Articulation entre la calculatrice et l'approximation décimale dans les calculs numériques de l'enseignement secondaire français. Choix des calculs trigonométriques pour une ingénierie didactique en classe de Première scientifique.

Alain Birebent

Université Joseph Fourier
Grenoble (France)

Thèse

présentée par

Alain Birebent

pour obtenir le titre de docteur de l'Université Joseph Fourier en

didactique des mathématiques

≈ ≈ ≈ ≈≈≈ ≈ ≈ ≈

Articulation entre la calculatrice et l'approximation décimale dans les calculs numériques de l'enseignement secondaire français

Choix des calculs trigonométriques pour une ingénierie didactique en classe de Première scientifique

≈ ≈ ≈ ≈≈≈ ≈ ≈ ≈

Thèse préparée au sein de l'équipe de Didactique des Mathématiques, Laboratoire Leibniz (IMAG), et soutenue publiquement le **19 mai 2001** devant le jury composé de :

Artigue Michèle, Professeure des universités, Paris, *rapporteur*

Bessot Annie, Maître de conférences, Grenoble, *directrice de thèse*

Chevallard Yves, Professeur des universités, Marseille, *rapporteur*

Dorier Jean-Luc, Professeur des universités, Lyon, *examinateur*

Laborde Colette, Professeure des universités, Grenoble, *examinateur*

Muller Jean-Michel, Directeur de recherches CNRS, Lyon, *examinateur*

TABLE DES MATIERES (Volume 1)

Prologue

PARTIE A
Problématique et méthodologie ………………………………………………... 1

Chapitre A1
Introduction à la problématique ……………………………………………… 3
1. Approfondissement de la notion naïve de cohabitation …………………….. 3
2. Orientation du questionnement didactique vers l'approximation numérique décimale …………………………………………………………………………... 6
3. Deux exemples révélateurs des pratiques institutionnelles …………………….. 10
4. Une hypothèse de recherche et trois questions ……………………………….. 14

Chapitre A2
De l'objet d'étude au plan de l'étude ………………………………………… 17
1. Références et appuis théoriques ………………………………………………. 17
2. Reprise de la problématique et choix méthodologiques ………………………. 21

PARTIE B
Des tables trigonométriques à la calculatrice : évolution dans l'enseignement secondaire français de l'instrumentation numérique des calculs trigonométriques ……..……………………………………………….. 25

Chapitre B1
De Ptolémée à Napier, éléments d'analyse écologique dans la sphère savante ……………………………………………………………………………... 29
1. La table des cordes de Ptolémée ……………………………………………….. 29
2. De la table des cordes aux tables log-trigo ………………………………….. 35

Chapitre B2
De Bézout à Bourbaki, éléments d'analyse écologique dans la sphère didactique …………………………………………………………………… 41
1. Le traité de Bézout ………………………………………………………………. 42
2. La Trigonométrie : dynamitage du corpus euclidien …………………………… 55
3. L'Arithmétique décimale : l'épineuse et lancinante question de l'approximation ………………………………………………………………………… 61
4. Retour sur l'hypothèse de recherche ……………………………………………. 71

PARTIE C
Rapports institutionnels aux objets calculatrice et approximation numérique décimale dans les classes de Troisième, Seconde et Première S actuelles …..... 73

Chapitre C1
Le contrat numérico-algébrique du Collège ……………………………... 77
1. La formation du contrat ……………………………………………………………. 77
2. Un indispensable postulat instrumental …………………………………………… 79
3. Le fonctionnement du contrat ……………………………………………………. 80
4. L'exemple des calculs trigonométriques ………………………………………….. 85
5. Du contrat institutionnel au contrat didactique ………………………………….. 90
6. L'attente du Lycée ……………………………………………………………….. 93

Chapitre C2
La classe de Seconde ………………………………………………………. 95
1. Du nouveau en classe de Seconde ………………………………………………... 95
2. En ce qui concerne la valeur absolue …………………………………………….. 101
3. En ce qui concerne la précision …………………………………………………… 109
4. Le poids de la calculatrice ………………………………………………………….. 115
5. Plus de tables numériques mais des tableaux de valeurs ……………………… 122
6. Premières conclusions pour la classe de Seconde ……………………………... 124
7. Trois contraintes très coercitives en classe de Seconde ………………………. 126
8. Un test centré sur les calculs trigonométriques ………………………………….. 128
9. Conclusion finale pour la classe de Seconde …………………………………… 145

Chapitre C3
Le contrat numérico-analytique du Lycée ………………………….…... 147
1. L'émergence d'une nouvelle praxéologie de décimalisation ………………… 147
2. Calculatrice et décimalisation ……………………………………………………… 151
3. Une première tâche emblématique (T1) ………………………………………. 156
4. L'économie didactique de la tâche T1 …………………………………………… 167
5. Une deuxième tâche emblématique (T2) ………………………………………… 171
6. Juxtaposition des praxéologies de décimalisation ……………………………… 184
7. Vers une ingénierie didactique …………………………………………………….. 190

Chapitre C4
Bilan de l'analyse écologique ………………………………….…………….. 193

PARTIE D
Une ingénierie didactique et son expérimentation dans une classe ………..…. 197

Chapitre D1
Présentation de l'ingénierie …………………………………….….……………… 201
1. Les objectifs ………………………………………………………………………. 201
2. Les variables macro-didactiques ………………………………………………… 202
3. Le découpage en trois situations didactiques ……………………………………. 212

Chapitre D2
La situation cos75°/0,25 ………………………………….….…………………... 215
1. Présentation de la situation ………………………………………………………. 215
2. Structuration de l'analyse a priori ……………………………………………….. 219
3. Le cadre algébrique ……………………………………………………………….. 220
4. Le cadre analytique ……………………………………………………………….... 226
5. Le cadre numérique décimal ……………………………………………………….. 228
6. Le cadre géométrique …………………………………………………………….... 235
7. Conclusion de l'analyse a priori …………………………………………………….. 236
8. Analyse a posteriori ……………………………………………………………… 238
9. Retours sur certaines hypothèses et sur les objectifs de l'ingénierie …………. 242

Chapitre D3
La situation cos18° ………………………………….….…………………….……... 245
1. Présentation de la situation ………………………………………………………. 245
2. Analyse a priori …………………………………………………………………… 251
3. Analyse a posteriori ……………………………………………………………… 255
4. Retour sur les hypothèses de la situation ………………………………………….. 262

Chapitre D4
La situation cos72°/cos9° ……………………………….….……………………. 265
1. Présentation de la situation ………………………………………………………. 265
2. Analyses pour la question 1 ………………………………………………………. 272
3. Analyses pour la question 2 ………………………………………………………. 275
4. Retour sur les hypothèses de la situation ………………………………………….. 279

Chapitre D5
Evaluation de l'ingénierie ………………………………….….………………… 283
1. Les promesses d'un nouveau contrat ……………………………………………. 283
2. La prégnance du contrat algébrique ……………………………………………. 284
3. Critique des choix de l'ingénierie ……………………………………………….. 284

Partie E
Conclusion et bibliographie **289**
...……………………………………………………...

Chapitre E1
Conclusion générale ……………………………………….……………………….…… 291
1. Apports principaux de l'étude ……………………………………………….. 289
2. Limites de l'étude et nouvelles directions de recherche possibles ……… 291

Chapitre E2
Références bibliographiques…………………………………….……………….. 295
1. Didactique des mathématiques ; réflexions sur l'enseignement des mathématiques …………………………………………...………..………. 295
2. Histoire des mathématiques et de son enseignement ……………………… 297
3. Traités de mathématiques et manuels universitaires ………………………. 298
4. Manuels scolaires de collège et de lycée …………………………………… 298
5. Autres ouvrages et articles ………………………………………………………. 300

Remerciements…………………………………………………………………………. 301

Epilogue

Les annexes forment un deuxième volume.

Résumé de la thèse

L'étude didactique interroge les rapports que le Collège et le Lycée, en tant qu'institutions d'enseignement des mathématiques, forgent entre un calcul numérique et une calculatrice. Le questionnement est bâti autour de la place et du rôle de l'approximation décimale dans cette mise en relations d'un objet mathématique et d'un objet technique, tant au niveau pratique que théorique.

Le cadre de la théorie anthropologique du didactique permet d'abord à l'étude de mettre en évidence comment des organisations, dites praxéologies de décimalisation, conjuguent techniques instrumentées et éléments théoriques dans les pratiques calculatoires. Le travail est mené sur l'exemple des calculs trigonométriques. L'évolution historique en France des choix transpositifs relatifs aux assises théoriques et aux réalisations numériques de ces calculs (comme le recours aux tables et au calcul algébrique) montre que, dans les techniques instrumentées institutionnalisées, la prise en charge de l'approximation décimale bute sur des contraintes qui tendent à éviter les exigences théoriques majeures de l'approximation numérique. Autrement dit, l'institution d'enseignement peine à articuler l'instrument de calcul et l'approximation décimale. Ici l'articulation est définie comme la présence active, au cours de la réalisation du calcul numérique, de contrôles qui intègrent des savoirs mathématiques sur la précision des résultats décimaux produits avec l'instrument. Une analyse plus détaillée, dans le Collège et le Lycée actuels, de l'écologie et de l'économie des techniques liées à l'utilisation de la calculatrice, cerne les raisons de cette difficile articulation entre deux genèses, l'une instrumentale, l'autre mathématique.

L'étude entreprend ensuite de travailler l'articulation calculatrice-approximation au niveau Lycée, en l'inscrivant dans l'enseignement de l'Analyse. Elle s'appuie alors sur la théorie des situations didactiques pour organiser, en plusieurs séances, une rencontre avec les deux problèmes fondamentaux de l'approximation numérique. C'est la construction d'une table trigonométrique qui sert d'enjeu épistémologique et didactique à cette ingénierie.

Mots Clés

instrument de calcul numérique, instrumentation et instrumentalisation, calcul trigonométrique, situation didactique, transposition didactique, organisation praxéologique (ou praxéologie), contrat institutionnel et contrat didactique, analyse écologique et ingénierie didactique.

Abstract

This study examines the links that the ‘Collège' and ‘Lycée', as institutes of mathematical learning, make between a numerical calculation and the calculator. The main question is the place and role of decimal approximation in this practical and theoretical linking of the mathematical and the technical.

The framework of anthropological theory allows the study to show first of all how the praxis of decimilisation combines the use of instruments and elements of theory in the carrying out of calculations. The work uses the example of trigonometrical calculations. The historical evolution in France of a successive choice of means of putting mathematical theory into practice (like the use of tables and algebraic calculations) shows that with the techniques and instruments used in institutions, the use of decimal approximation comes up against the constraints which tend to avoid the main theoretical requirements of numerical approximation. In other words the educational institution struggles in connecting the calculating tool and the decimal approximation. In our research work connecting is definite as intervention of controls which integrate mathematical knowledge on the precision of decimal results produced with an instrument. A more detailed analysis in ‘collèges' and ‘lycées' today of the ecology and economy of techniques tied in with the use of calculators explains the reasons for the difficulty in reconciling the instrument method with the mathematical method.

The study then undertakes to work, at the ‘lycée' level, at a calculator-approximation link, making it part of the teaching of Calculus. It relies on the theory of didactical situations where in several sessions the two fundamental problems of numerical approximation are encountered. The construction of a trigonometrical table serves as a way in to this educational feat of engineering.

PROLOGUE

à Emilie

Toi, c'est toujours à l'imparfait de l'objectif que tu conjugues le verbe photographier.

Nous avons récemment découvert ensemble cette apostrophe de Jacques Prévert à Robert Doisneau. Vibrant hommage d'un artiste des mots à un artiste des images. Vibrant et subtil hommage, car l'on devine aussi bien l'homme que l'instrument derrière cette "imperfection de l'objectif" malicieusement soulignée par le poète. L'ambiguïté sémantique ne dit-elle pas mieux que de longs discours le lien profond et permanent qui unit l'instrument et la pensée dans l'action humaine ? L'hommage vaut alors leçon pour tous les arts, pour celui de photographier et pour celui de calculer.

J'entends déjà tes réticences : le calcul mathématique n'est pas un art, il est science ; la raison s'y meut souveraine, universelle et intemporelle, délivrée des contingences matérielles et des imperfections humaines. Et le censeur de la raison pure qui sommeille chez tout professeur de mathématiques n'a pas manqué de te susurrer cette litanie chaque fois que la calculatrice te démangeait les doigts, te retenant ainsi de conjuguer le verbe calculer sur l'écran noir de l'instrument.

La collégienne que tu étais il n'y a pas si longtemps encore reconnaîtra sans peine un certain exercice sur la tour de Pise. Je l'ai placé dès les premières pages de ce mémoire car il m'a aidé à construire l'idée principale de la thèse : au nom de la défense du calcul exact supposé être dénié par l'usage de la calculatrice, tu n'as le plus souvent rencontré les approximations que comme des impuretés du calcul, des scories du travail mathématique dont tu devais d'autant plus te défier et te délier qu'elles échappaient à ton contrôle.

Stérile et illégitime défiance aux yeux des mathématiciens, car la nécessité et la beauté des mathématiques résident aussi, et peut-être surtout, dans la maîtrise conceptuelle et instrumentale des valeurs dites approchées. Il me revient en mémoire les mots de Guilbaud dans ses admirables "Leçons d'à peu près" :

Parler avec rigueur de ce qui est approximatif, la formule semble paradoxale. C'est en effet une sorte de défi présenté à l'activité intelligente de l'homme : d'une part l'exigence de certitude et de rigueur, d'autre part l'inaccessibilité de cette perfection.

Le mathématicien et le photographe se retrouvent dans cette quête de perfection, chacun avec ses objets et ses objectifs imparfaits.

Partie A

Problématique et méthodologie

Chapitre A_1 : introduction à la problématique

Chapitre A_2 : de l'objet d'étude au plan de l'étude

CHAPITRE A_1 : INTRODUCTION A LA PROBLEMATIQUE

1. Approfondissement de la notion naïve de cohabitation

Il n'est plus de sujet d'examen de mathématique en France qui ne mette en exergue une mention relative à l'emploi de la calculatrice. Il s'agit généralement d'une petite phrase laconique du type "Toute calculatrice est interdite" ou "Seules sont autorisées les calculatrices qui ...". Quoi de plus normal, nous dira-t-on, puisqu'il faut, moralement, organiser l'égalité matérielle des candidats ; et prévenir les tentatives de fraude, pourra-t-on ajouter. Certes ! et il n'est pas ici dans notre intention de discuter le bien-fondé de l'existence d'une telle mention en tête d'un sujet d'examen. Non, notre intention est de considérer que cette mention représente, *de facto*, l'expression d'une relation entre la calculatrice et les mathématiques, interrelation à laquelle l'institution d'enseignement chargée d'organiser l'examen se réfère pour reconnaître les compétences mathématiques du candidat.
Cette mention place en effet le candidat dans l'obligation de faire des mathématiques qui se conforment à cette interrelation. Si on se reporte maintenant en amont de l'examen, elle traduit, et induit à la fois, un mode de vie commune entre l'objet technique et les objets mathématiques dans les organisations mathématiques et didactiques. Dans une précédente étude didactique (Birebent, 1996), limitée aux classes Troisième et Seconde de l'**e**nseignement **m**athématique **s**econdaire français (EMS), nous avions désigné ce mode de vie par le terme *cohabitation.* Le choix d'utiliser ce terme à la mode partait de l'idée que les deux objets, l'objet technique, la calculatrice scientifique ordinaire[1], et l'objet mathématique, le Calcul numérique[2], coopéraient dans des fonctions reconnues par l'institution, par exemple celle de déterminer une valeur approchée décimale d'un nombre. Dans cette étude, nous nous étions attachés à caractériser les formes et les lieux de cette cohabitation dans leur double nature didactique et mathématique, et nous avions cherché à dégager des traits caractéristiques d'un contrat spécifique à la calculatrice dans les calculs numériques quotidiens des classes de Troisième et Seconde.

Nous soutenions ainsi l'idée que les coopérations entre les deux objets ne s'opèrent pas au gré des caprices de l'individu - élève ou enseignant - désireux de réaliser un calcul sur des nombres mais qu'elles sont explicables en termes de choix soumis à des contraintes qu'une analyse propre à la Didactique des mathématiques est

---

[1] Il s'agit d'un type de calculatrice recommandé en Collège, qui a les qualités d'une calculatrice scientifique, mais ne comporte pas de fonctionnalités de représentations graphiques ni de fonctionnalités de Calcul symbolique.

[2] Avec une majuscule, le mot calcul désigne un domaine des mathématiques dites savantes. Pour Jean Laborde (1965) : "Le Calcul numérique s'occupe principalement des opérations élémentaires de l'Arithmétique, de l'Algèbre et de l'Analyse effectuées sur des nombres réels, représentés par des valeurs approchées décimales". En tant que branche originale des mathématiques, le Calcul numérique, souvent rebaptisé ou confondu avec l'Analyse numérique, élabore des méthodes théoriques et pratiques d'obtention des solutions numériques de problèmes mathématiques et l'originalité tient essentiellement dans l'objectif d'effectivité qui oblige à penser la réalisation du calcul en tenant compte de son coût et de la précision du résultat. On retient couramment qu'*un calcul numérique est une succession d'opérations sur des nombres dont l'aboutissement est un nombre appelé le résultat du calcul*.

en mesure de mettre en lumière[3]. Pour cela ces contraintes doivent être explicitées et structurées, en les replaçant dans les organisations mathématiques et didactiques de l'institution d'enseignement EMS ; pour cela aussi les individus, élèves ou enseignants, doivent être considérés comme des sujets de cette institution, et leurs actions, qu'elles portent sur l'objet matériel calculatrice ou sur l'objet immatériel calcul numérique, doivent renvoyer à des pratiques significatives dans ces organisations, des pratiques que nous qualifierons dorénavant de pratiques institutionnelles.

Notre intention présente est d'approfondir et d'étendre la démarche d'analyse didactique sous-tendue par la notion naïve de cohabitation entre un objet technique appelé instrument de calcul et l'objet mathématique Calcul numérique. Nous décidons de placer ces tentatives d'approfondissement et d'élargissement dans une approche de type anthropologique dont Chevallard (1992) a posé les fondements théoriques[4]. En effet, avec ses développements les plus récents, cette théorisation du Didactique nous offre à la fois une modélisation du savoir mathématique en termes d'objets et d'interrelations entre objets et une méthode d'analyse des pratiques institutionnelles. En particulier le concept de praxéologie (ponctuelle) que Bosch et Chevallard (1999) définissent comme

> un complexe de techniques, de technologies et de théories organisées autour d'un type de tâches,

nous permet de penser les rapports entre le calcul numérique et la calculatrice en partant des besoins de la pratique calculatoire auxquels l'institution doit répondre par des techniques instrumentées par la calculatrice, elles-mêmes produites par des technologies. La cohabitation entre le Calcul numérique et l'instrument de calcul nous apparaît alors elle-même comme un complexe de praxéologies structurant l'activité calculatoire de l'élève et de l'enseignant. L'ancrage théorique que nous venons de dévoiler ouvre au moins deux voies d'approfondissement de la notion de cohabitation.

Une première voie d'approfondissement veut questionner la naturalisation de l'instrument dans les calculs numériques. L'idée de naturalisation se trouvait sous la plume des rédacteurs du programme de Seconde de 1981 quand ils déclaraient :

> L'utilisation systématique des calculatrices, qui dispense naturellement d'avoir recours aux instruments antérieurs (table de logarithmes, règle de calcul,...) constitue une des nouveautés du programme de mathématiques.

[3] "La didactique des mathématiques étudie des situations dans lesquelles un individu, en position d'enseignant, cherche à modifier intentionnellement le rapport au savoir d'un autre en position d'élève. Les chercheurs en didactique des mathématiques affirment la spécificité de leur discipline par rapport à d'autres domaines : pour produire, améliorer, reproduire, décrire et comprendre les situations d'enseignement des mathématiques, il est devenu nécessaire - et possible – de théoriser cette activité d'enseignement en tant qu'objet original d'étude et non pas en tant que simple conjonction de faits, théorisables uniquement dans des domaines autonomes comme la pédagogie, la sociologie, la psychologie, les mathématiques, la linguistique ou l'épistémologie." (Rapport d'activité scientifique de l'équipe Didactique des mathématiques au sein du laboratoire Leibniz, IMAG, 1997)

[4] Cf. "Concepts fondamentaux de la Didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique" in R.D.M volume 12.1, 1992.

Mais, exprimée de cette manière, cette idée pouvait laisser croire que la disparition des tables imposerait *naturellement*, c'est-à-dire sans reconstruction artificielle, leur remplacement par une calculatrice. Une telle interprétation contraire, selon nous, aux intentions formulées par les auteurs du programme, a pu obscurcir le regard critique des mathématiciens et des pédagogues sur les premiers pas de la calculatrice dans les classes. Artigue (1997) insiste au contraire sur la nécessité

> d'une part de rendre à nouveau visibles et interrogeables par l'analyse didactique des pratiques devenues transparentes, d'autre part de s'interroger sur les modifications susceptibles d'intervenir dans l'économie des techniques et leur signification en termes d'apprentissage du fait des modifications sémiotiques et instrumentales apportées à l'activité mathématique.

Autrement dit, l'instrumentation d'un calcul, par une calculatrice ou par une table, ne prend sa pleine signification mathématique et didactique dans une institution d'enseignement qu'à être inscrite dans un complexe praxéologique qui la relie aux objets mathématiques au travers de techniques et de théories.

Une autre voie d'approfondissement, qui n'est évidemment pas indépendante de la première, veut penser l'instrumentalité[5] de certains objets présents dans l'activité mathématique du calculateur, que ce soient des objets matériels ou immatériels, comme une dimension ontologique de cette activité. Elle s'oppose à la tentation, vivace dans les pratiques enseignantes actuelles, de concevoir l'instrument comme un simple outil qui prolonge la main de l'homme et épargne sa peine, et d'ignorer les rétroactions de l'instrument sur la pensée. Une telle réduction de l'instrumentalité de l'objet technique aboutit, en ce qui concerne la calculatrice dans l'EMS, à rabattre l'apprentissage de l'acte instrumenté sur une lecture – supposée attentive - du mode d'emploi et son enseignement sur une incitation à cette lecture, à peine accompagnée de quelques commentaires laconiques et démathématisés. Il y a là une perte importante de substance didactique si l'on pense que ces gestes avec l'instrument décrits sommairement la plupart du temps dans les manuels scolaires, participent à la constitution de l'objet technique en tant qu'instrument et façonnent l'activité mathématique elle-même.

Dans ces deux voies, l'instrumentalité de la calculatrice est pensée comme une part de la composante instrumentale du rapport à l'objet, composante sans laquelle, *que ce soit pour une institution ou pour un individu*, l'objet lui-même n'existe pas. Nous rejoignons là les principes de la modélisation anthropologique du mathématique que mettent en avant Bosch et Chevallard (1999) quand ils disent :

> Un objet existe s'il existe un rapport à cet objet, c'est-à-dire un sujet ou une institution qui le (re)connaît en tant qu'objet.

Quant à l'élargissement du champ d'action du type d'analyse de notre précédente étude, il consiste à explorer le domaine du Calcul numérique au-delà des classes de Troisième et Seconde, dans le curriculum de l'EMS, jusque là où s'opère actuellement sa rencontre avec l'Analyse. Dans cette rencontre se cristallisent de

[5] Nous empruntons ce néologisme à Bosch et Chevallard (1999) pour qualifier la valence instrumentale d'un objet ostensif "susceptible d'être concrètement manipulé" comme c'est le cas d'une calculatrice mais aussi de certains signes, tableaux, graphiques etc.

nouvelles exigences numériques aussi bien théoriques que pratiques. Que l'on pense en particulier à l'émergence du concept de nombre réel, à celle du concept de fonction numérique et à celle de processus calculatoires infinis ! On voit alors que toute étude de la cohabitation entre la calculatrice et le Calcul numérique ne peut éviter d'appréhender les problèmes mathématiques de l'approximation décimale.

Prenons le temps d'illustrer cette orientation de notre questionnement didactique vers l'approximation numérique.

2. Orientation du questionnement didactique vers l'approximation numérique décimale

Partons de déclarations qui soutiennent que, depuis son introduction officielle dans l'enseignement mathématique secondaire (EMS), la calculatrice ne cesse de poser à cette institution de lourds problèmes didactiques. Voici celle de Fromentin[6] (Hachette, 1997, pages 151 et 152) que nous retenons pour la représentativité de l'auteur au sein de la profession d'enseignant et pour la clarté de l'argumentation :

> L'utilisation de plus en plus fréquente de la calculatrice n'aplanit pas les difficultés que rencontrent les élèves sur le concept de nombre. *L'écriture à virgule, fortement privilégiée, est considérée comme la seule "réalité" numérique*
>
> La difficulté précédente en entraîne une autre à propos de valeurs exactes et de valeurs approchées. On assiste même à de réels malentendus entre élèves et professeurs, l'élève ne comprenant pas pourquoi son professeur lui fait remarquer que le résultat devrait être donné en valeur exacte alors qu'il a donné par exemple 1,732050807 pour $\sqrt{3}$
>
> L'erreur ici réside dans le fait que, *pour un certain nombre d'élèves, la valeur exacte est celle qu'on obtient avec tous les chiffres écrits à l'écran* et qu'une valeur approchée sera celle obtenue avec seulement deux ou trois chiffres après la virgule
>
> On en arrive naturellement à une troisième difficulté : *le sens de l'égalité.* La touche = de la calculatrice met un terme au calcul ; elle donne le résultat qui, le plus souvent, n'est pas "égal" à la valeur de l'expression calculée : $3 \div 7 = 0{,}4285714$. Donc, si d'un point de vue mathématique, cette fonction de la touche = n'est pas complètement fausse, elle occulte cependant la véritable fonction du signe =, celle d'indiquer que deux expressions d'écritures différentes désignent un même objet (un même nombre ici).

Ainsi l'usage de la calculatrice favoriserait, chez les élèves de Collège, le développement conjoint de conceptions numériques qui identifient le nombre et son écriture décimale, qui reportent sur les nombres les propriétés reconnues sur leurs valeurs approchées décimales ou qui réduisent l'approximation numérique décimale à une troncature-arrondi sur les écritures décimales. Reconnaissons que le constat est inquiétant pour l'institution didactique mais qu'il s'avèrerait d'une banalité sans conséquence s'il ne s'agissait pas d'élèves. Un petit test de calcul numérique passé, dans leur environnement quotidien, par des personnes munies des bases de la scolarité obligatoire mettrait certainement en évidence la prégnance de telles conceptions

[6] *in* Profession enseignant - Les maths en collège et lycée (Hachette, 1997). Les italiques sont celles du texte de l'article.

numériques dont il faut dire, tout de même, qu'elles sont efficaces puisqu'elles permettent de réaliser effectivement les calculs de la vie courante.
Mais en quoi l'apparition et la formation de ces conceptions sont-elles particulièrement attribuables à la calculatrice ? L'auteur développe sa thèse sur trois points :

- le résultat d'un calcul numérique est obtenu, à l'écran de la calculatrice, dans une écriture décimale finie et le nombre décimal qui apparaît ainsi sera reconnu comme le résultat exact du calcul alors qu'il n'est peut-être pas ce résultat exact.
- la calculatrice offre beaucoup de chiffres à ce nombre décimal ce qui, via la procédure de troncature, contribue à dénaturer la distinction entre l'exact et l'approché.
- l'insrumentalité de la touche = de la calculatrice perturbe la signification de l'égalité mathématique entre deux nombres car elle "occulte la véritable fonction du signe = ".

Nous aurons plusieurs fois l'occasion d'interroger cette thèse. Notons tout de suite que le dernier point met en lumière la dialectique de l'instrumentalité et de la sémioticité de l'ostensif (Bosch et Chevallard, 1999) qu'est le signe =. Le premier point, quant à lui, nous incite à nous interroger sur le rôle que le calculateur doit attribuer à un nombre décimal - celui de l'écran de la calculatrice - par rapport au nombre qui est le résultat exact du calcul. Peut-on, par exemple, rapprocher ce rôle de celui qu'attribue le physicien à la mesure d'une grandeur par rapport au nombre qui est la valeur vraie de la grandeur ? Plus généralement, à quoi ce nombre décimal sert-il dans les mathématiques du secondaire ? À quelles contraintes, internes ou externes aux mathématiques, doit-il sa présence et son usage ? Comment le produire sous ces contraintes et pour ce qu'il sert ?

Ces questions nous tournent inéluctablement du côté de l'approximation numérique décimale. Qu'est-ce que l'approximation numérique décimale ? Dans le vocabulaire mathématique en usage dans l'enseignement secondaire français actuel, il s'agit de désigner un nombre décimal auquel on reconnaît une certaine proximité d'un autre nombre. Cette proximité est exprimée le plus souvent en nombre de chiffres ou en unités décimales. Au-delà de cette définition, nous considèrerons l'approximation numérique décimale comme une œuvre mathématique dont la raison d'être est *l'utilisation d'un nombre décimal à la place d'un autre nombre*, dans certaines opérations mathématiques comme l'évaluation, l'ordre et les opérations[7].
La présence de l'approximation numérique décimale est repérable dès les premiers traités et manuels destinés aux élèves d'un enseignement secondaire français, avant même l'adoption du système métrique pour les mesures de grandeurs. Si la légitimité de sa présence dans l'EMS n'a jamais été vraiment contestée[8], c'est que l'approximation numérique décimale, en tant qu'objet mathématique, est intimement liée au système de

[7] Dans la brochure éditée en 1969 par l'A.PM.E.P. "La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent", on trouve une définition du mot approximation, suivie d'un commentaire :
"Action de substituer à un être mathématique qu'on ne peut ou ne souhaite pas utiliser un être considéré comme voisin ; par extension : l'être mathématique ainsi obtenu."
"La définition qui précède ne présente d'intérêt que si le sens du mot voisin y est précisé, car faute d'une information sur les relations entre l'être à approcher et ses approximations, aucun maniement de celles-ci n'est possible."

[8] Même si, à certaines époques, elle a été concurrencée par l'approximation fractionnaire (cf. Bronner, 1996).

numération décimale, à la construction du continuum numérique et à la mesure des grandeurs. Bourbaki (1969) explique la genèse et la force de ces liens.

> Toute mesure de grandeur implique une notion confuse de nombre réel. Du point de vue mathématique, on doit faire remonter les origines de la théorie des nombres réels à la formation progressive, dans la science babylonienne, d'un système de numération capable (en principe) de noter des valeurs aussi approchées qu'on veut de tout nombre réel. La possession d'un tel système, et la confiance dans le calcul numérique qui ne peut manquer d'en résulter, aboutissent inévitablement, en effet, à une notion naïve de nombre réel, qui n'est guère différente de celle qu'on retrouve aujourd'hui (liée au système de numération décimal) dans l'enseignement élémentaire ou chez les physiciens et ingénieurs.

La dernière phrase s'adresse à l'institution EMS et vaut appel à une vigilance épistémologique sur la place et le rôle dévolus à l'approximation numérique décimale. Bourbaki insiste :

> Cette notion (de nombre réel) ne se laisse pas définir avec exactitude, mais on peut l'exprimer en disant qu'un nombre est considéré comme défini par la possibilité d'en obtenir des valeurs approchées et d'introduire celles-ci dans le calcul : ce qui, d'ailleurs, implique nécessairement un certain degré de confusion entre les mesures de grandeurs données dans l'expérience, qui ne sont naturellement pas susceptibles d'approximation indéfinie, et des "nombres réels" tels que $\sqrt{2}$ (en supposant qu'on possède un algorithme pour l'approximation indéfinie de celui-ci. Un pareil point de vue "pragmatiste" reparaît donc dans toutes les écoles mathématiques où l'habileté calculatrice l'emporte sur le souci de rigueur et de préoccupations théoriques.

Difficile, de nos jours, de ne pas penser à la calculatrice quand on parle de "point de vue pragmatiste" et "d'habileté calculatrice", et de ne pas s'interroger sur le sort de l'approximation décimale dans l'EMS depuis l'introduction officielle de la calculatrice. L'institution ne sous-estime-t-elle pas son rôle en l'attachant prioritairement à des fins pratiques dans les applications numériques ou dans certaines activités dites expérimentales, calculatrice à la main, si elle néglige, dans le même temps, les questionnements théoriques qui font d'elle un objet d'enseignement mathématique à part entière ?

Bourbaki (1969) insiste aussi, dans le passage cité, sur ce qu'il appelle la confusion entre les mesures de grandeurs et les nombres "réels". Les guillemets sont de l'auteur et ils marquent la méfiance du mathématicien à l'égard soit du caractère réel de l'objet nombre soit de la possibilité d'appréhender la réalité avec les nombres. Ne tranchons pas entre ces deux interprétations, mais suivons l'auteur sur l'idée d'appréhender la dimension épistémologique de l'approximation numérique en distinguant deux valences :

- au même titre que l'égalité et la non-égalité, la proximité et l'approximation numérique sont des notions constitutives du concept de nombre réel en ce sens qu'elles participent à la construction du continuum numérique ;
- liées à la prise de mesures de grandeurs et aux opérations sur ces mesures, ces notions interviennent dans la modélisation mathématique d'un réel qui n'est pas nécessairement mathématique.

Cette bivalence épistémologique traduit la confrontation entre deux états :

- celui des modes de représentation des nombres à travers des systèmes numériques[9] ;
- celui des modélisations d'un réel qui permettent l'existence sensible et mesurable de telle ou telle grandeur.

Nous voulons voir cette bivalence comme un formidable moteur épistémologique mais aussi comme la source d'enjeux cognitifs et didactiques. Sans aucun doute l'approximation numérique décimale ne portera pas les mêmes intérêts mathématiques et didactiques dans un problème numérique issu d'une modélisation d'un certain réel que dans un problème "purement" mathématique (les guillemets sont de nous). Or il est des lieux dans l'EMS qui mêleront ces deux types de problèmes. De tels lieux représentent, *de facto*, des points didactiquement névralgiques.

Ainsi la nature de la cohabitation, dans l'EMS, entre la calculatrice et le Calcul numérique mérite d'être questionnée relativement à l'approximation numérique décimale, tant sur les savoirs mathématiques en jeu que sur les pratiques calculatoires instrumentées des élèves et des enseignants. Ceci nous conduit à cibler définitivement notre étude sur la cohabitation entre la calculatrice et l'approximation numérique décimale et à nous intéresser particulièrement aux *praxéologies de décimalisation*.

Outre les raisons pointées par le témoignage de l'enseignant et le point de vue du mathématicien, cette orientation de notre étude de la cohabitation se justifie par la forte légitimité culturelle du calcul numérique avec approximations décimales : dès qu'une pratique sociale se donne comme objet la mesure d'une quantité, elle rencontre actuellement le problème mathématique de l'approximation numérique décimale. L'institution EMS est mise en devoir d'organiser l'apprentissage de techniques numériques susceptibles d'être réinvesties dans d'autres disciplines scolaires. Cette pression culturelle et sociale renforce la sensibilité du calcul numérique avec approximation numérique décimale, aux nouveautés technologiques portées par la calculatrice ; celles-ci sont en effet rapidement présentées comme des progrès technologiques capables de soulager la peine des hommes dans les calculs numériques - notamment celle des élèves dans l'apprentissage des mathématiques - et d'introduire dans le système d'enseignement nombre d'innovations salutaires.
Une dernière raison à conduire notre étude, et non la moindre, réside dans le capital mathématique de problèmes et de techniques originales apportés par l'approximation numérique décimale. Sans vouloir être exhaustif, citons les écritures de nombres et les systèmes numériques, les résolutions d'équations, les algorithmes d'opérations.

Afin de montrer comment nous avons étoffé notre questionnement didactique, nous allons considérer deux exemples révélateurs des pratiques institutionnelles.

---

9 "On appelle ici système de nombres tout ensemble de nombres sur lequel on a défini une addition, une multiplication, une relation d'ordre total … avec des propriétés qui autorisent toute équation du premier degré, qui n'est pas une identité, à posséder une solution unique … et en font un domaine d'intégrité dont la forme rappelle celle d'un corps algébriquement clos." (Chevallard, 1989)

3. Deux exemples révélateurs des pratiques institutionnelles

3.1 le brevet des Collèges

L'épreuve écrite actuelle du Brevet des Collèges, en désignant les principales exigences mathématiques des classes de Quatrième et de Troisième de Collège, nous fournira un bon observatoire sur ces pratiques institutionnelles en Collège.

Nous entrons au plus près des attentes professorales avec un sujet de devoir surveillé d'une classe de Troisième appelé Brevet Blanc[10] et une copie corrigée par le professeur qui a donné le devoir.

L'exercice est bâti autour des relations trigonométriques dans un triangle rectangle et des théorèmes de Thalès et de Pythagore.

Voici l'énoncé :

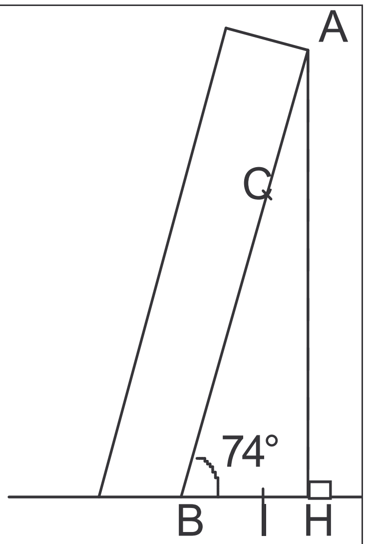
3. La tour de Pise fait un angle de 74° avec le sol supposé horizontal. Lorsque le soleil est au zénith (rayons verticaux) la longueur de l'ombre sur le sol est de 15 m.

Si c'est nécessaire, on arrondira les différents résultats au mètre près.

1. Calculer à quelle hauteur au-dessus du sol se trouve le point A.
2. Calculer la distance AB.

4. Un touriste (point C) a gravi les deux tiers des escaliers de la tour. En se penchant il laisse tomber son appareil photo.

1. Monter que le point d'impact (point I) de l'appareil photo sur le sol se situe à 10 m du pied de la tour (point B).
2. De quelle hauteur est tombé l'appareil photo ?



La question B_1 diffère des trois autres questions puisqu'elle fournit le résultat avec l'énoncé.

Nous présumons tout de suite que le professeur y attend que l'élève exploite la possibilité de trouver la valeur exacte de BI par un calcul exact sur des données numériques exactes ($\frac{2}{3}$ x $15 = 10$) ; c'est d'ailleurs un calcul du même type que ceux rencontrés dans la partie "Activités numériques" qui n'est pas soumis à la consigne : "si c'est nécessaire on arrondira les différents résultats au mètre près".

10 À notre connaissance, tous les élèves de Troisième composent, au moins une fois dans l'année, sur un tel devoir dont l'organisation est calquée sur celle de l'examen et dont le sujet est semblable (extraits d'épreuves passées) à celui de l'épreuve officielle.

Voici maintenant la copie corrigée :

Copie de l'élève	Commentaires et corrections du professeur
A.1. AHB est un triangle rectangle en H, $\tan(\widehat{B}) = \frac{AH}{BH}$ $\tan(74°) = \frac{AH}{15}$; AH = 52 m au 1 m près.	exact AH ≈ 52 m au 1 m près
2. AHB est un triangle rectangle en A. J'applique le théorème de Pythagore. $AB^2 = AH^2 + BH^2$; $AB^2 = 52^2 + 15^2$; $AB^2 = 2704 + 2025$ $AB^2 = 2929$; AB = 54 m au 1 m près.	exact $AB^2 \approx 52^2 + 15^2$ $AB^2 \approx 2704 + 2025$ $AB^2 \approx 2929$; AB ≈ 54 m
B.1. BIC est un triangle rectangle en I (l'appareil photo tombe perpendiculairement au sol). $\text{Cos}(\widehat{B}) = \frac{BI}{BC}$; $\cos(74°) = \frac{BI}{\frac{2}{3}\text{x}54}$; $\cos(74°) = \frac{BI}{36}$ BI = 10 m au 1 m près.	Cette méthode ne donne pas exactement 10 m.
2. BIC est un triangle rectangle en I, $\tan\widehat{B} = \frac{CI}{BI}$; $\tan(74°) = \frac{CI}{10}$ CI = 35 m au 1 m près.	Exact CI ≈ 35 m **note : 11/12**

Au vu d'une note de 11/12, il ne semble guère contestable que cette copie doit être attribuée à une bonne élève[11]. On peut donc supposer que ce qu'elle nous montre est fortement conforme au rapport institutionnel[12] d'un élève de Troisième aux calculs trigonométriques.

On ne manquera pourtant pas de remarquer que, dans le calcul de la longueur BI (la question B_1), cette élève choisit de justifier le résultat proposé par l'énoncé en recourant à un calcul approché qui lui donne une valeur décimale approchée à moins de 1 près du résultat. Elle en déduit fort logiquement que BI = 10 m au 1 m près, respectant ainsi la consigne préliminaire sur les arrondis. En y regardant de plus près, on s'aperçoit qu'elle applique dans la question B_1 la même méthode que dans la question précédente A_2 où elle a injecté dans une formule appropriée la valeur approchée (AH) demandée dans la question précédente ; et qu'elle recommence dans la question B_2.
À la forte sanction professorale sous la forme du retrait d'1 point sur la note sans qu'on puisse parler de faute mathématique nous comprenons que *la réponse de l'élève consomme une rupture du contrat didactique sur le Calcul numérique que le professeur juge importante*.
La remarque en marge de la copie nous en dit plus : le calcul devait déboucher sur une valeur exacte. Nous ne sommes pas étonnés que le professeur fasse référence à l'implicite contenu dans l'énoncé. Nous sommes, par contre, fortement intrigués par le rôle que joue la production de la valeur exacte dans le fonctionnement du contrat

---

[11] Le prénom sur la copie ne laisse aucun doute sur le féminin.

[12] "Le rapport institutionnel à un objet de savoir 'énonce', en gros, ce qui se fait, dans l'institution, avec cet objet, comment cet objet y est mis en jeu ; ou, encore, en d'autres termes plus imagés, ce qu'est le destin de l'objet dans l'institution" (Chevallard, 1989).

didactique relatif à l'approximation numérique. En effet, la critique que le professeur adresse à l'élève dans la question B_1 sur l'absence de la valeur exacte ne vaut que parce que la valeur exacte de BI est ici un nombre entier, c'est-à-dire un nombre dont l'arrondi à l'unité ne produit pas d'erreur.
Devant l'importance de la sanction pour une faute très circonstanciée, on pourrait penser que le contrat didactique en vigueur dans la classe met en avant la production systématique de la valeur exacte avant toute décimalisation, ceci afin de minimiser l'erreur que déclenche cette décimalisation.
Dans ce cas, on attend effectivement la formule $BI = \frac{2}{3}.BH$ dans la question B_1, quelque soit BH ; mais on attend aussi, dans la question A_2, $AB = \frac{BH}{\cos 74°}$ ou $AB = BH.\sqrt{\tan^2 74° + 1}$ puisque $\sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{BH^2.\tan^2 74° + BH^2}$.
Or l'enseignant accepte la méthode de l'élève dans la question A_2 alors même que cette méthode ne garantit pas la précision réclamée par la consigne relative aux arrondis[13]. De même, dans la réponse à la question B_2, le professeur accepte le calcul 10.tan74° (parce que BI vaut exactement 10) alors même que l'élève continue à agir en utilisant une valeur de BI qu'il a lui-même qualifiée d'approchée - sans imaginer les effets du remplacement de 10 par 36.cos74° qui ne vaut que 9,92…

> *Par deux fois, le professeur décide donc de taire le problème mathématique de l'erreur dans un calcul approché, notamment celui que soulève la propagation d'erreurs dues aux arrondis.*

Sa vigilance sur les marqueurs sémiotiques de l'approximation numérique (il rectifie plusieurs fois le signe =) se cantonne de fait à l'aspect formel du symbolisme sans entrer dans les enjeux mathématiques de son instrumentalité dans les calculs effectifs.

La copie de l'élève et les éléments de correction dus au professeur illustrent comment les choix et les précautions de ce professeur, que nous imaginons façonnés par l'environnement institutionnel, conditionnent l'élève dans son cheminement calculatoire mais aussi comment ils lui permettent de décider des calculs à réaliser et de les réussir - avec ou sans la calculatrice - tout en l'éloignant d'une problématique de contrôle des résultats décimaux qu'il obtient.
Au-delà des marques langagières visibles dans l'énoncé de la question B_1, l'enseignant assure et assume le fonctionnement du contrat didactique grâce aux valeurs qu'il donne à plusieurs variables - comme les données initiales et la précision des résultats - capables de déterminer les formes de calcul numérique instrumenté par la calculatrice dans la situation didactique. En particulier, l'insistance du professeur à disposer de la

[13] Avec un angle initial $\widehat{B}$ de 78° au lieu de 74° et le même enchaînement calculatoire, on trouverait $AH \approx 71$ puis $AB \approx 73$ alors que le calcul $\frac{BH}{\cos 78°}$ donnerait $AB \approx 72$

dans la question B_2 , le calcul de CI par $\frac{2}{3}$.AH apporterait une déconvenue similaire. L'étude de la fonction x —> Arrondi (10.tanx) - Arrondi ($\frac{2}{3}$.Arrondi (15.tanx)) permet de trouver une valeur de l'angle initial en B qui causerait effectivement cette déconvenue. Avec 67°, au lieu de 74°, on trouve $AH \approx 35$ puis $CI \approx 24$ par 10.tan67° alors que $CI \approx 23$ par $\frac{2}{3}$.AH.

valeur exacte dans la question B_1 lui est commandée par la nécessité de rester maître de la propagation des erreurs dues au remplacement de cette valeur exacte par une valeur approchée.

Notre étude devra mettre en lumière les contraintes institutionnelles qui pèsent sur l'enseignement du Calcul approché en Collège et qui débouchent sur une telle économie didactique.

3.2 le baccalauréat

En tant qu'examen final et emblématique de l'enseignement secondaire français, le baccalauréat peut, lui aussi, nous fournir de nouveaux indices sur la nature de la cohabitation entre calculatrice et approximation numérique décimale, ses enjeux mathématiques et son fonctionnement dans l'institution didactique EMS.

Nous retenons un sujet de la section S (session de juin 1997) car c'est cette section qui, dans l'EMS comporte le plus fort investissement en Analyse. Depuis deux décennies, de façon quasi-routinière, ce sujet comporte un long exercice d'Analyse, appelé Problème. Ici encore, l'usage de la calculatrice est autorisé, mais il faut en fait comprendre qu'il est indispensable. La partie finale du problème - le clou du spectacle mathématique en quelque sorte - est la résolution de l'équation $\frac{\ln x}{x - 1} = \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

Voici l'énoncé :

Étude de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution notée $\square$ et que $3{,}5 < \square < 3{,}6$.

2. Soit h la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

a. Montrer que $\square$ est solution de l'équation $h(x) = x$.
b. Étudier le sens de variation de h.
c. On pose $I = [3 , 4]$. Montrer que pour tout élément de I on a $h(x) \in I$ et $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$.

3. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout } n \geq 0 \ u_{n+1} = h(u_n).$$

Justifier successivement les trois propriétés suivantes :
a. Pour tout entier naturel n, $| u_{n+1} - \square | \leq \frac{5}{6} | u_n - \square |$.
b. Pour tout entier naturel n, $| u_n - \square | \leq (\frac{5}{6})^n$.
c. La suite (u_n) converge vers $\square$.
4. Donner un entier naturel p tel que, des majorations précédentes, on puisse déduire que u_p est une valeur approchée de $\square$ à 10^{-3} près. Indiquer une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de $\square$.

L'équation possède une solution unique $\square$ et la dernière question du problème demande au candidat d' "indiquer une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de $\square$". L'enchaînement des questions laisse supposer qu'il doit la déduire de celle de u_p, elle-même trouvée grâce à la calculatrice[14]. Mais au-delà de cette constatation, nous contestons que la conduite théorique dans laquelle le candidat a été engagé (et par rapport à laquelle il sera jugé) puisse à elle seule l'autoriser à répondre, même avec une bonne calculatrice et de bonnes manières de s'en servir. Notre point de vue se fonde sur deux raisons :

1. il manque l'inégalité triangulaire pour exploiter les précisions connues en conditions suffisantes et garantir ainsi l'approximation décimale de □ par d.

> Ici, $|□ - d| \leq |□ - u_{38}| + |u_{38} - d|$ avec $|□ - u_{38}| \leq 10^{-3}$ et $|u_{38} - d| \leq 10^{-3}$ n'autorise que $|□ - d| \leq 2.10^{-3}$.

À défaut de recourir à l'inégalité triangulaire il faudrait au moins ajouter que la suite numérique (u_n) est croissante et prendre une valeur approchée décimale à 10^{-3} par excès de u_{38}.

2. les manifestations dans la calculatrice de la propagation des erreurs au cours des 37 itérations peuvent nourrir critiques et doutes sur le résultat décimal affiché. D'ailleurs u_{38} programmée sur Casio 3800G donne 3,512816451..et u_{38} par tableau de valeurs sur la TI 92 donne 3,5128038372... (ouf ! l'apparence est sauve puisque les quatre premières décimales sont communes). Mais sur quelles bases le candidat fait-il ici une confiance raisonnée à la calculatrice[15] ?

Contrairement à ce que laisse entendre le libellé de la question qui met bout à bout les deux sous-questions, le passage de $|u_{38} - □| \leq 10^{-3}$ à $□ \approx 3{,}513$ (arrondi à 3 décimales) qui aboutit à la représentation décimale de □ à partir de celle de u_{38} via la calculatrice fait appel à des *savoirs dont la présence n'est pas attestée dans l'institution*.
Autrement dit ce passage nécessite une prise en charge institutionnelle distincte de celle qui aboutit à l'existence "théorique" de □̃ Avec cette dernière qui qualifie □ comme limite de la suite u_n, on fabrique de l'exact à partir d'approchés successifs tandis que la question finale demande de fabriquer un approché à partir de plusieurs autres approchés.
Présentée ainsi la dernière question du long problème d'Analyse, habituellement considérée comme petite question pratique - sous-entendu de "pratique de la calculatrice" - pourrait s'avérer être un piège redoutable pour les candidats. Nous sommes convaincus que, instruits par des pratiques reconnues comme valides dans la classe, les candidats (et peut-être aussi certains examinateurs) n'ont pas soumis le produit de la calculatrice à une critique mathématique de la production. Bien leur en a pris !

---

14 Programmation des termes d'une suite numérique ou affichage d'un tableau de valeurs des termes de cette suite font partie des compétences exigibles du candidat au baccalauréat. On remarquera par ailleurs que le candidat qui fait appel à sa calculatrice pour obtenir l'intervalle [3,5 ; 3,6] de α est en mesure, sur sa lancée, d'obtenir un intervalle de longueur 10^{-3}.

15 Notons une caractéristique importante de la convergence de cette suite numérique vers sa limite : la suite converge linéairement vers sa limite α, c'est-à-dire que $\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}$ tend vers L ($L \approx 0{,}8$), ce qui oblige de poursuivre effectivement jusqu'à u_{30} pour obtenir une valeur approchée à 10^{-3} près.

4. Une hypothèse de recherche et trois questions

Les deux exemples nous montrent à quel point la réalisation effective du calcul pour obtenir, à partir de sa représentation symbolique et avec la calculatrice, une valeur approchée décimale sûre, soulève de difficultés institutionnelles. Ils nous suggèrent de mettre en avant un état optimal (voire idéal) de la cohabitation entre la calculatrice et l'approximation numérique décimale qui prendrait en charge l'exactitude de la valeur approchée décimale retenue. Cet état, nous l'appelons *articulation entre calculatrice et approximation numérique décimale*.

> *Nous reconnaîtrons cette forme lorsque la réalisation de calculs numériques avec l'aide de la calculatrice sera accompagnée de contrôles sur les résultats décimaux produits qui intègrent des savoirs mathématiques sur leur précision et présents dans l'institution*[16].

De tels contrôles, capables de *garantir que le résultat du calcul approché est juste*, s'entendent comme des complexes de procédures qui anticipent l'organisation du calcul et de procédures qui vérifient ou mettent à l'épreuve du résultat produit par le calcul. Du point de vue didactique que nous adoptons, de tels contrôles sont :

- à intégrer aux *praxéologies de décimalisation* qui sont construites au sein de l'institution E.M.S dans le but d'assurer la production du résultat décimal d'un calcul numérique ;
- à relier aux différentes significations que l'institution donne au calcul et aux nombres sur lesquels ce calcul agit.

D'avoir été repérées dans les examens terminaux, les pratiques calculatoires analysées précédemment sont a priori suffisamment stables et significatives pour nous autoriser à formuler une hypothèse de recherche :

> ***Hypothèse de recherche*** *: l'institution EMS ne parvient pas à donner à la cohabitation entre calculatrice et approximation numérique décimale les qualités de l'articulation au sens où nous l'avons définie.*

Notre étude peut alors s'orienter sur trois questions.

> ***Question 1*** *: dans quelle mesure cette hypothèse de recherche peut-elle être à mise en rapport avec l'intégration de la calculatrice dans l'EMS et l'éviction des tables numériques ?*

L'arrivée des calculatrices dans les classes de mathématiques du secondaire français date des années 1980, portée par une réforme complète des programmes du Collège et du Lycée. Ce faisant, l'arrivée de la calculatrice électronique n'a pas seulement accompagné (induit et bénéficié de) la mise à l'écart des tables numériques, notamment des tables trigonométriques ; elle a aussi participé à éliminer l'enseignement des

[16] Un savoir est conçu ici comme une forme d'organisation de rapports à l'objet permettant une activité sur cet objet ; il peut être pratique (que certains qualifieront de savoir technique) ou théorique.

logarithmes décimaux et favorisé le développement de certaines méthodes de calcul numérique jusque-là absentes de l'EMS.
Avec la question 1 nous nous interrogeons sur la signification et la portée des modifications qui peuvent intervenir dans l'écologie du Calcul numérique approché dès que l'on change d'instrument de calcul. Cette question en implique une autre :

> ***Question 2*** *: de quelle façon, l'institution didactique EMS, depuis que s'est imposé la présence de la calculatrice, parvient-elle à organiser, en son sein, la vie d'objets et de problèmes mathématiques attachés à l'approximation numérique décimale ?*

Les déclarations de Fromentin et nos premières explorations dans le système d'enseignement actuel appellent une analyse serrée des rapports institutionnels à ces objets et problèmes depuis l'arrivée des calculatrices dans l'enseignement des mathématiques. Cette analyse devra comporter, à propos de l'approximation numérique, des aspects écologiques et économiques du fonctionnement de différents systèmes didactiques[17] que nous rencontrerons dans EMS. Mais si notre hypothèse de recherche s'avère valide, il est logique d'aborder cette autre question :

> ***Question 3*** *: peut-on construire dans l'EMS un processus d'enseignement dont l'enjeu serait une modification des formes de la cohabitation entre la calculatrice et l'approximation numérique décimale pour favoriser l'émergence d'une véritable articulation ?*

L'existence et la viabilité d'un tel processus dans l'EMS actuelle ne sont pas acquises : il nous faudra notamment trouver, dans le champ des contraintes institutionnelles, un ensemble de conditions capables d'opérer des ruptures institutionnelles, à la fois idoine et robuste.

[17] En Didactique, le point de vue économique tend à se centrer sur le fonctionnement du système didactique, le point de vue écologique s'intéressant aux conditions de possibilité de ce fonctionnement.

CHAPITRE A_2 : DE L'OBJET D'ETUDE AU PLAN DE L'ETUDE

1. Références et appuis théoriques

La notion d'instrument de calcul et celle d'activité mathématique instrumentée sont au cœur de l'étude dans laquelle nous nous engageons. Depuis une dizaine d'années ces notions font l'objet de nombreuses recherches en Didactique des mathématiques, notamment sur le thème de l'intégration d'objets techniques complexes. Ces recherches se développent principalement autour de deux axes :

- un axe psychologique qui analyse et conceptualise l'activité instrumentée du point de vue du fonctionnement cognitif de l'individu
- un axe anthropologique qui analyse l'activité instrumentée en termes de pratiques et de théories portées, valorisées et normées par une institution, et que reproduit l'individu en tant que sujet de l'institution.

Bien qu'en empruntant à des cadres théoriques globaux bien distincts, ces deux axes offrent des ressources que notre étude peut exploiter et conjuguer. Nous présentons ci-après celles que nous décidons de retenir. Pour ce faire nous nous appuyons à plusieurs reprises sur des synthèses effectuées par Artigue (1998) pour ses recherches sur l'intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques. Pour un approfondissement des cadres théoriques, nous renvoyons aux textes fondateurs de Rabardel (1995), de Chevallard (1992) et de Bosch et Chevallard (1999).

1.1 les ressources de l'axe psychologique

Celles qui intéressent le plus une recherche relative à l'enseignement proviennent des travaux en ergonomie cognitive (cf. Rabardel, 1995 et Vérillon, 1996).
Voici quatre points que mentionne Artigue :

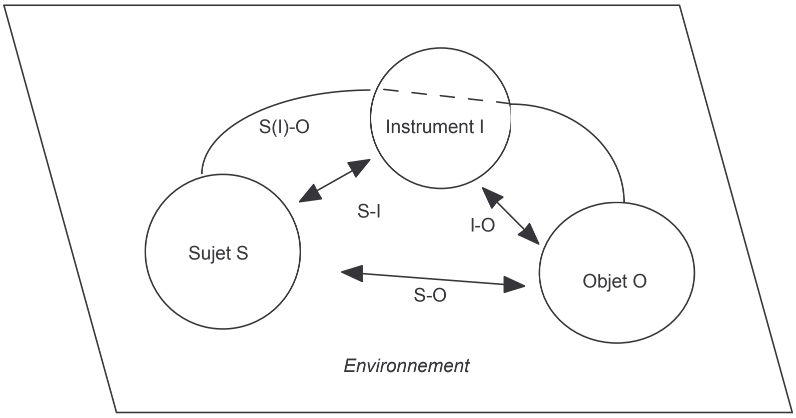
> 1. Un objet technique n'est pas d'emblée un instrument, même si l'on tend à le considérer comme tel. C'est d'abord un objet, un artefact, selon la terminologie utilisée par Rabardel (1996), pour rester le plus neutre possible. C'est dans l'évolution de nos rapports à l'objet que se construit l'instrument, au cours d'un processus de genèse instrumentale, en général complexe.
>
> 2. Cette genèse instrumentale est à la fois dirigée vers l'objet et le sujet, dans un double processus d'*instrumentalisation* et d'*instrumentation*. L'instrumentalisation, dirigée vers l'objet, conduit à le personnaliser, à le transformer éventuellement, à lui conférer des fonctionnalités dont certaines pouvaient être a priori non prévues par le concepteur. […]. L'instrumentation, dirigée vers le sujet, conduit à élaborer de façon autonome ou à s'approprier socialement des schèmes d'action instrumentée […].
>
> 3. Les schèmes sont pluri-fonctionnels. Mis en jeu dans des situations précises, ils aident à comprendre (c'est là leur fonction *épistémique*), ils aident à agir, à transformer, à résoudre (c'est là leur fonction *pragmatique*), ils aident enfin à organiser et contrôler l'action (c'est là leur fonction *heuristique*).
>
> 4. L'activité instrumentée influe à la fois sur les modes d'accès aux connaissances et sur les connaissances élaborées elles-mêmes :

> d'une part, via les contraintes introduites par l'artefact, et il semble utile à ce niveau de distinguer entre les contraintes liées à la structure de l'artefact lui-même (les contraintes internes), celles liées aux actions et transformations qu'il permet (les contraintes de commande), celles enfin liées à la façon dont il tend à organiser l'activité (les contraintes d'organisation),

> d'autre part, via les potentialités nouvelles offertes à l'action du sujet par l'artefact.

Il s'ensuit un rapport nécessairement dialectique entre instrumentation et apprentissage des mathématiques (Actes du Colloque francophone européen, 1998, pages 18 et 19).

Nous retenons particulièrement la double notion d'instrumentalisation et d'instrumentation. Rabardel (1996) et Vérillon (1996) la construisent au sein d'une modélisation des **s**ituations d'**a**ctivité **i**nstrumentée. Le modèle qu'ils appellent SAI est présenté par cette figure :



Vérillon (1996) explique alors :

L'instrumentation concerne donc l'élaboration des rapports S-I : le sujet doit construire les schèmes, les procédures, les opérations nécessaires à la mise en œuvre de l'artefact. Il peut, par exemple, importer dans la situation des rapports S-I construits dans d'autres contextes avec d'autres artefacts ou, au contraire, construire ces nouveaux rapports de manière exploratoire, ou encore, les élaborer par imitation.

L'instrumentalisation concerne, quant à elle, la construction des rapports I-O. Le sujet attribue à l'instrument une possibilité d'agir sur O et construit les propriétés fonctionnelles qui permettent l'actualisation de cette possibilité d'action (Ibid. page 5).

Supposons que l'objet O dont parle Vérillon soit un objet mathématique tel le calcul d'une expression numérique, le sujet S un élève de l'EMS et l'instrument I une calculatrice ou une table numérique. La dialectique instrumentation/instrumentalisation décrit la façon dont la présence de l'instrument influe sur la constitution d'un rapport S-O de l'élève au calcul en le "doublant" (ou en l'enrichissant) d'un rapport S(I)-O qui apparaîtra, voire s'imposera, dans toutes les situations où la calculatrice sera disponible. C'est en ce sens que l'on doit affirmer qu'un instrument de calcul n'est pas neutre à l'égard du Calcul numérique, ni épistémologiquement ni didactiquement. Il ne s'intègre pas naturellement dans l'activité calculatoire d'un individu. L'instrument, dit Prudhomme (1999),

> […] est une construction de son activité dans des situations données et non quelque chose de disponible qu'il suffit de "fournir" pour que l'individu l'associe à son action (page 29).

1.2 les ressources de l'axe anthropologique

La genèse instrumentale que décrit Vérillon apparaît donc, pour chaque individu, comme un construit à la fois individuel et social, évoluant au gré de ses rencontres avec les situations qui lui posent problème. Cela laisse imaginer des caractères et des niveaux très divers de genèse instrumentale pour une même classe de problèmes. Mais dans une institution didactique de l'EMS, la rencontre d'un élève avec un problème mathématique ne relève pas d'un processus chaotique ; elle est en quelque sorte programmée. C'est ce que nous rappelle Chevallard (1992) :

> Dans la plupart des pratiques sociales, l'objet est "jugé" au résultat de l'action qu'il permet, et aux coûts qu'elle suppose. Dans les pratiques de transmission de savoir, l'action qu'il autorise fait partie de *la manipulation du savoir enseigné*, et s'intègre dans le *rapport au savoir* des acteurs de la relation didactique, enseignant et enseignés. Elle doit donc apparaître comme *légitime*, et entre à ce titre dans le registre des enjeux didactiques. Il n'y a ainsi ni mystère ni scandale à voir la calculette, par exemple, prospérer entre les mains de l'épicier, de la ménagère, et de l'élève, mais hors de la classe. Et de la voir, dans le même temps, susciter l'interrogation dubitative de maints enseignants de mathématiques (pas de géographie, ou de physique, bien sûr, car elle trouve, en ces disciplines, un statut épistémologique et didactique assuré, celui d'aide au calcul). Dans un cas, dans la plupart des cas, son usage va sans problèmes (autres que matériels : prix, fiabilité, maniabilité, etc.). Dans l'autre cas, son emploi est exactement problématique et les scénarios de son intégration à la classe de mathématiques sont l'objet d'études, d'expérimentations, de colloques. A-t-on jamais vu épiciers tenir congrès sur ce thème ?

Nous avons déjà souligné la filiation que nous reconnaissions à la notion de cohabitation avec la théorisation anthropologique du didactique qui offre une modélisation du rapport au savoir. Au point de départ de cette théorisation, tout est objet.

> Mais on distingue désormais des types d'objets particuliers : les institutions, les individus et les positions qu'occupent les individus dans les institutions. En venant occuper ces positions, les individus deviennent les sujets des institutions – sujets actifs qui contribuent à faire vivre les institutions par le fait même de leur être assujettis. La connaissance – et le savoir comme une certaine forme d'organisation de connaissances – entre en scène avec la notion de rapport […]. La notion de rapport renvoie aux pratiques sociales qui se réalisent dans l'institution et qui mettent en jeu l'objet en question, soit donc "ce qui se fait dans l'institution avec cet objet" (Bosch et Chevallard, 1999).

Ainsi quand Rabardel (1995) écrit :

> L'artefact est <u>institué</u> comme instrument par le sujet qui lui donne le statut de moyen pour atteindre le but de son action,

nous pensons que cette institutionnalisation chez l'individu est en fait un produit de l'institution de laquelle l'individu est sujet et qui définit l'action. C'est dans l'institution

EMS que l'élève (se) découvre certaines tâches calculatoires et, en même temps que ces tâches, une ou des techniques, un ou des énoncés théoriques.
Dans un certain nombre de tâches calculatoires que seule cette institution propose, l'état de chacun des processus d'instrumentation et d'instrumentalisation que révèle le traitement de la tâche par cet élève doit être regardé comme un produit quasiment exclusif de cette institution. Pour reprendre les termes de l'approche anthropologique de Chevallard (1989), disons plus précisément que les pratiques instrumentées de calcul fonctionnent sous la contrainte de règles (souvent implicites) constituant un *contrat institutionnel de calcul*, et donc que la genèse instrumentale, pour un élève de l'EMS, l'objet Calcul numérique et l'instrument calculatrice (par exemple) s'inscrit dans l'évolution de ce contrat institutionnel à cet objet, tout au long de son parcours scolaire.

Ainsi la théorie anthropologique nous invite à questionner les pratiques institutionnelles où l'objet mathématique est engagé. Artigue (1998) insiste sur trois points :

> 1.L'étude de l'apprentissage mathématique ne peut se faire sur un plan purement cognitif, en faisant abstraction des institutions dans lesquelles il s'inscrit. Les rapports personnels développés par les élèves, vis-à-vis des objets mathématiques ou des instruments de l'activité mathématique, sont conditionnés par les rapports institutionnels qui définissent les normes et valeurs de la connaissance.
>
> 2. Les objets mathématiques ne peuvent être considérés comme des absolus. Ce sont des émergents des ensembles de pratiques qui les mettent en jeu. L'analyse de ces pratiques dans une culture ou une institution donnée est donc essentielle […].
>
> 3. Dans une institution donnée, certaines tâches demeurent problématiques, mais l'efficacité, la progression des savoirs nécessitent la routinisation d'un certain nombre d'entre elles. Ces tâches routinières jouent d'ailleurs un rôle central dans l'évolution des connaissances. Pour leur résolution, des techniques officielles sont introduites, institutionnalisées. Chevallard souligne que la routinisation s'accompagne d'un affaiblissement des technologies associées à ces techniques [*technologie = discours d'explication et de justification des techniques*], pour des raisons de familiarité et d'efficacité. De ce fait, les connaissances sous-jacentes tendent à se naturaliser, à devenir invisibles, à être considérées comme allant de soi.

La naturalisation d'un instrument de calcul dans une institution d'enseignement des mathématiques est donc un processus qui tend à obscurcir les ressorts mathématiques de l'instrumentation et qui, dialectiquement, tend à réduire l'instrumentalisation à l'appropriation de gestes qui ne dépassent pas le micro-monde de l'instrument.

Il nous paraît donc indispensable pour analyser la cohabitation entre un instrument de calcul et le Calcul numérique lui-même de replacer les processus d'instrumentation et d'instrumentalisation dans les organisations mathématiques et didactiques actuelles ou passées, en quelque sorte de projeter sur l'institution EMS elle-même les concepts d'instrumentation et d'instrumentalisation issus des travaux d'ergonomie cognitive.
Nous dirons ainsi que l'institution d'enseignement construit l'instrument calculatrice (ou table) autour de deux fonctions en interaction : la constitution d'un calcul à instrumenter par la calculatrice (ou par tout autre objet technique à considérer comme instrument de calcul) - l'instrumentation - et la constitution de la calculatrice comme objet capable d'intervenir dans ce calcul - l'instrumentalisation. Nous désignons par *genèse instrumentale institutionnelle* la conjugaison des deux processus autour de tel calcul

numérique et de tel instrument. Nous retrouvons ainsi le postulat anthropologique que Bosch et Chevallard (1999) présentent ainsi :

> Il [*ce postulat*] concerne *l'écologie des tâches et des techniques*, c'est-à-dire les conditions et contraintes qui en permettent la production et l'utilisation dans les institutions. On suppose que, pour pouvoir exister dans une institution, une technique doit apparaître comme un tant soit peu compréhensible, lisible et justifiée. Il s'agit là d'une contrainte institutionnelle minimale pour permettre le contrôle et garantir l'efficacité des tâches accomplies […]. Cette contrainte écologique implique alors l'existence d'un discours descriptif et justificatif des tâches et techniques qu'on appelle *technologie* de la technique. Le postulat suppose en outre que toute technologie a besoin à son tour d'une justification que l'on appelle *théorie* de la technique, et qui en constitue le fondement ultime. […]. Ce complexe de techniques, de technologies et de théories organisées autour d'un type de tâches forme une organisation praxéologique (ou *praxéologie*). […]. La description des organisations praxéologiques et l'étude de leur écologie institutionnelle sont au cœur du programme d'étude de la didactique des mathématiques.

L'extension du concept de genèse instrumentale que nous initions ici participe à cette étude écologique institutionnelle : il s'agit, pour tel ou tel calcul numérique dans l'EMS, de *mettre en relations* la genèse instrumentale individuelle de l'élève, la genèse instrumentale collective pilotée par l'enseignant ou le manuel scolaire au sein de la classe et la genèse instrumentale institutionnelle.

2. Reprise de la problématique et choix méthodologiques

2.1 reprise des deux premières questions

Cette mise en relations d'objets mathématiques et d'objets techniques dans l'environnement que constitue l'institution EMS peut emprunter facilement au paradigme écologique.

Essayons de reprendre notre problématique dans des termes apparentés à une analyse écologique. Revenons, pour cela, à notre hypothèse de recherche et aux questions 1 et 2, présentées dans le chapitre A_1 :

> ***Hypothèse de recherche*** *: l'institution EMS ne parvient pas à donner à la cohabitation entre calculatrice et approximation numérique décimale les qualités de l'articulation au sens où nous l'avons définie.*
> ***Question 1*** *: dans quelle mesure cette hypothèse de recherche peut-elle être à mise en rapport avec l'intégration de la calculatrice dans l'EMS et l'éviction des tables numériques ?*
> ***Question 2*** *: de quelle façon, l'institution EMS, depuis que s'est imposé la présence de la calculatrice, parvient-elle à organiser, en son sein, la vie d'objets et de problèmes mathématiques attachés à l'approximation numérique décimale ?*

Deux questions nouvelles surgissent qui précisent notre questionnement relativement aux genèses instrumentales dans l'institution EMS passée et actuelle :

- quelles contraintes l'EMS impose-t-il, et quelles conditions offre-t-il (a-t-il offert) au calcul numérique pour que la cohabitation entre la calculatrice (la table) et l'approximation numérique décimale prenne les formes d'une véritable articulation ?
- comment cette articulation peut-elle (a-t-elle pu) se manifester dans les programmes et les manuels des classes concernées ? au sein de quels domaines mathématiques, à travers quels savoirs et avec quelles techniques ?

Et deux autres questions visent les genèses instrumentales des acteurs de la relation didactique dans les institutions didactiques de l'EMS actuel :

- quelle importance l'enseignant accorde-t-il à cette articulation ? qu'enseigne-t-il à son propos, quels savoirs relatifs à la calculatrice, quels savoirs relatifs à l'approximation numérique décimale ? comment les met-il en scène ?
- comment, effectivement (par quelles procédures, grâce à quelles techniques et quels savoirs), l'élève produit-il, contrôle-t-il et valide-t-il un résultat numérique décimal approché dans un calcul numérique qu'il instrumente par la calculatrice ? quels rapports l'élève a-t-il aux savoirs et aux techniques enseignées, à la genèse instrumentale institutionnelle ?

Nous traiterons ces questions dans la partie B, pour la période avant l'arrivée des calculatrices, et dans la partie C, pour la période contemporaine.

2.2 le choix des calculs trigonométriques

Nous pensons avoir la possibilité de traiter pertinemment les quatre questions en ciblant les calculs numériques en Trigonométrie. Pour la période contemporaine, nous évitons ainsi de travailler sur tous les niveaux et nous nous concentrons sur les classes de Troisième, de Seconde qui englobent le passage du Collège au Lycée, c'est-à-dire un changement institutionnel important dans l'EMS, et sur la classe de Première Scientifique.

Outre le fait que nous nous aventurons sur un terrain que les travaux de Didactique de mathématiques n'ont pas, à notre connaissance, beaucoup défriché, notre décision tient à ce que les calculs numériques qu'on rencontre en Trigonométrie dans EMS possèdent toutes les qualités que requiert notre étude :

- ils créent un espace et des fonctions pour l'approximation numérique décimale car ils ont besoin d'un espace numérique plus large que D ;
- intervenant dans différents domaines mathématiques présents dans l'EMS (le Numérique, la Géométrie, l'Algèbre et l'Analyse), ils disposent d'un fort potentiel épistémologique susceptible d'enrichir les situations d'enseignement où ils sont engagés ; en particulier ils activent la bivalence épistémologique que nous avons repérée dans l'approximation numérique décimale (en confrontant des nombres issus de grandeurs géométriques à la problématique de la continuité géométrique et numérique, ils contribuent ainsi à faire émerger les nombres réels dans le Numérique) ;
- ils suscitent, voire imposent, par absence d'algorithmes décimaux, semblables à celui de la division ou de l'extraction de la racine carrée, la présence d'un instrument

"préfabriqué" et "souverain", aujourd'hui la calculatrice, hier les tables[18] ; ils sont donc aux premières loges de toute modification instrumentale.

- au-delà (et aussi à cause) de leur forte légitimité épistémologique, ils bénéficient d'une légitimité culturelle qui force leur présence dans l'EMS[19], malgré l'ampleur de l'outillage mathématique auxquels ils font appel. Toute décision de les faire vivre, notamment dans une classe de Collège, peut justifier le recours à l'instrument de calcul par la recherche d'un abaissement du coût mathématique et didactique. C'est ainsi que l'arrivée des calculatrices électroniques au Collège portait en elle l'espoir d'une simplification des calculs trigonométriques.

De plus le curriculum actuel de l'EMS place autour de la classe de Seconde les moments les plus forts pour leur bivalence épistémologique. En effet,

- en classe de Troisième, l'institution installe les calculs trigonométriques dans une Trigonométrie du triangle rectangle, entièrement incluse dans le cadre de la Géométrie métrique
- en classe de Seconde, l'institution crée les fonctions circulaires sin et cos (qui sont les premières fonctions transcendantes que rencontre l'élève) et leur ouvre ainsi le cadre de l'Analyse
- en classe de Première, l'entrée dans l'Analyse est consommée tandis que le travail de Géométrie métrique est réactivé.

2.3 la décision d'une ingénierie didactique

Les analyses que nous allons présenter dans les parties B et C seront menées essentiellement à partir de l'examen comparatif de manuels scolaires, de programmes et instructions officielles. Nous y ajouterons, pour la période contemporaine, des entretiens avec des enseignants. Mais, à en rester à ces méthodologies que nous pourrions, à la suite de Artigue (1990), qualifier d'externes, parce qu'externes à la classe, serait prendre deux risques, que Chevallard (1982) présente ainsi :

> [*celui de*] rencontrer notre objet de connaissance autrement que sous les espèces, ou du moins hors du contrôle empirique de l'objet réel dont l'élaboration théorique nous occupe […], [*celui de*] de négliger ce qui n'est nullement négligeable, et qui pourrait pourtant s'effacer de notre champ de conscience à n'y être pas empiriquement – c'est-à-dire agressivement – présent (page 50, cité par Artigue (1990)).

Pour notre objet d'étude, nous avons déjà noté la péjoration de l'acte instrumenté que semblent entretenir certaines contraintes institutionnelles propres aux institutions didactiques. Rester en dehors de la classe, et même en dehors de la classe ordinaire, nous ferait rencontrer la genèse instrumentale dans des formes d'où les traces de la genèse instrumentale collective à la charge de l'enseignant seraient minorées et d'où la

[18] Remarquons que la disparition de l'algorithmique décimale concerne maintenant les calculs des racines carrées et même parfois ceux des quotients. Mais les calculs trigonométriques ont une particularité supplémentaire par rapport aux racines carrées, qu'ils partagent dans E.M.S. avec les logarithmes et les exponentielles, celle de faire venir des nombres transcendants.

[19] Leurs applications dans les pratiques professionnelles de nombreux corps de métier ont pu justifier leur introduction au Collège.

matérialité de l'instrument serait absente. Il s'agit donc de nous investir dans des réalisations didactiques en classe et pour la classe.

> La réalisation didactique en classe a une fonction essentielle […] , celle de mise à l'épreuve des constructions théoriques élaborées dans les recherches par l'engagement de ces constructions dans un mécanisme de production (Artigue, 1990).

Nous avons opté pour deux dispositifs expérimentaux :

- un test destiné aux élèves de Seconde sans nous impliquer dans l'histoire didactique de telle ou telle classe
- une ingénierie didactique, où nous prendrons en compte des éléments de l'histoire de la classe concernée, où nous organiserons un processus de négociation avec son enseignant et où nous procèderons à des observations supplémentaires au cours du déroulement de l'expérimentation.

La conception et l'expérimentation de cette ingénierie sont exposées dans la partie D.

Notre étude se dessine maintenant autour d'un triple projet :

> ***1.*** *Analyser, sur les calculs trigonométriques, les formes de cohabitation de l'instrument de calcul, table ou calculatrice, avec l'approximation décimale.*
> ***2.*** *Concevoir, pour le moment de l'entrée en Analyse, et avec les nombres trigonométriques, une ingénierie, dont l'enjeu didactique est l'articulation souhaitée entre la calculatrice et l'approximation décimale.*
> ***3.*** *Expérimenter cette ingénierie et revenir sur l'hypothèse de recherche.*

Voici le plan de l'étude :

Partie B

Des tables trigonométriques à la calculatrice : évolution dans l'enseignement mathématique secondaire français de l'instrumentation numérique des calculs trigonométriques.

B1 : de Ptolémée à Napier, éléments d'analyse écologique dans la sphère savante
B2 : de Bézout à Bourbaki, éléments d'analyse écologique dans la sphère didactique

Partie C

Rapports institutionnels aux objets calculatrice et approximation numérique décimale dans les classes de troisième, seconde et première scientifique actuelles.

C1 : le Collège
C2 : la classe de Seconde
C3 : la classe de Première scientifique
C4 : bilan de l'analyse écologique des parties B et C

Partie D

Une ingénierie didactique et son expérimentation

D1 : présentation de l'ingénierie

D2 : la situation cos75°/0,25
D3 : la situation cos18°
D4 : la situation cos72°/cos9°
D5 : évaluation de l'ingénierie

Partie B

Des tables trigonométriques à la calculatrice : évolution dans l'enseignement mathématique secondaire français de l'instrumentation numérique des calculs trigonométriques

Chapitre B_1 : de Ptolémée à Napier, éléments d'analyse écologique dans la sphère savante

Chapitre B_2 : de Bézout à Bourbaki, éléments d'analyse écologique dans la sphère didactique

CHAPITRE B_1 : DE PTOLEMEE A NAPIER, ELEMENTS D'ANALYSE ECOLOGIQUE D'UNE ŒUVRE MATHEMATIQUE DANS LA SPHERE SAVANTE.

Toute table trigonométrique, et plus généralement toute table numérique, se présente à son utilisateur comme un tout cohérent et structuré : toutes les valeurs sont dépendantes les unes des autres (dépendance interactive), chaque morceau peut théoriquement reconstituer le tout (effet en retour du tout sur les parties).
Ces caractéristiques systémiques[20] nous permettent de l'habiller, le temps d'une analyse à perspective historique, d'un concept issu du paradigme écologique : celui d'écosystème. Un écosystème, lit-on en effet dans l'*Atlas d'écologie* (Pochothèque,1993), est "un ensemble d'éléments en interactions avec les autres, formant de ce fait un tout cohérent et ordonné[21]". Au-delà de la métaphore, cet emprunt aux sciences biologiques représente pour nous une certaine façon de questionner un réel mathématique et didactique[22], une façon où l'on s'efforce de mettre à jour les articulations internes et les contraintes externes qui peuvent expliquer les différents états de ce réel et les conditions de son évolution.

1. La table des cordes de Ptolémée

1.1 présentation de la table

Ptolémée insère dans l'Almageste (II^ièmre^ siècle après J.C.) la première réalisation[23] d'une œuvre mathématique magistrale, attachée d'abord à la Géométrie métrique au sens que, *à travers une problématique de modélisation d'un réel, elle est bâtie avec les moyens théoriques de la Géométrie euclidienne et avec des enjeux d'effectivité numérique.* Il répond au besoin qu'ont les astronomes (cosmographes, astrologues) et les géographes d'appréhender sous la forme d'un rapport numérique (la raison entre deux nombres entiers) le rapport que fait, dans un cercle, une corde variable avec son diamètre (la raison entre deux droites).

Ptolémée présente ainsi son travail (cf. documents 1 en Annexe de ce chapitre - Volume 1)[24] :

Évaluation des droites inscrites dans le cercle

---

20 Cf. *Les écosystèmes*, Frontier (Collection Que sais-je ?, PUF, 1999)

21 A titre d'exemple illustratif, les auteurs de cet ouvrage présentent le lac : "Un lac représente un type idéal d'écosystème, qui se maintient dans une situation qui, pour être dynamique, n'en reste pas moins stable".

22 Nous qualifions de didactique, tout exposé mathématique conçu à des fins de communication et de diffusion. Le texte de Ptolémée que nous étudions ici entre dans cette catégorie.

23 Plus exactement la première qui nous soit parvenue, puisque nous savons que Ptolémée a largement emprunté aux travaux de Hipparque de Samos (II^e^ siècle avant J.C.).

24 Toutes les références au texte de Ptolémée sont tirées de l'ouvrage *Mathématiques et mathématiciens* (Magnard, 1959, pages 364 et suivantes). Les passages soulignés le sont toujours par nos soins.

> Pour la facilité de la pratique, nous allons maintenant construire une table des valeurs des cordes en partageant la circonférence en 360°. Tous les arcs de notre table iront croissant d'un demi-degré, constamment, et nous donnerons pour chacun de ces arcs la valeur de la sous-tendante, en supposant le diamètre partagé en 120 parties. On verra, par l'usage, que ce nombre était le plus commode qu'on pût choisir. Nous montrerons d'abord comment, au moyen d'un nombre, le plus petit possible, de théorèmes, qui sont toujours les mêmes, on se fait une méthode générale et prompte pour obtenir ces valeurs. Nous ne nous bornerons pas à la table où l'on pourrait prendre ces valeurs sans en connaître la théorie, mais nous faciliterons les moyens de les éprouver et de les vérifier, en donnant les méthodes de construction. Nous emploierons en général la numération sexagésimale, pour éviter l'embarras des fractions ; et, dans les multiplications et les divisions, nous prendrons toujours les résultats les plus approchés, de manière que ce que nous négligerons ne les empêche pas d'être sensiblement justes.

Ainsi Ptolémée décide d'exprimer les rapports de différentes cordes au diamètre en *un ensemble de valeurs, ordonné par les valeurs d'un autre rapport*, celui des arcs à la circonférence. Disons, en termes modernes, qu'il exprime le rapport Corde / Diamètre comme une fonction numérique croissante du rapport Arc / Circonférence dont il donne un tableau de valeurs.
Pour ce faire, il prend deux options cruciales pour la construction de l'œuvre :

- celle de (re)utiliser le système sexagésimal : cela lui permet, après avoir fixé le diamètre et la circonférence, de présenter les raisons numériques des deux rapports comme *des chaînes de nombres entiers qu'il appelle valeurs*[25].
- celle de présenter, pour chaque rapport Corde / Diamètre une valeur dont il sait qu'elle n'est pas la valeur exacte mais *"la valeur la plus approchée".*

Nous ne rentrerons pas dans une étude épistémologique et historique sur la filiation de chacune de ces options avec ce que Dhombres (1980) appelle le courant numéricien des mathématiques grecques. Notre attention se porte directement sur la production et la manipulation de ces valeurs approchées. Soulignons deux propriétés fondamentales des valeurs :

- elles sont ordonnables entre elles : l'ordre est induit par celui des nombres entiers qui les composent et il recouvre exactement celui des raisons elles-mêmes.
- elles sont opérables entre elles : les opérations (addition, soustraction, multiplication, carré et racine carrée) prolongent celles qui sont entre nombres entiers et elles peuvent être compatibles avec l'ordre puisque "dans les multiplications et les divisions, nous prendrons toujours les résultats les plus approchés, de manière que ce que nous négligerons ne les empêche pas d'être sensiblement justes".

[25] Ces objets mathématiques ne devraient pas être appelés des nombres au sens que, du temps de Ptolémée, ils ne sont pas inclus dans un complexe théorique qui leur reconnaît le statut de nombres ; on pourrait les qualifier de *grandeurs numérales*, écrites dans le système sexagésimal, avec des qualités sémiotiques et instrumentales qui portent en germes celles des valeurs approchées décimales.

De même, un peu plus loin, nous allons emprunter à l'Algèbre moderne le terme de formules pour désigner l'expression d'une quantité dans un processus fait d'opérations successives sur d'autres quantités. Dans les deux cas, il s'agit simplement de commodités langagières.

Examinons comment Ptolémée dit obtenir ces valeurs. Pour cela désignons par cord(x°) la valeur de la corde sous-tendante d'un arc de x° ; notons que cord(x°) = $120.\sin(\frac{x}{2}°)$.

Ptolémée fait valoir trois procédés :

Un procédé algorithmique : à partir de plusieurs théorèmes attachés au corpus théorique des Eléments d'Euclide[26], Ptolémée fabrique deux valeurs de base, celle de cord72° et celle de cord60° ainsi que des formules calculatoires qui s'écrivent en notations modernes :

$$\mathrm{cord}(180-x)=\sqrt{120^2-\mathrm{cord}^2(x)}$$
$$\mathrm{cord}(\frac{x}{2})=\sqrt{60.(120-\mathrm{cord}(180-x))}$$
$$\mathrm{cord}(x-y)=\frac{\mathrm{cord}(x).\mathrm{cord}(180-y)-\mathrm{cord}(180-x).\mathrm{cord}(y)}{120}$$
$$\mathrm{cord}(x+y)=\sqrt{120^2-(\frac{\mathrm{cord}(180-x).\mathrm{cord}(180-y)-\mathrm{cord}(x).\mathrm{cord}(y)}{120})^2}$$

Ptolémée montre que ces formules permettent d'obtenir les valeurs de toutes les cordes des arcs multiples de 1,5° (ceux qui "rendus doubles pourront être divisés par 3") à partir de celles de cord72° et cord60°. Pour ces valeurs, il est théoriquement[27] possible d'atteindre n'importe quelle précision souhaitée. Dans la table, Ptolémée choisit les arrondis à la seconde de partie près, le diamètre comportant 120 parties.

Un procédé d'encadrement : Ptolémée y fait appel pour cord1° dont il reconnaît que la valeur n'est pas accessible par les formules. À l'aide d'un théorème de géométrie qui établit ce que nous appellerions maintenant la décroissance de la fonction $\frac{\mathrm{cord}(x)}{x}$, Ptolémée produit l'encadrement $\boxed{\frac{2}{3}.\mathrm{cord}1{,}5° < \mathrm{cord}1° < \frac{4}{3}.\mathrm{cord}0{,}75°}$ grâce aux deux multiples de 0,75° qui entourent 1°. Constatant que les deux bornes de l'encadrement sont égales quand elles sont calculées à la seconde près, il en tire la valeur de cord1° à la seconde près.

On peut voir ce procédé comme une interpolation linéaire, celle de la fonction $\frac{\mathrm{cord}(x)}{x}$ sur l'intervalle [0,75 ; 1,5]. On peut le voir aussi comme l'amorce d'un algorithme d'approximations successives par emboîtements successifs puisqu'il est possible de refaire un tel encadrement avec deux multiples de 0,375°, puis de 0,1875°, etc.[28].

[26] On y trouve le fameux théorème sur le quadrilatère inscriptible dans un cercle.

[27] Le théorique dont nous parlons ici renvoie à la convergence d'algorithmes qui ne sont ni étudiés ni même formulés par Ptolémée. En pratique, l'affaire est redoutable car il faut ne pas craindre de manipuler des chaînes de plus en plus longues, surtout si ne sait pas quelle précision est suffisante au départ pour obtenir la précision souhaitée à l'arrivée.

[28] Nous ne chercherons pas à trancher entre ces deux interprétations.

La valeur (approchée) de cord1° fournit celle de cord0,5° et Ptolémée dit qu'il peut ainsi remplir la table de toutes les valeurs non atteintes par le premier procédé, "attendu que nous inscrivons par demi-degrés[29]".

Un procédé d'interpolation linéaire : Ptolémée le mentionne à l'utilisateur pour les valeurs des cordes des arcs qui ne sont pas multiples de 0,5°. C'est avec lui qu'il termine la présentation de ce qu'il a appelé la théorie de la Table :

> Telle est, à mon avis, la manière la plus facile de trouver toutes les cordes dans le cercle. Mais, comme je l'ai déjà dit, afin d'avoir sous la main les valeurs toutes prêtes de ces cordes pour tous les cas où l'on en a besoin, nous placerons, ci-dessous, des tables de 45 lignes chacune, disposées en 3 colonnes, dont la première contiendra les grandeurs des arcs croissant successivement par demi-degrés ; la seconde donnera les cordes évaluées en parties dont le diamètre en contient 120 ; et la troisième offrira le trentième des accroissements de ces cordes pour chaque demi-degré ; de sorte, qu'ayant ainsi l'augmentation moyenne, pour un soixantième, sensiblement égale à l'augmentation juste, nous pourrons calculer promptement les parties proportionnelles qui conviendront à chacune des cordes des arcs intermédiaires à ceux qui sont marqués dans ces tables, de demi en demi degrés.

En résumé,

L'objet table des cordes apparaît comme le point de fusion de deux organisations mathématiques (deux sous-systèmes), une qui justifie et dirige la construction de ses valeurs et l'autre qui réalise la construction et organise son instrumentalisation.

Sa réalisation fonde des pratiques mathématiques nouvelles qui sont autant de pousses praxéologiques :

- la transformation de rapports de grandeurs en grandeurs numérales appelées valeurs, ordonnables et opérables entre elles,
- l'organisation de la dépendance continue entre deux rapports de grandeurs dans un ensemble numérique discret qui met en correspondance les valeurs de l'un et l'autre des deux rapports,
- la réalisation de cet ensemble de façon ordonnée avec un pas et une précision fixes,
- l'exploitation rationnelle de cet ensemble

Avec elle, émergent de nouveaux objets mathématiques[30] :

- **des rapports de longueurs** dépendants d'un rapport d'arcs (un angle). Ces rapports sont les premiers rapports trigonométriques dont on forme une table des valeurs approchées.
- **des méthodes d'approximations des valeurs de ces rapports**
- **des méthodes de calcul approché sur des valeurs ainsi tabulées**

---

[29] On peut s'étonner du besoin de calculer cord0,5° alors que la connaissance de cord1° suffit, en utilisant alternativement la somme et la différence. En pratique cependant la formule de la différence comporte moins d'opérations élémentaires.

[30] Chevallard (1989) a proposé le terme *praxèmes* pour désigner ces objets mathématiques pris dans les pratiques.

1.2 un tout cohérent et structuré

Le dynamisme et la stabilité de ce système sont commandés par des tensions internes et des contraintes produites par l'environnement.

Une première tension interne : l'appel à des algorithmes pour les opérations élémentaires que comportent les formules.

C'est l'extraction de la racine carrée qui est principalement (mais pas exclusivement) concernée. Nous savons que la question est réglée dès l'époque de Ptolémée par la méthode que Théon d'Alexandrie expose dans ses *Commentaires sur l'Almageste* (IV ième siècle après J.C.). Théon y explique[31], dans le cadre de la Géométrie grecque, comment déterminer une approximation sexagésimale de la racine carrée à la seconde près (et même, en itérant à toute unité sexagésimale près).

Une deuxième tension interne : la propagation des erreurs dues aux arrondis.

Les commentaires de Ptolémée laissent dans l'ombre les éléments théoriques sur lesquels il s'appuie pour contrôler la qualité de l'approximation produite. Il se contente de signaler à l'utilisateur certains moyens de contrôler la fidélité de sa table à celle qu'il a lui-même fabriquée :

> Il est aisé de voir que, si l'on était dans le doute de quelque faute de copie, pour quelqu'une de ces cordes, on pourrait en faire aisément la vérification ou la correction à l'aide des théorèmes précédents, soit par celui qui donne la corde de l'arc double, soit par celui qui donne celle de la somme ou de la différence, soit enfin par celui qui donne la corde du supplément au demi-cercle.

Mais que fait-on de plusieurs valeurs différentes que pourrait apporter un tel travail de vérification, si on ne sait pas discriminer la bonne ? comment corriger ? Il y a, de ce point de vue, tout lieu de douter que la puissance de contrôle à la disposition de Ptolémée soit suffisante pour garantir l'exactitude de ses propres valeurs approchées.

On peut s'en rendre compte en suivant l'auteur pas à pas dans un exemple de cheminement calculatoire qu'il expose (cf. document 1 en Annexe – Volume 1). Il s'agit de passer d'une corde à celle de son supplément au demi-cercle :

> Par exemple la corde qui sous-tend 36° de la circonférence, ayant été démontrée de $37^p4'55''$ du diamètre, et son carré de $1375^p4'15''$, tandis que le carré du diamètre est de 14400, le carré de la corde qui sous-tend le reste 144° de la demi-circonférence, sera donc de $13024^p55'45''$, et la longueur de cette corde sera de $114^p7'37''$ à peu près et de même pour les autres.

Or, en travaillant avec les arrondis (que semble préférer Ptolémée), on découvre :

> que d'une part $(37^p4'55'')^2 = 1375^p4'14''$ au lieu de $1375^p4'15''$

---

[31] On trouvera, dans l'ouvrage collectif *Histoire d'algorithmes* (Belin, 1993) un extrait du texte de Théon d'Alexandrie et un commentaire sur sa méthode.

> d'autre part qu'en fait, cord144° = $114^p7'36''$ et qu'il est possible de trouver cet arrondi exact en partant de cord36°= $37^p4'55''20'''$ avec un ordre sexagésimal supplémentaire.

De même, lors du calcul de cord1°, Ptolémée passe, sous nos yeux, de cord1,5° = $1^p34'15''$ à cord0,75° = $0^p47'8''$ ce qui laisse penser qu'il ne calcule pas avec une valeur plus précise de cord1,5° que celle qu'il affiche. En effet cord1,5° = $1^p34'14''42'''$ produit cord0,75° = $0^p47'7''25'''$ dont l'arrondi est $1^p47'7''$.

Enfin, dans la table elle-même, la valeur de cord2° est inexacte puisque, en arrondi, cord2° = $2^p5'39''$ au lieu de $2^p5'40''$. Ptolémée nous dit qu'il faut calculer cette valeur à partir de cord1,5° et cord0,5°. L'erreur que nous constatons ici est-elle due à l'emploi de cette méthode sans prendre la précaution de travailler avec "plus de chiffres" (au moins un ordre sexagésimal supérieur) ? Pourtant Ptolémée n'ignore pas la nécessité de cette précaution puisque l'on trouve des tierces de parties dans les différences tabulaires destinées à l'interpolation linéaire. Mais il ne formule pas, dans ce qu'il appelle la théorie de la table, de condition suffisante à l'obtention de la précision souhaitée.

La maîtrise de la propagation des erreurs passerait par différents choix : descendre les ordres sexagésimaux des valeurs initiales et des valeurs intermédiaires (ou augmenter le rayon du cercle), diminuer le pas additif (0,5° chez Ptolémée), préférer telle formule à telle autre. Nous ne savons pas quels furent les critères des choix de Ptolémée dans la réalisation effective des calculs. Nous supputons que, même si toute valeur approchée est accessible théoriquement à la précision souhaitée, pratiquement, le coût des calculs a pu s'avérer trop exorbitant pour assurer l'exactitude du résultat annoncé dans la table[32].

Une première contrainte externe : la lisibilité de la table ; choix du pas additif.

Quand Ptolémée dit que : "Pour la facilité de la pratique, nous allons maintenant construire une table des valeurs des cordes en partageant la circonférence en 360°. Tous les arcs de notre table iront croissant d'un demi-degré, constamment", nous comprenons que le choix du pas additif s'est imposé à lui aussi pour des raisons de commodité de lecture et d'usage de la table. On peut penser que ce sont ces mêmes raisons qui le poussent à affronter le délicat calcul de cord1° alors qu'il ne possède pas de formule de trisection de l'angle. En effet, sans cette valeur, il ne peut pas employer les formules d'addition ou de soustraction pour obtenir la valeur de cord5° et celles des cordes de tous les angles multiples de 5° (exception faite des multiples de 15°).

Une deuxième contrainte externe : le développement des problèmes de Géométrie métrique.

Ptolémée répond à une demande sociale que la diffusion de sa table va aiguiser. Nous ne manquons pas de récits qui montrent comment le désir d'un horoscope bien fait pour les "Grands de ce monde" a fait de Ptolémée l'auteur grec le plus connu et le plus étudié pendant des siècles. Plus sérieusement, l'histoire des peuples et des empires montre que

---

32 Dans son livre, *Les mathématiques arabes,* Youschkevitch va jusqu'à déclarer : "Le calcul de Ptolémée donne lieu à une erreur sensible dès le niveau des tierces" (page 147 de l'édition française chez Vrin, 1976).

toute structuration politique et économique d'un territoire suscite des besoins de métrage qui créent de nouveaux problèmes de Géométrie métrique lesquels modifient la demande en tables numériques.

Une troisième contrainte externe : l'augmentation de la précision sur les valeurs tabulées.

Le perfectionnement des tables trigonométriques passe par l'augmentation de la précision sur chaque valeur et conjointement par la diminution du pas additif. Or, dans la Théorie que présente Ptolémée une telle recherche oblige à reprendre tous les calculs et à les alourdir. Il est important de noter ici que l'augmentation de la précision sur chaque valeur et la diminution du pas additif ne peuvent être arbitrairement séparés. En effet, une augmentation de l'ordre sexagésimal sur deux valeurs successives ne se reporte sur les valeurs qui leur sont intermédiaires que si l'on dispose de moyens d'interpolation plus efficaces que l'interpolation linéaire. Sinon il faut diminuer le pas entre les deux valeurs.

Une quatrième contrainte externe : les justifications mathématiques de la construction.

On l'a vu, Ptolémée n'hésite pas à fournir certaines clefs théoriques de la construction de la table, celles qui inscrivent son travail dans le corpus euclidien de la Géométrie grecque. On peut penser qu'une telle décision relève de la nécessité d'une légitimation culturelle pour l'œuvre elle-même. Ptolémée se justifie aussi par la nécessité pour l'utilisateur de se garder de toute divulgation maladroite qui mettrait en danger sa fiabilité.

Ces contraintes, aussi bien internes qu'externes vont faire évoluer le système. L'image de l'écosystème surgit de nouveau : "Les écosystèmes sont des systèmes ouverts qui entretiennent constamment des échanges de matière et d'énergie avec le milieu" (*Atlas d'écologie,* 1993).

2. De la table des cordes aux tables log-trigo

2.1 l'évolution de l'écosystème vers …

Les éléments d'histoire des mathématiques à notre disposition[33] nous permettent de suivre l'évolution de cet écosystème et d'apprécier ses capacités à garder sa cohérence interne tout en assimilant des apports externes. Relevons dans un premier temps :

- un élargissement de sa base épistémologique avec la fondation de la Trigonométrie comme partie des mathématiques distincte de la Géométrie : elle est la science de la résolution des triangles plans et sphériques, dont les résultats théoriques sont

[33] Rappelons ici nos sources documentaires principales : *Les mathématiques arabes* de Youschkevitch, opus déjà cité, *Mathématiques et mathématiciens* de Dedron et Itard (Magnard, 1959), *Histoire d'algorithmes*, ouvrage collectif (Belin, 1993), *Mathématiques au fil des âges* , ouvrage collectif (Gauthier-Villars, 1987) et *Les logarithmes et leurs applications* par Delachet (Collection Que sais-je ?, Presses Universitaires de France, 1960).

Redisons aussi que les passages soulignés sont de notre propre chef.

intégrés par d'autres sciences (mécanique, optique, etc.) et dont les applications investissent de nombreuses pratiques professionnelles ;

- la création concomitante d'une multitude de rapports trigonométriques : sinus , sinus verse, cosinus, tangente, cotangente etc. ;
- l'intégration de nouveaux algorithmes numériques, notamment de plusieurs algorithmes d'approximations successives et de nouveaux procédés de calcul approché ;
- le passage de la numération sexagésimale à la numération décimale ;
- l'invention des logarithmes décimaux.

On peut distinguer plusieurs axes d'évolution :

- **premier axe** : l'essor de la Géométrie métrique au sein de la Géométrie euclidienne.

