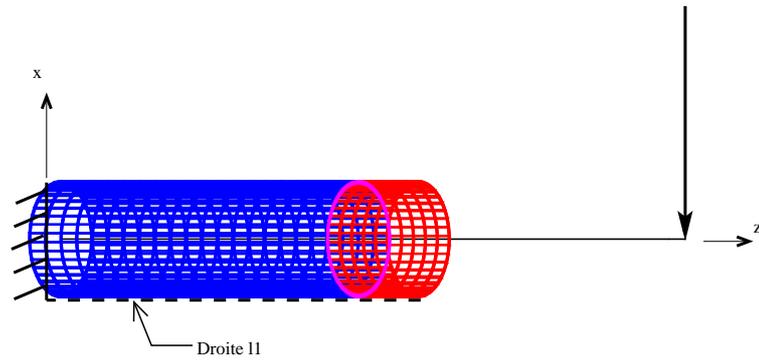


Figure 2.1 – Maillage de l'extrémité du tube

librement ce qui vient surcontraindre le raccord. Cependant, bien que correct dans le cas homogène (figure 2.2), le raccord en contrainte est mis en défaut dans le cas composite (figure 2.3).

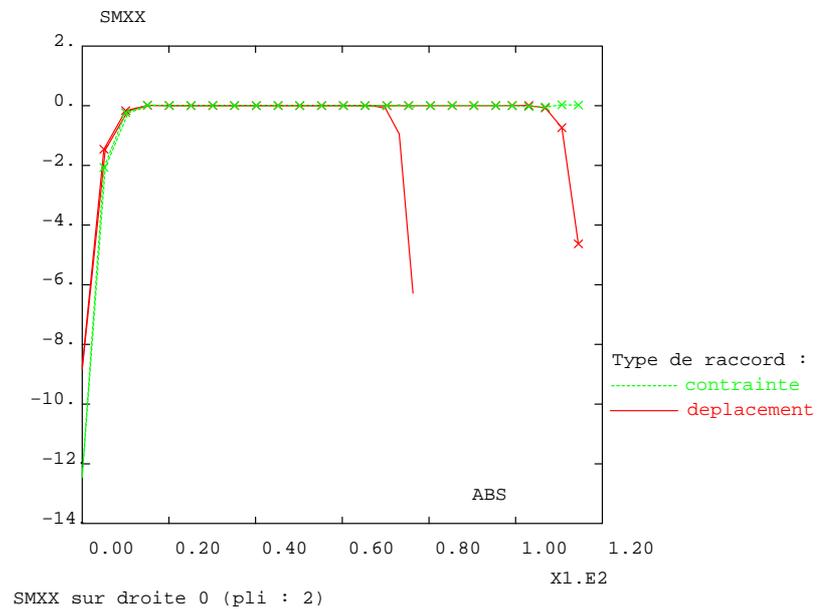
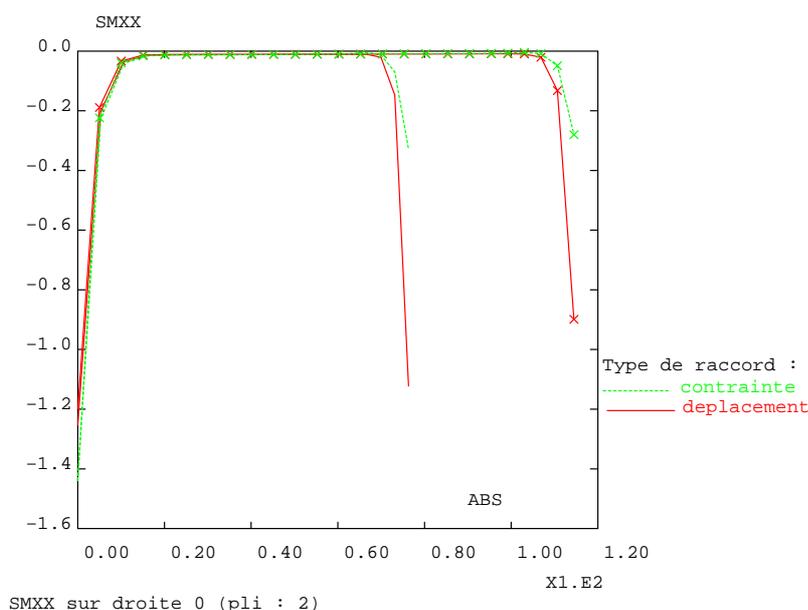


Figure 2.2 – Évolution de σ_{XX} suivant l1 : cas homogène isotrope

Figure 2.3 – Évolution de σ_{XX} suivant l_1 : cas composite

2.2.4.2 Évolution du déplacement U_X

Les figures 2.4 et 2.5 représentent l'évolution de la flèche U_X le long de la poutre dans les cas homogène et composite. La relation de comportement de la théorie des poutres n'étant pas exacte, les conditions limites imposées par le raccord en déplacement ne sont pas correctes. Par contre, le raccord en contrainte donne de bons résultats dans les cas homogène (figure 2.4) et composite (figure 2.5), les effets de bord sont presque invisibles au raccord. La solution de Saint-Venant est quasiment confondue avec la solution du raccord en contrainte.

2.2.4.3 Évolution de l'effort tranchant T_X

Les figures 2.6 et 2.7 représentent l'évolution de l'effort tranchant calculé à partir de l'intégration de la solution dans la zone de bord. Le raccord en contrainte donne le bon niveau d'effort tranchant à l'intérieur contrairement au raccord en déplacement. Dans ce dernier cas, l'introduction d'un coefficient de section réduite permettrait de modifier la relation de comportement poutre afin d'obtenir un niveau d'effort tranchant correct. Dans le cas du raccord en contrainte, on voit un effet de bord au raccord. En effet, on impose une contrainte de cisaillement "uniforme" sur cette section ($\frac{T}{S}$) or cette condition n'est pas compatible avec la condition de surface libre sur la surface latérale du tube. Une singularité a lieu à l'intersection entre la surface de raccord et

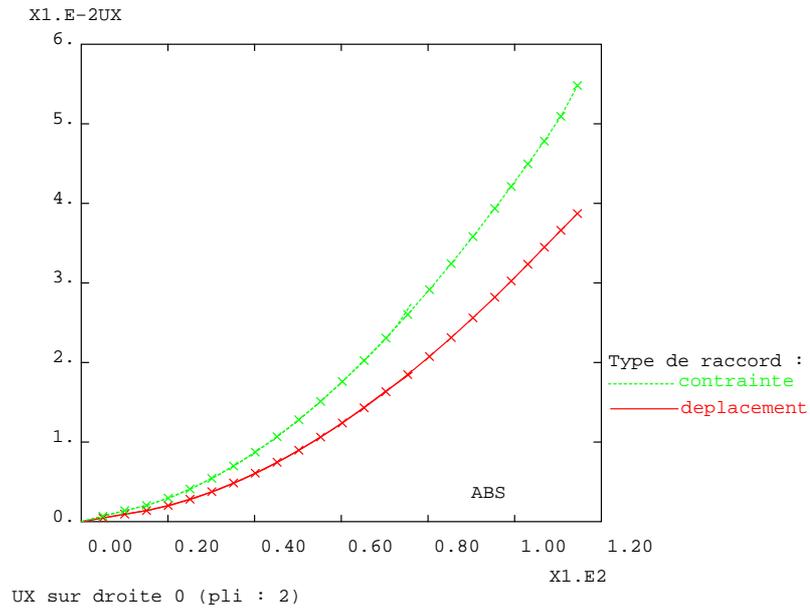


Figure 2.4 – Évolution de U_X suivant $l1$: cas homogène isotrope

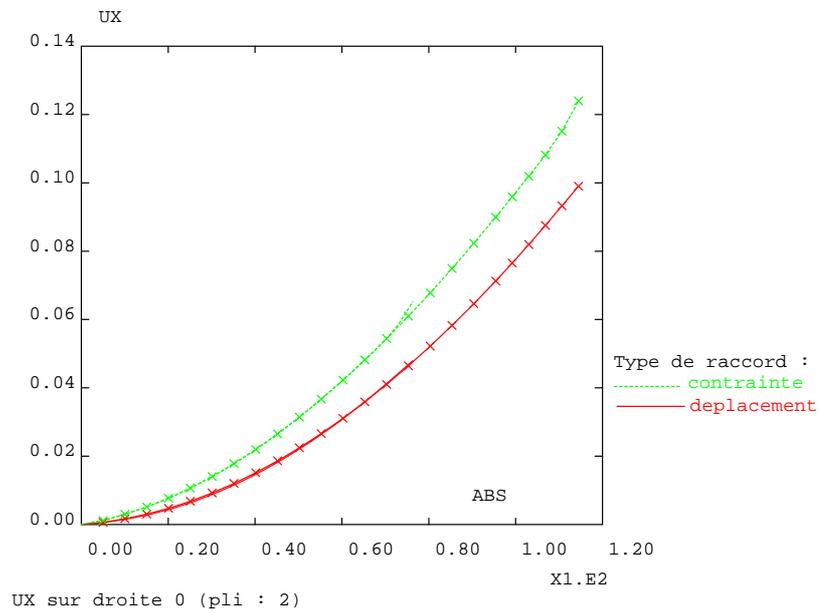


Figure 2.5 – Évolution de U_X suivant $l1$: cas composite

la surface latérale du tube. La procédure d'intégration permettant de calculer l'effort tranchant est alors malmenée et ne permet pas d'accéder au résultat.

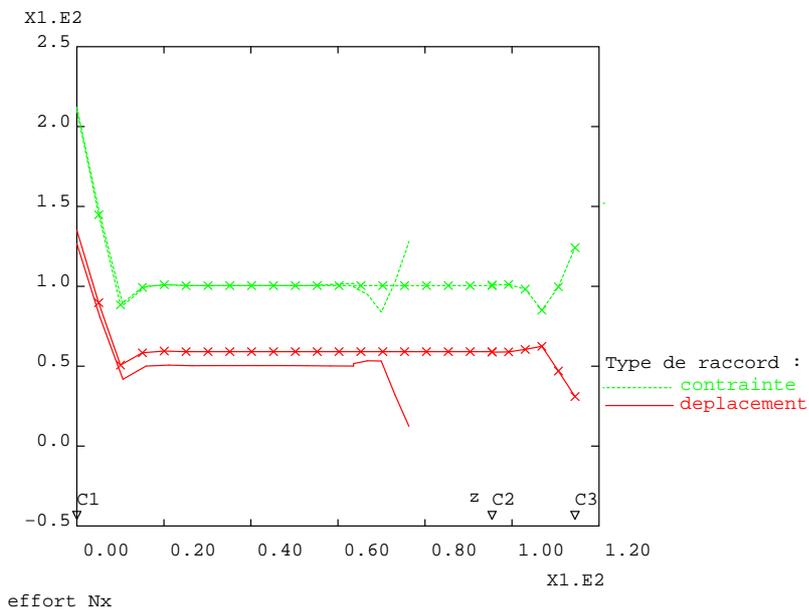


Figure 2.6 – Évolution de T_X suivant l_1 : cas homogène isotrope

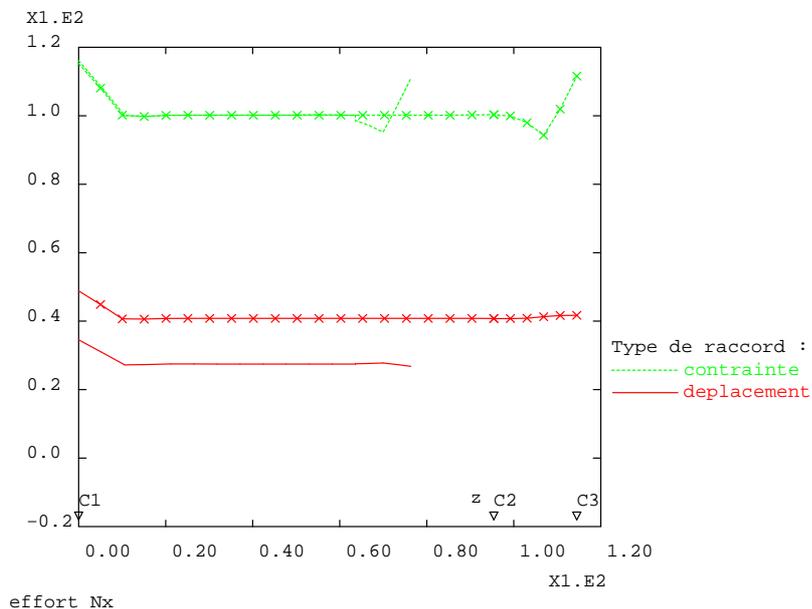


Figure 2.7 – Évolution de T_X suivant l_1 : cas composite

2.2.4.4 Évolution du moment fléchissant M_Y

Les figures 2.8 et 2.9 représentent l'évolution du moment fléchissant calculé à partir de l'intégration de la solution dans la zone de bord. Le moment fléchissant découlant de l'effort tranchant, on retrouve les mêmes conclusions que précédemment (figure 2.8 et figure 2.9), la pente pour un raccord en déplacement est moins forte que celle pour un raccord en contrainte.

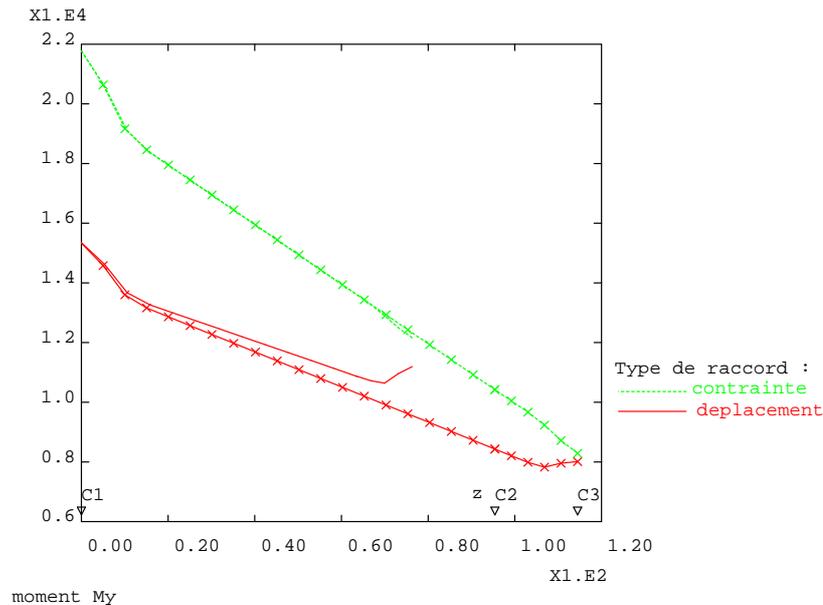
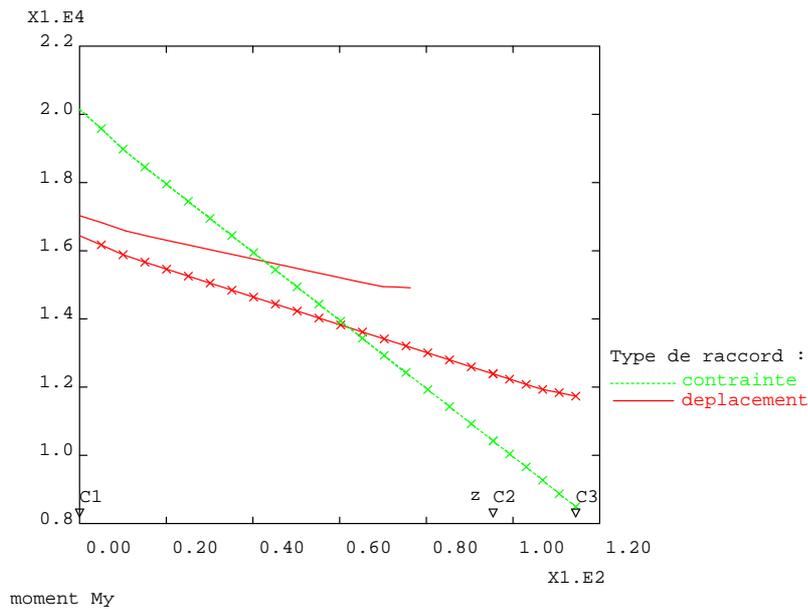


Figure 2.8 – Évolution de M_Y suivant l_1 : cas homogène isotrope

2.2.5 Conclusion sur les raccords simples

Contrairement au cas des plaques, il n'est pas possible de construire simplement un raccord correct entre une poutre et un massif. Tous les raccords envisagés génèrent un effet indésirable près de la zone de raccord. Il ne peuvent donc pas être utilisés directement. Cependant, dans la zone intérieure, le raccord en contrainte donne de bons résultats ce qui est en accord avec le principe de Saint-Venant.

Dans le cas de l'introduction de fonctions de gauchissement, la résolution de problèmes auxiliaires devient nécessaire comme c'est le cas pour la théorie exacte des poutres développée ci-après. Dans la mesure où la difficulté de mise en oeuvre est équivalente, cette dernière théorie est préférée car elle permet de construire « exactement » la solution de Saint-Venant.

Figure 2.9 – Évolution de M_Y suivant l_1 : cas composite

2.3 Principe de Saint-Venant

Le lecteur trouvera un bilan des travaux effectués sur le principe de Saint-Venant dans (Horgan et Knowles, 1983; Horgan, 1989, 1996) et un exemple de son utilisation sur des cylindres hétérogènes anisotropes dans (Dong *et al.*, 2001a,b,c). De manière classique, le principe de Saint-Venant peut s'énoncer de la manière suivante :

”Dans la section droite d’une poutre, la distribution de contraintes due à un système de forces, appliquées à une certaine distance de cette section, ne change pas si l’on substitue à ces forces un autre système, provoquant les mêmes efforts intérieurs ; seules changent, sur une longueur égale à une à deux fois la plus grande dimension transversale de la poutre, les contraintes locales provoquées par l’introduction de forces.”

Ce principe donne donc une équivalence entre deux chargements par rapport à la solution intérieure d’un problème d’élasticité. La condition d’équivalence entre chargements est exprimée par l’égalité des torseurs des actions mécaniques appliquées.

La vision présentée par Ladevèze (Ladevèze, 1983) et à l’origine de la théorie exacte des poutres (Ladevèze et Simmonds, 1995; Sanchez, 2001), part de

la volonté de séparer l'effet à grande longueur de variation de la solution de l'effet à faible longueur de pénétration (effet de bord). Pour cela, l'hypothèse de comportement élastique est indispensable, sans quoi la propriété de superposition est perdue. Le but est donc de trouver la classe de conditions limites assurant la localisation des contraintes et des déplacements.

Remarque : On appellera solution de Saint-Venant la partie polynômiale (i.e. à grande longueur d'onde) de la solution du problème élastique traité (l'étude dans le cas de chargements sur la surface latérale et des forces volumiques de la poutre étant en fait due à Almansi - Michell). On trouvera des exemples de solutions de Saint-Venant dans le cas de tubes composites dans (Xia *et al.*, 2001b, 2002, 2001a,c).

La solution de Saint Venant s'écrit de la manière suivante :

$$U_{sv} = \tilde{u} + \tilde{\omega} \wedge \vec{X} + A\tilde{N} + B\tilde{M} + z_d \quad (2.32)$$

$$\sigma_{sv} \vec{e}_z = A^0 \tilde{N} + B^0 \tilde{M} + Z_d \quad (2.33)$$

avec :

- A^0, B^0, A, B sont des opérateurs caractéristiques de la section droite et du matériau, constants par rapport à z ;
- z_d, Z_d sont des vecteurs constants par rapport à z , caractéristiques des efforts, de la géométrie et du matériau ;
- $\tilde{u}, \tilde{\omega}$ sont des vecteurs constants dans la section droite qui ne dépendent donc que de z ;
- \tilde{N}, \tilde{M} sont respectivement la résultante et le moment de $\sigma \vec{e}_z$, en équilibre avec les charges.

La condition de localisation des contraintes et des déplacements (équation de Maxwell-Betti écrite sur une section) s'écrit alors :

$$\forall s_{sv}^* : [s_0, s_{sv}^*] = 0 \quad (2.34)$$

$$[s_0, s_{sv}^*] = \int_S \sigma_{sv}^* \vec{e}_z \cdot U - \sigma \vec{e}_z \cdot U_{sv}^* dS \quad (2.35)$$

En injectant les expressions de U_{sv} et $\sigma_{sv} \vec{e}_z$ dans cette dernière équation, il est possible d'écrire la condition de localisation en fonctions de grandeurs généralisées à définir.

$$\int_S \sigma_{sv}^* \vec{e}_z \cdot U - \sigma \vec{e}_z \cdot U_{sv}^* dS = \tilde{N}^* \tilde{u} + \tilde{M}^* \tilde{\omega} + \tilde{N} \tilde{u}^* + \tilde{M} \tilde{\omega}^* \quad (2.36)$$

Les grandeurs généralisées sont les suivantes :

– Contraintes généralisées :

$$\tilde{N} = \int_S \sigma \vec{e}_z dS \quad (2.37)$$

$$\tilde{M} = \int_S \vec{X} \wedge \sigma \vec{e}_z dS \quad (2.38)$$

– Déplacements généralisés :

$$\tilde{u} = \int_S A^{0T} U - A^T \sigma \vec{e}_z dS \quad (2.39)$$

$$\tilde{\omega} = \int_S B^{0T} U - B^T \sigma \vec{e}_z dS \quad (2.40)$$

Remarque : Les quantités généralisées définies ici seront à la base de la théorie exacte des poutres qui fera l'objet du paragraphe suivant. La construction du déplacement généralisé n'est pas une simple moyenne mais fait intervenir des opérateurs, ceux-ci permettront la mise en place du comportement poutre de la théorie exacte des poutres. De plus, au même titre que les contraintes généralisées, les déplacements généralisés définissent une équivalence entre conditions limites. Des conditions limites dites équivalentes génèrent alors la même solution intérieure. Autrement dit, pour un effet localisé les quantités généralisées sont nulles. On retrouve cette idée de conditions limites assurant la localisation des contraintes et des déplacements dans les travaux de (Buannic et Cartraud, 2001b) par exemple.

La solution du problème d'élasticité se décompose alors comme suit :

$$s(z) = \underbrace{s_{sv}(z)}_{\text{solution de St Venant}} + \int_0^L \underbrace{s^\pm(z-t, t)}_{\text{densité d'effet localisé}} dt$$

Pour certains types de géométries (voiles minces par exemples), les solutions localisées peuvent donc recouvrir l'intégralité de la poutre. La solution de Saint-Venant n'est alors pas "visible", et il faut utiliser une théorie de poutre adaptée pour capter la solution intérieure (Vlassov, 1962; Grillet *et al.*, 2000).

2.4 Théorie exacte des poutres

2.4.1 Formulation du problème

La théorie exacte des poutres (Ladevèze et Simmonds, 1995, 1996, 1998) s'appuie sur la démonstration du principe de Saint-Venant (Ladevèze, 1983).

Le problème de poutre associé est classique :

Trouver $(\tilde{u}, \tilde{\omega}, \tilde{N}, \tilde{M})$ vérifiant :

1. les liaisons cinématiques (en termes de déplacements généralisés)
2. les équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{N}}{dz} + f_d &= 0 \\ \frac{d\tilde{M}}{dz} + \vec{e}_z \wedge \tilde{N} &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

3. La relation de comportement

$$\begin{bmatrix} \tilde{\gamma} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma^d \\ \chi^d \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

avec $\tilde{\gamma} = \tilde{u}' + \vec{e}_z \wedge \tilde{\omega}$ et $\tilde{\chi} = \tilde{\omega}'$. γ^d et χ^d sont définis à partir du chargement.

Il est à noter que cette théorie ne repose sur aucune hypothèse statique ou cinématique. Les déplacements généralisés utilisés ici ont le même potentiel que la notion de contrainte généralisée c'est à dire, assurer la localisation de la solution. De plus, à partir de la solution de ce problème unidimensionnel, il est très facile de reconstruire la solution de Saint-Venant du problème 3D et donc de générer des conditions de raccord adéquates sur un massif 3D. Cependant, cette théorie met en place un certain nombre d'opérateurs qu'il va falloir calculer ou identifier.

2.4.2 Identification des opérateurs

Une difficulté de la théorie exacte des poutres est d'avoir accès aux différents opérateurs car ils ne sont souvent pas calculables analytiquement. On a alors recours au calcul numérique et en particulier à la méthode des éléments finis. Plusieurs méthodes existent pour identifier les opérateurs, elles sont basées sur la connaissance de la solution de Saint-Venant notée (U_{SV}, σ_{SV}) pour des chargements élémentaires. Une fois l'ensemble de ces solutions élémentaires calculées, la démarche d'identification des opérateurs est donnée dans l'algorithme 1 et utilise la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}^{**} \\ \tilde{M}^{**} \end{bmatrix}^T \Lambda \begin{bmatrix} \tilde{N}^* \\ \tilde{M}^* \end{bmatrix} = \int_S \text{Tr} [\sigma_{sv}^{**} K^{-1} \sigma_{sv}^*] dS \quad (2.43)$$

Remarques : la flexion simple, faisant intervenir la flexion pure, pour identifier A^0 (resp. A), il faut avoir identifié B^0 (resp. B) au préalable.

Algorithme 1 Démarche d'identification des opérateurs de la théorie exacte des poutres

```

1: for chargement* = {{traction, torsion, flexion pure},{ flexion simple}} do
2:   for chargement** = {{traction, torsion, flexion pure},{ flexion simple}}
   do
3:     calculer  $\tilde{M}$  avec les relations d'équilibre de la poutre 2.41
4:     identifier  $A^0$  ou  $B^0$  avec la relation 2.33
5:     identifier  $\lambda$  avec la relation 2.43
6:     calculer  $(\tilde{u}, \tilde{\omega})$ 
7:     identifier  $A$  ou  $B$  avec la relation 2.32
8:   end for
9: end for

```

Les différences entre les techniques d'identification résident dans la façon d'obtenir les solutions de Saint-Venant élémentaires (traction, torsion, flexion pure puis simple). La plus simple, utilisée dans un premier temps, consiste à effectuer un calcul complet avec effet de bord puis à identifier les opérateurs en dehors des zones de pénétration (Allix *et al.*, 2005; Baranger *et al.*, 2005). Cette technique revient à augmenter la zone d'étude fine par une zone tampon restant élastique et supportant l'effet de bord généré par le raccord.

La deuxième méthode, mise en oeuvre dans (Sanchez *et al.*, 1999; Sanchez, 2001) nécessite des procédures de calcul et des éléments finis adaptés. En effet, de manière à se placer sur la solution de Saint-Venant, des éléments finis d'ordre quatre sont utilisés. De plus, il est nécessaire d'imposer des conditions limites en terme de moment et d'effort, ce qui est fait par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode étant plus lourde à mettre en oeuvre, elle n'a pas été implantée.

La dernière technique, développée par (El Fatmi et Zenzri, 2002, 2004), permet l'utilisation d'un code éléments finis standard ayant des éléments avec une interpolation de degré supérieur ou égal à deux dans l'axe de la poutre. Il suffit alors d'imposer certaines conditions limites, détaillées ici, pour que la solution du problème soit la solution de Saint-Venant. Cette méthode est présentée dans les cas simples où elle a été implantée, c'est à dire : la traction, la torsion et la flexion pure.

La solution U du problème de minimisation de l'énergie potentielle 2.44 à σ_{SV} donné est la solution de Saint-Venant.

$$E_p(U) = \frac{1}{2} \int_{\omega} Tr[\varepsilon K \varepsilon] d\Omega + \int_{S_0} \sigma_{SV} \vec{e}_z U dS - \int_{S_L} \sigma_{SV} \vec{e}_z U dS \quad (2.44)$$

Sous les hypothèses, $\frac{d\tilde{N}}{dz} = 0$ et $\frac{d\tilde{M}}{dz} = 0$ (chargements de traction, torsion ou flexion pure), le travail des efforts extérieurs s'exprime :

$$\int_{S_0} \sigma_{SV} \vec{e}_z U dS - \int_{S_L} \sigma_{SV} \vec{e}_z U dS = \tilde{N}(\tilde{u}(0) - \tilde{u}(L)) + \tilde{M}(\tilde{\omega}(0) - \tilde{\omega}(L)) \quad (2.45)$$

\tilde{N} et \tilde{M} sont ici des données du problème, \tilde{u} et $\tilde{\omega}$ sont des inconnues qui vont être exprimées en fonction du déplacement de Saint-Venant. En intégrant les équations d'équilibre 2.41 et la relation de comportement 2.42, le déplacement de Saint-Venant s'écrit :

$$\begin{aligned} U_{SV} = & \tilde{u}_0 + \tilde{\omega}_0 \wedge O\vec{M} + A\tilde{N} + B\tilde{M} \\ & + \frac{z^2}{2} (\lambda_{MN}\tilde{N} + \lambda_{MM}\tilde{M}) \\ & + z (\lambda_{NN}\tilde{N} + \lambda_{NM}\tilde{M}) \\ & + z (\lambda_{MN}\tilde{N} + \lambda_{MM}\tilde{M}) \wedge X \end{aligned} \quad (2.46)$$

d'où la forme du champ de déplacements à imposer et les déplacements généralisés grâce aux relations (I est l'inertie de la section de la poutre) :

$$\int_S U_{SV}(0) - U_{SV}(L) dS = (\tilde{u}(0) - \tilde{u}(L)) S \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \int_S X \wedge (U_{SV}(0) - U_{SV}(L)) dS &= \int_S X \wedge (\tilde{\omega}(0) - \tilde{\omega}(L)) \wedge X dS \\ &= I (\tilde{\omega}(0) - \tilde{\omega}(L)) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Le champ de déplacement doit nécessairement prendre la forme 2.46 afin d'éviter toute partie localisée dans la solution. Cette solution est un polynôme de degré deux en z , ce qui impose l'utilisation d'éléments finis de degré supérieur ou égal à deux suivant l'axe du tube. Une fois le type d'élément fixé, il reste à déterminer les relations à imposer entre degrés de liberté afin de donner la bonne forme au champ interpolé. Prenons par exemple un élément ayant une interpolation cubique suivant l'axe. Le coefficient intervenant devant le terme $z^i x^j y^k$ (i, j et $k \in [0, 3]$) sur la composante $l \in \{z, x, y\}$ du déplacement est notée : $a_{i,j,k}^l$. On doit imposer les relations suivantes :

1. $a_{3,*,*}^* = 0$
2. $a_{2,*,*}^z = 0$
3. $a_{2,\geq 1,\geq 1}^y = 0$
4. $a_{2,\geq 1,\geq 1}^x = 0$
5. $a_{1,1,0}^z = 2a_{2,0,0}^x$
6. $a_{1,0,1}^z = -2a_{2,0,0}^y$
7. $a_{1,1,0}^x = 0$
8. $a_{1,0,1}^y = 0$
9. $a_{1,\geq 2,\geq 2}^x = 0$
10. $a_{1,\geq 2,\geq 2}^y = 0$

Dans le cadre d'une formulation de type Fourier, il est possible d'exprimer ces conditions limites en procédant à deux changements de base :

1. le changement de base du champ de déplacement : passage de (u_z, u_x, u_y) à (u_z, u_r, u_θ)
2. le changement de base du système de coordonnées : passage de (z, x, y) à (z, r, θ)

Les conditions limites font alors apparaître un couplage entre le fondamental et la première harmonique en $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Les différents opérateurs donnent des résultats dans la base cylindrique (contrainte circonférentielle, déplacement radial par exemple) et prennent en entrée des efforts et moments exprimés dans la base de coordonnées cartésiennes.

2.4.3 Illustrations

Afin de vérifier la mise en oeuvre de la méthode d'identification présentée au paragraphe précédent, une comparaison avec des solutions analytiques sur tube est menée. Dans un premier temps, considérons le cas très simple d'un tube mince (rayon intérieur r_i et extérieur r_e) homogène isotrope (de module d'Young E et de coefficient de poisson ν). Dans ce cas, le comportement de poutre obtenu s'écrit :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{ES} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{kGS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{kGS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Avec :

$$S = \pi(r_e^2 - r_i^2), \quad I = \frac{\pi}{4}(r_e^4 - r_i^4), \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad J = 2I \quad (2.50)$$

Le facteur k est le facteur de correction en cisaillement et vaut 0.5 comme prévu par (Sanchez, 2001). Le paramètre k joue le même rôle qu'un coefficient de section réduite dans une théorie de poutre classique, or nous n'avons pas fait intervenir de coefficient de section réduite pour construire les raccords simples basés sur les théories de poutres classiques.

Dans un deuxième temps, considérons un tube [+55/-55/+55/-55] (Xia *et al.*, 2001b,a) constitué d'enroulements filamenteux de T300/934 (caractéristiques mécaniques données dans le tableau 2.1).

Propriété	T300/934
$E_1(GPa)$	141.6
$E_2(GPa)$	10.7
$G_{12}(GPa)$	3.88
ν_{12}	0.268
ν_{23}	0.495

Tableau 2.1 – Caractéristiques du T300/934

Chaque pli mesure 0.5 mm d'épaisseur et le rayon intérieur du tube est de 50 mm. Les figures 2.10 et 2.11 représentent, pour un chargement en pression interne, différentes composantes des contraintes en fonction d'une distance radiale adimensionnée (r_e et r_i sont les rayons intérieurs et extérieurs du tube) :

$$R = \frac{r - r_i}{r_e - r_i} \quad (2.51)$$

Dans ce cas, la contrainte axiale représente la composante axiale de la force généralisée Z_d (figure 2.12). En ajoutant à cela un état de tension (faisant intervenir A_{zz}^0), la contrainte axiale dans le tube est représentée figure 2.13 et est conforme à celle obtenue analytiquement par Xia.

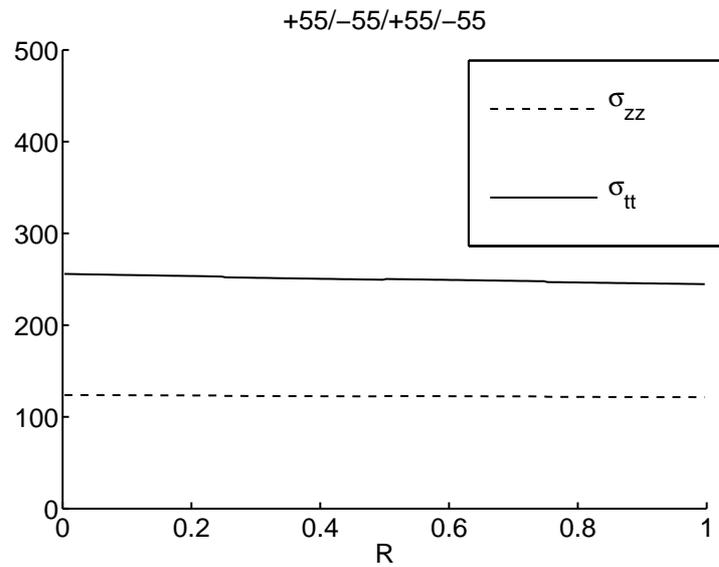


Figure 2.10 – Évolution des contraintes circonférentielle et axiale (en MPa) en fonction de R

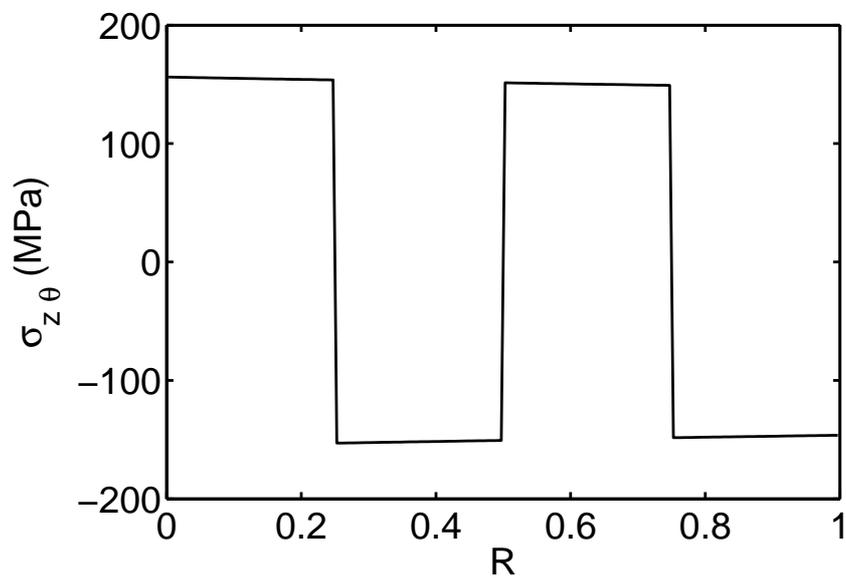


Figure 2.11 – Évolution de la contrainte de cisaillement $\sigma_{\theta z}$ (en MPa) en fonction de R

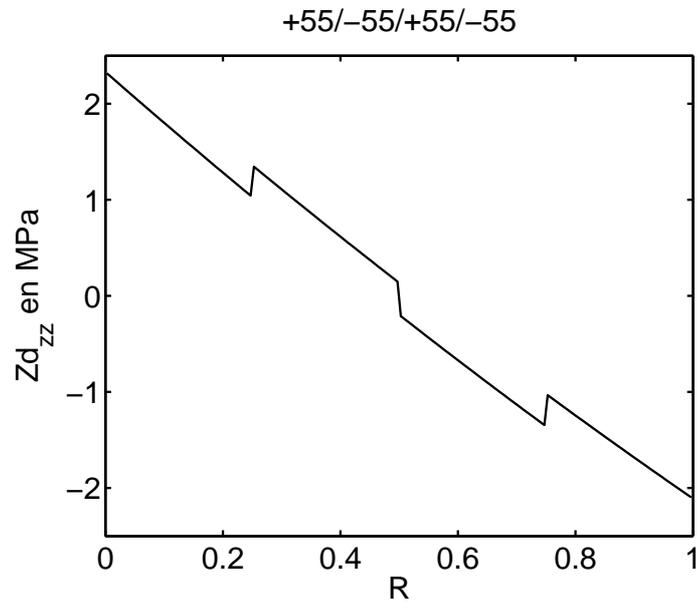


Figure 2.12 – Évolution de Zd_{zz} (en MPa) en fonction de R

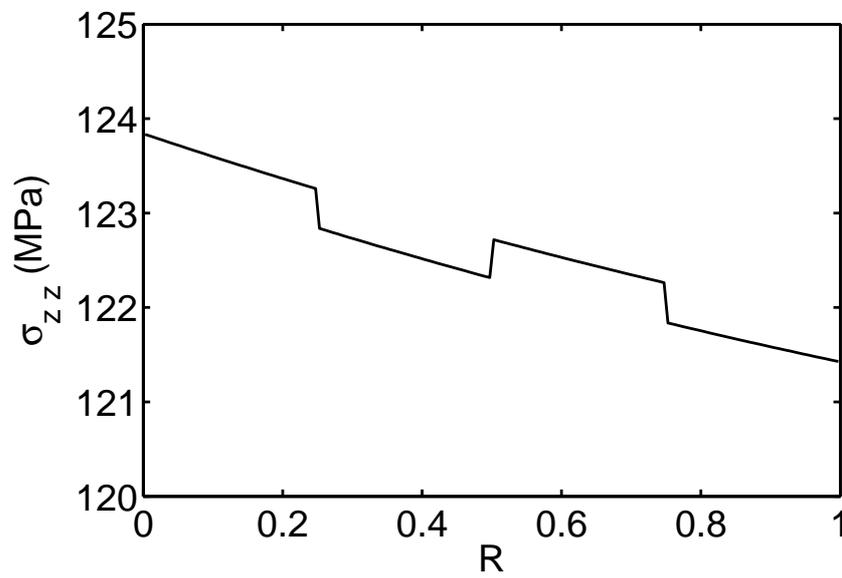


Figure 2.13 – Évolution de la contrainte axiale (en MPa) en fonction de R

Considérons maintenant le cas industriel d'un tube [+20/-20/0/-20/20], de rayon intérieur 16 mm, constitué de plis de G969/RTM6 d'épaisseur 0.2 mm. Bien que théoriquement, la séquence d'empilement ne permette pas de découpler totalement la tension de la torsion et de la flexion ; en pratique l'opérateur Λ est presque diagonal. La séquence d'empilement choisie minimise donc les couplages.

