



HAL
open science

Structures d'un film visqueux bidimensionnel continûment alimenté sous gravité déstabilisante

Christophe Pirat

► **To cite this version:**

Christophe Pirat. Structures d'un film visqueux bidimensionnel continûment alimenté sous gravité déstabilisante. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Nice Sophia Antipolis, 2004. Français. NNT: . tel-00090041

HAL Id: tel-00090041

<https://theses.hal.science/tel-00090041>

Submitted on 27 Aug 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS
FACULTÉ DES SCIENCES
INSTITUT NON LINÉAIRE DE NICE
Ecole Doctorale
Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

Spécialité : Physique

par

Christophe PIRAT

Structures d'un film visqueux bidimensionnel continûment alimenté sous gravité déstabilisante

Soutenue publiquement le 5 novembre 2004 à 15h

Jury

M. Hugues CHATÉ	Rapporteur
M. Marc GEORGELIN	Examineur
M. Lionel GIL	Directeur de Thèse
M. Laurent LIMAT	Rapporteur
M. Jean-Louis MEUNIER	Président
M. Mathis PLAPP	Examineur

à l'INSTITUT NON LINÉAIRE DE NICE

à mes parents, à ma famille, à Aurore.

REMERCIEMENTS

J'ai démarré les travaux présentés dans ce mémoire avec le stage du D.E.A. intitulé « Dynamique Non Linéaire et Applications » à l'Institut Non Linéaire de Nice. Je remercie Pierre Coulet, alors directeur de l'institut, de m'avoir suggéré de suivre les enseignements de ce DEA au moment où j'étais son étudiant dans le module « Dynamique non Linéaire » de la Maîtrise de Physique à l'université de Nice – Sophia Antipolis. Je remercie Alain Pumir, directeur du DEA, de m'y avoir accueilli.

Le stage, proposé par Lionel Gil, à la fois théorique et expérimental, était axé sur les instabilités secondaires d'une structure stationnaire hexagonale. J'ai ainsi travaillé sous la triple tutelle de Lionel Gil pour la partie théorique, et de Philippe Maïssa et Christian Mathis pour la partie expérimentale. Ces études se sont tout naturellement prolongées à la thèse, l'expérience d'hydrodynamique se révélant au fil des mois d'une très grande richesse. Je les remercie tous trois pour leur disponibilité, leur soutien constant, ainsi que pour la grande liberté qu'ils m'ont laissée pour conduire les trois années de ce travail. Je garderai en mémoire les discussions que nous avons eues, parfois très longues, et qui nous ont en certaines occasions conduits très loin de nos préoccupations initiales !

L'étude du régime désordonné rapportée au chapitre 5 a été réalisée en collaboration avec Jean-Louis Meunier et Aurore Naso. Je les remercie, en particulier cette dernière, sans laquelle ce travail n'aurait sans doute pas été aussi abouti.

Je remercie les membres du jury, Marc Georgelin, Jean-Louis Meunier, Mathis Plapp et tout particulièrement Laurent Limat et Hugues Chaté, les rapporteurs de ce travail, dont les précieuses remarques et suggestions m'ont permis de grandement améliorer la qualité de ce manuscrit.

Table des matières

1. Introduction	11
2. Le dispositif expérimental	17
2.1. Le dispositif	17
2.2. Fluide utilisé	21
2.3. Le système de pompage	21
2.4. Le refroidissement	22
2.5. Le dispositif de visualisation	22
2.6. Différentes géométries d'écoulement	23
2.7. Les différents régimes d'écoulement	23
2.7.1. Le régime de gouttes	25
2.7.2. Le régime de colonnes	25
2.7.3. Le régime de nappes	27
3. Études de différents régimes	31
3.1. Extension de la zone d'écoulement sous la grille	31
3.2. L'influence des conditions aux limites dans le régime de colonnes . . .	33
3.3. La déstabilisation de la structure hexagonale de colonnes de liquide .	40
3.4. Les défauts topologiques	41
3.4.1. La classification des défauts topologiques dans un milieu ordonné	41
3.4.2. L'exemple des spins planaires	43
3.4.3. L'exemple d'une dislocation	43
3.4.4. Destruction du réseau hexagonal par des structures localisées oscillantes	44
3.4.5. Le défaut de type octogone	44
3.4.6. L'organisation des colonnes frustrées par la géométrie	46
3.5. Le régime de nappes à deux dimensions	47
3.5.1. La dynamique de nappe	47
3.5.2. Les structures géométriques simples : les ondes progressives et les structures spirallantes	54
3.5.2.1. Les conditions d'apparition	54
3.5.3. Les structures spirallantes	55
3.5.4. Les ondes progressives	57

3.5.5.	Les structures spiralantes avec un cache central	57
3.5.6.	Les structures en nappes concentriques stationnaires	59
3.6.	Déstabilisation d'une nappe cylindrique verticale de fluide visqueux	59
3.6.1.	Introduction	61
3.6.2.	Le dispositif expérimental	62
3.6.3.	Les différents régimes d'écoulement en géométrie annulaire	62
3.6.4.	Déstabilisation d'une nappe cylindrique	63
3.6.5.	Résultats sur les nappes déstabilisées en rotation	68
3.6.6.	Conclusion	68
4.	La déstabilisation d'une structure hexagonale stationnaire	69
4.1.	Introduction	69
4.1.1.	Bifurcations dans les systèmes dynamiques spatialement étendus	69
4.1.2.	Réduction de la dynamique et arguments de symétrie	70
4.2.	L'exemple du cas unidimensionnel	72
4.3.	Sélection des vecteurs d'onde lors de la déstabilisation d'une structure hexagonale	74
4.3.1.	Le positionnement du problème	75
4.3.2.	L'analyse de Bloch-Floquet	78
4.3.3.	La sélection des vecteurs d'onde \vec{k}_c	81
4.3.3.1.	L'invariance de (4.10) par les éléments du groupe C_{6v}	82
4.3.3.2.	L'invariance de (4.10) par les translations d'espace \mathbb{Z}^2	84
4.4.	Comparaison avec des observations	90
5.	Le régime turbulent	93
5.1.	Introduction	93
5.1.1.	Systèmes confinés ou étendus : chaos temporel ou spatio-temporel ?	93
5.1.2.	Transition super-critique ou sous-critique vers la turbulence ?	94
5.1.3.	L'intermittence spatio-temporelle	95
5.1.4.	Quelques expériences « typiques » de la transition à la turbulence par IST	96
5.1.5.	L'étude de la transition dans le régime de colonnes à deux dimensions	99
5.2.	Les conditions d'étude	101
5.2.1.	La visualisation	101
5.2.2.	Le traitement d'image et la détection	103
5.3.	La transition du régime laminaire au régime turbulent	105
5.3.1.	L'huile de viscosité 50 mm ² /s	105
5.3.1.1.	Une transition du premier ordre	105
5.3.1.2.	L'intermittence spatio-temporelle	107
5.3.1.3.	Deux branches d'intermittences spatio-temporelles	107
5.3.2.	L'huile de viscosité 20 mm ² /s	110
5.3.2.1.	Une transition du deuxième ordre	110

5.3.2.2.	Deux branches d'intermittences spatio-temporelles	112
5.4.	Résultats quantitatifs	112
5.4.1.	Le premier traceur : le nombre d'objets N	112
5.4.1.1.	A $50 \text{ mm}^2/\text{s}$	113
5.4.1.2.	A $20 \text{ mm}^2/\text{s}$	113
5.4.1.3.	L'évolution temporelle du nombre d'objets	116
5.4.1.4.	La construction d'un paramètre d'ordre à partir du nombre d'objets	116
5.4.2.	Le deuxième traceur : les plus proches voisins (ppv)	119
5.4.2.1.	Le nombre de plus proches voisins n_{ppv} et la « frac- tion d'hexa » f	119
5.4.2.2.	La distance entre plus proches voisins	120
5.4.2.3.	La distribution du nombre de plus proches voisins	123
5.4.3.	Le troisième traceur : les créations-fusions (C-F) d'objets	125
5.4.3.1.	La détection des créations et des fusions	125
5.4.3.2.	Taux de créations Γ_+ et de fusions Γ_- en fonction du nombre d'objets n	125
5.4.3.3.	Un modèle statistique pour l'état désordonné	127
5.4.3.4.	La fraction moyenne de C-F	130
5.5.	Conclusion	132
6.	Conclusion et perspectives	135
A.	L'instabilité de Rayleigh-Taylor	141
A.1.	Rappel de quelques définitions en hydrodynamique	141
A.2.	L'équation de Navier-Stockes	142
A.3.	L'instabilité à proprement parler : aspect énergétique	142
A.4.	Aspect dynamique	143
A.4.1.	Le cas des films liquides minces : l'approximation de lubrification	143
A.4.2.	Le point de départ : l'équation de Navier-Stockes	144
A.4.3.	Les variables adimensionnées	144
A.4.4.	Évolution de l'interface dans les variables d'origine	147
A.4.5.	Détermination de la longueur d'onde λ^* sélectionnée par l'in- stabilité.	147
B.	Quelques notes sur les groupes et leurs représentations	149
B.1.	Les opérateurs de symétrie	149
B.1.1.	Groupe de symétrie	149
B.1.2.	Les postulats de groupe	150
B.1.3.	Quelques définitions	150
B.2.	Représentation des groupes	150
B.2.1.	Représentation matricielle	151
B.2.2.	Représentations équivalentes	151

B.2.3. Caractères de groupe	152
C. La forme des matrices rotation, parité et translations	155
D. Les instructions Maple 8	157
E. Articles	163

1. Introduction

Les systèmes physiques hors équilibre

Les notions de physique statistique de l'équilibre ne sont presque jamais applicables pour les systèmes physiques hors équilibre.

Pour étudier ces derniers, on distingue plusieurs approches. Dans des cas qui restent exceptionnels, il est possible de construire des modèles solubles exactement. On peut également utiliser des méthodes perturbatives (souvent de renormalisation). L'analyse dimensionnelle est délicate à utiliser mais plus facile à mettre en œuvre. La simulation numérique *ab initio*, quant à elle, reste coûteuse en calcul. On peut aussi obtenir des équations issues de modèles continus et en faire la résolution numérique.

Généralement, deux approches complémentaires sont possibles pour obtenir un modèle continu. On peut partir des premiers principes de la Physique microscopique. C'est une méthode délicate à mettre en œuvre avec laquelle des approximations difficiles à contrôler sont nécessaires. On peut aussi s'appuyer sur des symétries, des concepts phénoménologiques, des lois de conservation...

La notion de symétrie revêt une grande importance. En effet, la plupart des lois fondamentales résultent des symétries introduites dans les théories (ainsi que de principes fondamentaux). La notion de symétrie est liée à celle d'invariance (un système est dit posséder un *groupe de symétries* lorsqu'il est invariant sous l'ensemble des transformations du groupe). Ainsi les lois fondamentales traduisent des invariances par des groupes de transformations.

Structuration spatiale

La structuration spatiale est un phénomène très répandu dans la Nature. Physique, Biologie ou encore Sciences de la terre sont des disciplines où les systèmes peuvent spontanément développer une auto-organisation spatiale. Des exemples parmi beaucoup d'autres sont :

- les réactions chimiques auto-catalytiques étudiées par Turing dès 1952 où la concentration des réactifs peut présenter une structuration spatiale pour certaines valeurs du paramètre étudié.
- la convection de Rayleigh-Bénard (fluide chauffé par le bas)

-
- les instabilités de front séparant deux fluides comme l’instabilité de Rayleigh-Taylor, l’instabilité de Kelvin-Helmoltz (discontinuité tangentielle lorsqu’un fluide est en mouvement relatif par rapport à un autre le long de l’interface)
 - la croissance dirigée quand un solide croît au profit d’un liquide ou d’un gaz saturé (comme dans le cas de la neige)
 - les rides sur le sable du désert et sur les océans
 - les motifs sur les corps de certains animaux et des coquillages
 - des structurations variées dans le domaine de la biologie cellulaire
 - ...

Du point de vue de l’analyse théorique, l’évolution d’un système physique est en général décrit par un ensemble d’équations différentielles aux dérivées partielles. La théorie des bifurcations étudie la manière dont les solutions de ce système changent de nature (en type et en multiplicité) lorsqu’un paramètre du problème passe par une valeur seuil, *le point de bifurcation*, les symétries des équations jouant un rôle lors de la bifurcation. Ainsi, ce système régit la dynamique au voisinage de la bifurcation de l’état homogène vers l’état auto-organisé et on dit qu’il est universel car sa forme ne dépend que des symétries sous-jacentes. Les informations attachées au système physique n’apparaissent que dans les coefficients.

La structure mise à jour peut éventuellement se déstabiliser. Ce sont des instabilités secondaires :

- instabilité d’Eckhaus : c’est l’amplification des modulations de la longueur d’onde. Si celle-ci est trop petite ou trop grande, il apparaît une déstabilisation par création ou annihilation de cellules (à une dimension).
- nouvelles instabilités loin du seuil : pour une structure cellulaire unidimensionnelle, génériquement dix instabilités secondaires. Elles sont associées à des brisures de symétrie (parité, invariance par translation dans le temps, ...).
- le plus souvent, l’ultime devenir d’un système dynamique sont le chaos spatio-temporel et la turbulence développée.

Dans les milieux dissipatifs unidimensionnels hors d’équilibre, les instabilités des structures stationnaires périodiques ont fait l’objet de nombreuses études expérimentales : écoulement de Couette-Taylor [32], de Rayleigh-Bénard [33, 34], de Rayleigh-Taylor [2, 7, 10] (voir [3, 1] pour une description théorique), solidification dirigée [19, 13], instabilité de l’imprimeur [36, 37]. Des mécanismes génériques de déstabilisation tels que l’apparition d’une structuration spatiale à la longueur d’onde double [23], de l’existence de structures localisées propagatives [19, 13, 22, 10, 7], de structures localisées oscillantes (cellules anormales) [36, 37, 22] et de régimes d’intermittence spatio-temporelle [33, 20, 37, 36] ont été mis en évidence. A la recherche de comportements génériques similaires mais à deux dimensions, nous avons développé une version bidimensionnelle de l’expérience de la gouttière [10, 7].

Les motivations de la présente étude

L'expérience, proposée par Lionel Gil, dont les premières études ont démarré en mars 2001 avec mon stage de DEA, a été conçue à l'origine pour mettre en évidence des modes de déstabilisation d'une structure stationnaire hexagonale. Ses travaux étaient dans le prolongement de ceux qu'il avait réalisés à une dimension d'espace [22]. C'est dans ce cadre que mon travail de thèse a démarré, aussi bien du point de vue expérimental que théorique. Il s'agissait d'étudier les instabilités secondaires du réseau hexagonal de colonnes formé sous la grille, en s'appuyant sur les symétries du problème. Cette expérience "de coin de table", que j'ai réalisée sous la direction de Philippe Maïssa et Christian Mathis, nous a menés bien plus loin en nous montrant une grande richesse de comportements.

D'une certaine façon, on peut voir cette étude expérimentale de la structuration bidimensionnelle d'un film visqueux alimenté sous gravité déstabilisante comme étant une rencontre entre celle de l'instabilité de Rayleigh-Taylor à deux dimensions *mais sans flux* et celle à une dimension mais avec flux, toutes deux explorées à l'École Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles (ESPCI) à Paris.

Dans la première, réalisée par Fermigier, Limat, Westfreid, Boudinet et Quilliet [45], l'étude porte sur la déstabilisation d'une fine couche d'huile de silicone en gravité déstabilisante, à l'origine uniformément étalée sous une plaque de verre plane et horizontale. Cette déstabilisation est due à l'instabilité gravitationnelle de Rayleigh-Taylor qui se manifeste lorsque deux couches de fluides sont superposées et que la plus dense se trouve au dessus. Lorsque les deux fluides sont non miscibles, la compétition entre l'amplification gravitationnelle des ondes capillaires (déstabilisatrice) et les effets de tension superficielle (stabilisateurs), fait apparaître un ordre spatial. L'hypothèse de lubrification applicable en couche mince permet d'écrire la longueur d'onde du mode le plus instable ainsi sélectionné (celui croissant le plus vite).

$$\lambda_{RT} = 2\pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} = 13.3 \text{ mm}$$

en excellent accord avec l'expérience.

Cette instabilité fait apparaître après un certain temps différents motifs, prémices de gouttes. Dans ce cas, la symétrie axiale mais surtout la symétrie hexagonale centrée, apparaissent préférentiellement pour des temps longs.

Que se passe-t-il si on alimente un dispositif en fluide de manière permanente? Plusieurs expériences ont été réalisées avec différentes géométries, toutes à une dimension d'espace.

Pritchard en 1986 [46] a montré que lorsqu'un liquide s'écoule sur un plan incliné et qu'il arrive au point le plus bas, il peut se déverser de trois manières différentes, suivant le débit d'alimentation : pour un débit croissant, des gouttes, puis des colonnes

de liquide avec à chaque fois une périodicité spatiale, et une nappe de liquide qui peut être vue comme la fusion des colonnes. Il a également décrit des régimes mixtes gouttes-colonnes et colonnes-nappes ainsi que plusieurs phénomènes dynamiques.

Carlomagno [47] avait déjà observé cette périodicité spatiale dans le cas d'un déversement sur un cylindre horizontal, alors que de Luca en 1995 a réalisé l'étude du déversement d'un fluide à travers un bec, retrouvant les trois régimes possibles pour l'écoulement.

A l'ESPCI, Giorgiutti, Bleton, Limat et Westfreid [6, 7] ont étudié plus en détail les dynamiques des régimes d'écoulement sous un cylindre horizontal à débordement fendu longitudinalement à son sommet, puis sous une coupelle horizontale et circulaire à débordement, présentant des conditions aux limites périodiques. L'étude menée a porté essentiellement sur la dynamique du régime de colonnes et a mis en évidence plusieurs comportements dynamiques au delà du régime stationnaire, tel un mode oscillant à doublement de période spatiale (mode "optique"), ou encore la propagation d'une onde solitaire dans le cas de la coupelle.

Ces travaux, poursuivis par Mazel [4], ont montré un mode de dérive globale des colonnes et des états transitoires des domaines dérivants. Le diagramme de stabilité qu'il a obtenu montre la forte sélection en longueurs d'onde dans le système. Il a retrouvé les états dynamiques observés grâce à un modèle de phonons basé sur l'inertie des colonnes et qui lui a permis d'expliquer la sélection des domaines dérivants. L'étude de la nappe de fluide formée sous le cylindre horizontal, qu'il a initiée, a été poursuivie par Brunet [5]. Celui-ci s'est penché sur la stabilité dynamique des régimes laminaires qu'il a confrontée à différents modèles, et a mené une étude du régime turbulent de colonnes de liquide pouvant apparaître sous la coupelle circulaire, pour les transitoires chaotiques et en régime permanent. Il a conclu à un chaos de type "defect mediated turbulence", n'ayant pas identifié de zones laminaires et turbulentes bien distinctes, et a pu mesurer des exposants critiques qu'il a comparés à ceux obtenus dans d'autres expériences ou simulations numériques à une dimension.

Dans le cas des nappes de liquide tombantes, il s'est intéressé à la question de la stabilité et au comportement dynamique du film, lorsque celui-ci est proche de la rupture, pour les deux géométries. Sous le cylindre, des oscillations pendulaires de la nappe peuvent donner lieu à des ondes progressives droite et gauche formant un motif en damier. Le nombre de Weber We est défini comme le rapport de la tension de surface sur l'inertie. Le critère de Weber, c'est à dire le fait que We soit inférieur ou supérieur à 0.5, semble insuffisant pour expliquer les conditions d'éclatement de la nappe épaisse trouée par un objet non mouillant, le rôle du bourrelet liquide supérieur restant à clarifier. Sous la coupelle, la nappe annulaire qui se referme en cloche peut subir des oscillations qui la déforment à bas débit. En prenant en compte, entre autres, la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de cette cloche, il a été possible de calculer sa forme [42].

L'expérience originale qui a motivé mon étude s'avère être d'une grande richesse. Elle

permet d'aborder une variété de régimes d'écoulement en jouant sur les paramètres que sont la viscosité, le débit d'alimentation et la géométrie. Ainsi, elle permet l'étude du régime de goutte à goutte et de colonnes, disposées sur un réseau hexagonal, de défauts topologiques, de la transition du régime stationnaire hexagonal vers le chaos spatio-temporel pour les colonnes, de structures géométriques simples dans le régime de nappes à deux dimensions, et de plusieurs autres comportements. Le travail expérimental que je présente ici se veut une première étude des aspects les plus saillants, révélés au cours de ces travaux.

Plan du manuscrit

Le manuscrit est constitué de quatre chapitres et d'annexes. Dans le premier, je présente le dispositif expérimental, en passant en revue les fluides utilisés, le système de pompage, de refroidissement, le dispositif de visualisation ainsi que les différentes géométries d'écoulement. La dernière section présente les différents régimes d'écoulement observés lorsqu'on fait varier le débit.

Dans le deuxième chapitre, je fais l'étude de différents comportements, parmi les plus remarquables. En premier lieu, l'extension de la zone d'écoulement lorsqu'on varie le débit, puis l'influence des conditions aux limites et la déstabilisation de la structure hexagonale dans le régime de colonnes. Je décris dans la quatrième section les défauts topologiques observés dans le régime de colonnes. La cinquième section traite du régime de nappes à deux dimensions, alors qu'on s'intéresse dans la dernière section à la déstabilisation d'une nappe cylindrique avec un écoulement en géométrie annulaire.

Le troisième chapitre traite de l'étude théorique de la déstabilisation d'une structure hexagonale stationnaire. Cette étude nous permet de donner une règle de sélection des vecteurs propres (direction et norme) qui interviennent lors de la déstabilisation de cette structure.

Je traite, dans le dernier chapitre, de la transition du régime hexagonal stationnaire de colonnes (laminaire) vers un régime de chaos spatio-temporel (turbulent). Ce travail a été réalisé en collaboration avec Aurore Naso.

En annexes, viennent quelques notes sur l'instabilité de Rayleigh-Taylor et sur les groupes de symétries, la forme de plusieurs matrices ainsi que les instructions Maple en rapport avec l'étude théorique, et pour finir, les articles avec comité de lecture que j'ai écrits pendant ma thèse.

2. Le dispositif expérimental

Les caractéristiques essentielles de l'appareillage, et plus généralement du dispositif expérimental, sont décrites dans ce chapitre. Je présente les différents aspects du montage, des fluides utilisés, de la thermostatisation ainsi que les techniques de visualisation et d'acquisition.

2.1. Le dispositif

Le dispositif expérimental montré Fig. 2.1 et schématisé Fig. 2.2 est constitué d'une grille circulaire plane, perforée, en acier, jouant le rôle d'un filtre poreux. Elle est placée horizontalement dans le fond d'une chambre cylindrique en Plexiglas maintenue en dépression stable et contrôlée. Ainsi, il est possible d'établir une hauteur d'huile constante au dessus de la grille. Cette hauteur peut être réglée avec précision en jouant sur la dépression. A l'équilibre, la dépression compense exactement le poids de l'huile : il n'y a pas d'écoulement. Un apport même très faible d'huile rompt alors l'équilibre et un flux s'amorce dans le but de le rétablir. Le film formé sous la grille est alimenté en continu en huile de silicone et se déstabilise sous l'effet de la gravité.

D'un diamètre utile de 188 mm et d'une épaisseur de 1 mm, la grille est une plaque d'acier circulaire perforée suivant un motif hexagonal. Les trous circulaires et identiques espacés de 2 mm font 1 mm de diamètre (Fig. 2.3). Le pas de la grille et la dimension des trous sont beaucoup plus petits que la longueur d'onde λ_m de l'instabilité de Rayleigh-Taylor (Fig. 2.5). Nous avons vérifié que l'écoulement n'est pas résonnant avec le pas de grille. En particulier, il n'y a pas d'alignement du réseau sur la grille¹.

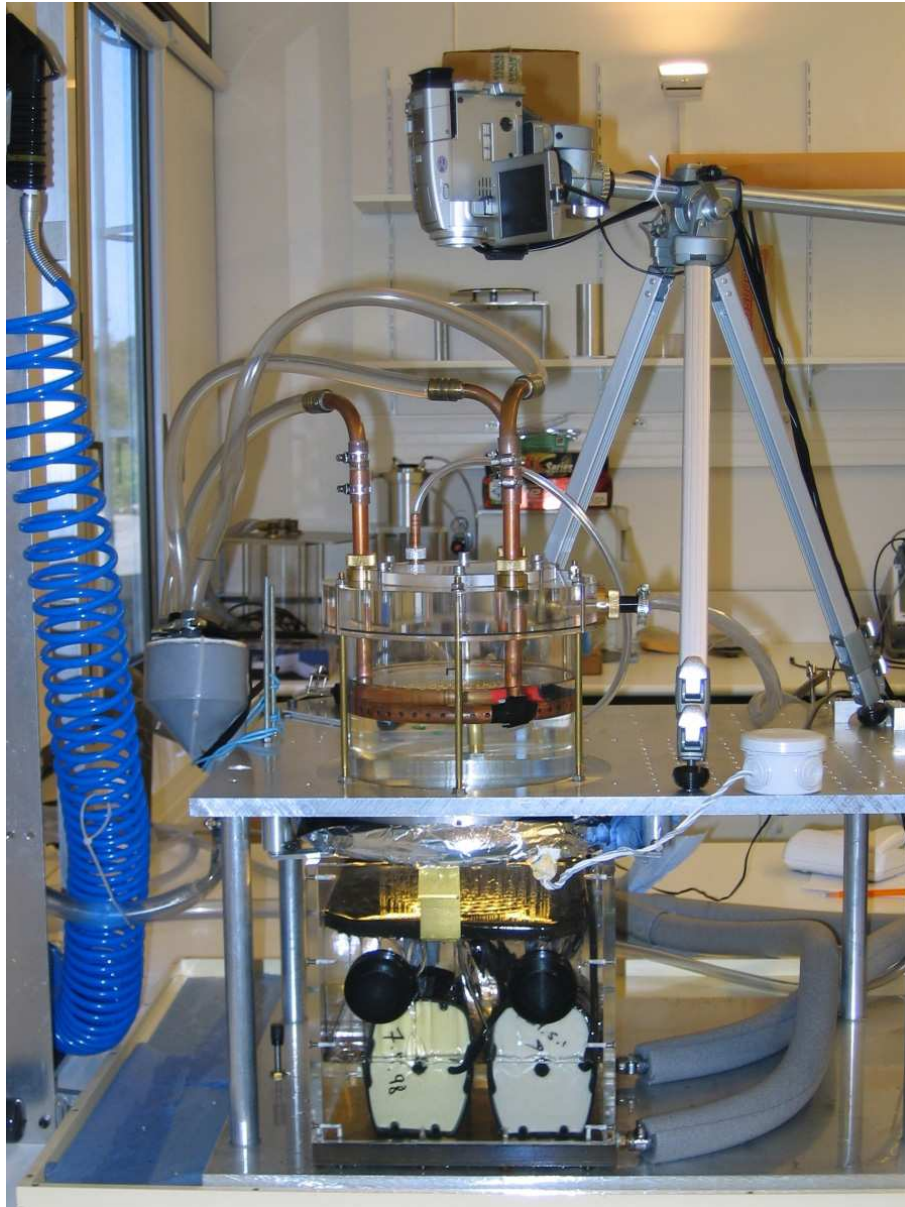


FIG. 2.1.: Une partie du dispositif expérimental. Le débitmètre est sur la gauche, hors champ.

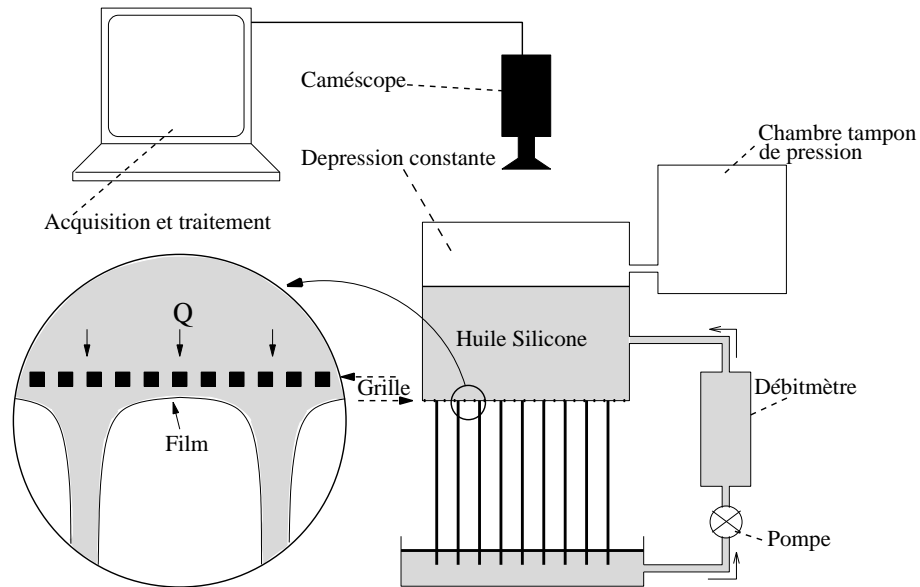


FIG. 2.2.: Schéma du montage.

huile	masse volumique (g/cm^3)	tension de surface (mN/m)	viscosité nominale mesurée à 22.5°C (mm^2/s)	viscosité mesurée (temp. de travail) (mm^2/s)
47V5	0.92	19.7	4.9	4.7
47V20	0.95	20.6	19.7	17.4
Mélange	0.955	20.7	35.0	32.0
47V50	0.96	20.7	49.5	43.2
47V100	0.965	20.9	98.0	85.0
Mélange	0.965	21.0	228.7	200.0
47V350	0.97	21.1	340.5	305.0

TAB. 2.2.: Les principales caractéristiques des huiles silicones utilisées.

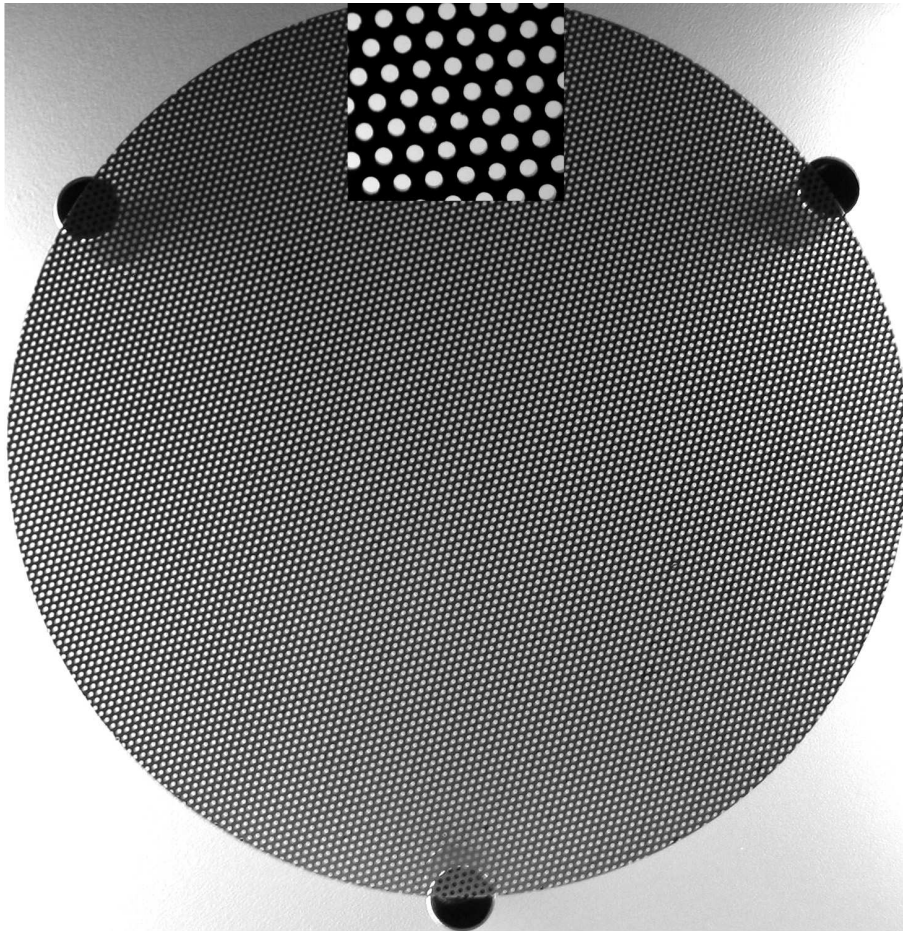


FIG. 2.3.: La grille en acier utilisée dans l'expérience.

2.2. Fluide utilisé

Nous avons exclusivement utilisé de l'huile silicone (Polydiméthylsiloxane) mais avec différentes viscosités, nominalement : $\nu = 5, 20, 35, 50, 100, 200$ et $350 \text{ mm}^2/\text{s}$. Ce fluide newtonien a la particularité d'avoir une tension de surface relativement basse autour de $\gamma = 20.6 \text{ dyn/cm}$ ($1 \text{ dyn/cm} = 10^{-3} \text{ N/m}$). Cette huile est transparente à la lumière visible, propriété indispensable dans notre cas, en raison de la technique de visualisation mise en œuvre et détaillée par la suite. Son indice optique, nettement supérieur à 1 (autour de 1.4), est lui aussi mis à profit lors de la visualisation.

Ce fluide a d'autres avantages. En effet, ses propriétés physiques n'évoluent pas au cours du temps, contrairement aux huiles alimentaires, et la tension de surface ainsi que la masse volumique dépendent très peu de la viscosité considérée (voir Tab. 2.2).

2.3. Le système de pompage

L'alimentation en huile est l'un des éléments essentiels du dispositif. On doit pouvoir être en mesure de varier le débit de façon très précise. Celui-ci doit être exempt de toute variation ou fluctuation dans le temps. Plusieurs solutions ont été initialement envisagées. Les pompes à engrenages permettent un réglage très précis du débit et une excellente régularité d'alimentation. Malheureusement, les modèles que nous avons testés ont été loin d'atteindre les débits souhaités, tout particulièrement pour les viscosités les plus hautes. Les pompes péristaltiques fournissent des débits importants et s'affranchissent très bien des hautes viscosités mais il nous a été impossible d'avoir un débit d'alimentation non pulsé.

En définitive, une solution très satisfaisante a été trouvée avec des pompes de bassin conçues pour fonctionner avec de l'eau. L'huile est amenée à la chambre par deux pompes qui doivent fonctionner en étant immergées puisque le rotor est conçu pour être lubrifié par le fluide. Les modèles sont de type Rena Flow 6000 S d'une capacité maximum de 4750 l/h et une hauteur de refoulement de 3.70 m (pour l'eau). Elles sont placées dans le bac de récupération sous la grille. Leur fonctionnement produit une augmentation importante de la température de l'huile dans le circuit d'alimentation (approximativement 15°C). Comme pour les pompes à engrenages, l'alimentation est bien régulée et les fluctuations de débit sont très faibles. Ces pompes ne sont pas équipées d'un système de réglage du débit. Dans notre dispositif, celui-ci est contrôlé par une vanne et il est mesuré avec un débitmètre à flotteur ShoRate GT 1000 avec flotteur 10-RV-64.

¹Initialement, l'expérience a été réalisée avec une grille de 0.5 mm d'épaisseur, des trous de 0.8 mm de diamètre espacés de 1.5 mm , là aussi suivant un motif hexagonal. Les résultats obtenus étaient en tous points les mêmes mais les contraintes imposées par l'écoulement dans certaines conditions (haut débit, haute viscosité) ne permettaient pas de garantir sa planéité. C'est pourquoi la grille plus épaisse lui a été préférée.

L'huile est amenée à la chambre dépressurisée par trois tuyaux de cuivre qui viennent se connecter à un tube circulaire de 17 cm de diamètre et 13 mm de section, disposé horizontalement 8 cm au dessus de la grille. Pour avoir une alimentation très homogène, ce dernier est percé régulièrement de 42 trous de 4 mm de diamètre qui distribuent l'huile tout le long de sa face extérieure.

Une hauteur d'huile suffisamment importante (de l'ordre d'une dizaine de centimètres), de façon à immerger le tube d'alimentation, lui même placé ainsi assez haut au dessus de la grille, combinée à un apport homogène, garantit une bonne uniformité du débit à travers toute la surface d'écoulement.

2.4. Le refroidissement

Comme on l'a vu, le système d'alimentation induit une augmentation de la température de l'huile. Mais la viscosité est fonction de la température (elle diminue d'environ 2% pour une augmentation d'1°C). Les autres caractéristiques physiques varient très peu avec la température, celle-ci étant mesurée à l'aide d'une résistance de platine (Pt 100), exactement au niveau de la grille. Le fond du bac de récupération est en laiton. Il contient un circuit d'alimentation parcouru par de l'eau glacée. Ce système de refroidissement, bien qu'il ne soit pas un système de thermostatisation, permet cependant d'obtenir une température en fonctionnement stabilisée autour de 30°C. Elle peut varier d'un ou deux degrés en plus ou en moins, suivant les débits et les viscosités considérés. La viscosité réelle de l'huile, qui tient compte de cette variation de température, a été mesurée et rapportée dans la Table 2.2.

2.5. Le dispositif de visualisation

L'un des grands atouts de ce dispositif est de permettre une observation directe de la dynamique du film sous la grille. Dans le but d'avoir une visualisation de bonne qualité en fonctionnement, la chambre cylindrique a été conçue entièrement en PMMA. L'observation se fait par le haut. Un éclairage rasant périphérique est disposé autour de la chambre, à la naissance de l'écoulement, donc légèrement sous le niveau de la grille (Fig. 2.4). La réfraction par le fluide rend compte de la variation de l'épaisseur du film formé sous la grille, la luminosité étant localement associée à cette épaisseur (Fig. 2.5-b). On observe ainsi l'évolution du film dans le plan de la grille directement à travers ses trous.

Un caméscope numérique de type Thomson VMD 20 est disposé à la verticale et relié à un ordinateur de type PC via une interface IEEE 1394 (FireWire) pour acquisition puis traitement. Toutes les séquences sont stockées au format DV PAL (720×576 à 25 images/s) sur disques durs sous la forme de fichiers AVI. Elles sont archivées et accessibles directement pour traitement le cas échéant.

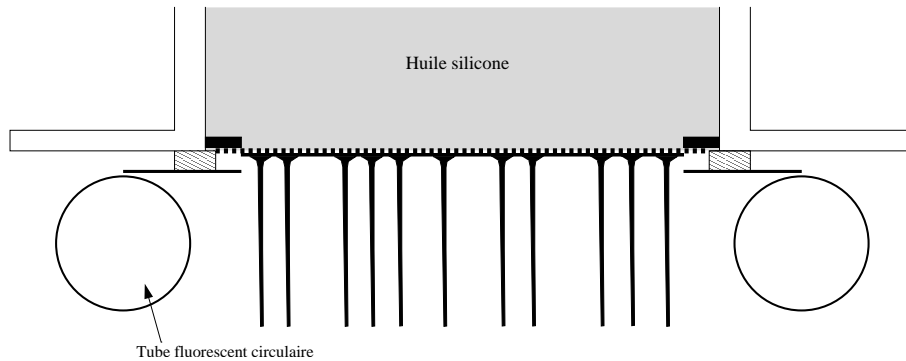


FIG. 2.4.: Un éclairage rasant périphérique permet d'observer les objets dans le plan de la grille.

2.6. Différentes géométries d'écoulement

Ce dispositif nous permet aisément d'adapter différentes géométries d'écoulement. Dans le cas bidimensionnel, les expériences ont été réalisées en jouant sur la surface de la zone d'écoulement. Dans ce cas, il s'agit toujours de disques de largeurs variables qui nous permettent de conserver une géométrie circulaire. Une étude, toujours en géométrie étendue mais quasi-unidimensionnelle, a également été menée. Dans ce cas, la géométrie d'écoulement est annulaire, le rayon de l'anneau d'écoulement ainsi que sa largeur pouvant être facilement changés, également grâce à des caches en aluminium placés sur la grille.

Le débit par unité de surface $\bar{U} = Q/S$, où S est la surface de la grille, est la vitesse moyenne du fluide. \bar{U} et la viscosité ν sont les paramètres de contrôle que nous avons utilisés. Le débit est facilement changé au cours de l'expérience au moyen d'une vanne. L'opération est plus difficile à effectuer pour la viscosité qui ne peut être modifiée qu'en changeant d'huile.

2.7. Les différents régimes d'écoulement

D'emblée, cette expérience est remarquable par la richesse des phénomènes observés lorsque l'on parcourt l'espace des paramètres viscosité/débit (Fig. 2.6).

Commençons par un tour d'horizon dans le cas bidimensionnel avec une huile d'une viscosité de $200 \text{ mm}^2/\text{s}$, en faisant varier \bar{U} . Elle nous permet de passer en revue la majorité des comportements observés, et en particulier de retrouver les trois régimes caractéristiques d'écoulement.

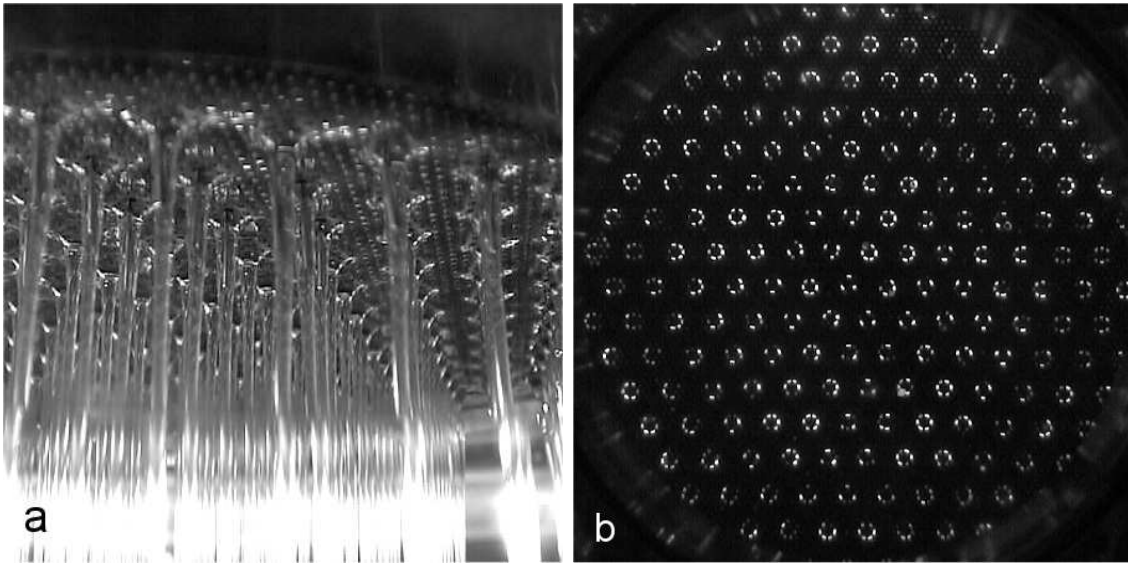


FIG. 2.5.: Réseau parfait de colonnes liquides vu : (a) par le côté, (b) par le haut, à travers les trous de la grille (viscosité $20 \text{ mm}^2/\text{s}$).

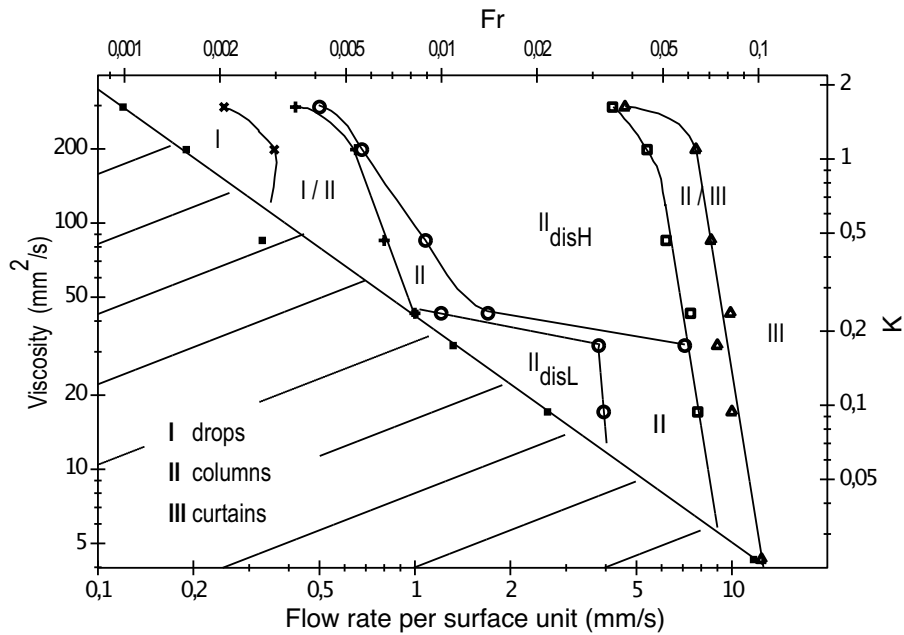


FIG. 2.6.: Le diagramme des phases dans l'espace des paramètres viscosité/débit. dis, H, L signifient respectivement désordonné, Haut et Bas

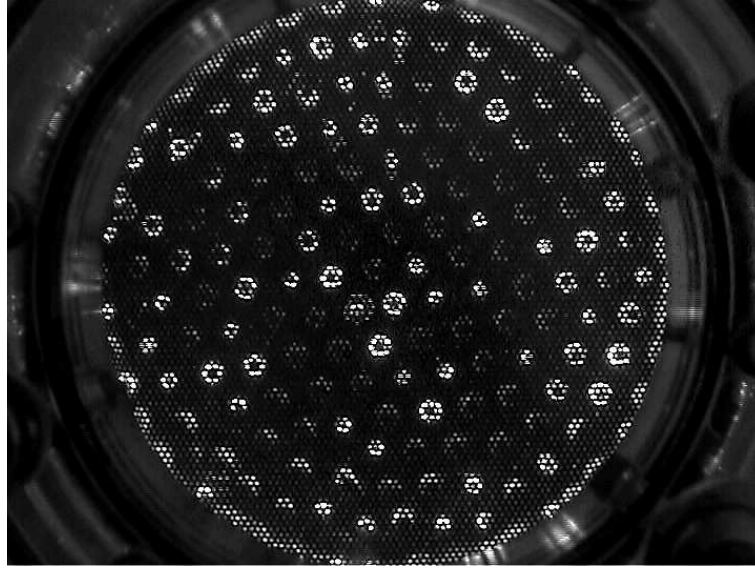


FIG. 2.7.: Réseau hexagonal centré de gouttes. $\lambda_{Dr}=13.3$ mm. (viscosité 200 mm²/s).

2.7.1. Le régime de gouttes

A débit quasiment nul ($\bar{U} \leq 0.36$ mm/s), l'instabilité de Rayleigh-Taylor déstabilise le film formé sous la grille. Un réseau hexagonal centré et stationnaire de gouttes se forme sous sa surface (zone I dans la Fig. 2.6), chutant avec une fréquence de plus en plus élevée lorsque \bar{U} augmente (Fig. 2.7). La longueur d'onde mesurée $\lambda_{Dr}=13.3$ mm est égale à λ_{RT} qui est en excellent accord avec les prédictions théoriques sans flux (voir annexe A et les travaux à 2D de Fermigier *et al.* [45]), ainsi qu'avec le travail expérimental réalisé par Giorgiutti *et al.* [7]. La fréquence de chute des gouttes, à peu près la même pour tous les sites, est d'environ 1 Hz, avec une phase relative entre elles, associée à une dynamique complexe conduisant à un motif temporel régulier observable sur une centaine de périodes. Les sites pavent toute la surface d'écoulement. Ils sont stationnaires et en nombre constant. Ainsi, comme attendu, la fréquence de chute est une fonction croissante du débit. Il est important de remarquer que le flux est non nul bien que faible. Il conduit à une meilleure stabilité du réseau de gouttes que dans le cas sans flux étudié dans [45].

2.7.2. Le régime de colonnes

L'augmentation du débit fait apparaître un écoulement continu en certains sites, c'est à dire des *colonnes de liquide*. Dans ce cas, le régime mixte de colonnes et de gouttes existe pour une gamme d'écoulement $0.36 \leq \bar{U}$ (mm/s) ≤ 0.65 (zone I/II dans la Fig. 2.6). Le taux de colonnes croît avec le débit. Les gouttes sont alors

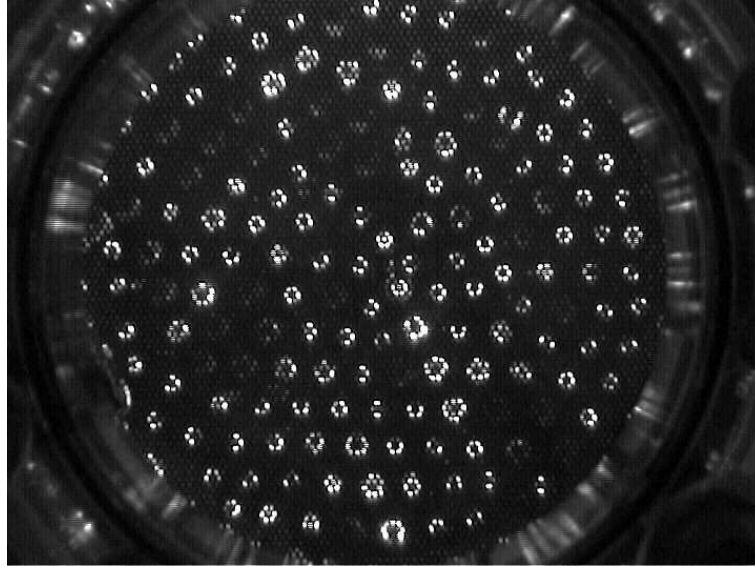


FIG. 2.8.: Régime mixte gouttes-colonnes; les gouttes se distinguent visuellement des colonnes par une variation périodique de l'intensité lumineuse. (viscosité $200 \text{ mm}^2/\text{s}$).

identifiées par la variation périodique de leur taille et de leur luminosité. L'organisation hexagonale est encore présente mais deux longueurs d'onde coexistent : la longueur d'onde associée aux gouttes λ_{Dr} et une autre plus petite associée aux colonnes $\lambda_{Co} = 11.6 \text{ mm}$. Une moyenne temporelle sur une séquence d'images dans ce régime montre cette coexistence. Les colonnes apparaissent plus lumineuses que les sites en goutte à goutte (Fig. 2.8).

Seules les colonnes existent au-delà d'un certain seuil (zone II dans la Fig. 2.6). Un motif hexagonal centré de colonnes identiques (avec une section uniforme) émerge (Fig. 2.5-b et 2.9). Ici, la longueur d'onde est partout égale à λ_{Co} , en accord avec

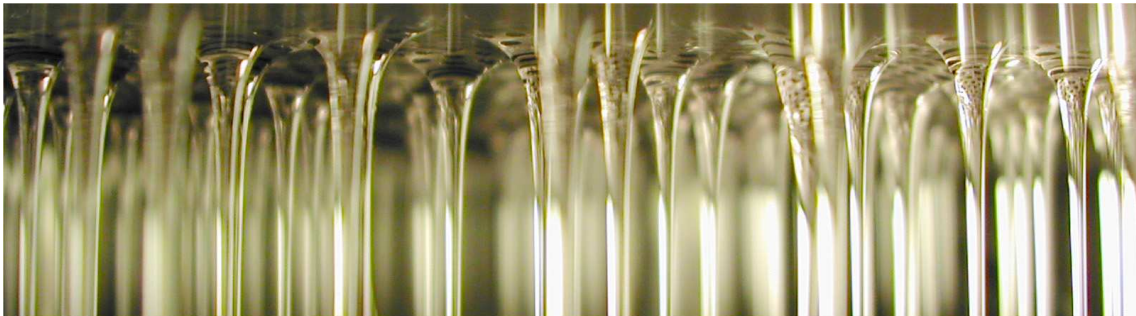


FIG. 2.9.: La zone d'écoulement dans le régime de colonnes. (viscosité $100 \text{ mm}^2/\text{s}$).

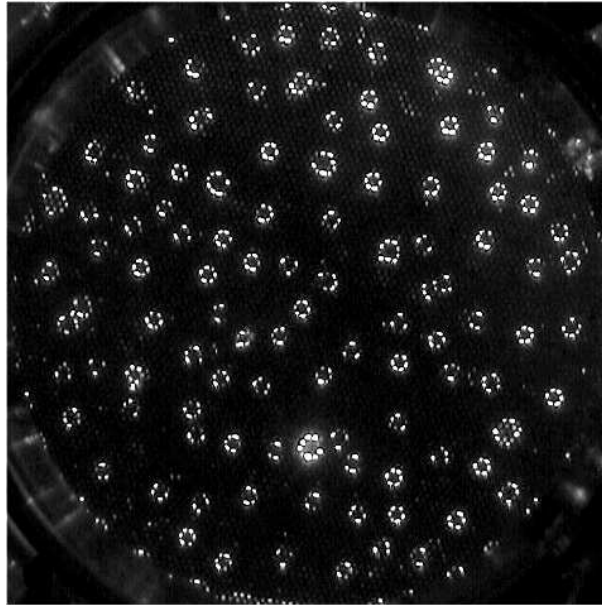


FIG. 2.10.: Colonnes en régime « turbulent » (viscosité $350 \text{ mm}^2/\text{s}$).

les résultats expérimentaux obtenus à 1D [7, 10]. L'épaisseur du film sous la grille est d'environ 0.8 mm et dépend du débit d'alimentation, tout comme la taille des colonnes.

Au-delà d'un débit seuil, le régime hexagonal (laminaire) devient instable (zone II disH dans la Fig. 2.6). Les colonnes perdent leurs positions d'équilibre et il survient un état désordonné (turbulent) caractérisé par des créations et des fusions de colonnes (Fig. 2.10). Dans ce cas, le régime est chaotique en temps et la structure spatiale est perdue. C'est le chaos spatio-temporel. Le passage du réseau hexagonal parfait au régime turbulent peut également se faire en perturbant localement et fortement le réseau (par exemple en déplaçant une colonne) à un débit plus faible. Le système, une fois établi dans le régime turbulent, ne revient jamais dans l'état hexagonal stationnaire. L'étude de la transition du régime hexagonal de colonnes vers le régime désordonné est faite au chapitre 5.

2.7.3. Le régime de nappes

L'étape suivante est une transition « colonnes vers nappes » qui prend place à haut débit, à partir de $\bar{U} = 5.4 \text{ mm/s}$ (zone II/III dans la Fig. 2.6). Dans ces conditions, l'épaisseur du film est encore augmentée et, localement, deux ou plusieurs colonnes voisines — dont le diamètre a encore crû avec \bar{U} — se connectent et forment une nappe (un rideau) de liquide (Fig. 2.11). Vu par le dessus, cela apparaît comme un « ver » ou un « rouleau ». Le nombre relatif de rouleaux augmente avec \bar{U} jusqu'à ce

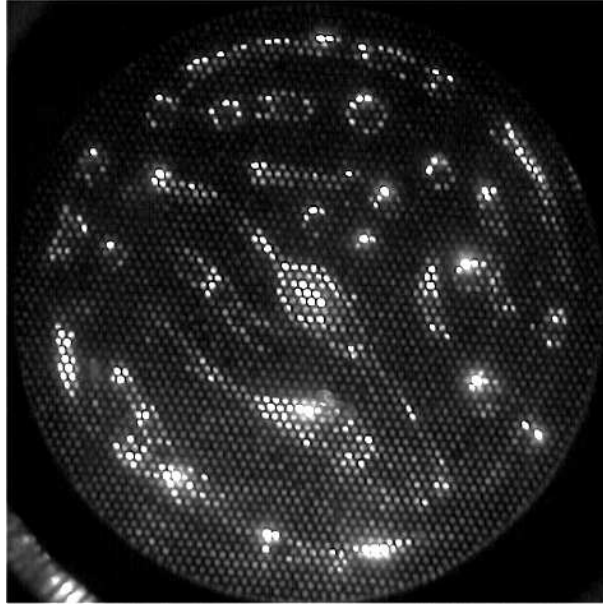


FIG. 2.11.: Régime mixte colonnes-nappes (viscosité $100 \text{ mm}^2/\text{s}$).

qu'il n'y ait plus de colonne ($\bar{U} \geq 7.7 \text{ mm/s}$, (zone III dans la Fig. 2.6). Pour des flux plus élevés, on observe une auto-organisation en rouleaux parallèles qui s'alignent pour former des ondes progressives (Fig. 2.13-a). Le plan de phase est concave avec une longueur d'onde λ_{TW} d'environ 2 cm. Ces nappes peuvent également s'enrouler autour d'un « cœur » et conduire à des spirales en rotation (Fig. 2.13-b). Dans ce cas, le nombre de bras ainsi que la vitesse de rotation sont fonction de \bar{U} et des conditions aux limites.

On peut faire plusieurs remarques par rapport au scénario précédent :

- Pour une viscosité donnée, lorsque le débit devient trop faible, l'extension de la surface d'écoulement se réduit et est couplée au débit Q de manière à ce que \bar{U} reste constante. Il s'agit de la zone hachurée dans le diagramme Fig. 2.6.
- Pour les viscosités comprises entre 10 et $50 \text{ mm}^2/\text{s}$, l'épaisseur du film et le diamètre des colonnes sont petits. Le régime de gouttes n'est jamais observé.
- Entre 10 et $35 \text{ mm}^2/\text{s}$, il n'y a pas de régime désordonné de colonnes entre le régime hexagonal et le régime mixte colonnes-nappes. Pour ces viscosités, il existe un autre régime désordonné pour un débit relativement bas (zone II disL dans Fig. 2.6).
- Enfin, pour les viscosités inférieures à $5 \text{ mm}^2/\text{s}$, on n'observe pas de réseau hexagonal de colonnes.

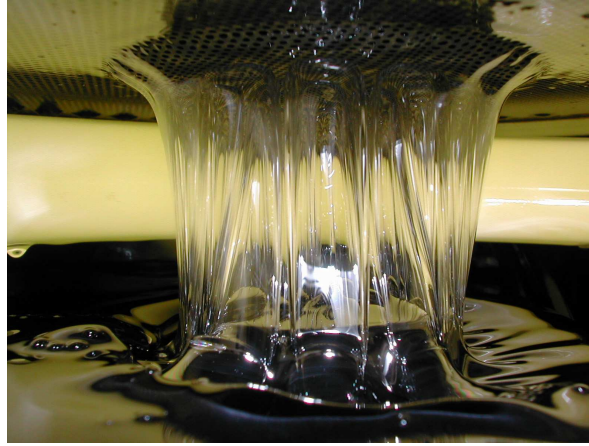


FIG. 2.12.: Régime de cellules (vue latérale) (viscosité $100 \text{ mm}^2/\text{s}$).

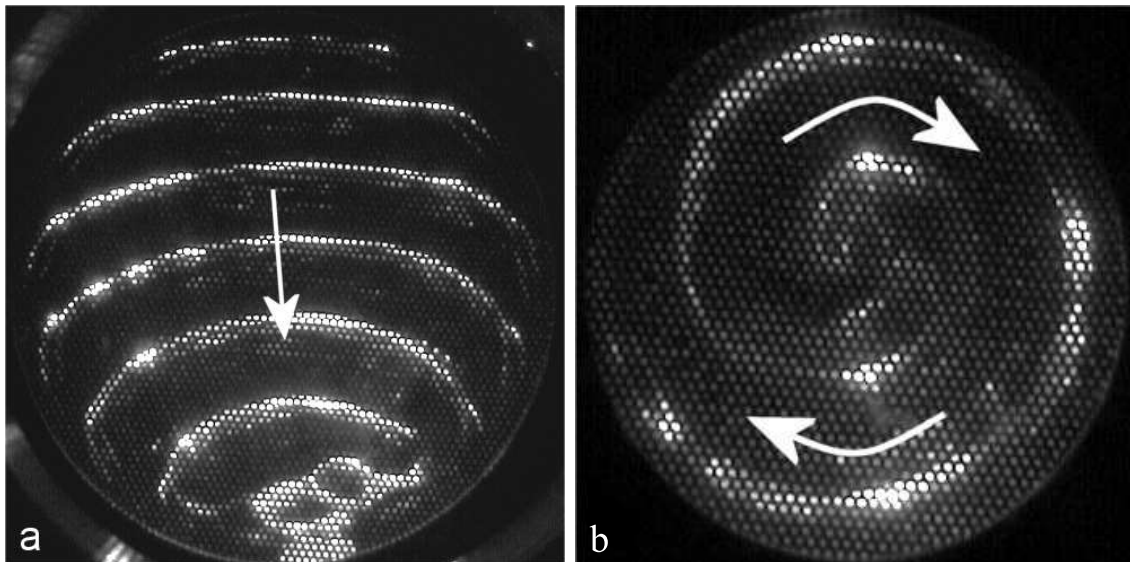


FIG. 2.13.: Pour un débit croissant : (a) ondes progressives et (b) structure spirale.

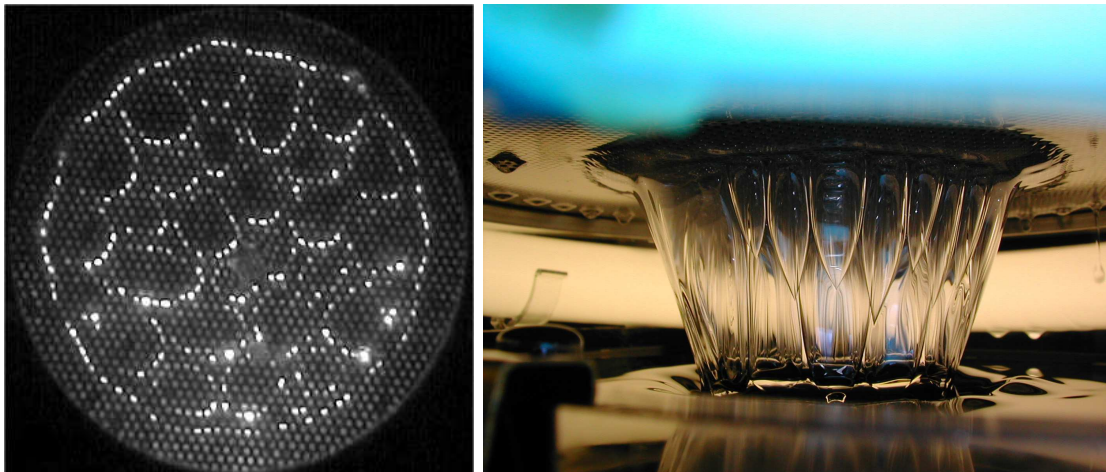


FIG. 2.14.: Régime de cellules vue par dessus (à gauche), vue latérale (à droite) (viscosité $100 \text{ mm}^2/\text{s}$).

3. Études de différents régimes

Ce chapitre se veut une première approche des comportements les plus marquants observés dans cette expérience originale, au-delà de la rapide synthèse réalisée au chapitre précédent. Les aspects abordés ont vocation à être approfondis lors d'études en cours et à venir. Dans une première section, nous nous intéressons à l'évolution du film présent sous la grille lorsque, pour un débit trop faible, l'écoulement ne se fait pas sous toute la surface. Cet état correspond à la zone hachurée sur le diagramme de l'espace des phases Fig 2.6. L'influence des conditions aux limites circulaires sur l'organisation hexagonale dans le régime de colonnes est abordé en section 3.2. Nous décrivons en section 3.3 un mode de déstabilisation de la structure hexagonale de colonnes, prévu par l'analyse théorique développée chapitre 4. La section 3.4 donne un aperçu des défauts topologiques observés dans la structure hexagonale. La section 3.5 concerne le régime de nappes à deux dimensions alors que la section 3.6 aborde le cas quasi unidimensionnel en géométrie annulaire.

3.1. Extension de la zone d'écoulement sous la grille

Une expérience a été menée dans le domaine des faibles débits, pour les viscosités de 20, 35, 50 et 100 mm²/s. En deçà d'une certaine valeur du débit, nous avons observé que l'écoulement ne se fait pas sous toute la surface. Dans ce cas, le film ne se forme que sous une portion de la grille. Lorsque l'horizontalité de la grille est parfaitement bien réglée, la zone d'écoulement est un « crépoïde » assez proche d'un disque centré au milieu de la grille (Fig. 3.1). Pour obtenir une mesure précise de la surface, on attend cinq minutes après que le régime stationnaire soit atteint.

La Fig. 3.2 (haut) montre que la surface d'écoulement croît proportionnellement (à la précision de la mesure près) au débit pour chacune des viscosités considérées, c'est à dire que la vitesse de passage de l'huile à travers la grille est constante pour une viscosité donnée.