Avec l'intérêt croissant porté aux problèmes pratiques de mesures des grandes distances su Terre ou des distances inaccessibles, la Trigonométrie se diversifie et se dote d'une multitude de tables différentes (celles de sinus, celles de tangentes etc.) et de formules adaptées à la résolution de ces problèmes. Il est par exemple devenu possible, en Occident à l'époque de Viète (deuxième moitié du XVI ième siècle), de "résoudre" tout triangle plan (et pas seulement les triangles rectangles) par l'emploi de formules adaptées telles que :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} \text{ ou } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}}{\tan\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}} \text{ ou } \cos\widehat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Dans ce mouvement d'apparition et de résolution de problèmes, les calculs numériques ont tendance à gonfler. Pour faciliter le travail du pratiquant, il est alors commode de créer de nouveaux rapports et d'en donner les tables[34]. D'un autre côté, ces formules se renvoient les différents rapports trigonométriques et constituent, notamment à partir des travaux de Viète, un corpus algébrique très développé.

- **deuxième axe** : la diminution du pas et à l'augmentation de la précision

On voit ainsi les efforts de nombreux mathématiciens se concentrer sur certaines valeurs clefs telles $\sin\frac{1}{2}°$ et $\sin 1°$. Ils empruntent différentes voies pour traduire numériquement la continuité géométrique de la dépendance du rapport trigonométrique d'avec l'angle.

> un premier exemple : l'encadrement de $\sin\frac{1}{2}°$ réalisé par Abu-l-Wafa (X$^{\text{ième}}$ siècle après J.C.) :

$$\frac{1}{3}(\sin(x+3h) - \sin x) < \sin(x+h) - \sin x < \frac{1}{3}(\sin x - \sin(x-3h))$$

[34] Il a existé des tables de cosécantes (inverse du sinus) et de sécantes (inverse du cosinus).

avec $x = \frac{15}{32}°$ et $h = \frac{1}{32}°$ qui utilise la décroissance de $\frac{\sin x}{x}$ et les valeurs initiales de sin72° et sin60°.

> un autre exemple : la résolution par approximations successives d'une équation du troisième degré dont la racine positive est sin1°. Mise au point par Al Kashi (XIV$^{\text{ième}}$ siècle après J.C.), elle utilise la relation $\sin 3x = 3.\sin x - 4 \sin^3 x$ et un algorithme défini par la récurrence $x_{n+1} = \frac{a + x_n^3}{b}$.

> un dernier exemple : celui des règles d'interpolation parabolique préconisées par Al-Biruni (XI$^{\text{e}}$ siècle après J.C.) pour pallier les faiblesses de l'interpolation linéaire.

Ces exemples illustrent comment la problématique de la construction de la table des sinus participe à une maîtrise de plus en plus sûre du continuum numérique et à l'élaboration de méthodes d'approximation[35].

- **troisième axe** : la simplification calculatoire, au fur et à mesure que grandit l'exigence de la précision en même temps qu'augmente l'enchevêtrement des formules dans la résolution de problèmes.

Est d'abord visée la simplification des algorithmes des opérations élémentaires et le remplacement de la numération sexagésimale par la numération décimale est un pas fondamental dans cette direction.
On peut citer aussi le procédé prostaphérique[36] capable de transformer une multiplication en une addition grâce à la formule $2.\sin x .\cos y = \sin (x + y) + \sin (x - y)$.

Mais le pas plus spectaculaire est l'invention des logarithmes dont on dit couramment qu'elle fut commandée par le besoin impérieux de faciliter les calculs des astronomes qui devenaient astronomiques à force d'être trigonométriques.

2.2 … un complexe d'écosystèmes

Ainsi, à la fin du 17 $^{\text{ième}}$ siècle l'écosystème initial s'est développé à un point tel que, pour reprendre notre fil écologique, nous pouvons parler d'un complexe d'écosystèmes dont l'Atlas de l'écologie (Pochothèque,1993) dit qu' "ils se caractérisent par une origine commune ou des processus dynamiques communs".

Ce complexe est entièrement construit à cheval sur le corpus euclidien et sur le système numérique décimal et coordonne de nombreuses *tables numériques, toutes constituées de valeurs approchées décimales, avec choix d'un pas décimal et d'une précision décimale*. C'est l'explosion de la technologie décimale, du moins dans le monde des savants.

---

35 Au XVI$^{\text{e}}$ siècle, l'astronome allemand Rheticus, consacra plus de 10 ans de sa vie à calculer une table de 15 décimales de sinus avec un pas de 10". Il utilisait des algorithmes à base de séries convergentes.

36 C'est un procédé qui a précédé l'invention des logarithmes. L'acte de naissance officiel serait dans l'ouvrage *Astrolabe* de Clavius (1593).

Arrêtons-nous justement sur l'invention de Napier. La définition que donne Napier lui-même de ses logarithmes, en 1614, montre bien la filiation de l'invention avec les calculs trigonométriques et l'imbrication avec les problèmes d'approximation numérique :

> Le logarithme de tout sinus est un nombre qui exprime, avec une grande approximation, la ligne qui augmente également dans des temps égaux pendant que la ligne du sinus total décroît proportionnellement dans ce sinus, les deux mouvements ayant lieu dans le même temps, et au commencement avec la même vitesse. (citation extraite du *Canon Mirificus* de Napier, 1614, par *Histoire d'algorithmes*, opus déjà cité, page 365).

La correspondance entre les deux mouvements, l'un exponentiel et l'autre affine, que Napier pense ici *continûment*, il la réalise en fait *discrètement*, grâce à la mise en rapport d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique (visitée déjà par Archimède dans l'*Arénaire*). Laissons Delachet (1960) expliquer cette caractéristique fondamentale d'un point de vue épistémologique :

> Il n'y a qu'à faire ce rapport commun [*celui entre la suite géométrique et la suite arithmétique*] si près de l'égalité, que la progression marche par des pas excessivement lents, de sorte qu'un nombre quelconque donné, s'il ne tombe pas juste sur l'un des termes de la progression, se trouve du moins compris entre deux termes si peu différents l'un de l'autre que l'erreur soit négligeable […]
>
> Mais quelque lente que soit la raison de cette progression, ce n'est encore que l'expression d'un mouvement intermittent, tandis que la définition népérienne du logarithme exige que l'on détermine les indices de rang qui correspondraient aux mêmes termes engendrés par un mouvement continu. Napier n'obtient pas l'expression absolue de cette rectification, comme nous pourrions aujourd'hui le faire par nos méthodes différentielles, mais en comparant les conditions essentielles du mouvement continu à celles du mouvement intermittent, il établit des limites mesurables entre lesquelles le logarithme d'un nombre donné est toujours compris ; de sorte que si ces deux limites diffèrent entre elles seulement au-delà de l'ordre de décimales que l'on veut conserver, on peut légitimement prendre l'une quelconque, ou mieux encore leur demi-somme pour l'expression suffisamment approchée du logarithme.
>
> Il résout ainsi complètement le problème général d'enlacer tous les nombres, exactement ou approximativement, dans une même progression géométrique.

La numérisation du continuum géométrique (et cinématique) est mise en forme *arithmétiquement*. Cette mise en forme, Napier la conçoit d'abord sans passage automatique d'un produit à une somme à cause d'un terme constant parasite. Il la retravaille avec l'aide de Briggs pour aboutir aux logarithmes décimaux. La publication par ce dernier, en 1624, de l'*Arithmétique logarithmique* (qui contient une théorie de la construction des tables, de leurs usages et une première table à 14 décimales) marque un stade dans l'évolution de l'œuvre mathématique amorcée par la table des Cordes autour de deux organisations que nous avons déjà décrites :

- celle qui rend compte des objets et des problèmes qui mobilisent les tables (l'instrumentation par les tables) et dirige la construction : elle tire encore sa légitimité de la Théorie eudoxienne des rapports et des proportions.

- celle qui rend compte des objets et problèmes qui réalisent leur construction et organise leur instrumentalisation : elle est maintenant tout entière placée dans le monde numérique décimal encore jeune mais déjà algébrisé[37].

> *C'est ce complexe d'écosystèmes que représente l'ensemble des tables numériques trigo, Log et Log-Trigo amorcé par l'œuvre de Ptolémée qui sert, dès la fin du XVII^e^ siècle, de référence savante à l'enseignement mathématique secondaire français, pour le calcul numérique approché.*

C'est ce que nous allons montrer dans le prochain chapitre.

Remarquons auparavant que l'évolution, dans la sphère savante, de ce complexe d'écosystèmes ne se termine pas sur le travail de Briggs. Tout au contraire, elle se poursuit :

- à travers de nouvelles méthodes numériques d'approximation qui se développent dans le cadre de l'Analyse, à base de différences finies et de séries infinies convergentes, et pour certaines forgées dans le "commerce" des tables elles-mêmes[38] ;
- avec l'inscription des tables en tant que tableaux de valeurs de fonctions transcendantes ; la cohérence passe de la table à la fonction et les théories de construction des valeurs s'appuient dorénavant sur les propriétés analytiques de fonctions réelles ou complexes ;
- autour de réactualisations des tables pour les sphères professionnelle et didactique pour prendre en compte les changements d'utilisateurs et d'environnements mathématiques [39] ; elles sont par exemple motivées par de nouveaux choix d'unité d'angle, de pas, de précision ou de fonctions à tabuler ;
- avec la création de nouvelles tables numériques, telles les tables financières ou celles de lois de probabilité ;
- par l'intégration progressive des tables dans tous les instruments de calcul électronique à la fois dans la mise au point de nouveaux algorithmes de construction et dans mise en forme de tableaux de valeurs à pas et précision programmables ; les théories de construction des valeurs sont de nouveau bousculées puisqu'elles plongent maintenant dans l'Algorithmique et l'Analyse numérique.

Le changement de support matériel que représente le passage du papier à l'écran ne marque pas, dans la sphère savante, la fin des tables numériques. Au contraire ! On peut s'en persuader par l'abondance des travaux en *Arithmétique de l'ordinateur*[40]. Quoiqu'en

---

37 Cette affirmation ne nous empêche de reconnaître dans le travail de Briggs de nombreux éléments mathématiques annonciateurs d'une insertion du Numérique dans le champ de l'Analyse. On pourra, pour s'en convaincre, se référer, à l'article de Farey et Perrin dans Repères Irem n°21 (Topiques éditions, 1995). Notons aussi que c'est Briggs qui introduit les notions de mantisse et de caractéristique

38 "John Speidell, dans un ouvrage intitulé New Logarithms, publié à Londres en 1619, réajuste les logarithmes de Napier en introduisant les logarithmes naturels (de base e) à partir des fonctions trigonométriques" (Colette, *Histoire des mathématiques*, tome 1, 1973).

39 La dernière actualisation d'envergure dans la sphère didactique, avant l'arrivée des calculatrices, est celle de Laborde (Dunod, 1970). Elle contient outre les quatre lignes trigonométriques les plus usuelles et les logarithmes décimaux , les fonctions logarithme népérien, exponentielle de base e et e^{-1} ainsi que les fonctions hyperboliques.

40 Muller (1998) définit un programme de recherche qu'il intitule "le dilemme du fabricant de tables" autour du problème de l'arrondi correct des fonctions algébriques élémentaires (sin, cos, log, etc.).

disent certains thuriféraires de l'importation des instruments de calcul électronique dans la classe de mathématiques - au nom d'une certaine idée de la modernisation de l'enseignement - la disparition complète des tables numériques de l'EMS est, en tout premier lieu, le produit croisé de choix curriculaires et de contraintes institutionnelles au sein du système d'enseignement.

CHAPITRE B_2 : DE BEZOUT A BOURBAKI, ELEMENTS D'ANALYSE ECOLOGIQUE DANS LA SPHERE DIDACTIQUE.

Dans ce deuxième chapitre, nous examinons le processus de la transposition didactique des calculs numériques en Trigonométrie[41] en dégageant les réponses du système d'enseignement à ce que Chevallard (1991) appelle l'usure du savoir enseigné :

> Usure, qu'on peut dire "biologique", qui l'éloigne trop visiblement du savoir savant. Usure "morale", ou obsolescence, qui le rapproche dangereusement du savoir banalisé […] Dans les deux cas, l'usure du savoir enseigné entraîne à terme l'incompatiblisation du système d'enseignement avec son environnement. Les mathématiciens s'inquiètent de l'inauthencicité d'un enseignement à leurs yeux trop étranger aux formes contemporaines de savoir dont ils se sentent les responsables naturels. Les parents se persuadent de l'inadéquation du système d'enseignement, dont ils soulignent bientôt à plaisir l'archaïsme et le manque de dynamisme. Les enseignants s'émeuvent du discrédit où ils se voient tomber, et s'irritent de ce double regard de suspicion jeté par-dessus leurs épaules, qui attente à l'autonomie nécessaire du fonctionnement didactique – et les empêchera, à terme, de faire leur métier… Pour rétablir la compatibilité, un flux de savoir, en provenance du savoir savant, celui des spécialistes, devient indispensable. Le savoir enseigné est devenu trop vieux par rapport à la société ; un apport nouveau resserre la distance avec le savoir savant, celui des spécialistes. Là est l'origine du processus de transposition didactique (Chevallard, 1991, page 26 et 27).

Remarquons que ces réponses sont aussi adaptées à d'autres sollicitations sociétales sur le système d'enseignement, telles :

- celle de discriminer les besoins sociaux de formation et de scolarisation qui condamne le système d'enseignement à fragmenter les savoirs dans différentes institutions dont les objectifs affichés sont socialement différents.

Ainsi les calculs trigonométriques, d'abord écartés des classes "inférieures" de l'EMS descendront-ils, dès la fin du XIX^{e} siècle, jusque dans les classes de Quatrième et Troisième (premier cycle de l'EMS) mais en restant enfermés dans le triangle rectangle[42].

- celle de développer une mathématique au service des autres disciplines scientifiques ou technologiques.

Par exemple le moment curriculaire de l'introduction des fonctions circulaires (actuellement en classe de Seconde) répond en partie à la demande formulée par l'enseignement de la physique de pouvoir procéder à l'étude des phénomènes périodiques de base en disposant d'éléments théoriques mathématiques déjà installés. La pression de l'enseignement de la physique se fait aussi fortement sentir sur les

[41] Nous maintenons notre choix de ne regarder que la Trigonométrie plane.

[42] La manifestation la plus visible de cette discrimination était encore récemment la séparation Collège/Lycée. Elle touchait donc de plein fouet la Trigonométrie en la coupant en deux morceaux, la trigonométrie du triangle rectangle et celle des fonctions circulaires. Il n'est d'ailleurs pas complètement étranger à notre étude de remarquer que la contestation par la société française du bien-fondé de cette séparation Collège/Lycée a suivi de très près la mise en place de la contre-réforme et l'arrivée des calculatrices, mais que cette séparation perdure au sein de la Trigonométrie.

problèmes d'approximation dans des calculs numériques avec données expérimentales dépendantes de la mesure pratique des grandeurs.

Redisons que ces réponses nous intéressent pour les modifications qu'elles engendrent (ou n'engendrent pas) dans les pratiques institutionnelles relatives à l'approximation numérique. Dans notre recherche, nous nous appuyons sur des travaux récents de didactique des mathématiques relatifs à la transposition didactique de l'objet nombre et aux différents rapports au Numérique dans l'institution EMS au cours de son évolution historique[43].Après un premier repérage dans un traité des débuts historiques de l'EMS (fin du XVIII^{e}), l'étude ne suivra pas un fil chronologique mais thématique.

1. Le traité de Bézout

Nous partons de l'idée que ce traité[44] est représentatif du travail de transposition didactique des débuts de l'EMS.Neyret (1995) signale qu'il a servi comme livre de référence dans les écoles centrales au moment de la Révolution française et qu'il a été beaucoup utilisé à la fin du XVIII^{e} et au début du XIX^{e} siècle. Pour lui :

> ce traité s'inscrit dans la lignée du travail de transposition didactique qui a consisté à élaborer une théorie moyenne[45] à propos des systèmes de nombres [*où la théorie des fractions s'est imposée au cours des siècles précédents face à la théorie des rapports qui remontait au corpus euclidien*].

C'est sur cette théorie moyenne que, pour Bronner (1997), se constitue l'édifice du Numérique durant toute la période qu'il appelle classique (de 1854 à 1947).

Ce traité nous offre donc le moyen de comprendre les bases du devenir didactique du complexe d'écosystèmes constitué autour des tables trigo, log, log-trigo (cf. chapitre B_1). Il s'organise en trois parties : Arithmétique - Géométrie et Trigonométrie - Algèbre. Entrons directement par les chapitres de Trigonométrie.

---

43 Nous nous référons le plus souvent aux thèses de Assude (1992), de Neyret (1995) et de Bronner (1997). Cette dernière établit un découpage temporel de l'histoire de l'EMS de 1854 à nos jours, pour le Numérique.

44 Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine (1771). Comme ce traité a connu beaucoup de rééditions avec des paginations différentes, les citations que nous ferons, seront accompagnées du numéro de paragraphe de la première édition. Signalons que, dans ces citations, les passages soulignés le seront de notre fait.

45 Neyret se réfère ici aux travaux de Chevallard et Jullien (1989) qui désignent ainsi l'état au XIX^{e} siècle de la transposition didactique relative au Numérique, caractérisable notamment par l'assimilation progressive de la notion de rapport dans celle de fraction et de division.

1.1 les organisations mathématiques autour des calculs trigonométriques

Après la présentation de la Trigonométrie comme art de résoudre les triangles, l'introduction des huit lignes trigonométriques[46] d'un arc de cercle est justifiée par "l'intérêt qu'elles peuvent tenir lieu des angles dans le calcul des triangles" (§ 268). En effet, pour Bézout :

> Ce ne sont pas les angles même qu'on emploie dans le calcul des triangles : on substitue aux angles des lignes qui, sans leur être proportionnelles, sont néanmoins propres à représenter les angles, et sont d'ailleurs plus commodes à employer dans le calcul, parce que, comme nous le verrons ci-après, elles sont proportionnelles aux côtés des triangles (§ 268)

La définition d'une ligne trigonométrique est ici celle d'un segment de droite attaché à un arc géométrique moindre qu'un demi-cercle et mesuré en degrés[47]. Elle est menée par des considérations sur un demi-cercle de rayon R quelconque, des arcs et des triangles. On débouche rapidement sur la question des *valeurs de ces lignes*, lesquelles sont les nombres qui donnent leurs longueurs rapportées à celle du rayon.

> Les livres qui renferment les valeurs de toutes les lignes dont il vient d'être question, font ce qu'on appelle des Tables de Sinus ; elles renferment ordinairement non seulement des valeurs numériques de toutes ces lignes, mais encore leurs logarithmes qu'on emploie aussi souvent qu'on le peut à la place des valeurs numériques : ces mêmes Tables renferment aussi des logarithmes des nombres naturels ; <u>telles sont celles que nous avons indiquées dans l'Arithmétique</u> (§ 280).

Les valeurs des lignes trigonométriques et de leurs logarithmes ont le statut de nombres et Bézout a traité le Numérique dans la première partie de son cours, intitulée *Arithmétique*. Nous ne trouvons aucune allusion à la nature (rationnelle, irrationnelle ?) des nombres-valeurs des lignes trigonométriques : ils se présentent systématiquement sous l'écriture décimale, y compris cos30 qui, pour Bézout, "vaut 0,86603". Les tables trigonométriques (à 5 chiffres), celles des logarithmes des valeurs trigonométriques (à 7 chiffres) et celle des logarithmes décimaux[48] (à 7 chiffres) sont associées dans un livre de Tables qui n'est pas annexé au livre du Cours proprement dit.

Le paragraphe 280 se poursuit par l'explicitation *d'un choix didactique important, celui d'entrer dans une organisation mathématique de la construction d'une table trigonométrique*.

> Avant que d'exposer les usages de ces Tables, pour la résolution des triangles, il ne nous reste plus qu'à parler de leur formation, c'est-à-dire de la méthode par laquelle on a calculé

---

[46] Ce sont le sinus, le cosinus, le sinus-verse, le cosinus-verse, la sécante, la cosécante, la tangente et la cotangente. Notons tout de suite ici que la partie Trigonométrie comporte une Trigonométrie plane et une Trigonométrie sphérique. Nous ne nous intéressons qu'à la première puisque la seconde a disparu totalement de l'EMS actuelle bien avant la contre-réforme de 1982.

[47] Le choix du demi-cercle pour l'entrée en Trigonométrie est déjà une marque importante de la transposition didactique importante car d'autres choix sont possibles : le cercle tout entier, le quart de cercle, pas de cercle. Bézout maintient le lien avec la géométrie du cercle ; on sait que ce lien sera abandonné dans certaines des réformes qui avanceront les premiers pas en Trigonométrie en Collège.

[48] Des logarithmes que Bézout appelle logarithmes naturels

> ou pu calculer les sinus. Nous nous y arrêterons d'autant plus volontiers que les propositions que nous avons à établir sur ce sujet, nous serviront ailleurs.

Quelles sont les propositions dont parle Bézout ? Ce sont celles qui sont présentes chez Ptolémée, adaptées au sinus au lieu de la corde. Elles décrivent des procédés calculatoires pour :

- connaissant le sinus d'un arc, calculer le sinus de l'arc complément au quart de cercle, le sinus de l'arc moitié[49] et celui de l'arc double
- connaissant les sinus respectifs de deux arcs, calculer le sinus de la différence ou de la somme de deux arcs.

Il faut ajouter la proportion suivante :

$$\frac{\sin AB + \sin AC}{\sin AB - \sin AC} = \frac{\tan\frac{AB + AC}{2}}{\tan\frac{AB - AC}{2}}$$ (où AB et AC sont deux arcs du demi-cercle),

laquelle servira pour la résolution d'un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle compris entre eux. Les justifications sont construites à la manière de Ptolémée[50], en puisant dans le corpus euclidien, les éléments théoriques clefs, notamment les théorèmes relatifs à la similitude des triangles.
Les propositions étant établies, Bézout déclare :

> Ces principes suffisent pour concevoir comment on pourrait s'y prendre pour former une Table des Sinus

On aura remarqué l'usage du conditionnel pour qualifier la réalisation de la tâche mathématique ainsi désignée au lecteur. Nous reviendrons dans le prochain paragraphe sur cette partie de son exposé. Attachons-nous pour l'instant à comprendre la manière pratique de mener la résolution des triangles.

Bézout distingue quatre cas dans la catégorie triangles rectangles (un angle aigu et un petit côté, un angle aigu et l'hypoténuse, un petit côté et l'hypoténuse, deux petits côtés) et quatre cas dans la catégorie triangles obliquangles[51] (deux angles et un côté, deux côtés et un angle qui n'est pas compris entre les deux côtés, trois côtés, deux côtés et l'angle compris entre eux deux). Pour chacun des cas, il présente une seule méthode de résolution[52] et un exemple numérique.

---

[49] En notations modernes, avec un rayon égal à 1, le procédé donne la formule $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x}}{2}$. Mais une telle formule n'est pas écrite.

[50] Bézout est même obligé de revenir au cercle tout entier pour l'une des démonstrations.

[51] "On se sert du terme de triangles obliquangles pour désigner en général les triangles qui n'ont pas d'angle droit." (Bézout, § 298)

[52] À l'exception près du troisième cas des triangles obliquangles ; nous y reviendrons.

Voici l'exemple du premier cas de triangles rectangles (cf. documents 1 en Annexe de ce chapitre, Vol.1) :

> Supposons qu'il s'agit de déterminer la hauteur AC d'un édifice par les mesures prises sur le terrain […]

Le problème se ramène au calcul de la longueur AB du triangle ABE rectangle en B dont on connaît la longueur BE (qui vaut 132 pieds, notée 132^{P}) et l'angle $\widehat{AEB}$ (qui vaut 48°54').
Bézout énonce la proportion R : tan $\widehat{AEB}$ :: BE : AB où R est le rayon du cercle dans lequel on prendra la tangente d'un arc de 48°54'.

> On aura R : tan48°54' :: 132^{P} : AB ; de sorte que, prenant dans les tables la valeur de la tangente de 48°54', la multipliant par 132 et divisant ensuite par la valeur du rayon prise dans les tables, on aura le nombre de pieds de AB […].
>
> Mais on peut abréger considérablement le calcul en employant au lieu de ces nombres leurs logarithmes ; parce qu'alors il ne s'agit plus (Arithmétique, § 232) que d'ajouter les logarithmes du second et du troisième terme, et de retrancher le logarithme du premier ; c'est pourquoi on fera le calcul comme suit :
>
> Log Tang 48°54'.............10,0593064
>
> Log 132...........................2,1205739
>
> Somme...........................12,1798803
>
> Log du Rayon..................10,0000000
>
> Reste ou Log de AB...........2,1798803
>
> qui répond dans les tables à 151,32, à moins d'un centième près. Ainsi AB est de $151^{P}3^{p}10'$ (151 pieds, 3 pouces 10 lignes). (§297)

Les conduites calculatoires effectives sont des combinaisons d'additions et de soustractions de logarithmes décimaux à 7 chiffres, avec recours au complément arithmétique[53], et complétées quelquefois par une interpolation linéaire ; au pire, se risque-t-on à une division par deux, dans le cas d'une racine carrée ; de cette façon les coûts et les risques d'erreur sont minorés. On comprend alors la fonction attribuée aux logarithmes décimaux dans la partie *Arithmétique* : celle de soulager les calculs, plus précisément d'écarter les multiplications et les divisions qui, outre leur coût, mettent à jour des ennuis d'approximation.

Une conséquence importante est la préférence donnée aux relations métriques exprimables en proportions facilement logarithmisables. Ainsi le quatrième cas des

[53] Encore une superbe invention de Briggs qui a retrouvé du souffle en algorithmique informatique.

triangles obliquangles utilise la proportion suivante[54] : $\frac{AC+AB}{AC-AB} = \frac{\tan\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}}{\tan\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}}$, au détriment de tout calcul inspiré par la formule dite d'Al-Kashi dont nous savons qu'elle était connue des mathématiciens de cette fin du XVIII^e siècle[55]. De la même façon, dans le troisième cas[56], Bézout met en place une proportion qui l'oblige à distinguer deux cas :

> Si de l'un des angles, on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, on aura toujours cette proportion : le côté AC sur lequel tombe, ou sur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire, est à la somme AB + BC des deux autres côtés comme la différence AB – BC de ces mêmes côtés est à la différence des segments AD et DC, ou à leur somme, selon que la perpendiculaire tombe en dedans ou en dehors du triangle [*D est le pied de la perpendiculaire*] (§ 302).

Voici l'exemple numérique que traite Bézout (§ 304), avec AB = 142, BC = 64 et AC = 184 :

> On imagine une perpendiculaire abaissée de l'angle $\widehat{B}$ sur le côté AC. Je calcule la différence des deux segments AD et DC par la proportion 184 : 142 + 64 :: 142 – 64 : AD – DC que je trouve valoir 87,32 ; donc le petit segment CD vaut la moitié de 184 moins la moitié de 87,32, c'est-à-dire 48,34. Cela posé, dans le triangle rectangle CDB, je cherche l'angle $\widehat{CBD}$, qui étant connu, fera connaître l'angle $\widehat{C}$.

Bézout conduit alors les calculs par logarithmes sur la proportion BC : CD :: R : $\sin\widehat{CBD}$ et conclut[57] que $\widehat{C}$ vaut 40°57'.
Bézout a besoin la construction effective de la figure pour constater que le point D est entre A et C et établir la proportion en conséquence.
La formule d'Al-Kashi lui aurait permis d'écrire $\frac{\cos\widehat{C}}{R} = \frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2.AB.BC}$ sans examiner la figure ; par contre elle l'aurait obligé à calculer isolément l'expression numérique $AC^2 + BC^2 - AB^2$. Au lieu de cela, Bézout suggère plutôt :

---

[54] Elle est obtenue par combinaison de deux proportions $\frac{\sin AB+\sin AC}{\sin AB-\sin AC} = \frac{\tan\frac{AB+AC}{2}}{\tan\frac{AB-AC}{2}}$ (déjà présentée) et celle dite des sinus, $\frac{\sin\widehat{B}}{AC} = \frac{\sin\widehat{C}}{AB}$

[55] Cf. *Éléments de Géométrie* de Legendre, quelques années plus tard. En parlant de formule, nous empruntons à un vocabulaire qui n'est pas celui de Bézout dans son traité. Bézout ne présente que des proportions.

[56] Dans ce cas, les trois côtés sont connus. On sait que, dans l'EMS actuel, sa résolution passe par la formule d'Al-Kashi.

[57] On notera que le résultat final est exact alors que Bézout annonce un résultat intermédiaire (AD – BC = 87,32) qui n'est pas l'arrondi décimal d'ordre 2 mais la valeur approchée par défaut. Bien qu'il ait mentionné l'usage de l'arrondi dans le traité d'Arithmétique, Bézout emploie plutôt l'approximation décimale par défaut.

> On peut résoudre ce même cas par cette autre règle, dont nous ne donnerons la démonstration que dans la troisième partie de ce Cours [*l'Algèbre*].
>
> De la moitié de la somme des trois côtés, retranchez successivement chacun des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, ce qui vous donnera deux restes. Faites ensuite cette proportion : le produit des deux côtés qui comprennent l'angle cherché est au produit des deux restes comme le carré du rayon est au carré du sinus de la moitié de l'angle cherché[58].
>
> Au double du logarithme du rayon, ajoutez les logarithmes des deux restes et du tout retranchez la somme des logarithmes des deux côtés qui comprennent l'angle cherché ; ce qui restera sera le logarithme du carré du sinus de la moitié de l'angle cherché ; prenez la moitié de ce reste, ce sera le logarithme de ce sinus, que vous chercherez dans les Tables ; il n'y aura plus qu'à doubler cette moitié.

Il conduit le même exemple numérique et conclut :

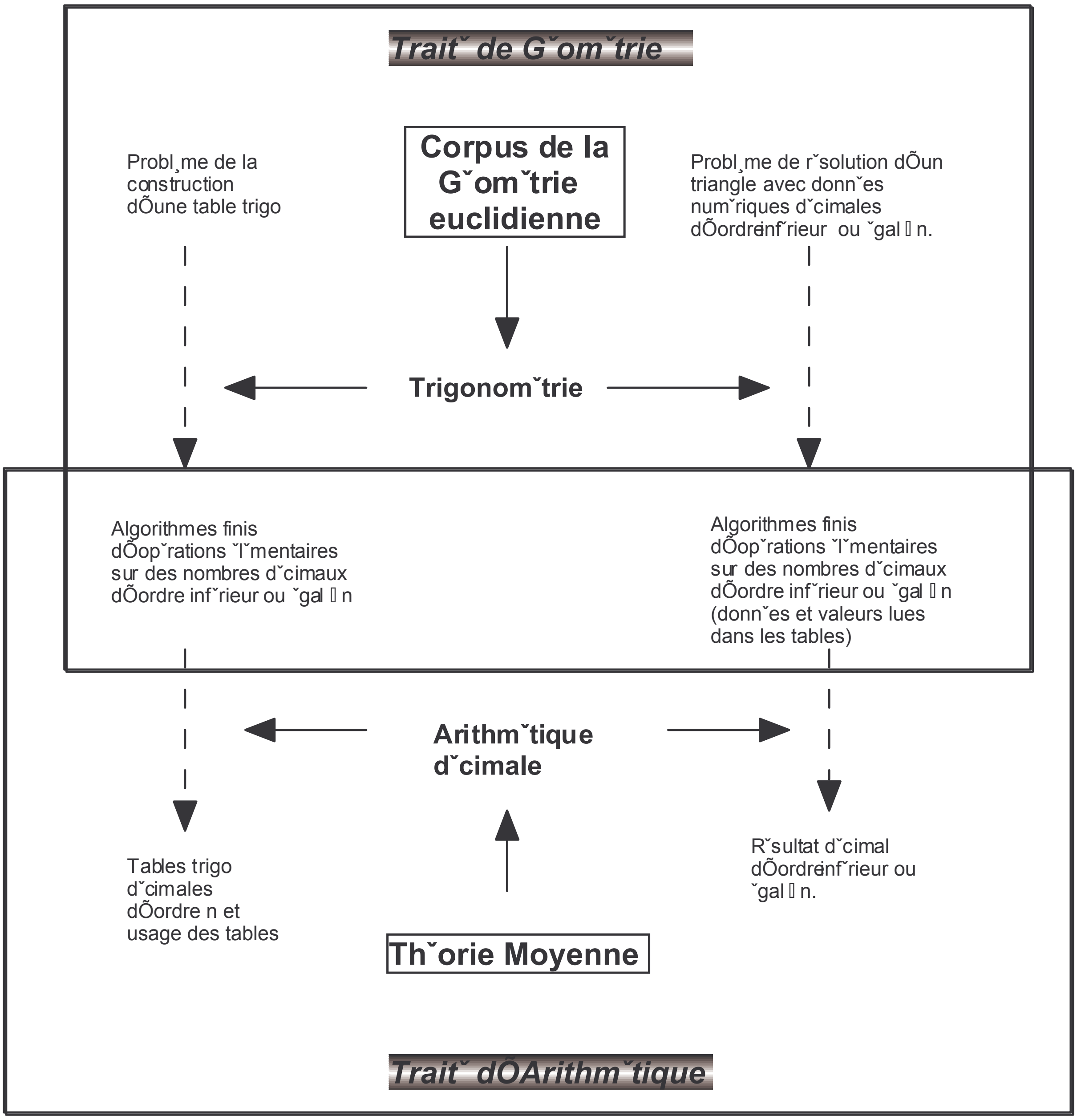
> On a le même résultat que par l'opération précédente, mais plus brièvement.

Bézout introduit ici dans le traité de Géométrie un élément qu'il dit tenir de l'Algèbre mais, contrairement à toutes les autres méthodes de résolution qu'il a exposées, il ne la soumet pas à la preuve géométrique. C'est la marque de la volonté didactique de laisser les deux traités Arithmétique et Géométrie hors du champ algébrique, volonté déjà manifestée à travers l'absence de toute activation du symbolisme algébrique pour transformer les algorithmes de calcul en formules.

Résumons ce panorama des organisations mathématiques qui concourent à la vie des calculs trigonométriques dans un schéma (cf. page suivante ; chaque flèche en pleine ligne représente une relation trophique que l'on peut traduire commodément par l'expression "est un outil pour").

Nous avons placé (verticalement) les deux organisations mathématiques repérées, celle de la construction des tables et celle de la résolution du triangle. Nous les avons croisées (horizontalement) avec les grandes théories mathématiques desquelles, pour reprendre le paradigme écologique, elles reçoivent matière et énergie.

[58] En notations modernes, on découvre la formule $\dfrac{\sin^2\dfrac{\widehat{C}}{2}}{R^2} = \dfrac{\left(\dfrac{a+b-c}{2} - a\right)\left(\dfrac{a+b-c}{2} - b\right)}{a.b}$



chaque flèche en pleine ligne représente une relation trophique que l'on peut traduire commodément par l'expression "est un outil pour"

chaque flèche en pointillé indique un passage dans le traitement du problème

On remarque, dans la résolution de chacun des deux problèmes, la place centrale tenue par les algorithmes. Ils sont à l'articulation entre les deux traités.

Ce que nous désignons par Arithmétique décimale est l'organisation mathématique issue de la Théorie moyenne qui, dans le traité d'Arithmétique de Bézout, prend en charge, sous forme d'algorithmes finis, la réalisation effective des opérations élémentaires (l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et la racine carrée[59]) sur les nombres décimaux. Elle comprend aussi ce qui est appelé usage des tables, y compris l'usage de celle des logarithmes décimaux des nombres entiers. Reprenant l'analyse de Neyret (1995, page 67) :

> Bézout ne retient ici que la partie technique des "décimaux" qui évidemment a fait son succès après la vulgarisation de la Disme de Stevin en France par Girard à partir de 1634, occultant par là même le fait que les décimaux servaient à l'époque à résoudre des problèmes dans le savoir savant, par l'utilisation des écritures décimales illimitées. Le traité de Bézout s'inscrit donc dans la filiation des traités précédents pour lesquels c'était une tradition bien établie.

nous voyons dans cette Arithmétique décimale, *le potentiel praxéologique pour traiter numériquement les tâches calculatoires de problèmes dits pratiques* placés soit en Arithmétique (problèmes d'intérêt, de change, d'escompte, d'alliage, etc.) soit en Géométrie (problèmes de mesures d'un triangle, d'aire de figures planes, etc.).

C'est sur cette Arithmétique décimale que se fait l'instrumentalisation des tables et l'instrumentation des calculs issus de la Trigonométrie par ces tables.

Avant d'analyser plus précisément la place et le rôle de l'approximation dans cette Arithmétique décimale, revenons sur la construction de la Table des Sinus que Bézout expose avant même la résolution du triangle plan.

1.2 l'exposé sur la formation des tables

Même s'il ne recouvre que cinq paragraphes (§ 288 à 292, cf. documents 2 dans les annexes de ce chapitre, Vol.1), cet exposé est conséquent et il se prolonge par un autre, plus court, sur le calcul approché du nombre π[60]. Remarquons qu'il comporte une partie en petits caractères. À ce propos, Neyret (1995) note :

> Certains paragraphes sont écrits en caractères plus petits, indiquant qu'il s'agit de contenus plus difficiles qui s'adressent à des élèves qui "auraient le désir de s'instruire plus parfaitement". Bézout introduit donc dans son cours une hiérarchie qui jouera évidemment un rôle dans les découpages ultérieurs [*de son traité*] qui seront faits.

Nous avons déjà dit plus haut l'emploi du conditionnel par l'auteur destiné, semble-t-il, à marquer le caractère théorique de l'exposé et à dénier par avance son caractère pratique. Cela démarre comme dans le traité de Ptolémée par le recours à la bissection :

> On connaît le sinus de 30° […] ; on peut trouver successivement celui de 15°, ceux de 7°30', 3°45', 1°52'30", 0°56'15", 0°28'7"30"', 0°14'3"45"', 0°7'1"52"'30"".

mais Bézout diverge aussitôt :

---

[59] Assude (1992, page 36) montre que dans une telle organisation, la racine carrée apparaît comme "la cinquième opération arithmétique".

[60] "On peut donc, par le calcul des sinus, approcher du rapport du diamètre à la circonférence" (§293).

> Cela posé, on remarquera que quand les arcs sont forts petits, ils ne diffèrent pas sensiblement de leur sinus et sont par conséquent proportionnels à ces sinus ; ainsi pour trouver le sinus de 1', on fera cette proportion : l'arc de 0°7'1"52'"30"" est à l'arc de 0°1' comme le sinus de premier arc est au sinus de 1'.

Il s'agit donc d'une extrapolation linéaire que Bézout ne justifie pas géométriquement[61] et sur laquelle, le problème de l'approximation est évoqué sans être renvoyé à des éléments théoriques du Traité. Bézout se contente de recommandations, telle celle-ci :

> Si, dans ce calcul, on suppose le rayon de 100000 parties seulement, il faudra calculer les sinus des arcs que nous venons de rapporter avec trois décimales pour être en droit d'en conclure les suivants à moins d'une unité près […].

sans dire que cette façon de conduire les calculs répond à la nécessité d'anticiper la propagation des erreurs dues aux troncatures décimales par une condition suffisante sur le nombre de décimales des données initiales. De même il donne à l'avance la précision avec laquelle le calculateur éventuel pourra considérer les résultats mais n'entre pas dans l'idée d'une majoration d'erreur.

L'absence de soutien théorique sur le degré de précision auxquels les résultats des calculs peuvent prétendre n'incite pas le lecteur à réaliser pleinement les calculs mais seulement à les esquisser (voire seulement à suivre ceux qui lui sont présentés). D'ailleurs Bézout fait un peu plus loin cette remarque :

> Les sinus étant calculés, on calcule leurs logarithmes comme on calcule ceux des nombres. Il faut pourtant observer que si l'on prenait, dans les Tables, la valeur numérique d'un des sinus, pour calculer son logarithme selon ce qui a été dit (Arithmétique § 239), on ne trouverait pas ce logarithme absolument le même qu'il est dans la colonne des logarithmes des sinus ; la raison en est que les sinus des tables ont été calculés originairement dans la supposition que le rayon était de 10 000 000 parties ; mais comme les calculs ordinaires n'exige pas une telle précision, on a supprimé dans les tables actuelles les cinq derniers des valeurs numériques des sinus […].

Comment expliquer alors la présence de cet exposé sur la "*formation des tables*" dans le traité de Bézout ? Nous sommes enclins à penser que le lecteur-élève est uniquement conduit à reconnaître qu'il est théoriquement possible de mener à terme la construction de la table. Nous voyons là une fiction didactique de l'œuvre savante, c'est-à-dire une création didactique destinée en premier lieu à diminuer la distance apparente entre le savoir enseigné et le savoir savant.
Mais il nous semble important de remarquer que cette fiction donne à l'auteur l'occasion :

- d'une part, de présenter des algorithmes finis pour approcher décimalement un nombre - une tâche emblématique des mathématiques enseignées dans le premier livre, celui d'Arithmétique -
- d'autre part, d'insister sur le contrôle géométrique des calculs[62].

[61] Il reviendra, par contre, plusieurs fois au cadre Géométrique pour justifier certaines affirmations dans les méthodes de calcul numérique.

[62] N'oublions pas que ce cours s'adresse à de futurs navigateurs qui feront grand usage de la trigonométrie.

Même si la tentative d'abaisser le niveau trophique de la construction reste inachevée puisque l'auteur ne met pas en place le complexe technico-technologique qui permettrait de réaliser effectivement les calculs – et l'on peut penser que le principal obstacle est justement du côté du contrôle de l'approximation - les éléments théoriques propres à l'Arithmétique décimale et à la Géométrie métrique sortent renforcés de ce scénario didactique.

Notons pour finir que le même problème didactique, pour la table des logarithmes ordinaires, dans le livre d'Arithmétique, conduit l'auteur au même dilemme et à la même réaction :

> Nous n'enseignerons pas ici la méthode qu'on a suivie pour trouver les logarithmes des termes intermédiaires à la progression décuple ; elle dépend de principes que nous ne pouvons exposer ici ; mais nous allons expliquer cette formation par une voie qui, à la vérité, ne serait pas la plus expéditive pour calculer ces logarithmes, mais qui suffit, tant pour concevoir cette formation que pour rendre raison des usages auxquels on emploie ces nombres artificiels (§ 219).

La méthode expéditive, à laquelle Bézout fait allusion, est peut-être celle des différences finies que Briggs exploite pour fabriquer les premières tables de logarithmes décimaux. Les éléments théoriques de cette méthode font déjà partie de l'Analyse dont l'inscription dans le curriculum de l'EMS n'est pas à l'ordre du jour[63].

1.3 l'approximation numérique décimale

Comment l'Arithmétique décimale que nous voyons instrumenter les calculs numériques de la Trigonométrie, que ce soit dans la résolution des triangles ou dans la formation des tables, prend-elle en charge le contrôle de la justesse des résultats décimaux ? Comment en fait-elle un élément de l'organisation didactique ?

Comme le dit Bézout lui-même, c'est déjà une affaire de précision de la table :

> […] en sorte que lorsque l'on fait usage des logarithmes des sinus, tangentes, etc., on calcule dans la supposition tacite que le rayon est de 1 000 000 000 parties ; et lorsque l'on fait usage des valeurs numériques des sinus, tangentes, etc. on calcule dans la supposition que le rayon est de 100 000 parties seulement (§ 291).

Mais cette précision des tables fabriquées ne permet d'assurer la justesse des résultats décimaux qu'à la condition expresse de suivre les algorithmes de calcul exposés et de s'en tenir, pour le résultat, à une précision que Bézout, fort habilement mais tacitement, adapte à chaque exemple numérique (ce peut-être l'unité, le dixième voire le centième pour une longueur). D'ailleurs l'auteur ajoute, à plusieurs reprises :

[63] Les différences finies n'ont pas réussi à se faire une place dans l'EMS. Nous connaissons l'existence d'au moins une tentative de les y installer. Il s'agit du programme de 1853 de la classe de mathématiques spéciales (cf. Textes officiels de l'enseignement des sciences dans l'EMS, réunis et commentés par Belhoste, INRP, 1995)

> La méthode que nous allons donner n'est pas rigoureuse mais elle est plus que suffisante pour les usages ordinaires.

L'assurance qu'exprime l'auteur dans le "plus que suffisante" laisse supposer qu'il possède des moyens de contrôle qu'il ne s'oblige pas à expliciter. L'efficacité apparente de la méthode, même sans rigueur, lui suffit et il le dit. Cette franchise le met partiellement à l'abri des éventuelles critiques. Elle n'explique pas pourquoi ces "usages ordinaires" peuvent accepter cette absence de rigueur, ni comment il est possible d'organiser les calculs pour ne pas obtenir de précision superflue ou pour tenir compte d'une imprécision des données, tout à fait imaginable puisqu'il dit plusieurs fois qu'elles proviennent de mesures sur le terrain. Le renvoi à la notion d'usage ordinaire apparaît plus comme un filet protecteur que comme l'expression d'une prise en compte de l'usage du résultat dans une situation ordinaire de mesure sur le terrain.

De plus, l'exactitude des résultats numériques n'est au rendez-vous qu'au prix d'une variabilité suspecte sur le vocabulaire. On trouve tout aussi bien des approximations par défaut que par excès, sans que cela corresponde systématiquement à des arrondis. Ainsi, dans les exemples numériques que nous avons présentés un peu plus haut, la même présentation du résultat à l'ordre 2 est, dans un cas, celle d'une valeur approchée par défaut (c'est le cas du triangle obliquangle dont les trois côtés sont donnés) et celle d'une valeur approchée par excès (c'est le cas de l'exemple du triangle rectangle[64]).

Tous les éléments théoriques de l'Arithmétique décimale sont intégrés dans la première partie du traité de Bézout. Son examen ne laisse aucun doute : l'univers de l'approximation numérique est essentiellement décimal[65].
L'algorithmisation décimale des opérations (la bande des quatre et les extractions de racines carrées et cubiques) se conjugue à l'usage des tables numériques décimales pour forger la notion de valeur approchée d'un nombre ; avec une précision déterminée par la dernière décimale trouvée, les algorithmes s'adaptent immédiatement à celle qui est souhaitée sur le résultat. Il importe, cependant, que ce résultat ne provienne pas de calculs qui enchaînent des valeurs approchées, auquel cas la propagation des erreurs aurait vite fait d'invalider la précision obtenue par la dernière opération.

Les techniques mises en place dans les diverses tâches calculatoires présentées aussi bien en Arithmétique qu'en Géométrie vont d'une part minimiser les risques d'erreurs d'approximation en évitant le plus possible la succession d'opérations, d'autre

---

[64] Dans cet exemple qui se ramène, rappelons-le, au calcul de la longueur AB du triangle ABE rectangle en B dont on connaît la longueur BE (qui vaut 132 pieds, notée 132^{P}) et l'angle $\widehat{AEB}$ (qui vaut 48°54'), Bézout termine le travail numérique en annonçant que AB fait 151,32 à moins d'un centième près alors que le résultat est 151,31 arrondi d'ordre 2. Pourtant Bézout pratique l'arrondi décimal. Ainsi (§ 72 de l'Arithmétique), à propos de la division, il déclare : "A mesure qu'on supprime un chiffre dans le diviseur, il convient, pour plus d'exactitude, d'augmenter d'une unité le dernier de ceux qui restent, si celui qu'on supprime est au-dessus de 5 ou égal à 5."

[65] Deux faits pour illustrer cette affirmation et une exception :

> la comparaison de deux nombres est traduite, sans autre commentaire que celui d'une évidence immédiate, par la lecture des chiffres de leurs écritures décimales.

> on ne trouve pas d'inégalités numériques, même dans la partie centrale sur les fractions.

> l'exception est au § 115 où la notion de valeur approchée fait appel à un procédé de fractions continues.

part évacuer la recherche, avant le calcul lui-même, de la précision suffisante sur les données initiales du calcul - alors que cette recherche est l'une des raisons d'être d'une théorie de l'approximation numérique.

Le vocabulaire employé traduit cette façon de cacher l'approximation en ne lui offrant pas d'appellation officielle ni de problème dans lequel s'exprimer publiquement. Bézout ne définit pas l'erreur comme différence entre la valeur exacte et la valeur approchée ; s'il parle d'erreur - sans utiliser le mot - c'est pour qualifier une perte d'exactitude qu'il exprime en degrés et dont on comprend qu'elle se mesure par un nombre de chiffres dans l'écriture décimale.

Concluons sur la question de l'approximation numérique dans le traité de Bézout :

La tabulation décimale des fonctions transcendantes et l'algorithmisation décimale des opérations arithmétiques concourent à façonner une approximation numérique qui semble latente et privée de problématique.

Le phénomène didactique que nous analysons ici, Bronner (1997, pages 83 et 84) dit le retrouver sur toute la période qu'il appelle classique (1854-1947) :

> L'analyse de cette période fait apparaître la difficulté d'une transposition du thème de l'approximation que l'on retrouvera constamment. De plus la transposition peut renforcer la difficulté par certains choix. Les algorithmes des quatre opérations et l'extraction de la racine carrée donnent un certain statut à l'approximation. La problématique est pratiquement rabattue sur la notion de valeur approchée normale (décimale ou fractionnaire[66], par excès ou par défaut). Dans le cas d'approximation décimale, la notion de précision à tant de chiffres après la virgule s'impose (Ibid. page 83).

Sa conclusion nous permet d'anticiper sur "l'après Bézout" :

> Plus généralement il s'agit d'un thème où apparaît un flou entre les notions de valeurs exactes et de valeurs approchées. Le contrat attendu dans les exercices est assez implicite. Déjà apparaît dans cette période un trait que nous trouverons souvent dans les autres périodes : on ne précise pas à l'élève si on attend des valeurs approchées ou des valeurs exactes ; l'élève de l'EMS devra décoder le contrat didactique (Ibid. page 84).

On trouve cependant dans l'*Arithmétique* de Bézout une partie théorique (§ 55 et 69) qui échappe à cette caractérisation. Elle est écrite en petits caractères. Neyret (1995, pages 69 et 70) prend soin de l'étudier. Nous lui laissons la parole (les paragraphes entre guillemets sont extraits du traité de Bézout) :

> Elle consiste à exposer des techniques permettant de trouver des résultats numériques plus rapidement :
>
> 'Comme on emploie ordinairement les décimales dans la vue de faciliter les calculs, en substituant à un calcul rigoureux une approximation suffisante, mais prompte (*c'est nous qui soulignons*), il n'est pas inutile d'exposer ici un moyen d'abréger l'opération, lorsqu'on a besoin d'avoir le produit que jusqu'à un degré d'exactitude proposé.'

[66] À plusieurs moments, l'institution EMS privilégia une introduction de l'approximation avec une précision fractionnaire (cf. Thèse de Bronner, 1997).

L'exemple développé consiste à multiplier 45,625957 par 28,635, le produit ne devant être connu qu'à moins d'un millième près. La technique proposée est la suivante :

'J'écris ces deux nombres comme on le voit ci-dessous, c'est-à-dire, qu'après avoir renversé l'ordre des chiffres de l'un des deux, je l'écris sous l'autre, en faisant correspondre le chiffre de ses unités sous la décimale immédiatement inférieure de deux degrés à celui auquel je veux borner mon produit. Je fais ensuite la multiplication, en négligeant dans le multiplicande, tous les chiffres qui se trouvent à droite de celui par lequel je multiplie ; (...) L'addition de tous ces produits étant faite, je supprime les deux derniers chiffres, en observant cependant d'augmenter le dernier de ceux qui restent, d'une unité, si les deux que je supprime passent 50 ; après quoi je place la virgule au rang fixé par l'espèce de décimales que je me proposais d'avoir. (...)'

On voit que la technique proposée repose sur le fait que, si on fait le développement polynomial des deux nombres proposés et que l'on multiplie ces deux polynômes, on néglige les termes correspondant à la puissance 10^{-n} avec $n > 6$.

Le fait de négliger les termes de rang n+2 peut avoir des effets sur le terme de rang n, mais il est raisonnable de faire ainsi puisque l'effet des termes évoqués précédemment sur le terme en 10^{-3} ne se ferait éventuellement sentir que si le multiplicateur avait 13 chiffres et que si les chiffres aussi bien du multiplicateur que du multiplicande étaient tous des 9.

De même, les précautions prises à la fin du paragraphe cité ne conduisent pas forcément à la meilleure approximation : il suffit par exemple de prendre, en s'inspirant d'un exemple fourni par Bézout lui-même, à savoir multiplier 0.227538855 par 0.6564178 en ne conservant que 7 décimales au produit. La technique proposée par l'auteur conduit d'abord à 0.128882013, puis en supprimant les deux derniers chiffres, qui correspondent à un nombre inférieur à 50, conduit à 0.1288820. Le calcul effectif du produit lui donne 0.1288820576636190, pour lequel l'auteur aurait donné pour valeur approchée 0.1288821. Mais là aussi la méthode reste raisonnable puisque le cas indiqué est relativement rare.

Une technique du même type est proposée à propos de la division, si l'on ne veut qu'un quotient à une certaine unité près.

La conclusion de Neyret complète celle de Bronner (1997) ; elle laisse entrevoir que la période qui va succéder au traité de Bézout dans l'EMS maintiendra, voire développera, dans l'Arithmétique décimale ces premiers éléments d'une problématique d'approximation numérique :

On note le souci dans cette partie du livre de traiter des nombres qui ne sont pas directement liés à des mesures de grandeur, nombres ayant un grand nombre de décimales, en proposant des problèmes d'approximation. Ces techniques de calcul aujourd'hui disparues, répondant aux besoins de calcul de l'époque, vont perdurer au XIX^{e} siècle et au début du XX^{e} puisqu'on les trouve dans des cours de mathématiques. L'arrivée des calculatrices leur fera évidemment perdre beaucoup de leur intérêt.

Bref résumé du paragraphe 1

Dans le traité de Bézout, la Trigonométrie est bâtie autour de deux problèmes, celui du calcul des éléments d'un triangle défini par des données numériques et celui de la formation des tables. Les calculs numériques auxquels elle donne vie s'insèrent dans l'Arithmétique par une organisation que nous avons appelée Arithmétique décimale dans laquelle se trouvent les tables. Ces tables structurent les calculs trigonométriques et les protègent des attaques de la propagation des erreurs. L'Arithmétique décimale ne donne pas corps aux problèmes de l'approximation numérique.

Pour analyser la poursuite du processus de transposition didactique nous faisons le choix de respecter la structure des organisations mathématiques autour des calculs trigonométriques en séparant la Trigonométrie et l'Arithmétique décimale.

2. La Trigonométrie : dynamitage du corpus euclidien

Nous décrivons à grands traits les principaux flux de savoirs savants en les classant selon leur provenance : l'Algèbre, l'Analyse et la Géométrie vectorielle.

2.1 l'algébrisation de la Trigonométrie

Nous avons dit que le traité de Bézout prenait le parti de traiter le cœur de la Trigonométrie sans recourir aux services de l'Algèbre. Un traité concurrent dans la première moitié du XIX^{e}, celui de Legendre[67], fait le pas vers une présentation et une exploitation des relations trigonométriques sous forme de formules dont il dit "qu'elles sont l'expression d'autant de théorèmes" (cf. documents 3 en Annexe, Volume 1).
Ces formules vont intervenir aussi bien dans l'exposé de la résolution des triangles que dans celui de la construction des tables.

En ce qui concerne la résolution des triangles, Legendre annonce qu'avec trois formules, "on est en état de résoudre tous les cas de la trigonométrie rectiligne (plane). Ce sont :

- la formule des sinus, qu'il écrit en proportion puis en formule $\frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c} = \frac{\sin\widehat{A}}{a}$
- la formule du rapport des tangentes $\frac{AC + AB}{AC - AB} = \frac{\tan\frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}}{\tan\frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}}$ qu'il écrit en proportion
- la formule d'Al-Kashi qu'il écrit $\cos\widehat{C} = R.\ \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2.AB.BC}$

Grâce à cette dernière formule, il peut se distinguer de Bézout dans la résolution des deux derniers cas des triangles obliquangles. Cependant il reconnaît immédiatement que, numériquement, cette formule n'est pas commode. Il faut la transformer pour la mettre aux normes du calcul logarithmique[68]. Pour le cas des trois côtés connus, il choisit la formule qu'avait proposée Bézout en deuxième recours, à savoir $\sin\frac{1}{2}\widehat{A} = R \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, qu'il établit algébriquement "en substituant la valeur de $\cos\widehat{A}$ dans R^2

[67] *Éléments de Géométrie*. L'édition à laquelle nous nous référons (la douzième !) date de 1823. Contrairement aux habitudes actuelles, les instructions officielles recommandaient des traités aux professeurs. C'est ainsi que les traités de Bézout, de Clairaut, de Legendre eurent une grande influence sur l'enseignement secondaire.

[68] L'idéal logarithmique est la formule du type $A = k.a^m.b^n.c^p\ldots$ avec k, a, b, c réels positifs et m, n, rationnels.

$- R\cos\widehat{A} = 2\sin^2\frac{1}{2}\widehat{A}$ ". Et il ajoute "bien d'autres formules sont également aptes à résoudre la question".

Cette algébrisation de la Trigonométrie va s'amplifier au cours du XIX^{e} siècle sans directement toucher aux méthodes de calculs numériques attenant à la résolution des triangles qui restent entièrement gouvernées par la même Arithmétique décimale. Une conséquence plus sensible réside plutôt dans le rejet de l'activité proprement numérique en marge des préoccupations de l'enseignement de la Trigonométrie. Même Borel qui, pourtant, déclare en 1920 :

> il semble nécessaire que l'enseignement des éléments de Trigonométrie devienne véritablement élémentaire et en même temps résolument pratique (in *Trigonométrie pour le second cycle*, Colin).

n'hésite pas à dégager trois systèmes fondamentaux (équivalents) de relations utiles à la résolution des cas, à faire soigneusement toutes les études de cas avec force formules …. et à renvoyer les résolutions numériques sur des pages annexes, à la fin du manuel[69].

En ce qui concerne la construction des tables, Legendre choisit d'emblée de se placer sur le terrain de l'Analyse.

> Le développement des formules trigonométriques, considéré dans toute sa généralité, forme une branche importante de l'analyse, sur laquelle on peut consulter l'excellent ouvrage d'Euler, intitulé : *Introductio in anal. Inf.* […]. Nous croyons cependant devoir démontrer encore les formules qui servent à exprimer le sinus et le cosinus en fonctions de l'arc, […] qui sont nécessaires pour la construction des tables (ibid., page 361).

L'exposé établit les développements en série entière de cosx et sinx selon une méthode inspirée des travaux d'Euler (avec les nombres imaginaires).

> Pour appliquer les formules précédentes à la détermination du sinus et du cosinus d'un arc donné en degrés et parties de degrés, il faut avoir la longueur de cet arc exprimée en parties du rayon (ibid., page 365).

Apparaît ainsi le nombre π : nous sommes au cœur de l'Analyse et nous touchons à des problèmes de l'approximation numérique. En effet :

---

69 On notera au passage que la résolution du cas des trois côtés connus conduit Borel à proposer et démontrer un nouveau lot de trois formules, à savoir $\tan\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ et les deux autres du même type avec $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Ces formules, dit-il "se prêtent très bien au calcul logarithmique" (Borel, 1920, page 123).

Ce que ne dit pas Borel en remplaçant $\sin\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ par $\tan\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ c'est qu'un angle est mieux déterminé par le logarithme de sa tangente que par celui de son sinus ou de son cosinus. En effet, dans les tables, la différence tabulaire relative à la tangente est plus grande que celle relative au sinus ou au cosinus.

> Pour donner une idée des méthodes qu'on peut suivre dans la construction des tables, supposons qu'il s'agisse de calculer les sinus de tous les arcs de minute en minute, […] il faudra d'abord trouver le sinus de l'arc d'une minute avec un grand degré d'approximation (ibid., page 367).

Même si, comme Bézout, Legendre dispense nombre de recommandations sans les appuyer, dans l'exposé, sur des éléments théoriques identifiés, il prend bien soin d'aborder la question de la propagation des erreurs dans les calculs qui s'enchaînent :

> Il est nécessaire, nous le répétons, de calculer les sinus avec 16 décimales, c'est-à-dire avec 5 ou 6 décimales de plus qu'on en veut avoir réellement, afin d'être assuré que les erreurs, qui peuvent se multiplier dans le cours de 5000 opérations, n'influeront cependant pas sur la dixième décimale des résultats. Le calcul fait, on retranchera les décimales superflues et on ne conservera dans la table que 10 décimales.
>
> Au reste, quand il s'agit d'exécuter tant de calculs, on doit chercher à vérifier les résultats aussi souvent qu'il est possible.

La construction des tables offre ainsi un habitat à des notions d'approximation numérique, mais la teneur du traité de Legendre fait douter de son maintien dans l'EMS sans une élémentarisation qui rendrait les calculs effectivement réalisables dans le temps nécessairement limité de l'enseignement.

L'intérêt pour la construction des tables se maintiendra tout au long du XIX^{e} siècle puisque les programmes des classes préparatoires aux grandes Ecoles incitent à développer "des notions sur la formation des tables[70]".Il s'éteindra au XX^{e} siècle, sous la pression noosphérienne. En particulier, le programme de 1905 se fait insistant, qui déclare officiellement : "On ne parlera pas de la construction des tables" (in *Les sciences dans l'enseignement secondaire français -Textes officiels*, Belhoste, INRP, 1995).
La distance entre le savoir savant et celui qui pourrait être enseigné semble irréductible. C'est en tout cas ce que laisse entendre Borel (1920, page 51) :

> Nous n'avons, conformément au programme, donné aucun détail sur la construction des tables, c'est-à-dire sur les procédés employés pour calculer effectivement les nombres qui y figurent.
>
> Un peu de réflexion suffit d'ailleurs pour permettre à chaque élève d'imaginer des moyens de calculer des tables avec autant de décimales exactes qu'on peut le désirer, en utilisant des procédés analogues à ceux des numéros 24 et 54 [*périmètres de polygones réguliers*]. En effet, en divisant la circonférence en 2^n parties égales et donnant à n des valeurs de plus en plus grandes, on obtient des points de division aussi rapprochés que l'on veut de tout point donné d'avance. Ce procédé théorique serait d'ailleurs fort long, mais l'étude des procédés les plus courts que l'on peut employer pour construire et vérifier une table numérique de quelque importance (qu'elle qu'en soit sa nature) exige des connaissances bien plus étendues que celles des lecteurs de ce livre.

---

70 Le cours de Trigonométrie à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires de Vacquant et Macé de Lépinay (Masson, 1900) comporte un chapitre intitulé "Principes relatifs à la construction des tables trigonométriques" (cf. documents en Annexe).

Borel écarte toute possibilité de faire vivre le problème de la construction des tables dans l'enseignement. Il rejète la fiction didactique de Bézout et ne cherche pas à la faire entrer dans l'Analyse. Pourtant l'Analyse est déjà là, en Algèbre mais aussi en Trigonométrie. La complexité des contrôles des approximations que provoque la réalisation effective d'une telle construction n'est-elle pas la raison principale de cette décision ?

2.2 l'impact de l'Analyse

L'Analyse est déjà là, disions-nous. C'est sous l'appellation de "Compléments d'Algèbre" qu'elle est entrée, depuis le milieu du XIX^{e} siècle, dans le curriculum des classes scientifiques de lycée. Des questions encore très proches de l'Analyse algébrique d'Euler, on est passé progressivement aux études des variations des fonctions élémentaires dont celles des fonctions trigonométriques.

En Trigonométrie, la proximité de l'Analyse influence certains choix transpositifs. Ainsi, le plan d'études de 1852 modifie la définition des lignes trigonométriques puisqu'on y décide de ne considérer que "les rapports des lignes trigonométriques au rayon", ce qui revient à faire R =1, et d'ajouter le radian aux unités d'angles.
Avec les réformes de 1902 et 1905 et l'introduction du Calcul différentiel et intégral, la pensée fonctionnelle s'officialise au Lycée. Belhoste fait remarquer de plus que les programmes de 1905

> distinguent radicalement l'esprit de l'enseignement dans le premier cycle, plus expérimental et concret, de celui dans le second cycle, plus théorique et abstrait (ibid., page 658).

C'est en tout cas la première séparation en deux moments distincts de l'enseignement de la Trigonométrie : au Collège, la Trigonométrie du triangle rectangle et au Lycée, celle des fonctions circulaires. On peut apprécier cette césure à la lecture des programmes.
Voici le programme de Géométrie commun aux classes de Troisième A et Quatrième B[71] :

> Points qui partagent une droite dans un rapport donné. Lignes proportionnelles. Triangles semblables. Définitions du sinus, du cosinus, de la tangente et de la cotangente d'un angle. Définition des figures homothétiques. Polygones semblables. Pantographe. Relations métriques dans un triangle rectangle. Propriétés des sécantes dans le cercle. Construction de la quatrième proportionnelle et de la moyenne proportionnelle. Polygones réguliers carré, hexagone et triangle équilatéral. Mesure de la circonférence d'un cercle (énoncé). Mesure des aires du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, des polygones, du cercle. Rapport des aires des polygones semblables.

Le corpus euclidien est encore bien vivace. Et voici celui de la Trigonométrie, dans les classes de Première C et D :

[71] Le premier cycle est séparé en deux divisions, A et B ; dans la seconde, la part des mathématiques est renforcée. Le deuxième cycle comporte deux divisions littéraires, A et B, et deux divisions scientifiques, C et D. Toutes ces informations sont extraites du livre de Belhoste, déjà cité.

> Fonctions circulaires (sinus, cosinus, tangente, cotangente). Relation entre les fonctions circulaires d'un même arc. Calcul des fonctions circulaires de quelques arcs ($\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, etc.).
>
> Théorie des projections. Formules d'addition pour le sinus, le cosinus et la tangente. […]. Usage des tables de logarithmes à quatre ou cinq décimales. Résolution de quelques équations trigonométriques simples. Résolution des triangles.

Il y a là tous les ingrédients d'un important *basculement épistémologique*. Contrairement au programme du Collège, celui du Lycée met fin à la paternité euclidienne de la Trigonométrie puisqu'il fait dépendre l'architecture de la Trigonométrie à la fois des fonctions circulaires et du théorème des projections (cf. paragraphe suivant sur la Géométrie vectorielle).
Dans la préface du manuel de Trigonométrie, pour le second cycle (Masson, 1920, page VI) Borel acquiesce aux choix de la Noosphère :

> Presque toute la Trigonométrie est renfermée dans les deux premiers chapitres : définition des trois fonctions fondamentales [*sinus, cosinus, tangente*], relations entre les fonctions circulaires d'un même arc, d'arcs complémentaires, supplémentaires, etc., usage des tables, résolution des triangles rectangles.

Il ajoute une note qui nous permet d'apprécier la nouvelle position des calculs trigonométriques :

> Il m'a paru nécessaire de placer l'usage des tables dès le second chapitre, c'est-à-dire aussitôt que possible. Il était d'usage de rejeter cette partie essentielle à la fin de la Trigonométrie, parce qu'on avait l'habitude de parler auparavant de la construction des tables, heureusement absente du nouveau programme [*celui de 1905*].

Cette note confirme l'effacement du problème mathématique de la construction des tables sans que ce problème soit remplacé par celui des valeurs des fonctions[72]. Par contre, les calculs numériques liés à la résolution des triangles relèvent toujours de l'Arithmétique décimale.

Cet effacement sera définitif. Les seuls éléments du problème qui réapparaîtront furtivement à certains moments du XX^{e} siècle sont ceux que peut porter l'approximation fonctionnelle des fonctions circulaires ; mais la Noosphère décide de les cantonner à une étude locale au voisinage de 0.

2.3 l'intégration d'éléments de Géométrie vectorielle

L'Analyse ne peut pas, à elle seule, remplacer le Corpus euclidien. Lelong-Ferrand, à la veille de la réforme des mathématiques modernes, explique la difficulté que rencontre la Noosphère dans la transposition didactique :

[72] Un pas dans cette direction est cependant sensible avec les "expressions trigonométriques des éléments des polygones réguliers inscrits et circonscrits" (pages 36 à 39). C'est l'occasion pour Borel de signaler la possibilité théorique de calculer les valeurs des fonctions (pages 39 et 40).

> Les fonctions trigonométriques (dites aussi "lignes circulaires" par conservation d'une terminologie ancienne) ne sont pas des fonctions algébriques, même au sens le plus général de ce mot. À un niveau plus élevé, les fonctions trigonométriques de base, sinx et cosx, pourront être définies par des procédés purement analytiques, indépendamment de toute considération géométrique :
>
> le nombre sinx est la limite de la suite $S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$
>
> et le nombre cosx est la limite de la suite $C_n(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$
>
> En langage plus intuitif, nous pourrions dire alors que les fonctions sinx et cosx sont des limites de polynômes dont le nombre de termes augmente indéfiniment. Et toutes les propriétés de ces fonctions pourront se déduire de leur expression sous forme de séries.
>
> Mais au niveau élémentaire qui est le nôtre, les fonctions trigonométriques ne peuvent être définies que par des procédés géométriques, un peu déroutants s'ils ne sont pas clairement expliqués : en effet les fonctions sinus et cosinus apparaissent d'abord, non comme des fonctions d'une variable numérique, mais comme des fonctions d'ensembles appelés angles ou arcs (Lelong-Ferrand, *Les notions de mathématiques de base dans l'enseignement du second degré*, Colin, 1964, page 191)

Les "procédés déroutants" retenus par la Noosphère peuvent être résumés dans ce qu'on appelle couramment l'enroulement de R sur le cercle. Il leur est impossible d'échapper à l'orientation du plan ; de la naît le cercle trigonométrique[73].

À la nécessité de l'orientation s'ajoute celle d'établir les formules d'addition sans revenir au Théorème de Ptolémée, lequel oblige à distinguer plusieurs cas si l'on veut passer des angles géométriques aux angles orientés.
La solution adoptée en 1905 est le recours au théorème de projection[74] d'un vecteur sur un axe. Puis ce sera le produit scalaire, introduit dans la période qui précède la réforme des mathématiques modernes. Celle-ci, dans sa tentative de placer la géométrie sous la coupe de l'Algèbre linéaire, ira jusqu'à déduire (en classe de Première) les formules d'addition de la composition des rotations vectorielles, elles-mêmes définies comme des applications linéaires … et à faire disparaître le problème de la résolution du triangle et les calculs numériques qui l'accompagnaient[75].

À partir de 1982 dans les lycées, la contre-réforme met fin à ce soubresaut de la transposition didactique mais ne rétablit pas pour autant le problème de la résolution des triangles dans sa forme originelle. En reprenant le produit scalaire sous une forme plus géométrique, elle se contente d'établir un nombre très limité de formules et de traiter quelques exemples numériques sans les structurer dans un ensemble de méthodes

---

73 Voici une création didactique qui n'a plus quitté l'EMS. Elle est devenu un ostensif incontournable au Lycée, mais qui ne s'est pas implanté au Collège.

74 Présentation simplifiée : projeté de la somme = somme des projetés.

75 Pour s'en convaincre, il suffit d'ouvrir n'importe lequel des manuels de cette période. On pourra y constater que les relations métriques qui permettent la résolution des différents cas sont reléguées dans les parties exercices dans une maigre rubrique souvent intitulée "Géométrie du triangle" et sans application numérique.

propres à résoudre tous les cas, un par un. Nous reviendrons dans la partie C sur le traitement numérique des calculs trigonométriques que cela induit.

Bref résumé du paragraphe 2

La Trigonométrie est maintenant doublement désarticulée :

- par la césure sur l'axe temporel de l'enseignement de la Trigonométrie : triangle rectangle en Collège et cercle trigonométrique en Lycée
- par la multiplicité des domaines de référence : la Géométrie euclidienne, l'Analyse, l'Algèbre linéaire et celle des nombres complexes[76].

Dans cette explosion en plusieurs morceaux qui s'ignorent peu ou prou mais qui concourent tous à sa légitimité au sein de l'EMS, la Trigonométrie a abandonné le problème de la production des valeurs trigonométriques et a dévalorisé le problème de la résolution des triangles à partir de données numériques au profit de celui du travail algébrique autour des transformations de formules et des équations. Si elle y a perdu beaucoup de son âme numérique, du moins dispose-t-elle d'une richesse épistémologique qui en fait un des piliers de l'EMS.

3. L'Arithmétique décimale : l'épineuse et lancinante question de l'approximation numérique

Nous renvoyons à la thèse de Bronner (1997) pour une étude plus complète de cette Arithmétique décimale en tant que partie du Numérique. Nous nous attachons ici à dégager des faits transpositifs marquants pour l'approximation dans les calculs que cette Arithmétique décimale organise. Le processus transpositif peut se résumer dans la fusion sans cesse questionnée et sans cesse remise en cause de deux caractéristiques essentielles de la production numérique : simplicité des calculs et justesse des résultats.

3.1 les choix de tables numériques

Les instructions pour la mise à exécution du plan d'études des Lycées, en date du 15 novembre 1854, mettent en lumière comment le problème se pose dans une institution d'enseignement. D'après Belhoste (Ibid. page 321), ces instructions pédagogiques auraient été rédigées par le célèbre astronome Le Verrier. On y lit (*in* Belhoste, page 333) :

> On placera entre les mains des élèves les tables de Lalande à cinq décimales. Les tables à sept décimales, faussement attribuées à Lalande, doivent être rejetées d'une manière absolue. L'emploi des tables de logarithmes a pour but de simplifier les calculs, et c'est ce qui serait loin d'avoir lieu au moyen de tables auxquelles on conserverait la disposition adoptée par Lalande, et qu'on étendrait cependant à sept décimales, comme cet illustre astronome s'est gardé de le faire. Admettons qu'on veuille, par ces tables à sept décimales, exécuter le produit de deux nombres décimaux ayant chacun sept chiffres significatifs, et obtenir le résultat lui-même avec sept chiffres significatifs, exactitude que l'emploi de ces

76 Une avancée transpositive que nous n'étudions pas ici qui remonte à la réforme des mathématiques modernes et qui ne concerne que la classe de Terminale.

> tables doit avoir pour but d'atteindre, sans quoi l'introduction de la septième décimale n'aurait point de sens. Si l'on pratique l'opération de deux manières, par la voie ordinaire et abrégée d'abord, par les tables de logarithmes ensuite, on reconnaît que la seconde marche est beaucoup plus longue que la première et exige deux ou trois fois plus de chiffres. La première condition d'une table de logarithmes est qu'on puisse y prendre à vue les parties proportionnelles[77], et c'est ce qui est possible dans les tables de Lalande à cinq décimales ; on n'obtient ainsi, il est vrai, des nombres exacts que jusqu'au quarante millième de leur valeur, mais c'est une exactitude suffisante dans la pratique habituelle. Les angles eux-mêmes peuvent être obtenus, au moyen des tables [*de logarithmes*] trigonométriques à cinq décimales, avec une exactitude de 3" à 4" sexagésimales, ce qui suffit dans l'enseignement.

L'auteur réfute les arguments de ceux qui voudraient conserver les tables à sept décimales (Bézout et Legendre employaient de telles tables) pour assurer une meilleure précision. Il invoque d'abord le coût calculatoire auquel cela conduit. Puis, sans la justifier, il marque une limite d'exactitude dont on peut se contenter dans l'enseignement.

Les réformes successives ne reviendront pas en arrière[78]. Nous avons vu que celle de 1905 descendait à "quatre ou cinq décimales"[79]. Dans la partie de son manuel qu'il consacre aux applications de la Trigonométrie, Borel (1920) en explicite une raison :

> Pour un arpentage ordinaire, le dixième de grade suffira. D'ailleurs, suivant les cas, on emploiera les tables de logarithmes à 4, 5, 6 ou 7 décimales ; on n'oubliera jamais qu'il est absurde de demander aux calculs ultérieurs une précision surpassant celle des mesures directes (Ibid. page 157).

Certes ce discours donne suite à la volonté qu'exprimait l'auteur, dans sa préface, de rendre la Trigonométrie résolument pratique. Outre le fait que l'arpentage n'est pas une discipline pratiquée dans toutes les classes, on doit s'interroger sur les moyens théoriques qui permettent d'anticiper sur la précision finale pour choisir effectivement entre 4, 5, 6 et 7 décimales. De tels moyens n'existent pas dans l'institution, du moins pas en classe de Première à laquelle s'adresse d'abord le manuel (cf. paragraphe suivant). La recommandation de ne pas retenir dans le résultat plus de décimales que dans les données fait office de contrôle. En dehors d'un contexte de mesurage il est très contestable. Mais la remarque de Borel pointe le fait que le fonctionnement didactique dans l'institution engendre des pratiques calculatoires adaptées aux précisions des tables officiellement autorisées et qui peuvent être indépendantes de toute problématique d'approximation numérique.

La réforme de 1947 repousse l'enseignement des logarithmes vulgaires sur la classe terminale des lycées et oblige ainsi les calculs trigonométriques à vivre en amont uniquement avec les tables des valeurs naturelles. Nous développons un exemple dans le paragraphe suivant où nous montrons que le contrôle de l'approximation n'est plus outillable au sein de l'institution.

---

77 L'absence de ces parties proportionnelles, appelées aussi différences tabulaires, est ce que reproche Le Verrier aux tables dites de Lagrange, mais étendues à 7 décimales.

78 Elles maintiendront cependant les 7 décimales pour les classes préparatoires aux grandes écoles.

79 En lycée ce sont des tables log-trigo à 4 ou 5 décimales mais, en Collège, les calculs trigonométriques ne se font déjà plus qu'avec des tables trigonométriques naturelles à 4 décimales.

3.2 l'intégration d'éléments théoriques relatifs à l'approximation

Dans son analyse du traité de Bézout, Neyret (1995) avait noté que la digression sur les opérations abrégées se prolongeait au XIX^{e} siècle dans des problèmes d'approximation. Les instructions pour la mise à exécution du plan d'études des Lycées, en date du 15 novembre 1854, nous permettent de le confirmer :

> C'est surtout à la pratique du calcul des nombres décimaux qu'il est indispensable d'exercer les élèves, puisque, la plupart du temps, ils auront à opérer sur de tels nombres. Il est rare que les données d'une question soient des nombres entiers ; ce sont habituellement des nombres décimaux, qui ne sont même pas connus rigoureusement, mais seulement avec une approximation décimale donnée ; et l'on a pour but d'en déduire d'autres nombres décimaux, exacts eux-mêmes, jusqu'à une certaine approximation fixée par les conditions du problème. […]. Il sera donc nécessaire d'enseigner aux élèves les méthodes abrégées par lesquelles on arrive simultanément à poser moins de chiffres et à fixer l'approximation réelle du résultat auquel on est parvenu (Ibid., page 330).

Les multiplications et divisons abrégées sont encore là. Ces mêmes instructions nous en disent plus :

> Depuis que l'on a reconnu la nécessité de l'introduction des méthodes d'approximation dans l'enseignement, plusieurs ouvrages, traités ou brochures, ont été publiés au sujet de ces méthodes. Malheureusement, la question a été trop souvent prise à un point de vue tel que, loin de simplifier la marche des calculs, on l'a compliquée. Plusieurs auteurs, envisageant le problème sous l'angle d'une entière rigueur, ont prétendu tenir compte non seulement de la première puissance des erreurs, mais de leurs carrés et de leurs produits : ne prenant pas garde qu'à la condition proposée d'obtenir le résultat cherché à une certaine approximation donnée ils ajoutaient implicitement cette autre condition d'estimer l'erreur elle-même avec autant de chiffres que le résultat principal.
>
> Le premier principe des approximations numériques est de ne tenir compte que des premières puissances des erreurs. Ce qui permet d'énoncer cette propriété fondamentale que, dans un produit de plusieurs facteurs, l'erreur relative du produit est égale à la somme des erreurs relatives des facteurs : d'où l'on déduit immédiatement que l'erreur relative d'un quotient est égale à la différence des erreurs relatives des facteurs ; que l'erreur relative de la racine carrée d'un nombre est la moitié de l'erreur relative du carré.
>
> Ces propositions permettent toujours d'estimer avec facilité le degré d'exactitude avec lequel il faut calculer les nombres engagés dans une suite d'opérations numériques, et qu'on ne peut obtenir que par des approximations, si l'on veut que le résultat définitif ait une exactitude demandée. Lorsqu'un certain nombre d'erreurs doivent être ainsi commises avant d'arriver au résultat, il faut se garder d'enseigner aux élèves qu'on en doit discuter la valeur, le signe, afin d'être autorisé à commettre la plus grande erreur possible dans chaque facteur, sans que cependant le résultat final soit entaché d'une erreur plus considérable que celle qu'on veut tolérer ; on les jetterait ainsi dans une route pénible, la plupart du temps impraticable et propre à rebuter les plus intrépides. Il est beaucoup plus simple, si dix erreurs doivent être successivement commises avant d'arriver à un résultat, de pousser les approximations jusqu'à une unité décimale plus élevée d'un ou deux rangs, et d'éviter toute discussion en rendant ainsi la somme des erreurs certainement négligeable (*in* Belhoste, page 331).

Ainsi, en ce milieu du XIX^{e} siècle, la nécessité de transposer dans l'enseignement des savoirs savants sur l'approximation numérique a été reconnue et elle a donné lieu à débats dans la Noosphère d'alors. Il s'agit d'élémentariser, c'est-à-dire de procéder à un découpage dans les pratiques de l'époque et à une injection de certains d'entre eux dans les curriculum. Le Verrier argumente et tranche.

Pour cela, il énonce deux problèmes d'approximation distincts pour le calcul numérique : celui d'obtenir, à la fin d'un calcul, une précision fixée à l'avance et celui d'estimer la précision sur le résultat d'un calcul avec des valeurs approchées.

Le premier problème, que nous noterons dorénavant Pb n°1, Le Verrier insiste, à la fin du troisième paragraphe de la citation, pour le traiter le plus simplement possible : on part d'approximations décimales d'ordres un peu plus élevés que celui que l'on désire à l'arrivée. On peut remarquer qu'il propose de se contenter d'une règle pratique sans renvoyer explicitement à un travail théorique. Des éléments théoriques doivent-ils apparaître dans le savoir enseigné ?

Pour le second problème, que nous noterons dorénavant Pb n°2, Le Verrier considère, après avoir dénoncé les errements d'un traitement par les puissances secondes des erreurs, qu'il faut passer par la notion d'erreur relative. Ici, il apporte plusieurs théorèmes.

Le Verrier est un astronome dont le prestige de calculateur a certainement influencé la Noosphère pour placer, comme il le demande[80], ces questions numériques très tôt dans le cursus du Lycée, avant l'enseignement de l'Algèbre. C'est ainsi que le programme d'Arithmétique de la classe de troisième année avant le baccalauréat contient les leçons suivantes :

> Nombres décimaux. Opérations. Comment on obtient un produit et un quotient à une unité près d'un ordre décimal donné. Erreurs relatives correspondantes des données et du résultat (Ibid. page 282).

Mais cela ne durera pas. Ce qui a trait aux erreurs relatives ne se maintient pas à ce niveau. On peut avancer au moins deux explications à ce phénomène didactique :

- la poussée de l'Algèbre qui réduit la place du calcul numérique et le dévalorise en l'asservissant puisque le calcul numérique prend le statut d'application numérique du calcul algébrique.
- des difficultés propres à l'enseignement de l'erreur relative qui ne pourrait se développer que sur une maîtrise algébrique, contrairement à ce que pense Le Verrier[81].

Par contre, ces notions ne quittent pas l'EMS. Elles deviennent de l'Arithmétique dite supérieure enseignée uniquement dans la classe scientifique terminale du Lycée. C'est d'ailleurs dans cette classe, que Bronner (1997) appelle le sanctuaire mathématique, qu'elles resteront jusqu'à la période des mathématiques modernes.

On peut en juger en comparant le chapitre intitulé *Calculs approchés* d'un manuel de la classe de Mathématiques de 1964 (Girard et Lentin, Hachette) avec le livre VI

[80] "L'arithmétique doit être entièrement enseignée sur les nombres chiffrés. Il ne doit être fait aucun emploi des lettres dans les démonstrations ; l'usage des lettres sera réservé pour l'algèbre, dont il sera donné quelques notions à la fin du cours d'arithmétique en troisième, et qui sera spécialement enseignée en seconde" (ibid., page 334).

[81] Nous ne nous étendrons pas sur ces difficultés qui mériteraient une étude didactique. À notre connaissance, une telle étude reste à faire.

intitulé *Approximations numériques* d'un manuel d'Arithmétique (Combette, Librairie Germer Baillère) pour les "aspirants au baccalauréat ès sciences", en 1882.
Dans l'un et l'autre les objectifs sont annoncés avec soin. Dans celui de 1882 :

> Les questions d'approximation se réduisent évidemment aux deux problèmes suivants :
>
> **Problème direct** : étant donné des nombres avec une approximation indéfinie, comment faut-il opérer sur ces nombres, pour obtenir le résultat de calculs indiqués avec une approximation déterminée ?
>
> **Problème inverse** : étant donné des nombres avec une approximation déterminée, avec quelle approximation peut-on obtenir le résultat de calculs indiqués sur ces nombres ?
>
> Nous résoudrons ces deux questions, dans les chapitres suivants, pour chacune des opérations élémentaires et l'extraction des racines carrées.
>
> Nous donnerons pour chacune des opérations : multiplication, division, extraction des racines, les deux méthodes qui résultent de la considération des erreurs absolues et des erreurs relatives (page 313).

On aura reconnu, dans cet ordre, les deux problèmes, Pb n° 1 et 2, abordés par Le Verrier. En écho, le manuel de 1964 déclare :

> On peut envisager, dans les questions d'approximation, deux problèmes principaux.
>
> 1°) Les erreurs commises sur les données étant bornées supérieurement par des nombres connus, on veut connaître une borne supérieure de l'erreur commise sur le résultat [*c'est le Pb n°2*].
>
> 2°) On désire avoir un résultat avec une erreur qui ne dépasse pas une borne fixée à l'avance. On se propose d'évaluer les données avec une approximation suffisante pour qu'il en soit ainsi [*c'est le Pb n°1*].
>
> Ces deux problèmes sont inverses. On saura les résoudre quand on aura étudié les erreurs commises dans les quatre opérations fondamentales sur les nombres approchés.
>
> Il y aura d'ailleurs des cas où l'un des problèmes se posera à l'exclusion de l'autre. Il peut arriver que l'on soit maître de l'approximation des données et que l'on veuille une approximation fixée à l'avance. L'essentiel est alors d'obtenir le résultat et de justifier l'approximation par un calcul aussi court que possible. Il est préférable, dans ce cas, de prendre une décimale de trop dans les données, si la discussion se fait mieux, que d'économiser une décimale au prix de calculs pénibles sur les erreurs commises.
>
> Au contraire, nous pouvons avoir les données avec une approximation fixée sans espoir d'amélioration. Il est convenable alors d'obtenir le résultat avec la meilleure approximation possible. On s'efforcera, dans ce cas, de borner au plus juste les erreurs commises. Tout ce que l'on peut gagner dans l'appréciation de l'erreur est gagné sur le résultat.
>
> Nous allons examiner, de ces deux points de vue, les quatre opérations fondamentales (page 46)[82].

[82] La racine carrée n'est plus annoncée comme une opération mais elle est longuement étudiée dans ce même chapitre

Dans cette présentation des problèmes, on ne peut pas ne pas remarquer l'insistance mise à employer le terme "données" qu'on ne trouve pas dans le manuel de 1882. C'est que depuis, l'enseignement de la physique s'est mathématisé et presse celui des mathématiques d'apporter les justifications aux règles de calcul approché qu'il utilise. Girard et Lentin ne manquent pas de le mentionner :

> Les diverses Sciences et techniques utilisent des formules qu'elles démontrent théoriquement ou établissent empiriquement et qui leur permettent de calculer certaines grandeurs à partir de mesures expérimentales (Exemples : $S = \pi r^2$, aire de cercle : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, période du pendule simple).
>
> Les nombres qui interviennent dans les calculs approchés appartiennent à l'une et à l'autre de ces deux catégories différentes.
>
> 1. Certains sont des constantes théoriques comme π, $\sqrt{2}$, sin10° […].
>
> 2. Les autres nombres sont fournis directement ou sont calculés à partir de mesures effectuées à l'aide d'appareils divers. Les résultats de ces mesures sont conditionnés par la sensibilité des appareils […] Il va s'agir alors avec des données inexactes que le calculateur ne peut pas changer, de faire des calculs et de déterminer la validité des résultats (page 42 et 43).

Malgré cette variation dans la présentation, la problématique est foncièrement identique[83]. Cependant les techniques sont radicalement différentes : un recours plus accentué à la formalisation algébrique (encadrement et valeur absolue), dans le manuel de 1964, et une décimalisation attachée à l'écriture chiffrée (chiffres exacts et chiffres significatifs), caractéristique de l'Arithmétique, dans celui de 1882, permettent de distinguer les deux manuels, dès le premier abord.
Illustrons notre propos par le cas de la multiplication (cf. documents 4 en Annexe, Volume 1) :

1°) Combette traite dans l'ordre le Pb n°1 (la question directe) par l'erreur absolue et par l'erreur relative puis le Pb n°2 (la question inverse) par l'erreur absolue et par l'erreur relative. Girard et Lentin traitent d'abord le Pb n°2 par l'erreur absolue et par l'erreur relative puis présentent le Pb n°1 sur un exemple en utilisant successivement les erreurs absolues et les erreurs relatives.

2°) Le théorème de l'erreur relative connaît des formulations semblables. On remarquera cependant chez Combette :

- le détail des cas pour promouvoir une économie de calculs.
- l'énoncé, la démonstration et l'illustration d'une règle pratique en termes de condition suffisante sur les nombres de chiffres exacts à retenir dans les deux facteurs décimaux d'un produit dont on veut une certaine précision décimale. Cette règle est apparentée à celle que prônait Le Verrier.

---

83 Même s'il n'en parle pas explicitement dans la partie cours, le manuel du XIX^e^ siècle ne se prive pas de poser des exercices d'où la question n'est pas absente, tel celui-ci (page 379) :

"On a laissé tomber librement une pierre, quelle sera la vitesse acquise au bout de $13^s,5$ et quel chemin sera parcouru ? On sait que l'accélération due à la pesanteur au lieu d'observation est $9^m,8094$ à 0,0001 près ; quelle sera la plus grande approximation de chacun des résultats ? "

3°) Le théorème des valeurs absolues par contre est présent chez Combette uniquement dans sa forme décimale, la règle d'Oughtred[84], qui est celle qu'employait Bézout pour abréger la multiplication. Mais, ici encore, on peut constater que Combette assure l'insertion théorique de cette règle[85].

Tous ces éléments théoriques relatifs à l'approximation renforcent dans l'Arithmétique décimale l'usage des algorithmes décimaux des 4 opérations élémentaires et des racines, mais ils ne touchent aux calculs trigonométriques que par ricochet lorsque ceux-ci opèrent sur les valeurs tirées des tables.

D'autres éléments théoriques relatifs à l'approximation arrivent de l'Analyse et de l'Algèbre et qui concernent directement les tables trigonométriques. Il y a ceux qui définissent en quoi une expression numérique peut-être déclarée logarithmique et qui expliquent comment rendre logarithmique une expression qui ne l'est pas. Certains autres apportent une lecture théorique de l'interpolation linéaire comme cas particulier d'approximation fonctionnelle. D'autres s'efforcent d'expliquer la présence, l'intérêt et l'usage des petites tables S et T dans les recueils des tables trigonométriques, par les variations des fonctions log(sinx) et log(tanx) au voisinage de 0. D'autres enfin, nous l'avons déjà dit font valoir les développements limités des sinus, cosinus et tangente au voisinage de 0 pour procéder, par des calculs approchés, à des vérifications de valeurs inscrites dans les tables ou à la production contrôlée de nouvelles valeurs.
Sans relever d'une perspective d'enseignement de la formation des tables, ils sensibilisent au problème de la production décimale des valeurs prises par une fonction numérique en offrant des moyens de contrôle des calculs numériques.

Ainsi l'Arithmétique décimale dans EMS s'est-elle enrichie, au cours du processus de transposition didactique, d'apports théoriques et pratiques qui fondent une activité mathématique de maîtrise de l'approximation dans les calculs approchés (dont les calculs trigonométriques). Mais tous les enrichissements que nous avons mis en évidence n'arrivent à vivre que "très haut" et ne sortent que rarement de la classe terminale.

3.3 la répudiation des algorithmes décimaux des opérations élémentaires

En amont de cette classe, dès le milieu du XX^e^ siècle, l'Arithmétique décimale se désagrège progressivement sous la poussée des idées qui porteront la réforme des mathématiques modernes. C'est ce que souligne Assude (1992, page 103) en citant Choquet (1961) :

> […] il faut supprimer totalement de l'Enseignement secondaire l'étude théorique des opérations dans le système décimal : multiplication, division, racine carrée. Pour les multiplications, il suffit d'en avoir la pratique ; pour la racine carrée, non seulement il faut des méthodes théoriques plus rapides, mais il existe des tables, des règles à calcul, des tables de logarithme, et maintenant des machines à calculer.

---

84 William Oughtred (1574-1660) est aussi connu pour avoir inventé la règle à calcul.

85 Cfyret (1995, paragraphe cité précédemment) pour une discussion sur les faiblesses de cette règle.

Assude note que, dès le programme de 1962, cet appel est entendu et elle poursuit son analyse, largement illustrée par l'exemple de la racine carrée :

> Ainsi va s'enclencher un processus par lequel l'ancien édifice longuement habité entrera en décomposition. Décomposition : le mot ne nous paraît pas trop fort. Toute une organisation, en effet, va s'effondrer sans qu'une reconstruction solide ait pu jusqu'à présent en être menée à bien (Ibid. page 105).

Du côté des calculs numériques en Trigonométrie, le contrôle sur les approximations s'amenuise immanquablement. La protection que peuvent assurer les tables contre la propagation des erreurs est de plus en plus faible. Depuis 1947, les logarithmes décimaux ont été renvoyés sur la classe terminale et l'on travaille avec les tables trigonométriques naturelles à 4 décimales, de degré en degré

Prenons l'exemple de la classe de Seconde à partir de 1965. Le programme de Géométrie prévoit :

> Relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ dans un triangle quelconque.
>
> Exercices de calcul comportant l'usage des tables de rapports trigonométriques.

Le manuel "Géométrie" de Lebossé et Hémery (Nathan, 1965, pages 264 et 265, cf. documents 5 en Annexe, Volume 1), après avoir établi la relation métrique et expliqué l'usage des tables, présente l'exercice résolu suivant :

> Résoudre un triangle ABC connaissant l'angle A = 36° et les côtés b = 85 et c = 54.
>
> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7225 + 2916 - 2 \times 85 \times 54 \times 0{,}8090$
>
> Donc $a^2 = 2714{,}38$ et $a = \sqrt{2714{,}38} = 52{,}1$ [*choix de l'arrondi d'ordre 1*]
>
> $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{2714{,}38 + 2916 - 7225}{2 \times 52{,}1 \times 54} = -0{,}2834$ [*choix de l'arrondi d'ordre 4, pour une lecture dans la table*]
>
> Donc 180° - B = 73°31' et B = 106°29' [*passage par le supplémentaire et interpolation linéaire*]
>
> $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{2714{,}38 + 7225 - 2916}{2 \times 52{,}1 \times 85} = 0{,}7930$ [*idem B*]
>
> Donc C = 37°31'.
>
> On vérifie que : A + B + C = 36° + 106°29' + 37°31' = 180°.

Passons sur le fait que les résultats affichés pour B et C sont faux puisque, à la seconde près, on trouve B = 106°27'55" et C = 37°32'5". D'ailleurs les interpolations linéaires sur cosB et cosC auraient dû conduire les auteurs aux résultats justes.

Venons-en plutôt à l'assurance avec laquelle le manuel garantit la précision de 1' sur le résultat semble (n'est-ce pas le sens à donner à la vérification offerte à la fin du calcul ?). Sur quoi est-elle fondée ? Et la technique utilisée est-elle fiable ?

Remplaçons A = 36° par A = 40° et recommençons en réalisant les mêmes gestes :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7225 + 2916 - 2 \times 85 \times 54 \times 0{,}7660$

Donc $a^2 = 3109{,}12$ et $a = \sqrt{3109{,}12} = 55{,}8$

$\text{CosB} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{3109{,}12 + 2916 - 7225}{2 \times 55{,}8 \times 54} = -\ 0{,}1991$

Donc 180° - B = 79°31' et B = 101°29'

$\text{CosC} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{3109{,}12 + 7225 - 2916}{2 \times 55{,}8 \times 85} = 0{,}7820$

Donc C = 38°33'.

On vérifie que : A + B + C = 40° + 101°29' + 38°33' = 180°2' !!

D'où vient cette mauvaise surprise ? En fait, avec A = 36°, le manuel a bénéficié[86] de circonstances favorables sur le nombre a puisque l'arrondi a = 52,1 n'est pas d'ordre 1 comme le laisse croire l'écriture mais d'ordre 3 !! Dans l'exemple que nous proposons, nous avons éliminé ce bénéfice caché puisque a = 55,759… . Le manuel aurait-il osé écrire a = 55,76 et faire le calcul de cosB qui suit avec un chiffre supplémentaire au dénominateur[87] ?
Nous en doutons ; nous doutons même que la recherche du quotient approché de 1594,62 par 5626,8 à quatre décimales exactes soit une tâche calculatoire pratiquée dans la classe de Seconde de cette époque. Même en simplifiant la fraction en $\dfrac{2953}{1042}$, l'algorithme classique est long et fastidieux. Il n'y a plus de logarithme décimaux.
Reportons-nous à l'autre manuel de la classe : celui d'Algèbre[88]. Nous constatons que les quotients approchés demandés en exercices aux élèves ne vont pas au-delà du millième avec des nombres à 3 chiffres significatifs au plus. Conformément au programme[89], la notion de valeur approchée est accrochée à celle d'encadrement. C'est la marque d'un basculement de l'approximation hors de l'Arithmétique. Certes on trouve encore les algorithmes décimaux classiques, mais ils sont présentés sommairement (pour la division, il s'agit de 520 divisé par 317 au millième près). D'ailleurs les auteurs concluent leur exemple de recherche de la racine cubique approchée par encadrement par ce commentaire :

> On peut prolonger ainsi le calcul mais pratiquement on est rapidement arrêté par la longueur des opérations (page 53).

---

[86] Ce bénéfice est calculé, nous semble-t-il.

[87] Il aurait alors trouvé : cosB = - 0,1992 et B = 101°29' puis cosC = 0,7826 et C = 38°30'.

On peut se rendre compte ici qu'une table trigonométrique "naturelle" de degré en degré et à 4 décimales ne garantit pas (avec l'interpolation linéaire) l'exactitude à la minute près. En effet des calculs plus précis (sur calculatrice) donnent cos B = - 0,1992 mais B = 101°30'.

[88] On aura remarqué qu'il ne s'appelle plus Arithmétique.

[89] Voir Bronner (1997) pour une étude des phénomènes transpositifs à cette époque.

Ils ne croient donc plus à l'intérêt pratique de ces algorithmes qui sont maintenant isolés et préfèrent reporter leurs efforts sur le contrôle qu'apporte l'encadrement dans la production de la valeur approchée.

Mais la nouvelle praxéologie de décimalisation ne peut assurer la justesse des résultats dans les calculs numériques en Trigonométrie car la technologie des encadrements n'est pas en mesure, seule, d'y poser des questions sur le contrôle des erreurs. Dans l'exemple du manuel qui écrit :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7225 + 2916 - 2 \times 85 \times 54 \times 0{,}8090$$

$$\text{Donc } a^2 = 2714{,}38 \text{ et } a = \sqrt{2714{,}38} = 52{,}1$$

$$\text{CosB} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2714{,}38 + 2916 - 7225}{2 \times 52{,}1 \times 54} = -\ 0{,}2834$$

Une question parmi d'autres est de savoir s'il est possible d'obtenir l'arrondi décimal d'ordre 4 de cosB en utilisant un arrondi décimal d'ordre 4 de cos36°, et, si oui, avec quelles précisons sur les résultats intermédiaires. Faute d'éléments théoriques pour y répondre, il faudrait, au minimum, diminuer drastiquement et autoritairement la précision sur le résultat final. Le manuel de Géométrie ne s'y résout pas.

> *Nous pensons que, si on y maintient une exigence de précision de l'ordre de la minute d'angle, la tâche calculatoire présentée et réalisée par le manuel n'est pas faisable avec les techniques présentes dans l'institution à cette époque. Nous avons encore affaire à une fiction didactique qui laisse croire à un contrôle de la précision au sein de l'institution. Mais l'étude des manuels et des programmes donne à penser que ce contrôle n'existe pas dans les pratiques calculatoires effectives des élèves.*

Paradoxalement[90], la réforme des mathématiques modernes (1968/1977) renfloue un peu l'Arithmétique décimale dans les premières classes du Lycée. Elle réintroduit en classe de Seconde les calculs logarithmiques, les notions d'erreur absolue et relative ; elle aborde les problèmes 1 et 2 de l'approximation.