Pour un chargement de flexion simple sur une poutre console, les figures 2.14 et 2.15 représentent l'évolution de la contrainte axiale. La deuxième figure considère cette évolution dans une coupe longitudinale du tube (coupe où le chargement est le plus fort). Sur la figure 2.16 est représentée l'évolution de la contrainte de cisaillement σ_{zr} dans l'interface entre les deux premiers plis intérieurs (+20/ - 20). Il est à noter que les effets de bord à l'encastrement ont une longueur de pénétration de l'ordre du diamètre du tube. Sur la figure 2.17 est représentée la composante u_z du déplacement dans la section d'abscisse $3r_e$, c'est à dire la section où sont identifiés les opérateurs. La solution intérieure coïncide donc bien dans ce cas avec la solution de Saint-Venant. Le raccord basé sur la construction de la solution de Saint-Venant du problème est alors bien adapté. Le recours à des théories de type Vlassov ne sera pas nécessaire. Cependant, afin que ce raccord fonctionne au mieux, il est nécessaire que le comportement de la zone de raccord reste élastique.

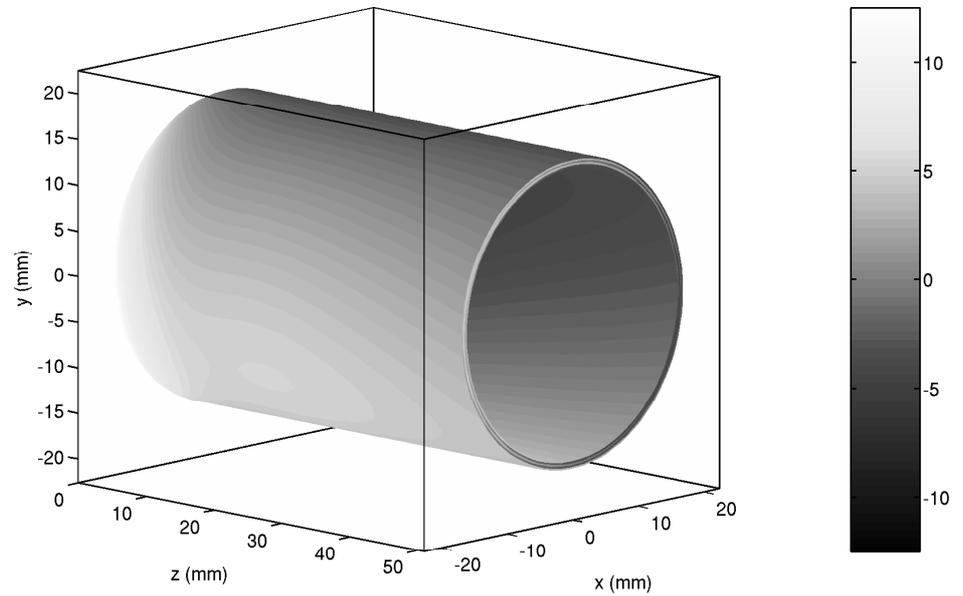


Figure 2.14 – Évolution de la contrainte axiale (en MPa) dans le tube en flexion simple

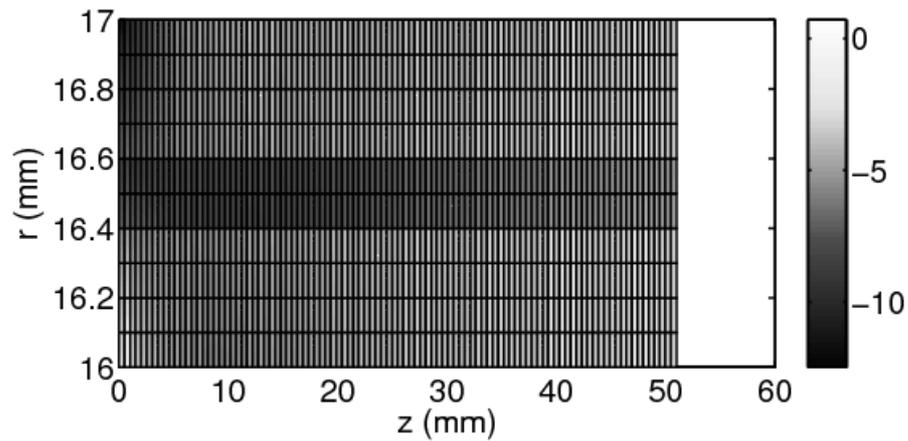


Figure 2.15 – Évolution de la contrainte axiale (en MPa) dans une section longitudinale du tube

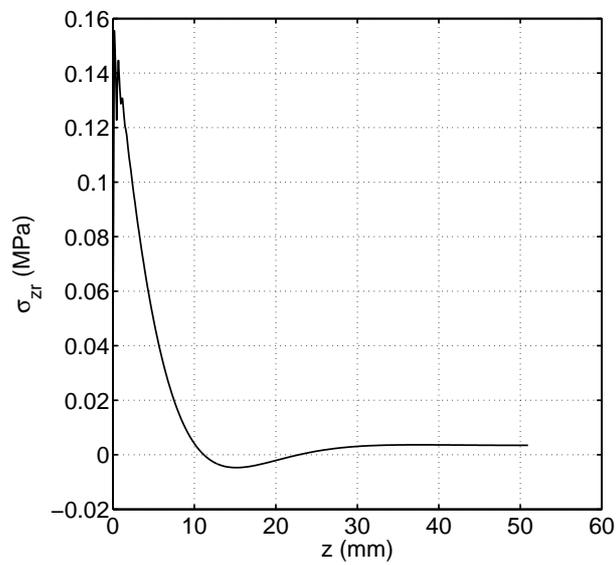


Figure 2.16 – Évolution de σ_{zr} (MPa) le long de la poutre (z en mm) à l'interface intérieure +20/-20

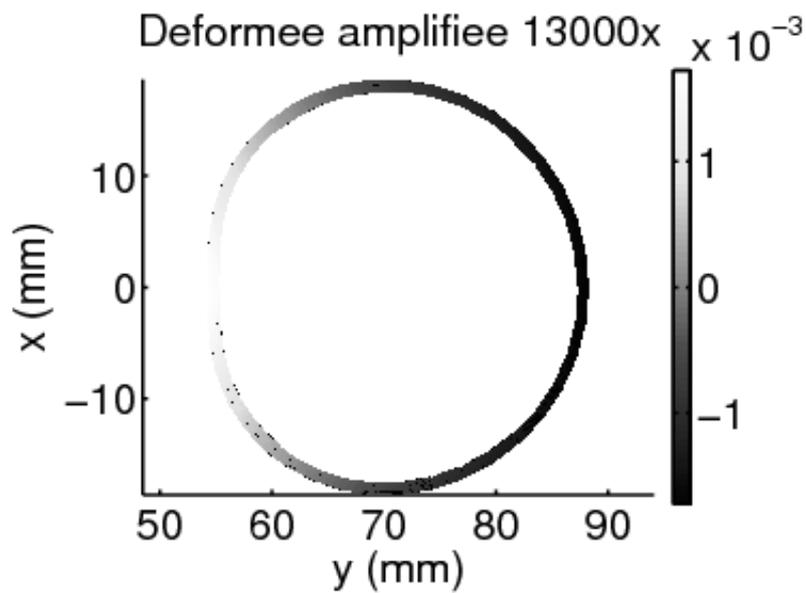


Figure 2.17 – Évolution du déplacement u_z (mm) dans la section $z = 3r_e$

2.5 Conclusion

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un raccord entre modèle poutre et modèle 3D, celui-ci ne devant pas générer d'effet parasite. Pour cela, l'information contenue dans le raccord doit être la solution intérieure du problème. La génération d'un tel raccord est difficile dans le cadre composite à partir d'une théorie classique de poutre, la théorie exacte des poutres est donc mise en oeuvre. Les effets de bord ne pénétrant pas au coeur du tube, la solution de Saint-Venant permet d'effectuer le raccord et ainsi de réduire la zone d'analyse fine. Il est à noter que le problème qui nous est posé consiste à vérifier le dimensionnement de tubes, pour cela les efforts appliqués au tube étudié sont donnés. Cela implique que le problème qui nous est posé est isostatique au sens des poutres, et si la zone dans laquelle il est effectué reste élastique alors ce raccord est exact quel que soit le comportement de l'extrémité. Différents exemples tirés de la littérature ou proches d'applications industrielles ont été traités.

Chapitre 3

Découplage du calcul sur tube sain par l'introduction de modes de Fourier étendus

Ce chapitre se concentre sur le traitement élastique efficace de la zone d'extrémité. En effet, la simulation non linéaire en présence de plusieurs familles de défauts nécessite un grand nombre de résolutions élastiques. Compte tenu de la géométrie du tube, une méthode de résolution de type Fourier est envisagée. Dans ce chapitre, l'étude est réduite au cadre d'un tube sain. Il est montré que le problème 3D peut être découplé en plusieurs problèmes 2D, ceux-ci couplent les modes en cosinus et sinus de même harmonique. Ce résultat est vrai tant que le comportement du tube est invariant par rotation autour de son axe de révolution.

Sommaire

3.1	Motivations et objectifs	61
3.2	Formulation du problème découplé	62
3.2.1	Notations	62
3.2.2	Écriture du problème découplé	64
3.3	Mise en oeuvre éléments finis	67
3.3.1	Description éléments finis	67

3.3.2	Programmation orientée objet d'un code éléments finis .	77
3.4	Estimation du coût de calcul	82
3.4.1	Nombre d'opérations liées à la résolution d'un problème	82
3.4.2	Estimation de l'encombrement mémoire	84
3.5	Applications	86
3.5.1	Illustrations issues de la littérature	86
3.5.2	Solution sur la zone de bord	87
3.5.3	Prise en compte de défauts de délaminage axisymétriques	92
3.6	Conclusion	95

3.1 Motivations et objectifs

Une fois les conditions limites construites à partir des résultats de la théorie exacte des poutres, un calcul d'effet de bord est mené. Compte tenu de l'échelle de modélisation envisagée (celle du pli), la taille des éléments finis utilisés dans le cadre d'une analyse tridimensionnelle directe serait de l'ordre du dixième de millimètre. La résolution d'un problème élastique associé fait alors intervenir environs un million de degrés de liberté. Sachant que ces résolutions élastiques vont être utilisées de nombreuses fois dans le cadre d'un algorithme non linéaire et ce pour plusieurs familles de défauts, le problème élastique de base n'est pas abordable directement. Il est à noter que c'est la discrétisation circonférentielle du tube qui est la plus pénalisante car le périmètre mesure environ 100 mm et qui plus est engendre une largeur de bande de la matrice de rigidité très importante. Pour ce qui est de la largeur de bande, une technique de sous-structuration comme FETI (Farhat et Roux, 1991) permettrait de la faire chuter au prix d'une résolution itérative. Malheureusement même pour des cas simples comme la flexion, le nombre de sous-structures ou de degrés de liberté par sous-structure demeure important. On va alors s'orienter sur une description circonférentielle des champs plus adaptée à la périodicité : un développement en série de Fourier.

Suivant l'anisotropie du matériau et sa configuration, un découplage entre modes peut être envisagé ou non. Dans le cadre classique (Zienkiewicz et Taylor, 2000) cité au paragraphe 1.2.1.1.5, le découplage est total. (Allix, 1989, 1992) utilise cette technique (par l'intermédiaire d'un préconditionneur) sur le problème de la plaque trouée. Dans notre cas, les axes d'orthotropie du matériau ne permettent qu'un découplage partiel des modes par harmonique.

Ce paragraphe présente la mise en place de la décomposition en séries de Fourier pour le cas d'une structure de révolution dont le comportement, exprimé dans la base cylindrique, est indépendant de l'angle polaire. Un cas particulier de cette classe générale de comportement est celui du tube constitué de plis tissés (figure 3.1). Le problème 3D peut alors être découpé en problèmes 2D faisant intervenir des modes de Fourier dits étendus. La géométrie axisymétrique jouant un rôle important, on va se placer systématiquement dans la base cylindrique $(\vec{e}_z, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

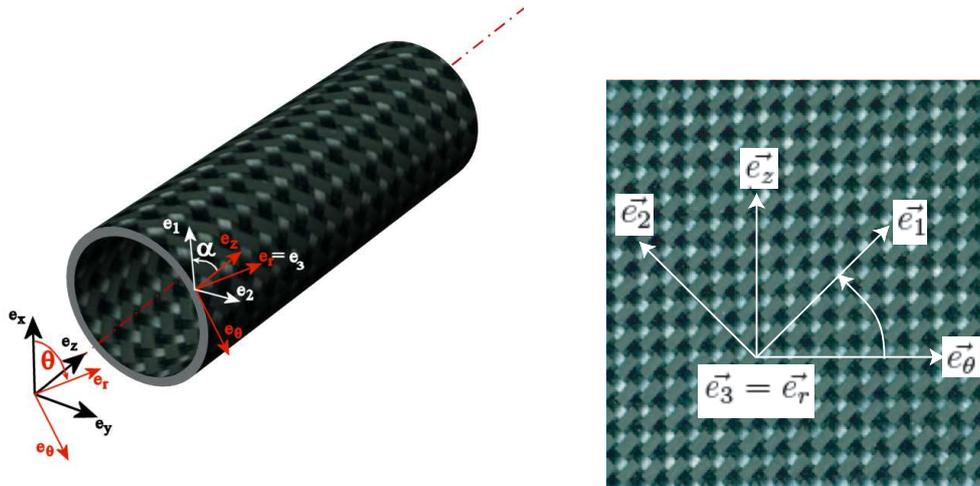


Figure 3.1 – Le tube composite et sa développée

3.2 Formulation du problème découplé

3.2.1 Notations

Cette étude est menée dans le cadre de l'élasticité linéaire sous l'hypothèse des petites perturbations. Soit le domaine de révolution Ω soumis à un chargement volumique f_d . Ce domaine est séparé en plis Ω_{plis} et en interfaces entre les plis Γ_{int} . À la frontière du domaine $\partial\Omega$ sont imposées des conditions limites ; en déplacement U_d sur $\partial_1\Omega$ et en contrainte F_d sur $\partial_2\Omega$ la partie complémentaire du bord ($\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$). Soit σ et ε les champs de contrainte et de déformation. K et k sont les matrices de Hooke des plis et des interfaces. Pour ces dernières, le saut de déplacement, noté $[U]$ est la quantité équivalente à la déformation ε pour les interfaces. Enfin, \mathcal{U}^0 représente l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles à zéro.

Le champ de déplacement s'écrit dans la base cylindrique :

$$U(M) = \begin{bmatrix} u_z \\ u_r \\ u_\theta \end{bmatrix}_{(\vec{e}_z, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)} \quad (3.1)$$

En suivant la notation de Voigt, la contrainte et la déformation s'écrivent :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sqrt{2}\sigma_{zr} \\ \sqrt{2}\sigma_{z\theta} \\ \sqrt{2}\sigma_{r\theta} \end{bmatrix}; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{zr} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{z\theta} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Le saut de déplacement est noté :

$$[U] = \begin{bmatrix} u_z^{r+} - u_z^{r-} \\ u_r^{r+} - u_r^{r-} \\ u_\theta^{r+} - u_\theta^{r-} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

où $r+$ et $r-$ indiquent les deux entités d'une interface cylindrique de rayon r et de normale \vec{e}_r . $r+$ est associé au pli extérieur et $r-$ au pli intérieur.

La relation de comportement des interfaces s'écrit :

$$F = \begin{pmatrix} \sigma_{zr} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} [U_z] \\ [U_r] - \alpha_r \Delta T \\ [U_\theta] \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Pour les plis, l'inverse de la matrice de Hooke K_{123} dans la base d'orthotropie $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, s'écrit :

$$K_{123}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Le matrice de Hooke K dans la base cylindrique $(\vec{e}_z, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est alors :

$$K = Q_\alpha K_{123} Q_\alpha^{-1} \quad (3.6)$$

avec $\sigma_{zr\theta} = Q_\alpha \sigma_{123}$ (α désigne l'angle d'enroulement du tissu) :

$$Q_\alpha = \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 0 & \sqrt{2} \cos \alpha \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 0 & -\sqrt{2} \cos \alpha \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sqrt{2} \cos \alpha \sin \alpha & -\sqrt{2} \cos \alpha \sin \alpha & 0 & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Pour les plis, la matrice de dilatation dans la base d'orthotropie $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est :

$$\Theta_{123} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

La matrice de dilatation Θ dans la base cylindrique $(\vec{e}_z, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est : $\Theta = Q_\alpha \Theta_{123}$.

3.2.2 Écriture du problème découplé

Rappelons que les conditions limites issues de la théorie exacte des poutre sont :

- le déplacement U_d sur $\partial_1\Omega$
- l'effort surfacique F_d sur $\partial_2\Omega$

Le champ de température est supposé connu. Le problème élastique à résoudre est de trouver (U, σ) dans la base cylindrique vérifiant les équations suivantes :

$$U|_{\partial_1\Omega} = U_d \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \forall U^* \in \mathcal{U}^0 : \\ - \int_{\Omega_{plis}} \sigma^T \varepsilon(U^*) d\Omega - \int_{\Gamma_{int}} F^T [U^*] d\Gamma + \int_{\Omega} f_d \cdot U^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} F_d \cdot U^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\sigma = K(\varepsilon - \Theta \Delta T) \text{ dans } \Omega_{plis} \text{ et } F = k([U] - \alpha_r \Delta T \vec{e}_r) \text{ dans } \Gamma_{int} \quad (3.11)$$

Avec les notations définies en annexe 6.3, Les développements en séries de Fourier tronqués à l'ordre N s'écrivent :

- pour les vecteurs comme le champ de déplacement exprimés dans la base cylindrique :

$$U(M) = P_0(\theta)U_0(z, r) + \sum_{n=1}^N P_{+n}(\theta)U_n(z, r) + P_{-n}(\theta)U_{-n}(z, r) \quad (3.12)$$

- pour les opérateurs comme la déformation exprimés dans la base cylindrique :

$$\varepsilon(M) = R_0(\theta)\varepsilon_0(z, r) + \sum_{n=1}^N R_n(\theta)\varepsilon_{+n}(z, r) + R_{-n}(\theta)\varepsilon_{-n}(z, r) \quad (3.13)$$

– pour les scalaires comme la variation de température :

$$\Delta T = \Delta T_0 + \sum_{n=1}^N \cos(n\theta) \Delta T_{+n} + \sin(n\theta) \Delta T_{-n} \quad (3.14)$$

En pratique, la température est supposée uniforme et ΔT est indépendant de θ , cependant la formulation est ici exposée dans le cas général d'un chargement thermique quelconque. Les modes $U_n(z, r)$ sont les modes de Fourier classiques. Le problème (3.9, 3.10, 3.11) devient alors :

$$\forall n \in [-N, N] : U_n|_{\partial_1\Omega} = U_{dn} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} & \forall n \in [-N, N], \forall U_n^* \in \mathcal{U}^0 : \\ & - \int_{\Omega_{plis}} [R_0 \varepsilon_0 + \sum_{n=1}^N R_n \varepsilon_n + R_{-n} \varepsilon_{-n}]^T K [R_0 \varepsilon_0^* + \sum_{n=1}^N R_n \varepsilon_n^* + R_{-n} \varepsilon_{-n}^*] d\Omega \\ & + \int_{\Omega_{plis}} [\Theta \Delta T]^T K [R_0 \varepsilon_0^* + \sum_{n=1}^N R_n \varepsilon_n^* + R_{-n} \varepsilon_{-n}^*] d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{int}} [P_0 [U_0] + \sum_{n=1}^N P_n [U_n] + P_{-n} [U_{-n}]]^T k [P_0 [U_0^*] + \sum_{n=1}^N P_n [U_n^*] + P_{-n} [U_{-n}^*]] d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{int}} \alpha_r \Delta T \vec{e}_r^T k [P_0 [U_0^*] + \sum_{n=1}^N P_n [U_n^*] + P_{-n} [U_{-n}^*]] d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} f_d^T [P_0 U_0^* + \sum_{n=1}^N P_n U_n^* + P_{-n} U_{-n}^*] d\Omega \\ & + \int_{\partial_2\Omega} F_d^T [P_0 U_0^* + \sum_{n=1}^N P_n U_n^* + P_{-n} U_{-n}^*] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Réécrivons le travail des efforts intérieurs :

$$\begin{aligned} & \forall U^* \in \mathcal{U}^0 : - \int_{\Omega_{plis}} Tr[\sigma \varepsilon(U^*)] d\Omega - \int_{\Gamma_{int}} \sigma \vec{e}_r \cdot [U^*] d\Gamma = \\ & - \int_{bande \cap \Omega_{plis}} \varepsilon_0^T 2\pi K \varepsilon_0^* d\Gamma - \int_{bande \cap \Gamma_{int}} [U_0]^T 2\pi k [U_0^*] ds \\ & + \int_{bande \cap \Omega_{plis}} \Delta T_0 2\pi \Theta^T K \varepsilon_0^* d\Gamma + \int_{bande \cap \Gamma_{int}} \Delta T_0 2\pi \alpha_r \vec{e}_r^T k [U_0^*] ds \\ & - \sum_{n=1}^N \int_{bande \cap \Omega_{plis}} \begin{pmatrix} \varepsilon_n^T & \varepsilon_{-n}^T \end{pmatrix} K_n \begin{pmatrix} \varepsilon_n^* \\ \varepsilon_{-n}^* \end{pmatrix} d\Gamma \\ & + \sum_{n=1}^N \int_{bande \cap \Omega_{plis}} \begin{pmatrix} \Delta T_{+n} & \Delta T_{-n} \end{pmatrix} \Theta_n \begin{pmatrix} \varepsilon_n^* \\ \varepsilon_{-n}^* \end{pmatrix} d\Gamma \\ & + \sum_{n=1}^N \int_{bande \cap \Gamma_{int}} \alpha_r \begin{pmatrix} \Delta T_{+n} & \Delta T_{-n} \end{pmatrix} \theta_n \begin{pmatrix} [U_n^*] \\ [U_{-n}^*] \end{pmatrix} ds \\ & - \sum_{n=1}^N \int_{bande \cap \Gamma_{int}} \begin{pmatrix} [U_n]^T & [U_{-n}]^T \end{pmatrix} k_n \begin{pmatrix} [U_n^*] \\ [U_{-n}^*] \end{pmatrix} ds \end{aligned} \quad (3.17)$$

avec les opérateurs suivants (leur calcul est détaillé annexe 6.3) exprimés dans la base des modes étendus où les déplacements sont écrits dans la base

cylindrique :

$$K_n = \begin{bmatrix} \int_0^{2\pi} R_n^T K R_n d\theta & \int_0^{2\pi} R_n^T K R_{-n} d\theta \\ \int_0^{2\pi} R_{-n}^T K R_n d\theta & \int_0^{2\pi} R_{-n}^T K R_{-n} d\theta \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$k_n = \begin{bmatrix} \int_0^{2\pi} P_n^T k P_n d\theta & \int_0^{2\pi} P_n^T k P_{-n} d\theta \\ \int_0^{2\pi} P_{-n}^T k P_n d\theta & \int_0^{2\pi} P_{-n}^T k P_{-n} d\theta \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\Theta_n = \begin{bmatrix} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \Theta^T K R_n d\theta & \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \Theta^T K R_{-n} d\theta \\ \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \Theta^T K R_n d\theta & \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \Theta^T K R_{-n} d\theta \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\theta_n = \begin{bmatrix} \pi \vec{e}_r^T k & 0 \\ 0 & \pi \vec{e}_r^T k \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Le problème 3D initial peut être découpé en $(N + 1)$ problèmes 2D posés sur une bande (section longitudinale du solide de révolution, figure 3.2) :

- un problème de Fourier classique posé sur la moyenne du champ de déplacements ;
- N 2D problèmes de Fourier avec couplage entre deux modes.

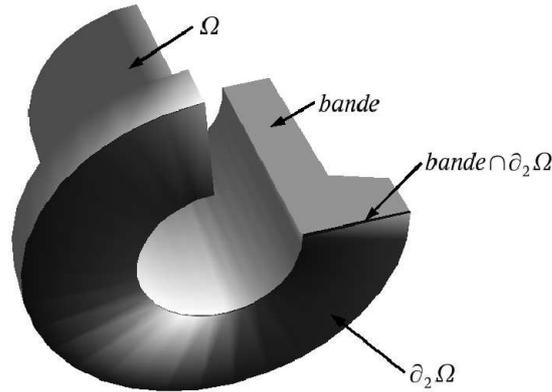


Figure 3.2 – Représentation de la notion de bande

Le problème classique est le suivant :

$$U_0|_{\partial_1\Omega} = U_{d0} \quad (3.22)$$

$\forall U^* \in \mathcal{U}^0 :$

$$\begin{aligned} & - \int_{\text{bande} \cap \Omega_{plis}} \varepsilon_0^T 2\pi K \varepsilon_0^* d\Gamma - \int_{\text{bande} \cap \Gamma_{int}} [U_0]^T 2\pi k [U_0^*] ds \\ & + \int_{\text{bande} \cap \Omega_{plis}} \Delta T_0 2\pi \Theta^T K \varepsilon_0^* d\Gamma + \int_{\text{bande} \cap \Gamma_{int}} \Delta T_0 2\pi \alpha_r \vec{e}_r^T k [U_0^*] ds \\ & + \int_{\text{bande} \cap \Gamma_{int}} \alpha_r \Delta T_0 \vec{e}_r^T k [U_0^*] d\Gamma + \int_{\text{bande} \cap \Omega} f_{d0}^T U_0^* d\Omega \\ & + \int_{\text{bande} \cap \partial_2\Omega} F_{d0}^T U_0^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Les N problèmes non classiques s'écrivent pour le couple de modes classiques $(+n, -n)$:

$$\begin{pmatrix} U_{+n} \\ U_{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{d+n} \\ U_{d-n} \end{pmatrix} \text{ sur } \partial_1 \Omega \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \forall \begin{pmatrix} U_{+n}^* \\ U_{-n}^* \end{pmatrix} \in \mathcal{U}^0 : \\ - \int_{\text{bande} \cap \Omega_{\text{plis}}} \begin{pmatrix} \varepsilon_n^T & \varepsilon_{-n}^T \end{pmatrix} K_n \begin{pmatrix} \varepsilon_n^* \\ \varepsilon_{-n}^* \end{pmatrix} d\Gamma - \int_{\text{bande} \cap \Gamma_{\text{int}}} \begin{pmatrix} [U_n]^T & [U_{-n}]^T \end{pmatrix} k_n \begin{pmatrix} [U_n^*] \\ [U_{-n}^*] \end{pmatrix} ds \\ + \int_{\text{bande} \cap \Omega_{\text{plis}}} \begin{pmatrix} \Delta T_{+n} & \Delta T_{-n} \end{pmatrix} \Theta_n \begin{pmatrix} \varepsilon_n^* \\ \varepsilon_{-n}^* \end{pmatrix} d\Gamma \\ + \int_{\text{bande} \cap \Gamma_{\text{int}}} \alpha_r \begin{pmatrix} \Delta T_{+n} & \Delta T_{-n} \end{pmatrix} \theta_n \begin{pmatrix} [U_n^*] \\ [U_{-n}^*] \end{pmatrix} ds \\ + \pi \int_{\text{bande} \cap \Omega} \begin{pmatrix} [f_{d+n}]^T & [f_{d-n}]^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [U_n^*] \\ [U_{-n}^*] \end{pmatrix} d\Gamma \\ + \pi \int_{\text{bande} \cap \partial_2 \Omega} \begin{pmatrix} [F_{d+n}]^T & [F_{d-n}]^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [U_n^*] \\ [U_{-n}^*] \end{pmatrix} ds = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Il est important de noter que cette formulation ne s'applique que pour des solides de révolution, invariants (géométrie et caractéristiques matériau) par rotation autour de leur axe. D'autre part, la solution 3D peut être reconstruite très facilement à partir de la solution décomposée sur les modes, il suffit d'utiliser une transformée de Fourier rapide (Brigham, 1988).

La formulation présentée ici étend la formulation Fourier classique. Celle-ci s'applique à des structures de géométrie axisymétrique et dont le comportement, exprimé dans la base cylindrique est indépendant de l'angle polaire. On qualifiera une telle structure d'axisymétrique. Les problèmes 2D à résoudre font intervenir des modes de Fourier dits étendus, couplant les modes classiques par harmonique.

3.3 Mise en oeuvre éléments finis

Le problème élastique 3D d'origine est transformé en plusieurs problèmes 2D découplés. Afin de résoudre ces différents problèmes 2D, une discrétisation par éléments finis est utilisée, ce qui a donné lieu à un code de calcul prototype développé sous Matlab.

3.3.1 Description éléments finis

Deux types d'éléments sont utilisés pour le calcul (Allix, 1989), des éléments de massif pour les plis et des éléments joint pour les interface comme dans

(Schellekens et De Borst, 1993).

3.3.1.1 Géométries et interpolations des éléments utilisés

Les éléments massif sont 2D (en z et r), il utilisent une interpolation des inconnues de Hermite de degré 3 suivant l'axe du tube et de Lagrange de degré 2 suivant le rayon. La dérivée axiale du champ de déplacement intervient donc, elle est notée $u_{z,z}$ pour ce qui est du déplacement axial u_z . L'interpolation utilisée pour la géométrie diffère, les coordonnées z suivant l'axe du tube sont interpolées de manière linéaire.

Les éléments d'interface sont construits de manière compatible, ils ont une géométrie unidimensionnelle afin d'engendrer un cylindre par rotation autour de l'axe du tube. L'interpolation utilisée est donc de Hermite de degré 3 pour les inconnues et linéaire pour les coordonnées z .

Ces éléments sont représentés sur la figure 3.3. Pour les éléments d'interface, les noeuds sont, en réalité, géométriquement confondus. Le nombre d'inconnues aux noeuds dépend du mode de calcul considéré, les inconnues nodales sont :

- pour un mode 0 : $u_z^0, u_{z,z}^0, u_r^0, u_{r,z}^0, u_\theta^0, u_{\theta,z}^0$
- pour un mode étendu $[+n, -n]$: $u_z^n, u_{z,z}^n, u_r^n, u_{r,z}^n, u_\theta^n, u_{\theta,z}^n, u_z^{-n}, u_{z,z}^{-n}, u_r^{-n}, u_{r,z}^{-n}, u_\theta^{-n}, u_{\theta,z}^{-n}$

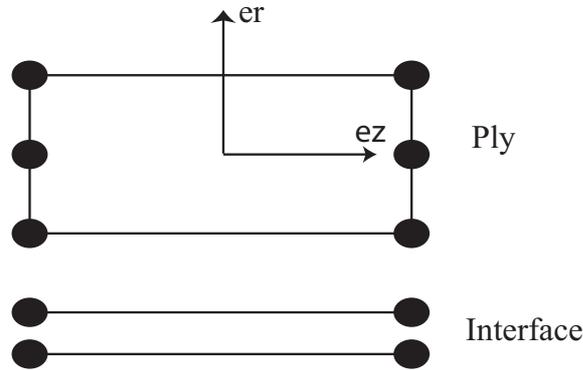


Figure 3.3 – Description des éléments finis utilisés (pli et interface)

3.3.1.2 Intégration numérique des éléments massifs

L'intégration numérique des éléments du massif a été étudiée. Les fonctions à intégrer sont des polynômes de degré 6 en z et des puissances de r allant de -1 à 5. L'intégration exacte suivant z peut donc être réalisée avec 4 points de Gauss dans cette direction, par contre les points de Gauss ne permettent pas d'intégrer exactement suivant r . Plusieurs répartitions de points de Gauss ont

Nombre total de points	Nombre suivant z	Nombre suivant r
4	2	2
9	3	3
12	4	3
16	4	4
25	5	5

Tableau 3.1 – Différentes répartitions de points de Gauss pour le massif

alors été testées et sont répertoriées dans le tableau 3.1.

Le mode 0 comporte théoriquement deux mouvements de solide rigide (translation suivant l'axe du tube \vec{e}_z et rotation autour de cet axe), le mode 1 en comporte quatre (translations suivant \vec{e}_x et \vec{e}_y et rotations autour de ces deux axes) et les autres aucun. Le premier critère de choix du nombre de points d'intégration est de respecter le rang théorique des matrices de rigidité des problèmes découplés. La figure 3.4 représente le nombre de valeurs propres nulles en fonction du nombre total de points d'intégration utilisé, cela pour les modes étendus 0, 1, 2. À partir de 9 points d'intégration, les rang sont respectés même si l'élément est sous intégré dans la longueur.

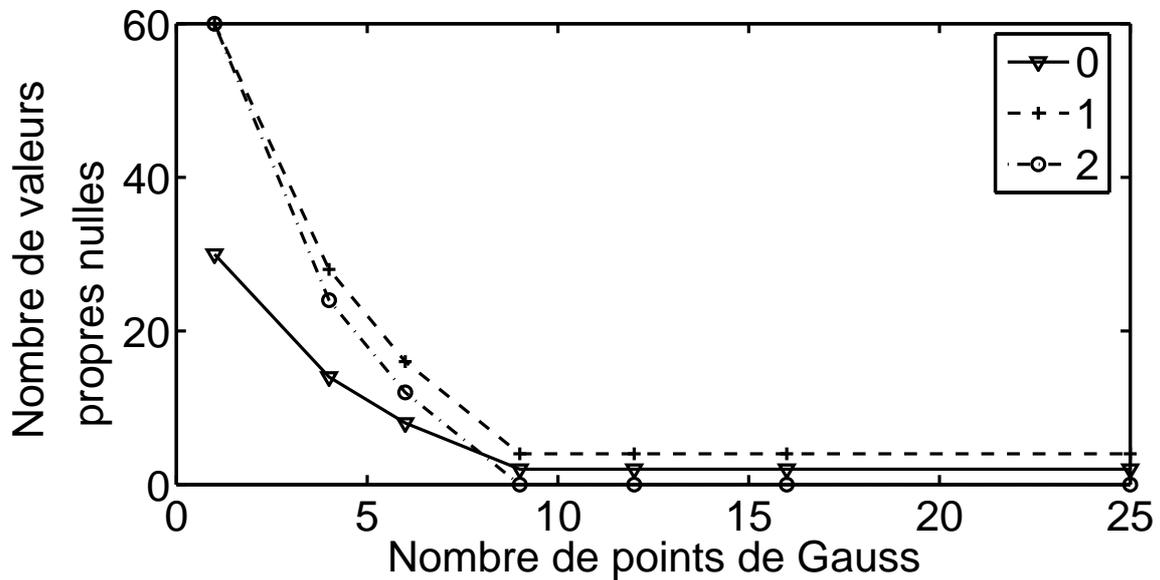


Figure 3.4 – Influence de l'intégration sur le nombre de modes à énergie nulle

Le second critère de choix du nombre de points d'intégration est d'assurer

un conditionnement correct de l'élément, afin d'éviter les problèmes numériques. La figure 3.5 représente l'évolution du conditionnement de la matrice de rigidité en fonction du nombre de points de Gauss utilisé, le matériau est alors isotrope et l'élément carré. Ici encore, 9 points de Gauss suffisent. En pratique, afin d'intégrer exactement suivant z , 12 points de Gauss seront utilisés.

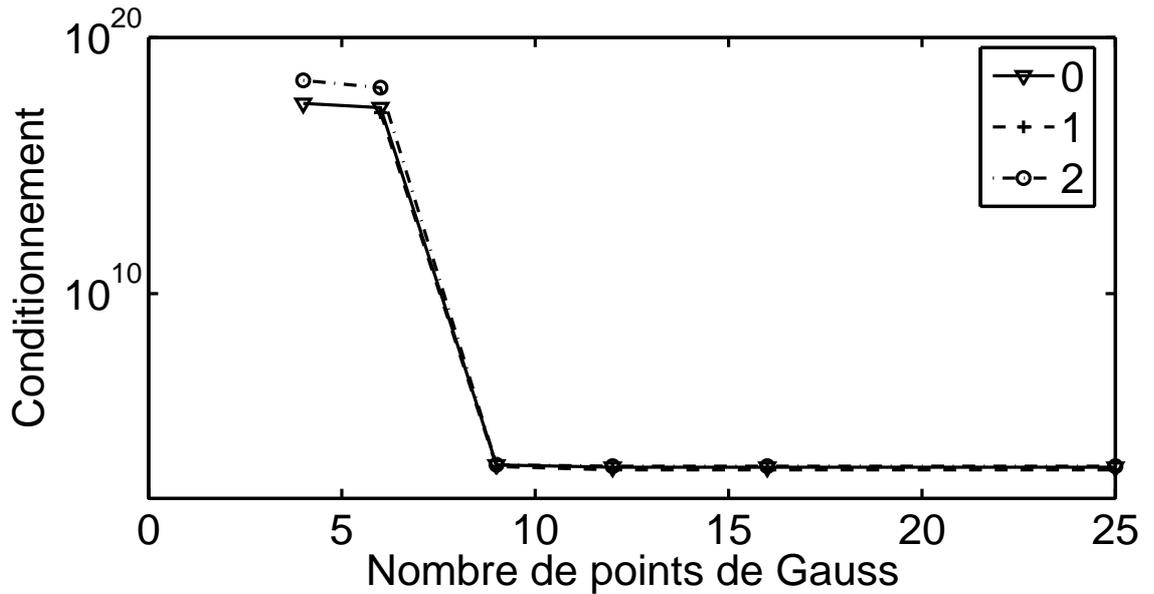


Figure 3.5 – Influence du nombre de points de Gauss sur le conditionnement

3.3.1.3 Influence de l'élancement de l'élément sur le conditionnement

L'influence de l'élancement de l'élément ($\Delta z/\Delta r$) sur le conditionnement de la matrice de rigidité est donné à la figure 3.6 pour 12 points et figure 3.7 pour 25 points. Il est à noter qu'il ne faut pas dépasser un facteur 10 entre les deux dimensions de l'élément afin d'éviter les problèmes numériques liés à un mauvais conditionnement de la matrice de rigidité, ce problème pourra intervenir plus tard lors de l'utilisation de méthodes de résolutions itératives. Ces différents résultats sont présentés pour un matériau isotrope, ils ont aussi été vérifiés pour le matériau orthotrope G969/RTM6 enroulé à 0 ou 45 degrés.

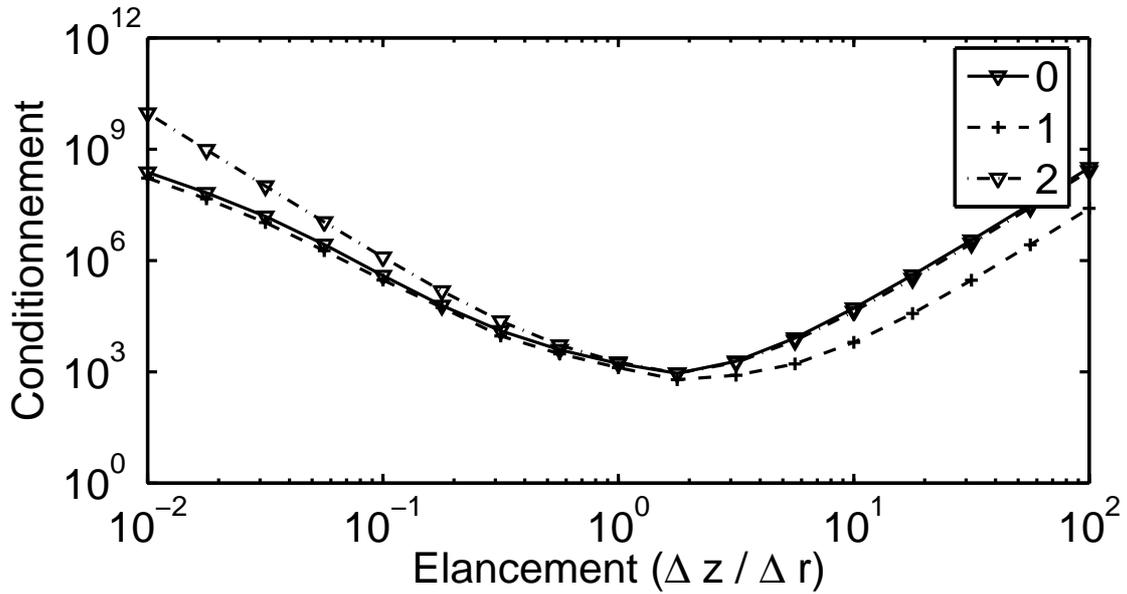


Figure 3.6 – Influence de l'élancement sur le conditionnement pour 12 points de Gauss

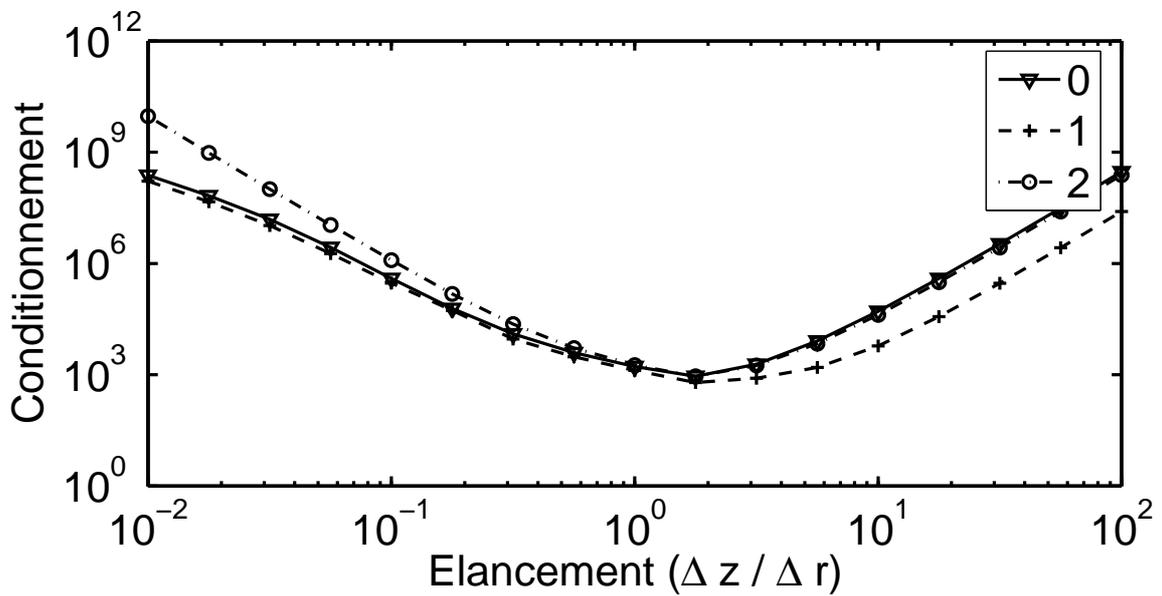


Figure 3.7 – Influence de l'élancement sur le conditionnement pour 25 points de Gauss

3.3.1.4 Intégration numérique des éléments d'interface

L'intégration exacte des éléments d'interface requiert l'utilisation de quatre points de Gauss. Dans une étude menée par (Schellekens et De Borst, 1993) et appliquée par exemple par (Gonçalves *et al.*, 2000), il est suggéré d'utiliser une intégration aux noeuds (Lobatto) afin d'éviter des oscillations parasites en présence de forts gradients. Avec cette intégration aux noeuds, les modes de la matrice de rigidité ne couplent pas les sauts de déplacement entre les paires de noeuds et permet ainsi de tuer la transmission des oscillations. Ces oscillations interviennent aussi bien pour des interpolations linéaires que d'ordre supérieur. Malheureusement, cette technique n'est pas applicable ici sans engendrer des modes à énergie nulle supplémentaires. D'autre part, dans les applications traitées, le maillage est suffisamment fin pour éviter ce type d'oscillations.