De plus, on remarque que l'accroissement de surface avec le débit est d'autant plus important que la viscosité est élevée. En représentant le rapport de la surface d'écoulement divisée par la viscosité, en fonction du débit, les quatre ensembles de points s'alignent de manière assez remarquable (bas de la Fig 3.2). L'inverse de la pente de

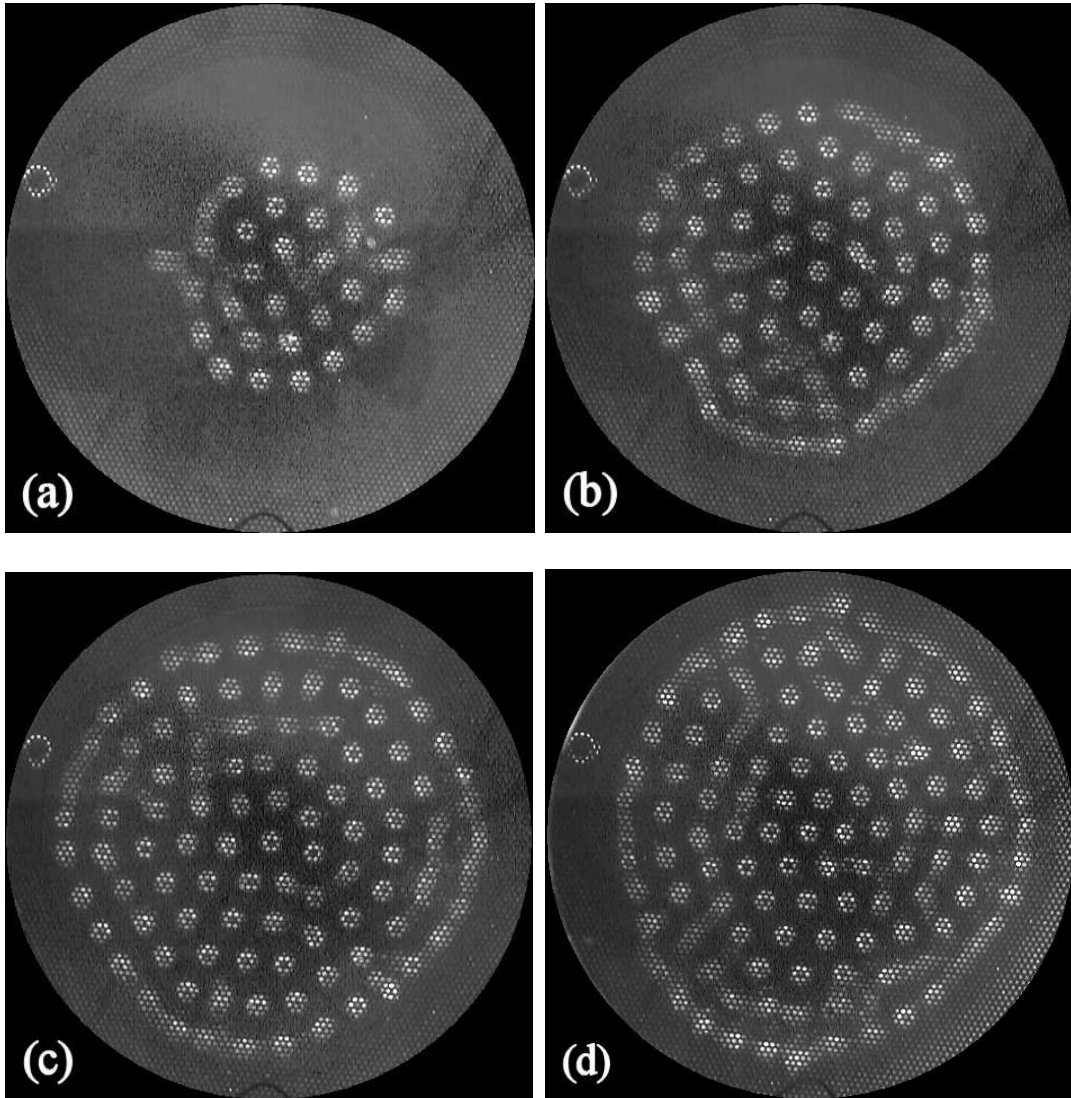


FIG. 3.1.: Variation de la surface d'écoulement en fonction du débit. De (a) à (d) : 1.5, 3.7, 5.2 et 6.2 cm^3/s . On distingue à gauche un petit objet posé sur le plan de réception qui n'a aucun lien avec l'écoulement. (viscosité 100 mm^2/s)

la droite tracée sur la figure est homogène à une tension de surface. Rappelons que les tensions de surface des huiles sont sensiblement les mêmes.

On étudie le retour à l'équilibre lors d'une augmentation brusque de débit avec une huile de viscosité $50 \text{ mm}^2/\text{s}$. Trois expériences ont été menées. Le système est initialement à l'équilibre avec à chaque fois des débits, donc des surfaces d'écoulement, comparables.

- Cas A : surface de départ 33.5 cm^2 , surface d'équilibre après augmentation brusque de débit à 117 cm^2
- Cas B : surface de départ 28.5 cm^2 , surface d'équilibre après augmentation brusque de débit à 71.5 cm^2
- Cas C : surface de départ 30.0 cm^2 , surface d'équilibre après augmentation brusque de débit à 104 cm^2

La surface d'écoulement ne suit pas instantanément l'augmentation de débit, si bien que le débit surfacique s'accroît brusquement, puis décroît exponentiellement jusqu'à la valeur nominale. L'augmentation de débit surfacique est d'autant plus brusque que l'écart imposé en débit est important.

L'évolution du débit surfacique normalisé par celui à l'équilibre, en fonction du temps est représentée sur la Fig. 3.3. La variation brusque de débit est imposée en $t=0$. En faisant l'hypothèse que l'écoulement à chaque instant se fait sur un disque, on peut facilement calculer la vitesse du front du film dans les trois situations, également représentée sur la Fig. 3.3. Le front est immobile à partir du moment où \bar{U} a trouvé sa valeur limite.

3.2. L'influence des conditions aux limites dans le régime de colonnes

Nous avons cherché à étudier très tôt l'influence des conditions aux limites sur la stabilité et la longueur d'onde dans le réseau hexagonal de colonnes. Comme on l'a vu, la longueur d'onde dans ce régime est plus petite que la longueur d'onde de Rayleigh-Taylor. Elle est légèrement inférieure à 12 mm .

Contrairement à l'expérience de Bénard-Marangoni, la position des objets en périphérie est directement influencée par le bord. En effet, une colonne ne se positionne jamais à la limite du film mais, au plus proche, à une dizaine de millimètres. De ce fait, il est possible d'obtenir un réseau hexagonal sans défaut, au sens topologique, mais déformé en périphérie. L'influence de la frontière se fait sur deux à trois longueurs d'onde vers l'intérieur du système, la déformation étant maximale le long du bord, où les colonnes se positionnent alors sur un cercle.

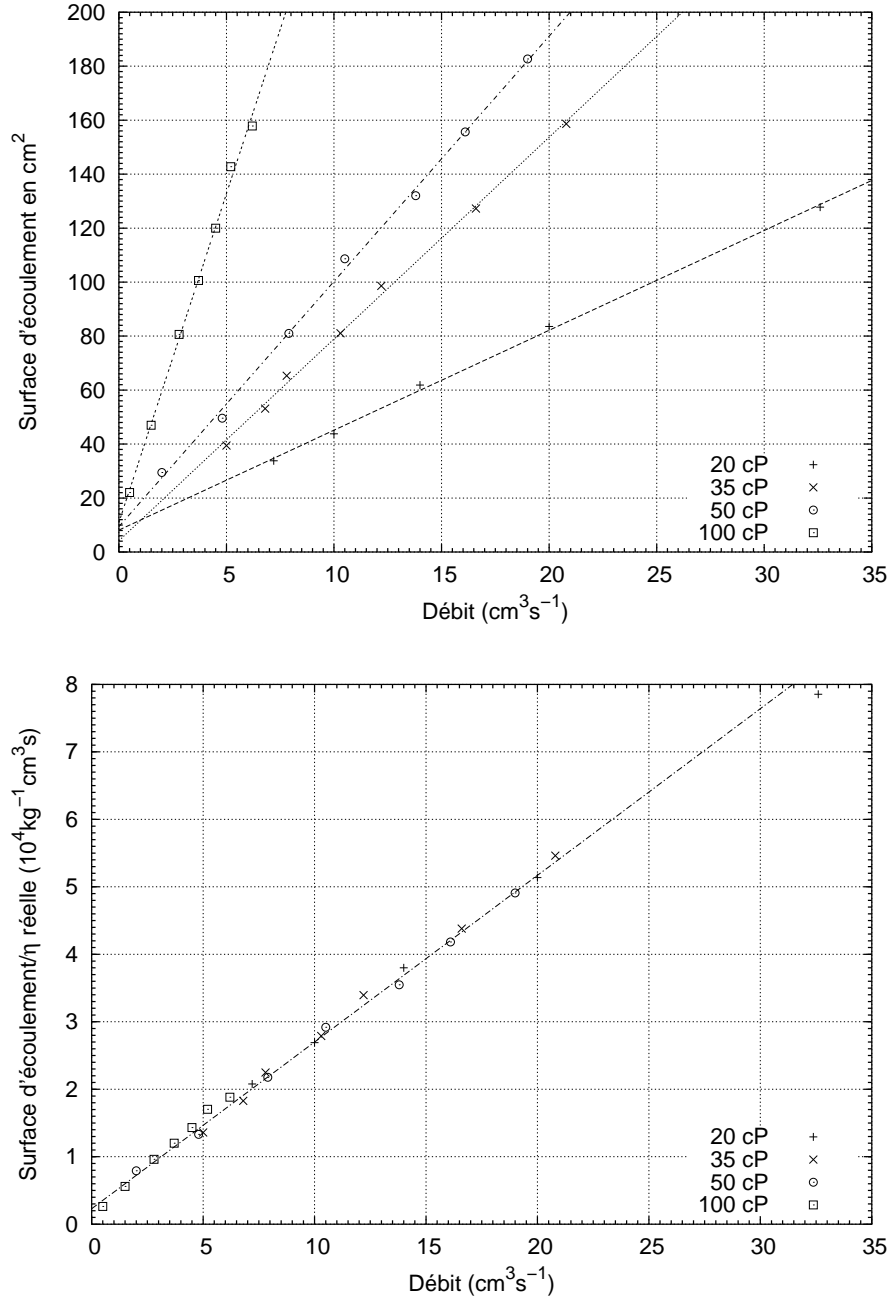


FIG. 3.2.: Surface d'écoulement en fonction du débit pour les différentes viscosités (en haut). Rapport de la surface d'écoulement sur la viscosité dynamique mesurée en fonction du débit (en bas).

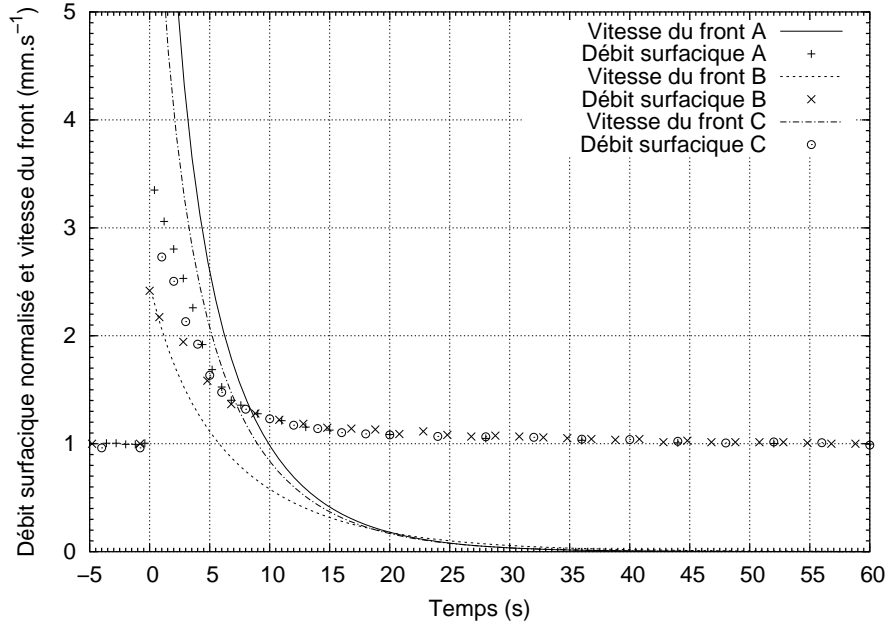


FIG. 3.3.: Débit surfacique normalisé par celui à l'équilibre et vitesse du front en fonction du temps ($\nu=100 \text{ mm}^2/\text{s}$).

Cette déformation dans la couronne externe d'écoulement fragilise localement la structure hexagonale imparfaite. Ainsi, la configuration sans défaut apparaît rarement spontanément. Le plus souvent des défauts topologiques se trouvent piégés lors de l'entrée dans le régime de colonnes stationnaires.

Nous avons donc cherché à stabiliser la structure par des conditions aux limites hexagonales en imposant une zone hexagonale d'écoulement fixée à la périphérie de la grille avec des épingles glissées dans des trous (retenues par leurs têtes). Chaque épingle déstabilise le film localement et force l'apparition d'une colonne là où elle se trouve. En aucun cas l'une de ces colonnes ne peut se déplacer. Nous n'avons pas mesuré de différence de débit entre colonnes avec et sans épingle (pas de problème de drainage). Les conditions d'une limite hexagonale sont de fait fortement remplies. Un réseau non perturbé apparaît spontanément sur une large plage de débits avec la configuration représentée à l'échelle Fig. 3.4 où la distance entre épingles est de 12 mm.

Les trous de la grille sont distants de deux millimètres. L'utilisation d'épingles nous permet de tester différentes configurations avec différents pas et dispositions. Voici une série de petites expériences qui exploitent cette possibilité : elles ont pour objet de mieux faire appréhender le comportement du système dans le régime de colonnes. Nous utilisons une huile d'une viscosité de $100 \text{ mm}^2/\text{s}$.

1. Avec une disposition analogue à celle montrée sur la Fig. 3.4 mais avec un pas

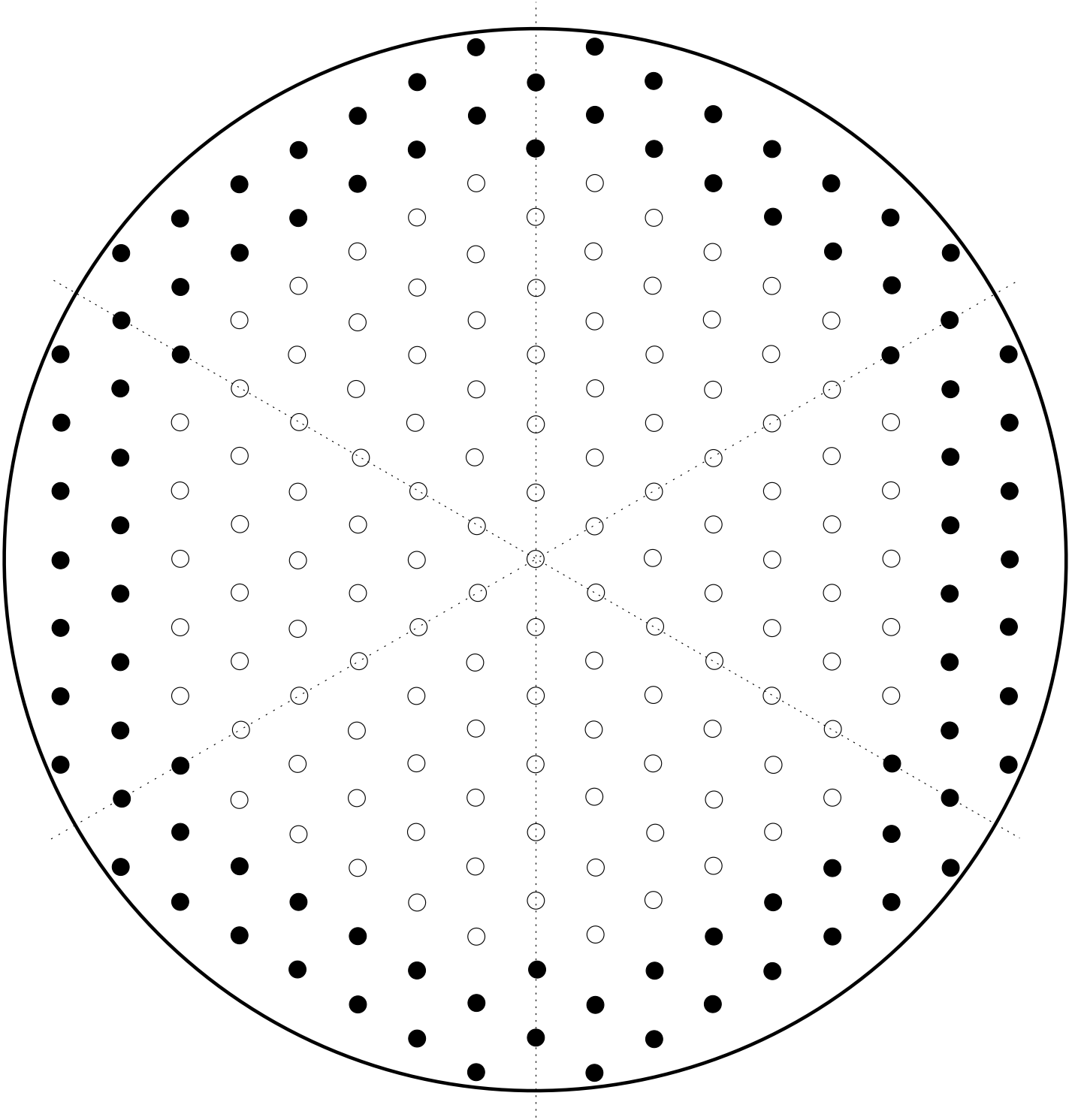


FIG. 3.4.: Représentation schématique de l'écoulement. En noir, les sites avec épingle. Le diamètre du disque d'écoulement est de 188 mm et le pas de 12 mm. Il y a 211 colonnes (schéma à l'échelle).

de 14 mm, on peut obtenir des colonnes sur un réseau hexagonal avec quelques défauts. Le pas au centre est alors de 11.5 ± 0.1 mm (débit $31 \text{ cm}^3/\text{s}$).

2. Dans une configuration similaire à celle montrée sur la Fig. 3.4, mais en laissant une épingle sur deux (le pas imposé est donc également de 12 mm), la longueur d'onde au centre est de 11.4 ± 0.1 mm (débit $33 \text{ cm}^3/\text{s}$). Dans ce cas, il y a au total 214 colonnes (2×21 colonnes avec épingle sur les deux rangées, 169 colonnes libres et trois colonnes en dehors du réseau, intercalées entre les 2 rangées d'épingles).
3. On dispose 18 épingles suivant une frontière hexagonale (une seule rangée) dont les sommets sont à 72 mm du centre. Elles sont distantes de 24 mm, ce qui impose une longueur d'onde de 12 mm (il y a une épingle toutes les deux colonnes sur cette frontière).
 - Vers un débit de $24 \text{ cm}^3/\text{s}$, on obtient un réseau stable au centre où le pas moyen mesuré est de $11,4 \pm 0.1$ mm.
 - On peut obtenir un réseau hexagonal parfait suivant le repère de la grille ; $\lambda = 11.6 \pm 0.1$ mm au centre (voir Fig. 3.5).
4. On dispose 18 épingles suivant une frontière hexagonale (une seule rangée) dont les sommets sont à 66 mm du centre. Elles sont distantes de 22 mm, ce qui impose une longueur d'onde de 11 mm (il y a une épingle toutes les deux colonnes sur cette frontière).
 - En diminuant le débit graduellement de 31 à $24 \text{ cm}^3/\text{s}$, le système s'organise, devient hexagonal avec des défauts et on obtient un réseau stable au centre où le pas moyen mesuré est de 11.4 ± 0.1 mm
 - On peut obtenir un réseau hexagonal parfait (avec une colonne au centre). Le système s'adapte par une rotation de 30° par rapport au repère de la grille. $\lambda = 11.8 \pm 0.1$ mm (voir Fig. 3.5).
5. On réalise un montage avec une surface réduite. Ici la distance imposée entre épingles est toujours de 12 mm : on dispose 18 épingles suivant une frontière hexagonale qui entoure 19 colonnes laissées libres. Partout ailleurs, on place des épingles sur toute la surface suivant un réseau hexagonal avec un pas de 12 mm (Fig. 3.6-a). Il n'y a pas d'oscillation, même à bas débit, mais un basculement en goutte à goutte.
6. On conserve le pas de 12 mm et on dispose 30 épingles suivant une frontière hexagonale qui entoure 61 colonnes laissées libres mais proche du bord du système. Partout ailleurs, on place des épingles sur toute la surface suivant un réseau hexagonal avec un pas de 12 mm (Fig. 3.6-b). On observe une oscillation des colonnes les plus proches du bord pour un débit de $13 \text{ cm}^3/\text{s}$.
7. On place des épingles sur toute la surface suivant un réseau hexagonal avec un pas de 12 mm, sauf en deux zones laissées libres, chacune à frontière hexagonale. Les deux zones ont des tailles sensiblement différentes (Fig. 3.6-c). Pour

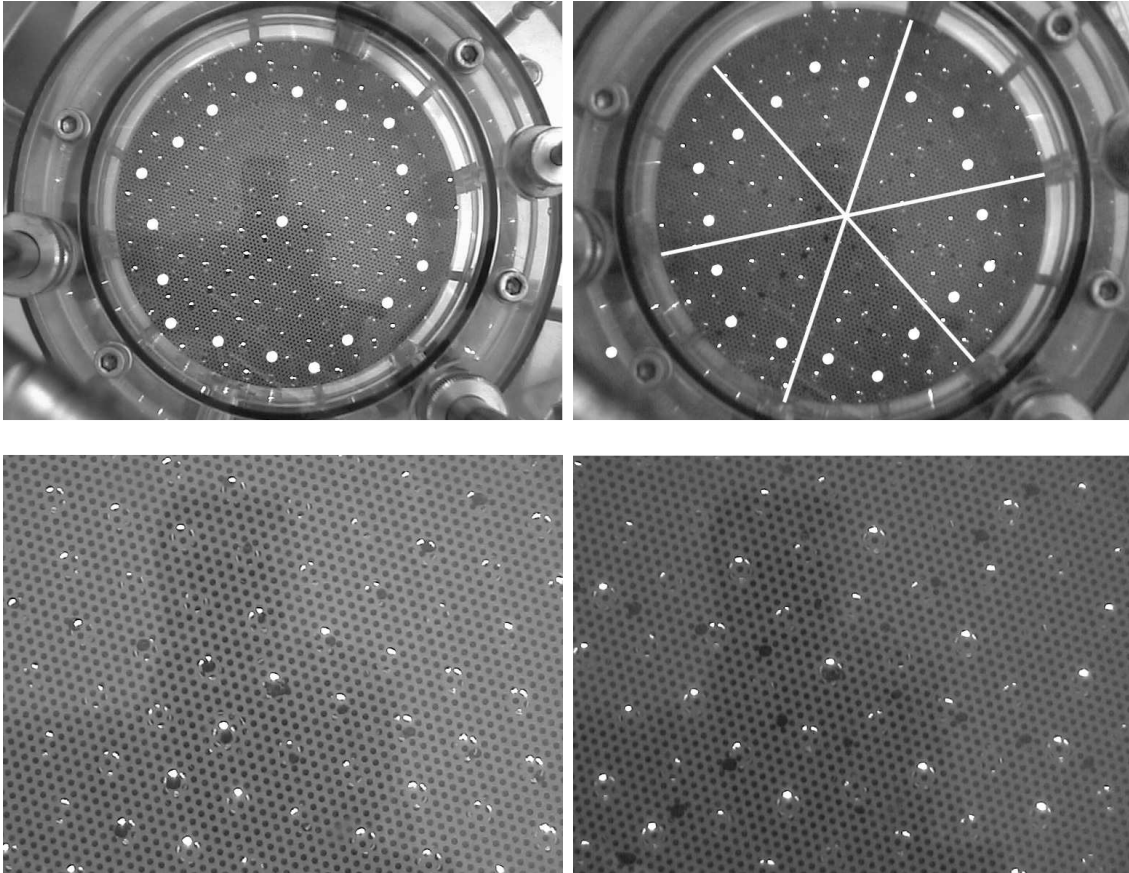


FIG. 3.5.: A gauche, le pas imposé est de 12 mm : les 6 épingles les plus éloignées sont à 72 mm du centre. Le réseau reste « aligné » avec les épingles et au centre $\lambda=11.6\pm 0.1$ mm. A droite, la longueur d'onde imposée est de 11 mm : les 6 épingles les plus éloignées sont à 66 mm du centre. Le réseau s'établit mais opère une rotation de 30° par rapport aux épingles pour adapter sa longueur d'onde. Au centre $\lambda=11.8\pm 0.1$ mm. Les positions des épingles sont symbolisées par des pastilles blanches (celle du centre ne marque que le centre de la grille).

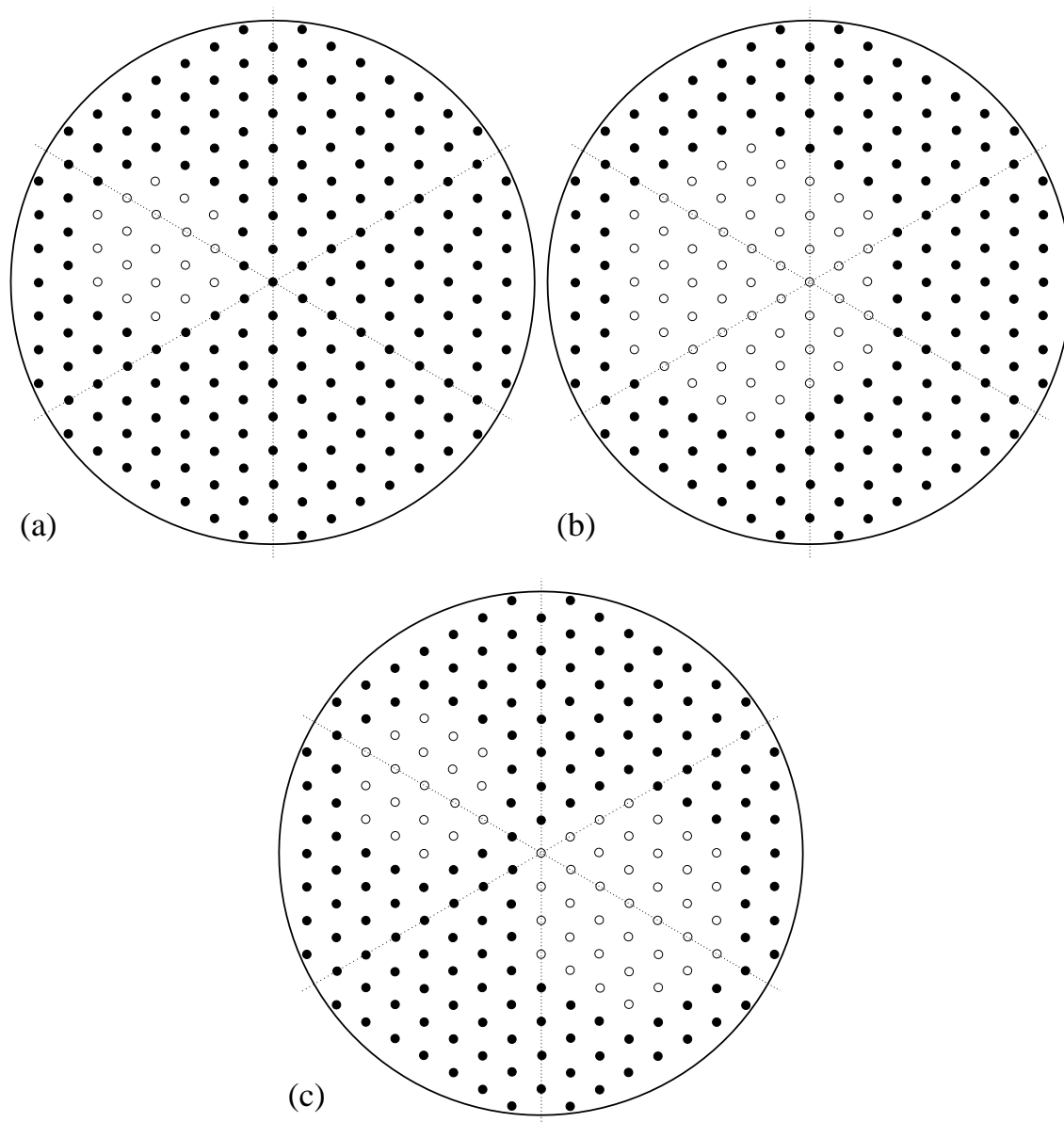


FIG. 3.6.: Représentation schématique de l'écoulement. Les sites avec épingle sont en noir et le pas imposé est de 12 mm. (a) 19 colonnes laissées libres : le réseau ne se déstabilise jamais. (b) 61 colonnes laissées libres : la frontière induit des oscillations de lignes sur les colonnes libres les plus proches. (c) Les zones d'écoulement laissées libres sont de tailles sensiblement différentes. Au départ, les deux zones sont agitées. En diminuant le débit, la plus petite est la première à devenir hexagonale.

un débit important de $139 \text{ cm}^3/\text{s}$, on observe un régime turbulent dans les zones laissées libres. Le débit est lentement diminué. Pour $103 \text{ cm}^3/\text{s}$, le système devient hexagonal stationnaire dans la petite zone mais toujours agité dans la grande. Pour $82 \text{ cm}^3/\text{s}$, les deux zones sont hexagonales stationnaires.

On peut tirer plusieurs remarques de ces petites expériences. Quel que soit le pas que l'on impose en périphérie, la longueur d'onde au centre est toujours comprise entre 11.4 et 11.8 mm. Ainsi, elle est plus faible que les pas imposés de 12 et 14 mm mais elle est plus grande que le pas imposé de 11 mm. Il est remarquable que dans cette dernière situation le réseau opère spontanément une rotation de 30° pour y parvenir. Le point 5 nous montre qu'en imposant une contrainte spatiale trop forte dans le régime de colonnes, celui-ci ne peut pas être déstabilisé : à débit croissant, il y a passage en goutte à goutte sans oscillation de ligne. Cette même contrainte géométrique permet au régime stationnaire d'apparaître plus facilement à partir du régime turbulent (point 7). Le point 6 apporte la preuve de l'influence du bord sur les oscillations, quant bien même les colonnes entre le bord et celles qui oscillent sont figées par des épingles.

3.3. La déstabilisation de la structure hexagonale de colonnes de liquide

On cherche à observer les modes de déstabilisation d'un réseau hexagonal de colonnes de liquide [30]. La condition préalable à cette observation est l'instauration de la structure hexagonale stationnaire. On réalise cette configuration avec des conditions aux limites soit circulaires, soit hexagonales (à l'aide d'épingles disposées comme sur la Fig. 3.4 dans ce cas). Dans le cas circulaire, le réseau ne s'obtient pas immédiatement le plus souvent. Il faut alors agir sur les colonnes directement à l'aide d'un outil pour éliminer les défauts un à un. Dans le cas hexagonal, en amenant progressivement le débit au bon régime, un réseau parfait prend place spontanément.

Dans les deux cas de figure, nous avons systématiquement obtenu une déstabilisation du réseau hexagonal en diminuant le débit. Génériquement, une oscillation localisée d'une colonne ou d'un petit groupe de colonnes démarre au bord et gagne les colonnes voisines. Lorsque le débit diminue, les oscillations gagnent d'autres colonnes par les bords (en évitant la zone de plus grande stabilité au centre) et leurs amplitudes augmentent. Pour un débit suffisamment faible, il apparaît un mouvement d'ensemble sous la forme d'oscillations de lignes de colonnes en opposition de phase avec une période de $1.00 \pm 0.04 \text{ s}$ (Fig. 3.7-a). On constate seulement trois directions d'oscillation. Ces oscillations ne sont pas liées aux conditions aux limites hexagonales imposées par les épingles puisqu'elles apparaissent également avec les conditions aux limites circulaires. Ce mode de déstabilisation de la structure hexagonale est le strict

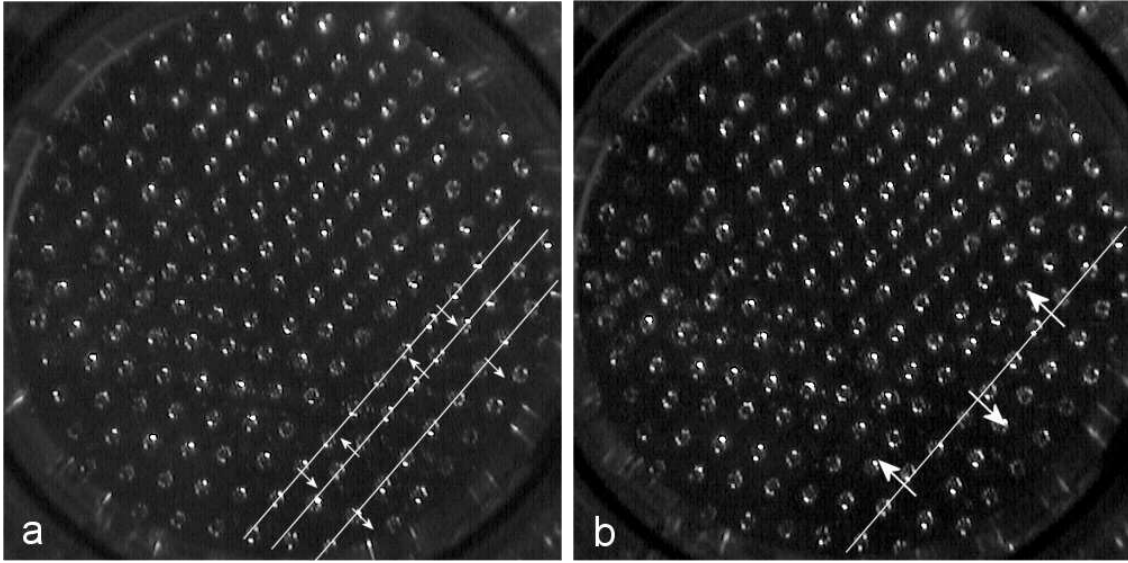


FIG. 3.7.: (a) Oscillations de lignes : les flèches indiquent le sens de déplacement (Période $T=1$ s) (b) Ondes de déphasage. (viscosité $20 \text{ mm}^2/\text{s}$)

analogue des oscillations en opposition de phase observées à 1D [7]. C'est aussi un mode de déstabilisation générique prévu par le calcul des résonances fortes d'un réseau hexagonal décrit dans le chapitre 4.

En diminuant davantage le débit, l'amplitude des oscillations de lignes croît et des ondes de déphasage le long des lignes de colonnes viennent se superposer à la dynamique précédente (Fig. 3.7-b). Une diminution supplémentaire conduit à la destruction de toute la structure.

Dans la situation où des défauts topologiques se trouvent piégés, les oscillations persistent mais en sont affectées. Les défauts inhibent localement ces oscillations.

3.4. Les défauts topologiques

3.4.1. La classification des défauts topologiques dans un milieu ordonné

Cet exposé suit la description de Toulouse et Cléman [11]. Pour une revue plus complète, le lecteur intéressé pourra consulter [12].

On caractérise la nature de l'ordre dans un milieu ordonné de dimension \mathbf{d} par un paramètre d'ordre de dimension \mathbf{n} . Il peut s'agir d'un scalaire réel ou complexe, d'un vecteur. . . , suivant le milieu considéré.

Le paramètre d'ordre est défini en chaque point du milieu et caractérise l'état interne du milieu en ce point. Sans distorsion, l'état interne est le même en tout point. Dans le cas contraire, il existe une variation de cet état interne de point en point. Pour qu'il existe un défaut (une singularité) de dimension d' , cette variation est naturellement nécessaire mais pas suffisante comme on va le voir.

On peut représenter chaque état interne par un point dans l'espace (abstrait) des états internes. On se restreint dans cet espace à la variété \mathbf{V} des états internes de dimension $n - 1$, sous-espace correspondant aux valeurs du paramètre d'ordre de même amplitude. Ainsi, pour un paramètre d'ordre de dimension n , la variété des états internes est $V = S_{n-1}$, une sphère de dimension $n - 1$. Si $n = 1$, $V = S_0$ est constituée de deux points, si $n = 2$ $V = S_1$ est un cercle, si $n = 3$ $V = S_2$ est une sphère, etc...

D'un point de vue topologique, on tente de caractériser un défaut de dimension d' en l'entourant dans l'espace réel par un sous espace S_r de dimension r tel que $r = d - d' - 1$. Cela définit une application par laquelle S_r a une image S' contenue dans V .

Toutes les applications possibles peuvent être classées par classe d'applications équivalentes. Ainsi, les applications d'une même classe peuvent être continûment déformées pour être ramenées les unes vers les autres à l'intérieur de V .

L'ensemble des classes d'équivalence associées à un chemin de dimension r s'appelle le r -ième groupe d'homotopie de V et s'écrit $\pi_r(V)$.

On distingue deux cas :

- $\pi_r(S_m) = 0$ pour $r < m$. Dans ce cas, le groupe est trivial et ne contient qu'un seul élément et il n'y a pas de défaut topologique stable. En effet, par construction V est ici un espace connexe pour tout chemin fermé S' qu'il contient. Ce dernier peut donc toujours être continûment ramené à un point.
- $\pi_m(S_m) = \mathbb{Z}$. Dans ce cas, des défauts topologiquement stables peuvent exister et chaque élément de ce groupe est la charge topologique du défaut considéré (voir exemples).

La stabilité d'un défaut est donc déterminée par l'écart relatif des dimensions r du chemin entourant le défaut et n du paramètre d'ordre. Ainsi, on constate qu'un défaut est stable si $r = n - 1$, c'est à dire si $d = d' + n$.

Donc

- pour $n > d$, il n'y a pas de défaut topologiquement stable
- pour $0 < n \leq d$, il y a un type de défaut stable, c'est le triangle des défauts dans le plan n, d : si $n = d$ c'est un point, si $n = d - 1$ c'est une ligne, si $n = d - 2$ le défaut est une paroi, etc ...

- pour $n = 0$, il n’y a pas de domaine ordonné et le cœur du défaut occupe tout l’espace
- pour $n < 0$, de nouveau, il n’y a pas de défaut topologiquement stable

3.4.2. L’exemple des spins planaires

Il s’agit de vecteurs de norme fixée et dans le plan. Ici $d = 2$ et $n = 2$ donc $d' = 0$ et $r = 1$. Les seuls défauts topologiquement stables sont les points. On entoure ces défauts par des contours fermés de dimension $r = 1$. Dans ce cas $\pi_1(S_1) = \mathbb{Z}$. Voir Fig. 3.8.

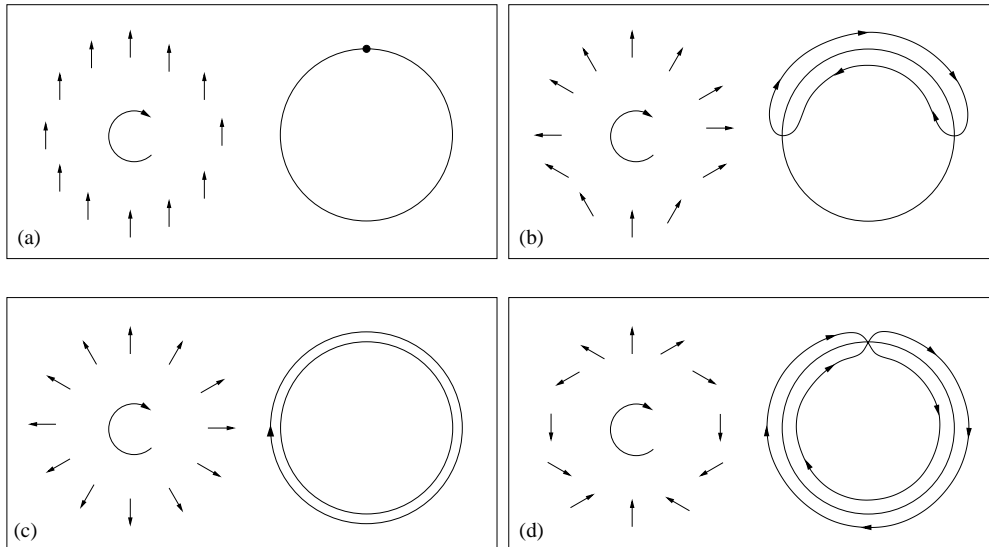


FIG. 3.8.: Les spins planaires. Dans chacun des quatre cas, l’espace physique est représenté à gauche et la variété V dans l’espace “abstrait” des états internes à droite. (a) et (b) charge topologique (0), (c) charge topologique (+1), (d) charge topologique (+2).

3.4.3. L’exemple d’une dislocation

Dans le cas d’une structure en rouleaux dans le plan, avec un paramètre d’ordre de dimension 2, comme $\pi_1(S_1) = \mathbb{Z}$, seuls les défauts ponctuels sont topologiquement stables. Ils prennent ici la forme de dislocations. Ils correspondent à la rotation d’un multiple entier de 2π de la phase du paramètre d’ordre autour du cœur du défaut.

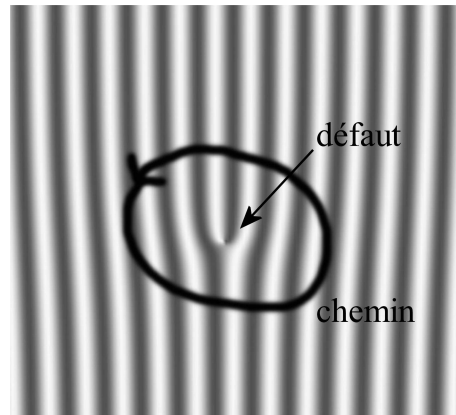


FIG. 3.9.: Représentation d'une dislocation dans le plan. La phase du paramètre d'ordre fait un tour de 2π dans la variété V des états internes.

3.4.4. Destruction du réseau hexagonal par des structures localisées oscillantes

Il est possible d'obtenir un réseau de colonnes imparfait en partant d'un débit faible que l'on augmente brusquement. Il arrive alors qu'un ou plusieurs défauts topologiques de type pentagone-heptagone se retrouvent piégés (Fig. 3.10-a). Génériquement oscillants à leur création, ils peuvent évoluer de différentes façons :

- après quelques oscillations, réarrangement des colonnes dans un réseau parfait
- les oscillations s'arrêtent brusquement et il persiste un défaut stationnaire de type pentagone-heptagone (Fig. 3.11)
- déplacement du défaut de deux façons différentes : un déplacement lent par processus de création-destruction successifs de proche en proche ou disparition d'un défaut et réapparition plus loin (peut-être un couplage global par conservation du débit).
- enfin, de façon plus intéressante, le défaut peut continuer à osciller. Typiquement, on observe alors, au cœur d'un heptagone, une colonne mobile dont la position oscille périodiquement (Fig. 3.10-b). On constate également un mouvement faible des colonnes alentour.

La Fig. 3.12 montre qu'un défaut penta-hepta est associé à deux dislocations dans deux des trois directions du réseau.

3.4.5. Le défaut de type octogone

Un autre type de défaut a été observé, uniquement pour de faibles viscosités. Dans ce cas, la structure est hexagonale mais il manque une colonne (Fig. 3.13). L'organi-

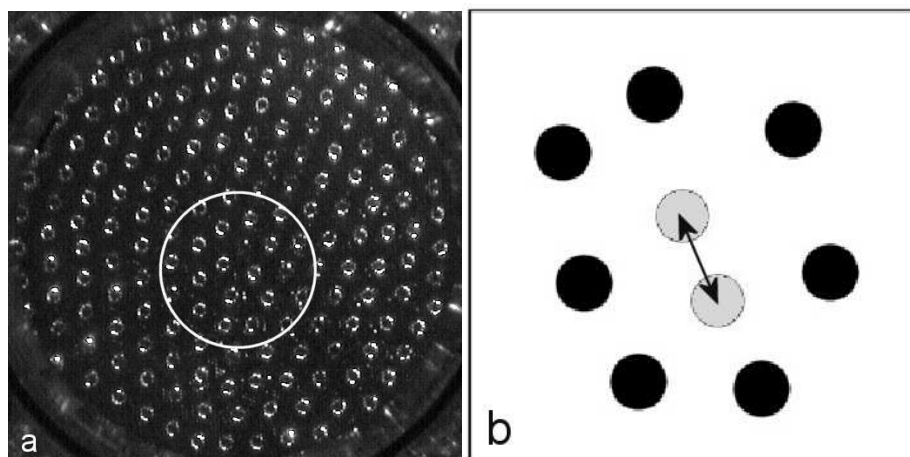


FIG. 3.10.: (a) Une paire pentagone-heptagone, (b) L'oscillation se caractérise par le mouvement de va et vient du centre d'un heptagone entre les deux positions extrêmes en gris. (viscosité $20 \text{ mm}^2/\text{s}$)

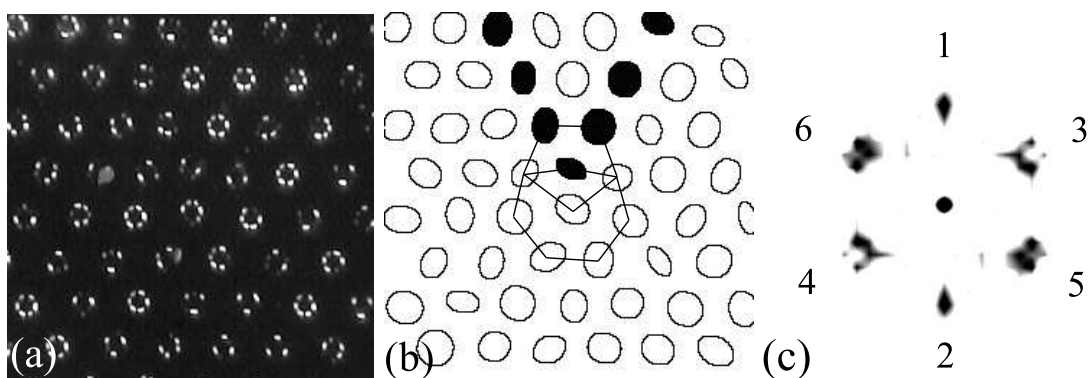


FIG. 3.11.: (a) Une vue restreinte à un défaut stationnaire de type penta-hepta. (b) Ce défaut est associé à deux lignes de colonnes qui prennent naissance au cœur du pentagone et qui forment un angle d'environ 60° entre elles (en noir). (c) Spectre de Fourier associé à cette structure. (viscosité $20 \text{ mm}^2/\text{s}$)

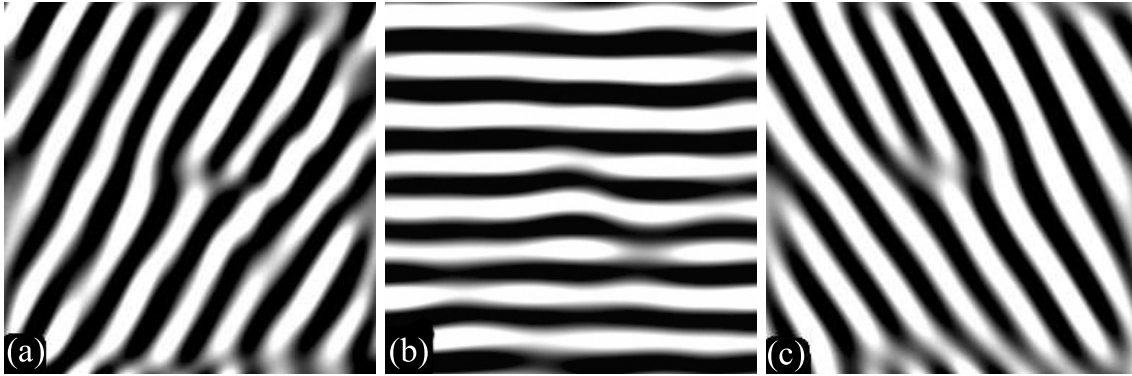


FIG. 3.12.: Reconstitutions par transformées de Fourier inverse de 3.11-c. (a) est associé aux pics 5 et 6, (b) est associé aux pics 1 et 2 et (c) aux pics 3 et 4.

sation est localement octogonale. La colonne au centre de l'octogone oscille rapidement, et atteint alternativement des positions proches de celles qu'occuperaient des colonnes dans la situation sans défaut. Les autres colonnes restent immobiles. Cette situation est comparable à celle observée à une dimension dans une expérience de digitation visqueuse réalisée par Michalland et Rabaud, dans laquelle ils ont observé une paire de cellules asymétriques à l'interface (cellules « anormales ») [37].

3.4.6. L'organisation des colonnes frustrées par la géométrie

Dans le cas précédent, la surface d'écoulement était réduite à 95 cm^2 , mais comme dans le cas des défauts penta-hepta, il ne s'agit pas d'une condition nécessaire. Cette configuration est observée également pour une surface d'écoulement maximale. A l'inverse, certaines organisations de colonnes n'existent que si le confinement du système est suffisamment important. La Fig. 3.14 montre quelques exemples. Dans le cas (a), on observe le cas sans défaut. En (b), la colonne au centre a sept voisines. C'est la configuration de type penta-hepta déjà vue. En (c), il y a de nouveau sept colonnes autour du centre mais il n'y a pas de pentagone. Toutes les autres colonnes qui ne sont pas sur le bord ont toutes six voisines. Une telle configuration n'a pas été observée avec une géométrie moins frustrée.

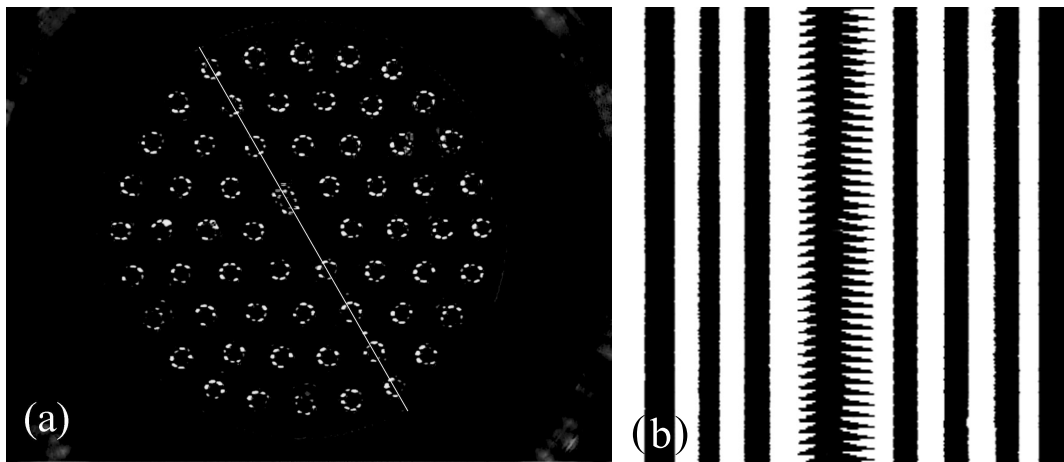


FIG. 3.13.: (a) Une configuration sans défaut, mis à part un octogone dont le centre oscille, toute la structure restant par ailleurs stationnaire. (b) Diagramme spatio-temporel réalisé sur 10 secondes. Période d'oscillation $T=0.24$ s. ($\text{Ø}110$ mm, viscosité 20 mm²/s).

3.5. Le régime de nappes à deux dimensions

3.5.1. La dynamique de nappe

L'observation directe d'une nappe dans le régime mixte nappes/colonnes nous apprend que la courbure de celle-ci est directement reliée à son mouvement (Fig. 3.15). Plus précisément, la nappe, dont les deux extrémités restent fixes sans intervention extérieure, se redresse et finit par s'immobiliser lorsqu'elle est rectiligne. Dans tous les cas de figure similaires, la nappe arrête brusquement son évolution à ce stade. En aucun cas la courbure ne s'inverse et il n'y a pas d'oscillation de la nappe autour de sa position d'équilibre. Pour cette étude, le débit est fixé à 180 cm³/s.

Une expérience simple permet de mettre en évidence le rôle de la courbure. La Fig. 3.16 en montre les différentes étapes. En (a), une nappe apparaît sur le bord en bas à gauche. Cette nappe se redresse et s'immobilise dans une configuration rectiligne en (b). On remarque une autre nappe à proximité, sur le côté droit. Les deux nappes se connectent en raison de l'agitation dans le système, conduisant à une seule nappe avec un coude presque à angle droit proche de son milieu. La portion autour du coude, montrée la flèche en (c), se met aussitôt en mouvement, dans le sens de la concavité, c'est à dire vers le centre du système. Toute la nappe se courbe et on constate que sa portion gauche se remet en mouvement sous l'effet de cette courbure. Il ne s'agit pas seulement de la traction venant de la droite, induite par l'avancée du coude, puisque son extrémité gauche se déplace également.

Revenons à la grande nappe observée sur la Fig. 3.15. Un traitement d'image nous

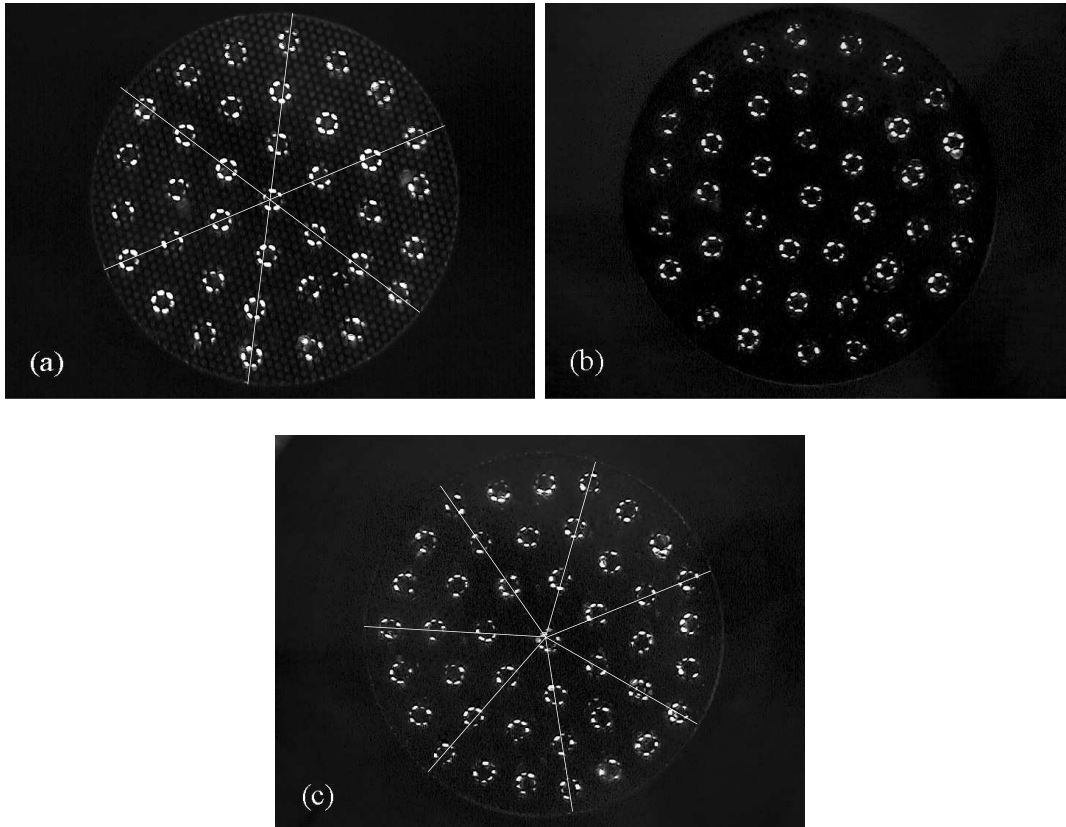


FIG. 3.14.: (a) Une configuration hexagonale stationnaire avec $\text{Ø}80$ mm. Il y a une colonne au centre, puis 6, 12 et 18 en périphérie, (b) La configuration est stationnaire mais plus hexagonale. Il y a une colonne au centre, puis 7, 13 et 19 avec $\text{Ø}80$ mm. (c) Une configuration de type 1, 7, 14, 21 avec $\text{Ø}110$ mm (viscosité $20 \text{ mm}^2/\text{s}$).

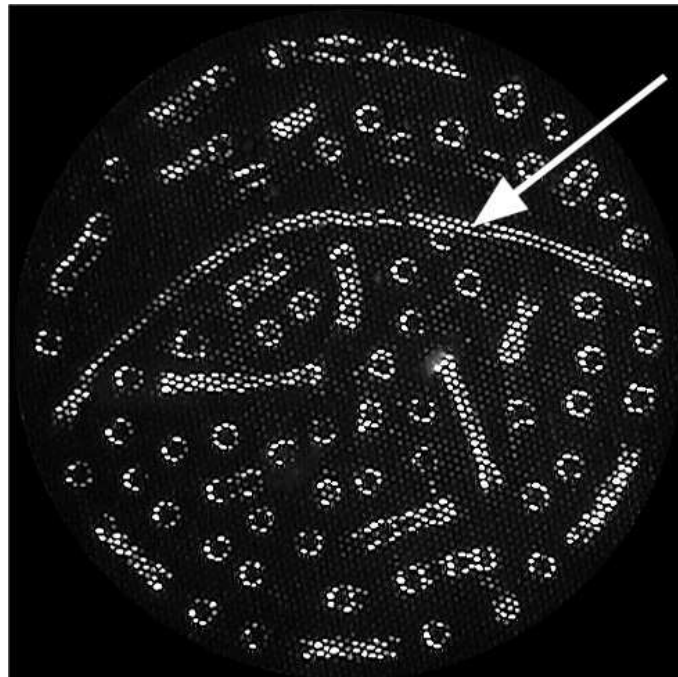


FIG. 3.15.: Une grande nappe dans le régime mixte colonnes/nappes. Le cliché correspond au temps 0.88 s dans l'échelle de la Fig. 3.17. (viscosité $20 \text{ mm}^2/\text{s}$, débit $180 \text{ cm}^3/\text{s}$).

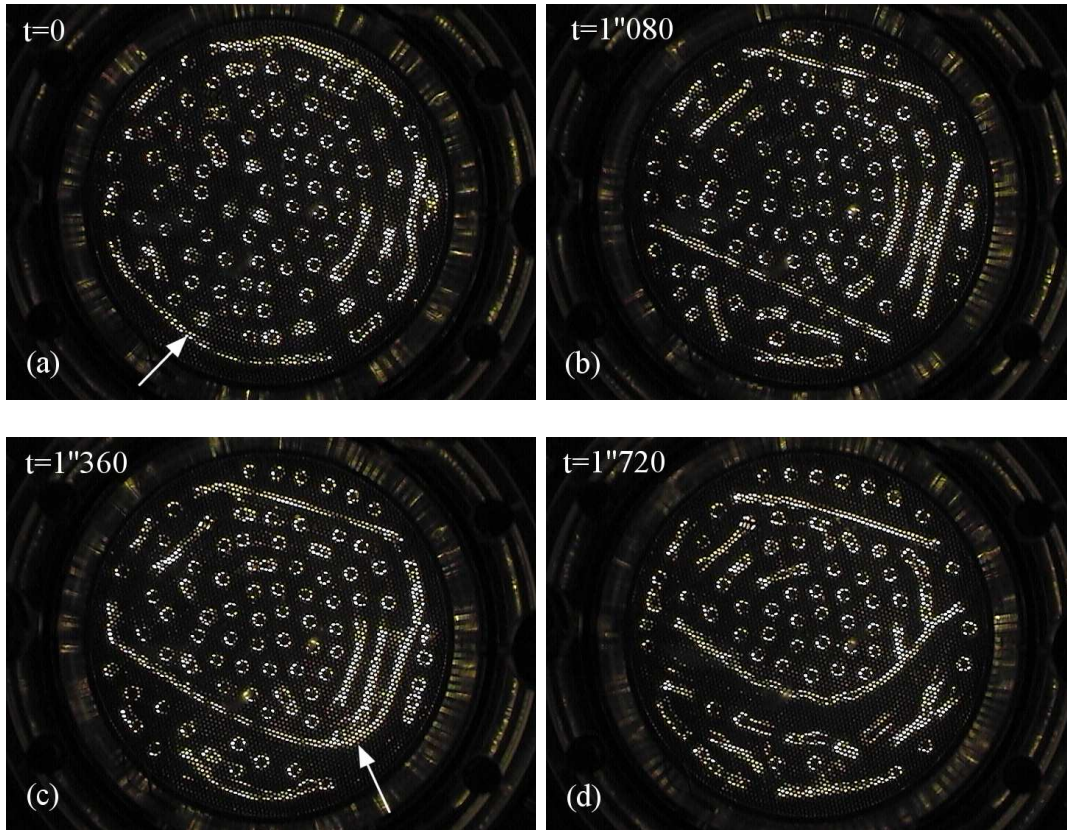


FIG. 3.16.: La nappe montrée en (a) se redresse et s'immobilise. Sa fusion avec celle de droite en (b) induit une courbure qui la fait de nouveau avancer (en (c)), toujours dans le sens de la concavité (en (d)). (viscosité $20 \text{ mm}^2/\text{s}$).

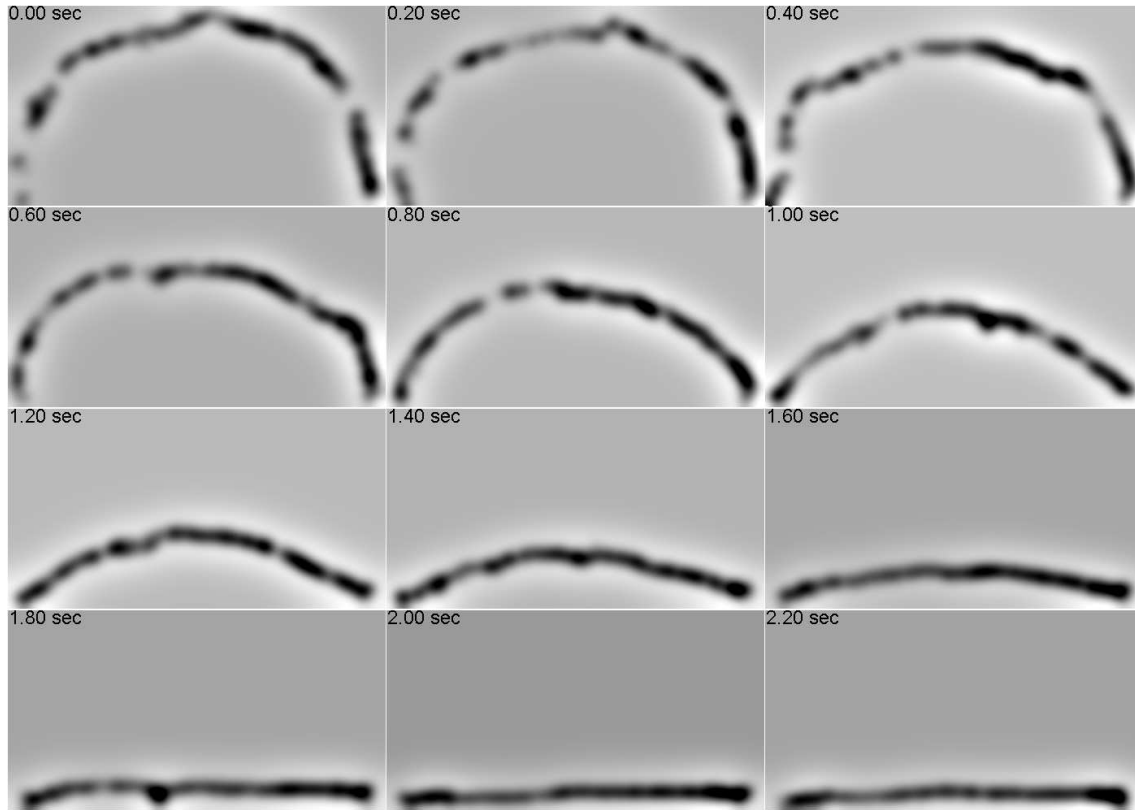


FIG. 3.17.: Évolution de la nappe montrée en Fig. 3.15. Les images sont obtenues après isolement de la nappe du reste de l'écoulement (viscosité $20 \text{ mm}^2/\text{s}$, débit $180 \text{ cm}^3/\text{s}$).

permet de l'isoler sur la séquence vidéo montrant son évolution. La Fig. 3.17 montre cette évolution temporelle.

Il semble raisonnable de supposer que la nappe se redresse pour abaisser son énergie de surface. Dans cette vision très simplifiée du phénomène, on peut considérer la loi de Laplace et supposer que l'accroissement de la pression « hydrostatique » à la traversée de la nappe (dans le plan du film et perpendiculairement à la nappe) est proportionnelle à la courbure : $\Delta p = \gamma C$. On peut donc s'attendre localement à une vitesse de nappe fonction de la courbure.