À titre d'exemples de calculs numériques de cette période (qui a immédiatement précédé l'arrivée des calculatrices) nous mettons en Annexe (Volume 2, documents 6) le chapitre "Calculs numériques", extrait du manuel *Exercices et problèmes résolus en 2^de^ CT* de Gourion et Keramsi (Nathan, 1975, page 151 à 161). On y remarquera entre autres l'exercice 6.5 qui n'aurait pas déparé dans le manuel de Terminale Girard et Lentin de 1964. On pourra aussi apprécier une entrée plus franche de l'Analyse dans les pratiques d'approximation décimale. Le programme de 1973 inscrit en effet tout ce qui touche au Calcul numérique dans un chapitre intitulé "Introduction à l'Analyse". Cette décision sera reprise et retravaillée par ceux-là mêmes qui assèneront un coup d'arrêt brutal à la réforme. Mais, entre temps, les calculatrices frappaient à la porte des classes.

90 Paradoxal quand on connaît les critiques formulées à l'encontre de cette réforme sur le peu de cas qu'elle aurait fait des calculs numériques (cf. partie C).

Bref résumé du paragraphe 3

Nous sommes à la fin des années 1970. La Théorie moyenne qui outillait l'Arithmétique décimale dans le traité de Bézout n'a pas résisté aux deux siècles de transposition didactique qui ont suivi. Elle s'est disloquée et le Numérique qui a pris sa place pour faire vivre les calculs numériques approchés dans l'institution assure mal la maîtrise de l'approximation. L'absence de construction d'une problématique de l'approximation fait que le recours aux tables ne suffit plus pour garantir des résultats justes dans les calculs trigonométriques. La fonction de ces tables dans EMS se réduit à une aide au calcul sans contrôle de la validité du résultat. Il y a là un écart important avec la fonction que les mathématiciens attribuent aux tables et qui a légitimé, à leurs yeux, tous les efforts mis, au cours des siècles, dans leur construction.

4. Retour sur l'hypothèse de recherche

Que le contrôle de la validité des résultats de calculs numériques instrumentés par des tables ne se soit pas nourri exclusivement de la puissance calculatoire[91] de ces tables (leur précision, leur nombre, etc.) apparaît comme un premier enseignement de l'étude de la transposition didactique. Il faut construire et conduire les calculs et pour cela leur donner un sens pluriel : cela n'est pas qu'une affaire de nombre de chiffres exacts à la disposition du calculateur. Plus précisément, les contrôles, capables de garantir que le résultat d'un calcul trigonométrique instrumenté par une calculatrice est juste, touchent à la fois à l'organisation de la Trigonométrie et à celle du Numérique.

Revenant au plus près à l'objet de notre étude, ceci confirme que l'institution d'enseignement construit l'instrument de calcul, ici la table, autour de deux fonctions en interaction : la désignation d'un calcul à instrumenter par la table - l'instrumentation - et la constitution de la table comme objet capable d'intervenir dans ce calcul - l'instrumentalisation. Cette construction naît dans le problème à la résolution duquel le calcul est censé participer. Elle s'alimente donc, si on prend le cas des calculs trigonométriques, au corpus Trigonométrie lui-même, tel que l'institution le forge. C'est lui qui pose les problèmes, c'est lui qui définit les objets et établit les relations entre eux, c'est lui qui fournit les tâches et leur associe des praxéologies pour les conduire avec succès.
Cette construction s'alimente aussi aux relations que tissent entre eux les objets qu'on dit nombres, à leur fusion ontologique et fonctionnelle dans le corpus Numérique. C'est elle qui valorise ou inhibe l'idée d'approximation décimale ; c'est elle qui, si besoin est, réifie cette idée dans des praxéologies de décimalisation.

Ce que nous enseigne aussi l'étude de la transposition didactique, c'est que certains états de cohabitations entre un instrument de calcul et le calcul numérique peuvent conduire à sacrifier la justesse du résultat sur l'autel de la simplicité du calcul. Certes l'immersion progressive des calculs numériques dans un corpus algébrique, fait de formules et de règles de transformation d'une expression numérique, développe le contrôle de la validité d'un calcul numérique par conservation de la valeur exacte et permet, dans certains cas - de manière fugitive dans un micro-environnement favorable et très protégé, des simplifications sans perte de justesse. Mais le recours à l'instrument

[91] On parle bien de la puissance d'une calculatrice.

ne peut pas, écologiquement parlant, ignorer durablement le problème de la propagation des erreurs.
Une condition nécessaire pour qu'il y ait articulation dans l'institution d'enseignement entre cet instrument de calcul et l'approximation numérique décimale est que cette institution s'engage à développer une problématique de l'approximation autour des problèmes 1 et 2 que Le Verrier a décrits. Seule une telle problématique permet de poser la question du contrôle et de prendre en charge, dans certains cas, les erreurs inévitablement présentes dès qu'il y a des résultats intermédiaires dus à un enchaînement d'opérations élémentaires ou qu'une des opérations porte sur un nombre lui-même approché. Seule une telle problématique permet de construire des praxéologies de décimalisation qui ne soient pas sous la coupe exclusive de l'instrument mais qui soient capables d'intégrer l'instrument de calcul comme un instrument de contrôle.
Cela est sensible avec le traité de Bézout qui, malgré l'aide de table à 7 décimales et le verrouillage de la résolution des triangles au cas par cas est obligé de se retrancher derrière la notion "d'usages ordinaires" pour échapper aux interrogations sur la validité du résultat.
Cela l'est plus encore dans les premières classes de Lycée avant la réforme des mathématiques modernes puisque la portée des techniques instrumentées débouchant sur des résultats justes dans les calculs trigonométriques y était très réduite.
Nous avons vu qu'une telle problématique a existé dans l'EMS, une première fois avec l'Arithmétique et une deuxième fois avec l'Algèbre, à base d'encadrements et de majorations. *Est-elle revenue avec l'Analyse dans l'EMS actuel* ?

Un autre enseignement de cette étude est de nous alerter sur l'effacement par l'EMS d'un problème qui est au cœur des calculs numériques en Trigonométrie dans l'œuvre des mathématiciens, celui de la formation des tables, c'est-à-dire du *calcul à un ordre décimal indéterminé de certaines valeurs trigonométriques*. La disparition de ce problème représente à la fois une mutilation technologique des techniques instrumentées par la table et la perte d'un habitat (au sens écologique) pour l'approximation numérique décimale. *Ce problème vit-il dans l'EMS actuel* ?

Ces deux questions sont en filigrane dans la suite de notre étude.

Partie C

Rapports institutionnels aux objets calculatrice et approximation numérique décimale dans les classes de Troisième, Seconde et Première S actuelles.

Chapitre C_1 : le contrat numérico-algébrique du Collège

Chapitre C_2 : la classe de Seconde

Chapitre C_3 : le contrat numérico-analytique du Lycée

Chapitre C_4 : bilan de l'analyse écologique

RAPPORTS INSTITUTIONNELS AUX OBJETS CALCULATRICE ET APPROXIMATION NUMERIQUE DECIMALE DANS LES CLASSES DE TROISIEME, SECONDE ET PREMIERE S ACTUELLES

Nous menons ici une étude écologique des pratiques d'approximation décimale dans l'institution EMS contemporaine qui démarre, de notre point de vue, avec la contre-réforme et l'arrivée des calculatrices dans les classes. Cette étude prolonge donc celle de la partie B, mais elle se fait plus précise sur les contrats institutionnels relatifs au calcul numérique dans lesquels s'inscrivent ces pratiques. Nous montrons que domine au Collège un contrat que nous qualifions de numérico-algébrique, que ce contrat n'évolue pratiquement pas en classe de Seconde et qu'émerge à ses côtés, à partir de la classe de Première, un contrat numérico-analytique. Nous décrivons les éléments caractéristiques de ces contrats et regardons comment ils façonnent les praxéologies de décimalisation, notamment dans les calculs trigonométriques. Au fur et à mesure de l'avancement de cette étude, notre attention se porte sur la superposition de ces deux contrats institutionnels et nous cherchons à dégager les conditions écologiques d'une praxéologie de décimalisation qui assume une bonne articulation entre la calculatrice et l'approximation numérique décimale.

Sur une période qui démarre avec l'avènement de la contre-réforme (1981) et qui prend fin à l'aube de l'an 2000[92], notre étude prend en compte :

- des productions de la noosphère comme les programmes, les instructions officielles et les publications des IREM et de l'APMEP[93]
- des manuels scolaires de plusieurs collections ainsi que des sujets du Brevet des collèges
- des productions écrites d'élèves que nous avons sollicités
- des déclarations orales d'enseignants que nous avons interviewés.

Nous faisons se succéder quatre parties, une première partie relative à la classe de Troisième (chapitre C_1), une deuxième relative à la classe de Seconde (chapitre C_2), une troisième relative à la classe de Première S (chapitre C_3) ; avec la dernière partie, (chapitre C_4), nous nous essayons à rapprocher les deux études écologiques, celle de la partie C et celle de la partie B.

92 Avant la dernière vague de nouveaux programmes.

93 IREM : instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques
APMEP : association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public

CHAPITRE C_1 : LE CONTRAT NUMERICO-ALGEBRIQUE DU COLLEGE

1. La formation du contrat

Tout au long du Collège, le concept d'approximation numérique se construit par la décimalisation finie de nombres au service de trois grandes causes mathématiques qui, écologiquement parlant, lui servent de niches :

- le mesurage de grandeurs par lequel un nombre décimal sert de valeur "vraie" de la mesure d'une grandeur. Fortement induite par l'usage du système métrique, cette fonction se réalise essentiellement dans des tâches comme mesurer, repérer où des dispositifs comprenant des instruments comme la règle graduée, le rapporteur, le papier millimétré permettent d'accéder aux mesures ;
- la représentation des nombres en écriture décimale qu'on active dans des tâches comme égaler ou comparer deux nombres ou deux grandeurs de même nature ;
- le calcul sur les nombres et les grandeurs, par lequel les grandeurs se combinent entre elles, et les nombres s'opèrent entre eux. Cette fonction appelle des tâches comme calculer, exécuter, simplifier où peuvent intervenir des instruments de calcul comme la calculatrice, les tables ou les abaques.

En empruntant à l'écriture décimale à la fois sa sémioticité et son instrumentalité, ces trois fonctions se manifestent conjointement, en Collège, dans la grande majorité des tâches commandées par les exercices relatifs aux nombres ou aux grandeurs mesurables. L'institution Collège organise mathématiquement et didactiquement les trois fonctions sous l'égide cachée d'un corpus théorique articulé autour de trois pôles : l'ensemble R structure algébrique, l'ensemble R espace topologique et l'ensemble R^+ espace des mesures des grandeurs mesurables continues. Mais elle ne peut pas exploiter toutes les potentialités mathématiques de ce corpus puisqu'il n'est que partiellement et inégalement construit à travers les tâches institutionnalisées par elle. En particulier l'état embryonnaire de la topologie de R ne lui permet ni d'homogénéiser cet ensemble autour de la notion de suite convergente (ou moins généralement de développement décimal illimité) ni de détacher la notion de valeur exacte d'un nombre de sa représentation dans une expression écrite en opérations arithmétiques[94].

L'approximation numérique vit donc sous une forme que nous qualifions d'algébrique en ce sens qu'un calcul approché ne se développe qu'appuyé sur, et précédé par des calculs dans un mode exact bâti uniquement sur les sous-structures algébriques pré-construites au Collège et attachées à autant de systèmes numériques tels que D, Q et C[95]. Autrement dit, le nombre n'existe qu'en tant qu'élément d'un système numérique qui définit sa valeur exacte et réalise sa décimalisation par exécution d'une suite

[94] Les quatre opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication et division) auxquelles il adjoint la racine carrée et les *opérateurs* trigonométriques sin et cos qui n'apparaissent pas encore comme des fonctions numériques.

[95] C est le corps des nombres constructibles à la règle et au compas

d'opérations élémentaires toutes reproductibles dans la calculatrice. En nous référant à nos études précédentes[96], nous soutenons que, au Collège,

> *seule la valeur exacte explicite d'un nombre fonde l'existence de ce nombre et rend possible sa décimalisation finie via sa reproduction dans l'éditeur de la calculatrice.*

Approcher un nombre n'a d'autre sens en Collège que de le décimaliser à partir de sa valeur exacte. Plus précisément là où l'institution provoque ce qu'elle appelle un calcul numérique approché, sa demande est celle d'une des approximations décimales d'une valeur qu'elle considère implicitement comme exacte tout comme en géométrie métrique où la valeur vraie de la grandeur rapportée à une unité est remplacée par le résultat décimal du mesurage. Mais cette approximation d'un nombre par décimalisation finie – nous devrions dire plutôt cette évaluation, pour laisser le terme approximation à un processus d'évaluations successives - ne participe pas à la construction de ce nombre, tout entière réalisée auparavant dans sa valeur exacte ou supposée exacte. Elle ne trouve sa raison d'être que dans l'adaptation temporaire du nombre à un contexte - comme celui de la géométrie métrique ou celui des statistiques – qui rabat la valeur exacte (ou la valeur vraie, s'il s'agit d'une mesure de grandeur) sur un nombre décimal. Illustrons cette écologie institutionnelle de l'approximation numérique avec les deux types de tâches les plus fréquents au Collège :

- résoudre une équation : cela commence par une phase algébrique où l'on s'attache (par équivalences implicites) à trouver la (ou les) racine(s) exacte(s) ; à partir de là peut s'enclencher une deuxième phase où l'on adapte la racine exacte au contexte de la modélisation à l'origine de l'équation ; *il ne s'agit pas d'une résolution approchée de l'équation mais bien de la production d'une valeur approchée décimale du résultat de la résolution exacte.*
- calculer une expression numérique : cela emprunte une voie à sens unique qui mène à un nombre décimal. Première phase : l'expression numérique est calculée pour en extraire la valeur exacte (simplification via calcul algébrique ou algorithme d'exécution exacte[97]). Deuxième phase : la valeur exacte → une valeur approchée décimale (via la calculatrice, si la valeur exacte n'est pas en écriture décimale) → la valeur approchée décimale adaptée au contexte (via troncature ou arrondi).

On remarquera que la deuxième phase peut être regardée elle-même comme une tâche - celle de se donner une valeur approchée décimale d'un certain nombre X connu par une écriture de sa valeur exacte. En tant que telle, elle est intégrée à une *praxéologie de décimalisation* que nous décomposons ainsi :

> une technique instrumentée par la calculatrice qui consiste à fabriquer une suite d'opérateurs numériques (exprimées dans un calculogramme ou séquence-machine ou calcul-machine), à les faire exécuter par la calculatrice et à se saisir du résultat décimal

[96] Mémoire de DEA (Birebent, 1996)

[97] Avant l'obtention de cette valeur exacte, l'expression numérique initiale n'est pas regardée comme un nombre dont il faut changer la représentation mais comme le point de départ d'un calcul ou d'une "simplification" ; dans D la calculatrice concurrence l'algorithme manuel, écrit ou mental ; cette concurrence s'étend même sur le domaine fractionnaire car depuis plusieurs années les calculatrices usuelles en Collège peuvent opérer sur des fractions sans les décimaliser

produit à travers diverses manipulations, internes ou externes à la calculatrice, telles la troncature ou l'arrondi du nombre affiché, la mise en mémoire de ce nombre, etc.

> une technologie qui rassemble les règles algébriques usuelles capables de traduire le nombre X dans la succession des opérateurs et des fonctions utilisés

> une théorie (non construite) qui suppose pour tous les nombres (appelés réels) l'existence d'une écriture décimale unique accessible par la valeur exacte.

2. Un indispensable postulat instrumental

L'écologie de cette praxéologie au Collège repose sur un implicite technologique que nous qualifions de postulat instrumental.

Postulat instrumental : *après chaque pression de la touche EXE, le nombre écrit à l'écran est un arrondi décimal du résultat du calcul édité.*

On remarquera qu'avec ce postulat instrumental nous mettons en parallèle deux modes d'accès à un nombre, le mesurage et le calcul. Le mesurage regarde le nombre comme rapport de deux grandeurs de même nature ; dans certaines circonstances et grâce à une certaine technique (dite de mesurage), ce rapport est lu à l'écran d'un instrument (dit de mesure) dans la représentation décimale que permet la graduation. Le calcul regarde le nombre comme le résultat d'un ensemble d'opérations élémentaires sur d'autres nombres ; dans certaines circonstances et grâce à une certaine technique (dite de calcul), ce résultat est lu à l'écran de la calculatrice dans sa représentation décimale que permet le format d'affichage.

Ce postulat instrumental est indispensable à la vie de l'approximation numérique en Collège

car, à l'instar des anciennes tables numériques (cf. partie B), il est censé garantir la validité de cette valeur décimale dans les différentes fonctions mathématiques qu'elle doit remplir à la place du nombre lui-même. Expliquons-nous avec l'exemple de la Géométrie métrique qui sert d'habitat principal à l'approximation numérique et sur lequel nous reviendrons plus longuement avec la Trigonométrie. Chaque mesure de grandeur géométrique (longueur, aire, angle, etc.) prend la forme rituelle d'un bloc "pragmatique" qui enchaîne deux phases dans cet ordre[98] :

- produire, soit par un mesurage, soit par un calcul conduit sur le mode décrit ci-dessus, un premier nombre décimal formaté par la graduation de l'instrument de mesure ou celle de la calculatrice
- transformer ce premier nombre décimal en un deuxième nombre décimal, soit par troncature soit par arrondi, pour respecter une certaine précision sur la mesure cherchée – cette dernière est le plus souvent définie en nombre de chiffres après la virgule et fait l'objet de diverses recommandations institutionnelles selon la grandeur géométrique concernée.

[98] Elles peuvent aussi être fusionnées en mettant la calculatrice en mode $\boxed{\text{Fix n}}$ où n est le nombre de chiffres décimaux à retenir à la fin de deuxième action

Ce bloc pragmatique produit une unique valeur décimale qui se substitue au nombre visé par le calcul ou la mesure. Le corpus de Géométrie[99] fournit le complexe d'opérations de mesure ou de calcul ; il est relayé par le postulat instrumental qui garantit la validité de cette valeur décimale. Cette valeur décimale doit, en quelque sorte, faire oublier le nombre lui-même puisqu'elle doit remplir à sa place, toutes les fonctions (comparaison, opérations, etc.) dévolues habituellement (dans un contexte de géométrie métrique) à la mesure d'une grandeur géométrique. Cela permet au problème de géométrie métrique de se poursuivre en s'intéressant, si besoin est, à une autre grandeur géométrique. Apparaît alors un nouveau bloc qui fabrique une valeur décimale pour un autre nombre.

Il est clair, dans cet exemple, qu'on a affaire à une approximation numérique de service où l'on ne cherche pas à embrasser le nombre approché (celui qui est approché, pas celui qui approche) dans une globalité conceptuelle et opératoire qui, mettant à jour un processus d'approximation de ce nombre, prétende l'atteindre avec toute précision voulue à l'avance (même au-delà des capacités de l'instrument de calcul ou de mesure) ; les gestes et le dispositif instrumental que nous venons de décrire ne sont pas adaptés à cet objectif.

3. Le fonctionnement du contrat

Les partenaires mathématiques usuels de cette approximation numérique sont les règles de calcul algébrique pour conduire la première phase du bloc pragmatique et les règles de la troncature décimale (compter le nombre de chiffres après la virgule) ou de l'arrondi décimal (en ajoutant 1 au dernier des chiffres retenus, si nécessaire) pour mener la deuxième phase. Mais ces partenaires privilégiés ne sont pas les seuls. Ils côtoient des partenaires occasionnels parmi lesquels les encadrements et les algorithmes.

3.1 examinons de plus près le premier partenariat "occasionnel", celui des encadrements.

Il est inégalement exploité par les manuels. Ceux qui jugent opportun de le faire choisissent :

- des tâches de comparaison

Voici un exemple typique de cette tâche, tiré d'un manuel de la classe de Quatrième (Irem de Strasbourg, éditions Istra, 1988, page 95) :

99 Nous n'avons pas cherché à étudier la filiation de ce corpus avec l'ancien corpus euclidien que nous avons rencontré chez Bézout.

Exercice 1

Voici des valeurs approchées de $\sqrt{2}$: $\frac{17}{12}$; $\frac{24}{17}$; $\frac{577}{408}$; $\frac{816}{577}$; $\frac{665\,857}{470\,832}$
Donner des encadrements des nombres ci-dessus permettant de les ranger par ordre croissant.

Plusieurs techniques algébriques sont mobilisables. Il y a, par exemple celles qui calculent les différences $2 - (\frac{17}{12})^2$, $2 - (\frac{24}{17})^2$ etc. puis les comparent ; et celles qui réalisent les comparaisons des fractions deux par deux :

$\frac{17}{12} > \frac{24}{17}$ car 17 x17 = 289 > 288 =12 x 24, etc. sans s'occuper de $\sqrt{2}$.

Mais leur coût exorbitant en opérations arithmétiques incite à la décimalisation par la calculatrice de chacune des fractions. Il est possible alors d'effectuer décimalement les différences $\sqrt{2} - \frac{17}{12}$, $\sqrt{2} - \frac{24}{17}$, etc. et de les comparer. Mais la demande formulée par l'énoncé exige une autre formulation des inégalités car au lieu de déduire directement l'ordre des nombres à partir des décimales fournies par la calculatrice, il faut produire un encadrement pour chacun des nombres de manière à obtenir un enchaînement d'encadrements décimaux disjoints. Cette complexification de l'intervention de la décimalisation dans la résolution du problème ne répond pas à un besoin de contrôler les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice mais à la volonté d'initier une pratique de comparaison par encadrements décimaux en l'imposant contre celle des développements décimaux.

Voici un deuxième exemple plus original, extrait du manuel Pythagore (Hatier,1989, page 53) :

Exercice 2

Une table ronde a pour rayon 56,4 cm. Sachant que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, donner un encadrement de l'aire de la table. Cette table mesure-t-elle plus ou moins de 1 m^2 ?

Cela débute par des manipulations opératoires sur les encadrements. On aboutit à l'encadrement 9988,2144 < Aire < 10020,024 qui ne permet pas de répondre à la deuxième question. Dans une classe de Collège, l'absence de consigne organisant la construction d'encadrements décimaux successifs et emboîtés de π autorise la technique habituelle de décimalisation avec calculatrice qui permet effectivement de fournir une réponse - l'exécution par une calculatrice ordinaire de $.56{,}4^2$ donne 9993,280567. L'énoncé du manuel fait avorter la possibilité de rencontrer une problématique d'approximation et s'en tient à la réalisation statique d'un encadrement.

- des tâches d'approximation décimale d'un nombre potentiellement attachées au problème fondamental de la propagation d'erreurs dans un calcul numérique.

Voici un exemple typique de cette tâche, proposé par le manuel de la collection Mistral (Istra, 1989, page 132) :

Exercice 3

On sait que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.
Écrivez un encadrement de $6\sqrt{2} - 3$. Peut-on en déduire les approximations décimales par défaut et par excès à 0,1 près et à 0,01 près ?

Une fois l'encadrement réalisé ($5{,}484 < 6\sqrt{2} - 3 < 5{,}49$) et la déduction déclarée, que faut-il retirer de cet exercice sinon que, dans certaines circonstances, une approximation décimale au millième sur l'un des termes d'un calcul pourrait ne pas autoriser une approximation décimale au millième sur le résultat du calcul ? Comment dépasser le stade du conditionnel ?

> *Nous constatons que l'intervention des encadrements dans l'approximation numérique, réduite à quelques tâches isolées, esquisse un premier pas vers une problématique d'approximation sans déclencher de reprise des techniques usuelles du calcul approché. En fait l'économie didactique du calcul approché "ordinaire" en cette fin de Collège repose essentiellement sur un glissement de l'égalité à la quasi-égalité obtenue par la calculatrice et une telle économie ne peut pas offrir d'emploi stable aux encadrements.*

Sous les choix opérés par les manuels se profilent tout de même le mobile de l'institution : maintenir une présence de l'objet encadrement aux côtés de l'approximation numérique. Tout d'abord, elle trouve en cet objet un outil de changement de cadre : comme segment de la droite numérique, l'encadrement offre une entrée dans le cadre géométrique et stimule le registre graphique ; comme double inégalité, il intègre le travail algébrique sur les inégalités et les inéquations. Ensuite, comme nous l'avons vu, cet objet lui permet d'assumer son devoir institutionnel de prestataire de services en abordant le sujet de la propagation des erreurs dont le traitement mathématique est réclamé par l'enseignement de la Physique. Enfin elle sait qu'elle devra s'appuyer dans un proche avenir sur sa capacité à traduire et à rendre opératoire la notion de précision qu'elle introduira dans le traitement analytique des problèmes d'approximation.

Mais ces choix laissent aussi voir, en creux, les contraintes institutionnelles qui pèsent sur la vie des encadrements. En effet, l'institution ne peut pas se contenter de demander à l'encadrement de lui fournir une forme sémiotique alternative à la quasi-égalité ($\approx$) ; il s'agit pour elle de trouver les moyens mathématiques de l'instrumentaliser dans des techniques. Ces moyens sont à puiser dans l'organisation mathématique, et celle de la fin de Collège n'est pas en mesure de fonctionnaliser la création et la manipulation des encadrements par l'objectif d'approcher un nombre. De deux points de vue :

- du point de vue algébrique : les opérations sur les encadrements sont limitées à des additions et des multiplications entre positifs, et seulement sur des exemples numériques
- du point de vue analytique : la notion de fonction émerge à peine à partir du cas particulier de fonction affine

Ainsi une étude des variations de l'erreur dans le résultat d'un calcul selon les nombres, les opérations et les incertitudes engagés dans ce calcul n'est pas encore envisageable, ni pour anticiper cette erreur ni pour la calibrer. D'ailleurs les manuels ne dépassent jamais le niveau de la constatation numérique comme dans les trois exemples présentés ci-dessus.

3.2 nous avons parlé d'un deuxième partenaire occasionnel pour l'approximation numérique, à savoir l'algorithme.

Précisons le contexte institutionnel. En 1985, un changement de programme crée, tout au long du Collège, une structuration autour de trois parties, respectivement intitulées : "Travaux numériques", "Travaux géométriques" et "Organisation et gestion des données – fonctions". Jusqu'en classe de Quatrième, cette dernière partie prend à sa charge non seulement des éléments de Statistique descriptive mais aussi des processus de modélisation de dépendances entre grandeurs physiques par des fonctions, essentiellement des fonctions linéaires (proportionnalité des données). En classe de Troisième, la partie est enrichie par l'implication des fonctions affines qui modélise la proportionnalité des accroissements entre les données. Elle est également étoffée d'une initiation à la résolution approchée d'équations "par essais et corrections successifs" et d'une introduction à "l'analyse et à la construction d'un algorithme aboutissant à la résolution d'un problème donné" même si :

> aucune compétence n'est exigible à ce propos.

Les commentaires insistent sur l'emploi de tableaux, de graphiques et de calculatrices ou d'ordinateurs en recommandant la prudence sur la formalisation fonctionnelle.

> L'essentiel est de gérer des situations concrètes, relevant en particulier des thèmes transversaux, à l'aide de tableaux, de diagrammes, de graphiques.
>
> Dans les situations mettant en jeu des fonctions, on continue d'habituer les élèves à utiliser des expressions, telles que : "en fonction de ", "est fonction de" ; on pourra introduire prudemment la notation f(x), mais toute définition de la notion de fonction ou d'application est exclue.

Les manuels se conforment aux instructions officielles en présentant des activités dites de "découverte" avec deux particularités de l'organisation didactique :

- une grande diversité entre les manuels. Aucune notion ne fait l'unanimité ; par exemple celle d'interpolation linéaire apparaît dans quelques manuels (cf. documents 1 en Annexe, Volume 2) mais pas dans tous, alors que les liens qu'elle entretient avec la fonction affine en fait une technique d'approximation numérique bien adaptée à une exploitation des données numériques recueillies sous forme de tables. On trouve tout aussi bien la dichotomie et l'interpolation linéaire, lesquelles s'appuient sur un tracé graphique ou un tableau de valeurs, - ici les encadrements côtoient les valeurs approchées, même s'ils ne sont pas formulés – que des algorithmes itératifs d'approximations successives, tels l'algorithme de Héron pour approcher $\sqrt{n}$ - là les encadrements sont écartés et l'on met en évidence la suite des valeurs approchées décimales calculées par la calculatrice.

- l'affaiblissement de la structure usuelle en cours et exercices. Certains manuels ne proposent pas de résumés de cours au-delà des activités dites de découverte et d'autres se permettent de ne pas donner d'exercices

Les équations du second degré et les racines carrées sont particulièrement prisées, comme on pourra le constater dans les documents mis en Annexe (Volume 2).
Voici aussi des extraits de l'activité que propose le manuel Pythagore (Hachette, 1989, page 27) :

Sans utiliser la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice, on cherche à obtenir des approximations de plus en plus précises de $\sqrt{7}$ (par exemple), en recommençant plusieurs fois une même suite d'instructions.

1°) Lire le procédé de calcul :

1	M	7	÷	RM	+	RM	=	÷	2	=

2°) Faire fonctionner le programme avec la calculatrice. À quelle étape est-il raisonnable de s'arrêter ? Comparer le résultat avec celui donné avec la touche $\sqrt{\ }$.

3°) Recommencer avec $\sqrt{23{,}04}$. Que remarque-t-on ?

L'édition spéciale (cf. document en Annexe, Volume 2) pour le professeur donne quelques clefs de lecture didactique. Elle présente l'objectif :

Analyser et utiliser une suite d'instructions aboutissant à la résolution d'un problème donné (algorithme).

et formule trois remarques :

> Connaître le mode d'emploi de la calculatrice (en particulier les touches M et RM).

> Le nombre 1 peut être remplacé par un autre nombre positif.

> Faire observer (aux élèves) que le procédé donne des approximations de $\sqrt{7}$. La preuve du "bon fonctionnement" de l'algorithme ne peut être exposée à des élèves de Troisième.

Le "problème donné" que spécifie le manuel est l'obtention de valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{7}$. Les seuls points de repères mathématiques relatifs à ce problème sont, pour l'élève, dans un commentaire qui accompagne le programme, à savoir :

> ce programme réalise le "Calcul de la moyenne de $\frac{7}{M}$ et de M

> la nouvelle moyenne est mise dans M

> on recommence avec elle.

Aucune inégalité n'accompagne ces annonces. Il est clair que cette activité – que le manuel ne prend pas soin de poursuivre dans un exercice - ne répond pas à l'objectif annoncé de "résoudre le problème donné" mais à celui d'offrir un terrain de jeu pour rencontrer la notion d'algorithme itératif et s'initier à la programmation d'un tel algorithme sur une calculatrice.

4. L'exemple des calculs trigonométriques

Nous avons déjà dit l'intérêt que nous portons à ces calculs. Nous cherchons à la fois à illustrer notre analyse voire à l'étoffer, et à signaler les particularités qui concernent ces calculs.

L'épreuve du Brevet dont nous avons déjà parlé comporte systématiquement la mention "l'emploi de la calculatrice est autorisé". Elle est décomposée en trois parties indépendantes, intitulées Activités numériques, Activités géométriques et Problème, et d'égale importance dans l'attribution de la note chiffrée finale. Un rapide examen des sujets proposés ces dernières années ainsi que des corrigés présentés dans des Annales fait ressortir plusieurs faits relatifs aux liens que l'institution établit entre la calculatrice et l'approximation numérique décimale :

1. Les énoncés de la partie "Activités Numériques" ne formulent aucune demande d'approximation numérique et tentent de lui retirer, à cet endroit, toute légitimité institutionnelle - sauf, très rarement et de façon mineure, dans des exercices de Statistiques (cf. documents 2 en Annexe, Volume 1). Les corrigés fournis par les Annales de l'examen confirment ce que les énoncés cherchent à valoriser, à savoir le déroulement structuré d'un calcul numérique sur un mode algébrique jusqu'à l'obtention d'un résultat réputé exact, sans recours à la calculatrice.

2. Les énoncés de la partie "Activités Géométriques" appellent très souvent, au contraire, des interventions de l'approximation numérique décimale essentiellement avec les lignes trigonométriques dans un triangle rectangle mais aussi avec l'utilisation des théorèmes de Pythagore et de Thalès. Les corrigés des annales n'hésitent pas à mentionner l'usage de la calculatrice et à utiliser le symbole ≈ pour écrire les résultats numériques décimaux approchés, quelquefois sans indiquer de précision.

3. Les questions de la troisième partie (Problème ou Questions enchaînées) s'arrangent pour mettre en scène des fonctions, du repérage cartésien (ce peut être avec de la géométrie analytique) et des graphiques. À travers les corrigés, on comprend qu'il n'y a pas là de place officielle nouvelle pour l'approximation

numérique même si on peut deviner que dans certains tracés ou lectures graphiques, elle ne doit pas être totalement absente (et sous forme décimale !) du travail de l'élève.

Cet enfermement des calculs approchés dans la partie "Activités géométriques" ne nous surprend pas et nous sommes confortés dans notre choix des calculs trigonométriques pour étudier les pratiques institutionnelles pour ces calculs.

Regardons d'abord les manuels (on trouvera des extraits de manuels de Troisième dans les annexes de ce chapitre C_1, documents 3, Volume 2). La Trigonométrie de cette classe se coule dans la Géométrie métrique où tout calcul numérique est d'emblée conditionné par la nature épistémologique du nombre à calculer. Il s'agit généralement d'un nombre-mesure attaché à une grandeur (longueur ou angle) pour lequel le cadre de la modélisation par la géométrie euclidienne joue là un rôle primordial.

On peut distinguer deux cas :

- celui d'un cadre pseudo-concret où un réel physique transparaît sous le modèle géométrique[100]
- celui d'un cadre géométrique sans habillage "concret"[101],

qui à travers des consignes explicites ou non se chargent de susciter la précision de l'approximation finale (qui peut être l'exactitude) ; *mais les données numériques initiales sont toujours lues comme des valeurs exactes*.
Cette exactitude des données initiales fonctionne implicitement et, telle quelle, elle se reporte sur les résultats intermédiaires affichés même si le manuel prend le soin d'écrire ≈ à la place de =.

Redisons que cette substitution d'une égalité par une quasi-égalité est symbolique ; elle ne modifie pas le traitement mathématique du calcul et ne sert qu'à signaler que le résultat est approché (et donc non exact !)[102]. Elle traduit le primat du traitement algébrique avec la valeur exacte avant tout passage en valeur approché. Dans l'environnement instrumental actuel, le renforcement de ce symbolisme montre la difficulté que rencontre le contrat institutionnel à évincer la calculatrice. Nous n'avions pas rencontré une telle insistance langagière dans les périodes précédentes : dans les exemples de calculs trigonométriques que nous avions exposés (cf. partie B) les auteurs de manuels laissaient le symbole =, en supposant que le contexte permettait de faire la part des choses entre ce qui était exact et ce qui était approché.

Deux techniques instrumentées sont présentées ; toutes deux sont des adaptations, au contexte trigonométrique, de la technique décrite au sein de la praxéologie de décimalisation. La première (technique T_1) peut être décrite ainsi :

---

100 Dans ce cas, la précision (c'est-à-dire, en fait, le nombre de décimales) du résultat décimal est attachée, par l'intermédiaire des unités présentes, à des présupposés culturels sur le mesurage des grandeurs et la précision des instruments de mesure

101 Dans ce cas, l'écriture choisie pour les données numériques participe, en plus des éventuelles unités, à fabriquer le degré de précision attendu sur le résultat terminal à fournir. Par exemple, des nombres de D_1 appellent des nombres de D_1 ou D_2 et un calcul approché ; des fractions appellent des fractions et un calcul exact.

102 Qu'on se rappelle la copie corrigée de la partie A_1.

1. écrire le nombre cherché (y) par une égalité numérique (y = ...) issue d'une formule de trigonométrie dans un triangle rectangle (exemple : $y = 45.\tan 25°$)
2. écrire un calculogramme adapté à la calculatrice
3. réaliser ce calculogramme sur machine
4. écrire avec tous les chiffres le nombre décimal qui apparaît à l'écran de la calculatrice (exemple : $y = 20{,}98384462$ ou $y \approx 20{,}98384462$)
5. procéder à une troncature-arrondi de ce nombre
6. écrire une quasi-égalité avec le nombre décimal (exemple : $y \approx 20{,}98$)
7. mettre une unité, si nécessaire[103].

À la fin de l'étape 1, il se peut que la valeur trigonométrique soit l'une des valeurs remarquables associées aux angles de 30°, 45° et 60°. Dans ce cas, il est possible de recourir à une simplification avant de réaliser le calculogramme.
L'étape 2 est une transformation sémiotique du calcul mis en formule exacte - un changement de registre - que la plupart des manuels adaptent au modèle de calculatrice le plus courant.
Presque tous les manuels terminent la dernière étape par la présentation du résultat décimal à l'aide du symbole ≈ très souvent sans indication du statut de ce nombre décimal par rapport au résultat exact (est-ce une valeur approchée, par défaut, par excès, à combien près ?).

Aucun manuel ne fournit d'argumentaire sur le fait que cette technique assure la justesse du résultat décimal ; aucun ne discute l'affichage-écran, par exemple en se demandant si, avant la phase de troncature-arrondi, tous les chiffres de l'affichage-écran étaient justes.

> *Nous sommes totalement immergés dans la praxéologie de décimalisation que nous avons déjà décrite, avec son postulat instrumental.*

Une deuxième technique (T_2) est mise en place par le manuel Pythagore (Hatier, 1993, page 170). Ce manuel élude l'étape 4 et procède, avant l'étape 2, à l'exécution de certains blocs numériques. Ainsi, avant l'écriture du calculogramme, $\tan^{-1}(\frac{6}{4})$ devient $\tan^{-1}(1{,}5)$ et $\sin^{-1}(\frac{6}{8})$ devient $\sin^{-1}(0{,}75)$. Par contre le manuel Terracher (Hachette, 1993, page 205) ne touche pas à $\tan^{-1}(\frac{6}{5})$.

Les deux techniques T_1 et T_2 s'appuient sur le même postulat instrumental, mais diffèrent sur le rôle du résultat intermédiaire dans le contrôle.

- La technique T_1, celle du manuel Terracher et de la grande majorité des manuels, supprime l'affichage-papier du résultat intermédiaire ; elle provoque *l'éviction du résultat intermédiaire*[104].

[103] Le manuel Irem de Strasbourg propose une étape supplémentaire, de mesurage sur la figure, "pour vérifier".

[104] Renforcée ou non par un évanouissement physique du nombre à l'écran de la calculatrice car le résultat peut apparaître en affichage-écran (dans d'anciens modèles de calculatrices).

- La technique T, celle du manuel Pythagore reconnaît la décimalité du résultat intermédiaire comme un moyen de maîtriser le calcul et suggère *la constitution de blocs qui dégagent des résultats intermédiaires*.

Pour apprécier les portées de ces techniques, nous allons sommairement modéliser un calcul numérique conduit avec une calculatrice scientifique (ou calculatrice symbolique en mode approché), d'après une écriture-papier.
Imaginons le passage d'un nombre x à un nombre A(x) par un opérateur fonctionnel A. L'opérateur A peut faire appel à des paramètres numériques p_i et à des touches fonctionnelles (par exemple, $3 \div x$ transforme x par un opérateur qui utilise un paramètre numérique et la touche fonctionnelle ÷). Distinguons chez les nombres (x ou p_i) ceux qui se présentent sur le papier avec une écriture décimale standard pour la calculatrice, c'est-à-dire une écriture telle que son affichage-écran, après enregistrement par la calculatrice, est identique à son affichage-papier[105] et considérons les autres nombres (par exemple $\sqrt{6{,}25}$, $\sqrt{2}$ ou bien 123456789,123456) comme relevant d'un calcul-machine puisqu'ils subissent un traitement sémiotique lors de l'enregistrement.
Nous pouvons maintenant distinguer trois niveaux de calculs :

- *Calculs de niveau 1* : les nombres x et p_i sont sur le papier en écriture décimale standard et l'opérateur A est identifiable à une seule touche[106] de calculatrice (par exemple, pour un nombre x : $\cos^{-1}x$; $\cos x$; x^2 ; $\sqrt{x}$; $3/x$; etc.) si bien que le calcul machine est irréductible en un seul bloc. À ce niveau, le postulat instrumental s'applique sans restriction à A(x). On quitte ce niveau dès que A utilise plusieurs touches fonctionnelles ou que l'un des nombres n'est pas en écriture standard.
- *Calculs de niveau 2* : le calcul machine est décomposable en plusieurs blocs, mais le postulat instrumental continue à s'appliquer si aucun bloc n'est modifié hors machine comme dans la technique T_1. Par contre il y a risque de sortir de la portée de la technique T si un bloc est abusivement décimalisé.
- *Calculs de niveau 3* : le postulat doit être mis en doute et l'on ne peut éviter le recours à des énoncés mathématiques sur la propagation des erreurs. On est sorti complètement de la portée des techniques T_1 et T_2. Ce niveau 3 concerne les calculs où les données initiales x et p_i sont entachées d'incertitudes.

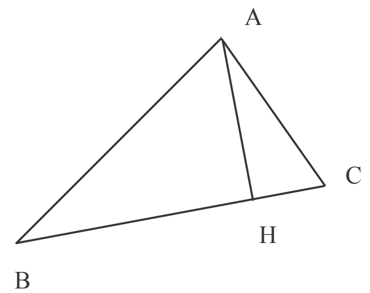
Nous ne sommes pas étonnés que les manuels en restent à des calculs de niveau 1 ou 2. Mais même au niveau 2, la complexité des calculs peut mettre les deux techniques en difficulté. Ainsi, dans Pythagore (Hatier, 1993, p.171), on trouve cet exercice :

[105] L'enregistrement est opéré par une touche = ou Enter et il fournit un affichage à l'écran qui peut être autre que celui de l'éditeur. Sauf mention particulière, nous supposons que la calculatrice est placée en mode standard appelé quelquefois mode normal. L'enregistrement d'un nombre dans un autre mode comme le mode scientifique ou le mode $\boxed{\text{Fix}}$ modifie l'affichage-écran selon d'autres règles. Par-delà la diversité des modèles, toutes les calculatrices scientifiques non symboliques possèdent, à notre connaissance, un mode d'affichage numérique pour l'écran qui a cette qualité "standard" et ce mode est celui avec lequel les manuels illustrent le recours à la calculatrice dans les calculs qu'ils présentent.

[106] Ce peut être une touche dite "seconde" c'est-à-dire une touche dont l'accès est commandé par une autre touche, de façon lisible directement sur le clavier.

Exercice 4

On considère un triangle ABC rectangle en A.
On désigne par H le pied de la hauteur issue de A.
On sait que mes $\widehat{B} = 43°$ et HC = 3 cm.
Calculer AC, AB, BC, BH et AH.
Donner les résultats à 0,1 mm près.



Si on respecte l'ordre donné par l'énoncé, on est conduit à calculer AC puis AB :

$$AC = \frac{3}{\cos 47°} \text{ et } AB = \frac{AC}{\tan 43°} = \frac{\frac{3}{\cos 47°}}{\tan 43°}.$$

La technique T_1 peut s'étendre au calcul de AB, mais elle est contrariée non seulement par la complexité de l'écriture fractionnaire mais aussi par le calcul préalable de AC qui fournit un résultat intermédiaire au calcul de AB à afficher sur papier. On peut alors se tourner vers la technique T_2 mais que prendre pour AC ?
Cela se complique avec BC, puisque :

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} \text{ ou bien } BC = \frac{AB}{\cos 43°} \text{ ou bien } BC = \frac{AC^2}{CH} \text{ ou bien encore } BC = \frac{CH}{\cos^2 47°}$$

Le manuel ne suggère aucune technique pour agir dans ce type de calculs. Par contre il fournit un corrigé, lequel ne fournit que les réponses sous la forme de nombres décimaux avec deux chiffres après la virgule :

> AC ≈ 4,40 cm ; AB ≈ 4,72 cm ; BC ≈ 6,45 cm ; BH ≈ 3,45 cm ; AH ≈ 3,22 cm.

Ce sont les arrondis décimaux d'ordre 2, exacts. Mais comment le manuel a-t-il procédé pour BC ? A-t-il préféré la dernière égalité composée uniquement de valeurs exactes ? Ou bien a-t-il employé la première égalité avec des approximations décimales de AC et de AB ? Il n'en dit mot et se contente d'un commentaire lapidaire :

> On peut contrôler la plupart des résultats en les calculant de deux façons

qui suggère à l'élève qu'un moyen de contrôle est dans le doublement des calculs par deux voies différentes et que l'égalité des résultats finaux garantit leur exactitude.
En dehors du fait que cette conclusion est contestable, on doit se demander ce que peut faire l'élève lorsque les deux résultats différents. Le manuel ne le dit pas.
Notons bien que le manuel ne peut se référer publiquement à certaines relations métriques telles que celles qui lui permettraient d'écrire :

$$BC^2 = CH.CA = \frac{CH^2}{\sin\widehat{B}} = \frac{9}{\sin 43°}$$

car elles ont disparu des programmes de la classe de Troisième. Leur emploi lui aurait évité la reprise des résultats intermédiaires. Mais pourquoi ne propose-t-il pas une technique basée sur la reprise d'une valeur décimale approchée plus précise de AC que celle qui a été affichée ? Cette reprise pourrait d'ailleurs être instrumentée grâce aux mémoires que possède toute calculatrice scientifique ordinaire. Est-ce pour éviter un nouveau pas dans l'instrumentation de ces calculs et l'instrumentalisation de la calculatrice, ou est-ce pour taire le problème mathématique de l'erreur de calcul et de sa propagation ?

Le malaise semble réel ; en parcourant les réponses fournies par les manuels à certains de leurs propres exercices, nous nous sommes aperçus que les techniques calculatoires n'étaient pas stables et qu'elles pouvaient même provoquer des résultats erronés (cf. documents 4 en Annexe, Volume 1).

5. Du contrat institutionnel au contrat didactique

Portons-nous à présent vers l'enseignant dans la classe. Dans le cas où il proposerait ce type de calcul, nous nous demandons s'il mettrait en place une technique absente des manuels pour prévenir la propagation de l'erreur commise en remplaçant un nombre par la valeur décimale approchée qui a été affichée en tant que résultat intermédiaire. Et si oui, laquelle ? Plus généralement sur quels éléments mathématiques l'enseignant cherche-t-il à asseoir le contrôle, par l'élève, d'un résultat décimal obtenu avec la calculatrice ? Quelles pratiques instrumentales de décimalisation cherche-t-il à mettre en place à cette occasion fournie par les calculs trigonométriques ?

L'exercice de Brevet Blanc que nous avons déjà présenté dans l'introduction générale à notre étude est à même de nous fournir des éléments de réponse à nos questions. Les calculs trigonométriques associent d'ailleurs les théorèmes de Thalès et de Pythagore.

Reportons nous de nouveau à cet exercice :

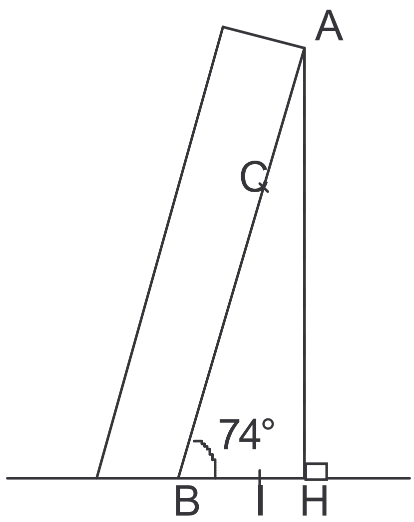
Exercice 5

A. La tour de Pise fait un angle de 74° avec le sol supposé horizontal. Lorsque le soleil est au zénith (rayons verticaux) la longueur de l'ombre sur le sol est de 15 m.
Si c'est nécessaire on arrondira les différents résultats au mètre près.

1. Calculer à quelle hauteur au-dessus du sol se trouve le point A.
2. Calculer la distance AB.

B. Un touriste (point C) a gravi les deux tiers des escaliers de la tour. En se penchant il laisse tomber son appareil photo.

1. Montrer que le point d'impact (point I) de l'appareil photo sur le sol se situe à 10 m du pied de la tour (point B).
2. De quelle hauteur est tombé l'appareil photo ?



Le contrat institutionnel nous renseigne sur ce qu'il est possible de faire quand on est élève d'une classe quelconque de Troisième :

Question A_1

la clef est l'égalité AH = BH.tan74° où BH est connu exactement et la technique de décimalisation fait éditer directement 15.tan74° sur la calculatrice, sans calculer tan74° isolément. Après exécution, le résultat décimal obtenu à l'écran (52,31121666) doit être arrondi à l'unité et l'égalité deviendra alors la quasi-égalité AH ≈ 52 cm. Il s'agit d'un calcul de niveau 2 à effectuer en un seul bloc (technique T_1).

Question A_2

trois voies peuvent être empruntées :

$$AB = \frac{BH}{\cos 74°} \text{ ou } AB = \frac{AH}{\sin 74°} \text{ ou } AB = \sqrt{BH^2 + AH^2}$$

qui obligent toutes à des calculs sur au moins une valeur approchée.
Seule la première voie évite la reprise délicate de la valeur AH et renvoie intégralement à la technique T_1. Si l'élève emprunte l'une des deux autres voies, quelle valeur prendra-t-il pour AH ? Ici, grâce au choix d'un angle initial égal à 74°, la valeur précédemment arrondie (AH ≈ 52) donnera la bonne valeur arrondie de AB. En effet, arrondis à 1 près, on obtient :

$$\sqrt{15^2 + 52^2} = \frac{52}{\sin 74°} = \frac{15}{\cos 74°} = 54.$$

Mais nous avons déjà remarqué que l'effet mathématique est circonstanciel ; un angle de 78° aurait provoqué des ennuis[107] puisque les résultats décimaux arrondis à 1 près auraient été :

$$AH = 71 \text{ ; } AB = 72 \text{ et } \sqrt{15^2 + 72^2} = 73.$$

Question B_1

deux voies sont possibles :

$$BI = BH.\frac{2}{3} \text{ ou } BI = BC.\cos 74°$$

cette dernière après calcul de BC qui vaut $\frac{2}{3}$.AB.

Nous avons déjà noté comment la première voie est balisée par l'annonce, dans la question, de la valeur exacte à trouver (10 m).
Mais, ici encore, la séquentialité des questions peut susciter le passage par le résultat précédent, à savoir AB. On trouve BC ≈ $\frac{2}{3}$.54.cos74° ≈ 10 arrondi à 1 près, que l'on utilise la technique T_1 ou la technique T_2.

Question B_2

cette fois ce sont quatre voies qui s'offrent à l'élève :

$$CI = AH.\frac{2}{3} \text{ ou } CI = BI.\tan 74° \text{ ou } CI = BC.\sin 74° \text{ ou } CI = \sqrt{BC^2 - BI^2}$$

qui toutes comportent des valeurs approchées décimales dans les composantes numériques.
Cependant la deuxième s'appuie sur une longueur reconnue exacte et calculée dans la question précédente, ce qui la rend plus probable.
On peut retrouver ici aussi l'effet du choix de l'angle initial. En effet, avec 74°, toutes les voies mènent à CI = 35 cm arrondi au cm près, mais[108]

$$\text{avec } 67°,\ CI = BI.\tan 67° = 24 \text{ tandis que } CI = \frac{2}{3}.AH = \frac{2}{3}.35 = 23.$$

---

[107] Nous avons étudié la fonction $\left[\frac{15}{\cos x°}\right] - \left[\sqrt{15^2 + [15.\tan x°]^2}\right]$ où [y] est l'arrondi de y à 1 près.

[108] Nous avons étudié la fonction $[10.\tan x°] - \left[\frac{2}{3}.[15.\tan x°]\right]$ où [y] est l'arrondi de y à 1 près.

Nous repérons bien maintenant le travail didactique que l'enseignant doit effectuer, au-delà du contrat institutionnel et sous sa contrainte, pour faire vivre les calculs trigonométriques dans la classe. Il doit notamment prévenir les incohérences causées par des résultats intermédiaires[109] dans des processus de calculs différents et il doit le faire sans avoir à s'expliquer sur le mécanisme mathématique à l'origine de ces incohérences. Il dispose de deux leviers : les degrés de précision et les valeurs exactes. Dans cet exercice, le professeur choisit les données numériques initiales (longueur BH, angle $\widehat{ABH}$, rapport $\frac{BC}{BA}$) ainsi que la précision dans les résultats à fournir et il fabrique un enchaînement de questions soit de calculs exacts soit de calculs approchés de niveau 2 où le postulat instrumental n'est pas mis en cause. La consigne de respecter l'arrondi (ici explicitée) est couplée avec la demande d'exactitude (implicite dans l'énoncé) pour former l'ossature du contrat didactique qui régit le déroulement des calculs et leur instrumentation. Dans la gestion de l'approximation décimale, il s'arrange pour ne laisser à l'élève que la réalisation du calcul exact et la mise en œuvre de la technique T_1 sur des calculs dont il pense avoir imposé l'ordre.

6. L'attente du lycée

D'un côté les traits essentiels de la cohabitation entre la calculatrice et l'approximation numérique décimale au Collège, sont fortement marqués par le contrat numérico-algébrique, à savoir :

- une opposition entre calcul exact et calcul approché

  1. fortement hiérarchisée de l'exact sans calculatrice vers l'approché avec calculatrice puisque l'approché doit naître de l'exact même si les performances de la calculatrice permettent de mener sans risque un passage de l'approché à l'approché
  2. relayée par une séparation théorie-pratique sensible en Trigonométrie puisque les théorèmes issus de la géométrie se recommandent de valeurs exactes tandis que les applications dites pratiques acceptent des valeurs approchées décimales fournies par la calculatrice.

- une intervention arbitraire du contexte de modélisation qui fixe les degrés de précision dans l'approximation décimale
- un évitement du problème de la dépendance de la qualité de l'approximation décimale à l'égard d'autres facteurs comme la propagation des erreurs, l'organisation des calculs ou les performances intrinsèques de l'instrument de calcul.

Ces traits dénient à cette cohabitation le qualificatif d'articulation, au sens où nous l'avons définie.

---

[109] Par exemple avec BH = 16 m au lieu de 15 m, les calculs de CI donnaient 37 m par $\frac{2}{3}$ x 56 puisque AH vaut 56 m. ou bien 38 m par 11.tan 74° puisque BI vaut 11m.

D'un autre côté il existe une volonté noosphérienne d'amorcer, dès la fin du Collège, un "nouveau calcul approché". Un tel calcul *qui intègre le souci d'améliorer la précision* entre en résonance avec les deux problèmes fondamentaux de l'approximation numérique dont nous avons déjà parlé, celui d'obtenir le résultat d'un calcul avec une précision arbitraire (nous l'avons appelé Pb n°1) et celui d'apprécier la précision sur le résultat d'un calcul en intégrant la précision connue sur chacun des nombres qui composent ce calcul (nous l'avons appelé Pb n°2). Bronner (1998) le qualifie de *Calcul d'approximation* par opposition au *Calcul approximatif*.
Cette volonté institutionnelle ne débouche pas sur des tâches génériques de l'un ou l'autre des problèmes fondamentaux qui soient appréhensibles par des techniques travaillées et justifiées au sein même de l'organisation mathématique. Cette volonté augure-t-elle de modifications sensibles dans les classes de Lycée ? Bronner, dans le même article, nous invite à le penser :

> Nous pouvons avancer que les conditions sont réunies pour que se mette en place progressivement au Lycée une véritable pratique d'approximation s'ancrant sur la pratique du calcul approximatif du Collège. Un des enjeux du Lycée, pour l'enseignant et pour l'élève, est la négociation du passage d'une pratique à l'autre (Ibid. page 119).

CHAPITRE C_2 : LA CLASSE DE SECONDE

Il est bien rare qu'une épreuve de mathématiques du baccalauréat (notamment celui de la série S) ne contienne pas de question demandant au candidat une approximation décimale ; cela peut être l'approximation d'une valeur prise par une fonction numérique (ex. maximum d'une fonction sur un intervalle), celle d'un antécédent d'une telle fonction (exemple : racine d'une équation du type f(x) = c), ou bien celle de la limite d'une suite convergente, ou bien encore celle d'une intégrale définie. La plupart des sujets d'Analyse n'hésitent d'ailleurs pas, pour guider le candidat dans sa recherche, à échafauder une série de questions qui scandent une construction méthodique de cette approximation. En trois ans de lycée, les valeurs approchées décimales d'un nombre déjà connu de l'élève de Collège (pensons par exemple à π ou à $\sqrt{2}$) ont changé complètement de statut mathématique en devenant l'aboutissement d'un long travail autour des variations d'une fonction ou de la convergence d'un algorithme. Le Calcul d'approximation semble s'être imposé. L'ampleur et la rapidité de ce changement - moins de trois années scolaires - nous laissent imaginer un renforcement, dès la classe de Seconde, des prémices du "nouveau calcul approché" repérées en fin de Collège. Nous recherchons les marques de ce renforcement dans les organisations mathématiques et dans les organisations didactiques de cette classe, essentiellement à travers le texte d'enseignement que fournit le programme de la classe et dans les réalisations des manuels scolaires.

1. Du nouveau en classe de Seconde ?

Les instructions officielles de 1990 donnent le ton :

> Le traitement des problèmes (numériques) combine les calculs de valeurs exactes et de valeurs approchées ; il fait appel aux différentes formes de calcul : mental, à la main, machine.
>
> Les résultats d'un calcul numérique peuvent s'exprimer sous formes (valeur exacte, encadrements, approximations décimales, …). On mettra en évidence, sur des exemples étudiés que le choix d'une telle forme est fonction du problème posé.

Cette déclaration liminaire au texte du programme lui-même ne représente pas une nouveauté en soi puisque les programmes de Collège répètent pour chaque classe que :

> Les travaux numériques prennent appui sur la pratique du calcul exact ou approché sous différentes formes : le calcul mental, le calcul à la main et l'emploi d'une calculatrice. (Arrêté du 14 novembre 1985 fixant les programmes des classes de Collège).

mais l'apparition des termes "encadrements" et "approximations décimales" dénote un souci de donner des outils au Calcul approché, et l'on repère vite dans la partie du programme consacrée aux "connaissances et savoir-faire de base" un paragraphe réservé à l'approximation numérique qui s'intitule "Valeurs absolues, intervalles, approximations".

Une évolution du contrat institutionnel relatif au calcul approché et, corrélativement, des modifications dans les pratiques de calcul numérique instrumentées par la calculatrice sont donc envisageables. Mais un bilan critique que dresse Kuntz (1998) dans un article intitulé "Saut d'obstacle : gare aux approximations" (Repères Irem n°31) tempère cette vision optimiste et mécanique de la formation du contrat institutionnel.

Voici les premières lignes de cet article :

> Le programme de mathématiques de la classe de seconde comporte un chapitre particulièrement craint et détesté par les élèves ; les approximations (ou les encadrements) ne sont vraiment pas leur tasse de thé ! Il faut admettre que le traitement des inégalités recèle des pièges redoutables. Des transformations algébriques qui paraissent simples et évidentes sont déclarées fausses par l'enseignant, pour des raisons que les élèves peinent à comprendre. Ceux qui parviennent à dominer les règles multiples et complexes qui régissent les inégalités s'interrogent sur l'utilité de leur effort. Pourquoi "encadrer" la racine de 6 alors que la calculatrice en donne instantanément une valeur de 2,449489743 ? Pour répondre aux doutes, certains enseignants proposent, en module, le calcul approché de $\sqrt{2}$ par une méthode géométrique ou par l'algorithme de Héron. Ils expliquent que ces démarches ont un grand intérêt historique (les calculatrices n'ont pas toujours existé !). Ils éveillent ainsi la curiosité d'une partie des élèves. Et en effraient d'autres : si en plus des mathématiques, il faut faire de l'Histoire !

Pas de doute, le nouveau Calcul numérique approché cherche à s'imposer, mais la résistance à ce mouvement semble considérable.

Notons d'abord que les décisions professorales, décrites dans l'article, ne sont pas extravagantes ; par exemple celle qui porte sur le calcul approché de $\sqrt{2}$ par l'algorithme de Héron peut se recommander expressément du programme, lequel mentionne sous sa rubrique "Travaux pratiques" :

> Exemple d'approximation d'un nombre au moyen d'encadrements.

On trouve d'ailleurs le calcul approché de $\sqrt{2}$ dans plusieurs manuels, par la méthode dite de Héron dans Terracher (Hachette, 1995, page 75), par celle de Théon de Smyrne et une méthode de dichotomie dans Belin (Belin, 1994, page 152), par la méthode des fractions continues dans Belin (Belin, 1994, page 159). Le manuel Terracher le présente en exercice résolu (reproduit dans les documents 1 en annexe de ce chapitre, Volume 1) après avoir souligné son importance mathématique. Le manuel Belin en fait un T.P. et insiste, dans son édition pour le professeur :

> Ce T.P. est institutionnel et permet de travailler sur les encadrements et les valeurs approchées.

Pourtant, malgré l'initiation aux approximations successives démarrée en classe de troisième, ce que rapporte Kuntz démontre que "approcher $\sqrt{2}$" (ou $\sqrt{6}$) ne recouvre pas la même signification pour l'élève de Seconde et pour l'enseignant qu'il a observés. L'élève fait valoir la pratique de décimalisation du Collège telle que nous l'avons décrite précédemment, via la touche racine de la calculatrice, exhibe quelques décimales et semble s'en contenter. L'enseignant s'efforce de construire des encadrements qui ne sont pas les encadrements décimaux de cette décimalisation et n'accorde de l'intérêt aux

décimales que si elles sont issues des encadrements ainsi construits. Les intentions professorales semblent ne pas être reconnues par l'élève et avoir même du mal à être acceptées de lui.
Visiblement l'enseignant s'engage bien dans un calcul d'approximation et il cherche, pour cela, à rompre avec le contrat numérico-algébrique ; en effet ce calcul ne s'identifie pas à la production d'une valeur approchée particulière, qu'elle soit décimale ou pas, à partir d'une valeur dite exacte, mais à la construction d'un processus d'approximations successives dans lequel calculer consiste à encadrer, ou, pour le dire mieux, calculer se manifeste par des encadrements aussi fins que l'on veut du nombre visé. L'enseignant négocie l'affaire en convoquant l'Histoire d'avant les calculatrices, mais le nouveau genre de calcul ne devient pas pour autant problématique pour l'élève[110].
Rapprochons le constat des difficultés que rencontre la tentative professorale, telle que nous la décrit Kuntz, du commentaire que glissent les auteurs du manuel Terracher à la fin de l'exercice résolu :

> Pas besoin de faire un dessin, cet exemple est difficile.

Nous sommes alors revenus à notre question première : qu'y a t il de nouveau en classe de Seconde ? et nous la détaillons : quelles possibilités la classe de Seconde offre-t-elle au Calcul d'approximation de se développer ? quels objets nouveaux met-elle officiellement en scène qui le concerne ? comment, pour reprendre une formule de Chevallard (1988), ces objets sont-ils introduits comme enjeux didactiques, "solidairement comme objets d'enseignement et d'apprentissage"?
Nous espérons trouver des éléments de réponse à ces questions en rapprochant l'exemple du calcul approché de $\sqrt{2}$ tel que le propose le manuel Terracher (cf. documents 1 à 4 dans les annexes de cette partie C_2, Volume 1) du texte du programme de la classe de Seconde. Référons-nous à l'Arrêté du 25 avril 1990.

Voyons d'abord du côté des objectifs généraux :

> les problèmes et les méthodes numériques sont largement exploités car ils jouent un rôle essentiel dans la compréhension de nombreuses notions mathématiques ... il convient de mettre en valeur les *aspects algorithmiques des problèmes étudiés.*
>
> l'emploi des calculatrices en mathématiques a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi de contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche et de favoriser une bonne approche de l'informatique.

On découvre que l'exemple choisi par le professeur et le manuel s'inscrit parfaitement dans ces objectifs tant par la création et la mobilisation d'un algorithme numérique que par le rôle dévolu à la calculatrice dans les calculs. Mais c'est pour constater assez vite qu'il se heurte aux nombreuses restrictions formulées par ce même programme dans le détail des éléments théoriques à construire et des pratiques à instaurer. En voici quelques-unes :

---

[110] On peut se demander si le choix du nombre $\sqrt{2}$ dont l'écriture de la valeur exacte est connue de l'élève et reproductible en calculatrice est de nature à problématiser le nouveau calcul qu'on cherche à mettre en place.

> 1. toute étude générale du calcul des approximations est exclue et aucun énoncé de résultats à ce propos n'est exigible des élèves.
>
> 2. les activités peuvent amener à encadrer une différence, un inverse, une racine carrée ; les élèves n'ont pas à mémoriser les règles correspondantes.
>
> 3. de nombreuses situations conduisent à des inégalités ou à des inéquations. On se limitera à des exemples très simples et l'on s'appuiera sur des interprétations graphiques et sur la variation des fonctions, afin d'éviter un formalisme purement algébrique.
>
> 4. aucune connaissance spécifique sur les algorithmes n'est exigible des élèves.

Pourtant notre manuel ne se résout pas à évacuer totalement le formalisme algébrique puisqu'il cherche à construire l'algorithme en exploitant la relation fonctionnelle connue sur l'expression numérique $\sqrt{2}$, à savoir $x^2 = 2$.
Cela l'oblige à des travaux algébriques de haute volée (cf. documents 1), loin des recommandations du programme. D'abord pour montrer que si *a* (*a* > 0) est un nombre distinct de $\sqrt{2}$, alors a et $\frac{2}{a}$ encadrent $\sqrt{2}$; ensuite pour montrer l'inégalité $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) > \sqrt{2}$. Conscients que l'affaire s'est corsée, les auteurs du manuel décident d'annoncer que

> $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ encore meilleure que a

en se contentant de l'illustrer par un petit morceau de la droite numérique (cf. document 1 en annexe de chapitre, Volume 1) accompagné d'un commentaire laconique. Pourtant ceci n'est convaincant que si $\frac{2}{a}$ n'est pas trop loin de $\sqrt{2}$ (avec *a* = 0,1, ça ne marche pas).
L'enseignant qui ne veut ni renoncer à la curiosité historique ni enfreindre l'allègement du travail algébrique recommandé par le programme peut décider de faire fonctionner l'algorithme manuellement deux ou trois fois de suite sans le justifier. Mais s'il décide d'agir ainsi, ce qui devait être un exemple d'approximation numérique se focalisera sur quelques manipulations opératoires d'encadrements numériques pour produire, *in fine*, une valeur approchée décimale qui n'est évidemment pas meilleure que celle obtenue par le $\sqrt{2}$ de la calculatrice ; conséquemment la curiosité historique se muera en une curiosité numérique et ne débouchera pas, en l'état, sur une technique d'approximation numérique concurrente de l'exécution par la calculatrice car la convergence bien que suggérée est loin d'être construite.
Le manuel Terracher[111] hésite lui aussi puisqu'il déclare :

> Nous ne ferons qu'esquisser l'étude.

Il maintient pourtant son choix en le justifiant ainsi :

---

[111] Il s'agit du manuel de 1994. Le manuel de 1986 dans la même collection décidait d'amorcer le lien entre l'algorithme et une fonction ainsi que de mesurer la performance de l'algorithme d'application (cf. document s 2 de l'Annexe) ; il allait même jusqu'à donner quelques exercices.

> Pour certains irrationnels tels $\sqrt{2}$, π, etc., se pose le problème de leur approximation par des décimaux ou des rationnels, avec une précision donnée à l'avance.

Certes il s'agit là d'un des problèmes moteurs pour l'approximation numérique, mais reconnaissons qu'avec ce problème nous nous éloignons des intentions exprimées par l'institution. Car au-delà d'une demande de consolidation et de renouvellement du vocabulaire appuyée sur l'introduction de la valeur absolue

> à pratiquer sur des exemples numériques,

le programme ne suggère aucun problème d'approximation numérique et s'en tient d'une part à

> encadrer l'opposé d'un nombre, de la somme de deux nombres, du produit de deux nombres positifs […] sous forme […] d'activités qui peuvent amener à encadrer une différence, un inverse, une racine carrée […] dans lesquelles […] les élèves n'ont pas à mémoriser les règles correspondantes,

d'autre part à ce qui a déclenché l'initiative du manuel, à savoir :

> Exemples d'approximation d'un nombre au moyen d'encadrements[112].

Il n'est, en tout cas, pas fait allusion à l'idée de réduire à volonté les encadrements d'un nombre réel donné (cf. Pb n°1). C'est pourtant à cet aspect de l'approximation que le manuel fait référence avant de s'engager dans l'exercice résolu. Nous comprendrons mieux l'attitude de ce manuel en la replaçant dans le mouvement de la réforme curriculaire qui a bouleversé, à partir de 1981, l'enseignement de l'Analyse en lycée. Nous le ferons dans un prochain paragraphe.

[112] D'après la présentation du texte du programme insérée dans le programme lui-même, cette mention "vise à développer un savoir-faire ou à illustrer une idée" mais pas à "mettre en œuvre une technique dont la maîtrise est exigible des élèves".

Constatons tout de même que, si le texte du programme de 1990 insiste pour

> mettre en valeur les aspects algorithmiques des problèmes numériques étudiés,

ce n'est pas aux approximations successives qu'il fait référence mais

> à la gestion des calculs (description de l'enchaînement des opérations à effectuer pour un calcul numérique ou pour le calcul des valeurs numériques d'une fonction d'une variable réelle)

D'ailleurs il ajoute, comme en classe de Troisième, que

> Aucune connaissance spécifique sur les algorithmes n'est exigible des élèves.

Il est important de noter aussi qu'un autre aspect de l'approximation numérique n'apparaît pas officiellement dans le texte du programme. C'est celui qui consiste à déduire la précision d'un résultat approché pour une expression numérique dont l'un des nombres est donné par une valeur approchée (cf. Pb n°2).

> *Ainsi, les problèmes fondamentaux de l'approximation numérique ne sont pas formulés.*

Cependant la plupart des manuels s'intéressent à eux à travers les exercices proposés, même s'ils ne s'engagent pas à en fabriquer des tâches génériques. Voici deux exercices où se manifeste cet intérêt ; le premier est extrait du manuel Transmath (Nathan, 1995, page 55) et le second du manuel Terracher (Hachette, 1996, page 80) :

Exercice 6

3,142 est une approximation par excès de π à 5.10^{-4} près, et 1,414 est une approximation par défaut de $\sqrt{2}$ à 5.10^{-4} près.

Donnez les encadrements correspondants de π et de $\sqrt{2}$.

Déduisez-en un encadrement de $\pi + \sqrt{2}$.

Pouvez-vous donner alors une troncature de $\pi + \sqrt{2}$ à trois décimales ?

Exercice 7

Comparer l'aire d'un rectangle de dimensions 14 x 11 et celle d'un disque de rayon 7 (unité : le cm) en utilisant successivement comme valeur approchée de π : $\frac{22}{7}$; 3,14 ; 3,15. Conclure quand même.

Ces deux exercices peuvent être rapprochés de ceux qui étaient proposés en classe de Troisième (cf. partie C_1, paragraphe 3).

- Le premier est proche de l'exercice 3 et pourrait être attaché au Pb n° 2

L'élève y est guidé des deux valeurs approchées initiales vers des encadrements :

$$3{,}1415 < \pi < 3{,}142 \text{ et } 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}4145$$

de là vers un troisième encadrement :

$$4{,}5555 < \pi + \sqrt{2} < 4{,}5565$$

Il doit alors refuser de proposer 4,555 et 4,556 comme troncatures de $\pi + \sqrt{2}$ à trois décimales.
Pas plus qu'en classe de Troisième, l'énoncé ne cherche à mettre en évidence le mécanisme de transport de la précision, depuis la précision décimale connue sur π et $\sqrt{2}$ jusqu'à celle sur le résultat $\pi + \sqrt{2}$.
Certes la démarche conforte les encadrements comme outils de l'approximation numérique et réussit à mettre en garde contre le transport automatique du nombre de décimales (ici 3 décimales) des données sur le résultat. Elle ouvre une fenêtre sur les passages de valeurs approchées à valeurs approchées au sein même des techniques de calcul numérique. Mais comment sa reprise dans les calculs habituels, au cours notamment d'une application numérique en géométrie métrique, pourra-t-elle se négocier ? Dans ces calculs, contractuellement instrumentés par la calculatrice, les résultats décimaux même s'ils sont officieusement reconnus comme approchés ne sont jamais soumis à encadrements surtout lorsqu'ils emportent tous les chiffres de la calculatrice.

- Le second est proche de l'exercice 2.

L'élève y côtoie le problème de la précision suffisante sur π pour conclure la comparaison (cf. PB n°1) mais l'énoncé ne va pas jusqu'à le lui proposer. En effet, les premiers calculs :

$$14.11 = 154 \,;\, 49.\frac{22}{7} = 154 \,;\, 49.3{,}14 = 153{,}86 \,;\, 49.3{,}15 = 154{,}35$$

le conduisent successivement à penser que l'aire du disque est égale puis inférieure puis supérieure à celle du rectangle. L'énoncé lui demande de trancher entre ces trois annonces contradictoires sans lui suggérer de piste puisque les valeurs approchées π lui sont présentées sans indication d'une quelconque précision. En habitué de l'encadrement

$3,14 < \pi < 3,15$ il peut tirer que $153,86 <$ Aire du disque $< 154,86$ mais ceci ne l'avance pas dans la problématique d'approximation qui passe par la recherche d'une précision suffisante sur l'une quelconque des valeurs approchées. Avec la valeur de la touche π de la calculatrice, la conclusion viendra plutôt par une de ces quasi-inégalités habituelles dans la praxéologie de décimalisation du Collège, à savoir :

$$\text{Aire du disque} = 49.\pi \approx 153,9380$$

ce qui est manifestement plus petit que 154.

Résumons nos premières impressions après ces premiers pas en classe de Seconde :

> *L'institution EMS met en attente les problèmes nouveaux d'approximation numérique que la classe de Troisième avait initiés.*

Nous allons cependant nuancer et compléter cette déclaration en considérant les efforts qu'elle déploie pour étoffer la formalisation de l'approximation numérique.

C'est en effet en classe de Seconde que l'EMS introduit officiellement les notions de valeur absolue et de précision.

2. En ce qui concerne la valeur absolue,

l'essentiel pour l'institution - elle le dit dans les commentaires des programmes de 1986 et 1990, en rappelant qu'il s'agit d'une prise de contact avec un objet nouveau - est

> d'interpréter $|b - a|$ comme la distance des points a et b,

sans que cette notion devienne un objet d'étude en soi car, dit-elle,

> elles intervient de façon naturelle dans les problèmes d'approximation.

La tâche principale que les manuels se donnent alors avec la valeur absolue consiste à faire pratiquer les passages entre les 4 énoncés suivants :

$$x \in [a\ ;\ b]\ ;\ a \leq x \leq b\ ;\ \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}\ ;\ d\left(\frac{a+b}{2}\ ;\ x\right) \leq \frac{b-a}{2}.$$

La rencontre avec cette tâche nouvelle a lieu en partant de considérations graphiques sur la droite numérique (cf. document 5 dans les annexes de ce chapitre, Volume 1) en dehors de tout objectif d'opérationnalisation de l'inégalité $\left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}$ dans la résolution d'un problème d'approximation.
Les seules tentatives, très timides, d'intégrer la valeur absolue dans une problématique d'approximation numérique renvoient systématiquement à une reformulation par les

encadrements et n'éclairent pas les possibilités d'un travail direct sur les inégalités du type $|x - c| \leq \varepsilon$. Voici l'une d'entre elles, à travers un exercice du manuel Déclic (Hachette, 1993, page 26) :

Exercice 8

1°) On sait que $|x - 29,5| \leq 0,5$ et $|y - 12,3| \leq 3.10^{-1}$.

a) En déduire des encadrements pour x et y.

b) Déterminer l'encadrement de x + y correspondant.

c) En déduire une approximation de x + y et la précision.

2°) Mêmes questions avec $|x - 2,5.10^3| \leq 200$ et $|y - 7400| \leq 4.10^2$.

3°) Les dimensions d'un rectangle sont de 23,4 cm et 17,2 cm, avec une incertitude de 1 mm ; déterminer une valeur approchée de son périmètre et la précision.

La succession d'encadrements : $29 \leq x \leq 30$; $12 \leq y \leq 12,6$; $41 \leq x + y \leq 42,6$ conduit l'élève à choisir l'un des nombres de l'intervalle [41 ; 42,6] (certainement le milieu 41,8) et à lui associer la précision (certainement 0,8) pour annoncer l'approximation de x + y. Notons que la réponse donnée par le manuel en fin de livre est justement :

> 41,8 est une approximation de x + y avec une précision de 0,8.

Mais ce recours aux encadrements exclut cette autre technique, fondée sur l'inégalité triangulaire :

$$|x + y - 29,5 - 12,3| \leq |(x - 29,5) + (y - 12,3)| \leq |x - 29,5| + |y - 12,3| \leq 0,5 + 0,3 \text{ donc } |x + y - 41,8| \leq 0,8$$

qui réclame un outillage mathématique dont l'ampleur algébrique heurte la modestie des ambitions de l'institution sur la valeur absolue.
En effet, le programme de 1990 prévoit bien :

> Inégalité triangulaire : $|a + b| \leq |a| + |b|$
>
> Valeur absolue d'un produit, d'un quotient

mais en insistant :

> En seconde, l'essentiel est de savoir interpréter $|b - a|$ comme étant la distance des points a et b et, dans cette perspective, des relations telles que $|x - 2| \leq 1$ et
>
> $|x - 2| \leq \frac{1}{100}$ à l'aide des intervalles de centre 2.

sans commentaire supplémentaire, alors que celui de 1986 ajoutait :

> et de savoir effectuer quelques majorations simples en utilisant l'inégalité triangulaire et les formules donnant la valeur absolue d'un produit et d'un quotient.

et que celui de 1981 installait les pratiques sur la valeur absolue au sein même de l'Analyse en s'intéressant au comportement local d'une fonction.

Nous reviendrons un peu plus loin sur les intentions et les décisions de la noosphère au moment de la mise en place de la réforme de 1981. Redisons avant cela que :

> *les restrictions insistantes d'aujourd'hui offrent peu de chance à l'inégalité triangulaire de trouver un terrain d'action dans l'approximation numérique et favorisent le repli sur les encadrements pour formuler et justifier les opérations sur les valeurs approchées accompagnées d'une précision.*

Certes dans le même manuel Déclic (Hachette, 1993, page 26) on trouve l'idée d'ajouter les valeurs approchées (29,5 et 12,3) et les précisions (0,5 et 0,3) puisque l'exercice qui suit immédiatement celui que nous avons regardé est ainsi libellé :

Exercice 9

Si x_0 est une approximation de x à la précision Δx et y_0 est une approximation de y à la précision Δy, démontrer que $|x + y - (x_0 + y_0)| \leq \Delta x + \Delta y$.

Que peut-on en déduire sur l'incertitude d'une somme ?

mais ni les symboles différentiels, Δx et Δy, ni le mot incertitude ne sont présentés par le manuel ; le manuel les a très certainement empruntés à des organisations mathématique et didactique antérieures à la contre-réforme[113].

Cet exercice isolé et sans avenir en classe de seconde, essaie de faire vivre des pratiques délaissées par l'institution. Sa présence est une manifestation supplémentaire à la fois de la volonté institutionnelle (inconsciente ?) de rencontrer le Pb n 2 de l'approximation numérique, et des carences institutionnelles pour l'aborder plus franchement, dès la classe de seconde.

L'emprunt inopportun d'éléments technologiques à des organisations passées peut s'expliquer par l'absence de tels éléments bâtis sur la notion de fonction. Un exercice du manuel Transmath (Nathan, 1995, page 53) nous met sur cette piste. Il comporte un titre et des commentaires, ce qui est rare.

113 Rappelons que les notions d'erreur, majorant d'erreur et incertitudes absolue ou relative avaient cours en classe de Seconde lors de la période précédente.

Exercice 10

Étrange ?

On suppose $2 \leq a \leq 5$.

1. Complétez les doubles inégalités suivantes :

a) $\ldots \leq 4a^2 \leq \ldots$

b) $\ldots \leq 4a^2 - a \leq \ldots$

2. Complétez les doubles inégalités suivantes :

a) $\ldots \leq 4a - 1 \leq \ldots$

b) $\ldots \leq (4a - 1)a \leq \ldots$

Commentaire :

L'encadrement du nombre $A = 4a^2 - a$ obtenu au 1.b) n'est pas le même que l'encadrement obtenu au 2.b) lorsque ce nombre est écrit sous la forme

$A = (4a - 1)a$.

Effectivement le premier encadrement ($11 \leq A \leq 98$) est moins bon que le second ($14 \leq A \leq 95$). Pourquoi ? Parce que la "combinaison arithmétique" des encadrements réalisée dans la deuxième question concorde avec la monotonie de la fonction $a \rightarrow 4a^2 - a$ sur l'intervalle [2 ; 5] ce qui n'est pas le cas dans la première question.
Aussi l'encadrement $14 \leq A \leq 95$ ne peut-il pas être amélioré. Mais si on suppose initialement $0 \leq a \leq 5$, aucun des deux encadrements produits :

$$-5 \leq 4a^2 - a \leq 100 \text{ et } -5 \leq (4a - 1)a \leq 95$$

ne collent à l'encadrement minimal

$$-\frac{1}{16} \leq 4a^2 - a \leq 95$$

Cet encadrement minimal, qu'on pourrait dénommer meilleur encadrement, on peut par contre le mettre à jour si on connaît les variations de f sur l'intervalle [0 ; 5].

L'existence d'un point de vue fonctionnel sur cette tâche générée par le Pb n°2 aurait autorisé le manuel à pousser le commentaire plus loin. Il pouvait pour cela s'appuyer sur les fonctions numériques usuelles auxquelles il consacre une large place, conformément aux instructions officielles qui font de l'acquisition d'

> une bonne maîtrise des fonctions usuelles indiquées dans le programme

l'un des objectifs principaux autour duquel le programme organise l'enseignement de la notion de fonction. Qu'il ne le fasse pas est un phénomène didactique que nous soupçonnons d'abord d'être une manifestation banale de la chronogénèse dans le fonctionnement d'un système didactique.

> Les mathématiques enseignées doivent pouvoir être présentées séquentiellement, les notions mathématiques se succédant sur l'axe temporel linéaire du temps didactique. (Artaud ,1997).

Mais l'absence totale de marques d'un point de vue fonctionnel aussi bien dans le texte du programme que dans l'ensemble des manuels depuis les débuts de la réforme nous incite à reconnaître plutôt dans ce phénomène un effet supplémentaire de l'arrêt de la transposition didactique de la notion de fonction dans EMS. Assude (1992) qui l'a analysé à propos de la notion de racine carrée, décrit cet arrêt :

> Si la notion de fonction, objet d'étude, existe bien dans le curriculum secondaire contemporain, elle n'y existe pas comme outil de travail et de la pensée mathématiques. Ou, pour le dire en des termes plus vagues mais, à nos yeux, pertinents : la notion de fonction n'a pas été intégrée à la culture mathématique (ou, si l'on veut, à la vision du monde mathématique) de l'enseignement secondaire. (page 278).

Pour défendre cette deuxième interprétation du phénomène didactique, examinons de plus près ce que pourrait être un point de vue fonctionnel sur le Pb n°2 dans l'institution EMS à l'entrée en lycée. Pour cela nous commençons par simplifier la formulation du Pb n°2 : soit x un nombre connu avec une certaine précision et un calcul à réaliser avec ce nombre, que nous écrirons f(x).
Nous pouvons immédiatement distinguer deux points de vue théoriques :

- Un point de vue qui s'attache au comportement global de la fonction f. Il consiste à passer d'un encadrement à un autre (de $a \leq x \leq b$ à $A \leq f(x) \leq B$) en recherchant des sous-intervalles de monotonie de f. C'est celui qui nous a permis d'analyser l'exercice du manuel Transmath concernant l'encadrement de l'expression $4x^2 - x$, à partir d'un encadrement du nombre x.
- Un point de vue qui s'attache au comportement local de la fonction f. Il consiste à passer d'une valeur approchée à une autre (de $x \approx c$ à ε près à $f(x) \approx f(c)$ à ε' près) en dégageant les propriétés de dérivabilité de f au voisinage de c.
  Dans l'exercice cité, on peut prendre $c = 3{,}5$; $\varepsilon = 1{,}5$ et $f(x) = 4x^2 - x$; on obtient $f(c) = 45{,}5$ et $\varepsilon' = 58{,}5$ (ε' a été calculé comme le produit de ε par le maximum de $|f'(x)|$ sur l'intervalle $[c - \varepsilon ; c + \varepsilon]$; il peut être calculé autrement)

Il ne nous semble pas inutile de souligner, de prime abord, que l'existence de ces deux points de vue bien différents contredit l'idée défendue par le texte du programme d'une "naturalité" de l'intervention des valeurs absolues ou des encadrements dans les problèmes d'approximation. En effet l'identification formelle entre les écritures $\left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}$ et $a \leq x \leq b$ ne se retrouve pas dans une identification des techniques que l'une ou l'autre vont outiller, d'autant plus que ces techniques peuvent aboutir à des résultats différents puisque $\frac{A+B}{2}$ n'a aucune raison d'être égal à $f(\frac{a+b}{2})$, ni $\frac{B-A}{2}$ être égal à ε'.

L'essentiel est pourtant dans le fait que les deux points de vue ne se construisent pas avec les mêmes éléments théoriques et qu'ils n'éclairent pas de la même façon le problème d'approximation.

Le deuxième point de vue donne du corps à l'inégalité $\left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}$ car il permet d'écrire que $f(x) \approx f(\frac{a+b}{2})$ tout en relevant que la précision se présente comme un <u>majorant d'une erreur</u> dont la recherche tient compte à la fois de la fonction f et de l'erreur commise lors du remplacement de x par un nombre de l'intervalle [a ; b], elle-même connue que par l'un de ses majorants. Il justifie du même coup l'intérêt porté au milieu de l'intervalle, par le souci de rendre minimal ce dernier majorant.

Le premier point de vue écarte l'idée de majoration d'erreur pour privilégier l'image de l'intervalle par la fonction, en s'appuyant sur les valeurs aux bornes de l'intervalle ou des <u>sous-intervalles de monotonie de la fonction</u> dégagés par exemple d'une étude de ses variations.

> *Ce qui ressort du texte du programme et des réalisations didactiques visibles dans les manuels actuels c'est que l'institution se refuse à fabriquer en classe de Seconde des techniques d'approximation numérique dont la paternité théorique relève de l'un ou l'autre de ces points de vue fonctionnels.*

Ce refus remonte à 1986 lorsqu'un changement de programme décide l'abandon, en classe de Seconde, d'un pan entier de travail sur les fonctions.

On trouvait en effet dans le chapitre "Fonctions" du programme de 1981, un paragraphe intitulé "Comportement local d'une fonction" que nous reproduisons intégralement :

> Exemples d'études au voisinage de 0 :
>
> $x \rightarrow (1+x)^2$, $x \rightarrow (1+x)^3$, $x \rightarrow \frac{1}{1+x}$, $x \rightarrow \sqrt{1+x}$.
>
> Exemples d'approximation locale par une fonction affine ; utilisation de majorations dans le calcul approché des valeurs d'une fonction et calculs d'erreurs.
>
> On entraînera ici encore les élèves à trouver des conditions suffisantes pour la mise en place d'une majoration, par exemple : $0 \leq \frac{1}{1+x} - (1-x) \leq 2.x^2$ sous la condition suffisante $|x| \leq \frac{1}{2}$; $0 \leq -\sqrt{1+x} + (1+\frac{x}{2}) \leq \frac{x^2}{2}$, etc.

Les commentaires de ce programme étaient alors très explicites sur les raisons qui présidaient à cet engagement didactique en rupture avec ceux de la période dite des mathématiques modernes (les phrases ou morceaux de phrase soulignés le sont par nos soins) :

> L'étude des comportements locaux prépare la mise en place ultérieure des notions de dérivée et de limite. On attachera une très grande importance à ces investigations qu'on développera sur des exemples numériques variés de situations analogues à celles présentées dans le programme, sans se limiter nécessairement au voisinage de 0. <u>Ces activités sont d'autant plus fondamentales qu'elles amènent à combiner l'expérimentation et le raisonnement</u>. Par exemple, l'expérimentation sur $1 - \frac{1}{1+x}$ permet de conjecturer que x en

est une approximation au voisinage de 0, ce qui conduit à former un tableau de valeurs de $\Delta(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x)$.

Une majoration permet ensuite de justifier, pour tout réel x vérifiant $|x| \leq \frac{1}{2}$, le majorant $2.x^2$ de $\Delta(x)$, et d'ailleurs de démontrer que, pour tout réel positif x, on a :

$0 \leq \Delta(x) \leq x^2$.

Inversement, cette inégalité permet de comprendre pourquoi une calculatrice affiche $\frac{1}{1+x} = 1 - x$ dès que $0 \leq x \leq 10^{-5}$ (ou 10^{-7} suivant la précision du matériel).

De la même façon, on pourra établir, sous la condition suffisante $|x| \leq \frac{1}{2}$, que

$\left|\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2)\right| \leq 2.|x|^3$.

Lors du calcul approché de valeurs prises par une fonction, on pourra mettre en jeu de telles inégalités pour évaluer la précision ; on associera de telles inégalités à une mise en place des représentations graphiques des fonctions étudiées …

Reprenons notre souffle car la surprise est de taille, à comparer, pour l'approximation numérique, les ambitions affichées par le programme de 1981 et celles des programmes suivants (1986, 1990) qui se réclament pourtant du même paradigme didactique. Dans l'esprit des réformateurs de 1981, la quantification de l'erreur dans l'approximation numérique, observée et recherchée "expérimentalement" par comparaison avec les résultats fournis par la calculatrice, devait motiver et structurer un travail de majoration, minoration et encadrement d'une fonction sur un intervalle, travail dont la reprise et l'approfondissement introduiraient à la notion de développement limité d'ordre 1 donc de dérivabilité.
Or dès le premier aménagement des programmes, en 1986, toute la partie relative au comportement local d'une fonction est complètement supprimée de la classe de Seconde, et incomplètement renvoyée sur la classe de Première puisque disparaissent les demandes sur le calcul d'erreurs et sur la formulation de conditions suffisantes. On ne trouve pas, dans les diverses présentations liminaires aux programmes de1986, de déclarations explicites sur les raisons qui ont suscité ce transfert et ces suppressions. Seuls les commentaires qui portent sur les inéquations et la valeur absolue :

De nombreuses situations conduisent à des inéquations. Leur résolution doit être abordée très progressivement, en prenant appui sur les interprétations graphiques.

Il convient d'éviter les exemples artificiels et trop techniques.

nous suggèrent l'impact jugé négatif d'une "trop grande technicité algébrique". On peut alors penser que, saisie des difficultés que soulève une trop forte algébrisation des notions d'Analyse telles qu'elles sont introduites en Seconde, la noosphère réagit en abaissant certains niveaux trophiques liés à cette algébrisation et révise conséquemment ces prétentions sur le rôle qu'elle faisait jouer à l'approximation dans cette introduction.
Ce premier niveau explicatif en appelle un second qui met en perspective l'aménagement de 1986 avec la modification complète des programmes de Collège

(1985 pour la classe de Sixième, etc.) opérée sous l'impulsion d'un projet politique de rénovation globale de l'enseignement secondaire connu par son mot d'ordre principal : 80 % d'une classe d'âge au niveau baccalauréat. Les lignes directrices pour le programme de Seconde mis en œuvre à la rentrée 1986 ne cachent pas cet aspect socio-politique de l'aménagement du programme :

> Le présent programme est celui d'une classe de Seconde pour tous ; il convient de le préserver d'une intervention artificielle de descriptions de structures, et par conséquent, de ne pas l'alourdir d'une algébrisation prématurée.

Les parties principalement touchées par l'aménagement de 1986 avaient été ciblées par une Note de service (1984) consacrée entièrement au programme de mathématiques de la classe de Seconde. Cette note laissait un long paragraphe à la valeur absolue lequel commençait par une déclaration tranchante :

> Les exercices faisant intervenir la valeur absolue de manière artificielle (et souvent cumulative) sont en dehors des objectifs de l'ensemble du second cycle,

dénonçait les exercices

> qui relèvent de la technicité gratuite et ne peuvent que rebuter les élèves, tels que l'étude de la fonction $x \rightarrow |x - |x - 1||$ ou la résolution des équations
>
> $||x| - 3| + |2 + |x|| = 1$ ou $\left|\frac{2x + 5}{x - 1}\right| = \sqrt{(2x + 5)^2}$.

mais ne disait mot de ceux qui créeraient des liens entre valeur absolue et approximation.
On comprend mieux cet oubli à la lecture du paragraphe sur le comportement local d'une fonction :

> Les objectifs fixés en ce domaine s'avèrent à l'expérience trop ambitieux. Il n'y a pas à faire un chapitre à part : c'est à propos de l'étude des exemples de fonctions figurant au programme que les élèves peuvent aborder la notion d'approximation sur un intervalle donné de la fonction f considérée par une fonction plus simple g, en combinant l'expérimentation et le raisonnement. Les représentations graphiques, les expérimentations numériques et les situations issues de la mesure des grandeurs géométriques et physiques ou de la vie économique et sociale (évolution des populations, de prix …) fournissent des exemples variés d'approximations de ces fonctions.

qui se termine en forme d'avertissement :

> Aucune connaissance sur ce paragraphe n'est exigible à l'issue de la Seconde. Les exemples faisant appel aux fonctions trigonométriques sont à exclure.

Plusieurs mots ont disparu : erreur, majoration, condition suffisante.

C'est en fait dans un même mouvement curriculaire, que la valeur absolue quitte les bancs du Collège et connaît une cure d'amaigrissement algébrique en classe de

Seconde. Ce mouvement se répercute sur l'approximation numérique qui ne peut pas s'outiller auprès de la valeur absolue pour développer ses problèmes fondamentaux.
Ce qui nous apparaît alors, c'est que ce mouvement n'a pas favorisé la mise en débat didactique de la notion de valeur absolue[114]. Considérée comme difficile pour le plus grand nombre des élèves, son arrivée est repoussée le plus loin possible dans le curriculum et son rôle d'outil fortement réduit. Le bénéfice est douteux, voire illusoire comme le souligne Chevallard (1986) à propos de tout changement de programme :

> Dans le fonctionnement réel du système d'enseignement, la mise en cause des programmes n'équivaut pas à la mise en débat de la transposition didactique. Tout au contraire, à voir dans le programme l'élément déterminant, à le dénoncer comme tel, on entame un processus qui conduit très vite à oublier ce débat, pour s'en tenir à une polémique de changement de surface, sans puissance de changement véritable (même si la matière enseignée change, le problème didactique de son enseignement demeure soigneusement écarté). La mise en cause des programmes tend à être exclusive de toute autre analyse. Elle porte en elle la dénégation de la transposition didactique. (article intitulé "Les programmes et la transposition didactique : illusions, contraintes et possibles. (Bulletin A.P.M.E.P. n° 352, 1986).

On peut voir ici que le critère retenu - réduire drastiquement le travail algébrique - a torpillé la tentative d'engager l'approximation numérique sur le terrain de l'Analyse qu'avait mise au point, par le biais du comportement local, les instigateurs de la réforme de 1981. Bien qu'elle l'appelle de ses vœux, la Note de service de 1984 n'a pas reposé globalement la nécessité, ni recherché les formes d'une reprise de la transposition didactique de la notion de fonction pour l'approximation numérique. Ainsi l'insertion du Pb n°2 par le comportement global d'une fonction ne s'est pas réalisée. Le problème lui-même n'est pas formulé et vit petitement au détour de quelques exercices et sous des formes très restrictives - puisque les seules fonctions admises sont des combinaisons d'opérations arithmétiques sur des intervalles de monotonie et que l'on ne cherche pas l'encadrement le meilleur.

Actuellement l'institution se contente de surajouter la valeur absolue à l'encadrement dans quelques exemples d'approximation. Les conséquences qui touchent l'approximation numérique dans le système d'enseignement viendront à la fois d'une illusion didactique et d'un écrasement épistémologique.

Une illusion didactique sur la portée d'une telle rencontre avec l'objet valeur absolue : l'institution laisse croire que quelques transformations d'écritures à base d'encadrements renforceront ce qu'elle appelle "l'intervention naturelle de la valeur absolue" dans les problèmes d'approximation au point d'en faire un outil de résolution. L'absence de la valeur absolue, que nous constatons dans les exercices d'approximation fabriqués par les manuels de Seconde actuels, prouve que ce mécanisme didactique ne fonctionne pas.

Un écrasement épistémologique de la notion de distance sur la notion d'encadrement : l'institution, qui déclare que la notion de distance est sa motivation principale pour introduire la valeur absolue, enferme d'emblée cette notion dans un espace technico-technologique fabriqué pour la notion d'ordre, de surcroît limité aux opérations arithmétiques. Cet écrasement est favorisé :

[114] Cf. le mémoire de DEA : "La valeur absolue. Difficultés majeurs pour une notion mineure." (Duroux, 1982)

- par les caractéristiques de R dont la topologie usuelle permet de traiter une inégalité en distance à partir de l'ordre
- par la décision institutionnelle relative à l'approximation numérique d'évincer la majoration de l'erreur et le raisonnement par condition suffisante

> *Cet écrasement épistémologique de la notion de distance sur la notion d'encadrement représente une forte contrainte pour l'avenir institutionnel de l'approximation numérique au sein de l'Analyse car l'inégalité* $|x - c| \leq \varepsilon$ *ne porte pas les caractères topologiques du concept de voisinage auquel l'institution fera implicitement appel dans les classes suivantes pour penser l'approximation numérique.*

En particulier :

- la signification de la localisation d'un nombre x par son appartenance à un intervalle est dominée par la relation d'ordre et elle est privée des ouvertures topologiques attendues de l'inégalité $|x - c| \leq \varepsilon$ conçue comme l'expression d'une distance ;
- Les écritures du type $|x - c| \leq \varepsilon$ relèvent de manipulations formelles trop pauvres pour déclencher les procédures de majoration ou de minorations que demandera le traitement analytique d'un problème d'approximation numérique.

3. En ce qui concerne la précision,

l'institution actuelle s'attache avant tout à stabiliser et à simplifier le vocabulaire puisque le programme fournit une définition :

> Lorsque $|a' - a| \leq k.10^{-p}$, où $1 \leq k < 10$, on dit que a' est une approximation (valeur approchée) de a à la précision $k.10^{-p}$.

avec insistance à

> pratiquer ce vocabulaire sur des exemples numériques,

entièrement puisés dans le monde décimal puisque cette définition est suivie d'un rappel sur ce qu'est une approximation décimale à 10^{-p} près (un nombre de la forme $m.10^{-p}$ où m est entier) et d'une recommandation :

> La pratique des troncatures et d'arrondis, déjà engagée au Collège, sera poursuivie, sans formalisation de ces notions.

> *Le programme actuellement en vigueur ne prononce ni le mot erreur ni le mot incertitude.*

Les manuels ont plus ou moins bien enregistré (et adapté) cette mise au point langagière qui date de 1990 – nous l'avons constaté ci avant avec le manuel Déclic - mais tous ont abandonné l'idée de partir de la notion d'erreur (<u>inconnue exactement mais majorable</u>) pour bâtir la notion de précision. Arrêtons-nous sur cet abandon qui marque un tournant historique dans la vie institutionnelle de l'approximation numérique.

Comme nous l'avons déjà signalé, c'est la suppression du paragraphe consacré au comportement local d'une fonction et que décide l'aménagement des programmes opéré en 1986[115], qui fait disparaître, sans le dire, le mot erreur du vocabulaire officiel de la classe de Seconde. De fait la disparition du mot ne fait qu'accompagner celle de la seule technique qui utilisait une majoration de l'erreur pour réaliser une tâche de décimalisation d'un nombre avec production de la précision. Soudainement privée de support théorique cette technique ne peut plus fonctionner et laisse le champ des tâches de décimalisation totalement à sa rivale (impérialiste) : la décimalisation par calculatrice et troncature. Expliquons-nous sur un exemple à partir d'un exercice du manuel Thèmes mathématiques, classe de Seconde (Nathan, 1981, exercice n° 46 page 146) :

Exercice 11

Calculez, aussi rapidement que possible, et sans l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée des réels suivants : $\sqrt{1{,}0112}$; $\sqrt{0{,}9924}$; $\sqrt{16{,}064}$; $\sqrt{0{,}09018}$.

Avant de mener les calculs, reproduisons l'activité dite d'approche proposée par le manuel, et la première partie de l'exposé qui suit cette activité :

<u>Approche</u>

Soit f la fonction $x \to \sqrt{1+x}$.

1°) Calculez à la machine une valeur approchée de f(x) – 1, successivement pour $x = 10^{-1}$, $x = 10^{-2}$, $x = 10^{-3}$, $x = 10^{-4}$ puis pour $x = -10^{-1}$, $x = -10^{-2}$, $x = -10^{-3}$, $x = -10^{-4}$. Qu'observez-vous ?

2°) Soit g la fonction $x \to 1 + \frac{x}{2}$.

Démontrez que $f(x) - g(x) = -\dfrac{x^2}{4(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2})}$.