Un exemple simple portant sur une poutre en traction sur un appui élastique permet de mettre en place ces oscillations (figure 3.8). Le problème est de trouver le déplacement $u(z)$ tel que :

$$ES \frac{du}{dz} - ku = 0 \quad (3.26)$$

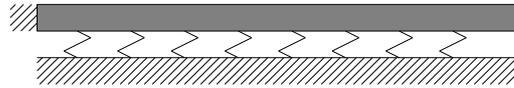


Figure 3.8 – Poutre sur appui élastique

avec E le module d'Young de la poutre, S sa section et k la raideur de l'appui élastique. Cette poutre est encastree en $z = 0$. Pour un déplacement imposé à 1 en extrémité de poutre $z = L$. La solution s'écrit :

$$u(z) = \frac{\sinh(\frac{z}{l})}{\sinh(\frac{L}{l})} \quad (3.27)$$

où :

$$l = \sqrt{\frac{ES}{k}} \quad (3.28)$$

Cette solution théorique n'est pas oscillante. Ce problème est résolu par la méthode des éléments finis avec des éléments ayant une interpolation linéaire ou de Hermite de degré 3. Pour une intégration exacte (4 points de Gauss), les figures 3.9 montrent pour les interpolations linéaire et cubique, l'évolution du déplacement en fonction de l . Pour l'interpolation linéaire des oscillations

apparaissent. En regardant la contrainte aux interfaces 3.10, on remarque que ces oscillations peuvent aussi apparaître avec l'interpolation cubique pour l petit.

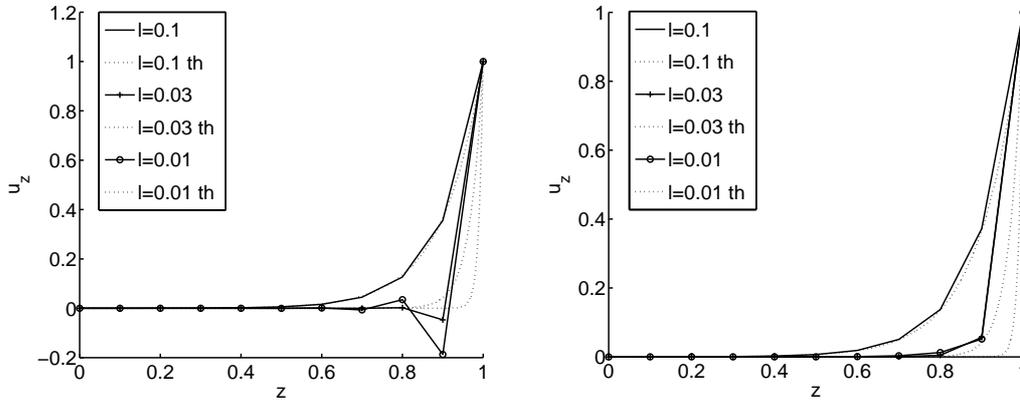


Figure 3.9 – Évolution du déplacement en fonction de l (éléments linéaires à gauche et cubiques à droite)

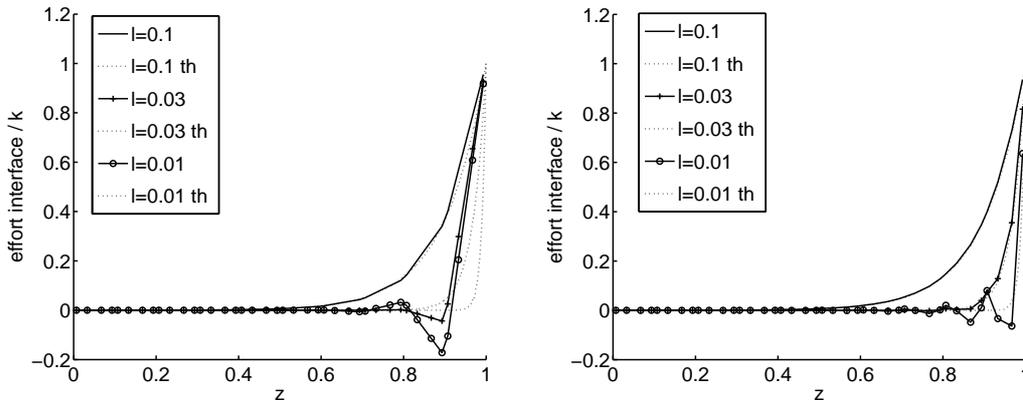


Figure 3.10 – Évolution de la contrainte à l'interface en fonction de l (éléments linéaires à gauche et cubiques à droite)

Ces oscillations disparaissent pour des tailles d'éléments suffisamment fines. Les figures 3.11 et 3.12 représentent l'évolution du déplacement et de la contrainte sur l'interface pour différents nombres d'éléments . Il est alors à noter que si le paramètre l est inférieur à la taille de l'élément divisée par 5 pour les éléments de Hermite de degré 3 et par 2 pour les éléments linéaires alors des oscillations apparaissent.

On peut aussi remarquer que l'interpolation de plus haut degré donne de meilleurs résultats en supprimant les oscillations dans certains cas. Par exemple pour 20 éléments avec interpolation cubique, des oscillations apparaissent mais sont d'amplitude plus faible que celle apparaissant pour 10 éléments avec interpolation linéaire. Les éléments de Hermite de degré 3 permettent alors de réduire le coût de calcul malgré le plus grand nombre d'inconnues introduit. En effet, même si ce dernier est multiplié par deux, environs trois fois moins d'éléments sont nécessaires.

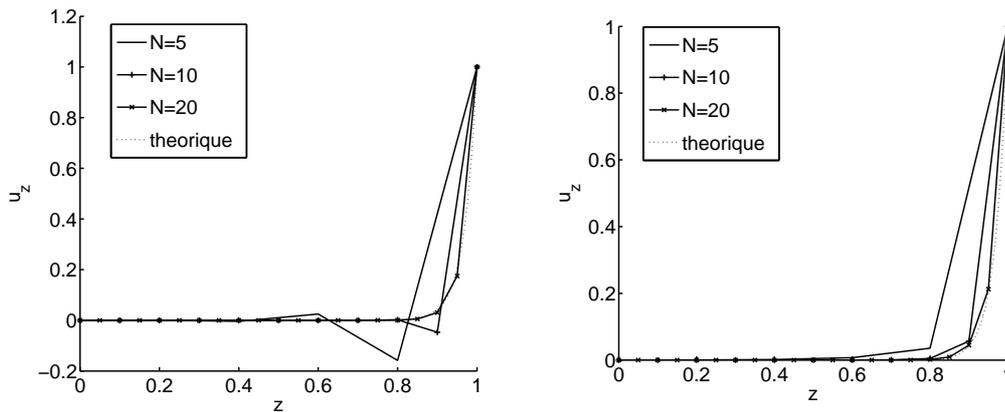


Figure 3.11 – Évolution du déplacement en fonction du nombre d'éléments N (éléments linéaires à gauche et cubiques à droite)

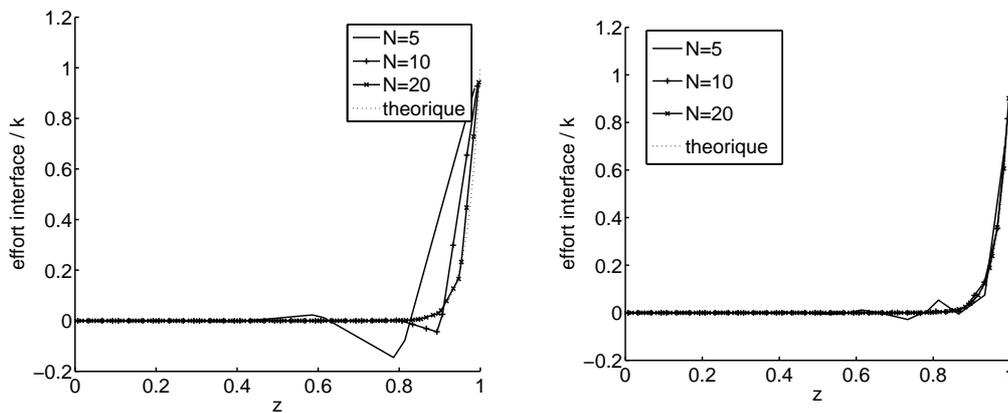


Figure 3.12 – Évolution de la contrainte à l'interface en fonction de l (éléments linéaires à gauche et cubiques à droite)

Afin de supprimer les oscillations parasites sur la contrainte interfaciale

dans le cadre d'un calcul grossier (Schellekens et De Borst, 1993) mettent en oeuvre une intégration aux noeuds (Lobatto à deux points). La figure 3.13 donne l'évolution de la contrainte interfaciale en fonction de l'intégration choisie ainsi que la solution théorique. Pour une intégration de Lobatto, la contrainte maximale évaluée est correcte, en effet celle-ci correspond à la condition limite imposée. Cependant, la déformée correspond a un comportement deux fois plus souple. La condition limite de déplacement imposé n'est donc pas la plus judicieuse pour comparer les résultats.

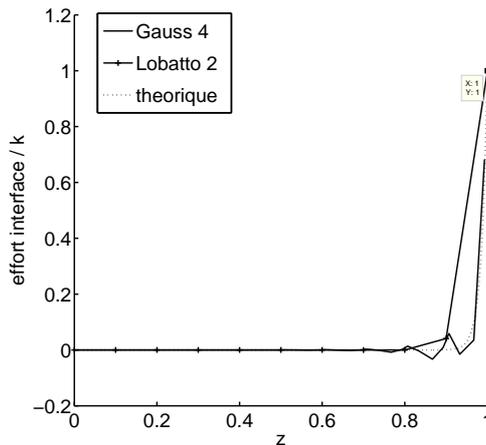


Figure 3.13 – Évolution de la contrainte à l'interface pour différentes intégrations

La solution théorique pour un chargement de traction unitaire est donnée par :

$$u(z) = l \frac{\sinh(\frac{z}{l})}{\cosh(\frac{l}{l})} \quad (3.29)$$

La figure 3.14, la solution pour les deux intégrations numériques considérées pour un maillage fin (100 éléments). La différence de rigidité due à la sous intégration apparaît clairement. La rigidité apparente est deux fois plus faible que la rigidité réelle de l'interface dans ce cas précis. La figure 3.15 montre l'évolution de la contrainte interfaciale en fonction de l'intégration numérique choisie, dans le cas de l'intégration de Lobatto, la rigidité est modifiée et multipliée par 2. Les deux intégrations donnent alors des contraintes maximales équivalentes, la solution intégrée par Lobatto converge vers la bonne solution et supprime les oscillations. Cependant celle-ci introduit des modes à énergie nulle, qui ne sont pas activés dans cet exemple mais qui peuvent l'être dans les applications industrielles.

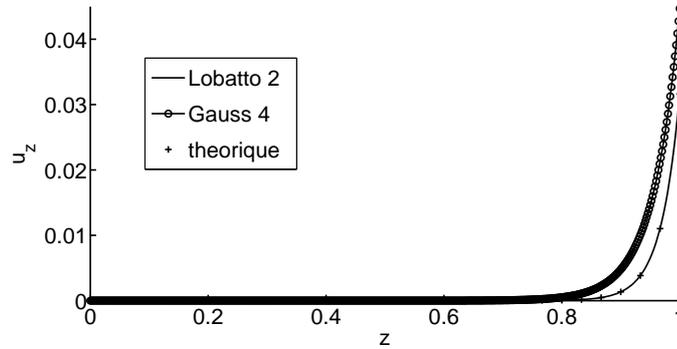


Figure 3.14 – Solution à convergence en fonction de l'intégration numérique

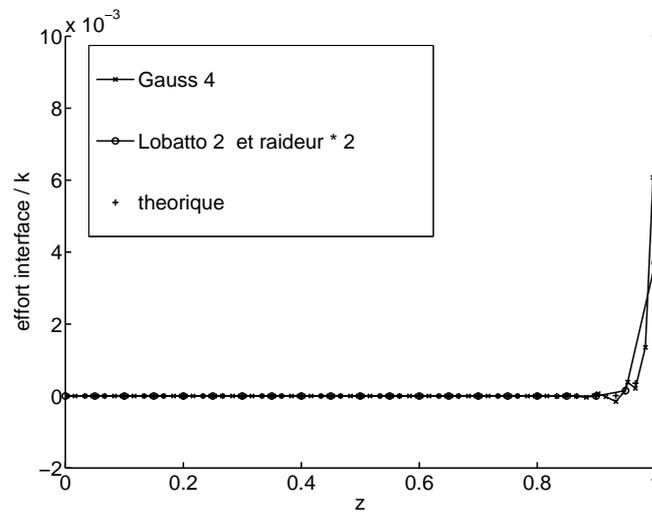


Figure 3.15 – Évolution de la contrainte interfaciale en fonction de l'intégration

Cette technique n'est donc pas applicable ici, cependant dans les applications traitées le maillage est suffisamment fin pour éviter ce type d'oscillations.

3.3.2 Programmation orientée objet d'un code éléments finis

3.3.2.1 Démarche de développement

La mise en oeuvre de la stratégie de calcul associée au développement en série de Fourier a fait l'objet du développement d'un code prototype, bien que de nombreuses bibliothèques de calcul éléments finis soient déjà disponibles sur Internet. En effet, l'objectif étant de tester différentes idées, il nous fallait maîtriser complètement l'architecture du code de calcul, or l'aide fournie avec les rares bibliothèques libres aptes à gérer le niveau de complexité requis est très souvent limitée et le code source hermétique pour celui qui ne connaît pas l'histoire de la bibliothèque. Gilles Lubineau et Pierre-Alain Guidault ayant aussi eu besoin d'une telle plateforme, nous avons entrepris un développement collaboratif. Afin d'obtenir un code flexible et évolutif, la programmation orientée objet (POO) s'est avérée très intéressante (Bersini, 2002; Barrett *et al.*, 1994; Mackerle, 2004); l'accent alors mis sur le dialogue entre les différents objets et non pas sur les données qu'ils contiennent (Besson et Foerch, 1997; Archer, 1996). Enfin, le langage associé au logiciel Matlab a été choisi. Celui-ci permet un débogage simple car c'est un langage interprété, de plus le calcul matriciel est très efficace car basé sur des bibliothèques standard performante (LINPACK, EISPACK, FFTW) ou permet d'y accéder (MPI). Cependant les manipulations de données sont ralenties par un typage dynamique. Cet inconvénient peut être en partie pallié par l'inclusion de code compilé (C, C++ ou Fortran) au sein des fonctions de Matlab. Cette technique est malgré tout assez restreinte dans le cas de la POO et est donc réservé aux fonctions de bas niveau. Enfin, un argument majeur dans le choix de ce langage repose sur l'idée qu'une programmation propre dans un langage maîtrisé vaut mieux qu'une programmation maladroite dans un langage plus puissant mais non maîtrisé.

Pour les éléments finis, deux grandes architectures existent en POO. La première consiste à considérer des opérations sur des champs comme dans CAST3M par exemple, la seconde utilisée ici repose sur une description plus morcelée des éléments finis (Zimmermann *et al.*, 1992; Dubois-Pèlerin et Zimmermann, 1992, 1993). Plus le découpage est fin et plus le code est flexible, mais plus le temps passé à l'exécution à manipuler les données est conséquent, à moins d'utiliser des techniques de méta-programmation qui sont syntaxiquement lourdes (Veldhuizen, 2000). Une attention particulière doit donc être portée sur l'organisation des différentes classes et les concepts associés.

3.3.2.2 Architecture du code

Dans ce paragraphe les noms des différentes classes sont notées en caractères majuscules italiques. Une présentation de la programmation orientée objet est donnée dans (Bersini, 2002). Commençons la description de l'architecture du code développé par la description du matériau (*MATERIAU*). Celui-ci donne accès à la matrice de Hooke et à la manière d'intégrer son comportement non-linéaire (si besoin). En pratique, deux types de comportement existent :

$$\sigma = K(\varepsilon - \Theta\Delta T) \text{ dans } \Omega_{plis} \text{ et } F = k([U] - \alpha_r\Delta T\vec{e}_r) \text{ dans } \Gamma_{int} \quad (3.30)$$

Deux classes *MAT_GRAD* (basée sur $\varepsilon = \frac{1}{2}(gradu + grad^T u)$) et *MAT_SAUT* (basée sur $[u] = u^+ - u^-$) héritent donc de la classe *MATERIAU*, puis les différents types de comportement sont déclinés par famille (figure 3.16).

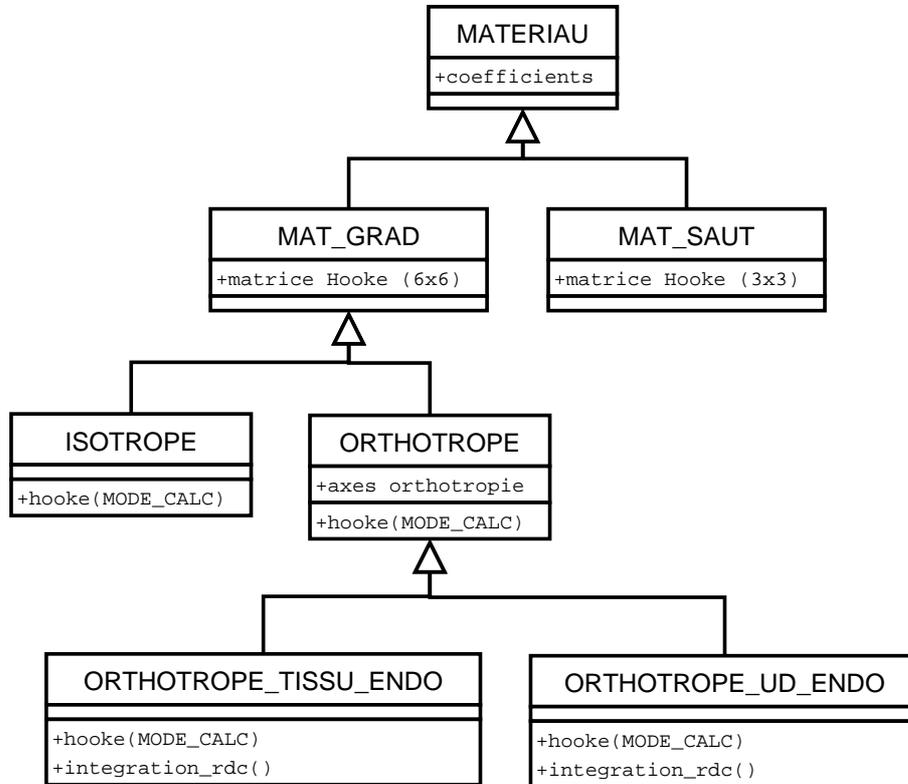


Figure 3.16 – Diagramme UML de la classe *MATERIAU* et de ses descendants

La matrice de Hooke calculée dans le cas 3D peut être modifiée par des hypothèses de calcul sur le champ de contraintes ou de déformations (contraintes planes, déformations planes, Fourier mode N, Fourier couplé, Fourier reconstruit...). La méthode *hooke* prend donc en argument un objet de type *MODE_CALC*

(figure 3.17). Celui-ci contient les différentes hypothèses, l'ordre de rangement des contraintes et déformations sous forme de vecteur et les coefficients déterminant la notation de Voigt ($\sqrt{2}$ sur la déformation et sur la contrainte ou 2 sur l'un ou l'autre).

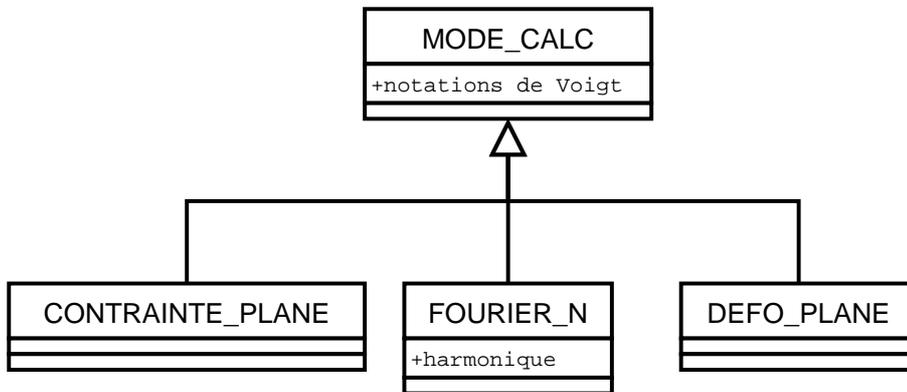


Figure 3.17 – Diagramme UML de la classe *MODE_CALC* et des ses descendants

La structure complète (*STRUCTURE*, figure 3.18) est découpée en sous-structures (*SOUSSTRUCTURE*). Celles-ci sont de deux types (hypothèse de la méso-modélisation (Ladevèze et Le Dantec, 1992)) : plis (*PLI*) ou interfaces (*INTERFACE*). Le matériau est supposé être le même dans chaque sous-structure. Celles-ci sont formées d'un ensemble de noeuds (*NOEUD*) et d'éléments (*ELEMENT*). De plus, des zones d'intégration sont décrites au niveau de ces sous-structures, cela permet d'implanter facilement une intégration non-locale des lois de comportement de chaque entité (endommagement uniforme dans l'épaisseur d'un pli). Afin de paralléliser facilement le calcul, des classes sont dérivées des classes *STRUCTURE* et *SOUSSTRUCTURE*, ces nouvelles classes contiennent les informations permettant aux processus de communiquer (orientation des flux de données). L'élimination des noeuds étant automatique, il est nécessaire de séparer les noeuds de l'interface en deux groupes de part et d'autre de celle-ci. Les noeuds contiennent leurs coordonnées et des données (déplacements nodaux, contraintes, variables internes...).

Les éléments (figure 3.19) sont de deux types, toujours pour prendre en compte les interfaces. De plus les éléments d'interface étant basés sur des fonctions de formes classiques, ils sont en fait composés de deux éléments classiques et permettent donc de recoller des éléments incompatibles (fonctions de forme différentes). Les éléments sont liés aux noeuds de la sous-structure et contiennent un objet de classe *INTEGRATION*. Ce dernier met en oeuvre la

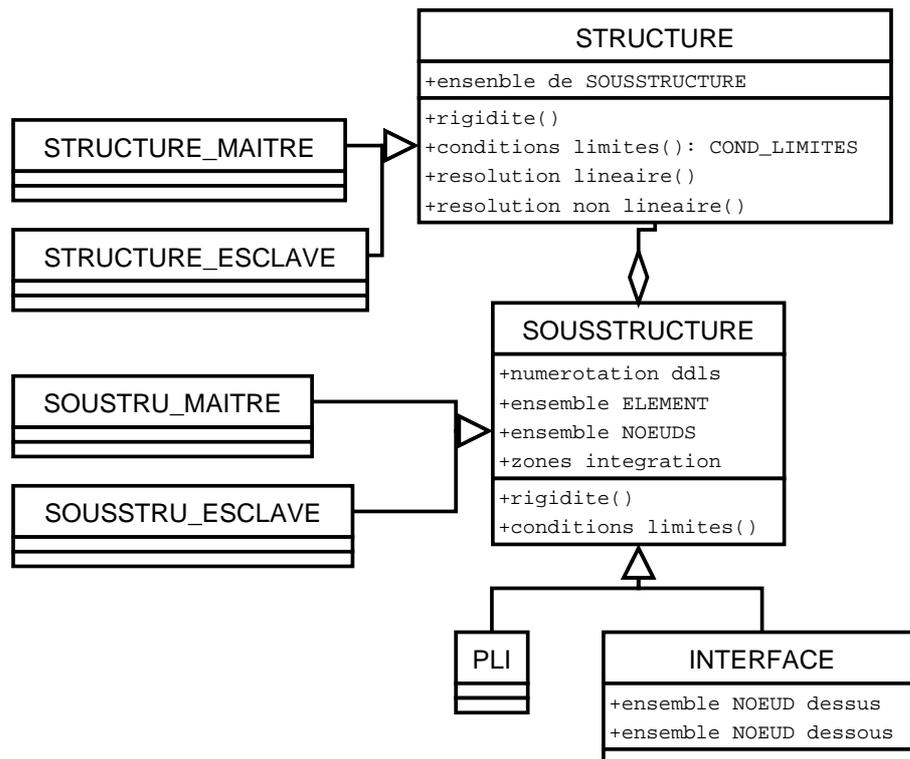


Figure 3.18 – Diagramme UML de la classe *STRUCTURE* et des ses descendants

procédure d'intégration intervenant dans le calcul de la matrice de rigidité par exemple. Il est défini au niveau des éléments afin de pouvoir varier d'un élément à un autre afin d'implanter facilement la XFEM et l'utilisation de level sets.

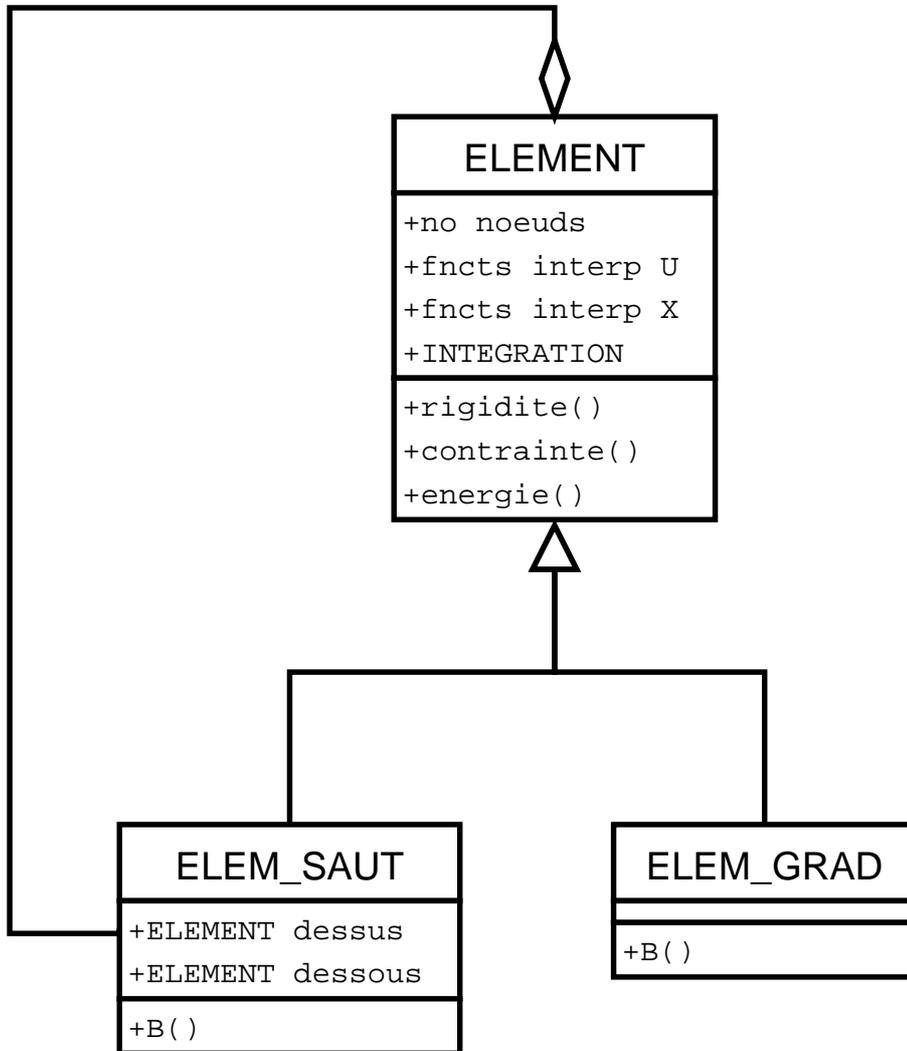


Figure 3.19 – Diagramme UML de la classe *ELEMENT* et des ses descendants

3.3.2.3 Possibilités offertes par la plate forme

Le code actuel permet :

- différentes formulations : 3D, contraintes planes, déformations planes, déformations planes généralisées, Fourier (avec couplage de modes), thermique et acoustique ;
- différents comportements : isotrope, orthotrope, endommagement et plasticité uniformes sur une zone (Méso-modèle du LMT-Cachan).
- différents types d'éléments :
 - éléments massifs, éléments d'interface ;
 - interpolation : linéaire, quadratique, Hermite, iso-paramétrique ou non ;
 - forme : cubes, quadrangles, triangles, segments ;
 - intégration : Gauss (jusqu'à 49 points pour un quadrangle) et Lobatto ;
 - enrichissement pour le suivi de fissures (X-FEM) basé sur des levels sets ;
- différentes prises en compte des conditions limites : directe, pénalisation, simples ou doubles multiplicateurs de Lagrange ;
- différents algorithmes de résolution : Gradient conjugué avec préconditionneur, GMRes(m) avec préconditionneur, méthode Latin, Newton, Arc-length.

3.4 Estimation du coût de calcul

L'objectif de ce paragraphe est de comparer les coûts de calcul entre la méthode présentée utilisant les séries de Fourier et une résolution 3D directe.

3.4.1 Nombre d'opérations liées à la résolution d'un problème

Les coûts de différentes méthodes de résolution de systèmes linéaires sont présentés tableau 3.2, ils donnent un ordre de grandeur du nombre d'opérations à effectuer. Les paramètres importants sont le nombre total d'inconnues n_{ddl} et la demie largeur de bande de la matrice de rigidité b . La méthode avec décomposition de Fourier étant parallélisable, le coût de la méthode C_{2D} est compris entre le coût d'une résolution séquentielle complète (coût de la résolution du mode 0 noté C_{2D}^0 et de N résolutions sur les modes étendus noté C_{2D}^n) et celui d'une résolution complètement parallélisée (un calcul par processeur) dont le coût apparent correspond à la résolution d'un problème sur les modes étendus d'où : $C_{2D} \in [C_{2D}^n, C_{2D}^0 + NC_{2D}^n]$.

	Décomposition	Résolution
Cholesky	$n_{ddl}b^2$	$n_{ddl}b$
Optimal 2D	$n_{ddl} \log(n_{ddl})$	n_{ddl}
Optimal 3D	$n_{ddl}^{5/3}$	$n_{ddl}^{4/3}$

Tableau 3.2 – Coût des différentes méthodes de résolution

Soient n_z et n_r les nombres d'éléments suivant l'axe du tube et son rayon. Soit n_{ech} le nombre de points d'échantillonnage et n_c le nombre d'éléments suivant la circonférence (dans le cas d'un maillage 3D). $N+1$ modes de calculs sont utilisés.

Le maillage 2D de la bande de calcul utilisée dans la stratégie présentée précédemment comporte plus d'éléments dans l'axe du tube que sur une circonférence. Pour cette raison, les noeuds sont numérotés par épaisseur de tube comme sur la figure 3.20. La demi-largeur de bande associée à ce maillage est :

$$b = (2n_r + 4)a \quad (3.31)$$

avec $a = 6$ pour le mode 0 et $a = 12$ pour un mode N .

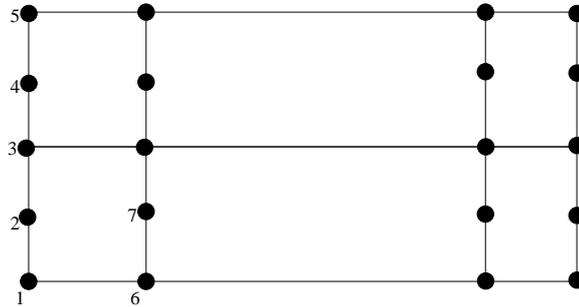


Figure 3.20 – Numérotation des noeuds dans une bande

Dans le cadre de l'utilisation d'éléments finis 3D, deux types de numérotations ont été envisagés. Les sections ($z=\text{constante}$) sont numérotées les unes après les autres, les numérotations de chaque section suivent alors le même schéma. Ce schéma de numérotation, représenté en annexe 6.3, consiste à numérotter les noeuds circonférence par circonférence (figure 6.7) ou rayon par rayon (figure 6.7). La demi-largeur de bande est :

- pour une numérotation par circonférence : $b_c = 6(2n_r + 1)n_c + 18n_c$
- pour une numérotation par rayon : $b_r = 6(2n_r + 1)n_c + 6((2n_r + 1)n_c - 2n_r + 2)$

C'est donc la numérotation par circonférence qui minimise la largeur de bande entre les deux cas traités. Il est à noter que cette dernière numérotation donne une largeur de bande proche de celle donnée par un algorithme de Cuthill-McKee inversé donné dans (Saad, 2000). Le coût de calcul est estimé en nombre d'opérations par une analyse de complexité. Seule la résolution est prise en compte, le coût de la transformée de Fourier rapide (ou de son inverse) est en effet négligeable. La complexité d'une FFT effectuée sur 2^γ points par un algorithme de Cooley Tukey est en $\gamma 2^\gamma$ (Brigham, 1988). Les cas tests présentés par la suite correspondent au maillage simple d'un tube de rayon intérieur 16 mm, de longueur 15 mm comportant 5 plis. Chaque pli est maillé avec deux éléments dans l'épaisseur. Deux variantes sont évaluées, pour chacune $n_r = 10$, $n_z = 50$, $N = 32$ et $n_{ech} = 2N$, la différence se situe dans le choix du nombre d'éléments 3D équivalents à un mode de calcul, $n_c = N$ (200000 ddls en 3D) ou $n_c = 5N$ (1 million de ddls en 3D). Le premier cas correspond à des éléments très élancés suivant la circonférence ce qui mène à un calcul mal conditionné, alors que le deuxième cas est relatif à des éléments bien proportionnés.

Les valeurs 1 et 2 représentant les deux cas test : 1 pour $n_c = N$ (200000 ddls en 3D) et 2 pour $n_c = 5N$ (1 million de ddls en 3D), le tableau 3.3 donne le nombre d'opérations nécessaires à chaque étape (factorisation ou résolution). Pour le calcul de Fourier sont présentés deux nombres, à gauche le coût d'une résolution séquentielle complète et à droite le coût d'une résolution parallèle complète. On peut d'ores et déjà remarquer que la factorisation est l'étape la plus coûteuse. Pour un calcul parallèle, un facteur 1000 apparaît et un facteur 100 pour un calcul complètement séquentiel. Cependant, il est à noter que cette analyse suppose que les différentes méthodes sont programmées avec la même qualité.

	Factorisation 1	Résolution 1	Factorisation 2	Résolution 2
Cholesky - Fourier	3E10, 1E9	1E8, 4E6	3E10, 1E9	1E8, 4E6
Optimal - Fourier	4E6, 1E5	4E5, 1E4	4E6, 1E5	4E5, 1E4
Cholesky - 3D	1E13	2E9	2E15	4E10
Optimal - 3D	7E8	1E7	1E10	1E8

Tableau 3.3 – Estimation du coût de calcul (nombre d'opérations)

3.4.2 Estimation de l'encombrement mémoire

L'encombrement mémoire est estimé sur la base de deux phases. La première est le stockage de l'opérateur à résoudre (sous forme assemblée ou non).

La deuxième est simplement le stockage de la solution.

3.4.2.1 Stockage de l'opérateur à résoudre

Sont envisagés, un stockage *skyline* et un stockage sous forme de matrices élémentaires non assemblées. Ce dernier sert à estimer le coût d'un stockage de type *sparse* (matrice creuse). En pratique, les codes industriels utilisent d'autres stockages, cependant leur encombrement est plus difficile à estimer. On peut citer par exemple le stockage semi-morse, à mi chemin entre *skyline* et *sparse*. Le tableau 3.4 représente l'encombrement en mémoire nécessaire au stockage de chaque matrice de rigidité. Le stockage skyline de la rigidité du problème 3D apparaît problématique sur des structures courantes (PC standard : 4 Go, cluster : 8 Go par noeud). Le recours à des architectures SMP (mémoire partagée) est alors nécessaire (112 Go pour la machine Nec de l'ENS de Cachan).

taille	skyline 1	non-assemblée 1	skyline 2	non-assemblée 2
Fourier mode 0	7 Mo	50 Ko	7 Mo	50 Ko
Fourier mode n	28 Mo	250 Ko	28 Mo	250 Ko
3D	12 Go	8 Mo	300 Go	40 Mo

Tableau 3.4 – Estimation de l'encombrement mémoire de la matrice de rigidité

3.4.2.2 Stockage de la solution

Le tableau 3.5 représente l'encombrement mémoire nécessaire au stockage de la solution. Le détail est donné uniquement pour le premier cas test, les champs stockés sont : le déplacement, la déformation, la contrainte, un champ de variables internes. La décomposition de Fourier donnant un résultat équivalent à un calcul 3D direct, les coûts de stockage sont similaires car les informations sont les mêmes.

3.4.2.3 Conclusion

La méthode proposée apparaît comme très performante par rapport à un calcul 3D bien qu'un peu plus coûteuse qu'un calcul de Fourier classique. Bien qu'elle n'ait pas été mise en oeuvre avec autant de qualité (code prototype Matlab) que la méthode 3D directe (code industriel souvent encore programmé en

taille	U cas 1	ε cas 1	σ cas 1	d cas 1	total cas 1	total cas 2
Fourier mode 0	50 Ko	20 Ko	x	x	70 Ko	70 Ko
Fourier mode n	100 Ko	40 Ko	x	x	140 Ko	140 Ko
Fourier reconstruit	3 Mo	36 Mo	36 Mo	24 Mo	100 Mo	100 Mo
3D	1.5 Mo	36 Mo	36 Mo	24 Mo	100 Mo	500 Mo

Tableau 3.5 – Estimation de l'encombrement mémoire de la solution

Fortran), ses performances restent très intéressantes d'autant que les performances ne sont pas sensibles au diamètre du tube contrairement aux éléments finis. Il est à noter qu'avec Matlab, la manipulation des données reste assez lente (langage interprété) alors que le calcul matriciel est très performant grâce à l'utilisation de bibliothèques classiques et performantes (LINPACK, EISPACK, FFTW).

