



**HAL**  
open science

# Modèles de contours actifs basés régions pour la segmentation d'images et de vidéos

Stéphanie Jehan-Besson

► **To cite this version:**

Stéphanie Jehan-Besson. Modèles de contours actifs basés régions pour la segmentation d'images et de vidéos. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Nice Sophia Antipolis, 2003. Français. NNT : . tel-00089867

**HAL Id: tel-00089867**

**<https://theses.hal.science/tel-00089867>**

Submitted on 24 Aug 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Université de Nice - Sophia Antipolis**  
**UFR SCIENCES**

École Doctorale STIC

## **THÈSE**

Présentée pour obtenir le titre de :  
*Docteur en SCIENCES de l'Université de Nice - Sophia Antipolis*

Spécialité : AUTOMATIQUE, TRAITEMENT DU SIGNAL  
ET DES IMAGES

par

**Stéphanie JEHAN-BESSON**

Équipe d'accueil : CREATIVE - Laboratoire I3S Sophia Antipolis

### **Modèles de contours actifs basés régions pour la segmentation d'images et de vidéos**

Soutenue publiquement au laboratoire I3S  
le 6 Janvier 2003 devant le jury composé de :

M. Vicent CASELLES	CU Matematica Aplicada Barcelone	Rapporteurs
M. Alfred HERO	University of Michigan	
M. Jean-Michel MOREL	CMLA, ENS Cachan	
M. Olivier FAUGERAS	INRIA Sophia Antipolis	Président
M. Michel BARLAUD	Université de Nice	Directeur de thèse
M. Gilles AUBERT	Université de Nice	Co-Directeur de thèse
M. Sherif MAKRAM-EBEID	Philips R&D	Invités
M. Henri SANSON	France Telecom R&D	



*A Manu, pour son soutien inconditionnel durant ces trois années,  
sa présence et son courage indéfectibles dans les moments difficiles,  
A Tilio, pour sa joie de vivre communicative du haut de ses cinq mois,  
et par les yeux de qui les choses simples redeviennent extraordinaires.*



*“Se contenter d’être efficace, c’est ne pas se demander au service de quel  
lendemain est mis l’effort d’aujourd’hui ; c’est trahir sa condition d’homme”.*

*A. Jacquard*



---

## Remerciements

C'est avec beaucoup de plaisir que j'écris ces remerciements car cette thèse a été très riche en rencontres, discussions, amitiés...

En premier lieu, je tiens à remercier les personnes qui m'ont fait l'honneur de participer au jury :

Messieurs Vicent Caselles, Alfred Hero et Jean-Michel Morel pour le soin qu'ils ont porté à la lecture du manuscrit y apportant chacun un éclairage différent.

Monsieur Olivier Faugeras pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

Messieurs Sherif Makram-Ebeid et Henri Sanson pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens ensuite à remercier Monsieur Pierre Bernhard de m'avoir accueillie au sein de l'équipe Images du Laboratoire I3S, et je souhaite exprimer ma reconnaissance aux personnes qui m'ont dirigée au cours de ces trois années :

Monsieur Michel Barlaud, pour la qualité de son encadrement. Il m'a guidée sur le chemin de nombreux thèmes, permis des rencontres et des collaborations très enrichissantes. J'ai pu bénéficier de ses conseils judicieux et de sa vision d'ensemble du domaine. Je le remercie également de la confiance qu'il accorde à ses étudiants et de l'humanité avec laquelle il dirige son équipe.

Monsieur Gilles Aubert, pour son apport notamment théorique à ces travaux, sa grande rigueur et son esprit critique. Je le remercie pour ses lectures minutieuses et ses nombreux conseils qui m'ont permis d'améliorer constamment mes travaux. Je lui suis reconnaissante pour la qualité de son co-encadrement tant du point de vue scientifique qu'humain.

Je désire aussi remercier Messieurs Sherif Makram-Ebeid et Henri Sanson, ainsi que l'ensemble des membres du projet OSIAM : les nombreuses discussions que nous avons eues au sein du projet ont permis de comparer différentes techniques et de réfléchir aux applications envisageables.

Je remercie Monsieur Olivier Faugeras avec qui j'ai eu l'honneur de collaborer pour la rédaction d'un article. Par son érudition dans le domaine et sa vision synthétique, il a beaucoup apporté à ces travaux.

Au-delà des travaux de recherche, cette thèse m'a permis de découvrir le plaisir d'enseigner. A ce titre, je remercie Monsieur Pierre Mathieu d'avoir,



avec beaucoup de gentillesse, accepté d'être mon tuteur dans le cadre du monitorat. J'y associe Mademoiselle Rym Lassoued, Mademoiselle Muriel Gastaud, Monsieur Lionel Brunel et Monsieur Marc Antonini qui ont contribué à la richesse de cet expérience d'enseignement. Je salue enfin mes élèves qui m'ont souvent agréablement surprise par leur grande créativité.

Ces trois années auraient sans doute été bien ternes sans la présence de tous les membres de l'équipe Images. Je tiens à remercier Lionel, mon root boy préféré, puits de sciences Linux pour son aide et sa gentillesse et également pour son hospitalité lors des célèbres fêtes de Carcès. J'adresse mes sincères remerciements à Annabelle et Manuela, mes deux collègues de bureau pour leur bonne humeur et leur soutien. Je remercie Stéphane pour son anti-conformisme et sa gentillesse, Christophe pour sa disponibilité en toutes occasions et puis Muriel, Valery, Frédéric, Frédéric (bis) et Olivier pour leur gentillesse. Je remercie enfin Diane et Johan pour leurs conseils et leurs relectures.

Ces remerciements ne seraient pas complets s'ils n'incluaient pas Micheline Hagnéré pour sa grande disponibilité et son efficacité dans le traitement des dossiers souvent difficiles. Je tenais à mentionner aussi Guy Teissier pour son aide quotidienne.

Pour terminer, je voudrais tout particulièrement exprimer ma gratitude aux personnes qui m'ont soutenue au cours de la dernière année qui fut difficile à bien des égards, et grâce auxquelles j'ai pu mener de front la réalisation de cette thèse et la venue d'un enfant. Je remercie Manu pour son aide continue, mes parents pour leur soutien et leur dévouement constants, Hélène, Mathilde, Maxime et ma famille, Messieurs Michel Barlaud et Gilles Aubert, Annabelle, Lionel, Manuela et Simon et toute l'équipe Images.

Merci à Tilio, notre "lumière du jour" pour ses éclats de rire.

---

# Table des matières

1	INTRODUCTION	1
1.1	De l'imitation vers l'imagination . . . . .	1
1.2	Comment imaginer ? . . . . .	2
1.3	Des solutions pour réaliser l'imaginaire . . . . .	3
1.4	Structurons l'imaginaire . . . . .	4
I	MODÈLES DE CONTOURS ACTIFS BASÉS RÉGIONS	7
2	PRÉSENTATION DU PROBLÈME	9
2.1	Contexte et objectifs . . . . .	9
2.2	Les contours actifs . . . . .	10
2.3	Introduction de critères généraux pour la segmentation . . . . .	11
2.3.1	Introduction des termes contours et des termes régions	12
2.3.2	Exemple de la segmentation en deux régions . . . . .	14
2.4	Les différents points à étudier . . . . .	14
3	LES CONTOURS ACTIFS : ETAT DE L'ART	17
3.1	Remarques préliminaires . . . . .	17
3.2	Les contours actifs basés contours . . . . .	18
3.2.1	Approches variationnelles . . . . .	18
3.2.2	Approches par EDPs . . . . .	21
3.3	Les contours actifs basés régions . . . . .	22
3.3.1	Approches variationnelles avec calcul de l'EDP . . . . .	23
3.3.2	Approches variationnelles sans calcul de l'EDP . . . . .	26
3.4	Les méthodes d'implémentation . . . . .	27
3.4.1	Présentation de la méthode des ensembles de niveaux . . . . .	28
3.4.2	Calcul de l'équation d'évolution avec la fonction $U$ . . . . .	30
3.4.3	Réinitialisation de la fonction distance . . . . .	31
3.4.4	Techniques rapides . . . . .	31
3.4.5	Perspectives . . . . .	32
3.5	Conclusion . . . . .	32

4	MODÈLES DE CONTOURS ACTIFS BASÉS RÉGIONS	33
4.1	Introduction . . . . .	33
4.1.1	Difficulté 1 : Calcul de la partition optimale . . . . .	34
4.1.2	Difficulté 2 : Les descripteurs région-dépendants . . . . .	35
4.2	Outils de dérivation de domaines . . . . .	36
4.2.1	Introduction d'un schéma dynamique . . . . .	36
4.2.2	Outils de dérivation . . . . .	37
4.3	Dérivation des termes basés régions . . . . .	41
4.3.1	Cas des descripteurs région-indépendants . . . . .	41
4.3.2	Cas général . . . . .	42
4.4	Dérivation des termes basés contours . . . . .	49
4.4.1	Calcul de la dérivée Eulérienne . . . . .	50
4.4.2	Calcul de l'équation d'évolution . . . . .	50
4.5	Modèle pour la segmentation en deux régions . . . . .	50
4.5.1	Cas des descripteurs région-indépendants . . . . .	51
4.5.2	Cas Général . . . . .	52
4.6	Comparaison avec les méthodes de dérivation classiques . . . . .	54
4.6.1	Equivalence termes régions, termes contours . . . . .	55
4.6.2	Dérivation des termes basés région . . . . .	57
4.6.3	Comparaison des méthodes . . . . .	63
4.7	Implémentation avec la méthode des ensembles de niveaux . . . . .	63
4.8	Conclusion . . . . .	65
4.8.1	Difficulté 1 : Solution proposée . . . . .	65
4.8.2	Difficulté 2 : Solution proposée . . . . .	65
II	APPLICATIONS	67
5	EXTRACTION DE RÉGIONS HOMOGENES D'INTÉRÊT	69
5.1	Introduction . . . . .	69
5.2	Relation entre l'entropie et le determinant de la matrice de covariance . . . . .	71
5.3	Descripteurs pour les images à niveaux de gris . . . . .	72
5.3.1	Descripteurs utilisant la variance . . . . .	72
5.3.2	Résultats expérimentaux . . . . .	73
5.4	Descripteurs pour les images couleur . . . . .	76
5.4.1	Descripteurs utilisant le déterminant de la matrice de covariance . . . . .	78
5.4.2	Descripteurs utilisant le produit des variances . . . . .	78
5.4.3	Résultats expérimentaux . . . . .	79
5.5	Conclusion . . . . .	90

6	SEGMENTATION À L'AIDE D'HISTOGRAMMES	95
6.1	Introduction . . . . .	95
6.2	Minimisation de la distance entre histogrammes . . . . .	96
6.2.1	Estimation de l'histogramme sur une région . . . . .	96
6.2.2	Distance entre deux histogrammes . . . . .	96
6.2.3	Calcul de la dérivée Eulérienne . . . . .	97
6.3	Application à la compétition entre régions . . . . .	99
6.3.1	Calcul de la dérivée Eulérienne . . . . .	100
6.3.2	Calcul de l'équation d'évolution du contour actif . . .	100
6.4	Résultats expérimentaux . . . . .	101
6.5	Conclusion . . . . .	108
7	DÉTECTION D'OBJETS VIDÉOS	113
7.1	Introduction . . . . .	115
7.1.1	Les notions utilisées . . . . .	115
7.1.2	Les techniques de segmentation de séquences vidéo . .	117
7.1.3	Les différents critères envisageables . . . . .	119
7.2	Estimation robuste : rappels . . . . .	120
7.3	Critères temporels avec estimation du fond . . . . .	121
7.3.1	Estimation du fond de la séquence . . . . .	122
7.3.2	Descripteurs utilisés . . . . .	123
7.3.3	Résultats expérimentaux . . . . .	124
7.4	Critères temporels avec compensation du mouvement . . . . .	126
7.4.1	Compensation du mouvement de la caméra . . . . .	126
7.4.2	Descripteurs utilisés . . . . .	129
7.4.3	Résultats expérimentaux . . . . .	131
7.5	Critères spatiaux . . . . .	136
7.5.1	Descripteurs utilisant le gradient . . . . .	136
7.5.2	Descripteurs utilisant les régions de couleur homogène	139
7.6	Combinaison de critères . . . . .	142
7.6.1	Résultats expérimentaux . . . . .	142
7.7	Evaluation des résultats . . . . .	142
7.8	Conclusion . . . . .	149
III	CONCLUSION	151
IV	ANNEXES	157
A	EQUATION D'ÉVOLUTION AVEC LA MATRICE DE COVARIANCE	159



---

## Table des figures

2.1	Evolution du contour actif $\Gamma(\tau)$ en direction des bords de l'objet à segmenter avec la vitesse $\mathbf{v}$ . . . . .	11
2.2	Une région $\Omega$ de $\mathcal{R}^2$ et son contour $\Gamma$ orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre . . . . .	12
2.3	Décomposition de l'image en deux régions dans $\mathcal{R}^2$ . . . . .	15
3.1	Fonction distance signée au contour $\Gamma$ . . . . .	29
3.2	Bande étroite autour de l'isocontour 0 de $U$ . . . . .	31
4.1	Double dépendance à la région des termes basés régions . . . . .	35
4.2	Le double sens de propagation des contours actifs basés régions . . . . .	52
5.1	Figures a,b,c : Evolution du contour actif régie par l'EDP (5.4) incluant les termes additionnels. Figures d,e,f : Visualisation de l'amplitude de la vitesse correspondante $F$ normalisée entre 0 et 255 (sans le flot de régularisation $\lambda\kappa$ ). . . . .	75
5.2	Evolution de la moyenne intérieure $\mu(\Omega_{in})$ et extérieure $\mu(\Omega_{out})$ en fonction du nombre d'itérations d'évolution du contour actif avec l'EDP (5.4). . . . .	75
5.3	Evolution de la variance intérieure $\sigma^2(\Omega_{in})$ et extérieure $\sigma^2(\Omega_{out})$ en fonction du nombre d'itérations d'évolution du contour actif avec l'EDP (5.4). . . . .	76
5.4	Figures a,b,c : Evolution du contour actif gérée par l'EDP (5.5) n'incluant pas les termes additionnels. Figures d,e,f : Visualisation de l'amplitude de la vitesse correspondante $F$ sans le terme de régularisation $\lambda\kappa$ et n'incluant pas les termes additionnels (normalisée de telle sorte que $\max_{\tau}(F) = 255$ ). . . . .	77
5.5	Comparaison de l'amplitude de la vitesse initiale $F$ (sans les termes de lissage), calculée en utilisant la variance (figure b), le produit des variances (figure c) et de celle calculée en utilisant le déterminant de la matrice de covariance (figure d) pour le même contour initial (figure a). . . . .	80

5.6	Evolution du contour à partir du contour initial (a) en utilisant l'équation d'évolution avec les descripteurs basés sur le produit des variances ( $\lambda = 15$ ). . . . .	81
5.7	Evolution du contour à partir du contour initial (a) en utilisant l'équation d'évolution avec les descripteurs basés sur le déterminant de la matrice de covariance ( $\lambda = 15$ ). . . . .	82
5.8	Evolution du contour à partir du contour initial (a) en utilisant l'équation d'évolution (5.10) ne prenant pas en compte les termes additifs issus du déterminant de la matrice de covariance ( $\lambda = 15$ ). . . . .	83
5.9	Evolution de l'entropie de l'objet $S(\Omega_{in})$ et de celle du fond $S(\Omega_{out})$ estimées par la relation (5.2) en fonction du nombre d'itérations d'évolution du contour actif avec l'EDP (5.7) pour l'image Erik. . . . .	84
5.10	Evolution des moyennes en fonction du nombre d'itérations avec l'EDP (5.7) pour l'image Erik. . . . .	85
5.11	Evolution des variances pour les régions $\Omega_{in}$ et $\Omega_{out}$ en fonction du nombre d'itérations avec l'EDP (5.7) pour l'image Erik. . . . .	86
5.12	Evolution du contour à partir du contour initial (a) en utilisant l'équation d'évolution avec les descripteurs basés sur le produit des variances ( $\lambda = 20$ ). . . . .	87
5.13	Evolution du contour à partir du contour initial (a) en utilisant l'équation d'évolution avec les descripteurs basés sur le produit des variances ( $\lambda = 15$ ). . . . .	88
5.14	Evolution du contour à partir du contour initial (a) en utilisant l'équation d'évolution avec les descripteurs basés sur le produit des variances ( $\lambda = 0$ ). . . . .	89
5.15	Segmentation du visage sur la séquence vidéo "Akiyo" (Contour final et objet isolé). . . . .	91
5.16	Segmentation du visage sur la séquence vidéo "Erik" (Contour final et objet isolé). . . . .	92
6.1	Segmentation de référence et les deux histogrammes de référence résultants, $q_{in}$ , en rouge pour le visage, et $q_{out}$ en vert pour la fond (l'intensité de la couleur est proportionnelle à la valeur de l'histogramme). . . . .	103
6.2	Evolution du contour actif sur l'image courante en utilisant les deux histogrammes de référence ( $\lambda = 10$ ). . . . .	104
6.3	Evolution de l'histogramme de la région $\Omega_{in}$ avec l'évolution du contour actif. . . . .	105
6.4	Evolution de l'histogramme de la région $\Omega_{out}$ avec l'évolution du contour actif. . . . .	106
6.5	Comparaison de l'histogramme de référence de la région $\Omega_{in}$ , $q_{in}$ , avec l'histogramme final de la région $\Omega_{in}$ , $\hat{q}(\alpha, \Omega_{in})$ . . . . .	107

6.6	Comparaison de l'histogramme de référence de la région $\Omega_{out}$ , $q_{out}$ , avec l'histogramme final de la région $\Omega_{out}$ , $\hat{q}(\alpha, \Omega_{out})$ . . . . .	107
6.7	Segmentation de référence et les deux histogrammes de référence résultants, $q_{in}$ , en rouge pour le visage, et $q_{out}$ en vert pour la fond (l'intensité de la couleur est proportionnelle à la valeur de l'histogramme). . . . .	109
6.8	Evolution du contour actif sur l'image courante en utilisant les deux histogrammes de référence et la distance de Hellinger ( $\lambda = 20$ ). . . . .	110
6.9	Evolution de l'histogramme de la région $\Omega_{in}$ avec l'évolution du contour actif pour "Akiyo". . . . .	111
7.1	Décomposition de l'image $n$ de la séquence . . . . .	114
7.2	Décomposition de la séquence en objets vidéo . . . . .	116
7.3	L'estimateur de Geman et Mc Lure . . . . .	122
7.4	Fond estimé pour une image de la séquence "Akiyo", avec $n_B = 20$ (figure a), et amplitude de la vitesse correspondante sans les termes de lissage (figure b). . . . .	124
7.5	Evolution du contour actif sur une image de la séquence "Akiyo".	125
7.6	Contour final obtenu pour une image de la séquence "Akiyo" (figure a), et l'objet isolé correspondant (figure b). . . . .	126
7.7	Résultats obtenus pour la séquence "Akiyo". . . . .	127
7.8	Estimation "backward" des vecteurs mouvement par mise en correspondance de blocs . . . . .	128
7.9	Projection de l'image $I_{n-1}$ dans le référentiel de l'image $I_n$ . . . . .	130
7.10	La séquence "Coastguard". . . . .	131
7.11	Amplitude de la vitesse sans compensation du mouvement de la caméra (figure a) et avec compensation du mouvement de la caméra (figure b) pour une image de la séquence "Coastguard", avec $\alpha_2 = 9$ (figure a). . . . .	132
7.12	Evolution du contour actif sur une image de la séquence "Coastguard". . . . .	132
7.13	Contour final obtenu pour la première image de la séquence "Coastguard" (figure a), et l'objet isolé correspondant (figure b). . . . .	132
7.14	Résultats obtenus pour la séquence "Coastguard". . . . .	133
7.15	La séquence "Edberg". . . . .	134
7.16	Amplitude de la vitesse sans compensation du mouvement de la caméra (figure a) et avec compensation du mouvement de la caméra (figure b) pour une image de la séquence "Edberg"( $\alpha_2 = 6$ ). . . . .	134



7.17	Amplitude de la vitesse sans compensation du mouvement de la caméra (figure a) et avec compensation du mouvement de la caméra (figure b) pour une image de la séquence "Edberg" ( $\alpha_2 = 15$ ). . . . .	135
7.18	Contour final obtenu pour la première image de la séquence "Edberg" (figure a), et l'objet isolé correspondant (figure b) pour $\alpha_2 = 15$ et $\lambda = 25$ . . . . .	135
7.19	Principe de l'algorithme "coarse to fine" . . . . .	137
7.20	Evolution du contour lors de l'algorithme "coarse to fine" . . .	138
7.21	Résultats obtenus pour la séquence "Edberg". . . . .	139
7.22	Principe de la segmentation spatiale utilisant la décomposition de l'image en régions homogènes . . . . .	140
7.23	Principe de l'algorithme "3 étapes" . . . . .	143
7.24	"Mother and Daughter", Algorithme "3 étapes" . . . . .	144
7.25	Contours finaux obtenus pour la séquence "Mother and Daughter" avec l'algorithme "3 étapes". . . . .	145
7.26	Objets isolés obtenus pour la séquence "Mother and Daughter" avec l'algorithme "3 étapes". . . . .	146
7.27	Résultats de distorsion pour "Akiyo" . . . . .	148
7.28	Résultats de distorsion pour "Coastguard" . . . . .	148

---

# Notations

## NOTATIONS PRINCIPALES

- × Les vecteurs et les matrices sont représentés par des caractères gras.
- × Soit une matrice  $\mathbf{A}$ , on note  $\mathbf{A}^T$  la transposée de cette matrice. Le déterminant de  $\mathbf{A}$  est noté  $\det(\mathbf{A})$ , sa trace  $\text{Trace}(\mathbf{A})$ .
- × Soit un vecteur  $\mathbf{v}$ , on note  $\mathbf{v}^\perp$  le vecteur orthogonal à  $\mathbf{v}$ .
- ×  $\nabla = [\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}]^T$  est l'opérateur gradient.
- × La plupart du temps, les images sont représentées par des fonctions continues même s'il s'agit d'images qui, en pratique, renvoient à des notions discrètes. On représentera par la fonction continue  $\mathbf{I} : \Omega_I \rightarrow \mathcal{R}^m$ , l'intensité lumineuse associée à chaque pixel de l'image, avec  $\Omega_I$  un ensemble de  $\mathcal{R}^n$  représentant le support de l'image. On notera  $\mathbf{I}(\mathbf{x})$  la valeur de  $\mathbf{I}$  au point  $\mathbf{x} \in \Omega_I$ .
- × Pour des images couleur,  $m = 3$ , l'intensité est représentée par une fonction  $\mathbf{I} : \Omega_I \rightarrow \mathcal{R}^m$  où  $\mathbf{I} = [I^1, I^2, I^3]^T$ . Pour des images à niveaux de gris,  $m = 1$ , on notera alors l'intensité de l'image par  $I$ .
- × Pour les séquences d'images, chaque image est représentée par une fonction  $\mathbf{I}_n : \Omega_I \rightarrow \mathcal{R}^3$ , où  $\mathbf{I}_n(\mathbf{x}) = [I_n^1(\mathbf{x}), I_n^2(\mathbf{x}), I_n^3(\mathbf{x})]^T$  représente l'intensité de l'image  $n$  de la séquence avec  $n \in [0, N]$ , pour le pixel  $\mathbf{x}$ .
- × Soit  $\Gamma(p) : [a, b] \in \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^2$  une famille de courbes fermées paramétrées par  $p$ , nous noterons  $\mathbf{T}$  la tangente unitaire à la courbe,  $\mathbf{N}$  le vecteur normal intérieur et  $\kappa$  la courbure euclidienne en  $p$ . Le contour sera orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Une des paramétrisations possible du contour est l'abscisse curviligne, notée  $s$  définie de telle manière que  $|\Gamma'(s)| = 1$ . Dans ce cas, le contour  $\Gamma(s)$  est défini sur  $[0, L]$  où  $L$  est la longueur de la courbe.

## ACRONYMES ET ABRÉVIATIONS

- × EDP : Equations aux dérivées partielles
- × MPEG : *Moving Picture Expert Group* - Groupe d'experts chargés de mettre au point un format de compression vidéo
- × COST211 : *European COST211 Group - Research on Redundancy Reduction Techniques and Content Analysis for Multimedia Services* - Groupe de recherche européen sur les techniques de réduction des redondances temporelles et l'analyse du contenu pour les services multimédia
- × RNRT : Réseau National de la Recherche en Télécommunications
- × OSIAM : Projet du RNRT, Outils pour la Segmentation d'Images Animés pour MPEG4/7

# Introduction

### 1.1 DE L'IMITATION VERS L'IMAGINATION

Le mot image vient du latin *imago*, qui signifie imiter. Les images sont des imitations du réel, des projections dans le plan d'un monde en trois dimensions, voire quatre lorsque l'on considère la composante temporelle. L'une des analyses possibles des images consiste en la segmentation de ces projections, soit le partitionnement de l'image en régions ou en objets. Dès lors où nous analysons une image pour la segmenter, nous passons de l'imitation à l'imagination puisque l'objet segmenté peut alors être retiré de son contexte, mis dans un autre, imaginé ailleurs. "Segmenter c'est imaginer". Ceci laisse entrevoir la complexité de la tâche à accomplir avec les seuls outils mathématiques.

Pourquoi est-il donc si difficile de traduire par des équations une opération simple pour le cerveau humain ? Sans doute parce que, comme cela a été précisé par M. Merleau-Ponty dans la théorie de la forme, le cerveau appréhende d'abord un objet dans sa globalité. Nous voyons un arbre avant d'en distinguer les feuilles, la saison qu'elles évoquent, l'espèce à laquelle il appartient... Contrairement à cela, lorsque nous traitons une image, le premier outil utilisable est l'information pixellique. Nous disposons de la couleur de chaque pixel comme donnée essentielle.

Utilisant cette donnée, l'une des opérations les plus élémentaires à réaliser (ce qui ne signifie pas pour autant qu'elle soit techniquement simple) est la partition de l'image en régions de couleur homogènes. Ensuite vient la segmentation de régions d'intérêt, comme le visage humain qui n'est pas de couleur homogène au sens strict du terme. Enfin, en dernier sur l'échelle de la complexité, vient la segmentation en objets sémantiques : découper dans l'image un personnage, une voiture, un arbre. Ceux-ci peuvent alors être extraits de leur contexte, imaginés dans une autre scène comme c'est le cas en post-production cinématographique, ouvrant alors les portes de l'interactivité des nouveaux standards de compression MPEG4 ou MPEG7. De la segmentation en régions à la segmentation en objets, de nombreux progrès restent à faire en traitement d'images pour relever ces défis ou du

moins trouver des solutions pour des applications spécifiques.

Afin de réaliser ces opérations, certains ont imaginé les contours actifs, contours fictifs qui vont évoluer sur l'image à partir d'un contour initial donné en direction des bords de l'objet à détecter. Ils vont se déformer pour épouser la forme considérée tout en permettant l'utilisation de contraintes géométriques faisant intervenir la longueur ou la courbure du contour. On distingue ici les contours actifs basés contours qui tiennent compte uniquement d'une information locale sur le contour et qui furent les premiers introduits, et les contours actifs que nous appellerons "contours actifs basés régions" qui tiennent également compte d'informations globales sur les régions. Ceux-ci apparaissent comme des outils pertinents pour la segmentation permettant de regrouper dans une entité des éléments (pixels, régions) de mêmes caractéristiques, que cette entité soit délimitée ou non par un contour. L'évolution des contours actifs est dirigée par des équations aux dérivées partielles (EDPs) dites géométriques. Depuis leur introduction pour la restauration d'images, l'utilisation des EDPs s'est beaucoup développée et elles apparaissent de nos jours comme l'un des outils clés du traitement d'images que ce soit pour la restauration, la segmentation, l'analyse du mouvement ou la reconstruction 3D.

La manière la plus rigoureuse d'obtenir ces équations aux dérivées partielles pour résoudre un problème donné est sans doute d'exprimer tout d'abord ce problème sous une forme variationnelle en introduisant une fonctionnelle à minimiser, puis de déduire de cette fonctionnelle l'équation d'évolution du contour. Dans le cadre de la segmentation, il est intéressant de minimiser une combinaison de termes sur la région considérée, caractérisant son homogénéité en terme de couleur par exemple, en plus des termes classiques sur les contours. Cela nous conduit à considérer les objectifs principaux de l'étude.

## 1.2 COMMENT IMAGINER ?

"Segmenter c'est imaginer", comment dès lors imaginer en utilisant les contours actifs ? Notre objectif est d'apporter une contribution méthodologique à la segmentation d'images et de vidéos utilisant des équations aux dérivées partielles géométriques. Nous souhaitons clarifier les méthodes d'obtention de l'équation d'évolution d'un contour actif à partir d'une fonctionnelle générale à minimiser incluant des termes sur les domaines à segmenter et des termes sur les contours. Nous voulons de cette façon élaborer des modèles pour la segmentation d'images et de vidéo par contours actifs dits "basés régions". La partie applicative aura pour objectif d'attester la validité des modèles introduits sur des exemples concrets.

### 1.3 DES SOLUTIONS POUR RÉALISER L'IMAGINAIRE

Pour “imaginer” efficacement, nous proposons les contributions suivantes. Notre contribution principale concerne l'élaboration de modèles de contours actifs basés régions pour la segmentation d'images et de vidéos. Qu'entendons-nous ici par “élaboration de modèles” ? Nous partons d'une fonctionnelle générale à minimiser composée d'intégrales sur les domaines considérés ainsi que sur le contour. Dans ce cadre, nous appellerons *descripteur* la fonction caractérisant une région ou son contour. Un descripteur d'une région de couleur homogène peut être, par exemple, sa variance. Un autre descripteur peut être la distance de l'histogramme de la région considérée à un histogramme de référence. La dérivation de cette fonctionnelle permet d'obtenir l'équation d'évolution d'un contour actif qualifié de “contour actif basé région” en raison des intégrales de domaines présentes dans la fonctionnelle. A ce stade, nos contributions sont alors les suivantes :

- ▶ Nous proposons l'utilisation des outils de dérivation de domaines pour la dérivation de fonctionnelles composées d'intégrales de domaines et d'intégrales de contour. Nous déduisons de cette dérivée appelée *Eulérienne* l'équation d'évolution résultante du contour actif basé région. Ces outils s'avèrent être pertinents et naturels pour la dérivation considérée bien que très peu utilisés jusqu'ici pour le traitement d'images
- ▶ Nous distinguons deux types de descripteurs : les descripteurs dépendant de la région et les descripteurs indépendant de la région et nous montrons que la dépendance des descripteurs avec la région doit être prise en compte lors de la dérivation. Comme descripteurs dépendant de la région, on peut citer l'exemple des descripteurs statistiques attachés à la région tels que la moyenne, la variance ou l'histogramme d'une région. La valeur de ces descripteurs est attachée à la région délimitée par le contour, et va donc évoluer avec la propagation de ce dernier. Des modèles de descripteurs dépendant de la région sont proposés afin de présenter une méthodologie de calcul de l'équation d'évolution résultante. Nous montrons que la dépendance des descripteurs avec la région induit des termes additifs dans l'équation d'évolution par rapport aux descripteurs indépendant de la région. L'importance des ces termes additifs est appuyée par des résultats expérimentaux.

Les modèles introduits sont ensuite mis en œuvre pour des applications de segmentation. Des descripteurs sont proposés et l'importance des termes additifs est montrée. Nous proposons trois ensembles de descripteurs :

- ▶ Nous proposons tout d'abord des descripteurs statistiques basés

sur la variance et le déterminant de la matrice de covariance pour la segmentation de régions homogènes d'intérêt comme le visage. En effet, nous cherchons à minimiser l'entropie de ces régions et celle-ci peut être exprimée en fonction des descripteurs choisis. Ces descripteurs sont estimés de manière jointe à la segmentation puisqu'ils évoluent au cours de la propagation du contour. L'évolution des paramètres en fonction de l'évolution du contour est étudiée.

- ▶ Nous proposons ensuite des descripteurs statistiques utilisant une distance à un histogramme de référence. L'équation d'évolution résultante est calculée puis mise en œuvre sur des images de séquence vidéos afin de retrouver le visage préalablement segmenté sur l'image précédente. L'évolution des histogrammes au cours des itérations montre la convergence de ceux-ci vers les histogrammes de référence.
- ▶ Nous proposons enfin des descripteurs pour la détection des objets en mouvement dans les séquences d'images à caméra fixe et mobile. Des descripteurs basés mouvement sont proposés et évalués sur des séquences réelles puis combinés hiérarchiquement à des descripteurs spatiaux. Cette dernière application s'intègre dans le projet OSIAM (Outils pour la Segmentation d'Images Animés pour MPEG4/7) du RNRT.

#### 1.4 STRUCTURONS L'IMAGINAIRE

Ce mémoire est organisé en deux grandes parties, la première étant consacrée à l'étude théorique et la deuxième aux applications. La **première partie** se décompose de la manière suivante :

**Chapitre 2 : Présentation du problème** Ce chapitre a pour objectif d'introduire les fonctionnelles générales étudiées pour la segmentation et les EDPs géométriques. Ce cadre va nous permettre de mettre en évidence les points clés à étudier pour l'utilisation des contours actifs à des fins de segmentation.

**Chapitre 3 : Les contours actifs, état de l'art** Ce chapitre présente un état de l'art sur les contours actifs. Nous structurons cette étude en deux parties : les contours actifs basés contours utilisant seulement une information locale sur les contours des objets et les contours actifs basés régions utilisant des informations globales sur les régions à segmenter. Nous nous attachons notamment à étudier les différentes méthodes de dérivation employées pour aller de la fonctionnelle vers l'équation d'évolution du contour.

**Chapitre 4 : De la dérivation de domaines vers des modèles de contours actifs basés régions** Ce chapitre présente les contributions théoriques apportées au domaine. Nous commençons par une analyse des difficultés liées à l'obtention de l'équation d'évolution des contours actifs basés régions à partir des fonctionnelles introduites au chapitre 2. Nous tentons ensuite de résoudre ces difficultés en utilisant notamment les outils de dérivation de domaines. Par ailleurs, nous étudions de manière précise les descripteurs dépendant de la région. Enfin une comparaison de la méthode de dérivation proposée avec la méthode classique de dérivation (transformation des termes régions en termes contour dans l'intégrale + calcul de la dérivée de Gâteaux) est proposée. Nous montrons que les résultats obtenus sont identiques.

La **deuxième partie**, consacrée aux applications du cadre de travail développé précédemment, s'articule autour de trois études :

**Chapitre 5 : Extraction de régions homogènes** Ce chapitre a pour objectif de présenter des descripteurs statistiques pour la segmentation de régions homogènes. Nous présentons d'abord la segmentation de régions homogènes dans les images à niveaux de gris avec des descripteurs utilisant la variance. Des résultats expérimentaux effectués sur une image synthétique montrent la validité de l'équation d'évolution calculée et l'importance des termes additifs provenant de la dépendance des descripteurs avec la région afin d'aboutir à une segmentation correcte. Ensuite, mettant à profit le lien qui existe entre le déterminant de la matrice de covariance d'une région et son entropie, nous proposons le déterminant de la matrice de covariance comme descripteur des régions de couleur homogène. Nous montrons, sur des séquences réelles, l'efficacité de cet outil pour la segmentation du visage. Par ailleurs, l'estimation des paramètres statistiques de la région est effectuée conjointement à la segmentation et nous étudions leur évolution au cours de la propagation.

**Chapitre 6 : Segmentation à l'aide d'histogrammes** Ce chapitre présente un descripteur statistique utilisant une distance entre l'histogramme attaché à la région en évolution et l'histogramme de référence. Le calcul de l'équation d'évolution résultante est détaillée. Les résultats théoriques sont ensuite mis en œuvre pour la segmentation du visage dans une séquence d'images en utilisant une segmentation de l'image initiale. La convergence des histogrammes vers l'histogramme de référence est visualisée, montrant l'efficacité de l'équation d'évolution implémentée.



**Chapitre 7 : Détection d'objets vidéos** Ce chapitre aborde la détection des objets en mouvement dans les séquences d'images. Nous commençons par évoquer les notions de mouvement et d'objets vidéos afin de situer la problématique et de souligner les difficultés d'une telle détection. Un état de l'art conduit alors à une réflexion sur les descripteurs envisageables pour cette application. Nous proposons ensuite un ensemble de descripteurs basés sur le mouvement. Une méthode de compensation du mouvement de la caméra est étudiée afin de pouvoir segmenter les objets en mouvement dans les séquences à caméra mobile. Enfin une combinaison hiérarchique de ces descripteurs avec des descripteurs spatiaux permet d'améliorer les résultats obtenus.

Première partie

Modèles de contours actifs  
basés régions



# Présentation du problème

Nous présentons ici de manière générale les fonctionnelles et les équations aux dérivées partielles (EDPs) géométriques étudiées pour la segmentation. Nous évoquerons ensuite les différents points à étudier afin d'aller des fonctionnelles introduites vers la segmentation par contours actifs basés régions.

### 2.1 CONTEXTE ET OBJECTIFS

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, notre objectif est la segmentation d'images et de vidéos. Nous considérons les contours actifs comme des outils pertinents pour cette étude permettant de regrouper dans une entité des éléments (pixels, régions) de mêmes caractéristiques. Ceux-ci permettent l'utilisation d'un a priori géométrique fort sur l'objet à segmenter et de contraintes de régularisation faisant intervenir les caractéristiques géométriques du contour telles que sa longueur, sa courbure. Leur évolution est dirigée par une équation aux dérivées partielles dite géométrique.

Les équations aux dérivées partielles ont tout d'abord été développées pour la restauration d'images [108, 3, 99], inspirées par des travaux de Gabor [46] sur l'équation de la chaleur. Elles sont maintenant utilisées dans des domaines variés allant de l'analyse du mouvement [81], à la reconstruction 3D [43]. Nous renvoyons le lecteur à [10, 122, 19, 36] ou [137] pour une revue détaillée.

Notre étude porte ici plus particulièrement sur les équations aux dérivées partielles géométriques qui dirigent l'évolution d'un contour actif.

Le principe est de définir une fonctionnelle à minimiser afin de résoudre le problème donné de segmentation puis de déduire de cette fonctionnelle l'équation d'évolution d'un contour actif. Notre préoccupation est ici de développer des modèles afin de faciliter l'utilisation de tels outils pour des applications de segmentation variées. Dans cette partie, nous présentons de manière générale les contours actifs et les EDPs dynamiques associées régissant leur évolution puis nous introduirons les fonctionnelles types adaptées à la segmentation. Nous verrons ensuite les différents points à étudier pour faire évoluer le contour actif vers un minimum des fonctionnelles introduites.

En ce qui concerne les notations, nous travaillons sur des images que nous représenterons la plupart du temps par des fonctions à variables continues même s'il s'agit d'images qui, en pratique, renvoient à des notions discrètes. On représentera par la fonction continue  $\mathbf{I} : \Omega_I \rightarrow \mathcal{R}^m$  l'intensité lumineuse associée à chaque pixel de l'image, avec  $\Omega_I$  un ensemble de  $\mathcal{R}^n$  représentant le support de l'image. On notera  $\mathbf{I}(\mathbf{x})$  la valeur de  $\mathbf{I}$  au point  $\mathbf{x} \in \Omega_I$ . Pour des images à niveaux de gris,  $m = 1$ , on notera alors l'intensité de l'image par  $I$ .

## 2.2 LES CONTOURS ACTIFS

Le principe des contours actifs est de faire évoluer une courbe initiale définie par l'utilisateur en direction des bords de l'objet à détecter. L'évolution de cette courbe est régie par une équation aux dérivées partielles qui est en générale déduite d'une fonctionnelle à minimiser. Il faut noter que certaines équations d'évolution ne dérivent pas d'une approche énergétique, c'est à dire de la minimisation d'une fonctionnelle, comme nous le verrons dans le chapitre 3 concernant l'état de l'art. C'est ce que l'on appelle les approches par EDPs.

Formalisons ce principe en introduisant par la même les notations de ce document. Soit  $\Gamma(p, \tau) : [a, b] \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}^2$  une famille de courbes fermées paramétrées par  $p$  et où  $\tau$  est le paramètre d'évolution de la courbe, l'équation d'évolution générale régissant les contours actifs est la suivante :

$$\frac{\partial \Gamma(p, \tau)}{\partial \tau} = \mathbf{v}(p, \tau) \quad \text{avec} \quad \Gamma(p, 0) = \Gamma_0(p) \quad (2.1)$$

Le contour initial  $\Gamma_0$  est défini par l'utilisateur et la courbe évolue avec la vitesse  $\mathbf{v}$  (Fig.2.1). Lorsque (2.1) est déduite d'une énergie, la vitesse dépend de la fonctionnelle introduite. Le problème est de trouver  $\mathbf{v}$  telle que la courbe  $\Gamma(p, \tau)$  évolue avec  $\tau$  vers un minimum local de cette fonctionnelle. Ce minimum local doit correspondre aux contours des objets ou régions à segmenter.

Afin d'utiliser les contours actifs pour une application donnée, nous devons donc :

- × Définir une fonctionnelle à minimiser pour le problème donné
- × Dédire de la fonctionnelle l'équation d'évolution du contour actif
- × Implémenter cette équation d'évolution avec des méthodes appropriées

On peut alors distinguer les contours actifs basés contour où les fonctionnelles introduites sont des intégrales de contours. Ceux-ci furent les premiers modèles introduits dans la littérature. Puis ont été introduits les contours actifs basés régions où les fonctionnelles à minimiser sont des combinaisons linéaires d'intégrales de domaines et d'intégrales de contours. Ces derniers permettent d'utiliser des informations globales sur les régions à segmenter

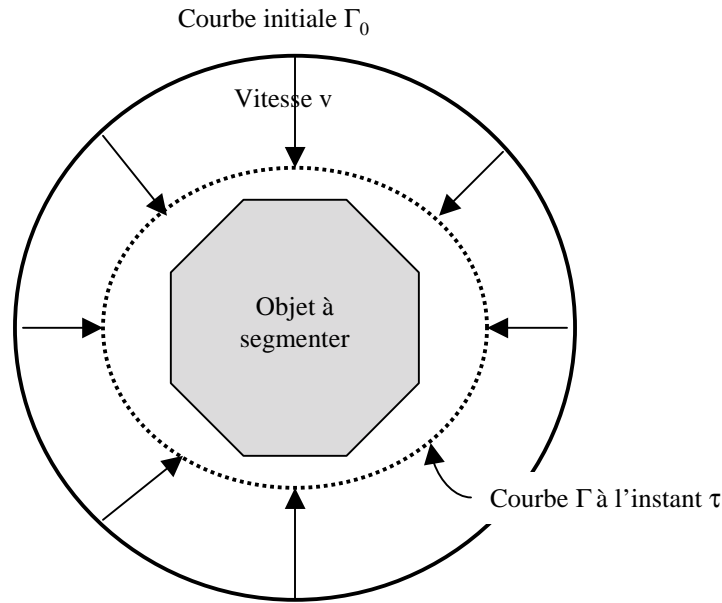


FIG. 2.1 – Evolution du contour actif  $\Gamma(\tau)$  en direction des bords de l'objet à segmenter avec la vitesse  $\mathbf{v}$

telles que la texture, le mouvement, l'homogénéité spatiale. Nous allons maintenant introduire les fonctionnelles types à minimiser afin de pouvoir élaborer un cadre d'étude général.

### 2.3 INTRODUCTION DE CRITÈRES GÉNÉRAUX POUR LA SEGMENTATION

La segmentation d'images consiste, soit à trouver les parties constitutives d'une image, ou en d'autres termes à en effectuer une partition, soit à extraire une région spécifique (objet en mouvement, région d'intérêt comme le visage). Plus précisément, notons  $\mathcal{U}$  l'ensemble des régions de  $\Omega_I$ , où  $\Omega_I \subset \mathcal{R}^n$ , et  $\Omega$  un élément de  $\mathcal{U}$ . Le contour ou bord de  $\Omega$  est noté  $\Gamma$  (ou  $\partial\Omega$ ) et est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. La segmentation vise à extraire de l'image de support  $\Omega_I$  une ou plusieurs régions  $\Omega$ .

Nous essayons ensuite de formaliser le problème de segmentation par une fonctionnelle générale à minimiser de laquelle nous déduirons l'équation d'évolution d'un contour actif qui se dirigera vers une solution optimale de la fonctionnelle.

Lorsque l'on parle d'approche variationnelle et de segmentation, on pense tout d'abord à l'approche fondatrice développée par Mumford-Shah [95]. Ces

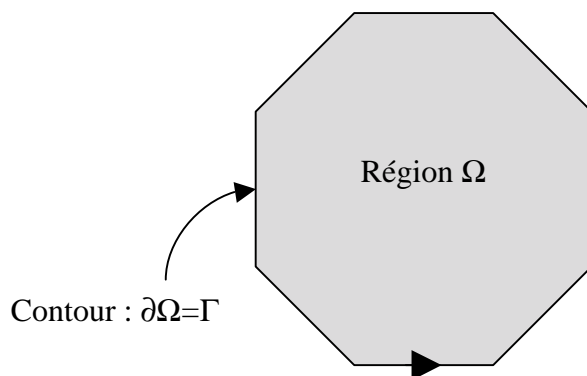


FIG. 2.2 – Une région  $\Omega$  de  $\mathcal{R}^2$  et son contour  $\Gamma$  orienté dans le sens inverse des aiguilles d’une montre

derniers ont introduit une fonctionnelle à minimiser permettant d’obtenir une image simplifiée composée de régions homogènes séparées par de forts gradients. Une revue complète sur la littérature en relation avec la fonctionnelle de Mumford-Shah peut être trouvée dans [94].