Si on fait l'hypothèse que la nappe évolue en restant sur un arc de cercle, une construction géométrique simple nous permet de relier sa courbure C à la position du centre de l'arc (voir Fig. 3.18-a) :

$$R_1^2 = (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + R_0^2$$

$$C = \frac{1}{\alpha + \beta} = \frac{2\beta}{R_0^2 + \beta^2}$$

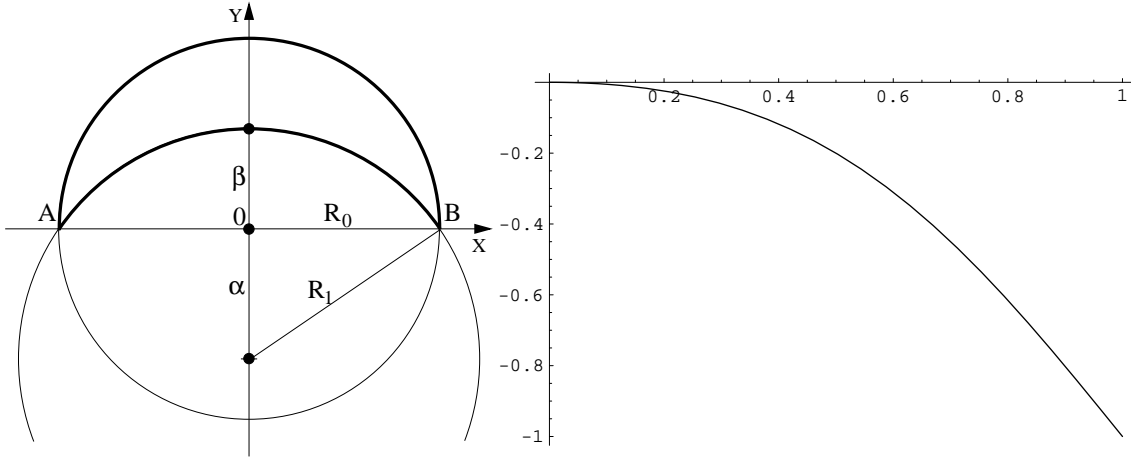


FIG. 3.18.: La construction géométrique nous permettant d'obtenir la courbure en fonction de la distance à la corde β (à gauche). Représentation de la courbure modélisée en fonction de β (à droite).

Un traitement par squelettisation est réalisé sur la séquence pour faire un suivi précis de la position de plusieurs points de la nappe. On utilise le référentiel de la Fig. 3.18-a). L'évolution de ces points suivant y à x fixé est tracée Fig. 3.19 où on a pris comme origine des y le point d'arrivée sur la corde. Les extrémités de la nappe sont en $(\pm 70, 0)$ mm et quatre points ont été suivis pour $x=0, 17, 34$ et 51 mm. On constate que la vitesse de ces points, très précisément déterminée, est constante sur presque tout le parcours et qu'elle est la même pour tous ($v=41.7$ mm/s). Un ralentissement intervient sur les derniers millimètres, d'autant plus rapidement que le point est proche du bord. Or, si on suppose que la vitesse varie de façon monotone en fonction de la courbure modélisée et tracée sur la Fig. 3.18-b en fonction de β , elle ne devrait pas être constante. En fait, on voit sur la Fig. 3.17, qu'au démarrage, c'est à dire lorsque la courbure est importante, la nappe ne décrit pas un arc de cercle, mais qu'elle est au contraire « écrasée ». Cette caractéristique, qui a pour effet de diminuer localement la courbure, se trouve être un comportement générique systématiquement observé pour toutes les nappes dans cette situation.

On peut tenter l'interprétation suivante. La nappe ne peut avancer que s'il y a assez d'huile dans le film « devant » elle pour l'alimenter. Cette quantité d'huile est déterminée par le débit d'alimentation. Deux phénomènes sont donc en compétition. D'une part la courbure crée bien le mouvement de la nappe, d'autre part, la vitesse de la nappe est bornée par valeur supérieure par le débit d'alimentation du film. On constate sur les Fig. 3.15 et 3.16-d qu'il n'y a pas d'écoulement en arrière de la nappe. Le film a été asséché dans la zone où elle est passée.

Pour conclure, signalons qu'une nappe qui s'immobilise en position rectiligne disparaît la plupart du temps en moins d'une seconde, par rétractation des extrémités.

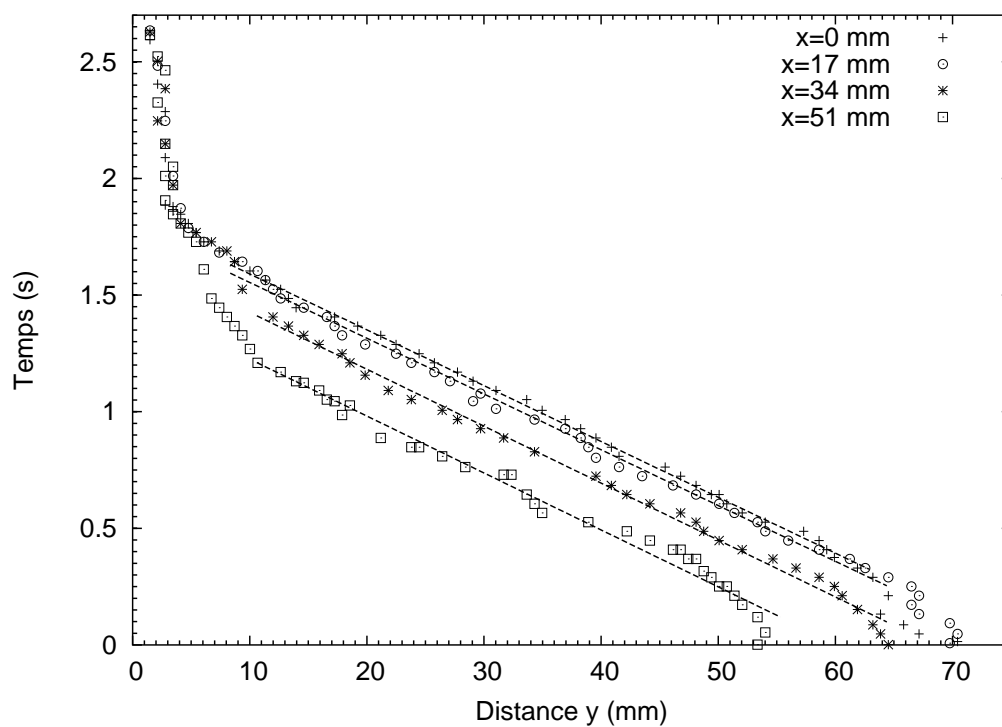


FIG. 3.19.: Évolution de la position de plusieurs points de la nappe. La vitesse dans la direction perpendiculaire à la corde est la même pour tous et constante quasiment jusqu'à l'arrivée. (viscosité $20 \text{ mm}^2/\text{s}$)

Pour que cette solution persiste au débit considéré, il apparaît nécessaire que la nappe soit en mouvement, de manière à écouler un volume critique d'huile.

3.5.2. Les structures géométriques simples : les ondes progressives et les structures spiralantes

3.5.2.1. Les conditions d'apparition

Une structure d'ondes progressives ou une structure spiralante peuvent apparaître spontanément (en quelques secondes ou quasi instantanément) lors d'un démarrage brusque de l'alimentation, si celui-ci se fait sur une plage de débit compatible. Elles peuvent survenir également comme nouvelle solution de l'écoulement en faisant varier le débit. Dans ce cas, cela se fait généralement à débit croissant¹, à partir du régime mixte colonnes-nappes. Les nappes sont de plus en plus nombreuses (plus stables et plus longues) et les colonnes de moins en moins nombreuses. Pour un débit seuil précisément défini, la structure géométrique simple est brusquement sélectionnée. Pour les spirales, le type de structure (c'est à dire le nombre de bras), ainsi que le sens de rotation, sont déterminés lors de son apparition. Un sens de rotation, une fois sélectionné, ne change jamais. Mais dans une situation où la structure spiralante n'est pas parfaite, le nombre de bras peut spontanément changer, sans que l'on ne modifie le débit d'alimentation.

Dans ces deux situations, le mécanisme à l'origine du mouvement des nappes est le même que celui décrit précédemment. Elles sont toujours tangentes à la frontière, ce qui induit une courbure. Là aussi, les effets de tension de surface semblent jouer un rôle moteur. En effet, ceux-ci tendent à « redresser » la nappe pour annuler la courbure et elle avance dans la direction de la concavité. Puisque le bord est générateur de courbure, le phénomène est entretenu et les nappes se trouvent naturellement mises en mouvement permanent. Ainsi, dans cette expérience, deux solutions d'un tel régime entretenu ont pu être observées : un mouvement de translation et un mouvement de rotation autour d'un axe.

La viscosité et la surface de la zone d'écoulement jouent un rôle important. Une étude systématique a été menée avec les viscosités de 350, 200, 100, 50 et 20 mm²/s pour des disques d'écoulement de 80 et 110 mm de diamètre qui correspondent respectivement à des surfaces d'écoulement de 50 cm² et 95 cm². On utilisera par la suite les notations Ø80 et Ø110.

Il apparaît que ces structures simples apparaissent de manière beaucoup plus nette pour Ø80 que pour Ø110. De plus, la durée de vie des structures est d'autant plus grande que la viscosité est élevée.

¹A débit décroissant, c'est à dire à partir du régime de cellules, l'opération est plus délicate puisque des cellules persistent dans l'écoulement. Ces solutions robustes bloquent la dynamique des nappes.

Ainsi, pour $350 \text{ mm}^2/\text{s}$, les spirales et les ondes progressives apparaissent spontanément à partir du débit surfacique de 0.48 cm/s pour $\text{Ø}80$ et 0.46 cm/s pour $\text{Ø}110$. Dans ce dernier cas, la structure n'est stable qu'une minute environ. Au delà, elle se détruit en même temps que des colonnes apparaissent par intermittence. Pour le plus petit diamètre, la structure sélectionnée persiste dans le temps.

Pour $200 \text{ mm}^2/\text{s}$, les spirales et les ondes progressives apparaissent spontanément à partir d'un débit surfacique de 0.70 cm/s pour $\text{Ø}80$ et 0.78 cm/s pour $\text{Ø}110$. Dans le deuxième cas, la structure n'est stable qu'une dizaine de secondes environ. Au delà, elle se détruit de la même façon que dans le cas de l'huile de $350 \text{ mm}^2/\text{s}$. A $200 \text{ mm}^2/\text{s}$, la structure sélectionnée persiste dans le temps pour le plus petit diamètre.

A $100 \text{ mm}^2/\text{s}$, il n'est plus possible d'obtenir les ondes progressives mais les spirales apparaissent toujours spontanément, à partir d'un débit surfacique de 0.92 cm/s pour $\text{Ø}80$ et 0.86 cm/s pour $\text{Ø}110$. Dans les deux cas, la structure spiralante est transitoire et fortement déformée, en particulier en ce qui concerne le cœur qui est très grand et peut être dédoublé. D'une façon générale, des nappes refermées en petites cellules viennent perturber la dynamique.

3.5.3. Les structures spiralantes

Dans le cas des spirales, on peut donner l'interprétation suivante. Comme on l'a vu, une nappe en mouvement est caractérisée par une courbure. Inversement, toute courbure de la nappe induit un mouvement de celle-ci, toujours dans le sens de la concavité. Une nappe est toujours tangente à la périphérie. Si la courbure de la frontière est suffisamment importante (ce qui implique que le diamètre du disque ne soit pas trop grand), les nappes à proximité de celle-ci se mettent immédiatement en mouvement. Les mouvements des nappes finissent par se synchroniser avec une géométrie axisymétrique se traduisant par une rotation « solide » de la structure autour du centre de la grille. L'écoulement se fait alors uniquement par les bras spiraux et le cœur. On montre sur la Fig. 3.20 quatre structures spiralantes, ayant de un à quatre bras, toutes obtenues au débit surfacique de 0.93 cm/s pour une huile de $200 \text{ cm}^2/\text{s}$ et $\text{Ø}90 \text{ mm}$.

La vitesse de rotation d'une structure est fonction du débit. La Fig. 3.21 donne la pulsation locale pour les quatre solutions, déterminée par le passage d'un bras en un point donné de la périphérie en fonction du débit. On observe que pour une valeur donnée du débit, la fréquence de passage des bras est sensiblement la même. Pour les valeurs inférieures du débit surfacique (au dessous de $50 \text{ cm}^3/\text{s}$, soit un débit surfacique de 0.79 cm/s), la vitesse de rotation croît linéairement avec le débit. Pour les débits supérieurs, la pulsation cesse d'être proportionnelle au débit. On observe un effet de saturation. La pulsation atteint un maximum et décroît peu avant le seuil de rupture qui conduit au régime de cellules (autour de $65 \text{ cm}^3/\text{s}$, soit un débit surfacique de 1.0 cm/s).

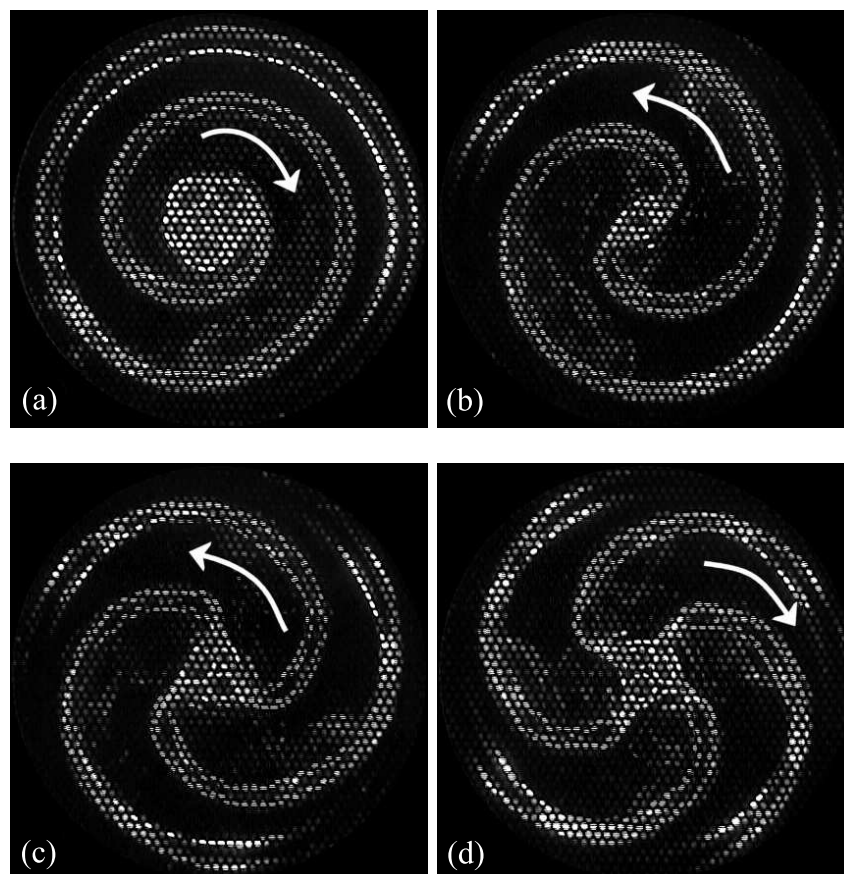


FIG. 3.20.: Structures spirales de 1 à 4 bras. Noter le sens de rotation différent (toujours dans le sens de la concavité) en (a, d) et (b,c). ($\text{Ø}90 \text{ mm}$, viscosité $200 \text{ mm}^2/\text{s}$).

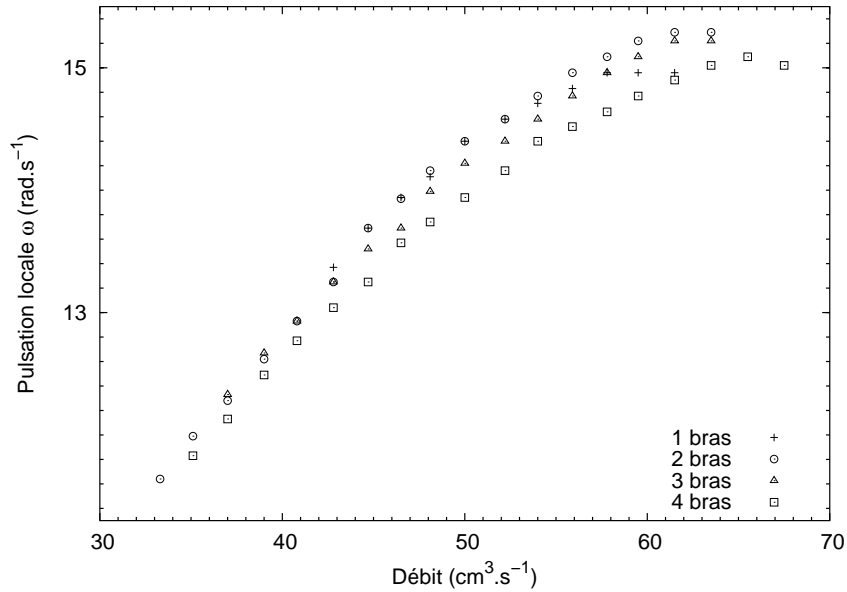


FIG. 3.21.: Pulsation locale en fonction du débit pour les structures spiralantes (200 mm²/s, Ø90 mm).

3.5.4. Les ondes progressives

L'interprétation que l'on peut donner dans le cas des ondes progressives est du même ordre que pour les structures spiralantes.

La Fig. 3.22 montre le régime de nappes en ondes progressives pour une huile d'une viscosité de 350 mm²/s, Ø110 mm et un débit de 44 cm³/s. La Fig. 3.23 donne la position du centre des nappes en fonction du temps dans la direction de propagation. Le trait en pointillés permet de voir que la vitesse des nappes augmente dans leur mouvement, tout en restant voisine de 3 cm/s. Parallèlement, on remarque que la contrainte produite par le bord ne cesse d'accentuer la courbure des nappes pendant leur trajet.

3.5.5. Les structures spiralantes avec un cache central

Comme on l'a vu, les structures en ondes progressives et en spirales sont de plus en plus difficiles à obtenir lorsqu'on diminue la viscosité. Pour les spirales, le principal problème semble venir de la stabilité du cœur. Pour le vérifier, nous avons placé au centre d'un disque d'écoulement de 90 mm de diamètre un cache cylindrique d'un diamètre de 30 mm (lequel correspond approximativement au diamètre de la zone d'écoulement centrale pour les spirales), avec une huile de 100 mm²/s (Fig. 3.24).

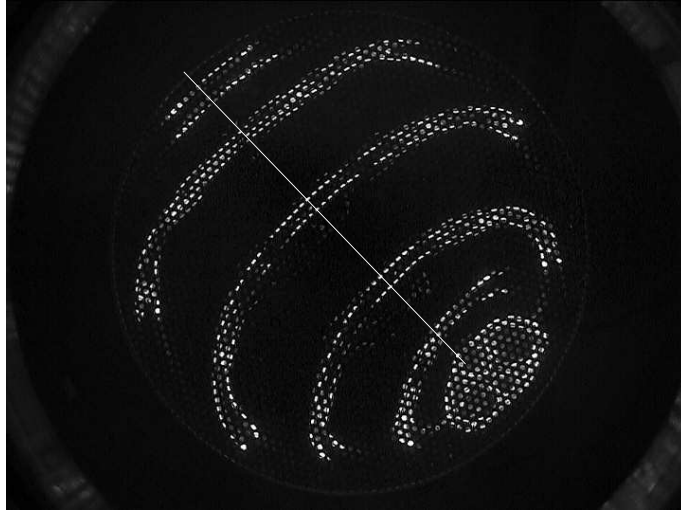


FIG. 3.22.: Évolution de la position du centre des nappes. La vitesse dans la direction de propagation augmente avec le temps. ($\text{Ø}110 \text{ mm}$, viscosité $350 \text{ mm}^2/\text{s}$)

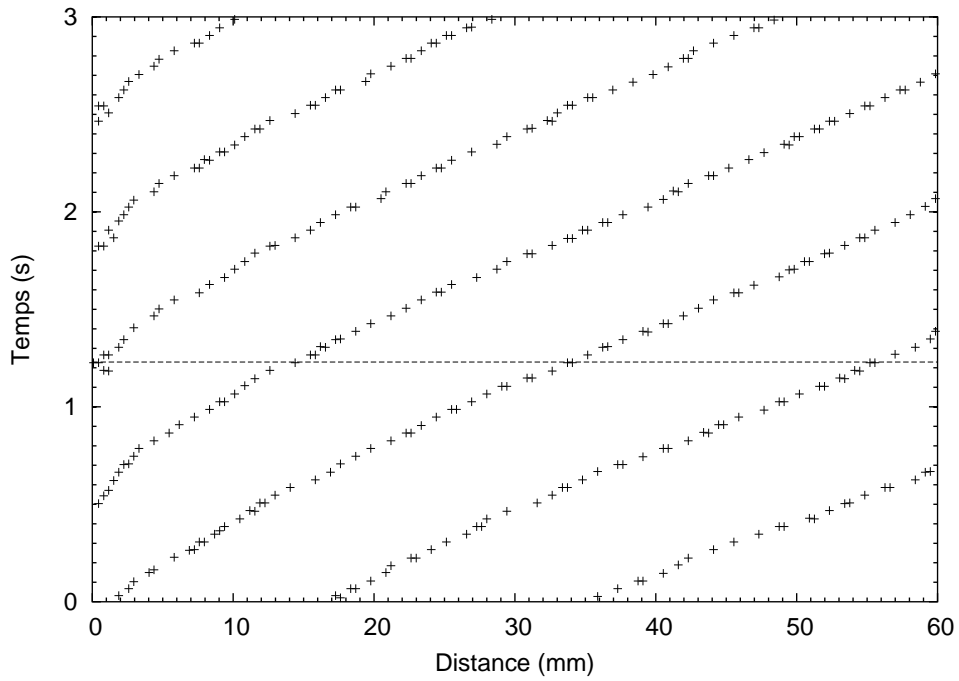


FIG. 3.23.: Évolution de la position du centre des nappes. La vitesse dans la direction de propagation augmente avec le temps.

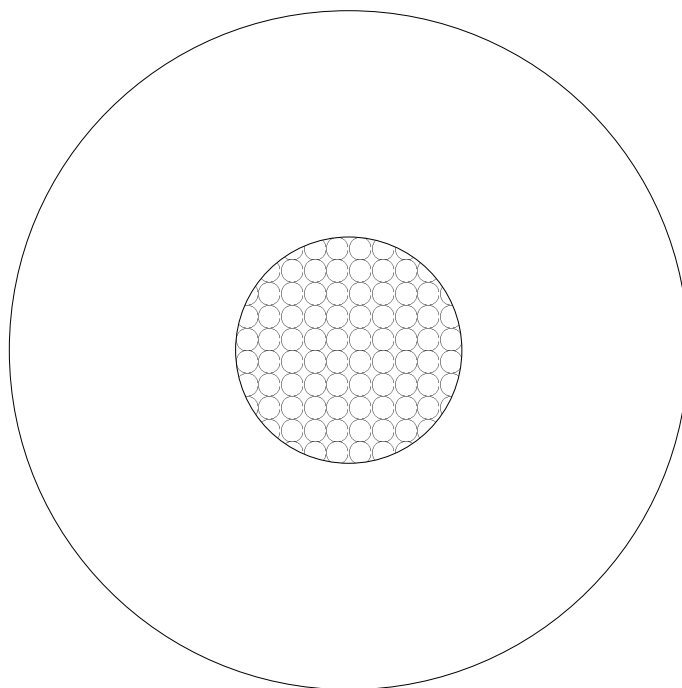


FIG. 3.24.: La configuration avec un cache central de 30 mm de diamètre au milieu d'un disque d'écoulement de 90 mm (à l'échelle, viscosité $100 \text{ mm}^2/\text{s}$).

On constate que la structure spirale est parfaitement stable et que l'on peut obtenir un nombre de bras plus important (de 1 à 7 bras, Fig. 3.25).

3.5.6. Les structures en nappes concentriques stationnaires

Plusieurs autres structurations peuvent apparaître en régime de nappes. Décrivons brièvement l'une d'entre elles. Un passage brusque à un débit surfacique proche de 1.0 cm/s pour une viscosité de $20 \text{ mm}^2/\text{s}$ donne lieu à une structure stationnaire de nappes concentriques. On obtient trois nappes avec une zone d'écoulement de $\text{Ø}80 \text{ mm}$ et quatre pour $\text{Ø}110 \text{ mm}$ (Fig 3.26). Dans le deuxième cas, la seconde nappe en partant du centre subit de petites perturbations.

3.6. Déstabilisation d'une nappe cylindrique verticale de fluide visqueux

Nous présentons une expérience au cours de laquelle un film fluide sous gravité déstabilisante et en géométrie annulaire forme une nappe cylindrique verticale. Le

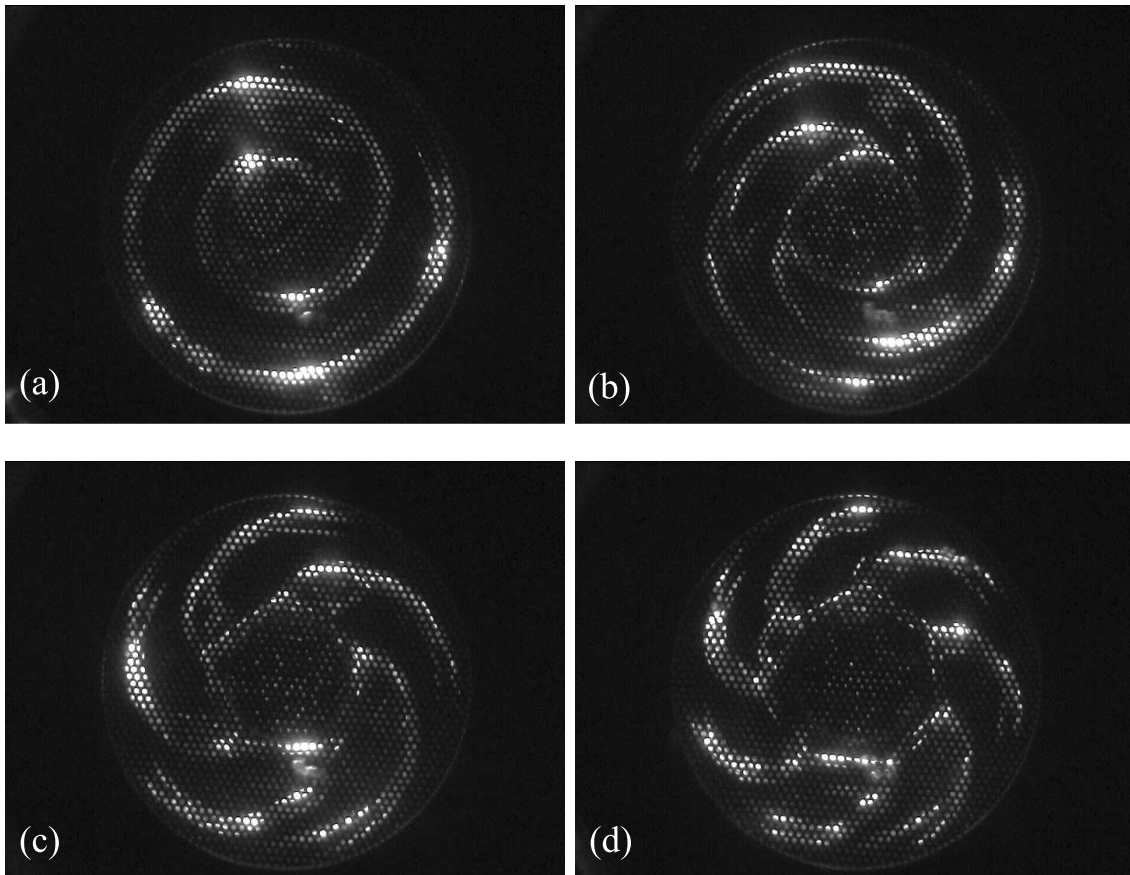


FIG. 3.25.: La configuration avec un cache central de 30 mm de diamètre donne lieu à des structures plus stables ainsi qu'un nombre de bras plus élevé. Remarquer la structure en facettes des nappes autour du cache (viscosité $100 \text{ mm}^2/\text{s}$).

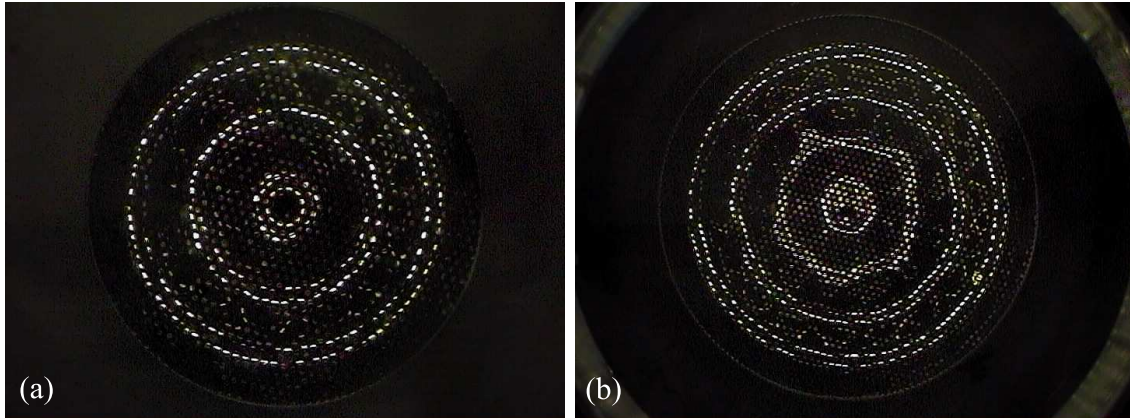


FIG. 3.26.: Une structure stationnaire de nappes concentriques pour (a) $\text{\O}80$ mm et (b) $\text{\O}110$ mm (viscosité $20 \text{ mm}^2/\text{s}$).

dispositif expérimental est dérivé de celui nous ayant permis de mener l'étude bidimensionnelle et autorise le réglage du diamètre moyen et de la largeur de l'anneau.

A haut débit, le fluide forme une nappe qui peut être cylindrique ou non suivant la différence des pressions intérieure et extérieure. En jouant sur le débit et la géométrie, il est possible d'obtenir une déstabilisation de la nappe qui se traduit par une onde stationnaire ou progressive, immédiatement sous le plan de l'anneau, à l'origine de la nappe.

3.6.1. Introduction

De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de la formation et de la stabilité des nappes liquides depuis les premières investigations de Savart [38] et Boussinesq [39]. Taylor s'est tout particulièrement intéressé aux nappes annulaires (les « cloches » liquides) [40]. Plus récemment, Buckingham et Bush [41] se sont attachés à étudier les nappes à structure polyèdre obtenues par la brisure d'un jet vertical de liquide visqueux sur un impacteur circulaire horizontal. Brunet *et al.*, entre autres, ont par ailleurs étudié la forme native d'une cloche liquide annulaire produite par le débordement d'une coupelle circulaire [42].

Après avoir développé une version 2D de l'expérience de la coupelle circulaire, nous utilisons sensiblement le même appareillage pour mettre en évidence le comportement spatio-temporel de nappes en géométrie à dimensionnalité réduite. En effet, seul un anneau de diamètre et de largeur réglables est utilisé et ce dispositif permet d'étudier la déstabilisation, à sa naissance, d'une nappe de liquide dont l'embase peut se déplacer librement sur une surface à confinement variable. Nous observons ainsi les modes transverses d'oscillation d'une nappe.

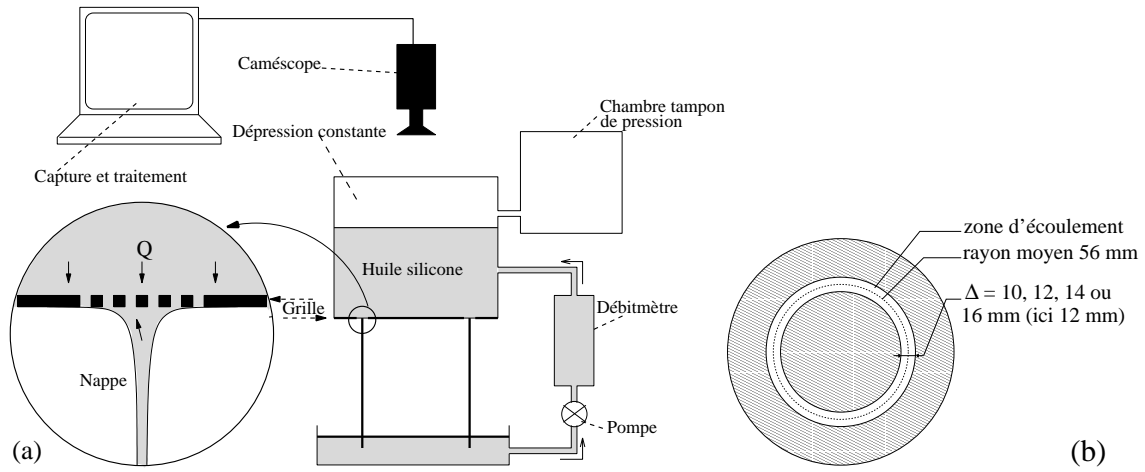


FIG. 3.27.: Schémas (a) du montage, (b) de la zone d'écoulement.

3.6.2. Le dispositif expérimental

Le montage utilisé dans cette expérience est une adaptation de celui utilisé dans les expériences à deux dimensions (Fig. 3.27-a). La zone d'écoulement annulaire est obtenue au moyen de caches placés sur la grille (Fig. 3.27-b). On utilise la même grille en acier que dans le cas bidimensionnel décrite au début du chapitre 2.

L'expérience a été réalisée avec quatre largeurs d'anneau (Δ) différentes de 10, 12, 14 et 16 mm, c'est à dire autour de la longueur d'onde de Rayleigh-Taylor $\lambda_{RT}=13.3$ mm, pour un rayon moyen $r=56$ mm. Cette largeur d'anneau permet l'apparition d'un comportement bidimensionnel. Nous avons utilisé des huiles silicone de 50 et 200 mm^2/s .

Un tube circulaire fluorescent est placé autour de la chambre et le contour de la nappe est détecté grâce à la lumière réfractée à la naissance de l'écoulement, donc légèrement sous le niveau de la grille. (Fig. 3.28-b).

3.6.3. Les différents régimes d'écoulement en géométrie annulaire

Le comportement du film alimenté présent sous la grille est analogue à celui observé à deux dimensions : lorsque le débit est proche de zéro, ce film se déstabilise sous l'effet de la gravité et l'action conjointe de la tension de surface caractérisant l'instabilité de Rayleigh-Taylor conduit à la formation de gouttes distantes de λ_{RT} sous sa surface (Fig. 3.29-a). Pour un débit plus élevé, apparaît le régime de colonnes de liquide (Fig. 3.29-b), étudié antérieurement avec le dispositif de la coupelle circulaire [8]. Il est intéressant de remarquer qu'on retrouve ici les mêmes comportements

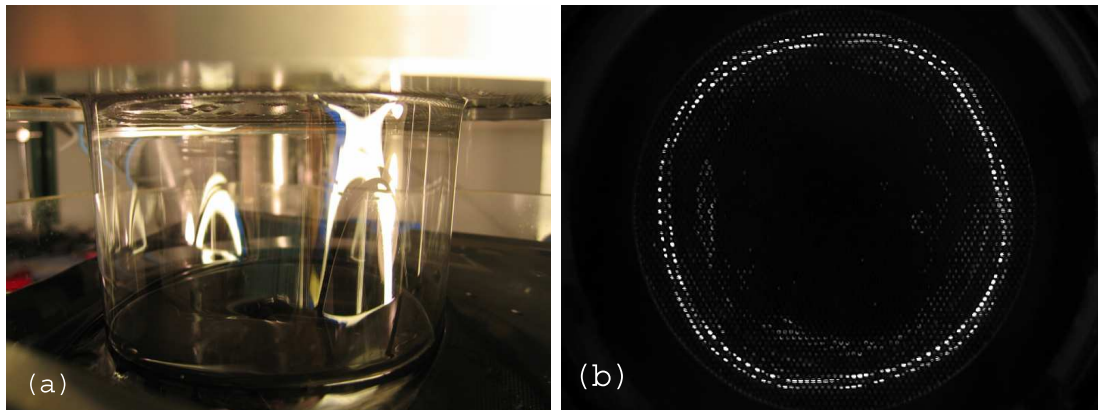


FIG. 3.28.: Nappe cylindrique d'huile vue : (a) par le côté, (b) par le haut, à travers les trous de la grille (viscosité $50 \text{ mm}^2/\text{s}$).

dynamiques au delà du régime stationnaire, tel un mode oscillant à doublement de période spatiale (mode “optique”), la propagation d’une onde solitaire, le mode de dérive globale et le régime turbulent. Gouttes et colonnes peuvent coexister sur une certaine plage de débit. Pour un débit suffisamment important, on observe une transition brutale du régime de colonnes vers une nappe de liquide fermée et stationnaire. Celle-ci n’est jamais cylindrique mais tend à se refermer en aval de l’écoulement (cf [42] pour une étude détaillée des nappes de type « cloche »).

3.6.4. Déstabilisation d’une nappe cylindrique

Dans le but de mener une étude systématique, nous rendons la nappe cylindrique en créant une surpression contrôlée à l’intérieur de celle-ci par injection d’air (Fig. 3.29-c). Le scénario de déstabilisation suivant est observé quelles que soient les viscosités et les largeurs d’anneau entre 10 et 16 mm. La possibilité que nous avons de modifier la largeur de l’anneau est l’une des originalités de ce dispositif expérimental.

On applique une diminution lente du débit en partant de la situation stationnaire (Fig. 3.31-a). Celle-ci s’accompagne d’un amincissement de la nappe (Fig. 3.31-b). Il existe un débit critique D_c pour lequel la nappe commence à osciller radialement (Fig. 3.31-c et 3.30) sous la forme d’une onde stationnaire résultat de la compétition visible entre une onde progressive droite et une onde progressive gauche. L’amplitude des oscillations augmente avec l’écart au seuil. Pour un débit toujours décroissant, une deuxième transition apparaît : le système sélectionne l’onde droite ou l’onde gauche de nombre d’onde κ qui apparaît comme un motif en « rotation solide » (Fig. 3.29-d-e). Nous définissons un nombre d’onde normalisé $N = \kappa.r$ qui correspond au nombre d’onde azimuthal de la structure observée.

Remarque : Lorsque Δ est trop petit (inférieur à 10 mm), on n’observe jamais de

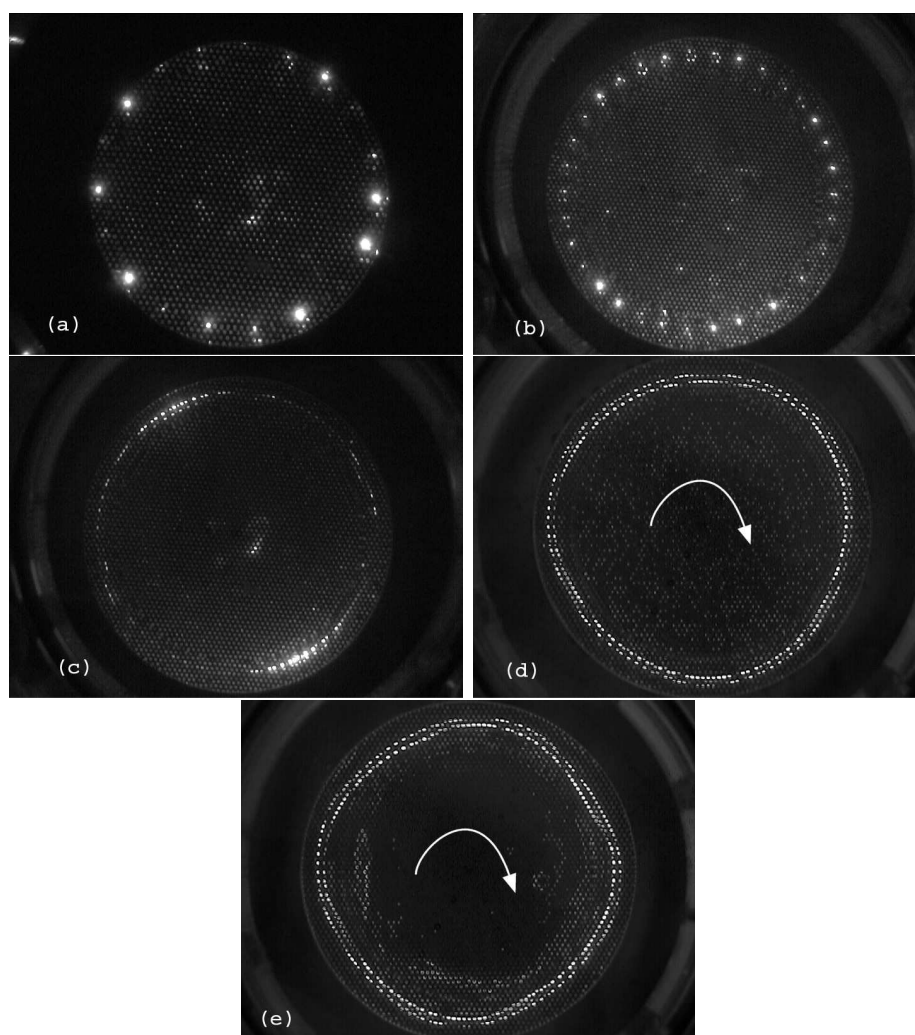


FIG. 3.29.: Pour un débit croissant (a) gouttes, (b) colonnes, (c) nappe cylindrique stationnaire, (d) nappe en rotation solide ($N=3$), (e) ($N=4$).

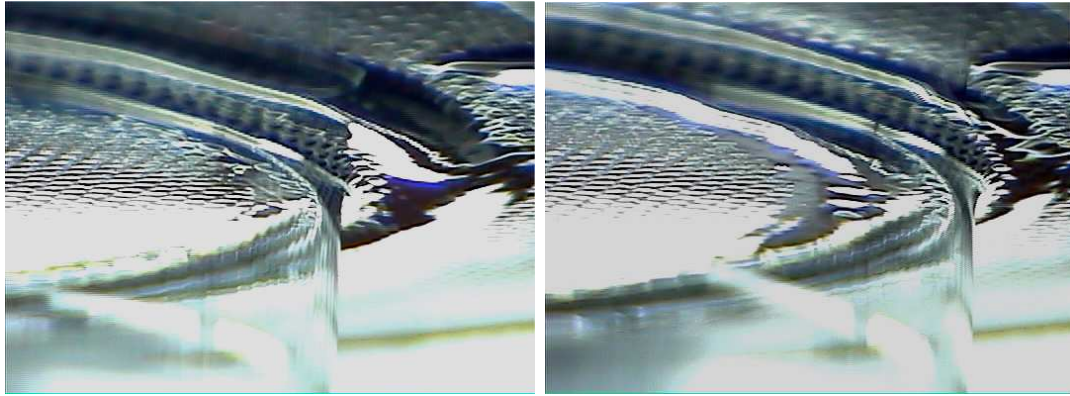


FIG. 3.30.: Nappe déstabilisée dans un mouvement d'oscillation radiale représentée ici dans ses deux positions extrêmes (viscosité $50 \text{ mm}^2/\text{s}$).

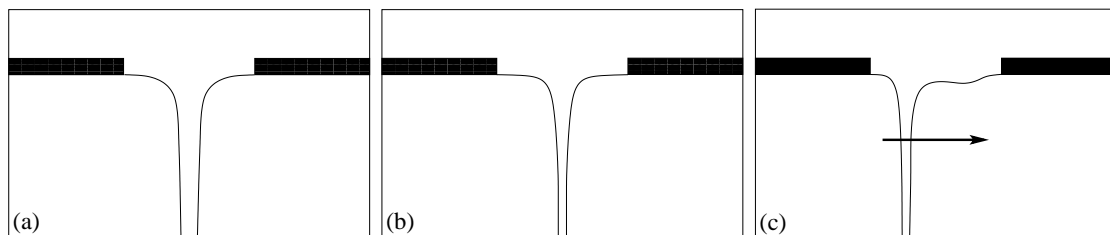


FIG. 3.31.: Vue en coupe de la nappe (a) le débit est supérieur à D_c , la nappe est épaisse et stationnaire, (b) une diminution du débit s'accompagne d'un amincissement de la nappe, (c) pour un débit inférieur à D_c l'embase de la nappe se déstabilise et oscille.

3.6. Déstabilisation d'une nappe cylindrique verticale de fluide visqueux

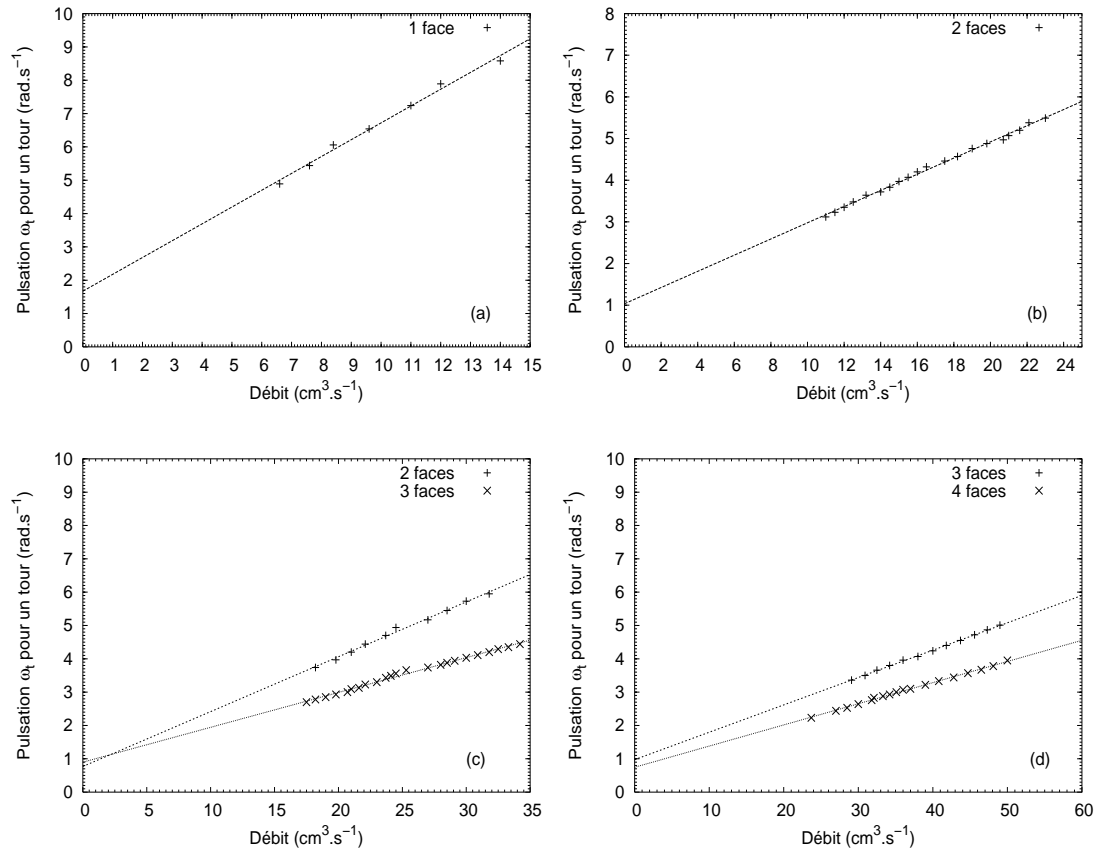


FIG. 3.32.: Pulsation pour un tour en fonction du débit : (a) $\Delta=10$ mm, (b) $\Delta=12$ mm, (c) $\Delta=14$ mm, (d) $\Delta=16$ mm (viscosité $200 \text{ mm}^2/\text{s}$).

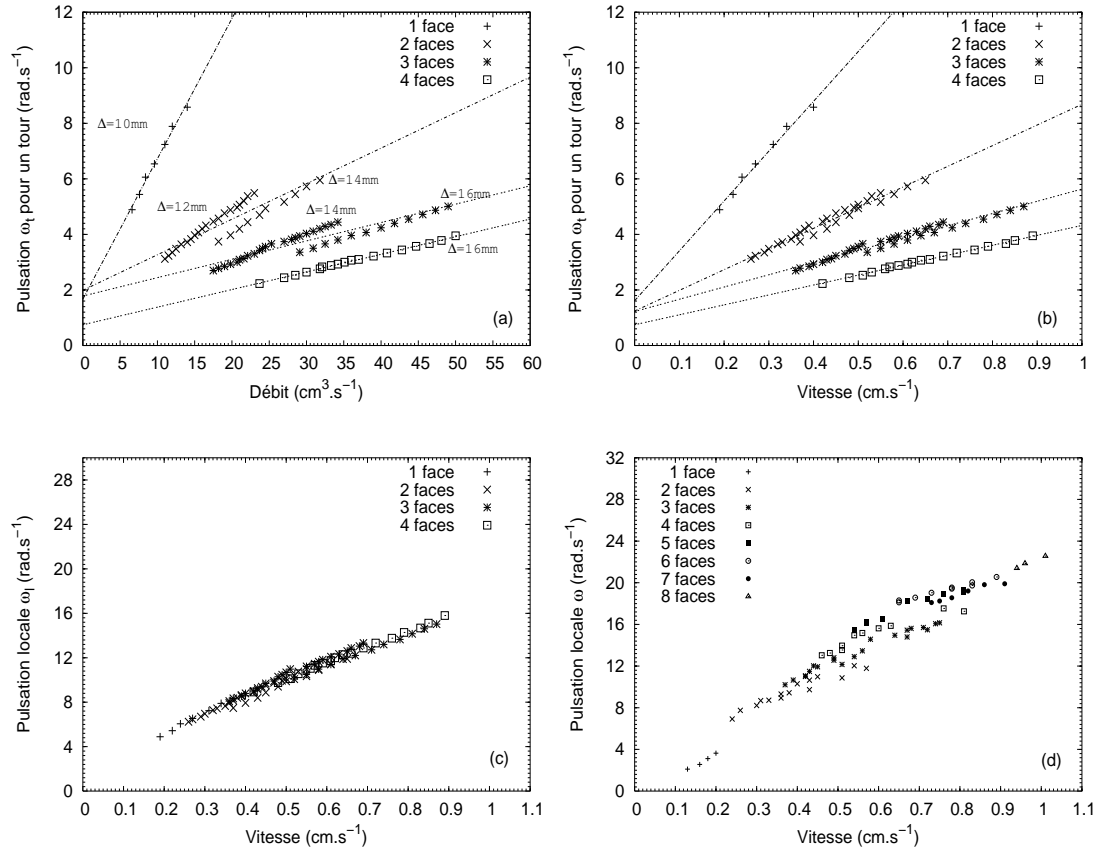


FIG. 3.33.: (a) Pulsation pour un tour en fonction du débit (viscosité 200 mm²/s), (b) Pulsation pour un tour en fonction du débit surfacique (200 mm²/s), (c) Pulsation locale en fonction du débit surfacique (200 mm²/s), (d) comme (c) pour une viscosité de 50 mm²/s.

déstabilisation de la nappe mais une transition brusque vers le régime de colonnes (ou de goutte à goutte si Δ est très faible).

3.6.5. Résultats sur les nappes déstabilisées en rotation

Il est possible d'obtenir directement une nappe déstabilisée en rotation en imposant le débit qui sélectionne un nombre d'onde κ . Toutes valeurs de Δ confondues, nous avons observé des valeurs de N comprises entre 1 et 8 pour une viscosité de 50 mm²/s et entre 1 et 4 pour 200 mm²/s. Lorsqu'une valeur de N est sélectionnée, cette solution persiste sur une certaine plage de débit et la pulsation pour un tour ω_t est proportionnelle au débit (Fig. 3.32). Comme on peut le voir sur ces figures, il apparaît un décalage des valeurs de N permises par le système avec la valeur de Δ . De plus, plusieurs solutions peuvent être obtenues pour une valeur du couple (Δ, D) donnée.

La figure 3.33-a rassemble les mesures pour les quatre valeurs de Δ . On donne les résultats en fonction du débit par unité de surface (la vitesse moyenne de passage à travers la grille), ce qui a l'effet de rassembler les données par nombre d'onde normalisé N , et donc de considérer un anneau de largeur unitaire (Fig. 3.33-b). Tous les résultats se rassemblent sur une même droite en considérant la pulsation locale $\omega_l = \omega_t \cdot N$ et le débit surfacique sur les figures 3.33-c et 3.33-d pour respectivement une viscosité de 200 mm²/s ou 50 mm²/s.

3.6.6. Conclusion

Deux résultats ressortent de cette étude préliminaire. Pour une valeur du nombre d'onde normalisé N donnée, la pulsation pour un tour ω_t est proportionnelle au débit et au débit surfacique, donc en première approximation à l'épaisseur de la nappe. Pour un débit surfacique donné, la pulsation locale ω_l est inversement proportionnelle à la largeur de l'anneau (Δ).

4. La déstabilisation d'une structure hexagonale stationnaire

4.1. Introduction

La déstabilisation d'un système dissipatif hors d'équilibre initialement homogène conduisant à la structuration sous forme de motifs spatialement périodiques est un phénomène très répandu dans la nature. A deux dimensions, on observe ainsi la formation de rouleaux, de carrés, de patterns quasi-périodiques et d'hexagones (les plus fréquentes). Des exemples typiques d'expériences montrant des motifs hexagonaux à deux dimensions incluent la convection de Rayleigh-Bénard avec effets non-Oberbeck-Boussinesq [14], la convection de Marangoni [15], l'optique non linéaire [16] ou encore les systèmes de réaction-diffusion [17] et leurs applications à des objets biologiques.

Après une rapide introduction sur les bifurcations dans les systèmes dynamiques spatialement étendus, en lui associant les notions de réduction de la dynamique et d'arguments de symétrie, je prédis la forme de tous les vecteurs d'onde (norme et orientation) de l'instabilité secondaire d'une structure hexagonale stationnaire.

4.1.1. Bifurcations dans les systèmes dynamiques spatialement étendus

Dans le cas des bifurcations super-critiques, le système devient instable vis à vis de perturbations infinitésimales. La plupart du temps l'état de base du système est homogène et stationnaire mais l'accroissement des contraintes fait apparaître un désordre. Dans ce cas, l'état bifurqué reste voisin de l'état de base, c'est pourquoi l'on qualifie aussi cette transition de continue¹. Du point de vue des systèmes dynamiques, le désordre apparaît de manière progressive par une succession d'instabilités

¹Alors que dans le cas où plusieurs solutions non-linéaires, et linéairement stables, sont en compétition, le système bifurque de façon sous-critique. La transition est alors qualifiée de discontinue, ou du premier ordre au sens des transitions de phase.

linéaires, bien décrites par les outils de l'analyse faiblement non-linéaire en introduisant la notion de *forme normale*, qui a par construction la propriété de respecter les symétries du problème initial. Au seuil de la bifurcation, la dynamique est ainsi réduite à des équations d'amplitude des modes propres critiques. Dans le voisinage de la bifurcation, ces amplitudes sont supposées varier lentement dans l'espace et le temps et jouent le rôle de paramètre d'ordre de la bifurcation de manière naturelle. Le point de départ est souvent une situation stationnaire en temps et uniforme en espace. Un vecteur d'onde critique k_c et une pulsation critique ω_c peuvent émerger au seuil de l'instabilité primaire. Il est alors possible de distinguer quatre situations :

- $k_c \neq 0$ et $\omega_c \neq 0$. Il s'agit dans ce cas d'ondes dissipatives que l'on rencontre par exemple lors de la convection dans un mélange.
- $k_c = 0$ et $\omega_c \neq 0$. C'est le cas de l'instabilité oscillante homogène observée dans la réaction chimique bien connue de Belousov-Zhabotinsky [26, 27].
- $k_c = 0$ et $\omega_c = 0$. Il s'agit du cas le plus simple. L'instabilité est stationnaire et homogène.
- $k_c \neq 0$ et $\omega_c = 0$. C'est le cas peut-être le plus couramment rencontré. Une structure spatiale stationnaire émerge. A une dimension, on l'appelle instabilité cellulaire. Il peut s'agir de rouleaux, de carrés ou encore d'hexagones à deux dimensions.

Très souvent, on est confronté à la dernière situation. La première bifurcation fait apparaître une structure spatiale périodique, correspondant à la brisure de l'invariance par translation d'espace. Il n'existe que trois types de structures bifurquées pouvant paver une surface plane de façon régulière : les rouleaux, les carrés et les hexagones.

4.1.2. Réduction de la dynamique et arguments de symétrie

La dynamique d'un système macroscopique hors équilibre est a priori régie par une équation d'évolution en temps des variables du système. Il s'agit généralement d'une équation différentielle aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F_\mu(U, R) = LU + N(U) \quad (4.1)$$

dont les composantes réelles du vecteur U représentent des grandeurs physiques (vitesse, pression, concentration chimique, ...), L est un opérateur linéaire et $N(U)$ une fonction non linéaire, R représente les variables du système et μ l'ensemble des paramètres de contrôle.

La perte de stabilité est associée au passage de la partie réelle d'une valeur propre de l'opérateur L de négatif à positif. Au voisinage de la bifurcation, lorsque la partie

réelle de cette valeur propre est nulle, pour un temps d'évolution suffisamment long, toute la dynamique se réduit à la dynamique effective sur une *variété invariante* localement attractante appelée *variété centrale*. Ainsi, on ne prend en compte que la dynamique associée à la projection de la solution sur les vecteurs propres associés à cette valeur propre (les variables marginales).

Cette équation régissant le comportement des variables marginales au seuil de la bifurcation peut être réduite à une forme minimale. C'est la *forme normale* caractérisant l'évolution du système pour une bifurcation donnée. Dans cette description heuristique, elle est obtenue par des arguments de symétrie, les termes non résonnants, c'est à dire non caractéristiques de la bifurcation considérée, étant éliminés par des relations d'équivariance. Ainsi la dynamique peut être décrite de manière simple par des *équations d'amplitude*, de forme générique, décrivant l'évolution des amplitudes (qui jouent le rôle de paramètres d'ordre au sens de Landau) des modes marginaux au seuil de l'instabilité :

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = G_i(A_1, A_2, \dots)$$

L'étude des instabilités de (4.1) peut être menée aussi par une approche *phénoménologique*² en ne s'intéressant qu'aux symétries du problème dont certaines sont brisées lorsque l'un des paramètres de contrôle λ de μ passe une valeur critique λ_c . Faisons l'hypothèse que soit connue la *bifurcation* qui intervient, c'est à dire celle sélectionnée par le système sous l'action d'une contrainte extérieure. Cela nous amène à considérer certaines classes de symétries, ce qui du point de vue mathématique signifie considérer des systèmes d'équations différentielles invariants sous l'action d'un *groupe de transformations*.

Le concept fondamental de *brisure spontanée de symétrie*³ a suscité un très grand intérêt dans le développement de la théorie des bifurcations. Il joue un rôle considérable dans de nombreux domaines de la Physique comme en physique des particules, en physique du solide, en physique des transitions de phase, en hydrodynamique...

Appelons $U = \sum_i A_i U_i + t.n.l.$ une solution bifurquée particulière stable de (4.1) où

²Il existe d'autres approches complémentaires non abordées dans cette thèse, lorsque l'on peut décrire explicitement les bifurcations d'un système physique au moyen d'équations macroscopiques. Il est possible d'effectuer des changements de variables non linéaires proches de l'identité pour séparer les variables lentes des variables rapides et définir ainsi la variété centrale (dont l'existence est prouvée par le théorème de la variété centrale). On procède de nouveau à des changements de variables non linéaires des équations d'amplitude pour obtenir la forme normale. Il est également possible de dériver l'expression de la forme normale et de la variété centrale par un développement perturbatif des équations (méthode de Poincaré-Lindstedt). Une condition de solvabilité est nécessaire dans tous les cas.

³Par opposition, on parle de *brisure explicite de symétrie* quand les lois de conservation sont explicitement violées à cause du couplage à l'environnement (le terme de couplage ne respectant pas certaines symétries).

les A_i sont des amplitudes, les U_i sont les modes propres marginaux et *t.n.l.* représente les termes non linéaires. Les symétries de la solution sont celles qui préservent cette solution. Dans le cas de cette brisure, la solution U a moins de symétries que les équations auxquelles elle se rapporte. Ces symétries forment un sous-groupe des symétries du système, que l'on appelle *le groupe d'isotropie* de la solution. Ainsi, lors de son évolution, un système passe d'un état avec une certaine symétrie à un état moins symétrique.

De manière générale, on s'intéresse à des systèmes physiques que l'on modélise par des variables (T : température, \vec{B} : champ magnétique, p : pression. . .), sachant que, des groupes de transformations, seules sont connues les actions sur ces variables. Ainsi, un même groupe peut agir de façon différente d'une grandeur à une autre.

On est en définitive peu intéressé par l'action du groupe sur le système lui-même, mais plutôt par la façon dont se transforment ces grandeurs sous cette action. Ces transformations *induites* sur les grandeurs physiques sont appelées *les représentations* du groupe. On associe une représentation à chaque grandeur physique. On trouvera quelques notes sur les groupes et leurs représentations en Annexe B.

Nous nous intéressons ici aux instabilités de structures hexagonales et qui demandent pour leur description l'introduction d'un nouveau paramètre d'ordre et d'une nouvelle équation d'amplitude, différents de ceux dérivés pour la description de la première bifurcation. Nous ne nous intéressons donc pas aux compétitions entre différents motifs ou encore aux instabilités de la phase.

Il est important de remarquer que notre démarche n'est pas de dériver un système d'équations d'amplitude invariant par les symétries du problème en partant de la connaissance a posteriori (expérimentale) du vecteur d'onde sélectionné à la bifurcation, ce qui a déjà été fait à l'aide de la théorie des bifurcations équivariantes, mais bien de prédire quels seront les vecteurs d'onde qui seront a priori mis en jeu dans la déstabilisation du pattern hexagonal. Dans ce but, nous utilisons le langage des symétries mais nous ne chercherons pas à calculer les espaces propres critiques et leurs dimensions, associés aux bifurcations secondaires.

4.2. L'exemple du cas unidimensionnel

Quand un système unidimensionnel stationnaire et spatialement périodique (de période λ) se déstabilise en mettant en jeu une nouvelle longueur d'onde (du même ordre de grandeur que λ), il fait le plus souvent apparaître une structuration spatiale à la longueur d'onde double. C'est le cas en convection de Rayleigh-Bénard [33], dans des expériences de Couette-Taylor [32] et de Rayleigh-Taylor [7], en solidification dirigée [19, 13] ou dans la simulation numérique de l'équation de Kuramoto Sivashinsky [20].

Par des arguments de type résonance forte, Lionel Gil a montré [22] que c'est l'invariance par parité qui force ce doublement de période spatial. Nous rappelons ici comment ce doublement de période est forcé par la symétrie de parité.

Considérons le système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F_\mu(U, \partial x), \quad (4.2)$$

où $U = U(x, t)$ est une collection de fonctions réelles et μ un ensemble de paramètres de contrôle. (4.2) est supposé invariant par translations d'espace et de temps ainsi que par parité (\mathcal{P}). On suppose qu'il existe également une solution stationnaire périodique $U_0(x) = U_0(x + \lambda)$, invariante par parité ($\mathcal{P}U_0 = U_0$). En écrivant $U(x, t) = U_0(x) + \mathcal{W}(x, t)$, on obtient après linéarisation

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = DF|_{U_0} \mathcal{W}, \quad (4.3)$$

où DF est la différentielle de F au voisinage de U_0 . Les modes propres de l'instabilité de U_0 sont alors les comportements critiques solutions de (4.3). On pose ensuite $\mathcal{W} = e^{i\Omega t} \psi(x) + cc$ où Ω est réel (éventuellement nul) et ψ satisfait à [23]

$$i\Omega \psi(x) = DF|_{U_0} \psi(x) \quad (4.4)$$

D'après le théorème de Bloch-Floquet, les solutions de cette EDO linéaire à coefficients périodiques s'écrivent

$$\psi(x) = Ae^{Fx} \mathcal{H}(x) \quad (4.5)$$

où \mathcal{H} a la structure périodique de la solution de base et où l'exposant de Floquet F est imaginaire pur ($F = iq$) pour empêcher la divergence des modes propres instables en $x = \pm\infty$. En tenant compte de la parité, si \mathcal{W} est solution de (4.3) alors $\mathcal{P}\mathcal{W}$ l'est aussi, et la solution U s'exprime

$$U(x, t) = U_0(x) + \Re e(Ae^{i(\Omega t - qx)} \mathcal{H}(x) + Be^{i(\Omega t + qx)} (\mathcal{P}\mathcal{H})(x) + H.O.T.), \quad (4.6)$$

où A et B sont des nombres complexes petits devant U_0 au seuil de la bifurcation secondaire. On utilise l'invariance par translation dans le temps ($t, A, B \rightarrow t + \delta t, Ae^{i\Omega\delta t}, Be^{i\Omega\delta t}$) et la transformation de parité ($x, A, B \rightarrow -x, B, A$) pour déduire la forme des équations d'amplitude

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= z_1 A + z_2 B + (z_3 |A|^2 + z_4 |B|^2)A + (z_5 |A|^2 + z_6 |B|^2)B + z_7 A^2 \bar{B} + z_8 B^2 \bar{A} + \dots \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= z_1 B + z_2 A + (z_3 |B|^2 + z_4 |A|^2)B + (z_5 |B|^2 + z_6 |A|^2)A + z_7 B^2 \bar{A} + z_8 A^2 \bar{B} + \dots\end{aligned}\tag{4.7}$$

Il convient ici de faire une remarque importante. Si la solution U_0 était invariante par translation continue d'espace (ce qui n'est bien sûr pas le cas), l'invariance $(x, A, B \rightarrow x + \delta x, Ae^{-iq\delta x}, Be^{iq\delta x})$ forcerait l'annulation des coefficients z_2, z_5, z_6, z_7 et z_8 . Ces coefficients sont donc clairement reliés à la description de la résonance forte d'une structure cellulaire puisqu'ils n'existent qu'à cause de la périodicité spatiale de U_0 [22]. De plus, les amplitudes A et B étant petites au seuil de la bifurcation, les termes linéaires $z_2 B$ et $z_2 A$ sont associés à la résonance la plus forte. Dans ce cas, l'invariance par translation discrète impose $q = (m/2)(2\pi/\lambda)$ (m entier). Maintenant que le nombre sélectionné a été identifié, on peut poursuivre le raisonnement et utiliser la théorie des groupes (ici assez triviale) pour déterminer la nature des modes instables. Dans le cas $q = \pi/\lambda$, correspondant au doublement de période spatiale, 4.7 se réécrit

$$\partial_t \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \dots\tag{4.8}$$

Les modes critiques sont alors soit symétriques ($A = B$, renvoie à la valeur propre $z_1 + z_2$), soit antisymétriques ($A = -B$, renvoie à la valeur propre $z_1 - z_2$) [23]. Nous utilisons par la suite la même approche pour caractériser les vecteurs d'onde mis en jeu dans la déstabilisation d'un pattern hexagonal 2D.