Déduisez-en que si $-1 \leq x \leq 1$, alors $-\frac{x^2}{2} \leq f(x) - g(x) \leq -\frac{x^2}{12}$ et précisez le signe de f(x) – g(x).

On suppose $-1 \leq x \leq 1$; étant donné un réel strictement positif ε, déterminez comment il suffit de choisir x pour que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.

---

115 On commence à se rendre compte que cet aménagement ne fut pas mineur puisqu'il engageait une restructuration d'ampleur de certaines notions.

<u>Exposé (première partie)</u>

Au voisinage de zéro, la fonction affine x → $1 + \frac{x}{2}$ est une approximation de la fonction x → $\sqrt{1+x}$.

Cette approximation est d'autant meilleure que x est plus proche de 0.

Pour les calculs approchés, il est commode de retenir que $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.

Lorsque $-1 \leq x \leq 1$ (ce qui est raisonnable au voisinage de 0), l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{1+x}$ par $1 + \frac{x}{2}$ est négative, sa valeur absolue, appelée erreur absolue, est inférieure ou égale à $\frac{x^2}{2}$: $1 + \frac{x}{2}$ est donc une valeur approchée par excès à moins de $\frac{x^2}{2}$ près de $\sqrt{1+x}$.

Présentons maintenant les calculs pour $\sqrt{1{,}0112}$, comme l'exposé du manuel permet de les développer :

> $\sqrt{1{,}0112} \approx 1 + \frac{0{,}0112}{2}$ et l'erreur absolue est majorée par $\frac{0{,}0112^2}{2}$ soit $2.5{,}6^2.10^{-6}$. Pour gagner du temps quitte à perdre un peu de précision, on majore l'erreur absolue par $2.6^2.10^{-6}$ puis par 8.10^{-5}. On peut alors déduire que 1,0056 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{1{,}0112}$ à la précision 8.10^{-5} ou alors que 1,0056 est une approximation décimale d'ordre 4 par excès de $\sqrt{1{,}0112}$.

C'est bien la majoration de l'erreur qui permet d'achever la décimalisation amorcée par l'assertion $\sqrt{1{,}0112} \approx 1{,}0056$. Elle fournit en plus des pistes pour une amélioration de cette décimalisation. C'est ce que signale de suite le manuel :

<u>Exposé</u> (deuxième partie)

Les conditions d'utilisation de cette approximation dépendent donc de l'erreur absolue maximale permise : par exemple, si l'erreur absolue maximale permise est 10^{-5}, il suffit d'avoir $\frac{x^2}{2} \leq 10^{-5}$, soit $x^2 \leq 2.10^{-5}$, par suite il suffit d'avoir $x^2 \leq 10^{-6}$, soit $-10^{-3} \leq x \leq 10^{-3}$

(remarquez que cet encadrement satisfait à la condition $-1 \leq x \leq 1$) pour pouvoir utiliser l'approximation $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.

Replaçons ce discours dans l'exemple que nous venons de traiter en nous demandant si 1,00560 est une approximation décimale d'ordre 5 par excès de $\sqrt{1{,}0112}$?
La condition suffisante trouvée par le manuel, à savoir $|x| \leq 10^{-3}$ n'est pas satisfaite puisque x = 0,0112. Mais cela ne justifie pas l'abandon de notre question sans envisager auparavant de trouver une condition suffisante plus restrictive. On peut par exemple s'intéresser au coefficient C (ici $\frac{1}{2}$) du terme en x^2 qui majore l'erreur puisqu'il intervient dans le calcul de la condition suffisante. En procédant de la même façon qu'avec la

condition suffisante $-1 \leq x \leq 1$, on peut montrer que l'erreur devient majorable par $\frac{x^2}{7}$ (on s'approche de la "majoration asymptotique" $\frac{x^2}{8}$ reconnaissable dans le développement limité d'ordre 2 !), mais sous la condition suffisante $|x| \leq 0{,}1$ (plus restrictive).
Dans notre exemple, en reprenant les calculs cela assure que $\sqrt{1{,}0112} \approx 1{,}0056$ par excès à moins de 2.10^{-5} au lieu de 8.10^{-5} mais le 1.10^{-5} visé par notre question initiale n'est toujours pas décidable.
Nous sommes là au cœur d'une problématique d'approximation numérique axée sur l'objectif de rapprocher la précision de l'erreur réelle inconnue. Nous pensons que c'est ce qu'espéraient les promoteurs de la Réforme de 1981 quand ils recommandaient fortement l'étude de quelques grands problèmes comme type d'activité à proposer aux élèves. Voici, pour exemple, comment Lazet et Ovaert concevaient cette activité :

> Il ne s'agit pas d'activités *isolées* de résolution d'exercices et de problèmes, mais d'une *étude suivie, et reprise* à divers niveaux d'approfondissement, de quelques grands thèmes jouant un rôle important dans le secteur considéré et choisis en fonction d'objectifs généraux de formation. Ces activités fournissent des *problématiques* pour l'approfondissement des concepts et sont, en retour, le terrain privilégié de *mise à l'épreuve* des outils théoriques élaborés. (Introduction au Bulletin Inter-Irem sur l'enseignement de l'Analyse, 1981)

Ceci explique l'inscription, dans le programme de 1981, de l'étude des comportements locaux d'une fonction. L'étude doit réaliser un approfondissement du thème de l'approximation numérique où l'on forge la majoration d'erreur à la fois comme outil de résolution d'un problème de décimalisation et comme interface avec les notions de limite et de dérivée, en binôme avec le raisonnement par condition suffisante. Le manuel répond à cette demande en faisant intervenir la majoration de l'erreur sur deux plans :

- Un plan théorique pour compléter la formule d'approximation affine. Elle apparaît alors sous la forme C.x2 et est effectivement accompagnée d'une condition suffisante
- Un plan pratique pour contrôler la décimalisation une fois que le coefficient C a été retenu par l'approche théorique.

Notons que, même s'il satisfait la demande institutionnelle de construire pour l'élève une phase d'observation numérique en faisant intervenir la calculatrice, le manuel garde entièrement la main dans le parcours théorique. Il assure le guidage du traitement algébrique des expressions et des inégalités ; et surtout il impose la valeur $C = \frac{1}{2}$ suggérée par le programme, se contentant de l'elliptique et énigmatique déclaration :

> On suppose $-1 \leq x \leq 1$, ce qui est raisonnable au voisinage de 0.

La recherche de la condition suffisante, dont la formulation est indispensable pour mener le travail de majoration, n'est pas problématisée mais imposée par le choix théorique préalable à cette recherche, celui d'un développement limité d'ordre 2. Ce choix transparaît à la question 2 de l'activité d'approche :

> Déduisez-en que si $-1 \le x \le 1$, alors $-\frac{x^2}{2} \le f(x) - g(x) \le \frac{x^2}{12}$

Le manuel n'a pas les moyens d'expliciter les éléments théoriques qui rendent raison de la majoration de $|f(x) - g(x)|$ par un terme de la forme $C.x^2$. Qui plus est, la déduction est antinomique avec l'idée de raisonner par condition suffisante qui demande de partir d'un encadrement de $f(x) - g(x)$ ou d'une majoration de $|f(x) - g(x)|$ pour aboutir à l'encadrement de x ou à une majoration de $|x|$. On peut donc dire que le manuel ne réussit pas à répondre à la demande formulée par le programme qui était, rappelons-le :

> On entraînera ici encore les élèves à trouver des conditions suffisantes pour la mise en place d'une majoration, par exemple : $0 \le \frac{1}{1+x} - (1-x) \le 2.x^2$ sous la condition suffisante $|x| \le \frac{1}{2}$; $0 \le -\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2}) \le \frac{x^2}{2}$, etc.

C'est peut-être cet échec qui incite le manuel à revenir dans la deuxième partie de son exposé sur la notion de condition suffisante et à proposer un exercice (n° 47 page 146) :

Exercice 12

Comment suffit-il de choisir x pour que l'erreur absolue commise en remplaçant $\sqrt{1+x}$ par $1 + \frac{x}{2}$ soit inférieure ou égale : **1°)** à 10^{-3} ? **2°)** à 3.10^{-7} ?

L'élève est invité à refaire le raisonnement du manuel mais on ne lui demande pas de le réinvestir dans l'une quelconque des décimalisations de l'exercice n°46 comme nous l'avons fait, de notre propre initiative, dans celle de $\sqrt{1{,}0112}$. Ainsi le couple raisonnement par condition suffisante - majoration d'erreur rate une deuxième rencontre avec le problème d'approximation.

Reste, pour la majoration d'erreur, la possibilité de s'exprimer sur le plan pratique comme nous l'avons fait pour $\sqrt{1{,}0112}$. Cela impose d'accepter l'idée de perdre de la précision (sans perdre la précision) pour gagner du confort et de la rapidité dans les opérations. Non seulement le manuel ne donne pas corps à cette idée en lui associant une technique, mais nous le soupçonnons fortement d'oublier l'exigence de la précision quand il s'agit d'exemples numériques. Déjà l'exercice n°46, reproduit ci-avant, parle de valeur approchée sans souffler mot de la précision. Un autre exercice (n° 71, page 147) que nous reproduisons ci-après nous conforte dans nos soupçons :

Exercice 13

Calculez aussi rapidement que possible, et sans l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de la mesure en litres d'un volume V d'une boule de 10,1 cm de rayon (on rappelle que $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, et on donne $\frac{4}{3}\pi \approx 4{,}2$).

L'énoncé de l'exercice et les exposés du cours permettent de décrire l'attente du manuel dans les calculs suivants :

1 litre = 1 dm^3 et 10,1 cm = 1,01 dm.
$V = \frac{4}{3}.\pi.1{,}01^3$ litre. Or $\frac{4}{3}\pi.1{,}01^3 \approx 4{,}2.(1 + 3.0{,}01)$; donc $V \approx 4{,}326$ litres

On ne se soucie pas de la précision puisqu'il s'agit d'être rapide malgré l'absence de la calculatrice. L'ombre de la calculatrice se projette sur cet exercice pour en modifier la fonction didactique. Le calcul approché sans calculatrice réussit à se maintenir mais dans un rôle subalterne, celui d'appliquer les formules d'approximation, comme :

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \text{ ou } (1+x)^3 \approx 1 + 3x.$$

Si on veut de la précision, on prendra la calculatrice !

Le fonctionnement didactique que donne à voir le manuel a radicalement bouleversé l'organisation didactique imaginée par les promoteurs de la réforme. Compte tenu des espoirs mis dans la contre-réforme, on peut parler d'un double échec :

- l'expérimentation numérique stimulée par le recours à la calculatrice devait susciter des conjectures sur des majorations d'erreurs validées par des conditions suffisantes. De fait les conditions suffisantes sont imposées sans lien opératoire avec les majorations d'erreurs.
- la formulation et la manipulation d'inégalités tayloriennes et des conditions suffisantes devaient ouvrir la voie aux concepts de limites et de dérivées et activer des approximations numériques avec contrôle de la précision. De fait les inégalités tayloriennes deviennent des quasi-égalités utilisées pour des approximations numériques sans évaluation de la précision.

Dans l'article déjà cité, Chevallard (1986) analyse ainsi ce phénomène didactique (pages 32 et suivantes) :

> On réforme les programmes, on y introduit de nouveaux “objets d'enseignement”. Or, bien souvent, ceux-ci se révèlent trop “gros”. Et parce qu'il s'aperçoit que leur gestion dans la classe est lourde, invalidante, impossible, l'enseignant doit bien vite les apprêter, les “dégraisser”, les calibrer, voire se résoudre à les écarter. Le problème didactique ainsi posé est, d'une certaine manière, bien connu. Mais, pour l'énoncer correctement, il convient de voir qu'il ne surgit pas seulement de manière anecdotique (aussi ne parlerai-je pas, ici, de la trop fameuse “droite affine en quatrième”), mais bien de manière *systématique*. Il convient de ne pas y voir seulement l'effet de quelque décision irréfléchie des rédacteurs des programmes, mais bien de la conséquence *régulière* des lois spécifiques du fonctionnement didactique. Car, trop gros et mal calibrés, les objets d'enseignement introduits le sont d'une manière bien particulière. Sont-ils, en effet, mal calibrés par rapport aux élèves, et leurs “capacités” ? Nullement (y compris pour la droite affine en quatrième). Ou plutôt, pas exactement. Ces objets nouveaux sont mal calibrés *par rapport au contrat didactique*. Plus

> exactement encore, par rapport à notre contrat didactique actuel. Ou, plus complètement, ils sont trop "gros" pour constituer la matière d'un apprentissage qui se fasse sur le mode défini par le contrat didactique actuel. (On retrouve ici les lois du fonctionnement didactique : le contrat didactique, en effet, est la forme dans laquelle ces lois objectives se manifestent subjectivement à l'acteur du système, enseignant ou enseigné).

Reprenons l'idée de calibrage et jetons-nous à l'eau : le couple majoration d'erreur-raisonnement par condition suffisante était mal calibré pour le contrat didactique que l'institution était en mesure de faire fonctionner en début de Lycée sur le Calcul numérique approché, pour deux raisons essentiellement :

- à cause du raisonnement par condition suffisante qui heurtait de plein fouet les règles de construction d'un raisonnement qui fonctionnaient (et fonctionnent encore) en Collège
- et à cause de la majoration d'erreur qui devenait un objet exogène au Calcul numérique approché institutionnalisé en Collège dès lors que la praxéologie dominante de ces calculs ne contenait que des techniques instrumentées par la calculatrice, ce qui était le cas dès le début des années 80.

Nous ne développerons pas ici ce qui a trait aux difficultés d'apprentissage du raisonnement par condition suffisante.
Par contre nous voulons nous attarder sur ce qui tient aux modifications des pratiques de Calcul numérique approché dues à l'intrusion de la calculatrice.

4. Le poids de la calculatrice

Chevallard dans le même article nous prévient :

> Lorsque l'échec dénoncé est regardé non comme celui de tel élève, ou de tel professeur, ou de tel établissement, mais bien comme un échec général – touchant, quoique de manière inégale, toutes les classes d'un niveau donné par exemple – notre représentation de ce système d'enseignement nous livre l'éternelle victime expiatoire, les programmes.

La noosphère s'en prit effectivement aux programmes, particulièrement à celui de Seconde : dès 1984 (Note de service déjà citée), elle en élimine le couple incriminé mais suggère la comparaison de fonctions sur un intervalle donné. Dans un deuxième temps, en 1986, elle met fin aux inégalités tayloriennes et elle écarte la comparaison de fonctions. Enfin, en 1990, elle décide de reconsidérer la place de la notion d'erreur.
L'acte qui nous semble le plus significatif à cet égard est celui de rassembler sous le seul vocable "précision" un agglomérat de mots tels que incertitude, limite supérieure de l'erreur, etc. (et bien sûr précision) auxquels elle donnait auparavant des significations différentes.

Nous allons montrer que, par cet acte, la noosphère pousse l'institution EMS à transporter en lycée, sans la réinterroger théoriquement, la praxéologie de décimalisation que le Collège a bâtie autour de la calculatrice.

4.1 plus d'incertitude, seulement de la précision

Commençons par examiner ce qui séparait dans EMS les notions de précision et d'incertitude avant cette décision. Pour cela, nous nous reportons au chapitre "Calculs numériques" d'un manuel de Seconde dans les années 70. Voici un extrait du cours dans le Queysanne-Revuz (Nathan, 1976, pages 198 et 199) :

> La précision avec laquelle doit être donnée une valeur approchée dépend de ce que l'on sait de l'incertitude avec laquelle elle permet d'encadrer la valeur exacte.

Cette déclaration est immédiatement suivie d'une illustration longuement développée :

> Supposant par exemple que la terre est assimilable à une sphère, cherchons son rayon en kilomètres en prenant pour valeur approchée par défaut de π le nombre 3,14 avec une incertitude de 10^{-2}.
>
> Si l'on "calcule" $\frac{20\,000}{3{,}14}$, on peut donner autant de décimales que l'on veut, et en donner une valeur approchée telle que la suivante 6369,4. Or, dans les conditions où l'on est placé les deux derniers chiffres n'ont aucune valeur. On veut en effet évaluer $\frac{20\,000}{\pi}$ avec $3{,}14 < \pi < 3{,}15$. On a donc $\frac{20\,000}{3{,}15} < \frac{20\,000}{\pi} < \frac{20\,000}{3{,}14}$. Or une valeur approchée par défaut de $\frac{20\,000}{3{,}15}$ est 6349,2 et une valeur approchée par excès de $\frac{20\,000}{3{,}14}$ est 6369,5.
>
> Tout ce qu'on peut affirmer est donc que l'on a pour le rayon R de la terre exprimé en kilomètres : $6349{,}2 < R < 6369{,}5$.
>
> On peut donner le résultat sous la forme $6{,}36.10^{3}$ qui est une valeur approchée de R avec une erreur inférieure à 11 km. (Sachant d'ailleurs que π est plus proche de 3,14 que de 3,15, on peut affirmer sans faire le calcul avec une valeur approchée plus précise de π que l'erreur est certainement inférieure à 10 km, et que $6{,}36.10^{3}$ est très vraisemblablement une valeur approchée par défaut).
>
> Il est certain, en tout cas, que donner le résultat sous la forme 6349,2 ou 6369,5 n'est pas recommandable puisque l'on a lieu de penser que les derniers chiffres n'apportent aucune information valable. Par contre ceux de $6{,}36.10^{3}$, que l'on qualifie souvent de chiffres significatifs, donnent ce que l'on connaît du nombre R : le premier 6 et le 3 sont certainement exacts ; dans une valeur plus approchée de R, le second 6 risque d'être remplacé par un 5.

> *Même si le discours ne l'explicite pas totalement, on trouve ici la préoccupation de cadrer théoriquement une règle de calcul approché sur des données expérimentales couramment énoncée ainsi : il est illusoire de conserver dans les résultats une précision supérieure à celle des données.*

Ici le manuel fait jouer au nombre π le rôle de la donnée expérimentale à laquelle on n'a accès qu'avec une erreur de mesure. Cet instrument est ici une table numérique, ce pourrait être maintenant la calculatrice. D'ailleurs les enseignements scientifiques actuels de lycée continuent à faire appel à cette règle en pensant que l'enseignement mathématique lui a créé un environnement théorique apte à en faciliter l'usage.
Le nombre à approcher décimalement n'est pas décimal : le manuel peut donc faire valoir la majoration de l'erreur comme seul moyen de parler de l'erreur et de travailler avec elle sans la connaître. En fait ce nombre est exprimé sous forme d'un quotient -

non simplifiable selon les règles algébriques usuelles dans cette classe - si bien que le manuel, sans le dire, conjugue deux erreurs : l'erreur (systématique) sur la donnée - π - et l'erreur de calcul due à la division arrêtée. Relevons que le manuel réserve le mot incertitude à un majorant de cette erreur et le mot précision à l'unité décimale du chiffre le plus à droite à la condition qu'il soit reconnu exact.
Le processus qu'il conduit jusqu'au couple valeur approchée décimale - précision décimale peut être découpé en deux étapes :

- l'obtention d'un encadrement décimal du nombre R à approcher. La largeur de cet encadrement est appelée incertitude sur R. A la fin de cette étape il serait possible d'annoncer, par exemple, que R $\approx$ 6359,35 à 10,15 près
- la mise à l'écart des chiffres non significatifs de cette valeur approchée décimale, c'est-à-dire ceux dont on ne peut pas affirmer (sans retour à la première étape) qu'ils appartiennent à l'écriture décimale exacte de R, en acceptant que le chiffre le plus à droite retenu soit exact par arrondi. À la fin de cette étape, on présente le résultat en écriture scientifique ($6{,}36.10^3$) qui offre un double avantage, celui de lever l'ambiguïté de l'écriture normale (6360, dont le zéro n'est pas significatif) et celui de fournir l'ordre de grandeur de R (R est entre10^4 et 10^5).

On ne manquera pas de remarquer que l'absence de machine à calculer (nous sommes en 1975 et les premières machines à calculer n'ont pas fait encore leur apparition dans la classe sauf à titre expérimental) favorise le montage didactique qui attribue au nombre π l'origine de l'incertitude qu'il faut traiter décimalement. L'inévitable complexification de la division manuelle, si le nombre de chiffres augmente et l'explosion de son coût en temps, permet au manuel d'imposer le choix de deux décimales pour π et de retenir toute velléité d'aller voir plus loin. On assiste ici à une fiction didactique qui risque de ne pas résister à l'intrusion de la calculatrice.
Pour nous en assurer, munissons-nous d'une calculatrice qui dispose d'une touche marquée π telle la Casio 6800 G. Le montage didactique que nous venons d'analyser peut-il se maintenir ?

Exécutons $\dfrac{20\,000}{\pi}$ …. À l'écran s'affiche le nombre 6366,197724.

Écrire que R $\approx 6{,}366197724.10^3$ fait croire que tous les chiffres sont significatifs. Si incertitude il y a, nous devons la rendre visible. Nous pourrions reprendre la démarche du manuel à savoir construire la précision à partir de l'incertitude reconnue sur R. Voici une manière de faire :

- afficher le π de la calculatrice : 3,141592654
- exécuter à la calculatrice les divisions de 20 000 par 3,141592655 et de 20 000 par 3,141592653 (nous tenons compte des caractéristiques techniques de la calculatrice qui n'enregistre pas plus de 10 chiffres)
- constater que les résultats affichés 6366,197721 et 6366,197725 diffèrent du précédent par les deux derniers chiffres mais que la partie 6366,19772 n'a pas changé.

De l'encadrement $\dfrac{20\,000}{3{,}141592655} < R < \dfrac{20\,000}{3{,}141592653}$ pouvons-nous conclure que

$R \approx 6{,}366197724.10^3$ et affirmer que tous les chiffres sont significatifs ?

D'abord un léger doute plane sur le dernier chiffre car nous ne pouvons pas encore nier que ce dernier chiffre puisse être un 1, un 2, un 3 ou un 5. Mais surtout notre affirmation ne s'entend que si nous redonnons à la calculatrice une partie de la confiance que nous lui avions retirée quand nous n'avions pas cru à la *valeur de tous les chiffres* (pour reprendre les termes employés par le manuel) qu'elle nous fournissait. Nous sommes confrontés à une contradiction qui décrédibilise la démarche. Il nous faudrait nous justifier sur deux interrogations : pourquoi valider la partie commune aux trois décimalisations effectuées par la calculatrice ? et pourquoi douter du dernier chiffre de $\frac{20\,000}{\pi}$ proposé par cette même calculatrice ?

Une piste s'offre à nous, qui ne nous fait pas quitter l'univers mathématique du manuel de 1975. Elle consiste à dire, dans l'ordre :

- que l'erreur absolue sur π est majorable par 5.10^{-11} (on peut se référer aux caractéristiques de la calculatrice données par le constructeur : la Casio 6800 G représente les nombres réels avec 12 chiffres significatifs donc l'erreur relative sur un nombre réel représenté en machine est inférieure à 10^{-11} ; plus pragmatiquement on peut constater que le π possède un chiffre en réserve : la calculatrice travaille en fait avec la valeur 3,1415926536).
- que l'erreur absolue sur $\frac{1}{\pi}$ est inférieure à 6.10^{-12} (nous pouvons majorer $\frac{5.10^{-11}}{\pi^2}$ ou bien utiliser le théorème suivant présent dans le manuel "l'incertitude relative sur l'inverse d'un nombre est la même que l'incertitude relative sur le nombre" [116])
- que l'erreur absolue sur R est inférieure à 2.10^{-7} (nous multiplions 6.10^{-12} par 20 000)
- que, par conséquent, pour la division de 20 000 par π, la calculatrice donne un résultat exact jusqu'au sixième chiffre après la virgule et peut-être même le septième qui est en réserve
- que le format d'affichage ne permettant de lire que les six premiers chiffres après la virgule, ces chiffres sont tous exacts y compris le dernier qui a été arrondi
- que les deux autres divisions, par leurs résultats ne font que confirmer l'exactitude des six premiers chiffres.

C'est en rendant visible l'incertitude avec laquelle la valeur approchée - fournie par la calculatrice - permet d'encadrer la valeur exacte du nombre R que nous avons pu prononcer la précision sur la décimalisation effectuée par la calculatrice. Nous nous sommes conformés aux exigences formulées par le manuel. Mais la pertinence mathématique du recours à la notion d'incertitude, même en présence active de la calculatrice, nous semble didactiquement intenable.

4.2 un délicat problème de transposition didactique

[116] Pensons que $\Delta\frac{1}{x} \approx \frac{1}{x^2} . \Delta x$

Nous avons en effet modifié profondément la structure praxéologique de la décimalisation opérée dans cet exemple car nous avons touché à la fois à sa partie technique et à sa partie technologique. Qu'on en juge :

- du côté technologique : plusieurs informations relatives aux performances calculatoires et graphiques de l'instrument sont injectées pour être combinées avec les énoncés relatifs à l'incertitude. Non seulement certaines de ces informations sont propres au matériel utilisé mais les théorèmes sur l'incertitude ne sont pas parmi les plus élémentaires (nous avons besoin de l'incertitude relative ou de la dérivée pour l'approximation affine)
- du côté technique : une seule division suffit, exécutée à peu de frais avec la calculatrice et sans avoir besoin de mettre en place d'encadrement mais des passages - dans les deux sens - des incertitudes absolues aux incertitudes relatives sont guère évitables.

Les choix de la contre-réforme l'obligent à organiser l'arrivée de la calculatrice dans la classe de Seconde. Nous pensons qu'ils n'ont pas offert à la décimalisation instrumentée les conditions écologiques capables de soutenir les modifications que nous venons de mettre en évidence.
Il aurait fallu tout à la fois :

- fournir des éléments théoriques sur la représentation des nombres réels dans une calculatrice. Or ces éléments sont à puiser dans l'Arithmétique des ordinateurs aux frontières de l'Informatique et de l'Analyse Numérique. Le problème écologique majeur est alors celui de l'insertion de ces éléments dans un corpus mathématique plus large. C'est ce que souligne Rajoson (198, page 135) :

> Pour être viable au sein d'un corpus de savoir (savant ou enseigné), un élément de savoir donné doit pouvoir y apparaître - selon des critères qui peuvent différer de l'un à l'autre types de régime épistémologique – comme partie d'un tout structuré.

- maintenir, voire étoffer le potentiel technologique de calculs sur les incertitudes absolues et les incertitudes relatives. Mais les orientations curriculaires des réformateurs ont fait glisser les calculs d'incertitudes dans l'étude du comportement local d'une fonction. Difficile alors de faire venir la notion d'incertitude relative
- définir des tâches qui fusionnent les éléments théoriques précédents dans un même complexe technico-technologique en les dotant d'une gamme d'exercices de calcul approché impliquant une calculatrice. Mais la diversité du matériel et son évolution technique très rapide rendent épineuse la conception d'exercices avec unicité des énoncés et des solutions, même si quelques notions communes peuvent être dégagées.

Les manuels de 1981 s'y sont essayés. Celui de la collection Thèmes mathématiques (Nathan, 1981) consacre deux chapitres entiers (sur 25) aux calculatrices. Le chapitre 3 (cf. document en Annexe) a pour titre "Possibilités et limites des calculatrices. Précision. Arrondi". Il développe principalement trois notions : la précision d'un nombre, la notation scientifique et la capacité d'affichage de la calculatrice.

> La précision d'un nombre s'exprime par le nombre de chiffres significatifs nécessaires à son écriture (page 32).

> Il est indispensable de bien maîtriser la notation scientifique et de savoir ramener grands nombres et petits nombres à cette notation (page 32).

> La capacité d'affichage est souvent inférieure à celle, interne, des registres de calcul (page 38).

> Deux nombres, en apparence identiques sur l'écran, peuvent différer par leurs décimales cachées. Cette différence peut se manifester à l'occasion d'un nouveau calcul. … Ceci montre qu'il est fortement conseillé, chaque fois que possible, de recopier les résultats intermédiaires de calcul et d'avoir ainsi à les entrer à nouveau à l'écran grâce au clavier. Il vaut mieux, chaque fois que cela est possible enchaîner les résultats de calcul ; la précision en est meilleure car les décimales non visibles ne sont pas perdues (page 36).

Ce dernier conseil est illustré sur un exemple qui montre sans démontrer puisque le manuel ne met pas en place la notion d'incertitude relative. Le manuel marque l'importance qu'il attache à ce conseil en proposant quelques exercices "d'utilisation optimale de l'écran" pour gagner de la précision dans les calculs effectués à la calculatrice. Mais il s'agit en fait de gagner des chiffres sans s'interroger sur l'exactitude des chiffres qu'on extorque à la calculatrice ! Cette tâche reste donc enfermée dans une Arithmétique de la calculatrice sans ouverture vers l'approximation numérique. On remarquera enfin que la pratique de la mise en mémoire n'est pas suggérée, certainement parce que les constructeurs de l'époque n'avaient pas généralisé cette fonctionnalité sur les calculatrices scientifiques non programmables.
Un autre manuel, celui de la collection Louquet (Colin, 1981) est moins disert sur les calculatrices. Dans le thème "Utilisation de la calculatrice" un court paragraphe parle de capacité d'affichage puis le manuel aborde le problème des valeurs approchées.

> Dans certains cas la calculatrice ne peut donner qu'une valeur approchée d'un nombre désiré. Peut-on du moins avoir une confiance absolue dans le résultat affiché par la calculatrice lorsque la capacité d'affichage de la calculatrice est dépassée ? La réponse est, hélas, négative.

Il présente l'exemple de 12^7 qui donne 35 831 790 chez une calculatrice et 35 831 808 chez une autre. Après une analyse sommaire, il conclut :

> Ne perdez pas confiance pour autant dans la calculatrice, mais restez quand même lucide ; aucun instrument n'est parfait et il importe de bien connaître les services qu'il peut nous rendre.

Nous ne saurons pas sur quoi fonder notre confiance. Le manuel présente aussi un thème "Erreurs et incertitudes" sans aller jusqu'à l'incertitude relative et surtout sans faire le lien avec les pratiques de décimalisation instrumentées par la calculatrice.

> *Il est clair que les manuels des débuts de la contre-réforme butent sur un délicat problème de transposition didactique : celui de fusionner, dans une praxéologie de décimalisation instrumentée par la calculatrice, ce qui vient de l'Arithmétique de l'ordinateur et ce qui vient du Calcul numérique approché.*

Ce problème de transposition didactique ne sera pas résolu dans les années qui suivront. Il va en fait se dissoudre dans le *contrat institutionnel actuel sur la décimalisation* autour de deux implicites :

- chaque pression de la touche $\boxed{\text{EXE}}$ d'une calculatrice fournit à l'écran un arrondi décimal du résultat du calcul édité ; c'est le *postulat instrumental* que le Collège a bâti et que nous avons déjà présenté
- la précision dont on a besoin à la fin d'un calcul est largement inférieure à celle que nous donne une calculatrice ; c'est le point de départ des pratiques de troncature.

> *Le contrat institutionnel actuel libère la décimalisation effectuée par la calculatrice des contraintes d'un contrôle sur l'exactitude des chiffres.*

Ce contrat élimine les interactions entre décimalisation et incertitude et, a fortiori, ne s'intéresse pas aux opérations sur les erreurs de calcul. Il offre à la calculatrice une autorité dans la production de données numériques qui échappe à tout questionnement fondé sur la notion d'erreur[117]. Par exemple tous les manuels affectionnent des petits exercices comme celui-ci (Hachette, collection Terracher, 1994, page 80) :

Exercice 14

Ptolémée, mathématicien grec du II^{e} siècle, utilisait comme valeur approchée de $\sqrt{3}$ le nombre :

$$\alpha = \frac{103}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3}.$$

En utilisant la calculatrice, chercher le nombre de décimales exactes ; en déduire la précision de cette approximation de $\sqrt{3}$ et s'il s'agit d'une valeur approchée par défaut ou par excès.

qui, dans la même logique qu'en Collège, ancrent la définition de la précision sur la manipulation (à base de troncatures) d'une décimalisation déjà effectuée (partiellement, certes mais suffisamment) par la calculatrice.
Nous sommes loin des exigences du manuel de 1976 lequel illustrait la fabrication d'une précision en éclairant la ou les incertitudes qui surviennent dans le déroulement de la décimalisation du fait même de la réalisation effective du calcul avec les moyens du bord. Avec la calculatrice ces exigences disparaissent du contrat institutionnel actuel car la notion de précision utile pour formaliser les pratiques de troncature et d'arrondi peut complètement s'y émanciper de la notion d'erreur et de majoration d'erreur.

Si la notion d'incertitude n'existe plus en tant qu'outil de traitement de l'erreur dans le calcul d'une valeur décimale approchée, elle reste présente, sans être nommée ainsi, pour alimenter les opérations sur encadrements. C'est ainsi que l'exercice suivant (Belin, 1994, page 158) :

---

117 Comment ne pas mettre en parallèle cette caractéristique avec les phénomènes de transposition didactique analysés dans la partie B et qui concernaient les tables ?

Exercice 15

34,2 est une valeur approchée exprimée en centimètres du périmètre d'un cercle à 0,1 près. Calculer une valeur approchée du rayon du cercle.
Avec quelle précision l'obtient-on ?

sera certainement traité par l'encadrement $\frac{34,1}{2\pi} \leq R \leq \frac{34,3}{2\pi}$. On en déduira, après intervention de la calculatrice, que :

$$R \approx 5,44 \text{ à } 2.10^{-2} \text{ près}$$

et, bien sûr, le π de la calculatrice est innocenté par avance de toute culpabilité dans la précision finale.
En fait, comme nous l'avons déjà souligné, les manuels maintiennent les manipulations d'encadrements en dehors de toute problèmatisation pour l'approximation décimale. Voici un exemple sans originalité (Nathan, 1995, page 56) :

Exercice 16

Une sphère a un rayon R (exprimé en centimètres) donné par l'encadrement
$1,37 \leq R \leq 1,38$.
Donnez un encadrement du volume de la sphère, en utilisant $3,14 \leq \pi \leq 3,15$.

Quel encadrement proposer une fois que l'on a exécuté à la calculatrice les expressions numériques $\frac{4}{3}.3,14.1,37^3$ et $\frac{4}{3}.3,15.1,38^3$? Choisira-t-on $10 \leq V \leq 12$ ou $10,7 \leq V \leq 11,1$ ou $10,76 \leq V \leq 11,04$ ou etc.? Les deux incertitudes initiales sont mises sur le même plan, regardées uniquement comme des encadrements et il n'est même pas question de demander une valeur approchée décimale avec une certaine précision ni de parler de chiffres significatifs.

5. Plus de tables numériques mais des tableaux de valeurs

L'éviction des tables numériques fut d'une rapidité fulgurante. Si certains manuels des débuts de la contre-réforme exposaient encore des extraits de tables, c'était à titre culturel, pour montrer des objets de musée. Puis les tables furent complètement oubliées.

Un autre objet, qui présente quelque parenté avec les tables, vit dans l'EMS : il s'agit du tableau de valeurs d'une fonction numérique.

Disons tout de suite que cet objet n'a aucune reconnaissance officielle. Pas un seul des programmes de la classe de Seconde, depuis 1981 ne mentionne son nom d'usage. Qui plus est, alors même que les manuels l'emploient couramment, ils ne le réfèrent jamais dans leurs index : "tableau de valeurs" n'a pas droit de citer entre tableaux de signes et tableaux de variations.

L'emploi du tableau de valeurs est variable. Certains manuels y recourent fréquemment pour amorcer une représentation graphique ou suggérer un tableau de variations, d'autres semblent minorer son rôle dans la construction graphique. Ce qui, par contre, ne souffre pas d'exception, c'est l'absence totale d'énoncés explicites sur la façon de fabriquer un tableau de valeurs.
L'examen des manuels fait apparaître trois constances dans la présentation des tableaux de valeurs :

- ils se présentent en ligne, de cette manière :

x	a	b	c	d	etc.				
f(x)	f(a)	f(b)	f(c)	f(d)					

- ils ordonnent en ordre croissant les valeurs de la variable x
- ils donnent des valeurs décimales de f(x) issues de la calculatrice.

Nous avons mis en Annexe des extraits de trois manuels de 1990 (documents 6, Volume 2).
Elles montrent que la production d'un tableau de valeurs destiné à la construction graphique suppose des connaissances sur la fonction que seul l'un des trois manuels cherche à éclairer. Par exemple, seule une appréciation, a priori, de la régularité de la fonction conduit à pratiquer un pas décimal pour les valeurs de la variable et à le modifier localement. Mais les choix peuvent diverger comme on peut le constater avec la même fonction $x \rightarrow \frac{1}{x^2 + 1}$ chez deux manuels différents (Transmath, Nathan et Terracher, Hachette).

Le choix de la précision à retenir sur f(x) est soumis aux mêmes appréciations implicites dont on peut simplement supposer qu'elles sont liées à certaines qualités du support matériel utilisé pour le tracé de la courbe et qu'elles devraient être abordées (en classe), au moment de la production effective du tableau et de la courbe (la courbe point par point, disent certains manuels).

De par son intervention dans la production d'un graphique, le tableau de valeurs n'est pas neutre dans des tâches qui exploitent ce graphique. Deux d'entre elles touchent à l'approximation d'un nombre :

- résoudre une équation du type f(x) = a ou f(x) = g(x)
- trouver l'optimum d'une fonction sur un intervalle

Elles sont désignées par les programmes sous la rubrique "Travaux pratiques" et sont abondamment travaillées par les manuels. Il apparaît communément deux attitudes (cf. documents 6 en Annexe, Volume 2) :

- ne pas toucher à la question de la qualité de l'approximation en se contentant d'un $x \approx b$ dans l'une ou l'autre des tâches, sans revenir sur le tableau de valeurs soit pour le compléter soit pour en exploiter les valeurs déjà présentes (par exemple, par une interpolation linéaire).
- faire découvrir une résolution algébrique de la tâche, ce qui suppose, bien entendu, que l'exemple s'y prête (et donc ait été apprêté pour cela).

L'approximation retourne donc soit dans l'approximatif soit dans le contrat numérico-algébrique.

> *La possibilité offerte par la forme tabulaire de s'engager dans une voie que nous appellerions numérico-analytique n'est pas exploitée. Nous retrouvons ici le phénomène d'arrêt de la transposition didactique de la notion de fonction dans l'EMS.*

Le tableau de valeurs, comme la table numérique, solidarise les valeurs connues et la découverte de cette solidarité pourrait participer à construire le concept de fonction.
Son usage institutionnel en classe de Seconde actuelle a été étudié dans un travail didactique récent[118]. Dans la conclusion, on peut lire :

> Nous avons pu constater que, lorsque cette étude n'est pas mentionnée dans l'énoncé de l'exercice, les élèves n'étudient pas de façon spontanée le sens de variation de la fonction, cela étant bien prévu par les enseignants que nous avons interrogés ; ils auraient ainsi tendance plutôt à se tourner vers la construction d'un tableau de valeurs, outil qui leur permet de dégager une certaine connaissance de la fonction étudiée sans passer par le travail algébrique que nécessite l'étude classique du sens de variation. Cette importance donnée au tableau de valeurs par les élèves ne nous semble pas bien appréhendée par les enseignants, qui attendent peut-être que les élèves ne le considèrent que comme un outil auxiliaire (de conjecture) de la connaissance des fonctions. De façon plus générale, nous avons pu constater les réticences des élèves à se placer de leur propre initiative dans le cadre fonctionnel et notamment à traduire une relation de dépendance entre deux grandeurs en termes de fonction, en utilisant les notations fonctionnelles (page 75).

[118] *Une étude sur les notions de variable réelle et d'intervalle numérique relativement à l'enseignement de la notion de fonction en classe de Seconde*. Mémoire de DEA, Teissier, 1998.

Si les réticences sont fortes à entrer dans le cadre fonctionnel par la voie algébrique malgré l'attente des enseignants, elles le sont encore plus par la voie analytique puisque l'institution ne les y prépare pas.
Désignons par numérisation décimale d'une fonction numérique toute organisation praxéologique qui donne à voir et à faire des ensembles de valeurs décimales exactes ou approchées prises par la fonction. L'existence d'une telle praxéologie dans l'EMS est au cœur de notre questionnement sur l'approximation numérique.
Ce que nous venons d'analyser autour du tableau de valeurs nous révèle que la numérisation décimale existe isolément, grâce à la calculatrice, pour chaque fonction usuelle de la classe de Seconde mais que l'EMS ne crée pas les conditions d'une unification de ces formes praxéologiques naissantes dans le cadre de l'Analyse.
On peut par contre imaginer d'autres usages du tableau de valeurs qui se placeraient mieux dans une Analyse porteuse des problèmes d'approximation numérique. Le professeur de seconde qui se désole devant les premières paraboles à sommet pointu pourrait travailler la numérisation de la fonction en emboîtant un tableau de valeurs plus fin dans le premier tableau ? Depuis quelques années, même les calculatrices de bas de gamme disposent de commandes pour produire un tableau de valeurs d'une fonction (cf. documents 8 en Annexe, Volume 1), avec un pas et une précision paramétrables. Une telle technique instrumentée qui ne fait pas concurrence au graphique mais le complète pourrait servir de point d'ancrage d'une étude locale de la fonction.

6. Premières conclusions pour la classe de Seconde

Chacune des décisions de la noosphère à partir de 1984 a affermi l'autorité mathématique de la calculatrice dans les calculs approchés, réduit le rôle de la majoration d'erreur et affaibli conséquemment celui de la valeur absolue dans ces mêmes calculs.

> *Le contrat institutionnel dans cette classe relativement aux calculs numériques approchés s'est établi sur une baisse du niveau trophique de l'approximation numérique décimale par rapport à celui qu'avaient envisagé les réformateurs. L'approximation vit essentiellement de quasi-égalités décimales régies par la praxéologie de décimalisation héritée du Collège.*

C'est cette praxéologie qui continue de déclencher l'essentiel des procédures de calcul approché, lesquelles ignorent le plus souvent les objets encadrement, intervalle et valeur absolue. Ceux-ci, bien qu'ils soient présentés dans les déclarations officielles et dans les manuels comme des moyens privilégiés d'entrer dans des problèmes d'approximation numérique, intègrent des praxéologies faiblement connectées avec celle de la décimalisation. Ils ne participent qu'à quelques tâches très ponctuelles avec le minimum de formalisation algébrique sans être intégrés suffisamment et pertinemment à l'habitat dans lequel ils pourraient devenir des outils de l'approximation numérique, à savoir l'étude des fonctions numériques.

Remarque sur un problème institutionnel que nous n'aborderons pas de front ici : en s'affranchissant, en classe de Seconde, de la notion d'erreur, l'institution EMS met fin à un compagnonnage, entre l'approximation numérique et le traitement numérique des mesures concrètes de grandeurs physiques, qu'avait tenté d'établir la réforme des mathématiques modernes en classe de Seconde. Il pouvait s'appuyer sur les notions d'erreur absolue et d'erreur relative.

Nous sommes maintenant aux portes de la classe de Première. L'appréciation que nous portons sur l'apport de la classe de Seconde dans l'évolution du contrat institutionnel relatif au calcul numérique approché rejoint les conclusions de Kuntz dans l'article déjà cité (1998) :

> Beaucoup de lycéens (de Seconde) se contentent de laisser passer l'orage, se disant qu'il est de courte durée. L'expérience semble leur donner raison. À cause de sa difficulté et de la résistance des élèves, de nombreux enseignants traitent cette partie (encadrements et approximation) honnêtement, mais sans zèle excessif. Ils se gardent d'insister sur le bouleversement qu'elle annonce : l'orage n'est pas isolé, il inaugure une longue saison des pluies qui s'affirmera en Première et se généralisera en Terminale !

La description que fait Kuntz de l'attitude des élèves et enseignants mérite notre attention. Quelles réalités didactiques recouvre cette appréciation elliptique - "traitement honnête mais sans zèle excessif" - portée sur les décisions des enseignants ?

> *Comme pour la classe de Troisième, ressurgissent les questions qui ont trait à ce que nous pourrions appeler le travail du contrat institutionnel au sein de la classe, c'est-à-dire la façon dont il modèle les comportements de ceux – l'élève et l'enseignant - qui sont engagés ensemble dans une relation didactique aux objets liés par ce contrat.*

En mettant en regard les programmes et les réalisations didactiques des manuels, nous avons pu décrire et caractériser les rapports institutionnels aux objets calculatrice et approximation numérique décimale. Ces rapports déterminent pour une large part la façon dont peut vivre dans une classe de Seconde un problème d'approximation numérique, en imposant aux acteurs humains de la classe de mathématiques un champ de contraintes mais aussi en leur offrant un espace de libertés sujet à négociations entre eux.

Dans les paragraphes qui suivent nous abordons donc ces questions du travail du contrat institutionnel dans la classe elle-même. Nous revenons d'abord sur le problème du calcul approché de $\sqrt{2}$ et nous montrons qu'il ne peut que survivre dans la classe de Seconde actuelle, ce qui explique ce que décrit Kuntz dans son article. Puis nous nous intéressons à deux problèmes d'approximation dans un calcul trigonométrique. Comment l'enseignant leur prête-t-il vie dans la classe de Seconde et comment l'élève répond-il aux attentes de l'enseignant ?

7. Trois contraintes très coercitives en classe de Seconde

Revenons donc au problème du calcul approché de $\sqrt{2}$, tel qu'il a été présenté par le manuel Terracher aux élèves de Seconde (cf. document 1 des annexes, Volume 1). Nous voyons maintenant au moins trois contraintes qui sont autant de barrages écologiques à la vie de ce problème dans la classe de Seconde actuelle.

7.1 la première contrainte

est l'absence d'une construction topologique de l'ensemble des nombres réels qui rende compte d'un nombre réel sous la forme d'une suite numérique convergente vers ce nombre, en particulier de son ou de ses deux développements illimités décimaux. D'ailleurs les expressions "nombre réel" et "développement décimal illimité" ne figurent pas au libellé du programme. Cette absence laisse se développer une topologie naïve faite exclusivement :

- de la représentation géométrique d'un nombre réel par un point d'une droite graduée et orientée (la droite numérique). À travers des images[119] graphiques pour les encadrements et les distances, celle-ci assimile continuum numérique et continuum graphique. Le dérapage du manuel Terracher que nous avons mis en évidence ci-dessus prouve que l'exploitation visuelle de l'image tend à négliger le travail algébrique et certaines exigences d'une construction fiable de l'algorithme ;
- d'une vision de la décimalisation illimitée reconnue dans une seule réalisation, celle de l'algorithme du quotient décimal sur les nombres rationnels qui, certes, introduit de façon calculatoire la notion de suite décimale convergente vers un nombre mais en la restreignant à une certaine forme et pour certains nombres réels (en fait certains nombres non décimaux).

En limitant les possibilités de concevoir la valeur exacte et de disposer d'elle à travers une suite de ses valeurs approchées, cette contrainte maintient le couple valeur exacte-valeur approchée dans le mode de fonctionnement issu du Collège. Or ce mode de fonctionnement contrarie l'homogénéisation de R. On dira, par exemple, que 3 est une valeur approchée de 3,2 mais pas que 3,2 est une valeur approchée de 3. Il exclut tout appui théorique à la construction, la reconnaissance ou l'exploitation d'un nombre à partir de ses approximations décimales.
Plus généralement cette contrainte conditionne fortement l'entrée de l'approximation numérique dans le champ de l'Analyse en s'opposant à la rupture épistémologique que de nombreux travaux de didactique des mathématiques ont mise en évidence et que Legrand (Repères Irem n°20, pages 121 à 124) décrit ainsi :

> Comprendre qu'un système de majorations et de minorations peut aboutir à des résultats exacts et admettre cette philosophie au point de 'perdre de l'information' en remplaçant de son propre chef, dans la résolution d'un problème, un calcul exact par une majoration ou une minoration, cela constitue un obstacle épistémologique crucial dès la classe de seconde. Ne pas le franchir verrouille l'accès au sens de l'Analyse : on n'en comprend que l'aspect algébrique.

7.2 la seconde contrainte

est justement la faiblesse de l'appareil algébrique, faiblesse qui, dans notre exemple, dénature la méthode d'approximations successives en la présentant seulement comme une curiosité (historique ou numérique) plutôt que de la transformer en une nouvelle façon de "calculer un nombre" basée justement sur la recherche d'une suite convergente

[119] Le programme insiste sur le contenu intuitif et concret donné ainsi aux objets mathématiques.

vers ce nombre à partir de ce que l'on connaît de ce nombre. Par trois fois la volonté du programme de restreindre l'intervention de l'outil algébrique repousse cette transformation :

- une première fois dans l'exploitation de la relation fonctionnelle (ici $x^2 = 2$ avec $x > 0$) pour la transmuer progressivement en un ensemble de trois autres relations :

$$x = \lim_{n \to \infty} u_n \; ; \; |u_n - x| \leq v_n \text{ et } \lim_{n \to \infty} v_n = 0.$$

  Cette transmutation peut certes se mener dans plusieurs cadres (le cadre géométrique en utilisant un carré, le cadre algébrique en utilisant le développement binomial[120], le cadre analytique en utilisant une fonction[121], etc.). Mais quel que soit le cadre choisi, elle ne peut se passer d'un appareillage algébrique pour fabriquer, représenter et instrumentaliser deux objets : un algorithme qui réalise la succession des termes un et une suite v_n de majorants des distances $|u_n - x|$ qui tend vers zéro. Et au cœur de cet appareillage algébrique on trouve la relation fonctionnelle - le mot fonction est ici à rattacher à l'objet mathématique fonction, même s'il n'intervient pas lui-même
- une deuxième fois dans la mise au point du test d'arrêt. En effet, pour concurrencer les techniques instrumentées issues du Collège, l'ambition de la méthode ne doit pas porter sur quelques décimales de x. Il faudrait faire valoir l'intérêt que l'on a de posséder cet algorithme, par exemple par l'assurance théorique de moduler à souhait la précision sur x en arrêtant l'algorithme au bon moment : c'est le problème du test d'arrêt qui nécessite de résoudre algébriquement des inégalités.
- une troisième fois dans le regard sur les performances de l'algorithme. L'édition 1987 du manuel Terracher complétait la présentation de l'algorithme de Babylone par la comparaison des erreurs commises lors de deux étapes successives (cf. document 2 des annexes, Volume 1). Ce travail a été abandonné dans les éditions ultérieures. Là encore il est impossible d'échapper à une formalisation algébrique si on veut ne pas en rester à la contemplation des résultats décimaux affichés par la calculatrice.

Cette deuxième contrainte traduit la place institutionnelle du "travail algébrique" dans l'introduction des premiers concepts de l'Analyse. Comme nous l'avons déjà noté, l'institution a fait le choix de valoriser l'entrée graphique dans l'Analyse en classe de seconde et d'abaisser fortement les exigences de manipulation algébrique de l'expression analytique de la fonction.

7.3 la troisième contrainte

[120] Cf.Théon d'Alexandrie et Héron d'Alexandrie pour des encadrements par rationnels ou l'algorithme de la potence pour des encadrements décimaux. On trouve de nombreux documents historiques accompagnés de commentaires dans *Histoire d'Algorithmes* (opus déjà cité).

[121] Par la méthode de Newton (fonction $x^2 - 2$) ou méthode du point fixe (fonction 2/x)

est la rémanence, dans tout calcul numérique, des pratiques de décimalisation issues du Collège. Nous avons déjà montré que, dans ces pratiques, la production effective des premiers chiffres de l'écriture décimale d'un nombre ne participe pas de l'enjeu mathématique sur l'existence du nombre et la constructibilité de ses approximations décimales. Les conduites calculatoires qui s'y conforment reçoivent donc de l'affichage par la calculatrice[122] ce qu'elles considèrent être la réponse attendue et exploitable en l'état.
Cette contrainte maintient un rapport instrumental au calcul numérique qui entre en conflit avec l'enjeu mathématique du "nouveau" calcul approché : l'action de la calculatrice devrait s'intégrer au calcul sans se substituer à lui. De plus elle obscurcit le rôle de l'erreur dans ce calcul. En effet coupler la recherche théorique du couple (u_n, v_n) avec la recherche effective des décimales successives fait surgir deux tâches qui sont distinctes mais ne sont pas indépendantes : celle de décimaliser u_n et v_n et celle d'analyser l'accumulation des erreurs d'arrondi dans ces décimalisations en une deuxième erreur (erreur de calcul) qu'il faut conjuguer avec l'erreur de méthode. Seuls quelques algorithmes très particuliers comme ceux des quotients et racines carrées de décimaux (que nous appellerons *algorithmes décimaux*) construisent les termes u_n et v_n en écriture décimale. En dehors de ces algorithmes la calculatrice doit assurer "l'intendance calculatoire" en décimalisant la suite (u_n) mais cette décimalisation ne donne accès aux premiers chiffres de l'écriture décimale du nombre (poursuite de l'appel au postulat instrumental) qu'après évaluation décimale des erreurs de méthode et de calcul.

8. Un test centré sur les calculs trigonométriques

Retournons en Trigonométrie et reformulons les questions que nous avions déjà abordées avec la classe de Troisième (cf. chapitre C1) pour les calculs numériques dans ce domaine : quel contrat didactique les enseignants parviennent-ils à faire fonctionner sur l'approximation numérique décimale et ses liens avec la calculatrice. Que disent-ils qui concerne la qualité de l'approximation numérique décimale et que demandent-t-ils aux élèves ? Sur quels éléments mathématiques s'appuient-t-ils pour garder le contrôle d'un résultat décimal obtenu avec la calculatrice ? Quelles pratiques instrumentales de décimalisation cherchent-t-ils à mettre en place ?

> *Nous avons confectionné, pour des classes de Seconde, un test composé de huit exercices. Nous partons de l'hypothèse que les manières de faire de l'élève dans certaines tâches sont des traces de techniques et de technologies enseignées.*

L'élaboration du test est donc doublement motivée. Nous espérons tout à la fois :

- pouvoir disposer, sur quelques types de calculs trigonométriques, d'observations sur les procédures employées par les élèves que nous intègreront à l'analyse des rapports institutionnels d'élèves de Seconde ;
- pouvoir interroger, en partant des exercices proposés à leurs élèves, les professeurs des classes testées et dégager des rapports institutionnels

[122] En lycée cet affichage ne concerne pas seulement l'écran de l'éditeur de calculs (souvent appelé HOME) mais aussi celui de l'éditeur de graphiques ou celui des tableaux. de valeurs.

d'enseignants aux objets mathématiques et aux objectifs d'enseignement liés aux calculs trigonométriques.

On trouvera en Annexe (documents 7 et 8, Volume 1) l'ensemble des exercices et les commentaires destinés aux enseignants.

Une enquête rapide et informelle menée avant la confection du test nous avait appris que la Trigonométrie n'était abordée qu'en fin d'année scolaire et que, généralement, les enseignants procédaient à des retours sur la Trigonométrie du triangle rectangle[123]. Les instructions officielles les y incitent car, disent-elles :

> Une bonne articulation entre le Collège et la Seconde constitue un enjeu capital (programme de 1990)

Et le texte du programme appuie explicitement ces initiatives :

> On s'assurera que les élèves maîtrisent les relations trigonométriques dans le triangle rectangle

Nous avons donc choisi des exercices qui relèvent de savoir-faire pointés dans les programmes de la classe de Troisième et présents dans les rappels opérés par les manuels de Seconde. Voici les plus importants d'entre eux :

- calculer une longueur ou un angle à partir d'autres longueurs et/ou d'autres angles connus, dans des configurations géométriques simples (triangles rectangles apparents ou faciles à faire apparaître) ;
- comparer des longueurs, comparer des angles (égalité, non-égalité, quasi-égalité, etc...) avec ou sans calculs de mesures ;
- obtenir les valeurs trigonométriques exactes ou approchées pour un angle aigu dont la mesure est donnée en degrés décimaux ; savoir utiliser la calculatrice, les rapports de longueurs dans un triangle rectangle, la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, les tableaux numériques.

Mais nous avons aussi fait en sorte que, dans chacun des exercices, l'élève soit confronté à un problème d'approximation numérique décimale, soit avec la calculatrice soit sans calculatrice.

> *Le test a été passé par 135 élèves de 5 classes de Seconde réparties sur plusieurs lycées de l'Académie de Grenoble.*

[123] Nous laissons ici de côté la partie de la Trigonométrie qui a trait aux fonctions circulaires. Nous y revenons dans le chapitre C_3 (paragraphe 6.1) et dans le chapitre D_1 (paragraphe 2.4).

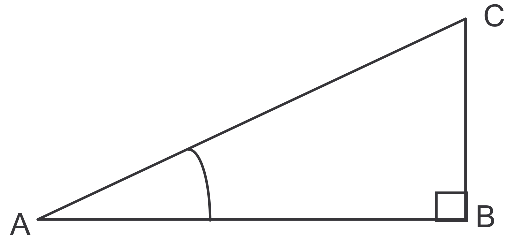
L'analyse que nous produisons ci-après ne concerne directement que deux de ces exercices :

- le premier nous permet de revenir sur la gestion des résultats intermédiaires dans les calculs approchés et d'apprécier les évolutions dans le contrat didactique par rapport à la classe de Troisième
- l'autre nous offre un questionnement plus proche de l'enseignement de l'Analyse.

8.1 voici le premier exercice, pour lequel la calculatrice est autorisée :

Exercice 17

Dans un triangle ABC, rectangle en B, tel que celui dessiné ci-dessous, on connaît les longueurs BA et BC ; BA = 3,92 et BC = 1,13. On note Â l'angle BÂC.



Calculer cos(Â)	*Réponse* :	
Que vaut Â, en degrés, arrondi à 10^{-2} ?	*Réponse* :	

Avec cet exercice, nous sommes bien sur les interrogations qu'avait suscitées l'examen approfondi d'un exercice du manuel Pythagore en classe de Troisième et celui du Brevet Blanc (exercices 4 et 5, dans la partie C_1). Reformulons les questions : comment, dans un calcul approché comportant un affichage-papier intermédiaire - que cet affichage émane d'une demande de l'enseignant ou d'une initiative de l'élève - le résultat intermédiaire est-il présenté puis repris dans la poursuite du calcul avec la calculatrice ? Sur quelles notions d'erreur et de répercussion de ces erreurs dans les calculs, l'activité calculatoire de l'élève est-elle fondée ?

L'exercice comporte des tâches que les élèves de Seconde reconnaîtront comme des calculs trigonométriques puisqu'ils concernent l'angle d'un triangle rectangle dont deux côtés sont donnés. Mais nous opérons une rupture avec les pratiques institutionnelles repérées dans les manuels de Troisième et les sujets de Brevet puisque nous n'imposons pas la précision du premier résultat demandé, créant ainsi un espace plus large pour la propagation de l'erreur dans le calcul suivant. De plus nous faisons venir un résultat intermédiaire (celui de cosÂ) avant le calcul de l'angle Â alors que cet angle est directement accessible par $\tan^{-1}\frac{1,13}{3,92}$. Bien sûr l'élève peut prendre l'initiative d'autres résultats intermédiaires.

Pour réaliser ces tâches, les techniques présentées par les manuels de Seconde (cf. documents 9 en Annexe, Volume 2) sont calquées sur celles de la classe de Troisième (techniques T_1 et T_2 décrites dans le paragraphe 4 du chapitre C_1), dont nous avons dit qu'elles étaient parfaitement intégrées à la praxéologie de décimalisation du Collège. Elles sont ici applicables dans les deux enchaînements, E1 et E2 :

$$\text{E1} : AC^2 = 3{,}92^2 + 1{,}13^2 = 16{,}6433 \;;\; AC = \sqrt{16{,}6433} \;;\; \cos\hat{A} = \frac{3{,}92}{\sqrt{16{,}6433}} \;;\; \hat{A} = \cos^{-1}\frac{3{,}92}{\sqrt{16{,}6433}}$$

et

$$\text{E2} : \hat{A} = \tan^{-1}\frac{1{,}13}{3{,}92} \;;\; \cos\hat{A} = \cos(\tan^{-1}\frac{1{,}13}{3{,}92})$$

à condition de(re)créer des ordres adaptés à l'entrée linéaire dans la calculatrice et surtout de gérer les résultats intermédiaires (en plaçant ou pas des parenthèses supplémentaires).

Avant de procéder à l'analyse a priori des réponses des élèves, expliquons-nous sur le choix des données initiales dans D_2 : lorsque le cosinus d'un angle sert à produire l'angle, nous avons constaté dans les manuels que son affichage décimal approché comportait toujours plus de 3 chiffres[124]. Nous devons donc nous attendre, de la part de l'élève, à des affichages-papier de x (c'est-à-dire $\cos\hat{A}$) comportant au moins deux chiffres. Si ces chiffres sont exacts et réutilisés tels quels, l'erreur sur $\cos^{-1}x$ (c'est-à-dire $\hat{A}$) ne sera pas visible dans une réponse à 1 près ou à 10^{-1} près. En conséquence, nous décidons de porter notre demande à 10^{-2} près (et nous augmentons notre sécurité en choisissant un angle "pas trop grand"). Certes une telle précision sur l'angle est institutionnellement inhabituelle mais elle est aussi institutionnellement acceptable lorsque les données numériques initiales ont le même degré de précision.

Analyse a priori

Finalement nous ne nous écartons que très légèrement des choix institutionnels rencontrés dans les manuels et les sujets d'examen de la fin de Troisième. Nous nous attendons donc, de la part des élèves, à des procédures mises au point lors d'exercices semblables et plus ou moins rattachées à des techniques enseignées dans la classe de Seconde ou celle de Troisième.
Plus précisément nous nous attendons aux découpages en blocs successifs encastrés suscités par les enchaînements E1 et E2, à savoir :

$$AC^2 \rightarrow AC \rightarrow \cos\hat{A} \rightarrow \hat{A}$$

ou

124 Cette attitude nous semble héritée des pratiques tabulaires. Elle peut aussi se justifier par le fait qu'on peut , avec trois chiffres, déduire l'angle à 1° près sans trop prendre de risques.

En effet, $\Delta(\cos^{-1}x) \approx \dfrac{-180}{\pi\sqrt{1 - x^2}}.\Delta x$ et avec $|\Delta x| < 0{,}001$ il faudrait prendre x très proche de 1 pour craindre $|\Delta(\cos^{-1}x)| > 0{,}5$

$$\frac{CB}{AB} \rightarrow \hat{A} \rightarrow \cos\hat{A}$$

La première question, avec l'enchaînement E1 (le plus probable) porte sur $\frac{3,92}{\sqrt{3,92^2 + 1,13^2}}$. D'une part, comme nous l'avons déjà dit, le calcul direct sur calculatrice oblige à (re)placer des parenthèses et à (re)créer des ordres adaptés à l'entrée linéaire dans la calculatrice, d'autre part, nous sommes dans un contexte de Géométrie métrique. Le calcul de AC et la transformation de $\sqrt{3,92^2 + 1,13^2}$ en un nombre décimal devraient être vus comme un passage obligé dans le contexte de la Trigonométrie du triangle rectangle. Nous avons mis deux chiffres après la virgule dans les données, nous pouvons donc nous attendre à deux chiffres après la virgule pour AC (AC = 4,07 ou 4,08).
Reste la division de 3,92 par AC : l'élève cherchera-t-il à maîtriser la propagation de l'erreur commise sur AC au moment de l'affichage[125].

Détaillons et classons les procédures les plus probables que pourraient employer les élèves :

> **1.** le découpage en blocs et le choix systématique de deux chiffres dans l'affichage-papier et le calcul :
> > par troncature systématique : AC = 4,07 et $\cos\hat{A} = \frac{3,92}{4,07} = 0,96$ (≈ peut remplacer =)
> > par arrondi systématique : AC = 4,08 et $\cos\hat{A} = \frac{3,92}{4,08} = 0,96$ (ou ≈ à la place de =)

Même si ces procédures ne donnent pas ici des résultats désastreux, loin s'en faut, elles ne peuvent prétendre émaner de techniques qui assurent le contrôle du résultat décimal. Il suffit pour s'en convaincre de regarder ce qu'elles donneront pour $\cos^{-1}(\cos\hat{A})$.
Si les recommandations professorales s'inspirent des pratiques calculatoires rencontrées dans les manuels[126], la procédure de l'arrondi systématique devrait être préférée à celle de la troncature. De toute façon,

> *l'une et l'autre ou toute combinaison des deux peuvent émaner d'**un premier théorème en acte (Th.a n°1)** : toute fonction conserve la précision, c'est-à-dire que les précisions sur x et sur A(x) sont les mêmes, quels que soient l'opérateur A et le nombre x.*

> **2.** le découpage en blocs et l'utilisation de plus de chiffres dans le calcul que dans l'affichage
> on écrit par exemple AC = 4,07 ou 4,08 ; puis on calcule $\cos\hat{A}$ avec 4,079 ou 4,0796 etc. et l'on rediminue le nombre de chiffres dans l'affichage de $\cos\hat{A}$. Cela donne $\cos\hat{A}$ = 0,96 ou 0,960 ou 0,961 etc.

---

[125] Le passage de AC^2 à AC suit le même scénario mais AC^2 n'est pas une longueur et le nombre décimal 16,6433 devrait être lu comme une valeur exacte.

[126] Bien que l'intérêt de l'arrondi dans l'affichage-papier par rapport à la troncature ne donne pas lieu à des explications formulées en termes de division par 2 le plus petit majorant de l'erreur.

2bis. le découpage en blocs et l'utilisation "poussée à l'extrême" de plus de chiffres dans le calcul que dans l'affichage (tous les chiffres affichés par la calculatrice ou même tous les chiffres de la calculatrice grâce à une mise en mémoire suivie d'un rappel de mémoire).

Ces procédures ne peuvent prétendre, non plus, provenir d'une technique qui contrôlerait le résultat décimal même si la deuxième, avec le postulat instrumental et pour les calculs usuels de notre institution, est rarement mise en défaut.

> *L'une comme l'autre peuvent être fondées sur* ***un deuxième théorème en acte (Th.a n°2)*** *: toute fonction A diminue la précision et, pour s'assurer une certaine précision sur A(x), il suffit de prendre une précision plus grande sur x.*

L'ennui pour cette condition suffisante est que la précision à prendre sur x n'est pas facile à déterminer et surtout qu'elle est invalidée lorsqu'on ne travaille pas dans un intervalle de monotonie de A. Mais le domaine de validité de ce théorème en acte est tel que la procédure 2bis permet d'obtenir d'excellents résultats pour tous les calculs numériques que l'institution donnera à faire. Certains manuels signalent cette procédure sans l'installer dans une technique, laquelle nécessiterait un apprentissage de schèmes d'usage nouveaux (mise en mémoire, touche Ans...).

3. le découpage en blocs et des encadrements successifs : ici, sur deux chiffres, on écrit $4{,}07 \leq AC < 4{,}08$ donc $\frac{3{,}92}{4{,}08} < \cos\hat{A} \leq \frac{3{,}92}{4{,}07}$ d'où l'on tire $0{,}960 \ldots < \cos\hat{A} \leq 0{,}963 \ldots$ puis $\cos\hat{A} = 0{,}96$ à 10^{-2} près par défaut.

Cette procédure s'inscrit dans une technique qui maîtrise la précision du résultat final et minimise le recours au postulat instrumental. Le passage entre encadrements peut faire appel à des théorèmes sur "ordre et opérations" ou à des théorèmes sur la monotonie des fonctions.

4. pas de découpage effectif en blocs mais l'entrée dans l'éditeur de la calculatrice de l'écriture $3{,}92 \div \sqrt{3{,}92^2 + 1{,}13^2}$ puis affichage de $\cos\hat{A}$ avec plus ou moins de chiffres.

En résumé, il s'avère que sur cette première question la réponse 0,96 ou 0,96… avec plus ou moins de chiffres derrière le chiffre 6 devrait être largement majoritaire.

La deuxième question porte sur Â, qui peut être vu soit comme $\cos^{-1}\left(\frac{3{,}92}{\sqrt{3{,}92^2 + 1{,}13^2}}\right)$ soit comme $\tan^{-1}\frac{1{,}13}{3{,}92}$. L'ordre des questions incite à l'utilisation de $\cos^{-1}$ et à vérifier par $\tan^{-1}$. On peut retrouver les mêmes procédures que pour la première question :

1. troncatures ou arrondis sur deux chiffres : $\hat{A} = \cos^{-1}0{,}96 = 16{,}26$

2. utilisation de plus de chiffres dans le calcul que dans l'affichage : les réponses sont diverses et peuvent manifester la préférence pour l'arrondi à la place de la troncature systématique :
$\hat{A} = \cos^{-1}0{,}963 = 15{,}63$; $\hat{A} = \cos^{-1}0{,}961 = 16{,}05$; $\hat{A} = \cos^{-1}0{,}9608 = 16{,}10$ ou $16{,}09$; $\hat{A} = \cos^{-1}0{,}96087 = 16{,}08$; etc.

2bis. idem mais avec tous les chiffres de la calculatrice : $\hat{A} = 16{,}08$

3. encadrements : ici, sur deux chiffres, on écrit $\cos^{-1}0{,}97 < \hat{A} \leq \cos^{-1}0{,}96$ donc d'où l'on tire $14{,}0... < \hat{A} \leq 16{,}2...$ce qui ne permet pas de conclure à 10^{-2}

4. entrée d'un bloc dans la calculatrice : $\cos^{-1}(3{,}92 \div \sqrt{3{,}92^2 + 1{,}13^2}\ ) = 16{,}08$ ou $\tan^{-1}(1{,}13 \div 3{,}92) = 16{,}08$.

N'oublions pas que seules les procédures **2bis** et **4** donnent la bonne réponse ($\hat{A} = 16{,}08$) et que la procédure **3** oblige à revenir sur le calcul de $\cos\hat{A}$.

Analyse a posteriori

Pour construire cette partie de notre analyse, nous avons choisi des observables qui nous renseignent sur les procédures employées par les élèves. Outre les résultats dans les encadrés, voici ce que nous avons recherché dans les copies des élèves :

- le nombre de chiffres après la virgule dans l'écriture décimale de AC^2 (si AC^2 est affiché de cette manière)
- le nombre de chiffres après la virgule dans l'écriture décimale de AC (si AC est affiché de cette manière)
- le nombre de chiffres après la virgule dans l'écriture décimale de $\cos\hat{A}$ (si $\cos\hat{A}$ est affiché de cette manière)
- les choix faits entre troncature et arrondi s'ils sont visibles
- la présence ou l'absence d'unités de longueur
- l'annonce d'une valeur approchée par un marqueur symbolique (par exemple le signe ≈, accompagné ou non d'une précision, ou par des points de suspension comme ...)
- l'annonce de $\cos\hat{A}$ sous une forme exacte comme $\frac{3{,}92}{\sqrt{3{,}922 + 1{,}132}}$ ou comme $\tan^{-1}\frac{1{,}13}{3{,}92}$
- la distinction entre l'affichage de AC^2 et sa reprise dans le calcul de AC : AC est-il obtenu à partir de la racine carrée du AC^2 affiché ? sinon, avec plus ou moins de chiffres ?
- la distinction entre l'affichage de AC et sa reprise dans le calcul de $\cos\hat{A}$: $\cos\hat{A}$ est-il obtenu à partir du quotient de 3,92 par la valeur affichée de AC ? etc.
- la distinction entre l'affichage de $\cos\hat{A}$ et sa reprise dans le calcul de $\hat{A}$: $\hat{A}$ est-il obtenu à partir de $\cos^{-1}$ de la valeur affichée de $\cos\hat{A}$? etc...
- l'inversion de l'ordre des réponses par rapport à celui des questions : $\cos\hat{A}$ est-il obtenu à partir de $\hat{A}$ lui-même obtenu par la tangente ?

Nous avons particulièrement regardé si l'élève opérait une distinction entre l'affichage d'une valeur (AC^2, AC, $\cos\hat{A}$ ou $\hat{A}$) et sa reprise dans le calcul suivant.

Retenons d'abord que :

1) 124 élèves (92 %) fournissent une réponse à la première question. Les réponses se répartissent ainsi :

0,96 (avec = ou ≈)	**0,96 …** (le 6 est suivi d'autres chiffres)	**Autres**[127]
49	38	37
39 %	31 %	30 %

Nous avons confirmation de l'attrait qu'opère le nombre de chiffres de l'énoncé. Le comportement calculatoire de l'élève est dominé par le théorème en acte (Th.a n°1) :

2) 121 élèves (90 %) apportent une réponse à la deuxième question. Les cheminements calculatoires se répartissent ainsi :

E1	**E2**	**Autres**[128]
77	16	28
64 %	13 %	23 %

et les réponses ainsi :

16,26 ($= \cos^{-1}0{,}96$)	**16,08** (la bonne réponse)	**15,60 ou15,6**	**16,09 ou16,10 ou 16,1**	**Autres**
31	28	17	10	35
26 %	23 %	14 %	8 %	29 %

Nous ne sommes pas étonnés que la procédure calculatoire la plus fréquente soit :

$$AC^2 = 3{,}92^2 + 1{,}13^2 = 15{,}3664 + 1{,}2769 = 16{,}6433 \; ; \; AC = \sqrt{16{,}6433} = 4{,}08$$

$$\cos\hat{A} = \frac{3{,}92}{4{,}08} = 0{,}96 \text{ puis } \hat{A} = 16{,}26$$

Par contre l'importance prise par la réponse 15,60 nous montre sans ambiguïté les incohérences dans les approximations décimales. En effet cette réponse provient du choix d'une approximation par troncature à 2 chiffres sur AC (AC = 4,07) suivi du mode de calcul de Â par $\cos^{-1}\frac{3{,}92}{4{,}07}$ avec au moins 5 chiffres après la virgule pour le quotient[129].

[127] Outre les confusions entre les différentes lignes trigonométriques dans un triangle rectangle, nous avons rencontré plusieurs fois l'approximation AC ≈ 4 suivie de cosÂ = 0,98 (ce qui donnera Â = 11,47° ou 11,48°)

[128] Il y a ceux qui confondent tangente et cosinus, ceux qui ne savent pas tirer Â de cosÂ, etc. et aussi tous ceux qui n'ont pas laissé de traces de calculs qui nous permettent pas d'interpréter les résultats qu'ils fournissent.

[129] En effet 3,92 ÷ 4,07 = 0,9631449… mais :

Mentionnons ensuite qu'*une fois sur quatre seulement,* on décèle un changement entre l'affichage-papier d'un résultat et la reprise de ce résultat dans le calcul suivant. Ces changements concernent AC et cosÂ[130] et *ils consistent presque systématiquement à intégrer plus de chiffres décimaux dans le calcul que dans l'affichage*. C'est pour nous la marque d'un comportement calculatoire guidé par le théorème en acte Th.a n°2.

Signalons enfin que nous n'avons trouvé aucune trace d'encadrement et que la mention d'une précision sur cosÂ est exceptionnelle.

Rapportons ces observations aux caractéristiques institutionnelles du contrat sur l'approximation numérique décimale :

1. Elles confirment l'exclusivité algébrique dans le traitement des approximations décimales soit sous forme d'égalités soit sous forme de quasi-égalités auxquelles on reconnaît les mêmes propriétés que les égalités dans le calcul numérique. L'absence totale d'encadrements dans les copies est pour nous la preuve la plus manifeste de cette exclusivité algébrique qui nous a fait qualifier le contrat de numérico-algébrique.

2. Elles soulignent *la permanence de difficultés chez les élèves, en fin de Seconde, à exprimer globalement sur papier un cheminement numérique calculatoire* quand ce cheminement comporte une succession d'opérations (par exemple l'enchaînement E1 de deux ou trois calculs de niveau 1 à partir de 16,6433[131]), *même lorsque ce cheminement est correctement conçu et correctement réalisé pas à pas*. Ces difficultés à fabriquer une écriture algébrique ne peuvent que perturber le fonctionnement du contrat numérico-algébrique puisqu'elles limitent les transferts sémiotiques entre papier et machine à des calculs de niveau 1 et, conséquemment, mettent en péril la fiabilité du postulat instrumental.

3. Elles montrent aussi la force du conflit entre le recours à l'écriture décimale dans l'affichage-papier, recours qui oblige à une limitation du nombre de chiffres, et la reprise du résultat affiché dans la suite du calcul, reprise qui appelle plus de chiffres dès lors qu'elle cherche à diminuer l'erreur à la fin du calcul. Ce conflit naît d'exigences et de pratiques pour l'approximation décimale différentes selon le calcul demandé mais qui vivent dans une même classe. Il produit des théorèmes en actes tels que ceux que nous avons mis en évidence dans l'analyse a priori et dont nous avons repéré l'usage dans les copies qui effectuent un changement entre l'affichage-papier d'un résultat et la reprise de ce résultat dans le calcul suivant. Chacun de ces théorèmes atteste de la présence, chez les élèves, de connaissances sur la propagation des erreurs alors que les savoirs théoriques relatifs à cette propagation sont absents du contrat institutionnel de l'approximation numérique.

$\cos^{-1}0{,}96 = 16{,}26$; $\cos^{-1}0{,}963 = 15{,}63$; $\cos^{-1}0{,}9631 = 15{,}61$; $\cos^{-1}0{,}96314 = 15{,}60$; etc.

130 Notons que AC^2, AC et cos Â sont, une fois sur deux, affichés en écriture décimale avec respectivement 4, 2 et 2 chiffres après la virgule (pour AC ce peut-être 4,07 ou 4,08).

131 Nous avons distingué trois niveaux de calculs relativement au postulat instrumental (dans le paragraphe 4 du chapitre C_1).

4. Elles témoignent de l'émergence encore vacillante d'un complexe de techniques instrumentées nouvelles dues à certaines fonctionnalités de la calculatrice (reprise du résultat du calcul précédent par la touche Ans, mises en mémoire, etc.). Dans la plupart des cas où elles ont été utilisées ces techniques ont permis la résolution du conflit.

5. Elles confirment enfin la prégnance chez les élèves de la réduction de la notion de précision à 10^{-n} à la seule présence de n chiffres après la virgule dans l'écriture décimale. Le très faible nombre d'indications explicites sur la précision (comme une puissance de 10) dans les résultats décimaux exposés par les élèves, notamment cosÂ, est symptomatique de cette réduction.

8.2 voici le deuxième exercice, pour lequel la calculatrice n'était pas autorisée :

Exercice 18

Le tableau ci-dessous est un extrait d'une table de valeurs trigonométriques trouvée dans un manuel scolaire de 1980 :

x	sin(x°)
42	0,669
45	0,707
48	0,743
51	0,777
54	0,809
57	0,839

Question : à l'aide de ce tableau et de quelques calculs, est-il possible de proposer des valeurs décimales approchées pour sin(60°), sin(39°), sin(46°), sin(50°) ?

sin(60°) : $\boxed{}$ sin(39°) : $\boxed{}$ sin(46°) : $\boxed{}$ sin(50°) : $\boxed{}$

Si cela est possible, compléter les cases ci-dessus et présenter les calculs sur cette feuille. Si cela n'est pas possible, expliquer pourquoi sur cette feuille.

Cet exercice provoque une confrontation des cadres numérique et fonctionnel, isolée dans le registre tabulaire. Expliquons nos choix.

On se rappelle qu'avec la rubrique "Organisation et gestion des données" le Collège a construit un environnement institutionnel où tableaux numériques et représentations graphiques servaient d'outils principaux au développement de plusieurs notions dont la proportionnalité, la fonction affine, l'exploitation de données statistiques. Cependant cet environnement ne disposait pas d'une construction de l'objet fonction numérique mais seulement de l'activation dans "des situations concrètes" de

deux de ses attributs, le tableau de valeurs et la courbe représentative dans un repère cartésien.
Certains manuels de la classe de Troisième avaient tout de même profité des incitations officielles relatives à "la résolution d'équations par essais et corrections successifs" pour présenter, dans cet environnement, le procédé d'interpolation linéaire (cf. documents dans les annexes, Volume 2) où s'articulaient donc tableaux de valeurs et représentations graphiques de fonctions. Même si l'initiative des manuels ne cherchait pas à faire revivre les pratiques attachées à l'usage des tables numériques, la présence de cette technique d'approximation numérique participait à soutenir l'émergence institutionnelle de ce que nous avons appelé le Calcul d'approximation. Mais l'isolement de cette technique dans un seul thème d'étude, pour servir essentiellement d'application des fonctions affines à la résolution approchée d'équations, ne lui offrait que des conditions de vie précaires et ne laissait espérer qu'un rapport institutionnel fragile et fugace.

On se rappelle aussi (paragraphe 5 de ce chapitre) que la classe de Seconde a donné le jour à la notion de variation d'une fonction en la travaillant sur plusieurs registres, le registre algébrique, le registre graphique et aussi le registre tabulaire.
Certes le rôle principal attribué au tableau de valeurs est celui d'un intermédiaire vers le tableau de variations et la représentation graphique de la fonction dans un repère cartésien. Excepté dans le manuel Terracher (Hachette, 1994, page 171, cf. documents 6 en Annexe, Volume 2) nous n'avons d'ailleurs pas trouvé de mise en exploitation directe d'un tableau de valeurs de fonction numérique pour du calcul approché au sens de Calcul d'approximation.
Cependant, à travers l'exploration des variations de la fonction et l'exposition des méthodes de construction et de lecture graphique, les manuels réalisent des tableaux de valeurs - avec ou sans l'aide de la calculatrice – qui touchent à des questions d'approximation numérique décimale. La plupart du temps ces choix ne sont pas explicités ; c'est le cas pour l'ordre (croissant) des valeurs de la variable, l'existence ou non d'un pas pour les valeurs de la variable, le nombre de ces valeurs, la précision sur les valeurs, etc ; on ne trouve que des commentaires laconiques relatifs à la continuité du tracé et le lissage de la courbe.

> *Nous formulons donc l'hypothèse que, dans la classe de Seconde, les études de variations et le travail graphique ont contribué à forger des pratiques d'approximation numérique décimale dans le registre tabulaire.*

Avec l'exercice présenté ci-dessus, nous pensons découvrir des traces de ces pratiques et aborder deux questions :

- sur quels savoirs mathématiques, mobilisables en dehors du cadre graphique, ces pratiques se développent-elles ?
- quelles techniques l'enseignant a-t-il apportées pour produire, sans calculatrice et en dehors du cadre graphique, des valeurs intermédiaires à celles qui sont présentes dans le tableau de valeurs de la fonction ?

Analyse a priori

Nous retenons d'abord que la question est libellée de telle façon que l'élève puisse formuler des objections pour ne pas proposer les valeurs approchées demandées. On peut s'attendre à trouver des objections qui renvoient :

- à l'absence de proportionnalité entre les valeurs correspondantes dans les deux colonnes car cette absence peut contrarier et même retenir la mise en œuvre des procédures calculatoires connues sur un tableau de proportionnalité.
- à l'absence de proportionnalité entre les accroissements correspondants dans les deux colonnes car cette absence peut empêcher la mise en œuvre des procédures calculatoires connues sur des tableaux de valeurs d'une fonction affine.
- à l'impossibilité d'utiliser des formules pour accéder exactement à sinx° (telles celles qui permettent de passer de cosx° à sinx°, ou celles qui expriment sin(x + 1)° ou sin(x + 3)° avec sinx°, etc.).
- à l'interdiction d'utiliser la calculatrice parce que cette interdiction limite les capacités de calcul en temps limité et qu'elle rompt avec les pratiques ordinaires de calcul approché où seule la machine sait fournir des valeurs trigonométriques.
- au flou entretenu sur la précision souhaitée car l'absence de précision peut être lu comme un appel de l'enseignant à refuser l'approximation.

Aux côtés de ces objections globales, on peut aussi s'attendre à des objections partielles qui portent sur certaines valeurs mais pas sur les autres. On peut en prévoir sur :

- sin60° qui est étiquetée comme valeur remarquable dont la valeur exacte est connue
- sin39° et sin60° qui se situent en dehors du tableau
- sin46° et sin50° qui se placent entre les lignes du tableau

Nous allons distinguer quatre types de stratégie que nous induisons du traitement institutionnel des tableaux numériques et des tableaux de valeurs de fonction dans les classes de Troisième et de Seconde. Pour chaque stratégie nous prendrons soin d'examiner la compatibilité avec la croissance de la fonction sin.

1) Les stratégies de type 1 (T11, T12 et T13) reconnaissent un tableau de proportionnalité et adoptent des procédures connues sur un tel tableau

- la stratégie T11 consiste à calculer un facteur multiplicatif k pour passer de la colonne de gauche à celle de droite. Voici deux réalisations possibles où les résultats ont été arrondis à la troisième décimale :

	K = 0,669/42	K = 0,743/48
x	**Sin(x°)**	**sin(x°)**
39	0,621	0,604
42	0,669	0,669
45	0,707	0,707
46	0,733	0,712
48	0,743	0,743
50	0,796	0,774
51	0,777	0,777
54	0,809	0,809
57	0,839	0,839
60	0,956	0,929

Certains coefficients multiplicateurs détruisent la croissance de la fonction sin. Tout en étant envisageables manuellement, les calculs rebuteront un élève de Seconde privé de calculatrice et le détourneront certainement de cette stratégie.

- la stratégie T12 consiste à égaler des produits en croix comme 60.0,839 et 57.sin60° (d'où sin60° ≈ 0,883). Selon le choix des produits croisés, le résultat peut s'avérer compatible ou incompatible avec l'ordre croissant des valeurs de la deuxième colonne. Par exemple 46.0,839 = 57.sin46° aboutit à sin46° ≈ 0,677 qui est inférieur à sin45°. Cependant les produits qui utilisent deux lignes successives dans le tableau donnent des résultats qui respectent la croissance de la fonction sin. Voici ce qu'on obtient en arrondissant les résultats à la troisième décimale :

x	**sin(x°)**
39	0,621
42	0,669
45	0,707
46	0,723 ou 0,712
48	0,743
50	0,774
51	0,777 ou 0,762
54	0,809
57	0,839
60	0,883

Les opérations sont faisables manuellement par un élève de Seconde mais coûteuses en temps. Pour cette raison, cette stratégie est peu probable.

- la stratégie T13 consiste à trouver des combinaisons linéaires sur les valeurs de x et à les reporter sur les valeurs de sinx°. Elle est, elle aussi, attachée à la proportionnalité. Par exemple $\sin 60° = \dfrac{2.(\sin 42° + \sin 48°)}{3} \approx 0941$ car 60 =

$\frac{2.(42+48)}{3}$. Là encore les résultats peuvent, dans certains cas, respecter la croissance de la fonction sin et la contrarier dans d'autres [132].

Cependant si on prend deux valeurs qui se suivent dans la table et qu'on utilise les combinaisons par barycentration, la stratégie rejoint la méthode d'interpolation et d'extrapolation linéaire et les résultats respectent la croissance de la fonction sin. Voici les calculs :

Avec $60 = \frac{2.57 - 1.54}{2 - 1}$ on trouve $\sin 60° \approx 2.\sin 57° - 1.\sin 54°$ soit $\sin 60° \approx 0{,}869$

Avec $39 = \frac{2.42 - 1.45}{2 - 1}$ on trouve $\sin 39° \approx 2.\sin 42° - 1.\sin 45°$ soit $\sin 39° \approx 0{,}631$

Avec $46 = \frac{2.45 + 1.48}{2 + 1}$ on trouve $\sin 46° \approx \frac{2.\sin 45° + 1.\sin 48°}{3}$ soit $\sin 46° \approx 0{,}719$

Avec $50 = \frac{1.48 + 2.51}{2 + 1}$ on trouve $\sin 50° \approx \frac{1.\sin 48° + 2.\sin 51°}{3}$ soit $\sin 50° \approx 0{,}766$

Compte tenu du fait que l'élève de Seconde ne dispose pas de technique [133] pour trouver de telles combinaisons, une telle stratégie est encore moins probable que la précédente.

2) La stratégie T2 reconnaît un tableau de valeur d'une fonction affine et adopte une procédure sur les valeurs sans regarder les accroissements entre ces valeurs

- La stratégie T2 consiste à utiliser deux lignes du tableau pour écrire sinx° sous la forme a.x + b puis à calculer les autres valeurs de la fonction avec cette expression. Elle se réfère à une modélisation par une loi affine. Par exemple, en partant de $\sin 42° = 0{,}669$ et $\sin 57° = 0{,}839$, on trouve $\sin x° = \frac{0{,}17}{15}.x + 0{,}193$ puis les valeurs approchées $\sin 39° \approx 0{,}635$; $\sin 46° \approx 0{,}714$; $\sin 50° \approx 0{,}760$; $\sin 60° \approx 0{,}873$. Dans le contexte particulier de ce tableau (faible amplitude globale), cette stratégie fournit des résultats compatibles avec la croissance de la fonction sin quelle que soit la paire de lignes choisie. Mais sans calculatrice les calculs sont fastidieux et devraient rebuter un élève de Seconde.

3) Les stratégies de type 3 (T31, T32, T33) repèrent la régularité dans la colonne de gauche et s'attachent immédiatement à des calculs d'accroissements :

- La stratégie T31 reconnaît une régularité globale des variations de la fonction dans la correspondance affine entre $\Delta(\sin x°)$ et x $[\Delta(\sin x°) = \frac{0{,}02}{3}.x - 0{,}66]$. Elle prolonge cette régularité des différences tabulaires sur 39° et 60°. Ce faisant elle se limite au pas de 3° pour les variations de x et s'interdit de calculer entre deux lignes du tableau pour un pas plus petit que 3. Elle aboutit aux résultats consignés dans ce tableau :

---

[132] Par exemple, l'égalité $\sin 50° = \frac{5.\sin 42° + 2.\sin 45°}{6}$ induite par l'égalité $\frac{5.42 + 2.45}{6} = 50$ produit l'approximation $\sin 50° \approx 0{,}793$ alors que $\sin 51° \approx 0{,}777$.

[133] La barycentration a été renvoyée en classe de Première à partir de 1990.

x	Δx	sin(x°)	Δ(sinx°)
39	3	0,629	0,40
42	3	0,669	0,38
45	3	0,707	0,36
48	3	0,743	0,34
51	3	0,777	0,32
54	3	0,809	0,30
57	3	0,839	0,28
60	3	0,867	0,26

- La stratégie T32 conçoit une régularité locale de la fonction dans la proportionnalité des différences tabulaires entre deux lignes du tableau. Ce faisant elle s'interdit de sortir du tableau faute de disposer d'une des bornes de l'intervalle pour faire les calculs d'accroissement constant. Voici les résultats :

x	sin(x°)
42	0,669
45	0,707
46	0,719
48	0,743
50	0,766
51	0,777
54	0,809
57	0,839

- La stratégie T33 mixte les deux autres en acceptant, sans les harmoniser, les régularités locale et globale des variations de la fonction. Sans faute de calcul et en arrondissant à 3 décimales, elle aboutit au tableau suivant :

x	sin(x°)
39	0,629
42	0,669
45	0,707
46	0,719
48	0,743
50	0,766
51	0,777
54	0,809
57	0,839
60	0,867

Compte tenu du terme "valeur approchée" employée par l'énoncé, il faut s'attendre à de nombreuses variantes de calcul, de la proportionnalité strictement appliquée à des approximations moins rigides, ainsi qu'à des hésitations entre arrondis et troncatures.

4) Enfin la stratégie T4 se contente de respecter la croissance de la fonction sin en proposant des valeurs approchées grossièrement évaluées sans engager de calculs ni sur

les valeurs ni sur les accroissements. Un telle stratégie peut produire les réponses suivantes :

sin39° ≈ 0,6	sin46° ≈ 0,7	sin50° ≈ 0,8	sin60° ≈ 0,9

où l'abaissement du degré de précision accompagne l'option choisie de ne pas faire de calculs. Elle est susceptible de se superposer aux stratégies T31 et T32 pour estimer les valeurs approchées que celles-ci ne peuvent pas atteindre.

Analyse a posteriori

Nous disposons de 135 copies mais 27 d'entre elles sont vierges de toute réponse et de tout commentaire.
Relevons d'abord que sur les 108 copies restantes, 55 (la moitié !) font valoir des impossibilités à pouvoir répondre. On en dénombre :

14	Qui argumentent pour une impossibilité totale
28	Qui refusent seulement sin46° et sin50°
6	Qui refusent seulement sin60° et sin39°
3	Qui refusent seulement sin50°
2	Qui ne produisent que sin60° mais en valeur exacte

Arrêtons-nous un moment sur les principales raisons invoquées pour prononcer une impossibilité totale.
Il y a celles qui notent l'inaccessibilité des techniques habituellement utilisées pour connaître une valeur trigonométrique approchée (calculatrice, valeur exacte via formule, calculs dans un triangle rectangle) :

> Impossible sans calculatrice
> Il faut une calculatrice à part si on connaît le cos ou la tan ce qui n'est pas le cas ici.
> On ne peut pas donner le sinus si on ne connaît pas le cosinus
> On ne peut pas savoir, à part les apprendre par cœur.
> Les calculs ne sont possibles que si l'on connaît le sinus de l'angle complémentaire à celui que l'on cherche.
> À part sin60° on ne connaît pas les mesures du triangle qui correspond aux valeurs.

Mais il y a surtout celles qui disent l'absence de technique pour traiter numériquement les variations reconnues dans le tableau dès lors qu'elles ne relèvent pas du modèle affine ni du modèle linéaire :

> Les sinus ne sont pas réguliers ; de 42 à 45, de 45 à 48, ils n'ont pas la même valeur
> Les distances entre les sinus changent.
> On ne peut pas dire de combien varie le sinus entre 2 valeurs.
> À chaque fois l'angle augmente de 3° et les sinus n'augmentent jamais du même nombre.
> Le tableau n'est pas proportionnel.
> Il n'y a pas proportionnalité entre les chiffres.

Mettons maintenant de côté les 14 copies qui ne fournissent aucun résultat numérique dans les encadrés prévus à cet effet . Il reste 94 copies. En observant les calculs écrits sur la feuille et les résultats placés dans les cases, nous pouvons répartir 81 d'entre elles entre les différentes stratégies présentées dans l'analyse a priori (les 13 copies inclassables sont répertoriées dans la colonne INC) :

T11	T12	T13	T2	T31	T32	T33	T4	INC	
0	4	3	0	25	7	30	12	13	Σ = 94

(On trouvera dans les documents 10 des annexes de ce chapitre - Volume 2 -un ensemble de copies d'élève représentatives des différentes stratégies présentées dans l'analyse a priori)

Ainsi plus d'un élève sur deux (62/108) utilise une stratégie de type 3, avec laquelle il pense les variations d'une fonction en termes d'accroissements numériques et pour laquelle il adapte les technologies des modèles linéaires et affines soit en réalisant une estimation grossière des valeurs inconnues de la fonction soit en conduisant une suite d'opérations qui débouche sur ces valeurs

Cette adaptation technologique à une tâche qui n'est ni évoquée par le programme de la classe de Seconde, ni travaillée par les manuels est suffisamment prégnante dans les procédures employées par les élèves pour nous autoriser à penser que certains enseignants, à travers l'étude de fonctions usuelles comme $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow \frac{1}{x}$, etc. n'hésitent pas à la promouvoir publiquement – ce peut être pour disposer de valeurs numériques à intégrer dans une représentation graphique -.

Il est clair en même temps que cette adaptation est loin d'être stabilisée au sein d'une praxéologie de décimalisation. Il y a des carences technologiques. Nous pouvons même parler d'un évanouissement technologique sur des pratiques anciennes qui continuent à exister sans intentionnalité noosphérienne. Il nous paraît symptomatique, par exemple, que la technique d'interpolation linéaire ne soit jamais nommée, même quand elle est utilisée. Mais c'est surtout la grande diversité des résultats - même en nous en tenant aux stratégies de type 3 - qui montre que les enseignants ne procèdent pas à une institutionnalisation de ces techniques d'exploitation numérique d'un tableau de valeurs, et qu'ils ne prennent pas en charge le problème de la précision des valeurs approchées ainsi trouvées. Cela est net pour sin46° et sin50°[134] :

Sin46°	0,71	0,710	0,715	0,717	0,718	0,719	0,72	0,720	0,722	0,725
Σ = 36	3	2	2	3	1	15	2	3	2	3

Sin50°	0,76	0,760	0,764	0,765	0,766	0,767	0,768	0,769	0,770	autres
Σ = 31	3	4	1	2	5	4	1	1	1	9

et apparaît encore pour sin60° et sin39°, malgré la simplicité des calculs[135].

Sin60°	0,86	0,860	0,867	0,869	0,870	0,877	0,879	autres

[134] Le calcul de sin50° comportait deux difficultés de calcul supplémentaires par rapport à sin46° :

0,034 ne se divise pas "exactement" par 3 et 50 est aux deux tiers (au lieu d'être au tiers) de l'intervalle [48 ; 51] .

Ces deux difficultés ont pu entraîner une baisse de la maîtrise dans l'adaptation technologique et expliquer ainsi à la fois la plus grande diversité des résultats et l'augmentation du nombre des abandons.

[135] La stratégie T31 augmente sensiblement le nombre de réponses à sin60° et sin39° par rapport aux deux autres sinus.

Σ = 61	2	3	30	8	3	2	1	12

Sin39°	0,629	0,63	0,630	0,631	0,639	autres
Σ = 61	27	4	3	3	8	16

Cela se comprend aussi à travers les nombreux commentaires qui émaillent les copies et qui insistent sur le peu de crédit qu'il faut attribuer aux résultats. Plusieurs fois des déclarations comme :

> Ce ne sont que des valeurs approchées,

s'accompagnent d'une diminution du nombre de décimales de l'approximation lors du report dans l'encadré des résultats obtenus par les calculs.

9. En conclusion, pour la classe de Seconde

Nous pouvons compléter et moduler les premières conclusions que nous avions formulées, au paragraphe 6 de ce chapitre, à la suite de l'analyse des programmes et des manuels.

Certes les rapports institutionnels à l'approximation numérique décimale sont essentiellement façonnés par la praxéologie de décimalisation issue du Collège, dont nous avons montré qu'elle participait à maintenir l'approximation numérique décimale à un bas niveau trophique.

Mais certains choix des enseignants ouvrent cette praxéologie sur au moins deux objets nouveaux :

- le premier est l'erreur de calcul que cause une insuffisance de chiffres lors de la présentation du calcul à la calculatrice. Nous avons noté sa présence dans les procédures utilisées par certains élèves dans l'exercice 17 (paragraphe 8.1).
- le second est l'accroissement d'une quantité numérique variable, qui a été massivement mobilisé par les élèves dans l'exercice 18 (paragraphe 8.2).

Il y a lieu de penser que l'entrée sur la scène mathématique de certaines notions propres à l'Analyse ont influencé les pratiques calculatoires instituées dans les classes de Seconde. Les réticences de la noosphère - traduites entre autres dans les textes des programmes - à aborder de front l'approximation numérique décimale, ses hésitations à la doter des éléments théoriques qui lui sont indispensables, son refus de poser ses problèmes fondamentaux (Pb n°1 et Pb n°2) n'ont pas complètement empêché certaines évolutions par rapport aux classes de Collège.

> *Mais le contexte institutionnel ainsi créé ne permet pas d'envisager une véritable rencontre avec ces problèmes au-delà d'une sensibilisation dont on peut se demander si elle aurait des effets perceptibles sur les pratiques calculatoires elles-mêmes.*

Force est de constater que les modifications que l'on pourrait opérer, *dans le contexte institutionnel actuel*, sur les formes de la cohabitation entre la calculatrice et l'approximation numérique décimale seraient mineures. Toute tentative d'accrocher à cette cohabitation des caractéristiques d'une articulation exige une plus grande maîtrise algébrique et une plus grande familiarisation avec l'Analyse. Une telle tentative, dont nous avons dit qu'elle était un des objets de notre étude doit donc être reportée sur la classe de Première[136].

136 Nous avons tout de même procédé sur cette classe, en fin d'année scolaire, à une pré-expérimentation de l'ingénierie qui concernera la classe de Première S. Les documents relatifs à cette pré-expérimentation sont rassemblés dans l'Annexe du chapitre D_5.

CHAPITRE C_3 : LE CONTRAT NUMERICO-ANALYTIQUE DU LYCEE

Le calcul approché que nous avons qualifié de "nouveau calcul approché" quand nous l'avons rencontré la première fois en classe de Troisième n'a pas connu en classe de Seconde un environnement institutionnel favorable à sa transformation en un véritable Calcul d'approximation. Mais, dans toutes les classes de Première et surtout dans celle de Première S, les ambitions affichées par les instructions officielles relatives à l'enseignement de l'Analyse devraient desserrer plusieurs des contraintes qui ont freiné jusque-là son développement. Avec le dessein de trouver des conditions de vie pour une praxéologie de décimalisation qui assumerait une bonne articulation entre la calculatrice et l'approximation numérique décimale, nous prolongeons sur la classe de Première notre étude écologique en nous focalisant sur l'apport de l'Analyse. Notons que nous nous limitons à la filière S car elle est celle qui donne le plus d'étendue aux concepts de l'Analyse[137].

1. L'émergence, en classe de Première S, d'une nouvelle praxéologie de décimalisation

L'organisation mathématique actuelle de la classe de Première S a été très fortement modelée par les décisions de la réforme de 1981[138] qui ont étoffé et modifié en profondeur l'enseignement de l'Analyse. Nous avons déjà vu comment certaines de ces décisions qui ambitionnaient d'installer des pans entiers de cet enseignement dès la classe de Seconde ont été défaites dans leur confrontation avec le réel didactique. C'est donc sur la classe de Première qu'ont été reportés les moments forts de l'entrée en Analyse.