Nous nous intéressons ici davantage à l’extraction de régions spécifiques. Elles peuvent être caractérisées par une certaine homogénéité, celle-ci pouvant s’entendre au sens de la couleur mais aussi au sens du mouvement. La région ou l’objet à segmenter peuvent également être caractérisés par référence à une région ou un objet prédéfini. Une distance entre la référence et l’objet à segmenter doit alors être introduite. La région à segmenter est considérée non plus comme une région de couleur homogène mais comme une entité caractérisée par une fonction que nous appelons ici “descripteur”. La fonctionnelle générale à minimiser est composée, comme la fonctionnelle de Mumford-Shah, d’une combinaison de termes sur les régions concernées, appelés termes basés régions, et sur le contour des régions, appelés termes basés contours.

### 2.3.1 Introduction des termes contours et des termes régions

Les termes basés contours tiennent compte d’une information locale sur le contour de la région. On peut ainsi introduire des contraintes de régularité sur le contour mais également des termes d’attache aux données. Nous

introduisons les termes basés contours comme des intégrales de contour :

$$J_b(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} k_b(\mathbf{x}) d\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

où  $k_b(\mathbf{x})$  est ce que nous appellerons génériquement le descripteur de la frontière de la région  $\Omega$  noté  $\partial\Omega$  et  $d\mathbf{a}$  son élément d'aire.

Dans la partie suivante, les descripteurs contours utilisés dans la littérature sont présentés. Afin de matérialiser ce terme, on peut déjà prendre ici l'exemple des contours actifs géodésiques [17, 18] dans lesquels la fonctionnelle suivante est minimisée afin de détecter les plus forts gradients d'une image :

$$J(\Gamma) = \int_{\Gamma} g(|\nabla I(\Gamma(s))|) ds \quad (2.3)$$

avec  $s$  est l'abscisse curviligne et  $g(r) = \frac{1}{1+r^m}$ ,  $m = 1$  ou  $2$ . La fonction  $g$  permet d'arrêter l'évolution du contour aux endroits où le module du gradient de l'intensité de l'image  $I$  est élevé (ces zones sont supposées être liées à la présence de contours d'objets à segmenter). On a alors  $k_b(\mathbf{x}) = g(|\nabla I(\Gamma(s))|)$  comme descripteur du contour. Nous expliquerons en détail ces termes dans la section 3.2.

Les termes basés régions tiennent compte d'une information globale sur la région à segmenter prenant en compte une certaine homogénéité de la région. Nous définissons donc les termes basés régions comme des intégrales de domaines :

$$J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x} \quad (2.4)$$

où  $k(\mathbf{x}, \Omega)$  est ce que nous appellerons génériquement le descripteur de la région  $\Omega$ .

Dans le cas général, ce descripteur peut dépendre de la région elle-même, nous dirons alors que ce descripteur est dépendant de la région (région-dépendant). C'est le cas notamment des descripteurs statistiques de région parmi lesquels on peut citer la moyenne d'une région notée  $\mu(\Omega)$  ou sa variance notée  $\sigma^2(\Omega)$ . Un exemple de descripteur région utilisé dans [23, 34] et inspiré de la fonctionnelle de Mumford-Shah [95] est le suivant :

$$k(\mathbf{x}, \Omega) = (I(\mathbf{x}) - \mu(\Omega))^2$$

Pour la segmentation par contours actifs, la fonctionnelle à minimiser  $J$  est en général une combinaison linéaire de termes basés régions et de termes basés contours (leurs formules respectives sont résumées dans le tableau 2.1).

**REMARQUE 2.1.** *Même s'ils ne font pas ici l'objet de l'étude, les descripteurs contour peuvent également dépendre de l'évolution du contour. Ils peuvent*



Termes régions	$J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$	$k(\mathbf{x}, \Omega)$ descripteur région
Termes contours	$J_b(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} k_b(\mathbf{x}) da$	$k_b(\mathbf{x})$ descripteur contour

TAB. 2.1 – Les termes basés contours et les termes basés régions

être utilisés pour le suivi d'objets [48] ou pour la reconstruction de surfaces [140, 82]. Les auteurs utilisent comme descripteur une distance entre le contour actuel et un contour de référence qui peut être la segmentation de l'image précédente [48] pour le suivi d'objets vidéos ou des données de référence échantillonnées et bruitées pour la reconstruction de surfaces en imagerie médicale [82]. La dérivation du terme contour résultant est développée dans [48].

### 2.3.2 Exemple de la segmentation en deux régions

Prenons l'exemple de la segmentation d'une image en deux régions  $\Omega_{in}$  et  $\Omega_{out}$  où  $\Omega_{in}$  est la région contenant les objets à segmenter et  $\Omega_{out}$  la région du fond (Fig.2.3). L'interface entre ces deux ouverts est noté  $\Gamma$ . Ces deux régions forment une partition de l'image, on a donc  $\Omega_{in} \cup \Omega_{out} \cup \Gamma = \Omega_I$  où  $\Omega_I$  est le domaine de l'image et  $\Omega_{in} \cap \Omega_{out} = \emptyset$ . Nous prendrons  $\Gamma = \partial\Omega_{in}$  ce qui implique que  $\Gamma$  est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport à  $\Omega_{in}$ .

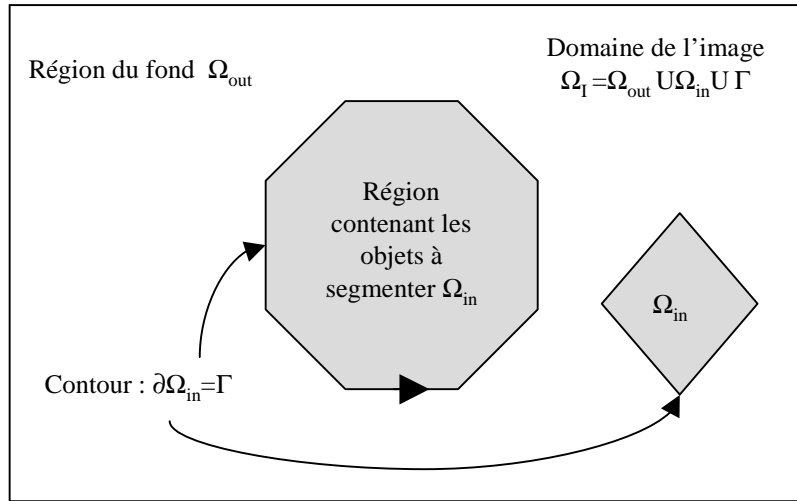
On peut alors introduire une fonctionnelle générale à minimiser  $J$  pour la partition d'une image en deux régions :

$$J(\Omega_{in}, \Omega_{out}, \Gamma) = \int_{\Omega_{in}} k_{in}(\mathbf{x}, \Omega_{in}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{out}} k_{out}(\mathbf{x}, \Omega_{out}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} k_b(\mathbf{x}) da \quad (2.5)$$

Dans ce critère,  $k_{in}$  désigne le descripteur des objets à segmenter,  $k_{out}$  le descripteur de la région du fond, et  $k_b$  le descripteur du contour. L'objectif est de faire évoluer un contour actif vers une solution optimale du critère.

## 2.4 LES DIFFÉRENTS POINTS À ÉTUDIER

Afin de calculer l'équation d'évolution du contour actif à partir d'une fonctionnelle composée d'une combinaison linéaire de termes basés régions et de termes basés contours, et de pouvoir utiliser cette équation pour la segmentation, nous devons étudier les points suivants :

FIG. 2.3 – Décomposition de l'image en deux régions dans  $\mathcal{R}^2$ 

1. Dérivation d'un terme basé contours
2. Dérivation d'un terme basé régions
3. Choix des descripteurs appropriés selon l'application envisagée
4. Mise en oeuvre numérique des EDPs

Nous allons voir dans la partie suivante les différentes approches mises en oeuvre dans la littérature pour la segmentation par contours actifs en essayant de comparer les approches à travers les formulations générales introduites ici. Ensuite nous présenterons le cadre de travail général proposé afin de calculer l'équation d'évolution d'un contour actif à partir d'une fonctionnelle combinant des termes basés régions et des termes basés contours.



# Les contours actifs : Etat de l'art

Ce chapitre a pour objectif de présenter un état de l'art sur les contours actifs. Nous divisons les approches par contours actifs en deux grandes catégories, les approches basées contours et les approches basées régions.

Originellement, les contours actifs étaient des méthodes basées contours. Dans ces approches, le contour actif évolue vers les plus forts gradients de l'image avec une EDP qui peut être ou non déduite d'une fonctionnelle incluant uniquement des termes basés contour.

Cependant, il peut s'avérer intéressant d'introduire dans la fonctionnelle à minimiser des termes basés régions permettant de caractériser globalement les régions à segmenter. Ainsi le principal objectif des contours actifs basés régions est de combiner des informations globales sur les régions et des informations locales sur leurs contours afin de faire évoluer un contour actif.

Nous essayerons de comparer les différentes approches utilisées à travers les formulations générales introduites chapitre 2.

Après une présentation détaillée de ces deux approches, nous aborderons les différentes méthodes de mise en oeuvre numérique de l'équation d'évolution associée.

### 3.1 REMARQUES PRÉLIMINAIRES

Dans  $\mathcal{R}^2$ , l'EDP régissant l'équation d'évolution du contour actif a pour formule générale l'équation (2.1). On peut décomposer la vitesse d'évolution selon la tangente unitaire  $\mathbf{T}$  et la normale unitaire  $\mathbf{N}$  intérieure à la courbe  $\Gamma$ , ce qui donne :

$$\frac{\partial \Gamma(p, \tau)}{\partial \tau} = F_N(p, \tau) \mathbf{N}(p, \tau) + F_T(p, \tau) \mathbf{T}(p, \tau). \quad (3.1)$$

avec  $F_N$  l'amplitude de la vitesse dans la direction de la normale au contour et  $F_T$  l'amplitude de la vitesse dans la direction tangentielle.

Si nous nous intéressons uniquement à la géométrie de la déformation et non à sa paramétrisation, cette équation peut être simplifiée avec le résultat d'Epstein et Cage [41] dont on peut retrouver l'énoncé dans [122].

LEMME 3.1. *Si  $F$  ne dépend pas de la paramétrisation, la courbe  $\Gamma(p, \tau)$  satisfaisant l'équation (3.1) est identique à celle satisfaisant l'EDP suivante :*

$$\frac{\partial \Gamma(p, \tau)}{\partial \tau} = F_N(p, \tau) \mathbf{N}(p, \tau) \quad (3.2)$$

*en d'autres mots, la vitesse tangentielle n'influence pas la géométrie de la déformation, elle influence seulement sa paramétrisation.*

La vitesse d'évolution du contour actif peut donc être considérée comme normale au contour :

$$\mathbf{v}(p, \tau) = F_N(p, \tau) \mathbf{N}(p, \tau).$$

Par la suite, nous noterons  $F_N, F$  pour plus de simplicité.

### 3.2 LES CONTOURS ACTIFS BASÉS CONTOURS

Les contours actifs basés contours tiennent compte uniquement de l'information présente sur les contours des objets à segmenter. Ainsi les contours des objets sont en général définis par une valeur élevée du gradient de l'intensité  $I$ , ce qui peut être traduit comme terme d'attache aux données dans une fonctionnelle à minimiser à travers une intégrale de contour. Il existe également des approches basées contours définissant directement l'équation d'évolution du contour actif sans passer par la minimisation d'une énergie.

Nous séparons donc l'état de l'art sur les contours actifs basés contours en deux parties, la première concernant les approches variationnelles avec introduction d'un critère à minimiser, et la deuxième concernant les approches par EDPs où l'équation d'évolution est introduite sans passer par la minimisation d'un critère.

#### 3.2.1 Approches variationnelles

Les contours actifs ont originellement été introduits par Kass, Witkin et Terzopoulos [75] sous l'appellation de "snakes". Si on considère  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^2$  une courbe  $C^2$ , la méthode [75] est basée sur la minimisation de l'énergie suivante :

$$J(\Gamma) = \alpha \int_a^b |\Gamma'(p)|^2 dp + \beta \int_a^b |\Gamma''(p)|^2 dp - \lambda \int_a^b |\nabla I(\Gamma(p))| dp \quad (3.3)$$

avec  $\alpha, \beta$  et  $\lambda$  des constantes positives.

On remarque ici la combinaison de différents termes basés contours. Les deux premiers termes sont utilisés pour imposer une contrainte de régularité sur le contour tandis que le dernier terme est un terme d'attache aux données permettant d'attirer la courbe vers les forts gradients de l'image. Le fait de prendre  $\beta = 0$  autorise les discontinuités du second ordre, tels les angles aigus

d'un objet. La courbe  $\Gamma$  minimisant le critère (3.3) est solution de l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$-\alpha \Gamma''(p) + \beta \Gamma^{(4)}(p) - \lambda \frac{\mathcal{H}(I)(\nabla I(\Gamma(p)))}{|\nabla I(\Gamma(p))|} = 0$$

où  $\mathcal{H}(I)$  est la matrice hessienne de  $I$  appliquée à  $\nabla I(\Gamma(p))$ . L'équation d'évolution du contour  $\Gamma$  correspondant à cette équation d'Euler-Lagrange est alors :

$$\frac{\partial \Gamma(p, \tau)}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 \Gamma(p, \tau)}{\partial p^2} - \beta \frac{\partial^4 \Gamma(p, \tau)}{\partial p^4} + \lambda \frac{\mathcal{H}(I)(\nabla I(\Gamma(p)))}{|\nabla I(\Gamma(p))|} \quad (3.4)$$

Dans cette approche très innovante, l'idée principale consiste à modéliser le problème comme un problème de minimisation. Cependant cette approche possède des inconvénients :

- × La fonctionnelle  $J(\Gamma)$  n'est pas intrinsèque car elle dépend de la paramétrisation de la courbe  $\Gamma$ .
- × La contrainte de régularité interdit les changements de topologie. Il est impossible de détecter plusieurs objets et l'objet unique doit être convexe.
- × Le contour initial doit être suffisamment proche de l'objet pour pouvoir converger.
- × La calcul de la dérivée d'ordre 4 qui apparaît dans l'équation d'évolution (3.4) pose des problèmes de discrétisation et d'instabilités numériques.

Afin de pouvoir pallier ces aspects négatifs, Caselles et al ont proposé les contours actifs géodésiques [17, 18]. Ils ont choisi tout d'abord  $\beta = 0$  dans la fonctionnelle. Ce choix est justifié par le fait que l'effet régularisant des contours actifs provient des flots basés sur la courbure qui sont obtenus seulement avec les autres termes. On obtient ainsi des courbes lisses sans avoir à introduire une régularisation du second ordre. Ils minimisent alors le critère suivant :

$$J(\Gamma) = \alpha \int_a^b |\Gamma'(p)|^2 dp - \lambda \int_a^b |\nabla I(\Gamma(p))| dp \quad (3.5)$$

En minimisant la fonctionnelle (3.5), on essaye de localiser les points où le gradient de l'image est élevé tout en conservant une certaine régularité de la courbe. Le compromis entre localisation et régularisation est déterminé par les deux paramètres  $\alpha$  et  $\lambda$ .

Afin de généraliser la partie détection de contour, les auteurs proposent de minimiser la fonctionnelle suivante :

$$J(\Gamma) = \alpha \int_a^b |\Gamma'(p)|^2 dp + \lambda \int_a^b g(|\nabla I(\Gamma(p))|)^2 dp \quad (3.6)$$

La fonction  $g$  est une fonction de détection,  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathcal{R}^+$ , strictement décroissante de telle sorte que  $g(r) \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ . La fonction suivante est communément utilisée :

$$g(r) = \frac{1}{1 + r^m}$$

avec  $m = 1$  ou  $2$ .

La fonctionnelle (3.6) n'est cependant toujours pas satisfaisante puisque non intrinsèque. En effet elle dépend de la paramétrisation de la courbe. Les auteurs [17, 18] montrent, en utilisant le principe de Maupertuis [37], que la solution du modèle (3.6) est donnée par une courbe géodésique dans un espace Riemannien induit à partir de l'image donnée  $I$  (une courbe géodésique est un chemin de distance minimale entre des points donnés). Ils montrent que minimiser (3.6), en choisissant une contribution équivalente du terme de lissage et du terme d'attache aux données, revient à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$J(\Gamma) = \int_a^b g(|\nabla I(\Gamma(p))|) |\Gamma'(p)| dp \quad (3.7)$$

La fonctionnelle  $J$  peut être vue comme la minimisation de la longueur de la courbe dans une métrique Riemannienne, dépendant des caractéristiques de l'image. En effet, la longueur euclidienne de la courbe  $L(\Gamma)$  est donnée par :

$$L(\Gamma) = \oint ds$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne, et l'on peut écrire la fonctionnelle (3.7) de la manière suivante :

$$J(\Gamma) = \int_0^{L(\Gamma)} g(|\nabla I(\Gamma(s))|) ds.$$

Le lien entre (3.6) et (3.7) a aussi été étudié dans [9]. Les auteurs proposent une démonstration utilisant le calcul des variations.

La fonctionnelle (3.7) présente l'avantage d'être intrinsèque. La démonstration conduisant du critère (3.7) à l'équation d'évolution du contour actif est détaillée dans [18]. Les contours actifs ainsi obtenus sont appelés contours actifs géodésiques. Afin de simplifier les notations, nous noterons  $g(I)$  à la place de  $g(|\nabla I|)$ . L'équation d'évolution est alors la suivante :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = g(I) \kappa \mathbf{N} - (\nabla g \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} \quad (3.8)$$

avec  $\kappa$  la courbure de la courbe  $\Gamma$ .

L'équation d'évolution a été implémentée en utilisant les ensembles de niveaux présentés section 3.4.

Ainsi la littérature [18] nous donne un premier résultat concernant le flot issu des termes basés contours avec un descripteur de contour  $k_b = g(I)$ .

Notons que l'équation d'évolution (3.8) a également été introduite dans [77, 78, 138], afin de minimiser la longueur de la courbe dans une métrique dépendant des caractéristiques de l'image.

### 3.2.2 Approches par EDPs

D'autres approches basées contour ont consisté en l'introduction directe d'une équation d'évolution sans passer par la minimisation d'une énergie. Malladi et al [83, 84, 85] et Caselles et al [16] ont introduit les contours actifs géométriques qui se présentent directement par l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = g(I)(c + \kappa)\mathbf{N} \quad (3.9)$$

avec  $c$  une constante positive.

Cette équation d'évolution a été introduite directement dans une formulation par ensemble de niveaux, présentée section 3.4. Plusieurs objets peuvent ainsi être détectés à partir d'un seul contour initial.

Le flot  $[\kappa\mathbf{N}]$  connu sous le nom de flot Euclidien de la chaleur possède des propriétés de lissage intéressantes. Il a en effet la propriété de lisser une courbe mais également de la rétrécir. La vitesse constante  $[c\mathbf{N}]$  est similaire à la force ballon introduite par Cohen et al [27]. Elle force l'évolution du contour vers l'intérieur ou vers l'extérieur et permet la détection d'objets non convexes à partir d'un contour initial convexe. Elle permet d'éviter certains minimums locaux. Le choix du paramètre  $c$  est délicat et des méthodes d'estimation ont été proposées dans [16]. Quant à la fonction  $g(I)$ , que nous avons évoquée pour les contours actifs géodésiques, elle constitue le terme d'attache aux données dont le but est de stopper la courbe sur les contours des objets.

Notons que le flot  $[c\mathbf{N}]$  provient de la minimisation de l'aire de l'objet à segmenter pondérée par le paramètre  $c$ , c'est donc un terme région. Les effets respectifs de la minimisation de la longueur de la courbe (qui conduit au flot  $[\kappa\mathbf{N}]$ ) et de la minimisation de l'aire de l'objet (qui conduit au flot  $[\mathbf{N}]$ ) sont discutés dans [127]. Les auteurs soulignent le fait que lorsque l'on applique le flot  $[\kappa\mathbf{N}]$ , le contour reste régulier. Contrairement, le flot constant  $[\mathbf{N}]$  peut faire évoluer une courbe régulière vers une courbe singulière. Les chocs résultants permettent une plus grande adéquation du contour à la forme des objets.

Dans le cadre de la théorie des solutions de viscosité, on pourra trouver dans [16] une étude d'existence d'une solution de (3.9).



### 3.3 LES CONTOURS ACTIFS BASÉS RÉGIONS

Les régions à segmenter peuvent avoir différentes propriétés de texture, d'homogénéité ou de mouvement qui ne peuvent être incluses dans une seule intégrale de contour. Le principal objectif des contours actifs basés régions est d'introduire une information globale dans l'équation d'évolution du contour actif en plus de l'information locale procurée par les termes basés contours. De manière à justifier l'introduction de ces termes régions, il faut les inclure dans un critère à minimiser à partir duquel sera déduite la vitesse du contour. Ces termes apparaissent dans le critère sous la forme d'intégrales de régions telles que nous les avons données en section 2.3 en (2.4) et que nous rappelons ici :

$$J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$$

où  $k$  est le descripteur de la région  $\Omega$ .

Ces termes coexistent en général dans un critère avec des termes basés contour définis génériquement par l'équation (2.2) avec  $k_b$  le descripteur de  $\partial\Omega = \Gamma$ .

Nous prendrons l'exemple de la segmentation en deux régions dont la fonctionnelle générale est donnée par (2.5).

Afin d'analyser les différents travaux parus dans la littérature sur les contours actifs basés régions, nous pouvons considérer deux questions importantes :

- × Quels sont les différents descripteurs de région proposés et pour quelles applications ?
- × Comment est dérivée l'équation d'évolution à partir du critère ?

Une attention particulière sera accordée à la deuxième question qui touche à l'un des objectifs de notre étude. Les approches issues de la littérature sont ici classées selon la méthodologie utilisée pour obtenir l'équation d'évolution du contour actif.

A notre connaissance, les travaux pionniers sur les contours actifs basés régions ont été proposés par [28, 113]. Dans un travail précurseur, Cohen et al [28] ont présenté une méthode de reconstruction de surface utilisant des contours actifs. Ils calculent le vecteur vitesse d'un contour actif à partir d'un critère incluant des termes basés régions. Un autre travail pionnier a été celui de Ronfard [113] pour la segmentation d'une image en deux régions. L'auteur a eu l'intuition que le module du vecteur vitesse doit être proportionnel à la différence entre les caractéristiques statistiques de la région contenant les objets à segmenter et celles de la région du fond. Ce qui, avec nos notations, donne :  $F = k_{in} - k_{out}$ , avec  $k_{in}$  le modèle statistique de la région contenant les objets à segmenter et  $k_{out}$  le modèle statistique de la région du fond.

Suite à ces travaux pionniers, de nombreux approfondissements ont été proposés. Ceux-ci peuvent être répartis en deux grandes catégories : les approches proposant le calcul de l'équation d'évolution du contour actif en dérivant le critère et les approches proposant de faire évoluer le contour actif vers une solution optimale par le calcul direct de la valeur du critère.

### 3.3.1 Approches variationnelles avec calcul de l'EDP

#### 3.3.1.1 En transformant les intégrales de domaines en intégrales de contour

La plupart des approches proposent de calculer l'équation d'évolution du contour actif en utilisant successivement le théorème de Green-Riemann afin de transformer les intégrales de régions en intégrales de contours puis les équations d'Euler-Lagrange associées à ces intégrales de contours pour calculer l'EDP.

Zhu et Yuille [142, 143] ont présenté un cadre de travail statistique pour la segmentation d'image en utilisant un algorithme appelé "compétition de régions". Leur but était de combiner les caractéristiques géométriques des contours actifs et les techniques statistiques de croissance de régions. Ils s'intéressent à la segmentation de régions homogènes et introduisent pour une région  $\Omega_i$  et son contour  $\Gamma_i$ , les descripteurs suivants :

$$\begin{aligned} k(\mathbf{x}, \Omega_i) &= -\log P(I(\mathbf{x})/\alpha_i) \\ k_b(\mathbf{x}) &= \mu/2 \end{aligned}$$

où  $P()$  désigne la densité de probabilité d'appartenance à la région,  $\alpha_i$  les paramètres associés et  $\mu$  une constante positive.

Les auteurs prennent l'exemple d'une distribution gaussienne avec :

$$P(I(\mathbf{x})/(\mu_i, \sigma_i)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(I - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

où  $\mu_i$  désigne la moyenne de la région  $\Omega_i$  et  $\sigma_i$  sa variance.

Soit  $M$  le nombre de régions, ils cherchent alors la partition de l'image et les paramètres des régions qui minimisent le critère MDL ("Minimum Description Length") suivant :

$$J(\{\Omega_i\}_{i=1}^M, \{\alpha_i\}_{i=1}^M) = \sum_{i=1}^M \left( \int_{\partial\Omega_i} \frac{\mu}{2} ds - \int_{\Omega_i} \log P(I(\mathbf{x})/\alpha_i) d\mathbf{x} + \lambda \right)$$

où  $\lambda$  est une valeur positive représentant la longueur de code nécessaire pour décrire la distribution et le système de codage pour la région  $\Omega_i$ . Les auteurs font l'hypothèse que cette valeur est la même pour toutes les régions.

Le critère est minimisé en deux étapes. Lors de la première étape le contour n'évolue pas, les régions  $\Omega_i$  sont fixées et les paramètres  $\alpha_i$  sont alors estimés

en maximisant les probabilités conditionnelles. Dans le cas d'une gaussienne, il suffit d'évaluer la moyenne et la variance de chaque région. La deuxième étape consiste à trouver les régions de l'image minimisant le critère ci-dessus, les paramètres  $\alpha_i$  étant fixés. Les auteurs cherchent alors l'EDP qui va diriger un contour actif vers la partition recherchée. Afin de dériver le terme basé région  $J_r(\Omega_i) = \int_{\Omega} -\log P(I(\mathbf{x})/\alpha_i)d\mathbf{x}$  et de calculer sa contribution dans l'équation d'évolution du contour actif, les auteurs proposent d'utiliser le théorème de Green-Riemann et les équations d'Euler-Lagrange. Le calcul de l'équation d'évolution est effectué en trois étapes principales :

1. Transformation des intégrales de domaines en intégrales de contours en utilisant le théorème de Green-Riemann.
2. Calcul des équations d'Euler-Lagrange.
3. Introduction d'un schéma dynamique à partir des équations d'Euler-Lagrange afin de calculer le vecteur vitesse du contour actif.

Dans le cas de deux régions  $\Omega_{in}$  et  $\Omega_{out}$ , l'équation d'évolution est la suivante :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = \left( k_{in} - k_{out} + \frac{\mu}{2} \kappa \right) \mathbf{N}$$

où  $k_{in} = -\log P(I(\Gamma)/\alpha_{in})$  et  $k_{out} = -\log P(I(\Gamma)/\alpha_{out})$ .

Récemment, Paragios et Deriche ont proposé une extension du travail de Zhu et Yuille en utilisant les contours actifs géodésiques. Leur approche est appelée "Régions actives géodésiques". Le descripteur de contour incorpore le gradient de l'image. Par ailleurs ils proposent des descripteurs régions pour de nombreuses applications comme la segmentation de la texture [104] ou la détection des objets en mouvement dans les séquences d'images [101, 103]. Une segmentation de l'image en régions homogènes est également proposée [102]. Dans cette approche l'homogénéité des régions est également décrite par des statistiques gaussiennes. Les paramètres sont estimés en utilisant le principe MDL (Minimum Description Length). Ensuite le contour actif évolue vers la région sélectionnée.

### 3.3.1.2 En utilisant les ensembles de niveaux

D'autres approches, avancées par Samson et al [119, 120] pour la classification et par Chan et Vese [22, 23] pour la segmentation d'images fixes, s'appuient sur l'expression du critère par l'intermédiaire des ensembles de niveaux.

Chan et Vese [22, 23] proposent les descripteurs suivants pour la segmentation d'une image en deux régions :

$$\begin{aligned} k_{in}(\mathbf{x}, \Omega_{in}) &= \lambda_1 |I(\mathbf{x}) - c_1(\Omega_{in})|^2 + \nu \\ k_{out}(\mathbf{x}, \Omega_{out}) &= \lambda_2 |I(\mathbf{x}) - c_2(\Omega_{out})|^2 \\ k_b(\mathbf{x}) &= \mu \end{aligned}$$

avec  $c_1$  la moyenne de la région  $\Omega_{in}$ ,  $c_2$  la moyenne de la région  $\Omega_{out}$ , et  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  des constantes positives. Les valeurs de  $c_1$  et  $c_2$  sont ré-estimées au cours de la propagation de la courbe. La méthode des ensembles de niveaux est directement utilisée en représentant la courbe  $\Gamma(\tau)$  comme la courbe de niveau zéro d'une fonction continue  $U(\mathbf{x}, \tau)$ . Les régions et le contour sont alors exprimés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \partial\Omega_{in} = \{\mathbf{x} \in \Omega_I / U(\mathbf{x}) = 0\} \\ \Omega_{in} &= \{\mathbf{x} \in \Omega_I / U(\mathbf{x}) < 0\} \\ \Omega_{out} &= \{\mathbf{x} \in \Omega_I / U(\mathbf{x}) > 0\}\end{aligned}$$

L'inconnue recherchée minimisant le critère devient alors la fonction  $U$ . Les auteurs introduisent également la fonction de Heaviside  $H$  et la mesure de Dirac  $\delta_0$  définies respectivement par :

$$H(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z \leq 0 \\ 0, & \text{si } z > 0 \end{cases}, \quad \delta_0(z) = \frac{d}{dz}H(z)$$

Le critère est ensuite exprimé par l'intermédiaire des fonctions  $U$ ,  $H$  et  $\delta$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}J(U, c_1, c_2) &= \int_{\Omega_I} (\lambda_1 |I(\mathbf{x}) - c_1|^2 + \nu) H(U(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega_I} (\lambda_2 |I(\mathbf{x}) - c_2|^2) (1 - H(U(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega_I} \mu \delta(U(\mathbf{x})) |\nabla U(\mathbf{x})| d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Afin de calculer les équations d'Euler-Lagrange pour la fonction inconnue  $U$ , les auteurs considèrent des versions régularisées des fonctions  $H$  et  $\delta$  notées  $H_\epsilon$  et  $\delta_\epsilon$ . L'équation d'évolution trouvée est alors directement exprimée avec la fonction des ensembles de niveaux  $U$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \tau} &= \delta_\epsilon(U) \left[ \mu \operatorname{div} \left( \frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) + \lambda_1 |I(\mathbf{x}) - c_1|^2 + \nu - \lambda_2 |I(\mathbf{x}) - c_2|^2 \right] \quad \text{dans } \Omega_I \\ \frac{\delta_\epsilon(U)}{|\nabla U|} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{N}} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_I\end{aligned}$$

avec  $\operatorname{div} \left( \frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right)$  la courbure de la courbe de niveau de  $U$  passant par  $\mathbf{x}$ , et  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{N}}$  la dérivée de  $U$  par rapport à la normale intérieure à la courbe  $\mathbf{N}$ .

### 3.3.1.3 En introduisant un schéma dynamique directement dans le critère

D'autres approches ont été proposées par Debreuve et al [33, 34, 31] pour la segmentation d'images médicales et par Amadiou et al [4] pour la détection de bâtiments. Dans ces approches, un schéma dynamique est introduit directement dans le critère.

Dans [33, 34, 31], les auteurs proposent des descripteurs pour la segmentation du ventricule gauche du coeur dans les séquences d'images médicales. Ici l'image d'une séquence est indicée par  $n$  et notée  $I_n$  où  $n$  est le numéro de l'image. Les descripteurs considérés, également indicés par  $n$ , sont les suivants :

$$\begin{aligned} k_{n,in}(\mathbf{x}, \Omega_{n,in}) &= (I_n(\mathbf{x}) - o_n)^2 \\ k_{n,out}(\mathbf{x}, \Omega_{n,out}) &= (I_n(\mathbf{x}) - b(\mathbf{x}))^2 \\ k_{n,b}(\mathbf{x}) &= \delta \end{aligned}$$

avec  $o_n$  la moyenne de la région contenant l'objet notée  $\Omega_{n,in}$ ,  $b$  l'image représentant le fond de la séquence d'images calculé comme une moyenne temporelle pondérée des images de la séquence et  $\delta$  une constante positive. Afin de dériver le critère, un schéma dynamique est introduit directement dans le critère à minimiser. La discontinuité existant entre les deux domaines est explicitement prise en compte en dérivant le critère. L'équation d'évolution est alors la suivante :

$$\frac{\partial \Gamma_n}{\partial \tau} = (k_{n,in} - k_{n,out} + \delta \kappa_n) \mathbf{N}$$

avec  $\kappa_n$  la courbure du contour  $\Gamma_n$ .

Cette technique de dérivation a également été employée par Amadiou et al [4] pour la détection de bâtiments.

Notons que les contours actifs basés régions donnent également de très bons résultats en classification [139, 119, 120] et en détection de mouvement [87]. Dans son approche [139], Yezzi minimise un critère incluant des descripteurs régions-dépendant basés sur la moyenne des régions. La moyenne est réévaluée au cours de la propagation du contour. On peut noter que la dépendance du critère avec la région a été prise en compte lors du calcul de l'équation d'évolution.

### 3.3.2 Approches variationnelles sans calcul de l'EDP

Certaines approches proposent de faire évoluer le contour actif sans calculer l'équation d'évolution du contour actif. Le critère est évalué de manière à être minimisé à chaque étape.

Ainsi, Chakraborty et al [21] ont introduit une approche basée région pour la segmentation d'images médicales. Comme entrées de leur algorithme, ils considèrent à la fois l'image  $I$  et l'image avec les régions classifiées  $I_r$ . Leur terme basé régions contraint le contour à entourer une seule région de  $I_r$ . Leurs descripteurs sont les suivants, avec la différence qu'ils cherchent à

maximiser le critère  $J$  :

$$\begin{aligned}k_{out}(\mathbf{x}, \Omega_{out}) &= K_1 I_r(\mathbf{x}) \\k_{in}(\mathbf{x}, \Omega_{in}) &= 0 \\k_b(\mathbf{x}) &= K_2 I_g(\mathbf{x})\end{aligned}$$

avec  $K_1$  et  $K_2$  deux constantes positives et  $I_g$  l'image du gradient.

Un terme permettant de contraindre le contour à une forme donnée a priori est également ajouté dans le critère, ce qui peut être intéressant pour l'imagerie médicale où la nature de la forme ne change pas beaucoup d'un individu à l'autre. Ensuite, les intégrales de régions sont transformées en intégrales de contour par le théorème de Green-Riemann. L'implémentation du contour actif est effectuée en utilisant une paramétrisation de Fourier. L'expression du vecteur vitesse du contour actif n'est pas calculée, mais le critère est évalué numériquement de manière à être maximisé. Nous pouvons noter que les auteurs ont proposé une extension très intéressante de leur travaux en utilisant la théorie des jeux [20]. Les termes basés régions et les termes basés contours sont séparés en deux critères contenant chacun des interactions avec l'autre. Lorsque le jeu progresse, chacun des modules améliore ses positions par partage mutuel de leurs informations.

Une autre approche a été introduite par Chesnaud et al [26] dans un cadre markovien. Leurs descripteurs statistiques sont réévalués à chaque étape d'évolution du contour actif car ce sont des descripteurs dépendants de la région. Ils choisissent ensuite le déplacement aléatoire qui va permettre de faire décroître le critère.

### 3.4 LES MÉTHODES D'IMPLÉMENTATION

Comme il a été souligné dans [122], un certain nombre de problèmes doivent être résolus lorsque l'on implémente les EDPs régissant l'évolution des contours actifs. L'algorithme d'implémentation doit apporter précision et stabilité. Ainsi une simple approximation lagrangienne nécessite un pas de temps très petit pour être stable [124]. Par ailleurs, l'algorithme doit être capable de gérer efficacement les changements de topologie : le contour doit pouvoir se diviser en plusieurs contours ou deux contours doivent pouvoir fusionner.

Il existe deux approches principales pour l'implémentation : les approches dites explicites avec une paramétrisation explicite du contour et les approches implicites comme la méthode des ensembles de niveaux ou le contour est inclus dans une fonction de dimension plus élevée. Un état de l'art peut être trouvé dans [93]. Les approches paramétriques présentent l'avantage d'être plus rapides en temps de calcul. En revanche, la gestion des changements de topologie est délicate et des routines spécifiques doivent être implémentées afin de les gérer. Le contour peut être par exemple modélisé par des B-splines

[91, 109, 110, 111, 112]. Les contours ou surfaces peuvent également être représentés par des modèles discrets. Ainsi un contour peut être représenté par un ensemble de sommets connectés pour former une ligne polygonale [88]. Montagnat et al [93] proposent une représentation des surfaces discrètes par maillages simplexés avec gestion des changements de topologie.

Nous étudierons ici principalement la méthode des ensembles de niveaux. Comme nous le verrons cette méthode présente de nombreux avantages comme la gestion automatique des changements de topologie.

### 3.4.1 Présentation de la méthode des ensembles de niveaux

La formulation par ensemble de niveaux est basée sur la considération suivante [100] : une courbe peut être considérée comme le niveau 0 d'une fonction de dimension plus élevée. L'idée clé de la méthode des ensembles de niveaux est d'introduire une fonction auxiliaire  $U(\mathbf{x}, \tau)$  de telle sorte que  $\Gamma(p, \tau)$  soit la courbe de niveau 0 de  $U$ . Pour une image de support  $\Omega_I$  inclus dans  $\mathcal{R}^2$ , on considère  $U : \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$  tel que :

$$\Gamma(p, \tau) = \{\mathbf{x} / U(\mathbf{x}, \tau) = 0\}$$

On peut exprimer cette équation de la manière suivante :

$$U(\Gamma(p, \tau), \tau) = 0, \quad \forall p \in [a, b], \quad \forall \tau \geq 0. \quad (3.10)$$

On peut choisir  $U$  comme étant la fonction distance signée au contour  $\Gamma$ , tel que pour chaque point  $\mathbf{x}$  et  $\forall \tau \geq 0$ , la valeur  $U(\mathbf{x}, \tau)$  représente la distance signée du point  $\mathbf{x}$  au contour  $\Gamma(p, \tau)$ . Les valeurs négatives de  $U$  étant prises par convention à l'intérieur du contour alors que les valeurs positives sont prises à l'extérieur (Fig.3.1).

Par ailleurs la fonction distance  $U$  vérifie :  $|\nabla U(\mathbf{x})| = 1$  presque partout (en dehors du squelette).

La méthode des ensembles de niveaux présente de nombreux avantages [125] :

- × La courbe  $\Gamma$  peut se diviser ou fusionner au cours de l'évolution de  $U$ . Les changements de topologie sont ainsi gérés automatiquement.
- × La fonction  $U$  reste toujours une fonction au cours de l'évolution permettant des schémas numériques stables.
- × On peut utiliser une grille fixe discrète et choisir des approximations par différences finies pour les dérivées spatiales et temporelles.
- × Les propriétés géométriques de la courbe comme la courbure ou le vecteur normal peuvent être aisément estimées à partir de la fonction  $U$ .
- × La formulation peut être aisément étendue à des dimensions plus élevées.

Les premiers travaux en analyse d'images utilisant cette technique ont été effectués tout d'abord par Caselles et al [16, 17, 18], puis par Malladi et al. [83, 84] et par Kischenassamy et al [77, 78].





### 3.4.2 Calcul de l'équation d'évolution avec la fonction $U$

Dans  $\mathcal{R}^2$ , l'équation d'évolution du contour actif est la suivante :

$$\frac{\partial \Gamma(p, \tau)}{\partial \tau} = F(p, \tau) \mathbf{N}(p, \tau)$$

Afin de trouver l'équation d'évolution du contour actif en fonction de  $U$ , nous allons dériver l'équation (3.10) par rapport à  $p$  et à  $\tau$ . Ainsi, en dérivant par rapport à  $p$ , on trouve :

$$\nabla_{/p} \Gamma(p, \tau) \cdot \nabla_{/x} U(\Gamma(p, \tau), \tau) = 0 \quad (3.11)$$

La direction de la tangente de la courbe  $\Gamma$  au point  $p$  est donnée par  $\nabla_{/p} \Gamma$ . Par conséquent, l'équation (3.11) indique que le gradient de  $U$  est parallèle à la normale  $\mathbf{N}$  du contour  $\Gamma$ , ce qui donne une expression de la normale intérieure au contour  $\mathbf{N}$  en fonction de  $U$  en tenant compte des conventions choisies pour le signe de  $U$  :

$$\mathbf{N} = -\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \quad (3.12)$$

L'expression de la courbure  $\kappa$  peut également être donnée en fonction de  $U$  :

$$\kappa = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) \quad (3.13)$$

Nous pouvons maintenant dériver l'équation (3.10) par rapport à  $\tau$ , ce qui donne :

$$\frac{\partial U(\Gamma(p, \tau), \tau)}{\partial \tau} + \nabla U(\Gamma(p, \tau), \tau) \cdot \frac{\partial \Gamma(p, \tau)}{\partial \tau} = 0$$

En remplaçant  $\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau}$  par son expression soit  $F\mathbf{N}$ , et en utilisant l'expression de  $\mathbf{N}$  en fonction de  $U$  trouvée précédemment, on obtient :

$$\frac{\partial U(\Gamma(p, \tau), \tau)}{\partial \tau} = F(p, \tau) |\nabla U(\Gamma(p, \tau), \tau)|$$

L'équation est valide seulement sur le niveau 0 de  $U$  mais on peut étendre son expression à tout le domaine de l'image  $\Omega_I$  si  $F$  est définie sur toute l'image. On a alors l'EDP :

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = F(\mathbf{x}, \tau) |\nabla U(\mathbf{x}, \tau)| \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I \quad (3.14)$$

avec  $U(\mathbf{x}, 0)$  la fonction distance de  $\Gamma_0$ . Cependant, cette extension ne conserve pas la fonction distance.

### 3.4.3 Réinitialisation de la fonction distance

Le calcul de  $U$  utilisant l'EDP (3.14) crée des problèmes d'instabilité. Le gradient de  $U$  peut tendre vers l'infini. Des solutions doivent être trouvées pour pallier ce problème. La fonction distance peut être réinitialisée avec une EDP [132, 107] de telle manière que  $|\nabla U| = 1$  au cours de l'évolution :

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \text{sign}(U(\mathbf{x}, \tau))(1 - |\nabla U(\mathbf{x}, \tau)|) \quad (3.15)$$

avec  $\text{sign}(U(\mathbf{x}, \tau))$  une fonction caractérisant le signe de  $U(\mathbf{x}, \tau)$ . Cette équation a été étudiée de manière théorique par [6].

Une autre alternative développée par [141, 51, 52] réside dans l'utilisation d'une EDP modifiée. Ainsi la vitesse  $F$  n'est pas étendue partout sur le domaine  $\Omega_I$  : pour les points  $\mathbf{x}$  n'appartenant pas au contour, elle est déduite de la force  $F$  sur le contour de telle sorte que la solution de l'EDP reste stable et que l'on puisse se passer de l'équation de réinitialisation.

### 3.4.4 Techniques rapides

Pour implémenter la méthode des ensembles de niveaux, la technique de la bande étroite permet de passer d'une complexité  $O(N^2)$  à une complexité  $O(kN)$  où  $N$  est la taille de la grille utilisée. Cette technique a été introduite par Chopp [30] et développée par [1, 83, 84, 125]. Le principe est d'effectuer les calculs non plus sur toute l'image mais seulement dans une bande étroite entourant le niveau 0 de  $U$  (Fig.3.2). La bande étroite est remise à jour à chaque fois que la courbe approche des bords de celle-ci.

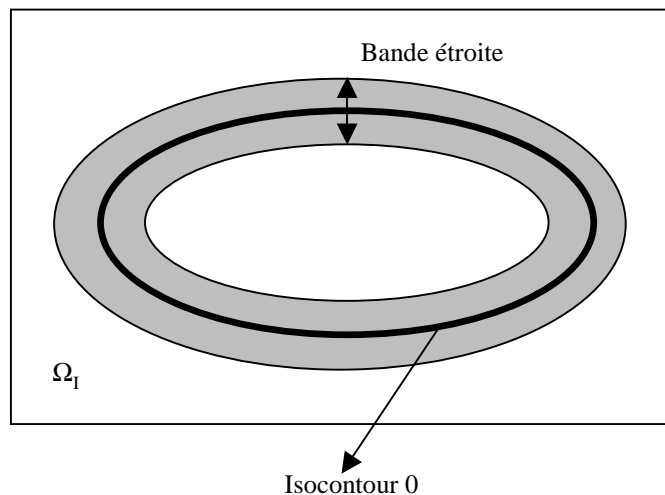


FIG. 3.2 – Bande étroite autour de l'isocontour 0 de  $U$

Des techniques rapides appelées “Fast Marching methods” [126] ont été développées pour des vitesses  $F$  positives lorsque la courbe admet un seul sens de propagation.

### 3.4.5 Perspectives

La méthode des ensembles de niveaux présente de nombreux avantages et tout particulièrement elle permet la gestion automatique des changements de topologie. Cependant, elle n'autorise pas la représentation des formes de codimension différente de un, des formes ouvertes ou des interfaces s'intersectant. Des contributions récentes proposent comme alternative d'utiliser des fonctions de distance vectorielles [115, 53].

## 3.5 CONCLUSION

Les différents travaux sur les contours actifs basés régions montrent le potentiel de ces approches pour de nombreuses applications de segmentation. Les méthodes de dérivation du critère et donc d'obtention de l'équation d'évolution du contour actif sont variées et développées pour des applications spécifiques. Dans ce contexte, notre objectif est d'élaborer un cadre de travail général pour les contours actifs basés régions. Pour cela nous proposons d'utiliser les outils de dérivation issus de l'optimisation de domaines.