4.3. Sélection des vecteurs d'onde lors de la déstabilisation d'une structure hexagonale

En utilisant des arguments analogues au cas unidimensionnel, on s'intéresse ici à la sélection des vecteurs d'onde (direction et norme) qui interviennent lors de la déstabilisation d'un motif stationnaire hexagonal. Nous considérons une structure d'hexagones centrés. En effet, contrairement au problème de la convection de Bénard-Marangoni, nous n'introduisons pas de différence entre le centre de l'hexagone et ses six voisins. Nous avons traité le sujet dans l'article [30] également consultable dans l'annexe E.

Plusieurs des modes prédits ont été observés numériquement et expérimentalement. Ils sont discutés dans la section 4.4. En particulier, l'un des modes prédits a été observé dans l'expérience décrite dans cette thèse au chapitre 3.

4.3.1. Le positionnement du problème

On suit exactement la même démarche que dans le cas unidimensionnel, la différence venant des symétries du problème, plus nombreuses. On considère un système bidimensionnel, dont la dynamique est régie par une collection d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F_\mu(U, \partial x, \partial y), \quad (4.9)$$

où $U = U(x, y, t)$ est un ensemble de fonctions représentant des grandeurs physiques (vitesse, pression, ...), et où la dynamique F_μ dépend a priori des dérivées spatiales des composantes de U .

On suppose aussi que le système (4.9) est invariant par translations continues d'espace (opérateur $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ suivant \vec{v}) et de temps (opérateur \mathcal{T}_t), par réflexion miroir par rapport à un plan vertical (opérateur parité $\mathcal{P}_{\vec{v}}$ par rapport à \vec{v} , i.e. $\mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{r}) = 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} - \vec{r}$) et par rotation continue d'espace d'angle θ (opérateur \mathcal{R}_θ). Appelons \mathcal{H} le groupe des transformations laissant invariant le système.

Si $U(x, y, t)$ est solution de (4.9), alors $(\mathcal{T}_{\vec{v}}U)(x, y, t)$, $(\mathcal{T}_tU)(x, y, t)$, $(\mathcal{R}_\theta U)(x, y, t)$ et $(\mathcal{P}_{\vec{v}}U)(x, y, t)$ le sont aussi.

On fait ensuite l'hypothèse, en tenant compte du réseau hexagonal, qu'il existe un régime de paramètres pour lequel (4.9) possède une solution stationnaire $U_0(x, y, t) = U_0(x, y)$, invariante par translation $\mathcal{T}_{\vec{a}_i}U_0(\vec{r}) = U_0(\vec{r} + \vec{a}_i) = U_0(\vec{r})$ avec

$$\vec{a}_i = \lambda (\cos(i2\pi/3), \sin(i2\pi/3)), \quad i = 0, 1, 2,$$

invariante par parité ($\mathcal{P}_{\vec{a}_i}U_0 = U_0$) et par les rotations d'angle $2\pi/6$ ($\mathcal{R}_{2\pi/6}U_0 = U_0$), c'est à dire invariante par l'action du groupe $\mathcal{G} = \mathcal{C}_{6v} \times \mathbb{Z}^2$. \mathcal{G} est un sous-groupe de \mathcal{H} que l'on appelle le groupe d'isotropie de la solution U_0 .

– \mathcal{C}_{6v} contient les douze éléments de symétrie de l'hexagone :

$$\mathcal{C}_{6v} = \{g_i, i \in [1, 12]\} = \{E, \mathcal{C}_6^1 = \mathcal{R}_{2\pi/6}, \mathcal{C}_6^2 = \mathcal{R}_{2\pi/6}^2, \mathcal{C}_6^3 = \mathcal{R}_{2\pi/6}^3, \mathcal{C}_6^4 = \mathcal{R}_{2\pi/6}^4, \mathcal{C}_6^5 = \mathcal{R}_{2\pi/6}^5, \sigma_v = \mathcal{P}_{\vec{a}_0}, \sigma_v \mathcal{C}_6^1 = \mathcal{R}_{2\pi/6} \mathcal{P}_{\vec{a}_0}, \sigma_v \mathcal{C}_6^2 = \mathcal{R}_{2\pi/6}^2 \mathcal{P}_{\vec{a}_0}, \sigma_v \mathcal{C}_6^3 = \mathcal{R}_{2\pi/6}^3 \mathcal{P}_{\vec{a}_0}, \sigma_v \mathcal{C}_6^4 = \mathcal{R}_{2\pi/6}^4 \mathcal{P}_{\vec{a}_0}, \sigma_v \mathcal{C}_6^5 = \mathcal{R}_{2\pi/6}^5 \mathcal{P}_{\vec{a}_0}\}$$

où \mathcal{C}_6^i est la rotation d'angle $\frac{2i\pi}{6}$ et σ_v la réflexion miroir par rapport au plan vertical $(0, x, z)$.

– \mathbb{Z}^2 est le groupe des translations discrètes générées par \vec{a}_0 et \vec{a}_1 où

$$\vec{a}_0 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_1 = \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Les modes de Fourier \vec{k}_i de la solution de base satisfont les conditions :

$$\vec{a}_i \cdot \vec{k}_j = 2\pi\delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1$$

conduisant à

$$\vec{k}_i = k_0 \begin{pmatrix} \cos\left((2i+1)\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left((2i+1)\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}, \quad \text{et } k_0 = \frac{4\pi}{\lambda\sqrt{3}}$$

Il est important de remarquer que les modes de Fourier \vec{k}_i mis en jeu dans la description de U_0 ne sont jamais parallèles aux vecteurs translation \vec{a}_j et n'ont pas une norme de $2\pi/\|\vec{a}_j\|$. Les \vec{a}_i et les vecteurs d'onde associés \vec{k}_i sont représentés Fig. 4.1.

$$\text{Soit } \begin{cases} U_0(x, y, t) = U_0(x, y) \\ U_0(\vec{r}) = (gU_0)(\vec{r}), \quad \text{pour tout élément de } \mathcal{G} \end{cases}$$

Pour étudier les bifurcations secondaires, c'est à dire comment cette solution stationnaire hexagonale centrée se déstabilise, on quitte la zone de stabilité en faisant passer un paramètre μ au delà d'une valeur critique μ_c . On peut alors procéder à une analyse de stabilité linéaire de (4.9) avec

$$U(x, y, t) = U_0(x, y) + \mathcal{W}(x, y, t)$$

où $\mathcal{W}(x, y, t)$ est une perturbation infinitésimale.

$$F_\mu(U, \partial x, \partial y) = F_\mu(U_0, \partial x, \partial y) + DF|_{U_0} \mathcal{W} + \dots$$

Alors

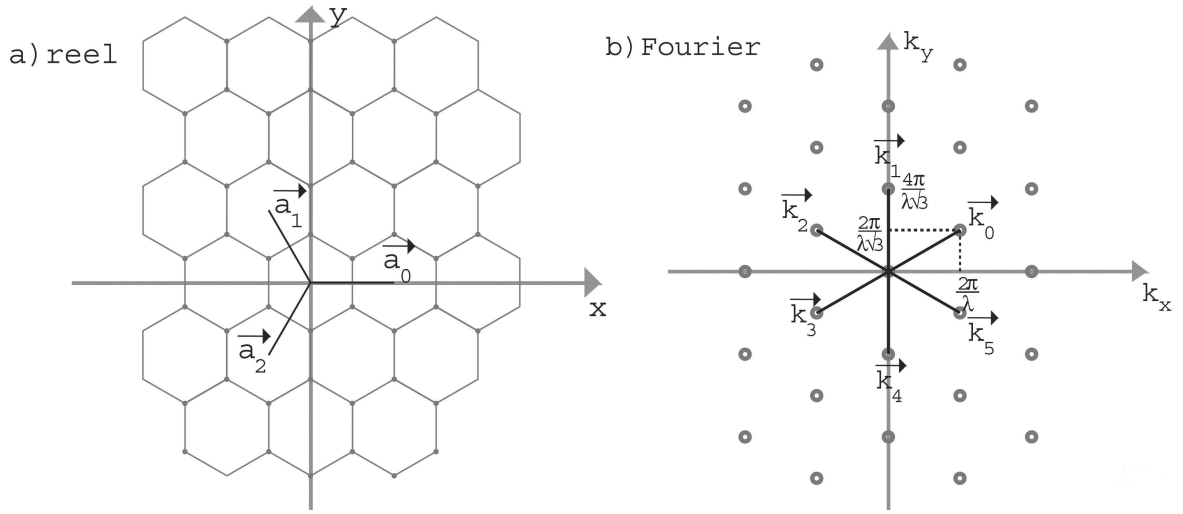


FIG. 4.1.: (a) Schéma d'un pattern hexagonal. Les \vec{a}_i correspondent aux translations d'espace laissant le pattern inchangé; (b) Schéma des vecteurs d'onde mis en jeu dans la description de (a).

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U_0}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = F_\mu(U_0, \partial x, \partial y) + DF|_{U_0} \mathcal{W} + \dots$$

et en se restreignant aux termes linéaires en \mathcal{W}

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = DF|_{U_0} \mathcal{W} \quad (4.10)$$

Si \mathcal{W} est solution de (4.10), alors $g\mathcal{W}$ l'est également pour tout $g \in \mathcal{C}_{6v}$.

En effet, si $U(x, y, t)$ est solution de (4.9), alors du fait des symétries du problème, $gU = gU_0 + g\mathcal{W}$ est aussi solution de (4.9) que l'on réécrit

$$\frac{\partial (gU_0)}{\partial t} + \frac{\partial (g\mathcal{W})}{\partial t} = F_\mu(gU_0, \partial x, \partial y) + DF|_{gU_0} (g\mathcal{W}).$$

Or

$$\frac{\partial (gU_0)}{\partial t} = F_\mu(gU_0, \partial x, \partial y)$$

donc

$$\frac{\partial (g\mathcal{W})}{\partial t} = DF|_{U_0} (g\mathcal{W}).$$

4.3.2. L'analyse de Bloch-Floquet

Les fonctions bi-périodiques sur le réseau R sont de la forme $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ où \vec{k} appartient au réseau dual de R :

$$R^* = \left\{ n_1 \vec{k}_1 + n_2 \vec{k}_2 / n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

Puisque la solution $U_0(x, y)$ est périodique, il est judicieux de la décomposer dans l'espace de Fourier

$$U_0(\vec{r}) = \sum_{n_1, n_2} U_{n_1, n_2} e^{i(n_1 \vec{k}_1 + n_2 \vec{k}_2) \cdot \vec{r}}$$

$DF|_{U_0}$ étant un opérateur linéaire et bi-périodique, on peut le développer en série de Fourier :

$$DF|_{U_0} = \sum_{n_1, n_2} e^{i(n_1 \vec{k}_1 + n_2 \vec{k}_2) \cdot \vec{r}} \mathcal{L}_{n_1, n_2}(\partial x, \partial y) \quad (4.11)$$

avec $\mathcal{L}_{n_1, n_2}(\partial x, \partial y)$ opérateur différentiel.

En substituant (4.11) dans (4.10) on obtient la dynamique de $\widehat{\mathcal{W}}$ par une transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}(x, y, t)}{\partial t} &= \sum_{n_1, n_2} e^{i(n_1 \vec{k}_1 + n_2 \vec{k}_2) \cdot \vec{r}} \mathcal{L}_{n_1, n_2}(\partial x, \partial y) \mathcal{W}(x, y, t) \\ \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}(\vec{k}, t)}{\partial t} &= \int \left(\sum_{n_1, n_2} e^{i(n_1 \vec{k}_1 + n_2 \vec{k}_2) \cdot \vec{r}} \mathcal{L}_{n_1, n_2}(\partial x, \partial y) \mathcal{W}(x, y, t) \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \\ &= \sum_{n_1, n_2} \int \left(e^{i(n_1 \vec{k}_1 + n_2 \vec{k}_2 + \vec{k}) \cdot \vec{r}} \mathcal{L}_{n_1, n_2}(\partial x, \partial y) \mathcal{W}(x, y, t) d\vec{r} \right) \\ \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}(\vec{k}, t)}{\partial t} &= \sum_{n_1, n_2} \mathcal{L}_{n_1, n_2}(n_1 \vec{k}_1 + n_2 \vec{k}_2 + \vec{k}) \widehat{\mathcal{W}}(n_1 \vec{k}_1 + n_2 \vec{k}_2 + \vec{k}, t) \quad (4.12) \end{aligned}$$

Si on considère un sous-ensemble

$$\mathcal{H}_{\vec{K}} = \left\{ \widehat{\mathcal{W}}\left(\vec{K} + \left[n_1 \vec{k}_1 + n_2 \vec{k}_2 \right], t\right), (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\},$$

on remarque qu'il est globalement invariant par la dynamique (4.12) et que les sous-espaces $\mathcal{H}_{\vec{K}}$ ne s'intersectent pas. En réalité, ils forment une partition de l'ensemble des solutions. C'est pourquoi, lors de l'analyse de la dynamique (4.12), on peut se restreindre à chacun des sous-ensembles $\mathcal{H}_{\vec{K}}$.

On peut représenter cela schématiquement, sachant qu'en réalité \vec{K} varie continûment et que les blocs sont de dimension infinie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{\mathcal{W}} \begin{pmatrix} \vec{K}_1 \\ \vec{K}_2 \\ \vec{K}_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} [\dots] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\dots] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\dots] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \widehat{\mathcal{W}} \begin{pmatrix} \vec{K}_1 \\ \vec{K}_2 \\ \vec{K}_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, t$$

Ainsi, à partir de maintenant, on se restreindra à un sous-ensemble $\mathcal{H}_{\vec{K}}$ donné.

On atteint le seuil de la bifurcation (comportement critique) lorsqu'en faisant varier un paramètre, la valeur propre qui a la plus grande partie réelle traverse l'axe imaginaire :

$$\Omega_{\vec{k}_c} = i\omega, \text{ où } \vec{k}_c \text{ représente le vecteur } \vec{K} \text{ critique.}$$

Puisque les autres valeurs propres sont de parties réelles négatives, les modes amortis correspondants disparaissent après un temps suffisamment long et la dynamique à grand temps s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\vec{k}_c}(x, y, t) &= Ae^{i\Omega t} \sum_{n_1, n_2} \widehat{\mathcal{W}}(\vec{k}_c + n_1 \vec{k}_1 + n_2 \vec{k}_2, t) e^{i(\vec{k}_c + [n_1 \vec{k}_1 + n_2 \vec{k}_2]) \cdot \vec{r}} + C.C. \\ &= Ae^{i\Omega t} e^{i\vec{k}_c \cdot \vec{r}} \chi(\vec{r}) + C.C. \end{aligned}$$

avec $\chi(\vec{r})$ une fonction avec la même structure hexagonale que $U_0(\vec{r})$ et A un coefficient complexe de proportionnalité. L'exposant de Floquet $\vec{F} = i\vec{k}_c$ est pour les mêmes raisons qu'à 1D purement imaginaire.

Comme on l'a vu, l'équation (4.10) est invariante par l'action du groupe de symétrie de l'hexagone \mathcal{C}_{6v} . Puisque $\mathcal{W}_{\vec{k}_c}(\vec{r}, t)$ ainsi défini est un mode propre critique solution de (4.10), il en va de même pour $(g\mathcal{W}_{\vec{k}_c})(\vec{r}, t)$ où g est l'un des 12 éléments du groupe de symétrie \mathcal{C}_{6v} .

On peut écrire la forme générale de la solution au seuil de la bifurcation secondaire :

4.3. Sélection des vecteurs d'onde lors de la déstabilisation d'une structure hexagonale

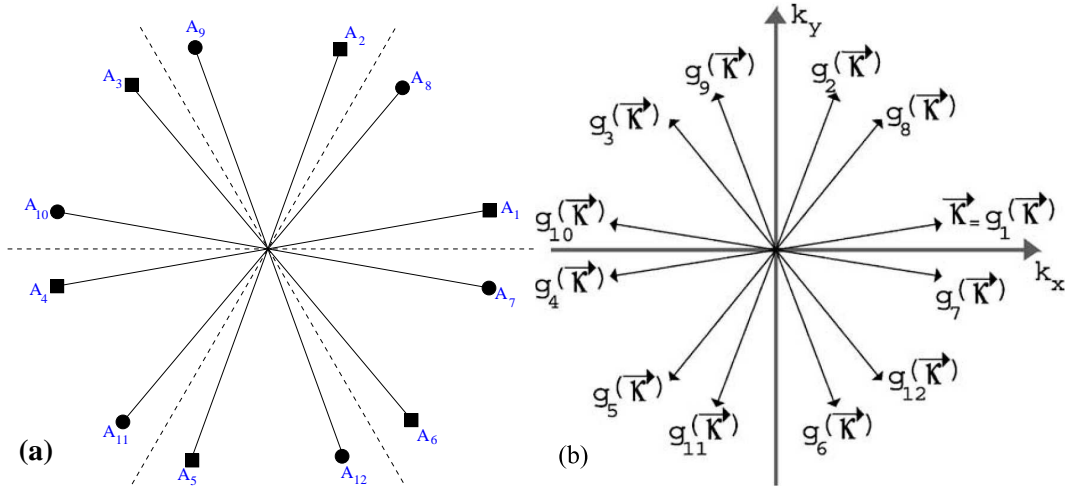


FIG. 4.2.: (a) Les amplitudes A_i des modes propres critiques. (b) Les vecteurs d'onde mis en jeu dans la description des modes propres secondaires.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}(\vec{r}, t) = & e^{i\Omega t} \left[(A_E e^{i\vec{k}_c \cdot \vec{r}} \chi(\vec{r}) + A_{C_6^1} e^{i(C_6^1 \vec{k}_c) \cdot \vec{r}} (C_6^1 \chi)(\vec{r}) + A_{C_6^2} e^{i(C_6^2 \vec{k}_c) \cdot \vec{r}} (C_6^2 \chi)(\vec{r}) \right. \\
 & + A_{C_6^3} e^{i(C_6^3 \vec{k}_c) \cdot \vec{r}} (C_6^3 \chi)(\vec{r}) + A_{C_6^4} e^{i(C_6^4 \vec{k}_c) \cdot \vec{r}} (C_6^4 \chi)(\vec{r}) + A_{C_6^5} e^{i(C_6^5 \vec{k}_c) \cdot \vec{r}} (C_6^5 \chi)(\vec{r}) \\
 & + A_{\sigma_v} e^{i(\sigma_v \vec{k}_c) \cdot \vec{r}} (\sigma_v \chi)(\vec{r}) + A_{C_6^1 \sigma_v} e^{i(C_6^1 \sigma_v \vec{k}_c) \cdot \vec{r}} (C_6^1 \sigma_v \chi)(\vec{r}) \\
 & + A_{C_6^2 \sigma_v} e^{i(C_6^2 \sigma_v \vec{k}_c) \cdot \vec{r}} (C_6^2 \sigma_v \chi)(\vec{r}) + A_{C_6^3 \sigma_v} e^{i(C_6^3 \sigma_v \vec{k}_c) \cdot \vec{r}} (C_6^3 \sigma_v \chi)(\vec{r}) \\
 & \left. + A_{C_6^4 \sigma_v} e^{i(C_6^4 \sigma_v \vec{k}_c) \cdot \vec{r}} (C_6^4 \sigma_v \chi)(\vec{r}) + A_{C_6^5 \sigma_v} e^{i(C_6^5 \sigma_v \vec{k}_c) \cdot \vec{r}} (C_6^5 \sigma_v \chi)(\vec{r}) \right] \\
 & + C.C.
 \end{aligned}$$

Que l'on peut réécrire de manière plus compacte

$$\mathcal{W}(\vec{r}, t) = \Re e \left\{ e^{i\Omega t} \sum_{i=1}^{12} A_i e^{ig_i(\vec{k}) \cdot \vec{r}} g_i(\chi)(\vec{r}) \right\} \quad (4.13)$$

en notant (voir Fig. 4.2)

$$\{i = E, C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, \sigma_v, C_6^1 \sigma_v, C_6^2 \sigma_v, C_6^3 \sigma_v, C_6^4 \sigma_v, C_6^5 \sigma_v\} \quad (4.14)$$

et où $\vec{k}_c = \kappa \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$.

4.3.3. La sélection des vecteurs d'onde \vec{k}_c

Les douze amplitudes complexes (4.14) rendent compte des propriétés de parité et de rotation des modes propres critiques et jouent le rôle de paramètre d'ordre de la bifurcation secondaire. Mais on n'a encore aucune information sur les poids relatifs de ces différents coefficients. Par exemple,

– dans le cas isotrope, on peut s'attendre à trouver un vecteur propre de la forme

$$(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}) = \alpha (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

– dans le cas symétrique par rapport à σ_v

$$(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$$

– dans le cas antisymétrique

$$(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_4, -\alpha_5, -\alpha_6)$$

Pour caractériser les instabilités génériques secondaires d'un motif hexagonal bidimensionnel, nous supposons que les amplitudes complexes A_i varient lentement dans le temps proche du seuil. On recherche l'équation d'évolution temporelle comme un développement de Taylor en A_i et \bar{A}_i .

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = \alpha_{ij} A_j + \beta_{ik} \bar{A}_k + T.N.L. \quad (4.15)$$

Dans le cas de la bifurcation de Hopf⁴ ($\Omega \neq 0$), l'invariance par translation dans le temps ($t \rightarrow t + \delta t$) force (4.15) à être invariant par la transformation de la phase $A_i \rightarrow A_i e^{i\Omega \delta t}$ en imposant $\beta_{ij} = 0$ et conduit à

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = \alpha_{ij} A_j + T.N.L. \quad (4.16)$$

Appelons \mathcal{M}_H la matrice des $(\alpha_{i,j})$. Dans la suite de cet exposé, nous nous limiterons uniquement à ce cas.

\mathcal{C}_{6v}	E	C_6	$2C_3$	$2C_6$	$3U_2$	$3U'_2$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	-1	1
E_1	2	-2	-1	1	0	0
E_2	2	2	-1	-1	0	0

TAB. 4.2.: Table des caractères du groupe \mathcal{C}_{6v}

4.3.3.1. L'invariance de (4.10) par les éléments du groupe \mathcal{C}_{6v}

On choisit une représentation matricielle \mathbf{R}_{12} du groupe \mathcal{C}_{6v} des symétries de la solution sur l'espace des opérateurs linéaires de (A_1, \dots, A_{12}) vers (A_1, \dots, A_{12}) .

Ainsi, on peut définir les représentations du groupe \mathcal{C}_{6v} :

$$\begin{aligned}
 E &\mapsto \mathbf{R}_{12}(E) &: \{A_1, \dots, A_{12}\} &\rightarrow \{A_1, \dots, A_{12}\} \\
 \mathcal{C}_6^1 &\mapsto \mathbf{R}_{12}(\mathcal{C}_6^1) &: \{A_1, \dots, A_{12}\} &\rightarrow \{A_6, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_{12}, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}\} \\
 \sigma_v &\mapsto \mathbf{R}_{12}(\sigma_v) &: \{A_1, \dots, A_{12}\} &\rightarrow \{A_7, A_{12}, A_{11}, A_{10}, A_9, A_8, A_1, A_6, A_1, A_4, A_3, A_2\}
 \end{aligned}$$

On définit de même les représentations des neuf autres éléments du groupe.

\mathbf{R}_{12} est une représentation de \mathcal{C}_{6v} dans \mathbf{GL}_{12} , donc de dimension douze. Or, la théorie des groupes indique (voir la table 4.2 et l'Annexe B) que \mathcal{C}_{6v} possède quatre représentations irréductibles de dimension un et deux représentations irréductibles de dimension deux, deux à deux non équivalentes. \mathbf{R}_{12} n'est donc pas une représentation irréductible.

Par construction \mathcal{M}_H est \mathcal{C}_{6v} -équivariante car (4.10) est invariante par les éléments de symétrie de \mathcal{C}_{6v} . Les matrices $\mathbf{R}_{12}(\mathcal{C}_{6v})$ qui constituent cette représentation commutent avec \mathcal{M}_H . Puisque \mathcal{C}_6^1 et σ_v sont générateurs du groupe \mathcal{C}_{6v} , il faut et il suffit que $\mathbf{R}_{12}(\mathcal{C}_6^1)$ et $\mathbf{R}_{12}(\sigma_v)$ commutent avec \mathcal{M}_H (voir les formes matricelles de $\mathbf{R}_{12}(\mathcal{C}_6^1)$ et $\mathbf{R}_{12}(\sigma_v)$ en Annexe C).

Soit

$$[\mathcal{M}_H, \mathbf{R}_{12}(\mathcal{C}_6^1)] = 0, \quad [\mathcal{M}_H, \mathbf{R}_{12}(\sigma_v)] = 0 \quad (4.17)$$

où $[\mathcal{M}_H, \mathbf{R}_{12}(\mathcal{C}_6^1)]$ est le commutateur de \mathcal{M}_H et de $\mathbf{R}_{12}(\mathcal{C}_6^1)$.

⁴Nous traitons par la suite uniquement le cas de Hopf ($\Omega \neq 0$), le cas stationnaire ($\Omega = 0$) conduisant exactement aux mêmes résultats.

Les équations (4.17) réduisent les 144 éléments complexes de \mathcal{M}_H à seulement 12

différents notés $(m_1, m_2, \dots, m_{12})$:

$$\mathcal{M}_H = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & m_7 & m_8 & m_9 & m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_6 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_{12} & m_7 & m_8 & m_9 & m_{10} & m_{11} \\ m_5 & m_6 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_{11} & m_{12} & m_7 & m_8 & m_9 & m_{10} \\ m_4 & m_5 & m_6 & m_1 & m_2 & m_3 & m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_7 & m_8 & m_9 \\ m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & m_1 & m_2 & m_9 & m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_7 & m_8 \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & m_1 & m_8 & m_9 & m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_7 \\ m_7 & m_{12} & m_{11} & m_{10} & m_9 & m_8 & m_1 & m_6 & m_5 & m_4 & m_3 & m_2 \\ m_8 & m_7 & m_{12} & m_{11} & m_{10} & m_9 & m_2 & m_1 & m_6 & m_5 & m_4 & m_3 \\ m_9 & m_8 & m_7 & m_{12} & m_{11} & m_{10} & m_3 & m_2 & m_1 & m_6 & m_5 & m_4 \\ m_{10} & m_9 & m_8 & m_7 & m_{12} & m_{11} & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 & m_6 & m_5 \\ m_{11} & m_{10} & m_9 & m_8 & m_7 & m_{12} & m_5 & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 & m_6 \\ m_{12} & m_{11} & m_{10} & m_9 & m_8 & m_7 & m_6 & m_5 & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice possède quatre valeurs propres doubles et quatre valeurs propres simples auxquelles sont associées six formes de vecteurs propres différentes

$$\begin{aligned} V_1 &= (\alpha, \beta, -(\alpha + \beta), \alpha, \beta, -(\alpha + \beta), \gamma, \delta, -(\gamma + \delta), \gamma, \delta, -(\gamma + \delta)) \\ V_2 &= (\alpha, \beta, \beta - \alpha, -\alpha, -\beta, -(\beta - \alpha), \gamma, \delta, -(\gamma - \delta), -\gamma, -\delta, \gamma - \delta) \\ V_3 &= (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha) \\ V_4 &= (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha) \\ V_5 &= (\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha) \\ V_6 &= (\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha) \end{aligned}$$

- | | |
|---|---|
| { | Une valeur propre double λ_1 est associée à deux vecteurs propres du type V_1 |
| | Une valeur propre double λ_2 est associée à deux vecteurs propres du type V_1 |
| | Une valeur propre double λ_3 est associée à deux vecteurs propres du type V_2 |
| | Une valeur propre double λ_4 est associée à deux vecteurs propres du type V_2 |
| | Une valeur propre simple λ_5 est associée à un vecteur propre du type V_3 |
| | Une valeur propre simple λ_6 est associée à un vecteur propre du type V_4 |
| | Une valeur propre simple λ_7 est associée à un vecteur propre du type V_5 |
| | Une valeur propre simple λ_8 est associée à un vecteur propre du type V_6 |

On vérifie que ces résultats sont compatibles avec les relations d'orthogonalité de la théorie des groupes (Cf Annexe B).

$$\begin{aligned} \sum_i n_i^2 &= 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = g \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i a_i n_i &= (2 * 2) + (2 * 2) + (1 * 1) + (1 * 1) + (1 * 1) + (1 * 1) = g \\ &= 12 \end{aligned}$$

où n_i est la dimension de la représentation irréductible i , a_i sa multiplicité et g l'ordre du groupe.

4.3.3.2. L'invariance de (4.10) par les translations d'espace \mathbb{Z}^2 .

Si on prend en compte l'invariance de (4.10) par les translations d'espace \mathbb{Z}^2 , \mathcal{M}_H doit commuter avec les deux matrices de translation $\mathbf{R}_{12}(\mathcal{T}_{\vec{a}_0})$ et $\mathbf{R}_{12}(\mathcal{T}_{\vec{a}_1})$ représentant respectivement les translations de vecteurs \vec{a}_0 et \vec{a}_1 .

$$[\mathcal{M}_H, \mathbf{R}_{12}(\mathcal{T}_{\vec{a}_0})] = 0, \quad [\mathcal{M}_H, \mathbf{R}_{12}(\mathcal{T}_{\vec{a}_1})] = 0 \quad (4.18)$$

On fait le calcul des deux matrices translation en utilisant le fait que la translation d'espace $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{a}_0$ impose $A_i \rightarrow A_i e^{i\vec{k}_{ci}\vec{a}_0}$ et la translation d'espace $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{a}_1$ impose $A_i \rightarrow A_i e^{i\vec{k}_{ci}\vec{a}_1}$ où on rappelle

$$i = E, \mathcal{C}_6^1, \mathcal{C}_6^2, \mathcal{C}_6^3, \mathcal{C}_6^4, \mathcal{C}_6^5, \sigma_v, \mathcal{C}_6^1\sigma_v, \mathcal{C}_6^2\sigma_v, \mathcal{C}_6^3\sigma_v, \mathcal{C}_6^4\sigma_v, \mathcal{C}_6^5\sigma_v$$

Les éléments de matrice des commutateurs (4.18) s'écrivent sous la forme $m_i \times (\text{coefficient})$ où les termes (*coefficient*) sont fonction de κ et θ . Tous ces éléments de matrice doivent être nuls. Deux possibilités se présentent alors pour annuler un élément. Soit (*coefficient*) est nul, soit m_i est nul. Certains des (*coefficient*) peuvent s'annuler pour des valeurs de κ et θ déterminées.

Considérons le cas des éléments de matrice ayant m_2 en facteur. Si, pour (κ, θ) donné, tous les (*coefficient*) en facteur de m_2 sont nuls, alors aucune condition n'est imposée pour m_2 : il est a priori non nul.

Au contraire, si pour (κ, θ) donné, au moins un (*coefficient*) en facteur de m_2 est non nul, alors m_2 doit nécessairement être nul puisqu'il faut annuler l'élément de matrice correspondant.

Cette description est également vraie pour toutes les autres situations $i \neq 1$.

En définitive, il faut identifier tous les couples (κ, θ) pour lesquels on n'a pas l'obligation d'annuler un, voire plusieurs m_i , sachant qu'il faut annuler tous les éléments de matrice des deux commutateurs séparément.

En utilisant les notations

$$\begin{aligned} C &= e^{i\frac{\kappa}{2}\lambda \cos(\theta)} \\ S &= e^{i\frac{\kappa}{2}\lambda\sqrt{3} \sin(\theta)} \end{aligned}$$

on obtient les conditions d'annulation suivantes :

$$\begin{aligned} m_2 = 0 & \text{ ou } (C, S) \in \mathcal{S}_2 = \{(1, 1), (-1, -1)\}, \\ m_3 = 0 & \text{ ou } (C, S) \in \mathcal{S}_3 = \{(1, 1), (-1, -1), (e^{\pm 2i\pi/3}, 1), (e^{\pm 2i\pi/6}, -1)\}, \\ m_4 = 0 & \text{ ou } (C, S) \in \mathcal{S}_4 = \{(1, \pm 1), (-1, \pm 1), (i, \pm i), (-i, \pm i)\}, \\ m_5 = 0 & \text{ ou } (C, S) \in \mathcal{S}_3, \\ m_6 = 0 & \text{ ou } (C, S) \in \mathcal{S}_2, \\ m_7 = 0 & \text{ ou } (C, S) \in \mathcal{S}_5 = \{S = \pm 1\}, \\ m_8 = 0 & \text{ ou } (C, S) \in \mathcal{S}_6 = \{C = S\}, \\ m_9 = 0 & \text{ ou } (C, S) \in \mathcal{S}_7 = \{S = C^3\}, \\ m_{10} = 0 & \text{ ou } (C, S) \in \mathcal{S}_8 = \{C = \pm 1\}, \\ m_{11} = 0 & \text{ ou } (C, S) \in \mathcal{S}_9 = \{SC^3 = 1\}, \\ m_{12} = 0 & \text{ ou } (C, S) \in \mathcal{S}_{10} = \{SC = 1\}. \end{aligned}$$

On constate qu'il n'y a pas de condition sur m_1 . De plus, si tous les coefficients (m_2, \dots, m_{12}) étaient nuls, alors (4.10) serait invariant par rapport à toute translation continue d'espace. Bien que ce soit possible, par exemple si $DF|_{U_0}$ ne dépendait pas explicitement de U_0 , ce n'est pas une situation générique. Donc génériquement au moins un des $m_{i, i \geq 2}$ est non nul. On remarque également que les ensembles \mathcal{S}_i ne sont pas disjoints. Plusieurs m_i peuvent être simultanément non nuls pour un même couple (C, S) . Par exemple dans le cas $(C, S) \in \mathcal{S}_2$, aucun des m_i n'est forcé de s'annuler.

Tous les cas de figure constituant les règles de sélection des vecteurs d'onde de l'instabilité secondaire sont résumés dans la Table 4.3 où $\Delta\theta$ est l'angle entre \vec{k}_0 et

4.3. Sélection des vecteurs d'onde lors de la déstabilisation d'une structure
hexagonale

Cas	$\kappa_x/\frac{2\pi}{\lambda}$	$\kappa_y/\frac{2\pi}{\lambda\sqrt{3}}$	κ^2/k_0^2	κ_{min}/k_0	$\Delta\theta$	Pas forcément nul
I	$2m$	$2n$	$3m^2 + n^2$	1	0	tous
II	$2m + 1$	$2n + 1$	$3(m + 1/2)^2 + (n + 1/2)^2$	1	0	
III	$2m + 2/3$	$2n$	$3(m + 1/3)^2 + n^2$	$1/\sqrt{3}$	$\pi/6$	$m_1, m_3,$
IV	$2m - 2/3$	$2n$	$3(m - 1/3)^2 + n^2$	$1/\sqrt{3}$	$\pi/6$	$m_5, m_7,$
V	$2m + 1/3$	$2n + 1$	$3(m + 1/6)^2 + (n + 1/2)^2$	$1/\sqrt{3}$	$\pi/6$	m_9, m_{11}
VI	$2m - 1/3$	$2n + 1$	$3(m - 1/6)^2 + (n + 1/2)^2$	$1/\sqrt{3}$	$\pi/6$	
VII	$2m$	$2n + 1$	$3m^2 + (n + 1/2)^2$	1/2	0	m_1, m_4, m_7, m_{10}
VIII	$2m + 1$	$2n$	$3(m + 1/2)^2 + n^2$	$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$	
IX	$2m + 1/2$	$2n + 1/2$	$3(m + 1/4)^2 + (n + 1/4)^2$	1/2	0	m_1, m_4, m_8, m_{11}
X	$2m - 1/2$	$2n - 1/2$	$3(m - 1/4)^2 + (n - 1/4)^2$	1/2	0	
XI	$2m + 1/2$	$2n - 1/2$	$3(m + 1/4)^2 + (n - 1/4)^2$	1/2	0	m_1, m_4, m_9, m_{12}
XII	$2m - 1/2$	$2n + 1/2$	$3(m - 1/4)^2 + (n + 1/4)^2$	1/2	0	

Cas	Contrainte	Pas forcément nul
XIII	$\kappa_y = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{3}} (2n)$	m_1, m_7
XIV	$\kappa_y = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{3}} (2n+1)$	
XV	$\kappa_y - \frac{\kappa_x}{\sqrt{3}} = k_0 m$	m_1, m_8
XVI	$\kappa_y - \kappa_x \sqrt{3} = k_0 m$	m_1, m_9
XVII	$\kappa_x = \frac{2\pi}{\lambda} (2m)$	m_1, m_{10}
XVIII	$\kappa_x = \frac{2\pi}{\lambda} (2m+1)$	
XIX	$\kappa_y + \sqrt{3}\kappa_x = k_0 m$	m_1, m_{11}
XX	$\kappa_y + \frac{\kappa_x}{\sqrt{3}} = k_0 m$	m_1, m_{12}

TAB. 4.3.: Les règles de sélection des vecteurs d'onde.

\vec{k}_c (voir Fig. 4.2).

Passons en revue quelques situations.

$$1 \quad (C, S) = (1, 1) \Rightarrow \exists(m, n) \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} k_{c,x} = \kappa \cos(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda} 2m \\ k_{c,y} = \kappa \sin(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{3}} 2n \end{cases}$$

Dans ce cas, il n'y a aucune condition sur les coefficients m_1, \dots, m_{12} qui ne sont donc pas forcés de s'annuler.

$\kappa_{m,n}^2 = k_0^2 (3m^2 + n^2)$. La forme des vecteurs propres et valeurs propres est celle donnée plus haut. Pour la sélection des vecteurs d'onde, on peut noter que l'ensemble $\mathcal{F} = \left\{ \vec{k}_{c,(m,n)}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ n'est pas $C_{6\nu}$ -invariant. A_1 est associé au spectre \mathcal{F} , A_2 au spectre $g_2(\mathcal{F})$ et A_i au spectre $g_i(\mathcal{F})$. Le spectre de la perturbation critique \mathcal{W}

met en jeu $\bigcup_{i=1}^{12} g_i(\mathcal{F})$. Les plus petits vecteurs d'onde correspondent aux \vec{k}_i du motif hexagonal de base $\kappa_{min} = k_0$ et $\Delta\theta = 0$.

$$2 \quad (C, S) = (-1, 1) \Rightarrow \exists(m, n) \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} k_{c,x} = \kappa \cos(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda}(2m+1) \\ k_{c,y} = \kappa \sin(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{3}}2n \end{cases}$$

les coefficients m_1, m_4, m_7 et m_{10} ne sont donc pas forcés de s'annuler et \mathcal{M}_H se réécrit

$$\mathcal{M}_H = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 & m_{10} & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 & m_{10} & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 & m_{10} \\ m_4 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & m_{10} & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 \\ 0 & m_4 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & m_{10} & 0 & 0 & m_7 & 0 \\ 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & m_{10} & 0 & 0 & m_7 \\ m_7 & 0 & 0 & m_{10} & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & m_7 & 0 & 0 & m_{10} & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 & m_{10} & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & m_4 \\ m_{10} & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{10} & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_{10} & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, on obtient les 4 valeurs propres triples et vecteurs propres associés :

$$m_1 + m_7 + m_4 + m_{10} : \begin{cases} (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) \\ (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0) \\ (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1) \end{cases}$$

$$m_1 + m_7 - m_4 - m_{10} : \begin{cases} (-1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0) \\ (0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1) \\ (0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0) \end{cases}$$

$$m_1 - m_7 - m_4 + m_{10} : \begin{cases} (0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, -1) \\ (1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0) \\ (0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0) \end{cases}$$

$$m_1 - m_7 + m_4 - m_{10} : \begin{cases} (0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 1) \\ (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0) \\ (1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0) \end{cases}$$

Par exemple, dans le cas où la valeur propre mise en jeu dans l'instabilité secondaire est $m_1 + m_7 + m_4 + m_{10}$, les trois vecteurs propres indépendants sont invariants par parité et s'échangent par rotation de $\frac{2\pi}{6}$. Le spectre de Fourier de ces modes propres n'est pas invariant par $\mathcal{R}_{2\pi/6}$, pas plus que la réunion des trois spectres. Le spectre de Fourier de la perturbation \mathcal{W} dépend de la compétition non-linéaire entre ces trois modes propres symétriques. Si ces trois modes propres coexistent avec la même amplitude, le spectre total est invariant par $\mathcal{R}_{2\pi/6}$, mais ce n'est pas vrai dans le cas contraire. Les plus petits vecteurs mis en jeu dans la description de la perturbation \mathcal{W} sont caractérisés par $\kappa_{min} = k_0 \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\Delta\theta = \frac{\pi}{6}$.

$$\mathbf{3} \quad S = 1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, k_{c,y} = \kappa \sin(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{3}} 2n$$

les coefficients m_1 et m_7 ne sont donc pas forcés de s'annuler et \mathcal{M}_H se réécrit

$$\mathcal{M}_H = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_7 \\ m_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, on obtient les 2 valeurs propres sextuples et vecteurs propres associés :

$$m_1 + m_7 : \begin{cases} (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\ (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \end{cases}$$

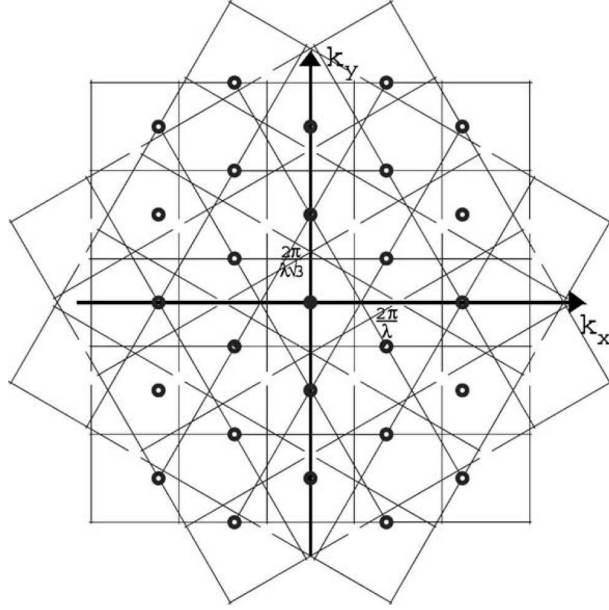


FIG. 4.3.: Spectre de Fourier de la perturbation \mathcal{W} pour le cas théorique 3. Les cercles correspondent aux vecteurs d'onde mis en jeu dans la description du motif hexagonal de base.

$$m_1 - m_7 : \begin{cases} (1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1) \\ (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0) \\ (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0) \end{cases}$$

Il n'y a pas de sélection sur la composante x de \vec{k}_c , mais cela n'impose pas que (4.10) soit invariant par rapport aux translations continues le long de l'axe des x . Les vecteurs propres associés à l'une des deux valeurs propres s'échangent par rotation de $\frac{2\pi}{6}$. Les vecteurs propres associés à la valeur propre $m_1 + m_7$ sont invariants par $\mathcal{P}_{a_0^-}$, alors que ceux associés à $m_1 - m_7$ s'échangent dans leurs opposés. La Fig. 4.3 montre les vecteurs d'onde mis en jeu dans la description de la perturbation quand il n'y a pas de compétition entre les modes propres critiques.

Pour finir, on donne un exemple pour le cas 2. Dans la situation $m_1 + m_7 + m_4 + m_{10} = 0$ (l'une des situations génériques d'apparition de l'instabilité), le mode propre critique $\mathcal{W}(\vec{r}, t)$ s'écrit :

$$\mathcal{W}(\vec{r}, t) = e^{i\Omega t} (R_1\chi_1(\vec{r}) + R_2\chi_2(\vec{r}) + R_3\chi_3(\vec{r}))$$

avec

$$\begin{aligned}\chi_1 &= e^{i\vec{k}_c \vec{r}} \chi(\vec{r}) + e^{i(\mathcal{C}_6^3 \vec{k}_c) \vec{r}} \mathcal{C}_6^3 \chi(\vec{r}) + e^{i(\sigma_v \vec{k}_c) \vec{r}} (\sigma_v \chi)(\vec{r}) + e^{i(\mathcal{C}_6^3 \sigma_v \vec{k}_c) \vec{r}} (\mathcal{C}_6^3 \sigma_v \chi)(\vec{r}) \\ \chi_2 &= e^{i(\mathcal{C}_6^1 \vec{k}_c) \vec{r}} \mathcal{C}_6^1 \chi(\vec{r}) + e^{i(\mathcal{C}_6^4 \vec{k}_c) \vec{r}} \mathcal{C}_6^4 \chi(\vec{r}) + e^{i(\mathcal{C}_6^1 \sigma_v \vec{k}_c) \vec{r}} (\mathcal{C}_6^1 \sigma_v \chi)(\vec{r}) + e^{i(\mathcal{C}_6^4 \sigma_v \vec{k}_c) \vec{r}} (\mathcal{C}_6^4 \sigma_v \chi)(\vec{r}) \\ \chi_3 &= e^{i(\mathcal{C}_6^2 \vec{k}_c) \vec{r}} \mathcal{C}_6^2 \chi(\vec{r}) + e^{i(\mathcal{C}_6^5 \vec{k}_c) \vec{r}} \mathcal{C}_6^5 \chi(\vec{r}) + e^{i(\mathcal{C}_6^2 \sigma_v \vec{k}_c) \vec{r}} (\mathcal{C}_6^2 \sigma_v \chi)(\vec{r}) + e^{i(\mathcal{C}_6^5 \sigma_v \vec{k}_c) \vec{r}} (\mathcal{C}_6^5 \sigma_v \chi)(\vec{r})\end{aligned}$$

et R_1 , R_2 et R_3 des coefficients complexes de proportionalité.

4.4. Comparaison avec des observations

A notre connaissance, quatre observations d'instabilité secondaire d'une structure stationnaire hexagonale ont été faites.

- Une simulation numérique de l'équation de Kuramoto-Sivashinski amortie à 2D [24]. Cette équation

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \mu - \left(1 + \vec{\nabla}^2\right)^2 h + \vec{\nabla} h^2$$

est mise en jeu dans de nombreux problèmes de physique et de chimie et peut être considérée comme un paradigme des systèmes dissipatifs. Elle possède une solution homogène et stationnaire $h = 0$ qui devient instable et laisse place à une structure hexagonale lorsque μ devient positif. Pour une valeur plus grande de ce paramètre, il apparaît une instabilité secondaire. L'étude numérique a montré l'émergence de nouveaux vecteurs $\kappa = k_0/\sqrt{3}$ et $(\Delta\theta = \pi/6)$ en accord avec nos prédictions théoriques (cas **III-VI**). En dépit du ratio en $\sqrt{3}$, cette instabilité a été appelée triplement de période de Hopf en raison du triplement observé dans certaines directions.

- Une expérience d'optique [25]. Une vapeur de sodium est irradiée par un laser à colorant avec un miroir simple. En augmentant l'intensité du laser, une première bifurcation à partir de l'état homogène fait apparaître une structure hexagonale, puis, en faisant croître l'intensité, une deuxième instabilité hexagonale surgit, caractérisée par un nombre d'onde plus grand ($\kappa/k_0 = 1.120 \pm 0.06$ et une rotation $\Delta\theta = \pi/6$ par rapport au motif de base. Il a été rapporté que la suppression des harmoniques par une technique de filtre optique conduit à la disparition de l'instabilité secondaire. Il y a plusieurs candidats théoriques, comme par exemple le cas **III** avec $m = -1$, $n = 0$ et $\kappa/k_0 = 2/\sqrt{3} \approx 1.115$ avec le bon comportement de filtre optique (voir Fig. 4.4-a). Si on considère les ensembles qui contiennent les vecteurs d'onde mis en jeu respectivement dans l'instabilité primaire et l'instabilité secondaire, on remarque que leur intersection est non nulle. En fait, les vecteurs d'onde communs, responsables du transfert d'énergie du premier au second motif, sont plus grands que $2k_0$. On peut donc s'attendre à une disparition de l'instabilité secondaire si un filtre optique arrête les vecteurs d'onde plus grands que $2k_0$.

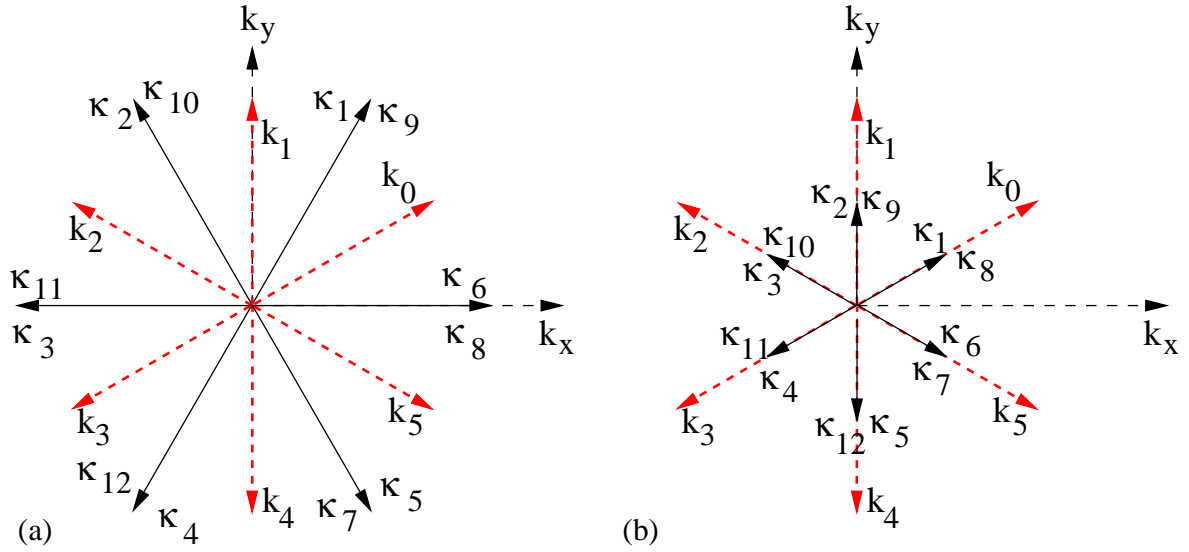


FIG. 4.4.: Les vecteurs d'onde mis en jeu dans la description des modes propres secondaires. (a) Cas **III** avec $(m,n)=(-1,0)$, $\Delta\theta = \pi/6$ et $\kappa_{min}/k_0 = 2/\sqrt{3} \approx 1.155$. (b) Cas **VII** avec $(m,n)=(0,0)$, $\Delta\theta = 0$ et $\kappa_{min}/k_0 = 1/2$.

- Une simulation numérique en solidification dirigée [28]. En variant les paramètres de contrôle, on passe d'un front plan de solidification à une structure hexagonale, puis à une déstabilisation de cette structure où trois sous-réseaux hexagonaux équivalents émergent avec $\kappa/k_0 = 1/\sqrt{3}$. Les cellules oscillent en phase avec une croissance exponentielle de l'amplitude (cas **III-VI**).
- Enfin, dans l'expérience d'hydrodynamique décrite dans cette thèse et dans [29]. Un film visqueux sous gravité déstabilisante et continûment alimenté crée un réseau hexagonal de colonnes de liquide. En diminuant le débit à partir de la solution stationnaire, on observe des oscillations de ligne en opposition de phase dans les trois directions du réseau (Fig. 4.5 et 4.4-b). Dans ce cas, $\kappa/k_0 = 1/2$ et $\Delta\theta = 0$ (cas **VII** avec $m = 0$ et $n = 0$).

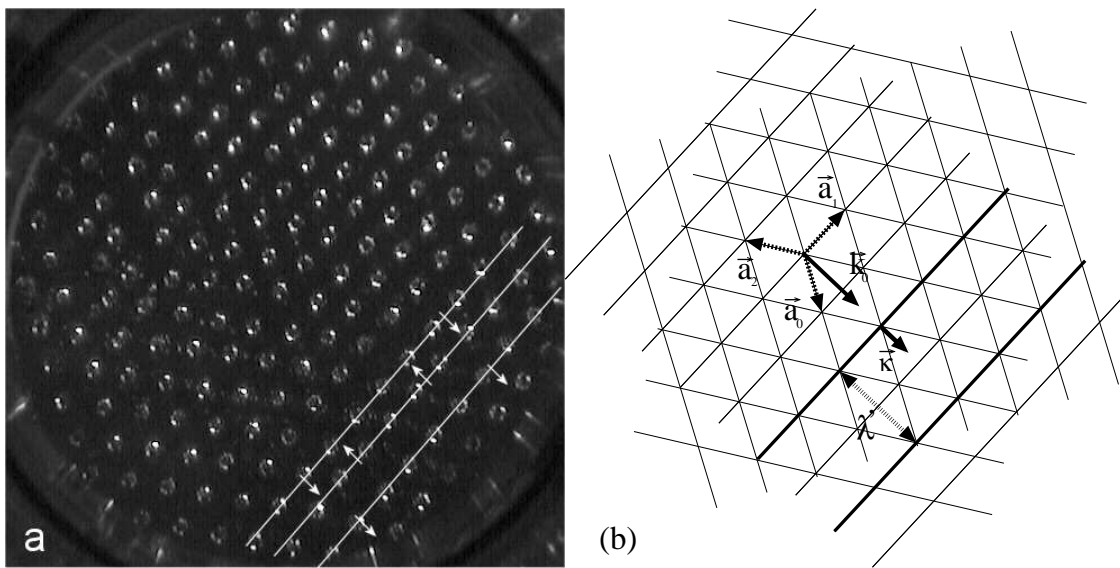


FIG. 4.5.: (a) Vue de dessus à travers le milieu poreux, l'embase des colonnes apparaissant en clair. Oscillations de lignes : les flèches indiquent le sens de déplacement dans une direction du réseau (période d'oscillation $T=1$ s, viscosité $\nu = 20 \text{ mm}^2/\text{s}$). (b) Les \vec{a}_i correspondent aux translations laissant le motif inchangé. λ est la longueur d'onde de l'instabilité secondaire.

5. Le régime turbulent

Nous abordons dans ce chapitre un autre aspect de l'écoulement. Il s'agit de l'étude à deux dimensions d'espace de la transition, dans le régime de colonnes, d'un état de base dit « laminaire » vers un état complètement désordonné dit « turbulent ».

5.1. Introduction

La transition vers la turbulence dans les systèmes dissipatifs hors équilibre est un phénomène étudié depuis plusieurs décennies, en particulier dans les écoulements hydrodynamiques. Il est usuel de classer ces systèmes suivant plusieurs critères clés, comme la dépendance de l'évolution spatio-temporelle à l'espace ou, dans le cas des systèmes spatialement étendus, le type de transition vers la turbulence.

5.1.1. Systèmes confinés ou étendus : chaos temporel ou spatio-temporel ?

On parle de système confiné ou de petit système lorsqu'il possède un petit nombre de degrés de liberté. Dans les systèmes hydrodynamiques, on y parvient par un confinement géométrique qui a pour effet de grandement simplifier la dynamique qui se trouve ainsi régie par un tout petit nombre de modes. On s'intéresse alors à l'évolution temporelle de ces modes puisque les effets spatiaux n'entrent pas en jeu. On décrit l'apparition du désordre en terme de chaos temporel, relativement bien compris à l'heure actuelle, grâce aux travaux théoriques pionniers, réalisés entre autres par A. Andronov et E. Hopf.

Plus récemment, D. Ruelle et F. Takens en 1971 [51], avec la notion d'attracteur étrange, ont montré que le chaos temporel peut arriver lorsqu'un régime bipériodique avec deux fréquences incommensurées apparaît dans le système (quasipériodicité). Au delà d'une certaine valeur du paramètre, le régime devient chaotique dans le temps.

En 1978, M.J. Feigenbaum [48] et C. Tresser, P. Coulet [49] ont décrit le scénario de la *cascade subharmonique* par lequel l'évolution temporelle du système devient chaotique par la succession de seulement quelques doublements de période.

En 1980, Y. Pomeau et P. Manneville [50], par le scénario de *transition par intermittence*, ont décrit les sursauts brusques et imprévisibles venant perturber un système oscillant. La fréquence de ces sursauts croît avec l'écart au seuil du paramètre de contrôle jusqu'au chaos.

Le cas d'un système étendu ou grand système (possédant un grand nombre de degrés de liberté), bien que rendant mieux compte de la réalité des phénomènes naturels, est bien plus difficile à étudier tant au niveau expérimental que théorique. En effet, le gel spatial qui imposait auparavant la cohérence spatio-temporelle disparaît et les comportements observés sont bien plus riches. Puisque l'espace rentre en compte, la géométrie joue un rôle crucial (il faut au moins intégrer la notion de conditions aux limites) et l'évolution ne peut se décrire qu'au moyen d'équations aux dérivées partielles qui n'ont en général pas de solutions analytiques. La démarche consiste bien souvent à généraliser les résultats obtenus dans des cas particuliers (c'est à dire avec des géométries étendues particulières). Les techniques d'analyse diffèrent selon que la transition, qui à terme mène au chaos spatio-temporel, est super-critique ou sous-critique.

5.1.2. Transition super-critique ou sous-critique vers la turbulence ?

Yves Pomeau, a proposé en 1986 [52] de distinguer deux types de transitions à la turbulence dans les systèmes spatialement étendus, en suivant une analogie avec la théorie des bifurcations.

Dans le cas des transitions super-critiques (ou du deuxième ordre au sens des systèmes thermodynamiques), l'état de base du système devient instable vis à vis de perturbations infinitésimales. Le désordre augmente de façon progressive et conduit à la turbulence. Cette transition à la turbulence est maintenant assez bien comprise comme étant une cascade de bifurcations continues (ou super-critiques au sens large) qui sont autant de brisures de symétrie spontanées du problème. Les équations d'amplitude des modes bifurqués peuvent être successivement obtenues par des développements perturbatifs de l'écart au seuil. Le chaos spatio-temporel peut être décrit à terme par des équations d'enveloppe comme l'équation de Ginzburg-Landau complexe qui peut montrer des régimes de turbulence de phase et de défauts [53].

En ce qui concerne les transitions sous-critiques (ou du premier ordre au sens des transitions de phase), l'état de base est linéairement stable. On constate une transition abrupte, souvent localisée dans l'espace, entre un état régulier (laminaire) et un état très désordonné (turbulent) puisque le système ne peut être instable que vis à vis de perturbations d'amplitude finie. La dynamique est ainsi caractérisée par la coexistence d'états très différents séparés par des fronts en mouvement mettant en évidence la *métastabilité* caractéristique de ce type de transition. Dans ce cas

de figure, il n'existe pas de petit paramètre, ce qui empêche de travailler à partir de l'équation de base, plusieurs solutions non-linéaires étant en compétition. La démarche suivie est alors toute autre. Le concept de base est la décomposition de l'espace en cellules dynamiquement couplées à leurs voisines. Cette transition est observée par exemple dans l'écoulement de Couette plan [63].

5.1.3. L'intermittence spatio-temporelle

On dit qu'une transition dans un système hors équilibre se fait par *intermittences spatio-temporelles* (IST), lorsque de manière générale les états laminaire et turbulent coexistent pour une même valeur du paramètre de contrôle, séparés par un front en mouvement. Il apparaît donc naturel de se placer dans le contexte de la transition sous-critique à la turbulence. En effet, on peut tenir le raisonnement suivant :

Puisqu'on se place dans le cadre sous-critique, l'état laminaire est linéairement stable, c'est à dire stable par rapport à des perturbations d'amplitude finie. Donc localement, un état laminaire le reste puisqu'il n'a pas de fluctuation intrinsèque par définition. A l'inverse, l'état localement turbulent peut évoluer vers l'état laminaire puisqu'il est caractérisé, par définition, par des fluctuations intrinsèques. Cette asymétrie rend compte de la métastabilité caractéristique des transitions de premier ordre. Un état localement laminaire ne peut devenir turbulent que de deux façons : soit par une perturbation extérieure d'amplitude finie, soit par un *processus de contamination* par la frontière avec une région turbulente.

Un parallèle peut être fait avec le modèle d'automate cellulaire probabiliste de la *percolation dirigée* [55], dont la caractéristique principale est d'être justement un processus de contamination. Cette conjecture, faite par Pomeau [52], fait le lien entre systèmes hydrodynamiques et processus stochastiques de contamination et est connue pour montrer une transition de phase continue. Néanmoins, des études sur l'intermittence spatio-temporelle menées par Chaté et Manneville avec des réseaux d'itération couplés, à la fin des années 80 [56], ont montré que l'on ne peut pas toujours se ramener à la classe d'universalité de la percolation dirigée.

Dans la mesure où les zones laminaires et turbulentes peuvent être clairement distinguées, il est pertinent de caractériser cette transition à la turbulence à l'aide de plusieurs grandeurs pouvant jouer le rôle de paramètre d'ordre de la transition. Il est ainsi possible de calculer l'évolution de la fraction turbulente, définie comme étant le quotient de la surface (ou longueur) turbulente totale par la surface du système. Cette fraction turbulente fluctue autour d'une valeur moyenne bien déterminée qui est fonction de l'écart au seuil. Il est également possible de mesurer l'évolution de l'inverse de la taille caractéristique en fonction du paramètre de contrôle ou encore la distribution en taille des domaines laminaires.

5.1.4. Quelques expériences « typiques » de la transition à la turbulence par IST

Les exemples d'IST parmi les plus connus, pour l'essentiel à une dimension d'espace, se trouvent dans les expériences de Rayleigh-Bénard, de l'instabilité de l'imprimeur, de l'instabilité de Faraday ou encore de la fontaine circulaire.

- Dans l'expérience de l'instabilité de l'imprimeur, Rabaud, Michalland et Couder [36] se sont intéressés à la déstabilisation du ménisque d'un fluide entre deux cylindres. Ils ont observé un motif stable ainsi que des ondes et un régime chaotique avec de l'intermittence spatio-temporelle (coexistence de domaines cellulaires stationnaires et de domaines chaotiques avec créations et destructions de cellules) lorsque les deux cylindres sont en co-rotation. Une mesure de la fraction chaotique F_c en fonction de la vitesse de rotation du cylindre extérieur indique une transition continue de l'état ordonné vers l'état chaotique.
- Tuffillaro, Ramshankar et Gollub [57] se sont intéressés à la déstabilisation à deux dimensions d'espace d'un motif carré dû aux ondes capillaires, apparaissant dans une couche de fluide soumise à des oscillations verticales. Ils ont observé l'apparition progressive de défauts intermittents au delà d'un seuil bien défini de l'amplitude des oscillations. Ciliberto, Douady et Fauve [58] ont observé des lignes de défauts dans une expérience similaire. En montrant que le spectre de Fourier des variations d'accélération devient continu en augmentant le forçage, ils ont bien mis en évidence l'apparition du chaos spatio-temporel.
- Sans rentrer dans les détails que l'on pourra retrouver par exemple dans [33] dans le cas d'une cellule annulaire, l'expérience de Rayleigh-Bénard est une expérience de thermoconvection. Un fluide est maintenu entre deux plaques horizontales et conductrices de chaleur. Ces deux plaques sont à des températures contrôlées, la plus chaude se trouvant au dessous, de manière à ce que le gradient de température induit soit dirigé dans le sens opposé à la gravité. Le paramètre de contrôle pertinent est la différence de température ΔT entre les deux plaques. Que se passe-t-il si l'on fait croître ΔT depuis 0 ? Dans un premier temps, la conduction domine (le fluide reste immobile). Lorsque ΔT passe une valeur critique, une bifurcation supercritique se produit et la poussée d'Archimède fait apparaître de la convection de manière continue. Le plus souvent, le fluide ainsi mis en mouvement se structure en rouleaux d'axe horizontal. Ces rouleaux ont alternativement des sens de rotation opposés. Plusieurs régimes sont successivement observés au-delà du régime stationnaire pour des valeurs seuil de ΔT lorsqu'on le fait croître :
 - oscillations des rouleaux, périodiques et en opposition de phase
 - apparition progressive de défauts de structure (des dislocations) à partir d'un seuil bien défini. Le passage se fait graduellement de l'état laminaire à l'état totalement turbulent en variant le paramètre de contrôle de l'expérience (la

taille des zones de défauts croît continûment avec ΔT jusqu'à envahir tout le système). Ce sont les intermittences spatio-temporelles (Fig. 5.1-a). Cette transition par IST est un comportement critique apparaissant à un seuil bien défini. Elle est continue et possède les caractéristiques des changements de phase du deuxième ordre. L'inverse de la longueur caractéristique, tout comme la fraction turbulente moyenne, ont un comportement en loi de puissance à partir de ce seuil.