Pour en comprendre les répercussions sur la vie de l'approximation numérique décimale, il nous faut nous rappeler les intentions des réformateurs de 1981. Artigue (1996) les décrit ainsi :

> L'Analyse est vue comme le champ de l'approximation et il s'agit de ménager une entrée progressive des élèves du lycée dans ce champ, sans se limiter à ses aspects calculatoires.

---

137 S comme scientifique ; à partir de 1981, cette filière a fusionné, au niveau de la Première, les anciennes filières C et D.

138 Nous l'appelons souvent contre-réforme car elle se plaça en réaction aux orientations de la réforme précédente, dite des mathématiques modernes.

A bien des égards, on peut même dire qu'il s'agit de l'arrivée de l'Analyse numérique dans l'enseignement mathématique secondaire. Nous avons donc assisté sur les deux dernières décennies à une recréation didactique d'une partie d'une œuvre mathématique qui était présente dans certains enseignements universitaires pour la porter dans l'EMS. L'examen des premiers pas de cette transposition devrait éclairer le contexte institutionnel actuel.

Les promoteurs de cette réforme commencent par critiquer fortement les méthodes d'enseignement de la période précédente, dite des mathématiques modernes. Dans le Bulletin Inter-Irem consacré à l'enseignement de l'Analyse (1981, page 6), on dénonce, sous la plume de Lazet et Ovaert :

> > une construction linéaire des concepts, bien hiérarchisés, qui n'amène – et pas toujours – qu'en fin de construction, des algorithmes et des méthodes opératoires
>
> > l'arrivée trop tardive, voire l'absence, d'applications intéressantes si bien que les notions ne sont pas perçues dès leur abord comme étant efficaces pour la résolution des problèmes, les problèmes posés n'ayant en outre que trop rarement un caractère quantitatif.

Puis on insiste sur le lien entre qualitatif et quantitatif :

> Les grands problèmes et les concepts (de l'Analyse) comportent à la fois un aspect qualitatif et quantitatif. L'approfondissement de ces deux aspects doit aller de pair. Les activités numériques, la recherche et l'exploitation d'algorithmes sont pédagogiquement très efficaces.

Toujours selon ces auteurs, ce lien ne trouve pleinement son efficience didactique qu'avec l'intervention des calculatrices, car ils poursuivent :

> Dans cette perspective, l'usage des calculatrices sera précieux à plusieurs titres :
>
> > psychologiquement : l'instrument aiguise l'intérêt de l'élève, introduit du concret, de l'expérimental
>
> > techniquement : pour avoir une série de résultats propice à des remarques judicieuses, des calculs longs et fastidieux sont souvent nécessaires. La machine détruit cet aspect rebutant ;
>
> > pédagogiquement : en Analyse le qualitatif ne peut en général être bien compris qu'à travers une pratique suffisante du quantitatif ;
>
> > culturellement : le futur citoyen sera moins impuissant devant l'invasion des ordinateurs, ces objets ne lui étant plus mystérieux.

Les instructions officielles pour les classes de Premières et Terminales scientifiques qui se sont succédé depuis 1981 n'ont cessé de déclarer leur adhésion à ces idées. On peut lire dans celles de 1997 :

> Pour l'ensemble du programme d'Analyse, il convient d'exploiter aussi bien les aspects qualitatifs (monotonie, convergence …) que les aspects quantitatifs (majorations, encadrements, vitesse de convergence, approximation à une précision donnée …)

> L'emploi des calculatrices programmables et graphiques en mathématiques a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs mais aussi de contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche et de favoriser une bonne approche de l'informatique.

Enfant légitime de la contre-réforme et de l'ordinateur de poche le "nouveau calcul approché" n'est donc pas renié par la noosphère qui lui reconnaît l'Analyse comme habitat privilégié. C'est là qu'il doit rencontrer ses principaux compagnons de jeu lesquels se nomment fonction, suite, développement limité et algorithme. Toujours dans ce même bulletin Inter-Irem, Lazet et Ovaert détaillaient les prémices de cette aventure commune :

> Au point de départ, en Seconde, on peut étudier plusieurs méthodes d'approximations de $\sqrt{2}$, comparer expérimentalement leur performance (dichotomie, trichotomie, méthode de Héron, interpolation linéaire …). Par des majorations, il parvient assez facilement à contrôler de manière théorique la rapidité de convergence. Ce contrôle met en jeu des développements d'ordre 1 ou 2. D'autres exemples (racines carrées, $\sqrt[3]{2}$, exemples simples d'équations algébriques …) permettront d'apprécier la portée des méthodes précédentes et d'effectuer pour un problème donné un choix pertinent d'algorithmes.
>
> En chemin, on aura fait fonctionner ou motivé l'introduction de concepts d'Analyse très importants : majorations, développements de fonctions à l'ordre 1, différence entre le local et le global, suites de référence, emploi de représentations graphiques …

Le texte du programme de Seconde inauguré à la rentrée 1981 reprend en écho :

> Le calcul sur les nombres réels n'est pas revu pour lui-même, mais solidairement avec la résolution des problèmes numériques, qui sont au cœur de l'Analyse.

Il propose des exemples :

> Exemples d'approximation d'un nombre réel au moyen de suites,

et suggère des thèmes :

> Exemples de suites convergeant vers $\sqrt{p}$, exemples de suites convergeant vers π

Dans le même temps, il précise le rôle des calculatrices :

> On peut par exemple calculer les termes successifs d'une suite récurrente et en présumer le comportement. On découvrira l'intérêt qu'il peut y avoir à organiser méthodiquement le calcul pour le resserrer et lui conférer une bonne précision.

Mais nous avons vu qu'au fil de ce qu'elle nomme pudiquement des aménagements de programme (le premier a lieu en 1986), la noosphère va modifier sensiblement le texte d'enseignement et toucher aux organisations mathématiques et didactiques naissantes. Nous avons déjà mentionné comment la formulation :

> Exemples d'approximation d'un nombre réel au moyen de suites

s'était muée en

> Exemples d'approximation d'un nombre au moyen d'encadrements.

et nous avons souligné dans le chapitre précédent en quoi un tel glissement de vocabulaire révélait "l'implacabilité des lois spécifiques du fonctionnement didactique"[139].

A cette occasion, nous nous sommes longuement attardés sur l'exemple de l'approximation de $\sqrt{2}$ et avons montré comment il a perdu sa pertinence didactique originelle puisqu'il ne vit plus, dans la classe de Seconde actuelle, que comme un activateur de calculs algébriques sur les encadrements, le plus souvent déconnectés de toute construction d'une problématique d'approximation.
Nous nous attendons par contre à le retrouver maintenant en classe de Première S puisque le programme de cette classe affiche explicitement l'ambition d'introduire le concept de suite numérique.
Effectivement plusieurs manuels[140] s'intéressent à lui. Mais nous constatons immédiatement que la fonction didactique attribuée à cet exemple n'est pas celle que prévoyaient Lazet et Ovaert. Il n'est plus question de guider "un choix pertinent d'algorithmes" par une comparaison expérimentale entre plusieurs méthodes sur la performance et la rapidité de convergence. Il ne s'agit plus de "motiver l'introduction d'un concept d'Analyse" mais d'en illustrer un usage possible.
Les promoteurs de la réforme n'ont-ils pas sous-estimer les effets potentiels de certains mécanismes transpositifs d'une œuvre mathématique dans une institution didactique ? Chevallard, à ce propos, parle d'une inversion du rapport entre question et réponse, qui

> tend à refouler à la périphérie de l'organisation praxéologique, sous le nom d'applications, les types de tâches qui sont en principe générateurs de l'œuvre (Chevallard 1998).

C'est ce qui semble se passer. Le manuel Hatier place l'exemple en tête de l'unique chapitre consacré aux suites, à titre d'invitation culturelle. Les manuels Belin et Bordas le renvoient tout à la fin du chapitre consacré aux limites de suites, à titre de Travaux Pratiques.
Tous trois respectent en cela la structure du texte du programme qui isole l'exemple de l'approximation de $\sqrt{2}$ dans le chapitre sur les suites numériques. En effet, la partie Analyse (partie dénommée "Suites et fonctions numériques") organise ainsi les éléments de cours :

- Comportement global et asymptotique d'une fonction
- Dérivation : a) dérivation en un point ; approximation par une fonction affine … c) application à l'étude du comportement local et global des fonctions
- Suites : a) générations et description de suites … c) énoncés usuels sur les limites

---

[139] Chevallard 1986

[140] Hatier (édition 1995, page 155), Belin (édition 1995, pages 168 puis 376), Fractale (Bordas, 1995, pages 240 et 241). Toutes ces pages sont rassemblées dans les documents 1 de l'Annexe).

Et c'est seulement dans les "Travaux pratiques" de cette dernière partie que sont mentionnés les

> exemples simples d'emploi de suites pour l'approximation d'un nombre (aire, volume, racine carrée …).

On remarquera, à la lecture des textes des diverses "activités" de ces manuels que l'approximation en question ne s'éloigne pas de l'univers décimal. Deux d'entre eux s'empressent de décimaliser les premiers termes des suites numériques par l'intermédiaire d'une calculatrice, et l'objectif affiché par le manuel Belin est d'ailleurs : "la détermination des décimales de $\sqrt{2}$".

Les promoteurs de la réforme désignaient d'autres lieux possibles d'implantation du calcul approché en classe de Première. Ils parlaient entre autres de résolution approchée d'équations numériques, comme en classe de Troisième, et d'approximations de fonctions numériques. De fait nous le retrouvons dans la résolution de certaines équations, l'optimisation d'une fonction numérique et son approximation affine en certains points.

> *Le problème mathématique est alors celui des valeurs prises ponctuellement par une fonction numérique définie par une formule explicite ou implicite.*

Tous les manuels actuels expliquent comment pratiquer la résolution approchée d'une équation du type $f(x) = c$ où c est connu (exactement) et comment pratiquer l'approximation affine d'une fonction f au voisinage d'un point. Là encore les exemples et les exercices proposés comportent systématiquement des approximations décimales.

Une nouvelle praxéologie de décimalisation des nombres s'organise donc progressivement en classe de Première S au fur et à mesure de l'installation des deux principaux objets mathématiques avec lesquels le nombre à décimaliser sera mis en rapport et qui en formeront l'ossature technologique : la fonction numérique et la suite numérique.

Procédons maintenant à une analyse écologique plus détaillée de cette nouvelle praxéologie de décimalisation. Nous inscrivons cette analyse dans le processus historique de formation et d'évolution des programmes issus de la contre-réforme. Nous la concentrons sur deux tâches – nommées par la suite T1 et T2 - que nous considérons comme emblématiques pour cette praxéologie, pour une double raison :

- elles illustrent les apports spécifiques du champ théorique propre à l'Analyse ;
- elles se réfèrent aux deux problèmes fondamentaux de l'approximation.

Auparavant nous enchaînons trois remarques qui concernent les rapports entre calculatrice et décimalisation et qui orienteront notre analyse.

2. Calculatrice et décimalisation

2.1 la calculatrice au service d'une décimalisation voulue …

Nous montrerons que la nouvelle praxéologie ne remplace pas l'ancienne mais qu'elle se superpose à elle au sein de l'institution (cf. paragraphe 6 de ce chapitre). L'une des principales raisons est que les enjeux mathématiques institutionnels sous-jacents aux tâches de l'une et de l'autre diffèrent radicalement et ne s'excluent pas l'un l'autre. Nous l'avons déjà dit : la praxéologie de décimalisation construite tout au long du Collège répond à la demande d'une valeur approchée décimale particulière avec dessein d'utiliser numériquement ce nombre décimal à la place de la valeur exacte ; celle que le lycée s'efforce de construire voudrait s'inscrire essentiellement dans le problème des représentations multiples du nombre réel. C'est sur quoi insiste Ovaert dans le Bulletin Inter-Irem déjà cité :

> Un des moyens les plus puissants d'étude des nombres réels consiste, étant donné un nombre défini par un certain processus (solution d'une équation, somme d'une série, limite d'une suite, valeur d'une fonction, valeur d'une fonction, valeur d'une intégrale …), à représenter ce nombre par un processus mieux adapté au problème posé.
>
> Le nombre π est à cet égard exemplaire. De sa définition, à partir de la longueur du cercle ou de l'aire du disque, on peut passer à une représentation comme limite de longueurs ou d'aires de polygones réguliers inscrits ou exinscrits, ce qui permet d'en obtenir des valeurs approchées … Inversement, le nombre π permet d'exprimer des résultats très importants … et d'évaluer des intégrales et des séries très remarquables."

Il donne les exemples suivants :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4},\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$$

et s'empresse d'ajouter :

> Ces relations sont peu adaptées au calcul des valeurs approchées de π. Elles sont néanmoins utiles en Analyse numérique, pour tester expérimentalement la performance des procédés d'accélérations de convergence des séries et des méthodes de calcul de valeurs approchées d'intégrales.

On le voit, la décimalisation du nombre - qui est l'une des représentations possibles d'un nombre - ne constitue pas, chez les mathématiciens analystes, leur première motivation dans l'intérêt qu'ils portent au nombre, même si elle n'est pas absente de leurs préoccupations. Par contre, la reconstruction partielle et temporaire de leur œuvre dans EMS, amorcée avec le Bulletin Inter-Irem et les programmes des débuts de la contre-réforme, renforce le rôle de la décimalisation car le quantitatif, dont parlent les promoteurs de la réforme et que reprennent les premières instructions officielles, relève essentiellement de la décimalité dès lors qu'il s'autorise de la calculatrice.

> *Conçue au nom de l'expérimentation numérique, la promotion de la calculatrice dans l'activité mathématique a rapidement placé la décimalisation au premier plan du processus de construction des concepts d'Analyse au sein de l'institution EMS*

Une fois la calculatrice installée, la décimalisation d'un nombre subit, de la part de l'institution d'enseignement, deux exigences qui agissent contradictoirement selon les contextes :

- d'une part, rester sous l'autorité mathématique de la calculatrice ; la décimalisation prend alors le statut d'outil pour contrôler des actions sur les objets visés par l'enseignement de l'Analyse, les fonctions et les suites numériques principalement.
- d'autre part, se dégager de l'autorité mathématique de la calculatrice ; la décimalisation prend alors le statut d'objet de cet enseignement lui-même car elle prend place parmi les multiples représentations du nombre et doit répondre, à ce moment-là, aux exigences de cohérence mathématique considérées comme externes à la calculatrice.

Il y a là deux dimensions du sens de la décimalisation dans l'activité mathématique reconnue par l'institution, une première que nous pourrions qualifier de sémantique et la deuxième que nous pourrions qualifier de syntaxique[141]. Cette caractérisation n'est pas spécifique de la calculatrice ni de l'enseignement de l'Analyse. Nous la retrouverions avec un autre instrument de calcul comme la règle à calcul ou une table numérique. Cependant leur imbrication dialectique prend plus de relief avec les choix des promoteurs de la contre-réforme qui, en introduisant des éléments d'Analyse Numérique dans cet enseignement, ont donné à la calculatrice l'occasion d'affirmer une autorité que nul autre instrument de calcul ne possédait auparavant.

2.2 … mais aussi d'une décimalisation importune

La nouvelle praxéologie se démarque radicalement de l'ancienne par la possibilité qu'elle offre de formuler un encadrement préalablement à l'annonce d'une valeur approchée et donc par la possibilité d'adjoindre une précision à cette valeur approchée. Mais, sauf circonstances exceptionnelles, ni la valeur approchée ni la précision ne sont fournies directement sous forme décimale par le bloc technologico-théorique.

> *Le recours à la calculatrice porté par les différentes techniques provoque une décimalisation "forcée" qui superpose à une première approximation théorique une deuxième approximation dont le contrôle est laissé dans l'ombre du postulat instrumental.*

Expliquons-nous sur l'exemple bénin de l'approximation de $\sqrt{a}$ par la méthode de Héron que développe le manuel Belin (Hachette, 1995, page 168, cf. documents 1 de l'Annexe, Volume 1) sous le titre de méthode d'Euler. Le manuel prend a = 2 et définit – sans la formaliser - la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{2 - u_n^2}{2u_n}$. Il en fournit lui-même les premiers termes sous forme fractionnaire :

$$u_1 = \frac{3}{2},\ u_2 = \frac{17}{12},\ u_3 = \frac{577}{408},\ u_4 = \frac{665\,857}{470\,832}$$

Puis il pose les questions suivantes :

---

141 Nous empruntons ces distinctions à Douady (1996)

> En utilisant la calculatrice, indiquer les valeurs approchées de $\sqrt{2}$: u_2, u_3 et u_4 à 10^{-8} près par défaut.

> Combien u_2 nous donne-t-il de décimales exactes pour $\sqrt{2}$?

> Répondre à la même question pour u_3 et u_4.

> Conjecturer combien de décimales exactes de $\sqrt{2}$ on trouverait si on calculait u_5.

Calculatrice Casio 6800 G en main (cette calculatrice était très présente dans les classes de Lycée jusqu'en 1995-96 puis a été remplacée par des modèles nettement plus performants et plus chers !), on répond :

> $u_2 = 1{,}416\ 666\ 66$; $u_3 = 1{,}414\ 215\ 69$ et $u_4 = 1{,}414\ 213\ 56$ (il suffit d'exécuter les divisions et d'effectuer les troncatures à l'ordre 8)
> u_2, u_3 et u_4 fournissent respectivement 2, 5 et 8 décimales de $\sqrt{2}$ puisque, avec cette même calculatrice, $\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 56$ à 10^{-8} près par défaut.

Mais que conjecturer pour u_5 et au-delà ?
Comme la calculatrice produit en fait $u_4 = \sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 56\mathbf{2}$ on est en droit de se demander si u_4 ne donne que 8 décimales de $\sqrt{2}$. Une calculatrice plus récente et plus puissante (TI 89) nous offre des décimales supplémentaires et nous invite à modifier notre réponse : u_4 fournirait 11 décimales exactes.
La dernière question devient encore plus énigmatique puisque la réponse semble dépendre des qualités techniques de la calculatrice !
Le manuel lève le voile un peu plus loin dans une autre activité (page 376, cf. documents 1 de l'Annexe, Volume 2). En se référant au T.P. précédent, il déclare d'entrée de jeu :

on a déterminé une suite de nombres réels telle que, d'un terme au suivant, le nombre de décimales exactes pour $\sqrt{2}$ doublait.

et la justification de cette assertion devient l'objet de l'exercice.
Cette fois-ci la suite est formalisée et l'on demande d'établir l'encadrement :

$$0 \leq u_n - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(u_{n-1} - \sqrt{a})^2 \text{ pour tout } a > 1$$

et de le transformer en $0 \leq e_n < \frac{1}{2}(e_{n-1})^2$ pour prouver l'assertion initiale dans le cas a = 2. C'est exactement ce qu'avait fait le manuel Terracher dans l'exercice résolu auquel nous nous étions intéressés dans le chapitre précédent (cf. aussi document 2 de l'annexe C_2 pour la contestation de la "preuve"). Nous nous arrêtons ici sur la fin de l'exercice, proposée par le manuel, avec le cas a = 7.

> Appliquer la méthode pour déterminer, dans le cas de $\sqrt{7}$ et pour le choix de $u_0 = 2$, les termes u_1, u_2, u_3 et u_4 de la suite des valeurs approchées de $\sqrt{7}$ (on donnera la valeur approchée de chaque terme à 10^{-8} près par défaut).

> Vérifier à l'aide des termes u_1, u_2, u_3 et u_4 les résultats des questions précédentes.

Toujours muni de la calculatrice Casio 6800 G, on trouve facilement :

$$u_1 = \frac{11}{4},\ u_2 = \frac{233}{88} \text{ et } u_3 = \frac{108\,497}{41\,008},$$

trois termes dont on peut vérifier, après décimalisation, qu'ils donnent respectivement 0, 2 et 5 décimales de $\sqrt{7}$.

Obtenir l'expression exacte de u_4 sous forme fractionnaire par $\frac{1}{2}.(u_3 + \frac{7}{u_3})$ comme le suggère le manuel, oblige à extirper des chiffres au-delà de la capacité d'affichage de la calculatrice ($u_4 = \frac{23\,543\,191\,457}{8\,898\,489\,952}$). L'affaire se complique.

On pourrait se passer de cette écriture qu'on ne peut pas éditer sur la calculatrice et décimaliser directement $\frac{1}{2}.\left(\frac{108\,497}{41\,008} + \frac{7}{\frac{108\,497}{41\,008}}\right)$. On trouverait 2,645 751 311 qui a exactement les mêmes décimales que le $\sqrt{7}$ de la calculatrice. Est-ce ce constat qui fait office de vérification ?

Ainsi par deux fois le manuel sollicite une intervention de la calculatrice pour produire des décimales, la première fois dans le but de conjecturer l'assertion, et la deuxième fois dans le but de vérifier l'assertion. Mais à chaque fois il feint d'y voir un moment banal du travail mathématique d'approximation. Nous reviendrons sur le sens à donner aux moments de conjectures et de vérification dans l'organisation didactique. Retenons pour l'instant que :

> *l'instanciation décimale sur la calculatrice provoque des difficultés instrumentales qui concernent directement le problème d'approximation lui-même.*

En particulier l'exploitation de la production décimale de la calculatrice suppose que l'on puisse disposer effectivement de suffisamment de décimales avérées exactes. Certes l'affaire ne présente pas ici de difficulté pratique insurmontable car les termes de la suite sont des nombres rationnels à peu de chiffres. Mais lorsque la décimalisation des termes de la suite convergente ne dépendra que des performances de la calculatrice, le contrôle des dérapages dus à une propagation des erreurs par arrondis successifs risque de sortir des champs théoriques reconnus par l'institution[142]. Quelles significations didactiques peuvent recouvrir une conjecture ou une vérification dans de telles conditions ? Cette question nous conduit à la troisième remarque.

2.3 la calculatrice mais pas d'Algorithmique

La nouvelle praxéologie emprunte des éléments théoriques propres à l'Analyse numérique, mais ignore officiellement ce qui appartient plus spécifiquement à l'Algorithmique.

Laissons Brezinski (1988) formuler les liens entre ces deux domaines mathématiques :

[142] Peut-être est-ce la raison pour laquelle le manuel Bordas évite de faire appel à la calculatrice et d'aborder franchement ce qui a trait à la précision des valeurs approchées.

> L'Algorithmique traite des erreurs numériques engendrées par le fait qu'un ordinateur ne travaille qu'avec un nombre fini de chiffres significatifs […] L'Analyse numérique étudie la théorie mathématique des algorithmes tandis que l'Algorithmique étudie plutôt les problèmes posés par leur mise en œuvre sur ordinateur.

et insister :

> C'est le rôle de l'analyste numéricien d'étudier théoriquement les algorithmes ; c'est celui de l'informaticien d'étudier les problèmes fondamentaux posés par l'utilisation pratique et la programmation de ces algorithmes sur ordinateur. Il se peut, en effet, qu'un algorithme très précis sur le plan théorique se révèle absolument inutilisable en pratique soit à cause d'une trop grande propagation des erreurs numériques soit à cause d'un temps de calcul prohibitif.

Le problème des erreurs d'arrondis ou de troncatures générées par l'arithmétique de l'ordinateur est récurrent dans le calcul numérique assisté par ordinateur et conduit à des développements théoriques sur le conditionnement d'un problème et la stabilité d'un algorithme. Ovaert y fait d'ailleurs allusion dans le Bulletin Inter-Irem de 1981 en signalant et commentant (page 21) l'exemple de la suite numérique u, définie par :

$$\{ u(0) = 1 \ ; u(1) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \ ; u(n) = u(n-1) + u(n-2) \}$$ [143].

Mais, pas plus que les co-auteurs du Bulletin, il ne s'attarde sur cet aspect de l'instrumentation des calculs par la calculatrice. Les manuels vont adopter la même attitude.
Même si le problème de la propagation des erreurs reçoit un début de traitement institutionnel (avec les encadrements en classe de Troisième et de Seconde, avec l'approximation affine en classe de Première) ses manifestations au sein même de l'instrument de calcul ne sont pas étudiées[144]. En effet, la calculatrice est installée comme lieu de visualisation et de manipulation concrète des nombres pour stimuler l'activité mathématique de l'élève et l'orienter vers des phénomènes numériques qu'il doit regarder comme indépendants de l'intervention de l'instrument. Institutionnellement elle bénéficie d'une transparence mathématique sur laquelle se fondent les pratiques instrumentales qui la mobilisent. La raison première de cette transparence tient dans l'économie que fait EMS d'un complexe technico-théorique – comportant entre autres la représentation des nombres sur ordinateur et une arithmétique de l'ordinateur – dont l'intégration écologique nécessiterait un outillage important pour un usage restreint dans l'organisation mathématique actuelle[145].

---

143 Cette suite programmée sur une calculatrice, se met à croître après une période de décroissance, alors qu'elle est théoriquement convergente vers 0

144 Elles donnent lieu quelquefois à des activités numériques dont le dessein affiché est de montrer les "limites de la calculatrice" sur le thème accrocheur "comment ne pas tomber dans les pièges de la calculatrice ? ".

Certains manuels proposent quelques "informations" sur les capacités et les modes d'affichage d'une calculatrice ; nous y reviendrons.

145 Cf. thèse de Rajoson (1988).

3. Une première tâche emblématique

3.1 présentation de la tâche T1

La tâche T1 s'inscrit dans le premier problème fondamental de l'approximation numérique, à savoir approcher un réel donné avec une précision arbitraire voulue à l'avance (Pb n° 1).
Elle consiste à déterminer une valeur approchée décimale à 10^{-p} près de l'unique solution d'une équation mise sous la forme f(x) = c, où f est une fonction numérique reconnue bijective et strictement monotone d'un intervalle I sur un intervalle J contenant c. A ce titre, elle dérive directement de l'un des problèmes privilégiés par les promoteurs de la réforme pour

> leur rôle central dans l'élargissement du champ des concepts et la maîtrise de ceux-ci (Bulletin Inter-Irem, page 5),

celui de la résolution des équations numériques.
En fait la condition imposée à f d'être bijective et strictement monotone ne suffit pas à faire entrer cette tâche dans le champ de l'Analyse et à opérer une rupture avec les pratiques de décimalisation des classes antérieures à la classe de Première. Un contre-exemple caricatural serait "donner une valeur approchée décimale de la solution de l'équation 3x = 5" que l'on peut attacher, par le contrat numérico-algébrique, à la praxéologie de décimalisation que nous avons caractérisée précédemment. Pour lever ce qui pourrait être une ambiguïté dans notre étude, nous supposons qu'une fonction a été préalablement choisie et désignée. Sous cette forme, on rencontre très fréquemment la dite tâche dans les sujets du baccalauréat.

Supposons f croissante. Voici la technologie sur laquelle la classe de Première actuelle va installer les techniques pour accomplir T1 :

> **Tl 1** : si deux suites décimales adjacentes (a_n) et (b_n)[146] vérifient $f(a_n) \leq c \leq f(b_n)$ alors, quelque soit l'entier p, il existe un certain entier N qui permet l'inégalité $b_N - a_N < 10^{-p}$, et la troncature d'ordre p de b_N est une valeur approchée décimale à 10^{-p} près de la racine de l'équation.

On s'étonnera immédiatement de l'absence de cet énoncé dans chacun des manuels que l'on pourra consulter et cet étonnement sera le point de départ de notre analyse. Car ce sont effectivement de telles suites, ou du moins leurs premiers termes, que les manuels construisent soit par dichotomie soit par décachotomie (souvent appelé balayage).
On remarquera aussi que la technologie donne un rôle primordial à la calculatrice puisque c'est par son intermédiaire que l'on comparera les nombres $f(a_n)$ et $f(b_n)$ avec c.

> *Cette base technologique et le recours à la calculatrice peuvent se conjuguer dans plusieurs techniques, toutes instrumentées par la calculatrice.*

La mise en place d'une de ces techniques dans la classe emportera des choix de l'enseignant : celui de f, celui de c, celui de la précision et aussi celui de

[146] Deux suites de nombres décimaux avec b_n décroissante, a_n croissante et lim $(b_n - a_n) = 0$.

l'instrumentation. Cette dernière peut prendre diverses formes : réalisation et exécution manuelle ou automatique d'un programme de dichotomie ou de balayage, tabulations décimales de plus en plus serrées, cheminement sur l'écran graphique, recours à un solveur, etc.

Il nous faut souligner à ce propos que l'intégration progressive dans les calculatrices de fonctionnalités de plus en plus étendues a conduit à une évolution très rapide des techniques instrumentées sur cette même base technologique. On peut le constater à la lecture de la dernière version ministérielle sur l'utilisation des calculatrices en classe de première et terminale de lycées (elle date du 18 décembre 1997) :

> L'enseignement des mathématiques en classes de Première et Terminale des séries générales et technologiques des lycées fait appel à l'utilisation des calculatrices dans des situations liées aux programmes des classes concernées. Les objectifs visés et les capacités exigées des élèves sont précisés dans les préambules de ces programmes. A compter de la rentrée 1997, les élèves doivent être entraînés à l'utilisation des calculatrices graphiques. Ils doivent notamment savoir afficher à l'écran la courbe représentative d'une fonction ; cette capacité est exigible en fin de terminale, à compter de l'année scolaire 1997–1998.

Dix ans auparavant ces calculatrices n'existaient pas. Or l'affichage de la courbe représentative ouvre immédiatement la voie à la découverte et au maniement de nouvelles commandes, telles celles des touches Zoom ou Trace, pour de nouvelles fonctionnalités. Certains manuels avaient devancé ces recommandations en suggérant de nouvelles techniques. C'est le cas du manuel Belin 1995 qui, sous le titre "Quelle méthode pour résoudre une équation ?", commente ainsi (page 153) la résolution de l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$:

> l'utilisation d'une calculatrice programmable donne $0{,}4533 < \alpha < 0{,}4534$.
>
> L'encadrement final peut être obtenu de diverses façons : gestion directe de l'équation $f(x) = 0$, zooms successifs et fonction Trace. Tout dépend du type de calculatrice.

De la même façon, un exercice (dans le même manuel page 151) sur la résolution de l'équation $x^4 + 4x - 1 = 0$ se termine par la question :

> Utiliser un programme ou un écran graphique pour déterminer des valeurs approchées des deux solutions à 10^{-3} près.

Actuellement, la méthode du balayage décimal est la plus répandue. Elle a supplanté celle de la dichotomie ce qui nous prouve que l'évolution des techniques, attribuable au perfectionnement des matériels, participe à éloigner les pratiques institutionnalisées, dans les manuels et dans les classes, des intentions noosphériennes initiales. En effet Ovaert prenait soin, dans le Bulletin Inter-Irem, d'attacher au choix de l'algorithme des considérations extérieures à la seule recherche, sur une calculatrice, des premières décimales de la racine :

> On peut aussi couper à chaque pas l'intervalle en trois ou en dix. La convergence est alors géométrique de raison $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{10}$ suivant le cas. Il ne faut cependant pas en conclure que la

> décachotomie est plus performante que la dichotomie, car le nombre de tris à effectuer à chaque étape est en moyenne plus élevé. En fait, quelques expérimentations sur $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ par exemple, permettront de se convaincre que, sur une calculatrice non programmable, la dichotomie est nettement plus performante que la décachotomie ou la trichotomie, dès que l'on désire une précision de 10^{-2}, et a fortiori si l'on veut obtenir la précision de 10^{-4} ou 10^{-6}. De toute façon, ces méthodes sont fastidieuses dès que l'on recherche une grande précision. (page 19)

Il insistait sur l'importance théorique de la dichotomie qui

> permet de démontrer de façon simple quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions, dont l'énoncé figure au programme des Lycées (théorème des valeurs intermédiaires, principe de Lagrange, existence des racines $n^{\text{ièmes}}$, etc.)

et voyait, dans son utilisation, une preuve supplémentaire que

> les activités numériques peuvent fort bien mettre en jeu des méthodes très efficaces pour l'approfondissement théorique des concepts de l'Analyse, qui en retour, permet de contrôler les algorithmes utilisés.

A la lecture des programmes et des manuels, il s'avère vite que l'institution EMS n'a pas gardé la dichotomie comme objet d'enseignement ; le mot a même disparu de certains manuels. Non seulement on ne trouve aucune justification de théorème appuyée, même évasivement, sur la dichotomie, mais encore la concurrence avec le balayage dans la résolution approchée de l'équation f(x) = c, tourne à l'avantage de ce dernier. On peut penser que la préférence des manuels pour le balayage relève uniquement de motifs liés à l'usage d'une calculatrice. Par rapport à la dichotomie, le balayage :

- est plus apte à faire ressortir les arguments décimaux de la variable (à dichotomiser un intervalle entre deux entiers, on se retrouve à manier des décimaux qui ne répondent pas directement à la demande d'une approximation décimale à 10^{-p} près)
- est plus rapide à mettre en œuvre sur les calculatrices, maintenant que celles-ci sont munies d'une commande de tabulation des valeurs d'une fonction.

Avec ce premier tour d'horizon des techniques instrumentées pour la tâche T1, il nous faut admettre que les conditions écologiques actuelles ont mis à mal l'organisation praxéologique imaginée par les promoteurs de la réforme de 1982. Nous pointons là une manifestation de dynamique praxéologique que Chevallard (1988) replace dans une description du monde institutionnel où les praxéologies évoluent :

> On peut imaginer un monde institutionnel dans lequel les activités humaines seraient régies par des praxéologies bien adaptées permettant d'accomplir toutes les tâches voulues d'une manière à la fois efficace, sûre et intelligible. Mais un tel monde n'existe pas : les institutions sont parcourues par toute une dynamique praxéologique.

Mais cette dynamique ne tiendrait-elle ici qu'à l'évolution du matériel électronique ? Le croire serait oublier qu'une praxéologie dans une institution est un système complexe qui structure des éléments théoriques mathématiques et didactiques autour de la tâche.

> Les praxéologies, en fait, vieillissent : leurs composants théoriques et technologiques perdent de leur crédit et deviennent opaques, tandis que des praxéologies nouvelles émergent qui, par contraste, portent à suspecter d'archaïsme les techniques établies. (Chevallard, 1998)

Ainsi, au-delà de compétition entre la dichotomie et le balayage, le "vieillissement praxéologique" a touché deux concepts quantitatifs appartenant à l'Analyse numérique et qui étaient chers aux promoteurs de la réforme au nom de la dialectique quantitatif-qualitatif : la rapidité de la convergence et la performance de l'algorithme[147]. Ces deux concepts n'ont pas survécu à quelques années de fonctionnement didactique de la contre-réforme. On n'en trouve plus que des traces dans des commentaires de certains manuels. C'est le cas du Terracher (Hachette), qui préfère d'ailleurs parler de puissance :

> Il existe des algorithmes nettement plus puissants que la dichotomie ou le balayage. Il ne faut pas pour autant négliger ces derniers :
>
> > ils sont suffisants lorsque la précision exigée sur la racine d'une équation n'est pas trop fine
>
> > ils permettent de "dégrossir" une première approximation de la racine et donc d'initialiser un algorithme plus puissant. (Terracher, 1991, page 218)

De plus l'absence d'énoncé technologique à la source des techniques exposées nous montre que le vieillissement s'est attaqué aussi au concept qualitatif de convergence vers un nombre réel.

La praxéologie qui devait bâtir, à partir d'expériences numériques - comme celle de la résolution approchée d'une équation - la notion de valeur exacte par approximations successives (notamment décimales) débouche en fait sur la production isolée d'une valeur approchée répondant à la précision indiquée - implicitement ou explicitement - par la question.

> *La technique s'est dissoute dans une gestuelle sur machine d'où la notion de convergence est absente ou à peine évoquée, où la formalisation de l'algorithme a laissé place à un programme préfabriqué duplicable sur l'une ou l'autre des calculatrices les plus en vogue sur le marché scolaire, où l'encadrement ne connaît pas de traitement algébrique et ne subsiste que dans une ostension numérique ou graphique.*

On peut s'en rendre compte avec cet extrait de cours du manuel Hatier (édition1995, page 144 du livre maison) qui s'intitule "Comment calculer une racine que l'on sait exister" dans le paragraphe "Approche des racines d'une équation" :

> …en essayant de la coincer dans des intervalles de plus en plus petits. Pour cela, on utilise le théorème précédent ("si g est dérivable sur [a ; b] et strictement monotone sur cet

---

147 "Au niveau élémentaire où nous plaçons, on pourra apprécier la rapidité de convergence en évaluant pour tout entier p assez grand le nombre de pas pour gagner la $p^{\text{ième}}$ décimale ; on pourra apprécier la performance en évaluant le temps total de calcul nécessaire pour obtenir la précision 10^{-p} sur un matériel de calcul donné" (page 19 du Bulletin).

intervalle et si g(a) et g(b) sont de signes contraires, alors g s'annule en un point et un seul de [a ; b] ") en cherchant des intervalles où la fonction change de signe entre les deux extrémités de l'intervalle.

Reprenons l'équation : $x^4 + 4x = 3$ (pour $x \geq 0$).

Elle équivaut à $f(x) = 0$ en posant $f(x) = x^4 + 4x - 3$.

On sait que la racine α appartient à l'intervalle [0 ; 1].

En balayant cet intervalle, on peut affiner la localisation de cette racine α.

$f(0,5) \approx - 0,93$

$f(0,8) \approx 0,609$ donc $0,5 < \alpha < 0,8$.

$f(0,69) \approx - 0,013$

$f(0,70) \approx 0,0401$ donc $0,69 < \alpha < 0,70$.

On peut dire que 0,69 est une approximation de α à 0,01 près par défaut. Et si on souhaite une meilleure approximation, il suffit de calculer f(0,691), f(0,692), etc. La calculatrice programmable est ici indispensable.

La référence théorique présente est un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que le manuel a pris soin de justifier auparavant de la manière suivante :

On conçoit sans peine que, f étant dérivable sur [0 ; 1] et strictement croissante sur cet intervalle, f(x) prend une fois et une seule toute valeur de l'intervalle [- 3 ; 2].

Or $0 \in [- 3 ; 2]$. Donc on peut trouver $\alpha \in [0 ; 1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Entre le théorème et la technique, le relais technologique ne cherche aucune référence dans le concept de convergence et élude la formulation de l'algorithme.

Ainsi, à travers ce premier examen de la configuration technique de la tâche T1, nous comprenons que l'action actuelle de l'objet calculatrice dans l'écologie de la praxéologie n'a pris effet qu'à la faveur de mouvements dans le bloc technologico-théorique[148] et dans l'organisation didactique. Ce sont ces mouvements que nous allons maintenant étudier.

[148] Identifiable à celui du savoir par opposition au bloc tâche-technique identifiable au savoir-faire.

3.2 le refoulement de la topologie de ℝ

Repartons de l'exemple précédent (celui que nous avons extrait du cours du manuel Hatier 1995). La localisation de la racine α dans l'intervalle [0 ; 1] - grâce au théorème cité et à la visualisation graphique - recouvre à la fois son existence et son unicité et la technique d'approximation décimale, appelée affinement de la localisation et instrumentée par la calculatrice, ne se développe que sur les terrains numérique et graphique. Ces constats mettent en lumière à la fois :

- l'évincement de la notion de continuité, ou plutôt la substitution du continuum graphique (dit intuitif) à un continuum numérique construit, qui coupe court à toute réflexion sur l'existence de la solution.
- la transformation de la problématique d'approximation en une problématique de localisation qui fait l'économie d'un travail sur les notions topologiques de distance et de convergence.

C'est bien le besoin d'une topologie de R qui est nié et, avec lui, la nécessité d'une construction du nombre réel (ici la racine positive α de l'équation $x^4 + 4x = 3$) comme limite de ses approximations décimales.
Ce premier mouvement du bloc technologico-théorique ne s'est pas imposé tout de suite dans la mise en œuvre de la contre-réforme et c'est pourquoi nous parlons de refoulement. Nous prendrons pour preuve l'activité suivante, extraite de la préparation aux notions de limite et continuité, dans le manuel Dimathème pour Première S (Didier, édition 1982, pages 185 à190). Il s'agit justement de montrer que l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$ possède bien une solution, qui a été localisée auparavant entre 0 et 1.

> On appelle D_n ($n \in N$) l'ensemble des décimaux d tels que le nombre $10^n.d$ soit un entier relatif (ex. $2{,}427 \in D3$).
>
> a) combien l'ensemble $[0 ; 1] \cap D_n$ a-t-il d'éléments ?
>
> b) soit $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe 2 réels a_n et b_n, tels que $a_n = \text{Max } \{x \in D_n \text{ , } f(x) < 0\}$ et $b_n = \text{Min } \{x \in D_n \text{ , } f(x) > 0\}$. Quelle relation existe-t-il entre a_n et b_n ?
>
> c) montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$. Soit x_0 cette limite.
>
> d) montrer que $\exists\, k > 0$ tel que :
>
> $\forall x \in [0 ; 1]$ et $\forall x' \in [0 ; 1]$, $|f(x) - f(x')| < k.|x - x'|$
>
> e) en déduire que $\forall n \in N$, $|f(a_n) - f(b_n)| < k.10^{-n}$ puis que $-k.10^{-n} < f(x_0) < k.10^{-n}$
>
> Conclure que $f(x_0) \neq 0$ conduit à une contradiction.

Certes le manuel prend soin de déclarer :

> Cette étude est importante mais pas très facile[149] … et elle n'est pas indispensable pour la suite de notre débat.

Mais ne nous trompons pas, la prolepse[150] ne fait que suggérer le relais professoral pour mieux souligner tout de suite le prix qu'il faut attacher à cette étude, car quelques lignes plus loin :

> Nous n'avons pas seulement amélioré la précision en coinçant la solution x_0 dans les intervalles $[a_n ; b_n]$; l'inégalité $|f(x) - f(x')| < k.|x - x'|$ sur l'intervalle [0 ; 1] nous a permis de conclure à l'existence de cette racine.

Voilà l'enjeu didactique dévoilé : l'exposition d'une preuve de l'existence du nombre x_0. Il répond à deux intentions manifestes :

- la première est de justifier le travail graphique et le travail numérique, c'est-à-dire d'expliquer le bien-fondé de la technique instrumentée à la fois par le graphique et la calculatrice ;
- la deuxième est de faire de la décimalisation du nombre une voie de passage du discret au continu, de la convergence d'une suite à la limite d'une fonction.

Elle est conduite en séparant ce qui tient à l'hypothèse visible, celle de la croissance, et ce qui ressort d'une hypothèse cachée : celle de la continuité[151].
La clef mathématique de la maïeutique élaborée par le manuel est l'inégalité lipschitzienne $|f(x) - f(x')| < k.|x - x'|$. Mais il lui a fallu aussi disposer de la notion de suites adjacentes et du théorème sur leur convergence. Il avait pris soin auparavant de présenter la notion et d'établir la convergence en s'appuyant sur la propriété admise (et hors programme) que, dans R, toute suite bornée et monotone est convergente (propriété équivalente à celle dite de la borne supérieure et à celle de la complétude de R)[152].

> *Pour ce manuel de 1982, le dépassement des cadres graphique et numérique à l'occasion de la décimalisation de la racine réelle d'une équation permet une*

[149] On remarquera le passage délicat entre la question d) et la question e) puisqu'il faut tout à la fois faire jouer la croissance de f et tenir compte des signes de $f(b_n)$ et $f(a_n)$ pour obtenir l'encadrement $-k.10^{-n} < f(x_0) < k.10^{-n}$ à partir des deux inégalités, $f(b_n) - f(x_0) < k.10^{-n}$ et $f(x_0) - f(a_n) < k.10^{-n}$.

[150] Figure de rhétorique par laquelle on va au devant des objections (Le Robert pour tous, 1995)

[151] Actuellement c'est la dérivabilité qui assure la continuité. Mais comme cette dérivabilité sert à dériver la fonction et à établir le tableau de variations, son rôle "topologique" n'est pas mis en lumière. De même le théorème "bijection + stricte monotonie" ne donne pas de rôle à la continuité.

En particulier il ne dit pas que la stricte monotonie n'est pas nécessaire pour qu'une racine existe dès lors que la fonction est continue et que les discontinuités peuvent s'opposer à la technologie des suites adjacentes.

Prenons par exemple la fonction définie de [0 ; 1] dans [0 ; 1] par $f(x) = x$ sauf $f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$ et $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$.

Il s'agit bien d'une bijection. Résolvons l'équation $f(x) = \frac{1}{3}$ par l'une ou l'autre des techniques actuelles, nous trouvons $x = 0{,}333$ … alors que la solution est $\frac{2}{3}$

[152] Dans les manuels actuels, on ne trouve plus de référence à la notion de suites adjacentes. Par contre on présente le "Théorème des gendarmes" par lequel si un nombre réel a est encadré par les termes de deux suites convergentes toutes les deux vers l, alors a = l.

> *première rencontre avec les concepts de continuité et de limite d'une fonction en les articulant avec celui de convergence d'une suite.*

L'affaire est menée sans insister sur la continuité, mais sans l'occulter. Ce cheminement respecte l'une des propositions maîtresses de la contre-réforme : faire surgir un concept du déroulement d'activités inspirées par quelque grand problème, et celui de la résolution d'une équation de type f(x) = c en est un. Conformément au programme, le problème est repris dans un deuxième temps, celui du calcul différentiel et du développement limité d'ordre 1. On retrouve là les propositions de Lazet et Ovaert (1981) :

> En Première l'étude d'exemples de convergences peu rapides ou très rapides incite à rechercher les facteurs qui gouvernent cette rapidité : pente des sécantes, pente des tangentes. L'étude de ces facteurs met en jeu, sur des exemples, des inégalités lipschitziennes ou tayloriennes. En outre on peut enrichir les suites de référence utilisées, définir la notion de limite d'une suite (passage du quantitatif au qualitatif). Puis ces concepts, joints à l'étude des développements d'ordre 0 ou 1, permettent d'aborder le concept de limite d'une fonction et celui de dérivée. Inversement l'étude des dérivées est investie dans celle des suites (monotonie, rapidité de convergence …) Et ainsi de suite à tous les niveaux.

Mais dès 1982, la noosphère regimbe devant la continuité locale[153] et cherche à modifier l'ordre théorique classique. L'idée maîtresse est de se passer de la notion de continuité en la cachant derrière celle de dérivabilité. Ainsi le programme de la classe de Première spécifie :

> Toute insistance théorique sur la notion de continuité en un point étant exclue, on s'adressera le plus souvent, dans l'intérêt même des études locales, à des majorations plus précises, et on éclairera par contraste quelques situations de discontinuité.
>
> On recherchera en priorité un développement d'ordre 1, dont l'existence implique celle d'un développement limité d'ordre 0.

La démarche du manuel Dimathème de 1982 est encore trop empreinte de formalisation et de manipulations algébriques. Elle ne pourra pas se maintenir lors de l'aménagement de programme de 1986 dont le premier motif semble très lié à l'apparition d'un public scolaire jugé plus rebelle aux théorisations :

> On a eu le double souci de tenir davantage compte des rythmes d'acquisition des élèves et des difficultés (conceptuelles et techniques) présentées par certaines notions, et d'ouvrir les sections scientifiques à un plus grand nombre d'élèves pour répondre à une demande sans cesse accrue d'ingénieurs, de techniciens, de chercheurs et d'enseignants.
>
> On a voulu <u>alléger la charge globale des capacités à acquérir</u> afin de permettre une meilleure poursuite des différentes parties du programme : on a procédé à quelques allègements ponctuels et on a limité de façon plus stricte le niveau d'approfondissement à donner aux concepts, ainsi que le degré de technicité pour l'étude de certains problèmes.

---

153 Les difficultés que représentait la mise en place de cette notion pendant la période des mathématiques modernes étaient connues de la noosphère (cf. article de Revuz dans le Bulletin n°283 de l'APMEP, 1972, pages 287 à 304)

Dans cet allègement - d'autres diront, plus tard, infléchissement - l'enseignement de l'Analyse est particulièrement visé :

> En Analyse, cette intention s'est traduite par un changement d'approche du concept de limite (convergence d'une suite, limite en un point d'une fonction) : les définitions et propriétés générales, difficiles à assimiler et sans portée réelle à ce niveau, ne sont plus au programme. La démarche proposée comporte deux temps : observation de suites et de fonctions de référence ; traitement de quelques exemples par comparaison aux objets de référence.

Le chapitre "Fonctions numériques" commence cette fois par :

> L'objectif principal est d'exploiter la dérivation pour l'étude locale et globale des fonctions. Les quelques notions sur les limites qui figurent au programme fournissent un langage commode pour introduire la notion de dérivée. Elles ne constituent pas un objectif en elles-mêmes ; il n'y a pas lieu de s'attarder sur leur étude.

et comporte cette mise au point nette :

> Les notions de continuité en un point et de continuité sur un intervalle ne sont pas au programme.

D'ailleurs le programme de la classe de Terminale (1987) illustre bien l'état d'esprit des auteurs de ces changements :

> La continuité sur un intervalle est introduite dans le seul but de fournir un langage efficace pour l'énoncé et l'emploi de quelques théorèmes usuels ; on se bornera à l'étude de situations où les énoncés du problème suffisent pour établir simplement la continuité des fonctions mises en jeu.

Les questions topologiques sous-jacentes aux manipulations des intervalles de R et de leurs images par des fonctions numériques doivent être impérativement éludées. Si elles surviennent dans les études de fonction ou la résolution de problèmes, elles doivent être traitées seulement par le graphique ou le numérique (pour s'approcher de 0, on calcule avec différents 10^{-p} tirés de la calculatrice). On assiste, au fil des années, à une élimination progressive des quelques insertions de la notion de voisinage qui avaient survécu au début de la contre-réforme et à la relégation du terme de voisinage parmi les accessoires de commodité langagière. La présence et l'utilisation des encadrements ou des valeurs absolues se fait de plus discrète dans les parties cours des manuels et elle reflue complètement des parties exercices. En particulier l'inégalité triangulaire sur les distances, qui apparaissait encore dans le cours du manuel Terracher de 1987 (page 282) sur les limites finies de fonctions en un point, s'en va sur la pointe des pieds dans les éditions suivantes. Le manuel répercute l'allègement conçu dès la classe de Seconde que nous avons mis en évidence dans le chapitre précédent (chapitre C_2, paragraphe 2).

Ainsi l'organisation mathématique imaginée par la commission Inter-Irem a subi aussi le dégraissage (encore un mot emprunté à Chevallard, 1988) de la continuité, et à travers elle, des propriétés topologiques de R notamment celles sur lesquelles s'appuient l'approximation décimale de la racine de l'équation f(x) = c. Ce refoulement de la topologie de R et la désaffection concomitante pour certains objets de son outillage (encadrements, valeur absolue, distance, inégalité triangulaire) maintient les techniques de résolution approchée de l'équation sous la coupe de la technologie naïve que nous avons présentée, faite d'intuition numérico-graphique sans travail algébrique. Cette technologie, qu'aucun manuel ne cherche à questionner, n'en remplit pas moins sa fonction écologique, celle de permettre la vie des techniques instrumentées par la calculatrice. C'est ce que nous rappelle Chevallard (1996) :

> En toute institution, l'existence d'une technologie, même frustre, est une condition écologique essentielle de l'existence d'une technique.

3.3 l'effacement de la nature algorithmique des procédés d'approximations successives

Commentant les méthodes algorithmiques possibles dans la recherche de solutions approchées d'équations numériques Ovaert (Bulletin Inter-Irem, page 19) s'arrêtait sur le découpage à pas fixe (telle la dichotomie, mais aussi le balayage) en énumérant les avantages suivants :

> La familiarisation avec les suites et les convergences ;
>
> L'exploration des ordres de grandeur des suites géométriques ;
>
> La construction et la mise en œuvre d'un algorithme de tri ;
>
> La pratique du calcul numérique et algébrique ;
>
> L'obtention de majorations et d'encadrements ;
>
> La mise en évidence de la différence entre rapidité de convergence et performance.

auxquels il ajoute celui d'un retour sur les propriétés locales des fonctions numériques elles-mêmes, en déclarant un peu avant :

> Dans la résolution d'une équation numérique, l'étude de convergences peu rapides, ou très rapides incite à rechercher les facteurs qui gouvernent cette rapidité : pente des sécantes, pente des tangentes. L'étude de ces facteurs met en jeu, sur des exemples, des inégalités lipschitziennes ou tayloriennes. (Bulletin Inter-Irem, page 7)

Dans leur manière de traiter la tâche, les manuels Belin (1995) et Hatier (1995) ne laissent subsister de l'algorithme que le calcul des premiers termes et des kits de programmations sur calculatrice ou ordinateur. Aucun des avantages potentiels énumérés ci-dessus n'est exploité. Certes l'usage des commandes de graphique ou de tabulation sur la calculatrice permet l'économie de la formalisation de l'algorithme de balayage. Pouvons-nous pour autant imputer à ce seul aspect instrumental de l'intervention de la calculatrice une telle dévalorisation de l'algorithme dans l'environnement théorique de cette tâche ? Nous préférons avancer une autre thèse : le fonctionnement didactique tend à structurer l'organisation didactique en tâches bien

séparées et ne souffre pas la mise en concurrence de plusieurs techniques ni le chevauchement des concepts qu'elles jugent fondamentaux sur une même tâche.
Ce phénomène didactique n'est pas en lui-même surprenant. Par exemple la séparation en chapitres distincts des suites et des fonctions permet l'accès séquentiel à ces deux objets d'enseignement. Il est une manifestation de la loi d'abaissement des niveaux trophiques dont nous empruntons l'énonciation à Artaud (1997) :

> L'organisation d'un curriculum montre, d'une manière générale, la différenciation et l'autonomisation internes du corpus enseigné. Ce phénomène didactique est lié notamment à la nécessité d'abaisser le nombre d'interrelations entre les objets du corpus, pour permettre le contrôle de la charge didactique (pour l'enseignant) et de la charge cognitive (pour l'élève).

> *Mais ce cloisonnement a contrarié l'organisation didactique prévue par les promoteurs de la réforme au point d'éliminer certaines activités qu'ils avaient retenues comme fondamentales dans l'enseignement de l'Analyse et notamment celles qui faisaient intervenir les algorithmes d'approximations successives.*

Dans le manuel Dimathème de 1982 - nous l'avons déjà signalé - la technique proposée, basée sur la dichotomie, donne lieu à la mise en place formelle d'un algorithme sous forme d'un organigramme dont la présence se veut une initiation à la programmation (la construction et la mise en œuvre d'un algorithme de tri) en deçà de sa réalisation dans une calculatrice ou un ordinateur.
Mais, surtout, le thème de résolution approchée d'une équation est immédiatement repris dans un chapitre consacré aux fonctions par des "Prolongements" où apparaissent deux autres algorithmes, celui de Newton (connu également sous le nom de Newton-Raphson) et celui du point fixe (cf. documents 2 en Annexe, Volume 2). Cinq ans plus tard, en 1987 - alors qu'un premier toilettage du programme a déjà eu lieu - le manuel Terracher (Hachette) prend une décision semblable. Il fait suivre le chapitre "Applications de la dérivation" où se trouve la résolution approchée de l'équation f(x) = c par dichotomie et balayage, d'un autre chapitre appelé "Quelques problèmes de l'Analyse". Une bonne moitié de ce chapitre est occupée par des équations pour la résolution desquelles les auteurs insistent sur l'intérêt à :

> construire un algorithme d'approximation d'une racine par une suite numérique,

Dans ce but, ils présentent trois exemples d'utilisation de la méthode de Newton (cf. documents 2 en Annexe, Volume 2).

Arrêtons-nous quelques instants sur cette méthode qui aurait pu fournir une technique instrumentée concurrente à celles qui étaient attachées institutionnellement à la résolution de la tâche T1. Notre opinion est maintenant que, quelle que soit l'insistance du manuel, la concurrence ne pouvait pas durer ; pour au moins trois raisons[154] que nous tirons de l'analyse écologique :

- contrairement aux techniques instrumentées issues du balayage ou de la dichotomie, celle qui s'appuie sur la méthode de Newton ne peut se passer d'une formalisation

[154] Cf. thèse de Rajoson (1988).

algébrique par une suite numérique (alourdissement de la charge didactique de l'enseignant et de la charge cognitive de l'élève)
- même après une première localisation, elle peut ne pas réussir (la convexité intervient dans conditions de convergence : élévation trophique)
- elle brouille le problème de la précision.

Illustrons ces propos en retravaillant l'exemple du manuel Hatier (1995) qui consistait à approcher une racine α de l'équation $x^4 + 4x - 3 = 0$ (celle qui appartient à l'intervalle [0 ; 1]). Posons $f(x) = x^4 + 4x - 3$. L'algorithme de Newton fournit la suite récurrente (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{x_n^4 + 1}{x_n^3 + 1} = g(x_n) \end{cases}$$

Calculons, avec une calculatrice scientifique ordinaire (par exemple la Casio 6800G, en nous servant de la touche $\boxed{\text{Ans}}$), les premiers termes de la suite arrondis à 4 décimales :

$$x_1 = 0{,}7500 \ ; \ x_2 = 0{,}6944 \ ; \ x_3 = 0{,}6925 \ ; \ x_4 = 0{,}6925.$$

Nous sommes tentés d'annoncer que 0,6925 est la valeur approchée décimale de la racine α arrondie à 4 décimales. Reste à convaincre ; dans l'organisation mathématique d'une classe de Première S actuelle, deux voies s'ouvrent à nous.
La première est de retourner à la fonction f avec la calculatrice : f(0,69245) = - 0,0002… et f(0,69255) = + 0,0002… C'est gagné ! mais en vendant notre âme à la calculatrice à l'identique de la méthode du balayage. Alors que la mise en place de l'algorithme est beaucoup plus coûteuse en calculs algébriques, elle n'a pas libéré la maîtrise de la précision d'une nouvelle intervention de la calculatrice.
La deuxième est d'étudier l'évolution de l'erreur $|x_n - \alpha|$, comme nous l'avons déjà vu pour l'algorithme de Héron. Mais le travail s'avère algébriquement insurmontable dans l'institution. Il faut renoncer et renvoyer cette étude sur la classe de Terminale qui reconnaîtra la situation dite du point fixe et disposera d'autres outils pour majorer $|x_n - \alpha|$ par une suite géométrique convergente vers 0[155].
Les auteurs du manuel Terracher 1987 qui, malgré les nouvelles orientations de 1986, ont maintenu une présentation détaillée de cette méthode, vont lâcher prise et ne la laisseront, dans leurs éditions suivantes, que sous la forme d'exercice dans le chapitre "Généralités sur les suites numériques", sans même faire mention de la performance de l'algorithme.

Le programme de 1991 entérine cette évolution. Il confirme le report des suites récurrentes sur la classe de Terminale, hors les suites arithmétiques et les suites géométriques :

> Les élèves doivent savoir exprimer en fonction de n les termes d'une suite $u_n = f(n)$ tels que u_{n+1}, u_{n-3}, u_{2n} et savoir calculer les premiers termes d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et u_0. En dehors du cas des suites arithmétiques et géométriques, aucune autre capacité n'est exigible des élèves sur les suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

[155] On pourra, par exemple, majorer $|g'(x)|$ sur l'intervalle [0,6 ; 0,7]

A partir de cette décision noosphérienne, les manuels de la classe de Première délaissent les algorithmes d'approximations successives d'une racine d'une équation, que cette racine soit inconnue ou connue. Tout ce qui a trait à la construction et au fonctionnement de tels algorithmes est confiné dans les chapitres consacrés aux suites numériques et complètement détaché de ceux des fonctions.
Conformément au programme de 1991, les manuels actuels traitent, en Travaux Pratiques, au moins un exemple d'algorithme d'approximations successives d'un nombre[156], mais à condition que ce nombre soit connu par ailleurs – tel l'algorithme de Héron convergeant vers $\sqrt{a}$, que nous avons déjà mentionné.

> *Mais il n'est pas question de replacer le nombre dans l'ensemble des valeurs prises par une fonction sur un intervalle. Les manuels ne sont donc plus en mesure d'articuler les deux approches du problème de l'approximation de la racine d'une équation, l'une discrète et l'autre continue comme aurait dû leur permettre la méthode de Newton.*

D'ailleurs le manuel Terracher a complètement tourné la page puisqu'il ne propose plus, à partir de l'édition de 1991, de suite définie par récurrence, autre que la série géométrique.

4. L'économie didactique de la tâche T1

4.1 le rêve brisé de l'expérimentation numérique

Revenons à la tâche T1 lors de ses premiers pas dans les organisations mathématique et didactique issues de la contre-réforme. Si le manuel Dimathème de 1981 puis le manuel Terracher de 1987 prennent soin de retravailler la résolution de la tâche, même après avoir installé officiellement une technique, c'est qu'ils s'inspirent, à la lettre, des recommandations des promoteurs de la réforme. Voici, pour le comprendre, les explications que fournissent les auteurs du manuel Terracher sur leurs intentions :

> Les deux idées qui gouvernent ce dernier chapitre concernent :
>
> > les problèmes qui suscitent l'intervention de l'Analyse, et donc, celles des méthodes de recherche et de résolution.
>
> > le fonctionnement sur une même situation des divers concepts, qu'ils soient relatifs aux polynômes, aux suites, aux fonctions, aux courbes, etc.

On retrouve, presque mot pour mot, certaines phrases du plaidoyer de Lazet et Ovaert en faveur des "activités de recherche de plusieurs méthodes de résolution et de comparaison de leur performance"

[156] "En dehors du cas des suites géométriques et des problèmes d'approximation d'un nombre donné, l'étude de convergence d'une suite récurrente n'est pas au programme." "Sur les exemples d'approximation étudiés, on pourra mettre en évidence différentes étapes : construction d'un algorithme d'approximation, étude de la suite ainsi obtenue, obtention de la précision obtenue." (1991)

> Ce type d'activité a notamment trois qualités : développer l'autonomie de l'élève (capacité à réinvestir ses connaissances de manière pertinente dans des contextes variés), son imagination (découverte de méthodes), et ses capacités d'analyse critique (comparaison de performances et de méthodes). (Bulletin Inter-Irem déjà cité, page 7)

Ils les couplaient, d'ailleurs, avec des activités d'approfondissement d'un concept :

> Il s'agit aussi bien d'approfondissement théorique que d'approfondissement expérimental, d'un travail sur un exemple plus complexe ou une extension du domaine des interventions du concept étudié.

dont ils détaillaient le déroulement dans leur exemple préféré :

> Dans la recherche d'approximations de nombres tels que $\sqrt{2}$ ou π on peut faire des conjectures guidées par les résultats des procédés expérimentaux utilisés et tester ces conjectures avec la calculatrice ; on peut aussi chercher des majorations, des comparaisons avec des suites de référence, dégager des facteurs régissant la rapidité de convergence et construire des algorithmes plus performants.

Ce qu'Ovaert et Lazet qualifient d'*expérimentation numérique* apparaît comme un élément de l'organisation didactique capable de faire de la dialectique quantitatif-qualitatif le moteur de la construction théorique.

> *Dans leur projet didactique, les tâches d'approximation numériques doivent être conçues comme génératrices de l'œuvre à étudier (l'Analyse).*

Sans discuter, dans sa généralité, du caractère expérimental de l'activité mathématique, relevons que les auteurs attachent ici quatre moments à un travail mathématique de l'élève pour lui attribuer le qualificatif d'expérimental :

- Un moment d'observation de résultats numériques (le quantitatif) ; la calculatrice joue un rôle primordial car elle permet d'obtenir ces résultats très rapidement
- Un moment de formulation (qualitative) d'une conjecture
- Un moment de reprise de la conjecture grâce à des tests (quantitatifs) ; on accepte ou on rejette la dite conjecture.
- Un moment de dépassement de la conjecture par l'émergence d'un concept (qualitatif) nouveau.

On voit alors combien il importe pour les auteurs que le travail de l'élève soit organisé autour d'un problème dont la méthode de résolution n'est pas encore institutionnalisée et pour des finalités d'approfondissement d'un concept, de confrontation de plusieurs concepts ou d'élargissement du champ des concepts.

On voit aussi combien il importe pour eux de privilégier *la construction et la mise en fonctionnement d'un algorithme d'approximations successives* - d'un nombre connu ou d'une racine inconnue d'une équation. Avec elles, l'enseignant dispose d'un levier doublement actif dans l'enseignement de l'Analyse : heuristique et épistémique d'une part, instrumental et sémiotique d'autre part. En effet celles-ci :

- allient la prise en compte d'éléments quantitatifs, comme les valeurs des premiers termes et surtout la rapidité de convergence et d'éléments qualitatifs, *les facteurs qui influencent la convergence de l'algorithme* - même si cette dernière n'est pas formalisée.
- permettent d'articuler d'une part les points de vue du continu et du discret, le continu à travers l'interprétation graphique d'une fonction et le discret à travers la répétition des opérations et des comparaisons numériques ; d'autre part les points de vue local et global dans l'examen *des facteurs qui déterminent la convergence et de ceux qui "gouvernent la rapidité de convergence"*
- mobilisent et font se rencontrer, dans des gestes supposés simples, les principaux registres sémiotiques : graphique, tabulaire, algébrique.

Les idées de Lazet et Ovaert sont reformulées avec force dans les commentaires du programme de 1982 :

> Dans tous les cas l'expérimentation doit être conjuguée avec l'obtention théorique de majorations et d'encadrements, qui permettront <u>de confirmer ou d'infirmer les conjectures issues de l'expérimentation</u>, de contrôler les algorithmes utilisés, de comparer leurs performances et d'apprécier la pertinence des moyens de calcul. On entraînera, devant un problème à résoudre, à construire un algorithme et à l'exprimer clairement.

Pour favoriser la mise en place des activités de recherche et d'approfondissement, les instructions officielles du début de la contre-réforme installent un nouvel objet dans l'organisation didactique. Elles le nomment Thème[157] et le programme décide de fournir (à titre indicatif) des listes de thèmes en insistant sur la possibilité de mener de front les études sur les suites et les fonctions. Aussi, à l'instar du manuel Dimathème, le thème "Exemples d'approximation d'un nombre réel solution d'une équation est-il retravaillé par certains manuels après l'étude du calcul différentiel.

Mais l'examen de ces prolongements (cf. documents 2 en Annexe, Volume 2) révèle vite que l'activité de l'élève telle que la définit le manuel ne contient pas cette phase de conjecture espérée par les promoteurs de la réforme. L'expérimentation numérique est réduite à des vérifications de résultats préétablis ou à des manipulations préparatoires commandées directement et péremptoirement par le manuel, lesquelles débouchent uniquement sur des constats.

Du constat numérique à l'élaboration d'une conjecture susceptible d'être formulée en termes théoriques sur les algorithmes ou les fonctions, il y a un passage dont la construction didactique n'est pas résolue par les manuels. Car le réel empirique sur lequel est censée porter l'expérimentation n'est pas numérique ; plus précisément, il n'est pas essentiellement numérique. Ses objets premiers - ceux que vise l'expérimentation – sont des fonctions ou des suites et il importe que les conjectures produites par les élèves se fassent dans des termes qui les concernent au-delà de leur réalisation numérique ou graphique.

[157] Le manuel Dimathème préfère parler de Prolongement.

Comment réussir cet objectif dans le contexte d'une familiarisation naissante avec ces objets ? Le niveau de conceptualisation que requiert par exemple une conjecture sur un "facteur qui gouverne une convergence d'un algorithme" nous semble hors de portée de celui qui ne connaît de l'algorithme que ses aspects procéduraux de producteur d'une suite de nombres. Qui plus est, la traduction de l'algorithme dans un ensemble de commandes adaptées à la calculatrice peut créer des objets pseudo-mathématiques qui prennent la place des facteurs recherchés.

Il semble bien que les manuels ne soient pas les seuls à rencontrer des difficultés à mettre en forme la double innovation pédagogique, celle de l'expérimentation numérique et celle des Thèmes. C'est ce que nous apprend l'exposé des motifs de l'aménagement des programmes qui va substituer, en 1986, les "Travaux pratiques" aux Thèmes :

> On a voulu insister sur l'importance du travail personnel des élèves, tant en classe qu'à la maison, et sur le rôle formateur des activités de résolution de problèmes. Dans cette perspective, <u>une rubrique de travaux pratiques a été introduite dans chaque chapitre</u> ; leur fonction est précisée en tête de programme (mieux dégager les objectifs et les contenus, mieux préciser les capacités requises ou non requises des élèves, <u>limiter de façon plus stricte le niveau d'approfondissement à donner aux concepts ainsi que le degré de technicité exigible des élèves pour certains problèmes</u>). En revanche, l'idée de thème, introduite dans le programme de 1982, n'a pas été conservée, car son interprétation a donné lieu à de nombreuses ambiguïtés.

Derrière les limitations sur le "niveau d'approfondissement" et le "degré de technicité" se cache en fait le constat, par la noosphère, de l'échec institutionnel de la notion didactique d'expérimentation numérique. Certes ce mot continue à apparaître dans les objectifs généraux :

> Les problèmes et les méthodes numériques permettent d'entraîner les élèves à combiner l'expérimentation et le raisonnement en mathématiques et concourent au développement des qualités de soin et de rigueur.

Mais l'idée de conjecture n'a plus cours dans les discours officiels relatifs au rôle de la calculatrice, comme on peut le constater dans ces extraits du programme de 1986 (classe de Première S) :

> L'emploi systématique des calculatrices vient renforcer les possibilités d'étude de ces questions, aussi bien <u>pour effectuer des calculs que pour vérifier des résultats ou alimenter le travail de recherche</u>.
>
> Sur les exemples d'approximation étudiés, on pourra mettre en évidence différentes étapes : construction d'un algorithme d'approximation, étude de la suite ainsi obtenue, obtention de la précision obtenue.

en le comparant avec ce paragraphe du programme de 1981 (classe de Seconde) :

> L'emploi des calculatrices a lui-même ses objectifs ; de leur utilisation judicieuse on peut attendre une expansion des activités expérimentales (élaboration de conjectures à partir de recherches sur des exemples), et en retour de nouvelles motivations d'approfondissement

théoriques nées du besoin de contrôler les algorithmes et d'apprécier la pertinence des outils de calcul.

Ce recentrage pédagogique qui prend acte du fonctionnement du système didactique va retirer aux algorithmes d'approximations successives d'un nombre le rôle dynamique que les réformateurs de 1981 leur avaient assigné dans l'enseignement de l'Analyse. Il va, en particulier, condamner la reprise de la résolution approchée d'une équation par une méthode plus performante de type itératif, participer à chasser la méthode de Newton de la classe de Première et isoler la tâche T1. A la place de la praxéologie touffue et ramifiée autour des suites et des fonctions numériques que les réformateurs avaient espérée pour cette tâche, nous sommes obligés de constater une praxéologie quasiment ponctualisée sur l'obtention d'un unique nombre décimal, sans réelle problématisation de la tâche elle-même.

4.2 l'actuelle économie didactique autour de la tâche T1

Pressentie pour motiver la construction d'algorithmes et donner du sens à l'infinité d'un processus de convergence vers un nombre réel, cette tâche a changé de statut didactique. Elle a cessé d'être une activité numérique conçue pour catalyser la rencontre des concepts de continuité et de convergence. Elle ne fonctionne pas sur des enjeux topologiques exprimés en termes de majorations et d'encadrements qui auraient activé le registre sémiotique algébrique tout autant que les registres numériques et graphiques. Elle est devenue un exercice d'application numérique accroché au tableau de variations de la fonction dans un univers exclusivement façonné par l'enjeu numérique. Elle s'est débarrassée de la mise en forme algorithmique qu'elle a remplacée par une succession de procédures attachées uniquement à la calculatrice.

L'économie didactique actuelle donne la responsabilité à l'enseignant d'assurer la faisabilité de la tâche par l'élève en choisissant les données f et c ; pour c, ce sera un nombre décimal et le plus souvent 0 ; pour f une fonction à dériver apte à faire produire et justifier par l'élève, via l'étude du signe de la dérivée, le tableau de variations et le dessin d'un morceau de la courbe représentative. L'enseignant est déchargé par contre de la construction d'un algorithme itératif qui marque le caractère infini du processus d'approximation et articule le discret de la suite numérique avec le continu de la fonction. Pour la tâche elle-même, il lui revient de fixer la précision de la valeur approchée décimale et *de garantir une instrumentation possible par la calculatrice de l'élève*.
L'élève, quant à lui, est dirigé par un canevas théorique rigide mais simplifié, autour du seul théorème de la stricte monotonie pour une fonction dérivable ; dans la tâche elle-même son engagement cognitif se porte essentiellement sur les procédures de production numériques à instrumenter par la calculatrice et susceptibles de lui fournir des valeurs prises par la fonction *sans obligation de manifester un contrôle théorique au-delà de ces quelques valeurs.*

On s'aperçoit là que le fonctionnement didactique, qui fait coopérer l'enseignant et l'élève autour de cette tâche, pousse l'enseignant vers l'instrumentation par la calculatrice en même temps qu'il éloigne l'élève des éléments théoriques de production des nombres et de contrôle de la précision décimale.

5. Une deuxième tâche emblématique

5.1 présentation de la tâche T2

Les constructions graphiques auxquelles font appel les premières études de fonctions en classe de Seconde passent par ce que nous pouvons appeler une décimalisation des fonctions numériques usuelles (cf. chapitre précédent), c'est-à-dire une production, structurée dans un tableau, d'évaluations décimales de certaines valeurs prises par les fonctions.
Le remplissage d'un tel tableau, préalablement à la réalisation graphique, s'inscrit dans la praxéologie de décimalisation issue du Collège, sur laquelle se greffent éventuellement quelques formes techniques nouvelles qui intègrent les fonctionnalités des calculatrices telle la programmation du calcul de valeurs de la fonction[158] ou l'édition de tableaux de valeurs de la fonction à partir de sa formule analytique explicite.
Le nombre de ces valeurs et leur précision répondent à des objectifs graphiques si bien que le recours à un pas n'est généralement pas accompagné d'un examen des accroissements de la fonction.

La tâche T2 que nous examinons maintenant n'apparaît qu'en classe de Première en rupture avec ces pratiques.
Elle consiste à déterminer, *sans calculatrice*, une valeur approchée décimale de f(b) sachant que f est une fonction reconnue comme dérivable sur un intervalle I contenant le nombre décimal b. Comme la tâche T1 elle dérive directement de l'un des problèmes privilégiés par les promoteurs de la réforme, celui de l'approximation des fonctions numériques et nous montrerons qu'elle côtoie le deuxième problème fondamental de l'approximation numérique (le Pb n°2).

Comme pour la tâche T1, notre analyse écologique consistera tout à la fois à :

- repérer dans les programmes actuels et les décisions des manuels les différents nutriments de la praxéologie autour de cette tâche, pour son intégration tant dans l'organisation mathématique que dans l'organisation didactique
- décrire les évolutions depuis la mise en place de la réforme de 1982, afin de mettre à jour des contraintes et des conditions que les textes des programmes actuels ne rendent pas nécessairement visibles

Examinons d'abord le programme actuel lui-même (celui de Première S, 1991) et ses commentaires. Redisons que la présentation de la partie "Suites et fonctions numériques", que nous avons déjà évoquée réaffirme la filiation avec les idées de la réforme de 1981 :

> Le programme combine les études qualitatives (croissance, allure des représentations graphiques …) avec les études quantitatives (majorations, recherche de maximums, approximation d'un nombre à une précision donnée …). On exploitera systématiquement les interprétations graphiques et les problèmes numériques.

---

158 "En seconde, les élèves doivent être entraînés à utiliser une calculatrice programmable […] pour effectuer les calculs numériques et pour programmer, sur quelques exemples simples, le calcul de valeurs numériques d'une fonction d'une variable" (Programme Seconde 1990).

La liste des Travaux pratiques relatifs au chapitre "Suites et fonctions numériques "mentionne effectivement l'approximation de fonctions :

> Exemples simples[159] de majorations, d'encadrements et d'approximations portant sur des nombres ou des fonctions sur un intervalle donné.

et est accompagnée de la recommandation suivante :

> Il est souhaitable de choisir des situations simples mettant en valeur l'utilité des majorations et des encadrements obtenus.

En se portant dans la rubrique cours, on trouve :

> Approximation par une fonction affine au voisinage de 0, des fonctions qui à h associent $(1+h)^2$, $(1+h)^3$, $\frac{1}{1+h}$, $\sqrt{1+h}$; aspects géométriques[160],

avec les commentaires suivants :

> Il convient de combiner l'expérimentation graphique et numérique et le raisonnement mathématique ; on mettra en valeur sur des exemples l'influence de la taille de l'intervalle sur la qualité de l'approximation. On montrera aussi que cette étude permet d'approcher, par exemple $x \to x^2$ ou $x \to \sqrt{x}$ au voisinage de 4[161].

Nous retrouvons la référence à l'expérimentation numérique et l'idée qu'elle participe à dégager des facteurs qui gouvernent la précision. On peut penser en effet que l'expression "qualité de l'approximation" renvoie aux notions de précision ou d'erreur même si le mot erreur a lui-même complètement disparu.
Un autre mot fait son apparition, qui concerne directement l'approximation affine ; c'est le mot "négliger" :

> Les démonstrations de ces règles (de dérivation) ne sont pas au programme, mais on mettra en valeur l'idée fondamentale qui conduit à ces résultats : les termes d'ordre supérieur à 1 c'est-à-dire du type $h\,\varphi(h)$ où $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$ sont négligeables dans les calculs.

Pour l'essentiel ces éléments de programme ne diffèrent pas de ceux de 1986 qui avaient adapté la réforme de 1981 aux premières réactions du terrain didactique. Mais, par rapport au programme de 1982, il faut noter une insistance plus pressante sur l'exploitation des possibilités du registre graphique et surtout un basculement de l'activité numérique au sein de l'organisation didactique puisqu'elle passe du statut d'expérimentation vers celui d'application.

---

[159] L'adjectif "simples" a été ajouté entre le programme de 1986 et celui de 1991.

[160] L'expression "aspects géométriques" a été ajoutée entre le programme de 1986 et celui de 1991.

[161] Cette dernière phrase a été ajoutée entre le programme de 1986 et celui de 1991

Un exemple marquant se trouve dans le rôle attribué à l'inégalité $|f(a+h) - f(a) - A.h| \leq M.h^2$. Le programme de 1982 la concevait comme une porte d'accès à la dérivabilité. Dans les commentaires de ce programme, relatifs à l'introduction de la notion de développement limité d'ordre 1, on pouvait lire en effet :

> On accordera la prépondérance aux majorations et encadrements les plus efficaces, ce qui conduit à commencer par des exemples de majorations du type $|f(a+h) - f(a) - A.h| \leq M.h^2$ telles que celles qui ont été étudiées en Seconde.
>
> Ensuite des exemples tels que $x \rightarrow x.\sqrt{|x|}$ marqueront les limites de ce procédé et aideront à dégager la notion de dérivabilité.

Les majorations qui sont évoquées étaient fortement mises en avant dans le programme de Seconde de 1981 en mettant l'accent sur le rôle de l'expérimentation numérique pour les établir. Nous savons que depuis 1986 elles ont disparu de cette classe (cf. chapitre C_2). Mais elles ont aussi disparu du programme actuel de Première. Nous allons en fait les retrouver dans la résolution de la tâche T2 dans une position didactique inverse puisqu'elles vont servir à faire fonctionner, in vivo, la notion de dérivation. Cette nouvelle position didactique va sceller le sort de la calculatrice : à la fois interdite dans la conduite des calculs et présente dans la vérification des résultats.

> *La dialectique qualitatif-quantitatif n'a pas, là non plus, maintenu l'activité numérique instrumentée par la calculatrice dans la fonction didactique retenue par les promoteurs de la réforme.*

5.2 technologie et technique pour la tâche T2

La lecture des manuels actuels ne laisse aucun doute sur la technologie mise au service de la tâche :

Tl 2 : Soit a un élément de I ; si f est de classe C^2 alors il existe une constante positive dépendante de f et de I, telle que $|f(b) - (f(a) + (b-a).f'(a))| \leq C.(b-a)^2$.

Peut-être s'étonnera-t-on, ici encore, que cet énoncé ne figure en l'état dans aucun manuel. Pourtant ce sont effectivement de telles inégalités qui sont présentées et exploitées par ces manuels dans leurs cours ou leurs exercices commentés[162]. C'est ce que nous allons montrer.

Commençons par décrire la seule technique que les manuels retiennent. Nous la découvrons dans l'exercice commenté suivant, traité par le manuel Bordas (1995, pages 100 et 101).

[162] Selon les manuels, ces exercices peuvent être entièrement résolus ou seulement commentés. Ils sont souvent associés aux parties dites Travaux Pratiques. Leur apparition avec celle des activités préparatoires a marqué l'évolution des normes institutionnelles d'organisation didactique. Cette technique de praxéologie didactique permet de diversifier le cours et remodeler la manière dont il construit les savoir-faire qui sont, maintenant, explicitement indiqués dans les programmes.

L'énoncé :

Soit f la fonction définie pour tout x de] - ∝ ; 2[par $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 2}$.

1°) Calculez f (1) et f '(1).

Déduisez-en l'approximation affine de f en 1, c'est-à-dire $h \to f(1 + h)$

2°) Soit $h \to a + bh$ l'approximation affine obtenue dans la première question. On pose : $\varepsilon(h) = f(1 + h) - (a + bh)$. Démontrez que si $|h| \leq \frac{1}{2}$ alors $|\varepsilon(h)| \leq 2h^2$.

3°) Donnez une valeur approchée de f (0,98) et f (1,04).

Des commentaires :

Vous savez que si une fonction est dérivable en x_0, alors :

$f(x_0 + h) = f(x_0) + h.\,f'(x_0) + h.\varphi(h)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

L'approximation affine de f en x_0 est alors $h \to f(x_0) + h.\,f'(x_0)$. Elle permet d'obtenir des valeurs approchées de $f(x_0 + h)$ pour de "petites valeurs" de h. Il est naturel de se poser la question de l'erreur commise, ε(h), lorsqu'on remplace $f(x_0 + h)$ par son approximation affine.

Une solution :

1°) Approximation affine :

On obtient immédiatement f(1) = 1.

f est dérivable sur] - ∝ ; 2[comme quotient de deux fonctions dérivables, dont le dénominateur est non nul sur] - ∝ ; 2[.

Alors $f'(x) = \frac{2(x - 2) - (2x - 3)(1)}{(x - 2)^2}$ donc $f'(x) = \frac{-1}{(x - 2)^2}$ et $f'(1) = -1$

L'approximation affine de f en 1 est donc la fonction $h \to f(1) + h.f'(1)$, c'est-à-dire la fonction $h \to 1 - h$.

2°) Majoration de $|\varepsilon(h)|$

On a donc : $f(1 + h) = f(1) + h.f'(1) + \varepsilon(h)$, soit $\frac{2h - 1}{h - 1} = 1 - h + \varepsilon(h)$ et $\varepsilon(h) = \frac{h^2}{h - 1}$.

Si $-\frac{1}{2} \leq h \leq \frac{1}{2}$ alors $-\frac{3}{2} \leq h-1 \leq -\frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2} \leq |h-1| \leq \frac{3}{2}$ et $\frac{2}{3} \leq \frac{1}{|h-1|} \leq 2$.

Finalement : $\frac{h^2}{|h-1|} \leq 2h^2$ donc $|\varepsilon(h)| \leq 2h^2$.

3°) Valeurs approchées

De la relation $f(1+h) = f(1) + h.f'(1) + \varepsilon(h)$, on déduit : $f(1+h) \approx 1-h$

avec $|\varepsilon(h)| \leq 2h^2$. Alors :

$f(0{,}98) = f(1-0{,}02) \approx 1{,}02$, erreur majorée par 2 x 0,022 c'est-à-dire 0,0008

$f(1{,}04) = f(1+0{,}04) \approx 0{,}96$, erreur majorée par 0,0032.

La technique se déploie en plusieurs mouvements successifs :

- choix de f, de a et de I ; ici $a = 1$; $I = [-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$
- mise en place de l'approximation affine au point a considéré (on pose $b - a = h$)
- calcul algébrique de la différence entre la fonction et son approximation affine sur I
- mise en facteur de h^2 dans cette différence
- majoration en valeur absolue du quotient sur l'intervalle I proposé ; ici on trouve C = 2
- calculs numériques avec la (ou les) valeur(s) du b donné

et débouche sur une valeur approchée décimale de f(b) accompagnée *d'un majorant décimal de l'erreur*.

> *Examinons maintenant plus en détail son enveloppe technologico-théorique.*

5.3 la technologie est amputée d'un élément théorique

Observons la factorisation de h^2. Celle-ci est conduite par un travail algébrique sur les polynômes et les fractions rationnelles.
Avec des fonctions irrationnelles, ce travail se complique et certains manuels décident de le guider ; par exemple, pour la fonction f définie par $\sqrt{1+x}$ et $a = 0$, ils prennent soin de détailler la transformation de $\sqrt{1+h} - (1 + \frac{h}{2})$ en $-\frac{h^2}{4[\sqrt{1+h} + (1+\frac{h}{2})]}$.

Mais comme ils ne s'éloignent pas des quelques fonctions listées par le programme :

$$1 + x,\ (1+x)^2,\ (1+x)^3,\ \sqrt{1+x} \text{ et seulement pour } a = 0,$$

sauf par quelques fonctions polynomiales ou homographiques, les manuels n'ont pas l'occasion de rencontrer d'autres fonctions pour lesquelles la factorisation par h^2 ne ressort pas de la simplification algébrique.

La technique ainsi fabriquée produit une erreur $\varepsilon(h)$ sous la forme d'un équivalent en h^2 alors que, comme se plaît à le rappeler le manuel Bordas dans son exercice commenté, le théorème du développement limité d'ordre 1, la donne sous la forme la forme $h.\varphi(h)$ avec
$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$[163].

On assiste à une atrophie d'une partie du théorème corrélative à une restriction de la tâche à certaines fonctions de classe C^2. Ce repli institutionnel renforce par ailleurs l'isolement des fonctions circulaires pour lesquelles la factorisation par h^2 dans le développement limité d'ordre 1 ne relève pas de cette technique algébrique.

5.4 la technique n'achève pas la décimalisation

Seul un choix judicieux de b autorise, pour la fonction f choisie (ou plutôt imposée), une décimalisation sans mouvement supplémentaire.
Imaginons en effet, à la suite de l'exercice commenté, que l'on s'intéresse à f(- 4,02). Dans la foulée de l'exemple, on prend a = - 4, h = - 0,02 et $I = [-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$ et l'on aboutit à :

$$f(-4{,}02) = \frac{11}{6} + \frac{1}{36}.0{,}02 \text{ avec une erreur égale à } \frac{h^2}{36.(h-6)}$$

qu'on majore, en valeur absolue, par $\frac{h^2}{198}$ soit, ici par $\frac{2}{99}.10^{-4}$.

Jusqu'ici nous n'avons fait qu'imiter tous les gestes de la technique du manuel, mais une difficulté inédite surgit : comment terminer la décimalisation ? Nous pourrions procéder ainsi :

> $\frac{0{,}02}{36}$ est de l'ordre de 5.10^{-4} ; $\frac{2}{99}.10^{-4}$ est de l'ordre de 2.10^{-6} ; il est alors raisonnable (et prudent) de retenir 4 décimales de $\frac{11}{6}$ (mais seulement 4) soit 1,8333 auxquelles on ajoute 0,0005 ; on peut alors être assuré que 1,834 est la valeur décimale arrondie à 3 décimales de f(- 4,02).

On aura compris que nous avons introduit des éléments technologiques qui ne sont pas présents dans l'organisation mathématique de la classe de Première S actuelle. En particulier la notion d'ordre de grandeur permet de poursuivre la décimalisation sans faire intervenir la calculatrice.
Si, par contre, on accepte le retour de la calculatrice, l'exécution décimale de $\frac{11}{6} + \frac{0{,}02}{36}$ donne 1,833888… qui, compte tenu du majorant de l'erreur inférieur à 3.10^{-6}, assure que l'arrondi à 5 décimales de f(- 4,02) est 1,83389.

[163] Des contre-exemples bien connus :
$f(x)\ 1 + x + x.\sqrt{|x|}$ au voisinage de 0 $f(x) = x^2.\sin\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$,
illustrent le fait le quotient $\frac{f(h) - f(0) - h.f'(0)}{h^2}$ peut ne pas avoir de limite en 0 malgré l'existence d'un développement limité d'ordre 1 en 0.

> *La praxéologie actuelle ne dispose pas de suffisamment d'éléments théoriques pour maintenir l'interdiction de calculatrice tout en exploitant au maximum le développement limité d'ordre 1.*

5.5 le travail de la technique est à peine amorcé

Rien, dans le manuel, ne vient justifier explicitement les choix de f, de a et de I. Ces éléments apparaissent alors comme des données installées dans le champ (de la) technique par une technologie invisible. Certes la formule de l'approximation affine laisse entendre que l'erreur $h.\varphi(h)$ tend vers 0 avec h et qu'il y aurait gain probable de précision à prendre a "le plus proche possible" de b ; mais aucun manuel n'ouvre de piste à cette perspective de diminution du majorant de l'erreur.

Pour nous en convaincre, examinons une approximation plus classique, celle de $\frac{1}{1+x}$, en 0. Toujours en "Travaux pratiques" le même manuel Bordas (1995, page 96) fait établir, avec la même technique, que :

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + \varepsilon \text{ avec } |\varepsilon| \text{ majorée par } 2.h^2\text{, du moment que h reste dans } [-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}].$$

Puis il propose en exercice (page 104) :

Exercice 19
Déterminez, à l'aide d'un calcul mental, une valeur approchée de $\frac{1}{1,2}$, de $\frac{1}{0,91}$ et de $\frac{1}{4,06}$ et contrôlez, à l'aide d'une calculatrice, la qualité de l'approximation obtenue

Considérons d'abord $\frac{1}{1,2}$. En se référant à l'étude du manuel, on mène le calcul suivant :

$\frac{1}{1,2} \approx 1 - 0,2$ qui donne l'approximation décimale $\frac{1}{1,2} \approx 0,8$ par défaut
$[\ a = 0 ; h = 0,2 \text{ et } |\varepsilon| \leq 8.10^{-2}]$

Une seule décimale est assurée. Peut-on faire mieux ? Nous avons trois éléments variables à notre disposition : f, a et I.

Une première idée consiste à changer la fonction. Prenons $\frac{1}{1,25+x}$ car nous avons repéré que $\frac{1}{1,25} = 0,8$ et que 1,25 est plus proche de 1,2 que ne l'est 1. Continuons à emprunter la technique du manuel, avec la fonction $f(x) = \frac{1}{1,25+x}$, a = 0, b = - 0,05 = h. Elle nous conduit à écrire :

$\frac{1}{1,2} \approx \frac{1}{1,25} + (-0,05).(-\frac{1}{1,25^2})$ ce qui donne l'approximation décimale $\frac{1}{1,2} \approx 0,832$ par défaut et $|\varepsilon| \leq 4.10^{-3}$.

Nous avons gagné une décimale, mais avons été obligés de refaire entièrement le calcul algébrique de l'erreur :

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{1,25+h} - \frac{1}{1,25} + \frac{h}{1,25^2} = \frac{h^2}{1,25^2.(1,25+h)}$$

ainsi que le calcul numérique de sa majoration sur $[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$.

Une deuxième idée s'autorise à transformer la fonction $\frac{1}{1+x}$ en la fonction $\frac{k}{1+x}$ autour de 0 pour éviter de toucher au calcul d'erreur et à l'intervalle $[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$:

$\frac{1}{1,2} = \frac{1}{1,25} . \frac{1}{1 - \frac{0,05}{1,25}} \approx \frac{1}{1,25}(1 - \frac{0,05}{1,25})$ qui donne la même approximation décimale par défaut $\frac{1}{1,2} \approx 0,832$ [$a = 0$; $h = -\frac{0,05}{1,25}$ et $|\varepsilon| \leq 3.10^{-3}$].

Nous avons conservé la décimale gagnée et facilité le calcul de l'erreur et de sa majoration puisque nous avons pu écrire $|\varepsilon| \leq \frac{1}{1,25} .2.(\frac{0,05}{1,25})^2$ en utilisant nos connaissances sur la fonction $\frac{1}{1+x}$.

Ainsi une "petite modification" des calculs, basée sur le fait que $\frac{1}{1,25} = 0,8$ a substantiellement amélioré la qualité de l'approximation, pour reprendre l'expression consacrée par le libellé du programme.
En fait la précision est certainement meilleure que ne le laisse soupçonner la majoration car celle-ci est basée sur un intervalle I très large. Quand on écrit $\frac{1}{k+h} = \frac{1}{k} . \frac{1}{1+\frac{h}{k}} \approx \frac{1}{k} - \frac{h}{k^2}$, on commet une erreur égale à $\frac{h^2}{k^3(1+\frac{h}{k})}$ qui est de l'ordre de $\frac{h^2}{k^3}$ dès que $\frac{h}{k}$ est suffisamment petit. On peut donc s'attendre ici à une erreur de l'ordre de, et légèrement inférieure à $1,5.10^{-3}$, au lieu de 3.10^{-3}. Compte tenu aussi du sens de l'erreur, nous sommes en mesure de dire que 0,833 est l'arrondi à 3 décimales de $\frac{1}{1,2}$.

Les modifications de la technique (changer f, modifier I), dont nous regardons ici les effets, s'appuient sur des éléments théoriques qui sont extérieurs à la formule d'approximation affine, mais dont l'intervention permet de comprendre que, derrière le choix de l'approximation affine de $\frac{1}{1+x}$ en 0, se profilent des enjeux *mathématiques qui dépassent la seule localisation en 0, enjeux que l'institution n'est pas en mesure de prendre à sa charge.*

On remarque en particulier que l'approximation affine permettrait d'engager le problème mathématique de l'approximation décimale de l'inverse de n'importe quel nombre non nul à condition de remplacer la fonction $\frac{1}{x}$ par la fonction $\frac{1}{1+x}$. On reconnaît là ce que Chevallard (1998) appelle le travail de la technique pour la rendre plus efficace et plus fiable. C'est un moment didactique qui, dit-il :

> […] exige généralement de retoucher la technologie élaborée jusque-là […] et suppose en particulier un ou des corpus de tâches adéquats, qualitativement que quantitativement.

Illustrons ce travail de la technique dans le calcul de $\frac{1}{4{,}06}$ que propose le manuel Bordas dans le même exercice. En l'absence d'un retour sur la technologie[164], la technique, telle qu'elle est présentée par le manuel, permet de procéder de la manière suivante :

$\frac{1}{4+h} = \frac{1}{4} + h.(-\frac{1}{16}) + \frac{h^2}{16.(4+h)}$; avec h = 0,06 ; on peut en déduire que $\frac{1}{4{,}06} \approx$ 0,24625 mais on s'oblige à majorer $\frac{1}{16.(4+h)}$ pour majorer l'erreur. Avec h dans $[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$, on obtient $\frac{1}{56}$ ce qui fournit une majoration de l'erreur par 7.10^{-5} et garantit ainsi l'arrondi 0,2463 à 4 décimales.

Par contre le passage par la factorisation par 4 au dénominateur aurait donné :

$$\frac{1}{4+h} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{h}{4}} = \frac{1}{4}.(1 - \frac{h}{4} + \varepsilon') = \frac{1}{4} - \frac{h}{16} + \varepsilon \text{ avec } \frac{h}{4} = 0{,}015.$$

On trouve la même approximation $\frac{1}{4{,}06} \approx 0{,}24625$ mais on évite une grosse partie du travail de majoration de l'erreur puisque qu'on peut prendre directement $|\varepsilon'| \leq 2.(\frac{h}{4})^2 = 4{,}5.10^{-4}$. On obtient ainsi une majoration de l'erreur $|\varepsilon|$ par 2.10^{-4}, qui est certes moins bonne que la précédente mais beaucoup plus rapide à obtenir. Si on tient compte de la "petitesse" de $\frac{h}{4}$ on peut en plus se risquer à annoncer une erreur de l'ordre de $\frac{0{,}06^2}{4^3}$ soit 5.10^{-5} et retrouver ainsi l'arrondi à 4 décimales, c'est-à-dire 0,2463.

Mais le travail de la technique pourrait aussi, et surtout, questionner l'origine de la constante C dans la technologie Tl 2. Nous pensons que c'est ce que suggère le programme lorsqu'il demande de s'intéresser à la taille de l'intervalle I. De quoi cette constante dépend-elle ? Comment agir sur elle pour obtenir un majorant de l'erreur plus petit ? Connaît-t-elle une limite quand la largeur de l'intervalle I diminue ?

---

164 Le manuel Terracher fait un tel pas d'amélioration de la technique, mais il est le seul à le faire.

Ce travail pourrait apporter une première justification au choix du développement limité d'ordre 1 comme "meilleure approximation affine", entrouvrir une porte sur l'existence d'un deuxième ordre et offrir une entrée à la négligeabilité des termes de ce deuxième ordre par rapport à ceux du premier ordre.
Or ce travail n'intéresse pas les manuels. Nous n'avons trouvé qu'un seul d'entre eux (Belin, 1995, page 69 et 70) pour aborder la restriction de l'intervalle I. Pour la fonction $\sqrt{1+x}$, en choisissant successivement I = $[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$ puis I = $[-10^{-2} ; 10^{-2}]$, il réussit à passer la constante C de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{7}$. Mais il ne va pas jusqu'à proposer le calcul de sa limite ($\frac{1}{8}$) quand la largeur de I tend vers 0. Il poursuit tout de même dans la réduction de l'erreur, avec cet exercice (page 78) :

Exercice 20

a) x variant de – 0,5 à 0,5 tous les dixièmes (- 0,5 ; - 0,4 ; - 0,3 ; etc.) comparer $\frac{1}{1+x}$ et $1-x$ en utilisant la calculatrice.
b) démontrer que si $|x| \leq \frac{1}{2}$ alors $0 \leq \frac{1}{1+x} - (1-x) \leq 2x^2$.
c) dans quel intervalle, inclus dans $[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$, suffit-il de choisir x pour qu'en remplaçant $\frac{1}{1+x}$ par $1-x$, on fasse une erreur inférieure à 10^{-2} ?

Cette fois, il cherche à diminuer l'erreur sans toucher à la constante C. Nous retrouvons un exercice des débuts de la contre-réforme. Nous retrouvons aussi le mot erreur qui n'a quasiment plus cours dans l'institution et que le manuel n'utilise pas dans son cours.
Mais l'exercice est isolé, et annoncé comme difficile[165], et donc hors des exigences institutionnelles. De plus les auteurs veulent ignorer que la recherche d'une condition suffisante a disparu de l'enseignement depuis dix années (réforme de 1986). Le corrigé qu'ils donnent pour la question c) se résume à ces deux lignes :

$2x^2 \leq 10^{-2}$; $x^2 \leq 5.10^{-4}$.

$x \in [-\sqrt{50}.10^{-2} ; \sqrt{50}.10^{-2}]$

et ne prend pas soin de décimaliser les bornes de l'intervalle.

[165] Chaque énoncé est accompagné d'une marque pour le niveau de difficulté évalué par le manuel.

5.6 la vérification par la calculatrice se substitue au contrôle de l'erreur

Revenons sur le rôle dévolu à la calculatrice dans le dispositif didactique choisi par le manuel Bordas de 1995 (exercice n°19). La première question de cet exercice et le déroulement de l'exercice commenté ont confirmé que le libellé de la tâche écartait officiellement la calculatrice. Pourtant nous la voyons revenir sur le devant de la scène avec ce que le manuel appelle le "contrôle de la qualité de l'approximation numérique".
Est-ce à dire que ce contrôle n'était pas demandé à l'élève ou bien qu'une vérification apportera des informations supplémentaires à exploiter ? Un tour d'horizon des autres manuels nous porte à retenir la première hypothèse. Voici un florilège d'exercices tirés de plusieurs manuels :

- Terracher 1997, sous la rubrique "Applications directes du cours et sous le titre "Le point de vue numérique" :

> Ecrire le développement limité de $x \rightarrow \sqrt{1 - x}$ en 0. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{0,998}$ et $\sqrt{0,9992}$. (On ne demande pas de calcul d'erreur).

  Dans les autres exercices, il s'agit de s'inspirer de celui-ci pour obtenir une valeur approchée d'autres nombres tels $\frac{1}{4,0008}$, $\sqrt{63,9996}$, etc. Mais :

> L'estimation de l'erreur n'est pas demandée ; en revanche, on comparera le résultat obtenu avec celui fourni par la calculatrice.

- Hatier 1995, dans la rubrique "Exercices et problèmes" :

> Soit la fonction f telle que $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Calculez f(0) ainsi que la dérivée f '(x) et f '(0). Donnez une approximation de f(0,002) et f(0,1) et comparez aux résultats obtenus à la calculatrice.

- Belin 1995, dans la rubrique "Applications immédiates" et sous le titre "Valeurs approchées" :

> Rappeler l'approximation affine de la fonction f au voisinage de 0. Utiliser ce résultat pour donner une valeur approchée des nombres a et b ; $f : h \rightarrow \frac{1}{1+h}$; $a = \frac{1}{1,02}$; $b = \frac{1}{0,995}$.

Pour ce dernier manuel, comme pour d'autres, il n'est pas question de calculatrice, mais le calcul d'erreur a disparu de la tâche elle-même.