Par ailleurs, les régions sont caractérisées par ce que nous avons appelé ici les descripteurs régions. On peut en distinguer deux types : les descripteurs région-indépendants et les descripteurs région-dépendants. Notre deuxième objectif est d'élaborer des modèles de descripteurs région-dépendants afin d'en faire une étude plus systématique. Cette étude nous a conduit au calcul de termes additifs dans l'équation d'évolution du contour provenant de la dépendance des descripteurs avec la région.

# De la dérivation de domaines vers des modèles de contours actifs basés régions

L'objectif de ce chapitre est de développer un cadre de travail général pour les contours actifs basés régions utilisant les outils de dérivation de domaines comme alternative au calcul des variations classiquement utilisé.

Nous proposons d'utiliser les outils de dérivation issus de l'optimisation de domaines afin de calculer l'équation d'évolution d'un contour actif à partir d'un critère combinant des termes basés régions et des termes basés contours. En effet, l'optimisation de domaines permet de résoudre des problèmes pouvant être formulés comme la minimisation de fonctionnelles définies sur une classe de domaines admissibles. Des techniques spécifiques permettent de résoudre de manière élégante les problèmes rencontrés pour la dérivation de telles fonctionnelles.

Par ailleurs, nous prenons en compte explicitement dans le calcul de l'équation d'évolution le cas général des descripteurs dépendant de la région. Nous verrons que la dépendance avec la région entraîne l'apparition de termes additifs dans l'équation d'évolution. Un formalisme est développé permettant de calculer l'équation d'évolution d'un contour actif pour de nombreux descripteurs.

Cette partie théorique a été présentée dans [72, 74, 7, 63].

## 4.1 INTRODUCTION

Afin de déduire l'équation d'évolution qui va permettre au contour actif de se diriger vers un minimum d'un critère combinant des termes basés régions et des termes basés contours, nous devons calculer la dérivée d'un terme basé régions et d'un terme basé contours introduits dans la section 2.3. Rappelons ici les notations.

Un terme basé contours est une intégrale de contour :

$$J_b(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} k_b(\mathbf{x}) d\mathbf{a}$$

où  $k_b(\mathbf{x})$  est ce que nous appellerons génériquement le descripteur de la frontière de la région  $\Omega$  noté  $\partial\Omega$  et  $d\mathbf{a}$  son élément d'aire.

Un terme basé régions est une intégrale de région :

$$J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$$

où  $k(\mathbf{x}, \Omega)$  est ce que nous appellerons génériquement le descripteur de la région  $\Omega$ . Dans le cas général, ce descripteur peut dépendre de la région elle-même, nous dirons alors que ce descripteur est dépendant de la région (région-dépendant).

Pour la segmentation par contours actifs, la fonctionnelle à minimiser notée  $J$  est en général une combinaison linéaire de termes basés régions et de termes basés contour. L'objectif est donc de trouver la partition optimale de l'image qui minimise la fonctionnelle  $J$ . On voit donc apparaître deux difficultés auxquelles l'objectif de ce chapitre est de donner des solutions.

#### 4.1.1 Difficulté 1 : Calcul de la partition optimale

Une première difficulté vient du fait que nous cherchons un domaine optimal sur une classe de domaines admissibles. L'utilisation des contours actifs et des approches par EDPs permet de faire évoluer un contour vers un minimum d'un critère. Cependant, il faut auparavant caractériser ce minimum par une condition nécessaire en calculant la dérivée du critère. La question qui se pose ici est : par rapport à quelle variable doit-on dériver ? En effet, l'ensemble des domaines de  $\mathcal{R}^n$  n'a pas une structure d'espace vectoriel. Il est donc difficile de calculer la dérivée par rapport au domaine et donc de calculer l'EDP permettant d'atteindre un minimum du critère. Pour pallier ce problème, nous proposons d'utiliser les outils de dérivation issus de l'optimisation de domaines. Le but n'est pas ici de refaire la théorie mais bien d'utiliser les théorèmes existants comme des outils puissants pour la résolution du problème rencontré. Les ouvrages de référence utilisés sont [130, 35]. A notre connaissance, l'optimisation de domaines n'a été utilisée en traitement d'images que pour le calcul du flot optique [123].

Afin de calculer l'équation d'évolution, nous proposons ici une méthode en trois étapes principales :

1. Introduction d'un schéma dynamique ou d'une suite de critères dépendant du temps,
2. Dérivation du critère en utilisant les théorèmes de dérivation de domaines,

3. Calcul de l'équation d'évolution à partir de la dérivée.

Ces trois étapes vont être détaillées dans les paragraphes suivants.

#### 4.1.2 Difficulté 2 : Les descripteurs région-dépendants

Dans les termes basés régions utilisant des descripteurs région-dépendants, il existe une double dépendance à la région comme on peut le voir sur la Fig.4.1. En effet, la région constitue le domaine d'intégration, et le descripteur dépend lui-même de la région comme le souligne la Fig.4.1.

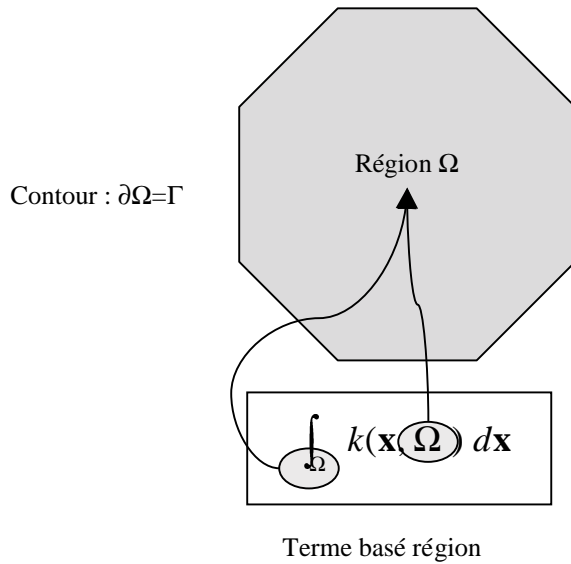


FIG. 4.1 – Double dépendance à la région des termes basés régions

Prenons quelques exemples de descripteurs région-dépendants en introduisant la moyenne  $\mu(\Omega)$  et la variance  $\sigma^2(\Omega)$  de la région  $\Omega$  :

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \sigma^2(\Omega) &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (I(\mathbf{x}) - \mu(\Omega))^2 d\mathbf{x}\end{aligned}\quad (4.1)$$

avec  $|\Omega| = \int_{\Omega} d\mathbf{x}$ .

Nous pouvons alors prendre pour le descripteur région  $k$  une fonction de la moyenne ou de la variance comme suit :

× Descripteur région fonction de la moyenne :

$$k(\mathbf{x}, \Omega) = \varphi(I(\mathbf{x}) - \mu(\Omega)) \quad (4.2)$$

× Descripteur région fonction de la variance :

$$k(\mathbf{x}, \Omega) = \varphi(\sigma^2(\Omega)) \quad (4.3)$$

avec  $\varphi(r)$  une fonction positive de classe  $C^1(\mathcal{R})$ .

Dans ces deux exemples, la dépendance du descripteur avec la région peut se situer à plusieurs niveaux : de manière directe par une intégration sur la région mais également par l'intégrande, comme c'est le cas pour la variance où le descripteur dépend doublement du domaine.

Cette dépendance possible des descripteurs avec la région doit être prise en compte dans l'équation d'évolution. En effet, nous allons montrer par la suite que cette dépendance fait apparaître des termes additifs dans l'équation d'évolution du contour actif. Ces termes additifs doivent être pris en compte afin d'atteindre un réel minimum du critère, comme nous le verrons dans les résultats expérimentaux.

Développons maintenant les différentes étapes de calcul de l'équation d'évolution pour les termes basés régions et les termes basés contours.

## 4.2 OUTILS DE DÉRIVATION DE DOMAINES

### 4.2.1 Introduction d'un schéma dynamique

#### 4.2.1.1 Principales définitions

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, nous ne pouvons calculer la dérivée du critère par rapport au domaine considéré. En effet, l'ensemble des domaines de  $\mathcal{R}^n$  n'a pas une structure d'espace vectoriel. Les techniques de dérivation de domaines consistent à reporter les variations de domaines sur des variations de fonctions appartenant à un espace vectoriel. Afin de mettre en œuvre l'analyse des dérivées de fonctionnelles de la forme  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$ , on introduit une famille de perturbations  $\{\Omega(\tau)\}$  d'un domaine de référence  $\Omega \subset \mathcal{R}^n$  pour  $0 \leq \tau < \epsilon$ . On construit une famille de transformations  $T_{\tau}$  pour  $0 \leq \tau < \epsilon$ , avec  $T_0(\Omega) = \Omega$ , qui sont bijectives de telle sorte que  $T_{\tau} : \Omega \rightarrow \Omega(\tau)$ .

Pour cette famille de transformations, on suppose les conditions suivantes satisfaites :

(C1)  $T_{\tau}(\cdot)$  et  $T_{\tau}^{-1}(\cdot)$  appartiennent à  $C^k(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^n)$  pour tout  $\tau \in [0, \epsilon]$

(C2) Les transformations  $\tau \rightarrow T_{\tau}(\mathbf{x})$  et  $\tau \rightarrow T_{\tau}^{-1}(\mathbf{x})$  appartiennent à  $C^1([0, \epsilon])$  pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ .

D'un point de vue pratique, il existe de nombreuses façons de construire la famille de déformations  $T_{\tau}$ . La plus connue est la transformation de Hadamard [58] qui peut être utilisée dans le cas particulier des domaines de classe  $C^{\infty}$  (la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$  est lisse,  $\Omega$  est localisé sur un côté de  $\Gamma$ ).

Pour un point  $\mathbf{x} \in \Omega$ , nous notons :

$$\mathbf{x}(\tau) = T(\tau, \mathbf{x}) \quad \text{avec} \quad T(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (4.4)$$

$$\Omega(\tau) = T(\tau, \Omega) \quad \text{avec} \quad T(0, \Omega) = \Omega \quad (4.5)$$

Définissons le champ des vecteurs vitesse  $\mathbf{V}$  correspondant à  $T(\tau)$  comme :

$$\mathbf{V}(\tau, \mathbf{x}) = \frac{\partial T}{\partial \tau}(\tau, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall 0 \leq \tau < \epsilon \quad (4.6)$$

#### 4.2.1.2 Autre notation du schéma dynamique

Ce formalisme s'applique aisément aux fonctionnelles de régions ou de contours que nous considérons ici. Chaque fonctionnelle peut être plongée dans un schéma dynamique de la façon suivante. Si  $\Omega(0)$  et  $\Omega(\tau)$  sont respectivement le domaine initial et celui au temps  $\tau$  mis en correspondance par l'application  $T_\tau$  :

$$\begin{aligned} \Omega(0) &\xrightarrow{T_\tau} \Omega(\tau) \\ \partial\Omega(0) &\xrightarrow{T_\tau} \partial\Omega(\tau) \end{aligned}$$

alors, on peut obtenir une suite de fonctionnelles évoluant avec  $\tau$  :

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow J_r(\Omega(\tau)) &= \int_{\Omega(\tau)} k(\mathbf{x}, \Omega(\tau)) d\mathbf{x} \\ \tau \rightarrow J_b(\partial\Omega(\tau)) &= \int_{\partial\Omega(\tau)} k_b(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

Les fonctionnelles  $J_r(\Omega(\tau))$  et  $J_b(\partial\Omega(\tau))$  peuvent alors être notées  $J_r(\tau)$  et  $J_b(\tau)$  et le descripteur région  $k(\mathbf{x}, \tau)$ , cela dans le cadre de cette notation.

On peut souligner ici le fait que le schéma dynamique est introduit directement dans le critère à minimiser contrairement aux autres approches sur les contours actifs. De cette façon, on voit apparaître directement un contour actif évoluant avec le paramètre d'évolution  $\tau$  dans le critère à minimiser.

## 4.2.2 Outils de dérivation

### 4.2.2.1 Définition des différentes dérivées utilisées

Nous introduisons trois définitions principales pour la dérivation :

**DÉFINITION 4.1.** *La dérivée Eulérienne de la fonctionnelle de domaine  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$  dans la direction du champ de vecteur  $\mathbf{V}$  est définie comme la limite :*

$$dJ_r(\Omega, \mathbf{V}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(J_r(\Omega(\tau)) - J_r(\Omega))}{\tau}$$



Il nous sera également utile d'introduire les définitions de dérivée suivantes :

DÉFINITION 4.2. *La dérivée matérielle de  $k(\mathbf{x}, \Omega)$  dans la direction  $\mathbf{V}$ , notée  $\dot{k}(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V})$  est définie par :*

$$\dot{k}(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{k(\mathbf{x}(\tau), \Omega(\tau)) - k(\mathbf{x}, \Omega)}{\tau}$$

DÉFINITION 4.3. *La dérivée de domaine de  $k(\mathbf{x}, \Omega)$  dans la direction  $\mathbf{V}$ , notée  $k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V})$  est définie par :*

$$k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{k(\mathbf{x}, \Omega(\tau)) - k(\mathbf{x}, \Omega)}{\tau}$$

#### 4.2.2.2 Relation entre les dérivées

Le théorème suivant donne une relation entre la dérivée Eulérienne et la dérivée de domaine pour une intégrale de région  $J_r(\Omega)$ . Une démonstration de ce théorème peut être trouvée dans [130, 35]. Une démonstration élémentaire est donnée ici afin d'étayer le théorème.

THEOREME 4.1. *La dérivée Eulérienne  $dJ_r(\Omega, \mathbf{V})$  de la fonctionnelle  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$  dans la direction  $\mathbf{V}$  est la suivante :*

$$dJ_r(\Omega, \mathbf{V}) = \int_{\Omega} k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

avec  $\mathbf{N}$  la normale unitaire intérieure à  $\partial\Omega$  et  $d\mathbf{a}$  son élément d'aire.

DÉMONSTRATION :

En ce qui concerne le calcul de la dérivée, nous nous intéressons uniquement aux petites déformations et on considère donc un développement limité au premier ordre de la transformation :

$$\begin{aligned} T(\tau, \mathbf{x}) &= T(0, \mathbf{x}) + \tau \frac{\partial T}{\partial \tau}(0, \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial T}{\partial \tau}(0, \mathbf{x})$ .

Nous obtenons alors les expressions suivantes pour les dérivées matérielle et de domaine :

$$\begin{aligned} \dot{k}(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{k(\mathbf{x} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x}), \Omega + \tau \mathbf{V}) - k(\mathbf{x}, \Omega)}{\tau} \\ k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{k(\mathbf{x}, \Omega + \tau \mathbf{V}) - k(\mathbf{x}, \Omega)}{\tau} \end{aligned}$$

En développant au premier ordre l'expression de la dérivée matérielle et en faisant l'hypothèse que  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \nabla k(\mathbf{x}, \Omega + \tau \mathbf{V}) = \nabla k(\mathbf{x}, \Omega)$ , on peut écrire :

$$\dot{k}(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) = k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) + \nabla k(\mathbf{x}, \Omega) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) \quad (4.7)$$

Nous pouvons maintenant calculer plus précisément la dérivée Eulérienne de  $J(\Omega)$ . Nous avons :

$$\frac{J_r(\Omega(\tau)) - J_r(\Omega)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \left[ \int_{\Omega(\tau)} k(\mathbf{x}, \Omega(\tau)) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x} \right] \quad (4.8)$$

Dans la première intégrale, on effectue le changement de variable  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x})$  ce qui conduit à :

$$\int_{\Omega(\tau)} k(\mathbf{x}, \Omega(\tau)) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} k(\mathbf{x} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x}), \Omega + \tau \mathbf{V}) |\det J_\tau(\mathbf{x})| d\mathbf{x},$$

avec  $J_\tau(\mathbf{x})$  la matrice Jacobienne :

$$J_\tau(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 + \tau \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \cdots & \tau \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau \frac{\partial V_n}{\partial x_1} & \cdots & 1 + \tau \frac{\partial V_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

où  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = [V_1(\mathbf{x}), \dots, V_n(\mathbf{x})]^T$ , et  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ . Il s'ensuit que :

$$\det J_\tau(\mathbf{x}) = 1 + \tau \operatorname{div}(\mathbf{V}(\mathbf{x})) + o(\tau)$$

et donc :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\det J_\tau(\mathbf{x}) - 1}{\tau} = \operatorname{div}(\mathbf{V}(\mathbf{x}))$$

L'équation (4.8) peut alors être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{J_r(\Omega(\tau)) - J_r(\Omega)}{\tau} = I_1 + I_2$$

avec :

$$I_1 = \int_{\Omega} \frac{k(\mathbf{x} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x}), \Omega + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x})) - k(\mathbf{x}, \Omega)}{\tau} \det(J_\tau(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

$$I_2 = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) \frac{\det(J_\tau(\mathbf{x})) - 1}{\tau} d\mathbf{x}$$

Faisons maintenant tendre  $\tau$  vers 0. En utilisant la relation 4.7 et les définitions de la dérivée matérielle et de la dérivée de forme, on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow 0} I_1 &= \int_{\Omega} \dot{k}(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla k(\mathbf{x}, \Omega) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} I_2 &= \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) \operatorname{div}(\mathbf{V}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Ainsi, pour la dérivée Eulérienne, nous trouvons :

$$\begin{aligned}dJ_r(\Omega, \mathbf{V}) &= \int_{\Omega} k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nabla k(\mathbf{x}, \Omega) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) + k(\mathbf{x}, \Omega) \operatorname{div}(\mathbf{V}(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div}(k(\mathbf{x}, \Omega) \mathbf{V}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Nous appliquons alors le théorème de Green-Riemann, ce qui finalement nous donne pour la dérivée Eulérienne :

$$dJ_r(\Omega, \mathbf{V}) = \int_{\Omega} k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) (\mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})) d\mathbf{a}(\mathbf{x})$$

avec  $\mathbf{N}$  la normale unitaire intérieure à  $\partial\Omega$ .

□

Le théorème 4.1 fournit le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 4.1.** *Si  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$  est différentiable par rapport au domaine, alors le domaine optimal de  $J_r(\Omega)$  vérifie nécessairement :*

$$\int_{\Omega} k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) (\mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})) d\mathbf{a}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{V}$$

#### 4.2.2.3 Autre notation du théorème

Une autre notation du théorème peut également être utilisée comme c'est le cas dans les articles [71, 72, 74]. Ainsi, dans la section 4.2.1.2, pour désigner respectivement  $J_r(\Omega(\tau))$  et  $k(\mathbf{x}, \Omega(\tau))$ , nous avons noté  $J_r(\tau)$  et  $k(\mathbf{x}, \tau)$ . De la même façon, on peut noter  $J_r'(\tau)$  la dérivée Eulérienne de  $J$  dans la direction  $\mathbf{V}$ . La dérivée de domaine  $k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V})$  est notée  $\frac{\partial k}{\partial \tau}(\mathbf{x}, \tau)$ .

Le théorème peut alors être exprimé d'une manière "plus physicienne" :

THEOREME 4.2. La dérivée Eulérienne  $J'_r(\tau)$  dans la direction  $\mathbf{V}$  de la fonctionnelle  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$  est :

$$J'_r(\tau) = \int_{\Omega(\tau)} \frac{\partial k}{\partial \tau}(\mathbf{x}, \tau) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega(\tau)} k(\mathbf{x}, \tau) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

avec  $\mathbf{N}$  la normale unitaire intérieure à  $\partial\Omega$  et  $d\mathbf{a}$  son élément d'aire.

Ainsi, la variation de  $J_r$  est due à la variation du descripteur  $k$  avec  $\tau$  et au mouvement du domaine  $\Omega(\tau)$ .

### 4.3 DÉRIVATION DES TERMES BASÉS RÉGIONS

#### 4.3.1 Cas des descripteurs région-indépendants

Dans le cas particulier où les descripteurs de région  $k$  ne dépendent pas de la région, il devient très facile de calculer la dérivée Eulérienne du terme basé régions  $J_r$  et l'équation d'évolution du contour actif qui en résulte grâce aux outils développés précédemment.

##### 4.3.1.1 Calcul de la dérivée Eulérienne

En effet, dans le cas de descripteurs région-indépendants, la dérivée de domaine de  $k$  est nulle puisque le descripteur  $k$  ne dépend pas de  $\Omega$ . D'après le théorème 4.1, la dérivée Eulérienne de  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$  dans la direction  $\mathbf{V}$  est :

$$dJ_r(\Omega, \mathbf{V}) = \int_{\Omega} k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

avec  $\mathbf{N}$  la normale unitaire intérieure à  $\partial\Omega$  et  $d\mathbf{a}$  son élément d'aire.

Ainsi si  $k(\mathbf{x}, \Omega) = k(\mathbf{x})$ , alors  $k' = 0$  et la dérivée Eulérienne de  $J_r$  se réduit à l'expression suivante :

$$dJ_r(\Omega, \mathbf{V}) = - \int_{\partial\Omega} k(\mathbf{x}) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a} \quad (4.9)$$

##### 4.3.1.2 Calcul de l'équation d'évolution

A partir de la dérivée Eulérienne de  $J_r$  obtenue pour les descripteurs région-indépendants, on peut calculer la vitesse d'évolution du contour actif qui fera décroître celui-ci vers un minimum de  $J_r$  et donc vers la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  de  $\Omega$ . En utilisant la méthode de la plus grande pente, on trouve pour l'équation d'évolution :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(p, \tau)}{\partial \tau} &= k(\mathbf{x}) \mathbf{N} \\ \Gamma(p, 0) &= \Gamma_0(p) \end{aligned} \quad (4.10)$$

avec  $\Gamma_0(p)$  le contour initial défini par l'utilisateur,  $\mathbf{N}$  la normale intérieure à  $\Gamma$  et  $\mathbf{x} = \Gamma(p, \tau)$  pour cette équation.

Ainsi, la vitesse issue du terme basé régions  $J_r = \int_{\Omega} k(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ , notée  $\mathbf{v}_r$ , est la suivante :

$$\mathbf{v}_r = k(\mathbf{x}) \mathbf{N} \quad (4.11)$$

### 4.3.2 Cas général

Dans cette partie, nous voulons calculer la dérivée d'un terme basé régions dans le cas général où les descripteurs sont région-dépendant, cela afin d'obtenir l'équation d'évolution résultante. Nous souhaitons mettre en œuvre un cadre de travail pouvant répondre à de nombreux descripteurs.

#### 4.3.2.1 Modélisation du descripteur

Dans cette partie, nous modélisons le descripteur région  $k$  comme une combinaison linéaire de caractéristiques globalement attachées à la région de la manière suivante, avec  $m$  un entier supérieur ou égal à 1 :

$$J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, G_1(\Omega), G_2(\Omega), \dots, G_m(\Omega)) d\mathbf{x} \quad (4.12)$$

où les fonctionnelles  $G_i$  sont elles-mêmes des fonctionnelles dépendant de la région de la manière suivante :

$$G_i(\Omega) = \int_{\Omega} h_i(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x} \quad \text{pour } i = 1..m \quad (4.13)$$

Les fonctions  $h_i$  peuvent elles-même dépendre de la région et être exprimées comme une combinaison linéaire de  $p_i$  fonctions (le nombre de fonctions est indicé par  $i$  car il dépend de  $i$ ) :

$$h_i(\mathbf{x}, \Omega) = h_i(\mathbf{x}, K_{i1}(\Omega), K_{i2}(\Omega), \dots, K_{ip_i}(\Omega)) \quad (4.14)$$

avec

$$K_{ij}(\Omega) = \int_{\Omega} l_{ij}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{pour } i = 1..m, j = 1..p_i \quad (4.15)$$

Le procédé est arrêté au deuxième niveau afin de correspondre à la plupart des descripteurs utilisés et notamment ceux utilisés ici comme les fonctions de la moyenne ou de la variance d'une région. Prenons un exemple afin d'illustrer cette modélisation de descripteurs :

**4.3.2.1.1 Exemple avec une fonction de la variance** La variance est couramment utilisée pour caractériser une région, ainsi on peut prendre comme descripteur région une fonction de la variance :

$$k(\mathbf{x}, \Omega) = \varphi(\sigma^2(\Omega)) \quad (4.16)$$

avec  $\varphi(r)$  une fonction positive de classe  $C^1(\mathcal{R})$ . La variance est définie par l'équation (4.1).

Ainsi, on trouve pour les différentes composantes du modèle :

$$J_r(\Omega) = \int_{\Omega} \varphi \left( \frac{G_1(\Omega)}{G_2(\Omega)} \right), \quad m = 2$$

Pour  $i = 1$ , on a :

$$G_1(\Omega) = \int_{\Omega} h_1(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$$

$$\text{avec } h_1(\mathbf{x}, \Omega) = \left( I(\mathbf{x}) - \frac{K_{11}(\Omega)}{K_{12}(\Omega)} \right)^2, \quad p_1 = 2$$

$$\text{et } K_{11}(\Omega) = \int_{\Omega} l_{11}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad l_{11}(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x})$$

$$K_{12}(\Omega) = \int_{\Omega} l_{12}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad l_{12}(\mathbf{x}) = 1$$

Pour  $i = 2$ , on a :

$$G_2(\Omega) = \int_{\Omega} h_2(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$$

$$\text{avec } h_2(\mathbf{x}, \Omega) = 1, \quad p_2 = 0$$

**4.3.2.1.2 Exemple avec une fonction de la moyenne** La moyenne peut également être utilisée pour caractériser une région, ainsi on peut prendre comme descripteur région une fonction de la moyenne :

$$k(\mathbf{x}, \Omega) = \varphi(I - \mu(\Omega)) \quad (4.17)$$

avec  $\varphi(r)$  une fonction positive de classe  $C^1(\mathcal{R})$ . La moyenne est définie par l'équation (4.1).

Ainsi, on trouve pour les différentes composantes du modèle :

$$J_r(\Omega) = \int_{\Omega} \varphi \left( I - \frac{G_1(\Omega)}{G_2(\Omega)} \right), \quad m = 2$$

Pour  $i = 1$ , on a :

$$G_1(\Omega) = \int_{\Omega} h_1(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$$

$$\text{avec } h_1(\mathbf{x}, \Omega) = I(\mathbf{x}), \quad p_1 = 0$$

Pour  $i = 2$ , on a :

$$G_2(\Omega) = \int_{\Omega} h_2(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$$

avec  $h_2(\mathbf{x}, \Omega) = 1, \quad p_2 = 0$

Dans ce cas, la dépendance du descripteur avec la région ne se fait qu'a un seul niveau ( $p_i = 0 \forall i$ ).

#### 4.3.2.2 Calcul de la dérivée Eulérienne

Pour ce modèle, nous pouvons maintenant calculer explicitement la dérivée Eulérienne de  $J_r$  en utilisant le théorème 4.2.

**THEOREME 4.3.** *Soit  $J_r$  le terme basé région défini section 4.3.2.1, sa dérivée Eulérienne dans la direction  $\mathbf{V}$  est :*

$$dJ_r(\Omega, \mathbf{V}) = - \int_{\partial\Omega} \left( k(\mathbf{x}, \Omega) + \sum_{i=1}^m (A_i h_i(\mathbf{x}, \Omega)) + \sum_{i=1}^m A_i \sum_{j=1}^{p_i} (B_{ij} l_{ij}(\mathbf{x})) \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

avec pour  $i = 1..m$  :

$$A_i = \int_{\Omega} \frac{\partial k}{\partial G_i}(\mathbf{x}, G_1(\Omega), \dots, G_m(\Omega)) d\mathbf{x} \quad (4.18)$$

et pour  $i = 1..m, j = 1..p_i$  :

$$B_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\partial h_i}{\partial K_{ij}}(\mathbf{x}, K_{i1}(\Omega), \dots, K_{ip_i}(\Omega)) d\mathbf{x} \quad (4.19)$$

**DÉMONSTRATION :**

Selon le théorème 4.1, nous avons pour la dérivée Eulérienne de  $J_r$  dans la direction  $\mathbf{V}$  :

$$dJ_r(\Omega, \mathbf{V}) = \int_{\Omega} k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

Nous devons donc évaluer la dérivée de domaine du descripteur  $k$ . D'après la modélisation de  $k$  donnée équation (4.12), on trouve :

$$k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial k}{\partial G_i}(\mathbf{x}, G_1(\Omega), \dots, G_m(\Omega)) dG_i(\Omega, \mathbf{V})$$

Nous devons donc maintenant calculer la dérivée Eulérienne de  $G_i(\Omega) = \int_{\Omega} h_i(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$  dans la direction  $\mathbf{V}$ . Nous appliquons le théorème 4.1, ce qui donne pour  $i = 1..m$  :

$$dG_i(\Omega, \mathbf{V}) = \int_{\Omega} h_i'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} h_i(\mathbf{x}, \Omega) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

De même, d'après la modélisation de  $h_i$  donné équation (4.14), on a :

$$h_i'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) = \sum_{j=1}^{p_i} \frac{\partial h_i}{\partial K_{ij}}(\mathbf{x}, K_{i1}(\Omega), \dots, K_{ip_i}(\Omega)) dK_{ij}(\Omega, \mathbf{V}) \quad (4.20)$$

D'après l'équation (4.15) et en appliquant encore une fois le théorème 4.1, on trouve pour la dérivée Eulérienne de  $K_{ij}$  dans la direction  $\mathbf{V}$ , pour  $i = 1..m, j = 1..p_i$  :

$$dK_{ij}(\Omega, \mathbf{V}) = \int_{\Omega} l_{ij}'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} l_{ij}(\mathbf{x}, \Omega) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) da$$

Or nous avons défini  $l_{ij}$  comme une fonction ne dépendant pas de la région  $\Omega$ , on a donc  $l_{ij}'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) = 0$ . L'équation donnant la dérivée Eulérienne de  $K_{ij}$  dans la direction  $\mathbf{V}$  se réduit alors à :

$$dK_{ij}(\Omega, \mathbf{V}) = - \int_{\partial\Omega} l_{ij}(\mathbf{x}) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) da$$

On peut maintenant remplacer  $dK_{ij}(\Omega, \mathbf{V})$  par l'expression ci-dessus dans l'équation (4.20) donnant  $h_i'$ , ce qui donne :

$$h_i'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) = - \sum_{j=1}^{p_i} \frac{\partial h_i}{\partial K_{ij}}(\mathbf{x}, K_{i1}(\Omega), \dots, K_{ip_i}(\Omega)) \int_{\partial\Omega} l_{ij}(\mathbf{x}) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) da$$

Cette relation nous donne alors pour  $dG_i(\Omega, \mathbf{V})$  :

$$dG_i(\Omega, \mathbf{V}) = - \int_{\partial\Omega} \left( \sum_{j=1}^{p_i} (B_{ij} l_{ij}(\mathbf{x})) + h_i(\mathbf{x}, \Omega) \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) da$$

en définissant pour  $i = 1..m, j = 1..p_i$  :

$$B_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\partial h_i}{\partial K_{ij}}(\mathbf{x}, K_{i1}(\Omega), \dots, K_{ip_i}(\Omega)) d\mathbf{x}$$

On peut maintenant remplacer  $dG_i(\Omega, \mathbf{V})$  par l'expression ci-dessus dans l'équation (4.20) donnant  $k'$ , ce qui donne :

$$k'(\mathbf{x}, \Omega, \mathbf{V}) = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial k}{\partial G_i} \int_{\partial\Omega} \left( \sum_{j=1}^{p_i} B_{ij} l_{ij}(\mathbf{x}) + h_i(\mathbf{x}, \Omega) \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) da$$

Cette relation nous donne finalement pour  $dJ_r(\Omega, \mathbf{V})$  :

$$dJ_r(\Omega, \mathbf{V}) = - \int_{\partial\Omega} \left( k(\mathbf{x}, \Omega) + \sum_{i=1}^m (A_i h_i(\mathbf{x}, \Omega)) + \sum_{i=1}^m A_i \sum_{j=1}^{p_i} (B_{ij} l_{ij}(\mathbf{x})) \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) da$$



avec

$$A_i = \int_{\Omega} \frac{\partial k}{\partial G_i}(\mathbf{x}, G_1(\Omega), \dots, G_m(\Omega)) d\mathbf{x}$$

□

#### 4.3.2.3 Calcul de l'équation d'évolution

Le théorème 4.3 nous donne le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 4.2.** *Si  $J_r$  est différentiable par rapport au domaine, alors le domaine optimal de  $J_r(\Omega)$  vérifie nécessairement :*

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\Omega} \left( k(\mathbf{x}, \Omega) + \sum_{i=1}^m (A_i h_i(\mathbf{x}, \Omega)) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^m A_i \sum_{j=1}^{p_i} (B_{ij} l_{ij}(\mathbf{x})) \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a} = 0 \quad \forall \mathbf{V} \end{aligned}$$

avec pour  $i = 1..m$  :

$$A_i = \int_{\Omega} \frac{\partial k}{\partial G_i}(\mathbf{x}, G_1(\Omega), \dots, G_m(\Omega)) d\mathbf{x}$$

et pour  $i = 1..m, j = 1..p_i$  :

$$B_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\partial h_i}{\partial K_{ij}}(\mathbf{x}, K_{i1}(\Omega), \dots, K_{ip_i}(\Omega)) d\mathbf{x}$$

Afin de trouver un minimum du critère  $J_r$ , l'objectif est de faire évoluer un contour actif avec une EDP de la forme (2.1). A partir de la dérivée Eulérienne du terme basé région, on en déduit la vitesse d'évolution du contour suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(p, \tau)}{\partial \tau} &= \left[ k(\mathbf{x}, \Omega) + \sum_{i=1}^m (A_i h_i(\mathbf{x}, \Omega)) + \sum_{i=1}^m A_i \sum_{j=1}^{p_i} (B_{ij} l_{ij}(\mathbf{x})) \right] \mathbf{N} \\ \Gamma(p, 0) &= \Gamma_0(p) \end{aligned} \quad (4.21)$$

avec  $\Gamma_0(p)$  le contour initial défini par l'utilisateur et  $\mathbf{x} = \Gamma(p, \tau)$  dans l'équation. Ainsi, avec cette modélisation du contour, la vitesse issue du terme basé régions  $J_r$  est la suivante :

$$\mathbf{v}_r = \left[ k(\mathbf{x}, \Omega) + \sum_{i=1}^m (A_i h_i(\mathbf{x}, \Omega)) + \sum_{i=1}^m A_i \sum_{j=1}^{p_i} (B_{ij} l_{ij}(\mathbf{x})) \right] \mathbf{N} \quad (4.22)$$

En comparant la vitesse obtenue dans le cas de descripteurs région-indépendants (4.11) et celle obtenue pour les descripteurs région-dépendants (4.22), on observe que la dépendance du descripteur avec la région induit des termes additifs dans l'équation d'évolution, à savoir :  $\left(\sum_{i=1}^m (A_i h_i(\mathbf{x}, \Omega)) + \sum_{i=1}^m A_i \sum_{j=1}^{p_i} (B_{ij} l_{ij}(\mathbf{x}))\right)$ . Dans la majorité des cas, ces termes sont non nuls et jouent un rôle important dans l'évolution du contour vers un minimum du critère. L'importance de ces termes additifs sera mise en évidence dans le chapitre 5. A notre connaissance, les termes mis en évidence ici n'avaient jamais été calculés explicitement dans la littérature. En effet, les descripteurs région-dépendants n'ont pas été étudiés de manière générale. Nous montrons, cependant, dans la section 4.6, que l'approche de dérivation classique utilisant le calcul des variations conduit également à la même équation d'évolution. Une comparaison de ces deux approches (calcul des variations ou dérivation de domaines) est proposée section 4.6.

#### 4.3.2.4 Mise en œuvre pour quelques exemples

Dans cette partie, nous allons calculer explicitement la dérivée Eulérienne du critère et l'équation d'évolution résultante pour deux exemples.

**4.3.2.4.1 Exemple avec une fonction de la variance** Pour des descripteurs dépendants de la variance définis équation (4.16), nous avons vu section 4.3.2.1 à quoi correspondaient les différents termes du modèle proposé. Nous pouvons donc calculer explicitement la dérivée Eulérienne du terme basé régions correspondant. Il nous faut calculer les termes  $A_i$  et  $B_{ij}$  pour  $i = 1$ ,  $j \in \{1, 2\}$  et  $i = 2$ .

Pour  $i = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} A_1(\Omega) &= \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial G_1} \left( \frac{G_1(\Omega)}{G_2(\Omega)} \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{1}{G_2(\Omega)} \varphi' \left( \frac{G_1(\Omega)}{G_2(\Omega)} \right) d\mathbf{x} \\ &= \varphi'(\sigma^2(\Omega)) \end{aligned}$$

avec  $\varphi'(r) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r)$ .

Nous avons  $p_1 = 2$  et donc les termes  $B_{11}$  et  $B_{12}$  doivent également être calculés :

$$\begin{aligned} B_{11} &= \int_{\Omega} \frac{\partial h_1}{\partial K_{11}}(\mathbf{x}, K_{11}(\Omega), K_{12}(\Omega)) d\mathbf{x} \\ &= -\frac{2}{|\Omega|} \int_{\Omega} (I(\mathbf{x}) - \mu(\Omega)) d\mathbf{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{12} &= \int_{\Omega} \frac{\partial h_1}{\partial K_{12}}(\mathbf{x}, K_{11}(\Omega), K_{12}(\Omega)) d\mathbf{x} \\
&= 2 \frac{\mu(\Omega)}{|\Omega|} \int_{\Omega} (I(\mathbf{x}) - \mu(\Omega)) d\mathbf{x} = 0
\end{aligned}$$

Pour  $i = 2$ , on a :

$$\begin{aligned}
A_2(\Omega) &= \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial G_2} \left( \frac{G_1(\Omega)}{G_2(\Omega)} \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{-G_1(\Omega)}{G_2(\Omega)^2} \varphi' \left( \frac{G_1(\Omega)}{G_2(\Omega)} \right) d\mathbf{x} \\
&= -\sigma^2(\Omega) \varphi'(\sigma^2(\Omega))
\end{aligned}$$

avec  $\varphi'(r) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r)$ .

Nous avons  $p_2 = 0$  et donc pas de termes  $B_{2j}$  dans l'équation.

D'après le théorème 4.3, en remplaçant tous les termes, on trouve pour la dérivée Eulérienne de  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} \varphi(\sigma^2(\Omega)) d\mathbf{x}$  dans la direction  $\mathbf{V}$  :

$$dJ_r(\Omega, \mathbf{V}) = - \int_{\partial\Omega} (\varphi(\sigma^2(\Omega)) + \varphi'(\sigma^2(\Omega))[(I - \mu(\Omega))^2 - \sigma^2(\Omega)])(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) da$$

Ce qui donne pour la vitesse d'évolution du contour actif :

$$\mathbf{v}_r = \left[ \varphi(\sigma^2(\Omega)) + \varphi'(\sigma^2(\Omega))[(I - \mu(\Omega))^2 - \sigma^2(\Omega)] \right] \mathbf{N}$$

Les termes additifs provenant de la dépendance des descripteurs avec la régions sont  $\varphi'(\sigma^2(\Omega))[(I - \mu(\Omega))^2 - \sigma^2(\Omega)]$ . Il est intéressant de noter que la différence locale entre l'intensité et la moyenne apparaît ici. Minimiser la variance dans le critère implique localement de comparer l'intensité avec la moyenne de la région lors de l'évolution du contour. En passant du critère à l'EDP, on passe ici d'une information globale à une information locale. Si la différence  $(I - \mu(\Omega))^2$  est supérieure à  $\sigma^2(\Omega)$ , la vitesse pourra être positive et le contour va se rétracter. Ceci a pour effet d'exclure le point  $\mathbf{x}$  de la région dont l'intensité était trop éloignée de l'intensité moyenne de la région. Cette évolution va par ailleurs bien dans le sens d'une diminution de la variance de la région. Inversement si la différence  $(I - \mu(\Omega))^2$  est inférieure à  $\sigma^2(\Omega)$ , le contour aura tendance à se dilater, incluant le point  $\mathbf{x}$  dans la région. L'autre terme  $\varphi(\sigma^2(\Omega))$  correspond à une minimisation du volume de la région pondérée par  $\varphi(\sigma^2(\Omega))$ . Correspondant à une force ballon [27], il va permettre d'accélérer le processus. Plus la variance sera élevée, plus le contour va se rétracter. Ce terme permet de garder une information globale sur la région. En effet si la variance est élevée mais que localement on se trouve à un endroit où la différence  $(I - \mu(\Omega))^2 - \sigma^2(\Omega)$  est négative, ou proche de 0, le contour va continuer à se rétracter. Il fonctionne comme un seuil qui permet de juger si la différence  $(I - \mu(\Omega))^2 - \sigma^2(\Omega)$  est significative ou non. Plus la variance est importante et moins les termes locaux participent à l'évolution. Lorsque la variance devient faible, les termes locaux prennent alors toute leur importance.

**4.3.2.4.2 Exemple avec une fonction de la moyenne** Pour des descripteurs dépendant de la moyenne ayant pour équation (4.17), nous avons vu également section 4.3.2.1 à quoi correspondaient les différents termes du modèle proposé. Nous pouvons donc calculer explicitement la dérivée Eulérienne du terme basé régions correspondant. Il nous faut calculer les termes  $A_i$  et  $B_{ij}$ .

Pour  $i = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} A_1(\Omega) &= \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial G_1} \left( I(\mathbf{x}) - \frac{G_1(\Omega)}{G_2(\Omega)} \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{-1}{G_2(\Omega)} \varphi' \left( I(\mathbf{x}) - \frac{G_1(\Omega)}{G_2(\Omega)} \right) d\mathbf{x} \\ &= \frac{-1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi'(I - \mu(\Omega)) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

avec  $\varphi'(r) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r)$ .

Pour  $i = 2$ , on a :

$$\begin{aligned} A_2(\Omega) &= \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial G_2} \left( I(\mathbf{x}) - \frac{G_1(\Omega)}{G_2(\Omega)} \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{G_1(\Omega)}{G_2(\Omega)^2} \varphi' \left( I(\mathbf{x}) - \frac{G_1(\Omega)}{G_2(\Omega)} \right) d\mathbf{x} \\ &= \frac{\mu(\Omega)}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi'(I - \mu(\Omega)) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

avec  $\varphi'(r) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r)$ .

Nous avons  $p_1 = 0$  et  $p_2 = 0$  et donc pas de termes  $B_{ij}$  dans l'équation.

D'après le théorème 4.3, en remplaçant tous les termes, on trouve pour la dérivée Eulérienne de  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} \varphi(I - \mu(\Omega)) d\mathbf{x}$  dans la direction  $\mathbf{V}$  :

$$dJ_r(\Omega, \mathbf{V}) = - \int_{\partial\Omega} \left( \varphi(I - \mu(\Omega)) - \frac{(I - \mu(\Omega))}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi'(I - \mu(\Omega)) \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

Ce qui donne pour la vitesse d'évolution du contour actif :

$$\mathbf{v}_r = \left[ \varphi(I - \mu(\Omega)) - \frac{(I - \mu(\Omega))}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi'(I - \mu(\Omega)) \right] \mathbf{N}$$

**REMARQUE 4.1.** Dans le cas particulier où  $\varphi(r) = r^2$ , on a  $\varphi'(r) = 2r$  et donc la vitesse d'évolution trouvée se réduit à  $\mathbf{v}_r = (\varphi(I - \mu(\Omega))) \mathbf{N}$ . Les termes additifs provenant de la dépendance du descripteur avec la région disparaissent dans ce cas particulier.

#### 4.4 DÉRIVATION DES TERMES BASÉS CONTOURS

Des résultats concernant la dérivée Eulérienne d'une intégrale de contour peuvent être trouvés dans [130]. Nous les rappelons ici afin de compléter notre étude.

#### 4.4.1 Calcul de la dérivée Eulérienne

Soit  $\Gamma = \partial\Omega$  la frontière du domaine  $\Omega$ , on a :

THEOREME 4.4. La dérivée Eulérienne  $dJ_b$  de la fonctionnelle  $J_b(\Omega) = \int_{\partial\Omega} k_b(\mathbf{x}) d\mathbf{a}$  dans la direction  $v_n = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})$  est :

$$dJ_b(\Gamma, v_n) = \int_{\partial\Omega} (\nabla k_b(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N} - k_b(\mathbf{x}) \kappa) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

avec  $\mathbf{N}$  la normale unitaire intérieure à  $\Gamma$ ,  $\kappa$  la courbure moyenne de  $\Gamma$  et  $d\mathbf{a}$  son élément d'aire.

#### 4.4.2 Calcul de l'équation d'évolution

A partir de la dérivée Eulérienne de  $J_b$  obtenue précédemment, on peut calculer la vitesse d'évolution du contour actif qui fera décroître celui-ci vers un minimum de  $J_b$ . On trouve pour l'équation d'évolution permettant de faire évoluer un contour actif vers un minimum d'un terme basé contour :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(p, \tau)}{\partial \tau} &= (k_b(\mathbf{x}) \kappa - \nabla k_b(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} \\ \Gamma(p, 0) &= \Gamma_0(p) \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec  $\Gamma_0(p)$  le contour initial défini par l'utilisateur et  $\mathbf{x} = \Gamma(p, \tau)$  dans cette équation.

Ainsi, la vitesse issue du terme basé contour  $J_b = \int_{\Gamma} k_b(\mathbf{x}) d\mathbf{a}$  est la suivante :

$$\mathbf{v}_b = (k_b(\mathbf{x}) \kappa - \nabla k_b(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} \quad (4.24)$$

Cette vitesse est celle calculée par Caselles et al [18].

### 4.5 MODÈLE POUR LA SEGMENTATION EN DEUX RÉGIONS

Nous allons nous servir des résultats précédents afin de donner les équations générales pour la partition d'une image en deux régions. Rappelons les notations,  $\Omega_{in}$  est la région contenant les objets à segmenter et  $\Omega_{out}$  la région du fond. L'interface entre ces deux ouverts est noté  $\Gamma$ . Nous prendrons  $\Gamma = \partial\Omega_{in}$  ce qui implique que  $\Gamma$  est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport à  $\Omega_{in}$ .