- au-delà, chaos spatio-temporel lorsque tout le système est turbulent.
- Une étude du chaos spatio-temporel dans le motif de colonnes d'huile de silicone tombant sous un surplomb circulaire (Fig. 5.1-c et d) a été menée par Brunet et Limat [59]. Ils ont établi l'existence d'un débit d'alimentation critique au delà duquel le régime chaotique est permanent mais ils n'ont pas pu mettre définitivement en évidence le régime d'intermittences spatio-temporelles, probablement à cause de la taille réduite du système.

Dans d'autres expériences d'hydrodynamique, l'écoulement de base peut être instable vis à vis de perturbations d'amplitude finie. L'état bifurqué, très turbulent, apparaît alors brutalement et de manière localisée, souvent sans structuration spatiale préalable, comme il a été observé dans plusieurs expériences menées sur les écoulements de cisaillement.

- Dans le cas de l'instabilité de Taylor-Couette, un fluide est cisailé entre deux cylindres coaxiaux. Dans la situation contra-rotative, la turbulence peut apparaître, de manière sous-critique, sous la forme d'une spirale turbulente qui fait suite à des rouleaux organisés en spirale [60]. Une étude des bursts turbulents précurseurs de la spirale, réalisée par Colovas et Andereck [61] montre les caractéristiques d'une transition à la turbulence par IST de manière continue.
- L'expérience de Taylor-Dean est une version modifiée de l'expérience précédente, pour laquelle l'entrefer n'est que partiellement rempli et d'axe de rotation horizontal. Degen, Mutabazi et Andereck [62] ont montré l'existence d'un régime d'IST avec coexistence de l'état laminaire et de zones turbulentes. Là aussi, la transition s'est révélée être super-critique.
- L'expérience de Couette plan a été étudiée par Daviaud, Hegseth et Bergé [63]. L'écoulement de Couette plan est l'écoulement cisailé le plus simple avec un état laminaire linéairement stable pour tout Reynolds. Ce cisaillement est créé par une courroie sans fin se déplaçant dans deux directions opposées et parallèles. Bottin [64] a montré que le régime d'IST, fait de spots turbulents sur un fond laminaire apparaît de manière discontinue (Fig. 5.1-b), indiquant une transition globalement sous-critique vers la turbulence.

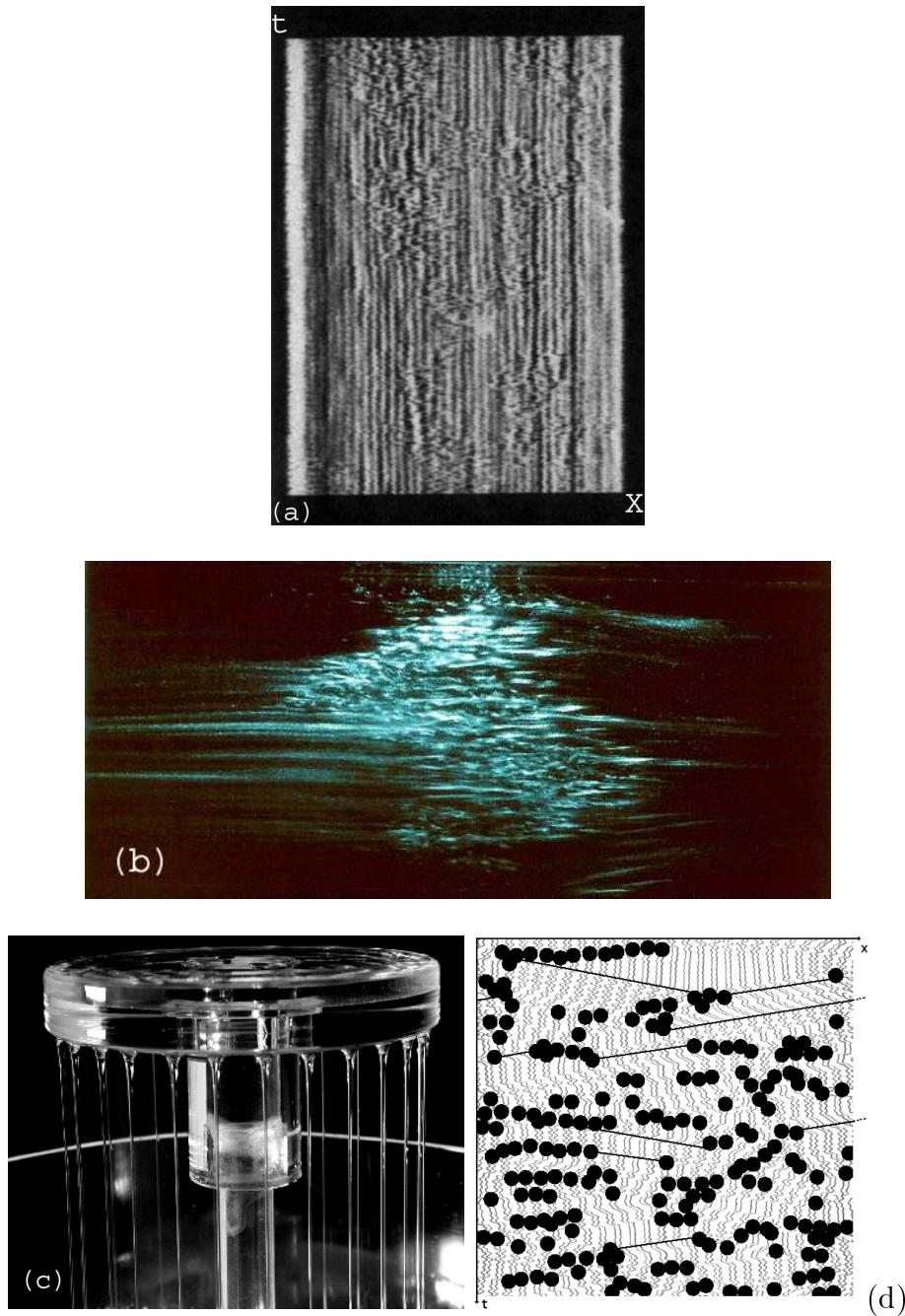


FIG. 5.1.: (a) Diagramme spatio-temporel dans l'expérience de Rayleigh-Bénard en géométrie annulaire sur 1000 secondes. On observe le processus de contamination des domaines turbulents sur les domaines laminaires (par Daviaud et al.). (b) Spot turbulent dans l'expérience de Couette plan par Daviaud et al. (c) L'expérience de la fontaine circulaire avec un diagramme spatio-temporel dans le régime désordonné en (d). Les zones d'influence des défauts (les créations et fusions de colonnes) sont indiquées par un disque noir alors que les lignes montrent que ces défauts peuvent être à l'origine de la dérive de domaines (par Brunet et al.).

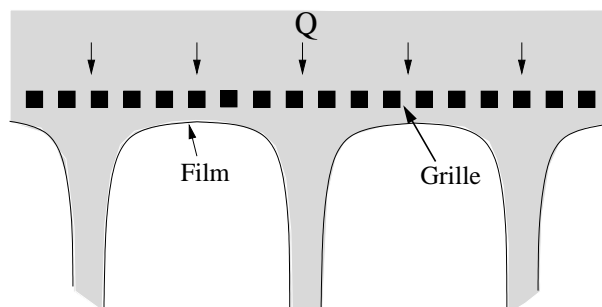


FIG. 5.2.: Le régime de colonnes.

5.1.5. L'étude de la transition dans le régime de colonnes à deux dimensions

Lorsque le système est dans le régime de colonnes (voir Fig. 5.2), il est possible d'obtenir un état stable que nous qualifions de *laminaire*, caractérisé par un nombre constant de colonnes disposées suivant un réseau hexagonal centré. Dans ce cas, la structure peut être stationnaire, subir des oscillations globales, contenir des défauts localisés associés ou non à des oscillations (voir chapitre 3).

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la transition vers un autre état nettement différent dit *turbulent*, caractérisé par un nombre de colonnes fluctuant au cours du temps. La cohérence spatiale est perdue et on observe des mouvements de colonnes erratiques et de grande amplitude. Deux processus dynamiques sont alors observés. Lorsque deux colonnes se rapprochent, elles finissent par s'attirer et elles se combinent pour ne former qu'une seule colonne identique aux précédentes. C'est une fusion, le système perdant une colonne. Une colonne identique aux autres peut apparaître dans une zone de densité temporairement faible. C'est une création, le système gagnant une colonne. Ces deux processus opèrent simultanément de manière permanente, le nombre de colonnes fluctuant au cours du temps mais restant néanmoins constant en moyenne pour un débit donné. Dans le premier cas, les effets de tension de surface dominant et conduisent à la fusion des embases. Dans le deuxième cas, la gravité domine et conduit localement à la déstabilisation du film pour former une colonne (voir Fig. 5.3).

On va chercher à analyser la dynamique spatio-temporelle résultant de la complexité de la structure spatiale et de l'évolution temporelle chaotique (le chaos spatio-temporel).

Le régime laminaire de colonnes existe sur une large plage de viscosités, pour presque toutes les viscosités que nous avons utilisées dans notre expérience (de 20 à 350 mm^2/s). La Fig. 5.4 montre néanmoins un changement de comportement remarquable autour d'une viscosité critique $\eta_c \approx 35 \text{ mm}^2/\text{s}$. Pour une viscosité donnée

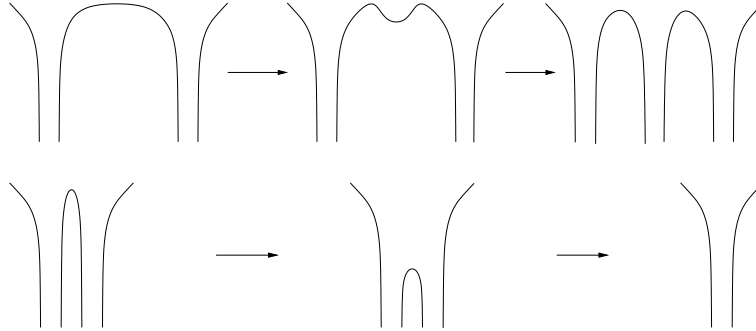


FIG. 5.3.: Schématiquement, les processus de création et de fusion de colonnes dans le régime turbulent.

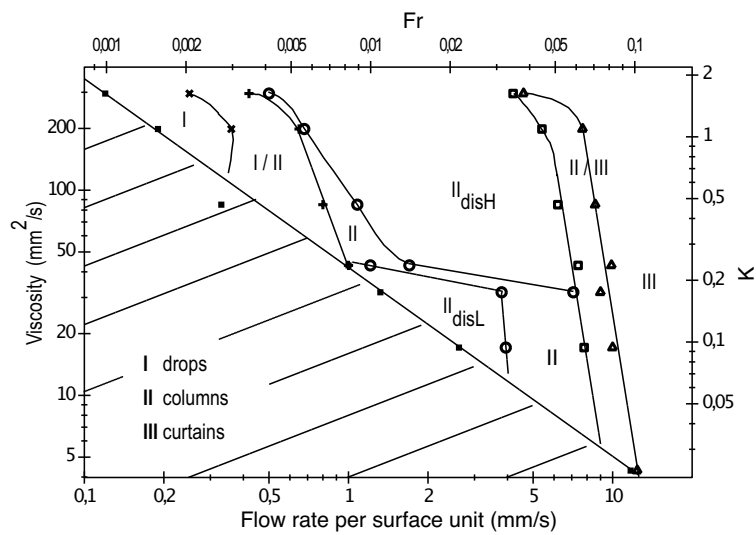


FIG. 5.4.: Le diagramme de phases. La région II_{disH} correspond à l'état turbulent « haut ». La région II_{disL} correspond à l'état turbulent « bas ».

supérieure à η_c et pour un débit croissant, on observe en premier lieu l'état laminaire puis l'état turbulent, que l'on qualifie de *haut* (haut débit, haute viscosité). Pour une viscosité donnée inférieure à η_c , l'ordre est inversé. Il apparaît d'abord l'état turbulent dit *bas* (bas débit, basse viscosité), puis, au delà d'un débit seuil, l'état laminaire.

On peut donc s'attendre à des différences lors de la transition laminaire/turbulent. C'est pourquoi l'étude qui suit a été réalisée avec des huiles de viscosités 20 et 50 mm^2/s . Le travail a également été mené à 100 mm^2/s mais les résultats, qualitativement les mêmes qu'à 50 mm^2/s , ne sont pas présentés ici.

5.2. Les conditions d'étude

La surface d'écoulement a été fixée à 200 cm^2 pour toutes les mesures (disque d'écoulement de diamètre 160 mm). La visualisation se fait toujours à la verticale et par le dessus, ce qui permet d'obtenir une visualisation directe de bonne qualité. La lumière, dispensée par un tube circulaire fluorescent disposé autour de la grille, à la hauteur de l'embase des colonnes, est guidée par ces dernières. On met ainsi à profit la propriété de réfraction de l'huile puisqu'elle permet de repérer la position des colonnes à travers les trous de la grille, les embases de celles-ci apparaissant comme des anneaux lumineux sur un fond sombre (voir Fig. 5.5).

5.2.1. La visualisation

Néanmoins, cette technique, par ailleurs très performante lorsqu'il s'agit d'étudier les transitions entre régimes, de mesurer des périodes ou des longueurs d'onde, semble trouver ses limites. En effet, pour faire une étude quantitative statistique du régime désordonné, nous avons besoin de repérer les objets par leurs coordonnées, de pouvoir dire avec précision lorsqu'il y a mouvement, fusion ou création. Cela implique une procédure de détection, détaillée en 5.2.2. Or, pour qu'ils soient tous détectés, les objets doivent être très bien contrastés, homogènes en taille et en luminosité.

Les problèmes de détection automatiques rencontrés sont de deux types. Tout d'abord, les objets se font de l'ombre. Leurs mouvements relatifs peuvent conduire à de fortes et brèves variations de luminosité dans certains cas, allant jusqu'à l'absence momentanée de leur détection. De plus, il existe beaucoup de surfaces réfléchissantes : les parois en Plexiglas du bac de récupération inévitablement recouvertes d'un film d'huile, l'épais film formé sur le plan de réception, dont la surface se déforme en permanence, enfin, plus proche de l'éclairage, le film induit par l'écoulement sous la grille. Toutes ces réflexions créent à des degrés divers des taches lumineuses localisées et brusques pouvant être détectées à tort parmi les objets. J'ai réalisé des améliorations spécifiques à cette étude, avec la fabrication de caches sur mesure (voir

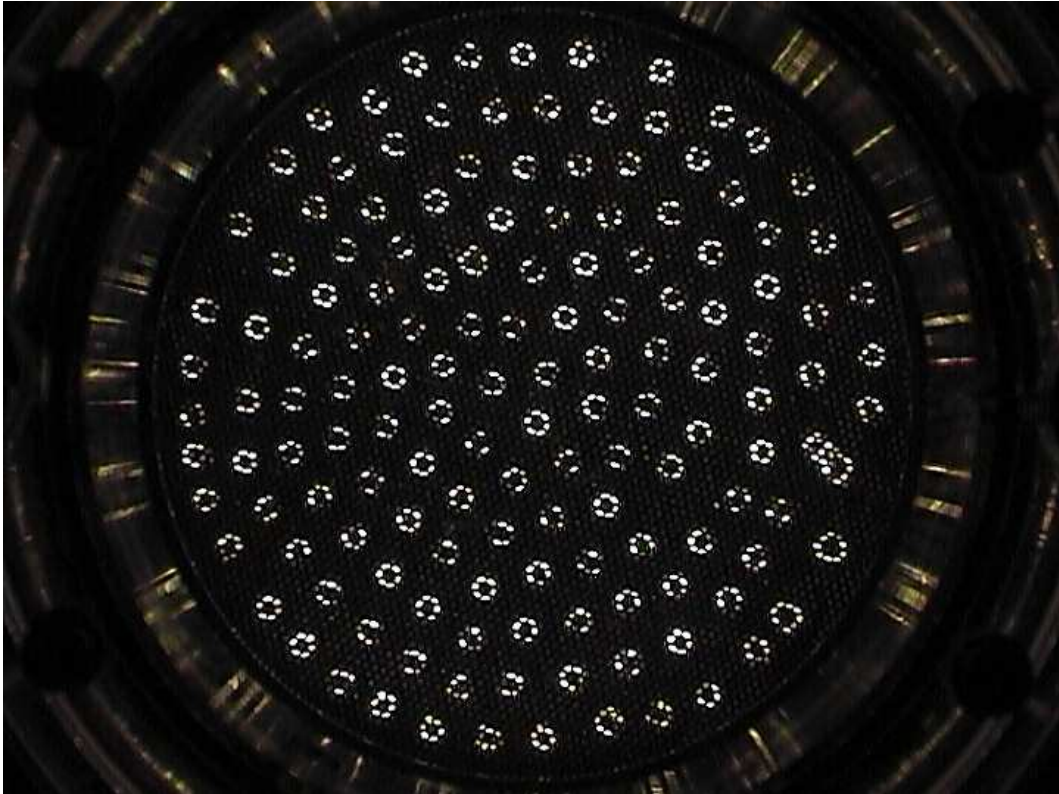


FIG. 5.5.: Une image typique extraite d'une séquence $\nu=20 \text{ mm}^2/\text{s}$ pour un débit de $78.9 \text{ cm}^3/\text{s}$ mettant bien en évidence les problèmes rencontrés lors de la détection. On distingue les embases des colonnes à travers les trous de la grille. Dans le meilleur des cas, elles sont vues comme des anneaux lumineux sur un fond sombre. L'évolution dynamique n'apparaît pas mais on distingue des zones laminaires caractérisées par une organisation hexagonale et des zones agitées (« trous » dans l'écoulement, fusion sur la droite ...).

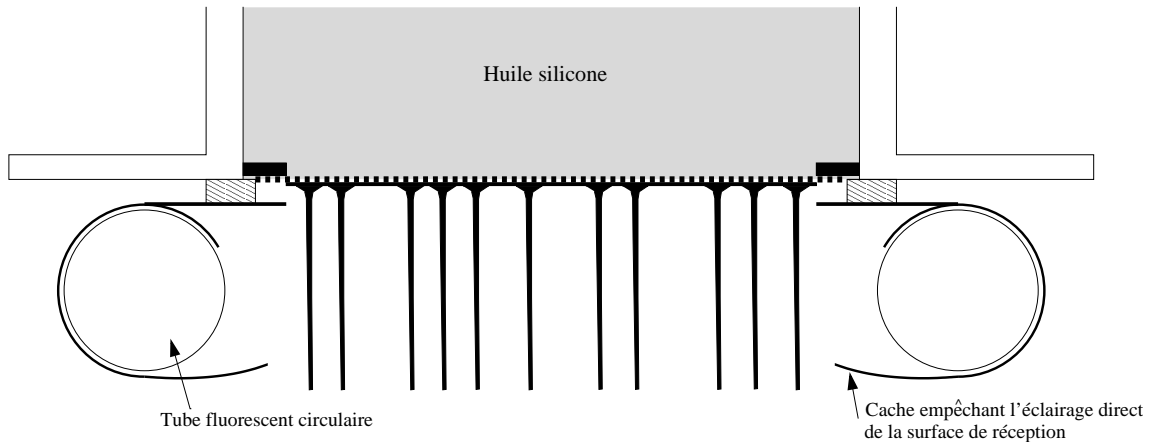


FIG. 5.6.: Vue en coupe du dispositif en régime désordonné.

Fig. 5.6). Elles ont permis de grandement réduire les mauvaises détections tout en améliorant le contraste de l'image.

5.2.2. Le traitement d'image et la détection

L'essentiel du travail, lors de l'étude de ce régime, a consisté à mettre au point un système de traitement d'image *ad hoc* efficace, puis à développer plusieurs programmes en langage C pour exploiter les informations recueillies. Les techniques d'acquisition et de traitement sont très brièvement décrites ici. Le système est à deux dimensions d'espace, donc l'acquisition est rendue plus difficile que dans le cas unidimensionnel (en particulier, elle demande plus de ressources informatiques). Il en va de même pour le traitement de l'information spatio-temporelle associée puisqu'il est ardu de produire un diagramme spatio-temporel lisible.

Les acquisitions des films ont été faites au format DV Pal (720 X 576 à 25 images par seconde) directement sur le disque dur d'un ordinateur de type PC. La durée typique de l'enregistrement d'une séquence, pour une viscosité et un débit donnés est de 32 minutes. Le film créé est décomposé en une séquence de 48000 images. Après une correction du rapport d'aspect et une conversion en 256 niveaux de gris, ces images sont regroupées « en grappes » dans des paquets ou « Stacks ». Elles subissent une succession de traitements automatisés et paramétrables sous le logiciel *ImageJ* avec un plugin que j'ai développé en Java à cet effet, comprenant entre autres des réglages de luminosité et de contraste et surtout des filtrages de Fourier à haute et basse fréquences spatiales (voir Fig. 5.7). Ces filtrages sont réalisés deux fois sur des plages de fréquences différentes, dans un premier temps pour gommer les trous de la grille (rappelons que les objets sont vus à travers les trous) et autres imperfections, et dans un second temps pour contraster les objets tout en les uniformisant en taille et

Valeurs pour le Turbulent

Répertoire: d:\20cp50mm\

Données pour le Stack

Image de départ: 1

Nbre d'images / Stack: 3000

Nbre de Stacks: 16

Incrément: 1

Données pour le ROI

X du cercle: 105

Y du cercle: 16

Rayon du cercle: 500

Valeurs Windows/Level avant chaque FFT

Window/Level Min. 1: 12

Window/Level Max. 1: 153

Window/Level Min. 2: 63

Window/Level Max. 2: 226

Valeurs du filtrage pour chaque FFT

FFT Min. 1: 1

FFT Max. 1: 1.5

FFT Min. 2: 8.8

FFT Max. 2: 9.3

Valeurs du seuillage

Threshold Min.: 0

Threshold Max.: 113

Taille min. pour la détection de particules

Particule Min.: 1

OK Cancel

FIG. 5.7.: Les paramètres par défaut du traitement automatisé peuvent être modifiés avant lancement. « Données pour stack » permet de sélectionner les images à traiter, « Données pour le ROI » permet de sélectionner la région d'intérêt pour chaque image, « Valeurs Windows/Level avant chaque FFT » modifie les paramètres de contraste et de luminosité pour améliorer le traitement de Fourier, « Valeurs du filtrage pour chaque FFT » détermine les seuils en fréquence haut et bas pour chacun des filtrages, « Valeurs de seuillage » est fourni pour binariser judicieusement la séquence d'images traitées. Enfin, on détermine la taille minimum des objets à détecter avec « Taille min. pour la détection de particules ».

luminosité. Pour finir, les images sont binarisées grâce à un seuillage judicieusement choisi, les objets apparaissant alors en noir sur un fond blanc. La figure 5.8 montre les différentes étapes du traitement d'image.

Un programme de détection d'objets est lancé, enregistrant dans un fichier de données, image par image, les coordonnées de tous les objets détectés. Ainsi, environ 7 millions d'objets sont détectés pour une séquence donnée, les erreurs de détection sont au plus de quelques pour mille, l'erreur de loin la plus fréquente étant l'anticipation d'un 25^e de seconde de la fusion inévitable d'objets très proches. Une fois lancée, la procédure de traitement complète pour un couple (viscosité, débit) donné, s'effectue en une quinzaine d'heures sur un PC de 3 GHz et 1,5 Go de mémoire RAM cadencée à 400 MHz. J'ai monté quatre machines de ce type au sein de l'équipe pour fournir tous les résultats à suivre.

5.3. La transition du régime laminaire au régime turbulent

La transition du régime laminaire au régime turbulent se fait différemment suivant que la viscosité de l'huile est supérieure ou inférieure à ν_c . Dans cette section, je décris qualitativement l'évolution du système pour la viscosité de 50 mm²/s en premier lieu puis 20 mm²/s. Je ne donne pas les résultats pour 100 mm²/s puisqu'ils sont qualitativement similaires à ceux obtenus pour 50 mm²/s.

5.3.1. L'huile de viscosité 50 mm²/s

5.3.1.1. Une transition du premier ordre

Il existe un régime laminaire stable apparaissant spontanément en quelques secondes lorsque le débit est judicieusement choisi. Le diagramme des phases est représenté schématiquement sur la Fig. 5.11-a. Ce régime est caractérisé par une organisation hexagonale des colonnes avec ou sans défaut et avec ou sans oscillation. Dans ce cas, il n'y a pas de création, ni de fusion. Un débit critique q_c^h est mis en évidence. Pour un débit d'alimentation $q < q_c^h$, le système est stable en regard de perturbations localisées d'amplitude finie. Après un intervalle de temps Δt pendant lequel le système se réarrange par plusieurs créations-fusions (transitoires chaotiques) notés C-F par la suite, celui-ci retrouve son état laminaire. Ce phénomène est à rapprocher de la disparition d'un spot turbulent volontairement produit au milieu de l'écoulement de Couette plan par ailleurs laminaire [65]. Lorsque q se rapproche de q_c^h par valeur inférieure, Δt augmente et diverge en q_c^h . Au delà de q_c^h , la solution « laminaire » reste linéairement stable mais le désordre induit par une perturbation d'amplitude finie suffisante persiste, le système ne retrouvant alors jamais l'état laminaire. On a

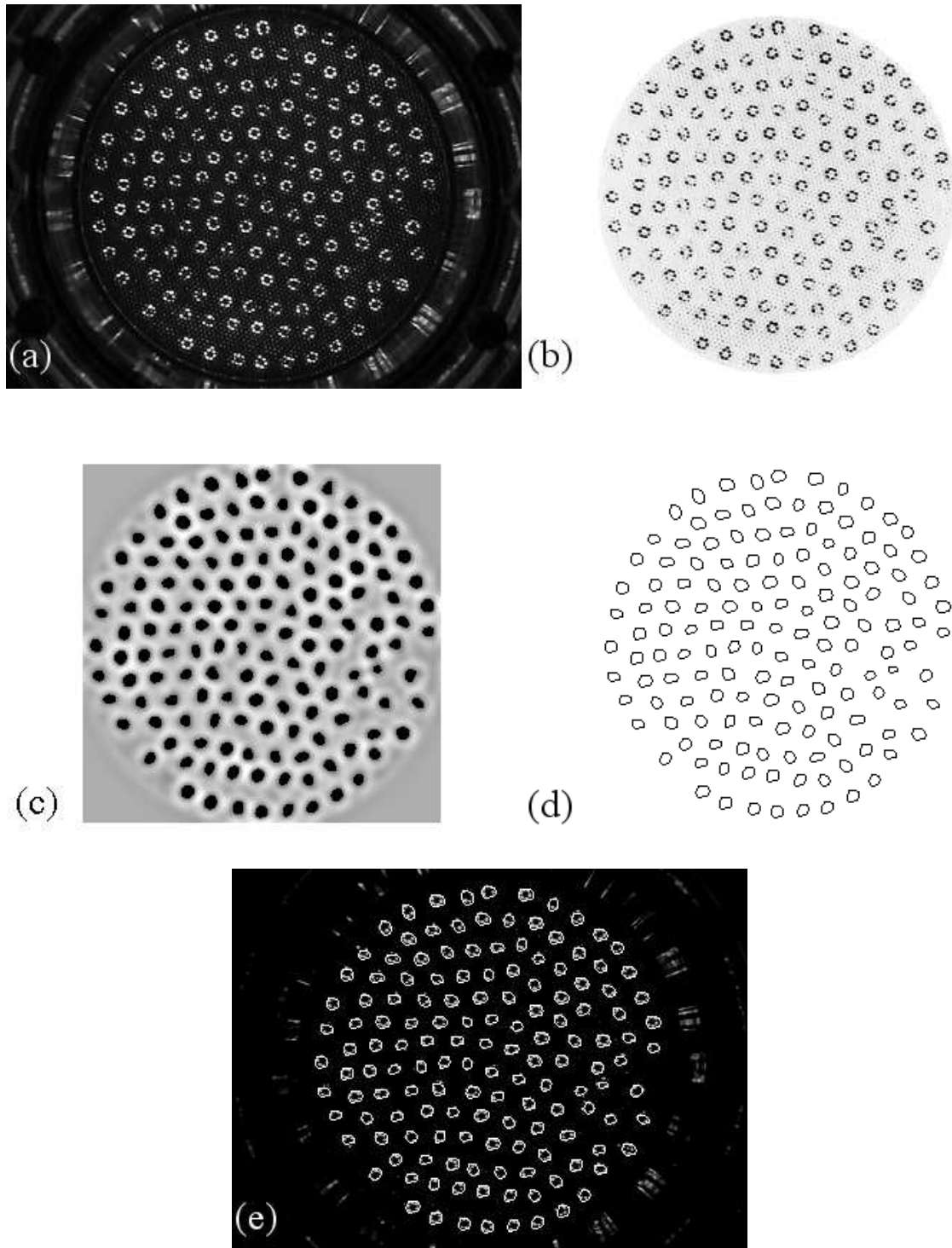


FIG. 5.8.: Les différentes étapes du traitement : (a) Une image en niveaux de gris et au rapport d'aspect corrigé. (b) Seule la région d'intérêt est conservée puis inversée en vue de la détection future. (c) Les opérations de filtrage, de loin les plus coûteuses en temps machine permettent de clairement identifier les objets. (d) Enfin la détection proprement dite est lancée après seuillage. (e) Le résultat de la détection superposé à l'image de départ.

clairement affaire à une situation où l'état laminaire est absorbant, caractérisé par une métastabilité locale.

5.3.1.2. L'intermittence spatio-temporelle

Lorsque $q \gtrsim q_c^h$, et que le système a été perturbé par une action extérieure (par exemple en forçant la coalescence de plusieurs colonnes sous la grille avec l'aide d'une tige), des zones turbulentes entretenues et bien définies coexistent avec des zones laminares.

La transition entre ce régime intermittent dans lequel le désordre a été « allumé » et le régime turbulent se fait progressivement en augmentant le débit, par apparition de zones turbulentes au détriment de l'état structuré. Le système est alors sensible aux fluctuations. En moyenne, la taille de ces zones croît avec l'écart au seuil en débit, jusqu'à envahir tout le système pour un débit q_t^h . On est dans le cadre des IST définies plus haut.

Ainsi, on remarque rapidement une différence fondamentale entre cette expérience et celles de Rayleigh-Bénard et de l'instabilité de l'imprimeur : dans ces expériences, l'apparition du désordre se fait de manière continue avec une première déstabilisation sous la forme d'oscillations du motif. Dans cette expérience, elle est associée à une bifurcation sous-critique où il *faut perturber le système* pour obtenir ce désordre. En ce sens, l'expérience est à rapprocher de celle de Couette plan bien que l'état de base soit structuré spatialement et non homogène. Le seuil en débit q_c^h décrit plus haut est précisément défini. Partant de cette situation « faiblement turbulente », la transition au chaos spatio-temporel se fait par IST, une transition continue à seuil critique du type « transition de phase du deuxième ordre » (voir Fig. 5.9).

5.3.1.3. Deux branches d'intermittences spatio-temporelles

En fait, la situation est plus complexe. Lorsque le débit est fixé dans un intervalle allant de q_c^h à une valeur $q_b^h > q_c^h$, le système présente une *bistabilité* entre deux états, chacun caractérisé par un désordre moyen.

Pour l'un de ces états, la fraction turbulente moyenne (F_t) croît avec l'écart au seuil, situation générique de la transition à la turbulence par IST. Pour l'autre, F_t est toujours plus faible et ne dépend pas de l'écart au seuil, à la précision de la mesure près. Une analyse plus fine montre que l'agitation dans le deuxième état est liée aux conditions aux limites. Le cœur du système reste essentiellement laminaire et des C-F surviennent uniquement en périphérie où il y a conflit entre l'organisation hexagonale et la condition aux limites circulaire (voir Fig. 5.10). On peut dire que cette contrainte géométrique frustre le système et entretient l'agitation au bord, empêchant du même coup le retour à l'état laminaire. Le désordre ne provient pas

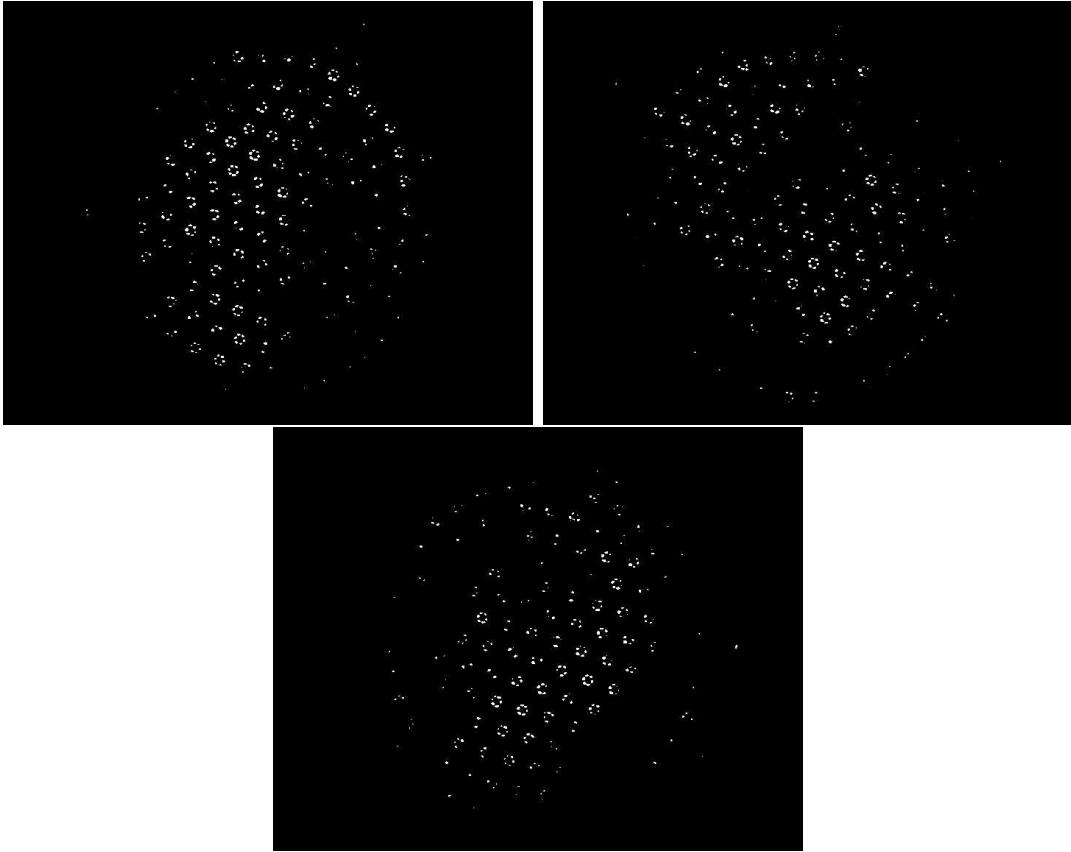


FIG. 5.9.: Pour un même débit proche du seuil les zones laminaires à trois instants différents. Ce résultat est obtenu en réalisant une moyenne sur 3 secondes (75 images). Cette durée, déterminée empiriquement, est le meilleur compromis en regard des temps caractéristiques d'évolution de la taille des zones. Les objets restés immobiles sont les plus lumineux. Les autres sont flous et d'autant moins lumineux qu'ils ont bougé pendant cet intervalle de temps. Un seuillage permet de faire ressortir uniquement les zones laminaires.

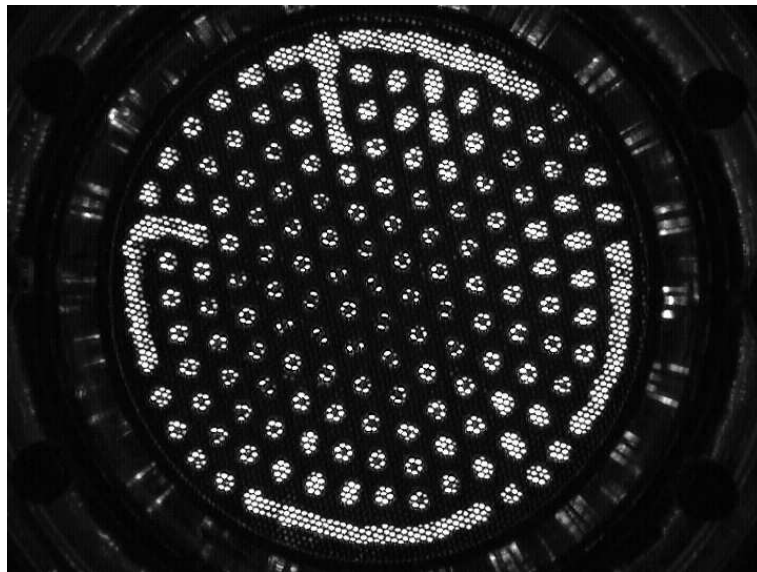


FIG. 5.10.: Une rémanence de deux secondes a été produite par traitement d'image. Il s'agit du comportement typique dans la zone de bistabilité, lorsque le système est dans la phase « quasi laminaire », c'est à dire agité seulement sur les bords. Les réarrangements se font principalement en périphérie. De temps à autres on observe quelques incursions vers le coeur du système (viscosité $50 \text{ mm}^2/\text{s}$, débit $37.4 \text{ cm}^3/\text{s}$).

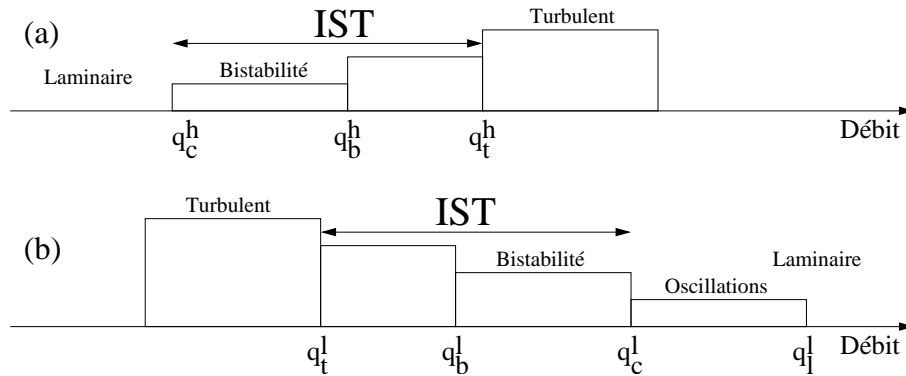


FIG. 5.11.: Diagrammes des phases schématiques pour (a) l'huile à $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ et (b) l'huile à $20 \text{ mm}^2/\text{s}$.

de l'écoulement puisqu'ici c'est la contrainte du bord qui semble être à l'origine du caractère contaminant. On peut néanmoins parler d'intermittence spatio-temporelle unidimensionnelle pour cet état, partant du constat que les états laminaire et turbulent coexistent essentiellement en périphérie.

Proche du seuil, les deux états sont indiscernables. Des incursions viennent des bords mais rentrent profondément dans le système. En s'écartant du seuil, le système passe en moyenne de plus en plus de temps dans le premier état, et le deuxième état n'est plus observé au delà du débit q_b^h . Cette bistabilité, caractéristique des transitions du premier ordre au sens des systèmes thermodynamiques, semble donc n'apparaître qu'à cause des effets de taille finie du dispositif et peut s'interpréter comme de l'intermittence entre deux états d'intermittences spatio-temporelles.

5.3.2. L'huile de viscosité $20 \text{ mm}^2/\text{s}$

5.3.2.1. Une transition du deuxième ordre

Comme dans le cas précédent, il existe un intervalle de débit permettant d'obtenir un réseau hexagonal de colonnes d'huile. Lorsque l'on fait croître le débit, il existe une valeur seuil au-delà de laquelle le système bascule progressivement en régime de nappes. Des zones où des colonnes se connectent en nappes de tailles variables coexistent avec le réseau hexagonal. Pour un débit croissant, les nappes envahissent le système de manière progressive. Les colonnes restent dans le régime laminaire alors que dans les régions occupées par les nappes, celles-ci évoluent avec une dynamique très riche, un peu à la manière de vers. Le front séparant un domaine de nappes et un domaine laminaire de colonnes est en mouvement. On observe un comportement de type « contamination » (voir Fig. 5.12). Il est à noter qu'en tout état de cause,

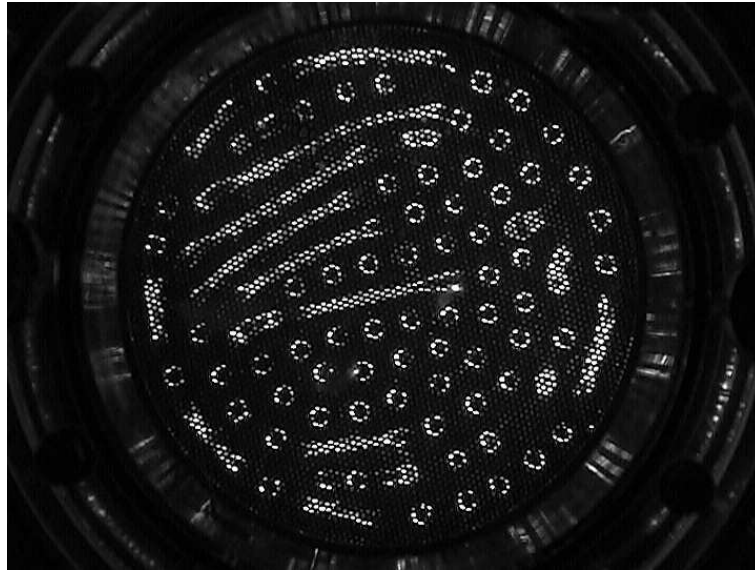


FIG. 5.12.: Instantané dans le régime mixte colonnes/nappes pour l'huile à $20 \text{ mm}^2/\text{s}$, débit $180 \text{ cm}^3/\text{s}$. Les colonnes, dans le régime laminaire, coexistent avec des nappes. Le front séparant ces deux états est en mouvement. On assiste à un processus qui semble là aussi être contaminant.

il n'y a *jamais* de régime turbulent de colonnes à débit croissant¹.

En fait, ce régime désordonné existe, mais il est obtenu en faisant *décroître* le débit à partir de la situation laminaire. On retrouve dans ce cas le scénario typique des transitions du deuxième ordre :

- En-deçà d'une valeur seuil q_l^l bien définie du paramètre de contrôle, des oscillations de lignes en opposition de phase, dont l'étude théorique a été menée Chapitre 4, apparaissent progressivement dans toute la structure et dans les trois directions du réseau. Cette fois, le mécanisme est identique à celui décrit plus haut, pour l'expérience de Rayleigh-Bénard.
- Lorsque l'amplitude de ces oscillations devient trop grande, des créations/fusions se produisent à partir d'un autre débit seuil $q_c^l < q_l^l$ d'abord transitoirement, puis de manière permanente. Le système entre dans le domaine des IST. La taille moyenne des zones turbulentes croît de la même manière que dans le cas décrit précédemment en 5.3.1.2, mais cette fois-ci pour un débit *décroissant*, à la différence notable, qu'à la précision de la mesure faite, aucun comportement hystérétique n'a été observé.

¹Il est prévu d'étudier cette transition du régime de colonne vers le régime de nappes qui semble avoir les caractéristiques d'une transition via IST.

- Enfin, pour un autre débit seuil q_t^l , les intermittences laissent place à un régime totalement turbulent.

Le diagramme des phases est représenté schématiquement sur la Fig. 5.11-b.

5.3.2.2. Deux branches d'intermittences spatio-temporelles

Le comportement du système est similaire à celui de la situation décrite avec une huile de 50 mm²/s. Ce qui se passait à débit croissant se passe maintenant à débit décroissant. On retrouve la bistabilité pour un débit compris entre q_c^l et $q_b^l < q_c^l$, et les mêmes arguments géométriques permettent d'expliquer la présence de l'état faiblement agité. Il faut néanmoins tenir compte, proche du seuil, des oscillations qui semblent jouer un rôle dans le processus de contamination ainsi que pour le nombre maximum d'objets permis.

5.4. Résultats quantitatifs

On ne peut pas obtenir facilement un diagramme spatio-temporel pour un système à deux dimensions. Je n'ai pour l'instant pas trouvé de technique de traitement à la fois performante et reproductible pour distinguer les zones laminaires des zones turbulentes bien que celles-ci se discernent clairement à l'œil lors d'une observation directe. Il n'est donc pas possible d'avoir accès quantitativement à la fraction turbulente F_t (définie au début du chapitre), ainsi qu'aux autres grandeurs qui nécessitent la mesure de la taille des zones. Néanmoins, nous avons imaginé plusieurs traceurs susceptibles d'apporter des informations pertinentes. Chacun d'eux nous éclaire partiellement sur l'état du système et sur son évolution, mais, comme nous allons le voir, les renseignements qu'ils apportent sont cohérents et concordants. Ces traceurs sont le nombre d'objets N présents dans le système, le nombre de plus proches voisins pour chacun des objets ainsi que les taux de créations-fusions d'objets.

5.4.1. Le premier traceur : le nombre d'objets N

Le pavage hexagonal de la surface d'écoulement est la façon d'y mettre le plus grand nombre d'objets. Tenant compte de la distance entre objets sélectionnée par le système, autour de 11.6 mm dans la situation laminaire, ce nombre est proche de 170. Quand le système est agité, on observe aisément que la distance entre les centres de deux colonnes voisines est bornée (entre 9 et 22 mm comme on le verra par la suite). En deçà, les deux colonnes fusionnent, au-delà une autre colonne apparaît. On constate que, quelle que soit la viscosité, lorsque le système est dans l'état laminaire (l'organisation des colonnes est donc hexagonale), leur nombre est

maximum². Inversement, tout écart à cette organisation, dans notre cas lorsqu'il y a des C-F, se traduit immédiatement par une baisse de ce nombre. Poursuivant l'étude, lorsque l'écart au seuil augmente, le désordre augmente et on constate que le nombre de colonnes diminue. On peut donc dire que le nombre d'objets est bien relié au désordre de façon intrinsèque : dans le cas de l'huile à 20 mm²/s, le nombre moyen d'objets diminue alors que le débit diminue, dans le cas de l'huile à 50 mm²/s, le nombre moyen d'objets diminue alors que le débit augmente !

5.4.1.1. A 50 mm²/s

La Fig. 5.13 montre pour différents débits, qui vont en décroissant, la distribution du nombre d'objets N , dans le cas de l'huile de viscosité 50 mm²/s, pour laquelle le désordre va croissant avec le débit. Pour chacun des débits, la distribution est obtenue en comptant le nombre d'objets, image par image, pour les 48000 images. Loin du seuil, la distribution est de type gaussien avec un écart-type faible. Appelons le pic de cette distribution pic 1_h. Le nombre moyen d'objets est faible mais croît en diminuant le débit. A partir du débit d'alimentation $q_b^h \approx 50 \text{ cm}^3/\text{s}$, on entre dans le régime de bistabilité et la distribution devient bimodale. Le nouveau pic de distribution, qu'on appelle pic 2_h, correspond à l'état métastable faiblement agité (Fig. 5.10). Plus le débit se rapproche de la valeur critique q_c^h , plus le système passe de temps dans cet état (le pic 2_h prend de l'importance). Le nombre moyen d'objets dans le pic 1_h continue d'augmenter ainsi que l'écart-type. Proche du débit critique q_c^h , le pic 1_h se superpose au pic 2_h et ils finissent par se confondre.

5.4.1.2. A 20 mm²/s

Dans le cas de l'huile de viscosité 20 mm²/s, une évolution similaire est observée (Fig. 5.14). Loin du seuil, donc à débit faible pour cette viscosité, le nombre moyen d'objets est faible. Il croît avec le débit (pic 1_l). Le régime de bistabilité apparaît avec le pic 2_l, lorsque $q_b^l \approx 74 \text{ cm}^3/\text{s}$. Néanmoins, les deux pics ne se confondent pas comme à 50 mm²/s. Ils restent distincts très près du seuil. La valeur moyenne de la distribution du pic 1_l cesse d'augmenter pour rester un peu au dessus de 150. La bistabilité se trouve caractérisée au seuil par un écart constant entre les valeurs moyennes des deux pics pour la distribution du nombre d'objets avec un nombre unique de 158 pour le pic 2_l correspondant à la situation « calme ».

Puisque dans ce cas du pic 2_l le nombre total d'objets est unique (Fig. 5.14-f), il s'agit d'une situation stable pour laquelle il n'y a plus de C-F. Quel peut bien être le mécanisme à l'origine du désordre faisant « sauter » le système sur l'autre

²Il faut aussi tenir compte des défauts topologiques pouvant se trouver piégés dans la structure hexagonale. Dans ce cas, bien que l'état soit laminaire, il y a quelques objets en moins par rapport à la situation idéale.

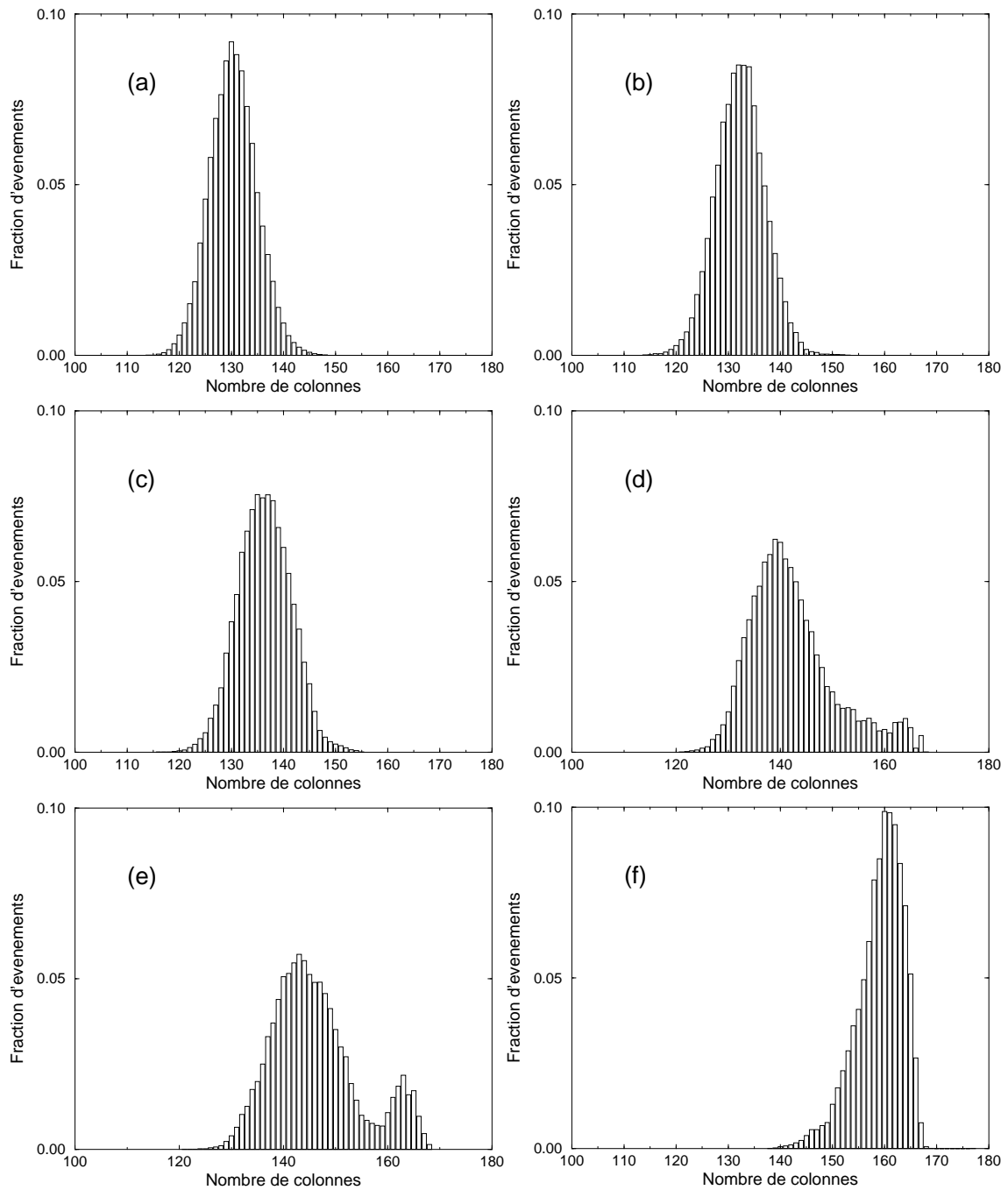


FIG. 5.13.: Distribution du nombre de colonnes pour des débits décroissants et pour la viscosité de $50 \text{ mm}^2/\text{s}$. Loin du seuil [(a) $74.1 \text{ cm}^3/\text{s}$, (b) $64.3 \text{ cm}^3/\text{s}$, (c) $53.3 \text{ cm}^3/\text{s}$], la distribution est de type gaussien et le nombre moyen d'objets est faible mais croît en diminuant le débit. A partir du débit $q_b^h \approx 50 \text{ cm}^3/\text{s}$, la distribution devient bimodale [(d) $45.5 \text{ cm}^3/\text{s}$, (e) $37.4 \text{ cm}^3/\text{s}$]. Près du seuil, les deux pics se confondent [(f) $32.4 \text{ cm}^3/\text{s}$].

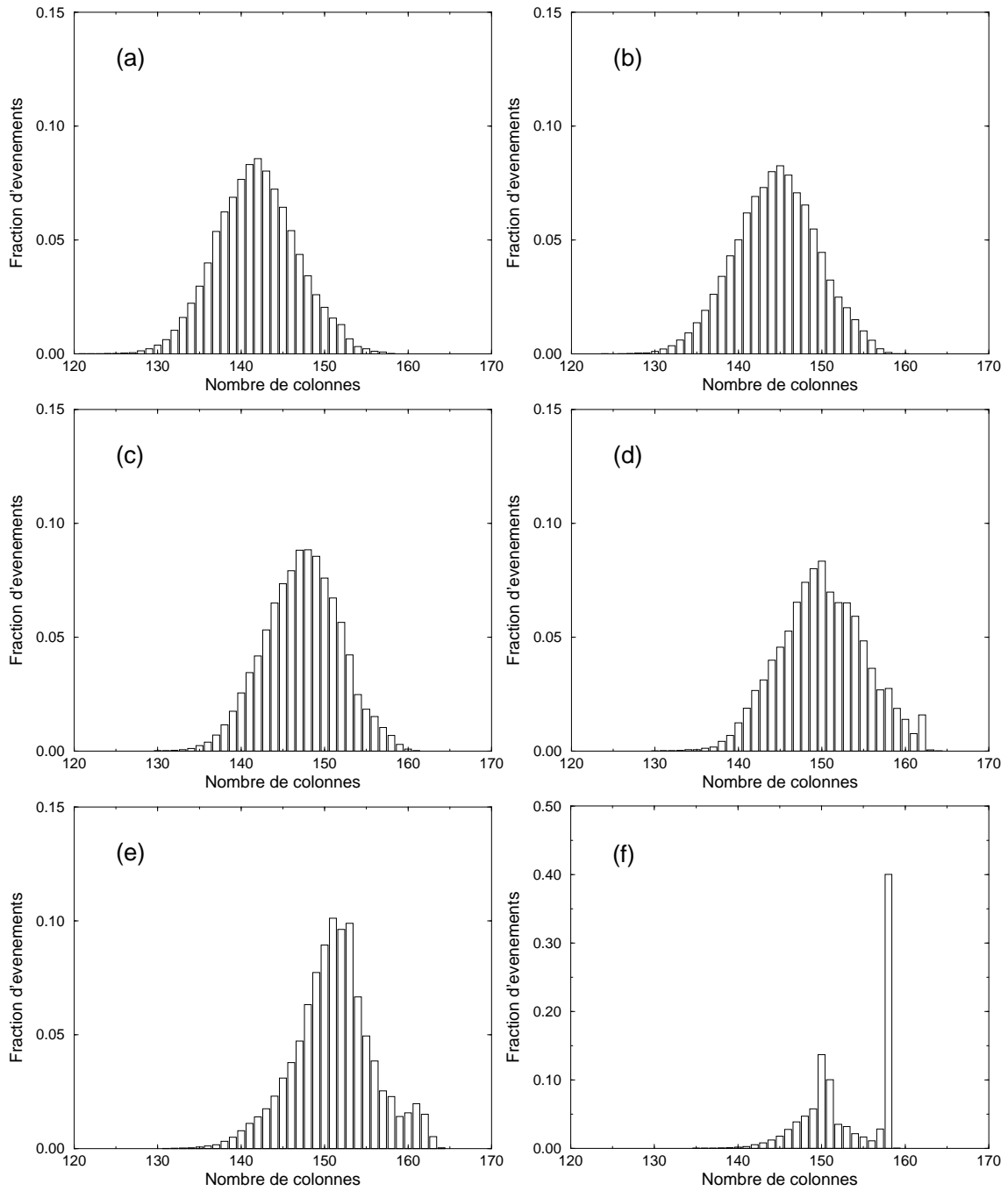


FIG. 5.14.: Distribution du nombre de colonnes pour des débits croissants à $20 \text{ mm}^2/\text{s}$. Comme dans le cas à $50 \text{ mm}^2/\text{s}$, loin du seuil, la distribution est de type gaussien et le nombre moyen d'objets est faible. Mais ici, il croît en augmentant le débit [(a) $63.4 \text{ cm}^3/\text{s}$, (b) $67.1 \text{ cm}^3/\text{s}$, (c) $71.4 \text{ cm}^3/\text{s}$]. A partir du débit $q_b^l \approx 74 \text{ cm}^3/\text{s}$, la distribution devient bimodale [(d) $75.6 \text{ cm}^3/\text{s}$, (e) $78.9 \text{ cm}^3/\text{s}$]. Près du seuil, les deux pics restent distincts [(f) $80.6 \text{ cm}^3/\text{s}$].

branche (pic 1₁)? Comme on l'a vu, proche du seuil, le système est caractérisé par un mouvement d'objets sous la forme d'oscillations de lignes en opposition de phase dans les trois directions du réseau hexagonal. Dans la situation « calme », les oscillations déclenchent des C-F qui s'étendent brusquement vers le centre du système, certainement amplifiées par la contrainte des conditions aux limites que nous avons invoquée pour expliquer le régime de bistabilité dans le cas 50 mm²/s. Cet argument permet d'expliquer pourquoi le système se fige au seuil dans une configuration n'ayant pas le nombre d'objets maximum permis : les oscillations de grande amplitude bloquent l'apparition de nouvelles colonnes.

Un passage rapide du débit de zéro à une valeur non nulle, et constante conduisant à l'état laminaire stationnaire *sans oscillation*, donne bien un nombre de colonnes proche de 170.

5.4.1.3. L'évolution temporelle du nombre d'objets

L'évolution de N en fonction du temps met en évidence la bistabilité par ailleurs clairement observée à l'œil sur plusieurs heures. La Fig. 5.15-a montre une fraction de cette évolution temporelle pour un débit de 37.4 cm³/s dans le cas de l'huile à 50 mm²/s. Le système « saute » spontanément d'une situation relativement agitée (nombre moyen d'objet 145) à une situation moins agitée (nombre moyen d'objets 165), puis y retourne après quelques dizaines de secondes.

5.4.1.4. La construction d'un paramètre d'ordre à partir du nombre d'objets

On a vu que le nombre d'objets est maximum dans la situation laminaire (appelons N_{lam} le nombre maximum). Ce nombre diminue lorsque l'on éloigne le système du seuil q_c . On construit le paramètre d'ordre $\langle 1 - N/N_{lam} \rangle$ où la moyenne est calculée sur le nombre d'objets. Ce paramètre est nul dans la situation laminaire et croît avec le désordre. La Fig. 5.16 représente l'évolution de ce paramètre d'ordre à 20 et 50 mm²/s, en fonction respectivement des paramètres réduits ϵ_l et ϵ_h . $\epsilon_h = \frac{q - q_c^h}{q_c^h}$ avec $q_c^h = 31 \pm 1 \text{ cm}^3/\text{s}$ et $\epsilon_l = -\frac{q - q_c^l}{q_c^l}$ avec $q_c^l = 81 \pm 2 \text{ cm}^3/\text{s}$. Dans le régime de bistabilité où il y a deux modes, la moyenne est calculée pour chacun des modes de la distribution du nombre d'objets (il y a deux points). Pour la mesure la plus proche du seuil, la moyenne est faite sur l'ensemble de la distribution puisque les deux modes sont confondus : il n'y a plus qu'un point. Dans le cas 50 mm²/s, la branche du haut suit une loi de puissance en ϵ_h d'exposant $\beta = 0.22 \pm 0.05$, alors que les deux branches restent bien distinctes dans le cas 20 mm²/s.

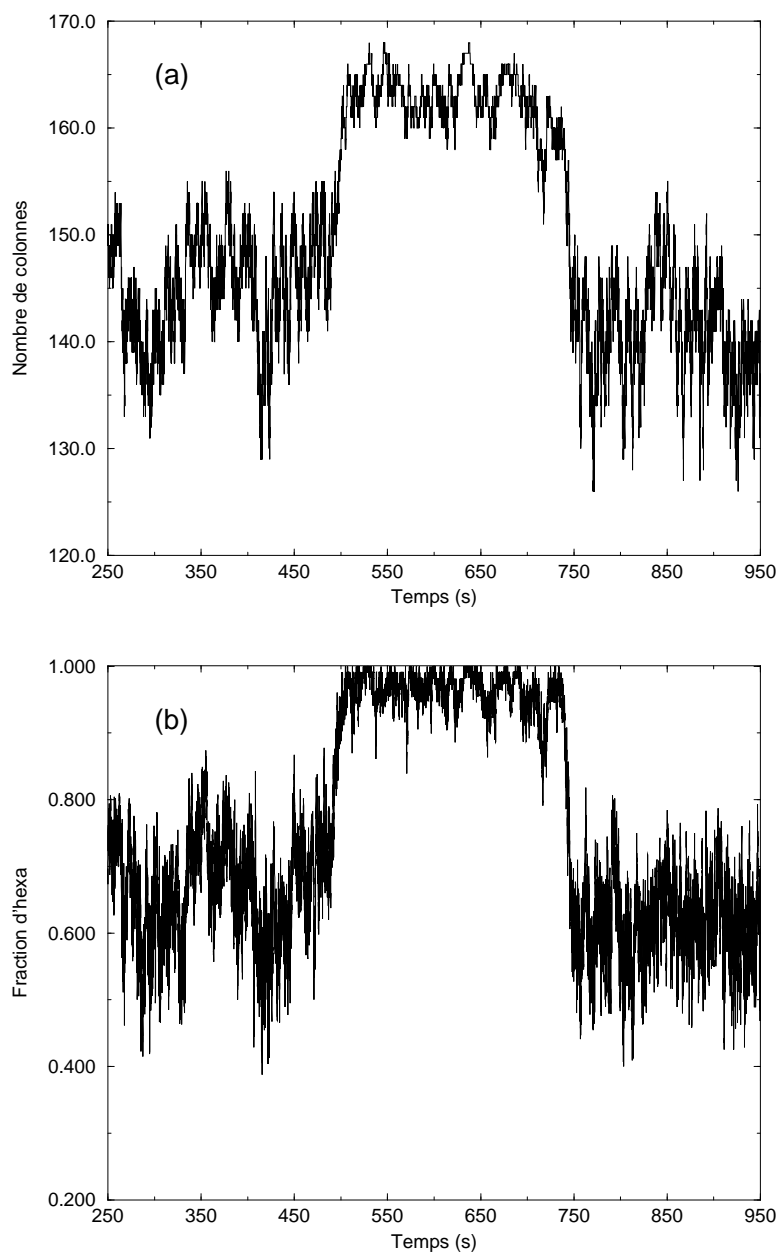


FIG. 5.15.: Évolution de N et de la fraction d'hexa en fonction du temps pour l'huile à $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ au débit de $37.4 \text{ cm}^3/\text{s}$. Lorsque le système entre dans la phase « calme », le nombre d'objets passe d'une moyenne de 145 à une moyenne de 165. La fraction d'hexa augmente pour presque atteindre l'unité. Comme on peut le remarquer, ces deux évolutions sont très bien corrélées en temps.