5.7 la tâche T2 est un bon indicateur des rapports didactiques entre la calculatrice et l'approximation numérique décimale

Il ressort de l'analyse précédente que l'institution EMS actuelle ne parvient pas à inscrire la réalisation de la tâche T2 dans une articulation entre la calculatrice et l'approximation numérique décimale :

- d'une part, elle peine à mettre en évidence les différents facteurs qui interviennent dans la "qualité de l'approximation" alors que cela constitue le socle de la dialectique quantitatif-qualitatif avec laquelle elle légitime la présence de la tâche dans l'organisation mathématique.
- d'autre part, elle résiste mal à la tentation de reporter la certification de la qualité de l'approximation décimale sur l'évaluation a posteriori de l'erreur par la seule calculatrice. Elle transforme un contrôle par anticipation en un contrôle par vérification qui ne mobilise qu'une partie des ressources technologiques relatives à la tâche. Elle affaiblit ainsi encore plus la demande en éléments théoriques qu'il lui serait possible d'investir dans le contrôle de l'erreur dans l'approximation décimale.

> *Nous pouvons dire qu'avec la tâche T2, l'institution EMS bute sur la gestion du contrôle de l'erreur au cours d'une décimalisation ; d'une première façon si on s'inquiète des éléments théoriques capables de garantir la précision décimale dans les approximations réalisées ; d'une deuxième façon si on cherche à comprendre l'interaction de la calculatrice avec ces éléments et à la caractériser en termes de concurrence ou de collaboration.*

En fait, la survivance de la tâche T2 dans l'organisation mathématique actuelle tient plus à son caractère emblématique qu'à sa valeur praxéologique. En effet :

- les calculs numériques dont l'institution a ordinairement besoin sont assurés de façon routinière à l'aide de la calculatrice avec une rapidité d'exécution et une précision qui disqualifient la technique associée à la tâche T2. Bien sûr les formules d'approximation les plus courantes (telles $(1 + x)^n \approx 1 + nx$) permettent une évaluation rapide qui peut servir de vérification supplémentaire mais le contrôle de l'erreur exige un travail avec des inégalités qui engage une maîtrise algébrique sur laquelle il ne peut pas compter.
- la notion de négligeabilité et celle d'ordre de grandeur en relation avec les développements asymptotiques ne peuvent être ni construits ni exploités.

Développons ce deuxième point.

Nous avons noté que la noosphère souhaitait mettre en valeur l'idée que :

> les termes d'ordre supérieur à 1 sont négligeables dans les calculs (programme 1991)

Les manuels hésitent à utiliser le mot négligeable et se contentent le plus souvent d'évocations discrètes, par exemple en employant le symbole $\approx$ pour marquer l'approximation affine ou en attribuant péremptoirement le qualificatif de meilleure approximation affine au développement limité d'ordre 1. Le statut didactique de la tâche T2 les place devant deux exigences contradictoires : celle de la pratique qui attend une réponse numérique effective avec un reste majoré (donc non nul) et celle de la théorie qui fait valoir un modèle avec un reste négligeable (à annuler). Comment, dans une application numérique, jouer la carte de la majoration de l'erreur et, dans le même temps, suggérer que cette erreur est négligeable ? Comment mettre en valeur ces notions d'équivalence et de négligeabilité, sans dépasser le constat numérique ? Que pourraient répondre les manuels à la question impertinente suivante :

> f, a et h étant fixés, comment être sûr que f(a) n'est pas une meilleure valeur approchée de f(a + h) que f(a) + h.f '(a) ?

que nous pouvons formuler autrement :

> Dans quels cas faut-il préférer l'approximation affine [f(a + h) ≈ f(a) + h.f '(a)] à l'approximation par continuité [f(a + h) ≈ f(a)] ?

Nous savons en effet que, dans certaines circonstances (notamment si h n'est pas "suffisamment petit"), la correction apportée par le seul terme d'ordre 1 est "trop forte" et a besoin d'être supplée par le terme d'ordre 2. Dans ces circonstances, l'approximation par continuité est meilleure que l'approximation affine[166].

Est-ce pour éviter cette posture délicate que certains manuels préfèrent transformer la signification analytique de "meilleure approximation affine" en affirmant qu'il s'agit d'une "bonne approximation", ce qui ne peut pas, en l'état, exprimer la négligeabilité du terme de second ordre par rapport à celui du premier ordre.

Confrontés à ces défaillances technologiques et théoriques, et réticents à mettre en place une expérimentation numérique au sens où le décrivaient les promoteurs de la contre-réforme, les manuels se réfugient dans des allusions très vagues à l'idée de négligeabilité et à celle d'équivalence.
C'est ainsi que certains manuels cherchent à prévenir certaines conséquences de ces défaillances sous la forme de commentaires à la fois désapprobateurs et condescendants :

> Puisque $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0, ne peut-on pas dire que sinx a pour limite x quand x tend vers 0 ?

demande Hatier (1995, page 108). Il s'empresse de répondre à cette fausse question :

> Non, on ne peut pas ! Car ce serait la porte ouverte à bien des bêtises.
>
> Car si l'on croit que sinx tend vers x, alors il tend aussi vers $x - x^2$ ou vers $x - \frac{x^3}{6}$ …

166 Dans un article intitulé "La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point ?" (Repères Irem n° 34, 1999), Perrin-Glorian aborde cette question à partir de la construction d'une approche expérimentale de la courbe par une droite, sur un ordinateur ou une calculatrice. "Une approximation à ε près n'est qu'une approximation" dit-elle et dans sa conclusion, elle insiste : "La tangente est vraiment une notion locale ! Il s'agit de la meilleure approximation affine de la courbe au voisinage d'un point, à condition de ne fixer à l'avance ni la longueur de l'intervalle contenant le point, ni l'erreur admise dans l'approximation. Elles doivent pouvoir rester aussi petites que l'on veut."

En effet toutes ces fonctions $x \rightarrow \sin x$, $x \rightarrow x - x^2$, $x \rightarrow x - \frac{x^3}{6}$ sont non seulement très petites pour x très petit mais elles sont aussi très proches les unes des autres ; leur rapport deux à deux est aussi très proche de 1. Toutes sont pratiquement confondues au voisinage de 0.

Une limite, c'est un nombre. Ce n'est pas une fonction.

Mais comment dit-on alors que deux fonctions sont pratiquement confondues ?

Si tu veux le savoir, pour traduire le fait que le quotient de deux fonctions a pour limite 1, les mathématiciens disent qu'elles sont "équivalentes"…

C'est ainsi que le symbole $\approx$ connaît un transfert de sémioticité incontrôlé : au moment de la tâche T2, il note l'équivalence de deux fonctions au voisinage d'un point, alors qu'il est, en tout autre circonstance, affecté à l'arrondi décimal. Pour faire le lien, il faudrait, au minimum, aborder les notions d'ordre de grandeur décimale (les puissances de 10) ou d'erreur relative. Ce sont ces notions qui nous ont permis d'achever correctement la décimalisation amorcée par la technique T2 dans les exemples présentés par les manuels. Or ces notions n'ont plus cours dans l'organisation mathématique actuelle.

Les conséquences institutionnelles les plus visibles en termes d'organisations mathématique et didactique sont l'appauvrissement pratique et l'isolement institutionnel dont souffre la tâche T2. D'une part les manuels se détournent de la majoration d'erreur et n'achèvent pas la décimalisation - c'est ce que nous avons constaté ; d'autre part le bloc technico-technologique n'est pas réinvesti dans la classe de mathématique - peut-être l'est-elle partiellement dans celle de Physique.
L'institution en est réduite à faire appel à un artifice didactique, sûrement peu performant, que l'on trouve énoncé dans la plupart des manuels et dont nous savons qu'il est fréquemment employé par les enseignants dans les classes :

Les formules d'approximations affines permettent de faire rapidement des calculs approchés, presque mentalement, sans avoir recours à la calculatrice. (Hatier 1995, page 137)

Cet artifice[167] ne permet pas de problématiser la tâche et donc d'enrichir substantiellement la praxéologie de décimalisation.

6. Juxtaposition de la nouvelle praxéologie et de l'ancienne

Avec les tâches T1 et T2, nous avons pu appréhender la nouvelle praxéologie de décimalisation, ses caractères pratiques et théoriques, son insertion dans les organisations mathématique et didactique de la classe de Première S.

---

167 Nous avons rencontré un artifice du même genre (didactique) avec l'approximation de $\sqrt{2}$ en classe de Seconde (cf. chapitre C_2) où était mis en avant l'intérêt historique de l'algorithme de Héron. On introduit, dans l'organisation didactique, un élément censé légitimer l'activité de l'élève (ici le calcul mental) sans s'interroger sur son insertion dans l'organisation mathématique et didactique globale.

Nous avons dit qu'elle se superposait à l'ancienne praxéologie. A l'appui de cette affirmation, nous pouvons constater un premier fait : lorsqu'un manuel consacre un chapitre au Calcul numérique, ce chapitre est placé en tête du livre et n'intègre aucun élément de la nouvelle praxéologie. La présence de ce chapitre répond à une pratique pédagogique très répandue chez les enseignants de Première S de démarrer l'année scolaire par des révisions des règles du calcul numérico-algébrique. Nous pouvons tout de même nous demander si les pratiques de calcul approché institutionnalisées dans les classes précédentes vont, en cours d'année scolaire, réagir au contact de certains éléments de la nouvelle praxéologie de décimalisation. Certaines de ces pratiques vont-elles connaître des évolutions visibles ? Certains problèmes nouveaux - qui avaient été écartés auparavant – vont-il être abordés ?

Notre réponse est négative et c'est en ce sens que nous parlons de juxtaposition de la nouvelle praxéologie aux côtés de l'ancienne. Justifions nous par l'étude du cas des calculs trigonométriques revivifiés en classe de Première S par une reprise théorique tant en Analyse qu'en Géométrie métrique.

Nous argumentons succinctement en deux points :

- l'institution ne profite pas des avancées dans l'Analyse pour soulever le problème de la production mathématique des approximations décimales des valeurs trigonométriques, celui que nous avons rencontré dans la partie B avec la formation des tables.
- l'institution ne modifie pas sa pratique des calculs numériques en Trigonométrie, qui reste fondée sur le contrat numérico-algébrique.

6.1 les approximations décimales des valeurs trigonométriques

Même si les promoteurs de la contre-réforme illustrent ce problème moins abondamment que celui des approximations décimales de $\sqrt{2}$ ou de π, ils l'abordent dans une partie du Bulletin Inter-Irem consacrée à l'interpolation et à l'approximation des fonctions (pages 41 et 43) où on les trouve parmi les "Quelques exemples d'activités possibles dans l'enseignement secondaire". En introduction à cette partie, Riesz soutient que :

> Au niveau du second cycle de l'enseignement secondaire, approximation et interpolation constituent un terrain privilégié pour l'émergence et/ou l'investissement de concepts d'Analyse dans des problèmes intuitivement accessibles, même si leur maîtrise fait appel à des techniques souvent raffinées. Il s'agit en tout cas d'un terrain très riche en activités mathématiques véritables qui ne feront pas, en général, l'objet d'exposés synthétiques au niveau d'enseignement considéré, mais qui participeront de façon fondamentale à l'élaboration correcte du concept central de fonction dont la perception actuelle est souvent restreinte à celle d'une expression algébrique donnée, quand ce n'est pas au discours dogmatique
>
> "correspondance → fonction → application … suivi de la ritournelle domaine de définition → intervalle d'étude → continuité → dérivée → tableau de variations → …"
>
> Il s'agit aussi d'un terrain privilégié pour montrer aux élèves, qu'à tout niveau, les mathématiques procèdent par approfondissements successifs et, par ailleurs, que les calculatrices (ou les micro-ordinateurs) ne sont pas de simples outils de calcul mais

permettent d'approfondir la dialectique entre le champ conceptuel et le champ des problèmes. (Reisz, 1981)

C'est donc sans surprise que nous constatons la présence d'approximations polynomiales des fonctions sin et cos dans les manuels de 1982.

Certains d'entre eux n'hésitent pas à fabriquer l'inégalité $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq x$ (conformément au programme), à pousser vers une inégalité du type $x - Cx^3 \leq \sin x \leq x$ et à leur donner une vie numérique au-delà de l'appui qu'elles apportent à la justification de la dérivabilité des fonctions sin et cos.

Mais l'esprit de la contre-réforme qui imprègne les propos de Riesz les incite aussi à creuser le filon numérique. On voit ainsi le manuel Dimathème (Hatier, 1982) proposer pas moins de trois algorithmes de calcul d'un sinus ou d'un cosinus (cf. documents 3 en Annexe, Volume 2), et tous trois impliquent la calculatrice.

On aurait pu s'attendre à une nouvelle vie pour un problème que nous avons vu disparaître lors du processus de transposition didactique. En fait, l'évolution institutionnelle inscrite dans les aménagements de programme en 1986 et 1990 va arrêter cette tentative de donner aux valeurs trigonométriques la possibilité d'être calculables par des procédés d'approximation propres à l'Analyse numérique. Ces valeurs vont retourner à leur place, dans la calculatrice, et la domination du contrat numérico-algébrique sera renforcée par l'utilisation des formules de duplication et de bissection sur les quelques valeurs dites remarquables.

Nous avons dit déjà ce qui a trait à l'affaiblissement algorithmique. Il faut ajouter ici le retrait des inégalités citées ci-dessus et l'insistance à "admettre la valeur des dérivées des fonctions sinus et cosinus à l'origine".

On peut constater l'évolution avec le choix du manuel Fractale (Bordas, 1995, page 195, cf. documents 3 en Annexe, Volume 2) pour amener la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus en 0. Ce manuel propose ce qu'il appelle une conjecture graphique à partir d'un graphique soigné : le temps de l'expérimentation numérique et des inégalités cruciales semble bien révolu !

6.2 les calculs trigonométriques

Nous venons de dire que la classe de Première S étoffe le cadre algébrique autour des calculs trigonométriques en apportant, grâce au produit scalaire (cf. partie B), les formules dites d'addition. Dans le même temps, elle renforce le stock des relations trigonométriques dans le triangle[168]. Compte tenu de la demande du programme de traiter en Travaux Pratiques des

> […] exemples de calculs de distances et d'angles dans les configurations usuelles (triangles, polygones réguliers, tétraèdre régulier, cube, …) et de calculs d'aires de polygones,

---

168 Le programme cite les relations suivantes :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$; $S = \frac{1}{2} bc.\sin A$; $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

et il suggère de s'intéresser aux polygones réguliers "simples".

nous nous attendons à une reprise des calculs que nous avons déjà rencontrés dans les classes de Troisième et Seconde. Dans les calculs que présentent et commentent les manuels, on peut remarquer, par rapport aux classes précédentes, à la fois l'augmentation du nombre de données et celle du nombre de résultats à obtenir. Les chaînes de calculs se font plus longues, plus complexes et donc plus sensibles à la propagation des erreurs. Nos interrogations se portent de nouveau vers les pratiques calculatoires notamment celles où la calculatrice est convoquée. Comment le contrôle des erreurs introduites par les résultats intermédiaires se fait-il maintenant ? S'appuie-t-il sur de nouveaux éléments référés à l'enseignement de l'Analyse ?

Un exercice résolu présenté par un manuel récent (Transmath, Nathan, 1995, page 348) nous conduit à ces pratiques calculatoires. Le voici :

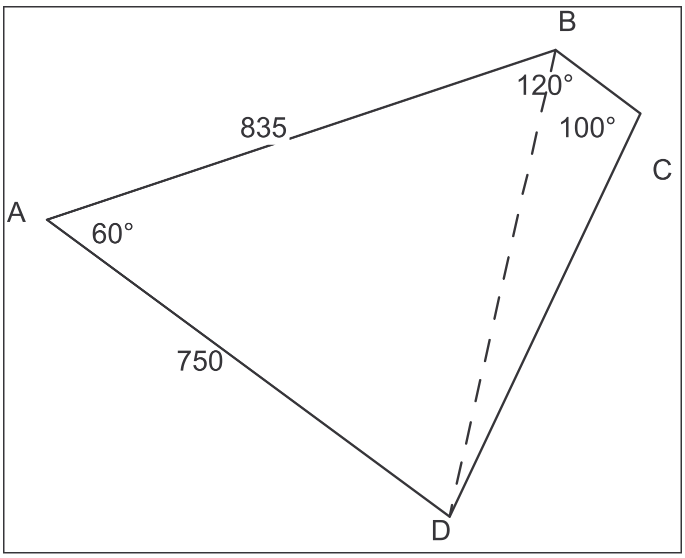
Exercice 21

ABCD est un quadrilatère convexe (cf. figure ci-dessous). AB = 835 m, AD = 750 m, $\widehat{BAD} = 60°$, $\widehat{ABC} = 120°$, $\widehat{BCD} = 100°$. Calculez le périmètre et l'aire de ce quadrilatère.

Et voici la solution commentée par le manuel lui-même :

Organisation du calcul

Pour calculer le périmètre du quadrilatère, il suffit de calculer BC et CD. Or les données ne permettent pas un calcul direct de BC. En effet, dans les triangles ABC et DBC, on ne connaît pas assez d'angles et de côtés pour en déduire BC. En revanche, les données permettent, grâce au théorème d'Al-Kashi, le calcul de BD puisque dans le triangle ABD, on connaît $\widehat{A}$ et les côtés AD et AB. On en déduira alors le calcul des angles du triangle ABD. Ceci permettra alors, compte tenu des hypothèses, le calcul des angles de BCD, puis finalement celui de BC et de CD, puisqu'on connaît aussi BD.



1. Calcul de BD

Dans le triangle ABD, $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2.AB.AD.\cos\widehat{BAD}$

$$= 835^2 + 750^2 - 2 \times 835 \times 750 \times \frac{1}{2} = 633475$$

D'où BD ≈ 795,91 [169].

2. Calcul de $\widehat{ABD}$

Dans le triangle ABD, $\dfrac{BD}{\sin 60°} = \dfrac{750}{\sin\hat{B}}$. D'où $\sin\hat{B} \approx 0{,}816$ et $\widehat{ABD} \approx 54{,}69°$

3. Calcul de $\widehat{DBC}$

Puisque $\widehat{ABC} = 120°$ et $\widehat{ABD} \approx 54{,}69°$, on obtient $\widehat{DBC} \approx 65{,}31°$

4. Calcul de $\widehat{BDC}$

$\widehat{BDC} = 180 - (65{,}31 + 100) \approx 14{,}69°$

5. Calcul de CD et BC

Dans le triangle DBC, $\dfrac{CD}{\sin\hat{B}} = \dfrac{BD}{\sin\hat{C}}$; d'où CD ≈ 734,29

$$\frac{BC}{\sin\hat{D}} = \frac{BD}{\sin\hat{C}} \text{ ; d'où } BC \approx 204{,}99.$$

6. Calcul du périmètre AB + BC + CD + DA

Ce périmètre, au mètre près, est égal à 2524 m.

7. Calcul de l'aire du quadrilatère

Cette aire est égale à la somme de l'aire de ABD et de l'aire de DBC.

[169] Encore cette précaution langagière. Lebossé et Hémery, en 1964, auraient écrit BD = 795,91 (cf. partie B).

$$\text{Aire ABD} = \frac{1}{2}.\text{AB.AD.sin}\,\widehat{\text{BAD}} = \frac{1}{2} \text{ x } 835 \text{ x } 750 \text{ x } \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 271\ 174{,}205$$

$$\text{Aire BCD} = \frac{1}{2}.\text{BC.CD.sin}\,\widehat{\text{BCD}} \approx 74\ 118{,}20$$

Donc, au m^2 près, l'aire du quadrilatère est 345 292 m^2.

Nous remarquons immédiatement un affichage de résultats intermédiaires avec une précision fixe pour les longueurs et pour les angles, égale au centième de l'unité de mesure annoncée par l'énoncé, et une précision de 10^{-3} pour les valeurs trigonométriques[170]. Par contre, l'affichage des résultats finaux est à l'unité près.
Mais nous remarquons aussi que la reprise des résultats intermédiaires dans les calculs se fait avec une précision supérieure qui nous semble être celle qu'offre une calculatrice à 10 chiffres. Cela se voit dès les calculs de CD et BC puisque :

$$\frac{795{,}91.\sin 65{,}31°}{\sin 100°} \approx 734{,}30 \text{ (au lieu de 724,29)}$$

et

$$\frac{795{,}91.\sin 14{,}69°}{\sin 100°} \approx 204{,}95 \text{ (au lieu de 204,99)}$$

Cela se retrouve avec le calcul de l'aire du quadrilatère puisque :

$$\frac{1}{2} \text{ x } 204{,}99 \text{ x } 734{,}29 \text{ x } \sin 100° \approx 74\ 117{,}67 \text{ (au lieu de 74 118,20)}$$[171].

Même si les conséquences sur le périmètre et l'aire du quadrilatère sont effacées par le choix de la précision finale, il peut paraître surprenant que le manuel ne signale pas les décalages que nous venons d'observer. Il ne dit mot sur l'intérêt d'un affichage à 10^{-2} pour les longueurs CD et BC alors qu'il se prépare à rayer ces deux chiffres décimaux dans le périmètre et à employer plus que ces deux chiffres dans l'aire. Agit-il par routine ? Si c'est le cas, cette routine nous semble fondée sur des pratiques calculatoires antérieures à l'ère de la calculatrice (cf. partie B) et qui perdureraient à l'époque actuelle comme l'atteste cette recommandation

> Il ne faut jamais arrondir en cours de calcul mais seulement à la fin du calcul.

extraite d'un manuel de Seconde (Colin, 1990, page 11)[172].

---

170 Nous notons, sans la comprendre, une hésitation pour les aires

171 En fait Aire BCD ≈ 74 118,22 comme on peut le vérifier en partant du fait que le quadrilatère ABCD est un trapèze ($\text{CD} = \frac{835\text{x}\sin 60°}{\cos 10°}$ et $\text{BC} = 750 - \frac{835}{2}(1 + \sqrt{3} \text{ x } \tan 10°)$).

172 Une telle recommandation était autrefois assortie de règles plus précises. Redonnons celle, présente dans le "Cours d'Arithmétique à l'usage des aspirants au baccalauréat ès sciences" de Combette (1882, page 331) :

> Pour obtenir le produit de deux nombres approchés avec m chiffres exacts, il suffit de prendre (m + 1) chiffres exacts dans chacun des facteurs qui commencent par un chiffre différent de l'unité, et (m + 2) dans le cas contraire.

Viennent alors au moins deux questions :

- Les pratiques calculatoires que le manuel nous dévoile sont-elles celles que les enseignants affichent en classe et attendent des élèves ?
- Où et comment ces pratiques ont-elles été élaborées et justifiées ?

Pour répondre à la première question, nous avons interrogé des enseignants de Première S sur l'adéquation de la résolution proposée par le manuel avec leur propre pratique dans la classe. Le questionnaire d'entretien et les documents d'accompagnement sont réunis dans les documents 4 de l'Annexe, Volume 1. Nous synthétisons ici les réponses en trois constats.

Premier constat : les précisions des résultats intermédiaires apparues dans l'affichage-papier ne sont pas contestées par les enseignants interrogés, même si certains d'entre eux expriment ces précisions plutôt en nombres de chiffres après la virgule. (2 chiffres pour les longueurs, 1 ou 2 chiffres pour les angles, 3 ou 4 chiffres pour les valeurs trigonométriques)

Deuxième constat : les précisions des résultats finaux apparues dans l'affichage-papier ne font pas l'unanimité. Certains enseignants auraient préféré réduire la précision et annoncer par exemple : Périmètre $\approx$ 2500 m et Aire $\approx$ 0,35 km^2. "Il faut être raisonnable", disent-ils, à l'instar du manuel Terracher (Hachette, 1991, page 145 ; cf. document 4.4 en Annexe, Volume 1) et ils rappellent qu'un résultat ne doit pas comporter plus de chiffres significatifs que les données.

Troisième constat : la gestion en classe des erreurs causées par les arrondis successifs partage les enseignants interrogés. Si tous sont d'accord pour dire qu'ils ne peuvent pas "s'attarder en classe" sur ce problème car "ce qui compte c'est la justesse du calcul" (au sens de bon ordonnancement des opérations qui mènent au résultat), ils se séparent pour ce qui concerne les recommandations aux élèves.
Certains disent imposer un nombre de chiffres après la virgule et n'exiger que le respect de l'affichage de ce nombre de chiffres. Cela leur permet de gommer la possible erreur sur le résultat final par un arrondi. Pour eux : "Toutes ces histoires de valeurs approchées, ce sont des affaires de physicien". Ce positionnement didactique apparaît nettement chez la professeur dont nous commentons les écrits et les propos dans les documents 4.5 en Annexe, Volume 1. Il entretient (volontairement ?) une confusion entre l'erreur systématique qui pourrait provenir d'incertitudes sur les données initiales et les erreurs de calcul dues aux arrondis dans les calculs intermédiaires.
D'autres disent se soucier de la propagation des erreurs dues aux arrondis successifs ("j'essaie d'arrondir le moins possible, de suivre les résultats au plus près" nous a dit une professeur) et s'efforcer de sensibiliser les élèves à la possible réduction de l'erreur de calcul en exploitant certaines fonctionnalités de la calculatrice. Ils suggèrent, entre autres, d'utiliser les touche $\boxed{\text{Answer}}$ et $\boxed{\text{Entry}}$, voire de stocker les résultats intermédiaires dans des mémoires alpha-numériques afin de les rappeler aux moments opportuns. Mais ils avouent aussitôt tenir plus rigueur aux élèves des décimales superflues que des décimales fausses.

Pour répondre à la deuxième question, il est utile de comparer les degrés de liberté dont dispose l'enseignant de Première S par rapport à ceux de l'enseignant de Troisième dans ces calculs de Géométrie métrique et de Trigonométrie.
L'enseignant de Troisième, avons-nous dit au chapitre C_1 (paragraphe 5), peut diriger l'accès aux valeurs approchées décimales en imposant (c'est le rôle du contrat didactique) les degrés de précision et le scénario calculatoire. La nécessité de soutenir l'élève dans ses débuts en Trigonométrie et le nombre réduit de relations métriques l'aide dans cette gestion de l'approximation numérique décimale.
Mais l'enseignant de Première S doit laisser à l'élève une part de responsabilité dans l'élaboration de ce scénario. L'élargissement de l'éventail des relations métriques le confronte alors à une augmentation du nombre de cheminements calculatoires possibles, dont il doit juger à la fois la validité algébrique (les expressions calculatoires sont-elles conformes aux relations métriques ?) mais aussi la validité numérique (les calculs numériques effectifs donnent-ils une valeur incontestable ?)

> *Son autorité à juger la validité algébrique du scénario est pleine et entière car il dispose des éléments théoriques présentables aux élèves pour asseoir le jugement. Son autorité à en juger la validité numérique est restreinte car il ne peut faire valoir que le postulat instrumental et il s'expose alors à une demande technologico-théorique pour légitimer l'organisation des calculs, laquelle demande il ne peut pas satisfaire.*

En effet, pour fonder le contrat didactique, l'enseignant ne peut pas se contenter de susciter les procédures qui conduisent au résultat qu'il juge exact ; il lui faut aussi produire des justifications extraites de l'organisation mathématique, au vu et au su des élèves. Dans le cas des calculs que nous présentons ici, ces justifications reposent sur deux convictions que nous avons repérées chez certains enseignants à qui nous demandions de réaliser les calculs devant nous et qu'ils expriment ainsi :

- en augmentant le nombre de chiffres avec lequel on fait calculer la calculatrice, le résultat obtenu est plus précis.
- si on trouve des décimales communes à deux résultats issus de deux calculs différents, ces décimales peuvent être regardées comme exactes.

Ces deux affirmations ébauchent une technologie encore un peu fruste mais qui rompt avec la confusion entre l'erreur systématique et l'erreur de calcul entretenue par les déclarations et les écrits de certains enseignants et manuels.
Certaines procédures employées par les élèves dans les exercices de Trigonométrie que nous avons analysés en Troisième et surtout en Seconde se rattachaient déjà à ces affirmations. Nous faisons l'hypothèse que de telles affirmations servent de base technologique à des pratiques calculatoires dans l'institution mais qu'elles ne sont pas des objets d'enseignement à part entière ou plutôt qu'elles ne sont plus des objets d'enseignement. Pourtant la première de ces deux affirmations nous paraît intégrable à l'enseignement d'Analyse, dès la classe de Première.

7. Vers une ingénierie didactique

La cohabitation entre la calculatrice et l'approximation numérique décimale ne recouvre que très partiellement les caractéristiques d'une articulation telle que nous l'avons définie dans la problématique. Dans la tâche T1, le contrôle sur l'approximation décimale obtenue est entièrement conditionné par le recours à la calculatrice et donc limité à ses performances techniques, sans ouverture théorique pour dépasser cette limitation. Dans la tâche T2, ce contrôle tend à être remplacé par une vérification à la calculatrice de la précision. Dans les calculs trigonométriques, ce contrôle ne déclare pas les théorèmes sur lesquels il s'appuie et il provoque quelquefois des fautes sur les valeurs approchées produites.

Relativement à notre dessein de faire émerger une praxéologie de décimalisation qui assumerait une bonne articulation entre la calculatrice et l'approximation numérique décimale, même si le contrat institutionnel relatif au calcul numérique approché que nous avons vu à l'œuvre dans les tâches emblématiques T1 et T2 ainsi que dans les calculs trigonométriques nous invite à la prudence, nous devons être nettement plus optimistes qu'à la fin de notre étude sur la classe de Seconde.

En effet, le contexte institutionnel n'exclut pas la recherche de conditions pour faire venir les problèmes fondamentaux de l'approximation numérique.

D'une part les demandes formulées par le programme de Première S, issues essentiellement des premières décisions de la contre-réforme, offrent un panel d'éléments théoriques susceptibles de travailler à la fois :

- la propagation des erreurs dues aux arrondis (Pb n°2), en s'appuyant notamment sur les variations et les accroissements d'une fonction numérique d'une variable
- la détermination d'une valeur approchée décimale avec une précision arbitraire (Pb n°1), à partir d'algorithmes d'approximations successives.

et donc de porter les deux problèmes fondamentaux de l'approximation numérique.

D'autre part, les discours de certains enseignants marquent des réticences à rester en dehors de ces problèmes dans les calculs qu'ils demandent aux élèves de réaliser et montrent les tentatives à modifier l'instrumentation des calculs par la calculatrice.

> *Mais pour qu'un travail sur ces éléments théoriques et sur leurs rapports à l'instrument de calcul puisse servir d'ancrage institutionnel à un contrôle mathématique des résultats décimaux dans un calcul numérique instrumenté par la calculatrice, il importe qu'il opère, dans la conduite de l'approximation numérique décimale d'un nombre, une rupture fondamentale avec le contrat institutionnel actuel : celle de remplacer l'exploitation via la calculatrice d'une expression algébrique de la valeur exacte du nombre, par la construction d'encadrements de ce nombre, de majorations de distances à ce nombre et d'une opérabilité sur ces objets.*

Nous avons conçu et conduit dans une classe de Première du Lycée de Pontcharra une ingénierie didactique avec l'ambition de réaliser cette rupture et de créer autour d'elle les conditions d'une modification adéquate du contrat institutionnel dans cette classe. Cette ingénierie et son expérimentation sont décrites dans la partie D.

Auparavant, nous voudrions réunir les études des chapitres B et C dans une seule conclusion.

CHAPITRE C_4 : BILAN DE L'ANALYSE ECOLOGIQUE

Le paradigme écologique auquel nous avons attaché l'ensemble des analyses des chapitres B et C nous a permis de développer notre hypothèse de recherche dans le système d'enseignement dont les états et les réactions ne se laissent pas attraper par des lois au caractère absolu et définitif. Nous avons, en cela suivi la voie décrite par Rajoson, dans sa thèse de didactique des mathématiques (1988) :

> Aussi, pour avancer, et sans renoncer au principe du déterminisme, il faut en arriver à des formulations qui tracent une voie moyenne entre une indétermination de surface et un déterminisme profond, que l'on s'efforcera de repérer par-delà les micro variations qui nous le dissimulent avec constance (page 8).

Nous pouvons mesurer la pertinence de ce cheminement analytique à l'aune des résultats que nous avons disséminés dans les différentes conclusions et que nous allons regrouper ici :

Une image épistémologique des calculs numériques en Trigonométrie, mieux structurée et plus précise.

La Trigonométrie, fruit de pratiques numériciennes dans le corpus euclidien, s'est développée sur deux grands problèmes : la résolution des triangles (plans ou sphériques) et la numérisation des valeurs trigonométriques. Elle s'est progressivement amarrée, au cours de leur élaboration par les mathématiciens, aux grands édifices mathématiques que sont l'Analyse et l'Algèbre. Ses liens avec la Géométrie ont été retravaillés par l'Algèbre linéaire et ceux avec le Numérique par l'Analyse.

Le Numérique s'est progressivement émancipé de la théorie eudoxienne des rapports. Après une longue période d'arithmétisation, il est refondé autour de la notion de nombre réel, dans des structures algébriques et topologiques[173]. C'est dans cette structuration du Numérique que sont maintenant posés et résolus les problèmes d'approximation qui touchent de plein fouet les calculs trigonométriques.

La construction de cette image épistémologique a contribué à notre rééducation épistémologique des calculs trigonométriques, pour reprendre une expression de Rajoson. À l'aide du concept de transposition didactique, l'analyse a dégagé les principales significations mathématiques que peuvent prendre de tels calculs, celles qui sont actives dans l'EMS actuel et celles qui ne le sont pas. Elle nous a ainsi fourni les moyens de dépasser le monde clos du savoir enseigné dans lequel ont tendance à s'enliser les premiers pas exploratoires dans le système d'enseignement.
Elle nous a montré une institution aux prises avec des nécessités d'élémentarisation d'une Trigonométrie de plus en plus riche. La première rencontre qu'elle met

---

[173] "Divers courants, notamment les courants numéricien et algébriste, tentent explicitement de résoudre la permanence du nombre dans le passage des rationnels aux irrationnels. Chacun de ces courants permet le traitement de classes de problèmes à travers des rapports différents aux nombres et des problématiques différentes : numérique, algébrique et celle de la mesure des grandeurs. Dans ces courants, des mathématiciens proposent une certaine unification des nombres et un nouveau rapport au nombre. Les fondements des théories précédentes se trouvant mal assurés et trop dépendants de la Géométrie, amènent un nouveau rapport au nombre – un système axiomatisé de nombres – qui servira de base aux mathématiques modernes, et notamment au domaine de l'Analyse." (Bronner, 1997, page 45).

actuellement en place au Collège, essentiellement axée sur la résolution des seuls triangles rectangles, l'oblige à une reprise délicate, en Lycée, vers deux domaines, la Géométrie vectorielle et l'Analyse. De plus, elle peine à maintenir une cohérence didactique entre ces deux domaines dont l'unification théorique dépasse largement ses possibilités.
Elle nous a montré aussi une institution confrontée à l'exigence contradictoire de simplicité et de justesse dans la réalisation effective des calculs numériques sur des nombres qui ne sont pas décimaux. Mais l'enfermement actuel de ces calculs dans un cadre essentiellement algébrique, alors qu'ils disposent aussi d'ancrages puissants en Analyse et en Algorithmique ne répond pas aux besoins de justification des techniques instrumentées par la calculatrice.

Une identification des différents objets et des relations que mobilise la réalisation effective d'un calcul numérique en Trigonométrie dans les institutions didactiques de l'EMS, actuel ou passé.

Les schémas de fabrication d'un tel calcul, comme les contrôles capables de garantir, par anticipation ou par vérification, que le résultat du calcul est juste, touchent à la fois à l'organisation de la Trigonométrie et à celle du Numérique.

La question instrumentale se pose donc en premier lieu au sein de ses organisations et l'analyse écologique a mis en lumière ce que nous avons appelé une genèse instrumentale institutionnelle. C'est en particulier l'exigence d'une numérisation décimale des grandeurs géométriques qui pousse l'EMS, pour la réalisation effective du calcul où il s'agit de produire un résultat numérique, à faire intervenir des objets matériels ou sémiotiques, appelés instruments de calcul, dont la production est décimale.

Cette genèse instrumentale institutionnelle se heurte à la question de l'approximation et essaie de la prendre en charge. Nous avons vu comment l'EMS du traité de Bézout instrumentait les calculs avec les tables dans le cadre arithmétique en se protégeant de la propagation des erreurs dues aux arrondis décimaux.

Nous avons montré qu'une telle protection est encore partiellement possible (et certainement nécessaire), grâce à la calculatrice et au cadre algébrique, dans le Collège actuel mais qu'en Lycée, elle s'affaiblissait et que, pour garder sa légitimité mathématique, elle devait être épaulée par une problématique de l'approximation. Or les réponses négatives aux deux questions que nous posions à la fin du chapitre B_2 témoignent que l'enseignement de l'Analyse peine actuellement à prendre en charge une telle problématique.

Une mise en perspective de certains phénomènes didactiques actuels avec les rapports institutionnels aux objets calculatrice et approximation numérique, et, au-delà avec les choix de la noosphère.

Considérons, par exemple, les faits relatés par Fromentin lorsqu'il analyse les comportements des élèves de Collège (cf. paragraphe 2 du chapitre A_1). L'élève, dit-il, identifie la valeur exacte et le nombre décimal écrit sur l'écran de la calculatrice et ne reconnaît de valeur approchée que dans une troncature à deux ou trois chiffres après la virgule. Nous reconnaissons là un rapport personnel à la valeur approchée en tout point conforme au rapport institutionnel que crée le contrat numérico-algébrique en Collège.

Seule une problématique de l'approximation pourrait modifier le rapport institutionnel à la valeur approchée et à sa précision en les détachant de l'aspect formel qu'a l'écriture décimale dans ce contrat. Nous doutons en même temps des possibilités de faire bouger l'écologie du calcul numérique approché car nous n'entrevoyons pas de moyens de faire vivre les problèmes 1 et 2 de l'approximation avec un potentiel algébrique et analytique aussi faible qu'il est actuellement en Collège.

La question se pose autrement en lycée, du fait même de la proximité des objets de l'Analyse. Mais quelques-uns des phénomènes didactiques que nous a révélés l'analyse écologique sont les conséquences de choix noosphériens qu'il convient d'interroger. Nous les mentionnons de nouveau :

Il y a ceux que nous avons attribués à la transposition didactique de la notion de fonction (cf. Assude, 1992, qui parle d'arrêt de la transposition). Le plus sensible, pour ce qui a trait à l'approximation, est, selon nous, l'absence de négociation du passage de l'encadrement à l'intervalle, en classe de Seconde.

Il y a ceux que nous avons attribués à l'absence de construction des nombres réels (cf. Bronner, 1997, qui parle de vide didactique institutionnel relativement à l'objet nombre réel). Les praxéologies de décimalisation sont privées d'appuis technologico-théoriques (notamment topologiques) et sont fragilisées dans leurs relations avec la calculatrice.

Il y a ceux que nous avons attribués à la non-lisibilité des problèmes fondamentaux de l'approximation numérique. Leur insertion dans les champs de l'Analyse et de l'Algorithmique n'est pas transparente, ce qui retarde et même compromet la mise en place de techniques instrumentées nouvelles dans les calculs approchés comme les calculs trigonométriques.

Sur ces trois points, nous sommes frappés par l'écart entre les ambitions des réformateurs de 1981 et l'état actuel de la transposition didactique tel que l'analyse écologique nous permet de le décrire.

Une capacité à formuler des hypothèses sur les modifications possibles de ces rapports institutionnels dans l'EMS actuel.

La formulation de ces hypothèses est rendue possible par la confrontation entre la caractérisation de l'état de cohabitation entre la calculatrice et l'approximation numérique décimale, et la description de l'émergence de relations nouvelles entre nombres, fonctions et algorithmes au Lycée.
Elles sont donc formulées à la fois en termes de rupture épistémologique sur le calcul approché qui doit passer de la manipulation d'égalités ou de quasi-égalités à celle d'inégalités et de distances, et en termes de changement d'état de cohabitation entre l'instrument de calcul et l'objet approximation.

Ces hypothèses peuvent être intégrées à un projet d'ingénierie didactique, pour en tester la validité et revenir ainsi sur les résultats de l'analyse écologique.

Partie D

Une ingénierie didactique et son expérimentation dans une classe

Chapitre D_1 : présentation de l'ingénierie

Chapitre D_2 : la situation cos75°/0,25

Chapitre D_3 : la situation cos18°

Chapitre D_4 : la situation cos72°/cos9°

Chapitre D_5 : évaluation de l'ingénierie

PARTIE D : UNE INGENIERIE DIDACTIQUE ET SON EXPERIMENTATION DANS UNE CLASSE

L'ingénierie en tant qu'élément de notre complexe méthodologique a été présentée dans la partie A. Redisons seulement que :

> L'ingénierie, vue comme méthodologie de recherche, se caractérise en premier lieu par un schéma expérimental basé sur des "réalisations didactiques" en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement (Artigue, 1990).

Dans un premier chapitre, nous affichons les objectifs que nous assignons à l'ingénierie ainsi que les choix qui président à son organisation globale. Partant de l'analyse des rapports institutionnels développée dans la partie C, nous retenons les variables macro-didactiques que nous jugeons pertinentes par rapport aux objectifs. Nous justifions ensuite un découpage de l'ingénierie en trois situations didactiques.

Dans les trois chapitres suivants, nous détaillons les analyses a priori et a posteriori, situation par situation.

Dans un dernier chapitre, nous tirons de l'expérimentation quelques enseignements plus généraux sur l'ingénierie notamment sur la validité des hypothèses globales engagées dans sa conception.

CHAPITRE D_1 : PRESENTATION DE L'INGENIERIE

1. Les objectifs

Les analyses précédentes, celles des rapports institutionnels entre calculatrice et approximation numérique, nous ont souvent laissé à la porte de la classe. Cependant, les analyses institutionnelles du chapitre C nous permettent de formuler des hypothèses sur la cohabitation calculatrice-approximation numérique décimale du Collège au Lycée, plus particulièrement sur :

- son état dans toute classe représentative de l'institution Première S
- les conditions, dans une telle classe, de son devenir en une articulation où les contrôles seraient gouvernés par des savoirs mathématiques.

Nous avons déjà dit notre intention de créer les conditions d'une modification du contrat institutionnel relatif au calcul numérique approché dans une classe de Première S. Cela signifie que l'ingénierie se présente d'abord comme un projet d'enseignement que nous qualifierons de *première rencontre avec une praxéologie de décimalisation*[174].

Nous décidons aussi de disposer d'observables sur les comportements des élèves dans un problème d'approximation numérique dont l'enjeu mathématique est justement le contrôle mathématique des résultats décimaux produits. Nous pouvons ainsi mener des observations pour conduire les analyses a posteriori et les confronter aux hypothèses formulées dans les choix des variables macro et micro didactiques. Cela signifie que l'ingénierie se présente aussi comme un projet d'observatoire qui doit s'intéresser aux pratiques calculatoires des élèves et de l'enseignant. Les observations portent sur les actions et les productions de l'enseignant et d'élèves de la classe dans laquelle nous construisons les situations didactiques.

Nous pouvons donc distinguer deux groupes d'objectifs :

- *Un groupe d'objectifs attachés au projet d'enseignement* :

  > concevoir un schéma expérimental insérable dans l'organisation mathématique de la Première S qui réalise la rupture définie précédemment (cf. conclusion du chapitre C_3) pour réussir le basculement d'un problème d'approximation numérique du cadre algébrique dominant vers le cadre analytique naissant
  > conduire un processus de négociation avec l'enseignant pour adapter ce schéma à l'organisation didactique locale, de la conception globale jusqu'à la mise au point du déroulement des séquences d'enseignement.

- *Un groupe d'objectifs attachés au projet d'observatoire* :

  > faire formuler par les élèves les énoncés technologico-théoriques qui sous-tendent leurs actions dans l'instrumentation d'un calcul par la calculatrice et leurs décisions

[174] Nous nous expliquons un peu plus loin sur l'emprunt, à Chevallard (1998), de l'expression "première rencontre".

dans la validation des résultats décimaux obtenus à partir de l'instrument, notamment par rapport à la précision souhaitée.
> repérer les procédures employées par eux dans un processus effectif de production d'une valeur approchée décimale - organisation du calcul et détermination de la précision - et les attacher à des stratégies explicables par le contexte institutionnel
> enregistrer les réactions de l'enseignant devant les stratégies choisies par certains élèves et disposer de ses productions écrites ou orales publiques.

Les hypothèses mises à l'épreuve sont élaborées à partir des analyses de la partie C, d'une part sur les conditions de vie d'un problème d'approximation numérique décimale dans une classe de Première, d'autre part sur les pratiques de calcul approché instrumentées ou non par la calculatrice.

2. les variables macro-didactiques

2.1 le choix d'une classe commune de Première S

La calculatrice à laquelle nous nous intéressons est la calculatrice ordinaire au sens où les fonctionnalités qui seront sollicitées chez elle sont celles qui sont banalisées dans l'enseignement secondaire pour le calcul numérique ordinaire depuis une vingtaine d'années – celui composé des 5 opérations arithmétiques et des fonctions numériques usuelles (polynomiales, rationnelles et irrationnelles simples, trigonométriques) - sans faire appel aux possibilités graphiques ni à celles, encore peu usuelles, de calcul symbolique. Le questionnement didactique à l'origine de l'ingénierie vise des pratiques institutionnelles que nous avons reconnues comme stabilisées dans l'institution EMS avec un objet technique situé hors des préoccupations très médiatisées sur les nouvelles technologies. Du fait de cette naturalisation dans l'institution E.M.S., l'ingénierie n'a pas besoin de construire un environnement technologique qui sorte de l'ordinaire d'une classe commune de Première S[175].

Il est cependant nécessaire de disposer de bonnes conditions matérielles d'observation et c'est la raison pour laquelle nous optons pour les heures dites de module. Mis en place il y a quelques années, à raison d'une heure hebdomadaire, le dispositif modulaire offre à l'enseignant les seuls moments avec des effectifs réduits - plus précisément avec des demi-classes comportant entre 15 et 20 élèves ; ces heures sont ordinairement employées soit à des travaux pratiques directement en phase avec le cours soit à des travaux de reprise ou d'approfondissement en marge du cours. Lui seul permettra une observation rapprochée du travail des élèves. Il y a, par contre, deux inconvénients majeurs : celui de mobiliser la classe sur plusieurs semaines et celui d'espacer les séances. Nous limitons donc le nombre de séances, complétons les séquences en classe par des devoirs "à la maison" et instituons un carnet de bord, appelé "Chronique" dans les documents remis aux élèves.

[175] Nous connaissons bien le lycée de Pontcharra (département de l'Isère) et avons eu plusieurs fois l'occasion de travailler avec les professeurs de mathématiques de cet établissement scolaire "ordinaire" mais honorable.

L'efficacité de la rupture que contient l'ingénierie dépend aussi du moment où elle intervient dans l'année scolaire. Ce que nous savons des programmes de la classe de Première nous conduit à nous placer :

- ni trop tôt dans l'année scolaire pour laisser le temps à un renforcement des capacités algébriques, et permettre une plus grande familiarisation avec les objets de base de l'Analyse : les fonctions numériques et les suites numériques.
- ni trop tard pour que la première rencontre avec la nouvelle praxéologie de décimalisation puisse se poursuivre dans la construction, par la classe, de certains des éléments théoriques qu'elle comporte.

2.2 la volonté d'un projet global et cohérent

Expliquons-nous sur la signification que nous donnons à cette première rencontre.

L'organisation praxéologique visée se caractérise principalement par l'existence, dans le calcul approché d'un nombre, de contrôles capables d'anticiper l'intervention d'erreurs, dont certaines peuvent provenir de l'instrument de calcul, et de garantir au résultat décimal final annoncé la précision souhaitée. Les savoirs mathématiques que nous souhaitons placer au cœur de ces contrôles proviennent, dans le contexte actuel, des réponses que l'Analyse apporte aux deux problèmes fondamentaux de l'approximation numérique. L'ingénierie doit donc faire venir deux types de tâches :

- approcher décimalement un nombre à toute précision décimale souhaitée à l'avance
- évaluer la précision décimale d'un résultat de calcul approché à partir des erreurs de calcul et des erreurs sur les données initiales.

et elle doit le faire d'une part en disqualifiant les réponses institutionnelles basées sur l'exécution par la calculatrice d'expressions algébriques, d'autre part en promouvant des éléments théoriques que l'institution EMS attache à l'enseignement de l'Analyse en classe de Première S.

Elle se doit donc de *rencontrer* :

- l'impossibilité d'exploiter directement une expression algébrique avec la calculatrice
- l'obligation de mettre en place des encadrements emboîtés et d'opérer sur eux,

mais aussi :

- la distinction dans l'incertitude d'un résultat approché entre ce qui ressort de l'organisation des calculs (l'erreur de calcul, y compris celle due à la calculatrice) et ce qui ressort de la propagation par les opérations d'une erreur initiale (l'erreur systématique)
- des techniques instrumentées qui tiennent compte de cette distinction et permettent de mener à bien les calculs.

Nous voulons donc un projet global et cohérent à partir duquel l'élève (re)découvrirait des tâches de calcul approché et avec lequel l'enseignant pourrait engager la constitution d'un environnement technologico-théorique arrimé à l'Analyse. Nous gardons, en effet, à l'esprit que :

> Si, à l'évidence, la première rencontre ne détermine pas entièrement le rapport à l'objet – lequel se construit et se remanie tout au long du processus d'étude -, elle joue un rôle important dans l'économie de l'apprentissage, parce que, étant donné l'investissement institutionnel et personnel qu'elle impose (au double plan cognitif et libidinal), elle oriente en général fortement le développement ultérieur des rapports institutionnel et personnel à l'objet rencontré. Chevallard (1988)

Nous décidons en conséquence d'un fil conducteur unique dont l'analyse de la transposition didactique des calculs trigonométriques nous a permis d'apprécier la pertinence épistémologique, à savoir la formation d'une table trigonométrique. Dans l'EMS actuel, le problème de la formation d'une table trigonométrique peut prendre la forme de la numérisation décimale d'une fonction numérique, et sous cette forme, il est fugitivement présent (cf. paragraphe 5 du chapitre C_2).

Dans l'ingénierie, nous retenons la fonction cosinus degré (x → cosx°) sur l'intervalle [0 ; 90]. Le travail de numérisation est mis en scène sous la forme d'un projet de classe : celui de fabriquer la table des valeurs de cosinus x degrés pour x entier dans [0 ; 90].

Tous les documents remis aux élèves et à l'enseignante sont réunis dans l'Annexe à ce chapitre, en Volume 1.

2.3 les formes de cette première rencontre

Nous demandons à la classe de jouer au fabricant de table numérique. De ce point de vue, la forme que nous adoptons pour la première rencontre s'inscrit au moins partiellement dans une problématique que Chevallard (1998) qualifie de "culturelle-mimétique".

> En ce cas, par le truchement d'un récit ayant valeur de compte rendu d'enquête sur le monde, l'objet rencontré apparaît d'abord comme existant par ailleurs [*dans la calculatrice*], en certaines pratiques sociales [*celles du concepteur de calculatrice*]. Ce sous-moment "culturel", où l'objet n'existe encore qu'en effigie, de sorte que l'étudiant n'a avec lui que des rapports fictifs, est suivi d'un sous-moment "mimétique" où, par la manipulation effective de l'objet, l'étudiant est censé imiter le praticien – en "jouant", par exemple au mathématicien, au géographe, au critique littéraire, etc.

Nous ne cherchons pas à échapper à cette étiquette, en nous disant qu'elle apporte ici un avantage non négligeable, celui de susciter auprès de l'élève une "curiosité culturelle" : par quelle mystérieuse alchimie une calculatrice peut-elle fournir des valeurs trigonométriques décimales ?

Mais l'ingénierie ne peut se couler entièrement dans une problématique culturelle. À cela, il y a au moins deux raisons :

- La première est celle qu'exprime Borel dans un manuel de Trigonométrie de 1920 et que nous avons déjà présentée :

> Nous n'avons, conformément au programme, donné aucun détail sur la construction des Tables, c'est-à-dire sur les procédés employés pour calculer effectivement les nombres qui y figurent.
>
> Un peu de réflexion suffit d'ailleurs pour permettre à chaque élève d'imaginer des moyens de calculer les tables avec autant de décimales exactes qu'on peut le désirer […]. En effet, en divisant la circonférence en 2^n parties égales et donnant à n des valeurs de plus en plus grandes, on obtient des points de division aussi rapprochés que l'on veut du point donné à l'avance. Ce procédé théorique serait d'ailleurs fort long, mais l'étude des procédés les plus courts que l'on peut employer pour construire et vérifier une table numérique de quelque importance (qu'elle qu'en soit la nature) exige des connaissances bien plus étendues que celle des lecteurs de ce livre.

Autrement dit, l'entreprise de fabriquer une Table de cosinus, même limitée aux valeurs entières en degrés d'arcs du premier quart de cercle, ne peut entrer dans une phase de réalisation effective et complète en temps limité qu'en convoquant des éléments théoriques qui sortent du programme de la classe. Cela est encore plus vrai actuellement qu'au début du siècle dernier. Même théoriquement viable, le projet "culturel" serait pratiquement vain.

- La deuxième raison tient à la finalité de l'ingénierie.

Cette ingénierie doit se charger de situations didactiques capables de porter les "raisons d'être" des objets qu'elle souhaite rencontrer. Il ne s'agit pas tant de pratiquer la fabrication de la Table dans toutes ces dimensions que de faire surgir certains objets comme des réponses à des questions que pose cette fabrication, même incomplètement et imparfaitement réalisée. C'est ce que rappelle Chevallard (1998) :

> Dans sa version la plus exigeante, la rencontre culturelle-mimétique conduit, en principe, à rechercher et à expliciter – sur le mode discursif - les raisons d'être de l'objet ainsi rencontré, c'est-à-dire les motifs pour lesquels cet objet a été construit ou pour lesquels, du moins, il persiste dans la culture. De là que la rencontre culturelle-mimétique puisse se dégrader en une parodie de la pratique, qui occulte les raisons de la pratique.

Il souligne en même temps l'intérêt d'une deuxième forme pour la première rencontre :

> Par réaction, et à l'opposé, on peut vouloir écarter toute référence à un réel préexistant qu'il s'agirait de reproduire en l'imitant, au profit de la création *sui generis*, identifié à un système de situations dites f*ondamentales* (qu'on peut nommer *ombilicales*), dont l'élève, seul ou en équipe, est l'acteur principal, sinon unique, et qui, devant ses yeux, font naître l'objet comme ce qui permet de fabriquer une *réponse* à une ou des *questions* déterminées. La rencontre *en situation* conduit ainsi à proposer, *de facto* et peut-être même *de jure*, une "définition" de l'objet rencontré qui ne se veut pas une simple copie des définitions déposées dans la culture […]

De ce point de vue, notre projet comporte un deuxième avantage : celui de solidariser les différentes valeurs exactes et approchées à calculer.

> *Ce deuxième avantage est capital dans la conception de l'ingénierie car il permet de faire intervenir l'ordre et la distance entre nombres en les soumettant aux variations et accroissements de la fonction numérique. Nous pensons ainsi toucher à une des "raisons d'être" de l'objet fonction numérique dans l'approximation numérique.*

Grâce à la structure tabulaire, nous pensons tirer le calcul effectif des valeurs prises par une fonction numérique hors du contrat numérico-algébrique en le démarquant de certaines pratiques attachées à ce contrat, notamment :

- celle qui isole les uns des autres les résultats de différents calculs : sauf justement à s'inscrire dans une étude fonctionnelle, l'élève fabrique les résultats isolément sur la calculatrice et les extrait un par un sans structure de collecte sous-jacente (qui plus est, dans certaines calculatrices, chaque résultat chasse le précédent).
- celle qui atrophie l'espace numérique des arguments : il ne paraît pas utile, par exemple, de penser x dans R pour obtenir cosx° puisqu'il semble que tout x soit dans la calculatrice. Pensons, par exemple, qu'une table numérique ne donne qu'un nombre limité et préfixé de valeurs positives et décimales de l'argument, par rapport auxquelles il faut se repérer et dont il faut se servir pour *approcher* d'autres valeurs.
- celle qui renverse la finalité du travail d'approximation : la valeur d'une fonction est disponible décimalement avec une précision qui dépasse les "besoins ordinaires" de l'institution ; l'élève est alors conduit à retirer ce qu'il juge (d'après le contrat institutionnel) inutilement précis plutôt que d'entrer dans une recherche de gain de précision.

Il devrait en résulter une déstabilisation de certaines manières de faire qui sont devenues routinières pour l'élève (et qui façonnent son action en la structurant). Mais pour que cette remise en cause de certaines caractéristiques de l'accès instrumental au résultat d'un calcul numérique puisse faire évoluer la composante instrumentale de son rapport personnel à l'approximation numérique décimale, nous devrons la compléter par des formes (ostensives) d'instrumentation des calculs.

C'est dans cette perspective que nous avons imaginé la structure de l'ingénierie en trois situations didactiques. Avant de les détailler, justifions le choix de la fonction cosinus degrés.

2.4 le choix de la fonction cosinus degré sur l'intervalle [0 ; 90]

Avec cette fonction, l'ingénierie bénéficie de quatre atouts :

- *Celui d'une familiarité numérique, géométrique et algébrique* : "cosinus x degrés" où x est un nombre entier, voire décimal, est un objet familier des élèves d'une classe de Première S.

C'est même l'objet trigonométrique le plus familier des élèves de l'enseignement secondaire français. Rappelons qu'il est présenté en classe de quatrième comme un rapport de projection orthogonale et qu'il est rejoint par le sinus et la tangente en classe de Troisième, dans un cadre que nous pourrions qualifier de Géométrie du triangle rectangle, inclus dans la Géométrie métrique. La présentation de quelques formules[176] permet d'ajouter de l'algébrique à une familiarité essentiellement géométrique et numérique, à la fin du Collège.

176 $(\sin x°)^2 + (\cos x°)^2 = 1$; $\tan x° = \dfrac{\sin x°}{\cos x°}$; $\sin(90 - x)° = \cos x°$; $\cos(90 - x)° = \sin x°$

- *Celui de la marginalisation analytique* : "cosinus x degrés" où x est un nombre réel n'est pas un objet intégré à l'Analyse.

Certes la classe de Seconde introduit les fonctions circulaires. En replaçant le rapport trigonométrique, sinus ou cosinus d'un angle dans un cercle dont le rayon fixe l'unité de longueur du plan (le cercle trigonométrique), elle transforme ce rapport en la mesure de la longueur d'un segment, longueur *dont la variabilité peut être appréciée de façon continue et rendue dépendante d'un seul argument*. C'est là une porte d'accès à l'Analyse via la création de fonctions numériques, à condition de définir l'argument et de le numériser. Le texte du programme de cette classe ne laisse guère de choix : il privilégie d'emblée la mesure principale, en radians, de l'angle orienté sur le cercle trigonométrique entier [177].
Aussi les manuels de Seconde (et de Première, à leur suite) évitent-ils systématiquement de mettre en place la fonction cosinus avant de disposer de la "bonne unité" (le radian). Ils s'interdisent ainsi de parler de variations du cosinus d'un angle avant la mise en place du cercle trigonométrique qui, il est vrai, permet, à la fois, le passage au radian et l'extension sur R. Une fois présentée la "bonne fonction", ils regardent globalement ses variations, sa parité, sa périodicité. Les variations de 0 à $\frac{\pi}{2}$ ne méritent pas, dans cette optique, un examen trop poussé qui ferait basculer dans une problématique d'Analyse locale de la fonction cosinus dont nous savons qu'elle a été écartée des programmes (cf. chapitre C_2).

Ainsi la fonction cosinus n'est pas mise en filiation directe avec les variations du cosinus des angles exprimés en degrés dans les situations géométriques travaillées en Collège car il faut fabriquer et apprivoiser le cercle trigonométrique avant d'étudier la fonction.
De plus cette fonction n'est pas numérisée de la même manière que les autres fonctions usuelles de la classe de Seconde (absence de tableaux de valeurs avec pas, construction graphique sur la base des quatre ou cinq "valeurs remarquables" exactes calculées et de valeurs décimales approchées acceptées). Même sa représentation graphique rompt avec les règles contractualisées lors des études des autres fonctions (usuelles ou non) puisque l'unité graphique sur l'axe des abscisses est π ou l'un de ses sous-multiples, en aucun cas un nombre entier ou décimal[178].

---

[177] sans entrer dans une analyse institutionnelle approfondie des fonctions circulaires, il faut souligner la force de deux contraintes épistémologiques et didactiques :

> celle de faire disparaître la grandeur angle de la définition de la fonction (qui doit être numérique) tout en conservant cette grandeur comme point d'appui dans le cercle trigo où elle fournit des ostensifs indispensables tant par leur instrumentalité que par leur sémioticité ;

> celle de mettre en place les fonctions circulaires (variations et représentations graphiques) sans leur donner de potentiel algébrique (dont l'installation nécessiterait un gros investissement géométrique ou vectoriel).

[178] toujours sans entrer dans une analyse institutionnelle, trois remarques sont ici utiles :

1) La première rencontre collégienne avec le cosinus d'un angle le présente comme un nombre attaché à l'angle et donc, théoriquement, indépendant de l'unité choisie pour exprimer sa mesure (la mesure de son écart, aurait-on dit dans la période des mathématiques modernes).

On écrit, par exemple, $\cos\widehat{IOM} = \cos 45° = \cos 50gr$, en s'appuyant sur l'abus d'écriture $\widehat{IOM} = 45°$. De fait, on débouche ainsi sur une **fonction d'angle**. Et regarder cos comme une fonction numérique impose un détour par les angles pour lui associer une unité, une parmi une infinité d'autres unités possibles. Pour distinguer chacune des fonctions cos, il pourrait être alors judicieux d'adopter des notations indexées du type $\cos_{dg}$, $\cos_{rd}$, etc., comme l'avait fait la réforme des mathématiques modernes, Il n'y a donc pas intégration des fonctions circulaires dans l'ensemble des fonctions numériques usuelles où l'élève fait ses premiers pas en Analyse. Cette marginalisation nous autorise à insérer le projet d'enseignement que porte l'ingénierie dans les organisations mathématique et didactique de la classe de Première en évitant de prendre en charge tous les enjeux d'un enseignement attaché à l'Analyse sur les fonctions circulaires[179].

➢ *Celui d'une décimalisation sans le nombre π*

L'unité d'angle radian fait venir le nombre π et complique la numérisation décimale de la fonction cosinus. En effet, dans ce cas, on n'obtient une valeur décimale de la longueur d'un sous-multiple du cercle (ou du quart de cercle) qu'au prix d'une division par le nombre π et donc d'une double approximation décimale, celle de π et celle du quotient. On le revoit ici, dès lors que le cosinus veut naître dans un cadre géométrique, derrière la numérisation de l'argument se cache le choix de l'unité d'angle car chaque unité désigne implicitement certains angles (ou certains arcs) dont les valeurs "supporteront" un calcul exact tandis que d'autres relèveront d'un calcul approché.

---

et de mettre en évidence la relation entre deux éléments quelconques de la famille cos, à savoir $f_a(x) = f_b(k.x)$ où k dépend de a et de b mais pas de x.

2) D'ailleurs la calculatrice "ordinaire" ne propose qu'une seule touche cos. Malheureusement, l'usage de cette touche ne correspond pas à l'indexation telle que nous la définissons ici. Pour le calcul de $\cos_{dg}40$ par exemple, avec la calculatrice, nous devons soit fixer la mention de l'unité d'angle sur l'argument (40°) et non pas sur la fonction, soit mettre effectivement le mode degrés soit à écrire nous-mêmes $\cos(\frac{2\pi}{360}x40)$ en la laissant en mode radians (car $k = \frac{2\pi}{360}$ dans le passage de $\cos_{rd}$ (noté cos) à $\cos_{dg}$). Le recours à la grandeur angle pour différencier les fonctions cos entre elles explique que le sort fait dans les calculatrices aux fonctions circulaires diffère de celui des fonctions exponentielles alors que les deux familles utilisent le même type de relation fonctionnelle entre leurs membres ($f_a(x) = f_b(k.x)$ où k dépend de a et de b mais pas de x). Pour les fonctions exponentielles, a et b sont des nombres et k vaut $\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$ tandis que, pour les fonctions cos, a et b sont des angles et k vaut $\frac{a}{b}$ conçu comme le rapport de deux grandeurs de même nature. Toute fonction exponentielle de base a est tabulable directement par l'écriture a^x (a puissance x) tandis que, pour une fonction cos, la vigilance s'impose puisque 1seule touche $\boxed{\text{cos}}$ sert 2 fonctions cos (voire 3, dans certaines calculatrices) qui ne sont distinguables entre elles que par une marque (d'angle) extérieure à cette touche. Cette vigilance s'impose encore plus quand le marquage de l'unité ne concerne qu'une des "zones de travail" de la calculatrice (zones souvent appelées applications), comme c'est le cas dans certaines calculatrices graphiques ou symboliques. La dimension instrumentale de l'activité mathématique est ici soumise à des contraintes de commandes qui font écho à des choix sur les notations. Or la nature ostensive de ces notations leur confère une instrumentalité potentielle.

3) On voit que la notation cosx°, si elle autorise des manipulations de conversion du type cos40° = $\cos(40x\frac{2\pi}{360})^r$ très présentes en trigonométrie rectiligne, ne peut pas s'inscrire dans un travail d'Analyse comme celui que demande la dérivation sauf à définir la fonction qui à x^r associe x° et à la dériver.

[179] Ceci ne nous fait pas oublier les effets négatifs de cette non-intégration comme :

> écarter plusieurs problèmes mathématiques essentiels pour l'Analyse : la nature des nombres trigo et leur place dans l'ensemble des nombres réels, les procédés de leur production, la nature transcendantale de la fonction cos, les raisons du choix du radian comme bonne unité, etc.

> institutionnaliser chez les élèves un type de rapport aux calculs approchés et à leur instrumentation par la calculatrice qui est déconnecté de toute problématique d'Analyse, alors que ces calculs concernent les premières fonctions transcendantales (peu de temps avant la mise en place des autres fonctions transcendantales : logarithmes, exponentielles, puissances).

Rappelons que pour traiter cet enjeu numérique en le plongeant dans la géométrie métrique[180], l'enseignement mathématique secondaire fait appel à un système numérique qui, au niveau fin de Collège et classe de Seconde, se coule dans un fonds et des structures numériques où le nombre réel est traité essentiellement à partir de sa "décimalité" (y compris π). Ce système numérique est bien adapté au mesurage des grandeurs lui-même bâti sur le système métrique et, pour en accroître son efficacité, il suffit de lui adjoindre une "bonne" unité d'angle c'est-à-dire une unité qui partage le cercle en un nombre entier de parties égales dont la mesure commune soit elle aussi décimale voire entière. Avec un tel partage du cercle, le calcul trigonométrique - constitué des éléments de Calcul numérique forgés au sein de la géométrie métrique pour calculer des longueurs, des angles, des aires, etc., en exploitant des notions de trigonométrie[181] - peut privilégier les calculs exacts à base de nombres entiers ou décimaux simples, de fractions et de radicaux de ces nombres, notamment dans certaines configurations élémentaires comme le triangle équilatéral ou le triangle rectangle isocèle. La "bonne" unité qui officie actuellement dans les Collèges et Lycées français est le degré[182] et la décimalisation du calcul trigonométrique qui en résulte cultive certaines formes d'approximation numérique décimale au cœur de notre questionnement sur la cohabitation entre la calculatrice et l'approximation numérique décimale. L'unité d'angle degré est d'ailleurs la seule unité présentée aux collégiens et lycéens d'aujourd'hui (rencontrent-ils le grade ?) et, pour certaines calculatrices, c'est la seule en vigueur, à côté du radian.

- *Celui d'un jeu limité de formules*

Le quart de cercle permet de rester avec des angles aigus, d'esquiver les interrogations sur le signe du cosinus et du sinus que suscite l'usage de la formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et de disposer d'une formule $\cos(90 - x)° = \sqrt{1-(\cos x°)^2}$ qui est stable dans l'intervalle [0 ; 90]. Cette formule, que nous pouvons appeler *passage au complémentaire*, fournit un moyen de calcul et de validation de certaines valeurs exactes du cosinus. Elle est aussi utilisable dans un calcul de valeurs approchées et cette utilisation peut permettre une première confrontation avec la problématique de l'approximation numérique[183].
Mais cette formule ne permet pas de produire par elle-même des valeurs exactes nouvelles car elle est algébriquement fermée sur elle-même[184].

[180] Appuyée sur le corpus théorique de la modélisation de l'espace physique instruit par la géométrie euclidienne, la géométrie métrique s'attache à faire valoir des enjeux d'**effectivité numérique** sur les mesures de certaines grandeurs comme les longueurs, les aires, les angles.

[181] ce Calcul n'a pas toujours existé en Collège ; sa place, ses développements et ses finalités ont connu bien des variations dans l'enseignement mathématique secondaire.

[182] On sait les différentes tentatives de faire vivre dans l'enseignement une décimalisation complète de la circonférence.

[183] Pour deux nombres positifs a et b vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ une erreur de ε sur a entraîne une erreur sur b qu'on ne peut majorer, **indépendamment de b**, qu'au mieux par $\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}$. La perte de précision décimale en termes de chiffres exacts pour des angles proches de 0 peut s'avérer importante. Par exemple : cos 5° = 0,996 arrondi à 10^{-3} près ; cos 85° = 0,087 arrondi à 10^{-3} près alors que $\sqrt{1-0{,}996^2} = 0{,}089$ arrondi à 10^{-3} près. Cela s'aggrave avec cos2° : cos2° = 0,999 arrondi à 10^{-3} près ; cos88° = 0,035 arrondi à 10^{-3} près alors que $\sqrt{1-0{,}999^2} = 0{,}045$ arrondi à 10^{-3} près.

[184] Constatons qu'il en est de même de toutes les formules recommandées, sans les rendre "exigibles", par le programme de Seconde et que c'est là une contrainte importante qui pèse sur la production et la manipulation numérique de valeurs trigonométriques dans la classe de Seconde et au début de la classe de Première.

Par contre nous avons loisir d'installer deux formules créatrices de valeurs trigonométriques exactes[185], à savoir les formules de *bissection* ($\cos\frac{x}{2}° = \sqrt{\frac{1 + \cos x°}{2}}$) et de duplication ($\cos 2x° = (2\cos x°)^2 – 1$) et de les faire fonctionner en restant dans l'intervalle [0 ; 90]. Notons que sinx° ne nous offrait pas les mêmes possibilités puisque les formules de duplication et de bissection font intervenir le cosinus ce qui augmente le nombre de formules à manipuler.

2.5 une voie pour mener à bien le projet "culturel"

L'impossibilité de connaître exactement les valeurs de cosx° pour d'autres angles entiers que les multiples de 15° - c'est-à-dire d'exprimer ces valeurs par des combinaisons finies des trois opérations élémentaires autorisées que sont la bissection, la duplication et la complétion à 90, à partir des trois angles de base (0°, 60° et 90°) dont les cosinus sont connus - sera constatée dès la première séance. Pour pouvoir se centrer sur ses objectifs principaux en un nombre limité de séances, l'ingénierie renvoie à la maison (cf. document en Annexe, Volume 1) un travail d'exploration des *angles entiers atteignables par des combinaisons des trois opérations*. Sans développer ce travail nous condensons ci-dessous quelques résultats que nous avons exploités dans la construction de l'ingénierie :

➢ *les combinaisons finies d'opérations élémentaires*

tous les nombres entiers entre 0 et 90 se répartissent en 6 classes disjointes :

la classe de 45 : 0, 45, 90 (les multiples de 45)
la classe de 15 : 15, 30, 60, 75 (les multiples de 15 qui ne sont pas multiples de 45)
la classe de 9 : 9, 18, 27, etc. (les multiples de 9 qui ne sont pas multiples de 15)
la classe de 5 : 5, 10, 20, 25, etc. (les multiples de 5 qui ne sont pas multiples de 15)
la classe de 3 : 3, 6, 12, 21, etc. (les multiples de 3 qui ne sont multiples ni de 9 ni de 15)
la classe de 1 : 1, 2, 4, 7, etc. (tous les autres)

Chaque nombre donne accès, par une combinaison finie (non unique) des opérations citées, à tous les autres de sa classe mais seulement à ceux-là. Voici par exemple la classe de 5 présentée en 3 chaînes connexes, que l'on peut aussi schématiser par un arbre :

40 <--> 50 <--> 25 <--> 65.
10 <--> 80 <--> 40 <--> 20 <--> 70 <--> 35 <--> 55
10 <--> 5 <--> 85

[185] Sans elles, nous ne disposerions que des valeurs dites remarquables pour les angles de 30°, 60° et 45°. Les valeurs de 36° et 72° plus difficiles d'accès car de la forme $a + b.\sqrt{5}$ ont été écartées du gotha des valeurs remarquables et remisées dans des exercices. En d'autres lieux, elles permettaient d'établir un tableau de valeurs exactes avec un pas de 18° (le dixième de demi-cercle).

- *des algorithmes itératifs combinant les opérations élémentaires*s

il existe de nombreux algorithmes de ce type à initialiser sur n'importe quel nombre x réel de l'intervalle [0 ; 90] et qui convergent vers des nombres entiers de cet intervalle.

À titre d'exemple, les algorithmes itératifs définis par $\frac{90 - x}{4}$, par $\frac{90 - x}{8}$, par $\frac{90 - \frac{90 - x}{2}}{8}$

ne demandent pas trop d'opérations à chaque pas et convergent respectivement vers 18, 10 et 6. En s'appuyant sur *la continuité des fonctions sous-jacentes aux trois formules*, on peut alors fabriquer des suites récurrentes de premier terme u_0 = cosx° qui convergent vers cos18°, cos10° ou cos6°.
Il est même possible d'obtenir aussi cos9°, cos5°, cos3° si l'on accepte d'augmenter le nombre d'opérations élémentaires de l'algorithme itératif. Avec plus d'opérations pour un pas[186], on peut converger vers cos1°.
Choisissons x égal à 0, 60 ou 90. Nous sommes en mesure de construire au moins un algorithme, initialisé sur cosx° et composé des opérations élémentaires autorisées, qui converge vers l'un quelconque des cosinus d'angle entier entre 0° et 90°.

- *des processus d'approximation décimale*

Grâce au capital d'algorithmes, on peut fabriquer des combinaisons finies d'opérations autorisées[187] qui permettent, à partir de cos60° ou de cos90°[188], de calculer effectivement, avec l'aide d'une calculatrice, des valeurs approchées décimales de cosx° pour tout x entier de l'intervalle [0 ; 90] et à une certaine précision qui dépend à la fois du x choisi, de l'algorithme utilisé et des performances de la calculatrice.

> *En résumé, tout cosinus d'angle entier entre 0° et 90° est théoriquement atteignable à partir des trois cosinus de base par un enchaînement fini ou infini des trois formules de base[189].*

La crédibilité mathématique du projet est acquise.

Telle qu'elle a été négociée avec l'enseignante l'ingénierie ne mènera pas le projet à son terme puisqu'elle laissera dans l'ombre le calcul de représentants de la classe de 3 et de la classe de 1 ; mais elle répondra aux objectifs premiers que nous avions fixés et offrira à l'enseignante des possibilités de reprise et de prolongements. On trouvera en Annexe (Volume 2) des propositions de prolongements que nous lui avons signalées. Il est également instructif de remarquer la rencontre possible avec le célèbre problème de la trisection de l'angle (c'est possible sur les angles 15° et 9°) auxquels les mathématiciens se sont intéressés pour construire les premières tables trigonométriques (cf. partie B).

---

186 voici un algorithme qui comporte 18 opérations et converge vers 2 :
(90 - (90 - (90 - (90 - (90 - (90 - x) / 4) / 2) / 4) / 2) / 2) /32

187 les formules de bissection et de complétion à 90 peuvent suffire

188 ou seulement de 90

189 À titre d'exemple, on pourra vérifier que la suite bbbbcbcbbbb où b symbolise une bissection et c une complétion à 90 permet de passer de 90 à 2,988288125. On en déduira un enchaînement d'opérations arithmétiques qui de cos90° = 0 mène à une valeur exacte de cos2,988288125 que l'on considèrera comme une valeur approchée de cos3°.

Voyons maintenant comment nous empruntons cette voie mathématique avec les objectifs propres à l'ingénierie didactique.

3. le découpage en trois situations didactiques

Nous avons retenu trois séances de 55 minutes relayées par des travaux "à la maison".

- La première séance est consacrée à la présentation du projet de classe, à la prise en main des formules et à la comparaison de cos75° avec 0,25.
- La deuxième séance porte toute entière sur l'approximation de cos18°, qui n'est pas accessible par les formules de base.
- La troisième séance vise les approximations décimales des cosinus des autres angles de la classe de 9° en partant d'une certaine valeur approchée décimale de cos18°.

> *Dans chacune des séances, nous avons organisé, sur un enjeu d'approximation numérique, une situation didactique caractérisée chacune par un jeu sur les formules et les angles de base dans lequel l'élève est susceptible d'entrer pour accepter l'enjeu et réussir.*

Les mots situation didactique et jeu sont employés ici au sens que leur donne Brousseau dans la théorie des situations didactiques.

> La situation didactique est, *pour l'observateur*, la modélisation de l'environnement dans lequel est plongé un joueur, la situation d'action, d'apprentissage ou d'enseignement pour l'élève, le cadre de l'enseignement pour l'enseignant. Le système antagoniste du joueur dans une situation est *pour le joueur* comme pour l'observateur, une modélisation de la partie de l'univers à laquelle se réfère la connaissance en jeu et les interactions qu'elle détermine.
>
> C'est ce système antagoniste que nous avons proposé d'appeler *milieu*. Il joue donc un rôle central dans l'apprentissage, comme cause des adaptations, et dans l'enseignement, comme référence et objet épistémologique (Définition : le milieu est un jeu ou une partie du jeu qui se comporte comme un système non finalisé).
>
> Il a un caractère relatif : pour l'enseignant une situation S (non didactique, en ce sens que les connaissances doivent être introduites par l'élève lui-même) peut apparaître comme un moyen (didactique) d'enseignement à mettre en œuvre et donc constituer l'environnement dans lequel il va immerger les élèves. Elle constituera le milieu M avec lequel va interagir selon les contraintes de la situation S (qu'il a choisie ou non). L'élève (mis) dans cette situation S peut avoir à interagir avec un (autre) système qui constituera le milieu m qu'il doit comprendre et maîtriser. (Brousseau, 1990).

À la fin de la première séance, la situation 1 – que nous appellerons dorénavant situation cos75°/0,25 – se caractérise par *un jeu algébrique*, au sens où ce sont les règles opératoires attachées à la structure algébrique de R qui devraient conduire la comparaison entre les deux nombres.

Au début de la deuxième séance**,** la situation 2 - que nous appellerons dorénavant situation cos18° - se caractérise par *un jeu topologique*, au sens où la décision de retenir la meilleure valeur approchée devrait passer par des évaluations de distances entre nombres et conduire à la réduction de certaines de ces distances.

Au cours de la troisième séance, la situation 3 – que nous appellerons dorénavant cos72°/cos9° - se caractérise par *un jeu fonctionnel*, au sens où ce sont les propriétés fonctionnelles des formules de base qui permettront de produire et de contrôler les valeurs approchées souhaitées.

> *Dans chacune des trois situations, un élément essentiel du milieu est le groupe d'objets constitué des trois formules et des trois angles de base.*

Énonçons nos hypothèses sur le rôle de cet ensemble dans les situations :

> *Dans la première situation, les connaissances algébriques de l'élève sur les formules privilégient le fonctionnement des stratégies algébriques.*

> *Dans la deuxième situation, l'échec des stratégies algébriques provoque une modification des connaissances de l'élève par l'utilisation de cet ensemble de formules et d'angles dans un algorithme d'approximations successives.*

> *La troisième situation favorise la transformation des formules de base en fonctions et permet la rencontre avec une décimalisation portée par l'Analyse.*

CHAPITRE D_2 : LES ANALYSES DE LA SITUATION COS75°/0,25

Les analyses que nous produisons ici se proposent, en amont de l'expérimentation, d'éclairer les choix plus locaux (micro-didactiques, pourrions-nous dire) qui ont présidé à la mise en œuvre de la situation didactique et, en aval de l'expérimentation, d'engager le processus de validation des hypothèses de recherche. Après une présentation de la situation comportant une réflexion sur l'insertion de la situation dans l'organisation globale de l'ingénierie et des remarques relatives à la négociation avec l'enseignante, nous travaillons l'analyse a priori proprement dite dont l'objectif est de

> déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves [*et de l'enseignant*] et leur sens (Artigue, 1990).

Nous terminons avec une analyse dite a posteriori qui, par un mouvement de confrontation et d'intégration à l'analyse a priori, (re)questionne certaines des hypothèses fondatrices de la situation et de l'ingénierie.

1. Présentation de la situation cos75°/0,25

La situation est créée par la question 5 de la première séance - comparez cos75° avec le nombre 0,25 – qui suit immédiatement le corrigé professoral de la question 4 - écrivez la valeur exacte de cos75°(cf. documents en Annexe de la partie D_1).

Les questions viennent en cette fin de première séance pour provoquer une confrontation des procédures algébriques activées jusque-là, avec les objectifs de décimalisation inhérents au projet de tabulation de la fonction cosinus degrés[190].
Cette confrontation nous est donc essentiellement utile pour observer l'influence du contrat algébrique dans une activité numérique (cf. le projet d'observatoire détaillé dans le chapitre D_1). Secondairement, elle permet à l'enseignante de travailler les techniques algébriques et celles de décimalisation avec une calculatrice.

1.1. deux variables micro-didactiques vitales pour l'ingénierie

Nous avons choisi une tâche reconnue de l'institution, celle de comparer deux nombres, un nombre réel non décimal et un nombre décimal (transformable en écriture fractionnaire). Ce faisant, le nombre réel répond à un certain type de décimalisation.

> Une première variable micro-didactique (V1) concerne la décimalisation du nombre réel non décimal.

[190] C'est ce projet auquel l'enseignante se réfère pour susciter l'adhésion de la classe et qui sert de gouvernail apparent pour diriger le travail mathématique de celle-ci. Redisons ici que ce que nous appelons la décimalisation d'un nombre est sa mise en écriture décimale finie ou infinie, exacte ou approchée

En effet, nous avons rencontré dans l'enseignement secondaire (cf. partie C) au moins trois types différents de décimalisation :

- **Type 1** : le nombre à décimaliser est connu par sa valeur exacte à travers une écriture algébrique qui est reproductible intégralement dans l'éditeur de calculs de la calculatrice[191]
- **Type 2** : le nombre à décimaliser est connu par sa valeur exacte à travers une écriture qui n'est pas reproductible dans l'éditeur de calculs de la calculatrice[192]
- **Type 3** : le nombre à décimaliser est connu par sa valeur exacte à travers une écriture reproductible dans l'éditeur de calculs de la calculatrice, mais dont certains attributs numériques ne sont connus que par une valeur approchée[193].

Pour activer le contrat numérico-algébrique, nous avons décidé, pour cette première situation, d'une décimalisation de type 1. Le nombre cos75° est en effet disponible dans une écriture exacte faite d'opérations arithmétiques, par exemple $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$. Mais nous avons imaginé deux phases : une première où la calculatrice n'est pas autorisée et une deuxième où elle est autorisée sous deux conditions : pas de touche trigonométrique et justification du recours à l'instrument.

> *Une deuxième variable micro-didactique (V2) caractérise la place de la calculatrice officiellement déclarée par l'enseignant(e).*

Par référence aux pratiques habituelles des manuels et des enseignants repérées soit dans les énoncés des exercices soit dans les consignes écrites attenantes aux devoirs surveillés ou épreuves d'examen, nous pouvions déclarer la calculatrice :

- soit formellement interdite
- soit autorisée avec restrictions instrumentales (des brides)
- soit autorisée sans restriction instrumentale

La séparation en deux phases élargit l'éventail des comportements possibles des élèves. Conçue ainsi la tâche a le mérite à la fois de frotter l'algèbre à un enjeu numérique et de favoriser la décimalisation sans qu'elle se présente à l'élève comme une commande de l'enseignant mais plutôt comme une nécessité imposée par la complexité de l'écriture algébrique. En effet, avec ses deux étages de radicaux, cette écriture est susceptible de déstabiliser les procédures algébriques sans les inhiber totalement et,

---

[191] Cette reproduction peut modifier le graphisme de l'écriture, à cause notamment de sa linéarisation, mais, avant exécution (validation), elle est identifiée "algébriquement" au même nombre (le référent mathématique n'a pas changé). L'éventail de cette reproductibilité sémiotique ne cesse de s'élargir (certaines calculatrices non symboliques permettent d'écrire des intégrales définies pour les calculer en valeur approchée décimale).

[192] On peut penser aux solutions de certaines équations comme aux limites de suite ou de fonction mais aussi à tous les calculs que la calculatrice ne sait pas faire directement à partir d'une "simple" reproduction sémiotique dans l'éditeur de calculs.

[193] Par exemple $3.a^2 + 5$ où a = 1 à 10^{-14} près. On trouve ici les valeurs prises par des fonctions numériques (constructibles en calculatrice) pour des nombres dont on connaît une approximation mais pas la valeur exacte. Tel est le cas du maximum d'une fonction numérique "élémentaire" en un point que l'on ne peut reproduire en calculatrice que par une valeur approchée.

après échecs éventuels de ces procédures, de déclencher des évaluations décimales légitimées par la présence du nombre décimal 0,25.
La suggestion que nous formulons à l'élève d'utiliser la calculatrice en l'échange seulement d'une explication cherche alors à créer, localement et provisoirement, un contrat échappatoire du contrat algébrique sans calculatrice que l'institution nous laisse habituellement voir dans des exercices de comparaison de deux nombres réels de ce type.

> *Nous espérons ainsi susciter des utilisations diversifiées de la calculatrice analysables comme autant de rapports institutionnels d'élèves à la décimalisation par la calculatrice ; et comme autant d'occasions dont l'enseignant peut se saisir à la fois pour dégager des éléments mathématiques de contrôle de l'approximation numérique décimale et pour amorcer une instrumentalisation de la calculatrice dans une telle décimalisation.*

1.2. la négociation avec l'enseignante

Les entretiens pré-expérimentaux avec l'enseignante étaient conçus à la fois pour intégrer, ses recommandations pédagogiques dans la conception des séances et pour apprécier, relativement aux objets sensibles de l'ingénierie, les éléments des contrats didactiques les plus actifs dans la classe[194]. Pour cela, avec son accord, nous avons enregistré les échanges verbaux et recueilli des copies de ses productions écrites.
Dans la relation que nous faisons de ces entretiens, nous faisons donc apparaître en quoi ils ont contribué à ancrer l'ingénierie au niveau local et ce qu'ils révélaient du rapport institutionnel d'un enseignant à l'approximation numérique.

Dès notre première rencontre avec l'enseignante, celle-ci insiste sur la disponibilité en temps. Voici un premier extrait de l'entretien (P désigne la professeur et I l'interviewer) :

> P : Je pense que je vais avoir du mal à tenir les temps ; parce que j'ai évidemment des élèves qui sont pas rapides, qui rentrent très lentement dans un exercice ; une petite recherche qui est annoncée pour 10 minutes, je ne sais pas si je vais arriver à tenir les délais. S'il faut que ça rentre en 1 heure, on peut toujours y arriver ; en faisant des mises au point qui font avancer ; cela dépend de ce que j'ai le droit d'influencer pour que ça avance un peu plus vite ; aussi bien ils vont rester 5, 10 minutes sans vraiment écrire quelque chose qui t'intéresse.
> I : as-tu repéré des endroits où tu penses qu'il peut y avoir ce type de problème ?
> P : pas pour la séance 1 jusqu'à la comparaison ; la comparaison, ça va accrocher ; 10 minutes pour comparer ces deux réels, j'y crois pas trop.

Nous lui suggérons alors d'autoriser immédiatement la calculatrice. Voici sa réaction :

> P : … alors là on est en plein dans un chapitre de 1e S, comparaison de réels ; ils ont des techniques, de différence, comparaison des carrés, [...]
> I : ah oui d'accord, ils ont tout un arsenal de techniques ; c'est donc vraiment un terrain familier, algébrique.
> P : j'espère que oui.

---

[194] Nous regardons ici le contrat didactique comme une instanciation spatiale et temporelle du contrat institutionnel. C'est la forme que prend le constat institutionnel dans la classe.

I : mais on a quand même décomposé la question 5 (I relit la question 5) ceci te convient –il ?
P : parfaitement ; on a été devant un petit problème comme ça et on a dû prendre la machine pour voir justement où on allait, pour concrétiser un petit peu parce qu'on avait des réels qui n'étaient pas faciles à comparer on a voulu savoir justement où on allait et on a pris la machine ; ça nous a aidés ; ça nous a donné la direction à prendre.
I : pour les élèves donner la direction à prendre, ça veut dire quoi ?
P : ça veut dire qu'on sait ce qu'il faut démontrer, on sait lequel est le plus grand des deux.
I : on sait le résultat et il s'agit simplement d'apporter une preuve à un résultat qui est déjà énoncé ?
P : après il faut apporter la rigueur, il faut apporter la propriété mathématique qui va faire la comparaison, mais de voir où l'on va ça aide beaucoup.
I : ça veut dire que la calculatrice est là pour formuler une conjecture.
P : oui, oui, c'était ça dans ce contexte-là.
I : mais toi ce que tu attends de tes élèves c'est une démonstration rigoureuse donc que la calculatrice ne pourra pas …
P : ah oui, quand c'est formulé comme ça comparer un réel avec un réel.
I : qu'est ce que ça veut dire démonstration rigoureuse ?
P : ça veut dire que là ils vont me comparer les carrés de façon [...] comment je pourrais te dire ? [...] ils vont passer par la comparaison des carrés et montrer que leur différence est positive ou négative suivant [...] ; ils vont s'appuyer sur deux propriétés du cours de cette année.
I : cela veut dire qu'un élève qui te présente le calcul fait sur calculatrice du nombre racine de [...] et qui compare à 0,25, celui-là tu vas réagir.
P : oui je vais lui demander quelque chose d'écrit avec rigueur et qui applique les propriétés de cette année, une rédaction, en fait quelque chose qui puisse justifier chaque ligne qu'il écrira sur sa machine ; s'il fait apparaître ces valeurs-là sur sa machine, ça ne suffira pas je veux une petite rédaction ; au fond, il aura commencé à regarder où le mènent ces deux réels, il aura une idée sur lequel est le plus grand, mais au fond, il n'aura pas la démarche rigoureuse de comparaison de réels puisqu'il n'aura pas été capable de la rédiger ; au fond, il n'aura pas compris réellement comment on démontre qu'un réel est plus grand qu'un autre ; il saura le vérifier avec sa machine mais il n'aura pas la démonstration rigoureuse dans la tête, la démarche rigoureuse que cela demande puisqu'il n'arrivera pas à le mettre en forme c'est qu'il y a quelque chose qu'il n'aura pas compris.

L'enseignante est persuadée que les élèves sont en mesure d'accomplir la tâche sans calculatrice, grâce à des techniques qu'elle a enseignées. Ses réticences à passer immédiatement en régime de calculatrice autorisée proviennent non seulement de sa volonté de faire travailler ces techniques mais aussi d'une certaine conception de la rigueur. L'absence de formulation qu'induit, selon elle, l'instrumentation du calcul avec la calculatrice est la marque d'une insuffisance de rigueur. Mais la seule formulation à laquelle elle semble faire référence est la formulation algébrique. La preuve ne serait-elle, pour elle, que de nature algébrique ? En tout cas, elle cantonne la calculatrice dans un rôle qui renforce l'influence du contrat numérico-algébrique, celui d'amorcer la technique algébrique en choisissant le bon sens de l'inégalité ("ça nous a donné la direction à prendre").

2. Structuration de l'analyse a priori

L'analyse se réfère à la fois aux analyses préalables notamment celles qui sont conduites à partir de l'étude des manuels de différentes périodes de l'EMS et aux objectifs fixés à l'expérimentation. Bien que certains éléments de cette analyse soient nourris d'observations postérieures à l'expérimentation, ils n'en sont pas autant dépendants d'elles en ce sens que nous les replaçons systématiquement dans le réseau des nécessités qui, selon nous, gouverne le déroulement de la situation ; un peu comme si les faits observés étaient pour nous des rappels à l'ordre opérés par le réel didactique que nous observons.
Dans ce réseau de nécessités qui va commander mais aussi expliquer les comportements des différents acteurs de la situation didactique, nous tenons compte du fait que la tâche proposée n'est pas ignorée de l'institution. Nous mettons donc en avant le traitement institutionnel de cette tâche caractérisable à la fois par la façon dont l'institution lui donne vie, les techniques qu'elle propose pour l'accomplir et l'insertion de ces techniques dans l'organisation mathématique.

Nous structurons cette description en instrumentant la notion de cadre.

> Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre ces objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations (Douady, 1987).

Cette structuration en cadres instruite dans le contexte institutionnel de la classe et le contexte particulier de la séance nous permet de décrire et de classer les techniques aptes à soutenir l'accomplissement de la tâche, en prenant soin de distinguer :

- celles que l'institution juge appropriées pour la tâche et qui devraient donc "naturellement" marquer les différents cheminements empruntés par les élèves
- celles qui, soit parce qu'elles ne sont pas enseignées, soit parce qu'elles ne sont pas désignées pour accomplir la tâche en question, ne devraient pas apparaître mais qui possèdent un ancrage théorique potentiel dans l'organisation mathématique suffisant pour inspirer des procédures alternatives chez les élèves.

Nous choisissons les cadres à partir des découpages construits par l'institution EMS elle-même et nous considérons chacun d'eux dans l'*état institutionnel actuel* que les analyses préalables nous ont justement permis d'apprécier. Nous faisons ainsi venir quatre cadres : l'algébrique, l'analytique, le géométrique[195] et le numérique décimal.

Redisons que pour les trois premiers, il faut imaginer les domaines habituellement attachés, dans la sphère mathématique savante, aux vocables Algèbre, Analyse et Géométrie et repris par l'institution EMS elle-même[196]. Ces cadres sont reconnus par

---

[195] On aura noté la présence du quart de cercle dessiné sur la feuille chronique. Elle peut provoquer un retour au cadre géométrique puisque que l'angle de 75° s'obtient facilement par bissection entre 60° et 90° et que les cosinus de ces deux angles ont été fournis dès le début de la séance.

[196] Pour l'Algèbre : le calcul littéral attaché à la structure de corps archimédien totalement ordonné, ses applications aux équations et inéquations dans $\mathbb{R}$; pour l'Analyse : les fonctions numériques à variables réelles et l'étude de leurs variations grâce au calcul différentiel et intégral ; pour la Géométrie

cette institution comme des "tout structuré" sur lesquels elle bâtit des organisations cohérentes et des contrats didactiques très puissants comme nous l'a confirmé l'analyse institutionnelle de la partie C.

Avant de séparer les différents cadres retenons qu'au titre de correction de la question précédente, la professeur a écrit au tableau trois écritures de la valeur exacte de cos75° (ce sont cos75° = $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$, cos75° = $\sqrt{\frac{1-\sqrt{0,75}}{2}}$ et cos75° = $\sqrt{0,5-\sqrt{0,1875}}$) et qu'il s'agit à présent de comparer cos75° et 0,25.

3. Le cadre algébrique

Ce cadre assure la continuité entre les deux questions car il est celui dans lequel l'enseignement actuel construit la notion de valeur exacte en tissant autour d'elle un réseau de règles opératoires attachées à la structure de l'ensemble R et appliquées aux calculs et aux comparaisons numériques.

3.1 un premier complexe technico-technologique

La tâche de comparaison proposée, où interviennent des radicaux, se rencontre dès la classe de Troisième dans un environnement théorique avec lequel l'institution est en mesure de forger des techniques algébriques dites de calcul littéral. La première d'entre elles que nous présentons et que nous désignerons par Te1 est présente dans la plupart des manuels de Troisième, Seconde et Première. Pour la décrire, empruntons au manuel Pythagore 2e (Hatier, 1994) son exercice n° 80 page 60.

Attention aux approximations

Soit a =10$\sqrt{51}$ et b = 70 + $\sqrt{2}$. L'élève a écrit dans son cahier :

D'après ma calculatrice, $\sqrt{2} \approx 1,414$ et $\sqrt{51} \approx 71,41$
D'où a ≈ 71,41 et b ≈ 71,414
Donc a < b

a) que dire de ce raisonnement ?
b) calculer les valeurs exactes de a^2 et b^2, puis $a^2 - b^2$. Chercher ensuite le signe de $a^2 - b^2$.
c) comparer a et b.

Sans oublier son "coup de pouce" :

b) $a^2 - b^2 = 198 - 140\sqrt{2}$. On trouve son signe en comparant 198^2 et $(140\sqrt{2})^2$.

: les configurations de l'espace affine euclidien (dimension 2 ou 3), leurs propriétés affines, métriques et vectorielles.

On voit que deux règles[197] se conjuguent pour fabriquer et justifier cette technique avec laquelle le manuel guide l'élève dans la comparaison :

> R1 : *l'ordre de deux nombres positifs est le même que celui de leurs carrés*
> R2 : *l'ordre entre deux nombres est fourni par le signe de la différence des deux nombres*

La technique Te1 consiste à combiner les deux énoncés R1 et R2 : l'énoncé R2 pour dégager et isoler un radical et l'énoncé R 1 pour s'en débarrasser. Suivons le manuel, pas à pas :

1) $a^2 = 5100$; $b^2 = 4900 + 2 + 140\sqrt{2}$;
2) $a^2 - b^2 = 198 - 140\sqrt{2}$
notons le rôle de R2 pour dégager $140\sqrt{2}$ en réorganisant $a^2 - b^2$ en une nouvelle différence, a' - b', de deux nouveaux nombres positifs de carrés plus simples que les précédents
3) $a'^2 = 39204$; $b'^2 = 39200$; or $39204 > 39200$; donc (R1) $a' > b'$;
4) donc (R2) $a' - b' > 0$
5) donc $a^2 - b^2 > 0$ (car $a^2 - b^2 = a' - b'$)
6) donc (R2) $a^2 > b^2$
7) donc (R1) $a > b$.

Nous avons détaillé le retour vers a et b pour marquer les interventions des énoncés technologiques tout en sachant que, une fois la technique routinisée, une résolution moins verbeuse et moins pointilleuse délaisserait la plupart des justifications.

Que se passe-t-il avec des radicaux superposés ?
Essayons avec les nombres de notre situation, que sont $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ et $\frac{1}{4}$ [198].

$a^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ et $b^2 = \frac{1}{16}$; $a^2 - b^2 = \frac{7}{16} - \frac{\sqrt{3}}{4}$; or $(\frac{7}{16})^2 = \frac{49}{256}$ tandis que $(\frac{\sqrt{3}}{4})^2 = \frac{3}{16} = \frac{48}{256}$; on conclut que $a > b$.

Remarquons que la comparaison est "à la portée" de la technique mais qu'on gagnerait de la souplesse dans cette résolution en ajoutant la règle suivante :

> R3 : *on conserve l'ordre de deux nombres en les multipliant par un même nombre positif.*

[197] Ce mot employé dans EMS est, à l'instar d'un théorème ou d'une proposition, ce que nous appellerons un "énoncé technologique"

[198] Le remplacement de 0,25 par $\frac{1}{4}$ fait partie des règles d'action portées par le contrat algébrique.

La technique T1 appliquée à $\sqrt{0,5 - \sqrt{0,1875}}$ demande de calculer le carré de 0,4375 pour le comparer à 0,1875 (cf. le corrigé professoral dans les documents annexes).

On pourrait penser que cette technique s'applique d'emblée à la comparaison de deux nombres a et b de la forme $c + d\sqrt{e}$ où c, d, e sont des entiers voire des rationnels.
En fait cela demande une première adaptation pour s'assurer de la positivité des nombres à comparer. En effet, soit à comparer $\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2} - 6$; le deuxième nombre est négatif et la règle R1 ne peut pas s'appliquer ; on peut alors décider d'élargir la base technologique, par exemple en adjoignant l'énoncé R4 (dans l'exemple de la situation, on ajoute 6 aux deux nombres a et b avant d'appliquer la règle R1 :

R4 : *on ne modifie pas l'ordre de deux nombres en leur ajoutant un même nombre*.

On dispose ainsi de quatre énoncés (de R1 à R4) constituant une technologie (Tl1) qui installe la technique Te1 dans le système numérique (notons le S) constitué des nombres rationnels et des irrationnels fabriqués à partir des nombres entiers et des cinq opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée)[199].

Cependant la règle R4 incite à réexaminer la technique ; en effet, dans le premier exemple, nous avons remplacé une différence x - y par une différence égale x' - y' et il est mathématiquement équivalent d'ajouter à chacun des deux nombres réels x et y la même quantité c (c = x' - x = y' - y). En réorganisant les énoncés technologiques précédents naît une deuxième technique (Te 1bis). La voici à l'œuvre dans la comparaison de notre séance :

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $\frac{1}{4}$ sont dans le même ordre que $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ et 1 (R3), eux-mêmes dans le même ordre que $8 - 4\sqrt{3}$ et 1 (R1), eux-mêmes dans le même ordre que 7 et $4\sqrt{3}$ (R3), eux-mêmes dans le même ordre que 49 et 48 (R1). Comme 49 > 48 on en déduit que cos75° > 0,25.