La fonctionnelle générale à minimiser est alors la suivante :

$$J(\Omega_{in}, \Omega_{out}, \Gamma) = \int_{\Omega_{in}} k_{in}(\mathbf{x}, \Omega_{in}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{out}} k_{out}(\mathbf{x}, \Omega_{out}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} k_b(\mathbf{x}) d\mathbf{a}$$

avec  $k_{in}$  le descripteur des objets à segmenter,  $k_{out}$  le descripteur de la région du fond, et  $k_b$  le descripteur du contour.

L'objectif de cette partie est de donner l'équation d'évolution d'un contour actif qui va permettre de faire évoluer celui-ci d'une configuration initiale donnée par l'utilisateur vers un minimum du critère  $J(\Omega_{in}, \Omega_{out}, \Gamma)$ , c'est à dire vers l'interface  $\Gamma$  des deux régions  $\Omega_{in}$  et  $\Omega_{out}$ . Pour cela, nous allons utiliser les résultats des sections 4.3.1, 4.3.2 et 4.4. Calculons tout d'abord l'équation d'évolution dans le cas de descripteurs  $k_{in}$  et  $k_{out}$  indépendants de la région, puis dans le cas général.

#### 4.5.1 Cas des descripteurs région-indépendants

Soit  $\Gamma = \partial\Omega_{in}$ , la normale intérieure  $\mathbf{N}$  à  $\partial\Omega_{in}$  est la normale extérieure à  $\partial\Omega_{out}$ . Nous devons faire attention au sens de la normale afin de calculer les dérivées Eulériennes des différents termes du critère  $J$ .

D'après l'équation 4.9, la dérivée Eulérienne de  $J_r(\Omega_{in}) = \int_{\Omega_{in}} k_{in}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  dans la direction  $\mathbf{V}$  est la suivante :

$$dJ_r(\Omega_{in}, \mathbf{V}) = - \int_{\Gamma} k_{in}(\mathbf{x}) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) da$$

De même, on trouve pour la dérivée Eulérienne de  $J_r(\Omega_{out}) = \int_{\Omega_{out}} k_{out}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  dans la direction  $\mathbf{V}$  :

$$dJ_r(\Omega_{out}, \mathbf{V}) = + \int_{\Gamma} k_{out}(\mathbf{x}) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) da$$

Par ailleurs, d'après le théorème 4.4, la dérivée Eulérienne de  $J_b(\Gamma) = \int_{\Gamma} k_b(\mathbf{x}) da$  dans la direction  $\mathbf{V}$  est :

$$dJ_b(\Gamma, \mathbf{V}) = \int_{\Gamma} (\nabla k_b(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N} - k_b(\mathbf{x}) \kappa) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) da$$

De ces trois dérivées, on peut déduire l'équation d'évolution d'un contour actif qui évoluera vers un minimum du critère  $J$  défini en (2.5). On trouve l'équation d'évolution suivante dans le cas de descripteurs région-indépendants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(p, \tau)}{\partial \tau} &= (k_{in}(\mathbf{x}) - k_{out}(\mathbf{x}) + k_b(\mathbf{x}) \kappa - \nabla k_b(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} \quad (4.25) \\ \Gamma(p, 0) &= \Gamma_0(p) \end{aligned}$$

avec  $\Gamma_0(p)$  le contour initial défini par l'utilisateur et  $\mathbf{x} = \Gamma(p, \tau)$  pour cette équation.

Le fait que la vitesse du contour puisse être positive ou négative constitue l'une des propriétés intéressantes des contours actifs basés régions. En effet, dans les contours actifs basés contours, un seul sens de propagation est possible, ce qui nécessite de choisir un contour initial soit à l'extérieur de l'objet à segmenter soit à l'intérieur. Le terme de rappel des contours

actifs géodésiques soit  $(\nabla g \cdot \mathbf{N})$ , peut changer de signe selon la position du contour mais il est négligeable lorsque le contour se trouve éloigné de l'objet. Le double sens de propagation permet ici une initialisation moins contrainte. Nous illustrons cela en dimension 2 par la Fig.4.2. Si un point  $\mathbf{x}$  appartient à la région  $\Omega_{out}$ , le descripteur  $k_{out}(\mathbf{x})$  sera minimal et la vitesse pourra alors être positive en ce point permettant au contour de se rétracter. A contrario, si un point  $\mathbf{x}$  appartient à la région  $\Omega_{in}$ , le descripteur  $k_{in}(\mathbf{x})$  sera minimal et la vitesse pourra alors être négative en ce point permettant au contour de se dilater.

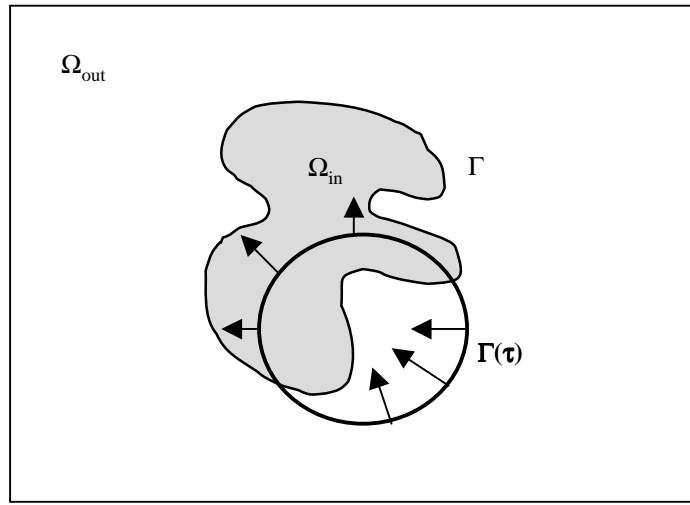


FIG. 4.2 – Le double sens de propagation des contours actifs basés régions

#### 4.5.2 Cas Général

Afin de calculer l'équation d'évolution dans le cas des descripteurs région-dépendants, il nous faut auparavant modéliser ces descripteurs. Nous utiliserons le modèle détaillé dans la partie 4.3.2.1. Ainsi nous prenons pour  $k_{in}$  et  $k_{out}$  :

$$\begin{aligned} k_{in}(\mathbf{x}, \Omega_{in}) &= k_{in}(\mathbf{x}, G_1^{(in)}(\Omega), G_2^{(in)}(\Omega), \dots, G_m^{(in)}(\Omega)) \\ k_{out}(\mathbf{x}, \Omega_{out}) &= k_{out}(\mathbf{x}, G_1^{(out)}(\Omega), G_2^{(out)}(\Omega), \dots, G_q^{(out)}(\Omega)) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} G_i^{(in)}(\Omega_{in}) &= \int_{\Omega_{in}} h_i^{(in)}(\mathbf{x}, \Omega_{in}) d\mathbf{x} \quad \text{pour } i = 1..m \\ G_i^{(out)}(\Omega_{out}) &= \int_{\Omega_{out}} h_i^{(out)}(\mathbf{x}, \Omega_{out}) d\mathbf{x} \quad \text{pour } i = 1..q \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} h_i^{(in)}(\mathbf{x}, \Omega_{in}) &= h_i^{(in)}(\mathbf{x}, K_{i1}^{(in)}(\Omega_{in}), K_{i2}^{(in)}(\Omega_{in}), \dots, K_{ip_i}^{(in)}(\Omega_{in})) \\ h_i^{(out)}(\mathbf{x}, \Omega_{out}) &= h_i^{(out)}(\mathbf{x}, K_{i1}^{(out)}(\Omega), K_{i2}^{(out)}(\Omega), \dots, K_{id_i}^{(out)}(\Omega_{out})) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} K_{ij}^{(in)}(\Omega_{in}) &= \int_{\Omega_{in}} l_{ij}^{(in)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{pour } j = 1..p_i, i = 1..m \\ K_{ij}^{(out)}(\Omega_{out}) &= \int_{\Omega_{out}} l_{ij}^{(out)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{pour } j = 1..d_i, i = 1..q \end{aligned}$$

D'après le théorème 4.3, la dérivée Eulérienne de  $J_r(\Omega_{in}) = \int_{\Omega_{in}} k_{in}(\mathbf{x}, \Omega_{in}) d\mathbf{x}$  dans la direction  $\mathbf{V}$  est la suivante :

$$\begin{aligned} dJ_r(\Omega_{in}, \mathbf{V}) &= - \int_{\Gamma} [ k_{in}(\mathbf{x}, \Omega_{in}) + \sum_{i=1}^m (A_i^{(in)} h_i^{(in)}(\mathbf{x}, \Omega_{in})) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m A_i^{(in)} \sum_{j=1}^{p_i} (B_{ij}^{(in)} l_{ij}^{(in)}(\mathbf{x})) ] (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a} \end{aligned}$$

avec pour  $i = 1..m$  :

$$A_i^{(in)} = \int_{\Omega_{in}} \frac{\partial k_{in}}{\partial G_i^{(in)}}(\mathbf{x}, G_1^{(in)}(\Omega_{in}), \dots, G_m^{(in)}(\Omega_{in})) d\mathbf{x} \quad (4.26)$$

et pour  $i = 1..m, j = 1..p_i$  :

$$B_{ij}^{(in)} = \int_{\Omega_{in}} \frac{\partial h_i^{(in)}}{\partial K_{ij}^{(in)}}(\mathbf{x}, K_{i1}^{(in)}(\Omega_{in}), \dots, K_{ip_i}^{(in)}(\Omega_{in})) d\mathbf{x} \quad (4.27)$$

De même, en faisant attention à la direction de la normale, on trouve pour la dérivée Eulérienne de  $J_r(\Omega_{out}) = \int_{\Omega_{out}} k_{out}(\mathbf{x}, \Omega_{out}) d\mathbf{x}$  dans la direction  $\mathbf{V}$  :

$$\begin{aligned} dJ_r(\Omega_{out}, \mathbf{V}) &= + \int_{\Gamma} [ k_{out}(\mathbf{x}, \Omega_{out}) + \sum_{i=1}^q (A_i^{(out)} h_i^{(out)}(\mathbf{x}, \Omega_{out})) \\ &\quad + \sum_{i=1}^q A_i^{(out)} \sum_{j=1}^{d_i} (B_{ij}^{(out)} l_{ij}^{(out)}(\mathbf{x})) ] (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a} \end{aligned}$$

avec pour  $i = 1..q$  :

$$A_i^{(out)} = \int_{\Omega_{out}} \frac{\partial k_{out}}{\partial G_i^{(out)}}(\mathbf{x}, G_1^{(out)}(\Omega_{out}), \dots, G_q^{(out)}(\Omega_{out})) d\mathbf{x} \quad (4.28)$$



et pour  $i = 1..q, j = 1..d_i$  :

$$B_{ij}^{(out)} = \int_{\Omega_{out}} \frac{\partial h_i^{(out)}}{\partial K_{ij}^{(out)}}(\mathbf{x}, K_{i1}^{(out)}(\Omega_{out}), \dots, K_{id_i}^{(out)}(\Omega_{out})) d\mathbf{x} \quad (4.29)$$

Par ailleurs, d'après le théorème 4.4, la dérivée Eulérienne de  $J_b(\Gamma) = \int_{\Gamma} k_b(\mathbf{x}) da$  dans la direction  $\mathbf{V}$  est :

$$dJ_b(\Gamma, \mathbf{V}) = \int_{\Gamma} (\nabla k_b(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N} - k_b(\mathbf{x}) \kappa) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

De ces trois dérivées, on peut déduire l'équation d'évolution d'un contour actif qui évoluera vers un minimum du critère  $J$  défini en (4.25). On trouve l'équation d'évolution suivante dans le cas de descripteurs région-dépendants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(p, \tau)}{\partial \tau} &= [k_{in}(\mathbf{x}) - k_{out}(\mathbf{x}) + k_b(\mathbf{x}) \kappa - \nabla k_b(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N} \quad (4.30) \\ &+ \sum_{i=1}^m (A_i^{(in)} h_i^{(in)}(\mathbf{x}, \Omega_{in})) \\ &+ \sum_{i=1}^m A_i^{(in)} \sum_{j=1}^{p_i} (B_{ij}^{(in)} l_{ij}^{(in)}(\mathbf{x})) \\ &- \sum_{i=1}^q (A_i^{(out)} h_i^{(out)}(\mathbf{x}, \Omega_{out})) \\ &- \sum_{i=1}^q A_i^{(out)} \sum_{j=1}^{d_i} (B_{ij}^{(out)} l_{ij}^{(out)}(\mathbf{x})) ] \mathbf{N} \end{aligned}$$

avec  $\Gamma_0(p)$  le contour initial défini par l'utilisateur, et  $\mathbf{x} = \Gamma(p, \tau)$ .

Les termes additifs provenant de la dépendance des descripteurs avec la région sont les quatre dernières lignes de l'équation (4.30).

#### 4.6 COMPARAISON AVEC LES MÉTHODES DE DÉRIVATION CLASSIQUES

Nous avons vu dans la partie 3.3 que plusieurs méthodes d'obtention de l'équation d'évolution du contour actif avaient été développées dans la littérature. L'une des méthodes classiques consiste en la transformation des termes basés régions en intégrales de contours en utilisant le théorème de Green-Riemann. En effet, en transformant les intégrales de domaines en intégrales de contours, la fonctionnelle  $J$  à minimiser dépend alors de  $\Gamma$  où  $\Gamma$  appartient à l'ensemble des fonctions  $C^1$  de  $[a, b] \rightarrow \mathcal{R}^2$  avec  $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ . Cet ensemble est un espace vectoriel. On peut alors utiliser le calcul des variations afin d'obtenir l'expression de la dérivée du critère  $J$  ainsi transformé.

Lorsque l'on ne transforme pas les termes régions en intégrales de contour, la difficulté dans le calcul de la dérivée vient du fait que l'ensemble des domaines de  $\mathcal{R}^n$  n'a pas une structure d'espace vectoriel. Afin de conserver la formulation initiale du critère, nous avons proposé précédemment d'utiliser les outils de dérivation issus de l'optimisation de domaines.

L'objectif de cette partie est de comparer les deux approches et de montrer que l'on aboutit aux mêmes résultats en utilisant le calcul des variations et en utilisant les outils de dérivation de domaines. Nous avons calculé la dérivée du critère par les outils de dérivation de domaines pour des descripteurs dépendant et indépendant de la région. Nous montrons ici que les termes additifs mis en évidence précédemment pour les descripteurs régions-dépendants peuvent également être trouvés en utilisant le calcul des variations après transformation des intégrales de domaines en intégrales de contour <sup>1</sup>.

Nous commencerons par clarifier les équivalences entre termes régions et termes contours. Nous montrons qu'un terme basé régions peut être exprimé comme un terme basé contours et inversement. Ensuite, nous calculerons l'équation d'évolution provenant d'un terme basé régions  $J_r$  en développant les trois étapes suivantes dans le cas des descripteurs indépendant de la région puis dans le cas général :

1. Transformation des termes basés régions en intégrales de contours,
2. Calcul de la dérivée de Gâteaux du critère,
3. Calcul de l'équation d'évolution à partir de la dérivée.

#### 4.6.1 Equivalence termes régions, termes contours

Dans cette section, nous montrons qu'une intégrale de région peut toujours être exprimée comme une intégrale de contour et réciproquement.

##### 4.6.1.1 Transformation d'intégrales de régions en intégrales de contours

PROPOSITION 4.1. *Soit  $\Omega$  un ensemble ouvert borné avec un contour régulier  $\partial\Omega$ . Soit  $k : \overline{\Omega} \rightarrow \mathcal{R}$  une fonction continue et  $u$  l'unique solution de l'équation de Poisson :*

$$\begin{cases} -\Delta u &= k & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases}$$

alors :

$$\int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{N} d\mathbf{a},$$

avec  $\mathbf{N}$  la normale unitaire intérieure à  $\partial\Omega$  et  $d\mathbf{a}$  son élément d'aire.

---

<sup>1</sup>Cette partie a fait l'objet d'une collaboration avec le Professeur Olivier Faugeras, directeur de recherche à l'INRIA de Sophia Antipolis

DÉMONSTRATION :

Selon nos hypothèses, l'équation de Poisson a une solution unique,  $C^2$ , dans  $\overline{\Omega}$  [14, 42] et on trouve en appliquant la formule de Green-Riemann :

$$\int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \Delta u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{N} d\mathbf{a},$$

□

Une intégrale de région peut toujours être exprimée comme une fonctionnelle de contour, via la solution de l'équation de Poisson avec les conditions de Dirichlet.

#### 4.6.1.2 Transformation d'intégrales de contour en intégrales de régions

La réciproque de la proposition 4.1 est également vraie. Considérons la fonctionnelle de contour  $J_b(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} k_b(\mathbf{x}) d\mathbf{a}$  :

PROPOSITION 4.2. Soit  $\Omega$  un ensemble ouvert borné avec un contour régulier  $\partial\Omega$ . Soit  $u$  l'unique solution de l'équation d'Helmholtz :

$$\begin{cases} \Delta u & = & u & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}}|_{\partial\Omega} & = & - & k_b \end{cases}$$

alors :

$$\int_{\partial\Omega} k_b(\mathbf{x}) d\mathbf{a} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$$

avec  $d\mathbf{a}$  l'élément d'aire de  $\partial\Omega$ .

DÉMONSTRATION :

Selon nos hypothèses, l'équation de Helmholtz a une solution unique,  $C^2$ , dans  $\overline{\Omega}$ , et nous avons :

$$\int_{\Omega} u d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \Delta u d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{N} d\mathbf{a},$$

Et donc :

$$\int_{\Omega} u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}} d\mathbf{a} = \int_{\partial\Omega} k_b(\mathbf{x}) d\mathbf{a}$$

□

Une fonctionnelle de contour peut ainsi toujours être exprimée comme une fonctionnelle de région.

### 4.6.2 Dérivation des termes basés région

#### 4.6.2.1 Cas particulier des descripteurs région-indépendant

Nous cherchons ici à minimiser un terme basé région avec un descripteur région indépendant, soit  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ , en utilisant les méthodes de dérivation classiquement utilisées en traitement d'images. Nous développons les trois points évoqués en introduction de cette section dans  $\mathcal{R}^2$ . Prenons le contour  $\Gamma(p) : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^2$ . Le vecteur  $\Gamma(p)$  se décompose comme suit  $\Gamma(p) = [\Gamma_1(p), \Gamma_2(p)]^T$  et on note  $\Gamma'(p)^\perp$  le vecteur perpendiculaire à  $\Gamma'(p)$  dirigé vers l'intérieur du contour soit  $\Gamma'(p)^\perp = [-\Gamma_2'(p), \Gamma_1'(p)]^T$  avec l'orientation choisie. La normale intérieure s'écrit alors  $\mathbf{N} = \frac{\Gamma'(p)^\perp}{|\Gamma'(p)|}$  et l'élément d'aire  $d\mathbf{a} = |\Gamma'(p)|dp$ . Par ailleurs on décompose  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$  et nous noterons  $u_{x_i}$  la dérivée partielle de  $u$  par rapport à  $x_i$ .

**4.6.2.1.1 Transformation des termes basés régions en intégrales de contour** Nous utilisons la proposition 4.1 afin de transformer le terme basé région  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x})d\mathbf{x}$  en intégrale de contour, ce qui nous donne la proposition suivante :

PROPOSITION 4.3. *Si  $k(\mathbf{x})$  satisfait les hypothèses de la proposition 4.1, la fonctionnelle  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x})d\mathbf{x}$  est égale à :*

$$\Phi(\Gamma) = \int_a^b \left( \nabla u(\Gamma(p)) \cdot \Gamma'(p)^\perp \right) dp \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b \varphi(\Gamma(p), \Gamma'(p)) dp, \quad (4.31)$$

avec  $\Gamma = \partial\Omega$  et  $u$  l'unique solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u & = k & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} & = 0 \end{cases}$$

Donc, minimiser  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x})d\mathbf{x}$  selon  $\Omega$  équivaut à minimiser (4.31) selon  $\Gamma$ .

DÉMONSTRATION :

Selon la proposition 4.1, nous avons :

$$\int_{\Omega} k(\mathbf{x})d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \Delta u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{N} d\mathbf{a},$$

et puisque  $\mathbf{N} = \frac{\Gamma'(p)^\perp}{|\Gamma'(p)|}$  et  $d\mathbf{a} = |\Gamma'(p)|dp$ , le résultat suit. □

#### 4.6.2.1.2 Calcul de la dérivée de Gâteaux du critère

DÉFINITION 4.4. Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^2$  une paramétrisation  $C^1$  d'une courbe fermée, la dérivée de Gâteaux de  $\Phi(\Gamma)$  dans la direction  $\gamma$  est notée  $\langle \Phi'(\Gamma), \gamma \rangle$  et est définie par :

$$\langle \Phi'(\Gamma), \gamma \rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Phi(\Gamma + \tau\gamma) - \Phi(\Gamma)}{\tau} \quad (4.32)$$

Nous obtenons alors pour la dérivée de Gâteaux de  $\Phi$  :

THEOREME 4.5. La dérivée de Gâteaux dans la direction  $\gamma$  de la fonctionnelle  $\Phi$  (4.31) est :

$$\langle \Phi'(\Gamma), \gamma \rangle = - \int_a^b k(\Gamma(p)) (\Gamma'^{\perp}(p) \cdot \gamma(p)) dp$$

DÉMONSTRATION :

En développant l'équation (4.32), on trouve :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Phi(\Gamma + \tau\gamma) - \Phi(\Gamma)}{\tau} = \int_a^b (\varphi_{\Gamma}(\Gamma(p), \Gamma'(p))\gamma(p) + \varphi_{\Gamma'}(\Gamma(p), \Gamma'(p))\gamma'(p)) dp$$

avec  $\varphi_{\Gamma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \Gamma}(\Gamma, \Gamma')$  et  $\varphi_{\Gamma'} = \frac{\partial \varphi}{\partial \Gamma'}(\Gamma, \Gamma')$ .

En intégrant par parties, on obtient l'expression suivante pour la dérivée de Gâteaux :

$$\langle \Phi'(\Gamma), \gamma \rangle = \int_0^1 \left( \varphi_{\Gamma}(\Gamma(p), \Gamma'(p)) - \frac{d}{dp} \varphi_{\Gamma'}(\Gamma(p), \Gamma'(p)) \right) \cdot \gamma(p) dp$$

Nous calculons la dérivée de  $\varphi$  par rapport à  $\Gamma$  en utilisant l'équation (4.31) :

$$\varphi_{\Gamma} = \nabla u_{x_2}(\Gamma(p)) \Gamma'_1(p) - \nabla u_{x_1}(\Gamma(p)) \Gamma'_2(p),$$

et par rapport à  $\Gamma'$  :

$$\varphi_{\Gamma'} = [u_{x_2}, -u_{x_1}]^T.$$

On a donc :

$$\frac{d}{dp} \varphi_{\Gamma'} = [\nabla u_{x_2} \cdot \Gamma', -\nabla u_{x_1} \cdot \Gamma']^T.$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$\varphi_{\Gamma} - \frac{d}{dp} \varphi_{\Gamma'} = \Delta u \Gamma'^{\perp} = -k \Gamma'^{\perp},$$

en utilisant la proposition (4.3).

□

**4.6.2.1.3 Calcul de l'équation d'évolution à partir de la dérivée** A partir de la dérivée de Gâteaux de  $J_r$  obtenue pour les descripteurs région indépendants, on peut calculer la vitesse d'évolution du contour actif qui fera décroître celui-ci vers un minimum de  $J_r$  en utilisant la méthode de la plus grande pente. L'équation d'évolution devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} &= k(\Gamma) \mathbf{N} \\ \Gamma(p, 0) &= \Gamma_0(p) \end{aligned} \quad (4.33)$$

avec  $\Gamma_0(p)$  le contour initial défini par l'utilisateur et  $\mathbf{N}$  la normale intérieure à  $\Gamma$ .

Ainsi, en utilisant cette méthode de dérivation pour les descripteurs indépendant de la région, on obtient la même équation d'évolution que celle utilisant la dérivée Eulérienne. La dérivation des termes basés régions avec des descripteurs région-indépendants utilisant cette technique (transformation en termes contours + equations d'Euler-Lagrange associées) pour calculer l'équation d'évolution a été développée dans [143, 101]. Nous montrons ici que notre méthode de dérivation donne les mêmes résultats. Nous considérons maintenant le cas des descripteurs région-dépendants.

#### 4.6.2.2 Cas général

Nous cherchons ici à minimiser un terme basé région avec un descripteur région-dépendant, soit  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$ , en utilisant également les méthodes classiques de dérivation. Nous prenons comme descripteur région-dépendant le modèle détaillé section 4.3.2.1. Pour plus de simplicité nous prenons ici  $m = 1$  et  $p_1 = 1$ .

**4.6.2.2.1 Transformation des termes basés régions en intégrales de contour** De la même manière que nous avons transformé la fonctionnelle  $J_r$  en intégrale de contour dans la Proposition 4.3, il nous faut ici transformer les fonctionnelles  $K_{11}$ ,  $G_1$  et  $J_r$  en intégrales de contour. Nous obtenons alors les trois propositions suivantes.

PROPOSITION 4.4. Si  $l_{11}(\mathbf{x})$  satisfait les hypothèses de la proposition 4.1, la fonctionnelle  $K_{11}(\Omega) = \int_{\Omega} l_{11}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  est égale à :

$$\Theta_{11}(\Gamma) = \int_a^b \left( \nabla u(\Gamma(p)) \cdot \Gamma'(p)^\perp \right) dp \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b \theta_{11}(\Gamma(p), \Gamma'(p)) dp$$

avec  $\Gamma = \partial\Omega$  et  $u$  l'unique solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u &= l_{11} & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION :

La démonstration est identique à celle de la Proposition 4.3. □

Par ailleurs on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.5. *Si  $h_1(\mathbf{x}, K_{11}(\Omega))$  satisfait les hypothèses de la proposition 4.1, la fonctionnelle  $G_1(\Omega) = \int_{\Omega} h_1(\mathbf{x}, K_{11}(\Omega)) d\mathbf{x}$  est égale à :*

$$\Psi_1(\Gamma) = \int_a^b \left( \nabla w(\Gamma(p)) \cdot \Gamma'(p)^\perp \right) dp \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b \psi_1(\Gamma(p), \Gamma'(p), \Theta_{11}(\Gamma)) dp$$

avec  $w$  l'unique solution de :

$$\begin{cases} -\Delta w & = h_1 & \text{dans } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} & = 0 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION :

La démonstration est identique à celle de la Proposition 4.3. □

Enfin on a :

PROPOSITION 4.6. *Si  $k(\mathbf{x}, G_1(\Omega))$  satisfait les hypothèses de la proposition 4.1, la fonctionnelle  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, G_1(\Omega)) d\mathbf{x}$  est égale à :*

$$\Phi(\Gamma) = \int_a^b \left( \nabla v(\Gamma(p)) \cdot \Gamma'(p)^\perp \right) dp \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b \varphi(\Gamma(p), \Gamma'(p), \Psi_1(\Gamma)) dp$$

avec  $v$  l'unique solution de :

$$\begin{cases} -\Delta v & = k & \text{dans } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} & = 0 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION :

La démonstration est identique à celle de la Proposition 4.3. □

Donc, minimiser  $J_r(\Omega) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \Omega) d\mathbf{x}$  selon  $\Omega$  équivaut à minimiser  $\Phi$  selon  $\Gamma$ .

**4.6.2.2.2 Calcul de la dérivée de Gâteaux du critère** On trouve alors pour la dérivée de Gâteaux de  $\Phi$  :

THEOREME 4.6. *La dérivée de Gâteaux dans la direction  $\gamma$  de la fonctionnelle  $\Phi$  définie dans la Proposition 4.6 est :*

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(\Gamma), \gamma \rangle = & - \int_a^b [k(\Gamma(p), \Psi_1(\Gamma)) + A_1 h_1(\Gamma(p), \Theta_{11}(\Gamma)) \\ & + A_1 B_{11} l_{11}(\Gamma(p))] (\Gamma'(p))^T \cdot \gamma(p) dp, \end{aligned}$$

avec

$$A_1 = \int_{\Omega} \frac{\partial k}{\partial G_1}(\mathbf{x}, G_1(\Omega)) d\mathbf{x}$$

et :

$$B_{11} = \int_{\Omega} \frac{\partial h_1}{\partial K_{11}}(\mathbf{x}, K_{11}(\Omega)) d\mathbf{x}$$

DÉMONSTRATION :

Afin de calculer la dérivée de Gâteaux de  $\Phi(\Gamma)$  dans la direction  $\gamma$ , on développe l'équation (4.32). On a :

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Phi(\Gamma + \tau\gamma) - \Phi(\Gamma)}{\tau} = & \int_a^b (\varphi_{\Gamma}(\Gamma(p), \Gamma'(p), \Psi_1(\Gamma))\gamma(p) + \varphi_{\Gamma'}(\Gamma(p), \Gamma'(p), \Psi_1(\Gamma))\gamma'(p)) dp \\ & + \int_a^b \varphi_{\Psi_1}(\Gamma(p), \Gamma'(p), \Psi_1(\Gamma)) \langle \Psi_1'(\Gamma), \gamma \rangle dp \end{aligned}$$

avec  $\varphi_{\Psi_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial \Psi_1}(\Gamma, \Gamma', \Psi_1)$ .

En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(\Gamma), \gamma \rangle = & \int_a^b \left[ \varphi_{\Gamma} - \frac{d}{dp} \varphi_{\Gamma'} \right] \gamma(p) dp \\ & + \int_a^b \varphi_{\Psi_1}(\Gamma(p), \Gamma'(p), \Psi_1(\Gamma)) \langle \Psi_1'(\Gamma), \gamma \rangle dp. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Selon le théorème 4.5, on obtient  $\varphi_{\Gamma} - \frac{d}{dp} \varphi_{\Gamma'} = -k \Gamma'^{\perp}$ .

La dérivée de Gâteaux de  $\Psi_1(\Gamma)$  dans la direction  $\gamma$  est calculée de la même manière et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1'(\Gamma), \gamma \rangle = & - \int_a^b \psi_1(\Gamma(p), \Theta_{11}(\Gamma)) (\Gamma'^{\perp}(p) \cdot \gamma(p)) dp \\ & + \int_a^b \psi_{1\Theta_{11}}(\Gamma(p), \Gamma'(p), \Theta_{11}(\Gamma)) \langle \Theta_{11}'(\Gamma), \gamma \rangle dp. \end{aligned}$$

Selon le théorème 4.5, la dérivée de Gâteaux de  $\Theta_{11}(\Gamma)$  dans la direction  $\gamma$  est donnée par :

$$\langle \Theta_{11}'(\Gamma), \gamma \rangle = - \int_a^b \theta_{11}(\Gamma(p)) (\Gamma'^{\perp}(p) \cdot \gamma(p)) dp.$$

En rassemblant les calculs dans (4.34), nous obtenons l'expression suivante



pour la dérivée :

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(\Gamma), \gamma \rangle &= - \int_a^b k(\Gamma(p), \Psi_1(\Gamma)) (\Gamma'^{\perp}(p) \cdot \gamma(p)) dp \\ &- \int_a^b \varphi_{\Psi_1}(\Gamma(p), \Gamma'(p), \Psi_1(\Gamma)) dp \left[ \int_a^b \psi_1(\Gamma(p), \Theta_{11}(\Gamma)) (\Gamma'^{\perp}(p) \cdot \gamma(p)) dp \right. \\ &\quad \left. + \int_a^b \psi_{1\Theta_{11}}(\Gamma(p), \Gamma'(p), \Theta_{11}(\Gamma)) dp \int_a^b \theta_{11}(\Gamma(p)) (\Gamma'^{\perp}(p) \cdot \gamma(p)) dp \right] \end{aligned}$$

En utilisant les propositions (4.5) et (4.6), nous trouvons :

$$\int_a^b \varphi_{\Psi_1}(\Gamma(p), \Gamma'(p), \Psi_1(\Gamma)) dp = \int_{\Omega} \frac{\partial k}{\partial G_1}(\mathbf{x}, G_1(\Omega)) d\mathbf{x} \stackrel{\text{déf}}{=} A_1$$

De la même manière, en utilisant les propositions (4.4) et (4.5), on obtient :

$$\int_a^b \psi_{1\Theta_{11}}(\Gamma(p), \Gamma'(p), \theta_{11}(\Gamma)) dp = \int_{\Omega} \frac{\partial h_1}{\partial K_{11}}(\mathbf{x}, K_{11}(\Omega)) d\mathbf{x} \stackrel{\text{déf}}{=} B_{11}$$

L'équation de la dérivée est donc :

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(\Gamma), \gamma \rangle &= - \int_a^b [k(\Gamma(p), \Psi_1(\Gamma)) + A_1 h_1(\Gamma(p), \Theta_{11}(\Gamma)) \\ &\quad + A_1 B_{11} l_{11}(\Gamma(p))] (\Gamma'(p)^T \cdot \gamma(p)) dp, \end{aligned}$$

□

**4.6.2.2.3 Calcul de l'équation d'évolution à partir de la dérivée** A partir de la dérivée de Gâteaux de la fonctionnelle  $\Phi$  donnée précédemment par le théorème 4.6, on en déduit la vitesse d'évolution du contour suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(p, \tau)}{\partial \tau} &= \left[ k(\mathbf{x}, \Omega) + A_1 h_1(\mathbf{x}, \Omega) + A_1 B_{11} l_{11}(\mathbf{x}) \right] \mathbf{N} \\ \Gamma(p, 0) &= \Gamma_0(p) \end{aligned} \quad (4.35)$$

avec  $\Gamma_0(p)$  le contour initial défini par l'utilisateur et  $\mathbf{x} = \Gamma(p, \tau)$ .

On en déduit aisément pour  $m \geq 1$  et  $p_i \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(p, \tau)}{\partial \tau} &= \left[ k(\mathbf{x}, \Omega) + \sum_{i=1}^m (A_i h_i(\mathbf{x}, \Omega)) + \sum_{i=1}^m A_i \sum_{j=1}^{p_i} (B_{ij} l_{ij}(\mathbf{x})) \right] \mathbf{N} \\ \Gamma(p, 0) &= \Gamma_0(p) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ainsi, par cette méthode de dérivation, nous trouvons la même équation d'évolution que celle calculée en utilisant la dérivée Eulérienne donnée équation (4.21).

### 4.6.3 Comparaison des méthodes

Nous avons montré qu'en transformant les termes régions en termes contours puis en calculant la dérivée de Gâteaux du critère ainsi transformé, on aboutit aux mêmes résultats que lorsque l'on utilise les outils de dérivation de domaines. Cependant, dans l'approche classique, la démonstration est moins directe et elle ne permet pas de conserver la formulation initiale du critère en termes régions. La transformation des termes basés régions en termes basés contours introduit une étape supplémentaire dans le calcul. Par ailleurs, nous donnons les résultats en dimension 2. Le passage à la dimension  $n$  n'est pas aussi immédiat que pour la dérivation de domaines.

Les outils de dérivation de domaines semblent par conséquent mieux adaptés au problème traité car ils permettent une dérivation plus naturelle et plus aisée des termes régions. A notre connaissance, en traitement d'images, seul Schnörr [123] l'a utilisé pour le calcul du flot optique.

## 4.7 IMPLÉMENTATION AVEC LA MÉTHODE DES ENSEMBLES DE NIVEAUX

Afin de mettre en oeuvre l'équation d'évolution des contours actifs, nous avons utilisé la méthode des ensembles de niveaux dont la théorie a été introduite section 3.4. L'équation d'évolution générale (3.2) s'écrit alors de la manière suivante en fonction de  $U$  comme il a été démontré au paragraphe 3.4.2 :

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = F(\mathbf{x}, \tau) |\nabla U(\mathbf{x}, \tau)| \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I \quad (4.37)$$

avec  $U(\mathbf{x}, 0)$  la fonction distance de  $\Gamma_0$ .

La dérivée partielle de  $U$  par rapport à  $\tau$  est estimée par une différence finie non centrée :

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \frac{U(\mathbf{x}, \tau + \delta\tau) - U(\mathbf{x}, \tau)}{\delta\tau} \quad (4.38)$$

avec  $\delta\tau$  le pas temporel d'échantillonnage.

Nous avons évoqué au paragraphe 3.4.3, le fait que la fonction distance  $U$  ne demeure pas une fonction distance lorsqu'elle évolue avec l'EDP générale (4.37). Nous utiliserons donc périodiquement l'EDP de réinitialisation que nous rappelons ici :

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \text{sign}(U(\mathbf{x}, \tau))(1 - |\nabla U(\mathbf{x}, \tau)|) \quad (4.39)$$

avec :

$$\text{sign}(U(\mathbf{x}, \tau)) = \begin{cases} -1 & \text{si } U(\mathbf{x}, \tau) < 0 \\ 0 & \text{si } U(\mathbf{x}, \tau) = 0 \\ 1 & \text{si } U(\mathbf{x}, \tau) > 0 \end{cases}$$

A convergence de cette EDP, la fonction  $U$  est une fonction de distances signées homogène. Il est important de discrétiser l'EDP (4.39) avec soin afin d'éviter les instabilités numériques et de préserver la position du contour de niveau 0. On peut trouver une discrétisation appropriée pour les cas 2D et 3D dans [32, 31].

La périodicité  $m$  de la réinitialisation dépend du pas temporel de l'équation d'évolution 4.37. Si la périodicité  $m$  choisie est petite, l'EDP (4.39) convergera plus rapidement. Inversement si  $m$  est choisie grand, l'EDP (4.39) convergera plus lentement. Afin d'améliorer la vitesse de convergence de l'EDP (4.39), on peut opérer au préalable une extension de la carte des distances par voisinage à partir de son niveau 0.

Les calculs sont réalisés dans une bande étroite comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe 3.4.4. Une réinitialisation de la bande étroite est effectuée lorsque le contour va "sortir" de la bande étroite. La largeur  $2\epsilon$  de la bande étroite est choisie petite de manière à limiter le nombre de points de calcul mais pas trop de manière à limiter le nombre de réinitialisations. Nous prendrons par la suite  $\epsilon = 4$ .

Par ailleurs, afin d'améliorer la vitesse de convergence nous utilisons les techniques de multirésolution. On fait tout d'abord évoluer le contour sur une image de taille réduite. Le contour final est utilisé comme contour initial pour l'image de taille réelle.

L'algorithme mis en oeuvre est alors le suivant :

ALGORITHME :

*Initialisation :*

- $\Gamma_0$  : Contour initial
- $U(., 0)$  : Carte des distances signées de  $\Gamma_0$
- Initialisation de la bande étroite de largeur  $2\epsilon$

*Répéter*

1. Pour tous les points  $\mathbf{x}$  de la bande étroite :
  - Calcul de la vitesse du contour actif  $F(\mathbf{x}, \tau)$
  - Evolution de la carte des distances  $U$  selon le schéma :

$$U(\mathbf{x}, \tau + \delta\tau) = U(\mathbf{x}, \tau) + \delta\tau F(\mathbf{x}, \tau) |\nabla U(\mathbf{x}, \tau)|$$

2. Toutes les  $m$  itérations :
  - Réinitialisation de la carte des distances  $U$  selon le schéma :

$$U(\mathbf{x}, \tau + \delta\tau) = U(\mathbf{x}, \tau) + \delta\tau \text{sign}(U(\mathbf{x}, \tau))(1 - |\nabla U(\mathbf{x}, \tau)|)$$

3. Test : Réinitialisation de la bande étroite autour du niveau 0 de  $U$

*Jusqu'à convergence*

## 4.8 CONCLUSION

### 4.8.1 *Difficulté 1 : Solution proposée*

La première difficulté que nous avons évoquée réside dans la dérivation d'un critère incluant des termes régions. Nous avons ici proposé d'utiliser les outils de dérivation issus de l'optimisation de domaines. Ces outils semblent bien adaptés et permettent une dérivation plus naturelle et plus aisée des termes basés régions que les approches classiques. Nous avons montré que les résultats obtenus sont les mêmes que ceux obtenus avec une méthode de dérivation classique utilisant le calcul des variations, que ce soit dans le cas des descripteurs dépendant ou indépendant de la région. Les outils introduits ici peuvent donc être utilisés de manière simple pour la dérivation de nombreux termes régions et offrent une alternative intéressante pour ce genre de problème.

### 4.8.2 *Difficulté 2 : Solution proposée*

La deuxième difficulté évoquée provient de l'utilisation de descripteurs dépendants de la région dans les termes régions. Nous avons distingué deux types de descripteurs (fonctions à minimiser caractérisant la région d'intérêt), les descripteurs indépendant de la région et les descripteurs dépendant de la région. Dans le deuxième cas, les descripteurs évoluent au cours de l'évolution du contour et donc des régions. Ce peut être le cas lorsque l'on utilise des caractéristiques statistiques comme la moyenne, la variance ou l'histogramme d'une région. Dans ce cas, il faut prendre explicitement en compte la dépendance du descripteur avec la région lors de la dérivation. Nous avons essayé de développer ici des modèles pour les descripteurs dépendants de la région afin de calculer la dérivée et donc l'équation d'évolution dans un cadre général. Nous montrons que la dépendance des descripteurs avec la région induit des termes additifs dans l'équation d'évolution du contour. La mise en évidence de ces termes n'a pas été abordée à notre connaissance dans la littérature. Nous nous attacherons dans la partie applicative à en démontrer l'importance. Par ailleurs, ces descripteurs présentent un autre intérêt puisque leur estimation se fait conjointement à l'évolution du contour. A convergence, le contour entoure la région d'intérêt et les descripteurs sont estimés. Nous aborderons également ce point dans la partie applicative concernant les descripteurs dépendants de la région.



Deuxième partie

Applications



# Extraction de régions homogènes d'intérêt

Ce chapitre a pour objectif de mettre en œuvre des descripteurs statistiques dépendants de la région pour la segmentation de régions homogènes. Nous commencerons par rappeler le lien qui existe entre l'entropie et le déterminant de la matrice de covariance pour des densités de probabilité gaussiennes. Ceci va nous conduire à considérer le déterminant de la matrice de covariance comme un descripteur pertinent pour la segmentation en régions de couleur homogène. Nous débutons l'étude expérimentale par un ensemble de descripteurs basés sur la variance pour la segmentation de régions homogènes dans les images à niveaux de gris, ceci afin de démontrer la validité des modèles introduits précédemment et l'importance des termes additifs mis en évidence. Ensuite, nous nous intéresserons aux images couleur afin de segmenter des régions d'intérêt comme le visage dans les séquences d'images. Nous montrerons comment les descripteurs évoluent au cours de la propagation du contour actif pour finalement converger vers une valeur et ainsi nous donner une estimation des paramètres concernés. Cela permet ainsi une segmentation avec estimation jointe de caractéristiques statistiques.

Cette partie a été présentée dans [74, 63].

## 5.1 INTRODUCTION

Au niveau des notations utilisées, l'intensité des images couleur est représentée par une fonction  $\mathbf{I} : \Omega_I \in \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^3$  où  $\mathbf{I} = [I^1, I^2, I^3]^T$ .

Nous cherchons à partitionner l'image en deux régions, l'une étant la région d'intérêt recherchée. Le cadre de travail utilisé est celui développé section 4.5.

Rappelons ici les résultats utilisés dans cette partie. Soient  $\Omega_{in}$  la région d'intérêt,  $\Omega_{out}$  la région du fond, et  $\Gamma$  l'interface entre ces deux domaines ; on cherche la partition de l'image qui minimise le critère  $J$  suivant :

$$J(\Omega_{in}, \Omega_{out}, \Gamma) = \int_{\Omega_{in}} k_{in}(\mathbf{x}, \Omega_{in}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{out}} k_{out}(\mathbf{x}, \Omega_{out}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} k_b(\mathbf{x}) da$$



avec  $k_{in}$  le descripteur des objets à segmenter,  $k_{out}$  le descripteur de la région du fond, et  $k_b$  le descripteur du contour. Nous étudierons dans cette partie des descripteurs  $k_{out}$  et  $k_{in}$  dépendant de la région.