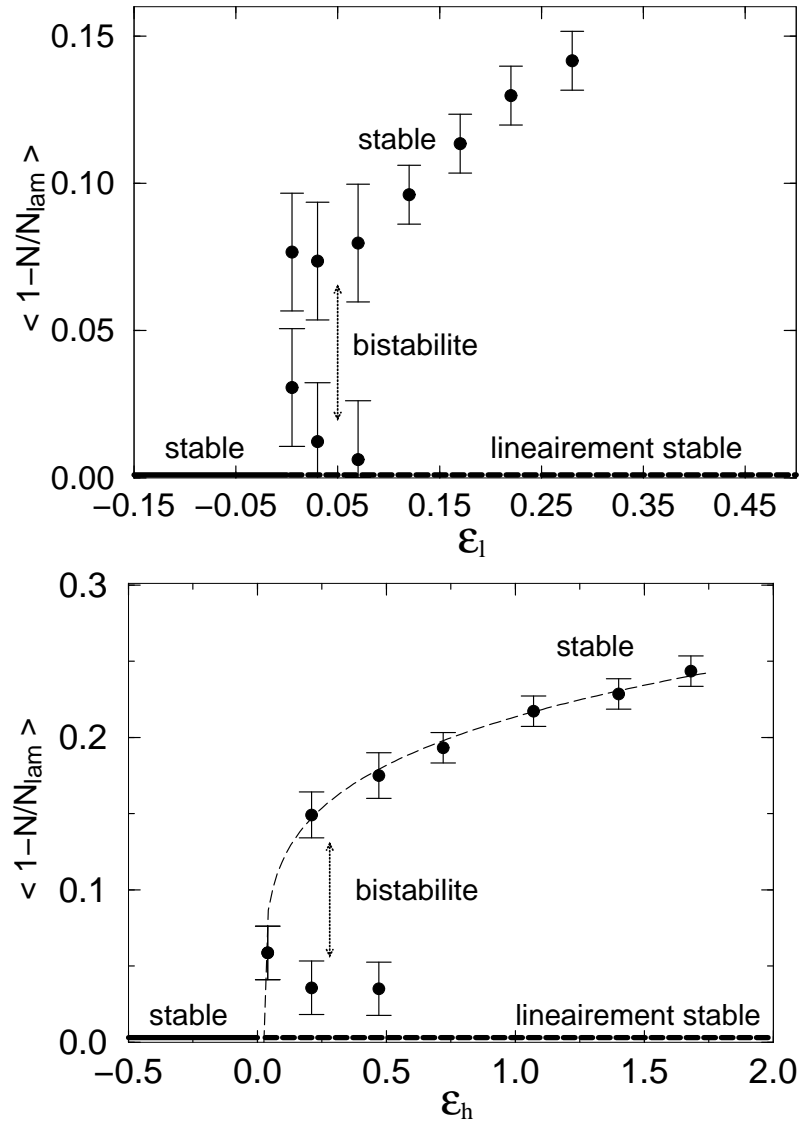


FIG. 5.16.: Diagramme de phase en prenant $\langle 1 - N/N_{lam} \rangle$ comme paramètre d'ordre pour les huiles de viscosité $\nu=20 \text{ mm}^2/\text{s}$ (en haut), et $\eta=50 \text{ mm}^2/\text{s}$ (en bas). Chaque point correspond à la moyenne réalisée sur un mode de la distribution du nombre d'objets. Les deux modes ne peuvent plus être distingués pour le point le plus proche du seuil. A $50 \text{ mm}^2/\text{s}$, la branche du haut suit une loi de puissance en ϵ_h d'exposant $\beta=0.22\pm 0.05$.

5.4.2. Le deuxième traceur : les plus proches voisins (ppv)

Les objets sont détectés image par image. Une fois connues, leurs positions permettent, à partir de la construction de Voronoï, de déterminer pour chacun quels sont ses plus proches voisins (Fig. 5.17). A partir de là, on a accès à plusieurs informations intéressantes :

5.4.2.1. Le nombre de plus proches voisins n_{ppv} et la « fraction d'hexa » f

L'idée de mesurer le nombre de plus proches voisins (n_{ppv}) pour s'intéresser plus précisément aux objets en ayant six, part du même constat que pour le nombre d'objets. Lorsque le système est dans le régime laminaire, $n_{\text{ppv}}=6$ pour presque tous les objets³. Lorsque des C-F surviennent, on peut raisonnablement penser que localement le nombre de plus proches voisins va pouvoir être différent puisque la structure spatiale est perdue. Ainsi, il coexiste, dans le régime d'IST, des zones laminares pour lesquelles $n_{\text{ppv}}=6$ pour presque tous les objets et des zones turbulentes pour lesquelles il y a *a priori* un nombre différent de ppv. Définissons la « fraction d'hexa » f comme étant, pour une image donnée, le rapport du nombre d'objets pour lesquels $n_{\text{ppv}}=6$ sur le nombre total d'objets. On représente la distribution de f pour différents débits dans le régime d'IST sur la Fig. 5.18 pour l'huile à $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ et sur la Fig. 5.19 pour celle à $20 \text{ mm}^2/\text{s}$. Ce traceur montre les mêmes comportements que pour l'évolution de N .

Dans le cas $50 \text{ mm}^2/\text{s}$, il est remarquable de voir la concordance des résultats obtenus, venant confirmer le lien étroit qu'il existe, dans l'expérience, entre hexagonalité et nombre d'objets, deux mesures différentes du désordre.

Dans le cas $20 \text{ mm}^2/\text{s}$, les similitudes sont moins marquées, certainement pour les raisons évoquées plus haut. Il est vrai que pour l'évolution du nombre d'objets, la bistabilité apparaît moins nettement à 20 qu'à $50 \text{ mm}^2/\text{s}$. Dans le cas de la distribution de la fraction d'hexa, elle semble passer inaperçue. On distingue à peine les deux pics aux débits de 78.9 et 80.6 cm^3 . Dans ce dernier cas, le plus proche du seuil, on peut se demander pourquoi la discontinuité, clairement exprimée avec le traceur précédent, ne se manifeste pas. Comme on l'a vu, près du seuil, les oscillations de lignes sont importantes. Elles ont pour effet de réduire la fraction d'hexa, tout particulièrement dans les phases « calmes », presque entièrement laminares. Ainsi, il n'y a pratiquement jamais de fraction égale à 1 , contrairement au cas de l'huile $50 \text{ mm}^2/\text{s}$.

³En réalité, les choses ne sont pas aussi simples. En effet, la topologie joue un rôle dans ce problème. Il peut très bien exister des défauts topologiques (par exemple des paires penta-hepta) au cœur d'une zone laminaire. Les colonnes peuvent être également animées de mouvements périodiques dans une telle zone. Dans les deux cas, le nombre de ppv peut changer, alors qu'il n'y a pas de création-fusion. Une étude plus précise des images traitées montre que ces effets peuvent être négligés en première approximation, justifiant ainsi notre démarche.

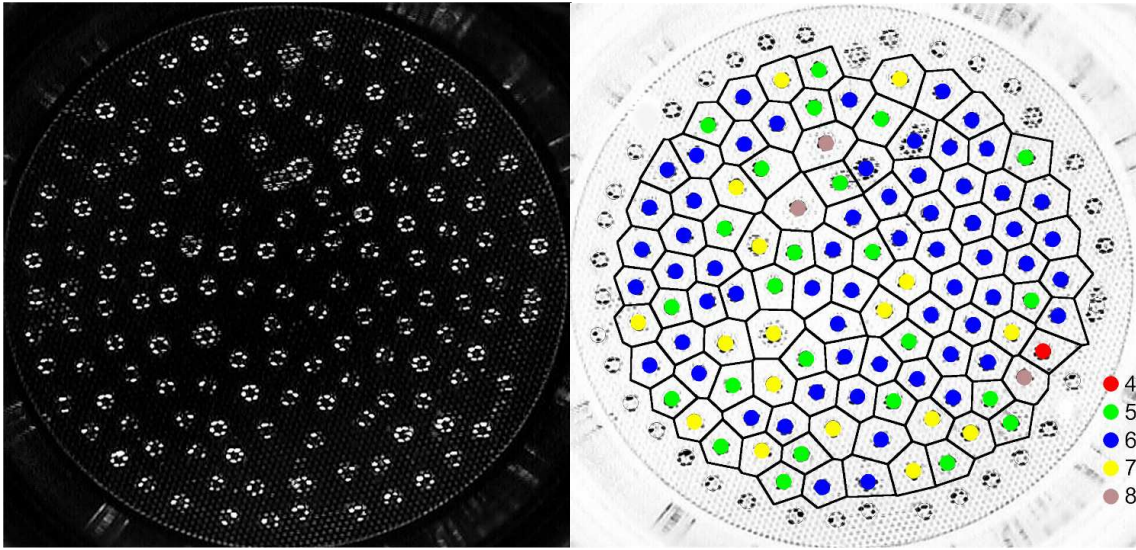


FIG. 5.17.: Les objets sont détectés sur chaque image (à gauche). Une fois connues, leurs positions permettent de calculer pour chacun le nombre de plus proches voisins à partir de la construction de Voronoï (à droite).

On montre sur la Fig. 5.20 la moyenne de la fraction d'hexa en fonction du débit $\langle 1 - f \rangle$, pour les deux viscosités de 20 et 50 mm²/s. L'évolution semble là aussi suivre une loi de puissance mais les exposants sont très différents.

5.4.2.2. La distance entre plus proches voisins

Nous avons identifié les plus proches voisins de chacun des objets au sens de la construction de Voronoï. Quelle est la distribution de leurs distances ?

Lorsque le réseau est hexagonal, les objets sont tous à la même distance les uns des autres. Cette distance unique est de 11.6 ± 0.1 mm donc légèrement plus petite que celle apparaissant dans l'instabilité de Rayleigh-Taylor sans flux (13.2 mm). Lorsque le système est dans le régime des IST, le maximum de la distribution reste à 11.6 mm bien que le nombre moyen d'objets soit plus petit. C'est d'une certaine façon la trace du réseau hexagonal préexistant. La distribution s'étale avec l'augmentation de l'écart au seuil, principalement vers les valeurs supérieures (Fig. 5.21-a et b). L'écart-type de la distribution en fonction du débit, σ_d , que l'on peut raisonnablement associer au désordre global, semble suivre une loi de puissance, pour les deux viscosités étudiées (Fig. 5.21-c et d).

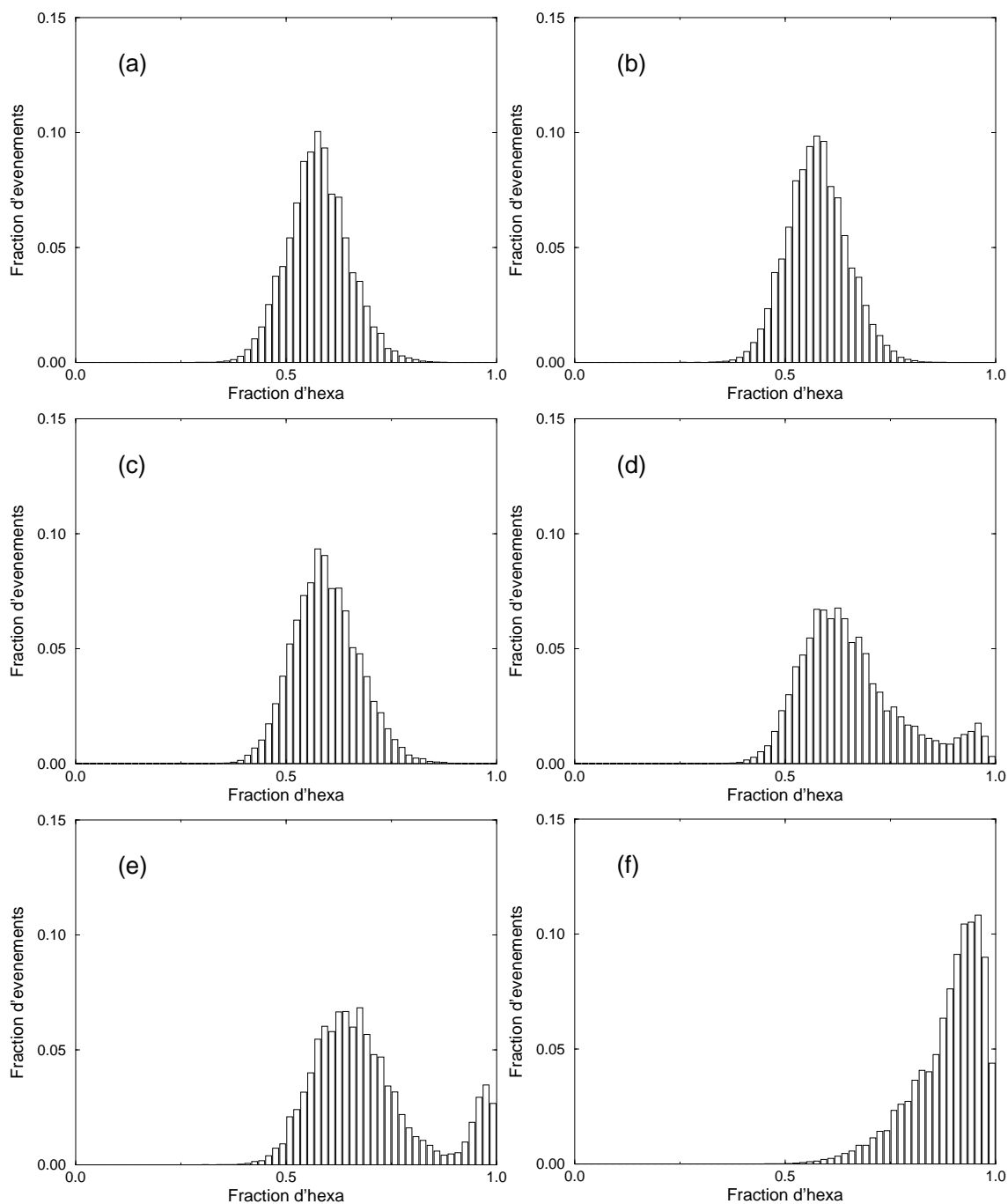


FIG. 5.18.: Distribution de la fraction d'hexa pour l'huile à $50 \text{ mm}^2/\text{s}$. Ces histogrammes sont donnés pour les mêmes débits que pour la distribution de N . Les deux traceurs signent des comportements similaires.

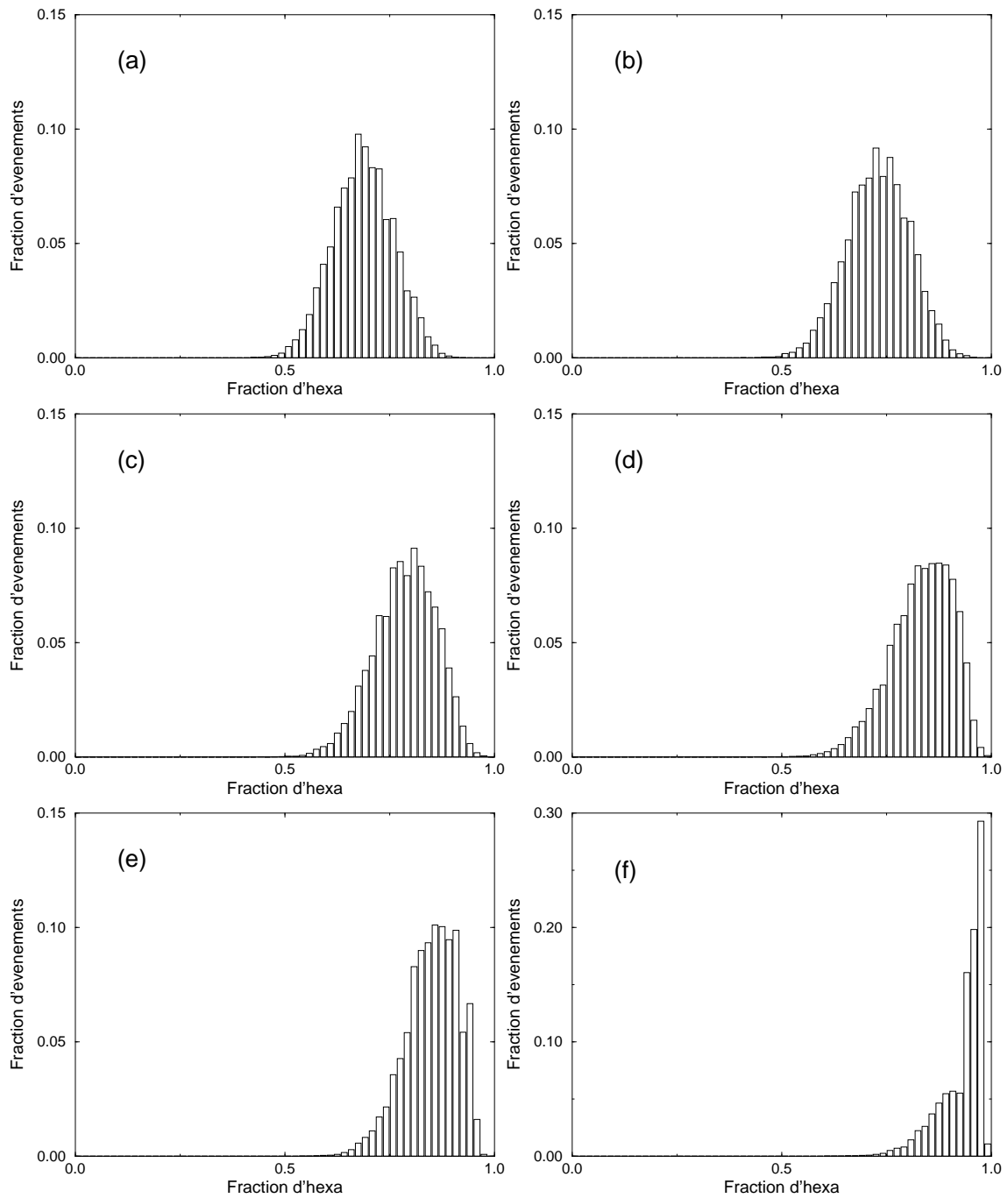


FIG. 5.19.: Distribution de la fraction d'hexa pour l'huile à $20 \text{ mm}^2/\text{s}$. Ces histogrammes sont donnés pour les mêmes débits que pour la distribution de N . Ici, ce traceur a grossièrement le même comportement que pour le nombre d'objets N .

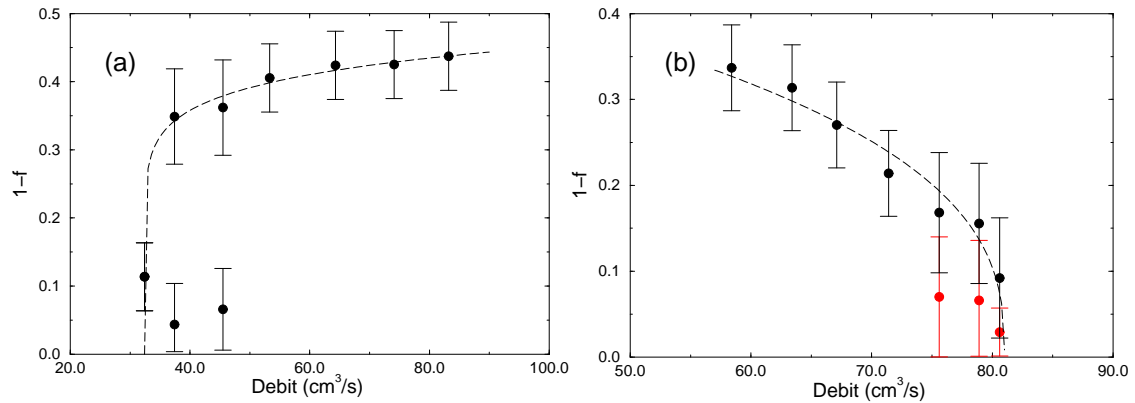


FIG. 5.20.: Moyenne de $\langle 1 - f \rangle$ en fonction du débit pour les viscosités (a) $\nu = 50 \text{ mm}^2/\text{s}$ et (b) $20 \text{ mm}^2/\text{s}$. Si on veut faire un fit de ces valeurs, les deux évolutions suivent une loi de puissance mais les exposants sont très différents. Les exposants sont alors de l'ordre de 0.10 ± 0.05 à $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ et 0.37 ± 0.05 à $20 \text{ mm}^2/\text{s}$ (les points qui se chevauchent sont d'une couleur différente).

5.4.2.3. La distribution du nombre de plus proches voisins

La distribution du nombre de ppv montre que près du seuil, $n_{\text{ppv}} = 6$ pour presque toutes les colonnes. En s'éloignant du seuil (à débit croissant pour l'huile de $50 \text{ mm}^2/\text{s}$), la fraction $n_{\text{ppv}} = 6$ diminue au profit des fractions $n_{\text{ppv}} = 5$ et $n_{\text{ppv}} = 7$, mais également $n_{\text{ppv}} = 8$ et $n_{\text{ppv}} = 4$. Quel que soit le débit d'alimentation, les fractions sont toujours dans le même ordre d'importance : la plus importante est $n_{\text{ppv}} = 6$, puis viennent dans l'ordre 5, 7, 8 et 4 comme le montre la Fig. 5.22. Nous avons observé que la fraction d'hexa est encore supérieure à 0.5 pour le plus grand débit avec lequel nous avons fait les mesures. Or, pour un tel débit, les zones laminaires ont totalement disparu. Le régime d'IST fait place au régime turbulent. Pourquoi la fraction d'hexa est-elle aussi nettement prépondérante ? Pour la situation la plus turbulente, nous avons réalisé une simulation numérique dans le but de comprendre ce phénomène. Trois critères la caractérisent :

- la simulation comporte 48000 séquences (le nombre d'images de l'enregistrement vidéo)
- pour chaque séquence, les objets sont distribués aléatoirement un à un. Le nombre d'objets distribués est le nombre d'objets dans l'image correspondante de la vidéo.
- la seule contrainte imposée est la distance minimale entre objets. C'est la distance minimale constatée dans l'expérience, soit environ 9 mm. Le tirage aléatoire n'est validé qu'à cette condition, sinon il est recommencé.

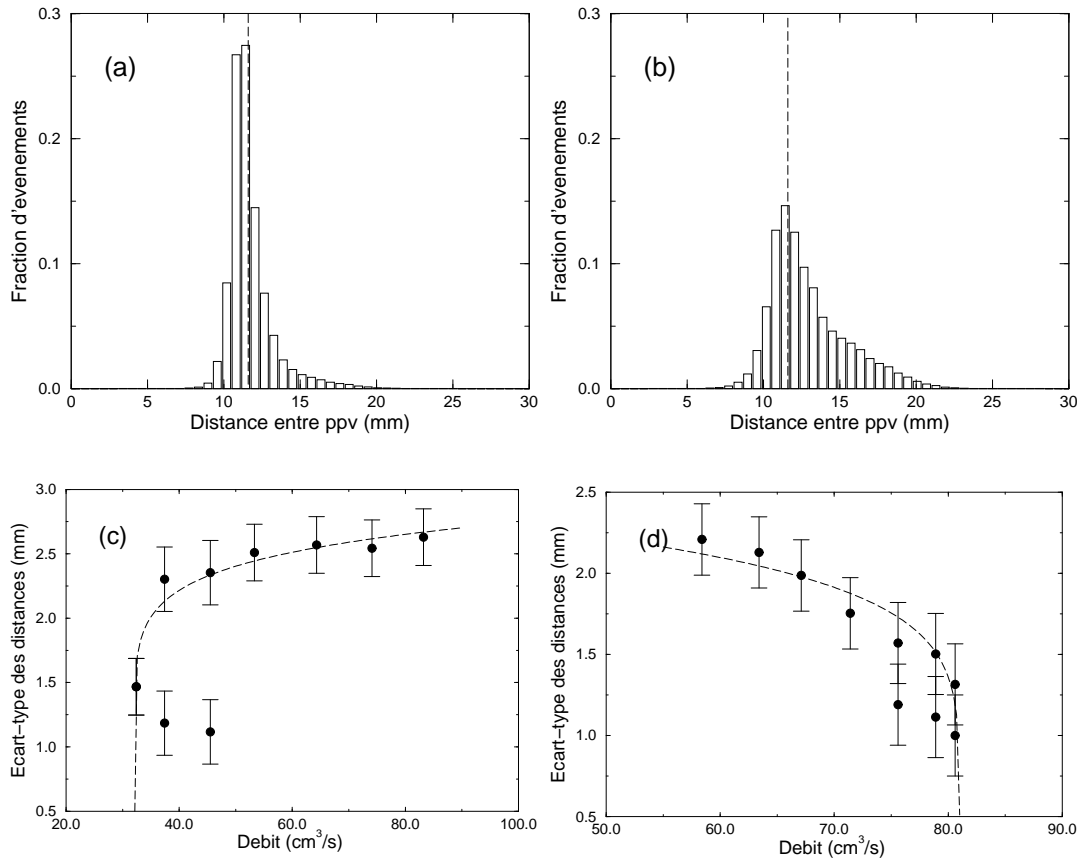


FIG. 5.21.: Distribution des distances entre ppv pour une huile de $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ pour les débits de (a) $32.4 \text{ cm}^3/\text{s}$ (proche du seuil) et (b) $53.3 \text{ cm}^3/\text{s}$ (loin du seuil). Le maximum de la distribution est toujours proche de 11.6 mm (distance entre objets dans l'organisation hexagonale, indiqué par le trait discontinu), mais elle s'étale loin du seuil. L'écart-type de la distribution en fonction du débit σ_d , semble suivre une loi de puissance pour les deux viscosités (c) $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ et (d) $20 \text{ mm}^2/\text{s}$. L'exposant est 0.14 ± 0.05 à $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ et 0.10 ± 0.05 à $20 \text{ mm}^2/\text{s}$.

Ensuite, on peut calculer la distribution de ppv (sur les 48000 simulations) à partir de la construction de Voronoï. Cette distribution est très proche de celle observée pour les mesures faites loin du seuil. Là aussi, la fraction d'hexa est proche de 0,5 comme le montre le dernier graphe de la figure 5.22 alors que le tirage est aléatoire.

La distance minimale imposée entre objets reproduit les effets de tension de surface alors que le nombre d'objets N donné à chaque image par l'expérience traduit en partie la conservation du débit d'alimentation. Dans la situation totalement turbulente, l'argument expliquant la distribution du nombre de ppv semble donc être topologique puisque les objets sont distribués aléatoirement dans la simulation.

5.4.3. Le troisième traceur : les créations-fusions (C-F) d'objets

Une autre façon de caractériser le système est d'étudier les C-F d'objets. En effet, N reste constant dans une zone laminaire. Il n'y a donc ni création, ni fusion. A l'inverse, dans une zone turbulente, le mouvement erratique des objets conduit inévitablement à de tels événements. Le taux de C-F est donc clairement relié au désordre dans le système.

5.4.3.1. La détection des créations et des fusions

Pour mener à bien la détection, nous comparons les positions des objets sur l'image i avec les positions des objets sur l'image précédente $i - 1$ ($\Delta t = 1/25$ s) et nous déterminons si un objet est nouveau (s'il vient juste d'être créé) ou s'il résulte de la fusion de deux objets. Nous calculons la distance entre un objet et ceux de l'image précédente. Notons $d_1 < d_2 < d_3 \dots$ ces distances.

Deux cas de figure se présentent :

- Si $d_1 > v_{max}\Delta t$, on suppose que l'objet vient juste d'être créé.
- Si $d_2 < d_{min}$, alors on suppose que l'objet résulte de la fusion de deux autres.

Les valeurs de v_{max} et d_{min} ont été déterminées à partir de tests préliminaires.

5.4.3.2. Taux de créations Γ_+ et de fusions Γ_- en fonction du nombre d'objets n

Définissons C_i et F_i comme étant respectivement les nombres de créations et de fusions apparus sur l'image $i + 1$ par rapport à l'image i . Le taux de création $\Gamma^+(n)$ (ou de fusion $\Gamma^-(n)$) est défini ici comme étant le nombre d'objets créés (ou détruits) entre une image et sa précédente (donc pendant $\Delta t = 1/25^e$ s) en moyenne.

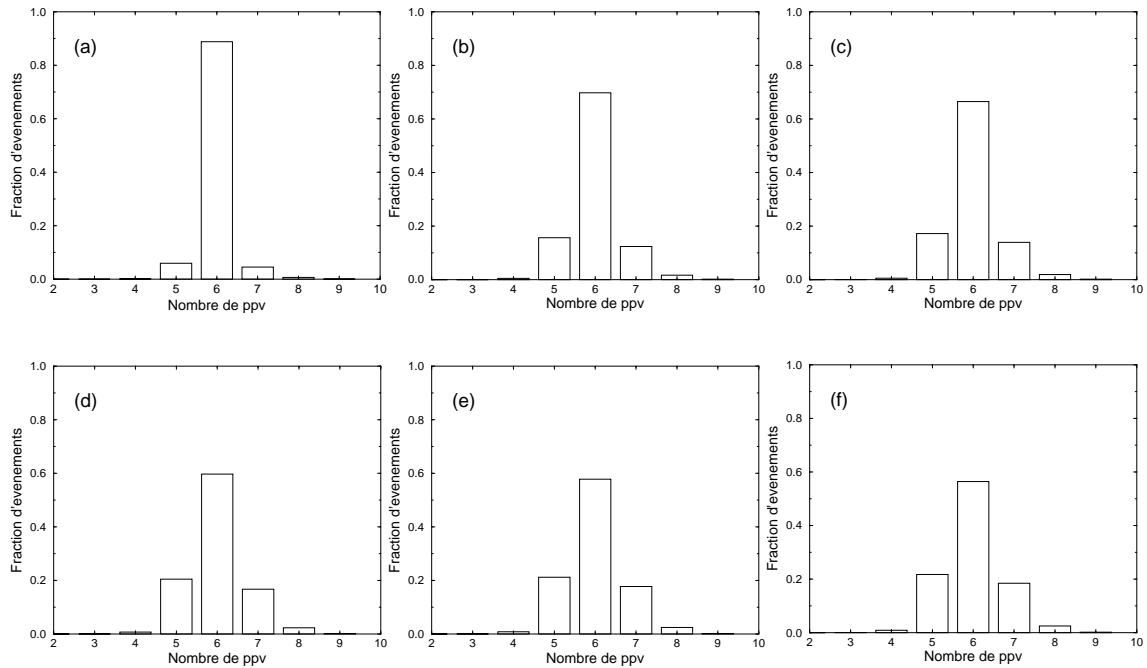
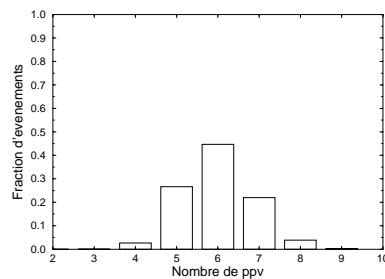


FIG. 5.22.: Distribution de la fraction de ppv pour différents débits pour une huile de $50 \text{ mm}^2/\text{s}$. La fraction d'hexa domine à tout débit bien que diminuant avec l'écart au seuil. Elle se stabilise au plus haut débit mesuré, un peu au delà de 50% (non montré). La fraction d'objets $n_{ppv}=5$ est toujours plus importante que celle $n_{ppv}=7$. Puis viennent $n_{ppv}=8$ et $n_{ppv}=4$. Cet ordre est indépendant du débit. Ci-dessous, une simulation numérique dans laquelle les objets sont distribués aléatoirement, moyennant certaines conditions détaillées dans le texte, donne qualitativement le même résultat.



$$\begin{aligned}\Gamma^+(n) &= \langle C_{i \in \alpha(n)} \rangle \\ \Gamma^-(n) &= \langle F_{i \in \alpha(n)} \rangle\end{aligned}$$

où $\alpha(n)$ contient les numéros des images possédant n objets et où la moyenne est faite sur les images de cet ensemble. On montre sur la figure 5.23-a et b l'évolution de ces taux en fonction du nombre d'objets.

Loin du seuil, la distribution de n est unimodale. L'évolution des taux de créations et de fusions en fonction du nombre d'objets présents met clairement en évidence un équilibre stable : l'intersection des courbes pour Γ_+ et Γ_- correspond précisément au maximum de la distribution de n sur la Fig. 5.23-a. Plus il y a d'objets, moins il y a de place pour en créer de nouveaux. Le taux de création décroît linéairement quand n augmente ($\Gamma_+(n) \propto N - bn$). Le taux de fusion croît avec une dépendance localement linéaire en n suivant $\Gamma_-(n) \propto an$ (plus il y a d'objets, plus il y a de fusions), sauf pour les grandes valeurs de n (on change de régime, dans ce cas, le rôle des contraintes aux limites devient plus important).

Proche du seuil, dans le régime bistable (distribution bimodale du nombre de colonnes et de la fraction d'hexa), les courbes s'intersectent trois fois. Ici, il y a deux équilibres stables pour les deux maxima de la distribution et un instable pour le minimum de la distribution.

5.4.3.3. Un modèle statistique pour l'état désordonné

Comme on le voit, loin du seuil, on peut modéliser l'évolution des taux de création et fusion (en négligeant les effets à grand n pour les fusions) par

$$\begin{cases} \Gamma_-(n) = an \\ \Gamma_+(n) = N - bn \end{cases},$$

où N , a et b sont des constantes et Γ_+ et Γ_- sont respectivement les nombres de créations et de fusions de colonnes par unité de temps. On suit ici la même approche que Gil, Lega et Meunier pour la description des propriétés statistiques pour la turbulence de défauts dans une équation généralisée de Ginzburg-Landau [66].

Nous pouvons écrire l'équation maîtresse pour la probabilité $p(n, t)$ d'avoir n objets à l'instant t :

$$\begin{aligned}p(n, t + dt) &= p(n, t) \\ &\quad - [\Gamma_+(n) + \Gamma_-(n)] p(n, t) dt \\ &\quad + \Gamma_-(n + 1) p(n + 1, t) dt \\ &\quad + \Gamma_+(n - 1) p(n - 1, t) dt\end{aligned}$$

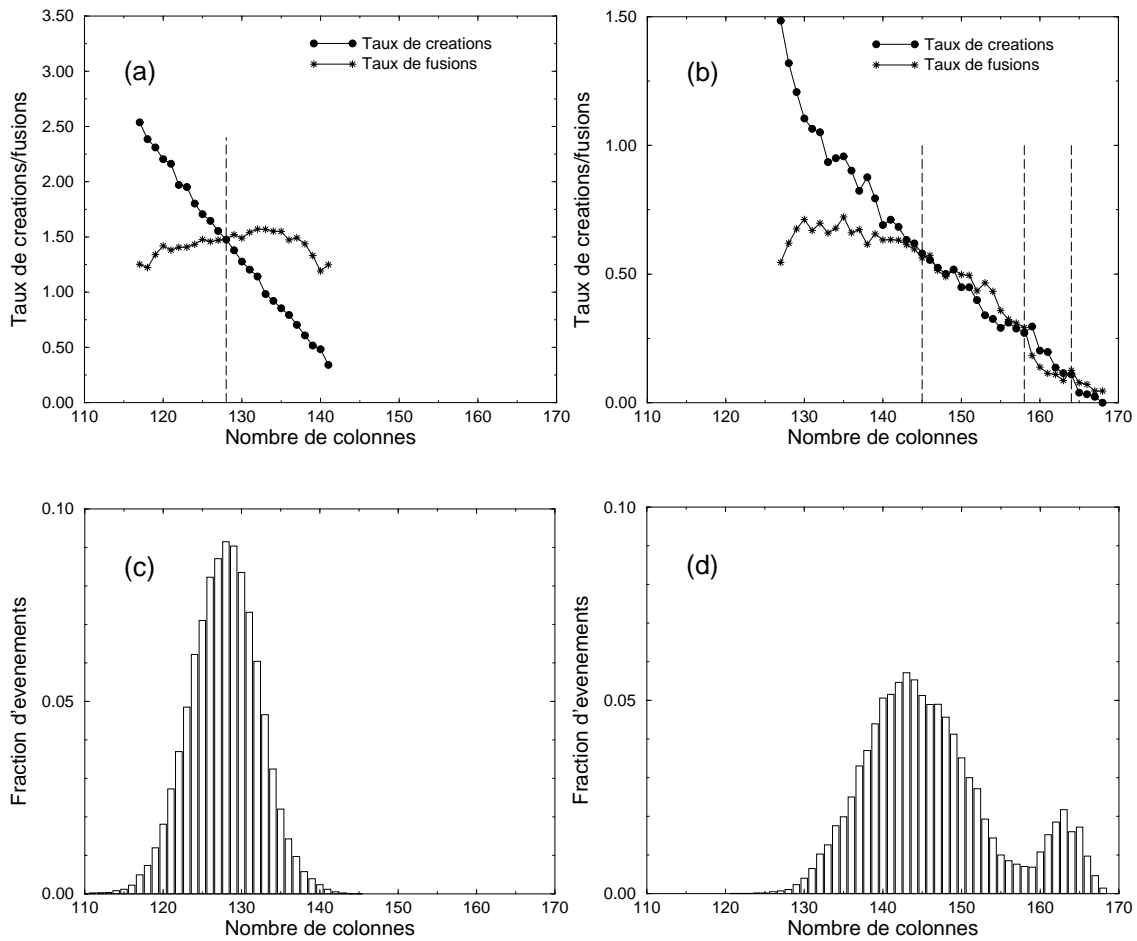


FIG. 5.23.: Évolution des taux de créations et de fusions moyens en fonction du nombre d'objets présents dans le système pour une viscosité de $50 \text{ mm}^2/\text{s}$. (a) et (c) $83.2 \text{ cm}^3/\text{s}$, (b) et (d) $37.4 \text{ cm}^3/\text{s}$ (près du seuil). Chaque point correspond à la moyenne du taux faite sur l'ensemble des images de la séquence contenant le nombre d'objets considéré.

Dans le régime asymptotique, c'est à dire quand $p(n, t) = p(n, t + dt)$, cette équation peut se réécrire plus simplement :

$$\Gamma_+(n)p_n = \Gamma_-(n+1)p_{n+1}$$

Ainsi, en substituant les valeurs de $\Gamma_+(n)$ et $\Gamma_-(n)$:

$$(N - bn)p_n = a(n+1)p_{n+1}$$

Notons $N_0 = N/b$ et $\alpha = a/b$ et introduisons $G(z) = \sum z^n p_n$, la fonction génératrice :

$$N_0 \sum z^n p_n - \sum n z^n p_n = \alpha \sum (n+1) z^n p_{n+1}$$

$$\begin{aligned} N_0 G(z) - z \sum G'(z) &= \alpha \sum n z^{n-1} p_n \\ &= \alpha G'(z) \end{aligned}$$

$$N_0 G(z) = (z + \alpha) G'(z)$$

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{N_0}{z + \alpha}$$

$$\ln G(z) = N_0 \ln(z + \alpha)$$

$$G(z) = G_0 (z + \alpha)^{N_0}$$

$$G(1) = 1 \iff G_0 (1 + \alpha)^{N_0} = 1 \iff G_0 = (1 + \alpha)^{-N_0}$$

$$\text{D'où } G(z) = \left(\frac{z + \alpha}{1 + \alpha} \right)^{N_0}$$

On reconnaît une binômiale dont on sait que $G(z) = [zp + (1 - p)]^{N_0}$.

Cela nous permet de calculer la moyenne et l'écart-type de la distribution en se rappelant les propriétés de la fonction génératrice :

$$\bar{n} = G'(1) = pN_0 \text{ pour une binômiale}$$

$$\overline{n(n-1)} = G''(1) = p^2 N_0 (N_0 - 1) \text{ pour une binômiale}$$

$$\overline{n^2} = p^2 N_0 (N_0 - 1) + pN_0$$

$$\begin{aligned} \overline{n^2} - \bar{n}^2 &= p^2 N_0 (N_0 - 1) + pN_0 - p^2 N_0^2 \\ &= pN_0 - p^2 N_0 \\ &= \bar{n}(1 - p) \\ &= \bar{n} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N_0} \right) \end{aligned}$$

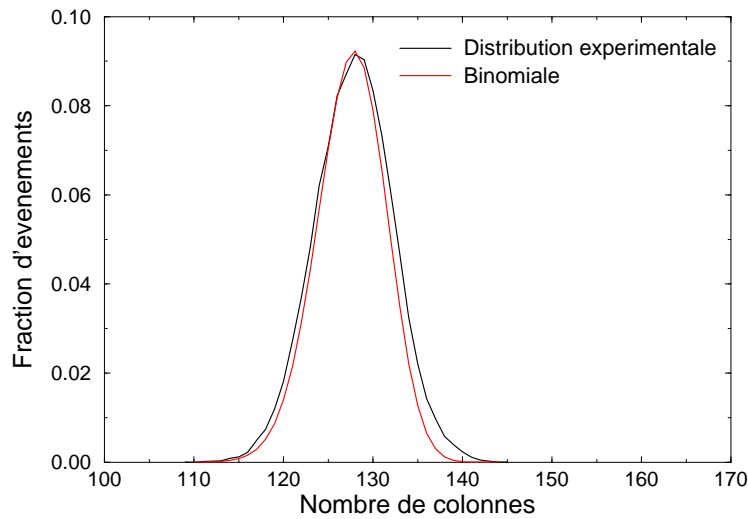


FIG. 5.24.: La distribution du nombre d'objets au débit de $83.2 \text{ cm}^3/\text{s}$ est bien décrite par une binômiale. Les paramètres obtenus à partir de la Fig. 5.23-a sont : $N=12.88$, $b=0.089$, $a=0.0115$.

Rappels sur les propriétés de la fonction génératrice $G(z) = \sum z^n p_n$

$$\begin{cases} G(1) &= 1 \\ G'(z) &= \sum n z^{n-1} p_n \\ G''(z) &= \sum n(n-1) z^{n-2} p_n \end{cases}, \text{ donc } G'(1) = \bar{n} \text{ et } G''(1) = \overline{n(n-1)}$$

En conclusion, loin du seuil, la distribution du nombre d'objets peut être assez bien décrite par une binômiale, que l'on a représentée sur la Fig. 5.24, superposée à la distribution du nombre obtenue loin du seuil pour un débit de $83.2 \text{ cm}^3/\text{s}$.

5.4.3.4. La fraction moyenne de C-F

Les nombres de créations et fusions peuvent être associés à une mesure du désordre puisqu'elles apparaissent seulement dans les régions désordonnées. Comme on l'a vu, ce système spatialement étendu peut être vu comme discret puisqu'il est caractérisé par un nombre d'objets bien déterminé à chaque instant. Néanmoins, la surface d'écoulement, c'est à dire la surface du film sous la grille, reste constante. Cela nous donne la possibilité d'associer une notion d'espace aux C-F en attribuant une surface moyenne à chacun des objets. Il reste à faire une distinction entre d'une part les objets qui viennent d'être créés ou détruits, et d'autre part ceux pour lesquels aucun événement ne s'est produit.

Ainsi, une façon de mesurer l'évolution du désordre dans le système consiste à suivre l'évolution d'une fraction moyenne des C-F en fonction de l'écart au seuil, normalisée

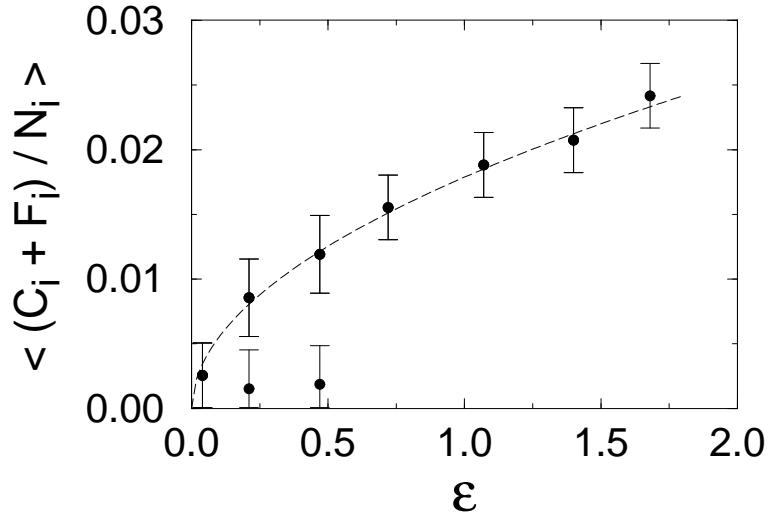


FIG. 5.25.: Évolution de la fraction moyenne totale de défauts F_{C-A} en fonction de l'écart au seuil ε_h pour une huile de viscosité $50 \text{ mm}^2/\text{s}$. La ligne en pointillés représente une variation selon une loi de puissance d'exposant $\beta=0.56\pm 0.05$.

par le nombre d'objets présents. Appelons $F_{C-F,i} = (C_i + F_i)/n_i$ la fraction totale des C-F sur l'image i où n_i est le nombre d'objets dans l'image. On obtient, pour un débit donné, la fraction moyenne totale de défauts par

$$F_{C-F} = \sum_{i=1}^{47999} \frac{F_{C-F,i}}{47999}$$

On représente F_{C-F} en fonction de l'écart au seuil pour l'huile à $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ sur la Fig. 5.25. L'évolution de cette fraction suit clairement une loi de puissance d'exposant $\beta=0.56\pm 0.05$.

On peut se risquer à faire une hypothèse qui semble raisonnable : en première approximation, proche du seuil, le taux moyen de créations et de fusions cumulées, ramené au nombre total d'objets présents, est proportionnel à Ft . On définit ainsi la fraction turbulente en termes de créations/fusions d'objets. Naturellement, loin du seuil cette hypothèse cesse d'être valable puisque Ft ne peut dépasser 1 alors que F_{C-F} continue d'augmenter.

Comme décrit en 5.1.3, Pomeau a proposé [52] en 1986 que le mécanisme d'IST pouvait être analogue à la percolation dirigée, un modèle stochastique de processus de contamination qui prédit que Ft évolue comme une fonction de l'écart au seuil ε selon une loi de puissance ε^β . Dans l'hypothèse ci-dessus, la branche du haut de la Fig. 5.25 reflète qualitativement le comportement de la fraction moyenne de

domaines désordonnés Ft dans le régime d'IST et l'exposant mesuré est en bon accord avec $\beta=0.58$ obtenu à partir d'un modèle de percolation dirigée (2+1)D [67].

Le tableau suivant rassemble les exposants mesurés pour les deux viscosités.

exposant	20 mm ² /s	50 mm ² /s
$\langle 1 - N/N_{lam} \rangle$	pas d'exposant	0.22±0.05
$\langle 1 - f \rangle$	0.37±0.05	0.10±0.05
σ_d	0.14±0.05	0.10±0.05
F_{C-A}	pas d'exposant	0.56±0.05

TAB. 5.1.: *Un exposant faible est plutôt le signe d'une transition du premier ordre. On peut être étonné par la valeur relativement plus élevée de l'exposant β , à rapprocher de celle de la percolation dirigée (0.58).*

5.5. Conclusion

Dans le cadre de cette étude sur la transition vers le régime désordonné, l'effort a tout particulièrement porté sur les procédés de détection et surtout de traitement d'image. Il a fallu mettre au point des techniques spécifiques à la fois pour traiter des quantités de données brutes importantes (plus de 500 Giga octets, 1 200 000 images) et surmonter les problèmes de détection liés à la nature de l'observation. Aurore Naso a réalisé les programmes en langage C nous ayant permis d'obtenir tous les résultats présentés (nombre d'objets, nombre de ppv, détection des créations et des fusions ...).

Nous utilisons essentiellement deux paramètres de contrôle dans cette expérience : le débit d'alimentation et la viscosité. Suivant la viscosité utilisée, l'apparition du désordre semble sous-critique (pour $\nu \gtrsim 35$ mm²/s) ou super-critique (pour $\nu \lesssim 35$ mm²/s). Dans le premier cas, il s'impose après une perturbation d'amplitude finie, en faisant croître le débit à partir du régime laminaire. Dans le second cas, il faut au contraire faire décroître le débit pour le voir apparaître spontanément.

On met bien en évidence l'augmentation progressive et continue du désordre avec l'écart au seuil quelles que soient les viscosités considérées puisqu'à la fois le nombre moyen d'objets diminue, la fraction moyenne d'hexa diminue et le taux moyen de C-F augmente en suivant un comportement de type « loi de puissance ». Dans tous les cas, on distingue clairement des zones laminaires et des zones turbulentes caractéristiques d'une transition critique par IST vers le régime turbulent.

Les distributions du nombre d'objets et de la fraction d'hexa, par ailleurs bien corrélés, montrent quantitativement l'existence d'un régime bistable proche du seuil.

Ce régime est clairement observé directement sur les enregistrements vidéo. Le système « saute » d'un état pour lequel l'« agitation » moyenne est reliée à l'écart au seuil à un état métastable très peu désordonné pour lequel l'agitation, uniquement en périphérie, semble n'exister qu'à cause d'effets liés à la taille finie du système. Les évolutions en fonction du temps du nombre d'objet et de la fraction d'hexa, également très bien corrélés, confirment ce comportement.

Il apparaît toutefois une différence de comportement proche du seuil pour les deux viscosités considérées, sans doute reliée à la nature de la transition décrite en 5.3. Proche du seuil, la bistabilité semble disparaître de manière continue dans le cas de l'huile de $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ alors que des oscillations de lignes sont responsables d'une discontinuité à $20 \text{ mm}^2/\text{s}$. Pour cette viscosité, les oscillations sont responsables de l'apparition continue du désordre. Elles peuvent expliquer l'écart observé pour les exposants, l'instabilité intrinsèque qu'elles apportent favorisant la croissance du désordre.

Une étude plus détaillée de tous ces aspects, observés dans l'expérience lors de la transition vers la turbulence, reste à mener. Une série de mesures, dans le but de mieux décrire l'évolution de cette transition en fonction de la viscosité est à l'étude. Un intérêt tout particulier sera porté aux viscosités « critiques » proches de $\nu_c \approx 35 \text{ mm}^2/\text{s}$. Il est également prévu d'étudier le comportement du système avec différentes surfaces d'écoulement (voire différentes géométries), entre autres pour mieux caractériser le régime de bistabilité, clairement associé aux conditions aux limites. Une technique de traitement automatique permettant d'accéder à la fraction turbulente est à l'étude.

6. Conclusion et perspectives

Le dispositif expérimental mis en œuvre pendant mon travail de thèse, bien que de conception simple, a permis de mettre en évidence une grande richesse de comportements. Cette première étude de la déstabilisation d'un film bidimensionnel continûment alimenté a vocation à être poursuivie, les perspectives d'études étant multiples.

Je donne ici les principales directions qu'il me paraît utile de suivre :

- Compléter l'étude de la déstabilisation des nappes dans la géométrie annulaire, avec d'autres rayons et d'autres viscosités. Cette étude systématique doit nous permettre de clarifier le rôle des différents paramètres, et, à terme, de détailler le mécanisme de déstabilisation. Signalons que de nombreuses applications existent et se rencontrent dans différents domaines techniques : de l'enduction (coating) dans le cas de la fabrication de pellicules photographiques jusqu'aux écoulements rencontrés dans l'industrie sidérurgique.
- Tenter de mettre en évidence d'autres modes de déstabilisation de la structure hexagonale stationnaire de colonnes de liquide, en particulier le mode de triplement de période spatiale. Nous soupçonnons que ce mode, prévu par la théorie, ne soit pas accessible en raison de la taille limitée du dispositif. De ce fait, l'éventualité d'une augmentation de la taille est en cours d'investigation, plusieurs problèmes d'ordre technique devant être surmontés.
- Nous avons vu au chapitre 5 que la transition à la turbulence peut être super-critique ou sous-critique selon la viscosité utilisée. Il serait très intéressant d'observer la transition pour les viscosités proches de la viscosité critique marquant ce changement de comportement (autour de $35 \text{ mm}^2/\text{s}$). Une étude préliminaire réalisée à $35 \text{ mm}^2/\text{s}$ semble montrer des aspects nouveaux, à la rencontre des deux types de transitions. Nous avons observé que les conditions aux limites jouent un rôle, en particulier proche du seuil, dans le régime de bistabilité. Il serait utile, là aussi, d'accroître la taille du dispositif expérimental afin de préciser le rôle des conditions aux limites, et à terme, de tenter d'en quantifier l'influence. Enfin, la mesure de la fraction turbulente dans le régime des intermittences spatio-temporelles doit permettre de mieux caractériser l'état désordonné et de faire une comparaison avec d'autres systèmes présentant le même type de comportement turbulent. Dans ce but, il reste à définir un critère pertinent pour distinguer les zones turbulentes.

-
- A la différence des fluides newtoniens, dont font partie les huiles silicones utilisées dans les études présentées dans ce mémoire, le tenseur des contraintes dans les viscoélastiques n'est pas instantanément proportionnel à celui des déformations. Puisque dans ce cas la réponse visqueuse du système dépend de la vitesse de variation des contraintes, on s'attend à une modification importante de la dynamique de l'écoulement, et donc à une façon originale de modifier les structures, dans toutes les situations que nous avons décrites précédemment.
 - Signalons, pour clore ces perspectives, plusieurs situations partiellement explorées. Nous cherchons des comportements phyllotaxiques dans le régime de gouttes, en géométrie annulaire et à deux dimensions, en analysant la phase relative qu'il existe lors de la chute des gouttes. Nous étudions l'influence d'un forçage temporel de type Faraday sous la forme de variations périodiques de la dépression dans la chambre au dessus de la grille, entre autres, sur la déstabilisation du réseau hexagonal de colonnes. En géométrie rectangulaire, mais quasi-unidimensionnelle, nous étudions l'évolution du front séparant des colonnes et une nappe (Fig. 6.1).

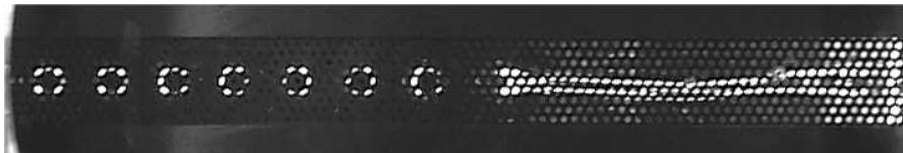
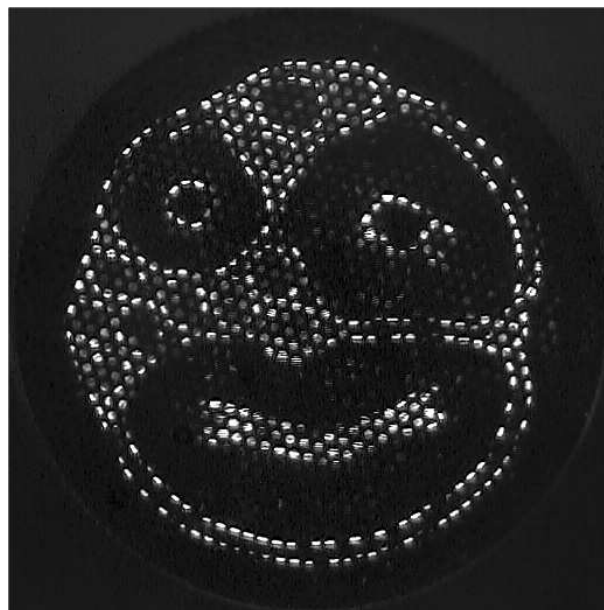


FIG. 6.1.: Régime mixte colonnes/nappe en géométrie rectangulaire quasi-unidimensionnelle.



Annexes

A. L'instabilité de Rayleigh-Taylor

Pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra se rapporter à [69], sur laquelle repose en partie cette annexe.

L'instabilité de Rayleigh-Taylor est une instabilité de fluide fondamentale, lorsqu'un fluide plus dense se trouve au-dessus d'un autre moins dense dans un champ gravitationnel constant. Il existe de nombreuses applications, de l'océanographie à la fusion de confinement inertielle [1].

A.1. Rappel de quelques définitions en hydrodynamique

viscosité : mesure le « frottement » entre éléments liquides en écoulement, vu d'un point de vue macroscopique.

- dynamique (η) : rapport des contraintes internes aux gradients de vitesse (exprime l'intensité des contraintes mises en jeu lorsqu'on cisaille le fluide), s'exprime en $ML^{-1}T^{-1}$. Système SI : poiseuille (Po), système CGS : poise (P)
- cinématique (ν) : diffusion de la quantité de mouvement du fluide (a la dimension d'un coefficient de diffusion), s'exprime en L^2T^{-1} . Système SI : m^2s^{-1} , système CGS : cm^2s^{-1} .
- $\frac{\eta}{\nu} = \rho$ (masse volumique du fluide)

inertie : traduit la résistance d'un corps de masse m à être mis en mouvement :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2}. \text{ Pour un fluide en écoulement, elle s'écrit par unité de masse : } \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}.$$

capillarité : désigne l'ensemble des phénomènes induits par la tension de surface qui mesure l'énergie nécessaire pour augmenter la surface libre d'un liquide (par unité de surface) et s'exprime en MT^{-2} (énergie par unité de surface ou encore force par unité de longueur).

A.2. L'équation de Navier-Stokes

La dynamique des liquides est régie par l'équation de Navier-Stokes (NS) assortie de la condition d'incompressibilité

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \vec{f} \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

où \vec{f} représente les forces exercées par unité de volume.

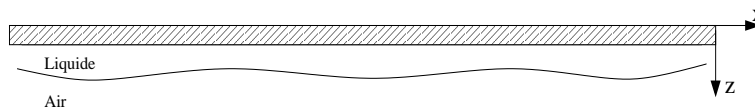
Plusieurs difficultés surgissent alors :

1. Il s'agit d'une équation vectorielle
2. cette équation est non linéaire à cause du terme inertiel
3. c'est une équation du deuxième ordre qui exige deux intégrations successives à cause du terme visqueux $\vec{f}_{visc.} = \eta \Delta \vec{v}$.

A.3. L'instabilité à proprement parler : aspect énergétique

Lors d'une expérience typique, on met sous gravité déstabilisante un film visqueux incompressible (huile silicone) uniformément réparti sur un plan.

Des gouttes, dont l'effet est de minimiser l'énergie potentielle, apparaissent. Celles-ci ne peuvent pas être trop petites à cause du coût en énergie de surface qui en découlerait.



L'échelle spatiale caractéristique est donc fixée par la compétition entre l'effet de la gravitation et celui de la tension de surface :

$$\Delta E = \int dx \left[(\rho_2 - \rho_1) g \frac{h^2}{2} + \gamma \left(\sqrt{1 + h'^2} - 1 \right) \right]$$

Le premier terme correspond à l'énergie potentielle gravitationnelle (ρ_1 masse volumique de l'huile, ρ_2 celle de l'air) et le deuxième au coût en énergie de surface (tout écart par rapport au plan conduit à une augmentation de surface). Le terme

d'énergie gravitationnelle fait baisser l'énergie alors que le terme d'énergie de surface l'augmente.

Si la déformation est faible, on peut écrire $\sqrt{1+h'^2} - 1 \approx \frac{h'^2}{2}$. On suppose que la déformation est sinusoïdale : $\delta h(x) = A \cos(kx)$. En injectant cette forme dans l'équation de départ, on obtient en intégrant sur une longueur d'onde :

$$\Delta E = \frac{\lambda A^2}{4} [(\rho_2 - \rho_1)g + \gamma k^2]$$

On définit alors la longueur capillaire k_c^{-1}

$$k_c^{-1} = \left(\frac{\gamma}{(\rho_1 - \rho_2)g} \right)^{1/2}$$

Pour $q < q_c$, $\Delta E < 0$. Ainsi, les longueurs d'onde plus importantes que $\lambda_c = 2\pi k_c^{-1}$ sont instables.

A.4. Aspect dynamique

A.4.1. Le cas des films liquides minces : l'approximation de lubrification

On peut fréquemment appliquer l'approximation de lubrification en hydrodynamique interfaciale, en particulier pour la dynamique des films liquides visqueux et minces comme c'est le cas ici. L'idée est de faire une analyse à longue échelle uniquement. Ainsi, on utilise les différences d'échelles de longueur (la taille transverse est souvent petite devant les autres longueurs) pour séparer les variables et simplifier l'analyse. La réduction asymptotique réduit NS à une équation scalaire non-linéaire aux dérivées partielles.

Puisqu'il y a un écoulement, on prend en compte l'aspect dynamique pour étudier l'évolution de la structure. Cette analyse nous permettra d'obtenir la relation de dispersion. Enfin, l'obtention du taux de croissance nous conduira à la longueur d'onde effectivement sélectionnée par le système.

Dans notre cas, le film se limite au dessus par un plan horizontal (en $z = 0$) et au dessous par un gaz passif (en $z = h(x, t)$).

Au niveau de l'interface liquide-gaz, deux forces en volume (gradients de pression) sont responsables du flux de matière :

- celle dûe à la masse du fluide $-\rho g \partial_x h$: le gradient de pression hydrostatique

- celle dûe à la courbure de l'interface $\gamma \partial_x (\partial_x^2 h)$: le gradient de pression de Laplace où on approxime la courbure moyenne de l'interface par $\partial_x^2 h$.

A.4.2. Le point de départ : l'équation de Navier-Stokes

L'écoulement est régi par l'équation de Navier-Stokes (2D) avec l'hypothèse d'incompressibilité :

$$\begin{cases} \rho (\partial_t u + u \partial_x u + w \partial_z u) & = -\partial_x p + \eta \Delta u \\ \rho (\partial_t w + u \partial_x w + w \partial_z w) & = -\partial_z p + \eta \Delta w \\ \partial_x u + \partial_z w & = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où u et w sont les composantes de la vitesse suivant x et z , et p contient les termes de pression des forces agissant sur le film.

On associe les conditions aux limites :

en $z = 0$:

$$u = 0, w = 0$$

en $z = h(x, t)$:

$$\begin{aligned} w &= d_t h = \partial_t h + u \partial_x h \\ \mathbf{T} \cdot \vec{n} &= -\kappa \gamma \vec{n} + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \vec{t} \end{aligned}$$

où \mathbf{T} est le tenseur des contraintes du liquide, \vec{n} et \vec{t} sont les vecteurs unitaires normal et tangentiel à l'interface (voir Fig. A.1) et κ est la courbure moyenne de l'interface. On suppose qu'il n'y a pas de forçage externe de l'interface et que la tension de surface γ est constante.

A.4.3. Les variables adimensionnées

On introduit les échelles pour les films fins. λ est l'échelle de longueur suivant x et h_0 (l'épaisseur moyenne du film) celle suivant z telles que $\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda} h_0 \ll 1$.

On obtient ainsi les variables adimensionnées du problème :

$$U = \frac{u}{U_0}, W = \frac{w}{\varepsilon U_0}, T = \frac{\varepsilon U_0}{h_0} t, H = \frac{h}{h_0}, P = \frac{\varepsilon h_0}{\eta U_0} p, \Sigma = \frac{\varepsilon}{\eta U_0} \gamma.$$

On peut écrire le système d'équations (A.1) adimensionné :

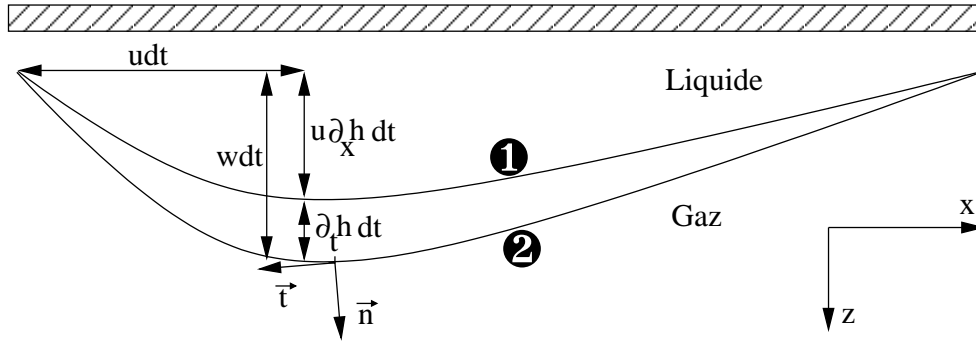


FIG. A.1.: Le film évolue de la position 1 à la position 2. La composante de la vitesse suivant z est $w = d_t h = \partial_t h + u \partial_x h$.

$$\begin{aligned} \varepsilon Re (\partial_T U + U \partial_X U + W \partial_Z U) &= -\partial_X P + \partial_Z^2 U + \varepsilon^2 \partial_X^2 U \\ \varepsilon Re (\partial_T U + U \partial_X U + W \partial_Z U) &= -\partial_X P + \partial_Z^2 U + \varepsilon^2 \partial_X^2 U \end{aligned}$$

$$\partial_X U + \partial_Z W = 0 \quad (\text{A.2})$$

et les conditions aux limites associées :

en $Z = 0$: Bibliography H. Hinrichsen, "Nonequilibrium Critical Phenomena and Phase Transitions into Absorbing States", Adv. Phys. 49, 815-958 (2000).

$$U = 0, W = 0 \quad (\text{A.3})$$

en $Z = H$:

$$W = d_T H = \partial_T H + U \partial_X H \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} (\partial_Z U + \varepsilon^2 \partial_X W) (1 - \varepsilon^2 (\partial_X H)^2) - 4\varepsilon^2 (\partial_X H) (\partial_X U) &= \partial_X \Sigma [1 + \varepsilon^2 (\partial_X H)^2]^{1/2} \\ -P + \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 (\partial_X H)^2} [\partial_X U (\varepsilon^2 (\partial_X H)^2 - 1) - \partial_X H (\partial_Z U \varepsilon^2 \partial_X W)] &= \frac{C^{-1} \varepsilon^3 \partial_X^2 H}{[1 + \varepsilon^2 (\partial_X H)^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

où $Re = \frac{U_0 h_0}{\nu}$ est le nombre de Reynolds et $C = \frac{U_0 \eta}{\gamma}$ le nombre capillaire.