La technique Te1bis consiste à repérer dans les écritures des deux nombres les opérateurs arithmétiques (puissances à exposants rationnels, multiplications par un nombre rationnel non nul, additions d'un nombre rationnel) qui, enchaînés dans un certain ordre, vont simplifier progressivement les écritures jusqu'à déboucher sur une comparaison entre deux nombres entiers (voire décimaux mais ces derniers peuvent se ramener à des entiers). Pour chaque opérateur arithmétique, il faut faire jouer son effet sur l'ordre des deux nombres (la conservation ou le renversement). On s'appuie donc sur une compilation de règles algébriques qui régissent l'ordre et les inégalités dans R tout entier sans faire intervenir la différence des deux nombres. Le domaine de travail (S') de cette technique (sa portée) déborde le système numérique S puisqu'elle peut traiter par exemple des racines cubiques.

Dans l'EMS actuel les deux techniques sont enseignées progressivement dès la classe de quatrième. Les règles qu'elles combinent fonctionnent dans les cadres algébrique et numérique pour former des inégalités et résoudre des inéquations. Elles connaissent un nouveau développement au cours de la classe de seconde où on leur adjoint des théorèmes dits de rangement (exemple : si $0 < a < 1$ alors $a^2 < a < \sqrt{a} < 1$). Même si ces derniers sont quelquefois formulés dans un cadre analytique, leur

[199] Le système S est le corps des nombres constructibles

exploitation se confine rapidement aux cadres algébrique (inégalités littérales et inéquations) et numérique (comparaison de nombres et opérations sur les encadrements numériques).
Bien entendu les deux techniques acceptent les trois écritures de cos75°, mais la présence des décimaux fait venir des opérations sur des nombres dont l'écriture décimale comporte plus de chiffres, telles $0{,}1875^2$ ou $0{,}4375^2$. Ces opérations ralentissent fortement la mécanique si elle n'est pas épaulée par la calculatrice.

S'appuyant sur de mêmes ressources théoriques, ces deux techniques ne s'excluent pas l'une l'autre dans l'EMS. Nous lisons la préférence donnée par le manuel à Te1 comme la marque d'une insistance institutionnelle sur la caractérisation de l'ordre par le signe de la différence[200] ; cette caractérisation présente le triple avantage de concerner tous les couples de nombres réels, de renforcer la place de la notion de signe dans le domaine des inégalités et d'enclencher "automatiquement" l'exécution de calculs grâce à l'instrumentalité sémiotique recherchée dans toute technique algébrique.
Imaginons en effet le premier exemple de comparaison, celui du manuel Pythagore, sans utiliser la règle R2 ; on écrirait : l'ordre des deux nombres positifs a et b est le même que celui de leurs carrés qui sont 5100 et $4900 + 2 + 140\sqrt{2}$; c'est le même que celui des deux nombres 198 et $140\sqrt{2}$ obtenus en soustrayant 4902 de chaque côté etc. D'une part la relation "a le même ordre que[201] n'a pas dans l'EMS de symbolisme algébrique qui la rende moins verbale et plus opératoire. D'autre part il a fallu penser la soustraction directement sur les deux nombres à comparer alors que l'écriture de la différence, $5100 - (4900 + 2 + 140\sqrt{2})$, la rendait visible et facilitait son effectuation.

Cependant la technique Te1bis présente l'avantage d'insérer les opérateurs arithmétiques dans une logique analytique qui relie d'une part conservation de l'ordre et croissance, renversement de l'ordre et décroissance d'autre part. Faciliter le passage du cadre algébrique au cadre analytique d'étude de fonctions numériques nous paraît un enjeu institutionnel important et il permet entre autres d'alléger les manipulations et d'étendre le champ des comparaisons numériques au-delà du système S'.

> *Ce complexe technico-technologique potentiellement présent dans l'institution devrait nourrir l'essentiel des procédures employées par les élèves dans la situation.*

Pour mieux apprécier les comportements des élèves, nous allons prendre le temps de souligner l'absence d'un autre complexe technico-technologique et la faible exploitation d'un troisième.

3.2 un deuxième complexe technico-technologique absent de l'EMS

L'automatisme soustractif recherché par l'appel à la différence ne parvient pas à s'émanciper des règles de calcul sur les radicaux dans les cas où ils sont présents dans les nombres à comparer. L'intervention de R1 est indispensable sauf à relever le défi des

[200] Aux dépens du quotient à comparer à 1 pour les nombres positifs seulement

[201] La relation binaire R entre couples de deux nombres réels "a le même ordre que" peut aussi se présenter comme "a une différence de même signe" ; (a,b) R (c,d) ssi $(a-b)(c-d) \geq 0$. On a le théorème : pour a et b positifs (a,b) R (a^2, b^2)

différences de radicaux et des radicaux superposés. C'est mathématiquement possible ; voici deux manières de faire :

Première manière : $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) - 1}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1}{4}$.

Il s'agit de repérer sous le premier radical le carré d'une différence :

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{1,5} - \sqrt{0,5}$$

pour faire disparaître les radicaux superposés. Mais une telle transformation algébrique ne conduit pas nécessairement à des radicaux de décimaux. De plus la superposition des deux radicaux conduit à une différence comportant au moins un radical (ici deux radicaux) si bien que, pour aboutir en restant dans un cadre algébrique, cette technique devrait être combinée avec l'une des techniques précédentes, par exemple en prouvant que $\sqrt{6} - \sqrt{2} > 1$.

Deuxième manière : $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{3}} - 1}{4} = \frac{4(2 - \sqrt{3}) - 1}{4(2\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 1)} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{4(2\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 1)}$

$= \frac{49 - 48}{4(2\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 1)(7 + 4\sqrt{3})}$ qui est positif comme quotient de deux nombres positifs.

Nous disposons là d'une nouvelle technique (Te 2) qui n'a pas besoin de tous les énoncés de la technologie précédente mais seulement de la règle R2.

Par contre elle doit exploiter l'identité $x - y = \frac{x^2 - y^2}{x + y}$ qui, pour deux nombres positifs x et y, remplace la différence des deux nombres par la différence de leurs carrés, plus simple, à cause des radicaux. Cette identité ne dit pas seulement que la différence des deux carrés a le même signe que la différence des deux nombres positifs[202] ; elle ne se contente pas d'indiquer l'ordre mais elle le quantifie, puisqu'elle fournit une expression exacte de la différence entre les deux nombres utilisables, par exemple, pour une majoration[203].

Bien que "remarquable", cette identité ne reçoit aucune publicité dans les manuels de troisième ni de seconde sans doute parce que, en rendant le dénominateur irrationnel, elle prend à contre-pied les habitudes dites de simplification. Malgré sa puissance appuyée sur l'instrumentalité du signe = et sa faible consommation de règles algébriques, sa présence pour une tâche de comparaison en classe de Seconde et Première est hautement improbable car elle se heurte aux délimitations impératives des programmes de Troisième et Seconde[204]. En effet, les recommandations explicites et renouvelées des programmes de Troisième et de Seconde interdisent l'étude des transformations d'expressions irrationnelles du même type que $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ restreignant ainsi fortement leurs conditions d'existence. Pourtant, comme elle est adaptée à la

[202] Cf. note précédente

[203] Ici une majoration grossière permet d'obtenir l'encadrement 0,25 < cos75° < 0,27 puisque $7 + 4\sqrt{3} > 12,5$.

[204] Cf. notre partie C et Bronner (1996, page 166)

comparaison par différence de deux expressions numériques ou littérales comportant des radicaux, elle viendra quand même dans l'EMS. Mais ce sera pour d'autres tâches telle la levée d'indéterminations de limites, dans le cadre analytique.

3.3 un troisième complexe technico-technologique inexploité dans l'EMS

Il est par contre une technique**, que nous appellerons Te 3**, qui, à notre connaissance, n'est pas enseignée dans l'EMS actuelle et qui pourtant y trouverait un environnement théorique capable d'assurer sa présence, si elle n'était pas l'objet d'une excommunication noosphèrienne.

Partons de l'inéquation $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{x}}}{2} \geq \frac{1}{4}$ et résolvons la par équivalences successives dans l'ensemble des nombres réels positifs :

$$\sqrt{2 - \sqrt{x}} \geq \frac{1}{2} \; ; \; 2 - \sqrt{x} \geq \frac{1}{4} \text{ et } \sqrt{x} \leq 2 \; ; \; \sqrt{x} \leq \frac{7}{4} \; ; \; 0 \leq x \leq \frac{49}{16}.$$

Comme $3 = \frac{48}{16} < \frac{49}{16}$, on en déduit que $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \geq \frac{1}{4}$

La déduction finale s'appuie sur l'énoncé suivant :

R6 : *l'ensemble SL des solutions d'une inéquation du type A(x) $\geq$ b donne l'ordre entre deux nombres A(a) et b ; si a appartient à SL alors A(a) $\geq$ b ; sinon A(a) < b ou n'existe pas*.

Cette règle, adjointe aux précédentes, forme un nouvel ensemble technologique (Tl 3) et la technique consiste à regarder $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ (ou l'une des deux autres expressions de cos75°) comme la valeur prise par une expression A(x) en décidant du nombre sur lequel fixer l'inconnue x. On aurait pu choisir $\frac{\sqrt{x - \sqrt{3}}}{2}$ ou $\frac{\sqrt{2 - x}}{2}$ (ou $\sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{2}}$ pour partir de l'écriture $\sqrt{\frac{1 - \sqrt{0,75}}{2}}$) tout en restant dans le domaine des inéquations irrationnelles résolubles algébriquement.

De telles inéquations ne viennent actuellement qu'en classe de Première, attachées de façon marginale (à titre d'exercices d'entraînement, sans développement systématique de méthodes de résolution et sans rapprochement avec des problèmes numériques ou géométriques) à ce que les manuels appellent familièrement le second degré, mais on les rencontrait encore récemment en classe de Seconde dès lors qu'elles restaient dans le premier degré, ce qui est le cas ici. La quasi-disparition des inéquations et même des équations irrationnelles est à rapprocher de l'affaiblissement du travail algébrique sur les expressions irrationnelles déjà constaté et de l'insertion partielle du traitement des inégalités dans le cadre de l'Analyse. Les commentaires officiels du programme de Seconde (1985) le disent crûment :

> Dans le calcul littéral, les principales difficultés concernent les inégalités. Pour que ces inégalités prennent sens et ne se réduisent pas à un formalisme purement algébrique, il est utile de relier leur étude à celle des fonctions tant du point de vue numérique que du point de vue graphique.
>
> On pourra ainsi interpréter la comparaison de x et de x^2, pour $x \geq 0$, ou encore les relations simples sur les inégalités : passage au carré, à l'inverse, à la racine carrée. Par exemple la relation $0 < a \leq b \Rightarrow 0 < 1/b \leq 1/a$ est à rapprocher de la décroissance de la fonction x --> 1/x sur $]0 ; +\infty[$ et de l'allure de sa représentation graphique. C'est la maîtrise de tels mécanismes qui est important et doit donc être l'objectif visé ; toute virtuosité technique est donc exclue.
>
> De nombreuses situations conduisent à des inéquations. Leur résolution doit être abordée très progressivement, en prenant appui sur des interprétations graphiques. L'étude d'exemples tels que $2 \leq x^2 \leq 4$, $x^2 \leq 2x$, $|2x + 1| \leq 1$ constitue un objectif raisonnable. En revanche, il convient d'éviter les exemples trop artificiels ou trop techniques.

4. Le cadre analytique

Effectivement dès la classe de Seconde quelques inéquations sont replacées dans le cadre analytique pour y recevoir un traitement graphique. Mais, conformément aux instructions du programme, elles se rapportent essentiellement aux fonctions usuelles (carré, cube, inverse, racine carrée, valeur absolue). Avec un radical, on ne va pas au-delà de $\sqrt{x+2} \leq 2$ (Transmath, Nathan, 1995, page 138). Il existe aussi dans cette classe de très rares inéquations trigonométriques, telle $\cos x \geq -\frac{1}{2}$, que le programme recommande expressément de traiter par le cercle trigonométrique, et il faut attendre la classe de première S pour que cette pratique particulière à la Trigonométrie (qui dispose avec le cercle trigonométrique d'un instrument de localisation des racines de l'équation et de visualisation géométrique de l'ensemble des solutions) soit attachée à des éléments théoriques de l'Analyse.

L'inéquation $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{x}}}{2} \geq \frac{1}{4}$ que nous avons mise en avant réclame-t-elle trop de virtuosité technique ?
Dans la classe de Seconde actuelle, cela ne fait pas de doute, mais dans une classe de Première S cela mérite examen. Car avec la technologie n°3 se profile un enjeu didactique de taille pour l'institution, celui de l'entrée de certains problèmes numériques dans le cadre analytique. Ce point de vue nous semble rejoindre celui qui est développé dans les commentaires officiels du programme de Seconde, cette fois-ci en 1990. Sous le titre II : "Problèmes numériques et algébriques", on peut lire :

> […] le programme vise à compléter et à mobiliser les capacités acquises au collège ; les travaux s'articulent suivant deux axes :
>
> Consolider la pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique, en relation étroite avec l'étude des fonctions ;
>
> Poursuivre l'étude des équations et des inéquations à une inconnue et des systèmes d'équations linéaires.

> Dans le cadre de ces travaux, un objectif important est d'amener les élèves à une *meilleure maîtrise de l'emploi de variables*[205] […] ; les travaux se développeront dans les directions suivantes : substitution de nombres à des variables (utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques[206], tableaux de valeurs de fonctions ...), mise en équation de problèmes et description de phénomènes continus à l'aide des fonctions.

Au-delà de l'aspect graphique, l'immersion de la technologie n° 3 dans le cadre analytique ne reçoit un début de construction théorique qu'en classe de Première, celle que nous avons analysée dans le chapitre C_3. Mais cette construction porte essentiellement voire exclusivement sur la *résolution approchée d'équations non résolubles algébriquement.*

Rappelons que la clef de voûte en est le théorème suivant (manuel Transmath, Bordas, 1995, page 156) :

> Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle [a ; b], a < b, et si f ' est à valeurs strictement positives sur [a ; b], alors f est strictement croissante sur [a ; b] et pour tout élément c de l'intervalle [f(a) ; f(b)] l'équation f(x) = c admet une solution, et une seule, dans l'intervalle [a ; b]."

Ce théorème ouvre la voie à la résolution d'équations par diverses techniques (dichotomie, balayage, etc.) avec six caractéristiques prédominantes dans les exercices proposés par les manuels :

- la continuité de la fonction n'est pas formulée[207]
- c'est par le signe de la dérivée qu'on a accès à la monotonie de la fonction
- l'équation n'est pas résoluble algébriquement
- la résolution est finalisée dans une *valeur décimale approchée* calculée effectivement
- la technique retenue est à plusieurs moments instrumentée par la calculatrice
- ce sont toujours des équations, jamais des inéquations

Avec les mêmes ressources théoriques qui ont présidé à l'émergence du théorème précédent, on pourrait fabriquer un nouvel énoncé, pivot d'une nouvelle **technologie (Tl 4)** pour la comparaison de deux nombres réels.
L'idée de base serait la suivante : soit a et a' deux nombres de l'intervalle I et soit f une fonction numérique strictement croissante sur I, l'ordre entre f(a) et f(a') est l'ordre entre a et a'. De même une fonction décroissante sur I renverse l'ordre. De là, en ajoutant que f est continue (ou seulement dérivable) sur I, voici un théorème qui permettrait de comparer f(a) et un nombre b de l'intervalle f(I) :

Théorème : Soit f une fonction continue (ou seulement dérivable), monotone sur un intervalle I ; soit a appartenant à I et b appartenant à f(I) dont un antécédent dans I est a' ; si f est croissante sur I alors a et a' sont dans le même ordre que f(a) et b ; si f est décroissante sur I alors a et a' sont dans l'ordre inverse de f(a) et b.

---

[205] C'est nous qui soulignons

[206] Il s'agirait alors plutôt de substituer une ou des variables à des nombres, c'est-à-dire de regarder un nombre comme une valeur de variable. C'est ce que nous avons fait avec la technique n° 3

[207] Depuis les changements de programmes opérés en 1984

Essayons sur l'exemple de notre séance.

> Notons f la fonction définie sur [0 ; 2] par $f(x) = \frac{\sqrt{2 - x}}{2}$
>
> Choisissons $a = \sqrt{3}$, I = [0 ; 2] et b = 0,25.
> La fonction f est décroissante sur I par composition de deux fonctions, l'une croissante et l'autre décroissante ; $f(I) = [0 ; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ et b appartient à f(I).
> Il existe donc a' tel que f(a') = b.
> Une recherche numérique *instrumentée par la calculatrice*, conforme aux pratiques institutionnelles pour la résolution approchée d'équations, va fournir a' = 1,75 (que penser de l'égalité si elle est fournie par la calculatrice ?) et permettre de conclure que f(a) > b car $\sqrt{3} < 1{,}75$.

Le théorème permet bien de justifier cette nouvelle manière de faire, **la technique Te 4**. De plus il (re)dynamise les opérateurs arithmétiques présents dans les techniques Te1 et Te1bis puisque la fonction f apparaît comme une composée de ces opérateurs ; sa décroissance peut alors être mise en relation avec l'inversion de l'ordre :

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = f(\sqrt{3}) > f(1{,}75) = \frac{1}{4} \text{ car } \sqrt{3} < 1{,}75.$$

Ainsi, en classe de Première S, le cadre de l'Analyse pourrait remplacer et élargir le cadre algébrique pour le type de tâche "comparer deux nombres réels connus par leur valeur exacte" en légitimant et en organisant le recours à des valeurs approchées décimales y compris celles qui sont fournies par la calculatrice. Il est hors de notre propos ici de montrer l'intérêt didactique de ce changement de cadres et d'examiner les conditions qui le favoriseraient. Sans entrer dans cette étude mais pour en souligner sa pertinence, remarquons cependant, qu'il existe dans certains manuels de première S et de terminale S des exercices de comparaison de nombres dans le cadre analytique. Ainsi l'exercice suivant, tiré du manuel Terracher de Terminale S (Hachette, 1995) au sein du chapitre Calcul Différentiel :

> Quel est le plus grand des deux nombres a et b ?
>
> $a = 0{,}577\,351\,992^3 - 0{,}577\,351\,992$; $b = 0{,}577\,351\,993^3 - 0{,}577\,351\,993$
>
> N.B. Pas d'erreur : cet exercice fait bien partie de la rubrique "variations"

Ces exercices font figure d'excentricités du Calcul numérique plutôt destinées, une fois de plus, à pointer les limites des calculatrices qu'à installer une technique reconnue et travaillée par l'institution. A contrario leur marginalité révèle que, pour les comparaisons de nombres à valeurs exactes, exprimables algébriquement avec des opérateurs arithmétiques, le cadre analytique n'est pas ordinairement sollicité et qu'il laisse le cadre algébrique et le cadre numérique décimal se disputer cette tâche de

Calcul numérique[208] ; le premier pour un calcul exact sans calculatrice, le second pour un calcul approché avec calculatrice.

> *Revenons à notre séance. Les principaux termes du contrat analytique que l'EMS construira autour de la résolution approchée d'équations (ingrédient d'une majorité des épreuves du Baccalauréat S actuel) ne sont certainement pas encore en place dans la classe et, de plus, ne sont pas lisibles dans notre situation : ni fonction, ni équation, ni calculatrice. Il ne faut donc pas nous attendre à trouver des stratégies d'élèves qui empruntent des procédures à la technique Te 4.*

5. Le cadre numérique décimal

5.1 retour sur la praxéologie de décimalisation

Cependant, la complexité et la lourdeur des techniques algébriques devraient aiguiser chez les élèves la recherche d'une stratégie échappatoire au contrat algébrique. Nous avons pris soin de baliser une autre voie : celle de la décimalisation, c'est-à-dire la mise en écriture décimale des nombres à comparer. Cette voie offre une écriture commune aux deux nombres que des techniques enseignées dans l'EMS rendent exploitables pour mener la comparaison.

L'étude, dans la partie C, des rapports institutionnels à certains objets du Calcul numérique a mis en évidence une praxéologie de décimalisation assise sur un postulat instrumental qui, chez l'élève de Seconde confronté à certaines tâches numériques, peut impulser une conduite calculatoire impliquant la calculatrice.
Or dans l'EMS actuel une décimalisation comme celle de $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ est banale. On peut, par exemple, la rencontrer dans des exercices de "prise en main de la calculatrice". Ainsi sous le chapeau "Approximations et calculatrice", le manuel de seconde Transmath (Nathan, 1995) demande de calculer le nombre $\sqrt{\frac{6}{7}}-\sqrt{\frac{5}{6}}$ à l'aide de la calculatrice et de déduire, entre autres, une valeur approchée arrondie au millième de ce nombre.

Intégrons l'influence de cette praxéologie dans notre analyse a priori.

Pour la comparaison de deux nombres que l'on sait écrire en valeur exacte, la praxéologie de décimalisation commande de décider certaines substitutions numériques, d'écritures exactes en écritures décimales, tout en attribuant à ces dernières le même rôle et les mêmes effets dans la comparaison numérique.
Pour guider ces décisions en éclairant notamment les effets de ces substitutions décimales, l'institution actuelle ne dispose d'aucun corpus théorique robuste. Elle cherche tout de même à combler cette absence par des recommandations insistantes sur les bonnes manières de se servir de la calculatrice :

---

[208] Cf. thèse de l'arrêt de la transposition didactique de la notion de fonction dans l'E.M.S., développée par Assude (1992).

- éviter un morcellement du calcul en plusieurs exécutions successives
- conserver le maximum de chiffres le plus longtemps possible.

Sur ces recommandations, s'installe dans les classes et chez les élèves un panel hétéroclite de conduites instrumentées d'un calcul numérique dont la plus fréquente semble être, dans une classe de première S, la réécriture globale du nombre dans l'éditeur de calculs.
Cependant, dans la situation que nous analysons, notre demande de ne recourir à la calculatrice qu'après un constat d'échec (algébrique) et de produire des explications écrites nous laisse espérer des utilisations moins radicales et plus diversifiées de l'instrument que nous chercherons à interpréter comme d'autres marques institutionnelles dans les rapports d'élèves de Première S à la décimalisation par la calculatrice et à l'approximation décimale dans un calcul numérique.

5.2 une technologie fruste mais très active autour deux techniques naturalisées sur la base du postulat instrumental

Examinons d'abord la réécriture globale de $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ dans l'éditeur de calculs ; la comparaison avec 0,25 qui la suit renvoie à deux premières techniques.

Technique 5.1 : on produit l'arrondi à n décimales de $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$, avec $n \geq 2$, qu'on écrit sous la forme $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \approx d$; on compare d et 0,25 ;
si $d > 0,25$ alors $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} > 0,25$; si $d < 0,25$ alors $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} < 0,25$
si $d = 0,25$, on ne peut pas conclure sans produire un arrondi avec plus de décimales.

Calculatrice Casio 6800 G en main, si on édite en ligne l'écriture $\sqrt{}(2 - \sqrt{3}) \div 2$, l'appui sur la touche $\boxed{\text{EXE}}$ fournit 0,2588190451, que l'on considère comme l'arrondi à 10 décimales de $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ et l'on conclut que $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} > 0,25$.

Forte du postulat instrumental, cette technique est reconnue par l'institution (cf. partie C). Elle la travaille par des exercices de lecture et écriture de calculogrammes, et la met en œuvre dans du calcul numérique où, par un relâchement (volontaire ou forcé) du contrat algébrique, elle autorise la décimalisation du nombre ; ce peut être à des fins d'évaluation, de comparaison ou même de (re)exploitation dans des calculs ultérieurs comme en Géométrie métrique, en Trigonométrie, en Statistique ou en Analyse (valeur prise par une fonction).
Mais l'habillage théorique de cette technique se résume à quelques vagues déclarations sur les développements décimaux des nombres réels et aucun des manuels que nous avons consultés, pas plus en lycée qu'en collège, ne propose un premier pas technologique, qui pourrait être celui-ci :

R' 1 : a < b si et seulement si il existe un entier n tel que l'arrondi décimal d'ordre n, de a, soit inférieur strictement à l'arrondi décimal d'ordre n, de b.

Certains manuels exposent une technique (Te 5.2) voisine de la précédente. La voici à l'œuvre en classe de quatrième pour comparer deux nombres rationnels (extrait de cours du manuel Pythagore 4 e, 1988)[209] :

> La calculatrice peut souvent être utilisée pour comparer deux nombres.
>
> Exemple : Comparons $\frac{361}{27}$ et $\frac{254}{19}$.
>
> En tapant 361 : 27 = , on lit 13.37037 ; en tapant 254 : 19 = , on lit 13.368421
>
> On peut en déduire : $\frac{254}{19} < 13{,}369 < 13{,}370 < \frac{361}{27}$. D'où $\frac{254}{19} < \frac{361}{27}$.

On distingue une succession de gestes :

- éditer, dans la calculatrice, les deux nombres sous formes de divisions
- exécuter ces divisions
- lire les deux nombres décimaux affichés
- reconnaître qu'ils sont différents et repérer l'ordre entre les deux
- choisir un nombre n de décimales tel que l'approché décimal à l'ordre n par excès du plus petit des deux nombres décimaux soit distinct de l'approché décimal à l'ordre n par défaut du plus grand (ici n = 3)
- ranger dans l'ordre les nombres et leurs approchés
- conclure sur l'ordre entre les deux nombres

... et, en filigrane, l'énoncé technologique R' 2 :

R' 2 : a < b si et seulement si il existe un entier n tel que l'approché décimal d'ordre n par excès, de a, soit inférieur strictement à l'approché décimal d'ordre n par défaut, de b.

... mais que le manuel n'élabore pas pour le lecteur.

Remarquons aussi que le manuel a préféré ne pas passer par les arrondis décimaux et renoncer à la règle R' 1 pourtant plus concise et de portée plus grande[210] que R' 2. Cela aurait donné l'enchaînement suivant :

$\frac{361}{27} \approx 13{,}370$ et $\frac{254}{19} \approx 13{,}368$. Comme $13{,}368 < 13{,}370$, on en déduit que $\frac{254}{19} < \frac{361}{27}$.

[209] Nous sommes encore très proches des débuts de la contre–réforme ce qui peut expliquer que cette technique s'apparente, par la présence d'un encadrement décimal, à celles qui étaient encore en usage lors de la réforme.

[210] Car elle permet de conclure sur deux nombres qui ne diffèrent, à la calculatrice, que d'une unité sur le dernier chiffre.

... qui présente, certes, l'inconvénient de ne pas s'appuyer sur le rangement en ligne des nombres et de leurs arrondis.

Même si les manuels de collège ou de lycée ne construisent ni n'exposent de tels énoncés, tous utilisent massivement, au sein du cours ou des exercices résolus, l'une ou l'autre des techniques que nous venons de décrire ; ils le font systématiquement dès qu'il s'agit pour eux de ranger ou de comparer des résultats décimaux issus de la calculatrice. Ces techniques semblent naturelles et s'imposer d'elles-mêmes sans questionnement visible et encore moins construit sur les conditions et les raisons de leurs viabilités ni sur leurs portées. Privées d'énoncés qui devraient être formulés et replacés dans une étude de la *topologie de l'ensemble R* , elles se contentent d'une technologie sommaire (naïve) et implicite aux pratiques, que nous nous risquons à formuler ainsi :

Technologie 5 : l'ordre entre deux nombres est le même que celui entre deux valeurs décimales approchées distinctes de ces deux nombres, si elles sont de même nature (par défaut, par excès ou par arrondi) et de même ordre.

Nous avons analysé dans la partie C comment, pour réussir à stabiliser ces techniques, l'institution EMS s'oblige à affronter plusieurs problèmes dont :

- des problèmes relatifs aux nombres réels : celui de l'existence, de l'unicité, de la nature d'un développement décimal et celui de la production effective, partielle ou totale, d'un tel développement puisque celui-ci est nécessaire à la mise en œuvre de la technique.
- des problèmes relatifs à la calculatrice : celui du nombre de chiffres affichables par la calculatrice dont nous savons qu'il est limité[211] par un certain n_0 et au-delà duquel la technique ne peut pas fonctionner, et celui de la fiabilité du résultat décimal fourni par la calculatrice (qui dépend elle-même du n_0, de l'organisation des calculs et de leur traduction sur machine).

On le voit, le postulat instrumental est mis à rude épreuve et l'institution poussée à insérer ce postulat dans un corpus théorique capable d'expliquer et de maîtriser cette dépendance.

> *Nous n'en concluons pas moins que ces techniques (Te 5.1 et Te 5.2) devraient fournir l'essentiel des procédures employées par les élèves qui auront abandonné les stratégies algébriques attendues par l'enseignante.*

5.3 une technique moins probable

Nous avons compris que, telle une épée de Damoclès au-dessus du postulat instrumental, l'introduction de substitutions décimales dans les calculs affecte la viabilité des techniques précédentes notamment dès lors que les enchaînements d'opérations numériques emportent des *résultats intermédiaires exogènes à la*

211 C'est sur cette limitation que sont bâtis la plupart des exercices qui prétendent réguler l'usage de la calculatrice par dénonciation de ses limites. Les insuffisances théoriques ....

calculatrice[212]. Obligée de générer de tels enchaînements (qu'on pense par exemple au besoin de reproduire sur papier ou au tableau un résultat intermédiaire), l'institution EMS essaie de se prémunir des effets dus à la propagation des erreurs[213]. La prévention habituelle consiste :

- à exiger en entrée beaucoup de chiffres (supposés exacts), soit tous les chiffres affichés par la calculatrice, soit tous les chiffres travaillés par la calculatrice en exploitant les possibilités de mémorisation offertes par la plupart des calculatrices (telle la touche Ans qui assure la reprise du dernier résultat décimal)
- et à ne demander en sortie qu'un nombre "raisonnable" de chiffres (2 ou 3 en géométrie euclidienne)

Ces décisions, généralement très contextualisées, permettent, avec la complicité d'une "bonne" calculatrice et grâce aux "bonnes manières" de s'en servir, d'étendre les techniques précédentes (Te 5.1 et 5.2) aux calculs approchés enchaînés. Ce faisant, elles prolongent la stabilité institutionnelle de ces techniques mises au point en collège et, dans le même temps, elles contribuent à les fragiliser car, en éludant la question mathématique de la propagation des erreurs, elles s'opposent à l'émergence de techniques alternatives pour les tâches numériques plus complexes que le lycée essaie d'installer dans le cadre analytique[214]. D'ailleurs, dès la classe de Seconde, l'EMS décide de s'attaquer à cette faiblesse technico-théorique en introduisant la notion de distance et en renforçant celle d'encadrement. Nous avons constaté que ces notions étaient utilisées dans les classes pour éclairer les phénomènes d'approximation numérique décimale et modifier certaines pratiques calculatoires instrumentées par la calculatrice (cf. chapitre C_2).

La notion d'encadrement fournit, pour notre tâche, une technique dont nous trouvons l'ébauche (mais seulement une ébauche) sous forme d'exercices dans certains manuels de Seconde. Faisons la travailler dans la comparaison de $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ avec 0,25 en imaginant l'évitement des radicaux superposés grâce à une décimalisation de $\sqrt{3}$. Un tel évitement est très probable dans le cas d'une maîtrise insuffisante de la conversion sémiotique entre papier et écran – que nécessite la réécriture globale de $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ dans l'éditeur de calculs - conjuguée à un blocage du travail algébrique sur les radicaux superposés.

Technique 6.1 : on encadre $\sqrt{3}$ par $[d_1 ; d_2]$; de là on déduit un encadrement de $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ par $[d'_1 ; d'_2]$ où d'_1 est un minorant de $\sqrt{2-d_2}$ et d'_2 un majorant de $\sqrt{2-d_1}$,

[212] Nous mettons de côté les enchaînements endogènes à la calculatrice dont la longueur mettrait en péril le postulat instrumental ; de tels enchaînements se rencontrent dans les calculs des termes d'une suite récurrente.

[213] De nombreux exemples analysés dans la partie C ont montré que le retard à satisfaire cette exigence écologique discrédite le postulat instrumental dans l'organisation mathématique, déstabilise les techniques, engendrant par là même des difficultés didactiques.

[214] La résolution approchée des équations par la méthode du point fixe est l'exemple prototypique de ces tâches numériques mises à l'honneur au lycée (cf. chapitre C_3).

puis un encadrement de $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ par [d''_1 ; d''_2] où d''_1 est un minorant de $\frac{d'_1}{2}$ et d''_2 un majorant de $\frac{d'_2}{2}$; on situe alors 0,25 par rapport à l'intervalle [d''_1 ; d''_2] . Si 0,25 n'appartient pas à cet intervalle, alors $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \geq 0{,}25$ ou $\leq 0{,}25$ selon que 0,25 est à gauche ou à droite de l'intervalle ; si 0,25 appartient strictement à cet intervalle on ne peut rien conclure. Dans ce dernier cas, on peut chercher à réduire la largeur de l'un ou de tous les intervalles précédemment formés.

Supposons par exemple que l'on sache que $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ (arrondi à 1 décimale) cette technique permet de mener la comparaison entre $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et 0,25 :

On écrit $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ sous la forme $1{,}65 < \sqrt{3} < 1{,}75$
On a [d_1 ; d_2] = [1,65 ; 1,75] puis [d'_1 ; d'_2] = [0,5 ; 0,6]
et enfin [d''_1 ; d''_2] = [0,25 ; 0,30].
On peut conclure que $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \geq 0{,}25$.

Mais si on part de $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ (troncature à 1 décimale) qui s'écrit $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$:

[d_1 ; d_2] = [1,7 ; 1,8] puis [d'_1 ; d'_2] = [0,44 ; 0,55] et enfin [d''_1 ; d''_2] = [0,22 ; 0,28]
on ne peut donc pas conclure et toute tentative de resserrer l'intervalle [d''_1 ; d''_2] échoue à cause du "mauvais encadrement décimal" initial de $\sqrt{3}$.

La mise en évidence des deux cas aux issues opposées consacre une véritable rupture technologico-théorique car elle déplace le besoin en décimales dans la substitution décimale en partie hors de l'instrument (mettant d'ailleurs en lumière la surconsommation habituelle de décimales). De plus ce n'est pas une comparaison entre deux nombres décimaux qui donne accès à la réponse sur l'ordre mais la disjonction entre deux intervalles (ici le deuxième intervalle est réduit à un point). Le recours à l'approximation décimale de la calculatrice[215] peut alors être fondé au-delà du postulat instrumental, sur des propriétés topologiques de R comme celle-ci :

R' 3 : $a \neq b$ si et seulement si il existe un intervalle décimal qui contient b et pas a.

... issue elle même de la densité de D dans le corps archimédien complet R muni de son ordre total.

Nous devons même considérer les règles R'1, R' 2 et R' 3 comme des énoncés issus d'une technologie plus générale :

[215] Nous pouvons d'ailleurs rapprocher cette technique de celle de la période des mathématiques modernes (cf. partie B) où la calculatrice remplacerait le complexe instrumental d'alors (tables + algorithmes) aujourd'hui disparu de l'institution.

Technologie 6 : l'ordre entre deux nombres réels a et b est le même que celui entre deux valeurs approchées décimales a' et b' de ces deux nombres s'il existe deux intervalles disjoints I et J, le premier centré sur a' et contenant a, le second centré sur b' et contenant b[216].

Cette technologie n'écarte pas la calculatrice du processus de décimalisation. Par la mise en œuvre de la technique Te 6.1 (et des suivantes), ce qu'elle apporte de plus que la technologie n°5, c'est une production progressive et contrôlée, hors de la calculatrice, des valeurs décimales. Ce plus est obtenu en remettant en scène les encadrements qui peuvent d'ailleurs être lus comme des intervalles si on veut travailler dans le cadre analytique.

La technique 6.1, à base d'encadrements, peut d'ailleurs être scindée en une technique par minoration et une technique par majoration.

Technique 6.2 : on remplace par excès (avec l'aide la calculatrice) $\sqrt{3}$ par d, puis par défaut $\sqrt{2 - d}$ par d', puis par défaut $\frac{d'}{2}$ par d'' ; on compare d'' à 0,25.

Si d'' $\geq$ 0,25 alors $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \geq 0,25$; sinon on ne peut rien conclure.

Technique 6.3 : on remplace par défaut $\sqrt{3}$ par d, puis par excès $\sqrt{2 - d}$ par d', puis par excès $\frac{d'}{2}$ par d'' ; on compare d'' à 0,25. Si d'' $\leq$ 0,25 alors $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \leq 0,25$; sinon on ne peut rien conclure.

Chacune d'icelles est adaptée à la conduite d'une comparaison dont on connaîtrait ou soupçonnerait l'issue. En effet, prévenus que $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} > 0,25$, nous pouvons procéder ainsi :

$$\sqrt{3} < 1,75 \; ; \; \sqrt{2 - \sqrt{3}} > \sqrt{0,25} = 0,5 \; ; \; \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} > \frac{0,5}{2} = 0,25.$$

Mais ces deux techniques ne sont pas des variantes mineures de la technique 6.1 car elles obligent à des enchaînements de minorations et majorations dont le contrôle investit plus fortement encore les relations entre ordre et opérations dans R soit dans le cadre algébrique soit dans le cadre analytique. Étant donné l'état institutionnel de chacun de ces cadres en classe de Première S, les procédures de minoration de $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ semblent peu probables et trop hardies pour concurrencer les procédures d'approximation suscitées par les autres techniques de ce cadre notamment les techniques 5.1 et 5.2

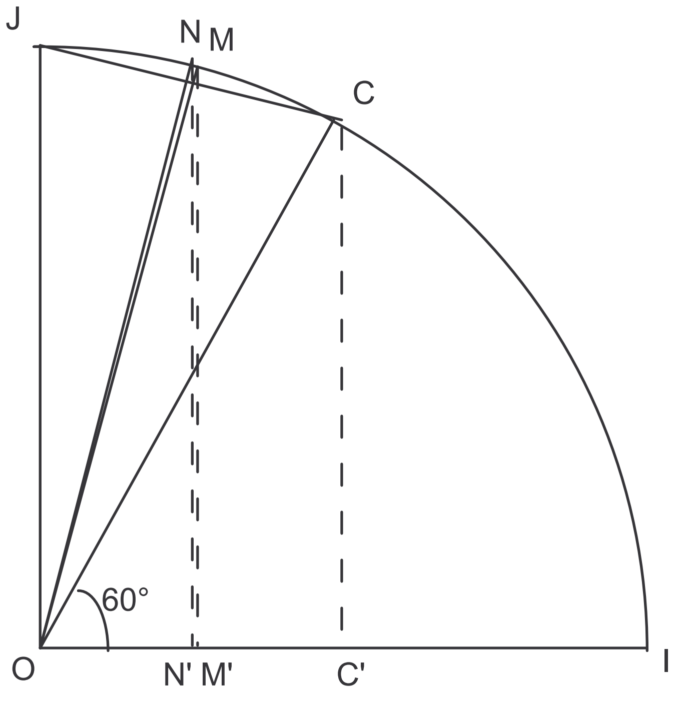
6. Le cadre géométrique

[216] Ou bien si |a' - a| + |b' - b| $\leq$ |a' - b'|. On dispose d'une C.N.S. avec [|a' - a| + |b' - b| $\leq$ |a' - b'| ou |a' - a| + |b' - b| $\leq$ |a - b|]

Même si le projet de tabulation de la fonction cosinus degrés peut être conduit dans la classe de Première sans retourner au cadre géométrique qui a servi de premier berceau à la notion de cosinus pour ces élèves, le rappel des définitions en début de séance, la présence de l'angle sans cesse suggérée par l'unité degrés et la figure quart de cercle que nous avons ostensiblement placée sur la feuille chronique laissent imaginer un tel retour pour l'élève qui renonce au travail algébrique et qui ne veut pas enfreindre les règles contractuelles habituelles du recours à la calculatrice. Comme cos75° est constructible sur la figure, on peut imaginer une comparaison des nombres par comparaison des longueurs à partir de la figure. Au cœur de la technologie n° 7, il y a ce théorème :

Théorème : l'ordre des cosinus de deux angles est inverse de celui sur les angles

La technique (Te 7) consiste ici à comparer deux longueurs ou deux angles. Soit C et J les points du quart de cercle correspondant aux angles IOC et IOJ respectivement égaux à 60° et 90°. Soit O et C' leurs projetés orthogonaux sur (OI). Le point N du cercle tel que le cosinus de l'angle ION vaut 0,25 s'obtient par médiation du segment OC' tandis que le point M du cercle tel que l'angle IOM égal à 75° s'obtient, lui, par bissection de l'angle COJ puisque $0{,}25 = \dfrac{\cos 60° + \cos 90°}{2}$ et $75° = \dfrac{60° + 90°}{2}$. En s'appuyant sur le fait que la perpendiculaire NN' et le rayon OM passent tous deux par le milieu du segment JC, on peut se convaincre (recours à la figure) que OM' > ON' et donc que cos75° > 0,25.



On remarquera que nous sommes dans une configuration particulière qui consiste à comparer le cosinus de la demi-somme de deux angles avec la demi-somme des cosinus des deux angles et que nous sommes en mesure de dire que, pour des angles géométriques aigus, le premier est inférieur au second. Le théorème est en fait généralisable à une barycentration à coefficients positifs ce qui rejoint la propriété de concavité de la fonction cosx° sur l'intervalle [0 ; 90].

Même si la technologie et toutes les propriétés géométriques que nous avons fait venir sont disponibles dans l'EMS actuel, nous pensons que l'absence de telles tâches de comparaison de longueurs ou d'angles dans cette même institution se conjuguera, dans cette situation didactique, à la trop faible incitation géométrique pour que cette voie soit empruntée par les élèves.
De plus l'égalité $75° = \frac{60° + 90°}{2}$ peut conduire aux égalités $\cos 75° = \frac{\cos 60° + \cos 90°}{2} = \frac{0,50 + 0}{2} = 0,25$ selon une procédure (algébrique) de linéarisation sur la fonction cosinus ($f(\frac{a + b}{2}) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$) qui pourrait s'appliquer indépendamment du cadre géométrique.

7. Conclusion de l'analyse a priori

Nous avons dégagé plusieurs techniques réparties sur les quatre cadres. Elles représentent, pour nous, autant de stratégies potentielles pour les élèves devant la tâche à accomplir. Mais, replacées à la fois dans le contexte institutionnel actuel d'une classe de première S, et dans les conditions crées par la situation didactique, ces techniques n'ont pas toutes la même probabilité d'être appréhendées par les élèves pour susciter et guider leur travail mathématique de comparaison entre les deux nombres.
Celles du cadre algébrique enseignées sous le titre "comparaison de deux réels" devraient dominer et n'être concurrencées que par celles du cadre numérique à travers des procédures de décimalisation utilisant la calculatrice.

Cependant la présence ou l'absence de l'une ou l'autre de ces techniques nous renseignera un peu plus sur les rapports institutionnels aux objets engagés par cette technique ou sur certaines habitudes contractualisées dans la classe. Nous nous attendons à un brassage de ces techniques issu des différentes tentatives d'adaptation à la situation problématique des radicaux superposés. Ce brassage peut être interprété sur deux axes, relativement à chacune des techniques enseignées :

- pour un élève en particulier, comme un indice de la maîtrise (ou du manque de maîtrise) de ces techniques et au-delà comme un test de la conformité du rapport personnel d'un élève particulier au rapport institutionnel pour les objets mathématiques que cette technique engage ;
- pour la classe de première S dans laquelle se fait l'expérimentation ou pour l'EMS tout entier comme la difficulté à implanter des techniques résistantes aux variations que nous avons fait subir à la tâche de comparaison numérique donc comme une preuve de fragilités institutionnelles de ces techniques.

Tableau synoptique des techniques recensées.

Cadres → **Techniques ↓**	**Algébrique**	**Analytique**	**Numérique-décimal**	**Géométrique**

probables	1 et 1bis		5.1 et 5.2	
improbables	2 et 3	4	6.1, 6.2 et 6.3	7

8. Analyse a posteriori

Nous la conduisons en trois temps : d'abord un descriptif très concis du déroulement de l'expérimentation, ensuite un recensement sommaire, avec classement, des procédures amorcées effectivement par les élèves, enfin un rapprochement entre ces procédures et d'une part les techniques présentées par l'analyse a priori, d'autre part les attentes de l'enseignante.

8.1 déroulement de l'expérimentation

La classe de 27 élèves était partagée en deux groupes sur des heures dites de module ; les élèves travaillaient par binômes, mais pour cette dernière question de la séance nous avions demandé des réponses écrites individuelles sur des fiches qui comportaient les énoncés des questions 4 et 5 et de la place pour les réponses. Après le corrigé professoral de la question 4, il restait, les deux fois, un peu plus de dix minutes.
Nous avons ramassé les 27 copies ; 3 d'entre elles étaient vierges. On trouvera dans les annexes de ce chapitre quelques-unes de ces copies[217].
Nous avons enregistré les échanges oraux de 6 binômes ainsi que les interventions publiques de l'enseignante. Tout est retranscrit dans des protocoles expérimentaux lisibles en Annexe.
La professeur a distribué, à la fin de la séance, un corrigé de la question 5, lui aussi disponible dans les annexes.

8.2 classement global des procédures

cadre algébrique	cadre analytique	cadre numérique	cadre géométrique
21	0	6	0

Seulement 3 des 24 élèves pour lesquels nous disposons de produits écrits écartent d'emblée l'algébrique pour s'emparer de la calculatrice et nous repérons 3 élèves (3 seulement sur 21) qui passent du cadre algébrique au cadre numérique.
L'absence totale de procédures attachées à l'Analyse ou à la Géométrie et le faible transfert sur la calculatrice confirme l'ostracisme opéré par le contrat algébrique dans un contexte où, même s'il pouvait gouverner sans concurrent immédiat, cela n'était pas sans difficulté (le très faible taux de réussite de la classe à question elle-même est là pour nous le prouver).

[217] Toutes les annexes de cette partie sont dans le volume 2.

8.3 étude du cadre algébrique

Procédures et techniques associées	effectifs (réussites)	Observations
transformation de la différence des deux nombres sans présence de carrés (Te n°2)	**8**	fautes de calculs et abandons ; on trouve en particulier que la différence des nombres est égale à celle de leurs carrés (copies n°1 et 2)
sous-total "différence simple"	**8 (0)**	
transformation de la différence des carrés des deux nombres et étude de son signe (Te n°1)	**1**	Réussite (copie n°3)
transformation du carré de la différence	**1**	abandon (cf. ci-dessus, copie n°2)
transformation du carré de cos75° (Te n°1bis)	**2**	abandons après calculs corrects
transformation des deux carrés suivie d'une comparaison algébrique (Te n°1bis)	**1**	échec (copie n°4)
transformation des deux carrés suivie d'une comparaison décimale (Te n°1 bis et 5.1)	**2**	échecs mais méthode correcte (copie n°5)
sous-total "carrés"	**7 (1)**	
recherche d'une majoration décimale de cos75° (Te n°6.2)	**4**	allers et retours entre le cadre algébrique et le cadre numérique décimal ; tentative d'utilisation de la majoration (fausse) $\sqrt{0,75} < 0,75$ (copie n°6)
sous-total "majoration"	**4 (0)**	
transformation de cos75° sans écrire la différence avec 0,25	**1**	usage de $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ abandon (copie n°7)
transformation de 0,25 sans écrire la différence avec cos75°	**1**	$0,25 = \frac{\sqrt{1-\cos^2 30°}}{2}$ puis abandon
sous-total "autres"	**2 (0)**	
total	**21 (1)**	

Le démarrage par la différence entre les deux nombres est emprunté par plus du tiers de la classe qui bute sur la superposition des radicaux et abandonne très rapidement. Parmi eux 7 élèves ne prennent pas du tout en compte la présence des radicaux comme s'ils croyaient en la possibilité de simplifier la différence de deux nombres dont l'un est une racine carrée alors qu'ils ne possèdent pas la technique n°2. Par contre, à la quasi-unanimité, ils transforment l'écriture du nombre décimal 0,25 en la fraction $\frac{1}{4}$ (cf. note sur cette transformation).

Le contrat algébrique qui incite à traiter la comparaison numérique par la différence agit malgré la nature algébrique des nombres qui nécessite la technique n°2. L'absence de cette technique (ou de tout autre technique capable de transformer la différence de deux nombres dont l'un est irrationnel) n'est pas compensée par les techniques institutionnelles de passage par les carrés.

Les tentatives qui visent tout de suite la différence des carrés des nombres et font ainsi disparaître un étage de radical, se développent mieux et connaissent parfois des succès. Voici celle qui réussit (copie n°3 en Annexe), malgré les dérapages algébriques :

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 - (0{,}25)^2 = \frac{2+3-2\sqrt{6}}{4} - \frac{1}{8} = \frac{10-4\sqrt{6}-1}{8} = \frac{9-4\sqrt{6}}{8}.$$

Or $4\sqrt{6} < 9$ donc $9 - 4\sqrt{6} > 0$ donc $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 - (0{,}25)^2 > 0$

donc $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} - 0{,}25 > 0$ et $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} > 0{,}25$.

On peut apprécier le caractère très problématique de la superposition des radicaux, comme dans le dialogue suivant entre les élèves Amandine et Claire. Elles ont bien commencé le travail de comparaison en élevant les deux nombres au carré mais (copie n°4) :

> A : ça il faudrait faire au 4 ; au 4 tu aurais plus du tout de racine ; ça t'embêtes plus du tout ... si tu fais directement au 4, pas au cube, au 4, puissance 4.
> A' : ouais ... mais moi je l'ai fait en deux fois au carré.
> A : j'ai du mal (soupirs) ... je vais faire ça puissance 4 ; on verra bien ce que ça va donner et puis ...

Elles ont recherché un passage par les carrés, mais ne se tournent pas vers la combinaison avec la différence indiquée par la technique n° 1.

Le corrigé professoral (reproduit en Annexe) choisit la différence entre les deux carrés en créant un cheminement adapté à la superposition des radicaux (→ signifie "ont le même ordre que") :

$x = \sqrt{\frac{1-\sqrt{0{,}75}}{2}}$; $y = 0{,}25$; $a = 0{,}4375$; $b = \sqrt{0{,}1825}$

x et y → x^2 et y^2 ; x^2 et y^2 → $x^2 - y^2$ et 0 ; $x^2 - y^2$ et 0 → $a - b$ et 0

$a - b$ et 0 → a et b ; a et b → a^2 et b^2 ; a^2 et b^2 → $a^2 - b^2$ et 0.

Assez curieusement d'ailleurs ce corrigé part de l'écriture $\sqrt{\frac{1-\sqrt{0{,}75}}{2}}$ qui va faire venir des carrés de nombres décimaux, réhabilitant la calculatrice alors que la professeur s'était employée à l'évincer du travail des élèves.
Ce paradoxe n'en est pas un si on comprend que l'enseignante associe, dans la conduite de l'élève, calculatrice et calcul approché (et ici les carrés des décimaux restent en calcul exact). En témoigne l'épisode suivant où l'enseignante répond publiquement à un élève qui suggère d'utiliser une valeur approchée de $\sqrt{3}$ (E, E' et E" sont des élèves et P la professeur) :

P (qui répond à E) : lequel est le plus grand, on veut savoir ; comparer deux réels, on veut les ranger ...
E' : madame, on peut utiliser la calculatrice ?
P : c'est prévu que tu craques et que tu t'en serves mais tu dis bien ce que tu fais avec ...
E" : j'ai presque réussi à trouver sans calculatrice ... mais je peux pas arriver à l'écrire
P : comment ça se fait que tu peux pas l'écrire ?
E" : ben 2 moins racine de 3 c'est inférieur à 1 !
P : alors ça tu pourrais aller au bout de ton ...
E" : c'est 2 moins 1virgule 7 à peu près
P : oui mais en fait si tu t'interdis de ... le 1 virgule 7 viendrait de la machine finalement
E" : non il vient de ma tête ! c'est un machin qu'on ...
P : ouais, d'accord mais ce serait quand même l'utilisation de la valeur approchée pour te guider sur le résultat ; or, si tu penses à élever au carré, 4 et 3, tu sais comment ça se range ; ce sont des nombres positifs ; donc tu sais ranger 2 et racine de 3
E" : ah oui !
P : tu as les moyens d'être rigoureux, je veux dire ; parce que bon, l'utilisation de 1 virgule 7 c'est le passage à la valeur approchée et ... (elle est interrompue par une autre élève qui l'interpelle)

Le corrigé de la professeur et son dialogue en classe sont cohérents avec l'analyse qu'elle faisait de la tâche et de ses attentes relativement à cette tâche dans sa classe, que nous avons exposées dans le paragraphe 1.2 de ce chapitre.

8.4 le cadre numérique décimal

Malgré l'appel à rester avec des méthodes algébriques à partir des écritures exactes et la force contractuelle de cet appel dans la classe, malgré aussi le discrédit public sur le recours à la calculatrice (qui ne doit servir qu'à "donner la direction à prendre" ou à "vérifier" après le travail de preuve) et, conjointement, sur le recours aux valeurs approchées, 6 élèves choisissent le cadre numérique décimal. Ils le font de deux manières :

Procédures et techniques associées	**effectifs (réussites)**	**Observations**
édition de l'une des écritures exactes de cos75° et exécution (technique 5.1)	**4 (4)**	1 élève le fait après abandon d'un travail algébrique ; réussites (copie n°8)
remplacement de $\sqrt{0,75}$ par 0,866 après travail algébrique (technique mixte 5.1 et 6.1)	**2 (0)**	fautes dans le retour à la comparaison (copie n°9)
total	**6 (4)**	

... et ils le font tous, comme dans le corrigé professoral, à partir de l'écriture $\sqrt{\frac{1-\sqrt{0,75}}{2}}$, dont la "sensibilité décimale" leur paraît peut-être légitimer la présence de la calculatrice (ou empêcher le travail algébrique). Voici l'une des deux copies où un démarrage algébrique se poursuit dans la décimalisation (copie n°9) :

$0{,}25^2 = 0{,}0625$

$(\cos 75°)^2 = \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{0{,}75}}{2}}\right)^2 = \frac{1-\sqrt{0{,}75}}{2} = 0{,}5 - \frac{0{,}866}{2} = \cos^2 75 < 0{,}25^2$

puisque > 0 cos75 < 0,25

la calculatrice m'aide à calculer $\sqrt{0{,}75}$

(suit un calculogramme qui décrit la suite des touches machines et qui se termine par = 0,866)

La substitution décimale se fait avec 3 chiffres. Il ne semble pas que le choix de 3 décimales exactes soit lié au fait qu'il est mathématiquement suffisant pour réussir la comparaison entre $\sqrt{\frac{1-\sqrt{0{,}75}}{2}}$ et 0,25 (2 décimales suffisaient).
Ce choix est-il un indice supplémentaire que le contrat didactique dans la classe à propos de calculs approchés avec des décimaux insiste sur un nombre "raisonnable" de décimales, le plus souvent 3 ? ou est-il à mettre en rapport avec les 3 décimales significatives de 0,0625 puisque celui-ci est le nombre visé par la comparaison ? Le recours à l'arrondi sans contrôler ses effets sur le résultat final confirme que l'absence de la technologie n°6 laisse le champ libre à la praxéologie de décimalisation issue du Collège.

9. Retours sur certaines hypothèses et les objectifs de l'ingénierie

La comparaison proposée entre deux nombres connus par leur valeur exacte, malgré la difficulté liée aux radicaux superposés de l'un des nombres, ne nous semblait pas une tâche insurmontable pour un élève de première S. Le cadre algébrique privilégié par l'institution lui offrait une technique (Technique Te1) opérationnelle ici en un nombre réduit d'opérations arithmétiques sur des nombres entiers ou des nombres dont l'écriture décimale comportait peu de chiffres.

> *L'échec massif dans la comparaison numérique nous alerte sur la fragilité institutionnelle des techniques algébriques enseignées qui ne résistent pas à la perturbation crée par les radicaux superposés.*

En effet, la technique était installée dans la classe et l'enseignante, qui avait rappelé les règles algébriques dans le domaine du Calcul numérique en début d'année, espérait la réussite des meilleurs, tout en craignant, nous avait-elle dit, les conséquences d'un éventuel manque de temps pour certains d'entre eux.

Le facteur temps ne doit pas être considéré comme négligeable dans l'analyse du déroulement de la séance et des productions des élèves car il restreint les tentatives adaptatives à la perturbation mais il ne peut pas expliquer fondamentalement les comportements des élèves. C'est le contrat didactique modelé par le traitement institutionnel de la tâche qui, dans ce type de situation didactique, par sa nature *numérico-algébrique* bloque toute alternative institutionnelle et s'oppose aux pratiques ouvertes par d'autres cadres, notamment le cadre analytique. C'est lui qui façonne la place à la calculatrice.

Dans cette situation didactique où la décimalisation (de type 1) porte sur des nombres auxquels l'institution attribue une valeur exacte atteignable et manipulable avec des règles algébriques (décimalisation de type 1), la calculatrice est bannie de la construction publique de la preuve dès lors qu'elle peut être accusée de remplacer de l'exact par de l'approché.

> *Le déroulement de la séance et l'analyse des productions des élèves nous le confirment : dans les rôles que la calculatrice est autorisée à tenir dans l'activité numérique, soit en amont "pour se faire une idée", soit en aval "pour vérifier", les résultats décimaux approchés qu'elle produit ne connaissent pas de contrôle institutionnel mais une simple surveillance. En effet, les énoncés technologico-théoriques à l'appui de ces pratiques instrumentées ne portent pas directement sur l'approximation numérique, puisque celle-ci n'a pas droit de cité dans la résolution, mais sur la transformation sémiotique papier-éditeur opérée sur les écritures des valeurs exactes.*

La valeur exacte y gouverne l'approximation numérique par l'intermédiaire d'une écriture qui n'est regardée que comme un moyen d'accéder, via l'instrument uniquement, à une valeur approchée décimale supposée incontestable voire incontrôlable. Le bannissement de la calculatrice dans la preuve va de pair avec l'absence de maîtrise de l'approximation.
Nous expliquons ainsi que dans aucune des procédures de calcul approché suscitées par la comparaison numérique (au-delà de l'échec des pratiques algébriques habituelles sur les valeurs exactes) on ne trouve de trace d'encadrement ou de mesure de distance qui signalerait une interrogation sur les effets de l'approximation dans cette comparaison.

> *Nous sommes renforcés dans l'idée que les ruptures nécessaires pour rencontrer la nouvelle praxéologie de décimalisation (celle que nous visons dans l'ingénierie) s'opposeront frontalement aux pratiques calculatoires car elles devront faire partager la responsabilité de l'approximation numérique décimale entre la calculatrice et les nouveaux objets mathématiques, tels les encadrements, les valeurs absolues et les limites.*

CHAPITRE D_3 : LES ANALYSES DE LA SITUATION COS18°

La structure de chapitre est identique à celle du chapitre précédent.

1. Présentation de la situation cos18°

1.1. de nouvelles valeurs pour les deux variables micro-didactiques V_1 et V_2

La situation est créée par la question 1 de la deuxième séance – retenir parmi trois valeurs approchées de cos18° celle qui est la plus proche de ce nombre – (cf. documents en Annexe de la partie D_1).
Nous rebondissons sur la question 3 de la première séance où nous avons pointé l'impossibilité d'atteindre le nombre cos18° par les règles du jeu mathématique incluses dans le projet initial ; le début de séance 2 est d'ailleurs en partie consacré à rappeler ce résultat. Mais nous changeons la valeur de chacune des deux variables micro-didactiques V1 et V2 – celles que nous avons qualifié de vitales pour l'ingénierie.
En effet nous autorisons la calculatrice tout au long de la séance mais maintenons, conformément au projet présenté à la classe, l'interdiction des touches trigonométriques. Dès lors la décimalisation du nombre réel cos18° devient de type 2 puisque ce nombre est connu par sa valeur exacte (cos18° !) mais dans une écriture qui n'est pas reproductible dans l'éditeur de calculs de la calculatrice.
Nous répondons ainsi sur plusieurs plans aux objectifs de recherche et d'enseignement fixés pour l'ingénierie.

1.2 les hypothèses sous-jacentes à la construction de la situation

Formulons tout de suite les trois hypothèses qui ont sous-tendu les choix des valeurs données aux variables micro-didactiques :

- la décimalisation des nombres apparaît comme le moyen le plus immédiat d'entrer dans le problème d'approximation numérique (H1) ;
- l'inaccessibilité de la valeur exacte sous la forme d'une expression numérique reproductible dans la calculatrice favorise la recherche de stratégies de comparaison numérique dirigées par les notions d'encadrement et de distance (H2) ;
- l'enjeu d'élimination de deux valeurs pour n'en retenir qu'une provoque la construction d'un algorithme porteur d'encadrements emboîtés (H3).

Précisions sur l'hypothèse H1 :

Si nous n'avons aucun doute sur le fait que l'autorisation de calculatrice renforce l'attrait pour des stratégies s'appuyant sur des décimalisations de nombres (bien qu'elles ne soient pas réclamées explicitement par la question), nous ne sommes pas naïfs au point de croire qu'aucun élève ne sera tenté d'appuyer sur les touches trigonométriques de la calculatrice.

Nous considérons au contraire qu'il s'agit là d'une éventualité à intégrer dans l'analyse a priori comme une rétroaction possible du milieu didactique. Mais l'interdit officiel sur ces touches autorise le professeur et la classe tout entière à réclamer sur certains (mais pas tous) résultats décimaux produits, des justifications qui aillent au-delà de la simple référence à l'autorité mathématique de la calculatrice. C'est ce en quoi nous pouvons affirmer que les recours à la calculatrice intègrent ici les procédures de décimalisation sans se substituer à elles et que nous organisons en cela une rupture avec les pratiques habituelles de décimalisation instrumentée par la calculatrice.

Précisions sur l'hypothèse H2 :

C'est l'hypothèse cruciale de l'ingénierie car c'est sur elle que nous fondons la modification des connaissances de l'élève relativement au rôle de l'encadrement dans l'approximation numérique. C'est à son propos que nous avons parlé de jeu topologique.

Le nombre cos18° étant accepté comme *décimalement inconnu*[218], la source principale d'informations pour départager les valeurs approchées se reporte sur les *encadrements connus* de ce nombre et induit, en cas d'échec, la recherche de nouveaux encadrements moins larges.
En effet la distance au nombre est le seul élément mathématique qui autorise à départager deux valeurs approchées de ce nombre et, dans le cas où ce nombre n'est connu que par un encadrement, cette distance n'est appréciable que par des majorations et des minorations. Si la sélection de la meilleure valeur n'est pas possible avec un certain encadrement, seule la réduction de la largeur de l'encadrement ouvre une perspective de réussite (perspective qui devient certitude si la réduction peut-être poussée aussi loin que l'on veut).

> *La disponibilité des formules de base, aptes à réduire les encadrements, nous fait espérer que le milieu didactique de la situation[219] possède, pour reprendre l'expression de Brousseau (1990) "un degré de refoulement a-didactique" suffisant pour attirer l'élève vers les encadrements et pour faire évoluer ses connaissances sur ce que nous pourrions appeler leur pouvoir approchant.*

Ce pouvoir approchant des encadrements, c'est-à-dire leur capacité à fournir des informations sur les distances entre nombres, est au cœur de l'approximation numérique et constitue l'un des savoirs mathématiques visés par l'ingénierie au titre de la rencontre avec une nouvelle praxéologie de décimalisation.

Précisions sur l'hypothèse H3 :

Cette hypothèse prolonge la précédente dans la question 2 mais elle est plus fragile pour trois raisons au moins :

[218] Cela veut dire que nous considérons que la dévolution du problème à l'élève est bien engagée

[219] Par rapport à la première situation, dite de cos75°/0,25, le milieu didactique s'est enrichi des valeurs exactes des cosinus de plusieurs angles (75,° ; 11,25 ; 15° ; 22,5° ; 30° ; 45° ; 67,5° ; 75°) et de leurs valeurs approchées décimales fournies par la calculatrice.

- les resserrements successifs de l'intervalle [15 ; 30] par [15 ; 22,5] puis par [15 ; 18,75] peuvent être réalisés sans concevoir le procédé itératif (x → $\frac{90-x}{4}$) sur les deux bornes.
- l'idée d'approcher l'entier 18 par des décimaux non-entiers est à l'opposé des pratiques d'approximation habituelles dans l'institution
- la complexification décimale des bornes dès les premiers encadrements ralentit fortement la production des emboîtements successifs et peut rebuter rapidement les élèves qui ne sont pas familiers des procédés itératifs.

C'est pour permettre une entrée moins brutale dans cette décimalisation que nous avons notamment préféré 18° à 10° dont l'algorithme x → $\frac{90-x}{8}$ appliqué à l'intervalle [7,5 ; 15] donne [9,375 ; 10,3125] que nous avons jugé peu engageant pour des élèves de Première.

Notons enfin que la décimalisation du nombre cos18° relance le projet initial de tabulation de la fonction cosinus degrés et passe le relais à un nouveau problème d'approximation numérique, celui de calculer d'autres cosinus à partir de la valeur approchée décimale obtenue pour cos18°. Ce problème fait l'objet de la troisième séance.

1.3 mises en valeurs des variables du problème mathématique

La situation est bâtie sur un problème mathématique que nous pouvons formuler en des termes plus généraux que ceux qui apparaissent dans la question 1.

Problème : soit deux nombres proposés comme valeurs approchées de cos18° connu par un intervalle [a ; b] qui le contient ; quel est celui des deux nombres qui en est le plus proche ?

On établit immédiatement les affirmations suivantes :

- Si les deux nombres donnés comme valeurs approchées de cos18° sont inférieurs à a, le plus proche de cos18° est le plus proche de a
- Si ces deux nombres sont supérieurs à b, le plus proche de cos18° est le plus proche de b
- Si ces deux nombres sont entre a et b, on ne peut décider lequel est le plus proche de cos18°

Considérons alors trois nombres m, n et p annoncés comme valeurs approchées de cos18° et placés dans l'ordre suivant : $m \leq a \leq n \leq b \leq p$. Il s'avère que :

- on ne peut affirmer " n est meilleure que p" que si "$p - b > \sup(b - n ; n - a)$"
- on ne peut affirmer " n est meilleure que m" que si "$a - m > \sup(b - n ; n - a)$"
- on ne peut affirmer " p est meilleure que m" que si "$a - m > p - a$"
- on ne peut affirmer " m est meilleure que p" que si "$p - b > b - m$"

Ce sont des conditions nécessaires qu'il n'est pas possible d'utiliser en conditions suffisantes. Appelons *nombres en concurrence* deux nombres qu'il n'est pas possible de départager uniquement sur la base de l'encadrement de cos18° par [a ; b]. On établit le théorème suivant :

> **Théorème** : pour tout nombre réel x, l'ensemble des nombres en concurrence avec x est l'intervalle [2a - x ; 2b - x].

L'intervalle I = [2a - x ; 2b - x] est la zone de R qui contient tous les concurrents[220] potentiels de x, c'est-à-dire ceux qui sont candidats à être plus proches de cos18°. Voici quelques propriétés de cet intervalle :

- Sa largeur est deux fois celle de [a ; b].
- Il contient l'intervalle [a ; b] si et seulement si x appartient lui-même à [a ; b].
    - Dans le cas où x appartient à [a ; b], l'extérieur de l'intervalle I ne contient que des nombres moins proches de cos18° que ne l'est x.
    - Dans le cas contraire, où x n'appartient pas à [a ; b], l'extérieur de l'intervalle I contient à la fois les nombres plus proches de cos18° que ne l'est x (c'est l'intervalle [x ; 2a - x] si x < a ou [2b - x ; x] si x > b) et ceux qui sont moins proches de cos18° que ne l'est x (ce qui reste).
- I est disjoint de [a ; b] si et seulement si x n'appartient pas à l'intervalle J = [2a – b ; 2b - a] dont la largeur est triple de celle de l'intervalle [a ; b] et qui est centré sur le milieu de [a ; b]. Cela signifie que tout x extérieur à J est nécessairement moins proche de cos18° que n'importe lequel des nombres de l'intervalle [a ; b][221].
- I est centré sur x si et seulement si x vaut $\frac{a+b}{2}$, centre de [a ; b].

Ces différentes propositions nous ont guidés pour construire la liste des nombres proposés comme valeurs approchées de cos18°.

En retenant pour [a ; b] les intervalles susceptibles d'être rapidement opérationnels dans la situation, à savoir [cos30° ; cos15°], [cos22,5° ; cos15°] puis [cos18,75° ; cos15°], nous avons décidé de soumettre les trois nombres m, n et p aux contraintes suivantes :

- avec l'intervalle [cos30° ; cos15°] aucun des trois nombres ne peut être écarté ;
- avec l'intervalle [cos22,5° ; cos15°] seul l'un d'entre eux peut être écarté (ce sera m $= \frac{8}{9}$) ;
- celui qui reste dans l'intervalle [cos22,5° ; cos15°] (ce sera n = $\frac{27}{29}$) passe à l'extérieur de l'intervalle [cos18,75° ; cos15°] ;

[220] On vérifie que la relation binaire "être en concurrence avec" est symétrique

[221] Une autre façon de le dire : pour n variant dans [a ; b], l'enveloppe des intervalles de concurrence de n est l'intervalle [2a - b ; 2b - a].

- le plus proche de cos18° est à l'extérieur des trois intervalles (ce sera p = $\frac{29}{30}$ [222]).

Ces décisions s'inscrivent dans notre volonté de faire fonctionner les encadrements comme source d'évaluation et de comparaison des distances entre nombres. La mise en scène didactique doit avoir pour premier effet de déstabiliser les pratiques d'approximation numérique notamment celles qui utilisent les encadrements et pour deuxième effet d'apporter les premiers éléments technologiques d'une nouvelle technique. Il s'agit tout à la fois de perturber et d'enclencher le rééquilibre cognitif.

1.4 la négociation avec l'enseignante

Le **premier entretien** comporte un événement très significatif pour les enjeux de l'ingénierie. Nous demandons à l'enseignante si la question 1 de la séance 2 lui semble bien formulée et compréhensible par ses élèves (E est l'enseignante et I l'interviewer) :

> E : oui, le but est d'éliminer les valeurs qui vont être trop loin ; il y en a une meilleure
> I : meilleure au quel sens ?
> E : au sens de distance ; il faut discerner la plus près de la valeur exacte de cos18° ; on est en plein dans la distance entre deux réels ; il faut comparer les trois réels avec les cosinus écrits dans le récapitulatif et remarquer parmi les trois réels si certains sortent de l'encadrement qu'on va être capable d'écrire
> I : et comment réponds-tu à la question posée ?
> E : attends, je regarde ce que j'ai fait ; je suis partie de l'intervalle [cos30° ; cos15°] ; j'ai éliminé $\frac{29}{30}$; restent $\frac{8}{9}$ et $\frac{27}{29}$; $\frac{29}{30}$ est plus grand que cos15° ; elle ne tombe pas dans l'intervalle ; là j'ai été obligée de prendre cos22,5° ; $\frac{8}{9}$ n'est pas dans l'intervalle [cos22,5° ; cos15°] ; il ne reste que $\frac{27}{29}$.
> D'ailleurs je ne comprends pas ta synthèse pour la question[223].

> *Les réponses de l'enseignante à la question 1 nous confirment la force du contrat institutionnel qui fait de l'encadrement connu sur un nombre le lieu exclusif des "bonnes" valeurs approchées de ce nombre.*

Or l'étude du problème mathématique que nous avons réalisée dans le paragraphe précédent contredit cette idée. Il existe de "bonnes valeurs approchées" du nombre encadré en dehors de l'intervalle, *à moins que cet intervalle soit reconnu comme centré sur le nombre lui-même, auquel cas le problème est substantiellement modifié.*
Mais les pratiques institutionnelles de calcul approché qui utilisent les encadrements (cf. chapitre C_2) réduisent l'intervalle à trois de ses éléments : les bornes et le milieu, ce

---

[222] Nous aurions pu prendre le nombre p dans l'intervalle [cos18,75° ; cos15°] et par conséquent plus proche de cos18°. Nous aurions pu y gagner la possibilité d'écarter m sans rendre nécessaire une nouvelle réduction de l'intervalle. Mais nous aurions perdu l'effet de surprise provoqué par la conviction que la meilleure valeur approchée est celle qui est hors de l'intervalle et nous aurions perdu aussi la possibilité de déclencher la fabrication d'un algorithme pour résoudre le problème posé.

[223] Dans cette proposition de synthèse nous affirmons que :
"l'encadrement cos22,5° < cos18° < cos15° ne permet pas de départager les nombres candidats car ceux qui sont dans l'intervalle [0,882 ; 1] ne peuvent pas être nécessairement classés entre eux". Cette affirmation résulte de l'application du théorème et de ses corollaires (l'intervalle [0,882 ; 1] est obtenu à partir de [2.cos22,5° - cos15° ; 2.cos15° - cos22,5°] dont la borne inférieure a été décimalisée et la borne supérieure ramenée à 1).

dernier étant le plus souvent désigné comme la meilleure valeur approchée du nombre encadré. De plus les calculs auxquels est soumis l'encadrement ne font pas fonctionner la distance mais uniquement l'ordre entre les nombres (cf. conclusion du paragraphe 2 dans le chapitre C_2).
L'encadrement se présente alors dans l'EMS comme un porte-drapeau de la notion de distance et, même si l'enseignante y fait référence, sa pratique institutionnelle l'empêche de l'intégrer dans sa démarche mathématique sur une question qui relève, pour elle, du contrat institutionnel. Elle commet donc, selon ses propres paroles, "une faute de raisonnement" que nous interprétons, nous comme une réponse conforme au rapport institutionnel à l'objet encadrement dans un problème d'approximation numérique, en position d'enseignant.

Une fois le moment de surprise passé, la décision fut prise de maintenir en l'état l'énoncé de la question et d'examiner, en commun, le rôle de la synthèse à la charge de la professeur. L'idée maîtresse est de recourir à la visualisation du problème sous la forme d'un morceau de la droite réelle[224]. En s'appuyant sur cette représentation des nombres conforme au rapport institutionnel à l'ensemble R, l'enseignante sera en mesure de susciter et animer un débat sur les conséquences de l'ignorance de la position exacte de cos18° dans l'intervalle [cos22,5° ; cos15°]. Ce débat est jugé prometteur pour mettre en lumière plusieurs implicites qui peuvent accompagner les procédures attendues à la question 1 :

- ceux qui permettent d'imaginer cos18° sur la droite réelle : par exemple, cos18° est entre cos15° et cos22,5° et plus près de cos15° que de cos22,5° ; ces arguments qualitatifs n'apportent pas de certitude mais ils peuvent convaincre pour rejeter $\frac{8}{9}$.
- celui qui permet de placer effectivement les nombres sur la droite réelle : il faut décimaliser le nombre ; le nombre de décimales à employer dans les calculs des distances n'est pas nécessairement égal à celui qui sert pour la réalisation graphique.

Mais cette décision, négociée avec l'enseignante, affaiblit le caractère supposé a-didactique du milieu de la situation par rapport à la notion de distance, tel que nous l'avons formulé dans l'hypothèse H2. Elle s'est cependant imposée à nous pour prendre en compte :

- l'exigence d'enseignement, de développer les raisons mathématiques qui font que la réponse $\frac{27}{29}$ (supposée être majoritaire chez les élèves) n'est pas fondée et est peut-être fausse.
- l'avantage à disposer de la visualisation graphique pour soutenir le travail public de décimalisation avec la calculatrice rétroprojetable
- l'obligation de légitimer la question 2 pour faire avancer l'élève dans le problème en l'engageant fermement sur le principe de resserrer l'encadrement autour de cos18°.

Lors du deuxième entretien**, nous revenons sur la question 2 de la séance 2.**

224 La feuille chronique comporte une frise qui soutient un tel travail graphique sur la droite numérique.

I : mais comment va se passer le resserrement de l'encadrement ? c'est ma plus grosse inquiétude ; toi tu as resserré en enclenchant l'algorithme ($x \rightarrow \frac{90 - x}{4}$). Penses-tu que les élèves soient en mesure eux-mêmes de resserrer les encadrements, d'accéder eux-mêmes à l'algorithme que tu as utilisé ?
E : je leur suggère bien qu'il faut resserrer !
I : oui mais pour le faire concrètement ?
E : je me rappelle comme j'ai fait ; il faut trouver mieux que 22.5 ; la moitié ça m'éloignait, donc je suis passée par le complémentaire puis la division par 2 deux fois
I : cet algorithme aura du mal à sortir
E : pourtant ça se voit bien ; on le sent […] on leur dit de resserrer l'encadrement c'est bien qu'il faut qu'ils arrivent sur d'autres valeurs avec les formules qu'ils ont eu l'occasion de manipuler complémentaire et bissection ; donc ils devraient y repenser là à ce moment-là ça devrait être naturel
I : tu as évacué tout de suite les mauvaises formules
E : je n'ai pas eu d'hésitation c'est venu naturellement il les fallait ces valeurs on n'a pas d'autres possibilités
I : les calculs sont-ils tenables pour un élève de première S ?
E : ah oui avec la calculatrice ils doivent arriver à un résultat
I : on pourrait leur donner l'algorithme ou au moins insister sur le fait d'utiliser les formules
E : si tu veux mais je n'ai pas peur

Ainsi l'enseignante n'adhère pas à notre sentiment de la fragilité de l'hypothèse 3. Nous prenons alors ensemble la décision de ne fournir l'algorithme que si les élèves restent trop longtemps désarmés devant la consigne de resserrer l'encadrement.
La gestion didactique de cette deuxième partie de la séance est en effet très serrée si on veut pouvoir conclure sur la réponse exacte à la question posée. Il s'agit notamment de conserver assez de temps pour deux moments publics :

- celui de la visualisation graphique sur droite graduée du premier resserrement
- celui de l'accompagnement de la décimalisation des bornes sur calculatrice rétroprojetable.

2. Analyse a priori

Pour mener cette analyse, nous devons tenir compte de deux faits :

- les deux questions relèvent de tâches qui ne sont pas institutionnalisées.

La première tâche consiste à choisir entre deux valeurs approchées d'un nombre qui n'est pas connu par une expression algébrique. Nous avons développé plus haut les "raisons" écologiques de son absence dans l'EMS.
La seconde tâche consiste à réduire la largeur d'un encadrement grâce à des formules algébriques sur les bornes. Certes nous avons signalé la présence d'un tel travail mathématique dans l'algorithme de Héron (dès la classe de Troisième) mais, à chaque fois, la responsabilité de la conception de l'algorithme incombait entièrement à l'enseignant.

- les décisions prises sur la gestion de la séance prévoient des interventions dirigistes de l'enseignante qui laisseront peu de temps à l'élève pour développer la stratégie de son choix.

Nos connaissances des contrats institutionnels relatifs à l'approximation numérique nous permettent cependant de *modéliser les comportements des élèves dans la question 1* sur deux groupes de stratégies :

- celui d'une décimalisation de cos18° via notamment une formule algébrique, suivie d'une comparaison des distances des trois nombres m, n et p au nombre décimal retenu à la place de cos18° (groupe stratégique à caractère algébrique)
- celle de la recherche d'encadrements de cos18° suivie d'une discrimination des valeurs approchées (groupe stratégique à caractère topologique)

Mais il ne faut pas oublier que le développement de ces stratégies est fortement conditionné par les rappels opérés en début de séance et la présentation de la question 1 par l'enseignante. L'enseignante a projeté au tableau un corrigé du travail maison sous la forme d'un récapitulatif des valeurs exactes issues de la séance 1 (ces valeurs ne sont pas ordonnées mais regroupées selon le nombre de formules à appliquer à partir des trois angles de base). Ce récapitulatif reste affiché au tableau de la salle de classe pendant que l'enseignante introduit ainsi la question 1 :

> […] on pourrait se dire que notre projet est un peu compromis puisqu'on ne peut pas sortir d'autres entiers avec l'utilisation des formules ; alors le fabricant qui a quand même le souci de livrer sa commande a été puiser dans d'anciens traités de trigonométrie un élément extérieur qui va peut-être venir nous aider ; il a trouvé à force de recherches dans les manuels (rires d'élèves) des valeurs approchées de cosinus 18 degrés ; cosinus 18 degrés arrive assez fréquemment dans les anciens traités de trigonométrie ; 18 degrés c'est 90 degrés sur 5 ; c'est une valeur qui a été travaillée par les mathématiciens ; donc il a 3 valeurs approchées pour cosinus 18 degrés ; je vais vous les donner sous forme de questions parce qu'il va falloir que vous fassiez un petit travail dessus, pour commencer (cf. document 1 dans les annexes D_3 [225]).

2.1 stratégies à caractère algébrique

Une première stratégie (S1) suit les étapes suivantes :

- décimalisation de cos18° ≈ d (décimal) obtenu par la valeur exacte de cos18° sous la forme d'une expression algébrique décimalisable à la calculatrice
- calcul des distances décimales $| m – d | \approx d_m$; $| n – d | \approx d_n$; $| p – d | \approx d_p$;
- ordonnancement des nombres d_m, d_p, d_p ;
- conclusion : le plus petit des trois nombres d_m, d_p, d_p indique la meilleure valeur approchée.

Il s'agit d'une stratégie de base qui peut se développer dans l'environnement algébrique de ce début de séance 2, à partir de formules construites par analogie avec des formules connues. Voici trois possibilités :

225 Toutes les annexes de cette partie sont dans le volume 2.

> une "quintesection" : $\cos 18° = \cos \frac{90}{5}° = \sqrt{\frac{1 + \cos 90°}{5}} \approx 0{,}447$ qui aboutit à répondre $\frac{8}{9}$

> une linéarisation : $\cos 18° = \cos \frac{4x15° + 1x30°}{5} = \frac{4x\cos 15° + 1x\cos 30°}{5} \approx 0{,}946$ qui aboutit à répondre $\frac{27}{29}$

> une autre linéarisation : $\cos 18° = \cos \frac{3x15° + 2x22{,}5°}{5} = \frac{3x\cos 15° + 2x\cos 22{,}5°}{5}$ $\approx 0{,}9491$ qui aboutit à répondre $\frac{29}{30}$

Une caractéristique importante de cette stratégie est la projection sur le symbole ≈ des propriétés instrumentales usuelles (dans le calcul numérique) du symbole =, notamment la transitivité. L'algèbre des quasi-égalités fait partie de l'héritage du contrat numérico-algébrique (cf. chapitre C_1).
La complexité des calculs (comme dans l'exemple de linéarisation) ou le doute[226] sur la validité de la valeur d trouvée (comme dans celui de la division par 5 où la valeur d trouvée est très éloignée des valeurs supposées proches de cos18°) rendent très probable un abandon rapide de cette stratégie.

Par contre, les essais infructueux avec la stratégie S1 peuvent favoriser l'apparition d'une autre stratégie (S2) qui remplace la valeur exacte de cos18° par celle du cosinus d'un angle proche de 18°. Nous pensons notamment :

> à l'addition : $\cos 18{,}75° = \cos 7{,}5° + \cos 11{,}25° \approx 1{,}972$

> à la "quadrisection" : $\cos 37{,}5° = \sqrt{\frac{1 + \cos 75°}{2}}$ suivie de $\cos 18{,}75° = \sqrt{\frac{1 + \cos 37{,}5°}{2}} \approx 0{,}947$

> à la médiation : $\cos 18{,}75° = \frac{\cos 15° + \cos 22{,}5°}{2} \approx 0{,}945$.

Ce dernier calcul nous paraît très probable (plus probable que celle qui la précède, malgré la fréquentation insistante avec la bissection au cours de la séance 1) car il redonne au milieu de l'intervalle le rôle qu'il joue habituellement dans les problèmes d'approximations numériques où officient des encadrements.

Par filiation avec la précédente stratégie, S2 procède du même usage algébrique du symbole ≈ en engageant en plus la continuité de la fonction cosinus degrés puisqu'il faut passer de 18 ≈ □ à cos18° ≈ cos□°.

[226] Ce doute peut naître ou être conforté par le calcul à la calculatrice de cos18° malgré l'interdit officiel.

2.2 stratégies à caractère graphique

De telles stratégies que nous regrouperons sous le nom de S3 utilisent d'autres représentations telle la droite graduée ou le cercle trigonométrique (la feuille chronique distribuée aux élèves contient une frise et un quart de cercle) pour évaluer décimalement cos18°, à la suite de quoi elles empruntent le même cheminement que les stratégies S1 et S2.
Elles peuvent tout aussi bien retenir $\frac{29}{30}$ que $\frac{27}{29}$ si, en tenant compte de la précision du dessin, elles établissent, par exemple, que cos18° $\approx$ 0,95.
La séance1 s'est tenue à l'écart des cadres géométrique et graphique. Dans la séance 2, aucun indice n'est donné à l'élève pour entrer dans ces cadres. Cela rend les stratégies S3 très improbables car l'absence de consigne graphique produit de fait un interdit dont l'élève n'a intérêt à se soustraire que s'il dispose d'une technique éprouvée. Ce n'est pas le cas ici.

2.3 stratégies à caractère topologique

Elles considèrent un encadrement d'un nombre comme un discriminant de proximité de ce nombre.
Nous avons déjà vu à l'œuvre l'une d'entre elles : celle qu'a suivie l'enseignante pour résoudre la question 1. Nous la nommons S4. Pour cette stratégie, il s'agit de réduire l'encadrement par emboîtement et de recommencer jusqu'à ce qu'il n'y reste qu'un seul des trois nombres m, n et p. L'encadrement est utilisé pour séparer la droite réelle en deux mondes : l'intérieur (l'intervalle [a ; b]) et l'extérieur. Les nombres de l'extérieur sont réputés éloignés du nombre encadré et ceux de l'intérieur sont qualifiés de valeurs approchées du nombre encadré. Aucun nombre de l'extérieur ne peut entrer en concurrence avec n'importe lequel des nombres de l'intérieur. Pour un nombre dans l'intervalle [a ; b], sa zone de concurrence est seulement l'intervalle lui-même.

> *La stratégie S4 est valide seulement si l'intervalle [a ; b] est systématiquement considéré comme centré sur cos18°.*

Un autre stratégie (S5) est celle que nous visons avec la situation. Elle aussi réduit les encadrements par emboîtements successifs mais conserve deux nombres tant qu'ils sont concurrents l'un de l'autre. La stratégie est systématiquement gagnante puisqu'un nombre éliminé à une étape ne peut plus, dans les étapes suivantes, entrer en concurrence avec les nombres conservés.

2.4 tableau synoptique des stratégies possibles dans la question 1

Survenance ↓	Caractère →	algébrique	topologique	autre
probable		S2	S4	
improbable		S1	S5	S3

2.5 deux stratégies de resserrement de l'intervalle

Supposons que la consigne de la question 2 démarre sur l'intervalle [cos22,5° ; cos15°]. Elle peut déclencher des recherches que nous modélisons autour de deux algorithmes, A1 et A2.

L'algorithme (A1) se développe sur la linéarité de la fonction cos :

- on démarre avec le calcul $\frac{\cos 22{,}5° + \cos 15°}{2}$ (qui pourra être noté cos18,75° !!)
- on constate que 18,75 > 18 et choisit alors l'intervalle noté [cos18,75° ; cos15°] (qui est en fait l'intervalle [$\frac{\cos 22{,}5° + \cos 15°}{2}$; cos15°]) de largeur moitié du précédent
- on calcule décimalement les bornes à l'aide de la calculatrice puis les distances de ces bornes à chacun des nombres $\frac{27}{29}$ et $\frac{29}{30}$
- on recommence si nécessaire, c'est-à-dire si les deux nombres ne sont pas départagés.

On trouvera en Annexe (document 3) une formulation sommaire de cet algorithme et une présentation de ses résultats. Au pas n°8, il autorise à dire (selon la stratégie S5) que $\frac{29}{30}$ est meilleure approchée de cos18° que $\frac{27}{29}$. Il faut remarquer que la conclusion est valide même si l'algorithme ne converge pas vers cos18° (cet algorithme converge vers $\frac{3x\cos 15° + 2x\cos 22{,}5°}{5}$ qui est la "valeur de cos18° interpolée sur l'intervalle [cos22,5° ; cos15°]").

L'algorithme A2 exploite les formules de complémentarisation et de bissection :

- on démarre avec les calculs

$$\frac{90 - 15}{4} = 18{,}75 \text{ donc } \cos 18{,}75° = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{1 + \cos(90 - 15)°}{2}}}{2}}$$

$$\frac{90 - 22{,}5}{4} = 16{,}875 \text{ donc } \cos 16{,}875 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{1 + \cos(90 - 22{,}5)°}{2}}}{2}}$$

- on décimalise, à l'aide de la calculatrice, chacune des bornes de l'intervalle [cos18,75° ; cos16,875°] (qui contient nécessairement cos18° et dont la largeur est moindre que la moitié de l'intervalle [cos22,5° ; cos15°]) puis les distances de ces bornes à chacun des nombres $\frac{27}{29}$ et $\frac{29}{30}$.
- on recommence si nécessaire, c'est-à-dire si les deux nombres ne sont pas départagés.

Cet algorithme permet de départager $\frac{29}{30}$ et $\frac{27}{29}$ ($\frac{29}{30}$ est meilleur) à la fin du deuxième pas ou au quatrième pas si on procède borne après borne au lieu des deux bornes à la fois. Il est effectivement convergent vers cos18°. Dans le même temps qu'on départage les deux valeurs approchées, on peut annoncer que $0{,}9495 < \cos 18° < 0{,}9521$ et donc que $\cos 18° \approx 0{,}95$ (valeur approchée décimale au centième, même si le dernier chiffre n'est pas encore certain).

3. Analyse a posteriori

Nous procédons en trois moments :

- le premier moment examine les productions écrites et orales des élèves sur la question 1 au regard du découpage en quatre stratégies possibles issues de l'analyse a priori. Il s'arrête sur le constat que la bonne réponse n'est survenue qu'une seule fois.
- le second moment observe le processus que l'enseignante engage dès la synthèse des résultats de la question 1 pour transformer la stratégie S4 en la stratégie S5.
- le troisième moment s'intéresse à l'algorithmisation de la stratégie S5.

Rappelons que nous disposons de deux sources d'observables : d'une part 17 fiches où les élèves seuls ou par binômes ont écrit leurs réponses accompagnées de calculs et de justifications, d'autre part les enregistrements des échanges verbaux de 6 binômes et des interventions publiques de l'enseignante.

3.1 la question 1

Voici d'abord la répartition des réponses écrites[227] :

Stratégies	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**Autres[228] et non-réponses**	
Effectifs	0	2	0	9	0	6	$\Sigma = 17$

Il faut moduler la prédominance de la stratégie S4, visible dans les réponses écrites, en tenant compte qu'elle a été fortement induite par les interventions professorales. Ces interventions ont mis l'accent rapidement sur l'encadrement [cos22,5° ; cos15°] et ont inhibé des démarrages de stratégie S1. Certains dialogues nous les révèlent (cf. l'intégralité des protocoles expérimentaux en Annexe de ce chapitre). En voici avec un binôme (A-B) du premier groupe :

A : le plus proche de cos18 ; eh ben on calcule cos18 avec les formules
A : ouais

---

[227] On trouvera dans les annexes quatre copies représentatives des stratégies S2 et S3.

[228] la copie n° 4 est la seule à offrir la réponse exacte mais sa mauvaise formulation écrite détournera l'attention de l'enseignante de l'argument avancé ("15 est plus proche de 18 que 22,5").

A : elle a dit que c'était 90 divisé par 5
A : 90 divisé par quoi ?
A : c'est 90 divisé par 5 ; donc, à mon avis …
A : ... j'y avais déjà calculé ...
B : … c'est nous on calcule par nous-mêmes avec les valeurs qu'on a là le cosinus 18
Arrive la professeur (P)
P : on ne peut pas sortir d'autre entier ...
B : oui mais ...
P : ... donc il faut peut-être pas trop aller sur ce terrain-là ; en résultat d'une application de formules on n'y arrivera pas.
B : on fait 90 moins ...
A : 90 divisé par 5 !
B : par 5 on n'a pas ! on fait par soustraction ?
P : on n'a pas les moyens de faire le calcul cos18 […] regardez où il se situe dans la chaîne d'angles qu'on a déjà.

Ceci se reproduit avec le deuxième groupe. P va de binôme en binôme et arrive chez Q-M :

P : c'est quoi ce que tu calcules ?
M : j'essaie de trouver une relation entre les entiers ; si on ajoute ... on trouve la valeur exacte de cosinus 18 degrés
P : et vous avez une conclusion, le choix à faire
Q : ben non ça viendra après
P : pourquoi ? vous ne voyez pas ?
M : ben chais pas je pensais que ...
P : vous n'avez pas exploité le fait d'avoir 18 entre 15 et 22 5 !
M : si on ajoute toutes les deux et qu'on divise par 2 ça fait 18 75
P : ah oui mais là tu pars sur des formules d'addition qu'on n'a pas
M : on n'a pas le droit d'ajouter les cosinus entre eux et ...
P : on peut faire des valeurs moyennes de cosinus mais à noter les angles dans le cosinus on n'a pas les formules d'addition comme tu souhaitais le faire ... mais peut-être que tu peux creuser ton idée pour te rapprocher de 18 d'une certaine façon ; mais pas par une somme ; il y a peut-être un autre moyen.

Les dialogues nous montrent alors l'émergence d'une combinaison S4 + S2 qui n'a pas pu s'exprimer totalement dans le temps imparti. Cela est net avec le binôme (A-B) dont les écrits (copies n°3 et 3bis) s'inscrivent dans la stratégie S3 mais dont les paroles reviennent vers la stratégie S2 :

P (publiquement) : on a un rangement en cosinus qui nous conduit à encadrer cosinus 18 par des valeurs qu'on sait calculer
A à B : et après on fait quoi ?
B : moi j'avais pensé ... que c'est la moyenne entre les deux là ; 15 plus 22 5 sur 2 ça donne 18 75 ; donc sûrement que cos15 plus cos 22 5 sur 2 ça doit être égal à cos de 18 75 ; ça doit être plus près de ... ; on va pouvoir savoir à peu près, quoi
A : ouais
A : mais pour avoir plus précis moi chais pas
A : après on fait ça plus ça divisé par 2
A : oui c'est ça cos de 15 plus cos de 22 5 sur 2

A : et on aura la valeur de cos 18 75
A : c'est plus près de 19 que de 18, quoi
A : mouais, on essaie ...
A : ben tu peux déjà faire ça ; ça fera approché

Et un peu plus tard

A (répondant à une demande de ses voisins) : nous on a fait avec des encadrements mais ça ne marchait pas alors on a fait la moyenne ...
P : je vais ramasser, si vous pouvez arriver à dire laquelle est la plus proche
A : c'est celle-ci, c'est la première
A : fais voir ta feuille ... ; c'est 27 29 ièmes, la plus proche
A : non
A : mais non ; regarde 310 449 et là 667
A : ah oui ; donc c'est..
A : 27 29 ièmes je crois
A : je vais faire un truc ; 310, 449 ... 139 et 310 ... 667 ...[229]
A : ouais c'est ça c'est la plus proche
P : donnez vos feuilles, on va faire le point
A : non, non, 27 29 ièmes ?
A : d'après ce que tu as mis, 27 29 ièmes égale 9 310
P : je prends votre feuille pour pouvoir faire la synthèse
A : j'ai fait des petits calculs pour savoir lequel il y avait le plus d'écart entre 667 et 310 et entre ... valeur décimale pour savoir laquelle était la plus proche ...

Il nous faut enfin souligner que l'interdit sur les touches trigonométriques a été contourné sans que cela déstabilise complètement la stratégie S4 comme nous pouvions l'espérer. Voici un exemple, avec le binôme G-G' :

G : on n'a pas 9, on n'a pas 36 et on n'a pas 72 ; on a 22 5 et 15, c'est autour
G' : ... il faut comparer

G utilise la calculatrice

G : cos 15 ça fait à peu près 0 virgule 9 6 5 9 2 ... 9 3 ; cos 22 5, 9 2 3 9 ; c'est 8 8 à la fin mais comme j'ai pas les mêmes qu'avant ; donc 9 30 ièmes c'est au-dessus du cos de 22 5 ça fait 9 6 6 6 6 6
G' : oui ça continue
G : 8 9 ièmes ç'est 0 virgule 8 8 8 8 8
G : 9 3 1 0 donc c'est celui-là (27/29) c'est le dernier parce ce que, regarde ...
G' : celui-là est plus petit et celui-là est plus grand
G : oui, l'un est trop grand l'autre est trop petit pour rentrer entre les deux
G' : et donc la plus proche ?
G : c'est lui, il est entre les deux ... [*G utilise la calculatrice pour cos18°*] ... oui, à 0 virgule 0 2 près c'est ça !

G' écrit

G : je ne dirais pas que ... mais qu'il est compris entre cos 15 et cos 22 5 donc c'est lui.

229 $\frac{27}{29} \approx 0{,}9310$; $\frac{\cos 15° + \cos 22{,}5°}{2} \approx 0{,}9449$; $\frac{29}{30} \approx 0{,}9667$. Ainsi le binôme A-B a écarté $\frac{8}{9}$ mais ne se résout pas à écarter $\frac{29}{30}$.

Ainsi G calcule la distance entre cos18° et $\frac{27}{29}$ (elle vaut 0,0200) mais ne la compare pas à celle entre cos18° et $\frac{29}{30}$ (elle vaut 0,0156) et il continue à croire au bien-fondé de la stratégie S4.

3.2 le processus de renégociation de la stratégie S4

Avec la synthèse des résultats, l'enseignante s'engage dans la mise en cause de la stratégie S4 et la promotion de la stratégie S5. Cela commence ainsi dans le deuxième groupe :

> [...] donc on va regarder un petit peu plus, de plus près où l'on est, comment sont placées toutes ces valeurs ... [*elle montre une figure préparée sur transparent avec une droite graduée*] ... voilà l'intervalle, les valeurs, vous reconnaissez 8 9 ièmes, 27 29 ièmes, 29 30 ièmes ; j'ai gradué en bleu pour que vous vous repériez un petit peu quant aux valeurs approchées ... ; j'ai placé les bornes, je sais pas si vous les voyez bien ; cosinus 22 5, cosinus15 ici ; donc effectivement 27 29 ièmes est dans l'intervalle ; les deux autres n'y sont pas ; maintenant, est-ce qu'on peut ... est-ce qu'on peut dire que 27 29 ièmes c'est la meilleure ?
>
> [*Plusieurs élèves répondent non*]
>
> A [*une élève*] : il est plus au milieu, non ?
>
> P : c'est en fait très large si jamais il est par là bon ben alors ces deux valeurs-là sont bonnes l'autre est à rejeter ; si au contraire il est tout proche de cosinus 15 celle-là est encore acceptable en fait il faudra rejeter 8 9 ièmes et après il faudra discriminer entre 27 29 ièmes et 29 30 ièmes mais pour l'instant tant qu'on sait pas où est-ce qu'il est dans l'intervalle y a pas de raison d'en éjecter une plutôt qu'une autre ; est-ce que vous sentez ça ? imaginez que cosinus 18 ... tout ce qu'on sait c'est qu'il se place entre ces deux valeurs-là donc il pourrait très bien être par ici ou au contraire plus loin ...
>
> P : qu'est- ce qu'on peut essayer de faire ?
>
> B [*une autre élève*] : on peut pas faire grand chose vu qu'on peut pas calculer cosinus
>
> P : l'intervalle qu'on s'est donné au départ est trop grand, en fait ; il ne permet pas de discerner la meilleure des trois ... y a pas une idée, pour essayer de localiser ce fameux cosinus 18 ?
>
> [*Silence*]
>
> P : ben on va essayer de diminuer l'intervalle, de resserrer l'encadrement autour de cosinus 18
>
> B : oui, logique
>
> [*P distribue la feuille où se trouve la question 2*]
>
> P : grâce aux formules, grâce aux formules, vous allez resserrer l'encadrement de cosinus 18 degrés ... et l'on sera capable, après ce travail, de déterminer avec certitude la meilleure des trois
>
> E : parce qu'on était pas sûr ?

Dans l'autre groupe :

> [...] voilà une petite partie de la droite réelle ; j'ai mis en bleu quelques repères de valeurs ; vous avez 8 neuvièmes, la plus petite 0 889, le cosinus de 22 5 qui se trouve ici, 27 29 ièmes qui est bien dans l'intervalle, cos 15 et 29 trentièmes qui est juste derrière
>
> G (*un élève*) : oui on aurait dû regarder
>
> P (*la professeur*) : est ce qu'on peut vraiment éliminer une des trois valeurs ?
>
> G : oui 8 neuvièmes !
>
> P : cosinus 18 il habite dans un intervalle ; on vous a proposé une valeur ici, une valeur là et une valeur là ; est ce qu'il y en a vraiment une à rejeter ?

[*Plusieurs élèves répètent 8 neuvièmes*]

P : et l'argument c'est quoi ?

G : elle est trop loin

P : vous avez une bonne vue, on pourrait pas essayer de dire un peu mieux que comme ça "elle est trop loin" ; vous êtes sûrs que 8 neuvièmes est trop loin ?