Dans le cadre de travail général mis en oeuvre section 4.5, les descripteurs région-dépendants sont modélisés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} k_{in}(\mathbf{x}, \Omega_{in}) &= k_{in}(\mathbf{x}, G_1^{(in)}(\Omega), G_2^{(in)}(\Omega), \dots, G_m^{(in)}(\Omega)) \\ k_{out}(\mathbf{x}, \Omega_{out}) &= k_{out}(\mathbf{x}, G_1^{(out)}(\Omega), G_2^{(out)}(\Omega), \dots, G_q^{(out)}(\Omega)) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} G_i^{(in)}(\Omega_{in}) &= \int_{\Omega_{in}} h_i^{(in)}(\mathbf{x}, \Omega_{in}) d\mathbf{x} \quad \text{pour } i = 1..m \\ G_i^{(out)}(\Omega_{out}) &= \int_{\Omega_{out}} h_i^{(out)}(\mathbf{x}, \Omega_{out}) d\mathbf{x} \quad \text{pour } i = 1..q \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} h_i^{(in)}(\mathbf{x}, \Omega_{in}) &= h_i^{(in)}(\mathbf{x}, K_{i1}^{(in)}(\Omega_{in}), K_{i2}^{(in)}(\Omega_{in}), \dots, K_{ip_i}^{(in)}(\Omega_{in})) \\ h_i^{(out)}(\mathbf{x}, \Omega_{out}) &= h_i^{(out)}(\mathbf{x}, K_{i1}^{(out)}(\Omega), K_{i2}^{(out)}(\Omega), \dots, K_{id_i}^{(out)}(\Omega_{out})) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} K_{ij}^{(in)}(\Omega_{in}) &= \int_{\Omega_{in}} l_{ij}^{(in)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{pour } \begin{cases} i = 1..m \\ j = 1..p_i \end{cases} \\ K_{ij}^{(out)}(\Omega_{out}) &= \int_{\Omega_{out}} l_{ij}^{(out)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{pour } \begin{cases} i = 1..q \\ j = 1..d_i \end{cases} \end{aligned}$$

L'équation d'évolution résultante est alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(p, \tau)}{\partial \tau} &= [k_{in}(\mathbf{x}) - k_{out}(\mathbf{x}) + k_b(\mathbf{x}) \kappa - \nabla k_b(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N} \\ &+ \sum_{i=1}^m (A_i^{(in)} h_i^{(in)}(\mathbf{x}, \Omega_{in})) \\ &+ \sum_{i=1}^m A_i^{(in)} \sum_{j=1}^{p_i} (B_{ij}^{(in)} l_{ij}^{(in)}(\mathbf{x})) \\ &- \sum_{i=1}^q (A_i^{(out)} h_i^{(out)}(\mathbf{x}, \Omega_{out})) \\ &- \sum_{i=1}^q A_i^{(out)} \sum_{j=1}^{z_i} (B_{ij}^{(out)} l_{ij}^{(out)}(\mathbf{x})) ] \mathbf{N} \\ \Gamma(p, 0) &= \Gamma_0(p) \end{aligned}$$

## 5.2. Relation entre l'entropie et le determinant de la matrice de covariance 71

avec  $\Gamma_0(p)$  le contour initial défini par l'utilisateur et :

$$A_i^{(in)} = \int_{\Omega_{in}} \frac{\partial k_{in}}{\partial G_i^{(in)}}(\mathbf{x}, G_1^{(in)}(\Omega_{in}), \dots, G_m^{(in)}(\Omega_{in})) d\mathbf{x} \quad i = 1..m$$

$$B_{ij}^{(in)} = \int_{\Omega_{in}} \frac{\partial h_i^{(in)}}{\partial K_{ij}^{(in)}}(\mathbf{x}, K_{i1}^{(in)}(\Omega_{in}), \dots, K_{ip_i}^{(in)}(\Omega_{in})) d\mathbf{x} \quad \begin{cases} i = 1..m \\ j = 1..p_i \end{cases}$$

et :

$$A_i^{(out)} = \int_{\Omega_{out}} \frac{\partial k_{out}}{\partial G_i^{(out)}}(\mathbf{x}, G_1^{(out)}(\Omega_{out}), \dots, G_q^{(out)}(\Omega_{out})) d\mathbf{x} \quad i = 1..q$$

$$B_{ij}^{(out)} = \int_{\Omega_{out}} \frac{\partial h_i^{(out)}}{\partial K_{ij}^{(out)}}(\mathbf{x}, K_{i1}^{(out)}(\Omega_{out}), \dots, K_{id_i}^{(out)}(\Omega_{out})) d\mathbf{x} \quad \begin{cases} i = 1..q \\ j = 1..d_i \end{cases}$$

Nous allons introduire des ensembles de descripteurs  $\{k_{in}, k_{out}, k_b\}$  afin de segmenter des régions d'intérêt et calculer explicitement, pour chaque ensemble de descripteurs, l'équation d'évolution résultante.

## 5.2 RELATION ENTRE L'ENTROPIE ET LE DETERMINANT DE LA MATRICE DE COVARIANCE

On peut faire l'hypothèse que l'entropie est un descripteur d'homogénéité d'une région. En effet, celle-ci décrit la complexité d'une région et il apparaît alors intéressant de minimiser cette quantité pour segmenter des régions homogènes. Dans cette partie, nous proposons de rappeler le lien qui existe entre l'entropie et le déterminant de la matrice de covariance pour des densités de probabilités gaussiennes, ceci afin de démontrer l'intérêt du déterminant de la matrice de covariance comme descripteur de régions de couleur homogène.

L'entropie d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3, \dots, X^n)$  décrit par une fonction de distribution de probabilité  $f_{\mathbf{X}}$  est la suivante :

$$S(\mathbf{X}) = - \int f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Dans le cas d'une distribution gaussienne multidimensionnelle de dimension  $n$ , de moyenne  $\mu$  et de matrice de covariance  $\Sigma$ , soit :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det(\Sigma))^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right]$$

on peut montrer que l'entropie  $S$  dépend de la matrice de covariance par la relation suivante [54] :

$$S = \frac{1}{2} \ln[(2\pi e)^n \det(\Sigma)] \quad (5.1)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} S(\mathbf{X}) &= - \int f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \ln((2\pi)^n \det(\Sigma)) + \frac{1}{2} E((\mathbf{X} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mu)) \end{aligned}$$

On peut écrire, pour un vecteur  $\mathbf{a}$  de dimension  $n$  et une matrice  $\mathbf{A}$  de dimension  $n \times n$  la relation suivante :  $\mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a} = \text{Trace}(\mathbf{A} \mathbf{a} \mathbf{a}^T)$ . En utilisant cette astuce et la linéarité de l'espérance  $E$ , on trouve la relation (5.1). Une démonstration détaillée peut être trouvée dans [54]

En ce qui concerne l'étude des régions de couleur homogène, on peut faire l'hypothèse que chaque région couleur  $R_k$  est modélisée par une distribution gaussienne de moyenne  $\mu_{\mathbf{k}} = [\mu_k^1, \mu_k^2, \mu_k^3]^T$  de matrice de covariance  $\Sigma_k$ . La fonction de densité de probabilité d'appartenance à la région  $R_k$  est donnée par l'expression suivante :

$$p(\mathbf{I}(\mathbf{x}) \in R_k / (\mu_{\mathbf{k}}, \Sigma_k)) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} (\det(\Sigma_k))^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mu_{\mathbf{k}})^T \Sigma_k^{-1} (\mathbf{I} - \mu_{\mathbf{k}}) \right]$$

On en déduit alors pour l'entropie  $S(R_k)$  de la région  $R_k$  :

$$S(R_k) = \frac{1}{2} \ln[(2\pi e)^3 \det(\Sigma_k)] \quad (5.2)$$

Le déterminant de la matrice de covariance est relié à l'entropie et donc minimiser cette quantité signifie que l'on veut faire décroître la complexité d'une région [105, 55, 121]. Ainsi, minimiser le déterminant de la matrice de covariance apparaît comme un outil pertinent pour faire évoluer une région vers la région de couleur homogène la plus proche. Nous allons donc tester ce descripteur sur des images couleur réelles mais auparavant, nous débutons notre étude par un exemple sur une image synthétique à niveaux de gris pour laquelle nous allons minimiser la variance.

### 5.3 EXTRACTION DE RÉGIONS HOMOGÈNES DANS LES IMAGES À NIVEAUX DE GRIS EN UTILISANT LA VARIANCE COMME DESCRIPTEUR

Les descripteurs proposés pour la segmentation de régions homogènes dans les images à niveaux de gris sont basés sur la minimisation des variances des deux régions considérées. Les variances des deux régions sont définies par l'équation (4.1) avec  $\Omega = \Omega_{in}$  ou  $\Omega_{out}$ .

#### 5.3.1 Descripteurs utilisant la variance

Les descripteurs proposés sont les suivants :

$$\begin{cases} k_{out} &= \varphi(\sigma^2(\Omega_{out})) \\ k_{in} &= \varphi(\sigma^2(\Omega_{in})) \\ k_b &= \lambda \end{cases} \quad (5.3)$$

avec  $\varphi(r)$  une fonction positive et croissante de classe  $C^1(\mathcal{R})$  et  $\lambda$  une constante positive. Les différents termes permettant de calculer l'équation d'évolution ont été calculés section 4.3.2.4, ce qui nous conduit à l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = & \left[ \varphi(\sigma^2(\Omega_{in})) - \varphi(\sigma^2(\Omega_{out})) + \lambda \kappa \right. \\ & + \varphi'(\sigma^2(\Omega_{in}))((I(\mathbf{x}) - \mu(\Omega_{in}))^2 - \sigma^2(\Omega_{in})) \\ & \left. - \varphi'(\sigma^2(\Omega_{out}))((I(\mathbf{x}) - \mu(\Omega_{out}))^2 - \sigma^2(\Omega_{out})) \right] \mathbf{N} \end{aligned} \quad (5.4)$$

avec  $\mathbf{x} = \Gamma(p, \tau)$  pour cette équation. Le seul paramètre à ajuster est le paramètre de lissage  $\lambda$ .

On distingue deux grandes parties dans cette équation, les termes que nous appellerons globaux qui sont  $\varphi(\sigma^2(\Omega_{in})) - \varphi(\sigma^2(\Omega_{out}))$  et les termes faisant intervenir l'intensité du point considéré  $\varphi'(\sigma^2(\Omega_{in}))((I(\mathbf{x}) - \mu(\Omega_{in}))^2 - \sigma^2(\Omega_{in})) - \varphi'(\sigma^2(\Omega_{out}))((I(\mathbf{x}) - \mu(\Omega_{out}))^2 - \sigma^2(\Omega_{out}))$  que nous appellerons locaux même si ils font intervenir aussi des termes globaux sur la région comme la variance. Comme nous l'avons expliqué au chapitre précédent, les termes locaux permettent de juger si l'intensité du point est suffisamment proche de la moyenne. Si tel n'est pas le cas, le point aura tendance à être exclu de la région considérée. Ainsi, si pour un point  $\mathbf{x}$ , on a  $(I(\mathbf{x}) - \mu(\Omega_{in}))^2 < \sigma^2(\Omega_{in})$ , la contribution du terme résultant pourra être négative, ce qui va dilater le contour en incluant le point  $\mathbf{x}$  dans la région  $\Omega_{in}$ . Le terme dit global permet d'aller dans le sens de la variance la plus élevée. Si la variance de la région  $\Omega_{out}$  est plus élevée que celle de la région  $\Omega_{in}$ , ce terme aura tendance à dilater le contour et à diminuer la taille de la région  $\Omega_{out}$ . D'autre part, si l'on prend  $\varphi(r) = \log(1 + r)$  on alors  $\varphi'(r) = 1/(1 + r)$ . Dans ce cas, lorsque la variance est élevée le terme global sera prépondérant puisque les termes locaux sont pondérés respectivement par  $\varphi'(\sigma^2(\Omega_{in}))$  et  $\varphi'(\sigma^2(\Omega_{out}))$ . Inversement plus les variances diminuent, plus les termes locaux deviennent prépondérants.

### 5.3.2 Résultats expérimentaux

Nous allons étudier les résultats obtenus avec l'équation d'évolution 5.4 pour un exemple simple. Nous étudierons par ailleurs l'importance des termes additifs mis en évidence provenant de la dépendance des descripteurs avec la région. Dans (5.4), les termes additifs sont les termes comprenant la dérivée de  $\varphi$ .

Les expériences sont effectuées sur une image synthétique composée d'un carré homogène d'intensité 160 placé sur un fond homogène d'intensité 100. Un bruit gaussien de variance 20 est ajouté à l'image. La fonction  $\varphi(r) = \log(1 + r)$ , ce qui donne  $\varphi'(r) = 1/(1 + r)$ . Le paramètre  $\lambda$  est fixé à 10.

### 5.3.2.1 Evolution du contour avec estimation des moyennes et des variances

Regardons tout d'abord l'évolution du contour avec l'EDP (5.4). Le contour initial est donné Fig.5.1.a alors que le résultat final est visible Fig.5.1.c. Le carré est correctement segmenté : on a bien minimisé les variances des deux régions. On peut visualiser cette évolution sur l'amplitude de la vitesse du contour actif  $F$ . L'évolution de l'amplitude de la vitesse sans les termes de régularisation, soit  $\varphi(\sigma^2(\Omega_{in})) - \varphi(\sigma^2(\Omega_{out})) + \varphi'(\sigma^2(\Omega_{in}))((I(\mathbf{x}) - \mu(\Omega_{in}))^2 - \sigma^2(\Omega_{in})) - \varphi'(\sigma^2(\Omega_{out}))((I(\mathbf{x}) - \mu(\Omega_{out}))^2 - \sigma^2(\Omega_{out}))$ , est donnée Fig(s).5.1.{d,e,f}. Sur ces images, on a normalisé de telle sorte que les valeurs soient comprises entre 0 et 255, que les valeurs négatives de la vitesse soient celles inférieures à 128 et les valeurs positives celles supérieures à 128. On voit apparaître nettement les caractéristiques de l'image sur cette amplitude.

Parallèlement à la segmentation, les paramètres statistiques des deux régions sont estimés. En effet, les variances  $\sigma^2(\Omega_{in})$  et  $\sigma^2(\Omega_{out})$  évoluent avec le contour ainsi que les moyennes  $\mu(\Omega_{in})$  et  $\mu(\Omega_{out})$ . On peut voir Fig.5.2, l'évolution de la moyenne des deux régions avec le nombre d'itérations (en multirésolution). La moyenne extérieure  $\mu(\Omega_{out})$  varie très peu puisque la région extérieure n'inclut que des points situés dans la région homogène de moyenne 100. La moyenne intérieure évolue pour finalement converger vers la valeur moyenne de la région intérieure  $\Omega_{in}$  soit 160. Les deux valeurs des moyennes sont donc bien estimées. On peut également visualiser l'évolution des variances au cours des itérations. Les deux variances évoluent vers la valeur 20. Les variances des deux régions sont également correctement estimées en fin de propagation du contour.

### 5.3.2.2 Importance des termes additifs

Faisons maintenant la même expérience en omettant les termes additifs provenant de la dépendance des descripteurs avec la région. On fait alors évoluer le contour avec l'EDP suivante :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = [ \varphi(\sigma^2(\Omega_{in})) - \varphi(\sigma^2(\Omega_{out})) + \lambda \kappa ] \mathbf{N} \quad (5.5)$$

Il est intéressant d'observer que, si on omet le terme de régularisation  $\lambda \kappa$ , l'amplitude de la vitesse ne dépend pas de  $\mathbf{x}$  mais seulement de  $\tau$ . C'est une constante pour chaque pas d'évolution  $\tau$ . A convergence, la force va tendre vers 0 et on va tendre à égaliser la variance intérieure  $\sigma^2(\Omega_{out})$  et la variance extérieure  $\sigma^2(\Omega_{in})$  au terme de régularisation près. Ainsi cette EDP ne répond pas à l'objectif de départ qui était de minimiser les variances des deux régions. C'est ce que l'on peut observer dans les résultats expérimentaux. Ainsi, en partant du même contour initial que précédemment, on peut voir Fig(s).5.4.{a,b,c} que le contour évolue vers un cercle et que le carré n'est donc pas correctement segmenté. On peut voir également que l'amplitude de

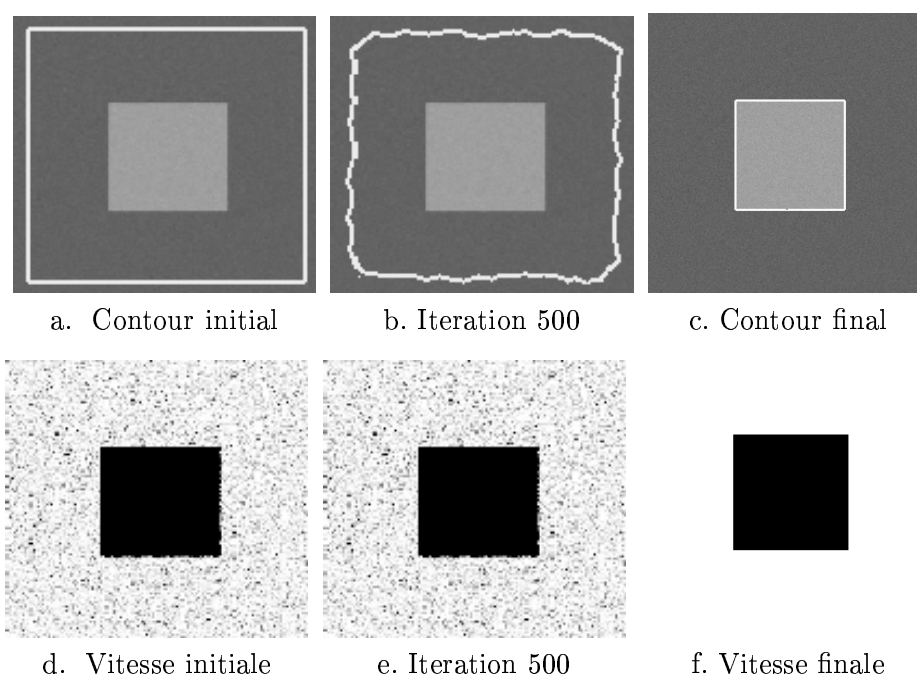


FIG. 5.1 – Figures a,b,c : Evolution du contour actif régie par l'EDP (5.4) incluant les termes additionnels. Figures d,e,f : Visualisation de l'amplitude de la vitesse correspondante  $F$  normalisée entre 0 et 255 (sans le flot de régularisation  $\lambda\kappa$ ).

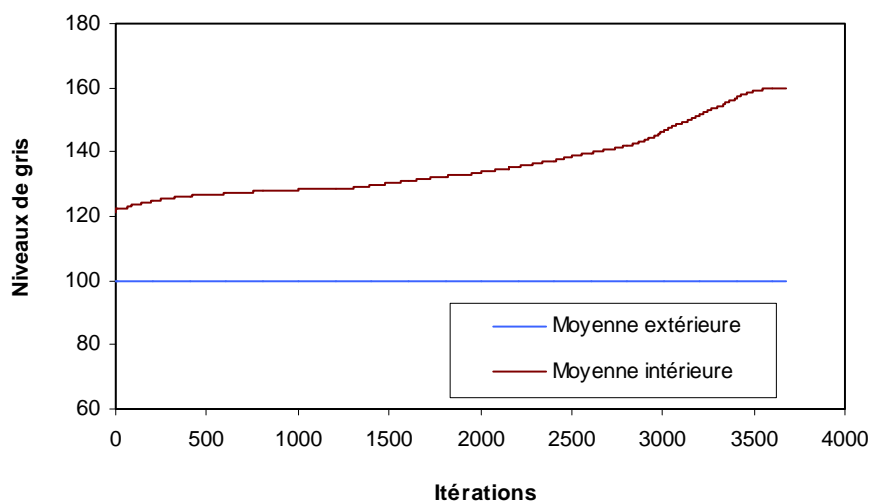


FIG. 5.2 – Evolution de la moyenne intérieure  $\mu(\Omega_{in})$  et extérieure  $\mu(\Omega_{out})$  en fonction du nombre d'itérations d'évolution du contour actif avec l'EDP (5.4).

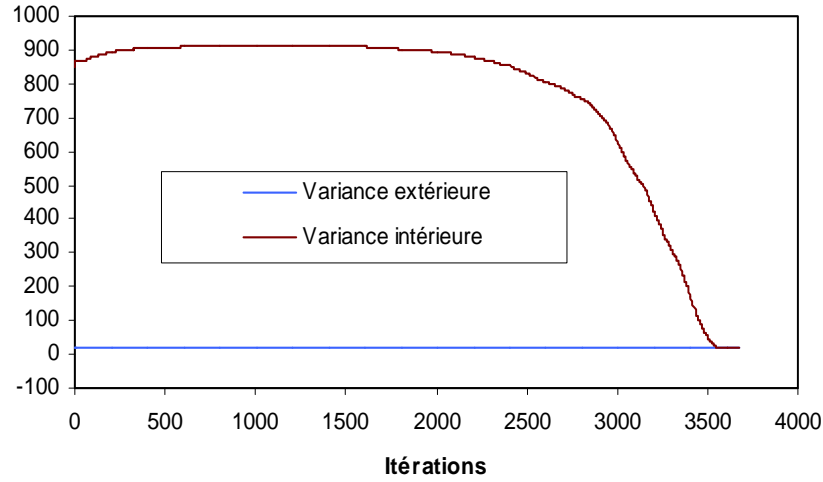


FIG. 5.3 – Evolution de la variance intérieure  $\sigma^2(\Omega_{in})$  et extérieure  $\sigma^2(\Omega_{out})$  en fonction du nombre d'itérations d'évolution du contour actif avec l'EDP (5.4).

la vitesse (sans le terme  $\lambda\kappa$ ) est une constante dont la valeur évolue au cours du temps Fig(s).5.4.{d,e,f}.

#### 5.4 EXTRACTION DE RÉGIONS HOMOGÈNES DANS LES IMAGES COULEUR EN UTILISANT LE DETERMINANT DE LA MATRICE DE COVARIANCE

Dans cette partie, nous proposons un descripteur pour caractériser les régions de couleur homogène. Ce descripteur utilise le déterminant de la matrice de covariance des régions considérées pour son lien existant avec l'entropie donné section 5.2.

Nous utiliserons ici  $\Sigma_{in}$  et  $\Sigma_{out}$  les matrices de covariance de respectivement  $\Omega_{in}$  et  $\Omega_{out}$  :

$$\Sigma_{\cdot} = \begin{pmatrix} \sigma_{\cdot}^{11} & \sigma_{\cdot}^{12} & \sigma_{\cdot}^{13} \\ \sigma_{\cdot}^{21} & \sigma_{\cdot}^{22} & \sigma_{\cdot}^{23} \\ \sigma_{\cdot}^{31} & \sigma_{\cdot}^{32} & \sigma_{\cdot}^{33} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma_{\cdot}^{ij} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (I^i(\mathbf{x}) - \mu_{\cdot}^i)(I^j(\mathbf{x}) - \mu_{\cdot}^j) d\mathbf{x} \\ \mu_{\cdot}^i &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} I^i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{cases} \quad \text{avec } \cdot = in \text{ ou } out$$

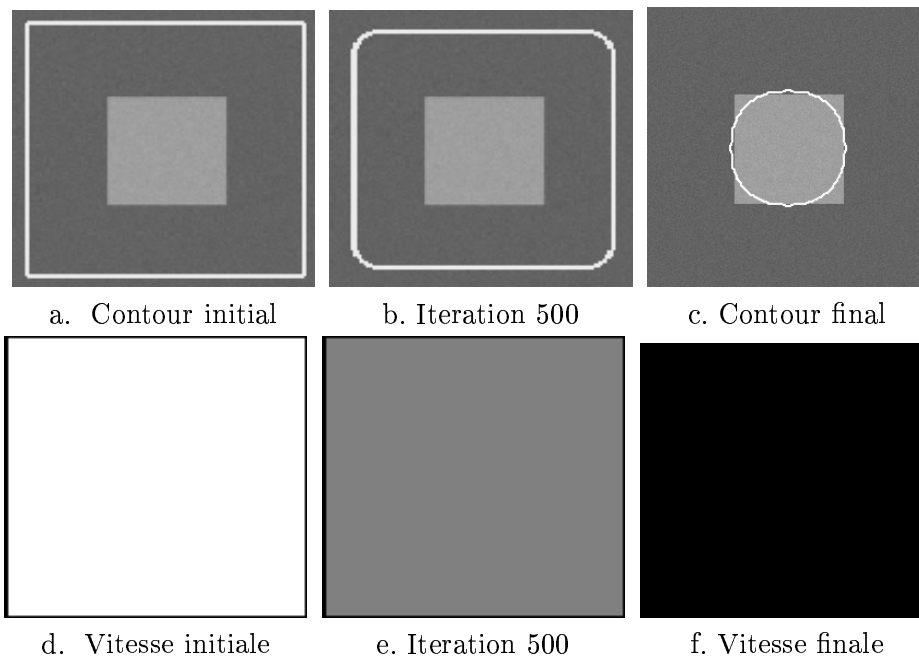


FIG. 5.4 – Figures a,b,c : Evolution du contour actif gérée par l'EDP (5.5) n'incluant pas les termes additionnels. Figures d,e,f : Visualisation de l'amplitude de la vitesse correspondante  $F$  sans le terme de régularisation  $\lambda\kappa$  et n'incluant pas les termes additionnels (normalisée de telle sorte que  $\max_{\tau}(F) = 255$ ).



De manière évidente, cette matrice est symétrique puisque  $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$ . Notons  $\det(\Sigma.)$  le déterminant de la matrice de covariance dont l'expression est la suivante :

$$\begin{aligned} \det(\Sigma.) &= \sigma^{11}\sigma^{22}\sigma^{33} + 2\sigma^{12}\sigma^{13}\sigma^{23} \\ &- \sigma^{11}(\sigma^{23})^2 - \sigma^{22}(\sigma^{13})^2 - \sigma^{33}(\sigma^{12})^2 \end{aligned}$$

#### 5.4.1 Descripteurs utilisant le déterminant de la matrice de covariance

Nous prendrons pour descripteurs régions une fonction du déterminant de la matrice de covariance :

$$\begin{cases} k_{out} &= \Phi(\det(\Sigma_{out})) \\ k_{in} &= \Phi(\det(\Sigma_{in})) \\ k_b &= \lambda \end{cases} \quad (5.6)$$

avec  $\Phi(r)$  une fonction positive et croissante de classe  $C^1(\mathcal{R})$  et  $\lambda$  une constante positive permettant de régler la régularité du contour.

Nous pouvons maintenant calculer les différents termes de l'équation d'évolution du contour actif en calculant les différents termes de (4.30). Les détails de calcul sont donnés en Annexe A. On trouve l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} &= [ \Phi(\det(\Sigma_{in})) - \Phi(\det(\Sigma_{out})) + \lambda \kappa \quad (5.7) \\ &+ \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \left[ \sum_{k,l=1}^3 (I^k - \mu_{in}^k)(I^l - \mu_{in}^l) \det(M_{in}^{kl})(-1)^{k+l} \right] \\ &- 3 \det(\Sigma_{in}) \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \\ &- \Phi'(\det(\Sigma_{out})) \left[ \sum_{k,l=1}^3 (I^k - \mu_{out}^k)(I^l - \mu_{out}^l) \det(M_{out}^{kl})(-1)^{k+l} \right] \\ &+ 3 \det(\Sigma_{out}) \Phi'(\det(\Sigma_{out})) ] \mathbf{N} \end{aligned}$$

La matrice  $M^{kl}$  est déduite de la matrice de covariance  $\Sigma.$  en supprimant la  $k^{ieme}$  ligne et la  $l^{ieme}$  colonne. Les quatre dernières lignes de l'équation sont les termes additifs provenant de la dépendance des descripteurs avec la région.

Ici encore, on peut distinguer des termes globaux et des termes locaux qui font intervenir l'intensité du point considéré.

#### 5.4.2 Descripteurs utilisant le produit des variances

On peut utiliser des descripteurs simplifiés basés sur le produit des variances. Cette formule simplifiée du déterminant de la matrice de covariance

permet une réduction du temps de calcul et donne de très bons résultats comme nous le verrons dans la partie expérimentale.

Les descripteurs se réduisent alors à :

$$\begin{cases} k_{out} &= \Phi(\sigma_{out}^{11}\sigma_{out}^{22}\sigma_{out}^{33}) \\ k_{in} &= \Phi(\sigma_{in}^{11}\sigma_{in}^{22}\sigma_{in}^{33}) \\ k_b &= \lambda \end{cases} \quad (5.8)$$

avec  $\Phi(r)$  une fonction positive et croissante de classe  $C^1(\mathcal{R})$  et  $\lambda$  une constante positive permettant de régler la régularité du contour.

Nous pouvons déduire l'équation d'évolution à partir de l'équation (5.7) trouvée pour le déterminant de la matrice de covariance :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} &= \left[ \Phi(\sigma_{in}^{11}\sigma_{in}^{22}\sigma_{in}^{33}) - \Phi(\sigma_{out}^{11}\sigma_{out}^{22}\sigma_{out}^{33}) + \lambda \kappa \right. \\ &\quad + \Phi'(\sigma_{in}^{11}\sigma_{in}^{22}\sigma_{in}^{33}) \left( (I^1 - \mu_{in}^1)^2 \sigma_{in}^{22}\sigma_{in}^{33} + (I^2 - \mu_{in}^2)^2 \sigma_{in}^{11}\sigma_{in}^{33} \right. \\ &\quad \quad \left. + (I^3 - \mu_{in}^3)^2 \sigma_{in}^{11}\sigma_{in}^{22} - 3\sigma_{in}^{11}\sigma_{in}^{22}\sigma_{in}^{33} \right) \\ &\quad - \Phi'(\sigma_{out}^{11}\sigma_{out}^{22}\sigma_{out}^{33}) \left( (I^1 - \mu_{out}^1)^2 \sigma_{out}^{22}\sigma_{out}^{33} + (I^2 - \mu_{out}^2)^2 \sigma_{out}^{11}\sigma_{out}^{33} \right. \\ &\quad \quad \left. + (I^3 - \mu_{out}^3)^2 \sigma_{out}^{11}\sigma_{out}^{22} - 3\sigma_{out}^{11}\sigma_{out}^{22}\sigma_{out}^{33} \right) \left. \right] \mathbf{N} \end{aligned} \quad (5.9)$$

### 5.4.3 Résultats expérimentaux

Pour les résultats expérimentaux, l'espace couleur utilisé est  $(Y, U, V)$ , où  $(I^1 = Y)$  représente la luminance et  $(I^2 = U)$  et  $(I^3 = V)$  représentent les deux chrominances. Pour le calcul de la variance, seule la luminance est utilisée. Nous prendrons  $\varphi(r) = \log(1 + r)$  ce qui donne  $\varphi'(r) = 1/(1 + r)$  pour les descripteurs basés sur la variance (5.3) et  $\Phi(r) = \log(1 + r^2)$  ce qui donne  $\Phi'(r) = 2r/(1 + r^2)$  pour les descripteurs basés sur le déterminant de la matrice de covariance (5.6) et sur le produit des variances (5.8).

De manière à segmenter une région homogène, nous prenons un contour initial à l'intérieur de la région d'intérêt. La courbe va ensuite évoluer en direction des bords de la région homogène la plus proche.

#### 5.4.3.1 Visualisation de la vitesse, comparaison des différents descripteurs

Dans ce paragraphe, nous allons visualiser les vitesses  $F$ , sans le terme de lissage  $\lambda \kappa$ , obtenues avec le déterminant de la matrice de covariance et avec le produit des variances pour la séquence "Erik" du COST 211. Nous les comparerons à la vitesse  $F'$  obtenue avec la variance ceci afin de montrer l'efficacité de tels descripteurs pour la segmentation des régions de couleur homogène. Les vitesses sont renormalisées entre 0 et 255. Par ailleurs, nous montrerons que le produit des variances donne des résultats équivalents au déterminant de la matrice de covariance dans l'espace de couleur  $(Y, U, V)$ .

Par la suite, nous utiliserons préférentiellement le produit des variances pour des raisons de rapidité.

Prenons la séquence “Erik” ; si on place le cercle initial sur le visage, on peut voir Fig.5.5 les trois amplitudes des vitesses initiales correspondantes, celle obtenue avec la variance Fig.5.5.b, celle obtenue avec le produit des variances Fig.5.5.c, et celle obtenue avec le déterminant de la matrice de covariance Fig.5.5.d. Cette figure nous permet de voir l'efficacité du produit des variances et du déterminant de la matrice de covariance pour l'espace couleur  $(Y, U, V)$  comme descripteurs de régions couleur homogènes. L'amplitude de la vitesse sur le visage apparaît comme étant proche de 0 sur la Fig.5.5. La vitesse atteint donc le maximum des vitesses négatives pour tout le visage. Sur cette partie, le contour va donc se dilater. Les autres régions ont des vitesses positives pour cette configuration initiale.

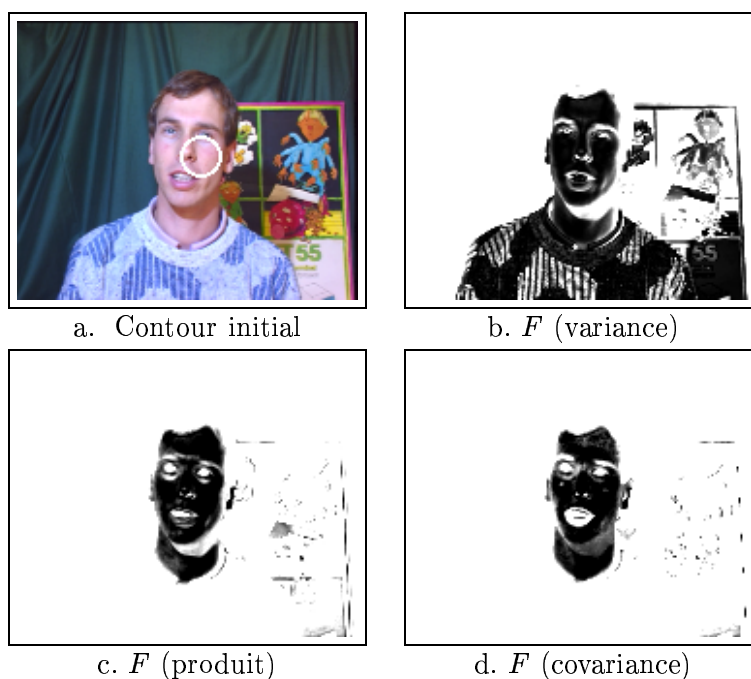


FIG. 5.5 – Comparaison de l'amplitude de la vitesse initiale  $F$  (sans les termes de lissage), calculée en utilisant la variance (figure b), le produit des variances (figure c) et de celle calculée en utilisant le déterminant de la matrice de covariance (figure d) pour le même contour initial (figure a).

Par ailleurs, nous montrons l'évolution du contour pour cette image avec le descripteur basé sur le déterminant de la matrice de covariance Fig.5.7 et avec le descripteur réduit basé sur le produit des variances Fig.5.6 ( $\lambda = 15$ ). Les résultats montrent que les deux descripteurs donnent de bons résultats concernant la segmentation du visage.

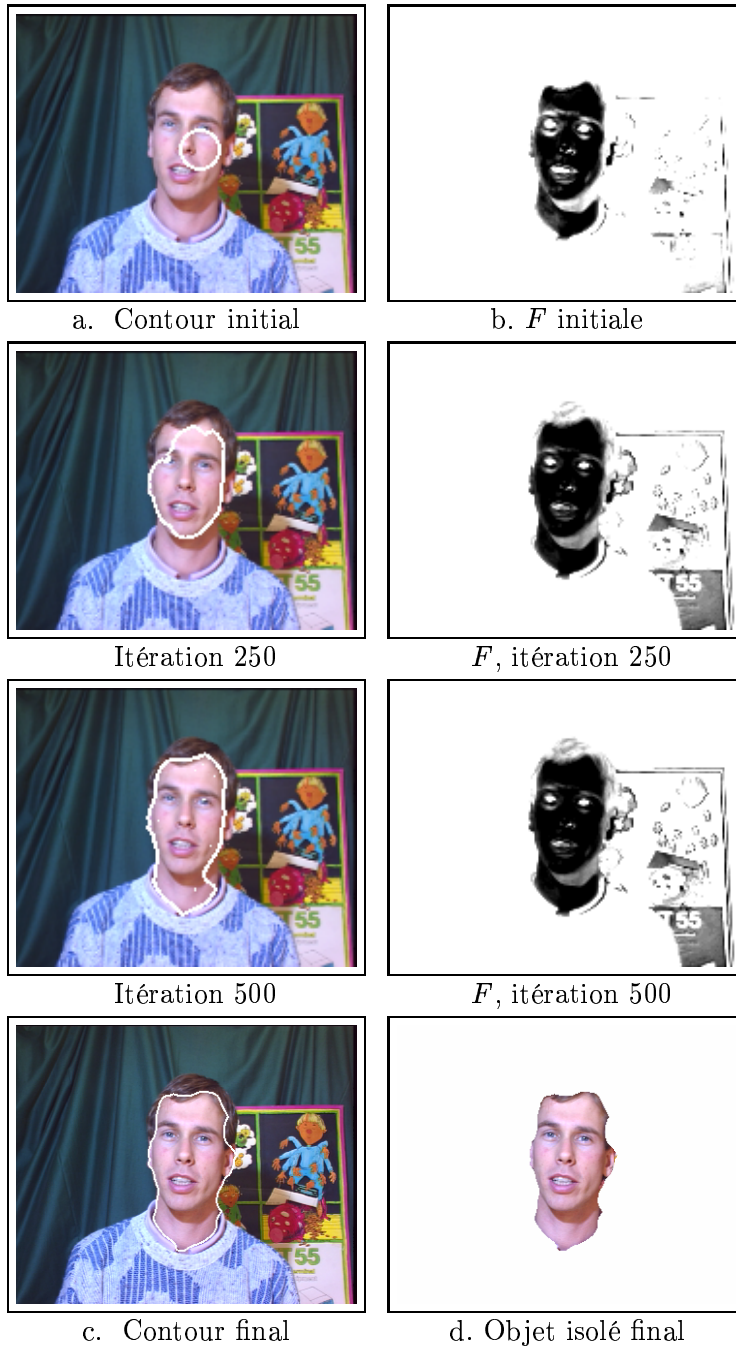


FIG. 5.6 – Evolution du contour à partir du contour initial (a) en utilisant l'équation d'évolution avec les descripteurs basés sur le produit des variances ( $\lambda = 15$ ).

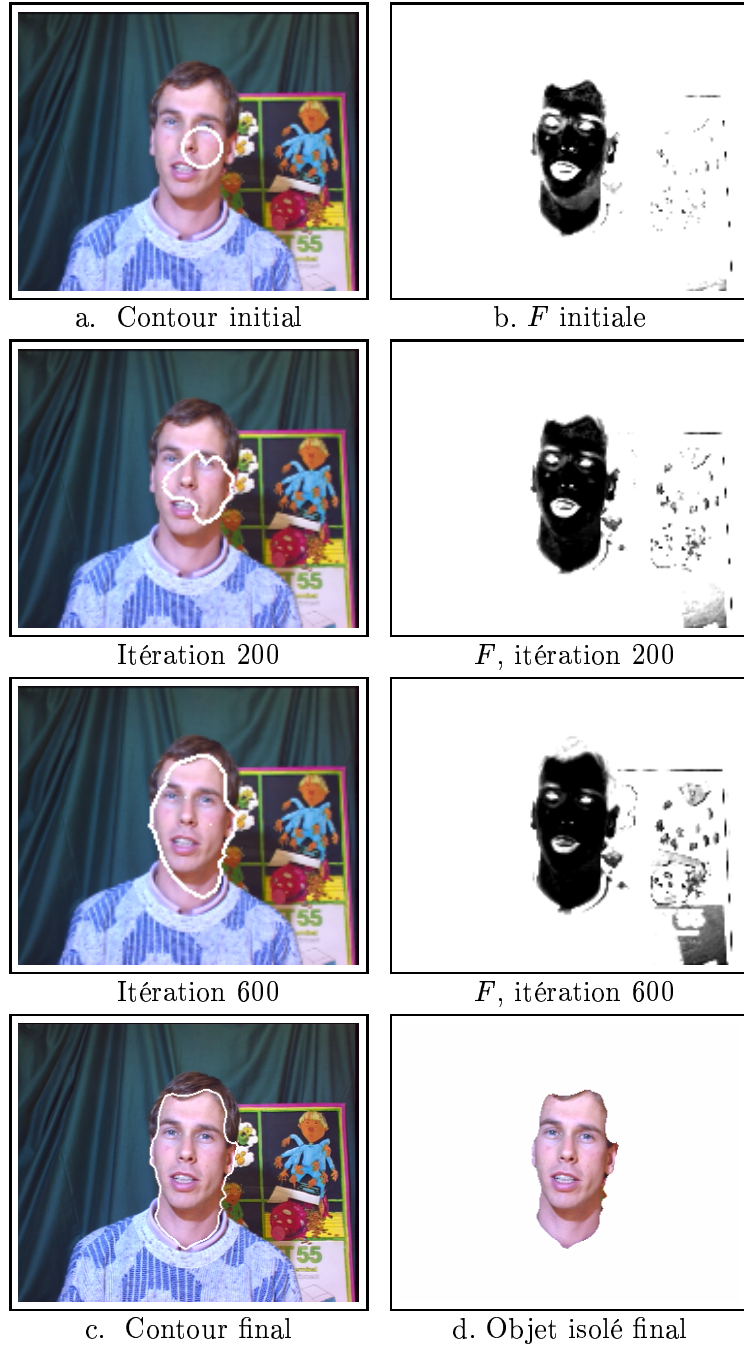


FIG. 5.7 – Evolution du contour à partir du contour initial (a) en utilisant l'équation d'évolution avec les descripteurs basés sur le déterminant de la matrice de covariance ( $\lambda = 15$ ).

### 5.4.3.2 Importance des termes additifs

Intéressons nous maintenant aux termes additifs de l'équation d'évolution (5.7) utilisant le déterminant de la matrice de covariance. Faisons évoluer le contour actif sur une image de la séquence Erik en utilisant l'équation d'évolution avec et sans les termes additifs. Les résultats obtenus en tenant compte des termes additifs sont donnés Fig.5.7. Le visage est ici correctement segmenté. Faisons maintenant évoluer le contour avec l'équation d'évolution suivante n'incluant pas les termes additifs :

$$\frac{\partial \Gamma(\tau)}{\partial \tau} = [ \Phi(\det(\Sigma_{in})) - \Phi(\det(\Sigma_{out})) + \lambda \kappa ] \mathbf{N} \quad (5.10)$$

L'évolution du contour est donnée Fig.5.8. Le contour final ne donne pas une segmentation correcte du visage. Le module de la vitesse n'est pas affiché. En effet, celui-ci, sans les termes de lissage, ne dépend pas de  $\mathbf{x}$ . C'est une constante dont la valeur évolue au cours du temps. A convergence, modulo les termes de lissage, la vitesse du contour va tendre vers 0 et on va donc tendre à égaliser les deux valeurs  $\det(\Sigma_{in})$  et  $\det(\Sigma_{out})$ . L'objectif de départ n'est donc plus atteint puisque l'on cherchait à minimiser ces deux valeurs et non à les égaliser.

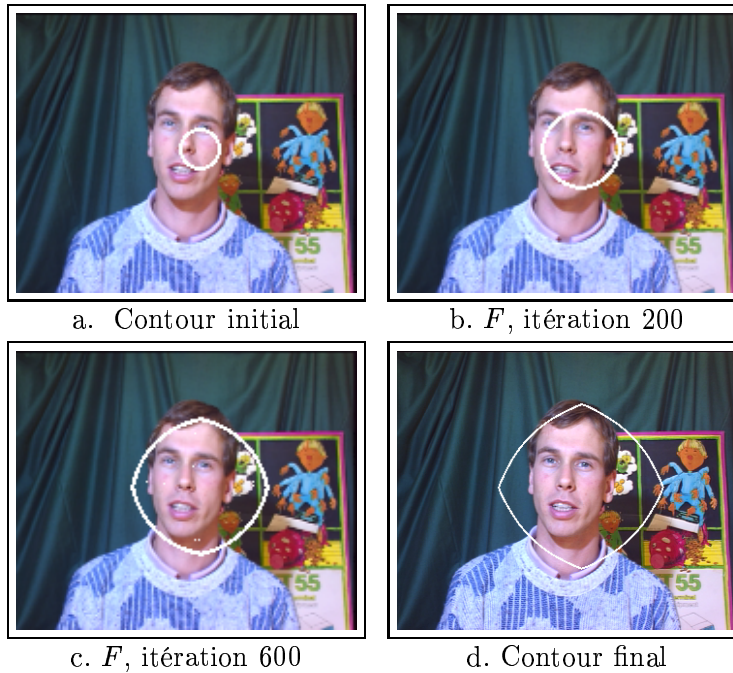


FIG. 5.8 – Evolution du contour à partir du contour initial (a) en utilisant l'équation d'évolution (5.10) ne prenant pas en compte les termes additifs issus du déterminant de la matrice de covariance ( $\lambda = 15$ ).

### 5.4.3.3 Estimation des moyennes et des variances

Dans cette partie, nous montrons l'évolution des paramètres en fonction du nombre d'itérations sur l'image Erik en partant du contour initial Fig.5.7.a. L'évolution du contour a été donnée Fig.5.7. On peut visualiser, Fig.5.9, l'évolution des entropies  $S(\Omega_{in})$  et  $S(\Omega_{out})$  calculées via la relation (5.2). On peut voir également par cette figure que le descripteur  $k_{out}$  diminue au cours de l'évolution, parallèlement le descripteur  $k_{in}$  augmente puis diminue pour se stabiliser ensuite. Il est intéressant de noter que pour minimiser le critère, une des valeurs doit augmenter. En effet, le contour initial Fig.5.7.a va se dilater afin de minimiser le terme  $|\det(\Sigma_{out})|$ . Par contre le terme  $|\det(\Sigma_{in})|$  va augmenter puisque la région englobée devient moins homogène en couleur (on inclut la bouche, les dents à l'intérieur de la région). Pour utiliser les termes de l'entropie, le désordre de la région  $\Omega_{out}$  diminue, par contre celui de la région  $\Omega_{in}$  augmente. Pour minimiser le désordre global, il faut parfois augmenter le désordre des plus petites régions (mais est-ce politiquement correct?).