3.5 Applications

3.5.1 Illustrations issues de la littérature

La stratégie de calcul présentée a été appliquée aux problèmes décrits dans (Xia *et al.*, 2002, 2001a). Ces deux problèmes portent sur des tubes composites sandwich. L'âme est composée de résine 934 pure alors que les peaux sont formées de plis de T300/934 empilés à $\pm 55^\circ$. Dans ces deux papiers, les peaux sont homogénéisées comme dans (Akkerman, 2002) et supposées orthotropes dans la base cylindrique. Cette dernière hypothèse permet d'effectuer un calcul complètement découplé permettant une vérification des résultats avec un code éléments finis classique comme CAST3M mais surtout permet une résolution analytique « simple ». L'évolution des déformations homogénéisées est donnée figure 3.21 et celle des contraintes homogénéisées sur la figure 3.22 pour un chargement thermique de $100^\circ C$. La notation R a été définie par l'équation 2.51.

Prenons le même cas pour un chargement de flexion. L'homogénéisation des peaux (rayon compris entre 50 et 52 mm et entre 72 et 74 mm) est alors indispensable pour découpler le problème ce qui permet une résolution analytique (Xia *et al.*, 2002). Dans ce cas homogénéisé, la figure 3.23 donne l'évolution des contraintes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} le long d'un rayon. La figure 3.24 représente les mêmes contraintes mais pour des peaux modélisées de manière hétérogène. Le calcul ne permet plus de découpler les modes de Fourier classiques. On peut remarquer que l'homogénéisation donne de très bons résultats, la seule différence visible portant sur la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ où on distingue deux paliers par peau. Les hypothèses d'homogénéisation semblent bien vérifiées.

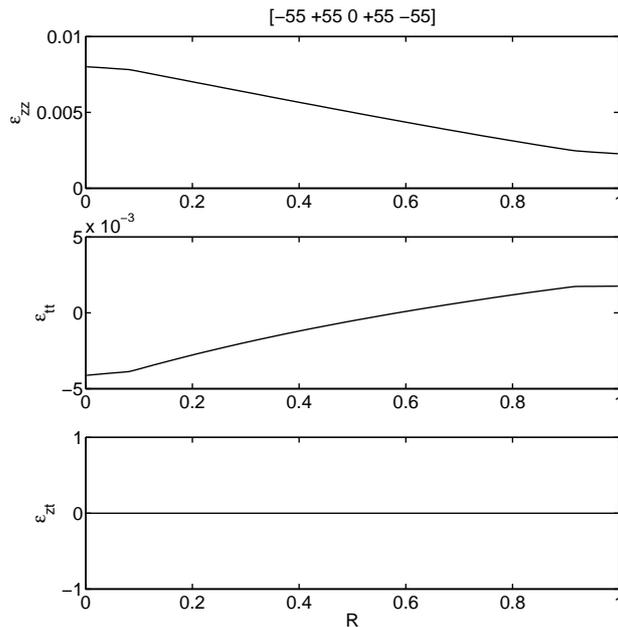


Figure 3.21 – Évolution des déformations en fonction de R : peaux homogénéisées

La méthode de calcul a été validée sur les différents cas test proposés par Xia, à travers les solutions analytiques proposées mais aussi par une mise en oeuvre de CAST3M lorsque cela était possible (découplage des modes de Fourier classiques).

3.5.2 Solution sur la zone de bord

L'application présentée ici est un simple tube en traction. L'objectif est de présenter une analyse d'effet de bord sur un exemple similaire à un cas industriel. Ce tube, de séquence d'empilement $[+20/-20/0/-20/+20]$, est constitué de plis tissés G939/M18 (matériau étudié par (Hochard *et al.*, 2001)). Il a un diamètre intérieur de 16 mm, les plis ont une épaisseur de 0.2 mm. Celui-ci est maintenu par un manchon en titane à une extrémité, la longueur de recouvrement est de 20 mm. Le manchon est quant à lui encastré. La sollicitation de traction est imposée à travers le raccord exposé précédemment. Le maillage utilisé est très fin (87 000 ddls par mode) et seulement deux modes étendus sont nécessaires pour représenter la solution d'une poutre soumise à un chargement de type poutre. En effet, ce dernier type de chargement se développe au

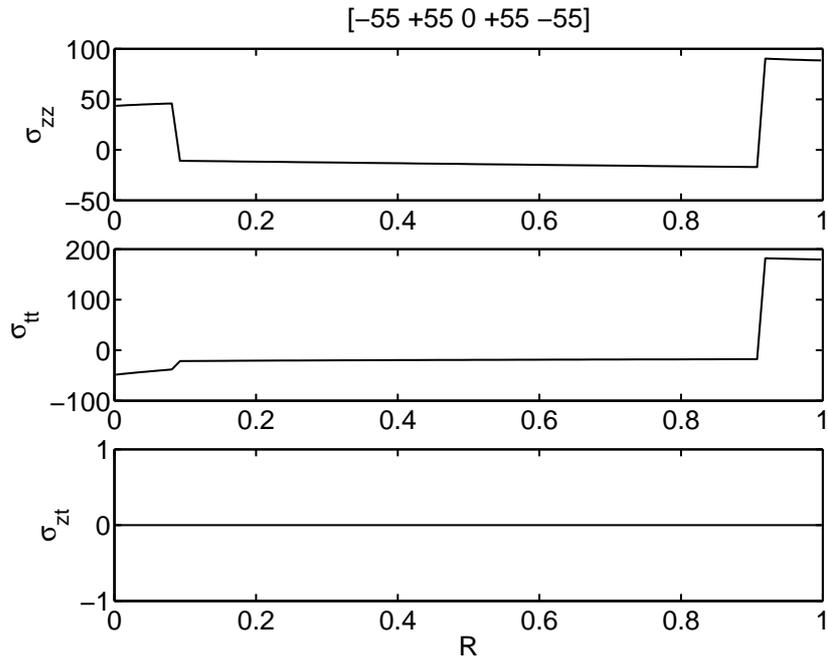


Figure 3.22 – Évolution des contraintes (MPa) en fonction de R : peaux homogénéisées

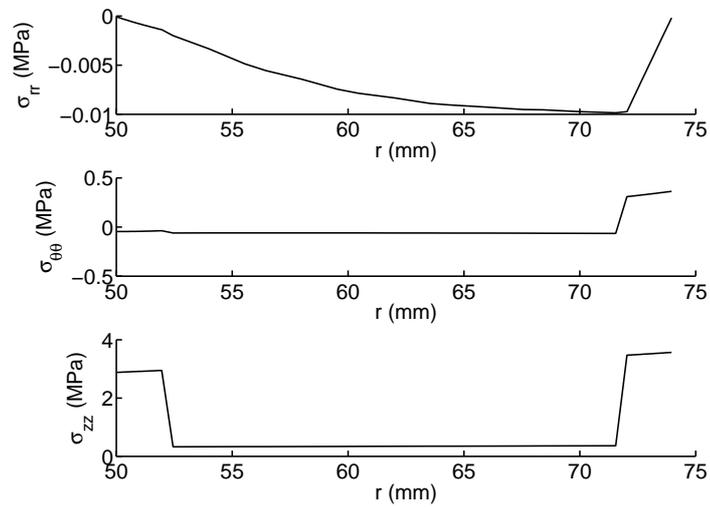


Figure 3.23 – Évolution des contraintes pour des peaux homogénéisées

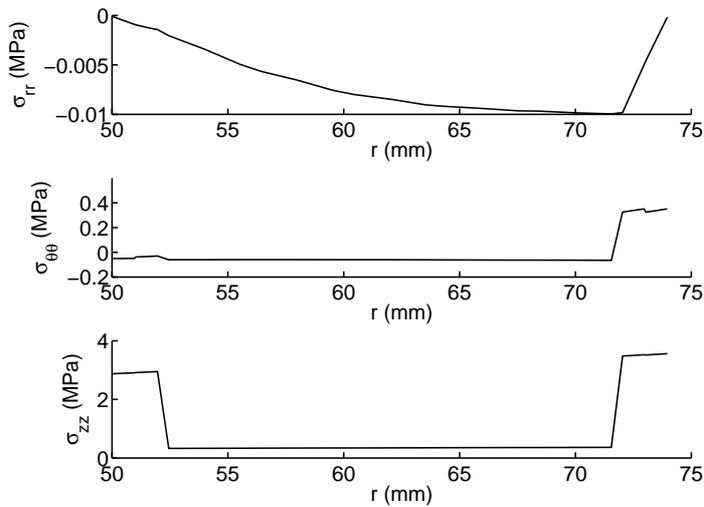


Figure 3.24 – Évolution des contraintes pour des peaux hétérogènes

maximum sur deux modes (fondamental pour la traction, torsion et première harmonique pour la flexion). Le développement de Fourier est donc employé à son maximum d'efficacité. En respectant une taille de maille de l'ordre de 0.5 mm, le maillage 3D équivalent comporterait 2.2 millions de degrés de liberté.

Dans le cas de la traction, la solution étant indépendante de l'angle polaire, les évolutions des contraintes sont tracées dans une section longitudinale. La figure 3.26 représente l'évolution de la contrainte axiale dans les différents plis. L'effet de bord situé à l'extrémité du manchon ($z = 30$ mm et $r = 17$ mm) est clairement visible. Les figures 3.27, 3.28 et 3.29 représentent l'évolution des contraintes aux interfaces entre plis. Pour $z = 10$ mm, on remarque la concentration de contrainte au bord libre (sous le manchon) et pour $z = 30$ mm on remarque l'effet de bord dû à l'extrémité du manchon. Celui-ci diminue pour les interfaces les plus à l'intérieur du tube. Les contraintes σ_{rr} d'arrachement et σ_{zr} de cisaillement maximum sont du même ordre de grandeur, par contre σ_{zr} est moins localisée. Sur cette dernière, l'effet de bord dû à l'extrémité du manchon pénètre dans le tube, le raccord est alors imposé à la distance minimale.

Il est à noter, que cette application est traitable avec un code standard car les modes sont complètement découplés. Le cas suivant traite le même tube, mais cette fois en flexion simple. Le raccord est effectué à 30 mm du manchon. Les figures 3.30, 3.31 et 3.32 montrent l'évolution des contraintes aux interfaces dans la section longitudinale la plus sollicitée. Comme précédemment, l'interface la plus proche du manchon est la plus sollicitée alors que l'interface

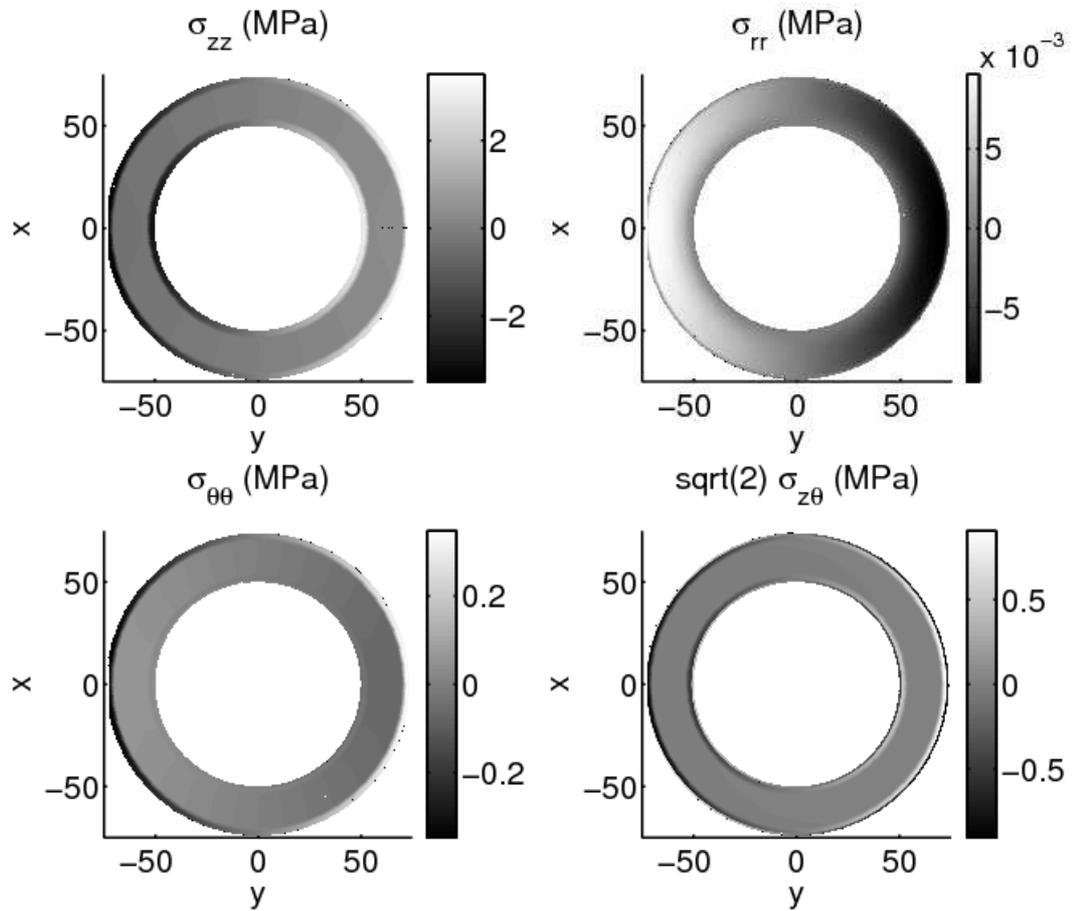


Figure 3.25 – Évolution des contraintes dans un tube [+55/ - 55/0/ - 55/55] en flexion pure

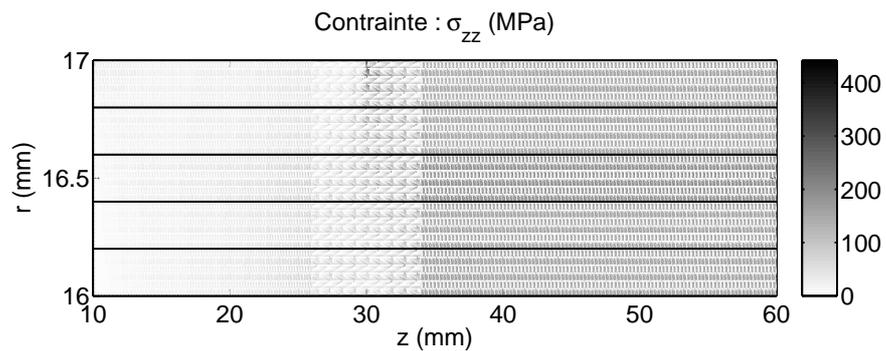
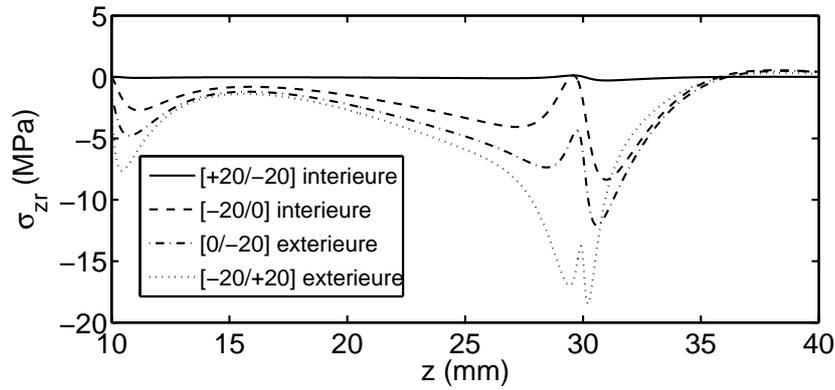
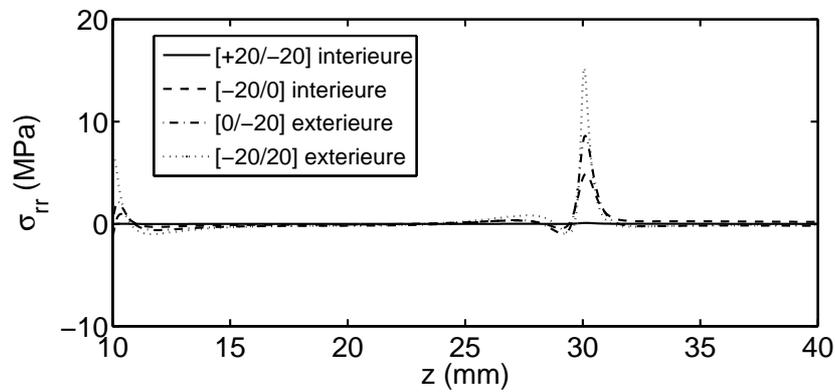
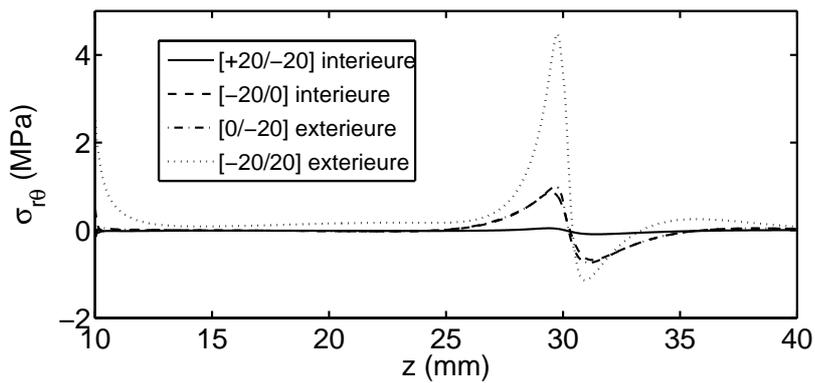


Figure 3.26 – Évolution de la contrainte axiale dans le tube composite

Figure 3.27 – Évolution de la contrainte σ_{zr} (MPa) aux interfaces (traction)Figure 3.28 – Évolution de la contrainte σ_{rr} (MPa) aux interfaces (traction)Figure 3.29 – Évolution de la contrainte $\sigma_{r\theta}$ (MPa) aux interfaces (traction)

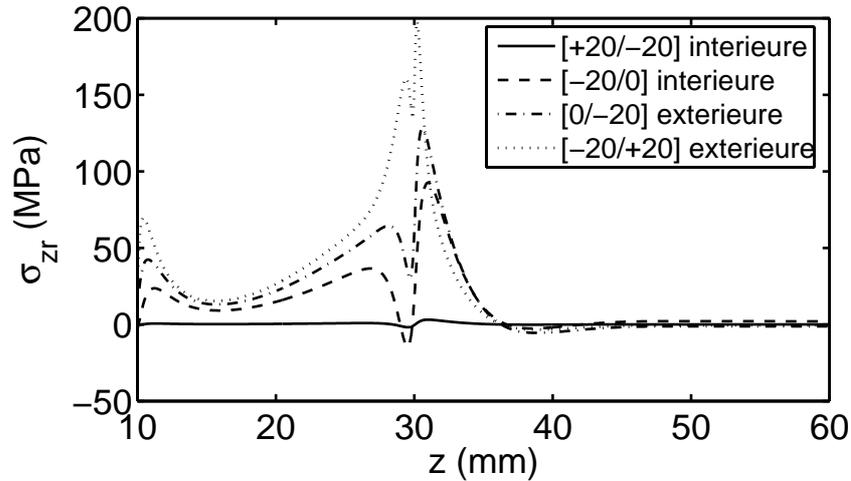


Figure 3.30 – Évolution de la contrainte σ_{zr} (MPa) aux interfaces (flexion)

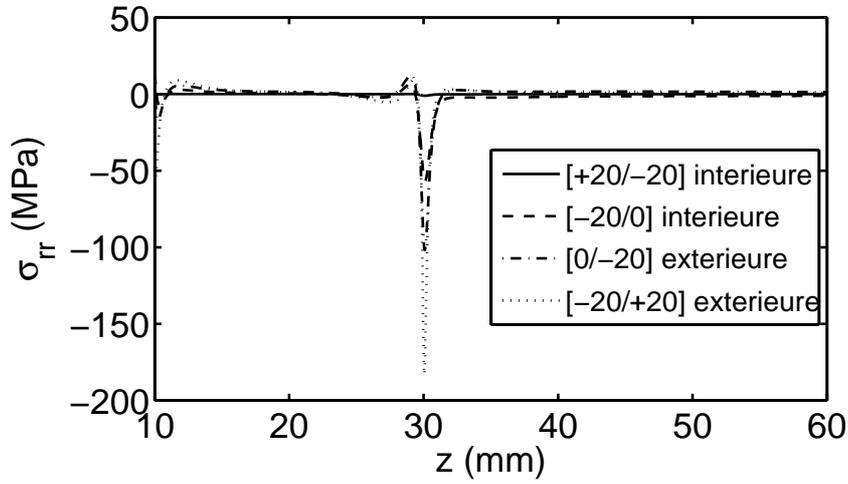
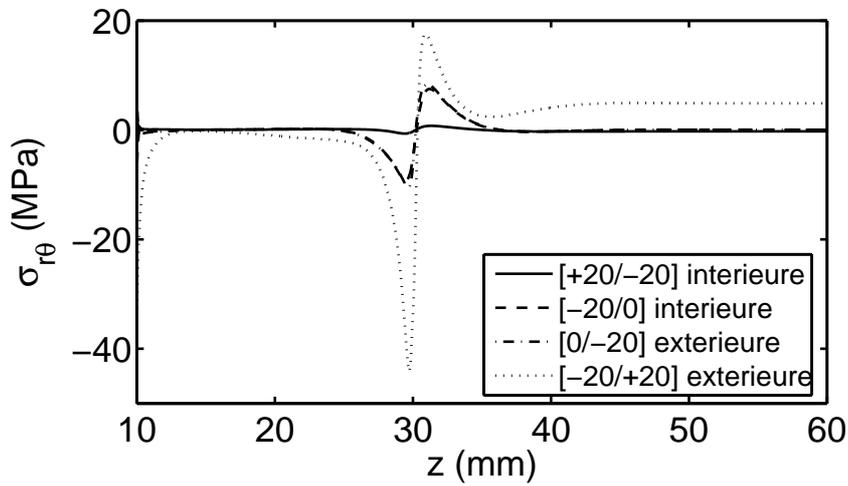
intérieure ne voit presque pas l'effet de bord. Ici encore, les contraintes σ_{rr} et σ_{zr} maximum sont du même ordre de grandeur, σ_{rr} étant localisée à l'extrémité du manchon.

Il est à noter que la liaison entre le manchon et le tube composite est supposée parfaite, l'introduction d'une interface élastique correspondant à la colle aurait sans doute pour effet de diminuer la contrainte due à l'effet de bord en extrémité de manchon.

3.5.3 Prise en compte de défauts de délaminage axisymétriques

Avec la stratégie présentée, il est possible de simuler de manière efficace l'influence de défauts de délaminage axisymétriques sur la réponse élastique du tube. Une avancée de fissure peut être simulée et le taux de restitution d'énergie associé calculé en divisant la différence d'énergie potentielle par l'avancée de fissure. Ce calcul étant très rapide, une étude paramétrique est envisageable pour mettre en place un premier critère de criticité de défauts de délaminage.

Prenons un tube [+20/ - 20/0/ - 20/ + 20] (G939/M18) en traction encastéré par l'intermédiaire d'un manchon en titane. La longueur de collage est de 20 mm et le diamètre intérieur de 16 mm. Un défaut est placé dans l'une des interfaces, les autres restant saines. Le défaut est débouchant sous le manchon et sa taille varie jusqu'à pénétrer au coeur du tube. De nombreux calculs sont

Figure 3.31 – Évolution de la contrainte σ_{rr} (MPa) aux interfaces (flexion)Figure 3.32 – Évolution de la contrainte $\sigma_{r\theta}$ (MPa) aux interfaces (flexion)

menés rapidement pour différentes tailles de défauts. En effet, il est possible en un temps raisonnable d'envisager un défaut se propageant élément par élément dans chacune des interfaces. Il est alors nécessaire de conduire 250 calculs par interface, ce qui est rendu facile grâce à l'analyse de Fourier étendue présentée dans ce chapitre. Le chargement reste faible (16MPa), le tube reste donc dans son domaine élastique.

La figure 3.33 représente le taux de restitution d'énergie calculé en fonction de la longueur du délaminage. On observe trois zones. Dans la première, sous le manchon (jusqu'à un défaut de 15 mm), le taux de restitution d'énergie reste faible. Au passage de l'extrémité du manchon (deuxième zone), ce taux augmente puis décroît pour rejoindre un plateau au coeur du tube (défaut supérieur à 30 mm), c'est la troisième zone. De plus on remarque que le taux de restitution d'énergie augmente avec le rayon de l'interface considérée. C'est donc l'interface extérieure entre les plis $[-20/+20]$ qui est la plus sollicitée, ce n'est pas étonnant car c'est aussi l'interface la plus chargée.

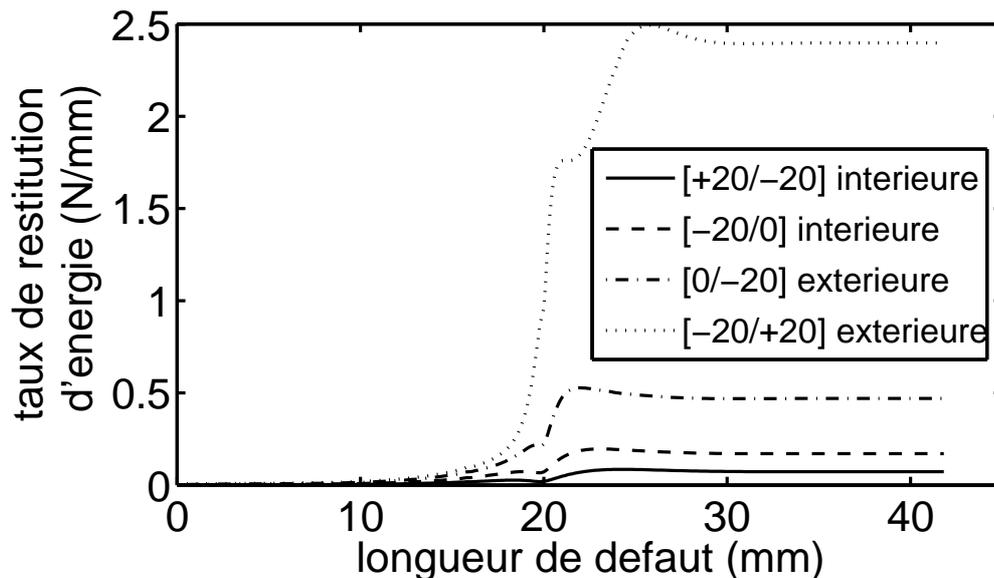


Figure 3.33 – Évolution du taux de restitution d'énergie en fonction de la taille du défaut

N'ayant pas de données pour les interfaces entre plis G939/M18, le taux de restitution d'énergie critique est ici estimé par comparaison avec des composants « similaires ». Le taux de restitution d'énergie critique est de l'ordre de 0.3 N/mm pour une interface entre plis de M18/M55J (Allix *et al.*, 1998)

et de 0.19 N/mm pour la résine M18 pure. On prendra alors comme première estimation un taux critique de l'ordre de 0.25 N/mm.

Le critère basé sur le taux de restitution d'énergie prédit la propagation de défauts de délaminage débouchant de taille supérieure à 20 mm pour les deux interfaces extérieures entre les plis $[0/ - 20]$ et $[-20/ + 20]$. Par contre, un défaut situé dans les plis inférieurs ne se propage pas.

Cette première approche simple suppose l'existence d'un défaut de délaminage axisymétrique débouchant sous le manchon. Différentes configurations indépendantes sont testées. Dans l'objectif de mener une étude paramétrique plus poussée, il est possible de combiner plusieurs défauts à la fois et d'envisager de multiples scénarios de propagation.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les techniques de calcul classiques de type axisymétrique ou Fourier ont été étendues au cadre des solides de révolution ayant un comportement invariant par rotation autour de leur axe. La résolution d'un problème élastique 3D de bord sur tube sain est alors rendue très efficace. En effet celle-ci peut être découplée par harmonique et résolue de manière parallèle. Cette méthode a fait l'objet du développement d'un code prototype sous Matlab et différents exemples ont été traités. Une estimation du coût de calcul a aussi été menée. La taille des problèmes 3D équivalents étant très grande, ceux-ci seraient résolus par l'utilisation de techniques de sous-structuration. Bien que la taille des problèmes posés sur les sous-structures se rapproche de la taille des problèmes posés sur une bande, un certain nombre d'itérations est nécessaire pour converger (de l'ordre de la trentaine). Par contre pour l'analyse de Fourier, les différents problèmes posés sur une bande sont complètement découplés, d'où le gain de temps par rapport à une analyse classique avec sous-structuration. De plus cette analyse est indépendante du rayon du tube, contrairement au cas des éléments finis.

Il est aussi à noter que cette stratégie n'est pas utilisable pour la prise en compte de défauts non-axisymétriques ; ce dernier point fera l'objet des chapitres qui suivent.

Chapitre 4

Problème avec défaut : mise en place et analyse

Le traitement efficace des problèmes élastiques de bord est nécessaire afin de rendre possible la prévision de l'évolution des dégradations au sein du tube. Une première étape développée au chapitre 3 concernait la simulation efficace sur tube sain. Ce chapitre présente une extension de cette méthode au traitement de tubes dégradés. La mise en place du problème couplé ainsi que des résultats de convergence de la solution en fonction de la troncature du développement en série de Fourier sont plus particulièrement décrits. La technique de résolution proprement dite sera développée dans le chapitre 5.

Sommaire

4.1	Modélisation des défauts	99
4.2	Discrétisation éléments finis	102
4.3	Écriture du problème couplé	104
4.4	Développement de la solution théorique	107
4.5	Convergence de la solution tronquée	109
4.5.1	Présentation d'un cas d'étude simple	110
4.5.2	Estimation de λ_{max}	111
4.5.3	Convergence de la solution tronquée	111

4.5.4	Évaluation a priori de l'ordre de troncature	111
4.6	Cas d'un défaut quelconque	113
4.7	Application	114
4.8	Conclusion	116

Lorsque le comportement de la structure n'est plus invariant par rotation autour de l'axe du tube, c'est à dire si la matrice de Hooke exprimée dans la base des coordonnées cylindriques dépend de l'angle polaire, comme c'est le cas en présence de défauts, la technique développée précédemment n'est plus utilisable directement. En effet, les différents modes sont couplés entre eux. Une question se pose alors. Celle-ci concerne l'ordre de troncature nécessaire afin de représenter correctement la solution. Il est « indépendant » de la discrétisation éléments finis et est relié au second membre, mais aussi au nombre de modes nécessaires pour représenter le comportement de la structure et l'amplitude relative de ces modes. Les dégradations étant à l'origine de cette modification de comportement autour de sa moyenne, une étude simple de leur représentation est tout d'abord présentée.

4.1 Modélisation des défauts

Différents défauts apparaissent dans les tubes étudiés. Ces défauts coïncident avec les différents mécanismes de dégradation provoquant le comportement non-linéaire de la structure composite. Dans les plis, ces défauts sont : des porosités, des fissures transverses, des ruptures de fibres. Dans les interfaces, le défaut est du délaminage. Afin de faciliter la description de ces différents défauts, ceux-ci sont pris en compte par des abattements de rigidité. En pratique, un pré-endommagement est affecté. De cette manière, la modélisation reste cohérente entre celle des défauts et celle du comportement non-linéaire utilisant des variables internes d'endommagement.

Dans ce paragraphe, le défaut est une donnée, celui-ci se développe sur A modes et ce développement en série de Fourier est supposé exacte.

La matrice de Hooke d'un pli endommagé est notée K et est développée en série de Fourier sur A modes comme suit :

$$K(z, r, \theta) = \sum_{n=-A}^{+A} K_n(z, r) e^{jn\theta} \quad (4.1)$$

La matrice de Hooke d'une interface endommagée est notée k et est développée en série de Fourier sur A modes comme suit :

$$k(z, r, \theta) = \sum_{n=-A}^{+A} k_n(z, r) e^{jn\theta} \quad (4.2)$$

Les matrices K_0 et k_0 correspondent alors aux comportements moyens. Les matrices de Hooke K et k sont définies positives et réelles, ce qui implique :

$$K_n = \overline{K_{-n}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.3)$$

$$k_n = \overline{k_{-n}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.4)$$

Dans la pratique, on peut être amené à modéliser des défauts de formes différentes comme sur la figure 4.1 qui montre l'endommagement modélisant un défaut de délaminage en forme de demi-ellipse à une interface. Pour cela, une grille contenant les coordonnées de tous les points d'intégration est générée. Une fonction est alors évaluée en chaque point de la grille et donne la valeur des variables d'endommagement en chaque point d'intégration. La fonction peut être donnée sous forme analytique, issue d'une ligne de niveau (*level set*) ou sous forme d'image pixellisée.

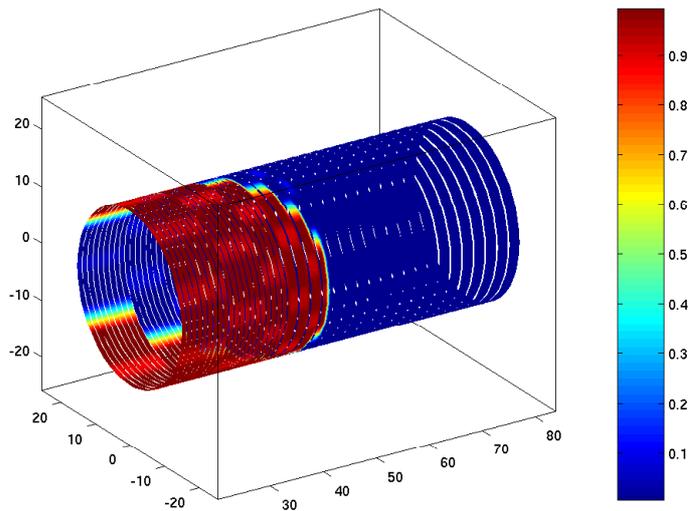


Figure 4.1 – Représentation d'un défaut en forme de demi-ellipse

La forme des défauts traitée ici est donnée dans une section sur la figure 4.2 pour un endommagement maximum de 80%.

Une décomposition en série de Fourier de ce défaut est effectuée, celle-ci est tronquée car il n'est pas envisageable de garder une infinité de modes. La figure 4.3, donne la représentation du défaut construit sur un développement tronqué à 16 modes. L'erreur commise a lieu près des points anguleux.

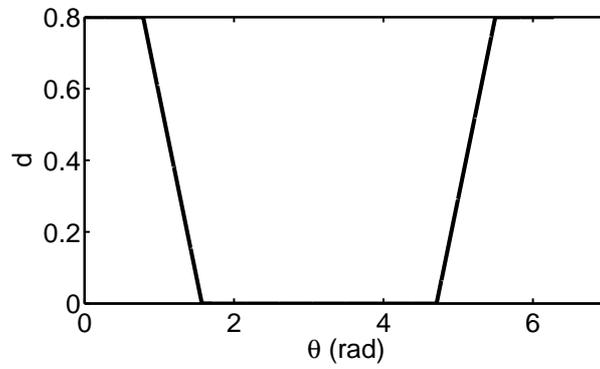


Figure 4.2 – Allure d'un défaut standard modélisé

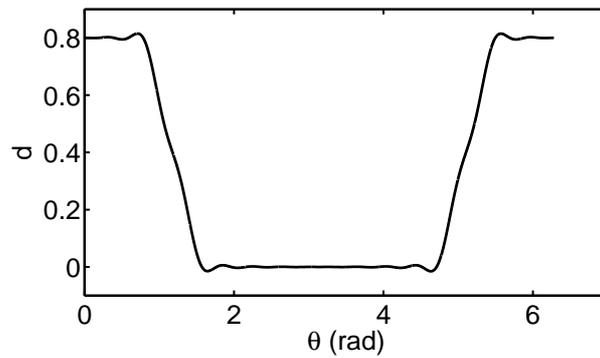


Figure 4.3 – Représentation d'un défaut après troncature

Il est alors possible de calculer l'erreur commise par une troncature de ce développement. La figure 4.4 représente l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de points d'échantillonnages.

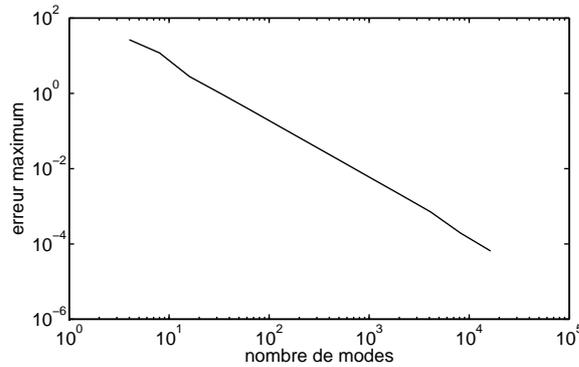


Figure 4.4 – Erreur commise par la troncature

Dans le cas présenté, 64 modes permettent de représenter le défaut avec une erreur inférieure à 1%.

4.2 Discrétisation éléments finis

L'objectif de ce paragraphe est de transformer le problème continu 3D en un problème continu seulement suivant l'angle polaire, les deux autres directions étant discrétisées par éléments finis. Cette transformation permettra ensuite d'étudier l'influence du développement en série de Fourier, les autres paramètres étant constants. Dans un premier temps, aucun chargement d'origine thermique ne sera pris en compte. Le problème à résoudre est le suivant :

Trouver $u(z, r, \theta) \in \mathcal{U}$ tel que :

$$-\int_{\Omega_{plis}} \varepsilon(u)^T K \varepsilon(u) d\Omega - \int_{\Gamma_{int}} [u]^T k [u^*] d\Gamma + \int_{\Omega} f_d^T u^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} F_d^T u^* d\Gamma = 0 \quad \forall u^* \in \mathcal{U}_0 \quad (4.5)$$

Les différentes composantes de la déformation s'écrivent :

$$\varepsilon_{zz} = u_{z,z} \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r} \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}(u_r + u_{\theta,\theta}) \quad (4.8)$$

$$\sqrt{2}\varepsilon_{zr} = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_{z,r} + u_{r,z}) \quad (4.9)$$

$$\sqrt{2}\varepsilon_{z\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{r}u_{z,\theta} + u_{\theta,z}\right) \quad (4.10)$$

$$\sqrt{2}\varepsilon_{r\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(u_{\theta,r} + \frac{1}{r}(u_{r,\theta} - u_\theta)\right) \quad (4.11)$$

Une interpolation par des éléments finis est utilisée par rapport aux coordonnées z et r . Le vecteur des fonctions de forme est noté $N(z, r)$ pour les plis.

$$u_i(z, r, \theta) = N(z, r)U_i(\theta) \quad \forall i \in \{z, r\} \quad (4.12)$$

U_i désigne le vecteur des déplacements nodaux dans la direction i . Ce vecteur dépend de la variable θ . La déformation s'écrit alors :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial N}{\partial z}U_z(\theta) \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial N}{\partial r}U_r(\theta) \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}(NU_r(\theta) + NU_{\theta,\theta}) \quad (4.15)$$

$$\sqrt{2}\varepsilon_{zr} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial r}U_z(\theta) + \frac{\partial N}{\partial z}U_r(\theta)\right) \quad (4.16)$$

$$\sqrt{2}\varepsilon_{z\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{r}NU_{z,\theta} + \frac{\partial N}{\partial z}U_\theta(\theta)\right) \quad (4.17)$$

$$\sqrt{2}\varepsilon_{r\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial r}U_\theta(\theta) + \frac{1}{r}(NU_{r,\theta}(\theta) - NU_\theta(\theta))\right) \quad (4.18)$$

En notant $U_{i,\theta}$ la dérivée du vecteur de déplacements nodaux U_i par rapport à θ , la déformation se met sous la forme :

$$\varepsilon = B_h(z, r)[U_z(\theta), U_{z,\theta}(\theta), U_r(\theta), U_{r,\theta}(\theta), U_\theta(\theta), U_{\theta,\theta}(\theta)]^T \quad (4.19)$$

Le saut de déplacement est noté $[u]$. Le vecteur des fonctions de forme est noté $\tilde{N}(z, r)$ pour les interfaces.

$$[u_i(z, r, \theta)] = \tilde{N}(z, r)U_i(\theta) \quad \forall i \in \{z, r\} \quad (4.20)$$

Avec $V = [U_z(\theta), U_{z,\theta}(\theta), U_r(\theta), U_{r,\theta}(\theta), U_\theta(\theta), U_{\theta,\theta}(\theta)]$; le vecteur $[u]$ peut s'écrire sous la forme :

$$[u] = \tilde{B}_h(z, r)V^T \quad (4.21)$$

et d'une manière générale on a :

$$u(z, r, \theta) = N_V(z, r)V(\theta) \quad (4.22)$$

Le problème continu en θ consiste alors à trouver $V \in \mathcal{U}^h$ tel que :

$$\begin{aligned} & - \int_0^{2\pi} V^T \int_{bande \cap \Omega_{ptis}} B_h^T K B_h d\Gamma V^* d\theta - \int_0^{2\pi} V^T \int_{bande \cap \Gamma_{int}} \tilde{B}_h^T k \tilde{B}_h ds V^* d\theta \\ & + \int_0^{2\pi} \int_{bande \cap \Omega} f_d^T N_V d\Gamma V^* d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{bande \cap \partial_2 \Omega} F_d^T N_V ds V^* d\theta \\ & = 0 \quad \forall V^* \in \mathcal{U}_0^h \end{aligned} \quad (4.23)$$

Il est à noter que ce problème est discret en z et r mais continu en θ . Cela permettra par la suite de comparer les solutions obtenues pour différentes formes de description circonférentielle. Ce problème est notre problème de référence, l'erreur commise par la description éléments finis n'étant pas étudiée ici.