[*Plusieurs élèves répondent oui*]

P : a-t-on la possibilité de montrer que la distance de 8 9 ièmes à la borne cos 22 5 est effectivement supérieure à celle de cos 18 à la borne cos 22 5 ?

[*Silence*]

P : il n'y a pas donc pas de raison d'en éliminer une.

[*Silence*]

P : pourquoi on n'est pas capable ? qu'est ce qu'il faudrait qu'on fasse pour essayer de mettre en évidence la meilleure des trois ?

[*une élève propose d'avoir la valeur exacte*]

P : il y a peut-être quelque chose entre l'avoir dans cet intervalle qui paraît finalement de grande amplitude par rapport aux valeurs qu'on nous a données et puis l'avoir en valeur exacte, il a peut-être un intermédiaire

E [*une autre élève*] : la moyenne des deux cosinus

[P interroge la classe et note au tableau la moyenne]

P : pourquoi cette valeur serait meilleure ? toi tu pars sur une autre voie, en proposer une meilleure puisqu'on n'arrive pas à discerner entre les trois ; vous voyez ce qu'on peut faire concrètement pour choisir entre les trois ?

[*Pas de propositions de la part des élèves*]

P : ben on va essayer, tout simplement de localiser ce cosinus 18 degrés dans l'intervalle cosinus 22 5, cosinus 15 ; parce que, voyez ce qui se passe ; s' il est de ce côté on ne saura plus du tout quelle est la meilleure des trois valeurs approchées ; mais si il est plutôt de ce côté alors on n'aura plus de doute pour éliminer de façon sûre des valeurs approchées ; et pour localiser dans l'intervalle qu'est ce qu'il faut faire ? qui a une idée ?

G : la trigo ... au pif

[*Un élève parle de différence ; P lui demande s'il parle de distance*]

P : non il va falloir qu'on resserre l'intervalle, qu'on resserre l'encadrement ; cos 22 5, cos 15 sur la droite c'est très large ; si on arrivait à le resserrer autour de cosinus 18, on serait beaucoup plus précis ; donc on va essayer de resserrer l'encadrement de cosinus 18 et là on aura une réponse sûre …

]*P distribue la feuille où se trouve la question 2*]

Q à M [*deux élèves*] : mais comment on fait pour resserrer ?

Le rejet de $\frac{8}{9}$ par les élèves est massif et appuyé sur une "impression" de distance. Relativement à $\frac{27}{29}$, le doute ne s'est que partiellement installé. Mais les réponses que l'enseignante obtient de la part des élèves sur ce qu'il est possible de faire pour dissiper le doute relèvent toutes des stratégies S1 ou S2. L'expression "localiser cos18°" qu'elle choisit pour poser le problème ne semble pas interprétée par les élèves comme la recherche d'un nouvel intervalle plus étroit autour de cos18° mais plutôt comme le calcul d'une meilleure valeur approchée de cos18° (que suivrait un nouveau calcul des distances, conformément à la stratégie S2).

A défaut de convaincre, l'insistance de l'enseignante à resserrer l'encadrement, relayée par la consigne de la question 2, pousse les élèves à rechercher un cosinus compris entre celui de 22,5° et celui de15°.

3.3 le resserrement de l'encadrement

Comme prévu, tous les regards se portent sur 18,75°, la demi-somme de 22,5 et 15° :

B à A : pour resserrer on peut bien calculer le milieu ... 18 75 degrés, cosinus 18 75 degrés
G' à G : entre les deux ça fait 18 75
G : on peut essayer avec 18 75
M à Q: il faut qu'on trouve des autres chiffres qui sont entre 15 et 22 5 ... on n'en a pas ; on n'a pas le droit d'additionner, on n'a pas le droit de soustraire
Q à M : et faire sur 2 ... la prof elle n'a pas dit tout à l'heure que tu étais bien partie
M : oui regarde 18 75 ; mais c'était pas ça

Le recours au milieu pour réduire la largeur d'un intervalle en le coupant en deux ne nous surprend pas, comme la prédominance du calcul de cos18,75° par la demi-somme des cosinus de 22,5° et 15°. On trouve cependant des cheminements qui illustrent les premiers effets d'une familiarisation avec la formule de bissection :

A : si on fait cos 18 divisé par 2 ça fait 6
A' : non mais pas 6 ça fait 9
A : donc c'est proche de 7,5
A' : ouais
A : attends cos2x ça va être 36 donc c'est proche de 30, c'est au milieu, non pas tout à fait au milieu
A' : si je te disais 9, 9 c'est par là ; là t'as 18 ; 9 c'est plus près de 11 ou de 7 ...
A : alors donc là il faut se servir en fait de ces trois formules
A' : si on divise par 2 ...
A : eh ! il y avait pas 37 5 quelque part ... 37 5 c'est près de 36 ; c'est toujours approché mais bon ; parce que regarde cos 36 est entre cos 30 et cos 45 ; tu connais cos 37 et demi
A' : c'est pas inversé ?
A : oui je pense
A' : ben inverse les signes, les symboles là
A : ... avec ça on divise cos 37 5 pour trouver ... 37 5 divisé par 2 ça fait combien ?
A' : c'est compliqué !
A : ouais c'est compliqué je sais ... ; oui 18 75
A' : on retombe sur le 18 75

La vigilance professorale s'attaquera très rapidement aux essais jugés erronés :

P : je voudrais pas prendre les devants sur tes bêtises (rires de B' et de P) mais je voudrais pas que tu t'en serves après de travers ; 18 75 c'est euh ...
B : ça me fait un tout petit encadrement après ...
P : oui ...
B : ça me ferait 15, 18 75 ; je resserre déjà
P : et comment vas-tu calculer cosinus 18 75 ?
B' : eh ben avec les formules, on prend celui de 7 virgule 5 qu'on divise par 2 ...
P : mais le cosinus ça ne marche pas comme ça ; on ne peut pas faire cosinus de a plus b sur 2 égal cosinus de a plus cosinus de b sur 2 ; tu sais qu'on a de grosses formules d'addition dans le cours ...
B' : oui
P : ... c'est donc que le cosinus ne fonctionne pas bien par rapport à l'addition

B' : et on peut pas la prendre la formule cosinus a plus b est égal à cosinus a ...

Pressée par le temps, l'enseignante prend l'initiative de fournir la clef de l'algorithme espéré :

P : je vais vous aider un petit peu parce qu'il faudrait quand même que vous arriviez […] pour récupérer des valeurs plus près de 18 il faut essayer avec les formules qu'on a et les angles qu'on a ; par exemple si vous faites complémentaire de 15, par exemple (*elle écrit au tableau*) et puis qu'est ce qu'on peut enchaîner derrière ? vous voyez pas ? 75 et puis ?
G : 37 5, divisé par 2
P : oui, 18 75
[*Remous dans la classe ; revoilà 18,75 mais pas par la médiation de 15 et 22,5*)
M à Q : c'est ce que j'avais 18 75
Q : pourquoi 18 75 c'est quoi ?
M : c'est 37 5 divisé par 2 ... et donc tu tombes dans l'intervalle

La séance prend fin avant que l'algorithme ait été mené à son terme, c'est-à-dire le tri entre les valeurs approchées. La mise en fonctionnement numérique de l'algorithme se heurte au besoin d'écrire algébriquement les bornes de chaque intervalle (l'Annexe contient deux copies, n°7 et 8, qui accumulent les radicaux superposés) et certains élèves disent découvrir l'utilisation de la touche $\boxed{\text{Ans}}$ que l'enseignante explique avec la calculatrice rétroprojetable. Cela confirme les faiblesses instrumentales dues à l'exclusion de la calculatrice du champ des pratiques calculatoires publiques[230].
Par contre la "monstration" de l'enseignante semble avoir convaincu certains élèves, comme le laisse penser l'échange public suivant :

P : voilà le nouvel encadrement [*celui de cos18,75 et cos16,875*] ; alors je vais limiter par des valeurs approchées ; je vous écoute, borne inférieure
G : 9 4 6 8
P : oui on va regarder où l'on est sur la droite ... 94 69 et 95 70 (elle montre la droite et tente de placer ces nombres sur la droite)
P : alors qu'est ce qu'on peut conclure ? on rejette nettement qui maintenant ?
Q : 8 9 ièmes ; et 27 29 ièmes aussi
P : déjà on est sûr que lui [$\frac{8}{9}$] il n'est pas dans le coup ; par contre pour les autres, je pense que pour proposer quelque chose de bien net il faudrait encore resserrer ; parce que 27 29 vièmes est peut-être encore valable
P : en continuant à resserrer, on va tomber sur deux cosinus encore plus proches qui vont permettre en fait d'éliminer 27 29 ièmes car on a un resserrement autour de 0 95 ... et, Sébastien, ta valeur centre de l'intervalle ne tombera même plus dans ce dernier intervalle, en fait ; donc 29 trentièmes c'est vraiment la meilleure !
G : ah ouais, ouais on l'a vu au milieu [*à l'intérieur*] de l'encadrement, dans l'encadrement, on pensait pas que ça pouvait être près des bornes, ça ne nous a même pas effleurés.

230 Au cours d'un des entretiens nous avions abordé avec l'enseignante les habitudes de calcul instrumenté public dans la classe. Elle nous avait répondu : "je ne fais pas tellement de calculs avec eux ; en seconde oui mais en première S, je fais surtout de l'analyse ; je n'en ai pas encore fait cette année".

4. Retour sur les hypothèses de la situation

Quels regards nouveaux porter, après l'expérimentation, sur chacune des hypothèses sous-jacentes à la situation ? Prenons ces hypothèses dans leur ordre de présentation (cf. paragraphe 1.2).

Hypothèse H1 : la décimalisation des nombres apparaît comme le moyen le plus immédiat d'entrer dans le problème d'approximation numérique.

Les procédures employées par les élèves et les échanges verbaux témoignent du recours aux valeurs approchées décimales pour mener les comparaisons numériques. Mais il nous faut réfléchir, au-delà de ce constat, sur la qualité de la rupture (d'avec les pratiques habituelles de décimalisation instrumentée par la calculatrice) que la situation cherchait à provoquer. De ce point de vue, l'expérimentation a mis en lumière que l'inscription positive de la décimalisation dans les stratégies mathématiques retenues par les élèves est freinée conjointement :

- par la préférence institutionnelle pour les calculs exacts sous forme algébrique qui conduit à "s'embourber dans les écritures algébriques" aux dépens de l'émergence d'une vision globale topologique (dans la question 1) et algorithmique (dans la question 2)
- par une méconnaissance des procédures instrumentales aptes à articuler, dans des schèmes d'action instrumentée, les écritures algébriques et décimales des nombres manipulés.

Le déficit technique et la pression du contrat institutionnel se combinent dans des recours ponctuels à la calculatrice destinés, le plus souvent, à mettre fin à la superposition de radicaux. L'affichage sur papier de tous les chiffres de l'écran que l'on constate dans plusieurs copies montre l'état d'inadaptation de cette décimalisation avec la tâche proposée. Dans le déroulement de la séance, cette inadaptation a pu discréditer la décimalisation aux yeux de certains élèves et donc émousser les effets potentiels de la rupture.

Hypothèse H2 : l'inaccessibilité de la valeur exacte sous la forme d'une expression numérique reproductible dans la calculatrice favorise la recherche de stratégies de comparaison numérique dirigées par les notions d'encadrement et de distance.

La prédominance des procédures attachées aux stratégies S2 et S4 dans les réponses des élèves à la question 1 attestent incontestablement de la validité de cette hypothèse en ce qui concerne les deux notions prises séparément (les distances pour S2 et les encadrements pour S4).
Mais, dans la suite de la séance, les majorations et les minorations de distance du nombre à ses valeurs approchées par l'intermédiaire des bornes des encadrements n'ont pas été abordées *effectivement* (elles étaient possibles pour départager $\frac{8}{9}$ et $\frac{27}{29}$ sachant $\cos 18°$ dans l'intervalle $[\cos 22{,}5° ; \cos 15°]$). Cela nous conduit à douter de la robustesse de la déstabilisation de ces stratégies amorcée par le travail de l'enseignante avec les synthèses et corrigés de la question 2.

> *Il nous semble maintenant évident que, dans le temps imparti d'une seule séance, la mise en place de l'algorithme se fait au détriment de la mise en fonctionnement conjoint des notions de distance et d'encadrement dans la résolution du problème numérique.*

Hypothèse H3 : l'enjeu d'élimination de deux valeurs, pour n'en retenir qu'une, provoque la construction d'un algorithme porteur d'encadrements emboîtés.

Même si le travail de la classe a abouti à démarrer effectivement un algorithme, le manque de temps et l'absence de familiarité avec les procédés d'algorithmisation n'a pas permis aux élèves d'accéder à une pré-formalisation algébrique. La situation n'a pas suffisamment organisé l'exploration des différentes combinaisons avec les formules de base pour provoquer la formulation de l'algorithme.

> *Nous nous sommes heurtés au problème didactique des conditions d'un apprentissage de la notion d'algorithme alors que la situation ne visait pas explicitement cet apprentissage*

Il paraît maintenant évident que la mise en scène doit fournir l'algorithme (contrairement aux conclusions de la négociation avec l'enseignante) ou, plus sûrement, elle doit se contenter du passage de l'intervalle [cos22,5° ; cos15°] à l'intervalle [cos18,75° ; cos15°] (ce qui nécessite de modifier les nombres choisis).

CHAPITRE D_4 : LES ANALYSES DE LA SITUATION COS72°/COS9°

La structure de chapitre est identique à celle des deux chapitres précédents.

1. Présentation de la situation cos72°/cos9°

1.1. une troisième valeur pour la variable micro-didactique V1

La situation est créée autour de la question 2 de la troisième séance : est-il possible d'obtenir l'arrondi à 4 décimales de cos72°, ou celui de cos9°, lorsque l'on ne dispose que d'un arrondi décimal d'ordre 4 de cos18° ? (cf. documents en Annexe de la partie D_1).

Comme nous maintenons les mêmes règles de jeu algébrique et le même interdit de touche trigonométrique sur la calculatrice, chacun des deux nombres n'est accessible décimalement que par une valeur exacte faite d'opérations élémentaires sur le nombre cos18°. Pour chacun d'eux cette écriture est reproductible dans l'éditeur de calculs de la calculatrice, mais comporte un attribut numérique qui n'est connu qu'en valeur approchée. Il s'agit donc ici de décimalisations de type 3, telles que nous les avons présentées dans le chapitre D_2 (paragraphe 1.1).

Le début de séance 2 est d'abord consacré à remettre les formules de base en état de fonctionnement pour assurer les passages de cos18° aux cosinus des autres angles multiples de 9°. Suit la question 1, qui demande d'obtenir des valeurs approchées des cosinus de ces angles. Ici, notre ambition est double :

- pouvoir observer les règles d'action des élèves avec les arrondis décimaux
- faire apparaître des discordances qui ouvrent la voie à un débat dans la classe, provoquent des conflits cognitifs et légitiment la question 2.

1.2 les trois hypothèses sous-jacentes à la construction de la situation

- H1 : les pratiques calculatoires sur les arrondis décimaux d'ordre n relèvent d'une arithmétique décimale dans D_n
- H2 : l'exigence de justification de la précision d'une valeur approchée, légitimée par la mise en doute publique, déclenche une reprise des procédures algébriques qui ont produit cette valeur en favorisant leur transformation en procédures algébriques sur les encadrements
- H3 : de cette transformation naît une lecture fonctionnelle des procédures algébriques

L'hypothèse H1 prend en compte les analyses de travaux d'élèves que nous avons exposées dans la partie C. Nous pensons en particulier à un théorème en acte (Th.a n°1) mentionné dans le paragraphe 8.1 du chapitre C_2 et que nous avions ainsi formulé : *toute fonction conserve la précision, c'est-à-dire que les précisions sur x et sur A(x) sont les mêmes, quels que soient l'opérateur A et le nombre x*. Notons que ce théorème

en acte est conforté par les pratiques de calcul approché institutionnalisées (dans l'EMS) en Géométrie métrique puisque la notion de propagation de l'erreur est traduite dans une réduction du nombre de chiffres du résultat final fourni par la calculatrice, non pas pour répondre à une évaluation effective de l'erreur elle-même, mais pour revenir à la précision des données.
Outre l'intérêt, par nos observations, de pouvoir mesurer l'évolution de ces pratiques en situation, au-delà de la classe de Seconde, nous nous servons de l'hypothèse H1 pour faire produire aux différents groupes d'élèves des résultats discordants et légitimer ainsi la question 2.

L'hypothèse H2 est celle qui nous guide dans la mise en scène de la situation. Tant que l'arrondi est appréhendé comme un valeur décimale indépendante du nombre qu'elle approche, toute contestation d'un résultat après calcul réalisé sur la calculatrice est renvoyée à une faute de calcul. Dès lors que la faute de calcul est écartée, seule la production d'un encadrement attaché à l'arrondi permet de répondre à une contestation du résultat. Les calculs sont repris en ne visant plus les milieux des encadrements mais leurs bornes.

L'hypothèse H3 prolonge la précédente en supposant que les calculs sur les encadrements ont effectivement lieu.

Ce travail d'un même groupe d'opérations élémentaires sur trois nombres au lieu d'un seul avec des effets différents sur une même distance (celle du milieu à chacune des bornes) doit introduire un point de vue fonctionnel sur les relations qu'entretient le groupe d'opérations avec l'arrondi.

Le point de vue fonctionnel dont nous parlons ici se caractérise par la transformation de l'encadrement en un intervalle médié accompagnée des questions suivantes :

- les bornes restent-elles les bornes ?
- l'amplitude est-elle modifiée ?
- le milieu reste-t-il le milieu ?
- l'ordre dans l'intervalle est-il conservé ?

La mise en scène construite sur les hypothèses H2 et H3 vise donc des objectifs attachés au projet d'enseignement puisqu'elle crée un point d'appui professoral pour mettre en place une fonction dont l'étude du comportement sur l'intervalle apporte un éclairage nouveau sur le problème d'approximation numérique. En particulier, la situation devrait ouvrir la voie à une modification du contrat institutionnel relatif aux calculs approchés instrumentés avec la calculatrice.

Nous avons déjà dit en effet que les rapports institutionnels à ce type de calculs ne différencient pas, dans l'erreur susceptible d'entacher un résultat obtenu par la calculatrice, ce qui peut ressortir de l'erreur sur les données initiales (que la calculatrice n'intègre pas d'elle-même) et ce qui peut ressortir de l'erreur produite par l'instrument lui-même (dont la calculatrice "est responsable"). Ils entretiennent la confusion entre les différentes sources d'erreurs sur lesquelles agir pour contrôler l'erreur finale. En fait, tout est amalgamé dans l'expression "erreurs d'arrondis".
Or la situation offre la possibilité, pour l'enseignante, de marquer une séparation entre l'erreur systématique et l'erreur de calcul. Expliquons-nous avec l'exemple de cos72° :

- si la calculatrice ne peut donner les bonnes décimales de cos72° avec une fonction (f) qui transforme cos18° en cos72°, c'est qu'elle fait ces calculs avec un nombre (a) autre que cos18°. On fait faire une erreur systématique (ou erreur de données) à la calculatrice.
- si, à partir du même nombre a, l'exécution par la calculatrice de deux fonctions (f et g) qui transforment cos18° en cos72° aboutissent à deux résultats différents, c'est que la calculatrice obéit à deux méthodes de calculs qui n'ont pas les mêmes effets calculatoires sur a. En prenant l'un ou l'autre des deux résultats, on fait faire à la calculatrice une erreur de calcul (ou erreur de méthode) qui s'ajoute ou se soustrait à l'erreur systématique.

C'est une telle erreur de calcul que la situation fait apparaître avec les résultats discordants sur cos72°. Cela autorise trois ouvertures en Analyse :

- les évaluations de l'erreur systématique et de l'erreur de calcul qui tiennent compte à la fois de la fonction, du nombre initial à traiter (cos18°) et de l'erreur sur ce nombre (erreur qui n'est pas connue exactement mais seulement majorée). C'est une (re)rencontre avec le problème fondamental n°2 de l'approximation numérique (cf. partie B).
- la répercussion de cette évaluation en amont pour réussir le projet de construction d'une table numérique avec des valeurs approchées décimales arrondies uniformément à un certain ordre fixé par le fabricant. C'est une (re)rencontre avec le problème fondamental n°1 de l'approximation numérique (cf. partie B).
- le postulat instrumental à la base de toutes les pratiques calculatoires instrumentées par la calculatrice : une fois la fonction choisie, il ne reste plus, théoriquement, qu'une erreur systématique. Le choix s'est fait pour cela sur des critères théoriques d'Analyse, mais l'implémentation sur la calculatrice transforme la fonction en une fonction-machine. Cette mutation est cause d'erreurs de calcul dont la machine doit être considérée comme co-responsable (responsabilité partagée avec le calculateur humain qui la commande). Au-delà de la sensibilisation aux soucis du concepteur de la calculatrice, le problème posé est celui de la réduction de cette erreur de calcul et de sa minimisation par rapport à l'erreur systématique. Il y a là une occasion de justifier les techniques instrumentées qui prônent l'usage du maximum de chiffres possible de la calculatrice et d'institutionnaliser celles qui utilisent la touche $\boxed{\text{Ans}}$.

1.3 mises en valeurs des variables du problème mathématique

Partant de l'hypothèse H1, nous mettons en scène une propagation de l'erreur, due à un arrondi d'ordre n, qui mette en défaut la conservation de cet arrondi.

Nous formulons ce problème mathématique d'abord de façon générale en considérant un certain nombre a soumis à une certaine fonction f.

Sous quelles conditions portant sur x, n , a et f peut-on prévoir que l'implication x $\approx$ a (arrondi d'ordre n) $\Rightarrow$ f(x) $\approx$ f(a) (arrondi d'ordre n) est fausse ?

Ensuite nous le restreignons en intégrant les données circonstancielles : a et x appartiennent à l'intervalle [0 ; 1] et la fonction f est dérivable et monotone sur cet intervalle. Il apparaît alors nécessaire (sans que cela soit suffisant) que $\boxed{\varepsilon' > \varepsilon}$

sachant que $\varepsilon = 0{,}5.10^{-n}$ et $\varepsilon' = \mathrm{Sup}(|f(a + \varepsilon) - f(a)|, |f(a - \varepsilon) - f(a)|)$

La possibilité que cette condition nécessaire soit satisfaite dépend à la fois de la capacité de la fonction f d'élargir l'intervalle $[a - \varepsilon ; a + \varepsilon]$ (on est renvoyé à $|f'|$) et de sa capacité à déplacer le milieu de cet intervalle (on est renvoyé à $|f''|$).

En ce qui concerne les trois fonctions de base de l'ingénierie[231], nous disposons des théorèmes suivants :

Théorème 1 : pour f définie par $f(x) = 2x^2 - 1$, il suffit de prendre $a > \frac{1}{4}$ pour que $\varepsilon' > \varepsilon$

Théorème 2 : pour f définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, il suffit de prendre $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour que $\varepsilon' > \varepsilon$.

Théorème 3 : pour f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1 + x}{2}}$, on a $\varepsilon' < \varepsilon$ est réalisé pour tout a

Le théorème 3 soutient que dans l'intervalle [0 ; 1] la fonction $x \rightarrow \sqrt{\frac{1 + x}{2}}$ améliore systématiquement la précision. Il contredit l'idée que toute opération abaisse l'ordre de l'arrondi, idée sur laquelle est fondé le théorème en acte Th.a n°2 que nous avons rencontré chez les élèves de la classe de Seconde en position d'effectuer un calcul approché. Nous avions formulé ainsi ce théorème en acte (cf. paragraphe 8.1 du chapitre 2) : *toute fonction A diminue la précision et, pour s'assurer une certaine précision sur A(x), il suffit de prendre une précision plus grande sur x.*

Les deux autres théorèmes[232] nous permettent par contre d'espérer une dégradation de la précision, puisque cos18° ≈ 0,95 [233], à condition de prendre x plus proche d'une des bornes de l'intervalle $[a - \varepsilon ; a + \varepsilon]$ que de a.

---

[231] Ce sont les fonctions associées aux formules de base. Ainsi cos2x° = f(cosx°) où $f(x) = 2x^2 - 1$.

[232] Pour ces deux fonctions, on a $|f'|$ croissante.

[233] Dans tout ce chapitre, l'usage du symbole ≈ renvoie à la notion d'arrondi décimal. L'écriture cos18° ≈ 0,95 signifie donc que 0,945 ≤ cos18° 0,955 et que des deux chiffres significatifs 9 et 5, seul le 9 est "garanti". Cependant nous dirons que les deux chiffres 9 et 5 sont exacts. Nous nous conformons en cela aux habitudes de la plupart des numériciens, telles que l'exprime la définition suivante extraite du traité *Eléments de calcul numérique* de Démidovitch B. et Maron I. (Editions Mir, 1973, page 19) au paragraphe intitulé "Notation décimale, chiffres significatifs" :

> On dit que les n premiers chiffres significatifs d'un nombre approché sont *exacts* si l'erreur absolue de ce nombre ne dépasse pas une demi-unité du rang du n-ième chiffre significatif en comptant de gauche à droite. […]. Par exemple, pour le nombre exact 35,97, le nombre 36,00 est une approximation avec trois chiffres exacts.

Comme cos18° = 0,95105651…, pour augmenter nos chances de rendre visible les effets de la propagation de la précision, nous avons choisi l'arrondi d'ordre 4 (cos18° $\approx$ 0,9511) et avons imaginé d'enchaîner certaines fonctions de base. Le scénario retenu est celui d'échanges de valeurs approchées d'un groupe d'élèves à un autre (cf. documents dans les annexes du chapitre D_1).

1.4 la négociation avec l'enseignante

Dès le premier entretien, nous avions senti chez l'enseignante, à côté d'une volonté de s'engager sans réserve dans l'expérimentation, certains doutes sur l'ampleur à donner aux questions d'approximation en classe de Première S. Quelques extraits des dialogues vont les situer (E est l'enseignante et I l'interviewer) :

> E : ma première réaction c'est que c'est bien ficelé c'est bien mené ; en tant que prof j'ai trouvé ça bien conçu donc j'ai tout de suite eu envie d'aller au bout j'ai vraiment eu envie d'entrer dans l'affaire puis de faire tout ce qu'était demandé ; tu as bien mené les choses de façon à ce que ce soit clair ; à chaque fois il y a le travail maison la reprise des résultats, il y a cette frise à compléter ça fait qu'on fixe bien les choses ; c'est bien mis en forme on a envie de le faire, on …
> I : est-ce que tu trouves intéressant pour les élèves d'une classe de Première S de toucher du doigt ce genre de problèmes ?
> E : moi je trouve que c'est intéressant ; maintenant je ne sais pas si, eux, ça va pas leur paraître pas dans leur souci à eux ; ils sont dans l'optique, je fais de la trigo, il faut que je sache appliquer les formules ou alors il faut que je sache démontrer ; est-ce qu'ils vont avoir la curiosité qu'on a, nous, de la droite réelle, savoir justement toutes ces questions d'approximation de distance etc. ; est-ce que ça va les passionner de bien vouloir ... ; c'est pas un souci d'élève du tout, en fait.
> I : tu penses cela pour les 3 séances ?
> E : non, avec la première séance on reste bien près de ce qu'on a l'habitude de faire
> I : et la séance 2 ?
> E : c'est celle-là qui met l'accent sur l'approximation et là je sens pas que ce soit quelque chose qui les préoccupe bien ; parce qu'ils sentent bien que c'est quelque chose auquel ils ne sont pas confrontés le reste du temps, finalement
> I : mais tu ne crois pas …
> E : **par contre l'élève un peu scientifique dans le bon sens qui cherche à comprendre moi je trouve ça très intéressant mais ce n'est pas l'essentiel de la classe c'est clair** donc là il va falloir bien mener l'affaire […] pour moi ce n'est pas le souci de n'importe quel élève de première S ce travail d'approximation, ça les dépasse un peu ils ont pas bien envie en plus c'est des choses qu'ils n'aiment pas aborder ; **en maths, on travaille en valeurs exactes, on fait des démonstrations, on fait des choses qui tournent, on s'occupe pas de savoir qui est plus près de …**
> I : il y a une chance que cela les intéresse plus que d'habitude car ils vont avoir des outils de contrôle ; s'ils ne les ont pas c'est pas étonnant qu'ils n'aient pas envie de ...
> E : oui, de toute façon c'est un terrain intéressant en soi, ça vaut la peine de faire tout ça, mais je me mets dans la peau de l'élève et je sais bien ...

Tout en soutenant qu'elle prend le point de vue de l'élève, l'enseignante extériorise ici sa conviction que l'approximation numérique en tant qu'objet d'enseignement n'a guère de place dans E.M.S[234], d'une part parce que l'approximation s'oppose à l'exigence de

[234] Mais "a sa place en Physique", ajoutent certains autres enseignants de mathématiques.

rigueur et d'exactitude que porte l'activité mathématique, d'autre part parce que c'est un domaine où les élèves échouent.
Les réticences de l'enseignante vont s'exprimer plus fortement à propos de la séance 3 et peser sur le scénario définitif de la troisième séance :

- une première fois pour le démarrage de la séance : la teneur mathématique du travail maison n°2 plaît beaucoup à l'enseignante et elle propose de disposer de temps pour le corriger.

  I : tu crois que les élèves peuvent être attirés par ce genre de recherche
  E : oui, c'est un terrain pas préparé, il faut se débrouiller et puis, au bout d'un moment, on sent qu'il y a un algorithme dessous, que ça se programme ; cette chose-là moi ça m'a plu.
  I : qu'est-ce que tu penses faire de ce travail maison ?
  E : j'espère un petit peu que ceux qui ont cherché à la main en viennent à se dire qu'il y a un algorithme dessous ; pour qu'ils perçoivent ça il faudrait les inciter à construire des arbres.
  I : penses-tu que des élèves auront bien avancé ?
  E : je ne sais pas c'est quelque chose qu'ils n'ont pas du tout l'habitude de faire, ils ne vont sûrement pas aller au bout ; mais **j'aimerais bien leur montrer justement que c'était tout à fait à leur portée du moment qu'ils s'organisaient un peu** ; et puis ils sont tout le temps en train de tripoter leur machine, à écrire des programmes ; j'aurais bien aimé qu'ils se disent qu'il y a un algorithme dessous et qu'ils peuvent le programmer ; pour quelqu'un qui trempe un peu là-dedans c'est très simple ; ça me plairait qu'ils aient envie de le faire
  I : même manuelle, la recherche est intéressante parce qu'elle conduit à repérer les multiples et les classes
  E : **comme la séance 3 n'est pas très chargée, je peux me permettre ...**
  I : on n'a pas trop le temps quand même ; fais pour le mieux.

L'enseignante voit dans le travail maison n°2 une occasion de faire une incursion dans les domaines de l'algorithmique et de la programmation[235]. Elle ne doute pas, contrairement au domaine de l'approximation numérique, des possibilités d'intéresser les élèves et de les faire réussir. D'ailleurs, aux documents qu'elle nous présente nous comprenons à la fois son aisance et son goût pour ce type d'activité mathématique[236] (voir en Annexe de ce chapitre[237]).

- une deuxième fois pour la synthèse en fin de séance : l'enseignante pense ne pas avoir le temps, dans le corrigé final, de mettre en évidence les trois facteurs de "propagation de la précision" que nous pointons.

  E : on n'aura pas le temps de tout faire ; l'effet fonction me semble plus intéressant à montrer que l'effet nombre

235 Selon les instructions officielles de Première S (1991), "il convient, dans l'ensemble du programme, de mettre en valeur les aspects algorithmiques des problèmes étudiés […] et d'expliciter ce type de démarches sur quelques exemples simples […] mais aucune connaissance spécifique sur ces questions n'est exigible des élèves". Elles ajoutent : "Les élèves doivent savoir utiliser une calculatrice programmable dans les situations liées au programme de la classe considérée [*et seulement celles-ci*].

236 Pour reprendre les termes de la théorie anthropologique, nous dirions que son rapport institutionnel en position d'enseignante est en partie conditionné par son rapport personnel à certains objets mathématiques.

237 Toutes les annexes de cette partie sont dans le volume 2.

> *I : c'est dommage ; il faudrait quand même souligner que l'effet fonction est celui de la fonction machine, différente de la fonction théorique*

E : je conclurai sur le fait que les gens qui font les calculatrices en tiennent compte.

Nous voyons que l'enseignante exprime un choix en faveur d'une sensibilisation aux problèmes algorithmiques au détriment d'une entrée fonctionnelle dans l'approximation numérique, qu'elle préfère, nous a-t-elle dit, renvoyer "au moment de faire la dérivée". Là encore, ce choix nous semble modelé par le contrat institutionnel qui assigne une place très réduite à l'outillage théorique de l'approximation numérique. C'est ce que confirme le dialogue suivant :

I : dans la question 1, l'élève devrait écrire quatre décimales

E : non, tu sais, les élèves ont l'habitude de s'arrêter à 3 décimales ; **je pense que sans réfléchir l'élève se dit que les trois premières décimales elles sont exactes, ils ont l'habitude de tronquer comme ça au millième** ... un calcul de longueur, n'importe, en trigo, ils vont donner même pas trois décimales, deux ; donc ils ont l'habitude de négliger tout ce qui est derrière, instinctivement.

I : on devrait donc voir une contestation du quatrième chiffre dans la synthèse de la question 1

E : oui car ça arrive tout de même qu'on dise attention, on est parti d'un angle qu'on avait déjà calculé si je continue à m'en servir, je vais encore trouver une longueur un peu moins précise donc ; en fait c'est un discours qu'ils ont entendu dans certains contextes précis de la géométrie, **attention ce n'est pas une valeur qu'on nous a donnée c'est une valeur qu'on a calculée** donc si on s'en sert on répercute euh ., on l'erreur

I : ce discours tu le tiens fréquemment

E : oui notamment en trigo quand on fait des calculs d'angles et de longueur avec les grosses formules

I : à quel type de précaution ce discours les conduit-il ?

E : justement à pas donner trois quatre décimales sur la valeur finale de la longueur

I : ils en donnent combien

E : 1 ou 2 pour les longueurs, des fois 3 pour les cosinus

I : mais en étant certains de leur exactitude ?

E : ah **ça on va pas contrôler justement ; on contrôle pas comme ça ; on se dit attention, on a utilisé un angle qui était déjà arrondi donc ça sert à rien de donner au millième la longueur c'est quelque chose qu'on fait comme ça**

I : il se met donc en place l'idée qu'il y a une perte de précision estimable en gros à 1 ou 2 décimales

E : non, on n'estime pas ; on se garantit un petit peu d'écrire des bêtises en donnant un résultat un peu moins précis

I : c'est une assurance sans certitude

E : oui ; c'est bien le souci de propagation quand on fait référence à la donnée dans l'énoncé ; dans les exercices, je leur dis toujours : préférez travailler avec un angle donné dans l'énoncé plutôt qu'avec celui que vous avez calculé, approché ; on fait référence à valeur exacte-valeur approchée, par souci de la propagation.

Pour l'enseignante, la suppression de certaines décimales du résultat affiché par la calculatrice est la marque, chez l'élève, de sa prise en compte de la propagation de la précision. Elle n'envisage pas d'autre contrôle. Nous pensons que derrière les gestes que scande ce discours de prudence (attention, danger, il y a une valeur approchée !) se profile chez les élèves et aussi chez l'enseignante, le théorème en acte Th.a n°2. Dans ses déclarations, l'enseignante continue à se référer au contrat institutionnel numérico-algébrique et ne fait pas mention de la possibilité de mettre en place des éléments du contrat numérico-analytique. Dans une telle position, le travail "ordinaire" sur les arrondis ne se démarque pas des exercices de la classe de Seconde où il n'est question que de changements d'écriture (cf. chapitre C_2) et où l'enseignant s'accroche beaucoup au respect du vocabulaire. Nous retrouvons cet attachement à cet aspect formel de l'approximation numérique dans notre entretien avec l'enseignante. Ainsi, dans une première version de la fiche à donner aux élèves, nous avions présenté 0,9511 comme l'arrondi à 10^{-4} de cos18° :

> E : je ne dirais pas arrondi à 10 moins 4 parce que cela donne une amplitude de 2 fois 10 moins 4 alors que l'amplitude est de 10 moins 4
> I : comment utilises-tu le mot arrondi ? donne-moi un exemple.
> E : j'utilise pas ; je parle de valeur approchée à 5 dix moins 5 ; si le mot est dans un exercice j'en parle, sinon je ne parle que de valeur approchée ; je ne veux pas multiplier le vocabulaire
> I : et arrondi à 4 décimales ?
> E : ça me convient, c'est parlant[238]

L'enseignante craint que le changement de vocabulaire ne perturbe les élèves et nous décidons de respecter à la lettre ses recommandations.

2. Analyses pour la question 1

2.1 analyse a priori

Commençons par nous intéresser à l'ensemble des valeurs qui peuvent apparaître à l'issue des calculs demandés par la question 1. C'est cet ensemble que l'enseignante devra commenter pour enclencher la question 2. Examinons les stratégies les plus probables.

1) une première stratégie (S1) affiliée à notre hypothèse H1 : la conservation de l'ordre de l'arrondi donné. Nous pouvons la qualifier de stratégie arithmétique. Chaque calcul part de l'arrondi d'ordre 4 précédemment donné ou calculé et affiche un arrondi d'ordre 4. On obtient le tableau suivant :

Valeurs ↓ / **Equipes →**	**A**	**B**	**C**	**D**	**au lieu de**
cos9°	0,9877	---	0,9877	---	0,9877
Cos27°	---	0,8909	---	---	0,8910
Cos36°	0,8092	0,8090	0,8092	0,8092	0,8090
Cos54°	---	---	0,5875	0,5875	0,5878
Cos63°	---	0,4542	---	---	0,4540
Cos72°	0,3096	0,3089	---	0,3090	0,3090
Cos81°	---	---	0,1564	---	0,1564

[238] Cf. note n°3 où nous annonçons qu'un arrondi décimal comme 0,9511 possède 4 chiffres exacts.

Par exemple, partant de cos18° ≈ 0,9511 :

> l'équipe A fait $2x0,9511^2 - 1$, affiche cos36° ≈ 0,8092 puis calcule $2x0,8092^2 - 1$ et affiche cos72° ≈ 0,3096
> l'équipe C, à sa suite et de la même manière, trouve cos36° ≈ 0,8092 puis cos54° ≈ 0,5875

On remarque une dispersion pour cos72° mais une stabilité pour cos9° (l'arrondi est exact) et pour cos54° (l'arrondi est faux).

2) une deuxième stratégie (S2) proche des attentes de l'enseignante : chaque calcul se fait à partir d'une valeur considérée comme donnée initiale. Il y a donc double prise en compte de la propagation de la précision, par le choix d'une formule qui utilise la valeur initiale donnée puis par celui d'un affichage du résultat de la calculatrice en arrondi d'ordre inférieur à 4. Or de telles formules existent pour tous les calculs présents dans la question. Ce sont soit les formules de base soit des composées de deux formules de base. Avec un choix d'ordre 3 conforme aux habitudes de la classe, cela donne :

Va leurs ↓	Equipes →	A	B	C	D	au lieu de
cos9°		0,988	---	0,988	---	0,988
Cos27°		---	0,891	---	---	0,891
Cos36°		0,809	0,809	0,809	0,809	0,809
Cos54°		---	---	0,587 ou 0,588	0,588	0,588
Cos63°		---	0,454	---	---	0,454
Cos72°		0,309	0,309	---	0,309 ou 0,310	0,309
Cos81°		---	---	0,156	---	0,156

Par exemple, partant de cos18° ≈ 0,9511 :

> l'équipe A calcule cos36° par $2x0,9511^2 -1$ et affiche cos36° ≈ 0,809 puis elle calcule cos72°
ou bien par $2x(2x0,9511^2 - 1)^2 - 1)$ et affiche cos72° ≈ 0,310
ou bien par $2x\boxed{\text{Ans}}^2 - 1$ et affiche cos72° ≈ 0,310
ou bien par $\sqrt{1 - 0,9511^2}$ et affiche cos72° ≈ 0,309

> l'équipe C, à sa suite, calcule $\sqrt{\frac{1 + 0,310}{2}}$ ou $\sqrt{\frac{1 + 0,309}{2}}$ et affiche cos36° ≈ 0,809 puis elle calcule $\sqrt{1 - (\sqrt{\frac{1 + 0,310}{2}})^2}$ ou $\sqrt{1 - (\sqrt{\frac{1 + 0,309}{2}})^2}$ (ou utilise la touche $\boxed{\text{Ans}}$) et affiche cos54° ≈ 0,587 ou 0,588.

Seuls cos72° et cos54° présentent chacun une légère dissonance.

3) une troisième stratégie (S3) qui panache les deux premières stratégies : conservation de l'ordre de l'arrondi donné plus choix de la formule qui repart de la valeur initiale donnée. On obtient le tableau suivant :

Va leurs ↓	Equipes →	A	B	C	D	au lieu de
cos9°		0,9877	---	0,9877	---	0,9877
Cos27°		---	0,8909	---	---	0,8910
Cos36°		0,8092	0,8092	0,8092	0,8092	0,8090
Cos54°		---	---	0,5875	0,5875	0,5878
Cos63°		---	0,4542	---	---	0,4540
Cos72°		0,3089	0,3089	---	0,3090	0,3090
Cos81°		---	---	0,1564	---	0,1564

Par rapport à la stratégie S1, quelques discordances sont éliminées.
Dans un contexte qui n'apparaît plus attaché à la Géométrie métrique, cette stratégie est la plus probable. En effet, l'absence des grandeurs mesurables ôte le besoin d'abaisser le nombre de chiffres de l'arrondi, mais le travail des formules demeure.

2.2 analyse a posteriori

Le tableau ci-dessous rassemble toutes les réponses recensées[239], avec leurs occurrences :

cos9°	0,9877 (6)
Cos27°	0,8909 (2) ; 0,8910 (1)
Cos36°	0,8090 (1) ; 0,8091 (3) ; 0,8092 (8)
Cos54°	0,5875 (2) ; 0,5876 (2) ; 0,5878 (3)
Cos63°	0,4540 (1) ; 0,4542 (1) ; 0,4558 (1)
Cos72°	0,3088 (1) ; 0,3089 (6) ; 0,3093 (1) ; 0,3096 (1)
Cos81°	0,1564 (3)

En complétant la lecture de ce tableau par l'examen des copies (quelques-unes sont jointes en Annexe), on peut dégager trois phénomènes remarquables :

- toutes les réponses sont affichées à 4 décimales (pas de procédures attachées exclusivement à la stratégie S2)
- on trouve tout aussi bien des arrondis que des approximations décimales par défaut ou par excès qui ne sont pas les arrondis décimaux
- quand il y a choix de formule possible, la préférence est donnée à la formule qui utilise la donnée initiale plutôt qu'à celle qui utilise le nombre précédemment calculé lorsque cette formule est une formule de base (stratégie S3) mais c'est le

239 Les groupes étaient prévus initialement sur la base de trois ou quatre élèves mais certains binômes ne se mélangèrent pas. En tout cela fit 13 groupes.

contraire (stratégie S1) lorsque cette formule est la composée de deux formules de base.

Détaillons ce dernier point. Pour les équipes A ou B qui, dans le premier temps de la question, doivent présenter cos36° et cos72° à partir de cos18°, les calculs sur donnée initiale peuvent n'employer qu'une formule de base. Pour les équipes C et D qui, dans le premier temps de la question, doivent présenter cos9° et cos81° à partir de cos18° ou cos36° et cos54° à partir de cos18°, les calculs sur donnée initiale doivent composer deux formules de base. Voici la répartition entre les stratégies S1 et S3 :

Equipes ↓	**Stratégies →**	**S1**	**S3**
A et B		1	6
C et D		5	1

La copie n°3 est prototypique de la stratégie S3 : elle montre des calculs qui composent les formules sur la donnée initiale, l'affichage d'un nombre décimal à 4 chiffres après la virgule et l'affirmation que le résultat affiché est l'arrondi à 4 décimales.
Les copies n°1 et 4 illustrent, quant à elles, des procédures redevables entièrement de la stratégie S1.

> *Ainsi les formes du contrôle de la précision que l'enseignante a bâti conformément au contrat institutionnel numérico-algébrique sont mises à mal à la fois par l'effacement du caractère géométrique du contexte et par la complexité (d'ordre 2) des formules.*

Certains échanges des élèves nous éclairent sur le choix unanime de 4 décimales et sur les hésitations entre arrondi, par défaut, par excès (cf. document 1 en Annexe) :

B : ... à 4 décimales on fait ! on peut pas faire plus précis puisqu'on nous donne une valeur à 4 décimales ; on peut pas faire plus précis que 4 décimales

[…]

B' : mais t'arrondis à 4 !

B : pourquoi faut que j'arrondisse à 4 ?

B' : **parce c'est comme en physique, on te donne une précision à 4 décimales, t'en donnes une à 4 décimales ; tu peux pas être plus précis ...**

[…]

B' : **non ils l'ont pas arrondi, ils l'ont pris par excès ...**

B : par excès ça veut dire que c'était 5 et 8 ...

B' : donc ils l'ont arrondi, en fait !

B : oui, par excès !

C'est en référence aux pratiques de la classe de Physique que le théorème en acte n°1 est explicitement formulé.
Il apparaît de plus que ces deux élèves ne savent pas exprimer l'approximation décimale par arrondi. Un autre échange (entre deux autres élèves, au moment de la synthèse) nous montre la présence surprenante de cette même difficulté (si on considère que l'arrondi est une pratique d'affichage décimal mise en place dès la classe de Sixième) :

A : on n'a jamais les mêmes valeurs !!

A : on a travaillé vite quoi, on a travaillé faux
A : ouais mais ils ont peut-être mal arrondi
A : ou alors on a mal arrondi
A : cos 54 ...
A : il y avait un 3 après le 75 ; donc j'ai bien arrondi ?
A : oui
A : il y en a qui font par défaut, par ... chais pas quoi
A : ah oui on a fait tout par excès, nous ...
A : mais y a pas à faire par excès ou par défaut
A : ... je chais pas

3. Analyses pour la question 2

3.1 Analyse a priori

Les trois nombres désignés par la question sont cos72°, cos9° et cos54°. Il s'agit de justifier la possibilité ou l'impossibilité d'un arrondi décimal d'ordre 4 dans les conditions imposées par les règles du jeu algébrique, puis dans le cas d'une impossibilité, d'annoncer une valeur approchée certaine.

Les deux stratégies les plus probables que nous noterons S'1, S'2 et S'3 sont celles qui prolongent les stratégies S1, S2 et S3 de la question précédente. Elles activent les pratiques institutionnelles de calcul trigonométrique. Compte tenu de la mise en doute publique de certains résultats, S'2 devient plus probable que S'1.
S'2 consiste ici à faire le calcul comme dans la question 1, à partir de 0,9511 et avec une formule de base pour cos72° et cos9° ou la composée de deux formules de base pour cos54°, puis à contester d'emblée la possibilité de garantir quatre décimales. Elle peut alors proposer de retenir comme sûrs deux ou trois chiffres du résultat obtenu à l'écran de la calculatrice par la formule exécutée.
S'1, quant à elle, maintient l'arrondi à 4 décimales sur le résultat affiché.

Sur la base de l'hypothèse H2, la stratégie visée (S'4) consiste en une reprise des calculs précédents, mais sur les bornes de l'encadrement $0{,}95105 \leq \cos 18° < 0{,}95115$. Le recours à la calculatrice (sans touche trigo) dans la constitution des encadrements suppose que les valeurs approchées obtenues à l'écran sont exactes (le postulat instrumental).

Pour cos72° calculé par $\sqrt{1-(\cos 18°)^2}$

on trouve $\sqrt{1-0{,}95115^2} \leq \cos 72° < \sqrt{1-0{,}9505^2}$ puis $0{,}3087 < \cos 72° < 0{,}3091$.
Cet encadrement ne garantit pas quatre décimales mais seulement trois ($\cos 72° \approx 0{,}309$)

Pour cos72° calculé par $2x(2x(\cos 18)^2-1)^2-1$

On trouve $0{,}3089 < \cos 72° < 0{,}3102$

Cet encadrement ne garantit pas quatre décimales ni même trois mais seulement deux ($\cos 72° \approx 0{,}31$)

Pour $\cos 9°$ calculé par $\sqrt{\frac{1 + \cos 18°}{2}}$

On trouve $0{,}98768 < \cos 9° < 0{,}98772$
Cet encadrement garantit 4 décimales ($\cos 9° \approx 0{,}9877$).

Pour $\cos 9°$ calculé par $\sqrt{1 - (2x(\cos 18°)^2 - 1)^2}$

On trouve $0{,}5872 < \cos 54° < 0{,}5879$
Cet encadrement ne garantit que deux décimales ($\cos 54° \approx 0{,}59$) malgré une amplitude inférieure à 10^{-3}.

Cette stratégie a des chances de se développer en rebondissant sur le rappel effectué par l'enseignante relativement à la notion d'arrondi décimal lors de la synthèse de la question 1.

Enfin une stratégie S'5, très improbable, consiste à faire une interprétation statistique de l'obtention des résultats. Elle peut conduire à retenir :

- soit la valeur la plus fréquente $\cos 72° \approx 0{,}8089$; $\cos 9° \approx 0{,}9877$; $\cos 54° \approx 0{,}5878$
- soit la valeur moyenne $\cos 72° \approx 0{,}8090$; $\cos 9° \approx 0{,}9877$; $\cos 54° \approx 0{,}5877$

Elle est très peu probable car les problèmes d'erreur ne reçoivent aucun traitement institutionnel dans le cadre de la Statistique.

3.2 Analyse a posteriori

Les élèves n'ont travaillé que $\cos 72°$ et $\cos 9°$ et une répartition inégalitaire des questions entre les groupes a désavantagé $\cos 72°$. De plus 1 copie ne comporte pas de réponse à la question posée. La stratégie S'5 n'est pas apparue. Cela n'est pas surprenant.

La stratégie S'4 n'est pas apparue non plus : la situation a déstabilisé la stratégie arithmétique, mais n'a pas réussi à ébranler la puissance du contrat numérico-algébrique.

L'examen des copies montre le partage entre les deux stratégies S'1 et S'2.

	Cos72°	**Cos9°**
Oui, il est possible de trouver l'arrondi à 4 décimales (S'1)	2	4
Non, il n'est pas possible de trouver l'arrondi à 4 décimales (S'2)	2	4

Les copies commencent toutes par redonner les égalités $\cos 72° = \sqrt{1 - (\cos 18°)^2} = 0{,}3089$ et $\cos 9° = \sqrt{\frac{1 + \cos 18°}{2}} = 0{,}9877$ puis apportent des justifications à leur réponse oui ou non.

Les copies n°6 et 7 expliquent leur réponse "non" pour cos9° par la propagation d'erreur mais ils la quantifient "à l'aveugle" en une perte de 1 ou 2 décimales. De même la copie n°10 pour cos72°.
Les copies n°8 et 9 donnent la réponse "oui" pour cos9° en se contentant de marquer les égalités.
La copie n°11 répond "oui, cos72° = 0,3089" car l'autre résultat (0,3096) se fait avec deux formules au lieu d'une.

Devant l'absence totale d'encadrements, l'enseignante commence par insister sur la question de la précision et provoque ainsi des réactions chez les élèves. Voici un échange entre P (la professeur) et E un binôme d'élèves :

E : ben, faut refaire la même chose que tout à l'heure
P : la valeur arrondie à 4 décimales, c'est possible ou c'est pas possible d'être sûr ?
E : non, c'est pas précis du tout ; on a arrondi, c'est pas précis, on n'a pas une valeur précise
P : la question est : peut-on garantir l'arrondi à 4 décimales ? et ta réponse ?
E : ben oui, on peut
P : l'arrondi à 4 décimales, c'est précis ça veut dire que ta valeur est comprise entre ... ; c'est pas parce qu'il y a 4 chiffres derrière la virgule que …, tu vois ce que je veux dire.

Puis l'enseignante souffle (publiquement) qu'un arrondi, c'est un encadrement et elle prend l'initiative d'un "rappel" :

P : qu'est ce que ça veut dire arrondi à 4 décimales ? ça veut dire que ta valeur, elle est, est ... si a est la valeur arrondie à 4 décimales
[*P écrit en même temps au tableau avec des epsilon*]
… à moins 5 10 moins 5, à plus 5 10 moins 5 ; l'amplitude de l'encadrement qu'on vous donne là ...
A : c'est pas 10 moins 4 plutôt ...
P : ... est de 10 moins 4
B : c'est logique
P : pour parler d'une valeur approchée on doit écrire valeur approchée moins précision, valeur approchée plus précision pour reconstituer l'intervalle dans lequel se trouve la valeur exacte ...
B : pourquoi 5 madame ?
P : **parce que vous avez un arrondi à 10 moins 4** [240] ce qui vous donne une amplitude d'intervalle de ... et l'amplitude de l'intervalle c'est 2 fois la précision ; donc on coupe 10 moins 4 en 2 pour avoir la précision
B : **je ne comprends pas ; je vois pas l'intérêt**
P : **c'est une partie du cours de Seconde qu'on a refait un petit peu en début d'année, sur les valeurs approchées ; donner une valeur approchée a à epsilon près c'est donner cet encadrement ...**

L'enseignante redonne l'équivalence formelle d'une valeur approchée et d'un encadrement. Ce rappel (à l'ordre didactique) vise à attribuer à l'élève la responsabilité

[240] Nous soulignons cette déclaration car on se rappelle que l'enseignante ne voulait pas employer cette expression qu'elle trouvait inadaptée. On remarque aussi le recours à des formulations (avec les plus ou moins epsilon) caractéristiques d'une entrée de l'approximation numérique dans l'Analyse que les élèves de la classe ne reconnaissent pas alors que l'enseignante y fait référence.

de l'essoufflement du processus didactique car il suppose que l'ignorance de l'élève porte uniquement sur le jeu d'écritures. Mais l'interrogation de l'élève porte aussi et surtout sur le rôle de ce changement d'écriture dans la résolution du problème comme le prouve l'échange qui suit avec la même élève :

> B : si j'ai compris est-ce que vous pouvez venir voir ? en fait cosinus 18 degrés c'est égal à ça et cosinus 9 degrés égal cosinus 18 degrés sur 2 ... est ce que ça va être ça ?
> P : travaille vraiment avec les encadrements
> B : epsilon, on n'a jamais vu madame
> B : ici c'est un 5 dix moins 5
> B : je ne comprends pas pourquoi ; je vois pas l'intérêt
> P : c'est une notion de valeur approchée ; on a donné une définition qui est celle que j'ai rappelée là ... c'est une définition précise de ce que c'est une valeur approchée à 10 moins 2 près ... c'est une définition précise de ce que c'est une valeur approchée de a à 10 moins p près ...

L'absence de pratique opératoire sur les encadrements pour contrôler la précision fait que la question "est-il possible de … ?" n'est pas interprétée comme une demande de justification :

> E : si on nous le donne c'est que c'est possible, forcément
> E : pourquoi c'est possible ?
> E : chais pas mais si on la donne c'est forcément possible
> P : la question est-ce que vous êtes certains ?
> E : ah si on est certain ?
> E : des deux trois premiers oui mais les autres, non
> P : pourquoi ?
> E : parce que c'est trop arrondi, après on fait la racine d'un nombre arrondi, on divise, ça fait un encadrement qui s'écarte de plus en plus
> E : c'est de moins en moins précis

On a bien la référence à un encadrement, mais ces élèves se réfugient dans l'idée de dégradation de la précision qu'ils associent à l'élargissement de l'encadrement provoqué nécessairement par les opérations : ils ne s'engagent pas dans les procédures algébriques sur les bornes de ces encadrements.
Le discours de synthèse de l'enseignante à toute la classe exprime le constat d'échec :

> P : il ressort que vous ne faites pas confiance à ce que vous obtenez parce que vous parlez d'une valeur arrondie. Ce que vous n'avez pas fait c'est de traduire cet arrondi ; il aurait fallu pour faire quelque chose d'un peu plus propre commencer par vous expliquer ce qu'est cette valeur 0 95 11 arrondi à 4 décimales en fait cosinus 18 il est compris entre 0 95 11 moins 5 10 moins 5 et 0 95 11 plus 5 10 moins 5 c'est ça une valeur arrondie à 4 décimales ... on peut reconstituer un encadrement, valeur approchée moins la précision , valeur approchée plus la précision ; **c'est un mécanisme que normalement vous devriez posséder**[241]**.**

4. Retour sur les hypothèses de la situation

[241] De nouveau l'enseignante renvoie sur l'élève la faute de ce qui apparaît à tous comme un échec de la situation didactique.

4.1 validation de l'hypothèse H1

Les réponses à la question 1 permettent d'affiner la formulation de l'hypothèse H1 sur le rapport institutionnel de l'élève à l'arrondi décimal :

Un arrondi décimal d'ordre n d'un nombre est une valeur approchée de ce nombre, écrite décimalement avec n chiffres décimaux.

> *Les arrondis décimaux d'ordre n sont stables par les opérations élémentaires : tout calcul sur des arrondis décimaux d'un certain ordre n produit un résultat qui, après arrondissement à l'ordre n, est un arrondi décimal d'ordre n de la valeur exacte*

Autrement dit, l'arrondi décimal d'ordre n d'un nombre calculé possède un statut d'affichage de ce nombre selon deux caractères : un caractère qualitatif, celui d'être une valeur approchée décimale du nombre (avec le symbole ≈) et un caractère quantitatif, celui de posséder n chiffres après la virgule. Ce rapport institutionnel explique le comportement de l'élève dans la question 1.

En effet, dans l'institution actuelle, l'élève sait qu'il assume sa part de responsabilité dans un calcul approché avec des arrondis décimaux s'il fait le choix d'une "bonne" formule de calcul (bonne au sens que si les données étaient exactes le résultat obtenu par la formule serait exact) et s'il respecte le nombre de décimales dans l'écriture finale. C'est ce qu'il a fait ici, à ceci près que l'absence de grandeurs géométriques telles les longueurs ou les angles le dispensaient de réduire le nombre de chiffres en deçà des 4 décimales données comme lui recommande l'enseignant.

Le contrôle de la précision que l'institution instaure dans ces calculs et que l'enseignante a reformulé lors des entretiens pré-expérimentaux n'est nullement fondé sur l'arrondi-encadrement mais essentiellement sur l'arrondi-nombre de chiffres.
Cependant le travail sur la définition de l'arrondi-encadrement existe dans l'institution (en classe de Seconde, cf. chapitre C_2) et aussi les opérations sur les encadrements. C'est l'existence supposée de ces objets dans les rapports institutionnels de l'élève à l'arrondi qui fondait l'hypothèse H2. Et l'assurance que l'enseignante avait travaillé le calcul numérique en début d'année scolaire nous laissait espérer un retour des encadrements sur le devant de la scène lors la question 2. Force est de constater qu'il n'y en a pas été ainsi !

4.2 rejet de l'hypothèse H2

En quoi cette hypothèse H2 a-t-elle failli ?

Nous l'avons dit dans l'analyse a posteriori de la question 2. Si la situation a déstabilisé la stratégie arithmétique S'1, elle n'a pas pour autant fait venir, dans l'enjeu de contrôle de la valeur approchée, l'arrondi encadrement à la place de l'arrondi nombre de chiffres, puisque la stratégie S'2 fonctionne sans utiliser d'encadrement.

Par quoi a-t-elle failli ?

- d'abord par excès d'optimisme sur l'évolution, par rapport à la classe de Seconde, des rapports institutionnels aux objets en jeu dans la situation.

Nous avons insisté dans les analyses écologiques de la décimalisation sur l'incapacité de l'institution EMS à faire se rencontrer, en classe de Troisième et de Seconde, les problèmes d'encadrements et ceux d'approximation numérique. Les révisions de début d'année sur le Calcul numérique que montrent les manuels de Première continuent à fixer dans une présentation formelle et non opératoire le rôle de l'encadrement dans l'approximation numérique. Elles sont des reprises sans mise en perspective avec l'Analyse. Elles ne sont donc pas à même de modifier sensiblement les rapports qui fonctionnent en permanence dans les applications numériques usuelles, notamment dans les autres disciplines scientifiques.

- ensuite par une formulation ambiguë de l'énoncé de la question 2

Nous avons signalé dans l'analyse a posteriori que la question "est-il possible de … ?" n'est pas interprétée par les élèves comme une exigence de contrôle de la validité du résultat annoncé mais comme la demande d'une opinion sur cette validité.

- enfin par une mise en scène qui affaiblit les potentialités a-didactiques du milieu issues de la question 1

En fait la situation ne place pas l'élève devant une contestation dynamique de son résultat puisque celui-ci accepte d'emblée que certaines décimales soient fausses sans vouloir en assumer les conséquences mathématiques. L'exigence des décimales exactes n'est donc pas dévolue et la reprise des stratégies algébriques a lieu (comme prévu) mais sans intégration des encadrements. Le processus didactique ne peut alors que se terminer dans une intervention magistrale qui donne la réponse à un problème que l'élève ne prend pas en charge[242].

4.3 doutes sur l'hypothèse H3

Cette hypothèse n'a pas pu être réellement testée puisque la séance s'est terminée par la correction professorale des calculs sur les arrondis-encadrements. De toute façon le mot fonction n'a pas été prononcé, ni par l'enseignante ni par les élèves comme en témoigne la transcription de tous les échanges verbaux.
Nous pouvons alors affirmé que même avec plus de temps dans la séance[243], cette hypothèse est fragile car elle suppose que l'encadrement puisse, dans la situation, être mis en relation avec la notion d'intervalle. Or, là encore, les analyses du chapitre C font fortement douter d'une évolution sensible des rapports institutionnels sur les encadrements pendant les premiers mois de la classe de Première (même si c'est une Première S). Il aurait certainement fallu une forte intervention professorale pour déclencher la mutation de l'encadrement en un intervalle par l'intermédiaire d'une fonction.

[242] Nous nous demandons maintenant (post expérimentation) si une question du même type que dans la séance 2 (parmi les valeurs approchées trouvées, quelle est la meilleure ?) n'aurait pas été à même de faire venir les encadrements.

[243] L'enseignante a consacré un tiers du temps au corrigé du travail maison n°2.

CHAPITRE D_5 : EVALUATION DE L'INGENIERIE AU VU DE SON EXPERIMENTATION ET EN REGARD DU PROJET D'ENSEIGNEMENT

Conçue au sein de l'ingénierie à partir de la rupture définie au terme de l'analyse institutionnelle[244], la rencontre avec la nouvelle praxéologie de décimalisation a-t-elle eu lieu lors de l'expérimentation ? C'est à cette question que nous allons essayer de répondre en rassemblant et en articulant les analyses propres à chacune des trois situations didactiques. Il s'agit principalement ici, parmi les actions et les productions des élèves et de l'enseignante observées au cours de l'expérimentation[245] :

- de repérer celles qui ne se démarquent pas du contrat relatif à l'approximation numérique décimale que nous avons qualifié de numérico-algébrique
- de repérer celles qui peuvent s'inscrire dans un contrat institutionnel nouveau de type numérico-analytique
- de rapporter les unes et les autres aux choix de l'ingénierie et aux contraintes institutionnelles pour apprécier leur degré de contingence et de reproductibilité.

1. les promesses d'un nouveau contrat

Le premier effet de l'ingénierie, attesté par les entretiens pré-expérimentaux, concerne le rapport personnel de l'enseignante à l'approximation. Il est peut-être aussi le plus remarquable puisqu'il a marqué l'engagement professionnel de l'enseignante dans l'ingénierie. La prise de conscience qu'il était nécessaire d'engager la notion de distance pour résoudre le problème posé par la question 1 de la deuxième séance augure d'un changement durable de son rapport en position d'enseignante à l'approximation numérique. Le soin qu'elle a mis à mettre au point avec nous le déroulement de la séance 2 en est le premier témoignage.

Du côté de l'élève, nous pouvons mettre à l'actif de la deuxième situation l'entrée effective dans des manipulations d'encadrements pour répondre au problème d'approximation. Même si les manipulations ne sont pas correctement effectuées, elles représentent une appropriation d'une fonctionnalité de l'encadrement dans un problème d'approximation. Ce démarquage par rapport à la pratique d'exécution d'une expression numérique sur la calculatrice ne s'est pas opéré seulement par guidage de l'enseignante. De plus, il a été suivi d'une adhésion des élèves (cf. enregistrements sonores en annexe du chapitre D_3) aux actions publiques de décimalisation menées par l'enseignante avec la calculatrice rétroprojetable. Cette genèse instrumentale collective sur des majorations et des minorations de bornes d'encadrements, renouvelée lors de la troisième séance nous paraît remplir l'un des objectifs d'enseignement que nous avions fixés à l'ingénierie.

---

244 Remplacer l'exploitation directe et unique d'une expression algébrique via la calculatrice par la construction d'encadrements de ce nombre et d'une opérabilité sur eux finalisée par l'approximation (cf. fin du chapitre C_3)

245 Et des entretiens pré-expérimentaux, pour ce qui est de l'enseignante

2. la prégnance du contrat algébrique

Dès la première situation, cette prégnance se manifeste en s'opposant très fortement à l'alternative de décimalisation que l'énoncé de la question autorise. Nous la retrouvons tout au long de l'expérimentation dans l'obstination des élèves à fabriquer des expressions algébriques de plus en plus complexes et à tenter de les simplifier alors que la réussite peut passer par des décimalisations dont la précision serait contrôlée.

Mais la marque la plus visible de cette prégnance, dans l'ingénierie, est l'absence de toute procédure d'encadrements de la part des élèves dans la situation cos72°/cos9° de la troisième séance. En effet, elle intervient après un travail sur les encadrements pendant la deuxième séance. Le fait que les séances furent temporellement très espacées ne peut pas expliquer à lui seul cette labilité. L'émergence des encadrements dans les procédures des élèves lors de la deuxième situation n'a-t-elle eu, dans l'expérimentation de l'ingénierie, qu'un caractère contingent ou doit-elle être attribuée à des actions de recentrage de l'enseignante que les élèves ont bien su interpréter ? Il semble en tout cas que les déstabilisations que l'ingénierie opère lors de la deuxième séance sont locales.

Il nous faut ajouter que deux objets indispensables pour consommer la rupture sont restés à l'écart de la scène mathématique où jouaient les élèves, même s'ils étaient présents dans les coulisses : ce sont l'algorithme et la fonction. La deuxième et la troisième séance ont été interrompues avant même que leur présence implicite ait pu être mise en évidence. Alors que ces notions ont présidé à la conception de l'ingénierie et qu'elles ont été débattues lors des négociations avec l'enseignante, elles n'ont pas été évoquées lors des séances. Cette carence renvoie à la fois aux critères de choix utilisés pour l'insertion locale du projet d'ingénierie et aux contraintes institutionnelles.

3. critique des choix de l'ingénierie

Dans les objectifs attachés au projet d'enseignement, il s'agissait à la fois de concevoir le schéma expérimental vis-à-vis de l'organisation mathématique commune à toutes les classes de Première S mais aussi de l'inscrire dans une organisation didactique locale.

Avec l'expérimentation, nous constatons que le projet était, en l'état, disproportionné par rapport au temps disponible. Le choix de trois séances intégrait à la fois la nécessité de ne pas alourdir le projet lui-même et de ne pas gaspiller un temps précieux sur un sujet que l'enseignante considérait comme marginal dans les préoccupations des élèves (cf. entretien avec l'enseignante). Mais en réunissant sur la deuxième séance à la fois le resserrement de l'intervalle et la construction de l'algorithme, nous avons forcé la marche et laissé échapper un travail de maturation de la technique de resserrement. Un minimum de quatre séances s'impose pour permettre à l'algorithme et aux fonctions d'être présents dans l'activité des élèves.

Au-delà de ce raté dans la négociation avec l'enseignante, il faut voir la pression de contraintes institutionnelles. Lors de l'expérimentation, cette pression s'est manifestée dans trois domaines :

Le domaine topologique : les carences institutionnelles (cf. chapitre C_3) ont affaibli la rupture réalisée par la situation cos18° puisqu'elles ont bloqué le passage du constat de l'ordre à l'évaluation de la distance, ce que nous avions prévu. Nous pensons cependant que le renvoi sur la séance suivante de la construction de l'algorithme et un autre choix des valeurs proposées peut laisser du temps à l'élève pour débloquer lui-même la situation, une fois la dévolution du problème engagée par la synthèse professorale. C'est en effet essentiellement le manque de temps qui a soutenu l'intention professorale de remplacer au plus vite la stratégie S4 par la stratégie S5.

Le domaine algébrique : le contrat numérico-algébrique inhibe les procédures de décimalisation en les renvoyant dans la sphère privée de l'élève où elles ne sont pas prises en charge par l'enseignant. L'effet de cette inhibition est amplifié par les faiblesses dans la maîtrise formelle des écritures. Lors d'une pré-expérimentation de l'ingénierie en fin de classe de Seconde (cf. documents dans les annexes de ce chapitre, en Volume 2) nous avions constaté combien ces réticences et ces faiblesses se conjuguaient pour freiner les interactions avec le milieu didactique de la situation lors des procédures de décimalisation. C'est l'une des raisons pour lesquelles nous avons reporté la construction et l'expérimentation de l'ingénierie sur la classe de Première S et que nous avons allégé l'algorithme (cos18° au lieu de cos10°). Mais nous ne pouvions pas desserrer plus cette contrainte institutionnelle puisque le choix des calculs trigonométriques emporte nécessairement des manipulations algébriques du second degré, au minimum.
Toujours dans le domaine algébrique, l'absence de traduction fonctionnelle ou algorithmique des formules que nous avons pointée dans l'analyse écologique institutionnelle a pesé pour limiter les effets espérés via l'algorithme dans la situation cos18° et via les fonctions dans la situation cos72°/cos9°. Là encore il n'était pas possible de rester dans le premier degré.

Le domaine instrumental : la répétition de certains schèmes d'usage liés aux opérations élémentaires sur les nombres entiers ou décimaux donnent l'illusion (à l'enseignante, à l'observateur et aux élèves) d'une aisance dans l'instrumentation de certains calculs numériques, en fait ceux qui relèvent du contrat numérico-algébrique. Mais l'instrumentation des techniques de décimalisation attachées à un contrat numérico-analytique nécessite des schèmes finalisés et plus complexes, que Trouche (1997) dénomment *schèmes d'action instrumentée*, lesquels embarquent ici des schèmes d'usage nouveaux tels la mise en mémoire. Ce dernier schème permet en particulier d'alléger les expressions algébriques et de répéter, à moindre coût, leurs exécutions après modification de certains des arguments numériques. Il est particulièrement bien adapté à la décimalisation par algorithme ou par fonctions élémentaires composées.
Dans ce domaine aussi le fonctionnement des situations didactiques a connu des limitations importantes (certes moindres qu'en classe de Seconde) qu'il faut rapporter aux contraintes qui pèsent sur les enseignants pour prendre en charge les genèses instrumentales des élèves.

Partie E

Conclusion et bibliographie

Chapitre E_1 : conclusion générale

Chapitre E_2 : références bibliographiques

CHAPITRE E_1 : CONCLUSION GENERALE

1. Apports principaux de l'étude

À partir du bilan de l'analyse écologique et de l'évaluation de l'ingénierie[246], nous dégageons les résultats de l'étude qui nous paraissent les mieux établis.

La prise en charge des problèmes posés par l'approximation décimale comporte dans l'enseignement mathématique secondaire, de graves faiblesses. On peut en juger à l'absence de fiabilité numérique dans de nombreux calculs que cet enseignement organise mais aussi au déficit de justifications théoriques dans certains contrôles pratiqués. Ces faiblesses sont récurrentes ; elles ne datent pas de l'arrivée des calculatrices entre les mains des élèves. Elles sont essentiellement liées aux difficultés que rencontre l'institution à créer de bonnes conditions à une problématisation de l'approximation numérique dans la classe de mathématiques.

Longtemps[247], seuls les élèves des classes terminales du Lycée pouvaient rencontrer une construction théorique des problèmes fondamentaux de l'approximation. Si la réforme des mathématiques modernes a cherché à étendre les bases d'une telle construction sur tout le lycée, ses méthodes furent rapidement contestées, notamment pour le peu de cas qu'elles faisaient de l'activité numérique de l'élève.

La contre-réforme de 1981 a affiché l'ambition de donner à l'approximation numérique un rôle de premier plan dans l'enseignement des mathématiques du Lycée en la plaçant au départ des constructions de plusieurs concepts de l'Analyse et au cœur d'activités dites expérimentales avec la calculatrice.

Mais les pressions exercées sur le système d'enseignement et les lois du fonctionnement didactique ont conduit à un amenuisement du rôle de l'approximation numérique par rapport aux possibilités que lui offraient les réformateurs de 1981.

L'analyse écologique nous a révélé, pour les classes de Seconde et de Première, plusieurs aspects de cet amenuisement dans les différentes activités numériques proposées par les manuels ou les enseignants dans leurs classes :

- la manipulation, sans questionnement et sans surveillance, des valeurs approchées comme si elles étaient des valeurs exactes
- la préférence donnée à la vérification par la calculatrice au lieu de la mise en place d'un contrôle de l'erreur outillé par l'Analyse, comme le recours aux variations d'une fonction ou à l'inégalité triangulaire sur les distances.
- la permanence de techniques où le contrôle de l'erreur ne relève que de manœuvres arbitraires sur le nombre de chiffres décimaux sans tentative d'étayer ces techniques par des technologies issues de l'Analyse
- l'absence quasi-totale d'usage de majorations d'erreurs.

[246] Cf. chapitres C_4 et D_5

[247] Cf. chapitre B_2 pour plus de précision.

Elle a aussi mis en évidence des déplacements curriculaires qui visent à retarder l'introduction de certains concepts intimement liés à l'approximation numérique :

- celui des algorithmes d'approximations successives de la classe de Première vers la classe de Terminale
- celui de l'analyse des propriétés locales d'une fonction numérique de la classe de Seconde vers la classe de Première

Elle a conclu sur une certaine incapacité de l'enseignement actuel de l'Analyse à entrer en résonance avec l'approximation numérique.

Plus précisément, alors que l'analyse écologique a détecté la présence de certains objets d'enseignement liés à l'Analyse et aptes à provoquer des modifications dans les pratiques calculatoires, l'ingénierie didactique a montré avec force que ces objets n'étaient pas disponibles dans les problèmes d'approximation où l'on ne dispose pas de la valeur exacte.

Deux de ces objets, les encadrements et les distances sont officiellement mis en place dès la classe de Seconde pour outiller les problèmes d'approximation. Mais les rapports institutionnels qui les façonnent s'avèrent inadéquats pour leur permettre d'outiller les problèmes d'approximation usuels de l'institution. Nous avons notamment montré le manque de liens suffisamment actifs :

- d'une part entre encadrements et intervalles
- d'autre part entre distance et majoration d'erreur

Nous avons mis cette double carence en relation avec des phénomènes transpositifs repérés par d'autres chercheurs en Didactique des mathématiques : l'arrêt de la transposition didactique relative à la notion de fonction (Assude, 1992) et le vide didactique institutionnel dans le passage des nombres décimaux aux nombres réels (Bronner, 1997).

Mais nous avons aussi constaté l'absence de lisibilité des problèmes fondamentaux de l'approximation : celui d'obtenir à la fin d'un calcul une précision fixée à l'avance et celui d'estimer la précision sur le résultat d'un calcul. Ces problèmes ne sont pas construits et lorsqu'ils sont rencontrés, ils ne connaissent que des traitements locaux où l'on fait intervenir naïvement la puissance de l'instrument de calcul.

Un autre de type de rencontre avec ces problèmes est pourtant envisageable au Lycée. L'ingénierie que nous avons proposée en témoigne.

Le bilan expérimental de cette ingénierie, bien que contrasté, montre que l'on peut redonner vigueur aux espoirs mis par la contre-réforme dans l'activité numérique expérimentale avec calculatrice, à condition de se défaire d'illusions didactiques sur la genèse instrumentale individuelle et collective.

Ce bilan a en outre mis en lumière ce que peuvent être les rapports qu'entretiennent des enseignants à l'approximation et à l'instrumentation des calculs approchés, dans l'institution d'enseignement actuelle. D'ailleurs le processus de négociation avec l'enseignante, en même temps qu'il servait de point d'appui à la recherche de faits didactiques, a permis une déstabilisation épistémologique de cette enseignante : il y eut la (re)découverte par l'enseignante de l'intérêt à disposer de la notion de distance, donc d'une notion topologique pour traiter certains problèmes d'approximation présents dans l'enseignement, il y eut ses résistances à traiter la propagation des erreurs dans le cadre fonctionnel, il y eut enfin, de sa part, l'affirmation répétée d'une désaffection obligée à l'égard de l'approximation et de ses problèmes.

La conviction que les problèmes de l'approximation ne relèvent pas au Lycée de l'enseignement des mathématiques semble être majoritaire chez les enseignants.

L'étude a analysé cette conviction en termes de contraintes institutionnelles sur le calcul approché. Les entretiens avec les autres enseignants ont témoigné de sa force et ont montré qu'elle se manifeste par des discours d'opinion qui cherchent à renvoyer le traitement de l'approximation sur les disciplines scolaires concernées par l'usage des mesures.

2. Limites de l'étude et nouvelles directions de recherche possibles

Toute étude arrête des choix qui l'exposent à des critiques mais ouvrent des perspectives. À partir d'une reformulation des choix principaux, essayons de montrer comment les limitations qu'ils imposent aux résultats suggèrent de nouvelles directions de recherche.

1. Le découpage opéré dans le curriculum actuel (classes de Troisième à Première) ciblait la charnière Collège-Lycée qui est un passage didactiquement névralgique avec des ruptures épistémologiques fécondes pour la vie de l'approximation numérique. L'importance de cette charnière est reconnue officiellement par l'institution qui porte ses efforts sur une continuité des programmes. Avec ce découpage qui nous centrait sur la classe de Seconde, nous avons été contraints de délaisser la mise en place du contrat numérico-algébrique en amont et l'approfondissement du contrat numérico-analytique en aval.

Une étude plus globale sur l'ensemble des classes de Collège et de Lycée pourrait notamment intégrer des notions mathématiques importantes pour le calcul approché et son instrumentation, mais que nous n'avons pas abordées. Nous pensons notamment à :

- l'estimation rapide et grossière de résultats d'opérations élémentaires, qui est souvent pratiquée en calcul mental et-ou rapide (sans calculatrice) dès l'école primaire
- la notion d'ordre de grandeur mise en place dans les premières années du Collège, employée dans les calculs sur grandeurs physiques et retravaillée dans le cadre de l'Analyse sous la forme de développements limités. Les enseignants actuels font souvent grief à l'usage de la calculatrice de la perte de l'ordre de grandeur du résultat. Cette opinion mérite d'être questionnée et, sans lancer prématurément de débat, mentionnons la remarque d'un manuel de Seconde de 1973 (avant l'arrivée des calculatrices dans la classe) :

> Dans l'écriture normalisée d'un nombre décimal x ($a.10^p$ où $0 \leq | a | < 1$), l'exposant p fournit un premier encadrement puisque sa donnée permet d'affirmer que $10^p \leq | x | < 10^{p+1}$. Elle donne une première idée de l'ordre de grandeur de x, et toute faute de calcul sur p dénature le résultat et est *la plus grave des fautes que l'on puisse commettre* (Queysanne et Revuz, Nathan, 1973, page 198).

- les notions d'erreur relative et d'élasticité présentes dans les enseignements de physique et d'économie du Lycée et qui se manifestent en Analyse sous les formes de la dérivée logarithmique et de l'élasticité-point.
- la notion d'erreur aléatoire dans la prise de mesure d'une grandeur physique qui conduit à un traitement statistique de l'erreur, lequel suppose de remplacer la notion d'encadrement par la notion d'intervalle de confiance[248].

Une telle étude qui mettrait en perspective l'enseignement secondaire avec l'enseignement primaire et les enseignements professionnels et supérieurs nous paraît indispensable pour mieux prendre en compte les effets didactiques de la routinisation des techniques.

2. Le choix des calculs numériques en Trigonométrie, essentiellement motivé par leur potentiel épistémologique et leur compagnonnage avec les tables et la calculatrice s'harmonisait avec celui de la charnière Collège-Lycée. Un autre choix était possible qui aurait plus ciblé le fonctionnement du contrat numérico-analytique : celui des calculs numériques avec les fonctions logarithmes, exponentielles et puissances lesquelles jouent le rôle de fonctions transcendantes de base pour l'Analyse numérique. Une étude qui ferait ce choix se décalerait sur la classe de Terminale et la charnière Lycée-Supérieur. Ses résultats nous permettraient d'apprécier comparativement à la nôtre les modifications dans les contrôles d'un calcul approché instrumenté, dans un contexte moins marqué par la Géométrie métrique.

3. La méthodologie avec laquelle nous avons organisé notre recherche sur les calculs trigonométriques de la classe de Troisième à la classe de Première nous semble adaptée pour les deux études que nous venons de suggérer. Cette méthodologie couple deux tâches : une analyse écologique institutionnelle et une ingénierie didactique expérimentée dans une classe. Elle permet de donner des significations didactiques au concept de genèse instrumentale issu des travaux d'ergonomie cognitive. Cependant les choix opérés dans l'ingénierie didactique, pour répondre à l'objectif de construire une première rencontre avec les problèmes fondamentaux de l'approximation, ont privilégié, à la fois dans la conception et les observations, l'instrumentation du calcul au détriment de l'instrumentalisation de la calculatrice.
Certaines questions relatives à l'instrumentalisation initiée lors de l'ingénierie n'ont pas été abordées par elle ni par l'analyse institutionnelle. En voici deux, relatives à l'usage des commandes de mémorisation et de rappel d'une calculatrice[249] :

- quels rapports institutionnels nouveaux au calcul numérique approché ces nouveaux schèmes d'action instrumentée peuvent-ils favoriser ?

[248] Le nouveau programme de Seconde (rentrée scolaire 2000) introduit la notion de fluctuation d'échantillonnage. Dans les commentaires officiels relatifs aux thèmes d'études en Statistique, on peut lire : "On pourra utiliser les formules de fourchettes à différents niveaux pour une proportion voisine de 0,5 afin de voir que ce que l'on perd en précision, on le gagne en confiance".

[249] Nous y incluons la touche Ans et Entry qui paraissent de plus en plus connues des élèves.

- comment ces nouveaux schèmes peuvent-ils se coordonner à ceux de l'algèbre symbolique, notamment chez les utilisateurs d'une calculatrice symbolique ?

Le parti que nous avons pris d'en rester à la calculatrice scientifique ordinaire n'empêche pas de regarder ces questions comme des questions d'une actualité brûlante, notamment pour le Lycée, si l'on est persuadé, comme nous le sommes, de l'arrivée inexorable de calculatrices symboliques entre les mains des élèves de l'enseignement secondaire. D'autres apports méthodologiques, plus axés sur les concepts de transposition informatique et de conceptualisation seront peut-être nécessaires[250] pour les traiter efficacement.

4. Le problème mathématique choisi pour structurer l'ingénierie renvoyait à une partie de notre problématique puisqu'il visait la tabulation des valeurs d'une fonction numérique.

L'analyse écologique a révélé que l'éviction des tables lors de l'arrivée de la calculatrice a été rendue possible par l'effacement du problème de la formation des dites tables dans les organisations mathématiques, alors qu'il était présent dans le traité de Bézout, en 1771. Les raisons invoquées par Bézout pour s'intéresser à ce problème sont la possibilité de faire venir et fonctionner les formules de Trigonométrie. Mais le traitement du problème lui-même, sur lequel il s'attarde longuement, lui donne surtout l'occasion d'exposer la réalisation effective de certains calculs approchés et d'aborder le thème de l'approximation.
Dans notre ingénierie, nous avons vu dans le retour de ce problème la possibilité de montrer en quoi un algorithme et une fonction sont des réponses mathématiques adaptées aux problèmes fondamentaux de l'approximation. Au-delà de ce qui peut n'apparaître que comme un choix parmi d'autres pour réaliser des séquences d'enseignement sur l'approximation numérique décimale, nous reposons la question des justifications à apporter dans l'enseignement mathématique sur la production décimale des valeurs prises par une fonction. Dans quels domaines théoriques inscrire ces justifications, si on les juge nécessaires ? Aux débuts de la contre-réforme, on pouvait trouver dans certains manuels des éléments de l'Arithmétique des ordinateurs. Ils ont été abandonnés assez rapidement, mais ressurgissent périodiquement dans les publications noosphériennes.

> *Nos choix d'ingénierie ont tenté d'apporter des conditions locales à la vie d'une table numérique. À l'image commune d'un catalogue de valeurs mortes puisque les calculs ne sont plus à faire, ils ont substitué celle d'un lieu de vie de valeurs approchées et à approcher. Cette idée était présente dans le mouvement de rénovation de l'enseignement de l'Analyse au sein de la contre-réforme. Dans les nombreux travaux des Irem qui ont précédé ou accompagné les changements de programmes de 1981, il n'était pas rare de trouver des réflexions et essais pour insérer l'objet table dans cet enseignement, à partir de l'interpolation linéaire et du calcul des différences finies. Loin de devoir disparaître, les tables auraient pu continuer à vivre au Lycée aux côtés de la calculatrice. En effet dans la confrontation discret-continu que l'enseignement de l'Analyse tente de maîtriser, elles représentent une forme d'articulation entre le local et le global autre que la représentation graphique ; et elles offrent pour le calcul approché un registre*

[250] Cf. thèse de Trouche (1996).

> *sémiotique et une instrumentalité autres que ceux de la représentation graphique ou du travail algébrique sur les valeurs exactes.*

Le test réalisé auprès d'élèves de la classe de Seconde et l'expérimentation de l'ingénierie montrent que la viabilité écologique de la table numérique reste problématique dans les institutions didactiques du Lycée actuel. Est-elle réalisable ? La question mérite d'autant plus d'être posée que la table numérique est (ré)importée dans l'enseignement par la calculatrice. L'approximation d'un nombre par lecture de l'exécution de l'expression algébrique de sa valeur exacte, par lecture graphique ou lecture tabulaire sont trois instrumentations qui coexistent dans les instruments de calcul électroniques les plus communs. C'est le cas pour les calculatrices dites graphiques qui sont actuellement recommandées au Lycée, mais aussi pour les ordinateurs avec les logiciels appelés tableurs qui ont fait leur entrée officielle au Collège et au Lycée[251].

Notre étude a voulu participer au mouvement réflexif qui apparaît de plus en plus nécessaire à l'enseignement mathématique secondaire : celui de penser didactiquement la présence simultanée et cordonnée de trois formes d'instrumentation du calcul - algébrique, tabulaire et graphique – avec laquelle les élèves et les enseignants sont obligés de faire ensemble du calcul numérique.

---

[251] Avec les derniers programmes : année scolaire 1999-2000 pour la classe de Troisième et 2000-2001 pour la classe de Seconde.

CHAPITRE E_2 : REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Didactique des mathématiques ; réflexions sur l'enseignement des mathématiques

ARTIGUE M. (1989), Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 9/3, pp. 281-308, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

ARTIGUE M. (1996), Réformes et contre-réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994*), Les Sciences au lycée*, pp. 195-215, INRP.

ARTIGUE M. (1998), Instrumentation et écologie didactique de calculatrices complexes : éléments d'analyse à partir d'une expérimentation en classe de Première S, *Actes du colloque francophone européen, Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématique*s, pp.15-38, IREM de Montpellier.

ARTIGUE M., DEFOUAD B., DUPERIER M., JUGE G., LAGRANGE J.B. (1998), *Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée*, Cahier Didirem spécial n°4, IREM Paris 7.

ARTIGUE M. (1995), Un regard didactique sur l'utilisation d'outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques, *Repères Irem*, n°19*,* pp. 77-108.

ARTAUD M. (1998), Introduction à l'approche écologique du didactique, L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, *Actes de la neuvième École d'Été de didactique des mathématiques,* pp. 101-139*,* Bailleul (éd.).

ASSUDE T. (1992), *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Ecologie de l'objet "Racine carrée" et analyse du curriculum*, Thèse de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université Joseph Fourier, Grenoble.

ASSUDE T. (1996), De l'écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 16/1, pp. 7-32, Editions la Pensée Sauvage, Grenoble.

BIREBENT A. (1996), Cohabitation entre le calcul numérique et la calculatrice : le point de vue du contrat didactique, *Petit x,* n°44, pp. 5-32, IREM de Grenoble.

BIREBENT A. (1999), La calculatrice et les calculs trigonométriques : une entrée difficile dans l'apprentissage numérique décimal, *Actes de la dixième École d'Été de didactique des mathématiques,* pp. 60-68, Bailleul (éd.).

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol.19, n°1, pp. 77–124, Editions la Pensée Sauvage, Grenoble.

BRONNER A. (1997), *Etude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée*, Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 7/2, pp. 33–116, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1990), Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 9/3, pp. 309–336, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1986), Les programmes et la transposition didactique. Illusions, contraintes et possibles, *Bulletin APMEP*, n° 352 pp. 32-50.

CHEVALLARD Y. (1989), Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique,* LSD-IMAG Grenoble, pp. 211–235.

CHEVALLARD Y. (1991), *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné,* Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique, *Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD2-IMAG, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1995), Les outils sémiotiques du travail mathématique, *Petit x*, n°42, pp. 33-57, IREM de Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 12/1, pp. 73–111, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1992), Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. Le problème de l'ingénierie didactique, *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*, Collection Nouvelle Encyclopédie Diderot, PUF.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, in Noirfalise (ed.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'Université d'été de didactique des mathématiques de La Rochelle,* pp. 89-118, IREM de Clermont-Ferrand.

COMMISSION INTER-IREM (1981), Enseignement de l'Analyse, *Bulletin Inter-IREM,* n°20, IREM de Lyon.

DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7.2, pp. 5-31.

DOUADY R. (1992), Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement, *Repères Irem*, n°6, pp. 132-158.

DUROUX A. (1982), *La valeur absolue, difficultés majeures pour une notion mineure*, mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université de Bordeaux I.

FROMENTIN J. (1997), La calculatrice au Collège. Un outil indispensable qui peut être dangereux*, Les maths en Collège et en Lycé*e, Collection Profession enseignant, Editions Hachette.

KUNTZ G. (1998), Saut d'obstacle : gare aux approximations !, *Repères Irem,* n°31, pp. 5-28.

LEGRAND M. (1995), Mathématiques, mythe ou réalité ?, *Repères Irem*, n°20*,* pp. 91-108, *Repères Irem,* n° 21, pp. 111-138.

LELONG-FERRAND J. (1964), *Les notions mathématiques de base dans l'enseignement du second degré*, Editions Armand Colin.

NEYRET R. (1995), *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres*, Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble.

PERRIN-GLORIAN M.J. (1999), La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point ?, *Repères Irem*, n°34, pp. 5-12.

PRUDHOMME G. (1999), *Le processus de conception de systèmes mécaniques et son enseignement. La transposition didactique comme outil d'analyse épistémologique*, Thèse de Mécanique, Université Joseph Fourier, Grenoble.

RAJOSON L. (1987), *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*, Thèse de didactique des mathématiques, Université d'Aix-Marseille II.

REVUZ A. (1972), La notion de continuité dans l'enseignement du second degré*, Bulletin de l'APMEP,* n° 283, pp. 287-304.

TEISSIER Y. (1998), *Une étude sur les notions de variable réelle et d'intervalle numérique relativement à l'enseignement de la fonction de Seconde*, Mémoire de DEA de didactiques des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble.

TROUCHE L. (1996), *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un "environnement calculatrice" : étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*, Thèse de didactique des mathématiques, Université de Montpellier II.

2. Histoire des mathématiques et de son enseignement en France

BELHOSTE B. (1995), *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels. Tome 1 : 1789-1914*, INRP, Editions Economica.

BOURBAKI N. (1969), *Eléments d'histoire des mathématiques*, Editions Hermann

CHABERT J-L., BARBIN E., GUILLEMOT M., MICHEL-PAJUS A., BROWCZYK J., DJEBBAR A., MARTZLOF J-C. (1994), *Histoire d'algorithmes, Du caillou à la puce,* Editions Belin.

COLLETTE J-P. (1973 et 1979), *Histoire des mathématiques*, Editions du renouveau pédagogique.

DAHAN-DALMENDICO A., PEIFFER J. (1986), *Une histoire des mathématiques, routes et dédales,* Editions du Seuil.

DEDRON et ITARD (1959), *Mathématiques et mathématiciens*, Editions Magnard.

DHOMBRES J. et alii (1987), *Mathématiques au fil des âges*, Groupe Inter Irem Epistémologie et Histoire, Editions Bordas.

FAREY J.M. et PERRIN P. (1995), Les logarithmes de Briggs, *Repères Irem*, n°21, pp. 61-77.

NAUX C. (1966), *Histoire des logarithmes*, Librairie scientifique et technique A. Blanchard.

YOUSCHKEVITCH A. P. (1976), *Les mathématiques arabes (VIII^{e} – XV^{e} siècles),* Editions Vrin, Paris.

3. Traités de mathématiques et manuels universitaires

BÉZOUT (1771), *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine. Première et seconde parties*, Librairie Musier, Paris.

BREZINSKI C. (1988), *Algorithmique numérique*, Editions Ellipses.

COMBETTE E. (1882), *Cours d'arithmétique à l'usage des aspirants au baccalauréat ès sciences et des candidats aux écoles du gouvernement*, Librairie Germer de Baillière et Cie, Paris.

DELACHET A. (1960), *Les logarithmes et leurs applications*, Que sais-je n° 850, PUF.

DEIDOVITCH B. et MARON I. (1973), *Eléments de calcul numérique*, Editions Mir, Moscou.

GUILBAUD G. TH. (1998), *Leçons d'à peu près*, Collection Jardin des sciences, Diderot éditeur.

LABORDE J. (1965), *Cours et exercices de Calcul numérique*, Editions Dunod.

LABORDE J. (1970), *Tables numériques de fonctions élémentaires*, Editions Dunod.

LEGENDRE A.M. (1823), *Eléments de Géométrie*, Librairie Firmin Didot Père et Fils, Paris.

MULLER J.M. (1989), *Arithmétique des ordinateurs*, Collection Etudes et recherches en Informatique, Editions Masson

VACQUANT C. et MACÉ DE LÉPINAY A. (1900), *Cours de Trigonométrie à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires*, Editions Masson, Paris.

4. Manuels scolaires de collège et de lycée

ANTIBI A. et alii (1994), *Mathématiques 2^e^,* Collection Transmath, Editions Nathan.

ANTIBI A. et alii (1995), *Mathématiques 1^re^S,* Collection Transmath, Editions Nathan.

ARTIGUES C. et alii (1986 & 1990), *Mathématiques 2^e^,* Collection Terracher, Editions Hachette.

ARTIGUES C. et alii (1987 & 1991), *Mathématiques1^re^ S et E (deux tomes),* Collection Terracher, Editions Hachette.

AUDIGIER M.N. et alii (1982), *Mathématiques 1^re^ S-E*, Collection Dimathème, Editions Didier.

BELLECAVE et alii (1981), *Thèmes mathématiques 2^e^*, Editions Nathan.

BONNEFOND G. et alii (1989 & 1993), *Mathématiques 3^ème^,* Collection Pythagore, Editions Hatier.

BONNEFOND G. et alii (1994), *Mathématiques 2^e^,* Collection Pythagore, Editions Hatier.

BOREL E. (1920), *Trigonométrie second cycle*, Librairie Armand Colin.

BOURDAIS M. et alii (1993), *Mathématiques 3^èm^,* Editions Hachette.

BOUVIER J.P. et alii (1994 & 1998), *Mathématiques 2^e^*, Editions Belin.

BOUVIER J.P. et alii (1995), *Mathématiques 1^re^S avec modules (deux tomes)*, Editions Belin.

BRABANT P. et alii (1990 & 1994), *Mathématiques 2^e^,* Collection Fractale, Editions Bordas.

BRABANT P. et alii (1995), *Mathématiques 1^re^S avec modules (deux tomes),* Collection Fractale, Editions Bordas.

CURIEL P. et alii (1989), *Mathématiques 3ème,* Collection Mistral, Editions Istra.

DELEDICQ et alii (1995), *Mathématiques 1re S (deux livres)*, Editions Hatier.

DELARUELLE D., MISSET L. (1993 & 1998), *Mathématiques 2^{e},* Collection Déclic, Editions Hachette.

FERACHOGLOU R. (1994 &1998), *Mathématiques 2^{e},* Collection Terracher, Editions Hachette.

FERACHOGLOU R. (1995), *Mathématiques 1reS (deux tomes),* Collection Terracher, Editions Hachette.

FREDON D. et alii (1981), *Mathématiques classe de seconde*, Collection Louquet, Editions Armand Colin.

GIRARD G., LENTIN A. (1964), *Mathématiques élémentaires (deux tomes)*, Cours Maillard, Editions Hachette.

GOURION M. et alii (1976), *Mathématiques 2^{e} CT,* Collection Queysanne-Revuz, Editions Nathan.

GUININ D. et alii (1990), *Mathématiques classe de seconde*, ABC Editions.

HÉMERY C., LEBOSSÉ C. (1961), *Arithmétique et Géométrie, classe de 2^{è} C,* Editions Fernand Nathan.

MOLLET-PETIT F. et alii (1988), *Mathématiques classe de 4ème,* Collection Irem-Strasbourg, Editions Istra.

5. Autres ouvrages et articles

DURAND D. (1998), *La systémique*, Que sais-je n° 1795, PUF.

FONTIER S. (1999), *Les écosystèmes*, Que sais-je n° 3483, PUF.

HEINRICH D. (1993), *Atlas de l'écologie*, Collection La pochothèque Encyclopédies d'aujourd'hui, Le livre de poche.

RABARDEL P. (1995), *Les hommes et les technologies – Approche cognitive des instruments contemporains*, Editions Armand Colin.

VÉRILLON P. (1996), La problématique de l'instrument : un cadre pour penser l'enseignement du graphisme, *Revue GRAF & TEC*, n°0, Université Fédérale Santa Catarina, Brésil.

REMERCIEMENTS

Annie Bessot m'a proposé un sujet magnifique et a cru en mes capacités à le sublimer dans le cadre d'une recherche en didactique ; avec patience mais avec fermeté, elle m'a encouragé, guidé et soutenu, sans jamais écorner mon indépendance d'esprit. Je l'en remercie affectueusement ici.

Deux professeurs du lycée de Pontcharra, Sylvaine Chambre et Guy Gavarri , malgré tous les désagréments que cela représentait pour la conduite de leurs classes, ont accepté de s'engager dans l'ingénierie didactique que je leur proposais. J'ai trouvé dans leur soutien amical et dans leur maîtrise professionnelle les conditions idéales pour mener à bien cette partie expérimentale de la thèse. Qu'ils veuillent bien accepter mes remerciements les plus sincères et les plus chaleureux ; qu'ils veuillent bien aussi dire à leurs élèves combien j'ai apprécié la gentillesse et la confiance dont ils ont fait preuve lors des trois séances.

Merci aussi à tous ceux qui, dans le laboratoire Leibniz, ont un peu de cette thèse sur leurs mains. Je pense très fort à mes compagnes et compagnons de route, thésards de l'équipe DDM, aux moments d'enthousiasme et aussi d'abattement que nous avons partagés. Ils m'en voudraient de ne pas les appeler par leur prénom : Chau, Ghislaine, Guy, Hai, Lætitia, Lalina, Néri, Maria, Paula, Tien.

ÉPILOGUE

à Joëlle

Songez qu'on n'arrête jamais de se battre et qu'avoir vaincu n'est trois fois rien
Et que tout est remis en cause du moment que l'homme de l'homme est comptable
Louis Aragon (extrait du poème "Je me tiens sur le seuil de la vie et de la mort", *Les poètes*)

La thèse a dévoré de notre temps commun et de notre énergie mutuelle. Pour toi et moi, le point final est d'abord un soulagement.

Bien sûr, à entendre les premières appréciations, à lire les premières critiques, il apparaît que ce point final n'a de valeur scientifique que par ce qu'il permet de revenir sur la question initiale, de la retravailler, afin de la rendre de nouveau apte à servir une recherche. D'ailleurs l'histoire des calculatrices et des ordinateurs de poche dans l'enseignement des mathématiques ne fait que commencer. Voici venu par exemple le temps des calculatrices symboliques. Le questionnement didactique sur les rapports entre le calcul numérique et ses instruments ne manquera pas d'être repris, renouvelé, bousculé. Tout serait-il donc à reprendre ?

A sa façon, le poète nous répond :

Le drame il faut savoir y tenir sa partie et même qu'une voix se taise
Sachez-le toujours le chœur profond reprend la phrase interrompue
Du moment que jusqu'au bout de lui-même le chanteur a fait ce qu'il a pu
Qu'importe si chemin faisant vous allez l'abandonner comme une hypothèse.
Louis Aragon (extrait du poème "Je me tiens sur le seuil de la vie et de la mort", *Les poètes*)

Et nous comprenons que, pour nous deux, ce point final a une tout autre valeur : il est promesse de moments mieux partagés.

Grenoble, le 13 juin 2001