On obtient la condition cinématique (équation de conservation de la masse) en intégrant l'équation (A.2) et en utilisant (A.3) et (A.4) :

$$\partial_T H + \partial_X \left(\int_0^H U dZ \right) = 0$$

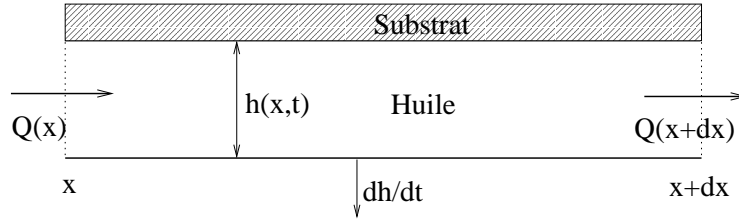


FIG. A.2.: Par unité de temps, la variation de flux entre x et $x + dx$, qui est donc un volume, s'identifie au produit de dx par la variation d'épaisseur par unité de temps. La conservation du flux prend ainsi la forme $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial t}$.

où $\int_0^H U dZ$ s'identifie au flux de matière (voir Fig. A.2).

Finalement, en faisant un développement perturbatif de U , W et P en puissances du petit paramètre ε et en faisant tendre ε vers 0 (l'hypothèse de lubrification), on obtient le système :

$$\partial_Z^2 U = \partial_X P, \quad \partial_Z P = 0, \quad \partial_T H + \partial_X \left(\int_0^H U dZ \right) = 0$$

avec les conditions aux limites

en $Z = 0$:

$$U = 0$$

en $Z = H$:

$$\partial_Z U = \partial_X \Sigma, \quad P = -\varepsilon^3 C^{-1} \partial_X^2 H$$

On obtient pour la vitesse du fluide à l'interface $U(H = Z) = \partial_X P \left(\frac{1}{2} Z^2 - HZ \right)$. En substituant cette expression dans l'équation de conservation de la masse, on obtient l'équation d'évolution pour l'interface :

$$\partial_T H - \partial_X \left[\frac{1}{3} H^3 \partial_X P \right] = 0$$

à une dimension.

A.4.4. Évolution de l'interface dans les variables d'origine

On peut réécrire cette expression dans les variables dimensionnées d'origine :

$$\partial_t h - \partial_x \left[\frac{1}{3} h^3 \partial_x p \right] = 0$$

Ici $p = -\rho g h - \gamma \partial_x^2 h$ où le premier terme du second membre correspond à pression hydrostatique et le deuxième à la pression de Laplace. L'équation d'évolution devient :

$$\partial_t h = -\frac{1}{3} \partial_x [\rho g h^3 \partial_x h + \gamma h^3 \partial_x^3 h] \quad (\text{A.5})$$

On cherche les petites perturbations périodiques en x d'un film d'épaisseur uniforme h_0 sous la forme $h(x, t) = h_0 + h'$. On linéarise (A.5) et on obtient l'équation de stabilité linéaire pour h' , dont on peut chercher des solutions sous la forme $h' = h'_0 \exp(ikx + st)$ puisque les coefficients de l'équation ne dépendent pas de x et de t .

L'équation caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned} s &= \frac{h_0^3 k^2}{3\eta} [\rho g - \gamma k^2] \\ &= \frac{h_0^3 k^2 \gamma}{3\eta} [k_c^2 - k^2] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

où $k_c^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ est la longueur capillaire.

A.4.5. Détermination de la longueur d'onde λ^* sélectionnée par l'instabilité.

Il découle de l'équation (A.6) un taux de croissance $\tau(k)$ non monotone :

$$\tau(k) = \frac{3\eta}{k^2 \gamma h_0^3} \frac{1}{(k_c^2 - k^2)}$$

qui trouve pour minimum $k^* = \frac{k_c}{\sqrt{2}}$ et conduit à la longueur d'onde effectivement sélectionnée par le système :

$$\lambda^* = \frac{2\pi\sqrt{2}}{k_c}$$

B. Quelques notes sur les groupes et leurs représentations

Cette annexe est basée sur le cours de Leech et Newman [68]. L'intérêt général de la théorie des groupes en physique est qu'elle simplifie les calculs. Cette simplification provient du fait que les symétries du système sont prises en compte dès le début. L'ensemble des opérations de symétrie rend compte des propriétés d'un système.

Les opérations de symétrie (qui peuvent être la translation, la rotation, la réflexion, l'inversion...) laissent inchangé le système en forme ou apparence et sont étroitement liées aux éléments de symétrie (qui peuvent être un plan, un centre, un axe ...) car les unes ne peuvent se définir que par rapport aux autres. Les propriétés de symétrie d'un système physique peuvent être résumées en spécifiant son groupe de symétrie.

B.1. Les opérateurs de symétrie

On considère des opérateurs de symétrie A et B et ζ l'ensemble des opérateurs de symétrie.

- $A.B \in \zeta, B.A \in \zeta$ ($A.B \neq B.A$ a priori) \implies on dit que ζ est fermé par la multiplication
- $E \in \zeta$ ($E \equiv$ Identité)
- $A \in \zeta \implies A^{-1} \in \zeta$

Un tel ensemble d'opérateurs de symétrie est appelé *groupe de symétrie*.

B.1.1. Groupe de symétrie

On peut définir une *table de multiplication* comme l'ensemble des produits multiples de certains des opérateurs du groupe, ces derniers sont dits *générateurs* du groupe (ils ne sont pas uniques).

Si on a simplement une table de multiplication (sans autre information), les éléments de la table sont dits *éléments d'un groupe abstrait*.

B.1.2. Les postulats de groupe

- $A, B \in \zeta \Rightarrow A.B \in \zeta$ (produit fermé)
- $\exists E \in \zeta$ tel que $E.A = A.E = A \quad \forall A \in \zeta$ (élément neutre)
- $\forall A \in \zeta \quad \exists A^{-1} \in \zeta$ tel que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = E$ (inverse)
- $\forall A, B, C \in \zeta \quad (A.B).C = A.(B.C)$ (associativité)

B.1.3. Quelques définitions

- **ordre d'un groupe** : C'est le nombre d'opérateurs que le groupe contient.
- **sous-groupe** : Sous-ensemble d'un groupe qui est lui-même un groupe.
- **opérateur conjugué** : A et B dans ζ sont dits *conjugués* si $\exists S \in \zeta$ tel que $S.A = B.S$.
- **classe dans ζ** : Ensemble de tous les *opérateurs conjugués* à un opérateur dans ζ . Tout groupe peut être décomposé en un ensemble de classes.
- **groupes Abéliens** : Tous les opérateurs du groupe commutent. Alors chaque opérateur est une classe en soi.
- **co-ensemble** : Soit $\vartheta \subset \zeta$, $B \in \zeta$ mais $B \notin \vartheta$ alors

$B.\vartheta$ est un co-ensemble gauche

$\vartheta.B$ est un co-ensemble droit

évidences : $B.\vartheta$ et ϑ n'ont aucun opérateur commun. De plus $B.\vartheta$ et $C.\vartheta$ sont soit identiques soit n'ont aucun opérateur commun (pareil à droite).

- **indexe** : (voir référence [68])
- **sous-groupes invariants** : $\vartheta \subset \zeta$ est formé de classes complètes de ζ , c'est à dire que si $A \in \vartheta \quad B = S^{-1}.A.S \in \vartheta \quad \forall S \in \zeta$
- **isomorphisme-homomorphisme** : Deux groupes sont dits *isomorphes* s'ils ont la même table de multiplication (correspondance 1-1 entre éléments). Une correspondance (1-plusieurs) est possible. Les groupes dans ce cas sont dits *homomorphes*.
- **les groupes ponctuels** : Ils laissent au moins un point (de l'espace) fixe par toutes les opérations. Dans une structure répétée, les groupes ponctuels peuvent décrire les points de symétrie possibles. On peut considérer les groupes ponctuels cristallographiques (32 groupes au total dont le groupe C_{6v}).

B.2. Représentation des groupes

Jusqu'à présent, les propriétés algébriques des éléments étaient représentées par la table de multiplication, c'est à dire par les relations entre éléments du groupe.

A partir de maintenant, on va étudier les *représentations* (au sens mathématique) de ces éléments. Une représentation spécifiera les propriétés algébriques d'un élément de manière *intrinsèque*.

B.2.1. Représentation matricielle

On peut toujours trouver un ensemble de matrices ayant la même table de multiplication qu'un groupe donné. Une représentation R est un tel ensemble de matrices ($R(A_1), R(A_2), \dots$: autant de matrices que d'éléments dans le groupe). Il y a une infinité de telles représentations chacune construite à partir des *représentations irréductibles*, elles-mêmes en nombre fini. Il faudra se ramener à ces représentations irréductibles.

Dans la pratique, on part des équations d'un système physique pour définir *une* représentation matricielle de son groupe de symétrie puis on se ramène aux représentations irréductibles. C'est cette dernière procédure qui permettra de simplifier les solutions des équations dynamiques.

Si pour un vecteur v donné on obtient $Av = M(A)v \forall A \in \zeta$ alors v est *une base* et M est une représentation du groupe telle que l'ensemble des $M(A)$ forme la représentation matricielle associée.

Remarque : La base peut être de taille variable.

Il faut choisir une base sur laquelle agissent les matrices de la représentation correspondante. De façon générale, les éléments de la base (les composantes de v) d'une représentation ne font pas que simplement permuter par les opérations du groupe mais s'expriment sous la forme de combinaisons linéaires.

Néanmoins, l'utilisation des permutations permet de construire un type connu de représentations dont les matrices (de permutation) permutent simplement les éléments de la base. Lorsqu'en plus les éléments de la base sont les opérateurs du groupe, on parle de *représentation régulière*.

Si pour un groupe donné, une représentation R est diagonale par blocs et que chaque bloc i est une représentation correcte R_i du groupe, on dit qu'une telle représentation est *réductible* et que R se décompose dans les représentations R_i . Ainsi la base peut être décomposée en "sous-bases" correspondantes.

B.2.2. Représentations équivalentes

Considérons les opérateurs $X \in \zeta$. Alors si la base s génère les $R'(X)$ et $s' = Qs$, deux représentations $R(X)$ et $R'(X)$ sont dites *équivalentes* si $R(X) = P^{-1}R'(X)P$ où $P^{-1} = \tilde{Q}$.

Remarque : Si s est formé des objets qui commutent par R alors Q doit être une matrice de permutation.

Toute représentation équivalente à une représentation réductible est dite *réductible*. Si ce n'est pas possible, elle est dite *irréductible*.

**UN GROUPE POSSÈDE UN NOMBRE LIMITÉ DE REPRÉSENTATIONS
IRRÉDUCTIBLES NON ÉQUIVALENTES.**

On tâchera de décomposer une représentation quelconque R d'un groupe ζ en un ensemble de représentations irréductibles (matrices diagonales par blocs).

Appliqué à l'élément A :

$$R(A) = \begin{pmatrix} R^{(1)}(A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^{(2)}(A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^{(3)}(A) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

B.2.3. Caractères de groupe

Les caractères de groupe permettent de classer les représentations irréductibles d'un groupe et de faire une *réduction de principe*, c'est à dire déterminer quelles représentations irréductibles sont contenues dans une représentation donnée.

Soient $\chi(A) = Tr R(A)$, les *caractères* du groupe ζ et de matrice de représentation $R(A)$ pour tout $A \in \zeta$.

Puisque

$$R(A) = \sum_{\mu} \oplus m_{\mu} R^{(\mu)}(A) \quad \forall A \in \zeta$$

alors

$$\chi(A) = \sum_{\mu} m_{\mu} \chi^{(\mu)}(A)$$

avec la *multiplicité* m_{μ} définie comme le nombre de représentations irréductibles $R^{(\mu)}$ équivalentes.

On peut montrer qu'il existe certaines relations importantes et utiles pour les caractères des représentations irréductibles d'un groupe fini ζ :

- (0) **En tout premier lieu un théorème fondamental sur les éléments des matrices qui constituent les représentations irréductibles d'un groupe :**

$$\sum_{A \in \zeta} R_{mn}^{(\mu)\star}(A) R_{m'n'}^{(\nu)}(A) = \frac{g}{\sqrt{l_{\mu} l_{\nu}}} \delta_{\mu\nu} \delta_{mm'} \delta_{nn'}$$

ou l_μ est la dimension de la représentation irréductible μ et g l'ordre du groupe ζ .

(1) Si des opérateurs du groupe sont dans la même classe, alors pour une représentation donnée, les caractères correspondants sont les mêmes (puisque des matrices conjuguées ont les mêmes traces).

(2) Relation d'orthogonalité :

$$\sum_{A \in \zeta} \chi^{(\mu)}(A) \chi^{(\nu)*}(A) = g \delta_{\mu\nu}$$

Lorsque $\mu \neq \nu$ les représentations sont non équivalentes.

(3) Le nombre de représentations irréductibles *non équivalentes* est le même que le nombre de classes du groupe.

(4) $\sum_{\mu} l_{\mu}^2 = g$ en posant de nouveau l_{μ} la dimension de la représentation irréductible μ .

On définit une table de caractères ("carrée" par (3)) des représentations irréductibles d'un groupe avec en colonnes les k classes du groupe et en lignes les k représentations irréductibles.

Les tables de caractères seront utiles pour réduire des représentations arbitraires.

On utilise les notations suivantes pour étiqueter les représentations irréductibles :

représentation 1D	A ou B suivant que le caractère correspondant à la rotation principale C_n est +1 ou -1 respectivement
représentation 2D	E (pas le même que l'identité!)
représentation 3D	T

Soit la table de caractères du groupe C_{6v} :

C_{6v}	E	C_2	$2C_3$	$2C_6$	$3U_2$	$3U'_2$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	-1	1
E_1	2	-2	-1	1	0	0
E_2	2	2	-1	-1	0	0

On peut savoir si une représentation donnée est réductible, même si la table de

caractères n'est pas connue car

$$\sum_{A \in \zeta} \chi(A) \chi^*(A) = g \sum_{\mu} m_{\mu}^2$$

2000

En effet, si $\sum_{\mu} m_{\mu}^2 = 1$, la représentation ne contient qu'une seule représentation irréductible et $\chi(A)$ est le caractère associé.

Remarque : Dans le cas de la *représentation régulière* $\chi(E) = g$ et $\chi(A \neq E) = 0$ donc $m_{\mu} = \chi^{(\mu)}(E)$ et $g = \sum_{\mu} (\chi^{(\mu)}(E))^2$ par les relations précédentes.

alors l'équation

$$\sum_{A \in \zeta} \chi(A) \chi^{(\mu)*}(A) = m_{\mu} g$$

dérivée de la relation (2) permet d'obtenir les multiplicités m_{ν} des représentations irréductibles connaissant la table de caractères. On peut donc effectuer la réduction d'une représentation quelconque d'un groupe fini.

C. La forme des matrices rotation, parité et translations

$$\mathbf{R}_{12}(\mathcal{C}_6^1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{12}(\sigma_v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D. Les instructions Maple 8

Définition des matrices $\mathbf{R}_{12}(\mathcal{C}_6^1)$ (C61) et $\mathbf{R}_{12}(\sigma_v)$ (CSV)

```

CSV :=array(1..12,1..12) :
C61 :=array(1..12,1..12) :

for i from 1 to 12
do
    for j from 1 to 12
    do
        CSV[i,j] :=0 :
        C61[i,j] :=0 :
    od :
od :
CSV[1,7] :=1 :
CSV[2,12] :=1 :
CSV[3,11] :=1 :
CSV[4,10] :=1 :
CSV[5,9] :=1 :
CSV[6,8] :=1 :
CSV[7,1] :=1 :
CSV[8,6] :=1 :
CSV[9,5] :=1 :
CSV[10,4] :=1 :
CSV[11,3] :=1 :
CSV[12,2] :=1 :
C61[1,6] :=1 :
C61[2,1] :=1 :
C61[3,2] :=1 :
C61[4,3] :=1 :
C61[5,4] :=1 :
C61[6,5] :=1 :
C61[7,12] :=1 :
C61[8,7] :=1 :
C61[9,8] :=1 :
C61[10,9] :=1 :
C61[11,10] :=1 :
C61[12,11] :=1 :

```

Création de la matrice \mathcal{M}_H (M), calcul de $[\mathcal{M}_H, \mathbf{R}_{12}(\mathcal{C}_6^1)]$ et $[\mathcal{M}_H, \mathbf{R}_{12}(\sigma_v)]$ ([M,C61] et [M,CSV]) et simplification de M

```

M :=array(1..12,1..12) ;
k :=1 :
for i from 1 to 12
do
    for j from 1 to 12
    do
        M[i,j] :=m||k :
        k :=k+1 :
    od :
od :
elim :=seq(m||i, i=13..144) ;
MC61 :=linalg[multiply](M,C61) :
C61M :=linalg[multiply](C61,M) :
com1 :=linalg[matadd](MC61,C61M,1,-1) :
for i from 1 to 12
do
    for j from 1 to 12
    do
        sol :=solve(com1[i,j],{elim}) :
        assign(sol) :
    od :
od :
for i from 1 to 12
do

```

```

for j from 1 to 12
do
    com1[i,j] :=simplify(com1[i,j]) :
    M[i,j] :=simplify(M[i,j]) :
od :
od :
MCSV :=linalg[multiply](M,CSV) :
CSVM :=linalg[multiply](CSV,M) :
com2 :=linalg[matadd](MCSV,CSVM,1,-1) :

for i from 1 to 12
do
    for j from 1 to 12
    do
        sol :=solve(com2[i,j],{elim}) :
        assign(sol) :
    od :
od :

for i from 1 to 12
do
    for j from 1 to 12
    do
        com2[i,j] :=simplify(com2[i,j]) :
    od :
od :

```

```

M[i,j] :=simplify(M[i,j]) :
od :
m92 :=M1 :
m91 :=M2 :
m96 :=M3 :
m95 :=M4 :
m94 :=M5 :
m93 :=M6 :
m99 :=M7 :
m98 :=M8 :
m97 :=M9 :
m89 :=M10 :
m88 :=M11 :
m87 :=M12 :

for i from 1 to 12
do
    for j from 1 to 12
    do
        M[i,j] :=simplify(M[i,j]) :
    od :
od :

```

Calcul des 6 types de vecteurs propres de la matrice M obtenue au paragraphe précédent

```

Digits :=20 ;
readlib(randomize) ;
Seed :=randomize() ;

gene :=rand(-1000..1000)/1000.0 :

MM :=array(1..12,1..12) :

for i from 1 to 12
do
    M.i :=gene()+I*gene() ;
od :

for i from 1 to 12
do
    for j from 1 to 12
    do
        MM[i,j] :=simplify(M[i,j]) :
    od :
od :

vtp :=linalg[eigenvects](MM) :

```

```

#####
Détermination de la forme des vecteurs propres :
type1 :=proc(N)
local alpha,beta,delta,zeta,H0,H1,H2,H3,H4,H5,H6,H7 :
alpha := vtp[N][3][1][1] :
beta := vtp[N][3][1][2] :
H0 :=abs(vtp[N][3][1][3]-(beta-alpha)) :
H1 :=abs(vtp[N][3][1][4]+alpha) :
H2 :=abs(vtp[N][3][1][5]+beta) :
H3 :=abs(vtp[N][3][1][6]+(beta-alpha)) :
delta := vtp[N][3][1][7] :
zeta := vtp[N][3][1][8] :
H4 :=abs(vtp[N][3][1][9]-(zeta-delta)) :
H5 :=abs(vtp[N][3][1][10]+delta) :
H6 :=abs(vtp[N][3][1][11]+zeta) :
H7 :=abs(vtp[N][3][1][12]+(zeta-delta)) :
H0+H1+H2+H3+H4+H5+H6+H7 ;
end :
#####
type2 :=proc(N)

```

```

local alpha,H0,H1,H2,H3,H4,H5,H6,H7,H8,H9,H10 :
alpha := vtp[N][3][1][1] :
H0 :=abs(vtp[N][3][1][2] -alpha) :
H1 :=abs(vtp[N][3][1][3] -alpha) :
H2 :=abs(vtp[N][3][1][4] -alpha) :
H3 :=abs(vtp[N][3][1][5] -alpha) :
H4 :=abs(vtp[N][3][1][6] -alpha) :
H5 :=abs(vtp[N][3][1][7] -alpha) :
H6 :=abs(vtp[N][3][1][8] -alpha) :
H7 :=abs(vtp[N][3][1][9] -alpha) :
H8 :=abs(vtp[N][3][1][10]-alpha) :
H9 :=abs(vtp[N][3][1][11]-alpha) :
H10 :=abs(vtp[N][3][1][12]-alpha) :

H0+H1+H2+H3+H4+H5+H6+H7+H8+H9+H10 ;
end :
#####
type3 :=proc(N)
local alpha,H0,H1,H2,H3,H4,H5,H6,H7,H8,H9,H10 :
alpha := vtp[N][3][1][1] :
H0 :=abs(vtp[N][3][1][2] +alpha) :
H1 :=abs(vtp[N][3][1][3] -alpha) :
H2 :=abs(vtp[N][3][1][4] +alpha) :
H3 :=abs(vtp[N][3][1][5] -alpha) :
H4 :=abs(vtp[N][3][1][6] +alpha) :
H5 :=abs(vtp[N][3][1][7] +alpha) :
H6 :=abs(vtp[N][3][1][8] -alpha) :
H7 :=abs(vtp[N][3][1][9] +alpha) :
H8 :=abs(vtp[N][3][1][10]-alpha) :
H9 :=abs(vtp[N][3][1][11]+alpha) :
H10 :=abs(vtp[N][3][1][12]-alpha) :

H0+H1+H2+H3+H4+H5+H6+H7+H8+H9+H10 ;
end :
#####
type4 :=proc(N)
local alpha,H0,H1,H2,H3,H4,H5,H6,H7,H8,H9,H10 :
alpha := vtp[N][3][1][1] :
H0 :=abs(vtp[N][3][1][2] +alpha) :
H1 :=abs(vtp[N][3][1][3] -alpha) :
H2 :=abs(vtp[N][3][1][4] +alpha) :
H3 :=abs(vtp[N][3][1][5] -alpha) :
H4 :=abs(vtp[N][3][1][6] +alpha) :
H5 :=abs(vtp[N][3][1][7] -alpha) :
H6 :=abs(vtp[N][3][1][8] +alpha) :
H7 :=abs(vtp[N][3][1][9] -alpha) :
H8 :=abs(vtp[N][3][1][10]+alpha) :
H9 :=abs(vtp[N][3][1][11]-alpha) :
H10 :=abs(vtp[N][3][1][12]+alpha) :

H0+H1+H2+H3+H4+H5+H6+H7+H8+H9+H10 ;
end :
#####
type5 :=proc(N)
local alpha,H0,H1,H2,H3,H4,H5,H6,H7,H8,H9,H10 :
alpha := vtp[N][3][1][1] :
H0 :=abs(vtp[N][3][1][2] -alpha) :
H1 :=abs(vtp[N][3][1][3] -alpha) :
H2 :=abs(vtp[N][3][1][4] -alpha) :
H3 :=abs(vtp[N][3][1][5] -alpha) :
H4 :=abs(vtp[N][3][1][6] -alpha) :
H5 :=abs(vtp[N][3][1][7] +alpha) :
H6 :=abs(vtp[N][3][1][8] +alpha) :
H7 :=abs(vtp[N][3][1][9] +alpha) :
H8 :=abs(vtp[N][3][1][10]+alpha) :
H9 :=abs(vtp[N][3][1][11]+alpha) :
H10 :=abs(vtp[N][3][1][12]+alpha) :

H0+H1+H2+H3+H4+H5+H6+H7+H8+H9+H10 ;
end :
#####
type6 :=proc(N)
local alpha,beta,delta,zeta,H0,H1,H2,H3,H4,H5,H6,H7 :
alpha := vtp[N][3][1][1] :
beta := vtp[N][3][1][2] :
H0 :=abs(vtp[N][3][1][3]+(beta+alpha)) :
H1 :=abs(vtp[N][3][1][4]-alpha) :
H2 :=abs(vtp[N][3][1][5]-beta) :
H3 :=abs(vtp[N][3][1][6]+(beta+alpha)) :
delta := vtp[N][3][1][7] :
zeta := vtp[N][3][1][8] :
H4 :=abs(vtp[N][3][1][9]+(zeta+delta)) :
H5 :=abs(vtp[N][3][1][10]-delta) :
H6 :=abs(vtp[N][3][1][11]-zeta) :
H7 :=abs(vtp[N][3][1][12]+(zeta+delta)) :

H0+H1+H2+H3+H4+H5+H6+H7 ;
end :
#####
for i from 1 to 6
do
for j from 1 to 12
do type||i(j) ;
od ;
od ;
#####

```

Definition des deux matrices translation T1 et T2

```
K1 :=array(1..2) :
R :=array(1..2) :
Rot :=array(1..2,1..2) :
Sigma :=array(1..2,1..2) :
Trans_12 :=array(1..12,1..12) :

K1[1] :=Kappa*cos(theta) ;
K1[2] :=Kappa*sin(theta) ;

R[1] :=dx ;
R[2] :=dy ;

Rot[1,1] :=cos(Pi/3) ;
Rot[1,2] :=-sin(Pi/3) ;
Rot[2,1] :=sin(Pi/3) ;
Rot[2,2] :=cos(Pi/3) ;

Sigma[1,1] :=1 ;
Sigma[1,2] :=0 ;
Sigma[2,1] :=0 ;
Sigma[2,2] :=-1 ;

print(Rot) ;
print(Sigma) ;

K2 :=simplify(linalg[multiply](Rot,K1)) ;
K3 :=simplify(linalg[multiply](Rot,K2)) ;
K4 :=simplify(linalg[multiply](Rot,K3)) ;
K5 :=simplify(linalg[multiply](Rot,K4)) ;
K6 :=simplify(linalg[multiply](Rot,K5)) ;
K7 :=simplify(linalg[multiply](Sigma,K1)) ;
K8 :=simplify(linalg[multiply](Rot,K7)) ;
K9 :=simplify(linalg[multiply](Rot,K8)) ;
K10 :=simplify(linalg[multiply](Rot,K9)) ;
K11 :=simplify(linalg[multiply](Rot,K10)) ;
K12 :=simplify(linalg[multiply](Rot,K11)) ;

for i from 1 to 12
do
  for j from 1 to 12
  do
    Trans_12[i,j] :=0 ;
  od :
  Trans_12[i,i] :=exp(I*simplify(linalg[multiply](K||i,R))) ;
od :
print(Trans_12) ;
#####
```

```

T1 :=array(1..12,1..12) :
T2 :=array(1..12,1..12) :
for i from 1 to 12
do
  for j from 1 to 12
  do
    T1[i,j] :=expand(simplify(subs(dx=1,dy=0 ,Trans_12[i,j]))) :
    T2[i,j] :=expand(simplify(subs(dx=-1/2 ,dy=sqrt(3)/2,Trans_12[i,j]))) :
  od :
od :
csol :=ln(C)*2/(I*Kappa) ;
ssol :=ln(S)*2/(I*Kappa*sqrt(3)) ;

for i from 1 to 12
do
  for j from 1 to 12
  do
    T1[i,j] :=simplify(subs(cos(theta)=csol,sin(theta)=ssol,T1[i,j])) :
    T2[i,j] :=simplify(subs(cos(theta)=csol,sin(theta)=ssol,T2[i,j])) :
  od :
od :

```

Calcul des commutateurs com3=[M,T1] et com4=[M,T2]

<pre> MT1 :=linalg[multiply](M,T1) : T1M :=linalg[multiply](T1,M) : com3 :=linalg[matadd](MT1,T1M,1,-1) : for i from 1 to 12 do for j from 1 to 12 do com3[i,j] :=factor(com3[i,j]) : od : od : </pre>	<pre> MT2 :=linalg[multiply](M,T2) : T2M :=linalg[multiply](T2,M) : com4 :=linalg[matadd](MT2,T2M,1,-1) : for i from 1 to 12 do for j from 1 to 12 do com4[i,j] :=factor(com4[i,j]) : od : od : </pre>
---	---

Pour chaque élément de matrice des commutateurs com3 et com4, regarde en fonction de κ et θ ($\vec{k}_C = \kappa \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$) les conditions d'annulation des coefficients devant M2,...,M12 (sachant que M2,...,M12 ne dépendent pas de κ et θ)

<pre> for i from 2 to 12 do L i :=NULL : </pre>	<pre> od : for i from 1 to 12 do </pre>
--	---

```

for j from 1 to 12
do
  for k from 2 to 12
  do
    if
      com3[i,j]<>0 and divide(com3[i,j],M||k,'ok')
then L||k :=L||k,factor(numer(ok)) ;
      fi ;
      if
        com4[i,j]<>0 and divide(com4[i,j],M||k,'ok')
then L||k :=L||k,factor(numer(ok)) ;
        fi ;
      od ;
    od ;
  od ;
od ;
#####
Donne les conditions sur (C,S) pour annuler les
éléments de matrice contenant  $M_i$ 

for i from 2 to 12
do
  E||i :=solve({L||i},{C,S}) ;
od ;
#####
Les conditions obtenues, on les teste une par
une et on voit pour chacun des  $M_i$  si tous les
coefficients s'annulent. Par exemple (C,S)=(1,1)
(correspond au cas I) :
for i from 2 to 12
do
  simplify(subs(C=1,S=1,{L||i})) ;
od ;
on obtient :

```

```

{0}
{0}
{0}
{0}
{0}
{0}
{0}
{0}
{0}
{0}

```

```

#####
Dans le cas (1,-1) (correspond au cas XIII) :
for i from 2 to 12
do
  simplify(subs(C=1,S=-1,{L||i})) ;
od ;
on obtient :

```

```

{-2,0,2}
{-2,0,2}
{0}
{-2,0,2}
{-2,0,2}
{0}
{-2,0,2}
{-2,2}
{0}
{-2,2}
{-2,0,2}

```

```

#####

```

E. Articles

1. Le premier article “Structures of a Continuously Fed Two-Dimensional Viscous Film under a Destabilizing Gravitational Force”, publié dans *Physical Review Letters*, décrit l’expérience et donne une revue des principaux phénomènes observés à deux dimensions d’espace, résumés dans un diagramme des phases (débit surfacique, viscosité).
2. Le deuxième article “Wave vectors selection at the threshold of a generic instability of a hexagonal stationary pattern”, publié dans *Physica D*, traite de la sélection du vecteur d’onde proche du seuil, lors de la bifurcation d’une structure hexagonale stationnaire. Tous les modes de déstabilisation possibles sont prédits. Une comparaison est faite avec plusieurs expériences.
3. Le troisième article “Transition to Spatiotemporal Chaos in a two-dimensional Hydrodynamic System”, publié dans *Physical Review Letters*, décrit la transition au chaos spatio-temporel dans la version bidimensionnelle de l’expérience, à partir du régime de colonnes stationnaire et hexagonal (laminaire) pour une huile de viscosité $50 \text{ mm}^2/\text{s}$.

Structures of a Continuously Fed Two-Dimensional Viscous Film under a Destabilizing Gravitational Force

C. Pirat,* C. Mathis, P. Maïssa, and L. Gil

*Institut du Non Linéaire de Nice (U.M.R. C.N.R.S 6618), Université de Nice Sophia Antipolis,
1361 Route des Lucioles, F-06560 Valbonne, France
(Received 27 June 2003; published 12 March 2004)*

We study the gravity induced instability of a liquid film formed below a plane grid which is used as a porous media in an original hydrodynamic experiment. The film is continuously supplied with a controlled flow rate. We give through a phase diagram the full spectrum of the different flow regimes and we investigate the dynamics of the observed structures. True secondary instabilities of a 2D periodic pattern are described. The control parameters are the flow rate and the viscosity.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.104501

PACS numbers: 47.20.Ma, 47.20.Dr, 47.20.Lz, 47.54.+r

Numerous experimental studies have been concerned with the spatiotemporal dynamics of 1D periodic structures appearing in far from equilibrium dissipative media such as Couette-Taylor [1], Rayleigh-Bénard [2,3], and Rayleigh-Taylor [4–6] flows, directional solidification [7,8], viscous fingering in the “printer’s instability” [9,10], and hydrothermal waves [11]. Spatial period doubling emergence [12], spreading localized structures [4–8,13], oscillating localized structures (anomalous cells) [9,10,13], and spatiotemporal intermittency regimes [2,3,9,10,14] appear as generic mechanisms of 1D destabilization. For 2D periodic patterns, most of the literature is mainly directed toward competition between rolls, squares, rhombic and hexagons [15], toward stability against phase modulations [16], or toward defect-mediated turbulence [17]. However, these instabilities involve the same order parameters and the same amplitude equations as those derived for the description of the emergence of the primary periodic pattern. As far as we know, only two experimental works have been reported on true secondary instabilities, that is secondary instabilities which require the introduction of new order parameters and new amplitude equations: a nonlinear optical pattern forming system in sodium vapor [18] and an electrohydrodynamic convection experiment in nematic liquid crystal [19,20]. These reported observations, however, do not cover all the possible behaviors predicted by numerical simulations [21,22] or analytical works [23]. In this Letter, we report on specific 2D behaviors observed in the gravity induced destabilization of a low surface tension and viscous liquid film which is supplied at a constant rate Q . We observe that beyond competition between gravity and surface tension, flow rate plays a significant role giving rise to a wide variety of spatiotemporal behaviors.

This Letter is closely related to those performed in ESPCI in Paris by L. Limat *et al.* [4–6] who studied the secondary instabilities of structures in a 1D experiment and also to those of Fermigier *et al.* on two-dimensional

patterns in Rayleigh-Taylor stationary instability of a thin layer [24].

The experimental setup is shown in Figs. 1 and 2. It consists of a circular and plane steel grid which is used as a porous media and fixed horizontally at the bottom of a cylindrical tank. This tank is filled from above. We keep a constant depression in the tank in order to maintain a fixed and sufficient height of fluid above the grid (about 10 cm). In this way any fluid income, set with a valve and measured with a flowmeter, ensures a uniform and laminar flow through the whole grid at a constant and well controlled rate (null when the valve is closed) which feeds the thin layer underneath the grid (see Fig. 1). The geometrical characteristics of the grid (homogeneous over all the grid surface) are as follows: radius 188 mm; thickness 1 mm with circular holes of 1 mm in diameter arranged on a 2 mm regular hexagonal lattice. The liquid is silicone oil with a density of $\rho = 0.97 \text{ g/cm}^3$ and a surface tension of $\gamma = 21 \text{ dyn cm}^{-1}$. The capillary length $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g} = 1.5 \text{ mm}$. Nominal viscosities used were $\nu = 5, 20, 35, 50, 100, 200, \text{ and } 350 \text{ cS}$. The whole tank is transparent thus facilitating clear viewing. Observations from above through the grid appear to be the most appropriate way to investigate the dynamic behavior of the

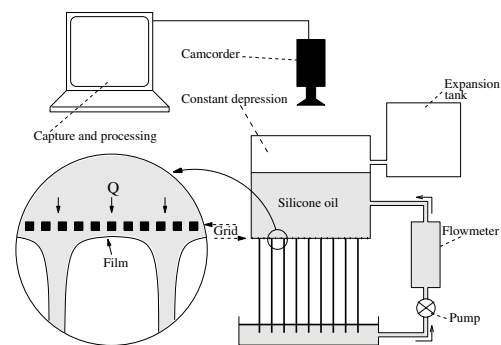


FIG. 1. Schematic representation of the experimental setup, with an enlargement of the grid and the film underneath.

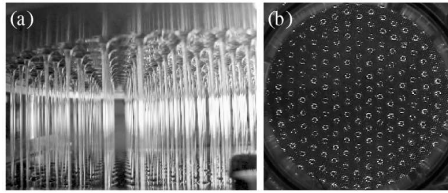


FIG. 2. Regular hexagonal lattice of liquid columns seen: (a) sideways, (b) from above through the grid holes (too small to be distinguished), columns appear as white objects (viscosity 35 cS).

film. Peripheral lighting (a circular fluorescent tube), located slightly under the level of the grid plane at the flow source, displays through intensity of refracted light the local variation of the film curvature. Patterns are recorded from above with a digital camcorder (resolution of 720×576 pixels) connected to a computer for video capture and processing. The grid pitch and size of the holes are much smaller than the Rayleigh-Taylor instability wavelength $\lambda_{RT} = 2\pi\sqrt{2}l_c$, which is here about 13.2 mm. Regular observed structures are not resonant with the grid pitch and, in any case, an alignment with the grid lattice is not favored. We used some other grids with slightly different geometrical characteristics and always obtained the same patterns.

The flow rate per surface unit, $\bar{U} = Q/S$ (S being the surface of the grid), is the mean fluid velocity. Viscosity ν and \bar{U} are the control parameters used in this experiment. An alternative choice is the set of dimensionless numbers Fr and $K = Fr/Re$ with $Fr = \bar{U}/\sqrt{g \cdot l_c}$, $Re = \bar{U}l_c/\nu$ therefore $K = \nu/\sqrt{g \cdot l_c^3}$. Figure 3 shows our observations based on a viscosity (respectively K) vs mean velocity (respectively Fr) plane. Gravitational time is compared to inertial one through the Froude number Fr and viscous one through K . We distinguish several regimes corresponding to various flows and associated patterns (see Figs. 4–6). For a given viscosity, typically three main

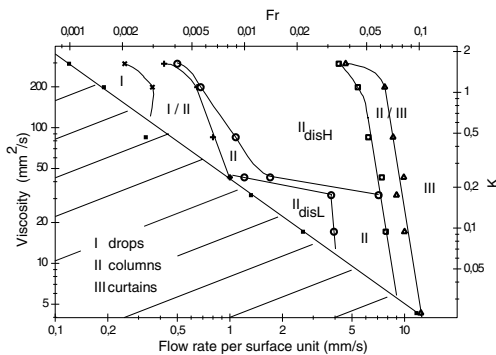


FIG. 3. Phase diagram in a viscosity/flow rate per surface unit and K/Fr planes. The film does not occupy the whole grid area in the hatched zone. Temperature effects have been taken into account.

regimes are noted with increasing flow rate: drops, columns of liquid and liquid curtains, as well as mixed intermediate ones. We focus our attention on a 200 cS viscosity oil ($K \approx 1$). Increasing inertia effects, we can identify the following scenario:

For a very low flow ($\bar{U} \leq 0.36$ mm/s, $Fr \leq 3 \times 10^{-3}$), we observe a Rayleigh-Taylor type instability [area I, Fig. 4(a)]. The destabilization of the film below the grid leads to a centered hexagonal lattice of fixed dripping sites [Fig. 4(b)] with a wavelength $\lambda_{Dr} = 13.3$ mm equal to λ_{RT} which is in good agreement with two-dimensional theoretical predictions at $Q = 0$ [24] and, as expected, with the one-dimensional experimental work [4]. The drip frequency is almost the same for each site (about 1 Hz) but there is a relative phase between them, associated with complex dynamics involving regular temporal patterns observable for about 100 periods. This frequency is an increasing function of the flow rate. A similar hexagonal pattern has been observed in [24] at $Q = 0$. It is worth noticing that, in our experiment, the low, but nonzero flow rate, gives greater stability to the dripping lattice.

An increasing flow rate induces a continuous flow in some sites, giving rise to “liquid columns.” This mixed regime (drops and columns) exists for a range of flows [$0.36 \leq \bar{U}$ (mm/s) ≤ 0.65 , $3 \times 10^{-3} \leq Fr \leq 5.4 \times 10^{-3}$, areas I/II, Fig. 4(c)] with a column ratio growing with increasing Fr . Drops are easily identified through the periodic variation of their size and brightness so that in Fig. 4(d) (arithmetic average of the video frames) columns appear brighter than dripping sites. The hexagonal organization (with wavelength λ_{Dr}) is still present but

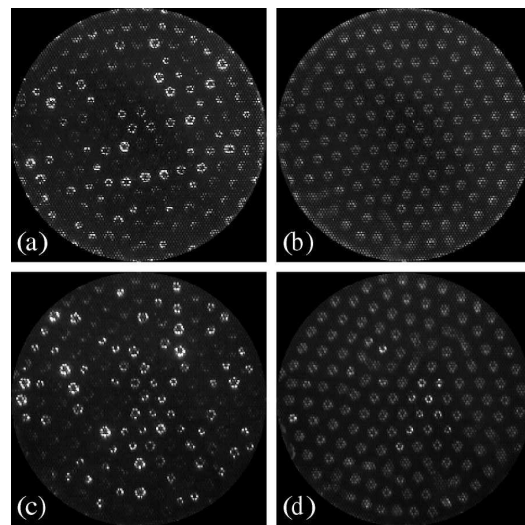


FIG. 4. Some typical low flow rate regimes for a 200 cS viscosity oil : instantaneous views and time averages over 20 s, respectively, for drops [(a),(b)] and drops + columns [(c),(d)].

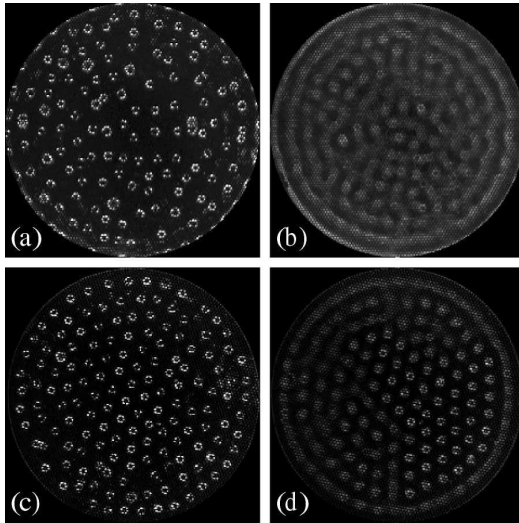


FIG. 5. Disordered regimes (areas II_{disH} and II_{disL}, Fig. 3): instantaneous views and time average over 20 s, respectively, for a viscosity of 200 cS [(a),(b)] and 20 cS [(c),(d)].

another one (with a smaller wavelength) appears where columns (the brightest sites) have appeared.

Beyond a given threshold, only columns exist (area II). A homogeneous (columns with uniform sections) and a stationary centered hexagonal pattern emerges [Fig. 2(b)]. In this regime, the wavelength $\lambda_{Co} = 11.9$ mm, which is about 10% shorter than λ_{Dr} . This is in agreement with previous one-dimensional experimental results [4,5]. The film width is about 0.8 mm and is flow rate dependent.

As flow rate increases, the size of every column grows until they lose their equilibrium positions. Two dynamic processes are then observed, according to the local instantaneous density of the columns: either two of them approach, meet, combine, and become a single column identical to the two preceding ones (a “destruction,” the system loses a column), or a new column, identical to others, appears where the density is temporarily too weak (a “creation,” the system gains a column). Both processes operate continuously such that the number of columns (which is a function of the imposed flow) is kept dynamically constant over a long observation period. This is the regime we label disordered mode [$0.68 \leq \bar{U}$ (mm/s) ≤ 5.4 , $5.6 \times 10^{-3} \leq Fr \leq 4.5 \times 10^{-2}$, area II disH and Figs. 5(a) and 5(b)].

The next step is a “column to sheets” transition [Fig. 6(a)] which takes place with high flows ($\bar{U} = 5.4$ mm/s). Under these conditions the thickness of the liquid film is raised and, locally, two or several neighboring columns—whose diameter has also increased with \bar{U} —connect and form a sheet (a curtain) of liquid. Seen from above, this appears as a “worm” or a “roll.” The relative number of “rolls” increases with \bar{U} until no more columns exist ($\bar{U} \geq 7.7$ mm/s, $Fr \geq 6.3 \times 10^{-2}$, area III).

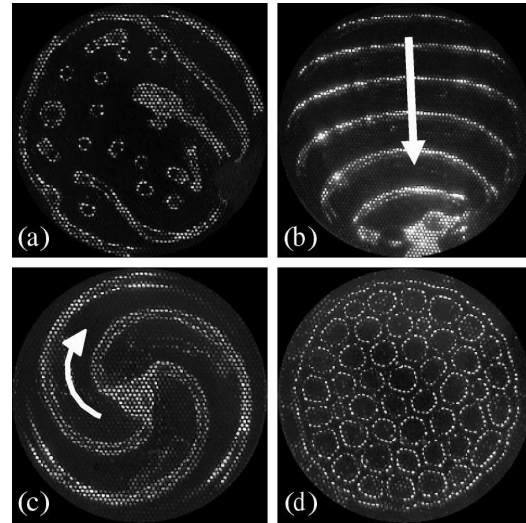


FIG. 6. Area II/III and Area III of the diagram (curtains, Fig. 3). Successively with increasing flow rate we get (a) columns + curtains, (b) traveling waves, (c) spirals (viscosity 200 cS), and (d) cells (viscosity 50 cS).

For larger rates, we observe a parallel self-organization of rolls which align to form traveling waves [TW, Fig. 6(b)] whose phase plane is concave with a wavelength λ_{TW} about 2.0 cm $\gg \lambda_{RT}$. They can also be wound around a “core” and lead to rotating spirals [Fig. 6(c)]. Their number of arms and their velocity are a function of \bar{U} and the boundary conditions. As expected, the direction of propagation of TW as well as the initial position of the core and direction of rotation of spirals is randomly chosen by the system.

An additional increase in flow rate induces a larger roll density so that the sheets locally become closed surfaces.

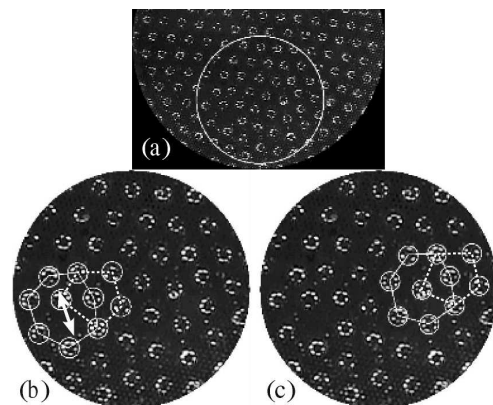


FIG. 7. (a) Two localized penta-hepta defects are in the white circular zone. A zoom shows (b) in the heart of a heptagon a column is oscillating between two extreme positions and (c) a fixed defect (viscosity 20 cS).

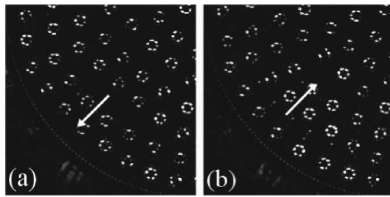


FIG. 8. Typical oscillation of column lines (a) $t = 0$ s (b) $t = 0.4$ s (viscosity 20 cS).

This produces a lattice of cells [Fig. 6(d)], the flow taking place at the periphery of each cell (membrane). The lattice is hexagonal, with a wavelength λ_{Ce} quite equal to λ_{TW} .

Several points can be made from this scenario: (i) For a given K , when the flow rate Q becomes too low, the surface extension of the flow under the grid is reduced and coupled to Q in such a way that average velocity remains constant: the experimental setup is inappropriate to reach this region of control parameters (the hatched zone in Fig. 3). (ii) For ν between 10 and 50 cS, the film thickness and the diameter of the columns are small. No drop regime is observed and there is no disordered domain between the columnar hexagonal lattice area and the mixed column-sheet one. (iii) On the other hand, another disordered regime of columns is observed at a relatively low flow rate for these viscosities [area II disL and Fig. 5(c)]. Because of the weak \bar{U} the columns cannot cover all the surface of the grid with a centered hexagonal lattice at the characteristic wavelength of the system. In some parts, the surface distribution of columns is very irregular and they move permanently from higher density places toward lower ones. However, in this regime, the hexagonal lattice fills a larger surface [Fig. 5(d)]. (iv) Moreover, for a viscosity ≤ 5 cS, the columnar hexagonal lattice development is no more observed.

In addition, it is possible to obtain an imperfect hexagonal lattice through a quick jump in the flow rate. Sometimes topological defects (penta-hepta) are trapped [Fig. 7(a)]. Generically oscillating just after their birth [Fig. 7(b)], they can evolve in various ways (disappearance, freezing [Fig. 7(c)], diffusion, etc.).

We observe that starting with a stationary hexagonal lattice of columns and lowering the flow rate just below threshold give rise to oscillating column lines. Each line behaves as a solid object and oscillates in counterphase with neighboring lines. The frequency is about 1 Hz (Fig. 8). The oscillations appear along the three directions of the hexagonal lattice. This kind of behavior has been theoretically predicted [23] and observed here, as far as we know, for the first time.

We have qualitatively described the behavior of the system according to the flow rate and the viscosity of the fluid. The move from one regime to another occurs as a series of transitions. In addition, we have touched briefly

on the observation of defects and line oscillations. The experimental study of some generic destabilization modes of a hexagonal column lattice, characterization of oscillations, and comparison with theory [23] will be deferred to a forthcoming publication. The dynamics of defects possibly present in the lattice will be described as well.

*Electronic address: Christophe.Pirat@inln.cnrs.fr

- [1] C. D. Andereck, S. S. Liu, and H. L. Swinney, *J. Fluid Mech.* **164**, 155 (1986).
- [2] S. Ciliberto and P. Bigazzi, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 286 (1988).
- [3] M. Dubois, R. Da Silva, F. Daviaud, P. Bergé, and A. Petrov, *Europhys. Lett.* **8**, 135 (1989).
- [4] F. Giorgiutti, A. Bleton, L. Limat, and J. E. Wesfreid, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 538 (1995).
- [5] C. Counillon, L. Daudet, T. Podgorski, and L. Limat, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2117 (1998).
- [6] P. Brunet, J.-M. Flesselles, and L. Limat, *Europhys. Lett.* **56**, 221 (2001).
- [7] A. J. Simon, J. Bechhoefer, and A. Libchaber, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2574 (1988).
- [8] M. Ginibre, S. Akamatsu, and G. Faivre, *Phys. Rev. E* **56**, 780 (1997).
- [9] M. Rabaud, S. Michalland, and Y. Couder, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 184 (1990).
- [10] S. Michalland and R. Rabaud, *Physica (Amsterdam)* **61D**, 197 (1992).
- [11] J. Burguete, D. Maza, and L. Mancini, *Physica (Amsterdam)* **174D**, 56 (2003).
- [12] P. Couillet and G. Iooss, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 866 (1990).
- [13] L. Gil, *Physica (Amsterdam)* **147D**, 300 (2000).
- [14] H. Chaté and P. Manneville, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 112 (1987).
- [15] A. E. Nuz, A. A. Nepomnyaschy, A. A. Golovin, A. A. Hari, and L. M. Pismen, *Physica (Amsterdam)* **135D**, 233 (2000).
- [16] R. B. Hoyle, *Phys. Rev. E* **61**, 2506 (2000).
- [17] K. E. Daniels and E. Bodenschatz, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 034501 (2002).
- [18] R. Herrero, E. GrosseWesthoff, A. Aumann, T. Ackemann, Y. A. Logvin, and W. Lange, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4627 (1999).
- [19] M. Sano, H. Kokubo, B. Janiaud, and K. Sato, *Prog. Theor. Phys.* **90**, 1 (1993).
- [20] Emergence of quasiperiodic patterns in Faraday's experiments are not concerned because the secondary wavelength is artificially introduced.
- [21] I. Daumont, K. Kassner, C. Misbah, and A. Valance, *Phys. Rev. E* **55**, 6902 (1997).
- [22] M. Plapp and M. Dejmek, *Europhys. Lett.* **65**, 276 (2004).
- [23] C. Pirat and L. Gil, *Physica (Amsterdam)* **179D**, 92 (2003).
- [24] M. Fermigier, L. Limat, J. E. Wesfreid, P. Boudinet, and C. Quilliet, *J. Fluid Mech.* **236**, 349 (1992).



Wave vectors selection at the threshold of a generic instability of a hexagonal stationary pattern

C. Pirat, L. Gil*

I.N.L.N., U.M.R. C.N.R.S. 129, Université de Nice Sophia Antipolis, 1361 Route des Lucioles, F-06560 Valbonne, France

Received 18 September 2000; received in revised form 21 September 2002; accepted 24 December 2002

Communicated by S. Fauve

Abstract

We predict the wave vectors (norme and orientation) which have to be observed near the threshold of a generic bifurcation of a 2D stationary hexagonal pattern.

© 2003 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

PACS: 47.20Ky; 05.45.-a; 47.10.+g

Keywords: Secondary instability; Wave vector selection; Hexagonal pattern

1. Introduction

The emergence of a highly organized pattern from an initially structureless state in a system far from equilibrium is a general behavior in nature [1]. In two space dimensions (2D), the most frequent ordered stationary structures are hexagons, although rolls, squares and even quasiperiodic patterns are also observed. Typical examples of 2D hexagonal patterns include Rayleigh–Bénard convection with non-Oberbeck–Boussinesq effects [2], Marangoni convection [3], nonlinear optics [4] or reaction diffusion systems [5] and their applications to biological objects [6].

Studies on the generic secondary instabilities of an ordered pattern represent then a natural step on the road to understand complex spatio-temporal behaviors. The literature on the subject is mainly directed toward competition between rolls, squares, rhombic and hexagons [7–10], toward stability against phase modulations as the Eckhaus or zigzag instabilities [11–14], or toward defect-mediated turbulence. Although such kind of instabilities are sometimes qualified as secondary instabilities, we are here not concerned with them. Indeed, these instabilities can be described with the same order parameters and the same amplitude equations as those derived for the description of the first bifurcation. At the opposite, we are focusing on instabilities of hexagons which required for their description the introduction of a new order parameter and a new amplitude equation (i.e. with a new short range wavelength). Example can be found in Faraday experiments [15–17], in parametrically excited spin waves [18], in nonlinear optical pattern forming system [19,20], or in the numerical investigations of the 2D damped Kuramoto–Sivashinski (DKS) equation [21].

* Corresponding author. Tel.: +33-4-92-96-73-29; fax: +33-4-93-65-25-17.
E-mail address: lionel.gil@inln.cnrs.fr (L. Gil).

Apart from the phase instabilities which are not associated with a short range wavelength, all the theoretical investigations that we know on the subject have in common to get full advantage of the experimental and a posteriori knowledge of the wave vectors involved in the secondary instabilities. Roughly speaking, the theoretical approach is always the same [7,9,22]. First, because of non-compactness of the Euclidean symmetry group, mathematicians restrict the space of solutions to the space of bi-periodic functions. Then a complex order parameter is introduced for each wave vector which is experimentally observed either in the first or second bifurcation, and a system of amplitude equations invariant with respect to the symmetries of the problem is derived. Finally equivariant bifurcation theory is used to predict the various possible bifurcations.

Our approach is radically different. The aim of this paper is not to compute the various critical eigenspace associated with the secondary bifurcation, but to address the problem of the prediction of the wave vectors which may be a priori involved in the destabilization of a 2D periodic pattern. Of course, symmetries are strongly involved in the selection mechanism and therefore, the usual symmetry language is employed for their description, but we will never use the group theory results dealing with irreducible representation because we will never try to compute the symmetries and dimensions of the critical eigenspace associated with the secondary bifurcations. For the sake of simplicity, we will restrict ourselves to the particular case of a hexagonal stationary pattern, but the approach can be easily generalized to squares or rhombic stationary patterns. Because of the breakdown of the time translational symmetry, prediction of the wave vectors selection in Faraday's type of experiment is a more complex investigation, and is left to a forthcoming paper.

2. The one-dimensional situation

In order to be more explicit, and to clearly exhibit the difference between the mechanism of wave vector selection due to symmetric and critical eigenspace selection due to the same symmetries (equivariant bifurcation theory), we will first consider the problem of the secondary instabilities of a one-dimensional cellular pattern. This problem has been the subject of a lot of experimental, numerical and theoretical investigations, and we already know the result, i.e. the most commonly observed secondary instability is associated with a spatial period doubling pattern. Let us show how this period doubling is forced by the parity symmetry. Consider the system of partial differential equations

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F_{\mu}(U, \partial x), \quad (1)$$

where $U = U(x, t)$ is a collection of real functions, and μ a set of control parameters. Eq. (1) is assumed to be invariant with respect to space and time translations, and also with respect to parity transformation (\mathcal{P}). We also assume the existence of a stationary periodic solution $U_o(x) = U_o(x + \lambda)$, invariant with respect to parity ($\mathcal{P}U_o = U_o$). Following the analysis of Coulet and Iooss [23] and Gil [24], the solution U is found to be expressed as

$$U(x, t) = U_o(x) + \Re \text{al}(A e^{i(\Omega t - qx)} H(x) + B e^{i(\Omega t + qx)} (\mathcal{P}H)(x) + \text{H.O.T.}), \quad (2)$$

where $H(x)$ is λ periodic, A and B are complex numbers which are assumed to be small compared to U_o close to the threshold of the secondary bifurcation, and where H.O.T. stands for higher order terms in A and B . Normal form equations for A and B are then looked for as Taylor expansion in A, \bar{A}, B and \bar{B} . The time translational invariance ($t, A, B \rightarrow t + \delta t, A e^{i\Omega\delta t}, B e^{i\Omega\delta t}$) and the parity transformation ($x, A, B \rightarrow -x, B, A$) force the amplitudes equations to be expressed as

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= z_1 A + z_2 B + (z_3 |A|^2 + z_4 |B|^2) A + (z_5 |A|^2 + z_6 |B|^2) B + z_7 A^2 \bar{B} + z_8 B^2 \bar{A} + \dots, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= z_1 B + z_2 A + (z_3 |B|^2 + z_4 |A|^2) B + (z_5 |B|^2 + z_6 |A|^2) A + z_7 B^2 \bar{A} + z_8 A^2 \bar{B} + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

where dots stands for higher nonlinear power of A and B . Now comes an important remark. If U_o were invariant with respect to *continuous* space translation (it is of course not the case), then the invariance ($x, A, B \rightarrow x + \delta x, A e^{-iq\delta x}, B e^{iq\delta x}$) would force the coefficients z_2, z_5, z_6, z_7 and z_8 to vanish. We can then conclude that these coefficients are characteristic of the influence of the spatial periodicity of U_o , and that they must be related to the description the strong resonances of a 1D cellular pattern. Then, as A and B are small close to the secondary bifurcation threshold, the linear terms $z_2 B$ and $z_2 A$ are those which must be associated with the strongest resonance. But, these terms are invariant with respect to the discrete spatial translation ($x \rightarrow x + \lambda$) only if $q = (m/2)(2\pi/\lambda)$, where m is an integer. The smallest non-vanishing value of q , i.e. $q = (\pi/\lambda)$ corresponds to the spatial period doubling.

In order to go on analyzing the secondary bifurcation, we now choose a value of q among the selected one, say, for example $q = (1/2)(2\pi/\lambda)$. Eq. (3) is now expressed as

$$\partial_t \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \dots \quad (4)$$

The system of equations is invariant with respect to

$$A, B \rightarrow A e^{i\phi}, B e^{i\phi}, \quad A, B \rightarrow B, A. \quad (5)$$

Group theory results can now be used to analyze (4), and to conclude that the critical eigenmode are either parity invariant $A = B$ or antisymmetric $A = -B$ [23,24] (in this very simple case, the analysis is straightforward).

It is worth noting that the group theory results are absolutely not involved in the first part of the analysis, for the wave vector selection mechanism, but are only used in the second part, to analyze the various critical eigenstates. In the following, we will use the same type of approach in order to investigate the wave vectors involved in the destabilization of a 2D hexagonal pattern. The main difference is that we will limit ourselves only to the first part of the analysis. The second part will not be considered because it has already been the subject of a lot of serious investigations. As a typical example, let us consider the recent article [22] dealing with the secondary instabilities of a hexagonal pattern in the 2D Faraday's experiment. In this paper, thanks to the group theory results, the authors successfully compute the possible critical eigenmodes. However, the wave vectors of the instability are never derived, and the values which are used in their computation are just those reported in the experimental observations.

3. The 2D problem

We consider a two-dimensional system, whose dynamics is ruled by a collection of nonlinear partial differential equations

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F_\mu(U, \partial x, \partial y), \quad (6)$$

where $U = U(x, y, t)$ is a collection of real functions, each number standing for a physical quantity like the temperature, a component of the velocity field or a chemical concentration. F_μ , where μ is a set of parameters, stands for the vector real flow components, and $\partial x, \partial y$ mean that the flow components may depend on the various space derivatives of U .

Some usual symmetry properties are also assumed. We restrict ourselves to systems which are invariant with respect to space and time translations, invariant with respect to space rotation (let us call \mathcal{R}_θ the rotation operator with angle θ), and also with respect to space parity transformation (let $\mathcal{P}_{\vec{v}}$ be the parity operator with respect to \vec{v}). Space and time translational invariances mean that F_μ does not explicitly depend on time (t) and on space (x, y). Rotation and parity invariances imply that if $U(x, y, t)$ is a solution of (6) then $(\mathcal{R}_\theta U)(x, y, t)$ and $(\mathcal{P}_{\vec{v}} U)(x, y, t)$ are also solutions.

We also assume the existence of a parameter range for which (6) possesses a solution U_o , stationary ($U_o(x, y, t) = U_o(x, y)$), λ periodic,

$$U_o(\vec{r} + \vec{a}_i) = U_o(\vec{r}) \quad \text{with } \vec{a}_i = \lambda \begin{pmatrix} \cos\left(i\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(i\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (7)$$

invariant by the parity transformation ($\mathcal{P}_{\vec{a}_i} U_o = U_o$), invariant by the $2\pi/6$ rotation transformation ($\mathcal{R}_{2\pi/6} U_o = U_o$) and dynamically stable with respect to small perturbations (Fig. 1a). It is obvious but important to note that the basic Fourier modes \vec{k}_i involved in the description of U_o are neither parallel to the translation vectors \vec{a}_j nor possess a $(2\pi/\|\vec{a}_j\|)$ length (Fig. 1b),

$$\vec{k}_i = k_0 \begin{pmatrix} \cos\left((2i+1)\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left((2i+1)\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \quad \text{with } i = 0, \dots, 5, \quad \text{and } k_0 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\lambda}.$$

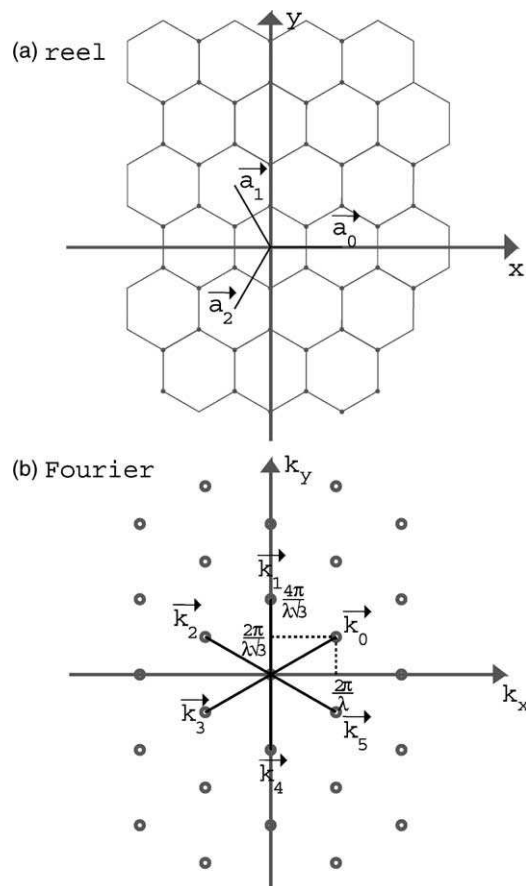


Fig. 1. (a) Schematic plot of a hexagonal pattern. \vec{a}_i correspond to the discrete space translations which leave the pattern unchanged; (b) schematic plot of the wave vectors involved in the description of (a).

By changing the control parameter μ , U_o can become unstable. In order to perform the usual linear stability analysis, we substitute

$$U(x, y, t) = U_o(x, y) + \mathcal{W}(x, y, t)$$

in (6), and obtain, after linearization

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = DF|_{U_o} \mathcal{W}, \quad (8)$$

where $DF|_{U_o}$ stands for the differential of F with respect to U in the neighborhood of U_o . Then, it is crucial to remark that Eq. (8) is $\mathcal{C}_{6v} \times Z^2$ invariant, where \mathcal{C}_{6v} is the symmetry group of the hexagon with generators $\mathcal{R}_{2\pi/6}$ and $\mathcal{P}_{\vec{a}_0}$ and Z^2 is the group of discrete translations generated by \vec{a}_0 and \vec{a}_1 ¹.