4.3 Écriture du problème couplé

Le problème 4.23 est continu par rapport à θ et 2π périodique. On va alors chercher la solution sous la forme d'une série de Fourier. Pour cela, la forme complexe du développement sera utilisée afin de simplifier les écritures d'où :

$$U_i(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_i^n e^{jn\theta} \quad (4.24)$$

n désigne le mode considéré et i désigne la composante du champ de déplacement. Pour le moment, on cherche des informations sur le comportement de la solution théorique, le développement n'est donc pas tronqué. Les composantes de U_i étant des fonctions réelles, on a :

$$U_i^n = \overline{U_i^{-n}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.25)$$

Remarque : Les U_i^n sont des modes étendus. Le couplage entre cosinus et sinus est ici mis en place par le couplage entre partie réelle et partie imaginaire.

Le vecteur des inconnues nodales (fonctions de θ) peut se mettre sous la forme :

$$V^T = [U_z(\theta), U_{z,\theta}(\theta), U_r(\theta), U_{r,\theta}(\theta), U_\theta(\theta), U_{\theta,\theta}(\theta)]^T \quad (4.26)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\theta} L_n [U_z^n(\theta), U_r^n(\theta), U_\theta^n(\theta)]^T \quad (4.27)$$

La matrice L_n permet la mise en place d'opérateurs indépendants du mode considéré, celle-ci est constante et paramétrée par n , elle s'écrit :

$$L_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ jn & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & jn & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & jn \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

avec

$$U^n = [U_z^n(\theta), U_r^n(\theta), U_\theta^n(\theta)]^T \quad (4.29)$$

Le problème 4.23 continu en θ revient à trouver ($U^n \in \mathcal{U}_n^h$, $\forall n \in \mathbb{N}$) vérifiant :

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=-A}^{+A} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{j(n+m+\alpha)\theta} d\theta \right) e_{n,m,\alpha} = \\ & \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{j(n+m)\theta} d\theta \right) \left(\int_{bande \cap \Omega} f_d^{nT} \hat{N} d\Gamma + \int_{bande \cap \partial_2 \Omega} F_d^{nT} \hat{N} ds \right) U^{n*} \\ & \forall U^{n*} \in \mathcal{U}_0^h \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Rappelons ici la signification des indices :

- α : indice relatif au développement en série du comportement (sur A modes)
- n et m : indices relatifs au développement en série des déplacements nodaux réels et virtuels

\hat{N} est défini à partir des fonctions de forme N_V et $e_{n,m,\alpha}$ est donné par :

$$\begin{aligned} e_{n,m,\alpha} &= U^{nT} L_n^T \left(\int_{bande \cap \Omega_{plis}} B_h^T K_\alpha B_h d\Gamma \right) L_m U^{m*} \\ &+ U^{nT} L_n^T \left(\int_{bande \cap \Gamma_{int}} \tilde{B}_h^T k_\alpha \tilde{B}_h ds \right) L_m U^{m*} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} \vdots \\ W^{M-4} \\ W^{M-3} \\ W^{M-2} \\ W^{M-1} \\ W^M \\ W^{M+1} \\ W^{M+2} \\ W^{M+3} \\ W^{M+4} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{F}^{M-4} \\ \tilde{F}^{M-3} \\ \tilde{F}^{M-2} \\ \tilde{F}^{M-1} \\ \tilde{F}^M \\ \tilde{F}^{M+1} \\ \tilde{F}^{M+2} \\ \tilde{F}^{M+3} \\ \tilde{F}^{M+4} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

L'intérêt d'introduire W^n est visible sur la matrice G , celle-ci ne faisant intervenir que $2A+1$ opérateurs. Une fois W^n calculé, il est possible de remonter à U^n grâce à l'inverse généralisée de L_n , comme suit :

$$U^n = L_n^{-1}W^n \quad (4.37)$$

avec :

$$L_n^{-1}L_n = I_3 \quad (4.38)$$

Dans le cas présent, la donnée de W^n suffit pour discuter la convergence de la série, on ne remontera donc pas aux modes étendus U^n .

4.4 Développement de la solution théorique

L'objectif de ce paragraphe est d'obtenir des informations sur le comportement de la solution théorique, et notamment une estimation de la vitesse de décroissance des différents modes. L'étude théorique de la résolution directe du problème précédent est restreinte au cas suivant :

$$\begin{cases} \tilde{F}_\alpha = 0 & \forall \alpha \neq M \\ \tilde{K}_\alpha = \beta_\alpha \tilde{K} & \forall \alpha \neq 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

En effet, par linéarité, la solution avec un second membre plus étoffé peut être obtenue par superposition de problèmes de ce type. La seconde équation correspond à des défauts dont l'amplitude peut se mettre sous la forme $f(\theta)g(z, r)$ où f est une fonction qui sera développée en série de Fourier et g une fonction ici discrétisée par éléments finis et qui donne naissance à \tilde{K} .

Les équations à résoudre sont les suivantes :

1. l'équation avec second membre :

$$\sum_{\alpha=-A}^{+A} \tilde{K}_{-\alpha} \tilde{U}^{M+\alpha} = \tilde{F}_M \quad (4.40)$$

2. les équations sans second membre :

$$\sum_{\alpha=-A}^{+A} \tilde{K}_{-\alpha} \tilde{U}^{m+\alpha} = 0 \quad \forall m \in [-N + A, M - 1] \cup [M + 1, N - A] \quad (4.41)$$

3. les conditions à l'infini de convergence de la série :

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \tilde{U}^m = 0 \quad (4.42)$$

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \tilde{U}^m = 0 \quad (4.43)$$

La solution théorique définie par les équations précédentes n'étant pas calculable directement, une solution tronquée approchée sera calculée. L'objectif est alors de déterminer l'ordre de troncature nécessaire afin de capter la majeure partie de la solution. Pour cela on va chercher à estimer la vitesse de décroissance des modes par rapport à l'ordre de troncature.

Dans ce but, on fait intervenir les valeurs propres λ et vecteurs propres V_λ du problème spectral suivant :

$$(\tilde{K} - \lambda \tilde{K}_0) V_\lambda = 0 \quad (4.44)$$

L'intérêt de l'hypothèse 4.39 est visible ici, elle permet de découpler les équations à résoudre en les projetant dans la base des vecteurs propres V_λ . On appelle alors w_λ la projection de W sur le vecteur propre V_λ . En pratique il n'est pas question de calculer ces valeurs propres λ mais seulement d'estimer les valeurs propre maximum et minimum.

La prise en compte des conditions à l'infini passe par la résolution de l'équation 4.41 qui s'écrit :

$$\sum_{\alpha=-A}^{-1} \lambda \beta_{-\alpha} w_\lambda^{m+\alpha} + w_\lambda^m + \sum_{\alpha=+1}^{+A} \lambda \beta_{-\alpha} w_\lambda^{m+\alpha} = 0 \quad (4.45)$$

La solution est recherchée sous la forme : $w_\lambda^m = x^m v^m$ avec v^m une constante non nulle. Les valeurs x sont les $2A$ racines complexes du polynôme.

$$\sum_{\alpha=-A}^{-1} \lambda \beta_{-\alpha} x^{A+\alpha} + x^A + \sum_{\alpha=+1}^{+A} \lambda \beta_{-\alpha} x^{\alpha+A} = 0 \quad (4.46)$$

Cette solution s'écrit donc :

$$w_\lambda^m = \sum_{j=1}^{2A} x_j^m v_j^+ \quad \forall m \in [M+1, N-A] \quad (4.47)$$

$$w_\lambda^m = \sum_{j=1}^{2A} x_j^m v_j^- \quad \forall m \in [-N+A, M-1] \quad (4.48)$$

Remarque :

- les deux domaines de variation de m ayant une intersection non vide, les conditions de compatibilité des w_λ autour de l'équation avec second membre s'écrivent :

$$\sum_{j=1}^{2A} x_j^m (v_j^+ - v_j^-) = 0 \quad \forall m \in [M-A+1, M+A-1] \quad (4.49)$$

- dans le cas de racines multiples, la forme de la solution recherchée ne décrit pas tout l'espace de la solution théorique, cependant ce cas ne s'est jamais présenté en pratique sauf pour un opérateur non défini positif (amplitude du défaut supérieure au comportement moyen).

Afin de calculer la solution théorique, il convient de prendre en compte les conditions 4.42 et 4.43, ce qui implique :

$$v_j^+ = 0 \quad \text{si } |x_j| > 1 \quad \forall j \in [1, 2A] \quad (4.50)$$

$$v_j^- = 0 \quad \text{si } |x_j| < 1 \quad \forall j \in [1, 2A] \quad (4.51)$$

Les constantes v^m sont déterminées avec l'équation avec second membre. La vitesse de décroissance des modes de la solution théorique est alors donnée par la plus grande racine x_j de module inférieur à 1. Or les valeurs x_j dépendent de λ . Une étude paramétrique par rapport à celui-ci permet de calculer la vitesse de décroissance. Pour les cas étudiés en pratique, c'est la valeur maximum de λ qui intervient. En effet, celle-ci correspond à une amplitude de défaut maximum.

4.5 Convergence de la solution tronquée

Pratiquement, la solution théorique n'étant pas calculable, on recherche une approximation de celle-ci sous forme de série de Fourier tronquée à l'ordre N . Le problème théorique est :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} W^{-m*} \sum_{\alpha=-A}^{+A} \tilde{K}_{-\alpha} W^{m+\alpha} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} W^{-m*} \tilde{F}_{+m} \quad (4.52)$$

Un endommagement est inséré dans l'interface entre l'extrémité du tube composite et la fin de la zone de recouvrement du manchon sur ce tube. Afin de tester un ordre de troncature élevé (jusqu'à 256 modes), le maillage a été très réduit (un élément dans l'épaisseur d'un pli et 4 dans la longueur du tube). Les dimensions du tube sont revues afin que les éléments soient bien conditionnés. Dans l'interface endommagée, le pré-endommagement vaut :

$$d = 0.5 + 0.45\cos(\theta) \quad (4.55)$$

Dans ce cas test, $\beta_1 = \beta_{-1} = 0.45$. Ce cas test sera repris dans le chapitre suivant.

4.5.2 Estimation de λ_{max}

Après calcul sur les opérateurs discrétisés, on trouve $\lambda_{max} = 0.45$. Cette valeur est la moitié de la rigidité relative de l'interface modifiée qui vaut $\frac{0.45}{0.5}$. En effet, la rigidité des plis adjacents intervient dans le problème aux valeurs propres généralisées, condensé sur l'interface, permettant le calcul de λ_{max} . Ici la participation des plis est de l'ordre de 50%. Une estimation de la valeur de λ_{max} à partir du développement en série de l'endommagement est alors possible dans le cas d'une interface entre deux plis. On calcul l'amplitude relative de la modification à partir de l'endommagement puis on divise par 2.

4.5.3 Convergence de la solution tronquée

Pour cette valeur de λ_{max} , l'évolution de l'erreur s'écrit $e(N) = ba^N$ avec $a = 0.39$. Sur la figure 4.5, qui montre l'évolution de l'erreur calculée $e(N)$ en fonction de l'ordre de troncature N , on peut identifier un taux de convergence a valant 0.37. L'estimation théorique basée sur la plus grande valeur propre permet donc d'apprécier l'ordre de troncature nécessaire à la bonne description de la solution en fonction de λ . Dans l'étude théorique, on prend la valeur propre maximale, en pratique, c'est le spectre actif qu'il convient d'utiliser. Les estimations théoriques sont donc toujours pénalisantes en terme de coût de calcul.

4.5.4 Évaluation a priori de l'ordre de troncature

Connaissant a priori l'amplitude du défaut, il est possible de prédire le nombre de modes nécessaires à la bonne description de la solution. Par exemple, la figure 4.6 représente l'ordre de troncature N théorique permettant d'obtenir

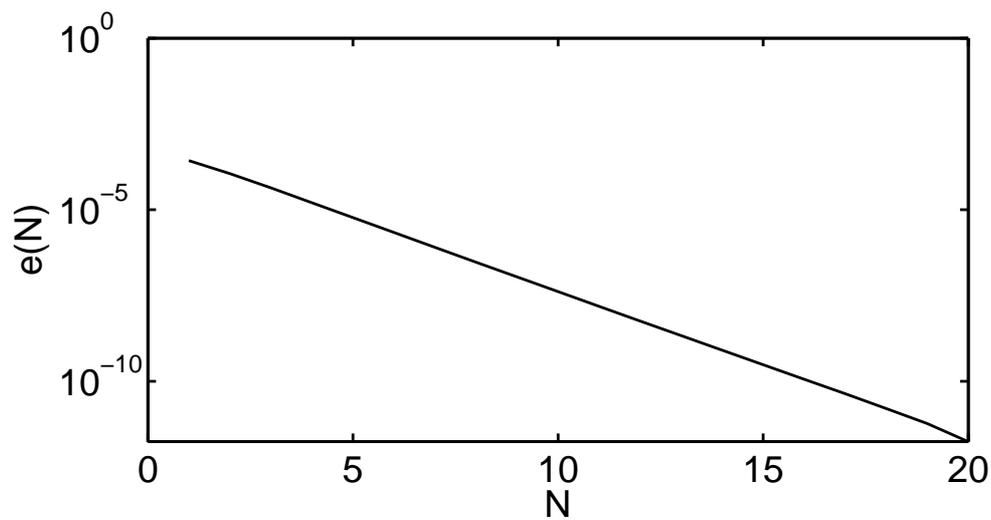
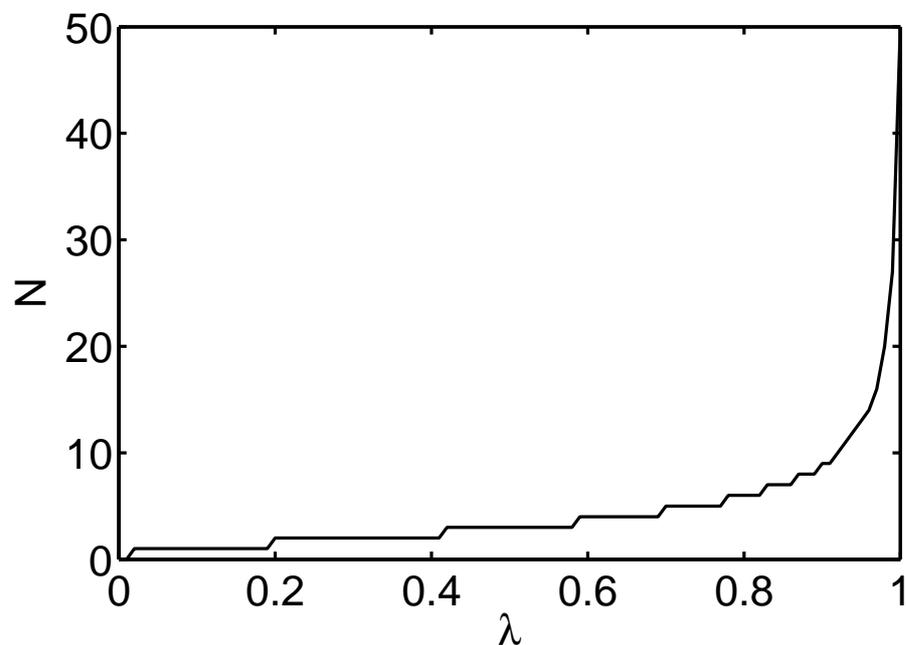


Figure 4.5 – Évolution de l'erreur en fonction de l'ordre de troncature

une solution dont l'erreur ne dépasse pas 1%. Dans notre cas, il faudra prendre au moins 3 modes pour obtenir une erreur inférieure à 1%, pour un second membre concentré sur le fondamental. Si le second membre s'étend sur M modes, alors il faudra au moins $M + 3$ modes pour d'écrire correctement la solution.

Figure 4.6 – Ordre de troncature en fonction de λ pour une erreur inférieure à 1%

4.6 Cas d'un défaut quelconque

Considérons un défaut ne respectant pas l'hypothèse :

$$\tilde{K}_\alpha = \beta_\alpha \tilde{K} \quad \forall \alpha \neq 0 \quad (4.56)$$

Dans ce paragraphe, on traite le défaut section par section, ces différentes sections du défaut sont analysées afin de connaître quelle est celle imposant le plus grand nombre de modes. Prenons par exemple la forme de défaut donnée par la fonction f suivante (sur une interface de rayon r donc de largeur $T = 2\pi$) :

$$f : \theta \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \theta < \frac{\theta_1}{2} \\ 1 - \frac{2\theta - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} & \text{si } \frac{\theta_1}{2} \leq \theta < \frac{\theta_2}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\theta_2}{2} \leq \theta < T - \frac{\theta_2}{2} \\ 1 + \frac{2\theta - 2T + \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} & \text{si } T - \frac{\theta_2}{2} \leq \theta < T - \frac{\theta_1}{2} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.57)$$

θ_1 et θ_2 sont des paramètres différents pour chaque section. Ce défaut (figure 4.2) correspond à la géométrie donnée en début de chapitre pour $a = 1$.

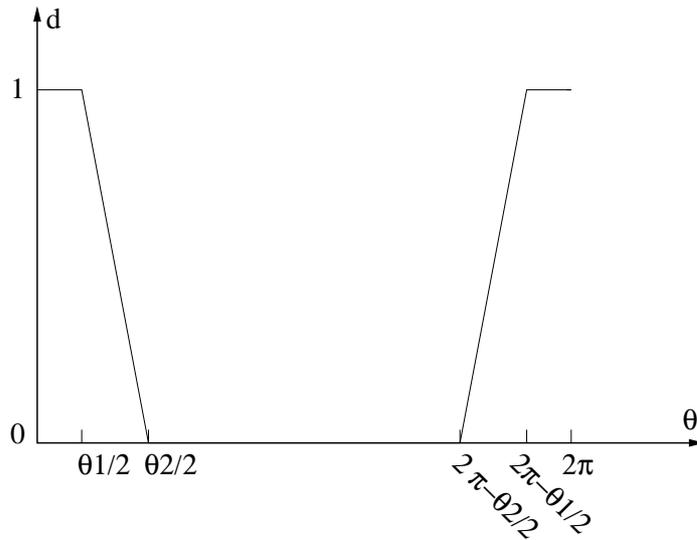


Figure 4.7 – Représentation de f

La figure 4.8, montre l'évolution théorique de l'erreur relative pour une description sur 64 modes du défaut en fonction de sa largeur relative $\frac{\theta_1}{T}$. Ce nombre de modes permet d'obtenir une erreur sur la description inférieure à 1% par rapport à la forme théorique. On remarque alors que plus le défaut devient étroit et plus l'erreur augmente. Un défaut étroit est donc plus pénalisant au niveau du coût de calcul qu'un défaut large.

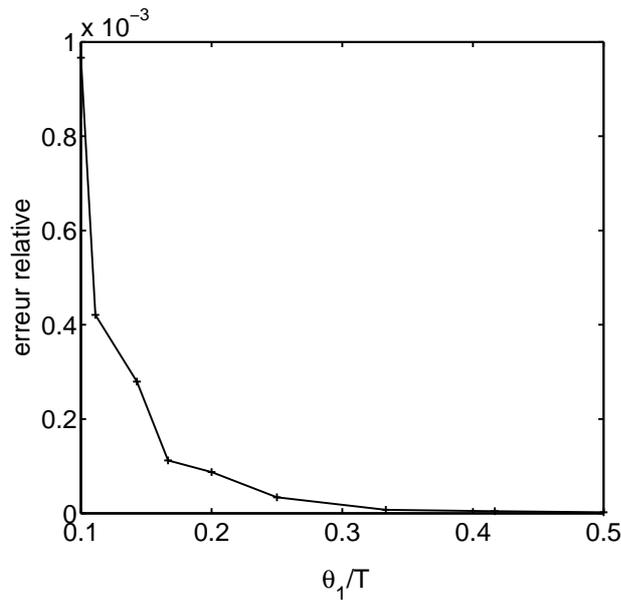


Figure 4.8 – Évolution de l'erreur relative en fonction de la largeur d'un défaut

Remarque :

Pour un défaut situé dans une interface, il est simple de calculer les coefficients β_α . Le développement en série de Fourier de l'endommagement donne l'amplitude relative des différents modes entre eux. De plus, pour un défaut de délaminage entre deux plis, le coefficient λ estimé numériquement sur le premier mode prend une valeur proche de 0.5.

4.7 Application

Soit un tube $[+20/-20/0/-20/+20]$ constitué de plis tissés G939/M18 en traction. Le maillage retenu pour effectuer le calcul est assez fin, deux éléments sont utilisés dans l'épaisseur de chaque pli. Le maillage est présenté figure 4.9.

Un défaut de type délaminage et entrant dans le cadre des résultats du présent chapitre est initié à l'interface intérieure $[+20/-20]$. Celui-ci est présenté sur la figure 4.10 qui donne l'évolution du pré-endommagement sur l'interface développée. En début de chapitre, on a vu que 64 modes de calcul sont suffisants pour décrire correctement le défaut, ici l'erreur est inférieure à 1%.

Le défaut étant situé à une interface entre deux plis, on prendra $\lambda = 0.5$. Les coefficients β_α sont calculés à partir du développement en série de Fourier de l'endommagement. Pour 64 modes, l'erreur énergétique relative commise sur la description circonférentielle est estimée à $1e-7$. Ce résultat est sans doute

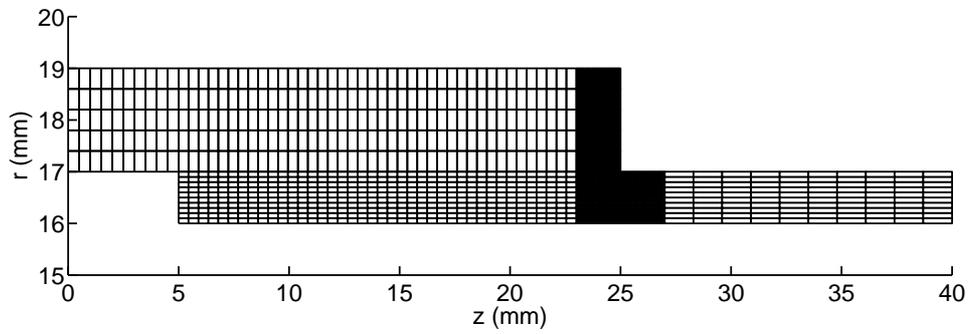


Figure 4.9 – Maillage fin d'une section du tube

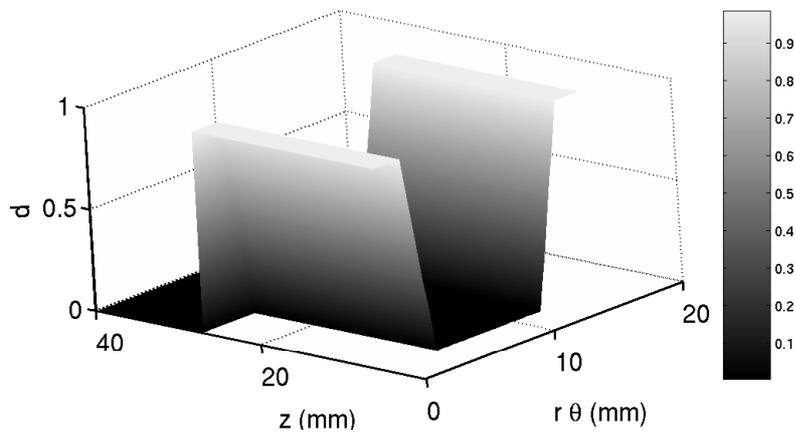


Figure 4.10 – Pré-endommagement dans l'interface intérieure [+20/ - 20]

très inférieur à l'erreur commise sur la description éléments finis et est très largement suffisante. En effet, elle correspond à une erreur de l'ordre de 0.1% sur le déplacement ou la contrainte.

Remarque :

- Comme il a déjà été mentionné dans le chapitre 3, le passage de la représentation sous forme de modes étendus à la représentation 3D des champs est obtenue par l'utilisation d'une transformée de Fourier Rapide ou de son inverse. Afin d'utiliser efficacement la FFT, on utilise un nombre de modes étendus en puissance de 2. Donc, si l'erreur est trop importante pour 32 modes, l'étape suivante est de prendre 64 modes. L'erreur peut alors décroître de plusieurs ordre de grandeur. Il ne faut donc pas s'étonner d'obtenir une erreur relative si faible.
- L'erreur relative portant sur la description circonférentielle est obtenue pour un défaut fixé. Cette erreur ne prend donc pas en compte l'erreur de description du défaut. Cette dernière peut alors devenir supérieure à l'erreur de description circonférentielle.

4.8 Conclusion

Ce chapitre présente une méthode de traitement efficace de problèmes de révolution. Pour cela les champs sont décomposés en séries de Fourier. Le problème qui était découplé dans le cas du tube sain devient ici complètement couplé. Dans un premier temps, une étude de l'erreur commise par la troncature de la série a été menée. Cette étude formelle est utilisée pour définir les paramètres de calcul menant à une analyse correcte du tube en présence de défauts. Cette analyse sera conduite dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Problème avec défaut : méthode de résolution et application

Ce chapitre présente la mise en oeuvre d'un algorithme de gradient conjugué pour résoudre le problème couplé exposé au chapitre précédent. Le choix du préconditionneur permettant de découpler les modes étendus et ses performances sont détaillés. La mise en oeuvre pratique faisant intervenir des problèmes de repliement de spectre, l'échantillonnage de la solution est étudié. Une méthode de validation à posteriori de l'ordre de troncature est aussi avancée. L'ensemble de la démarche est illustrée dans le cas d'un tube en présence d'un défaut non axisymétrique.

Sommaire

5.1	Présentation du gradient conjugué	119
5.2	Choix du préconditionneur	121
5.3	Évaluation du conditionnement et validation à posteriori de l'ordre de troncature	123
5.3.1	Conditionnement de la méthode	123
5.3.2	Validation à posteriori de l'ordre de troncature	125
5.4	Mise en oeuvre du gradient conjugué et échantillonnage	125
5.4.1	Influence du repliement de spectre sur la convergence .	125
5.4.2	Influence de la représentation du défaut sur la convergence	131

5.5	Application	134
5.6	Conclusion	138

En pratique, le problème discrétisé tronqué présenté au chapitre précédent n'est pas résolu directement pour des raisons de coût de calcul et d'encombrement mémoire. Une technique itérative de Krylov est alors utilisée pour résoudre ce problème. L'utilisation d'un préconditionneur permettant le découplage suivant les modes étendus est discutée. Le choix du préconditionneur et les performances associées sont détaillées dans ce chapitre ainsi que les problèmes liés à la mise en oeuvre d'un algorithme de gradient conjugué avec préconditionneur dans le cadre Fourier.

5.1 Présentation du gradient conjugué

Dans ce paragraphe, la méthode du gradient conjuguée est détaillée, on reprend ici les notations définies à la section 1.2.1.3. On considère la résolution du système linéaire $Ax = B$. La i ème itération conduit à l'approximation x_i de la solution, le résidu associé est alors : $r_i = B - Ax_i$. La donnée du vecteur x_0 permet d'initialiser la procédure. x désigne la solution théorique du système. On note $\kappa_m(M^{-1}A, r_0)$ le sous espace de Krylov :

$$\kappa_m(M^{-1}A, r_0) = Vect(M^{-1}r_0, M^{-1}Ar_0, \dots, M^{-1}A^{m-1}r_0) \quad (5.1)$$

où M désigne le préconditionneur et $Vect(v_i)$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs v_i .

Le principe de recherche de x_m dans un algorithme de gradient conjugué préconditionné est le suivant :

$$x_m \in x_0 + \kappa_m(M^{-1}A, r_0) \quad (5.2)$$

$$r_m \perp_A \kappa_m(M^{-1}A, r_0) \quad (5.3)$$

\perp_A désigne l'orthogonalité entre deux vecteurs au sens du produit scalaire défini par A . L'algorithme du gradient conjugué ne s'applique donc qu'à des matrices symétriques définies positives permettant ainsi de définir ce produit scalaire. L'algorithme correspondant est donné par 2.

Algorithme 2 Gradient conjugué préconditionné réorthogonalisé

0/ x_0 une donnée initiale
1/ Résolution du problème auxiliaire $Mr_0 = B - Ax_0$ pour obtenir la première direction de recherche
for $i = 1, 2 \dots$ **do**
 2/ Résolution du problème auxiliaire $Mz_{i-1} = r_{i-1}$ pour obtenir une nouvelle direction de recherche
 3/ Orthogonalisation des directions de recherche au sens de A
 $p_i = z_{i-1}$
 for $k = 1 \dots i - 1$ **do**
 $h_{k,i} = (p_i, p_k)_A$
 $p_i = p_i - h_{k,i}p_k$
 end for
 4/ Minimisation de l'énergie potentielle
 $q_i = Ap_i$
 $\alpha_i = p_{i-1}^T r_{i-1} / p_i^T q_i$
 5/ Actualisation de la solution et du résidu
 $x_i = x_{i-1} + \alpha_i p_i$
 $r_i = r_{i-1} - \alpha_i p_i$
 6/ Test de la convergence
end for

Ici le préconditionnement est présenté à gauche mais est équivalent à un préconditionnement à droite ou symétrique ; dans ce cas une décomposition de Cholesky de M est effectuée. Théoriquement, les nouvelles directions de recherche générées par le processus itératif n'ont besoin d'être réorthogonalisées que par rapport à la dernière direction. Cependant, en pratique la relation de conjugaison est perdue rapidement au fil des itérations (environs 10 itérations), une réorthogonalisation est donc nécessaire et est présente dans l'algorithme 2. Avec cette procédure supplémentaire le gradient conjugué devient presque aussi coûteux que le GMRes.

Le lecteur pourra trouver de plus amples détails sur le gradient conjugué dans (Saad, 2000), notamment concernant la convergence du gradient conjugué qui est donnée par la relation suivante :

$$\|x - x_m\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^m \|x - x_0\|_A \quad (5.4)$$

où κ est le conditionnement de la matrice à "inverser", c'est à dire le rapport de la valeur propre maximum sur la valeur propre minimum. On appellera ρ :

$$\rho = \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \quad (5.5)$$

Le choix d'un préconditionneur permet une convergence plus rapide car κ diminue, il est donc crucial. En pratique ces estimations sont souvent trop majorantes car la totalité du spectre n'intervient pas, seule une partie est activée.

Une étude plus précise introduisant la notion de spectre de Ritz (Paige *et al.*, 1995) permet de mieux apprécier le taux de convergence de la méthode. Les valeurs de Ritz, sont les valeurs propres de l'opérateur à inverser projeté sur le sous-espace de Krylov. Ces valeurs convergent vers les valeurs propres de l'opérateur préconditionné par valeur inférieure et peuvent être calculées facilement au cours des itérations de l'algorithme comme présenté dans (Gosselet, 2003).

5.2 Choix du préconditionneur

Le choix d'un préconditionneur est crucial dans l'utilisation des techniques de Krylov, celui-ci doit être proche du comportement réel et doit permettre une résolution rapide. On s'oriente alors sur un préconditionneur permettant de découpler le problème sur les modes de Fourier étendus.

Remarque Préliminaire :

Dans ses travaux sur le calcul d'effet de bord dans les plaques trouées, O. Allix (Allix, 1992, 1989) utilise comme préconditionneur un comportement moyen permettant de découpler totalement les modes de Fourier. Ainsi, il met en place une méthode de résolution optimisée de problèmes élastiques qui sera utilisée par la suite en non linéaire. Il est à noter que dans son étude sur les plaques, l'utilisation de modes étendus n'est pas possible compte tenu de l'anisotropie du matériau étudié.

De la même manière, le problème du tube sain pourrait être résolu par l'intermédiaire de ce type de préconditionneur découplant totalement les modes de Fourier, ce qui rendrait possible l'utilisation d'un code de calcul standard. Cependant, l'expérience menée sur un tube $[+22.5/-22.5]$ en flexion montre qu'il faut au moins 15 itérations pour converger alors que le calcul direct est possible à un coût très réduit avec la méthode présentée ici. En effet, le coût de la résolution d'un problème posé sur une bande est seulement 4 fois plus cher. Ce choix de préconditionneur n'est donc pas privilégié .

Le choix effectué est de prendre comme préconditionneur un comportement de tube axisymétrique. Différents cas sont alors envisageables comme le tube sain ($\gamma = 1$), le tube avec défaut axisymétrique ($\gamma = -1$) ou le comportement moyen ($\gamma = 0$). On va montrer que ces préconditionneurs sont équivalents dans le cadre d'un défaut suivant la relation 4.39. Les préconditionneurs mentionnés précédemment peuvent s'écrire sous la forme :

$$M = \tilde{K}_0 + \gamma \tilde{K} \quad (5.6)$$

Pour étudier leur influence sur le conditionnement du système, étudions le problème aux valeurs propres généralisé suivant (δ valeur propre et \tilde{U} vecteur propre associé) :

$$\sum_{\alpha=-A}^{-1} \beta_{-\alpha} \tilde{K} \tilde{U}^{m+\alpha} + (\tilde{K}_0 - \delta(\tilde{K}_0 + \tilde{K}\gamma)) \tilde{U}^m + \sum_1^{A+1} \beta_{-\alpha} \tilde{K} \tilde{U}^{m+\alpha} = 0 \quad (5.7)$$

Après diagonalisation, ce problème s'écrit :

$$\sum_{\alpha=-A}^{-1} \beta_{-\alpha} \lambda u^{m+\alpha} + (1 - \delta(1 + \lambda\gamma)) u^m + \sum_1^{A+1} \beta_{-\alpha} \lambda u^{m+\alpha} = 0 \quad (5.8)$$

Connaissant λ , la solution de ce problème (δ, u) est simple à calculer, une résolution directe est possible car le problème est de petite taille. Soit r une valeur propre solution du problème préconditionné par \tilde{K}_0 suivant :

$$\sum_{\alpha=A}^{-1} \beta_{-\alpha} \lambda u^{m+\alpha} + (1-r)u^m + \sum_1^{A+1} \beta_{-\alpha} \lambda u^{m+\alpha} = 0 \quad (5.9)$$

alors :

$$\delta = \frac{r(\lambda)}{1 + \gamma\lambda} \quad (5.10)$$

or, en pratique, δ_{max} est une fonction croissante par rapport à λ et δ_{min} une fonction décroissante. C'est donc λ_{max} qui intervient dans le calcul de δ_{min} ou δ_{max} . Le conditionnement de l'opérateur préconditionné à inverser est donc indépendant de γ . Ici encore, c'est l'amplitude maximum du défaut qui donne des informations sur le calcul.

Remarque : dans le cas d'un défaut axisymétrique, cette démarche ne s'applique pas car $\lambda = 0$ donc γ n'intervient pas. En fait dans ce cas, le préconditionneur moyen correspond à l'opérateur à inverser, le calcul est alors direct.

Le conditionnement κ de l'opérateur préconditionné est donc indépendant du choix de γ . Ce résultat est bien vérifié en pratique. Le choix le plus simple est alors de prendre le comportement du tube sain (comportement initial non endommagé) comme préconditionneur.

5.3 Évaluation du conditionnement et validation à posteriori de l'ordre de troncature

5.3.1 Conditionnement de la méthode

Le conditionnement peut être calculé facilement en fonction de λ , en suivant la même démarche que celle permettant de calculer la solution tronquée. D'autre part, sur l'exemple simple illustrant le chapitre précédent (paragraphe 4.5.1) pour lequel le pré-endommagement varie en :

$$d = 0.5 + 0.45\cos(\theta) \quad (5.11)$$

il est possible de calculer directement les valeurs propres de l'opérateur préconditionné.

Le tableau 5.1 compare les conditionnements de l'opérateur tronqué préconditionné à inverser. Ils ont été obtenus soit directement par calcul, soit de manière théorique pour une troncature à l'ordre 1, 2 ou 24. Les conditionnements sont bien en accord entre la théorie et le calcul.

N	κ_{calcul}	$\kappa_{theorique}$
1	4.5001	4.5005
2	8.0659	8.0671
24	18.4494	18.6510

Tableau 5.1 – Comparaison des conditionnements théoriques et calculés

La figure 5.1 montre l'évolution de l'erreur au cours des itérations du gradient conjugué pour $N = 24$. Cette courbe permet d'évaluer un taux de convergence ρ maximum, à comparer avec le taux maximum théorique (tableau 5.2). Tout le spectre n'étant pas activé lors du gradient conjugué, celui-ci converge toujours plus vite en pratique que dans l'étude théorique.

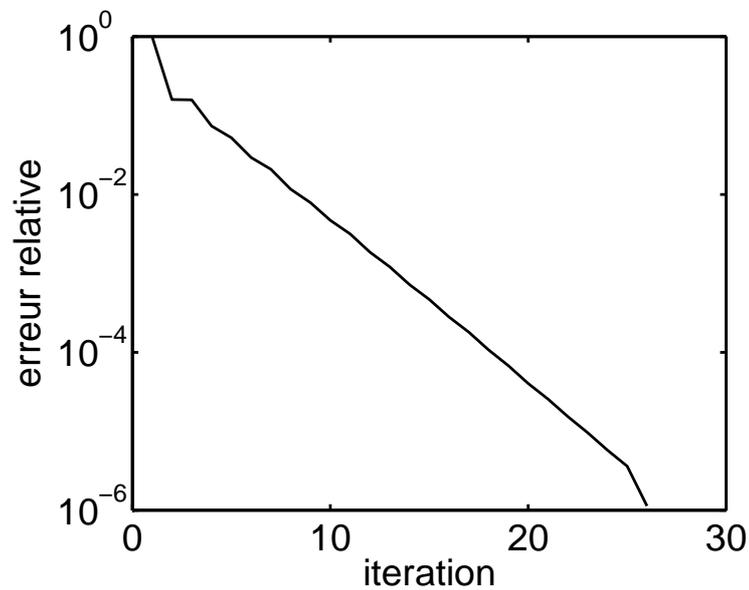


Figure 5.1 – Évolution de l'erreur au cours des itérations

N	ρ_{calcul}	$\rho_{theorique}$
1	0.26	0.36
2	0.39	0.48
24	0.61	0.62

Tableau 5.2 – Comparaison entre taux de convergence réel et théorique

5.3.2 Validation à posteriori de l'ordre de troncature

Les valeurs propres de l'opérateur préconditionné étant liées au paramètre λ , il est possible d'estimer celui-ci. Après estimation, une vérification de l'ordre de troncature peut être effectuée. Dans le cas simple présenté ici (où l'endomagement varie sur un mode : paragraphe 4.5.1) κ est donné par :

$$\kappa = \frac{1 + \lambda_{max}}{1 - \lambda_{max}} \quad (5.12)$$

Le tableau 5.3 donne deux exemples de validation (ou non) à posteriori de l'ordre de troncature. Dans le cas présenté, un développement à l'ordre 1 n'est pas suffisant pour obtenir une erreur énergétique relative sur la description circonférentielle inférieure à 10^{-4} alors que le calcul effectué sur 24 modes donne un résultat correct. Le passage d'une description erronée à une description correcte impose de prendre au moins trois modes étendus.

troncature (N)	1	24
taux de convergence estimé ρ	0.36	0.61
conditionnement estimé κ	4.5	18.44
λ estimé	0.45	0.44
ordre de troncature nécessaire	3	3
calcul validé	NON	OUI

Tableau 5.3 – Validation à posteriori de l'ordre de troncature

Remarque : Il est aussi possible de faire ce raisonnement à partir des valeurs de Ritz (Paige *et al.*, 1995; Saad, 2000) facilement calculables dans le gradient conjugué. En effet, ces valeurs convergent vers les valeurs propres du système préconditionné et permettent ainsi d'estimer λ .

5.4 Mise en oeuvre du gradient conjugué et échantillonnage

5.4.1 Influence du repliement de spectre sur la convergence

Dans ce chapitre, la résolution du système couplé a été présentée avec une représentation complexe des développements en séries de Fourier et en insistant sur le point de vue matriciel. En pratique, le développement est représenté

sous forme réelle comme au chapitre 3 (cosinus et sinus) et les matrices élémentaires ne sont en général pas assemblées ni même calculées (sauf pour illustrer le paragraphe précédent avec des défauts uniquement sur les interfaces).