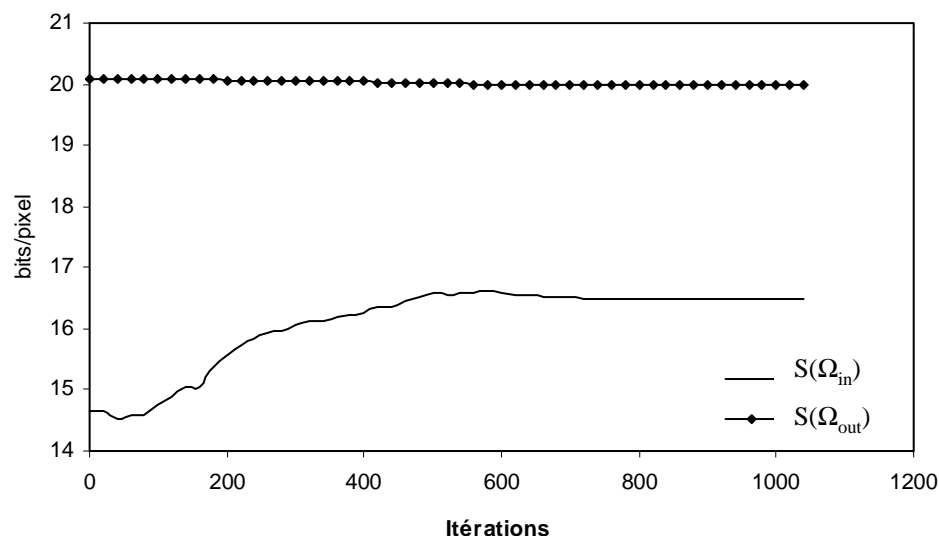


FIG. 5.9 – Evolution de l'entropie de l'objet  $S(\Omega_{in})$  et de celle du fond  $S(\Omega_{out})$  estimées par la relation (5.2) en fonction du nombre d'itérations d'évolution du contour actif avec l'EDP (5.7) pour l'image Erik.

Les moyennes des différentes couleurs et régions sont également estimées comme on peut le voir sur les courbes de la Fig.5.10. L'évolution des variances de la région  $\Omega_{in}$  et de la région  $\Omega_{out}$  sont montrées Fig.5.11.

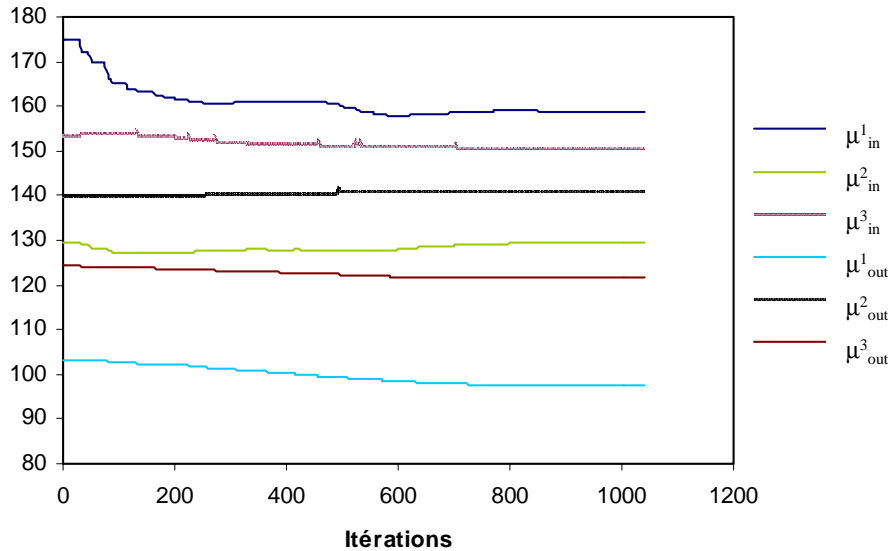


FIG. 5.10 – Evolution des moyennes en fonction du nombre d'itérations avec l'EDP (5.7) pour l'image Erik.

#### 5.4.3.4 Résultats pour différentes régions

Prenons maintenant la séquence “Akiyo” du groupe MPEG, la Fig.5.12 nous montre l'évolution du contour à partir du contour initial donné Fig.5.12.a en utilisant pour l'évolution un paramètre de lissage  $\lambda = 20$ . Le visage est correctement segmenté.

On peut aussi s'intéresser à d'autres régions. Ainsi le pull très texturé du personnage de la séquence “Erik” peut également être segmenté de manière précise comme nous le montrons Fig.5.13. Le paramètre  $\lambda$  est fixé à 15.

#### 5.4.3.5 Influence du paramètre de lissage

Le coefficient de lissage  $\lambda$  permet de lisser les contours car il pondère la minimisation de la longueur de la courbe dans le critère introduit. Nous avons refait l'expérience de la Fig.5.12 en mettant ce coefficient à 0 afin d'en mesurer l'influence. Les résultats se trouvent Fig.5.14. On peut voir que mettre ce terme de lissage à 0 nous permet ici de ne pas segmenter les yeux ou la bouche. Dans ce cas, la segmentation finale aurait pu être obtenue par un simple seuillage de l'amplitude de la vitesse. Le fait d'ajouter un terme de lissage nous permet d'ajouter une contrainte sur la région en évitant la segmentation de petites régions intérieures et nous permet ainsi d'avoir une région plus “globale”. Selon l'application envisagée, ce coefficient peut être intéressant ou non.



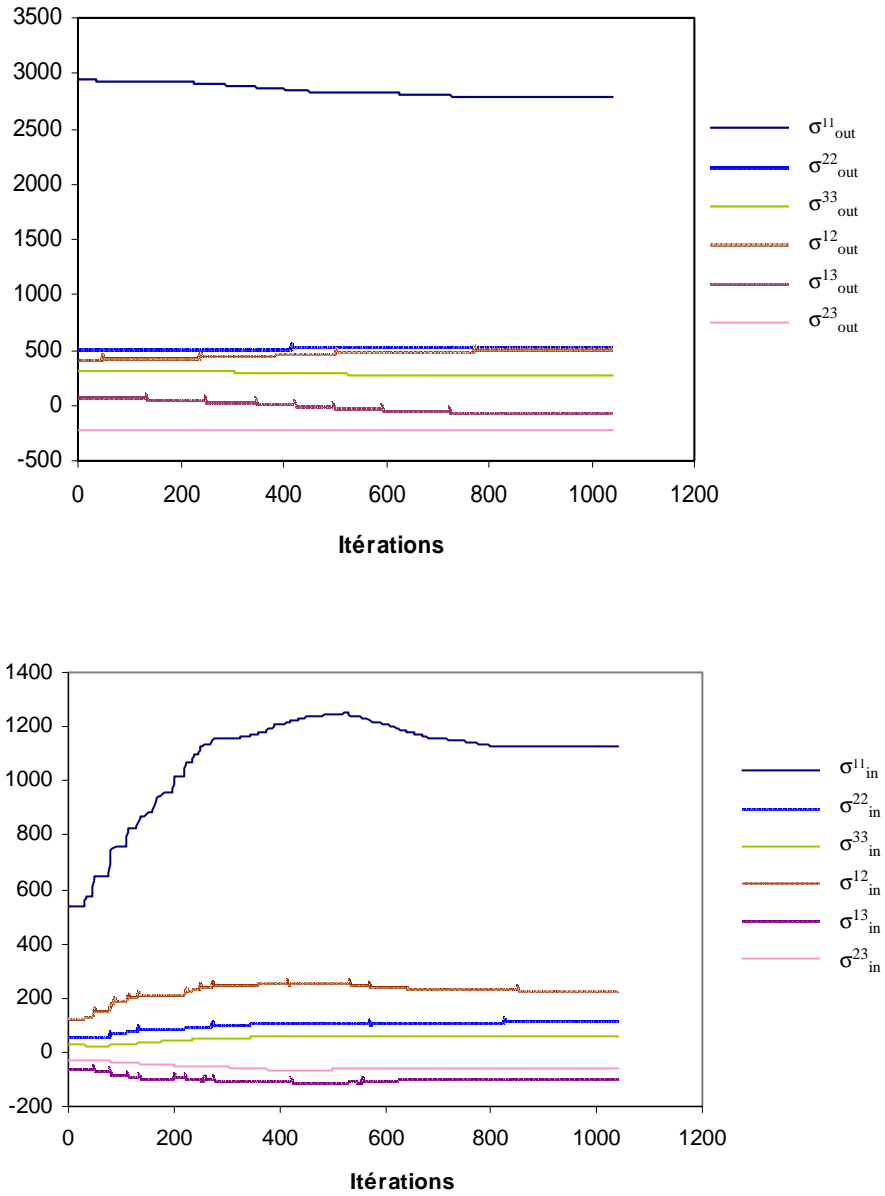


FIG. 5.11 – Evolution des variances pour les régions  $\Omega_{in}$  et  $\Omega_{out}$  en fonction du nombre d'itérations avec l'EDP (5.7) pour l'image Erik.

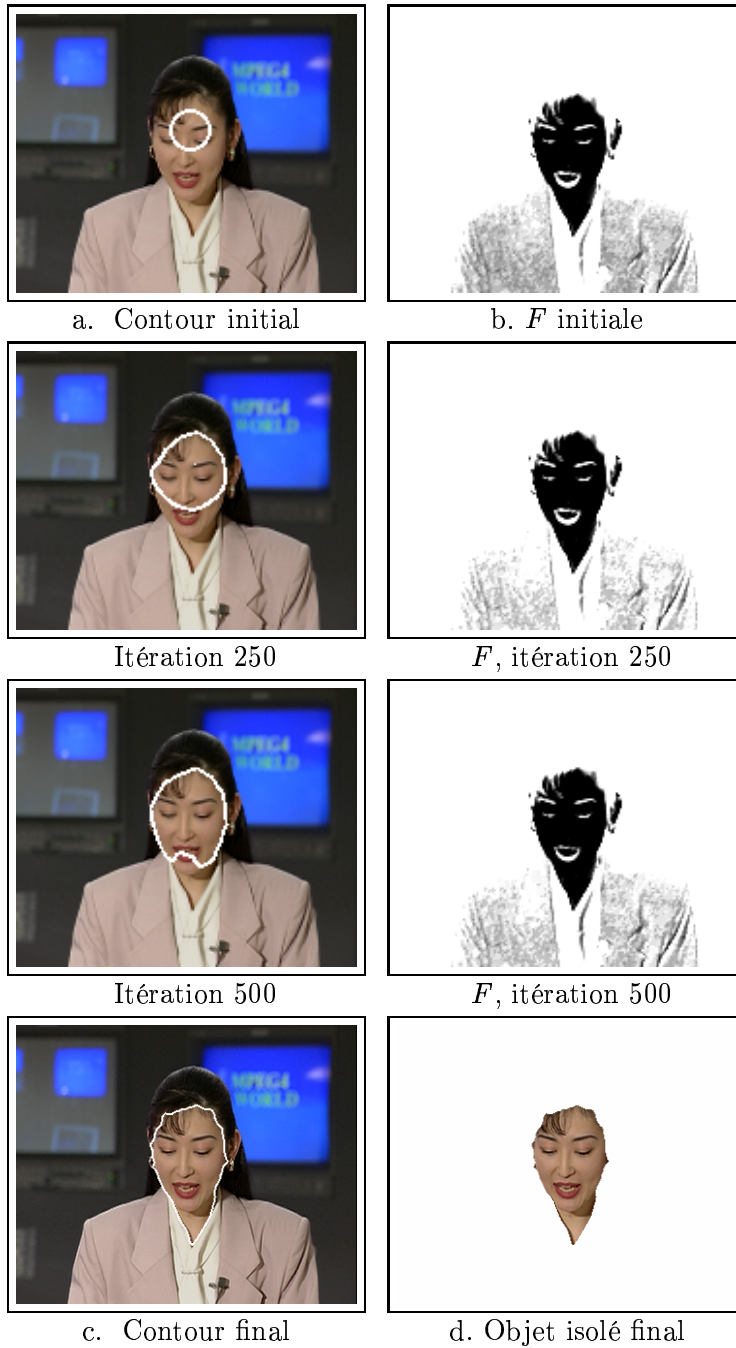


FIG. 5.12 – Evolution du contour à partir du contour initial (a) en utilisant l'équation d'évolution avec les descripteurs basés sur le produit des variances ( $\lambda = 20$ ).

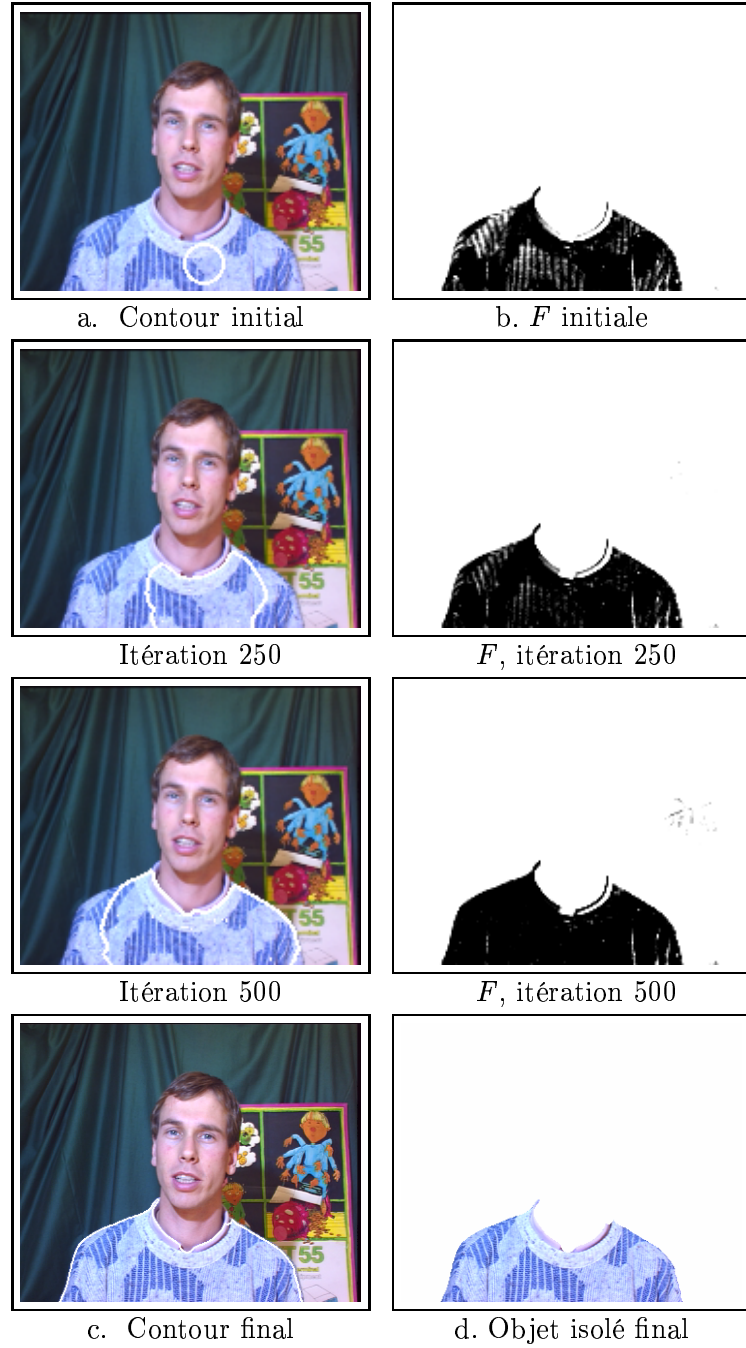


FIG. 5.13 – Evolution du contour à partir du contour initial (a) en utilisant l'équation d'évolution avec les descripteurs basés sur le produit des variances ( $\lambda = 15$ ).

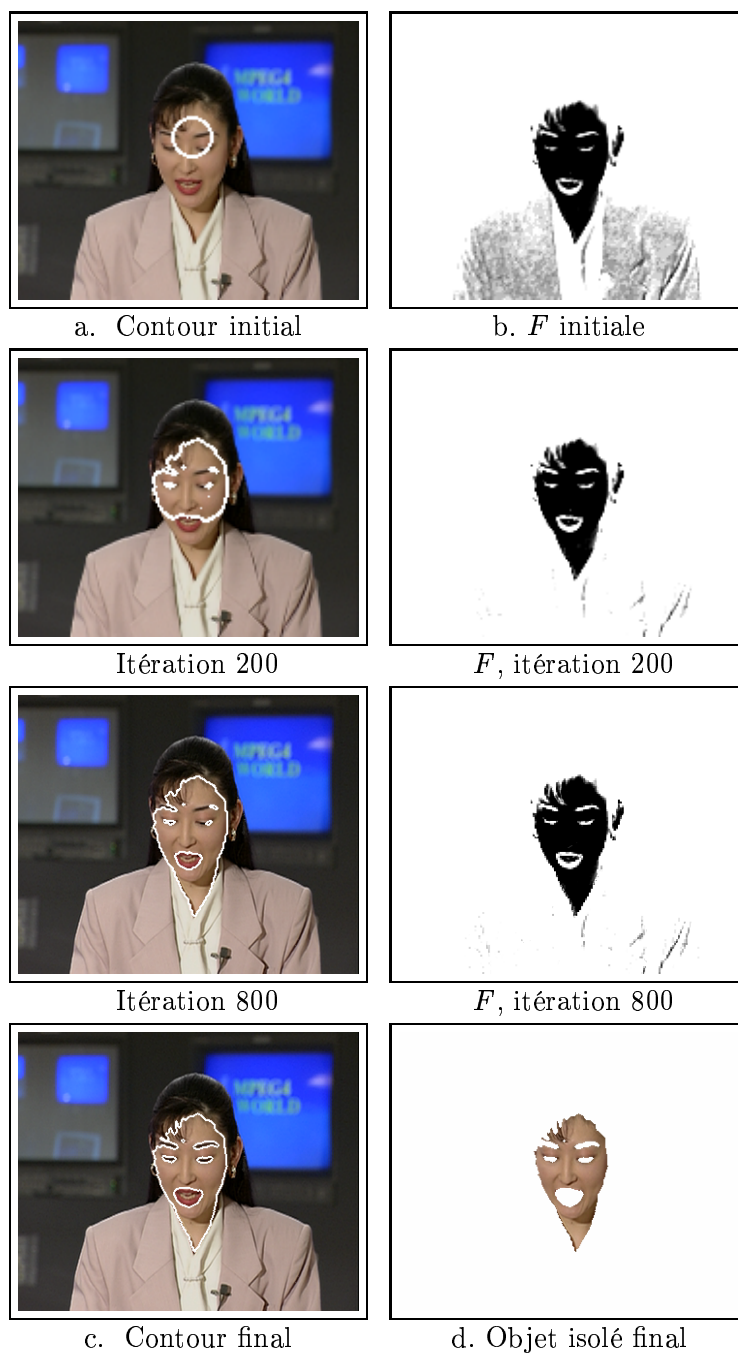


FIG. 5.14 – Evolution du contour à partir du contour initial (a) en utilisant l'équation d'évolution avec les descripteurs basés sur le produit des variances ( $\lambda = 0$ ).

### 5.4.3.6 Application à la segmentation du visage

Les descripteurs basés sur la matrice de covariance peuvent être implémentés pour la segmentation des visages humains dans les séquences vidéo. Cette segmentation peut alors être avantageusement utilisée pour le codage vidéo afin de coder de manière sélective le visage. Pour un taux de compression donné, le visage peut être transmis avec un débit plus élevé au détriment du fond. Cela s'avère intéressant pour des applications telles que la vidéoconférence où l'information la plus importante est le visage de la personne [5].

Ici, la première image est initialisée avec un cercle choisi à l'intérieur du visage à segmenter. Cependant on peut combiner l'algorithme de segmentation avec un premier algorithme de détection du visage afin de repérer l'emplacement des visages sur la première image de la séquence. L'algorithme utilisant les contours actifs permettra une segmentation plus précise, et un suivi sur la séquence d'images.

Dans les expériences des Fig.5.15 et Fig.5.16, la première image est initialisée par un cercle à l'intérieur du visage à segmenter. Ensuite, on fait évoluer le contour actif avec l'équation (5.8). Le contour final de l'image courante est choisi comme contour initial de l'image suivante. L'algorithme a été testé sur la séquence "Akiyo", avec  $\lambda = 20$ . On peut voir sur la Fig.5.15 que le visage est correctement segmenté. Les résultats de la séquence "Erik" sont donnés Fig.5.16, le paramètre  $\lambda$  réglé à 15. Dans cet exemple le visage est également segmenté de manière précise.

## 5.5 CONCLUSION

Nous avons étudié quelques descripteurs pour la segmentation de régions homogènes d'intérêt. La première partie a été consacrée aux descripteurs utilisant la variance pour la segmentation de régions homogènes dans les images à niveaux de gris. Nous avons mis en œuvre les modèles élaborés sur un exemple simple afin d'en attester la validité. Ceci a permis de montrer l'importance des termes additifs pour obtenir une segmentation correcte des régions. Par ailleurs, la moyenne et la variance de la région sont réestimées au cours de la propagation. A convergence, on obtient une estimation précise de ces valeurs pour la région considérée. On procède donc ici à une segmentation et une estimation jointes.

En deuxième partie, nous avons étudié des descripteurs pour la segmentation des régions homogènes dans les images couleur. Le déterminant de la matrice de covariance et le produit des variances se sont révélés pertinents pour cette étude et notamment pour la segmentation du visage. La notion d'homogénéité n'est pas prise ici au sens strict puisque, dans le visage, apparaissent de petites régions comme les yeux ou la bouche qui sont de couleurs différentes de celle de la peau. Les contours actifs sont alors très intéressants

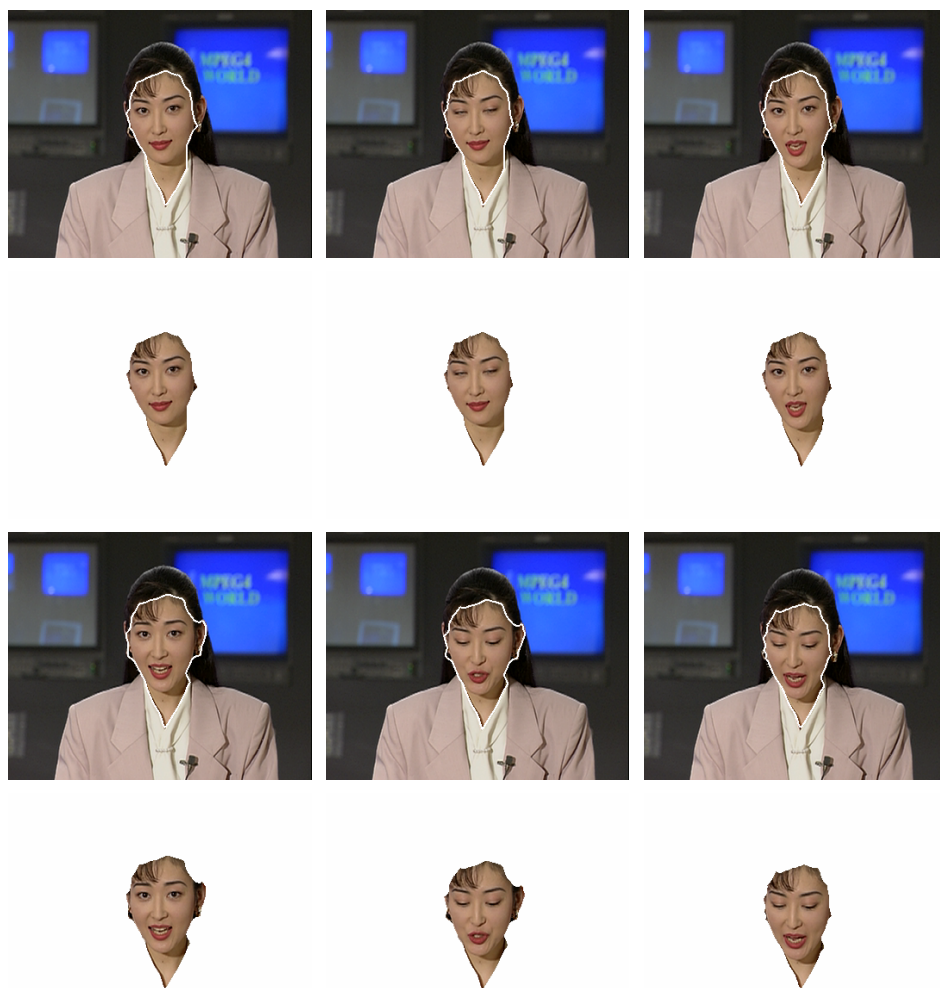


FIG. 5.15 – Segmentation du visage sur la séquence vidéo “Akiyo” (Contour final et objet isolé).

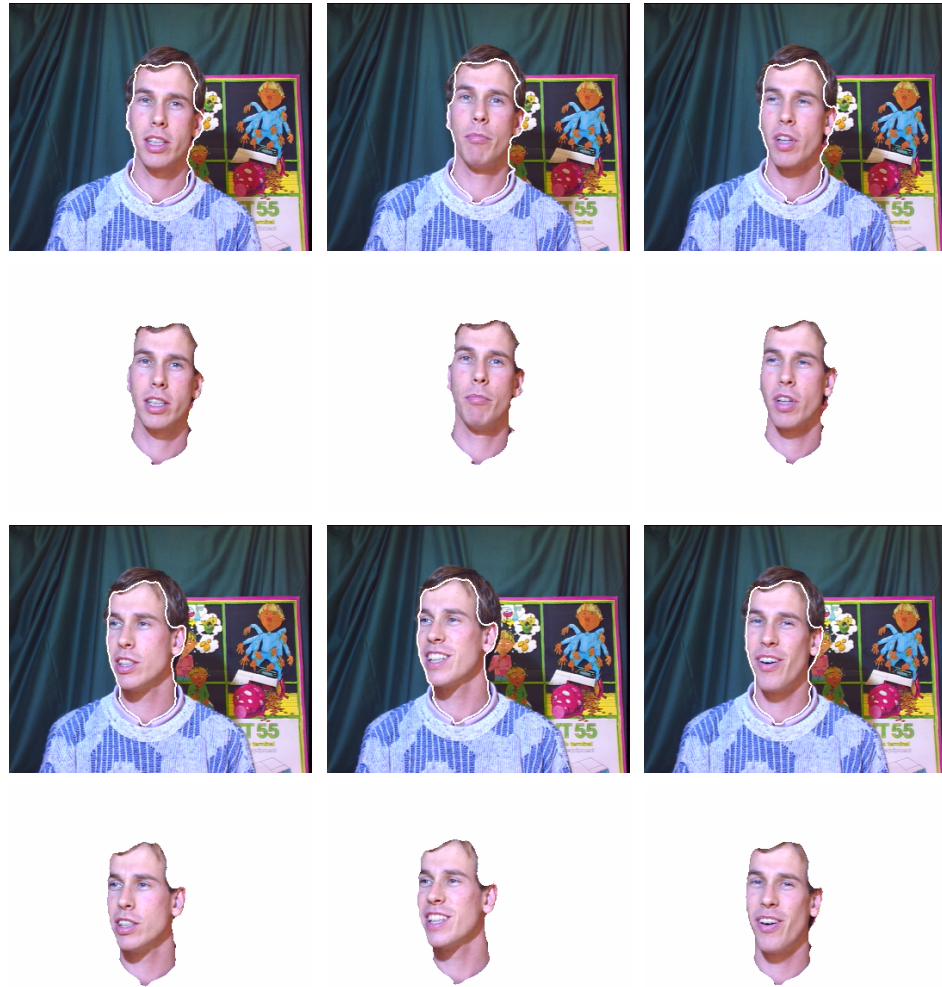


FIG. 5.16 – Segmentation du visage sur la séquence vidéo “Erik” (Contour final et objet isolé).

puisqu'ils permettent de segmenter totalement le visage en incluant ces petites régions cela grâce au terme de lissage comme l'ont illustré les résultats expérimentaux.

En guise de perspectives, d'autres descripteurs peuvent être étudiés comme la trace de la matrice de covariance [114]. L'influence des variances croisées devra sans doute être plus profondément étudiée selon l'espace de couleur choisi.

Par ailleurs, on peut penser faire un parallèle entre les techniques développées ici et celles utilisées en classification. On pourrait par exemple lors du calcul de la moyenne, pondérer l'apport de l'intensité d'un point entrant dans une région en fonction de sa date d'entrée. Plus un point apparaît tard, moins son apport est considéré dans le calcul du descripteur. Ceci afin d'éviter de segmenter une région de moyenne et de localisation proches de la région considérée.





# Segmentation de régions d'intérêt à l'aide des histogrammes

Après s'être intéressés aux descripteurs statistiques tels que la variance ou le déterminant de la matrice de covariance, nous pouvons maintenant généraliser l'utilisation de descripteurs statistiques en considérant la probabilité de distribution de l'intensité ou de la couleur à l'intérieur d'une région par l'étude de son histogramme. Nous étendons alors le cadre de travail général au cas où les descripteurs  $k$  dépendent continûment d'une famille de caractéristiques d'une région. Nous appliquerons les résultats obtenus afin de segmenter une région, en minimisant la distance entre son histogramme et un histogramme de référence. L'évolution des histogrammes au cours de la propagation du contour est étudiée.

Cette partie a été présentée dans [7, 8].

### 6.1 INTRODUCTION

Rappelons tout d'abord quelques notations et définitions. Soit l'intensité de l'image  $\mathbf{I} : \Omega_I \rightarrow \mathcal{R}^m$  avec  $\Omega_I \subset \mathcal{R}^n$ . Pour une image couleur, la dimension de l'espace d'arrivée  $m$  est égal à 3. L'histogramme normalisé  $q(\alpha) : \mathcal{R}^m \rightarrow [0, 1]$  représente la densité de probabilité des valeurs de l'intensité dans l'image. Ainsi si un pixel de coordonnées  $\mathbf{x} \in \Omega_I$  est choisi aléatoirement alors  $q(\alpha)$  est la probabilité que  $\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \alpha$  :

$$q(\alpha) = Pr\{\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \alpha\}$$

Le problème que nous nous posons est simple. Supposons que nous connaissons la fonction de densité de probabilité de  $\mathbf{I}$  sur une région de référence  $\Omega_{ref}$ , soit  $q(\alpha) : \mathcal{R}^m \rightarrow [0, 1]$  cette densité. Soit une région  $\Omega$ , notre objectif est de faire évoluer cette région de manière à minimiser la distance entre l'histogramme de cette région noté  $\hat{q}(\alpha, \Omega)$  et l'histogramme de référence  $q(\alpha)$ . Notre but est ainsi d'utiliser notre cadre de travail général sur les contours actifs afin de calculer l'équation d'évolution du contour actif qui va nous permettre de minimiser cette distance en faisant évoluer la région  $\Omega$ .

## 6.2 MINIMISATION DE LA DISTANCE ENTRE HISTOGRAMMES

Dans cette partie, nous allons tout d'abord rappeler comment estimer l'histogramme  $\hat{q}(\alpha, \Omega)$ . Ensuite nous allons étudier la minimisation de la distance entre deux histogrammes et déduire la vitesse d'évolution du contour actif correspondante.

### 6.2.1 Estimation de l'histogramme sur une région

Nous pouvons estimer l'histogramme  $\hat{q}(\alpha, \Omega)$  de la région  $\Omega$  en utilisant, par exemple, la méthode de Parzen [39]. L'histogramme est alors estimé de la manière suivante :

$$\hat{q}(\alpha, \Omega) = \frac{1}{K(\Omega)} \int_{\Omega} g_{\sigma}(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \alpha) d\mathbf{x}$$

où la fonction d'estimation  $g_{\sigma}$  est une densité de probabilité gaussienne de dimension  $m$  avec une moyenne nulle et une variance  $\sigma^2$  :

$$g_{\sigma}(\alpha) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2\sigma^2}\right)$$

La constante de normalisation  $K$ , qui dépend en général de  $\Omega$ , est définie de telle sorte que :

$$\int_{\mathcal{R}^m} \hat{q}(\alpha, \Omega) d\alpha = 1 .$$

On a donc pour  $K$  :

$$K(\Omega) = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{R}^m} g_{\sigma}(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \alpha) d\alpha d\mathbf{x} = |\Omega|$$

### 6.2.2 Distance entre deux histogrammes

Nous allons maintenant nous attacher à comparer l'histogramme de référence  $q(\alpha)$  avec l'histogramme estimé de la région  $\Omega$  noté  $\hat{q}(\alpha, \Omega)$ . Nous utilisons une fonction  $\varphi : \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^+$  qui va nous permettre de comparer les deux histogrammes. Nous introduisons la fonctionnelle suivante qui représente la distance entre les deux histogrammes :

$$D(\Omega) = \int_{\mathcal{R}^m} \varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) d\alpha \quad (6.1)$$

Cette distance peut être le carré de la norme  $L^2$  lorsque :

$$\varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) = (\hat{q}(\alpha, \Omega) - q(\alpha))^2$$

ou la distance de Hellinger lorsque :

$$\varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) = (\sqrt{\hat{q}(\alpha, \Omega)} - \sqrt{q(\alpha)})^2$$

On peut également utiliser les fonctions de comparaison suivantes : la divergence de Kullback-Leibler avec :

$$\varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) = \frac{1}{2} \left( q(\alpha) \log \frac{q(\alpha)}{\hat{q}(\alpha, \Omega)} + \hat{q}(\alpha, \Omega) \log \frac{\hat{q}(\alpha, \Omega)}{q(\alpha)} \right)$$

ou encore la fonction du chi-2 qui est non symétrique :

$$\varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) = \frac{(\hat{q}(\alpha, \Omega) - q(\alpha))^2}{q(\alpha)}.$$

### 6.2.3 Calcul de la dérivée Eulérienne

En utilisant les outils développés dans le chapitre 4, nous pouvons calculer la dérivée Eulérienne de la distance  $D(\Omega)$  définie par l'équation (6.1). Cela nous donne le théorème suivant :

**THEOREME 6.1.** *La dérivée Eulérienne dans la direction  $\mathbf{V}$  de  $D(\Omega) = \int_{\mathcal{R}^m} \varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) d\alpha$  est égale à :*

$$dD_r(\Omega, \mathbf{V}) = - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\Omega|} \left( \partial_1 \varphi(\hat{q}(\cdot), \cdot) * g_\sigma(\mathbf{I}(\mathbf{x})) - C(\Omega) \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

avec  $\partial_1 \varphi(\hat{q}(\cdot), \cdot)$  la dérivée partielle de  $\varphi(\hat{q}(\cdot), \cdot)$  par rapport à la première variable,

$$C(\Omega) = \int_{\mathcal{R}^m} \partial_1 \varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) \hat{q}(\alpha, \Omega) d\alpha$$

et  $\partial_1 \varphi(\hat{q}(\cdot), \cdot) * g_\sigma$  la convolution de la fonction  $\partial_1 \varphi(\hat{q}(\cdot), \Omega) : \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$  avec la fonction  $g_\sigma$ .

**DÉMONSTRATION :**

La dérivée Eulérienne de  $D(\Omega)$  est égale à :

$$dD_r(\Omega, \mathbf{V}) = \int_{\mathcal{R}^m} d\varphi_r(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha, \mathbf{V}) d\alpha$$

Afin de calculer la dérivée Eulérienne de  $\varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega))$ , on définit :

$$\varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) \stackrel{\text{déf}}{=} f(G_1(\alpha, \Omega), G_2(\Omega)) = \varphi \left( \frac{G_1(\alpha, \Omega)}{G_2(\Omega)}, \alpha \right),$$

avec

$$\begin{aligned} G_1(\alpha, \Omega) &= \int_{\Omega} g_{\sigma}(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \alpha) d\mathbf{x} \\ G_2(\Omega) &= |\Omega| = \int_{\Omega} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

On obtient pour la dérivée Eulérienne de  $\varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega))$  :

$$df_r(\Omega, \mathbf{V}) = \frac{\partial f}{\partial G_1} dG_{1r}(\alpha, \Omega, \mathbf{V}) + \frac{\partial f}{\partial G_2} dG_{2r}(\alpha, \Omega, \mathbf{V})$$

En posant  $h_1(\alpha, \mathbf{x}) = g_{\sigma}(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \alpha)$  et en utilisant le théorème 4.1, on trouve pour les dérivées Eulériennes de  $G_1$  et  $G_2$  :

$$dG_{1r}(\alpha, \Omega, \mathbf{V}) = \int_{\Omega} h_1'(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{V}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} h_1(\alpha, \mathbf{x}) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

Comme la fonction  $h_1$  ne dépend pas de  $\Omega$ , sa dérivée de domaine est égale à 0 et la dérivée Eulérienne de  $G_1$  est alors égale à :

$$dG_{1r}(\alpha, \Omega, \mathbf{V}) = - \int_{\partial\Omega} g_{\sigma}(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \alpha) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

La dérivée Eulérienne de  $G_2$  se calcule de la même manière, on trouve :

$$dG_{2r}(\Omega, \mathbf{V}) = - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

La dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $G_1$  est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial G_1}(G_1(\alpha, \Omega), G_2(\Omega)) &= \frac{1}{G_2(\Omega)} \frac{\partial \varphi}{\partial G_1} \left( \frac{G_1(\alpha, \Omega)}{G_2(\Omega)}, \alpha \right) \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \partial_1 \varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) \end{aligned}$$

avec  $\partial_1 \varphi$  la dérivée partielle de  $\varphi$  par rapport à la première variable.

On a également :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial G_2}(G_1(\alpha, \Omega), G_2(\Omega)) &= \frac{-G_1(\alpha, \Omega)}{G_2(\Omega)^2} \frac{\partial \varphi}{\partial G_2} \left( \frac{G_1(\alpha, \Omega)}{G_2(\Omega)}, \alpha \right) \\ &= - \frac{\hat{q}(\alpha, \Omega)}{|\Omega|} \partial_1 \varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne pour la dérivée Eulérienne de  $f$  :

$$df_r(\Omega, \mathbf{V}) = - \frac{\partial_1 \varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha)}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (g_{\sigma}(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \alpha) - \hat{q}(\alpha, \Omega)) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

En injectant ce résultat dans l'expression de la dérivée Eulérienne de  $D(\Omega)$ , et en inversant l'ordre d'intégration, on trouve :

$$dD_r(\Omega, \mathbf{V}) = - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\Omega|} \left( \int_{\mathcal{R}^m} (\partial_1 \varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) g_\sigma(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \alpha)) d\alpha \right. \\ \left. - \int_{\mathcal{R}^m} \partial_1 \varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) \hat{q}(\alpha, \Omega) d\alpha \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

Le première intégrale sur  $\mathcal{R}^m$  représente la convolution  $\partial_1 \varphi(\hat{q}(\cdot), \cdot) * g_\sigma$  de la fonction  $\partial_1 \varphi(\hat{q}(\cdot), \Omega) : \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$  avec la fonction  $g_\sigma$  ; ce qui nous donne pour le résultat final :

$$dD_r(\Omega, \mathbf{V}) = - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\Omega|} \left( \partial_1 \varphi(\hat{q}(\cdot), \cdot) * g_\sigma(\mathbf{I}(\mathbf{x})) - C(\Omega) \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

avec :

$$C(\Omega) = \int_{\mathcal{R}^m} \partial_1 \varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) \hat{q}(\alpha, \Omega) d\alpha$$

□

Prenons un exemple de fonction  $\varphi$  pour le calcul de la dérivée Eulérienne. Si on prend le carré de la norme  $L^2$ , on a  $\varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) = \frac{1}{2}(\hat{q}(\alpha, \Omega) - q(\alpha))^2$ , ce qui nous donne  $\partial_1 \varphi(\hat{q}(\alpha, \Omega), \alpha) = (\hat{q}(\alpha, \Omega) - q(\alpha))$  et pour la dérivée Eulérienne de  $D(\Omega)$  :

$$dD_r(\Omega, \mathbf{V}) = - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\Omega|} \left( (\hat{q}(\cdot) - q(\cdot)) * g_\sigma(\mathbf{I}(\mathbf{x})) - C(\Omega) \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a}$$

avec

$$C(\Omega) = \int_{\mathcal{R}^m} \hat{q}(\alpha, \Omega) (\hat{q}(\alpha, \Omega) - q(\alpha)) d\alpha$$

### 6.3 APPLICATION À LA COMPÉTITION ENTRE RÉGIONS

Comme cela a été fait précédemment, nous allons introduire une compétition entre la région d'intérêt et la région du fond. Ainsi, on va minimiser le critère  $J$  suivant :

$$J(\Omega_{in}, \Omega_{out}, \Gamma) = \int_{\Omega_{in}} k_{in}(\mathbf{x}, \Omega_{in}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{out}} k_{out}(\mathbf{x}, \Omega_{out}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} k_b(\mathbf{x}) d\mathbf{a}$$

avec les descripteurs suivants :

$$\begin{cases} k_{out} & = D(\Omega_{out}) \\ k_{in} & = D(\Omega_{in}) \\ k_b & = \lambda \end{cases} \quad (6.2)$$

avec  $\lambda$  une constante positive permettant de régler la régularité du contour. On a bien sûr :

$$\begin{aligned} D(\Omega_{out}) &= \int_{\mathcal{R}^m} \varphi_{out}(\hat{q}(\alpha, \Omega_{out}), \alpha) d\alpha \\ D(\Omega_{in}) &= \int_{\mathcal{R}^m} \varphi_{in}(\hat{q}(\alpha, \Omega_{in}), \alpha) d\alpha \end{aligned}$$

avec  $\varphi_{in}$  la fonction de comparaison de  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{in})$  avec l'histogramme de référence de  $\Omega_{in}$  noté  $q_{in}(\alpha)$  et  $\varphi_{out}$  la fonction de comparaison de  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{out})$  avec l'histogramme de référence de  $\Omega_{out}$  noté  $q_{out}(\alpha)$ .

### 6.3.1 Calcul de la dérivée Eulérienne

Pour calculer la dérivée Eulérienne du critère, nous utilisons le théorème 6.1. On trouve en faisant attention à la direction de la normale :

$$\begin{aligned} dJ_r(\Omega_{in}, \Omega_{out}, \mathbf{V}) &= - \int_{\Gamma} (D(\Omega_{in}) - D(\Omega_{out}))(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a} \quad (6.3) \\ &- \int_{\Gamma} \left( \partial_1 \varphi_{in}(\hat{q}(\cdot), \cdot) * g_{\sigma}(\mathbf{I}(\mathbf{x})) - C(\Omega_{in}) \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a} \\ &+ \int_{\Gamma} \left( \partial_1 \varphi_{out}(\hat{q}(\cdot), \cdot) * g_{\sigma}(\mathbf{I}(\mathbf{x})) - C(\Omega_{out}) \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a} \\ &- \int_{\Gamma} \lambda \kappa (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) d\mathbf{a} \end{aligned}$$

avec  $\partial_1 \varphi_i(\hat{q}(\cdot), \cdot)$  la dérivée partielle de  $\varphi_i(\hat{q}(\cdot), \cdot)$  par rapport à la première variable ( $i = in$  or  $out$ ),

$$\begin{aligned} C(\Omega_{in}) &= \int_{\mathcal{R}^m} \partial_1 \varphi_{in}(\hat{q}(\alpha, \Omega_{in}), \alpha) \hat{q}(\alpha, \Omega_{in}) d\alpha \\ C(\Omega_{out}) &= \int_{\mathcal{R}^m} \partial_1 \varphi_{out}(\hat{q}(\alpha, \Omega_{out}), \alpha) \hat{q}(\alpha, \Omega_{out}) d\alpha \end{aligned}$$

et  $\partial_1 \varphi_i(\hat{q}(\cdot), \cdot) * g_{\sigma}$  la convolution de la fonction  $\partial_1 \varphi_i(\hat{q}(\cdot), \Omega_i) : \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$  avec la fonction  $g_{\sigma}$  ( $i = in$  or  $out$ ).

### 6.3.2 Calcul de l'équation d'évolution du contour actif

A partir de la dérivée Eulérienne du critère (6.3), on déduit l'équation d'évolution du critère qui va permettre de faire évoluer le contour vers un minimum du critère  $J$  introduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} &= [D(\Omega_{in}) - D(\Omega_{out}) + C(\Omega_{out}) - C(\Omega_{in}) + \lambda \kappa \quad (6.4) \\ &+ \partial_1 \varphi_{in}(\hat{q}(\cdot), \cdot) * g_{\sigma}(\mathbf{I}(\mathbf{x})) - \partial_1 \varphi_{out}(\hat{q}(\cdot), \cdot) * g_{\sigma}(\mathbf{I}(\mathbf{x}))] \mathbf{N} \\ \Gamma(p, 0) &= \Gamma_0(p) \end{aligned}$$

On peut voir ici que le seul terme local, dépendant des coordonnées  $\mathbf{x}$  du pixel considéré, est le terme de convolution provenant de la dépendance des descripteurs à la région. Il permet de comparer la valeur de l'histogramme de référence avec celle de l'histogramme estimé pour la valeur  $\mathbf{I}(\mathbf{x})$ . Prenons l'exemple du carré de la norme  $L^2$ . Si la différence  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{in}) - q_{in}(\alpha)$  est positive pour  $\alpha = \mathbf{I}(\mathbf{x})$ , la convolution sera positive. Cela signifie que le nombre de pixels d'intensité  $\mathbf{I}(\mathbf{x})$  est plus important dans l'histogramme estimé que dans l'histogramme de référence. La vitesse résultante sera positive, le contour aura tendance à se rétracter pour enlever ce point de la segmentation. On peut raisonner de la même façon pour les histogrammes de  $\Omega_{out}$ . Les termes globaux, ne dépendant pas de  $\mathbf{x}$  permettent de comparer globalement les distances entre les histogrammes.