4. Bloch–Floquet analysis

At the threshold of the secondary bifurcation, the temporal behavior of \mathcal{W} is expressed as $\mathcal{W}(x, y, t) = \Re\{e^{i\omega t} \psi(x, y)\}$, where ω is vanishing or not, depending on whether the bifurcation is stationary or of Hopf type. The spatial critical eigenmode ψ obeys a linear ordinary differential equation with periodic coefficients. The application of the Bloch–Floquet theorem leads to

$$\psi = e^{(\vec{F} \cdot \vec{r})} \chi(\vec{r}),$$

where $\chi(\vec{r})$, invariant with respect to \vec{a}_0 , \vec{a}_1 and \vec{a}_2 space translations, is a stationary hexagonal pattern, with the same wavelength λ as the basic pattern $U_o(\vec{r})$. The Floquet exponent \vec{F} is purely imaginary ($\vec{F} = i\vec{k}$) because ψ does not diverge to infinity with \vec{r} . Therefore the perturbation \mathcal{W} is expressed as

$$\mathcal{W}_k(\vec{r}, t) = \Re\{e^{i\omega t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \chi(\vec{r})\}. \quad (9)$$

Now we have to remember the symmetry properties of (8) and the fact that if \mathcal{W}_k is a critical eigenmode, then so are $g(\mathcal{W}_k)$, where g is one of the 12 elements of the symmetry group \mathcal{C}_{6v} . With the notation

$$\mathcal{C}_{6v} = \{g_i, i \in [1, 12]\} = \{E, \mathcal{R}_{2\pi/6}, \mathcal{R}_{2\pi/6}^2, \mathcal{R}_{2\pi/6}^3, \mathcal{R}_{2\pi/6}^4, \mathcal{R}_{2\pi/6}^5, \mathcal{P}_{\vec{a}_0}, \mathcal{R}_{2\pi/6} \mathcal{P}_{\vec{a}_0}, \mathcal{R}_{2\pi/6}^2 \mathcal{P}_{\vec{a}_0}, \mathcal{R}_{2\pi/6}^3 \mathcal{P}_{\vec{a}_0}, \mathcal{R}_{2\pi/6}^4 \mathcal{P}_{\vec{a}_0}, \mathcal{R}_{2\pi/6}^5 \mathcal{P}_{\vec{a}_0}\} \quad (10)$$

the long time behavior of the perturbation \mathcal{W} close to the secondary threshold is finally expressed as

$$\mathcal{W}(\vec{r}, t) = \Re\left\{e^{i\omega t} \sum_{i=1}^{12} A_i e^{ig_i(\vec{k}) \cdot \vec{r}} g_i(\chi)(\vec{r})\right\}, \quad (11)$$

and where A_i are just linear complex coefficients of proportionality (Fig. 2). Note the abuse of notation $g_i(\vec{k})$ and $g_i(\chi)$. If we call \mathbf{R}_{2D} (resp. \mathbf{R}_χ) the representation of the group \mathcal{C}_{6v} on the space of linear operators on 2D vectors (resp. on functions χ), then $g_i(\vec{k})$ stands for $\mathbf{R}_{2D}(g_i)(\vec{k})$ and $g_i(\chi)$ for $\mathbf{R}_\chi(g_i)(\chi)$ [25].

At this point, it is worth noting that the previous Bloch–Floquet analysis (11) does not conclude the discussion about the generic secondary instabilities of a 2D stationary hexagonal pattern. We still have no information about the \vec{k} wave vector selected by the dynamics, or about the components (A_1, \dots, A_{12}) whose relative value will govern

¹ Among the huge amount of literature dealing with group theory, we find the book of Hamermesh [25] very accessible for a non-mathematician.

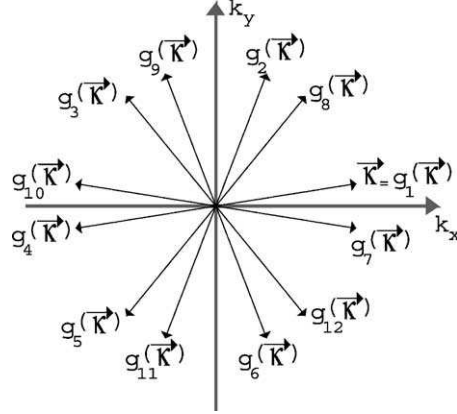


Fig. 2. Schematic plot of the wave vectors involved in the description of the secondary eigenmode.

the parity and rotation symmetry properties of the critical eigenmodes. As usual in normal form theory, we then assume the complex amplitudes A_i to slowly vary with time, and close to the secondary bifurcation threshold, we look for temporal evolution equations as Taylor expansion in A_i and \bar{A}_i ,

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = \sum_{p+q \geq 1} \alpha_{ijpq} A_j^p \bar{A}_j^q. \quad (12)$$

For technical reasons, two cases have to be distinguished depending on whether ω is vanishing or not. In the following, we perform our analysis only for the Hopf situation. However, the stationary case, which is discussed in [Appendix A](#), leads exactly to the same results.

5. Generic Hopf bifurcation of a hexagonal pattern

Because of the time translational invariance ($t \rightarrow t + \delta t$) which forces the system of normal form [equations \(12\)](#) to be invariant under the phase transformation $A_i \rightarrow A_i e^{i\omega \delta t}$, [Eq. \(12\)](#) is expressed as

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = \alpha_{ij} A_j + \text{N.L.T.}, \quad (13)$$

where $\mathcal{M}_H = \{\alpha_{ij}\}$ is a 12×12 complex square matrix, and N.L.T. stands for nonlinear terms. Let us call \mathbf{R}_{12} the representation of \mathcal{C}_{6v} on the space of linear operators from $(A_1, A_2, \dots, A_{12})$ to $(A_1, A_2, \dots, A_{12})$. Then, from the \mathcal{C}_{6v} equivariance of [\(8\)](#) we obtain

$$[\mathcal{M}_H, \mathbf{R}_{12}(\mathcal{R}_{2\pi/6})] = \mathcal{M}_H \mathbf{R}_{12}(\mathcal{R}_{2\pi/6}) - \mathbf{R}_{12}(\mathcal{R}_{2\pi/6}) \mathcal{M}_H = 0, \quad (14)$$

$$[\mathcal{M}_H, \mathbf{R}_{12}(\mathcal{P}_{\vec{a}_0})] = \mathcal{M}_H \mathbf{R}_{12}(\mathcal{P}_{\vec{a}_0}) - \mathbf{R}_{12}(\mathcal{P}_{\vec{a}_0}) \mathcal{M}_H = 0. \quad (15)$$

These two equations strongly reduce the available \mathcal{M}_H matrices. Indeed, instead of 144 (12^2) complex coefficients, the general form of the \mathcal{M}_H (given in [Appendix B](#)) just involves 12 independent complex coefficients. In the following, we will note these 12 complex coefficients m_1, m_2, \dots, m_{12} .

Let us now derive the consequences of the Z^2 equivariance onto the linear operator \mathcal{M}_H . Let $T_{\vec{a}_0}$ (resp. $T_{\vec{a}_1}$) be the translation of vector \vec{a}_0 (resp. \vec{a}_1). Then we get

$$[\mathcal{M}_H, \mathbf{R}_{12}(T_{\vec{a}_0})] = \mathcal{M}_H \mathbf{R}_{12}(T_{\vec{a}_0}) - \mathbf{R}_{12}(T_{\vec{a}_0}) \mathcal{M}_H = 0, \quad (16)$$

$$[\mathcal{M}_H, \mathbf{R}_{12}(T_{\vec{a}_1})] = \mathcal{M}_H \mathbf{R}_{12}(T_{\vec{a}_1}) - \mathbf{R}_{12}(T_{\vec{a}_1}) \mathcal{M}_H = 0. \quad (17)$$

Note that Eqs. (16) and (17) are not independent and that any of them can be derived from the other using (14). It is convenient to introduce the following notations:

$$\vec{\kappa} = \kappa \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad C = e^{i(\kappa/2)\lambda \cos(\theta)}, \quad S = e^{i(\kappa/2)\lambda\sqrt{3} \sin(\theta)} \quad (18)$$

such that (16) is then expressed as (pay attention to the *or* conjunctions):

$$\begin{aligned} m_2 = 0 & \quad \text{or} \quad (C, S) \in \mathcal{S}_2 = \{(1, 1), (-1, -1)\}, \\ m_3 = 0 & \quad \text{or} \quad (C, S) \in \mathcal{S}_3 = \{(1, 1), (e^{2i\pi/3}, 1), (e^{-2i\pi/3}, 1), (-1, -1), (e^{2i\pi/6}, -1), (e^{-2i\pi/6}, -1)\}, \\ m_4 = 0 & \quad \text{or} \quad (C, S) \in \mathcal{S}_4 = \{(1, \pm 1), (i, \pm i), (-1, \pm 1), (-i, \pm i)\}, \\ m_5 = 0 & \quad \text{or} \quad (C, S) \in \mathcal{S}_3, \\ m_6 = 0 & \quad \text{or} \quad (C, S) \in \mathcal{S}_2, \\ m_7 = 0 & \quad \text{or} \quad (C, S) \in \mathcal{S}_7 = \{S = \pm 1\}, \\ m_8 = 0 & \quad \text{or} \quad (C, S) \in \mathcal{S}_8 = \{C = S\}, \\ m_9 = 0 & \quad \text{or} \quad (C, S) \in \mathcal{S}_9 = \{S = C^3\}, \\ m_{10} = 0 & \quad \text{or} \quad (C, S) \in \mathcal{S}_{10} = \{C = \pm 1\}, \\ m_{11} = 0 & \quad \text{or} \quad (C, S) \in \mathcal{S}_{11} = \{SC^3 = 1\}, \\ m_{12} = 0 & \quad \text{or} \quad (C, S) \in \mathcal{S}_{12} = \{SC = 1\}. \end{aligned}$$

Some remarks are in order. First, there is no condition on m_1 . Second, if all the coefficients $(m_2, m_3, \dots, m_{12})$ were vanishing, then Eq. (8) should be invariant with respect to any continuous space translation. It could be the case, for example if $DF|_{U_0}$ does not explicitly depend on U_0 , but this is not a generic situation. Therefore, generically at least one of the $m_{i,i>1}$ coefficients is non-vanishing. Third, as the sets \mathcal{S}_i are not disjointed, several m_i coefficients can be non-vanishing at the same time. For example, if $\{C, S\}$ belongs to \mathcal{S}_2 , then none of the m_i coefficients is forced to vanish.

We are not going to deeply review all the various possibilities. Only some typical cases will be dealt with in detail, but the theoretical approach will be exactly the same for the other situations. Finally, the entire results are summarized in Table 1.

$$(A) \quad (C, S) = (1, 1) \Rightarrow \exists(m, n) \in \mathbf{Z}^2, \quad \kappa_x = \kappa \cos(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda} 2m, \quad \kappa_y = \kappa \sin(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{3}} 2n,$$

which implies $\kappa_{m,n}^2 = k_0^2(3m^2 + n^2)$. For this case, none of the complex coefficients m_2, m_3, \dots, m_{12} is forced to vanish. The corresponding eigenvectors (\mathbf{V}_i) and eigenvalues λ_i of \mathcal{M}_H are given in Appendix C. For the wave vector selection, note that the set $\mathcal{F} = \{\vec{\kappa}_{m,n}, (m, n) \in \mathbf{Z}^2\}$ is not \mathcal{C}_{6v} invariant. However, the relevant Fourier spectrum is one of the perturbation \mathcal{W} , which depends on \mathcal{F} but also on $\chi(\vec{r})$ and on the form of the \mathcal{M}_H critical eigenvectors. Hence, A_1 is associated with the \mathcal{F} spectrum, while A_2 with $g_2(\mathcal{F})$ and A_i with $g_i(\mathcal{F})$. Therefore the spectrum of the critical perturbation \mathcal{W} involves $\bigcup_{i=1}^{i=12} g_i(\mathcal{F})$. The smallest wave vectors correspond to the \vec{k}_i of the primary hexagonal pattern, i.e.

$$\kappa_{\min} = k_0 \quad \text{and} \quad \Delta\theta = 0,$$

Table 1
Wave vectors selection rules

	$\kappa_x/(2\pi/\lambda)$	$\kappa_y/(2\pi/\lambda\sqrt{3})$	κ^2/k_0^2	κ_{\min}/k_0	$\Delta\theta$	Not forced to vanish
I	$2m$	$2n$	$3m^2 + n^2$	1	0	All
II	$2m + 1$	$2n + 1$	$3(m + 1/2)^2 + (n + 1/2)^2$	1	0	
III	$2m + 2/3$	$2n$	$3(m + 1/3)^2 + n^2$	$1/\sqrt{3}$	$\pi/6$	m_1, m_3
IV	$2m - 2/3$	$2n$	$3(m - 1/3)^2 + n^2$	$1/\sqrt{3}$	$\pi/6$	m_5, m_7
V	$2m + 1/3$	$2n + 1$	$3(m + 1/6)^2 + (n + 1/2)^2$	$1/\sqrt{3}$	$\pi/6$	m_9, m_{11}
VI	$2m - 1/3$	$2n + 1$	$3(m - 1/6)^2 + (n + 1/2)^2$	$1/\sqrt{3}$	$\pi/6$	
VII	$2m$	$2n + 1$	$3m^2 + (n + 1/2)^2$	1/2	0	m_4, m_7, m_{10}
VIII	$2m + 1$	$2n$	$3(m + 1/2)^2 + n^2$	$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$	
IX	$2m + 1/2$	$2n + 1/2$	$3(m + 1/4)^2 + (n + 1/4)^2$	1/2	0	m_4, m_8, m_{11}
X	$2m - 1/2$	$2n - 1/2$	$3(m - 1/4)^2 + (n - 1/4)^2$	1/2	0	
XI	$2m + 1/2$	$2n - 1/2$	$3(m + 1/4)^2 + (n - 1/4)^2$	1/2	0	m_4, m_9, m_{12}
XII	$2m - 1/2$	$2n + 1/2$	$3(m - 1/4)^2 + (n + 1/4)^2$	1/2	0	
	Constraint	Not forced to vanish				
XIII	$\kappa_y = (2\pi/\lambda\sqrt{3})(2n)$	m_7				
XIV	$\kappa_y = (2\pi/\lambda\sqrt{3})(2n + 1)$					
XV	$\kappa_y - \kappa_x/\sqrt{3} = k_0m$	m_8				
XVI	$\kappa_y - \kappa_x\sqrt{3} = k_0m$	m_9				
XVII	$\kappa_x = (2\pi/\lambda)(2m)$	m_{10}				
XVIII	$\kappa_x = (2\pi/\lambda)(2m + 1)$					
XIX	$\kappa_y + \sqrt{3}\kappa_x = k_0m$	m_{11}				
XX	$\kappa_y + \kappa_x/\sqrt{3} = k_0m$	m_{12}				

where $\Delta\theta$ is the angle between the primary and the second set of wave vectors.

$$(B) \quad (C, S) = (-1, 1) \Rightarrow \exists(m, n) \in \mathbf{Z}^2, \quad \kappa \cos(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda}(2m + 1), \quad \kappa \sin(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{3}}(2n)$$

with $\kappa_{m,n}^2 = k_0^2[3((1/2) + m)^2 + n^2]$. The complex coefficients m_4, m_7 , and m_{10} are not forced to vanish. The corresponding eigenvectors and eigenvalues of \mathcal{M}_H are given in Appendix D. Assume, for example that λ_3 (see Appendix D) is the critical eigenvalue involved in the secondary instability. There are then three independent critical eigenvectors, invariant by parity, $[1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0]$, $[0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0]$ and $[0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1]$, which can be derived one from the other through a $2\pi/6$ rotation. The Fourier spectrum of each of the previous eigenmodes is not invariant by $\mathcal{R}_{2\pi/6}$, unlike the union of the three spectra. Therefore the Fourier spectrum of the perturbation \mathcal{W} will depend on the nonlinear competition between the three symmetric eigenmodes. If the three modes can coexist with the same amplitude, the final spectrum will be $\mathcal{R}_{2\pi/6}$ invariant, and it will be not in the opposite case. The smallest wave vectors involved in the description of the perturbation \mathcal{W} are characterized by

$$\kappa_{\min} = k_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{and} \quad \Delta\theta = \frac{\pi}{6}.$$

$$(C) \quad S = 1 \Rightarrow \exists n \in \mathbf{Z}, \quad \kappa_y = \kappa \sin(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{3}}(2n).$$

There is no selection rule for the x component of $\vec{\kappa}$. Note, however, that it does not imply that (8) is invariant with respect to continuous space translation along the x -axis. Indeed, in this case, only m_7 is not forced to vanish. The spectrum of \mathcal{M}_H is then highly degenerated (see Appendix E). There are two eigenvalues, each of them being

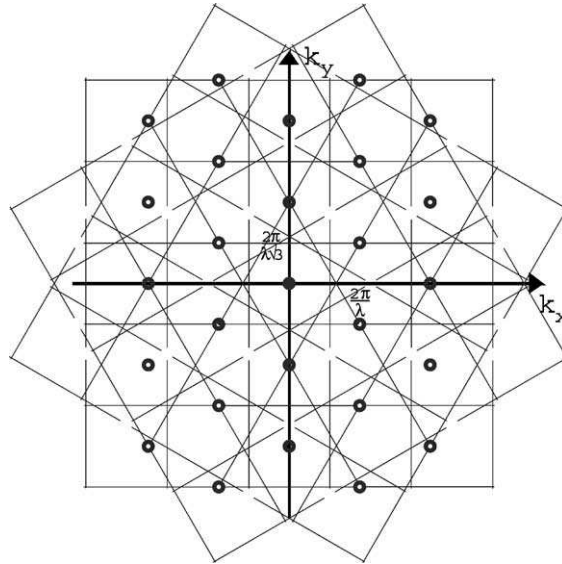


Fig. 3. Fourier spectrum of the perturbation \mathcal{W} for the theoretical case 5 (C) (gray lines). The circles correspond to the wave vectors involved in the description of the primary hexagonal pattern.

associated with six independent eigenvectors. The eigenvectors of a given eigenspace exchange one to each other by $\mathcal{R}_{2\pi/6}$ rotation. One of the eigenvalues, λ_1 , corresponds to the vectors $(A_1, A_2, \dots, A_{12})$ which are invariant by $\mathcal{P}_{\vec{a}_0}$, while the other, λ_2 , to those which are exchanged into their opposite. Fig. 3 displays the wave vectors involved in the description of the perturbation when there is no competition between the critical eigenmodes.

6. Comparison with the experimental and numerical observations

To our best knowledge, there are only two reported observations of a secondary instability of hexagonal stationary patterns (we are not concerned with Faraday’s type of experiments where the hexagonal pattern is not stationary but associated with a standing wave): the numerical simulation of the 2D DKS equation [21], and the observation of 12-fold quasiperiodic structures in an autonomous pattern forming system with continuous rotational symmetry [19,20].

The 2D DKS equation

$$\frac{\partial h}{\partial t} = (\mu - (1 + \vec{\nabla}^2)^2)h + \vec{\nabla} h^2 \quad (19)$$

is involved in a large variety of physical and chemical situations and can be considered as a paradigm in dissipative systems. This equation possesses a homogeneous stationary solution $h = 0$ which becomes unstable to give rise to a stationary hexagonal pattern as soon as μ is positive. Then increasing again μ , another instability takes place and the hexagons become unstable. In this case, numerical study of DKS [21] has reported the emergence of new vectors ($\kappa = k_0/\sqrt{3}$ and $\Delta\theta = \pi/6$), in agreement with our theoretical results (III–VI). Note that, despite the true $\sqrt{3}$ length ratio, the instability has been named period tripling Hopf bifurcation because of the tripling of the spatial period which can be observed along some special directions.

The optical experimental system is built from a nonlinear sodium vapor irradiated by a dye laser and a single mirror. When the input laser intensity is increased from zero, a first bifurcation from the homogeneous state to

a hexagonal structure occurs, giving rise to six spots evenly distributed on a circle in the far field (i.e. Fourier space). Increasing again the input power, a secondary instability takes place, characterized by the appearance of six additional spots in the far field, regularly spaced on the circle of radius 1.120 ± 0.06 times the previous one, and making a $\pi/6$ angle with the previous pattern. It has been also reported that the suppression of the harmonics by the optical filter technique, leads to the disappearance of the secondary instability [19,20].

These experimental features are in good agreement with our results. There are several theoretical candidates. For example case III with $m = -1$ and $n = 0$ predicts the right ($\pi/6$) angle, the right critical wavelength ($\kappa_{\min}/k_0 = 2/\sqrt{3} = 1.155$) and also the right optical filter behavior. We now explain this last point. The wave vectors experimentally involved in the description of the primary hexagonal pattern belong to

$$\mathcal{G}_{\vec{k}_0, \vec{k}_1} = \{n_0 \vec{k}_0 + n_1 \vec{k}_1, (n_0, n_1) \in \mathbf{Z}^2\}, \quad \vec{k}_0 = k_0 \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_1 = k_0 \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \end{pmatrix}.$$

Those involved in the description of a secondary instability of type III belong to $\mathcal{G}_{\vec{p}_0, \vec{p}_1}$ with

$$\vec{p}_0 = \frac{2k_0}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_1 = \frac{2k_0}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}.$$

The intersection $\mathcal{G}_{\vec{k}_0, \vec{k}_1} \cap \mathcal{G}_{\vec{p}_0, \vec{p}_1}$ is not vanishing. The wave vectors which are in common, responsible for the “energy transfer” from the basic pattern to the secondary eigenmode, possess a length higher than $2k_0$. Therefore, an optical filter which stops the wave vector higher than $2k_0$ is expected to prevent the secondary instability from appearing.

6.1. Perspectives

We have reported on the generic secondary instabilities which can affect a hexagonal pattern. Our theoretical results are in agreement with the available experimental observations, but many of the secondary instabilities we predict have not yet been observed experimentally. Especially interesting will be the observation of the predicted continuous wave vectors selection.

More interesting, by analogy with the one-dimensional situation where localized drifting patterns have been experimentally reported and theoretically described [24], we expect the possible observation of 2D localized structures. These localized patterns, either stationary or moving (and perhaps meandering) ought to be the dissipative version of the 2D gap or dark soliton and breather. Our general approach should be able to describe them.

Appendix A. Generic stationary bifurcation of a hexagonal pattern

In this case, Eq. (12) is expressed as

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = \alpha_{ij} A_j + \beta_{ik} \bar{A}_k + \text{N.L.T.}, \quad (\text{A.1})$$

where $\mathcal{M}_S = \{\alpha_{ij}, \beta_{ik}\}$ is now a 24×24 complex square matrix, and N.L.T. stands for nonlinear terms. As in the Hopf case, the symmetry considerations (the \mathcal{C}_{6v} and the discrete space translation invariance) lead to

$$[\mathcal{M}_S, \mathbf{R}_{24}(\mathcal{R}_{2\pi/6})] = [\mathcal{M}_S, \mathbf{R}_{24}(\mathcal{P}_{\vec{a}_0})] = [\mathcal{M}_S, \mathbf{R}_{24}(T_{\vec{a}_0})] = 0,$$

where \mathbf{R}_{24} is the representation of C_{6v} on the space of linear operators from $(A_1, A_2, \dots, A_{12}, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{12})$ to $(A_1, A_2, \dots, A_{12}, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{12})$. The computation goes on as for the Hopf case. Finally, we have found that the stationary problem does not involve new wave vector selection rules, and that only the form of the eigenvectors is changed compared to the Hopf bifurcation.

Now, we want to point out two important remarks. First our analysis contains the usual phase instabilities regimes, as well as the competition between rolls and hexagons. They correspond to case I or case II in the stationary regime ($\omega = 0$). Indeed, for these cases, we predict an instability with the same wave vectors as those of the primary hexagonal pattern. The phase instabilities correspond to slow spatio-temporal variations of the A_i amplitudes while rolls are associated with the predominance of one amplitude over the others. Second, our results predict that squares patterns (with wave vectors on the circle k_0) are never involved in a secondary instability of a hexagonal pattern. Of course, it does not mean that the front between hexagons and square does not exist, just that the unstable manifold of a hexagonal pattern cannot be a square pattern. This remark may be related with the observation that the front between squares and hexagons has to be perpendicular to one of the fundamental mode. The usual explanation involves pinning effects [8]. Our analysis suggest that hexagons would be unstable with respect to rolls, and rolls would be unstable with respect to square pattern.

Appendix B

Because of the rotation and parity symmetry, \mathcal{M}_H is expressed as

$$\mathcal{M}_H = \begin{bmatrix} m1 & m2 & m3 & m4 & m5 & m6 & m7 & m8 & m9 & m10 & m11 & m12 \\ m6 & m1 & m2 & m3 & m4 & m5 & m12 & m7 & m8 & m9 & m10 & m11 \\ m5 & m6 & m1 & m2 & m3 & m4 & m11 & m12 & m7 & m8 & m9 & m10 \\ m4 & m5 & m6 & m1 & m2 & m3 & m10 & m11 & m12 & m7 & m8 & m9 \\ m3 & m4 & m5 & m6 & m1 & m2 & m9 & m10 & m11 & m12 & m7 & m8 \\ m2 & m3 & m4 & m5 & m6 & m1 & m8 & m9 & m10 & m11 & m12 & m7 \\ m7 & m12 & m11 & m10 & m9 & m8 & m1 & m6 & m5 & m4 & m3 & m2 \\ m8 & m7 & m12 & m11 & m10 & m9 & m2 & m1 & m6 & m5 & m4 & m3 \\ m9 & m8 & m7 & m12 & m11 & m10 & m3 & m2 & m1 & m6 & m5 & m4 \\ m10 & m9 & m8 & m7 & m12 & m11 & m4 & m3 & m2 & m1 & m6 & m5 \\ m11 & m10 & m9 & m8 & m7 & m12 & m5 & m4 & m3 & m2 & m1 & m6 \\ m12 & m11 & m10 & m9 & m8 & m7 & m6 & m5 & m4 & m3 & m2 & m1 \end{bmatrix}.$$

Appendix C

When m_2, m_3, \dots, m_{12} are not forced to vanish (i.e. when \mathcal{M}_H is expressed as in Appendix B), the eigenvectors of \mathcal{M}_H belong to one of the six following types:

$$\begin{aligned} V_1 &= (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha), & V_2 &= (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha), \\ V_3 &= (\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha), & V_4 &= (\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha), \\ V_5 &= (\alpha, \beta, -(\alpha + \beta), \alpha, \beta, -(\alpha + \beta), \zeta, \delta, -(\zeta + \delta), \zeta, \delta, -(\zeta + \delta)), \\ V_6 &= (\alpha, \beta, \beta - \alpha, -\alpha, -\beta, -(\beta - \alpha), \zeta, \delta, \delta - \zeta, -\zeta, -\delta, -(\delta - \zeta)), \end{aligned}$$

where ζ and δ depend on α and β . The corresponding eigenvalues can be classified as

λ_1 associated with 1 vector of type V_1 ,

λ_2 associated with 1 vector of type V_2 ,

λ_3 associated with 1 vector of type V_3 ,

λ_4 associated with 1 vector of type V_4 ,

λ_5 associated with 2 vectors of type V_5 ,

λ_6 associated with 2 vectors of type V_5 ,

λ_7 associated with 2 vectors of type V_6 ,

λ_8 associated with 2 vectors of type V_6 .

This repartition is in agreement with the orthogonality relations of the group theory [25].

Appendix D

The spectrum of \mathcal{M}_H is given by

$$\lambda_1 \text{ associated with } \begin{pmatrix} [0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0] \\ [-1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0] \\ [0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1] \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 \text{ associated with } \begin{pmatrix} [0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0] \\ [0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 1] \\ [1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0] \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 \text{ associated with } \begin{pmatrix} [0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0] \\ [1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0] \\ [0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1] \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 \text{ associated with } \begin{pmatrix} [0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0] \\ [0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 1] \\ [1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0] \end{pmatrix}.$$

Appendix E

The spectrum of \mathcal{M}_H is given by

$$\lambda_1 \text{ associated with } \begin{pmatrix} [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0] \\ [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] \\ [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0] \\ [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0] \\ [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] \\ [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1] \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 \text{ associated with } \begin{pmatrix} [-1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] \\ [0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0] \\ [0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0] \\ [0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1] \\ [0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0] \\ [0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0] \end{pmatrix}.$$

References

- [1] M.C. Cross, P.C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* 65 (1993) 851.
- [2] E. Bodenschatz, W. Pesch, G. Ahlers, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 32 (2000) 709.
- [3] P. Kolodner, *Physica D* 37 (1989) 319.
- [4] J.V. Moloney, H.M. Gibbs, *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982) 1607;
G. Grynberg, E. Le Bihan, P. Verkerk, P. Simoneau, J.R.R. Leite, D. Bloch, S. Le Boiteux, M. Ducloy, *Opt. Commun.* 67 (1988) 363.
- [5] V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade, P.D. Kepper, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 2953.
- [6] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer, Berlin, 1989 and 1993.
- [7] E. Buzano, M. Golubitsky, *Philos. Trans. R. Soc. London A* 308 (1983) 617;
M. Golubitsky, J.W. Swift, E. Knobloch, *Physica D* 10 (1984) 249.
- [8] C. Kubstrup, H. Herrero, C. Perez-Garcia, *Phys. Rev. E* 54 (1996) 1560.
- [9] B. Dionne, M. Silber, A.C. Skeldon, *Nonlinearity* 10 (1997) 321.
- [10] A.E. Nuz, A.A. Nepomnyaschy, A.A. Golovin, A.A. Hari, L.M. Pismen, *Physica D* 135 (2000) 233.
- [11] J. Lauzeral, S. Metens, D. Walgraef, *Europhys. Lett.* 24 (1993) 707.
- [12] M. Bestehorn, *Phys. Rev. E* 48 (1993) 3622.
- [13] M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, *Physica D* 74 (1994) 90.
- [14] R.B. Hoyle, *Phys. Rev. E* 61 (2000) 2506.
- [15] B. Christiansen, P. Alstrom, M.T. Levinsen, *Phys. Rev. Lett.* 68 (1992) 2157.
- [16] W.S. Edwards, S. Fauve, *Phys. Rev. E* 47 (1993) R788.
- [17] H. Arbell, J. Fineberg, *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 4384.
- [18] F.J. Elmer, *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993) 2028;
F.J. Elmer, *Phys. Rev. B* 53 (1996) 14323.
- [19] R. Herrero, E.G. Westhoff, A. Aumann, T. Ackemann, Y.A. Logvin, W. Lange, *Phys. Rev. Lett.* 82 (2000) 4627.
- [20] E.G. Westhoff, R. Herrero, T. Ackemann, W. Lange, Self-organized superlattice patterns with two slightly differing wave numbers, *Phys. Rev. Lett.*, submitted for publication.
- [21] I. Daumont, K. Kassner, C. Misbah, A. Valance, *Phys. Rev. E* 55 (6) (1997) 6902.
- [22] A.M. Tse, D.P. Rucklidge, R.B. Hoyle, M. Silber, *Physica D* 146 (2000) 367.
- [23] P. Couillet, G. Iooss, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 866.
- [24] L. Gil, *Europhys. Lett.* 48 (1999) 156;
L. Gil, *Physica D* 147 (2000) 300.
- [25] M. Hamermesh, *Group Theory and Its Application to Physical Problems*, Addison-Wesley.

Transition to Spatiotemporal Chaos in a Two-Dimensional Hydrodynamic System

Christophe Pirat,* Aurore Naso, Jean-Louis Meunier, Philippe Mar"ssa, and Christian Mathis

*Institut du Non Linéaire de Nice (UMR CNRS 6618), Université de Nice Sophia Antipolis,
1361 Route des Lucioles, F-06560 Valbonne, France*

(Received 24 August 2004; published 7 April 2005)

We study the transition to spatiotemporal chaos in a twodimensional hydrodynamic experiment where liquid columns take place in the gravity induced instability of a liquid film. The film is formed below a plane grid which is used as a porous media and is continuously supplied with a controlled flow rate. This system can be either ordered (on a hexagonal structure) or disordered depending on the flow rate. We observe, for the first time in an initially structured state, a subcritical transition to spatiotemporal disorder which arises through spatiotemporal intermittency. Statistics of numbers, creations, and fusions of columns are investigated. We exhibit a critical behavior close to the directed percolation one.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.134502

PACS numbers: 47.52.+j, 47.20.Dr, 68.15.+e, 68.18.Jk

Much effort has been devoted during the last two decades to the investigation of the appearance of disorder and of unpredictability in spatially extended systems. In particular, transition from a laminar to a chaotic state via *spatiotemporal intermittency* (STI) [1] was observed both numerically (coupled map lattices [2,3], partial differential equations [4,5]) and experimentally [6–8] in many one-dimensional systems. In twodimensional (2D) systems transition to chaos via STI starting from some spatially homogeneous laminar states has been studied [9,10]. In 1986, Pomeau proposed [11] that the mechanism of STI could be analogous to directed percolation (DP), a stochastic model of contamination processes which predicts that the fraction of turbulent domains (F_t) evolves as a function of the distance from threshold ε according to a power law ε^β . In this Letter, we study the transition to chaos via STI in a 2D system whose laminar state is a hexagonal lattice of columns of fluid and whose turbulent state is characterized by creations and fusions of columns. Coexistence of laminar and turbulent areas, fluctuating stochastically in space and time, is clearly seen in the direct observation of the system. We propose here to study tracers closely related to the system evolution, such as the number of columns and their creation and fusion rates. These latter tracers enable us to estimate F_t .

We report experimental results on the laminarturbulent transition concerning the dynamics of liquid columns under an horizontal porous plane which is continuously supplied. We track all columns in the grid plane and measure their number, as well as their creations and fusions induced by the dynamics. As in one dimension [12], the system is dynamically characterized by two distinct states: a laminar one and one that exhibits an intrinsic and self-organized disorder. However, the situation is different since the turbulent state appears in our system via STI instead of defectmediated turbulence [13], a mechanism in which one does not observe coexistence of laminar and turbulent patches. Moreover, in our case the two states do not interact without external intervention. The disordered state is much like a thermodynamical state, heated by a

phase turbulencelike noise. The transition from the laminar state to the turbulent one is subcritical and exhibits the characteristic trends of a first order transition including hysteresis and bistability due to competition between coexisting laminar and disordered flows.

The experimental setup, described in [14], consists of a circular and plane steel grid which is used as a porous medium and fixed horizontally at the bottom of a cylindrical tank, filled from above. The incoming fluid produces a uniform and laminar flow through the whole grid at a constant and well controlled rate q which feeds the thin layer underneath the grid. Because of the competition between gravity and surface tension [15], the flow is characterized by a wide variety of spatiotemporal structures. For an increasing flow rate, we can observe drops, liquid columns, and sheets [16]. We focus our attention on the columns regime (see Fig. 1) observed for a viscosity $\nu \gtrsim 40$ cS. It was shown in [14] that a laminar state, characterized by a stationary hexagonal organization with a wavelength λ and induced by a RayleighTaylor (RT) instability with flux, generally exists in a given range of flow rates for each viscosity. At higher values of the driving force, the loss of spatial order associated to a chaotic evolution of the columns positions can be observed.

The flow surface is 200 cm^2 under the grid of thickness 1 mm with circular holes of 1 mm in diameter arranged on a 2 mm regular hexagonal lattice. We have used silicone oil with a viscosity $\nu = 50$ and 100 cS, a density $\rho = 0.97 \text{ g/cm}^3$ and a surface tension $\gamma = 21 \text{ dyn cm}^{-1}$. We present here the results obtained for $\nu = 50$ cS only, but we got qualitatively the same results for a 100 cS viscosity oil. A peripheral lighting allows us to see, from above through the grid, the local variation of the film curvature,

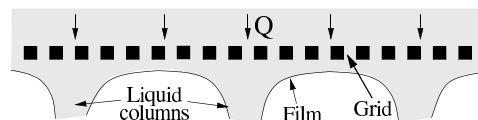


FIG. 1. Schematic drawing of the flow.

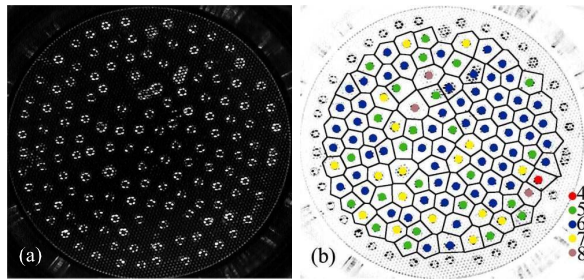


FIG. 2 (color online). (a) A typical frame and (b) its superimposed Voronoi construction. The legend indicates the number of nearest neighbors for each object.

by using the refractive properties of the oil. Liquid columns appear as small bright rings (the objects) [see Fig. 2(a)]. These objects are recorded as time frames at 25 frames/s with a digital CCD camera connected to a computer for video capture and processing. Data were recorded in 32 min long sequences for each flow rate (48 000 pictures, about 7×10^6 objects detected). An *ad hoc* image processing allows us to make an individual detection of the objects, hence to count them and to record their positions for each frame. The results are obtained by treating the data collected for seven flow rates.

The spatiotemporal chaotic state is characterized by a varying number N of columns, all of which have the same size (except in a brief transient during creation and fusion). According to the local instantaneous density of these objects, one can observe a fusion event when two columns meet, combine, and become a single one, or a creation one in a temporary low density area [see Fig. 2(a)]. These two processes both take place all the time, whereas the number of columns fluctuates around a mean value for a given flow rate (i.e., fixed flow rate). At low flow rate, the system is in the laminar state and $N = N_{\text{lam}}$ ($= 169$ in our experiment). We find a critical flow rate $q_c = 31 \pm 2 \text{ cm}^3/\text{s}$ such that this laminar state is stable with respect to external finite size amplitude perturbations if $q < q_c$ and unstable if $q > q_c$, but we have experimental evidence that it is linearly stable in a range of q values. Hence the transition from the laminar to the disordered state appears to be of first order. In the following, we will use the control parameter $\varepsilon =$

$\frac{q - q_c}{q_c}$ and the reduced number N/N_{lam} of liquid columns.

We consider the situation where $\varepsilon > 0$ when the system has left the laminar regime. For increasing ε , the disorder progressively grows using the STI mechanism, the system becoming entirely turbulent for $\varepsilon > \varepsilon_2$ [see Fig. 3(a)]. For $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, the system exhibits bistability between STI [Fig. 3(b)] and a quasilaminar state for which the bulk is stationary and hexagonal and the peripheral columns erratically slide on the boundary, with creations and coalescences mechanisms. This quasilaminar state is due to a competition between the hexagonal order and the geometrical constraint of the circular boundaries.

In order to characterize quantitatively the transition, we first study the statistics of the number N of columns of the system. As a first step, we represent in Fig. 4 the distributions of N/N_{lam} for different values of ε . The bimodal distributions in Figs. 4(b) and 4(c) illustrate the bistability between the quasilaminar state (small peak, large values of N) and the more disordered one (large peak, small values of N). It is also interesting to note that the mean number of objects clearly decreases with increasing ε , and that N is always lower than N_{lam} . The hexagonal organization with a wavelength λ enables the most compact arrangement of the liquid columns allowed in the system. This leads us to assume the existence of a constraint of minimal distance between the objects. We calculate the distribution of the distances between nearest neighbors. It is first necessary to compute the Voronoi construction [17] of the system of columns [see Fig. 2(b)]. In this approach, each nonperipheral liquid column is located in the center of each Voronoi cell. Distributions of distances between nearest neighbors near threshold and in the disordered state are represented in Fig. 5. Independently of the value of ε , almost no pair of columns approaches nearer than 9 mm, whereas very few nearest neighbors are mutually moved away for more than 22 mm. The maximum of probability of their distances is always about 11.5 mm, which is compatible with the wavelength of the perfect hexagonal lattice of columns $\lambda = 11.6 \pm 0.1 \text{ mm}$. The dispersion of the distribution increases with ε . Thus, the hexagonal organization resulting from the competition between gravity and surface tension for null or residual flow rates (RT instability) remains subjacent to the dynamics even in the disordered

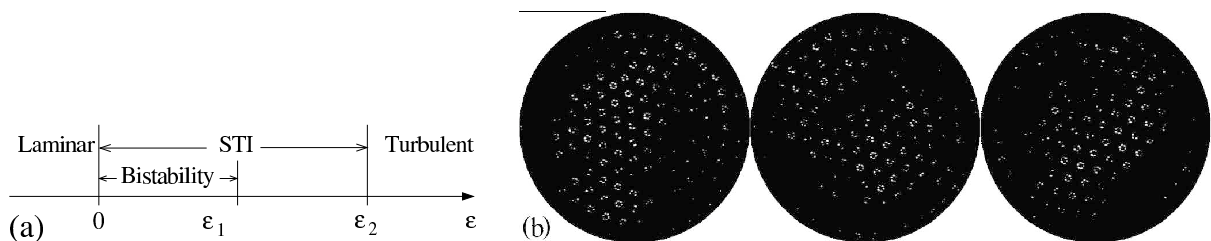


FIG. 3. (a) Schematic phase diagram for a viscosity of 50 cS as a function of the control parameter ε . (b) STI seen at three different times for $\varepsilon = 0.72$: each view is obtained through temporal average over 3 s (75 frames) to distinguish laminar areas (bright objects) from turbulent ones (dark zones).

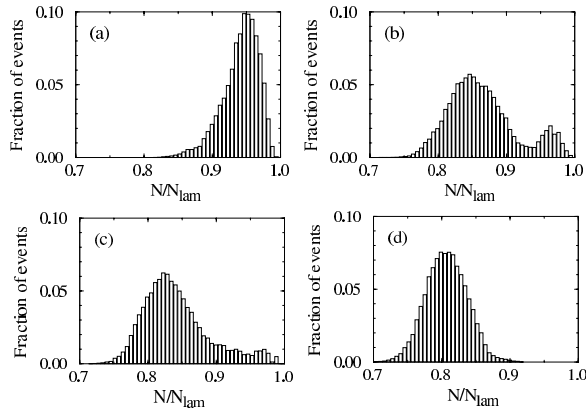


FIG. 4. Distributions of the reduced number N/N_{lam} of liquid columns for $\varepsilon =$ (a) 0.05, (b) 0.21, (c) 0.47, and (d) 0.72 ($N_{\text{lam}} = 169$). For $\varepsilon \geq 0.72$, the distribution remains qualitatively similar but its average decreases with increasing ε .

state. The existence of a minimal distance between the objects can be understood by reminding that two nearby liquid columns strongly attract themselves and combine because of surface tension effects.

We choose $\langle 1 - N/N_{\text{lam}} \rangle$ as an order parameter ($\langle \dots \rangle$ denotes average over time), which enables us to plot the phase diagram of the system (see Fig. 6). In this diagram, the two metastable states are separated by distinguishing the contributions of the two peaks with $N/N_{\text{lam}} = 0.93$ as a cutoff between them, respectively, for $\varepsilon = 0.21$ and $\varepsilon = 0.47$ [see Figs. 4(b) and 4(c)]. For $\varepsilon = 0.05$, it is not possible to separate both states: this regime appears as a mixture of them, the disorder coming essentially from the boundaries, with intermittent incursions (some bursts) towards the center of the system. This order parameter enables a clear determination of the bistability zone.

The N dynamics is governed by the competition between creations and fusions of the columns. This kind of behavior (perpetual creations, moves, and fusions of objects) is reminiscent of that of topological defects [18]. For this reason, we define the mean temporal creation rate in a system with N objects as $\Gamma_+(N) = \langle C_i \rangle_N$ and the fusion one as $\Gamma_-(N) = \langle F_i \rangle_N$, where C_i and F_i are, respectively,

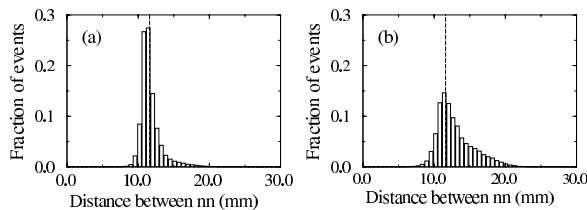


FIG. 5. Distributions of the distances between nearest neighbors for $\varepsilon =$ (a) 0.05 and (b) 0.72. The distribution evolves continuously between both states. The dashed lines indicate the wavelength measured in the stationary lattice: $\lambda = 11.6 \pm 0.1$ mm.

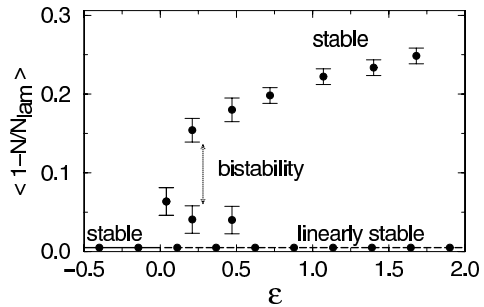


FIG. 6. Phase diagram of the system. The laminar state (line $\langle 1 - N/N_{\text{lam}} \rangle = 0$) is stable for $\varepsilon \leq 0$ and linearly stable for $\varepsilon \geq 0$. After a finite size amplitude perturbation, the system leaves this state and evolves, for ε near threshold between the upper (disordered state with STI) and the lower (quasilaminar state) branch (bistability), and for higher ε on the stable upper branch where the system becomes entirely turbulent for $\varepsilon > \varepsilon_2$.

the creation and fusion numbers between frames i and $i + 1$ and $\langle \dots \rangle_N$ denotes average over all the frames i where the number of columns N_i is N . Here, leaving and entering rates would be null because the objects can only slide on the boundaries. We present the method that we employ and our results: for each time frame, we consider each liquid column, and by comparing its position with those of the columns of the previous time frame ($\Delta t = 1/25$ s), we

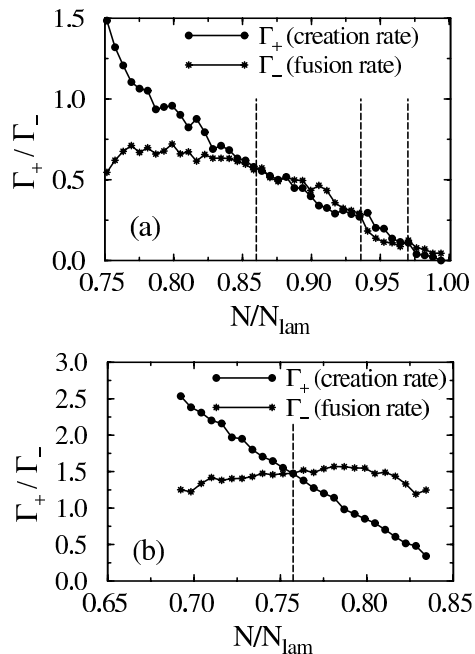


FIG. 7. Creation and fusion rates of liquid columns as a function of N/N_{lam} for $\varepsilon =$ (a) 0.21 (bistability state) and (b) 1.69 (chaotic state). The dashed lines indicate the maxima (thick lines) and the minimum (thin line) of the corresponding N distributions [see Fig. 4(b) and qualitatively Fig. 4(d)].

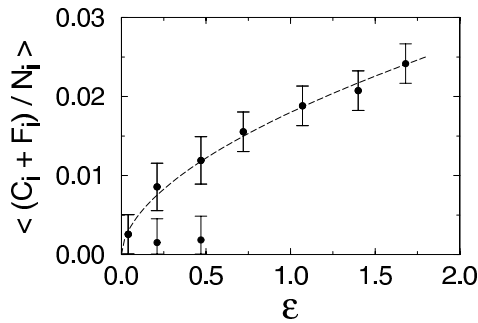


FIG. 8. Temporal average of the fraction of columns creations and fusions as a function of ε .

determine whether this object is a new one (just created), the result of the fusion of two objects (leading to the decrease by one unit), or an object which has moved. The creation and fusion durations are larger than Δt (about 3 to 4 times). The criterion we choose is the following: we calculate the distances between all the objects of the previous frame and the considered one, noting $d_1 < d_2 < d_3 < \dots$. If $d_1 > v_{\max} \Delta t$, then we suppose that the object has been just created; if $d_2 < d_{\min}$, then we suppose that the object is the result of the fusion of two other ones. The values of v_{\max} and d_{\min} have been determined by preliminary tests. The creation and fusion rates are shown as a function of N/N_{lam} on Fig. 7, in two different states. In the disordered state [Fig. 7(b)], the creation rate linearly decreases with N [$\Gamma_+(N) = -\alpha_c N + \beta_c$], which can be easily understood geometrically, whereas the fusion rate slightly linearly increases [$\Gamma_-(N) = \alpha_f N$], except for large values of N (in this case, the role of the boundary constraints becomes more important). The intersection between both straight lines corresponds to the maximum of the N distribution. In the bistability state [Fig. 7(a)], the creation rate has the same behavior as in the disordered state and the fusion rate characterizes first order effects, by crossing 3 times the creation one. These three points of intersection correspond to both the maxima and the minimum of the N distribution.

These creation and fusion numbers can also be associated to another measure of the disorder since they appear only in disordered regions. We have chosen to measure $\langle \frac{C_i + F_i}{N_i} \rangle$, where $\langle \dots \rangle$ denotes temporal average, which gives the mean degree of disorder in the system. In Fig. 8 the evolution of this average as a function of ε is represented. As for $\langle 1 - N/N_{\text{lam}} \rangle$ we have distinguished the two metastable states in the bistability region. The experimental points in the upper branch can be well fitted by a power law whose exponent is equal to 0.56 ± 0.05 . As a first approximation, we consider that, at least near the critical point, the density of creations/fusions is constant into agitated domains in the STI regime. As these quantities are null in the laminar regions, one can suppose that the

mean size of the agitated domains is proportional to the mean number of these events. Within this hypothesis the upper branch in Fig. 8 reflects the qualitative behavior of the mean fraction of disordered domains F_t in the STI regime and the measured exponent is in good agreement with $\beta = 0.58$ obtained from a $(2 + 1)$ D model of DP [19].

Thus, the transition of our system to spatiotemporal chaos has been characterized by means of two different parameters. We have demonstrated the subcritical nature of this transition and, near threshold, the presence of bistability between STI and a quasilinear state. In the STI regime, the turbulent fraction, described in terms of creations/fusions of objects, has been shown to vary according to a power law whose exponent is close to the $(2 + 1)$ D DP one. All these studies have been done for viscosities for which disorder appears by increasing the flow rate, but for other values of the viscosity disorder can only arise by decreasing it [14]. The study of this second behavior and the transition between both will be deferred to a forthcoming publication.

The authors acknowledge helpful discussions with H. Chaté, L. Gil, and A. Pumir.

*Electronic address: Christophe.Pirat@inln.cnrs.fr

- [1] H. Chaté and P. Manneville, in *Turbulence: A Tentative Dictionary*, edited by P. Tabelling and O. Cardoso (Plenum Press, New York, 1995), p. 111.
- [2] K. Kaneko, Prog. Theor. Phys. **74**, 1033 (1985).
- [3] H. Chaté and P. Manneville, Physica (Amsterdam) **32D**, 409 (1988).
- [4] H. Chaté and P. Manneville, Phys. Rev. Lett. **58**, 112 (1987).
- [5] L. Gil, Europhys. Lett. **48**, 156 (1999).
- [6] F. Daviaud, M. Dubois, and P. Bergé, Europhys. Lett. **9**, 441 (1989).
- [7] M. Rabaud, S. Michalland, and Y. Couder, Phys. Rev. Lett. **64**, 184 (1990).
- [8] P. Rupp, R. Richter, and I. Rehberg, Phys. Rev. E **67**, 036209 (2003).
- [9] H. Chaté and P. Manneville, Europhys. Lett. **6**, 591 (1988).
- [10] S. Bottin, F. Daviaud, P. Manneville, and O. Dauchot, Europhys. Lett. **43**, 171 (1998).
- [11] Y. Pomeau, Physica (Amsterdam) **23D**, 3 (1986).
- [12] P. Brunet and L. Limat, Phys. Rev. E **70**, 046207 (2004).
- [13] P. Couillet, L. Gil, and J. Lega, Phys. Rev. Lett. **62**, 1619 (1989).
- [14] C. Pirat, C. Mathis, P. Maïssa, and L. Gil, Phys. Rev. Lett. **92**, 104501 (2004).
- [15] D. Sharp, Physica (Amsterdam) **12D**, 3 (1984).
- [16] <http://www.inln.cnrs.fr/~pirat>
- [17] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf, *Computational Geometry: Algorithms and Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1997).
- [18] L. Gil, J. Lega, and J.L. Meunier, Phys. Rev. A **41**, 1138 (1990).
- [19] H. Hinrichsen, Adv. Phys. **49**, 815 (2000).

Références

Bibliographie

- [1] D.H. Sharp, “An overview of Rayleigh-Taylor instability”, *Physica D*, **12**, 3 (1984).
- [2] Lord Rayleigh, “Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density”, *Proc. Lond. Math. Soc.* **14**, 170 (1883).
- [3] G.I. Taylor, “The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes”, *Proc. Roy. Soc. Lon.* **A201**, 192 (1950).
- [4] V. Mazel, “Structure et dynamique de ruissellement sous un surplomb”, Thèse de l’université de Paris VII (1999).
- [5] P. Brunet “Structure et dynamique non-linéaire de liquide tombant”, Thèse de l’université de Paris VI (2002).
- [6] F. Giorgiutti, “Dynamique d’une allée de colonnes liquides”, Thèse de l’Université de Paris VI (1995).
- [7] F. Giorgiutti, A. Bleton, L. Limat and J. E. Wesfreid, “Dynamics of a one-dimensional array of liquid columns”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 538 (1995).
- [8] F. Giorgiutti and L. Limat, “Solitary dilatation waves in a circular array of liquid columns”, *Physica D* **103**, 590 (1997).
- [9] F. Giorgiutti, L. Limat and J. E. Wesfreid, “Phase diffusion in the vicinity of an oscillatory secondary bifurcation”, *Phys. Rev. E* **57**, 2843 (1998).
- [10] C. Counillon, L. Daudet, T. Podgorski and L. Limat, “Drift modes of a liquid column array under periodic boundary conditions”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2117 (1998).
- [11] G. Toulouse and M. Kléman, “Principles of a classification of defects in ordered media”, *J. Physique Lett.* **37**, L149 (1976).
- [12] N. D. Mermin, “The topological theory of defects in ordered media”, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 591 (1979).
- [13] A. J. Simon, J. Bechhoeffer and A. Libchaber, “Solitary modes and the Eckhaus instability in directional solidification” *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2574 (1988).
- [14] E. Bodenschatz, W. Pesch, G. Ahlers, “Recent Developments in Rayleigh-Bénard Convection” *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 709 (2000).

- [15] P. Kolodner, C.M. Surko, H. Williams, “Dynamics of traveling waves near the onset of convection in binary fluid mixtures” *Physica D* **37**, 319 (1989).
- [16] J.V. Moloney, H.M. Gibbs, “Role of Diffractive Coupling and Self-Focusing or Defocusing in the Dynamical Switching of a Bistable Optical Cavity” *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1607 (1982).
- [17] V. Castets, E. Dulos, J. Boissonnade, P.D. Kepper, “Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern” *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2953 (1990).
- [18] M. Georgelin and A. Pocheau, “Oscillatory instability, limit cycle, and transition to doublets in directional solidification”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2698 (1997).
- [19] M. Ginibre, S. Akamatsu and G. Faivre, “Experimental determination of the stability diagram of a lamellar eutectic growth front”, *Phys. Rev. E* **56**, 780 (1997).
- [20] H. Chaté and P. Manneville, “Transition to turbulence via spatio-temporal intermittency”, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 112 (1987).
- [21] C. Misbah and A. Valence, “Secondary instabilities in the stabilized Kuramoto-Sivashinsky equation”, *Phys. Rev. E* **49**, 166 (1994).
- [22] L. Gil, “Secondary instability of one-dimensional cellular patterns : a gap soliton, black soliton and breather analogy”, *Physica D* **147**, 300 (2000).
- [23] P. Couillet and G. Iooss, “Instabilities of one-dimensional cellular patterns”, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 866 (1990).
- [24] I. Daumont, K. Kassner, C. Misbah and A. Valence, “Cellular self-propulsion of two-dimensional dissipative structures and spatial-period tripling Hopf bifurcation”, *Phys. Rev. E* **55**, 6902,(1997).
- [25] R. Herrero, E.G. Westhoff, A. Aumann, T. Ackemann, Y.A. Lovgin and W. Lange, “Twelvefold quasiperiodic patterns in a nonlinear optical system with continuous rotational symmetry ”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4627 (99).
- [26] B.P. Belousov, dans “Oscillations and traveling waves in chemical systems”, édité par R.J. Field et M. Burger (Wiley, 85).
- [27] A.M. Zhabotinsky, dans “Oscillations and traveling waves in chemical systems”, édité par R.J. Field et M. Burger (Wiley, 85).
- [28] M. Plapp and M. Dejmek, “Stability of hexagonal solidification patterns”, *Europhys. Lett.* **65**, 276 (2004).
- [29] C. Pirat, P Maïssa, C. Mathis et L. Gil, “Structuration bidimensionnelle d’un film visqueux sous gravité déstabilisante avec alimentation continue”, p. 207, Rencontre du non-linéaire 2002, Paris.
- [30] C. Pirat and L. Gil, “Wave vectors selection at the threshold of ageneric instability of a hexagonal stationary pattern”, *Physica D* **179**, 92 (2003).

- [31] C. Pirat, C. Mathis, P. Maïssa and L. Gil, “Structures of a continuously fed two-dimensionnal viscous film under a destabilizing gravitational force”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 104501 (2004).
- [32] C.D. Andereck, S.S. Liu and H.L. Swinney, “Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders”, *J. Fluid Mech.* **164**, 155 (1986).
- [33] S. Ciliberto and P. Bigazzi, “Spatio-temporal intermittency in Rayleigh-Bénard convection”, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 286 (1988)
- [34] M. Dubois, R. Da Silva, F. Daviaud, P. Bergé and A. Petrov, “Collective oscillation mode in a one-dimensional chain of convective rolls”, *Europhys. Lett.* **8**, 135 (1989).
- [35] P. Brunet, J-M Flesselles et L. Limat, “Dérive et chaos spatio-temporel dans la fontaine circulaire”, *Rencontre du non-linéaire 2000*, Paris.
- [36] M. Rabaud, S. Michalland and Y. Couder, “Dynamical regimes of directional viscous fingering : spatiotemporal chaos and wave propagation”, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 184 (1990)
- [37] S. Michalland and R. Rabaud, “Localized phenomena during spatio-temporal intermittency in directional viscous fingering”, *Physica D* **61**, 197 (1992).
- [38] F. Savart, “Mémoire sur le choc d’une veine liquide lancée contre un plan circulaire”, *Ann. de chim.* **54**, 56 (1833).
- [39] J. Boussinesq, “Théorie des expériences de Savart, sur la forme que prend une veine liquide après s’être choquée contre un plan circulaire”, *C.R. Acad. Sci., Paris* **69**, 45 et 128 (1869).
- [40] G.I. Taylor, “The dynamics of thin sheets of fluids. I Water bells. II Waves on fluid sheets. III Disintegration of fluid sheets”, *Proc. Phys. Soc. A* **253**, 289 (1959).
- [41] R. Buckingham and J.W.M. Bush, “Fluid Polygons”, *Gallery of fluid motion*, *Phys. Fluids* (2001).
- [42] P. Brunet, C. Clanet and L. Limat, “Transonic liquid bells”, *Phys. Fluids.* **16**(7), 2668 (2004).
- [43] S.P. Lin and G. Roberts, “Waves in a viscous liquid curtain”, *J. Fluid Mech.* **112**, 443 (1981).
- [44] S.P. Lin, “Stability of a viscous liquid curtain”, *J. Fluid Mech.* **104**, 111 (1981).
- [45] M. Fermigier, L. Limat, J.E. Westfreid, P. Boudinet and C. Quilliet, “Two-dimensional patterns in Rayleigh-Taylor instability of a thin layer”, *J. Fluid Mech.* **236**, 349 (1992).
- [46] W.G. Pritchard, “Instability and chaotic behaviour in a free-surface flow”, *J. Fluid Mech.* **165**, 1 (1986).
- [47] G.M. Carlomagno, in proceedings of the Second AIMETA Congress, Napoli (Italy, 16-19 October 1974), p. 253.

- [48] M.J. Feigenbaum, “Quantitative universality for a class of nonlinear transformations”, *J. Stat. Phys.*, **19**, 25-52 (1978).
- [49] C. Tresser and P. Coulet, “Itérations d’endomorphismes et groupe de renormalisation”, *C. R. Acad. Sci. Paris* **287A**, 577-580 (1978).
- [50] Y. Pomeau and P. Manneville, “Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems”, *Comm. Math. Phys.*, **74(2)**, 189-197 (1980).
- [51] D. Ruelle and F. Takens, “On the nature of turbulence”, *Commun. Math. Phys.* **20**, 167-192 (1971).
- [52] Y. Pomeau, “Front motion, metastability and subcritical bifurcations in hydrodynamics”, *Physica D* **23**, 3-11 (1986).
- [53] P. Coulet, L. Gil, and J. Lega, “Defect-mediated turbulence”, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1619-1622 (1989).
- [54] F. Daviaud, J. Hegseth and P. Bergé, “Subcritical transition to turbulence in plane Couette flow”, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2511-2514 (1992).
- [55] W. Kinzel, “Directed Percolation” dans “Percolation Structures and Processes”, *Ann. Israel. Phys. Soc.* **5**, 425 (1983).
- [56] H. Chaté, P. Manneville, “Spatiotemporal intermittency in coupled map lattices”, *Physica D* **32**, 409-422 (1988).
- [57] N. B. Tufillaro, R. Ramshankar and J. P. Gollub, “Order-Disorder Transition in Capillary Ripples” *Phys. Rev. Lett.* **62**, 422-425 (1989).
- [58] S. Ciliberto, S. Douady and S. Fauve, “Investigating space time Chaos by means of the fluctuations of the driving acceleration”, *Europhysics Lett.* **15**, 23 (1991).
- [59] P. Brunet and L. Limat, “Defects and spatiotemporal disorder in a pattern of falling liquid columns”, *Phys. Rev. E* **70**, 046207 (2004).
- [60] J. Hegseth, C.D. Andereck, F. Hayot and Y. Pomeau, “Spiral Turbulence and Phase Dynamics”, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 257-260 (1989).
- [61] P.W. Colovas and C.D. Andereck, “Turbulent bursting and spatiotemporal intermittency in the counterrotating Taylor-Couette system”, *Phys. Rev. E* **55**, 2736-2741 (1997).
- [62] M. Degen, I. Mutabazi and C.D. Andereck, “Transition to weak turbulence via spatiotemporal intermittency in the Taylor-Dean system”, *Phys. Rev. E* **53**, 3495-3504 (1996).
- [63] F. Daviaud, J. Hegseth and P. Bergé, “Subcritical transition to turbulence in plane Couette flow”, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2511-2514 (1992).
- [64] S. Bottin, “Structures cohérentes et transition vers la turbulence par intermittence spatio-temporelle dans l’écoulement de Couette plan”, Thèse de Doctorat de l’Université de Paris XI (1998).
- [65] O. Dauchot and F. Daviaud, “Finite amplitude perturbation in plane Couette flow”, *Europhys. Lett. Vol.* **28**, 225-230 (1994).

- [66] L.Gil J. Lega and J.L. Meunier, “Statistical proprieties of defect-mediated turbulence”, *Phys. Rev. A* Vol. **41**, 1138-1141 (1990).
- [67] H. Hinrichsen, “Nonequilibrium Critical Phenomena and Phase Transitions into Absorbing States”, *Adv. Phys.* **49**, 815-958 (2000).
- [68] J.W. Leech and D.J. Newman, “How to use groups”, (Science Paperbacks, 1969).
- [69] A. Oron, S.H. Davis and S.G. Bankoff, “Long-scale evolution of thin liquid films”, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 931(1997).

Résumé : Cette thèse présente l'étude de la déstabilisation d'un film d'huile de silicone sous un plan horizontal poreux continûment alimenté.

On observe, en fonction du débit d'alimentation et de la viscosité, une grande richesse de comportements spatio-temporels à travers trois régimes de référence, constitués de gouttes, de colonnes ou de nappes : réseaux hexagonaux centrés, défauts topologiques oscillant ou pas, nappes spiralantes. . .

L'étude théorique de la déstabilisation d'une structure hexagonale menée dans cette thèse permet de prédire tous les vecteurs d'onde possibles de l'instabilité secondaire, en particulier le mode de doublement de période observé dans l'expérience.

L'étude de la transition au chaos spatio-temporel par intermittences, à partir du régime hexagonal et stationnaire de colonnes, est également menée. Selon la viscosité utilisée, la transition est du premier ou du deuxième ordre au sens des systèmes thermodynamiques.

Mots clés : Physique non linéaire, Hydrodynamique, Instabilités interfaciales, Morphogénèse, Structures, Défauts, Désordre, Transitions de phases, Bifurcations, Chaos spatio-temporel

Structures of a continuously fed two-dimensional viscous film under a destabilizing gravitational force

Abstract : This thesis presents the study of the destabilization of a silicone oil film under a porous horizontal plane continuously fed.

By varying the flow rate and the viscosity, we observe a wide variety of spatio-temporal behaviors through three basic regimes built around drops, columns and curtains : centered hexagonal lattices, topological defects oscillating or not, spiral structures. . .

Moreover, the theoretical study of the destabilization of a hexagonal stationary pattern performed here predicts all the possible wave vectors of the secondary instability, and in particular the period doubling mode observed in the experiment.

The study of the transition towards spatiotemporal chaos via intermittency starting from a stationary and hexagonal regime of columns has been performed. Depending on viscosity, the transition is of first or second order in the framework of thermodynamical systems.

Key words : Nonlinear physics, Hydrodynamics, Interface instabilities, Pattern formation, Structures, Defects, Disorder, Phase transitions, Bifurcations, Spatio-temporal chaos

Discipline : Sciences physiques

Université de Nice-Sophia Antipolis
Institut Non Linéaire de Nice — UMR 6618 CNRS
1361, route des Lucioles 06560 Valbonne, France