On cherche à résoudre :

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}^0 \quad (5.13)$$

Pour cela on utilise les résolutions du problème de préconditionneur :

$$m(u, v) = l_i(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}^0 \quad (5.14)$$

$l_i(v)$ représente un second membre variant au cours des itérations. Le choix du préconditionneur permet un découplage sur les modes étendus, le chargement $l(v)$ doit donc au préalable être décomposé sur les modes.

L'algorithme 3, reprend les différentes étapes du gradient conjugué préconditionné.

Algorithme 3 Mise en oeuvre du gradient conjugué

```

0/  $x_0$  une donnée initiale
1/ Obtention de la première direction de recherche
  a/ Décomposition du résidu (FFT)
     $l_0(v) = l(v) - a(x_0, v)$ 
  b/ Résolution du problème de préconditionneur (Fourier + IFFT)
    Trouver  $z_0$  vérifiant  $m(z_0, v) = l_0(v) \forall v \in \mathcal{U}^0$ 
for  $i = 1, 2 \dots$  do
  2/ Orthogonalisation des directions de recherche au sens de A
     $p_i = z_{i-1}$ 
    for  $k = 1 \dots i - 1$  do
       $h_{k,i} = (p_i, p_k)_A$ 
       $p_i = p_i - h_{k,i} p_k$ 
    end for
  3/ Minimisation de l'énergie potentielle
     $\alpha_i = (l(d_i) - a(x_i, d_i)) / a(p_i, p_i)$ 
  4/ Actualisation de la solution
     $x_i = x_{i-1} + \alpha_i p_i$ 
  5/ Actualisation du résidu et décomposition (FFT)
     $l_i(v) = l(v) - a(x_i, v)$ 
  7/ Tester la convergence et continuer si nécessaire
  6/ Chercher une nouvelle direction de recherche (Fourier + IFFT)
    Trouver  $z_{i-1}$  vérifiant  $m(z_{i-1}, v) = l_i(v) \forall v \in \mathcal{U}^0$ 
end for

```

Le développement en série de Fourier n'intervient que lors des résolutions du préconditionneur (étapes 1b et 6). Durant les autres étapes, les données sont représentées sous forme échantillonnée. Le passage entre ces deux représentations doit donc être fait correctement.

Deux opérations sont spécifiques à la formulation Fourier, le calcul mode par mode des forces nodales résultant d'un état de contrainte, et le calcul du produit scalaire. Soit un état de contrainte (σ, F) et de déformation $(\epsilon, [U])$ pour les plis et les interfaces. Notons P_i le travail virtuel des efforts intérieurs, donné par :

$$\begin{aligned}
 P_i &= - \int_{\Omega_{plis}} \sigma^T \epsilon^* \Omega - \int_{\Gamma_{int}} F^T [U]^* \Omega \quad (5.15) \\
 &= - \int_{\Omega_{plis}} \left(\sigma_0 + \sum_{n=1}^N R_n \sigma_{+n} + R_{-n} \sigma_{-n} \right)^T \left(\epsilon_0^* + \sum_{n=1}^N R_n \epsilon_{+n}^* + R_{-n} \epsilon_{-n}^* \right) d\Omega \\
 &\quad - \int_{\Gamma_{int}} \left(F_0 + \sum_{n=1}^N P_n F_{+n} + P_{-n} F_{-n} \right)^T \left([U]_0^* + \sum_{n=1}^N P_n [U]_{+n}^* + P_{-n} [U]_{-n}^* \right) d\Gamma
 \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à θ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 P_i &= - \int_{bande \cap \Omega_{plis}} \left(2\pi \sigma_0^T \epsilon_0^* + \pi \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} \sigma_{+n} \\ \sigma_{-n} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \epsilon_{+n}^* \\ \epsilon_{-n}^* \end{pmatrix} \right) d\Gamma \\
 &\quad - \int_{bande \cap \Gamma_{int}} \left(2\pi F_0^T [U]_0^* + \pi \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} F_{+n} \\ F_{-n} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} [U]_{+n}^* \\ [U]_{-n}^* \end{pmatrix} \right) ds \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

Cette dernière expression permet de calculer les forces nodales résultant d'un état de contrainte donné, pour cela il suffit d'effectuer une discrétisation éléments finis comme au chapitre 3. De même cette expression permet de calculer le produit scalaire entre deux champs au sens de A. Pour cela, la contrainte doit être calculée avec le comportement A.

Pour le moment, le calcul de cette contrainte était présenté de façon continue par rapport à l'angle polaire :

$$\sigma(\theta) = K(\theta)\epsilon(\theta) \quad (5.17)$$

En pratique, les différentes quantités (déplacement, déformation, contrainte, comportement) ne sont pas décrites de manière continue mais échantillonnée. On a donc :

$$\sigma(\theta_i) = K(\theta_i)\epsilon(\theta_i) \quad (5.18)$$

avec

$$\theta_i = i \frac{2\pi}{n_{ech}} \quad \forall i \in [0, n_{ech} - 1] \quad (5.19)$$

n_{ech} est le nombre de points d'échantillonnage par circonférence.

Il ne s'agit alors plus d'effectuer une décomposition en série de Fourier classique d'un signal continu mais de calculer la transformée de Fourier discrète (grâce à une FFT) d'un signal échantillonné. La fréquence d'échantillonnage est $f_e = \frac{n_{ech}}{2\pi}$. Le spectre résultant consiste alors en la recopie du spectre du signal continu avec une période $\frac{n_{ech}}{2\pi}$. Afin d'éviter les problèmes de repliement de spectre, le théorème de Shannon nous impose de vérifier :

$$2f_{max} \leq f_e \quad (5.20)$$

où f_{max} est la plus haute fréquence contenue dans le signal continu. Ici on cherche à représenter correctement le signal jusqu'à une fréquence :

$$f_{max} = \frac{N}{2\pi} \quad (5.21)$$

Au delà, la troncature intervient. La vision échantillonnée est donc équivalente à la vision continue si :

$$n_{ech} \geq 2N \quad (5.22)$$

Dans le cas contraire, le résidu est mal estimé, les propriétés d'orthogonalité nécessaires au bon fonctionnement du gradient conjugué sont perdues. Ce dernier peut ne pas converger à cause du repliement de spectre.

Remarque : Sous forme matricielle, le problème de repliement de spectre porte uniquement sur la construction initiale du second membre. Si celui est faux, l'algorithme converge correctement mais vers une solution fautive.

Afin d'illustrer l'effet du repliement de spectre sur la convergence du gradient conjugué, prenons un exemple simple. Soit un tube [+22.5] constitué d'un pli G969/RTM6 en flexion. Un pré-endommagement est imposé sur le coefficient de cisaillement G_{12} (figure 5.2).

$$d_{12} = 0.5 + 0.25 \cos(k\theta) \text{ avec } k \in [1, 10] \quad (5.23)$$

On fait varier le nombre de points d'échantillonnage $n_{ech} = 2^a$ ainsi que le nombre de modes $N = 2^b \leq n_{ech}$. Le tableau 5.4 donne le nombre d'itérations à convergence du gradient conjugué. Sur la diagonale, dans certains cas, le gradient conjugué ne converge pas.

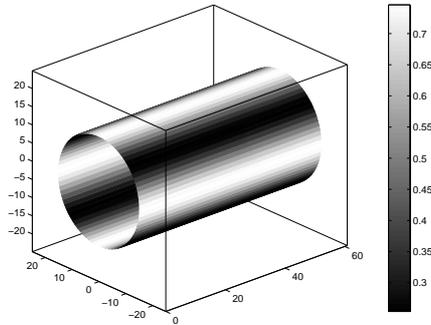


Figure 5.2 – Évolution de d_{12} pour $k = 2$

$N = 2^b \leq n_{ech} = 2^a$	a=1	a=2	a=3	a=4	a=5	a=6
b=1	NC	5	5	4	4	4
b=2		NC	8	4	4	4
b=3			NC	4	4	4
b=4				NC	8	8
b=5					10	8
b=6						10

Tableau 5.4 – Nombre d'itérations à convergence en fonction de l'échantillonnage

Il faut deux fois plus de points d'échantillonnage que de modes de calcul afin d'implémenter correctement l'algorithme du gradient conjugué dans le cadre Fourier. Cependant, prendre plus de points d'échantillonnage n'est pas nécessaire. En effet, si la déformation est donnée sur N modes, il convient d'avoir des coefficients corrects du développement en série de la contrainte sur N modes (d'où au moins $2N$ points d'échantillonnage), au delà les coefficients ne sont plus pris en compte par la troncature du champ de déformation.

5.4.2 Influence de la représentation du défaut sur la convergence

Pour le moment, le développement en série de Fourier du comportement était supposé maintenir les propriétés de positivité de la matrice de Hooke. Cependant, le défaut étant décrit de manière discrète, il est difficile de vérifier que l'endommagement introduit ne dépasse pas 1. Une attention particulière doit donc être portée au développement en série de Fourier du comportement. En effet, l'endommagement est donné sous forme échantillonnée comme sur la figure 5.3 par exemple, où 64 points d'échantillonnage sont utilisés.

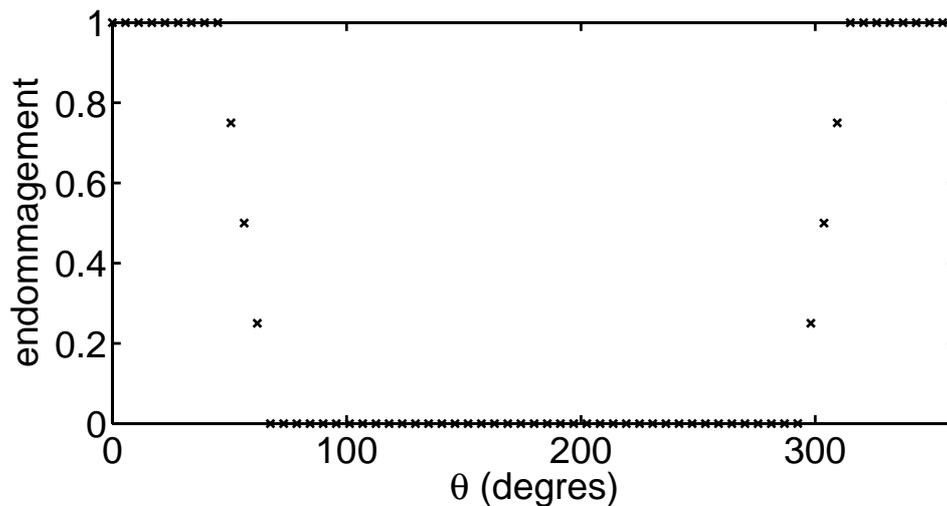


Figure 5.3 – Exemple d'endommagement aux points d'échantillonnage

À partir de la FFT de cette collection de points, il est possible de reconstruire la fonction en tout point. Sur la figure 5.4 est représentée cette reconstruction pour 32 modes.

De par la présence d'un palier à 1 (et à 0), l'endommagement reconstruit présente des dépassements au niveau des zones de transition. L'opérateur endommagé n'est alors plus positif ce qui, comme on le montrera plus tard, pourra

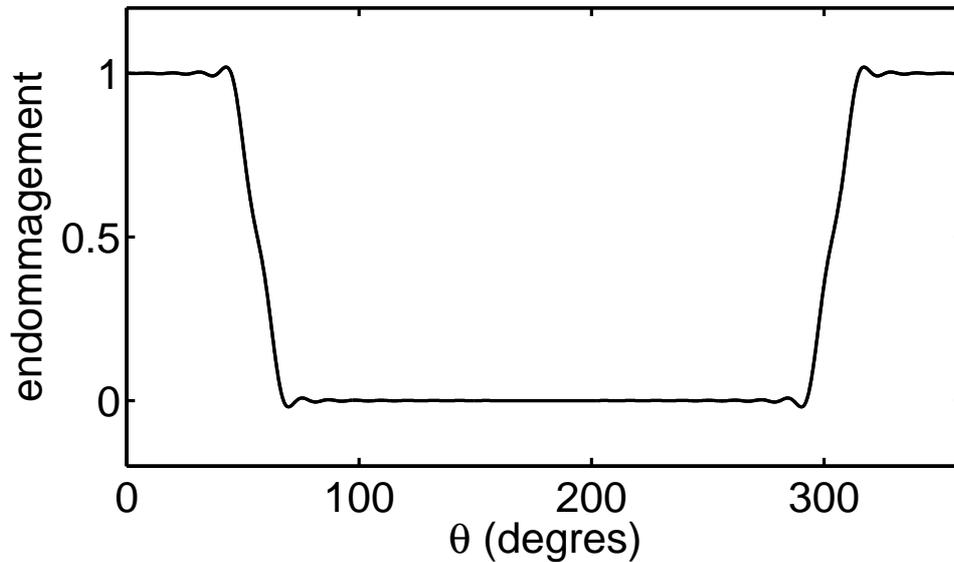


Figure 5.4 – Reconstruction de l'endommagement sur 32 modes

créer des problèmes quant à l'utilisation d'un algorithme de gradient conjugué. Décrire un palier sans engendrer d'endommagement supérieur à un, impose à ce palier d'être légèrement sous l'unité. La figure 5.5 montre l'évolution de l'endommagement maximum en fonction du nombre de modes utilisés dans la série de Fourier. Suivant le nombre de modes utilisé, il faudra donc appliquer un coefficient correcteur différent pour ramener l'endommagement maximum à un.

Prenons l'exemple d'un tube [+20/ - 20/0/ - 20/ + 20] constitué de plis G939/M18 en traction. Un défaut de longueur 22 mm est initié à l'interface intérieure [+20/ - 20]. La forme de celui-ci est présentée sous forme échantillonnée sur la figure 5.3. Aucune précaution n'étant prise, l'endommagement reconstruit à partir de la FFT dépasse un. La figure 5.6 montre l'évolution de l'erreur au cours des itérations du gradient conjugué. On remarque bien que l'algorithme ne converge pas. On verra, dans le paragraphe suivant, qu'en prenant un endommagement légèrement inférieur à un alors la convergence du gradient conjugué ne pose pas de problème.

La description de l'endommagement sous forme échantillonnée n'étant pas dissociée de sa description continue sous forme de série, il est important d'y porter une attention particulière sans laquelle l'algorithme de gradient conjugué peut ne pas converger. En pratique, il est envisageable de reconstruire l'en-

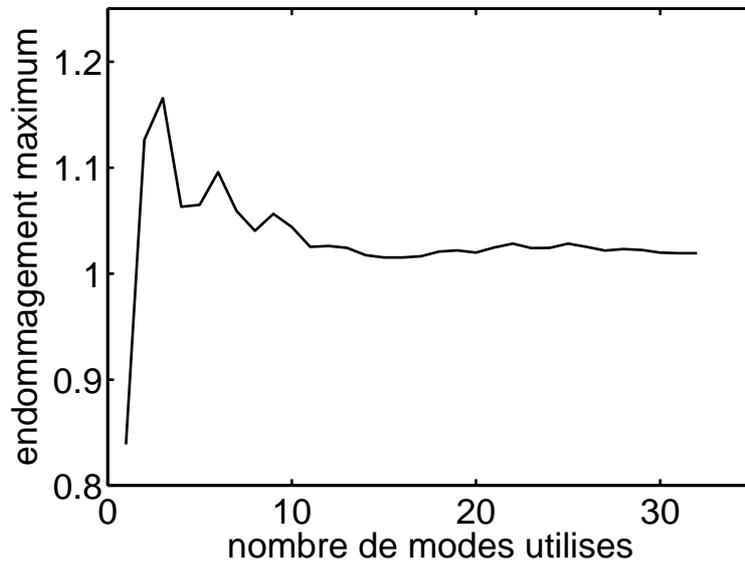


Figure 5.5 – Évolution de l'endommagement maximum en fonction de l'ordre de troncature de la série de Fourier

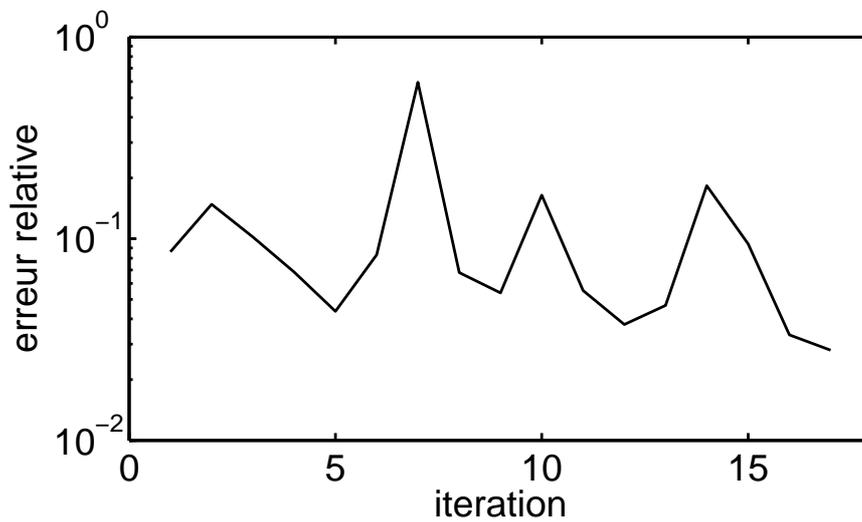


Figure 5.6 – Non convergence du gradient conjugué

dommagement en un plus grand nombre de points à partir de la FFT portant sur les points d'échantillonnage, il est alors possible de vérifier que l'opérateur à inverser reste défini positif et que le gradient conjugué est applicable.

5.5 Application

Soit un tube $[+20/-20/0/-20/+20]$ constitué de plis tissés G939/M18 en traction. Un défaut entrant dans le cadre des résultats du chapitre précédent est initié à l'interface intérieure $[+20/-20]$. Celui-ci a une longueur de 22 mm, il dépasse donc l'extrémité du manchon en titane. La longueur de recouvrement de ce dernier est de 20 mm. L'évolution de ce défaut suivant une circonférence est donnée figure 5.7, l'endommagement correspondant ne dépasse pas 0.99. Le maillage retenu pour effectuer le calcul est assez fin, deux éléments sont utilisés dans l'épaisseur de chaque pli. Le maillage est présenté figure 5.8. 64 modes de calcul sont utilisés et 128 points d'échantillonnage par circonférence. Ce maillage comporte au total 1.3 millions de degrés de liberté réels. Une modélisation 3D équivalente ferait intervenir environs 5 millions de degrés de liberté.

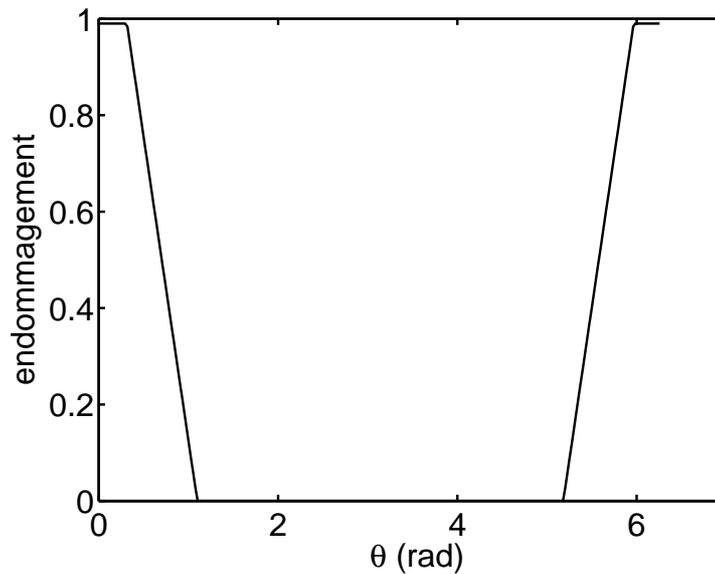


Figure 5.7 – Description circulaire d'un défaut

L'erreur estimée (équation 4.54) est de l'ordre de 10^{-7} si on considère que les plis participent de moitié dans la rigidité du problème condensé sur l'interface. Malgré la taille du problème assemblé, le problème aux valeurs propres

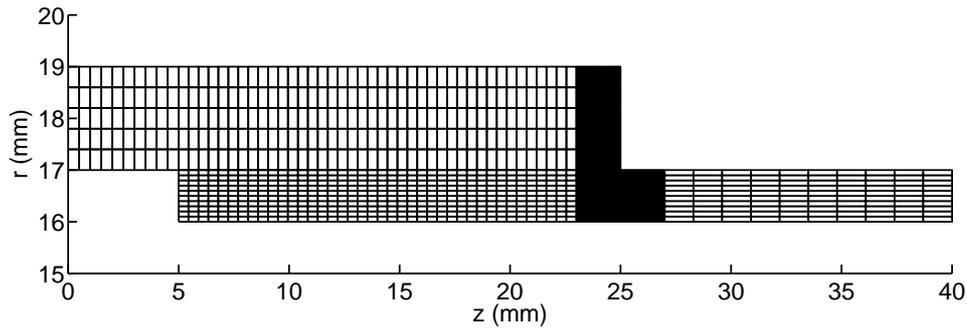


Figure 5.8 – Maillage fin d'une section

condensé sur les interfaces reste petit et peut être résolu sans difficulté. Ici encore, on peut remarquer numériquement que les plis adjacents participent de moitié dans la rigidité condensée sur le défaut. L'erreur énergétique commise sur la description circumférentielle est donc de l'ordre de 10^{-7} .

L'algorithme du gradient conjugué converge en 30 itérations. La courbe de convergence de l'algorithme est donnée figure 5.9. On peut remarquer un pic à la douzième itération, celui-ci est dû à une valeur de Ritz négative, cependant, elle ne vient pas altérer beaucoup la vitesse de convergence.

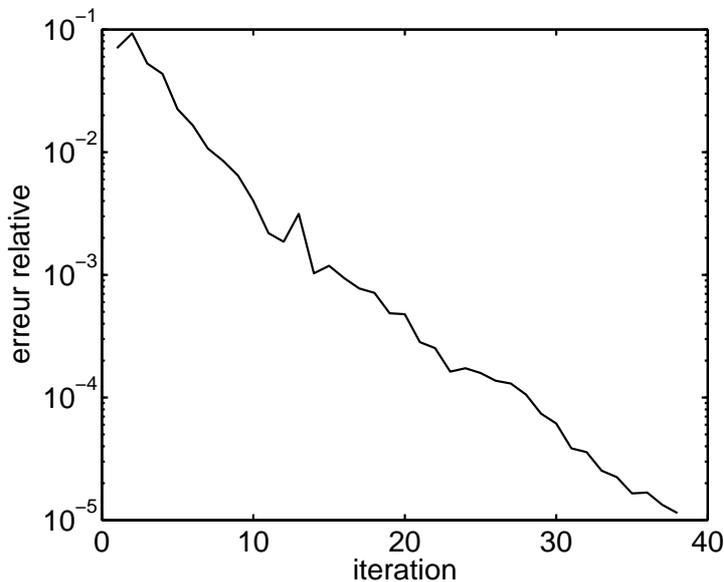


Figure 5.9 – Convergence du gradient conjugué

Bien que proche de l'extrémité du manchon, la zone de raccord reste cor-

recte. La figure 5.10 montre sous forme développée l'endommagement inséré dans l'interface intérieure. Les figures 5.11, 5.12 et 5.13 montrent les niveaux des contraintes sur cette interface. Aucun effet indésirable n'est observé au niveau du raccord ($z = 40$ mm). L'effet de bord libre ($z = 5$ mm) est visible mais bien inférieur à la concentration de contrainte créée à l'extrémité du manchon. Au niveau du défaut, la contrainte est presque nulle. Celui-ci génère un effet de bord à son extrémité, cependant lui aussi, reste inférieur de moitié à celui généré par le manchon.

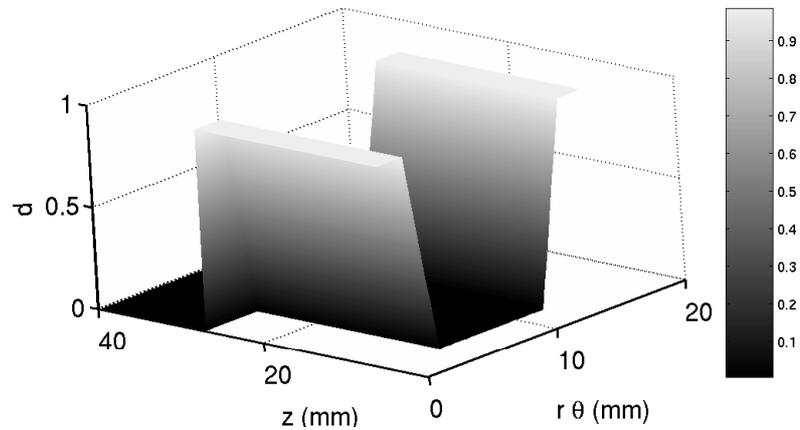


Figure 5.10 – Pré-endommagement dans l'interface intérieure [+20/ - 20]

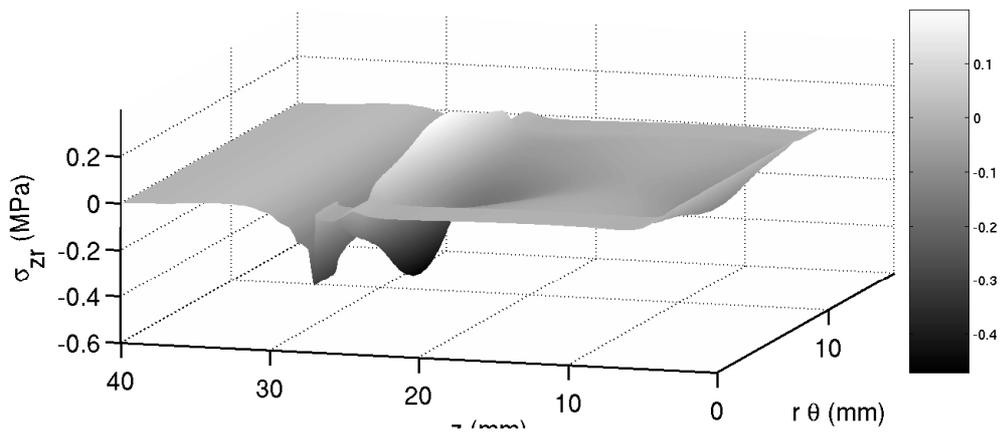
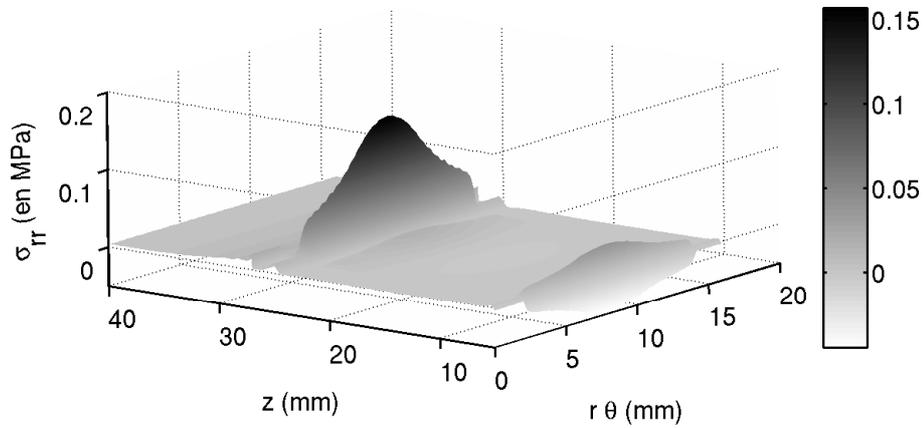
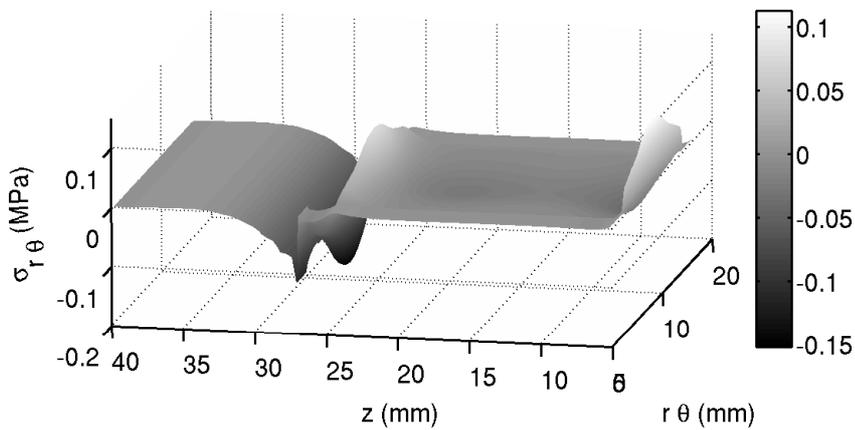


Figure 5.11 – Évolution de σ_{zr} (en MPa) dans l'interface intérieure [+20/ - 20]

Figure 5.12 – Évolution de σ_{rr} (en MPa) dans l'interface intérieure [+20/−20]Figure 5.13 – Évolution de $\sigma_{r\theta}$ (en MPa) dans l'interface intérieure [+20/−20]

5.6 Conclusion

Ce chapitre présente la mise en oeuvre d'une méthode de gradient conjugué avec préconditionneur adaptée à la résolution du problème couplé présenté au chapitre précédent. Le choix du préconditionneur permet de découpler les différentes harmoniques pour la résolution, celui-ci améliore grandement le conditionnement de la méthode. De nombreuses transformées de Fourier intervenant, le choix du nombre de points d'échantillonnage a été résolu. Différents exemples ont été traités à travers le code prototype développé sous Matlab.

Chapitre 6

Analyse des effets de bord : vers le non linéaire

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place les éléments de base permettant d'effectuer une simulation non linéaire du comportement d'un tube en présence de défauts. Pour cela deux aspects ont été abordés. Le premier concerne l'intégration du comportement des méso-constituants du stratifié. Le deuxième aspect concerne la résolution du problème non linéaire global par un algorithme de type Newton. L'outil de calcul actuel ne permettant pas encore de traiter d'exemples réalistes, les choix effectués ici sont illustrés sur des exemples très simples.

Sommaire

6.1	Modélisation du matériau	141
6.1.1	Modélisation des plis	141
6.1.2	Modélisation des interfaces	153
6.2	Résolution du problème non linéaire global	154
6.2.1	Problème de référence	155
6.2.2	Base des méthodes incrémentales	155
6.2.3	Méthodes de résolution classiques	155
6.2.4	Pilotage des calculs	157
6.2.5	Accélération de convergence	158
6.2.6	Choix des directions de recherche	159

6.1 Modélisation du matériau

6.1.1 Modélisation des plis

6.1.1.1 Description du modèle

L'objectif de ce paragraphe est de présenter une modélisation du pli tissé G969/RTM6. Pour cela on se base sur la modélisation proposée par Hochard (Hochard *et al.*, 2001) portant sur les plis tissés équilibrés et faisant suite aux travaux de Ladevèze sur les plis unidirectionnels (Ladevèze, 1986; Ladevèze et Le Dantec, 1992).

Le modèle développé par Hochard est initialement écrit en contraintes planes. Ayant la volonté de traiter des états de contrainte tridimensionnels dus à des effets de bord, la modélisation a été étendue de manière très simple au 3D, aucune variable d'endommagement n'étant ajoutée. Les variables d'endommagement notées d_1 et d_2 permettent de décrire la rupture fragile des fibres dans les sens chaîne (noté par un indice 1) et trame (noté par un indice 2). Afin de différencier la fermeture de l'ouverture des fissures, on fait intervenir la partie positive des contraintes notée $\langle . \rangle_+$. Celle-ci permet de dissocier l'énergie de traction de celle de compression et ainsi de mettre en place le coté unilatéral du contact dans les micro-défauts. En cisaillement, des microfissures apparaissent et font chuter la rigidité. Cette chute est modélisée par un endommagement d_{12} portant sur le module de cisaillement G_{12} . Les paramètres initiaux sont notés avec un exposant 0, E_1^0 représente le module d'Young initial dans la direction chaîne alors que E_1 est le module endommagé par exemple. L'énergie de déformation locale s'écrit alors de la manière suivante :

$$e_d = \frac{1}{2} \left[\frac{\langle \sigma_{11} \rangle_+^2}{E_1^0(1-d_1)} + \frac{\langle \sigma_{11} \rangle_-^2}{E_1^0} + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0(1-d_2)} + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_-^2}{E_2^0} + \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}^0(1-d_{12})} - 2\frac{\nu_{12}^0}{E_1^0}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{\sigma_{33}^2}{E_3^0} + \frac{\sigma_{13}^2}{G_{13}^0} - 2\frac{\nu_{13}^0}{E_1^0}\sigma_{11}\sigma_{33} + \frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}^0} - 2\frac{\nu_{23}^0}{E_2^0}\sigma_{22}\sigma_{33} \right] \quad (6.1)$$

Les deux premières lignes représentent ici l'énergie de déformation en contraintes planes, forme postulée dans le modèle initial par Hochard.

Les forces thermodynamiques associées aux différents endommagements (d_1, d_2, d_{12}) sont notées ($Y_{d_1}, Y_{d_2}, Y_{d_{12}}$). Elles sont issues des relations suivantes :

$$Y_{d_1} = \left. \frac{\partial e_d}{\partial d_1} \right|_{\sigma} \quad (6.2)$$

$$Y_{d_2} = \left. \frac{\partial e_d}{\partial d_2} \right|_{\sigma} \quad (6.3)$$

$$Y_{d_{12}} = \left. \frac{\partial e_d}{\partial d_{12}} \right|_{\sigma} \quad (6.4)$$

En s'inspirant des plis unidirectionnels, on suppose que les fissures se développent de manière instable dans l'épaisseur du pli, on fera donc l'hypothèse que les variables d'endommagement sont uniformes dans l'épaisseur d'un pli comme dans (Ladevèze et Le Dantec, 1992). De plus, cette hypothèse permet de régulariser le modèle dans la direction hors plan ce qui évite les problèmes de dépendance au maillage et de localisation dans cette direction. Les variables d'endommagement sont alors pilotées par des forces thermodynamiques mésoscopiques notées avec un exposant m . Celles-ci s'écrivent :

$$Y_{d_1}^m = \langle\langle Y_{d_1} \rangle\rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle\langle\langle \sigma_{11} \rangle_+^2 \rangle\rangle}{E_1^0 (1 - d_1)^2} \quad (6.5)$$

$$Y_{d_2}^m = \langle\langle Y_{d_2} \rangle\rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle\langle\langle \sigma_{22} \rangle_+^2 \rangle\rangle}{E_2^0 (1 - d_2)^2} \quad (6.6)$$

$$Y_{d_{12}}^m = \langle\langle Y_{d_{12}} \rangle\rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle\langle \sigma_{12}^2 \rangle\rangle}{2 G_{12}^0 (1 - d_{12})^2} \quad (6.7)$$

où $\langle\langle . \rangle\rangle$ représente la moyenne dans l'épaisseur d'un pli.

Les lois d'évolution sont données dans (Bordreuil *et al.*, 2003; Bordreuil et Hochard, 2004). Pour la rupture fragile des fibres, les forces thermodynamiques mésoscopiques sont comparées à des seuils :

$$d_1 = 0 \text{ si } Y_{d_1}^m < Y_{1f} \text{ sinon } d_1 = 1 \quad (6.8)$$

$$d_2 = 0 \text{ si } Y_{d_2}^m < Y_{2f} \text{ sinon } d_2 = 1 \quad (6.9)$$

Dans (Lahellec *et al.*, 2005), il est montré que ce critère local de rupture ne suffit pas. Il est nécessaire d'introduire une longueur caractéristique permettant de prédire la rupture des fibres. On peut rapprocher le rôle de cette longueur de celui de l'épaisseur du pli pour le cisaillement. Celle-ci pourrait permettre plus tard de régulariser le modèle d'endommagement et éviter la dépendance au maillage dans le plan des plis. Pour les plis unidirectionnels,

c'est une autre solution limitant le taux d'endommagement qui est choisie.

En ce qui concerne le développement de d_{12} , le couplage entre traction et cisaillement est pris en compte par l'intermédiaire de la force thermodynamique équivalente Y et de sa valeur maximum au cours du temps \underline{Y} :

$$Y(t) = \alpha_1 Y_{d_1}^m + \alpha_2 Y_{d_2}^m + Y_{d_{12}}^m \quad (6.10)$$

$$\underline{Y}(t) = \sup(Y(\tau), \tau \leq t) \quad (6.11)$$

$$(6.12)$$

L'évolution de l'endommagement dépend alors linéairement de la racine carrée de \underline{Y} :

$$d_{12} = \min\left(\left\langle \frac{\sqrt{\underline{Y}(t)} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \right\rangle_+, 1\right) \quad (6.13)$$

Pour un chargement développant un endommagement d_{12} , une déformation anélastique sur le cisaillement apparaît. Cette déformation anélastique est due à un frottement possible entre les lèvres des fissures transverses. Afin de mettre en place un modèle de plasticité associé avec écrouissage cinématique linéaire (Bordreuil *et al.*, 2003), les quantités taux de déformation plastique effective et contrainte effective sont introduites :

$$\tilde{\sigma}_{12} = \frac{\sigma_{12}}{(1 - d_{12})} \quad (6.14)$$

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_{12}^p = (1 - d_{12}) \dot{\epsilon}_{12}^p \quad (6.15)$$

$$(6.16)$$

Celles-ci vérifient :

$$Tr[\tilde{\sigma}_{12} \dot{\tilde{\epsilon}}_{12}^p] = Tr[\sigma_{12} \dot{\epsilon}_{12}^p] \quad (6.17)$$

L'introduction de ces deux quantités joue un rôle important dans l'introduction du modèle de plasticité.

Les directions d'évolution de la plasticité sont données par les relations suivantes :

$$-\dot{p} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial X} \quad (6.18)$$

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_{12}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{12}} \quad (6.19)$$

avec \dot{p} le taux de déformation plastique cumulée et $\dot{\gamma}$ le multiplicateur plastique. La fonction seuil est donnée ci-après :

$$f(\tilde{\sigma}_{12}, X) = |\tilde{\sigma}_{12} - X| - R_0 \quad (6.20)$$

avec X la variable d'écroutissement évoluant de façon linéaire :

$$X = \alpha \tilde{\varepsilon}_{12}^p \quad (6.21)$$

Remarque : Comparée à la modélisation du comportement de plis unidirectionnels, le modèle présenté est très simple grâce à la présence des fibres dans deux directions, celles-ci ayant un comportement élastique fragile.

6.1.1.2 Intégration numérique

6.1.1.2.1 Discrétisation des équations On cherche à intégrer numériquement les équations précédentes, pour cela un schéma d'Euler implicite est utilisé comme dans (Bordreuil et Hochard, 2004). Le temps est découpé en intervalles $[t_n, t_{n+1}]$. La dérivée d'une quantité q au pas $n + 1$ est donnée par :

$$\dot{q}|_{n+1} = \frac{q|_{n+1} - q|_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{\Delta q|_{n+1}}{\Delta t_n} \quad (6.22)$$

Les forces thermodynamiques s'écrivent :

$$Y_{d_1}^m|_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{\langle\langle\langle \sigma_{11}|_{n+1} \rangle_+^2 \rangle\rangle}{E_1^0 (1 - d_1|_{n+1})^2} \quad (6.23)$$

$$Y_{d_2}^m|_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{\langle\langle\langle \sigma_{22}|_{n+1} \rangle_+^2 \rangle\rangle}{E_2^0 (1 - d_2|_{n+1})^2} \quad (6.24)$$

$$Y_{d_{12}}^m|_{n+1} = 2G_{12}^0 \langle\langle (\varepsilon_{12}^e|_{n+1})^2 \rangle\rangle \quad (6.25)$$

Les lois d'évolution s'écrivent pour les ruptures de fibres :

$$d_1|_{n+1} = 0 \text{ si } Y_{d_1}^m|_{n+1} < Y_{1f} \text{ sinon } d_1|_{n+1} = 1 \quad (6.26)$$

$$d_2|_{n+1} = 0 \text{ si } Y_{d_2}^m|_{n+1} < Y_{2f} \text{ sinon } d_2|_{n+1} = 1 \quad (6.27)$$

Pour l'endommagement sur le cisaillement on a :

$$Y|_{n+1} = \alpha_1 Y_{d_1}^m|_{n+1} + \alpha_2 Y_{d_2}^m|_{n+1} + Y_{d_{12}}^m|_{n+1} \quad (6.28)$$

$$\underline{Y}|_{n+1} = \max([Y|_{n+1}, \underline{Y}|_n]) \quad (6.29)$$

$$d_{12}|_{n+1} = \min\left(\left\langle \frac{\sqrt{\underline{Y}|_{n+1}} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \right\rangle_+, 1\right] \quad (6.30)$$

Enfin en ce qui concerne la plasticité, les équations deviennent :

$$-\Delta p|_{n+1} = \Delta\gamma|_{n+1} \frac{\partial f}{\partial X}|_{n+1} \quad (6.31)$$

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_{12}^p|_{n+1} = \Delta\gamma|_{n+1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{12}}|_{n+1} \quad (6.32)$$

$$f(\tilde{\sigma}_{12}|_{n+1}, X|_{n+1}) = |(\tilde{\sigma}_{12}|_{n+1} - X|_{n+1})| - R_0 \quad (6.33)$$

$$X|_{n+1} = \alpha\tilde{\varepsilon}_{12}^p|_{n+1} \quad (6.34)$$

On remarque que le calcul des indicateurs d'endommagement des fibres est découplé de celui de $(d_{12}, \varepsilon_{12}^p)$. De plus celui-ci doit être effectué au préalable.