## 6.4 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Nous allons utiliser l'équation d'évolution (6.4) afin de segmenter une région d'intérêt sur différentes images d'une séquence vidéo en connaissant l'histogramme de référence de cette région pour l'image précédente. Ce travail a été motivé par [29, 25] où les algorithmes de suivi d'objets utilisent les distributions statistiques couleur des objets considérés. L'avantage d'utiliser les contours actifs est de pouvoir coller précisément à la forme de l'objet. Nous considérons une séquence vidéo où chaque image est représentée par une fonction couleur  $\mathbf{I} : \Omega_I \rightarrow \Omega_m$  avec  $\Omega_I \subset \mathcal{R}^2$  et  $\Omega_m \subset \mathcal{R}^2$ . En effet, on choisit ici  $m = 2$  c'est à dire un espace couleur à deux dimensions, afin d'éviter un coût calcul et mémoire trop important en dimension 3. Dans le cas de la dimension 3, il faudrait réduire le nombre de valeurs en choisissant une précision moindre. Nous choisissons comme espace couleur  $(H, S, V)$  où  $H$  représente la teinte,  $S$  la saturation et  $V$  la valeur [121]. On peut dire que la teinte correspond à la couleur, la saturation évalue sa pureté, tandis que la valeur évalue sa luminosité. Nous prendrons ici les deux composantes  $(H, V)$ . Ainsi pour une région donnée  $\Omega$ , et pour un point  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]^T$ , la fonction  $\hat{q}(\alpha, \Omega)$  représente la probabilité d'obtenir  $\alpha_1 = H$  et  $\alpha_2 = V$  dans la région  $\Omega$ .

En ce qui concerne la fonction  $\varphi$ , on choisit la fonction de comparaison du chi-2 donnée par  $\varphi_i(r, \alpha) = (r - q_i(\alpha))^2 / q_i(\alpha)$ ,  $i = in$  or  $out$  ou la distance de Hellinger<sup>1</sup> donnée par  $\varphi_i(r, \alpha) = (\sqrt{r} - \sqrt{q_i(\alpha)})^2$ ,  $i = in$  or  $out$ . On a alors pour la fonction de comparaison du chi-2 :

$$\begin{aligned} \varphi_{in}(\hat{q}(\alpha, \Omega_{in}), \alpha) &= (\hat{q}(\alpha, \Omega_{in}) - q_{in}(\alpha))^2 / q_{in}(\alpha) \\ \partial_1 \varphi_{in}(\hat{q}(\alpha, \Omega_{in}), \alpha) &= 2(\hat{q}(\alpha, \Omega_{in}) - q_{in}(\alpha)) / q_{in}(\alpha) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>suggérée par le Professeur Alfred Hero, Université de Michigan, USA



et pour la distance de Hellinger :

$$\begin{aligned}\varphi_{in}(\hat{q}(\alpha, \Omega_{in}), \alpha) &= (\sqrt{\hat{q}(\alpha, \Omega_{in})} - \sqrt{q_{in}(\alpha)})^2 \\ \partial_1 \varphi_{in}(\hat{q}(\alpha, \Omega_{in}), \alpha) &= (\sqrt{\hat{q}(\alpha, \Omega_{in})} - \sqrt{q_{in}(\alpha)}) / \sqrt{\hat{q}(\alpha, \Omega_{in})}\end{aligned}$$

avec  $q_{in}$  l'histogramme de référence de la région  $\Omega_{in}$  dans l'image précédente et pareillement pour  $\varphi_{out}$ .

Pour les dérivées de ces deux fonctions, l'un des deux histogrammes intervient au dénominateur. Ceci permet d'éviter des problèmes de dynamique dus aux faibles probabilités, la dérivée intervenant dans la vitesse d'évolution du contour actif.

Les expériences ont été effectuées sur la séquence "Erik" du COST 211. La région d'intérêt est alors le visage. Nous faisons l'hypothèse que celui-ci a été segmenté dans la première image comme on peut le voir dans la Fig.6.1. Les deux histogrammes de référence  $q_{in}$  et  $q_{out}$  sont calculés sur cette image respectivement pour la région intérieure contenant le visage et la région extérieure contenant le fond. On peut représenter ces histogrammes dans le plan en fonction de la valeur et de la teinte. L'histogramme  $q_{in}$  est représenté par des valeurs d'intensité rouge plus ou moins importantes selon la valeur de la probabilité. L'histogramme  $q_{out}$  est représenté de la même façon par des valeurs d'intensité verte. Cette représentation nous permet de visualiser la position des deux histogrammes de référence. Plus ceux-ci seront disjoints, plus la segmentation sera aisée. Par ailleurs, on représente les deux histogrammes en dimension 3, soit  $q_{in}$  et  $q_{out}$  en fonction de la valeur et de la teinte. La teinte est exprimée en degrés de 0 à 360 tandis que la valeur est comprise entre 0 et 255.

Ensuite, nous prenons une autre image de la séquence et nous allons tenter de retrouver les deux histogrammes de référence dans cette image. A partir d'un contour initial  $\Gamma_0$ , on fait évoluer les deux histogrammes estimés vers les histogrammes de référence de l'image de référence en utilisant l'équation (6.4) avec la fonction de comparaison du chi-2. La courbe initiale est un cercle. L'évolution du contour est montrée Fig.6.2. On peut noter que le contour final permet de segmenter la région d'intérêt qui est ici le visage du personnage. Parallèlement, on peut visualiser l'évolution de l'histogramme de la région  $\Omega_{in}$  soit  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{in})$  sur la Fig.6.3 et l'évolution de l'histogramme de la région  $\Omega_{out}$  soit  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{out})$  sur la Fig.6.4 au cours de l'évolution du contour. L'histogramme  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{in})$  converge vers l'histogramme de référence  $q(\Omega_{in})$ , les deux histogrammes sont montrés Fig.6.5. De même, l'histogramme  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{out})$  converge vers l'histogramme de référence  $q(\Omega_{out})$ , les deux histogrammes sont montrés Fig.6.6. Lors de l'évolution de l'histogramme  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{in})$ , un des pics situé autour de la teinte  $H=10$  et autour de la valeur  $V=160$  augmente. C'est le pic correspondant à la partie ombrée du visage.

La même expérience est effectuée sur la séquence "Akiyo" du groupe MPEG. La segmentation de référence et les deux histogrammes de référence

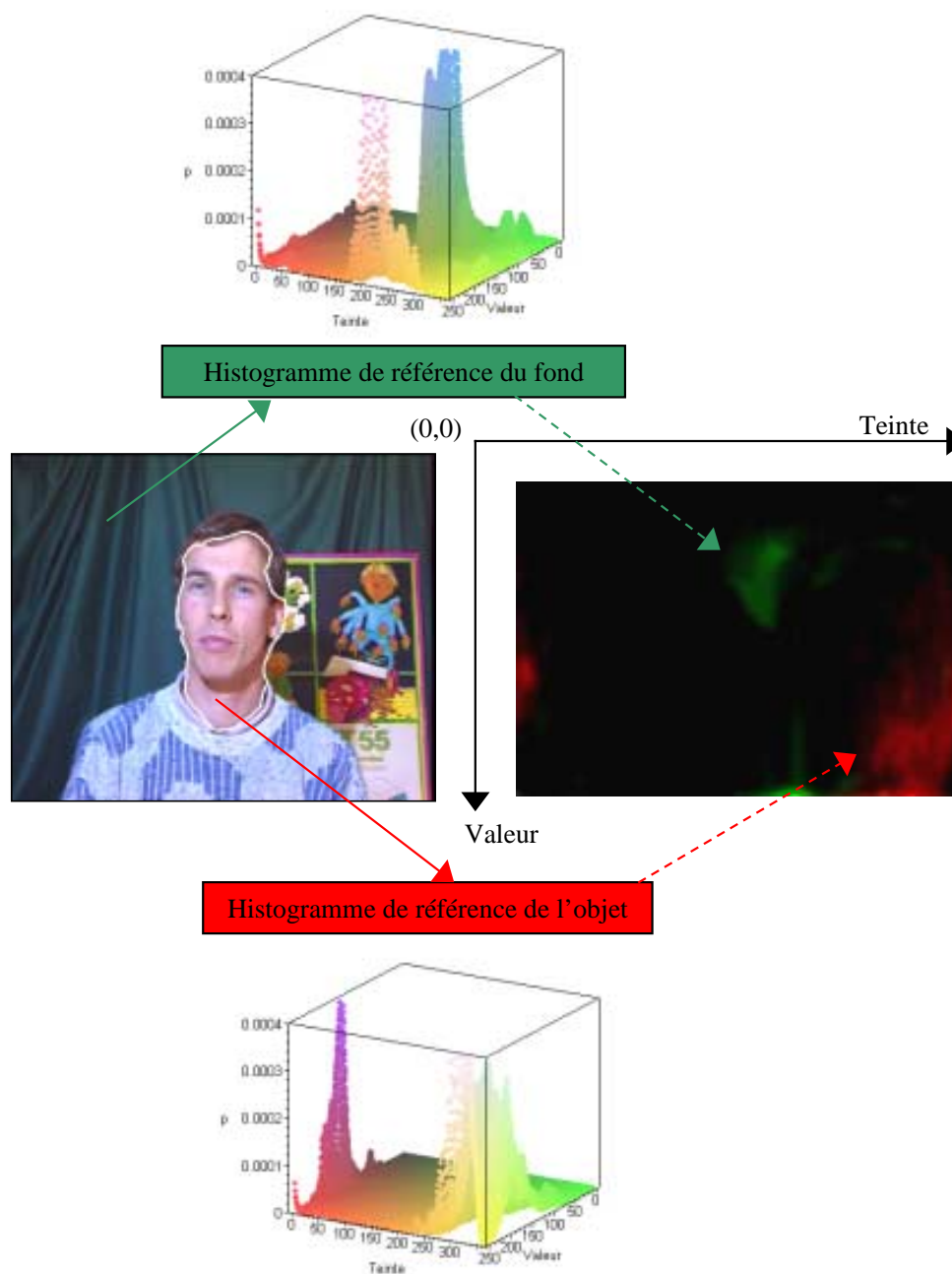


FIG. 6.1 – Segmentation de référence et les deux histogrammes de référence résultants,  $q_{in}$ , en rouge pour le visage, et  $q_{out}$  en vert pour la fond (l'intensité de la couleur est proportionnelle à la valeur de l'histogramme).

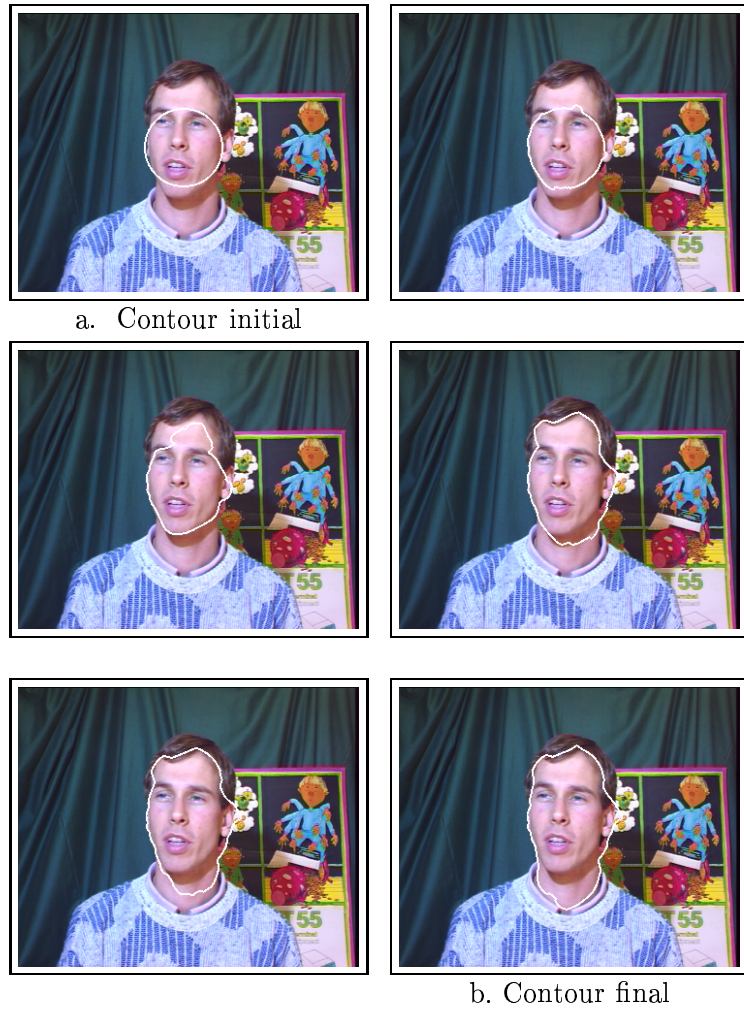
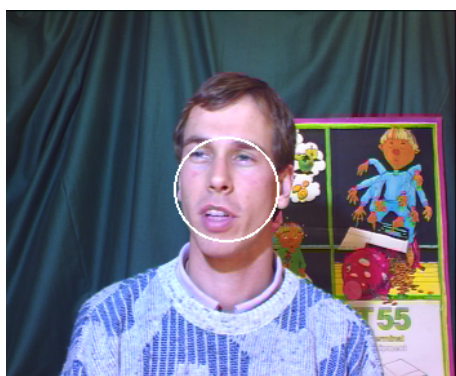
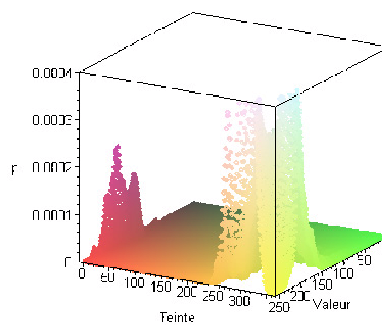


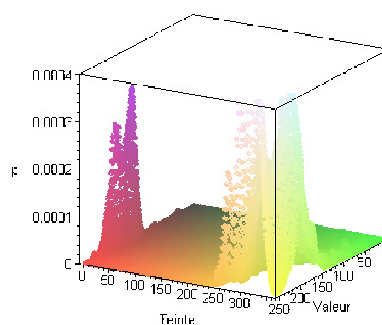
FIG. 6.2 – Evolution du contour actif sur l'image courante en utilisant les deux histogrammes de référence ( $\lambda = 10$ ).



a. Contour initial

b. Histogramme  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{in})$  initial

c. Itération 200

d. Histogramme  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{in})$  final

e. Contour final

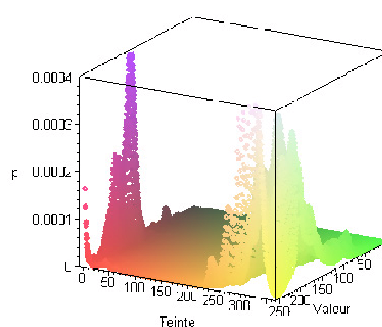
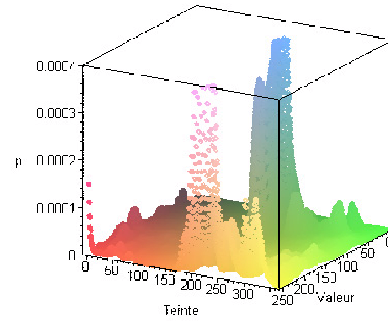


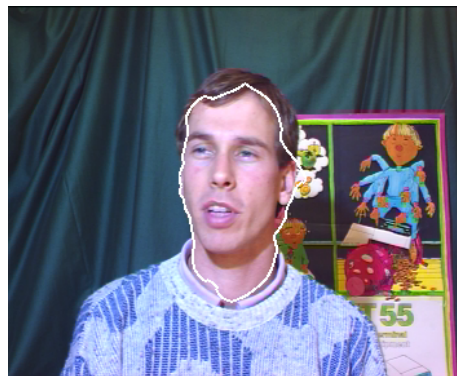
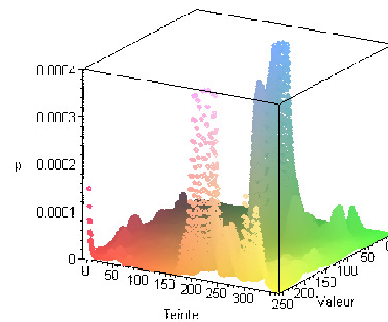
FIG. 6.3 – Evolution de l'histogramme de la région  $\Omega_{in}$  avec l'évolution du contour actif.



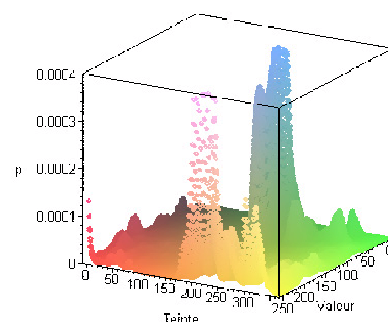
a. Contour initial

b. Histogramme  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{out})$  initial

c. Itération 200



d. Contour final

e. Histogramme  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{out})$  finalFIG. 6.4 – Evolution de l'histogramme de la région  $\Omega_{out}$  avec l'évolution du contour actif.

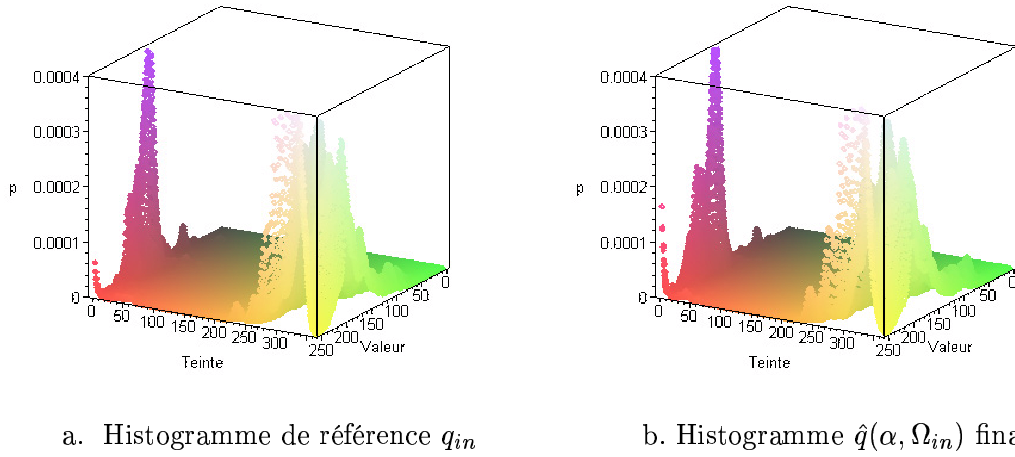


FIG. 6.5 – Comparaison de l’histogramme de référence de la région  $\Omega_{in}$ ,  $q_{in}$ , avec l’histogramme final de la région  $\Omega_{in}$ ,  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{in})$ .

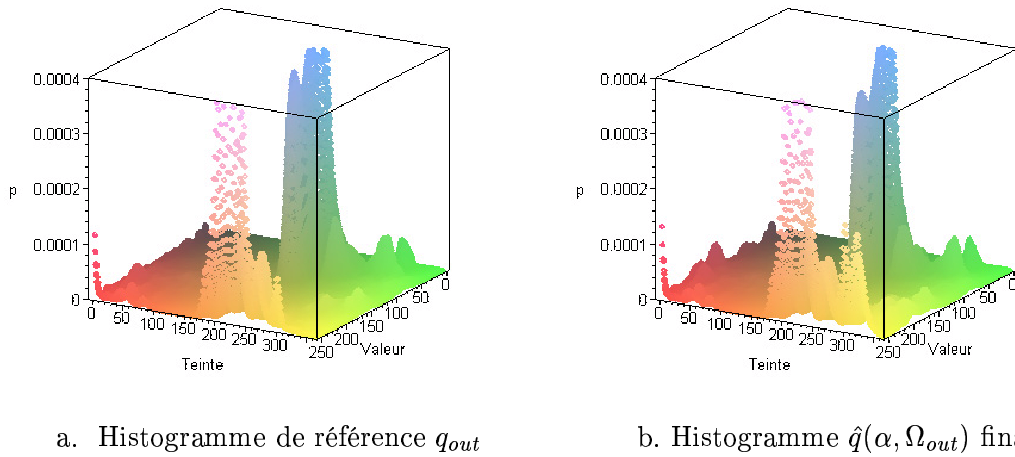


FIG. 6.6 – Comparaison de l’histogramme de référence de la région  $\Omega_{out}$ ,  $q_{out}$ , avec l’histogramme final de la région  $\Omega_{out}$ ,  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{out})$ .

associés  $q_{in}$  et  $q_{out}$  sont donnés Fig.6.7. On fait ensuite évoluer le contour sur l'image suivante en utilisant l'équation (6.4) avec la distance de Hellinger. L'évolution est donnée Fig.6.8 et Fig.6.9. Le visage est ici encore correctement segmenté.

## 6.5 CONCLUSION

Nous avons mis en œuvre les contours actifs basés régions afin de segmenter une région en connaissant son histogramme de référence. La dérivation du terme de distance entre deux histogrammes a été effectuée en utilisant les outils de dérivation de domaines développés au chapitre 4. Cette méthode a été appliquée à la segmentation du visage dans une séquence vidéo. Les histogrammes convergent vers les histogrammes de référence tandis que le contour actif évolue vers la région concernée.

En ce qui concerne les perspectives, une méthode automatique pour le choix du paramètre  $\sigma$  de l'estimateur de Parzen pourra être envisagée en utilisant notamment les techniques de "cross-validation" [13]. On pourra également s'attacher à évaluer différents estimateurs pour l'application considérée ainsi que différentes fonctions de comparaison  $\varphi$ .

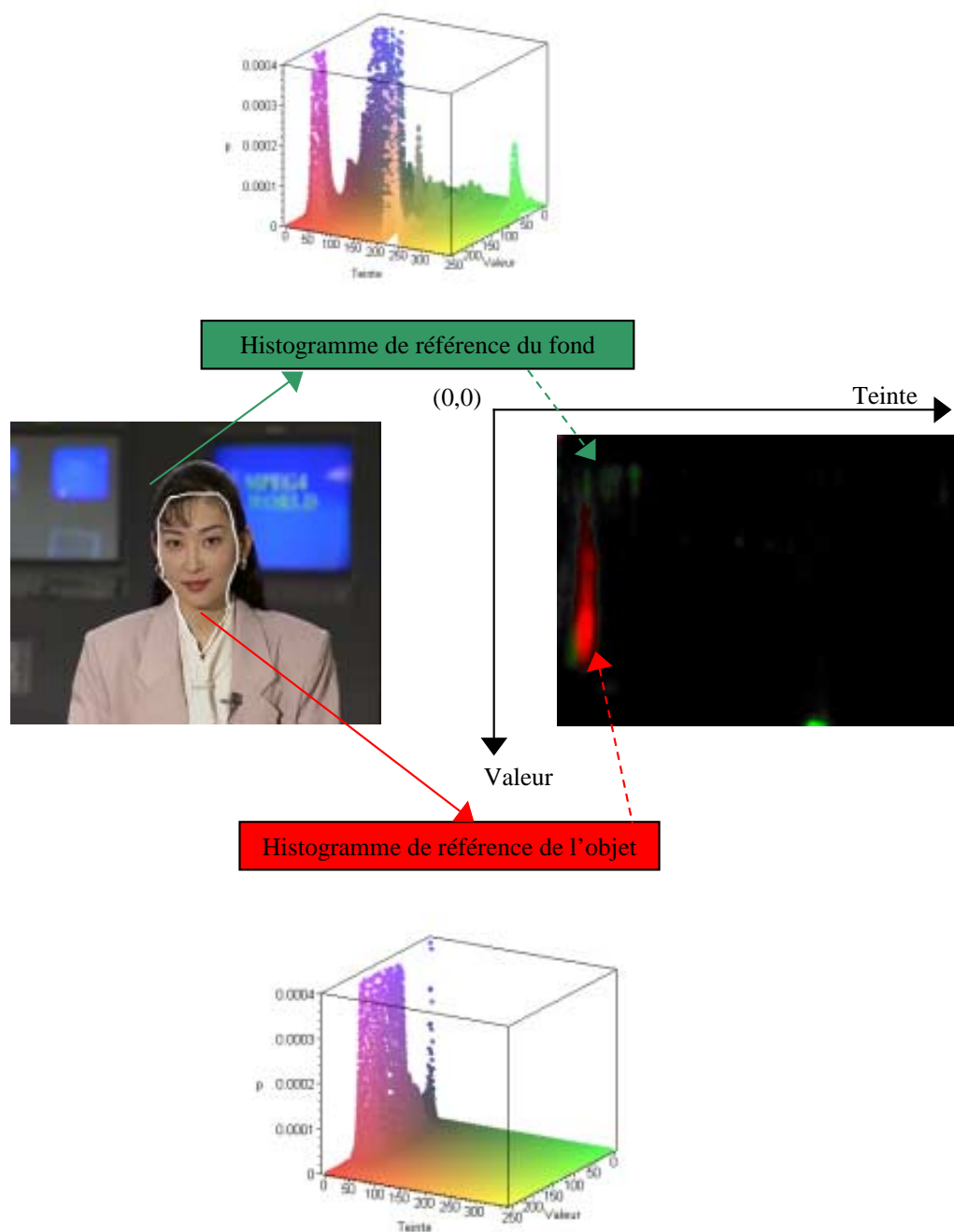


FIG. 6.7 – Segmentation de référence et les deux histogrammes de référence résultants,  $q_{in}$ , en rouge pour le visage, et  $q_{out}$  en vert pour la fond (l'intensité de la couleur est proportionnelle à la valeur de l'histogramme).



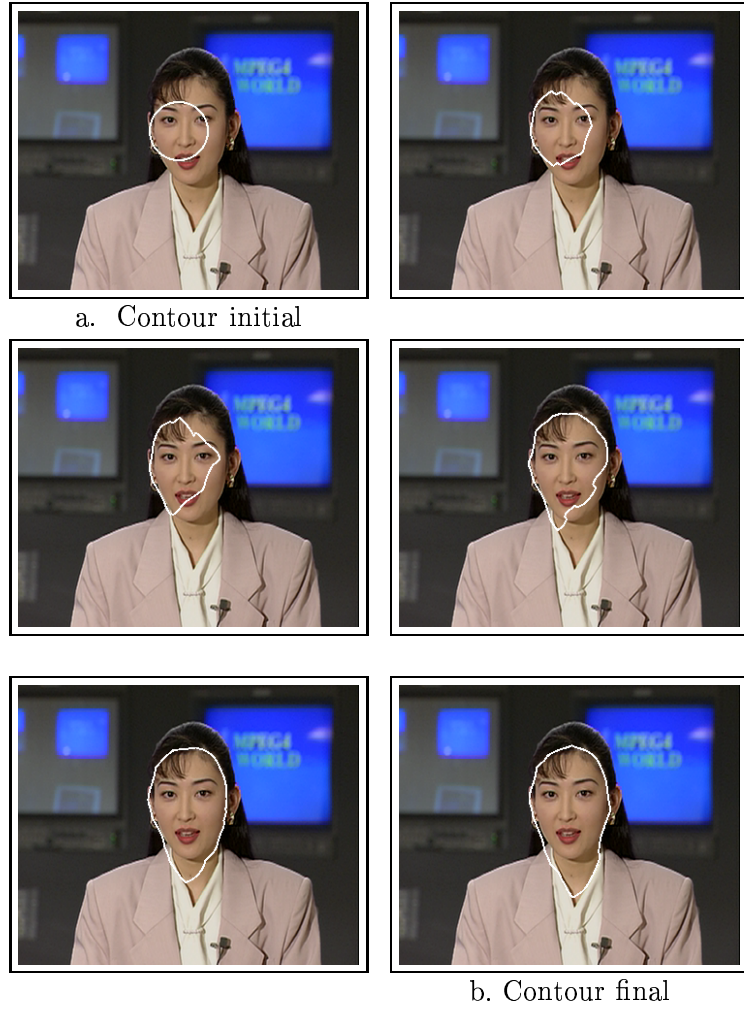
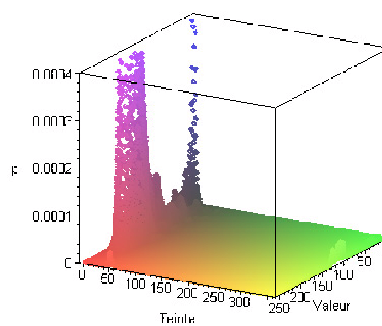


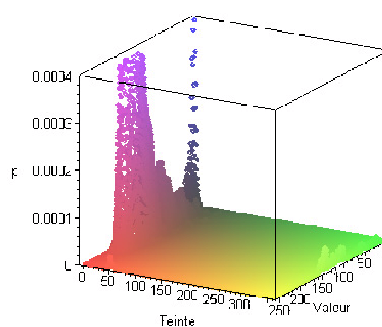
FIG. 6.8 – Evolution du contour actif sur l'image courante en utilisant les deux histogrammes de référence et la distance de Hellinger ( $\lambda = 20$ ).



a. Contour initial

b. Histogramme  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{in})$  initial

c. Itération 1200



d. Contour final

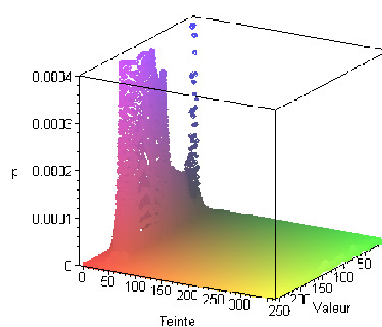
e. Histogramme  $\hat{q}(\alpha, \Omega_{in})$  final

FIG. 6.9 – Evolution de l'histogramme de la région  $\Omega_{in}$  avec l'évolution du contour actif pour "Akiyo".



## Détection d'objets vidéos

Dans les séquences vidéo, la notion additionnelle de mouvement apparaît. Une des analyses possibles consiste en la segmentation des objets en mouvement. Ce problème difficile est très important pour de nombreuses applications, soit directement pour des applications telles que la rotoscopie (post-production cinématographique), la vidéo-surveillance, soit comme point de départ vers d'autres analyses ou applications comme le suivi ou le codage vidéo orienté objet de type MPEG-4 [45, 79] ou MPEG-7 [44].

Dans cette partie, nous nous intéressons à trouver différents descripteurs pour les contours actifs basés régions afin de segmenter les objets en mouvement dans les séquences d'images à caméra fixe ou mobile. Nous cherchons donc à partitionner chaque image de la séquence en deux sous-ensembles, l'un contenant les objets en mouvement et l'autre étant le complémentaire du premier. Pour cela nous allons utiliser le cadre de travail théorique présenté Chapitre 4 en utilisant des descripteurs adaptés à cette étude.

Le cadre de travail a été présenté pour des images fixes ; nous traitons ici des séquences d'images. Chaque image de la séquence est représentée par une fonction  $\mathbf{I}_n : \Omega_I \rightarrow \mathcal{R}^3$ , où  $\mathbf{I}_n(\mathbf{x}) = [I_n^1(\mathbf{x}), I_n^2(\mathbf{x}), I_n^3(\mathbf{x})]^T$  représente l'intensité de l'image  $n$  de la séquence avec  $n \in [0, N]$ , pour le pixel  $\mathbf{x}$ . Ici l'espace couleur choisi est  $(Y, U, V)$  avec  $Y$  la luminance,  $U$  et  $V$  les deux chrominances. Afin de simplifier les notations, lorsque seule la luminance  $Y$  sera utilisée, nous la noterons  $I_n(\mathbf{x})$  à la place de  $I_n^1(\mathbf{x})$ .

Chaque image de la séquence est partitionnée en deux régions : la région  $\Omega_{n,in}$  contenant les objets en mouvement et la région du fond  $\Omega_{n,out}$ . L'interface entre les deux ouverts est noté  $\Gamma_n$  et on a donc  $\Omega_{n,in} \cup \Omega_{n,out} \cup \Gamma_n = \Omega_I \quad \forall n$ , où  $\Omega_I$  est le domaine de l'image. Nous cherchons alors pour chaque image  $n$  de la séquence, la partition  $\{\Omega_{n,in}, \Omega_{n,out}, \Gamma_n\}$  qui minimise le critère suivant :

$$\begin{aligned} J(\Omega_{n,in}, \Omega_{n,out}, \Gamma_n) &= \int_{\Omega_{n,in}} k_{n,in}(\mathbf{x}, \Omega_{n,in}) d\mathbf{x} & (7.1) \\ &+ \int_{\Omega_{n,out}} k_{n,out}(\mathbf{x}, \Omega_{n,out}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_n} k_{n,b}(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

avec  $k_{n,in}$  le descripteur des objets en mouvement,  $k_{n,out}$  le descripteur du fond et  $k_{n,b}$  le descripteur du contour. Ces descripteurs dépendent dorénavant de  $n$  qui représente la localisation temporelle de l'image dans la séquence (Fig.7.1).

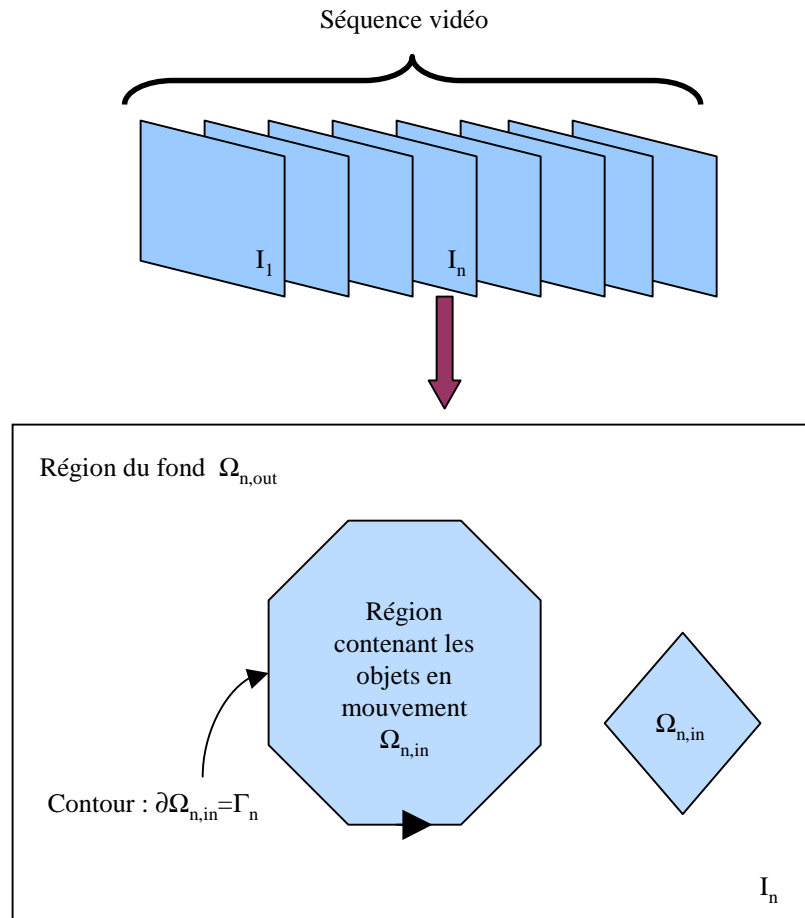


FIG. 7.1 – Décomposition de l'image  $n$  de la séquence

Nous commencerons par étudier les différentes méthodes proposées dans la littérature afin de dégager quelques critères envisageables pour la segmentation des objets en mouvement.

Les différents résultats de cette partie ont été présentés dans [66, 62, 68, 64, 70, 67, 73].

## 7.1 INTRODUCTION

Avant de présenter la méthode mise en œuvre, nous allons tout d'abord aborder la notion de mouvement apparent puis celle d'objet vidéo. Nous essayerons de voir ensuite quelles sont les différentes approches utilisées pour la segmentation des objets en mouvement. Tout cela va nous conduire à réfléchir aux différents outils et critères utilisables pour la segmentation des objets en mouvement par contours actifs.

### 7.1.1 *Les notions utilisées*

#### 7.1.1.1 *La notion de mouvement apparent*

Les séquences d'images sont une projection dans le plan d'une scène animée 3D. Le mouvement n'est tangible dans les séquences d'images que par des variations temporelles de luminance. Analyser ces variations ne peut conduire qu'à l'étude de ce que l'on appelle le mouvement apparent. Ainsi un exemple de mouvement réel projeté dans le plan et non observable est le cas d'un disque homogène tournant autour d'un axe passant par son centre et orthogonal au plan image. Par ailleurs, des différences de luminosité peuvent provenir des variations d'éclairage de la scène provoquant un mouvement apparent [133]. On peut diviser le mouvement apparent en une combinaison de deux mouvements : le mouvement de la caméra et celui des objets dans la scène. Le mouvement de la caméra peut être apparenté à un mouvement global puisqu'il est du à l'unique mouvement de la caméra. Le mouvement des objets est quant à lui un mouvement local. Le mouvement des objets est plus complexe car ils peuvent subir des déformations rigides ou non rigides. Ainsi un ballon peut se dégonfler et subir des déformations. Par ailleurs un mouvement rigide peut également être accompagné d'une déformation apparente lorsqu'il s'éloigne ou se rapproche de la caméra. Tout ceci nous montre combien l'analyse du mouvement est complexe. Ainsi, tel dans le mythe de la caverne énoncé par Platon, nous ne voyons que des projections du monde réel. Nous essayons d'en tirer le maximum d'informations pour les applications visées mais nous devons rester conscients que ce n'est qu'une projection avec les limitations qu'elle comporte.

#### 7.1.1.2 *La notion d'objet vidéo*

Dans les nouveaux standards de compression MPEG4 et MPEG7, la représentation des scènes vidéo est orientée objet. Ainsi elle se rapproche de la manière dont les scènes sont construites et tient compte de l'aspect sémantique. Les *VOP*, pour *Video Object Plane*, correspondent à un objet de la scène réelle, auquel on associe une notion de profondeur. La partition de la scène peut être exprimée en terme d'"objets-fond" (Fig.7.2). Ce type de représentation nécessite un découpage préalable de la scène en objets.

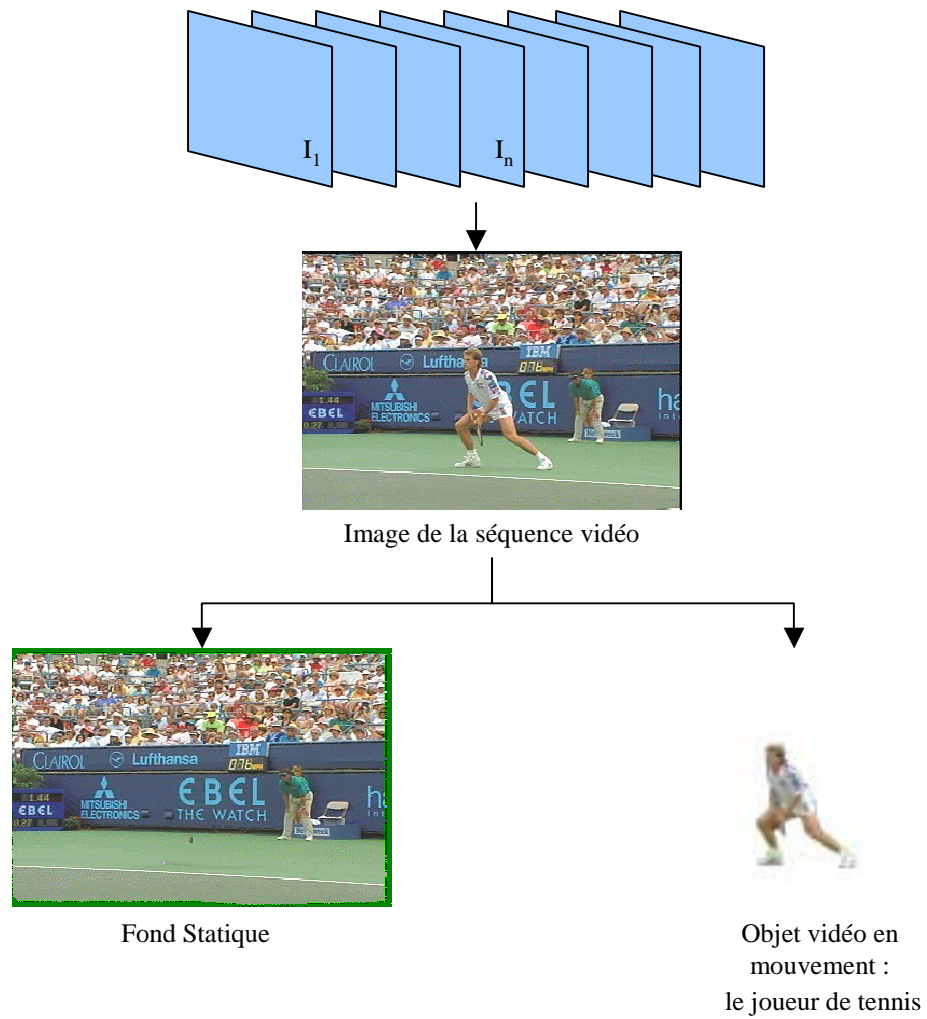


FIG. 7.2 – Décomposition de la séquence en objets vidéo

Ce problème de segmentation est non résolu dans ces standards, c'est un problème qui a été laissé ouvert aux recherches. L'aspect délicat d'une telle segmentation est qu'elle doit tenir compte de la sémantique des objets. Cependant, par simple utilisation d'informations temporelles ou spatiales d'une séquence d'images, il est parfois difficile de repérer les différents objets en mouvement dans la scène. Des solutions peuvent être apportées par l'analyse d'images mais il faut là aussi rester conscient de la difficulté de la tâche. Selon [134], la segmentation en objets sémantiques requiert en général des méthodes de capture spécialisées (Chroma Keying) ou l'interaction de l'utilisateur (méthodes semi-automatiques). On peut toutefois tenter d'obtenir des premiers résultats qui pourront être affinés ensuite par une interaction de l'utilisateur et/ou des post-traitements faisant intervenir d'autres techniques, voire d'autres domaines de recherche. Dans cette partie, nous montrons quelques exemples de résultats pouvant être obtenus avec les contours actifs basés régions. En effet, cet outil se prête bien à la détection et à l'extraction d'objets comme nous pourrions le voir par la suite.

### **7.1.2 Les techniques de segmentation de séquences vidéo**

Nous allons voir ici quelques approches visant à résoudre le problème de la segmentation de séquences vidéo. Les approches développées sont multiples et cet état de l'art ne saurait être exhaustif. Cependant, on peut voir émerger différentes catégories de solutions. Il est difficile de classifier les approches de segmentation de séquences vidéo car nombreuses sont celles qui font appel à différentes techniques. On peut cependant dégager quelques grands axes et quelques-uns des outils utilisés. Parmi les axes de segmentation, on peut distinguer la segmentation basée mouvement par champ dense, la segmentation basée mouvement par détection, la segmentation spatio-temporelle et la segmentation à partir de modèles.

#### **7.1.2.1 Segmentation basée mouvement par champ dense**

Cette segmentation nécessite la connaissance préalable d'un champ de mouvement dense (flot optique). Une segmentation du champ de mouvement en zones homogènes est alors effectuée. Les champs de Markov ont été utilisés à cet effet par Mémin et Pérez [90]. Les auteurs proposent une estimation et une segmentation jointe du flot optique ce qui semble intéressant car les deux sont intimement liés [92]. L'inconvénient de ces approches est que les contours trouvés ne correspondent pas nécessairement aux contours de l'objet.

D'autres approches utilisent les vecteurs mouvement issus du flot MPEG-1 ou MPEG-2 calculés par block matching afin de segmenter les objets en mouvement [12, 15].



### 7.1.2.2 Segmentation basée mouvement par détection

L'idée de base consiste ici à comparer l'image courante avec l'image précédente ou une image représentant le fond de la séquence. La différence entre l'image courante et l'image précédente est notée *DFD* pour *Displaced Frame Difference*.

Une simple image des différences seuillée n'est pas satisfaisante pour détecter le mouvement. En effet, une région d'intensité uniforme peut être interprétée comme stationnaire (problème d'ouverture). Il est possible d'éviter ce problème en utilisant une procédure de décision multirésolution, car les régions d'intensité uniformes sont plus petites. De plus, la différence d'intensité engendrée par le mouvement peut être affectée par l'amplitude du gradient spatial dans la direction du mouvement. On peut considérer une *DFD* normalisée localement.

Cependant, cette image des différences peut donner de très bons résultats lorsqu'elle est associée à des outils puissants comme les champs de Markov. Ainsi Odobez et Bouthemy [96, 98] proposent de segmenter les objets en mouvement dans les séquences à caméra mobile en utilisant la *DFD*. Pour les séquences à caméra mobile, la détection se fait par estimation du mouvement dominant.

Pour les séquences à caméra fixe, une image représentant le fond de la séquence est estimée. La différence entre l'image courante et celle du fond permet d'obtenir de très bon résultats en utilisant les contours actifs [101]. Des approches variationnelles permettent également de restaurer l'image tout en segmentant les objets en mouvement [80, 81]. Dans certaines approches, le fond peut être calculé par une approche statistique en modélisant l'image des différences comme une mixture de laplaciennes, l'une correspondant au fond et l'autre aux objets en mouvement [128, 129]. Le principe du maximum de vraisemblance est alors utilisé pour estimer les paramètres.

L'utilisation d'un tenseur 3D [76], par estimation des orientations locales dans le domaine spatio-temporel, combiné aux contours actifs géodésiques permet également de donner de bons résultats pour les séquences à caméra fixe.

Dans le cas de segmentation par détection, les contours réels des objets peuvent également ne pas correspondre aux contours segmentés notamment si le déplacement d'un objet entre deux images est très important.

### 7.1.2.3 Segmentation spatio-temporelle

Les approches spatio-temporelles se fondent à la fois sur l'homogénéité spatiale et sur l'homogénéité au sens du mouvement. Les critères d'homogénéité spatiale peuvent être utilisés simultanément avec les critères d'homogénéité au sens du mouvement, ou séquentiellement. Ainsi l'intégration de l'information spatiale peut se faire comme pré-traitement [117] ou comme post-traitement.

Un pré-traitement proposé par [117] pour toute segmentation consiste en la partition préalable de l'image en régions de couleurs homogènes en utilisant un arbre de partition. Le traitement pixellique est alors remplacé par un traitement par régions. Ces arbres décrivent l'organisation spatiale de l'image et sont obtenus en gardant la trace des régions fusionnées entre chaque itération du processus jusqu'à l'obtention d'une seule région. La partition constitue donc un graphe dont les noeuds de base sont les pixels de l'image. Le critère de fusion est basé sur une distance couleur entre deux noeuds voisins.