6.1.1.2.2 Résolution de d_1 et d_2 Connaissant $(\varepsilon_{11}|_{n+1}, \varepsilon_{22}|_{n+1}, \varepsilon_{33}|_{n+1})$ et $(d_1|_n, d_2|_n)$, il est simple de calculer $(d_1|_{n+1}, d_2|_{n+1})$ avec l'algorithme 4.

Algorithme 4 Résolution de $(d_1|_{n+1}, d_2|_{n+1})$

if $d_i|_n = 1$ pour $i = 1$ et 2 **then**

$d_i|_{n+1} = 1$

else

$\sigma_{ii}|_{n+1} = K(d_1|_{n+1}, d_2|_{n+1})\varepsilon_{ii}|_{n+1} \forall i \in [11, 22, 33]$

$Y_{d_i}^m|_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{\langle\langle\langle\sigma_{ii}|_{n+1}\rangle\rangle_i^2\rangle\rangle}{E_i^0}$

if $Y_{d_i}^m|_{n+1} < Y_{if}$ **then**

$d_i|_{n+1} = 0$

$Y_{d_i}^m|_{n+1} = Y_{if}$

else

$d_i|_{n+1} = 1$

end if

end if

Remarque : la force thermodynamique associée à d_i intervenant plus tard, celle-ci est mise à Y_{if} si l'endommagement correspondant est à 1 pour ne pas engendrer de problème.

6.1.1.2.3 Résolution de d_{12} et ε_{12}^p Dans le cadre du cisaillement, deux inconnues sont à déterminer : l'endommagement et la déformation plastique. La plasticité est généralement traitée par un algorithme de retour radial (Moreau, 1977; Ortiz et Simo, 1986) alors que l'intégration de l'endommagement passe souvent par l'utilisation d'un point fixe. Deux points de vue sont alors possibles suivant l'arrangement de ces deux algorithmes. Le premier consiste à placer le point fixe dans le retour radial et le second à placer le retour radial dans le point fixe. Le premier point de vue sera nommé pilotage par la déformation plastique, le deuxième pilotage par l'endommagement. Ces deux points de vue sont comparés dans ce paragraphe.

6.1.1.2.3.1 Pilotage par la déformation plastique Le premier point de vue considère la résolution de la déformation plastique en premier lieu, un algorithme de type retour radial est alors utilisé comme dans (Gornet, 1996) pour les plis unidirectionnels avec endommagement uniforme dans l'épaisseur et (Bordreuil *et al.*, 2003) pour les plis tissés. Les modélisations utilisées dans ces travaux mettent en oeuvre un écrouissage isotrope non-linéaire qui rend le travail plus compliqué que pour un écrouissage cinématique linéaire. De plus, comme l'endommagement apparaît au coeur de la boucle de retour radial et que celui-ci est non-local, le problème à résoudre couple les multiplicateurs plastiques.

L'algorithme de retour radial consiste à effectuer une prédiction élastique puis, si nécessaire, à corriger ce résultat par une déformation plastique. Cette méthode repose sur la partition de la déformation totale comme la somme de la déformation élastique et de la déformation plastique. Ce paragraphe présente cette méthode en l'appliquant directement au modèle à intégrer.

La quantité q relative au point d'intégration g est notée $q[g]$. L'exposant $i = 0$ correspond à la prédiction élastique, i étant l'exposant relatif aux itérations du retour radial.

La première étape consiste à effectuer une prédiction élastique, c'est à dire à considérer :

$$\Delta\gamma[g]_{|n+1}^0 = 0 \tag{6.35}$$

d'où :

$$\tilde{\sigma}_{12}[g]|_{n+1}^0 = \tilde{\sigma}_{12}[g]|_n + 2G_{12}^0 \Delta \varepsilon_{12}[g]|_{n+1} \quad (6.36)$$

$$X[g]|_{n+1} = X[g]|_n \quad (6.37)$$

Le critère à vérifier s'écrit alors :

$$f[g]|_{n+1}^0 = f(\tilde{\sigma}_{12}[g]|_{n+1}^0, X[g]|_n) \leq 0 \quad (6.38)$$

Comme il a déjà été précisé, ce critère est donné simultanément pour tous les points d'intégration appartenant à la même zone d'intégration (ici dans l'épaisseur du pli).

Si pour tout point g de la zone d'intégration $f[g]|_{n+1}^0 \leq 0$ alors l'hypothèse d'évolution purement élastique est vérifiée et on peut mettre à jour les différents champs.

$$\tilde{\sigma}_{12}[g]|_{n+1} = \tilde{\sigma}_{12}[g]|_{n+1}^0 \quad (6.39)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{12}^p[g]|_{n+1} = \tilde{\varepsilon}_{12}^p[g]|_n^0 \quad (6.40)$$

$$\varepsilon_{12}^p[g]|_{n+1} = \varepsilon_{12}^p[g]|_n^0 \quad (6.41)$$

Une mise à jour de $d_{12}|_{n+1}$ est alors effectuée à partir de $\varepsilon_{12}|_{n+1} - \varepsilon_{12}^p|_{n+1}$.

Si le critère n'est pas vérifié, c'est à dire si $\exists g, f[g]|_{n+1}^0 > 0$ alors l'hypothèse d'évolution purement élastique n'est pas vérifiée et la mise à jour des multiplicateurs plastiques $\Delta\gamma[g]|_{n+1}$ est nécessaire. Ceux-ci sont couplés par le coté non-local de l'endommagement.

Soit :

$$\delta\gamma[g]|_{n+1}^{i+1} = \Delta\gamma[g]|_{n+1}^{i+1} + \Delta\gamma[g]|_{n+1}^i \quad (6.42)$$

notre inconnue est ici $\delta\gamma|_{n+1}^{i+1}$. Afin de déterminer les multiplicateurs plastiques, on cherche à revenir sur le convexe d'élasticité. Pour cela, le critère de plasticité est développé au premier ordre autour du point courant, ce qui donne :

$$\begin{aligned} 0 &= f(\tilde{\sigma}_{12}[g]|_{n+1}^i, X[g]|_{n+1}^i) + \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{12}} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{12}}{\partial \Delta\gamma} \right) [g]|_{n+1}^i \delta\gamma[g]|_{n+1}^{i+1} \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \Delta\gamma} \right) [g]|_{n+1}^i \delta\gamma[g]|_{n+1}^{i+1} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Or on a :

$$s[g] = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{12}} [g]|_{n+1}^i = \text{signe}(\tilde{\sigma}_{12}[g]|_{n+1}^0 - X[g]|_{n+1}^0) \quad (6.44)$$

Car en tout point g :

$$\tilde{\sigma}_{12}[g]|_{n+1}^i = 2G_{12}^0 (\varepsilon_{12}[g]|_{n+1} - \varepsilon_{12}^p[g]|_n) \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned} & -2G_{12}^0 \frac{1}{1 - d_{12}[g]|_{n+1}^i} \Delta \tilde{\varepsilon}_{12}^p[g]|_{n+1}^i \\ & = \tilde{\sigma}_{12}[g]|_{n+1}^0 - 2G_{12}^0 \frac{1}{1 - d_{12}[g]|_{n+1}^i} \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\Delta \gamma[g]|_{n+1}^i \text{signe}(\tilde{\sigma}_{12}[g]|_{n+1}^i - X[g]|_{n+1}^i) \quad (6.47)$$

et :

$$X[g]|_{n+1}^i - X[g]|_{n+1}^0 = \alpha \Delta \gamma[g]|_{n+1}^i \text{signe}(\tilde{\sigma}_{12}[g]|_{n+1}^i - X[g]|_{n+1}^i) \quad (6.48)$$

de plus :

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{12}}{\partial \Delta \gamma}[g]|_{n+1}^i = 2G_{12}^0 s[g] \frac{1}{1 - d_{12}[g]|_{n+1}^i} \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \Delta \gamma}[g]|_{n+1}^i = \alpha s[g] \quad (6.50)$$

car :

$$\Delta \tilde{\varepsilon}^p[g]|_{n+1}^i = \Delta \gamma[g]|_{n+1}^i s[g] \quad (6.51)$$

$$\varepsilon^p[g]|_{n+1}^i = \varepsilon^p[g]|_{n+1}^0 + \frac{1}{1 - d_{12}[g]|_{n+1}^i} \Delta \tilde{\varepsilon}^p[g]|_{n+1}^i \quad (6.52)$$

D'où la détermination de $\delta \gamma[g]|_{n+1}^{i+1}$ par la relation :

$$\delta \gamma[g]|_{n+1}^{i+1} = \frac{f(\tilde{\sigma}_{12}[g]|_{n+1}^i, X[g]|_{n+1}^i)}{2 \frac{G_{12}^0}{1 - d_{12}[g]|_{n+1}^i} + \alpha} \quad (6.53)$$

Il convient alors de mettre à jour les différentes quantités relatives à la plasticité. Pour cela le calcul de l'endommagement est nécessaire, il est effectué par un algorithme de point fixe couplant les différents points d'intégration à travers le calcul de la déformation élastique moyenne dans l'épaisseur du pli. La procédure itérative est reconduite jusqu'à satisfaction du critère de retour sur le convexe d'élasticité.

L'algorithme 5 donne une vision globale de l'intégration du comportement. Le couplage dû à l'endommagement s'effectue à la ligne 7.

Il est à noter que le cas présent est plus simple que pour un écrouissage isotrope comme dans (Gornet, 1996) où le problème est fortement couplé. Les multiplicateurs plastiques sont alors déterminés à travers la résolution d'un système d'équations.

Algorithme 5 Résolution de $(d_{12}|_{n+1}, \varepsilon^p[g]|_{n+1})$: pilotage en déformation plastique

- 1: (i=0) Prédiction élastique
 - 2: **if** Critère vérifié en tout point d'intégration **then**
 - 3: Point fixe pour calculer $d_{12}|_{n+1}$ {non local}
 - 4: **else** {Correction plastique}
 - 5: **repeat** {i=i+1}
 - 6: Calcul des multiplicateurs plastiques $\delta\gamma[g]|_{n+1}^i$
 - 7: Calcul de $d_{12}|_{n+1}^i$ par un point fixe {non local}
 - 8: Calcul de la déformation plastique $\varepsilon^p[g]|_{n+1}^i$
 - 9: **until** Critère vérifié en tout point d'intégration
 - 10: **end if**
-

6.1.1.2.3.2 Pilotage par l'endommagement Le deuxième point de vue considère la résolution de l'endommagement en premier lieu, un algorithme de type point fixe est alors utilisé. La déformation plastique est déterminée au coeur de cet algorithme c'est à dire à endommagement fixé, ce qui permet d'utiliser un algorithme de retour radial classique. L'endommagement étant non-local, il paraît naturel de le traiter le plus en amont possible, ce qui simplifie la mise en oeuvre au niveau du calcul de la plasticité. Cette méthode est donnée par l'algorithme 6.

Algorithme 6 Résolution de $(d_{12}|_{n+1}, \varepsilon^p|_{n+1})$: pilotage en endommagement

- 1: **repeat**
 - 2: Calcul de $d_{12}|_{n+1}$ {non local}
 - 3: Retour radial pour calculer $\varepsilon_{12}^p|_{n+1}$ {local}
 - 4: **until** stagnation de $d_{12}|_{n+1}$
-

6.1.1.2.3.3 Découplage des algorithmes L'algorithme 7 donne une variante utilisée dans les codes de calcul sur composites du LMT-Cachan comme DSDM ou DAMLAM. Celle-ci considère indépendamment l'endommagement et la plasticité, un test sur la stagnation de la contrainte est alors utilisé pour vérifier la convergence de la méthode.

Il est bien entendu possible de permuter le calcul de l'endommagement et celui de la plasticité. Le comportement de ce nouvel algorithme est alors très proche de l'algorithme 7.

Ces algorithmes sont très simples à implémenter, en particulier le deuxième

Algorithme 7 Résolution de $(d_{12}|_{n+1}, \varepsilon^p|_{n+1})$: pilotage en endommagement (bis)

- 1: **repeat**
 - 2: Point fixe pour calculer $d_{12}|_{n+1}$ {non local}
 - 3: Retour radial pour calculer $\varepsilon_{12}^p|_{n+1}$ {local}
 - 4: **until** stagnation de $\sigma_{12}|_{n+1}$
-

car le traitement séparé de l'endommagement et de la plasticité rend possible l'utilisation d'algorithmes classiques dédiés à chacun des points.

6.1.1.2.3.4 Comparaison des algorithmes L'intégration du comportement en cisaillement peut être menée de différentes manières, bien entendu, celles-ci mènent vers le même résultat. Deux critères de comparaison ont été mis en place.

Le premier concerne la simplicité d'implantation. Pour cela, les algorithmes pilotés en endommagement sont de loin les plus faciles à mettre en place, et ce quel que soit le type d'érouissage considéré. Ce n'est pas le cas pour le pilotage en déformation plastique pour lequel l'implantation se complique beaucoup entre érouissage cinématique linéaire et érouissage isotrope non-linéaire.

Le deuxième critère est le temps de calcul. Ce dernier est donné pour l'intégration du comportement dans le tableau 6.1. Deux cas sont envisagés, l'intégration jusqu'à contrainte maximum et jusqu'à endommagement maximum. Pour cela une histoire de déformation totale est donnée, on considère ici un seul point d'intégration.

Algorithme	Contrainte max	Endommagement max
5 : pilotage boucle plastique	0.89 s	13.57 s
6 : pilotage endommagement	0.72 s	3.18 s
7 : découplé	0.83 s	3.31 s

Tableau 6.1 – Temps d'intégration numérique du comportement en cisaillement (en secondes)

On peut remarquer que pour les algorithmes pilotés en endommagement, les temps sont similaires (5 à 10% d'écart). La convergence est atteinte en quelques itérations seulement. Par contre, pour une intégration complète du comportement, l'algorithme piloté en déformation plastique est 4 fois plus lent. Cet algorithme converge très difficilement lorsque l'endommagement s'approche de 1 comme il est montré figure 6.1 où le temps d'intégration du comportement

augmente très fortement lorsque l'endommagement s'approche de 1.

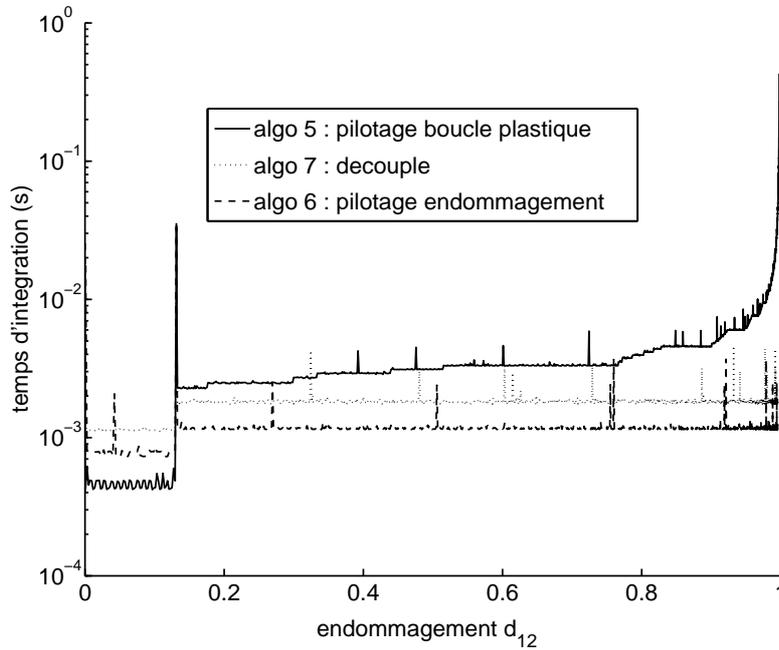


Figure 6.1 – Évolution du temps d'intégration en fonction de l'endommagement

On va ici choisir l'algorithme 7 piloté en endommagement pour sa simplicité de mise en oeuvre, le traitement de l'endommagement et de la plasticité étant complètement découplés. La figure 6.2 donne l'évolution complète de la contrainte de cisaillement σ_{12} , de l'endommagement d_{12} et de la déformation plastique ϵ_{12}^p en fonction de la déformation ϵ_{12} .

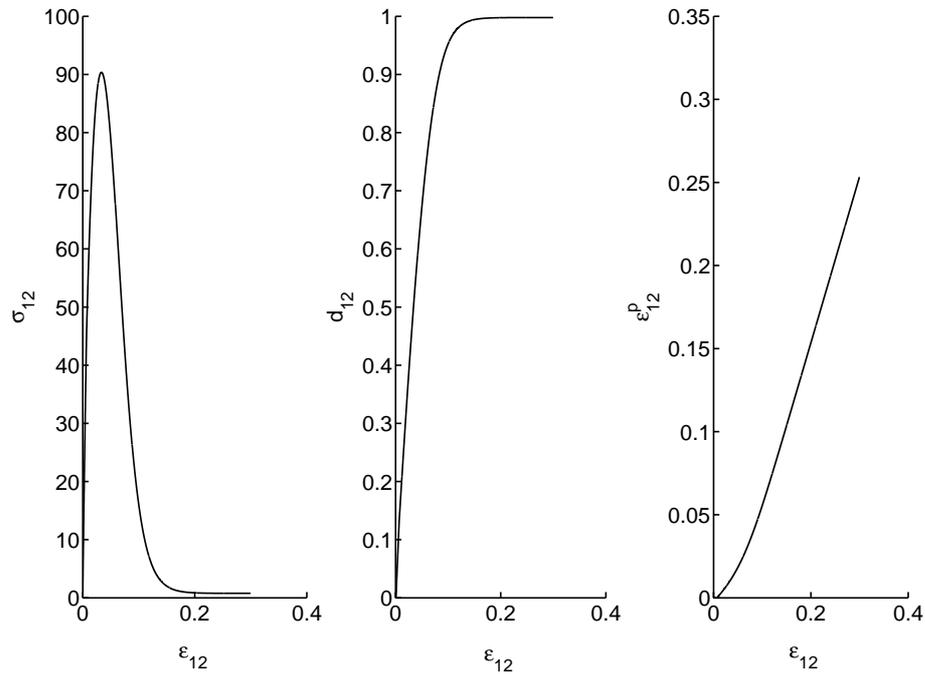


Figure 6.2 – Évolution du comportement en cisaillement pur

6.1.1.2.4 Implantation numérique D'un point de vue informatique, l'intégration du comportement ayant lieu à l'échelle du pli, on travaille par zone d'intégration. Ces zones suivent ici l'épaisseur de chaque pli et sont déterminées dès la construction du maillage. Chaque sous-structure de type pli connaît alors les différents groupes de points d'intégration à traiter. La relation de comportement, connue à l'échelle du pli et non pas au niveau des éléments ou des points d'intégration comme c'est le cas habituellement, est appliquée directement au groupement de points.

L'architecture du code doit donc permettre l'accès à l'information au niveau du pli, cette conception de l'intégration numérique de la loi de comportement avec endommagement uniforme dans l'épaisseur du pli est l'une des raisons menant à la conception du code de calcul présenté ici. En pratique, n'importe quelle zone d'intégration peut être envisagée tant que celle-ci vit au sein d'un méso-constituant. Il sera donc possible d'envisager une régularisation du modèle dans le plan du pli afin d'éviter les problèmes de dépendance au maillage dans le cadre de la localisation en imposant à l'endommagement d'être uniforme dans un volume de taille donnée lié, par exemple, à la contexture du tissu. Il est à noter que la procédure d'intégration du comportement présentée dans ce paragraphe ne sera pas modifiée.

6.1.2 Modélisation des interfaces

Les interfaces sont des entités surfaciques assurant le transfert des efforts entre plis. Le modèle d'interface est présenté dans (Allix et Ladevèze, 1992). La version retenue a été proposée dans (Allix et Corigliano, 1996) et identifiée dans (Allix *et al.*, 1998). Il a été utilisé dans le cadre des plaques trouées dans (Allix, 1992) ou des effets de bord dans (Daudeville et Ladevèze, 1993) pour décrire le délaminage entre plis d'unidirectionnels. Il s'agit d'un modèle non associé à une seule variable d'endommagement présentant la particularité de permettre de reproduire des lieux de rupture en mode mixte comme par exemple :

$$\left(\frac{G_I}{G_{Ic}}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIc}}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{III}}{G_{IIIc}}\right)^\alpha = 1 \quad (6.54)$$

L'interface est supposée orthotrope d'axes $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$. La direction hors plan est \vec{N}_3 . Les directions \vec{N}_1 et \vec{N}_2 sont les bissectrices des directions des fibres des deux plis adjacents, plis notés prime et seconde (figure 6.3).

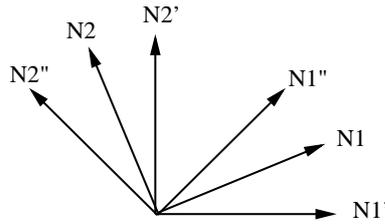


Figure 6.3 – Définition des axes d'orthotropie de l'interface

L'énergie de déformation de l'interface s'écrit de la manière suivante dans la base d'orthotropie de l'interface :

$$e_d = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{13}^2}{k_1^0(1-d_1)} + \frac{\sigma_{23}^2}{k_2^0(1-d_2)} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3^0(1-d_3)} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_-^2}{k_3^0} \right) \quad (6.55)$$

Les forces thermodynamiques associées sont alors données par les relations suivantes :

$$Y_{d1} = \frac{1}{2} k_1^0 [u_1]^2 \quad (6.56)$$

$$Y_{d2} = \frac{1}{2} k_2^0 [u_2]^2 \quad (6.57)$$

$$Y_{d3} = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3^0(1-d_3)} \quad (6.58)$$

Comme dans la base d'orthotropie, la matrice de comportement de l'interface est diagonale, on a l'écriture simple suivante :

$$Y_{d3} = \frac{1}{2}k_3^0 < [u_3] >_+^2 \quad (6.59)$$

Cette écriture permettra une intégration numérique directe du comportement, le saut de déplacement étant connu.

Comme pour le pli endommageable, l'évolution des dégradations est gouvernée par une force thermodynamique Y couplant les différents modes d'ouverture de la zone délaminée.

$$Y = (Y_{d3}^\alpha + (\gamma_1 Y_{d1})^\alpha + (\gamma_2 Y_{d2})^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (6.60)$$

Cette forme simple, permet de différencier les taux de restitution d'énergie entre les modes d'ouverture du délaminage en gardant une seule variable d'endommagement. En effet, les endommagements sont supposés égaux et donnés par la fonction w suivante :

$$w(\underline{Y}) = \left(\frac{n}{n+1} \frac{< \underline{Y} - Y_0 >_+}{Y_c - Y_0} \right)^n \quad (6.61)$$

où :

$$\underline{Y}(t) = \sup(Y(\tau), \tau \leq t) \quad (6.62)$$

Notons aussi l'existence, comme pour le pli, d'un modèle avec effet retard (Ladevèze, 1990; Ladevèze *et al.*, 2000), celui-ci permettant de gérer les problèmes de rupture et de localisation grâce à la limitation du taux d'endommagement. Il existe aussi une modélisation introduisant des déplacements anélastiques permettant de décrire le frottement dû au contact entre les lèvres des fissures. Pour simplifier, ces modélisations ne seront pas étudiées ici.

6.2 Résolution du problème non linéaire global

L'objectif de ce paragraphe est de présenter les algorithmes classiques de type Newton de résolution de problèmes non linéaires.

6.2.1 Problème de référence

Le problème de référence en statique est de trouver les champs de déplacement et de contrainte (U, σ) , $\forall (M, t) \in \Omega \times [0, T]$ tels que :

$$U \in \mathcal{U} \quad (6.63)$$

$$\int_{\Omega} Tr[\sigma \varepsilon(U^*)] d\Omega = \int_{\Omega} f_d U^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} F_d U^* d\Gamma \quad \forall U^* \in \mathcal{U}^0 \quad (6.64)$$

$$\sigma = A(\dot{\varepsilon}_{\tau}, \tau \leq t) \quad (6.65)$$

6.2.2 Base des méthodes incrémentales

L'intervalle de temps $[0, T]$ est décomposé en sous-intervalles notés $[t_k, t_{k+1}]$ ($\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$). L'histoire sur cet intervalle est approchée par exemple de façon linéaire :

$$U(\tau) = \frac{\tau - t_k}{\Delta t_k} U(t_{k+1}) - \frac{t_{k+1} - \tau}{\Delta t_k} U(t_k) \quad \forall \tau \in [t_k, t_{k+1}] \quad (6.66)$$

La quantité q est notée q_k en $t = t_k$. La relation de comportement se réécrit alors :

$$\sigma_{k+1} = \tilde{A}(\varepsilon(U_{k+1})) \quad (6.67)$$

En considérant les quantités connues au pas t_k , compléter l'histoire revient à trouver U_{k+1} . Pour cela, les équations d'équilibre et de liaison sont écrites au pas t_{k+1} :

$$U_{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1} \quad (6.68)$$

$$\int_{\Omega} Tr[\tilde{A}(\varepsilon(U_{k+1})) \varepsilon(U^*)] d\Omega = \int_{\Omega} f_{d_{k+1}} U^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} F_{d_{k+1}} U^* d\Gamma \quad \forall U^* \in \mathcal{U}^0 \quad (6.69)$$

Ce problème est désormais indépendant du temps, mais toujours non linéaire. Un algorithme itératif de type Newton dont le lecteur trouvera une présentation dans (Zienkiewicz et Taylor, 2000) peut alors être utilisé pour résoudre ce problème. Le schéma de présentation décrit dans (Ladevèze, 1996) est utilisée ici pour sa clarté.

6.2.3 Méthodes de résolution classiques

Le problème à résoudre est composé de deux groupes d'équations :

1. un groupe d'équations linéaires éventuellement globales en espace $A_{d_{k+1}}$:

$$U \in \mathcal{U}_{k+1} \quad (6.70)$$

$$\int_{\Omega} Tr[\sigma_{k+1}\varepsilon(U^*)]d\Omega = \int_{\Omega} f_{d_{k+1}}U^*d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} F_{d_{k+1}}U^*d\Gamma \quad \forall U^* \in \mathcal{U}^0 \quad (6.71)$$

2. un groupe d'équations locales en espace éventuellement non linéaires Γ_{k+1} :

$$\sigma_{k+1} = \tilde{A}(\varepsilon(U_{k+1})) \quad (6.72)$$

La solution du problème non linéaire se trouve à l'intersection de ces deux groupes d'équations $A_{d_{k+1}}$ et Γ_{k+1} . La famille des méthodes à deux directions de recherche dont les méthodes de Newton font partie, consiste à itérer entre chacun des sous-espaces en suivant deux directions de recherche K^+ et K^- . On notera $s = (\varepsilon, \sigma)$ et n l'exposant relatif aux itérations de cet algorithme. On rappelle que l'indice k désigne le pas de temps considéré, celui-ci sera parfois omis dans la suite de ce paragraphe pour alléger les notations. $s^n \in A_{d_{k+1}}$ est supposé connu. L'objectif est alors de trouver alternativement $s^{n+\frac{1}{2}} \in \Gamma_{k+1}$ puis $s^{n+1} \in A_{d_{k+1}}$.

6.2.3.1 Étape locale : construction de $s^{n+\frac{1}{2}}$

Le problème est de déterminer $s^{n+\frac{1}{2}}$ connaissant s^n . La direction de recherche K^+ est alors introduite, elle est positive et locale en variable d'espace.

$$\sigma^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{A}(\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}) \quad (6.73)$$

$$(\sigma^{n+\frac{1}{2}} - \sigma^n) = -K^+(\varepsilon^{n+\frac{1}{2}} - \varepsilon^n); \quad (6.74)$$

Pour la classe des algorithmes de type Newton, la direction de recherche est telle que :

$$\varepsilon^{n+\frac{1}{2}} = \varepsilon^n \quad (6.75)$$

L'intégration numérique de ce comportement a été détaillé en début de chapitre pour les plis tissés.

6.2.3.2 Étape globale : construction de s^{n+1}

Le problème est de déterminer s^{n+1} connaissant $s^{n+\frac{1}{2}}$. La direction de recherche K^- est alors introduite, elle est positive et linéaire.

$$(\sigma^{n+1}, \varepsilon^{n+1}) \in A_{d_{k+1}} \quad (6.76)$$

$$(\sigma^{n+1} - \sigma^{n+\frac{1}{2}}) = K^-(\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^{n+\frac{1}{2}}) \quad (6.77)$$

Il convient alors de résoudre le problème élastique suivant :

$$\Delta U = U^{n+1} - U^{n+\frac{1}{2}} \in \mathcal{U}^0 \quad (6.78)$$

$$0 = - \int_{\Omega} Tr[K^- \varepsilon(\Delta U) \varepsilon(U^*)] d\Omega - \int_{\Omega} Tr[\sigma^{n+\frac{1}{2}} \varepsilon(U^*)] d\Omega \quad (6.79)$$

$$+ \int_{\Omega} f_{d_{k+1}} U^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} F_{d_{k+1}} U^* d\Gamma \quad \forall U^* \in \mathcal{U}^0$$

Les algorithmes de type Newton diffèrent dans le choix de la direction de recherche K^- . Pour Newton Raphson, le comportement tangent est choisi, pour Newton sécant, le comportement courant et pour Newton modifié le comportement initial. Dans ce dernier cas, la direction de recherche est constante au cours de itérations, le calcul de celle-ci est donc moins coûteux cependant la convergence est plus lente. Il est à noter que le comportement tangent n'est pas nécessairement défini positif, ce qui peut engendrer des problèmes. De plus celui-ci doit être évalué de manière consistante avec le schéma d'intégration comme précisé dans (Simo et Taylor, 1985). On se restreint ici aux algorithmes modifié et sécant.

6.2.4 Pilotage des calculs

Dans bien des cas, comme pour l'endommagement, la courbe contrainte déformation d'une structure présente un pic. Ce pic indique la tenue maximum (en contrainte) de la structure. Il n'est donc pas envisageable de chercher une solution équilibrant un chargement au delà de cette limite. Le pilotage en effort n'est plus valide, il est alors nécessaire d'effectuer le pilotage sur une autre quantité (avancée de fissure, dissipation, ouverture de fissure...); le chargement correspondant devient une quantité à déterminer. Reprenons l'étape globale précédemment exposée, l'indice k représente le pas de chargement et l'indice n l'itération considérée.

$$\Delta U = U^{n+1} - U^{n+\frac{1}{2}} \in \mathcal{U}^0 \quad (6.80)$$

$$0 = - \int_{\Omega} Tr[K^- \varepsilon(\Delta U) \varepsilon(U^*)] d\Omega - \int_{\Omega} Tr[\sigma^{n+\frac{1}{2}} \varepsilon(U^*)] d\Omega \quad (6.81)$$

$$+ \int_{\Omega} \lambda_k^{n+1} f_{d_{k+1}} U^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \lambda_k^{n+1} F_{d_{k+1}} U^* d\Gamma \quad \forall U^* \in \mathcal{U}^0$$

Le coefficient λ_k^{n+1} est une inconnue du problème qui sera déterminée grâce à l'ajout d'une équation supplémentaire. En posant $\Delta U = \delta U_1 + \lambda_k^{n+1} \delta U_2$, Le problème initial se divise en deux :

$$0 = - \int_{\Omega} Tr[K^{-} \varepsilon(\delta U_1) \varepsilon(U^*)] d\Omega - \int_{\Omega} Tr[\sigma^{n+\frac{1}{2}} \varepsilon(U^*)] d\Omega \quad \forall U^* \in \mathcal{U}^0$$

et le suivant qui est constant sur le pas de chargement :

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_{\Omega} Tr[K^{-} \varepsilon(\delta U_2) \varepsilon(U^*)] d\Omega + \int_{\Omega} f_{d_{k+1}} U^* d\Omega \\ & + \int_{\partial_2 \Omega} F_{d_{k+1}} U^* d\Gamma \quad \forall U^* \in \mathcal{U}^0 \end{aligned} \quad (6.82)$$

En règle générale, on choisit le comportement courant comme direction de recherche K^{-} . Une relation supplémentaire est nécessaire afin de déterminer λ_k^{n+1} . Différentes voies sont possibles. La première, est la recherche de la solution dans un hyperplan (Riks, 1972; Ramm, 1981) La contrainte s'écrit alors comme suit :

$$\left\langle s_k^{n+\frac{1}{2}} - s_k^0, s_k^{n+1} - s_k^{n+\frac{1}{2}} \right\rangle = 0 \quad (6.83)$$

La difficulté repose sur le choix du produit scalaire, en particulier, si celui-ci est trop global alors que le phénomène intervient de manière local (progression d'un délaminage par exemple), alors il est difficile de piloter correctement le calcul. Cette méthode permet de franchir les *snap through* mais pas les *snap back*. Des techniques de type longueur d'arc (Crisfield, 1981; Hellweg et Crisfield, 1998) sont alors utilisées. Celles-ci sont souvent associées à des techniques de *line search* (Alfano et Crisfield, 2003). La recherche s'effectue dans une hypersphère et la contrainte s'écrit :

$$|s_k^{n+1} - s_k^0| = \Delta l \quad (6.84)$$

Ici encore, un choix judicieux de la norme à utiliser s'impose (Hellweg et Crisfield, 1998; De Borst, 1987; Chen et Schreyer, 1990; May et Duan, 2007; Geers, 1999). De plus, la solution de ce problème n'est pas unique et il convient de choisir correctement l'une des racines comme par exemple dans (Carrera, 1994).

Pour le moment, un algorithme de Riks est mis en place. Les premiers cas traités étant homogènes, le produit scalaire introduit est le produit scalaire énergétique global sur la structure. La mise en place d'un pilotage dans le cadre d'une évolution simultanée du délaminage et de l'endommagement des plis n'a pas été traité.

6.2.5 Accélération de convergence

La résolution d'un système non linéaire implique la résolution de nombreux systèmes linéaires. Dans le cas où la matrice est invariante, l'utilisation d'un

solveur de Krylov à fait ses preuves. En effet, le sous-espace engendré lors d'une résolution peut être réutilisé pour les suivantes sans perte d'orthogonalité. Il s'agit alors uniquement de mettre en place un algorithme de Krylov augmenté. Dans le cas de matrices non invariantes, les propriétés de conjugaison vis à vis de l'opérateur sont perdues d'un système à l'autre et la réutilisation des sous-espaces de Krylov devient trop coûteuse. Pour palier à cela, les algorithmes d'accélération de convergence GIRKS et SRKS ont été mis en place.

Le premier (Generalized Iterative Reuse of Krylov Subspaces) (Rey, 1996; Risler et Rey, 2000) est basé sur deux ingrédients. Dans un premier temps (Risler et Rey, 2000), la solution est recherchée sur les sous-espaces de Krylov précédents. Pour cela les opérateurs précédents (projetés sur leurs sous-espaces de Krylov) sont pris comme préconditionneur. Cette approximation de la solution sert alors d'initialisation. Dans un deuxième temps, on cherche à construire un préconditionneur optimal à partir d'un préconditionneur classique. Cette correction est approximée à partir des sous-espaces de Krylov précédents. Cet algorithme étant basé sur des approximations, une stagnation peut apparaître lorsque l'information apportée par les sous-espaces de Krylov n'est plus significative.

Le second algorithme (Selective Reuse of Krylov Subspaces) (Gosselet et Rey, 2002; Rey et Gosselet, 2003) a pour objectif d'injecter un maximum d'information par le biais d'une sélection de vecteurs propres obtenus sur les opérateurs précédents. Ceux-ci sont supposés proches de l'opérateur courant dans le cadre de l'utilisation d'un bon préconditionneur. Le choix des vecteurs propres est effectué par le biais des valeurs de Ritz les mieux convergées des résolutions précédentes.

Ces techniques n'ont pas été mises en place ici mais semblent prometteuses.

6.2.6 Choix des directions de recherche

Dans ce paragraphe on s'intéresse au choix de la direction de recherche globale K^- à utiliser. Deux cas sont envisagés :

1. la direction de recherche du tube sain
2. la direction de recherche du tube endommagé

La première direction mène à un algorithme de Newton modifié où chaque étape élastique peut être résolue directement. La deuxième mène à un algorithme de Newton sécant, les différentes étapes élastiques sont résolues par un gradient conjugué dont le préconditionneur correspond au tube sain. Les problèmes élastiques résolus sont donc les mêmes mais apparaissent, soit directement comme direction de recherche, soit indirectement comme préconditionneur. Il est alors possible de mettre en place un critère portant sur le nombre de résolutions sur des cas tests simples.

6.2.6.1 Cas test axisymétrique sans défaut

Le premier cas test envisagé est axisymétrique et ne comporte pas de défaut. On étudie un tube composé d'un seul pli G939/M18 à [+45] en traction. Le pli est ainsi sollicité de manière homogène en cisaillement. Le maillage est réduit à 10 éléments dans la longueur du tube.

La figure 6.4 présente le nombre d'itérations nécessaires aux deux algorithmes pour converger. On peut vérifier que l'algorithme de Newton modifié converge ici aussi vite que Newton sécant. Cependant en nombre de résolutions de problèmes élastiques, l'algorithme de Newton modifié est un peu plus économique. Il est à noter que pour l'algorithme de Newton modifié, ce nombre de résolution est égal au nombre d'itérations.

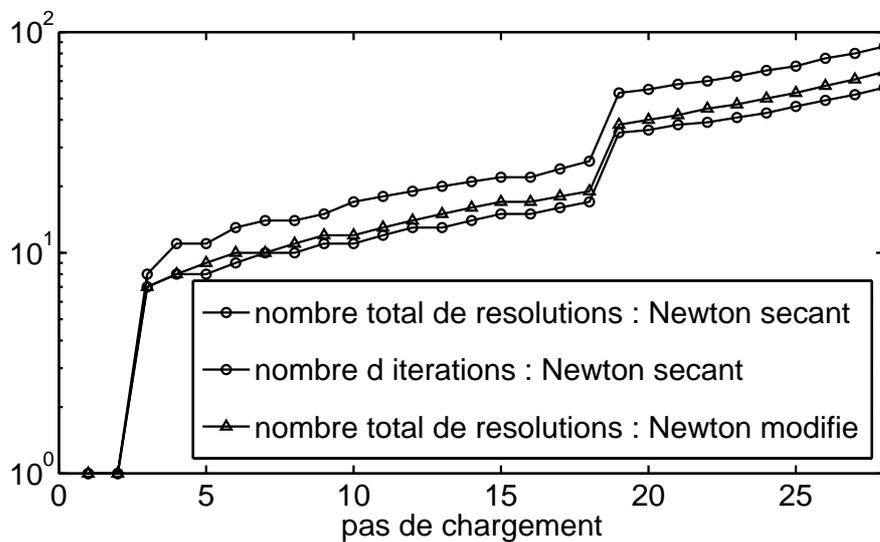


Figure 6.4 – Coût de calcul des algorithmes de Newton modifié et Newton sécant : cas de la traction

6.2.6.2 Cas test non-axisymétrique sans défaut

Le deuxième cas test envisagé est non-axisymétrique et ne comporte pas de défaut. On étudie un tube composé d'un seul pli G939/M18 à [+45] en flexion simple. Le pli est ainsi sollicité de manière hétérogène, et l'endommagement se développe de façon non uniforme sur la circonférence.

La figure 6.5 présente le nombre d'itérations nécessaires aux deux algorithmes pour converger. Les résultats sont les mêmes que pour le cas précédent.

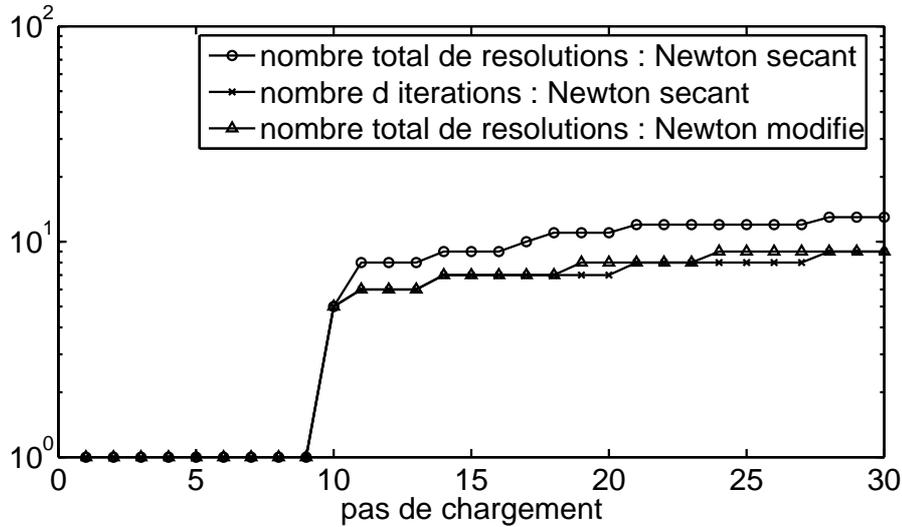


Figure 6.5 – Coût de calcul des algorithmes de Newton modifié et Newton sécant : cas de la flexion simple

6.2.6.3 Cas test axisymétrique avec défaut axisymétrique

Le cas test suivant porte sur un tube $[+45/-45]$ en traction. Un défaut axisymétrique est inséré dans l'interface entre les deux plis sur une demi-longueur du tube. Ici encore, le maillage se résume à une vingtaine d'éléments.

On rappelle que l'objectif est de comparer la direction de recherche associée au tube sain à la direction de recherche associée au comportement courant. La résolution associée à cette dernière est effectuée par un gradient conjugué dont le préconditionneur est le tube sain.

Considérons le début de l'histoire de chargement et supposons que celui-ci est suffisamment faible pour que le tube reste dans le domaine élastique. On peut alors comparer le coût de l'utilisation de la direction de recherche saine par rapport à la direction de recherche sécante.

Remarque : par abus de langage on appelle ici Newton modifié un algorithme de Newton utilisant la direction de recherche saine et non pas initiale (qui présente ici un défaut).

Le tableau 6.2 donne le nombre de résolutions nécessaires à la recherche de la solution. Dans le cas de l'utilisation du gradient conjugué, deux préconditionneurs sont envisagés, le premier est le comportement moyen et le second le comportement sain.

Bien entendu, l'algorithme de gradient conjugué présente un coût beaucoup

	Newton « modifié »	Newton sécant (Gradient conjugué)	
		précond. moyen	précond. sain
nombre de résolutions	9393	1	17

Tableau 6.2 – Nombre de résolutions de problèmes élastiques en fonction de l’algorithme choisi

plus faible. En effet, dans le cadre de l’algorithme de Newton « modifié », la recherche s’effectue suivant des directions très proches alors que pour le gradient conjugué, les directions de recherche sont prises orthogonales.

6.2.6.4 Conclusion

Cette étude, ne permet pas de faire la différence entre les deux directions de recherche sur les deux premiers exemples traités. À l’autre extrême, la présence d’un défaut impose l’utilisation du gradient conjugué. On s’oriente donc vers le choix d’un algorithme de Newton sécant, une étude plus poussée devra être menée dans le futur.

6.2.7 Un premier pilotage des calculs

Comme il a été mentionné précédemment, l’utilisation d’un algorithme de type Newton ne permet pas de simuler le comportement du tube au delà d’une certaine charge. Dans un premier temps, on peut donc supposer que la non convergence de l’algorithme rend compte de la charge limite du tube. Cependant, il peut être intéressant de passer ce pic afin de simuler la tenue résiduelle de la structure. Pour cela, un premier algorithme simple de Riks a été mis en place. Les exemples traités pour le moment étant homogènes, le pilotage du calcul s’effectue de manière globale. Le produit scalaire utilisé pour définir la direction de recherche (équation 6.83) est alors le produit scalaire permettant de calculer l’énergie de la structure. Il est important de noter que les problèmes de localisation n’ont pas été abordés.

L’exemple traité correspond à un tube [+45] en traction. Ce tube est composé d’un pli de G939/M18. La figure 6.6 donne l’évolution de la contrainte axiale en fonction de la déformation axiale du tube.

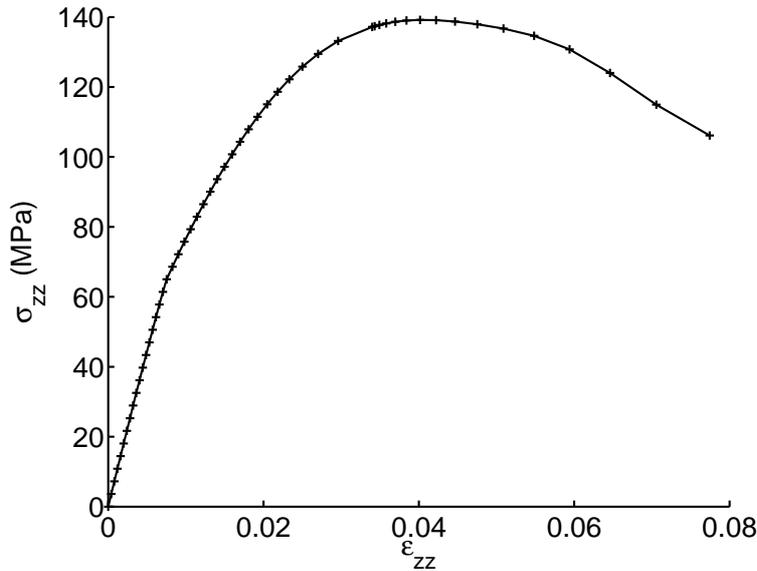


Figure 6.6 – Évolution post-pic du comportement du tube en traction

6.3 Conclusion

Le présent chapitre est une ouverture vers le non linéaire et n'a pas la prétention de traiter le sujet. Différents points sont discutés à partir d'exemples très simples, notamment l'intégration numérique du comportement et la résolution du problème non linéaire global par un algorithme de type Newton. Pour le moment, les tests sont effectués sur le matériau G939/M18 identifié par (Bordreuil *et al.*, 2003), l'identification du modèle n'ayant pas encore été menée sur le G969/RTM6. Les problèmes de localisation ne sont pas abordés ici, en particulier l'influence de la représentation circonférentielle en série de Fourier.

Le code prototype développé sous Matlab ne permet pas de traiter des cas représentatifs. En effet, si le calcul matriciel est optimisé (ce qui permet de traiter des cas industriels en élasticité), la manipulation des données ne l'est pas. Le temps de calcul en non linéaire n'est alors pas représentatif du potentiel de la méthode de calcul. Pour cette raison, seuls des cas rudimentaires ont été traités.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, une stratégie de calcul dédiée à l'analyse de tubes composites dégradés a été étudiée. Quatre difficultés ont été recensées, deux d'entre elles ont plus particulièrement été abordées.

La première difficulté concerne la réduction de la zone d'étude fine à la zone d'intérêt, ici les extrémités du tube. La théorie exacte des poutres est alors utilisée pour calculer la solution élastique au coeur du tube (solution dite de Saint-Venant). Celle-ci permet ensuite de générer les conditions limites à imposer sur la zone d'étude fine sans venir perturber la solution intérieure au niveau du raccord. Cette problématique existe pour bien d'autres structures composites et en particulier pour les structures sandwich où la démarche suivie au chapitre 2 pourrait également être appliquée. Dans le cas d'un endommagement pénétrant au coeur du tube, le problème reste ouvert.

La deuxième difficulté rencontrée est celle de la simulation efficace de la zone de bord en élasticité. En effet, ce type de résolution étant utilisée de manière intensive dans le cadre non linéaire, elle se doit d'être très efficace. Pour cela une description circonférentielle des champs en séries de Fourier est utilisée. Celle-ci permet d'étendre le calcul de Fourier classique au cas axisymétrique anisotrope par l'introduction de modes étendus.

En présence de dégradations, le découplage entre modes étendus devenant impossible, l'utilisation d'un préconditionneur axisymétrique dans un algorithme de gradient conjugué est alors abordée. En particulier, les questions liées à la qualité de la solution par rapport à la troncature de la série de Fourier ainsi que la mise en oeuvre pratique du gradient conjugué dans ce cadre sont traitées.

L'intégration de cette stratégie dans un code prototype développé sous Matlab nous a permis de traiter, en élasticité, des cas industriels de plusieurs millions de degrés de liberté. Ce code parallélisé est actuellement en cours de transfert sur le cluster d'ALCATEL ALENIA SPACE. Il est à noter que si les problèmes bande à traiter deviennent de taille importante, le calcul de Fourier n'est pas incompatible avec une technique de sous-structuration classique.

La troisième difficulté qui n'a été qu'effleurée dans ce travail, faute d'implantation numérique adéquate, concerne la simulation non linéaire. À l'avenir, il sera nécessaire d'identifier et de valider les modélisations utilisées pour les plis et les interfaces. Une campagne d'identification est prévue prochainement pour les plis tissés G969/RTM6 utilisés par notre partenaire industriel. D'autre part, la modélisation utilisée pour le moment ne gère pas les problèmes de dépendance au maillage dus à l'adoucissement introduit par l'endommagement. La modélisation doit donc être améliorée et une technique de pilotage permettant de suivre le comportement du tube lorsque l'endommagement se développe à la fois dans les plis et les interfaces reste à mettre en place. Ces différentes améliorations ne seront possibles qu'avec une réécriture complète du code de calcul. Celui-ci doit passer d'une phase d'étude de faisabilité à une phase d'utilisation intensive.

La dernière difficulté envisagée concerne la prise en compte de défauts. En effet, la description et l'identification des défauts en tête de tube peut être délicate. On rappelle, qu'en terme de tolérance aux dommages, le dimensionnement est effectué pour le défaut maximum non visible. Celui-ci (ceux-ci) reste(nt) à identifier. Apparaît alors la notion de famille de défaut définie par des critères comme la sévérité, la géométrie, le type de dégradation. Il serait intéressant de capitaliser l'information apparaissant lors de la simulation de la réponse d'un tube avec un type de défaut grâce à une stratégie multi-résolutions de type LATIN (dans le cas linéaire (Boucard et Ladevèze, 1998) et dans le cas non linéaire (Allix et Vidal, 2002)) ou SRKS par exemple. La « pertinence » de cette information permettrait alors peut être de diminuer le temps de calcul pour des défauts de même famille, ou non.

Annexe A : Définition des matrices R et P

$$P_0 = I_{d3} \quad (6.85)$$

$$\forall n > 0 : P_n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin n\theta \end{bmatrix} \quad (6.86)$$

$$\forall n > 0 : P_{-n} = \begin{bmatrix} \sin n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta \end{bmatrix} \quad (6.87)$$

$$R_0 = I_{d6} \quad (6.88)$$

$$\forall n > 0 : R_{-n} = \begin{bmatrix} \sin n\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin n\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin n\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos n\theta \end{bmatrix} \quad (6.89)$$

$$\forall n > 0 : R_n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin n\theta \end{bmatrix} \quad (6.90)$$

Annexe B : Calcul des matrices de Hooke transformées

Dans cette annexe, sont détaillés les calculs des opérateurs suivant :

$$K_n = \begin{bmatrix} \int_0^{2\pi} R_n^T K R_n d\theta & \int_0^{2\pi} R_n^T K R_{-n} d\theta \\ \int_0^{2\pi} R_{-n}^T K R_n d\theta & \int_0^{2\pi} R_{-n}^T K R_{-n} d\theta \end{bmatrix} \quad (6.91)$$

$$k_n = \begin{bmatrix} \int_0^{2\pi} P_n^T k P_n d\theta & \int_0^{2\pi} P_n^T k P_{-n} d\theta \\ \int_0^{2\pi} P_{-n}^T k P_n d\theta & \int_0^{2\pi} P_{-n}^T k P_{-n} d\theta \end{bmatrix} \quad (6.92)$$

De manière générale on a :

$$K_n = \begin{bmatrix} \Lambda(+n, +n) : K & \Lambda(+n, -n) : K \\ \Lambda(-n, +n) : K & \Lambda(-n, -n) : K \end{bmatrix} \quad (6.93)$$

$$k_n = \begin{bmatrix} \lambda(+n, +n) : k & \lambda(+n, -n) : k \\ \lambda(-n, +n) : k & \lambda(-n, -n) : k \end{bmatrix} \quad (6.94)$$

$$(6.95)$$

avec :

$$\Lambda(a, b) = \begin{cases} \text{si } (a = b) & : \pi \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{si } (a = -b) & : \pi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.96)$$

et

$$\lambda(a, b) = \begin{cases} si (a = b) & : \pi \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ si (a = -b) & : \pi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.97)$$

Annexe C : Maillage 3D du tube

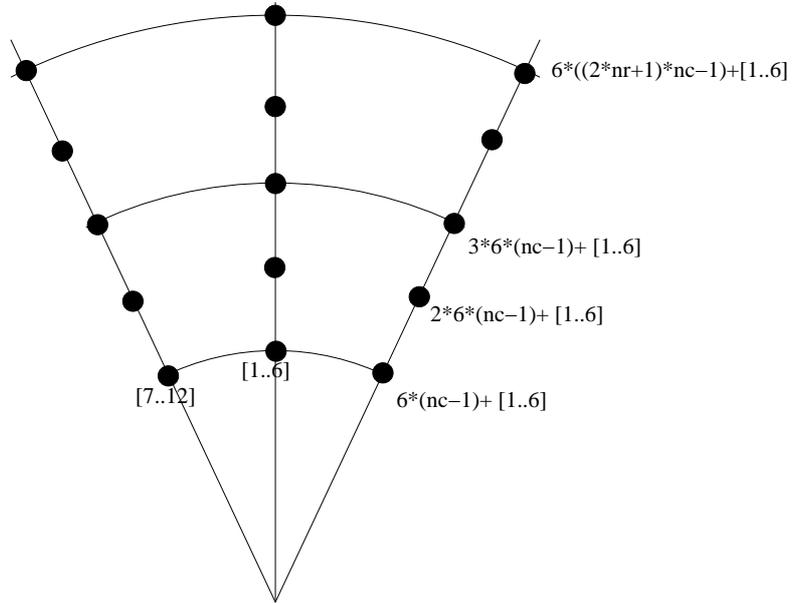


Figure 6.7 – Numérotation des degrés de liberté par circonférence

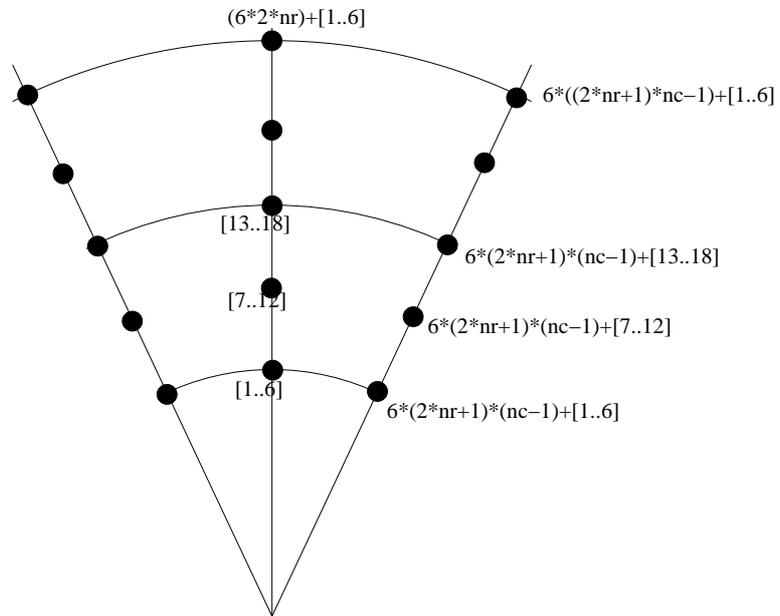


Figure 6.8 – Numérotation des degrés de liberté par rayon

Bibliographie

- V. R. AITHARAJU et R. C. AVERILL : Three-dimensional properties of woven-fabric composites. *Composites Science and Technology*, 59:1901–1911, 1999.
- R. AKKERMAN : On the properties of quasi-isotropic laminates. *Composites : Part B*, 33(2):133–140, 2002.
- G. ALFANO et M. A. CRISFIELD : Solution strategies for the delamination analysis based on a combination of local-control arc-length and line searches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:999–1048, 2003.
- O. ALLIX : *Modélisation du comportement des composites stratifiés : Application à l'analyse du délaminage*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1989.
- O. ALLIX : Damage analysis of delamination around a hole. In P. LADEVÈZE et O. ZIENKIEWICZ, édés : *New Advances in Computational Structural Mechanics*. Elsevier Science, 1992.
- O. ALLIX, E. BARANGER et L. BLANCHARD : An efficient strategy for the calculation of end effects on composite pipes : the thermoelastic case. *Composite Structures*, 2005. accepté.
- O. ALLIX et A. CORIGLIANO : Modeling and simulation of crack propagation in mixed-modes interlaminar fracture specimens. *International Journal of Fatigue*, 77:111–140, 1996.
- O. ALLIX et F. HILD, édés. *Continuum damage mechanics of materials and structures*. Elsevier, 2002.
- O. ALLIX et P. LADEVÈZE : Interlaminar interface modelling for the prediction of laminate delamination. *Composite Structures*, 22:235–242, 1992.
- O. ALLIX, D. LÉVÊQUE et L. PERRET : Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. *Composites Science and Technology*, 58:671–678, 1998.
- O. ALLIX et P. VIDAL : A new multi-solution approach suitable for structural identification problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:2727–2758, 2002.

- S. ANDRIEUX, Y. BAMBERGER et J. J. MARIGO : Un modèle de matériau microfissuré pour les roches et les bétons. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 5(3):471–513, 1986.
- G. C. ARCHER : *Object-oriented finite element analysis*. Thèse de doctorat, University of California at Berkeley, 1996.
- X. AUBARD : *Modélisation et identification du comportement mécanique des matériaux composites 2D SiC/SiC*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1992.
- E. AUSSÉDAT : *Comportement et endommagement du composite tissé Carbone/PMR15 soumis à des chargements mécaniques et thermiques*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1997.
- E. AUSSÉDAT, A. THIONNET et J. RENARD : Comportement et endommagement des composites tissés soumis à des essais hors-axes. In *Comptes Rendus des Neuvièmes Journées Nationales sur les Composites*, vol. 1, p. 235–244, 1994.
- E. BARANGER, O. ALLIX et L. BLANCHARD : A dedicated computational strategy for composite pipes : basic principle and illustration. *Science and Engineering of Composite Materials*, 12(1-2):2005, 2005. Duracosys 2004 - International Conference on Durability Analysis of Composite Systems - Riga.
- R. BARRETT, M. BERRY, T. F. CHAN, J. DEMMEL, J. DONATO, J. DONGARRA, V. ELJKHOUT, R. POZO, C. ROMINE et H. Van der VORST : *Templates for the solution of linear systems : building blocks for iterative methods*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- Z. BAZANT et Z. BITTNER : *Fracture and damage in quasibrittle structures*. E and FN Spon, 1994.
- Z. BAZANT et G. PIJAUDIER-CABOT : Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics*, 55:287–293, 1988.
- H. BEN DHIA : Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série II b*, 326:899–904, 1998.
- H. BERSINI : *L'orienté objet*. Eyrolles, 2002.
- J. BESSON et R. FOERCH : Large scale object oriented finite element code design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142(1-2):165–187, 1997.
- C. BORDREUIL et C. HOCHARD : Finite element computation of woven ply laminated composite structures up to rupture. *Applied Composite Materials*, 11:127–143, 2004.

- C. BORDREUIL, J. PAYAN et C. HOCHARD : Modélisation et caractérisation du comportement anélastique de composites stratifiés à plis tissés carbone/époxy. Nice, septembre 2003. 16ème Congrès Français de Mécanique.
- P. BOUCARD et P. LADEVÈZE : A multiple-solution method for non-linear structural mechanics. *In Proc. of NMCM'98 - 7th International Conference on Numerical Methods in Continuum Mechanics*, p. 77–82, 1998.
- E. O. BRIGHAM : *The Fast Fourier Transform and Applications*. Prentice Hall, 1988.
- N. BUANNIC et P. CARTRAUD : Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. I. Asymptotic expansion method. *International Journal of Solids and Structures*, (40-41):7139–7161, 2001a.
- N. BUANNIC et P. CARTRAUD : Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. II. Derivation of the proper boundary conditions for the interior asymptotic solution. *International Journal of Solids and Structures*, (40-41):7163–7180, 2001b.
- H. D. BUI : *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, 1978.
- J. F. CARON, R. P. CARREIRA et A. DIAZ DIAZ : Critère d'initiation de délaminage dans les stratifiés. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série II b*, 327:1291–1296, 1999.
- J. F. CARON et K. SAB : Un nouveau modèle de plaque multicouche épaisse. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série II b*, 329:595–600, 2001.
- R. P. CARREIRA : *Validations par éléments finis des Modèles Multiparticulaires de Matériaux Multicouches M4*. Thèse de doctorat, ENPC, 1998.
- R. CARREIRA, J. F. CARON et A. DIAZ DIAZ : Model of multilayered materials for interface stresses estimation and validation by finite element calculations. *Mechanics of Materials*, 34:213–230, 2002.
- E. CARRERA : A study on arc-length type methods and their operation failures illustrated by a simple model. *Computers and Structures*, 50(2):217–229, 1994.
- J. L. CHABOCHE, F. FEYEL et Y. MONERIE : Interface debonding models : a viscous regularization with a limited rate dependency. *International Journal of Solids and Structures*, 38:3127–3160, 2001.
- L. CHAMPANEY, J. Y. COGNARD, D. DUREISSE et P. LADEVÈZE : Large scale application on parallel computers of a mixed decomposition method. *Computational Mechanics*, p. 253–263, 1997.
- Z. CHEN et H. L. SCHREYER : A numerical solution scheme for softening problems involving total strain control. *Computers and Structures*, 37(6): 1043–1050, 1990.

- S. CHENG : Elasticity of plates and a refined theory. *Journal of Applied Mechanics*, 46:644–650, 1979.
- I. CHOI et C. O. HORGAN : Saint Venant’s principle and end effects in anisotropic elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 44:424–430, 1977.
- P. G. CIARLET : *Mathematical Elasticity, Vol. II : Theory of Plates, Series Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland, 1997.
- A. COMBESCURE et G. GUSIC : Nonlinear buckling of cylinders under external pressure with nonaxisymmetric thickness imperfections using the COMI axisymmetric shell element. *International Journal of Solids and Structures*, 38:6207–6226, 2001.
- A. CORIGLIANO : Formulation, identification and use of interface models in the numerical analysis of composite delamination. *International Journal of Solids and Structures*, 30(20):2779–2811, 1993.
- M. A. CRISFIELD : A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers and Structures*, 13:55–6, 1981.
- D. A. DANIELSON : Improved error estimates in the linear theory of thin elastic shells. *In Koninkl. Nederl. Akademie Van Wetenschappen*, vol. 74 de B, 294-300.
- A. DASGUPTA, R. K. AGARWAL et S. M. BHANDARKAR : Three-dimensional modeling of woven-fabric composites for effective thermo-mechanical and thermal properties. *Composites Science and Technology*, 56:209–223, 1996.
- L. DAUDEVILLE et P. LADEVÈZE : A damage mechanics tool for laminate delamination. *Composite Structures*, 25(4):547–555, 1993.
- R. DE BORST : Computation of post-bifurcation and post-failure behaviour of strain-softening solids. *Computers and Structures*, 25(2):211–224, 1987.
- Y. H. DE ROECK et P. LE TALLEC : Analysis and test of a local domain decomposition preconditionnor. *In Proceedings of the 4th International Symposium on Domain Decomposition Methods*, p. 112–128, 1990.
- Y. H. DE ROECK, P. LE TALLEC et M. VIDRASCI : A domain decomposition solver for non-linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99:187–207, 1992.
- V. DEUDÉ, L. DORMIEUX, D. KONDO et V. PENSÉE : Propriétés élastiques d’un milieu mésolfissuré. *Comptes rendus Mécanique*, 330:587–592, 2002.
- S. B. DONG et D. B. GOETSCHERL : Edge effects in laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, 49:129–135, 1982.
- S. B. DONG, J. B. KOSMATKA et H. C. LIN : On the Saint-Venant’s problem for inhomogeneous, anisotropic cylinder - part I : Methodology for Saint-Venant solutions. *Journal of Applied Mechanics*, 68:376–381, 2001a.

- S. B. DONG, J. B. KOSMATKA et H. C. LIN : On the Saint-Venant's problem for inhomogeneous, anisotropic cylinder - part II : Cross-sectional properties. *Journal of Applied Mechanics*, 68:382–391, 2001b.
- S. B. DONG, J. B. KOSMATKA et H. C. LIN : On the Saint-Venant's problem for inhomogeneous, anisotropic cylinder - part III : End effects. *Journal of Applied Mechanics*, 68:392–398, 2001c.
- Y. DUBOIS-PÈLERIN et T. ZIMMERMANN : Object-oriented finite element programming : A prototype program in smalltalk. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 98(3):361–397, 1992.
- Y. DUBOIS-PÈLERIN et T. ZIMMERMANN : Object-oriented finite element programming : Iii. An efficient implementation in C++. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 108(1-2):165–183, 1993.
- D. DUREISSEX et P. LADEVÈZE : Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 1999.
- R. EL FATMI et H. ZENZRI : On the structural behavior and the saint venant solution in the exact beam theory : Application to laminated composite beams. *Computers and Structures*, 80(16-17):1441–1456, 2002.
- R. EL FATMI et H. ZENZRI : A numerical method for the exact elastic beam theory. Applications to homogeneous and composite beams. *International Journal of Solids and Structures*, 41(9-10):2521–2537, 2004.
- D. ENGRAND : Calcul des contraintes de bords libres dans les plaques composites symétriques avec et sans trou. comparaison avec l'expérience. *In Comptes rendus de 3èmes journées nationales sur les composites JNC 3*, 1982.
- D. ENGRAND : *Local effects in the analysis of tructures*, chap. Some local effects in composites plates. Elsevier Science, 1985.
- G. ERDOGAN et G. SIH : On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering*, 85:519–527, 1963.
- C. FARHAT et F. X. ROUX : A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, p. 1205–1227, 1991.
- M. G. D. GEERS : Enhanced solution control for physically and geometrically non-linear problems. Part I-the subplane control approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(2):177–204, 1999.
- R. GLOVINSKI et P. LE TALLEC : Augmented lagrangian interpretation of non-overlapping schwartz akternating method. *In Proceedings of the 4th International symposium on Domain Decomposition Methods*, p. 224–231, 1990.

- J. P. M. GONÇALVES, M. F. S. F. de MOURA, P. M. S. T. de CASTRO et A. T. MARQUES : Interface element including point-to-surface constraints for three-dimensional problems with damage propagation. *Engineering Computations*, 17(1):28–47, 2000.
- L. GORNET : *Simulation des endommagements et de la rupture dans les composites stratifiés*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1996.
- P. GOSSELET : *Méthode de décomposition de domaine et méthodes d'accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non-linéaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2003.
- P. GOSSELET et C. REY : On a selective reuse of krylov subspaces in newton-krylov approaches for nonlinear elasticity. *In 14th conference on domain decomposition methods*, p. 419–426, 2002.
- A. GRIFFITH : The theory of rupture. *In Proceedings of the first international congress of applied mechanics*, p. 55–63, Delpht, 1924.
- L. GRILLET, A. HAMDOUNI et C. ALLERY : Modèle asymptotique linéaire de poutres voiles fortement courbés. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série II b*, 2000.
- S. GUINARD, O. ALLIX, D. GUÉDRA-DEGEORGES et A. VINET : A 3D damage analysis of low-velocity impacts on laminated composites. *Composites Science and Technology*, 62(4):585–589, 2002.
- H. B. HELLWEG et M. A. CRISFIELD : A new arc-length method for handling sharp snap-backs. *Computers and Structures*, 66(5):705–709, 1998.
- C. T. HERRAKOVICH : *Mechanics of fibrous composites*. Wiley and sons, 1998.
- C. HOCHARD, P. A. AUBOURG et J. P. CHARLES : Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric cfrp laminates up to failure. *Composites Science and Technology*, 61:221–230, 2001.
- C. O. HORGAN : *Behavior of anisotropic solids*, chap. Saint Venant's principle in anisotropic elasticity theory, p. 855–870. Editions scientifiques du CNRS, Paris, 1982.
- C. O. HORGAN : Recent developments concerning Saint-Venant's principle : An update. *Applied Mechanics Reviews*, 42(11):295–303, 1989.
- C. O. HORGAN : Recent developments concerning Saint-Venant's principle : An update. *Applied Mechanics Reviews*, 49, 1996.
- C. O. HORGAN et J. K. KNOWLES : Recent developments concerning Saint-Venant's principle. *Advanced Applied Mechanics*, 23:176–269, 1983.

- Z. M. HUANG : The mechanical properties of composites reinforced with woven and braided fabrics. *Composites Science and Technology*, 60:479–498, 2000.
- G. R. IRWIN : Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, p. 361, septembre 1957.
- M. ITO et T. W. CHOU : Elastic moduli and stress field of plain-weave composites under tensile loading. *Composites Science and Technology*, 57:787–800, 1997.
- W. T. KOITER et J. G. SIMMONDS : Foundations of shell theory. In S. VERLAG, éd. : *13th Int. Cong. of Theor. and Appl. Mech.*, p. 150–176, 1972.
- Y. W. KWON et A. ALTEKIN : Multilevel, micro/macro-approach for analysis of woven-fabric composite plates. *Journal of Composite Materials*, 36(8):1005–1022, 2002.
- P. LADEVÈZE : *Comparaison de modèles de milieux continus*. Thèse de doctorat, Paris 6, 1975.
- P. LADEVÈZE : Justification de la théorie linéaire des coques élastiques. *Journal de Mécanique*, 15(5):813–856, 1976.
- P. LADEVÈZE : Principe de Saint-Venant pour les poutres droites anisotropes. Rapport Interne 6, LMT Cachan, 1980.
- P. LADEVÈZE : Sur le principe de Saint-Venant en élasticité. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 1(2):161–184, 1983.
- P. LADEVÈZE : Sur la mécanique de l'endommagement des composites. In C. BATHIAS et D. MENKÈS, éd. : *Comptes-rendus des JNC5*, Paris, 1986. Pluralis Publication.
- P. LADEVÈZE : About a damage mechanics approach. In D. BAPTISTE, éd. : *Mechanics and Mechanisms of Damage in Composite and Multimaterials*. MEP, 1989.
- P. LADEVÈZE : A damage computational method for composites structures. In *Proceeding of the Dutch National Congress*, p. 79–87, 1990.
- P. LADEVÈZE : *Mécanique non-linéaire des structures*. Hermès, 1996.
- P. LADEVÈZE, O. ALLIX, J. F. DEU et D. LÉVÊQUE : A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183:105–122, 2000.
- P. LADEVÈZE et E. LE DANTEC : Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 43(3):257–267, 1992.

- P. LADEVÈZE, O. LOISEAU et A. NOUY : A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(43):4869–4891, 2002.
- P. LADEVÈZE et G. LUBINEAU : On a damage mesomodel for laminates : micro-meso relationships, possibilities and limits. *Composites Science and Technology*, 61:2149–2158, 2001.
- P. LADEVÈZE et G. LUBINEAU : An enhanced mesomodel for laminates based on micromechanics. *Composites Science and Technology*, 62:533–41, 2002.
- P. LADEVÈZE et G. LUBINEAU : Pont entre les "micro" et "més"o" mécaniques des composites stratifiés. *Comptes rendus Mécanique*, 331:537–544, 2003.
- P. LADEVÈZE, G. LUBINEAU et D. MARSAL : Toward a complete bridge between micro and mesomechanics of delamination. *In Workshop "Advances in the Statics and Dynamics of Delamination"*, 2003.
- P. LADEVÈZE et A. NOUY : On a multiscale computational approach for contact problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3061–3087, 2003.
- P. LADEVÈZE et F. PECASTAINGS : The optimal version of Reissner's theory. *Journal of Applied Mechanics*, 55:413–418, 1988.
- P. LADEVÈZE et J. SIMMONDS : De nouveaux concepts en théorie des poutres pour des charges et géométries quelconques. Rapport Interne 162, LMT Cachan, novembre 1995.
- P. LADEVÈZE et J. SIMMONDS : New concepts for linear beam theory with arbitrary geometry and loading. *European Journal of Mechanics and Solids*, 17(3):377–402, 1998.
- P. LADEVÈZE et J. G. SIMMONDS : De nouveaux concepts en théorie des poutres pour des charges et géométries quelconques. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série II b*, 322, 1996.
- N. LAHELLEC, C. BORDREUIL et C. HOCHARD : Etude de la rupture fragile d'un stratifié quasi-isotrope à plis tissés : mise en évidence d'une longueur interne. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série II b*, 333:293–298, 2005.
- D. LARSY et T. BELYTSCHKO : Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24:581–597, 1988.
- P. LE TALLEC : Domain decomposition method in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 1(2):121–220, 1994.
- D. LEGUILLON : Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics and Solids*, 21:61–72, 2002.

- J. LEMAITRE et J. L. CHABOCHE : *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1985.
- M. LEVINSON : An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*, 7, 1980.
- G. LUBINEAU et P. LADEVÈZE : Towards a micromechanics-based damage mesomodel for cfrp laminates under thermomechanical cyclic loading. *Science and Engineering of Composite Materials*, 12:71–82, 2005.
- J. MACKERLE : Object-oriented programming in FEM and BEM : a bibliography (1990-2003). *Advances in Engineering Software*, 35:325–336, 2004.
- J. MANDEL : Balancing domain decomposition. *Communication in Applied Numerical Methods*, 9:233–241, 1993.
- D. MARSAL, P. LADEVÈZE et G. LUBINEAU : Elaboration par homogénéisation d'un modèle non local d'interface dans les composites stratifiés. In *7e Colloque National en Calcul des Structures*, 2005.
- I. M. MAY et Y. DUAN : A local arc-length procedure for strain softening. *Computers and Structures*, 64(1-4):297–303, 1997.
- J. J. MOREAU : Evolution problem associated with a moving convex set in a hilbert space. *Journal of Differential Equations*, 26:347–374, 1977.
- M. ORTIZ et J. C. SIMO : An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:353–366, 1986.
- J. J. PAGANO et S. R. SONI : Global local laminate variational model. *International Journal of Solids and Structures*, 19(3):207–228, 1983.
- N. J. PAGANO et R. B. PIPES : Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 14:385–400, 1978.
- C. PAIGE, B. PARLETT et H. van deer VORST : Approximate solutions and eigenvalue bounds from krylov subspaces. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2(2):115–133, 1995.
- A. PARVIZI, K. W. GARETT et J. E. BAILEY : Constrained cracking in glass fibre-reinforced epoxy cross-ply laminates. *Journal of Material Science*, 13:195–201, 1978.
- F. PECASTAINGS : On a method to evaluate edge effects in elastic plates. In P. LADEVÈZE, éd. : *Local effects in the analysis of structures*. Elsevier Science, 1985a.
- F. PECASTAINGS : *Sur le principe de Saint Venant pour les plaques*. thèse d'état, Paris 6, 1985b.

- C. PETIT : Généralisation et application des lois de mécanique de la rupture à l'étude de structures et matériaux fissurés. Habilitation à diriger des recherches soutenue à l'Université de Limoges, 1994.
- R. B. PIPES et N. J. PAGANO : Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial tension. *Journal of Composite Materials*, 4:538, 1970.
- J. S. PRZEMIENIECKI : Matrix structural analysis of substructures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1:138–147, 1963.
- E. RAMM : *Non-linear finite element analysis in structural mechanics*, chap. Strategies for tracing non-linear responses near limit points. Springer, 1981.
- J. N. REDDY : A simple higher order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51:745–751, 1984.
- E. REISSNER : On a variational theorem in elasticity. *Journal of Mathematical Physics*, 29:90–95, 1950.
- J. RENARD et T. JEGGY : Modélisation de la fissuration transverse dans les matériaux composites carbone/résine. In *Groupe de réflexion sur l'endommagement*. Cetim, Senlis, 1989.
- C. REY : Une technique d'accélération de la résolution de problèmes d'élasticité non linéaires par décomposition de domaines. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série II b*, 322, 1996.
- C. REY et P. GOSSELET : Solution to large nonlinear systems : acceleration strategies based on domain decomposition and reuse of krylov subspaces. In *6th ESAFORM conference on material forming*, 2003.
- J. R. RICE : A path independant integral and approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35:379–386, 1968.
- A. RIGOLOT : *Sur une théorie asymptotique des poutres droites*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1980.
- E. RIKS : The application of newton's method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, 39:1060–1065, 1972.
- F. RISLER et C. REY : Iterative accelerating algorithms with krylov subspaces for the solution to large-scale nonlinear problems. *Numerical Algorithms*, 23:1–30, 2000.
- F. X. ROUX : Méthodes de résolution par sous-domaine en statique. *La Recherche Aéropastiale*, 1:37–48, 1990.
- Z. RYCHTER : A six order plate theory. *Journal of Applied Mechanics*, 54:275–279, 1986.
- Y. SAAD : *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS, 2000.

- P. SANCHEZ : *Mise en oeuvre et illustration de la théorie exacte des poutres*. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2001.
- P. SANCHEZ, P. LADEVÈZE et J. G. SIMMONDS : Illustration de la théorie exacte des poutres élastiques. *In 14ème Congrès Français de mécanique*, Toulouse, 1999.
- E. SANCHEZ-PALENCIA : Non homogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics*, 127, 1980. springer Verlag.
- J. C. J. SCHELLEKENS et R. DE BORST : On the numerical integration of interface elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:43–66, 1993.
- J. R. SHEWCHUK : An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. School of Computer Science, Carnegie Mellon University, 1994.
- G. SIH : Energy-density concept in fracture mechanics. *Engineering of Fracture Mechanics*, 5:1037–1040, 1973.
- J. C. SIMO et R. TAYLOR : Consistant tangent operators for rate independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, p. 101–118, 1985.
- S. TIMOSHENKO et J. N. GOODIER : *Theory of elasticity*. Mc Graw-Hill, New York, third édn, 1970.
- R. VALID : *La mécanique des milieux continus et le calcul de structures*. Eyrolles, 1977. Ecole d'été d'analyse numérique-CEA.
- T. VELDHUIZEN : Techniques for scientific C++. Rap. tech., Indiana University, august 2000. Computer Science Technical Report.
- G. VERCHERY : Méthodes numériques de calcul des champs de contrainte dans les matériaux hétérogènes. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences, Série A*, 278:571–574, 1974.
- B. Z. VLASSOV : *Pièces longues en voiles minces*. Eyrolles, Paris, 1962.
- J. WHITCOMB et X. TANG : Effective moduli of woven composites. *Journal of Composite Materials*, 35(23):2127–2144, 2001.
- A. C. WIJEYEWICKREMA : Decay of stresses induced by self-equilibrated end loads in a multilayered composite. *International Journal of Solids and Structures*, 32(3-4):515–523, 1995.
- A. C. WIJEYEWICKREMA, C. O. HORGAN et J. DUNDURS : Further analysis of end effects for plane deformations of sandwich strips. *International Journal of Solids and Structures*, 33(29):4327–4336, 1996.

- M. XIA, K. KEMMOCHI et H. TAKAYANAGI : Analysis of filament-wound fiber-reinforced sandwich pipe under combined internal pressure and thermo-mechanical loading. *Composite Structures*, 51:273–283, 2001a.
- M. XIA, H. TAKAYANAGI et K. KEMMOCHI : Analysis of multi-layered filament-wound composite pipes under internal pressure. *Composite Structures*, 53:483–491, 2001b.
- M. XIA, H. TAKAYANAGI et K. KEMMOCHI : Analysis of transverse loading for laminated cylindrical pipes. *Composite Structures*, 53:279–285, 2001c.
- M. XIA, H. TAKAYANAGI et K. KEMMOCHI : Bending behaviour of filament-wound fiber-reinforced sandwich pipes. *Composite Structures*, 56:201–210, 2002.
- O. C. ZIENKIEWICZ et R. L. TAYLOR : *The finite element method*, vol. 2. BH, fifth édn, 2000.
- T. ZIMMERMANN, Y. DUBOIS-PÈLERIN et P. BOMME : Object-oriented finite element programming : I. Governing principles. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 98(2):291–303, 1992.
- R. I. ZWIERS, T. C. T. TING et R. L. SPILKER : On the logarithmic singularity of free edges stresses in laminated composites. *Journal of Applied Mechanics*, 49:561–569, 1982.