Un modèle proposé par [2] consiste en la fusion d'informations de différentes sources : segmentation spatiale couleur, segmentation basée mouvement et détection des changements de luminosité.

#### **7.1.2.4 Segmentation basée modèle**

Les approches à base de recherche de modèles peuvent être utilisées dans le cas d'hypothèses fortes sur le contenu des scènes animées. C'est le cas par exemple de la détection de visage pour la visioconférence ou encore de la détection de véhicules [38]. Pour l'extraction et le suivi de visages, des approches combinant un modèle géométrique tel qu'une ellipse avec le calcul de l'énergie de mouvement ont été mises en œuvre [40]. L'inconvénient de ces approches est que le modèle utilisé n'épouse pas la forme exacte des objets détectés.

#### **7.1.2.5 Interaction de l'utilisateur**

D'autres approches supposent que la première image est segmentée grossièrement [56], ou précisément pour des algorithmes plus spécifiquement dédiés au suivi des objets en mouvement [88, 106, 136, 135].

### **7.1.3 Les différents critères envisageables**

L'état de l'art établi précédemment nous conduit à lister les différents critères envisageables pour la segmentation des objets en mouvement. Ainsi on peut se poser la question suivante : comment différencier les objets en mouvement dans une séquence d'images avec pour seule information la couleur de chaque pixel au cours du temps ? Listons les différents critères et les différentes hypothèses envisageables :

#### **1. Les critères basés mouvement**

Puisque nous désirons segmenter les objets en mouvement, il nous faut détecter le mouvement. La notion de mouvement étant toujours relative, on peut le détecter en comparant l'image courante à une image de référence qui peut être le fond estimé de la séquence ou l'image précédente. Dans le cas des caméras mobiles, il nous faut estimer le mouvement glo-

bal de la caméra afin de pouvoir le différencier de celui des objets en mouvement.

## 2. Les critères spatiaux

On peut faire l'hypothèse qu'un objet est formé de plusieurs régions de couleur homogène et est délimité par un gradient élevé.

## 3. Les modèles a priori

Lorsque la forme est connue, on peut penser à utiliser un modèle géométrique ou encore à utiliser une distance entre l'objet en cours de segmentation et un objet de référence.

## 4. Les interactions de l'utilisateur

L'interaction de l'utilisateur peut se réduire au choix de quelques paramètres en ayant une connaissance succincte du type de séquence à segmenter (séquences de type visioconférence avec des faibles mouvements, séquences fortement bruitées ...). Elle peut aussi être plus forte et consister en la sélection d'un objet ou en la correction d'une première segmentation obtenue de manière automatique.

Nous avons tenté dans la partie suivante d'utiliser certaines de ces informations en leur donnant la forme de descripteurs pour les contours actifs basés régions. La question qui se pose ensuite est comment associer ces différents descripteurs. Nous avons opté pour une association séquentielle en tentant de hiérarchiser l'information.

## 7.2 ESTIMATION ROBUSTE : RAPPELS

Nous rappelons ici brièvement quelques éléments sur l'estimation robuste et le théorème semi-quadratique qui nous serviront ensuite pour l'estimation du fond de la séquence et l'estimation du mouvement dominant. L'introduction de fonctions appelées M-estimateurs permet, lors de la minimisation de critères, une pondération adaptée de l'apport énergétique selon les valeurs sommées dans la critère. Elles permettent notamment de borner des valeurs trop élevées qui correspondent à des points aberrants et qui introduisent des erreurs dans l'estimation du minimum. Cependant l'introduction de ces fonctions rend généralement la minimisation plus complexe car non-quadratique. Des outils tels que le théorème semi-quadratique introduit par Geman et Reynolds [50] et complété par Charbonnier et al [24] permettent de transformer l'énergie non quadratique en une énergie augmentée en introduisant une variable auxiliaire qui rend l'énergie semi-quadratique, sous réserve de certaines conditions sur les M-estimateurs. Le principe des minimisations alternées [24] peut alors être mis en œuvre pour résoudre le problème de minimisation.

Rappelons brièvement les principaux résultats : Soit  $\varphi$  un M-estimateur. Le théorème semi-quadratique énoncé par Charbonnier et al [24] est le suivant :

**THEOREME 7.1.** *Soit une fonction  $\varphi$  vérifiant les propriétés suivantes :*

C1)  $\varphi$  est une fonction à valeur réelle continuellement différentiable.

C2)  $\varphi(r) \geq 0 \quad \forall r$  avec  $\varphi(0) = 0$ .

C3)  $\varphi$  est croissante sur  $\mathcal{R}^+$ .

C4)  $\varphi(r) = \varphi(-r)$ .

C5)  $\varphi'(r)/2r$  continue et strictement décroissante sur  $[0, +\infty)$ .

C6)  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi'(r)}{2r} = 0$ .

C7)  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\varphi'(r)}{2r} = M$ , avec  $0 < M < +\infty$ .

Alors :

1. Il existe alors une fonction  $\psi$  strictement convexe et décroissante,  $\psi : (0, M] \rightarrow [0, \beta)$  avec :

$$\beta = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \varphi(r) - r^2 \frac{\varphi'(r)}{2r} \right)$$

et telle que :

$$\varphi(r) = \inf_{0 < w \leq M} (wr^2 + \psi(w))$$

2. Pour chaque  $r$  fixé, la valeur  $w_r$  pour laquelle le minimum est atteint, i.e., telle que :

$$\inf_{0 < w \leq M} (wr^2 + \psi(w)) = (w_r r^2 + \psi(w_r)),$$

est unique et donnée par :

$$w_r = \frac{\varphi'(r)}{2r}$$

Une démonstration de ce théorème est donnée dans [24, 10]. Dans la suite de ce document, nous prenons l'estimateur de Geman et Mc Lure [49] soit :

$$\varphi(r) = \frac{r^2}{1 + r^2}$$

Les courbes correspondantes  $\varphi(r)$  et  $\varphi'(r)/2r$  sont données Fig.7.3.

### 7.3 CRITÈRES TEMPORELS BASÉS SUR L'ESTIMATION DU FOND

Nous utiliserons ici une segmentation par détection en utilisant des descripteurs basés sur la comparaison entre l'image courante et une image de référence. Dans cette section, seule la luminance  $Y$  des images est utilisée.

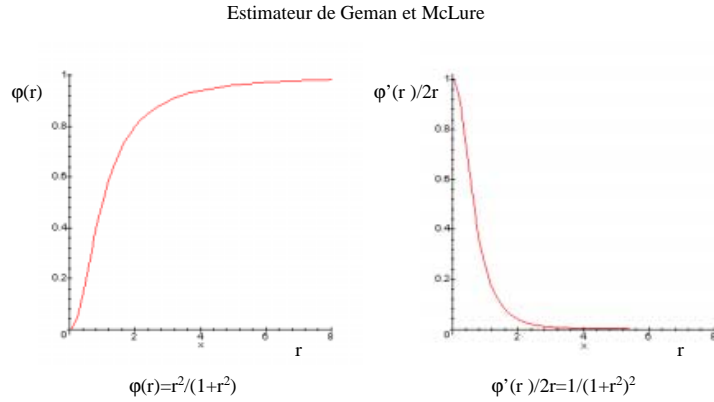


FIG. 7.3 – L'estimateur de Geman et Mc Lure

### 7.3.1 Estimation du fond de la séquence

Ce que nous appelons ici fond de la séquence est une image de référence calculée en utilisant plusieurs images de la séquence afin de détecter les pixels invariants au cours du temps. Pour les séquences à caméra fixe, nous cherchons l'image de référence  $B : \Omega_I \rightarrow \mathcal{R}$  de telle sorte que pour chaque pixel  $\mathbf{x}$ ,  $B(\mathbf{x})$  représente la valeur de luminance dominante sur un groupe d'images choisi.

Il paraît judicieux de ré-estimer cette image du fond au cours du traitement des images de la séquence et donc de la rendre dépendante de  $n$ . Pour chaque image  $n$  de la séquence, il faut alors choisir  $n_B$  images consécutives dans la séquence, soit  $F_n$  cet intervalle, qui permette de calculer le fond de l'image  $B_n(\mathbf{x})$  pour l'image  $n$  de la séquence. L'intervalle  $F_n$  peut être choisi de différentes façons. Si un traitement causal de la séquence est nécessaire, on pourra prendre les  $n_B$  images précédentes, soit  $F_n = [n - n_B + 1, n]$  si  $n - n_B + 1 \geq 0$ .

Afin d'estimer  $B_n(\mathbf{x})$  pour l'image  $n$  de la séquence, on peut alors chercher à minimiser le critère suivant :

$$\sum_{h \in F_n} \int_{\Omega_I} (B_n(\mathbf{x}) - I_h(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}$$

Ce qui revient à estimer  $B_n$  par une moyenne temporelle des images  $I$  au cours du temps :

$$B_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n_B} \sum_{h \in F_n} I_h(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I$$

L'inconvénient est que nous ne prenons pas en compte dans le critère les fortes variations d'intensité dues au mouvement des objets. Afin d'éliminer

les points aberrants correspondant aux objets en mouvement dans le calcul du fond, nous introduisons une fonction  $\varphi$  aussi appelée M-estimateur définie dans la section 7.2 et nous cherchons  $B_n$  qui minimise le critère suivant :

$$\sum_{h \in F_n} \int_{\Omega_I} \varphi(|B_n(\mathbf{x}) - I_h(\mathbf{x})|) d\mathbf{x} \quad (7.2)$$

La fonction  $\varphi$  permet d'éliminer lors de l'estimation les différences trop importantes entre  $B_n$  et  $I_h$  qui correspondent souvent aux objets en mouvement dans la séquence. Nous choisissons ici l'estimateur de Geman et Mc Lure donné Fig.7.3. Afin de minimiser le critère (7.2), nous utilisons le théorème semi-quadratique 7.1, en utilisant l'algorithme ARTUR basé sur la stratégie des minimisations alternées [24]. On a alors l'algorithme d'estimation du fond suivant avec  $k$  le numéro de l'itération :

ALGORITHME :

Initialisation :

$$k = 0$$

$$B_n^0(\mathbf{x}) = \frac{1}{n_B} \sum_{h \in F_n} I_h(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I$$

Répéter

$$w_r^k(\mathbf{x}) = \frac{\varphi'(|B_n^k(\mathbf{x}) - I_h(\mathbf{x})|)}{2|B_n^k(\mathbf{x}) - I_h(\mathbf{x})|} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I$$

$$B_n^{k+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sum_{h \in F_n} w_r^k(\mathbf{x})} \sum_{h \in F_n} w_r^k(\mathbf{x}) I_h(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I$$

Jusqu'à convergence

En ce qui concerne les caméras mobiles, il est nécessaire de compenser au préalable le mouvement de la caméra afin de calculer le fond. Une mosaïque peut être construite afin de servir d'image de référence. Des travaux prometteurs dans ce domaine ont été mis en œuvre dans [47]. Les auteurs utilisent une première segmentation des objets en mouvement pouvant être peu précise.

### 7.3.2 Descripteurs utilisés

Les descripteurs basés sur la détection du mouvement que nous proposons sont les suivants :

$$\begin{aligned} k_{n,out}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{x}_i \in \nu(\mathbf{x})} |B_n(\mathbf{x}_i) - I_n(\mathbf{x}_i)| \\ k_{n,in}(\mathbf{x}) &= \alpha_1 \\ k_{n,b}(\mathbf{x}) &= \lambda_1 \end{aligned} \quad (7.3)$$

avec  $\alpha_1$  et  $\lambda_1$  deux constantes positives. Le terme  $\nu(\mathbf{x})$  désigne un voisinage du pixel  $\mathbf{x}$ .

Ces descripteurs sont région-indépendants, ce qui nous donne pour l'équation d'évolution du contour actif sur l'image  $n$  de la séquence :

$$\frac{\partial \Gamma_n}{\partial \tau} = (\alpha_1 - \sum_{\mathbf{x}_i \in \nu(\mathbf{x})} |B_n(\mathbf{x}_i) - I_n(\mathbf{x}_i)| + \lambda_1 \kappa_n) \mathbf{N} \quad (7.4)$$

avec  $\kappa_n$  la courbure de la courbe  $\Gamma_n$ . Le paramètre  $\alpha_1$  est appelé paramètre de détection alors que le paramètre  $\lambda_1$  est un paramètre de lissage.

### 7.3.3 Résultats expérimentaux

Nous allons montrer les résultats obtenus en utilisant l'EDP (7.4) sur quelques séquences. Prenons la séquence "Akiyo", une séquence type visio-conférence où l'objet en mouvement est une personne parlant devant un fond fixe. La personne bouge en général très peu puisqu'elle doit rester face à la caméra. Nous prendrons ici  $\alpha_1 = 0.8$ ,  $\lambda_1 = 15$  et  $n_B = 20$ . Par ailleurs nous choisissons  $\nu(\mathbf{x})$  comme un "4-voisinage" car l'objet bouge ici très peu. Sur la Fig.7.4, on peut visualiser le fond estimé de la séquence Fig.7.4.a pour une image et l'amplitude de la vitesse d'évolution du contour sans les termes de lissage  $\lambda_1 \kappa_n$  Fig.7.4.b. L'amplitude de la vitesse est renormalisée entre 0 et 255 et les valeurs négatives de la vitesse correspondent aux niveaux de gris inférieurs à 128 soit les intensités les plus noires.

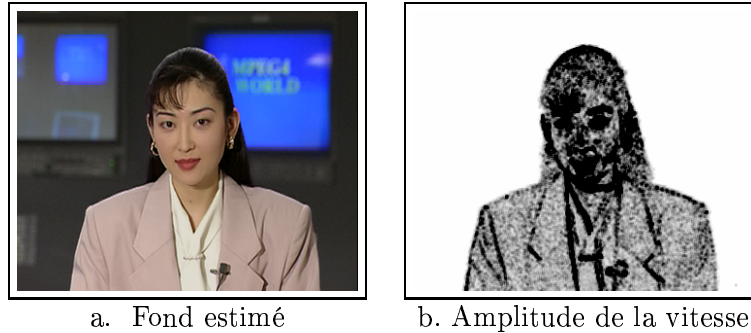


FIG. 7.4 – Fond estimé pour une image de la séquence "Akiyo", avec  $n_B = 20$  (figure a), et amplitude de la vitesse correspondante sans les termes de lissage (figure b).

On peut remarquer ici que le fond estimé de la séquence n'est pas le fond réel sur lequel se trouve le personnage. En effet, le personnage bouge très peu et il masque donc toujours une partie du fond. Nous ne recherchons pas ici une estimation du fond mais nous cherchons à détecter des non-stationnarités au cours de la séquence. Ainsi sur l'amplitude de la vitesse, on peut voir que l'on détecte bien l'objet en comparant l'image courante

au fond estimé. L'objet sera d'autant mieux détecté qu'il est texturé. En effet les zones homogènes apparaissent sans mouvement apparent. Regardons maintenant l'évolution du contour sur cette image Fig.7.5. Le contour initial est choisi comme un rectangle situé sur le bord de l'image. L'évolution est effectuée en multirésolution sur une image de dimension réduite. Le résultat final taille réelle ainsi que l'objet isolé correspondant sont donnés Fig.7.6 pour  $\lambda_1 = 15$  et  $\alpha_1 = 0.8$ .



FIG. 7.5 – Evolution du contour actif sur une image de la séquence “Akiyo”.

On peut maintenant segmenter les images de la séquence en utilisant le contour final de l'image précédente comme contour initial de l'image courante. Une réinitialisation par un rectangle est opérée toutes les 10 images. Les résultats pour la séquence sont donnés Fig.7.7.



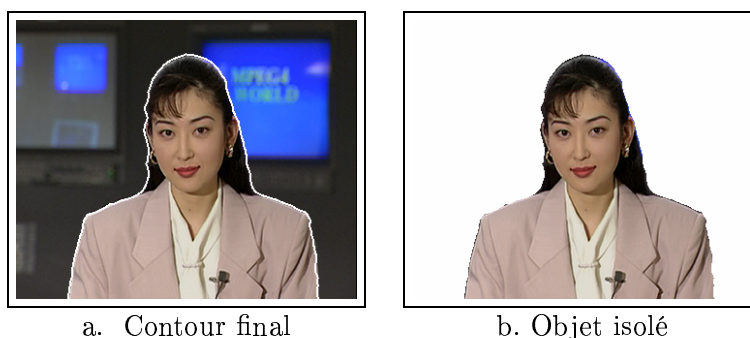


FIG. 7.6 – Contour final obtenu pour une image de la séquence “Akiyo” (figure a), et l’objet isolé correspondant (figure b).

#### 7.4 CRITÈRES TEMPORELS AVEC COMPENSATION DU MOUVEMENT DE LA CAMERA

Dans le cas des caméras mobiles, une image de référence calculée en prenant en compte plusieurs images de la séquence peut parfois s’avérer délicate à construire. Par ailleurs, les algorithmes de calcul de mosaïque proposés utilisent souvent une première segmentation des objets en mouvement [47]. C’est pourquoi nous proposons ici une segmentation utilisant comme image de référence l’image précédente. Nous utilisons une segmentation par détection en comparant l’image courante à l’image précédente compensée en mouvement. L’avantage d’une telle approche est d’être moins sensible aux erreurs de compensation du mouvement de la caméra que les techniques de mosaïque car une seule image doit être compensée et non plusieurs. Cependant, dans le cas d’objets ayant un très faible mouvement, ou s’arrêtant entre deux images, on peut perdre l’objet. Ce problème pourrait être résolu en introduisant des termes de suivi complémentaires.

##### 7.4.1 Compensation du mouvement de la caméra

Nous faisons l’hypothèse que le mouvement apparent de la caméra entre deux images peut être modélisé par un modèle paramétrique affine à 6 paramètres. Les paramètres sont estimés par estimation robuste en utilisant les vecteurs mouvement évalués par une mise en correspondance de blocs arrière (“Block Matching backward”).

###### 7.4.1.1 Modèle de mouvement de la caméra

Nous avons choisi un modèle affine à 6 paramètres afin de modéliser le mouvement 2D apparent de la caméra entre les images  $I_{n-1}$  et  $I_n$ . Ce modèle offre un bon compromis entre complexité des calculs et représentativité [97]. Par ailleurs, il offre des paramètres proches de la réalité physique contraire-



FIG. 7.7 – Résultats obtenus pour la séquence “Akiyo”.

ment au modèle non linéaire à 12 paramètres [11]. Le mouvement apparent  $\mathbf{w}_n(\mathbf{x})$  d'un point  $\mathbf{x} = [x, y]^T$  du fond statique de l'image, entre les images  $I_{n-1}$  et  $I_n$  est alors modélisé par :

$$\mathbf{w}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_n \mathbf{x} + \mathbf{t}_n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & a_{12}^n \\ a_{21}^n & a_{22}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1^n \\ t_2^n \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

#### 7.4.1.2 Estimation robuste des paramètres

Nous allons utiliser les vecteurs mouvements estimés par mise en correspondance de blocs pour calculer les paramètres du modèle de mouvement apparent de la caméra entre les images  $I_{n-1}$  et  $I_n$ . L'estimation du mouvement par bloc a été introduite dans le cadre des normes de compression MPEG1 et MPEG2 afin de réduire les redondances temporelles lors du codage. Le principe est simple, il s'agit de trouver le vecteur déplacement  $\mathbf{u}_n = [dx_n, dy_n]^T$  qui permette de mettre en correspondance un bloc de l'image  $I_{n-1}$  avec un bloc de l'image  $I_n$  en définissant un critère à minimiser basé sur la luminosité. Nous avons ici utilisé une technique dite "en arrière" ("backward") en découpant l'image  $I_n$  en blocs et en recherchant pour chaque bloc de l'image  $I_n$ , le bloc correspondant dans l'image  $I_{n-1}$  (voir Fig.7.8). Afin d'obtenir une précision de mouvement au 1/4 ou au 1/8 de pixel, nous avons mis en œuvre les derniers standards de la norme H.26L [57].

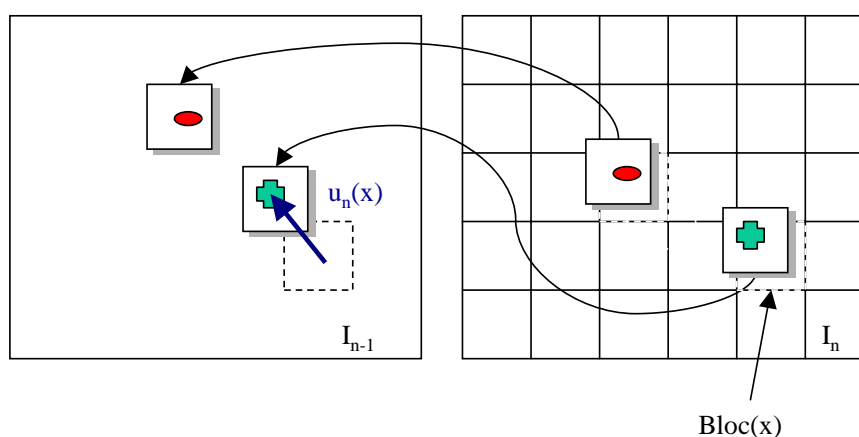


FIG. 7.8 – Estimation "backward" des vecteurs mouvement par mise en correspondance de blocs

Nous cherchons ensuite les six paramètres qui minimisent le critère sui-

vant :

$$G(\mathbf{A}_n, \mathbf{t}_n) = \sum_{x \in \Omega_I} \varphi(|\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_n \mathbf{x} - \mathbf{t}_n|) \quad (7.6)$$

La fonction  $\varphi$  permet d'éliminer les points aberrants dus en grande partie au mouvement des objets en mouvement. En ce qui concerne la fonction  $\varphi$ , nous choisissons ici l'estimateur de Geman et McLure donné Fig.7.3.

Afin de minimiser le critère (7.6), nous utilisons le théorème semi-quadratique 7.1, en utilisant l'algorithme ARTUR basé sur la stratégie des minimisations alternées [24]. Le problème de minimisation est remplacé par le problème équivalent suivant :

$$(\mathbf{A}_n, \mathbf{t}_n) = \arg \min_{(A_n, t_n)} \sum_{\Omega_I} w_r r^2$$

où  $r = |\mathbf{u}_n - \mathbf{A}_n \mathbf{x} - \mathbf{t}_n|$  et  $w_r = \frac{\varphi'(r)}{2r}$ .

On a alors l'algorithme d'estimation suivant :

ALGORITHME :

Initialisation :

$$k = 0, w_r^0 = 1, r^0 = |\mathbf{u}_n - \mathbf{A}_n^0 \mathbf{x} - \mathbf{t}_n^0|$$

$$(\mathbf{A}_n^0, \mathbf{t}_n^0) = \arg \min_{(A_n, t_n)} \sum_{\Omega_I} (r^0)^2$$

Répéter

$$r^k = |\mathbf{u}_n - \mathbf{A}_n^k \mathbf{x} - \mathbf{t}_n^k|$$

$$w_r^k = \frac{\varphi'(r^k)}{2r^k}$$

$$(\mathbf{A}_n^{k+1}, \mathbf{t}_n^{k+1}) = \arg \min_{(A_n, t_n)} \sum_{\Omega_I} w_r^k (r^k)^2$$

Jusqu'à convergence

La minimisation de  $\sum_{\Omega_I} w_r^k (r^k)^2$  est effectuée en utilisant une méthode de descente de gradient classique. Nous obtenons ainsi les six paramètres du modèle de mouvement affine.

### 7.4.2 Descripteurs utilisés

Les descripteurs basés sur la détection du mouvement proposés sont les suivants :

$$\begin{aligned} k_{n,out}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{x}_i \in \nu(\mathbf{x})} |I_n(\mathbf{x}_i) - Proj(I_{n-1})(\mathbf{x}_i)| \\ k_{n,in}(\mathbf{x}) &= \alpha_2 \\ k_{n,b}(\mathbf{x}) &= \lambda_2 \end{aligned} \quad (7.7)$$

avec  $\alpha_2$  et  $\lambda_2$  deux constantes positives. Le terme  $\nu(\mathbf{x})$  désigne un voisinage du pixel  $\mathbf{x}$ . Le terme  $Proj(I_{n-1})$  désigne la projection de l'image  $I_{n-1}$  dans le référentiel de l'image  $I_n$ . L'image  $Proj(I_{n-1})$  est trouvée en mettant au pixel  $\mathbf{x} + \mathbf{w}_n(\mathbf{x})$  la valeur de l'intensité du point  $\mathbf{x}$  de l'image  $I_{n-1}$  comme nous le montrons Fig.7.9. Les points manquants sont calculés par des méthodes d'interpolation classiques. Ces descripteurs sont région-indépendants, ce qui

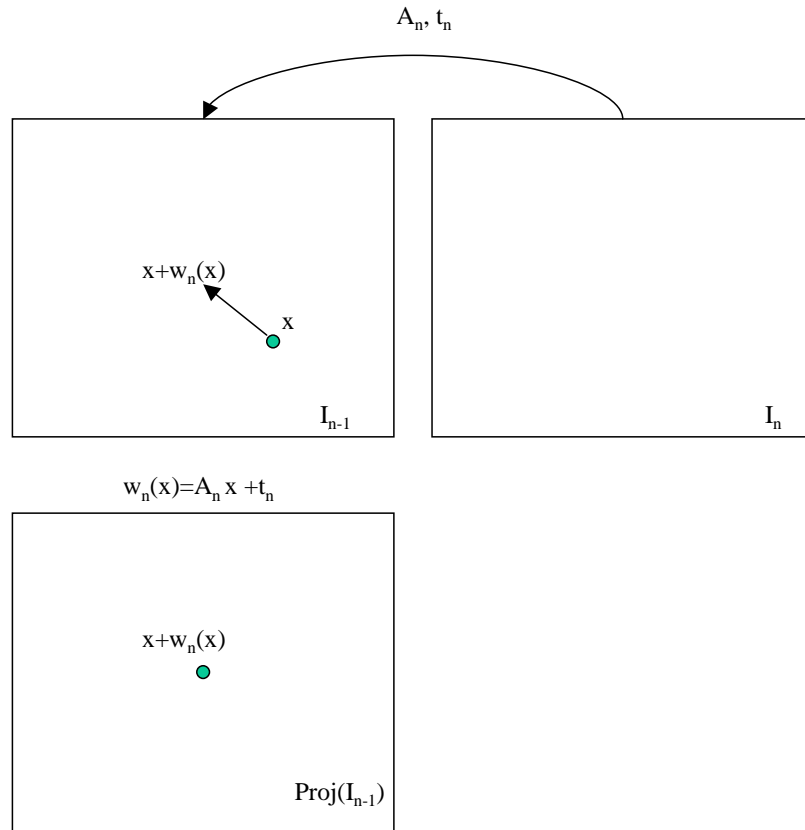


FIG. 7.9 – Projection de l'image  $I_{n-1}$  dans le référentiel de l'image  $I_n$

nous donne pour l'équation d'évolution du contour actif sur l'image  $n$  de la séquence :

$$\frac{\partial \Gamma_n}{\partial \tau} = \left( \alpha_2 - \sum_{\mathbf{x}_i \in \nu(\mathbf{x})} |I_n(\mathbf{x}_i) - Proj(I_{n-1})(\mathbf{x}_i)| + \lambda_2 \kappa_n \right) \mathbf{N}$$

avec  $\kappa_n$  la courbure de la courbe  $\Gamma_n$ . La paramètre  $\alpha_2$  est là encore un paramètre de détection alors que le paramètre  $\lambda_2$  est un paramètre de lissage.

### 7.4.3 Résultats expérimentaux

Nous allons étudier les résultats obtenus en utilisant les descripteurs (7.7) issus de la comparaison de l'image précédente compensée en mouvement avec l'image suivante. Les images originales de la séquence sont données Fig.7.10. La caméra suit le bateau qui est l'objet en mouvement dans cette séquence. Observons tout d'abord l'effet de la compensation du mouvement sur la dif-

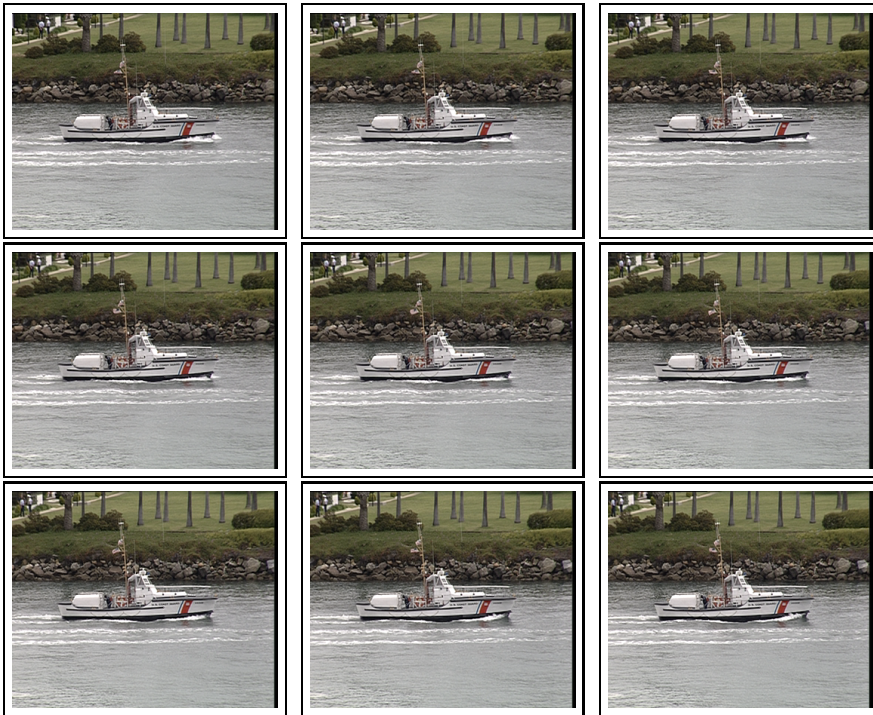


FIG. 7.10 – La séquence “Coastguard”.

férence entre les deux images. On peut visualiser l'amplitude de la vitesse compensée en mouvement soit :  $(\alpha_2 - \sum_{\mathbf{x}_i \in \nu(\mathbf{x})} |I_n(\mathbf{x}_i) - Proj(I_{n-1})(\mathbf{x}_i)|)$  sur la Fig.7.11.a et l'amplitude la vitesse avec une différence non compensée soit :  $(\alpha_2 - \sum_{\mathbf{x}_i \in \nu(\mathbf{x})} |I_n(\mathbf{x}_i) - I_{n-1}(\mathbf{x}_i)|)$  sur la Fig.7.11.b pour une image de la séquence “Coastguard” avec  $\alpha_2 = 9$ . Sur l'amplitude non compensée on voit apparaître nettement les arbres du fond de la séquence alors que le bateau disparaît pratiquement puisqu'il se trouve au même endroit sur les deux images. En compensant le mouvement de la caméra, on voit apparaître le bateau qui est l'objet d'intérêt. Sur l'amplitude de la vitesse obtenue après compensation, on voit que la détection est assez bruitée, le signal est assez faible. Cependant, en faisant évoluer un contour actif, on réussit à segmenter l'objet et à profiter au mieux de cette faible information. On visualise l'évolution du contour sur cette image en Fig.7.12, le contour final et l'objet isolé sont donnés Fig.7.13 pour  $\lambda_2 = 25$ .

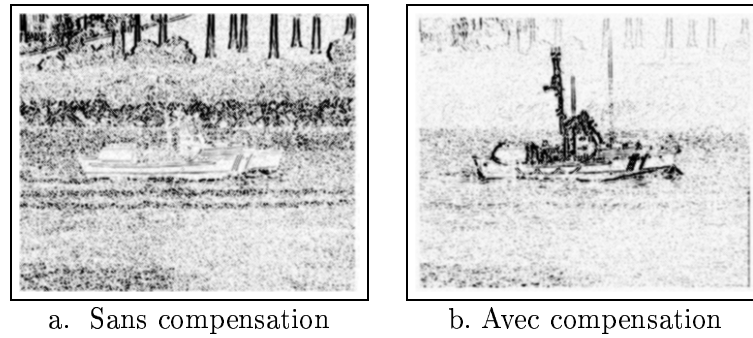


FIG. 7.11 – Amplitude de la vitesse sans compensation du mouvement de la caméra (figure a) et avec compensation du mouvement de la caméra (figure b) pour une image de la séquence “Coastguard”, avec  $\alpha_2 = 9$  (figure a).

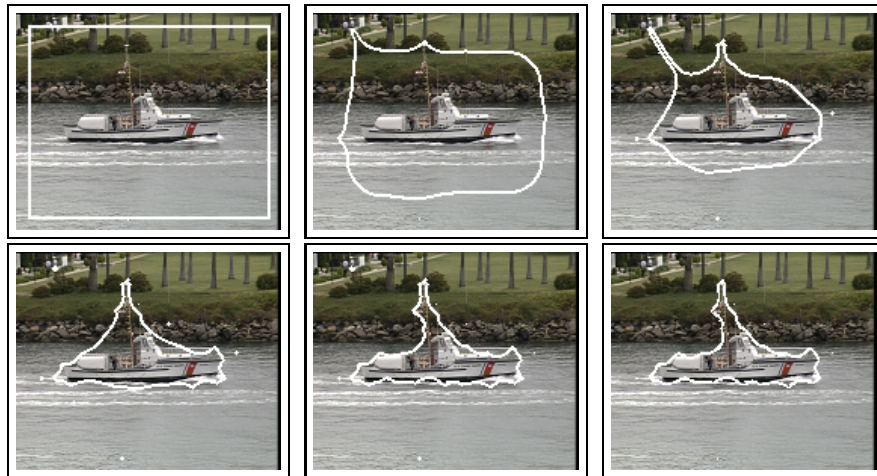


FIG. 7.12 – Evolution du contour actif sur une image de la séquence “Coastguard”.

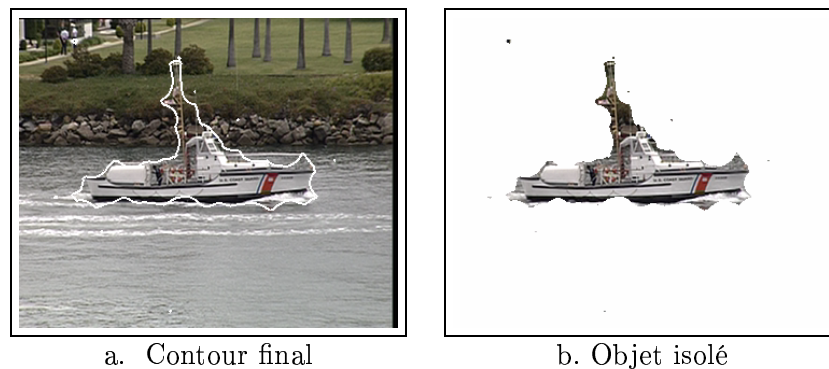


FIG. 7.13 – Contour final obtenu pour la première image de la séquence “Coastguard” (figure a), et l'objet isolé correspondant (figure b).

On peut maintenant segmenter les images de la séquence en utilisant le contour final de l'image précédente comme contour initial de l'image courante. Une réinitialisation par un rectangle est opérée toutes les 4 images. Les résultats pour la séquence sont donnés Fig.7.14. On peut voir que le bateau est correctement segmenté.

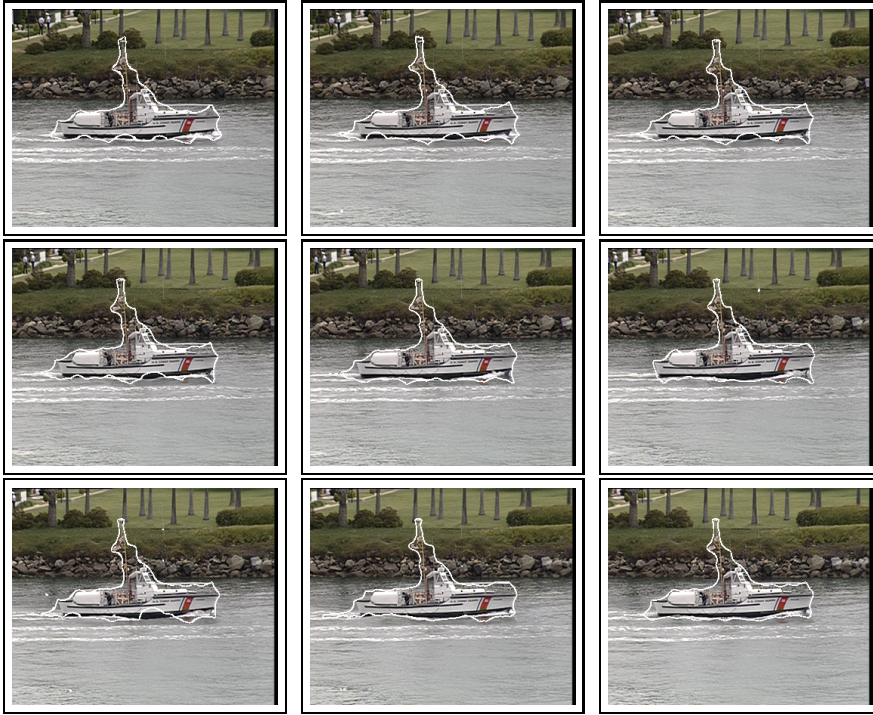


FIG. 7.14 – Résultats obtenus pour la séquence “Coastguard”.

Intéressons-nous maintenant à la séquence “Edberg” que l’on peut retrouver sur la Fig.7.15. On peut visualiser l’effet de la compensation du mouvement de la caméra sur l’amplitude de la vitesse comme précédemment. Pour cette séquence, pour le seuil de détection  $\alpha_2 = 6$ , le fond reste très bruité comme on peut le constater Fig.7.16. Il faut donc choisir un seuil de détection  $\alpha_2$  élevé afin de limiter le bruit dans le fond de la séquence. Ainsi pour  $\alpha_2 = 15$ , le fond de la séquence est moins bruité comme le montre la Fig.7.17. Cependant, si on choisit un seuil de détection trop élevé, l’objet en mouvement aura un signal très faible et sera donc difficile à segmenter. Par ailleurs, il faudra compenser par le choix d’un paramètre de lissage  $\lambda$  élevé qui ne permet pas de segmenter finement les parties concaves des objets. Ainsi, pour le seuil de détection  $\alpha_2 = 15$ , et un paramètre de lissage  $\lambda = 25$ , nous obtenons les résultats de la Fig.7.18.

Afin d’améliorer ces résultats, et au lieu de trouver un compromis pour le choix du paramètre  $\alpha_2$ , nous proposons ici un algorithme dit “du plus grossier au plus fin” (“coarse to fine”) utilisant deux seuils de détection l’un après



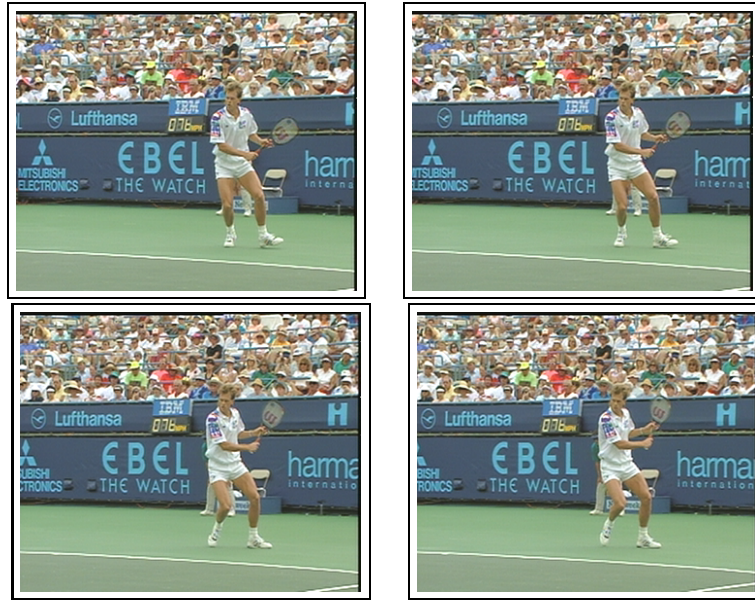


FIG. 7.15 – La séquence “Edberg”.

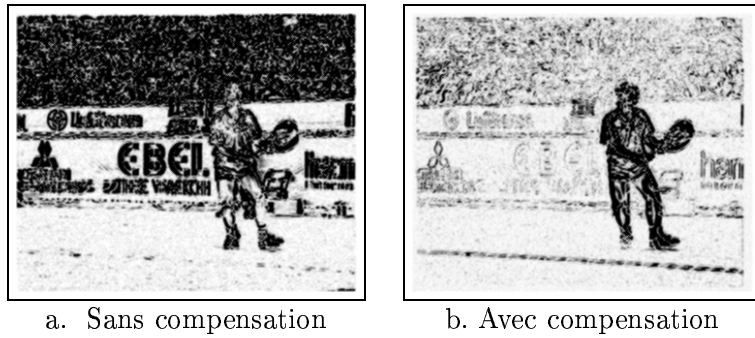


FIG. 7.16 – Amplitude de la vitesse sans compensation du mouvement de la caméra (figure a) et avec compensation du mouvement de la caméra (figure b) pour une image de la séquence “Edberg” ( $\alpha_2 = 6$ ).

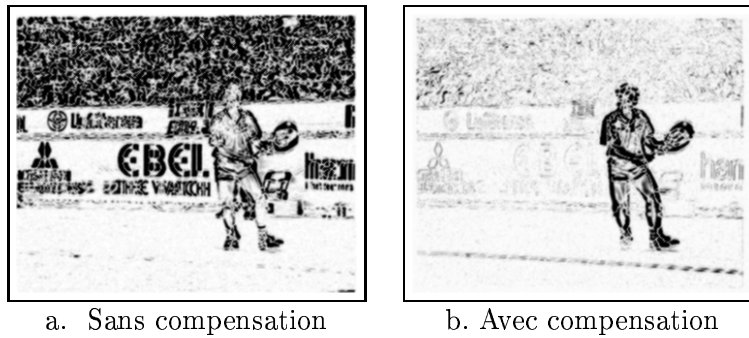


FIG. 7.17 – Amplitude de la vitesse sans compensation du mouvement de la caméra (figure a) et avec compensation du mouvement de la caméra (figure b) pour une image de la séquence “Edberg” ( $\alpha_2 = 15$ ).

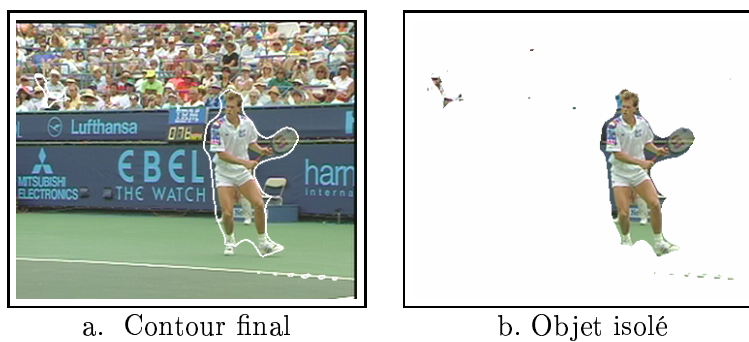


FIG. 7.18 – Contour final obtenu pour la première image de la séquence “Edberg” (figure a), et l’objet isolé correspondant (figure b) pour  $\alpha_2 = 15$  et  $\lambda = 25$ .

l'autre. Le principe en est simple. L'évolution du contour en multirésolution se fera d'abord avec un seuil de détection  $\alpha_2$  élevé, ce qui permet de faire évoluer le contour actif vers l'objet en mouvement et d'obtenir une première segmentation grossière en éliminant le bruit. Le contour final obtenu servira de contour initial à une deuxième segmentation utilisant un seuil de détection plus bas ce qui va permettre l'obtention d'une segmentation plus précise de l'objet en mouvement (Fig.7.19).

Nous pouvons visualiser la double évolution du contour Fig.7.20. Le premier seuil de détection  $\alpha_2^1$  est choisi égal à 30 avec  $\lambda_2^1 = 8$ , alors que le deuxième seuil de détection  $\alpha_2^2$  est choisi égal à 6 avec  $\lambda_2^2 = 10$ .

En appliquant cet algorithme, on trouve alors les résultats de la Fig.7.21

## 7.5 CRITÈRES SPATIAUX

Dans cette section, nous proposons deux ensembles de descripteurs utilisant l'hypothèse que les objets en mouvement sont composés de régions homogènes et délimités par un gradient élevé. Nous verrons dans la partie suivante comment combiner ces descripteurs spatiaux avec les descripteurs temporels. Pour ces descripteurs nous utiliserons les trois composantes couleur de l'image  $\mathbf{I}_n$ .

Nous supposons que nous disposons pour l'image  $n$  d'un contour initial  $\Gamma_n^{init}$  délimitant une région  $\Omega_{n,in}^{init}$  contenant un objet en mouvement. Nous proposons des descripteurs spatiaux permettant, à partir de ce contour initial, de se rapprocher le plus possible de l'objet à segmenter.

### 7.5.1 Descripteurs utilisant le gradient

Ces descripteurs doivent nous permettre d'atteindre le gradient élevé le plus proche à l'intérieur de la région  $\Omega_{n,in}^{init}$ . Nous proposons les descripteurs suivants :

$$\begin{aligned} k_{n,out}(\mathbf{x}) &= c(|\nabla \mathbf{I}_n(\mathbf{x})|) \\ k_{n,in}(\mathbf{x}) &= \alpha_3 \\ k_{n,b}(\mathbf{x}) &= \lambda_3 \end{aligned} \tag{7.8}$$

avec  $\alpha_3$  et  $\lambda_3$  deux constantes positives.

La fonction  $c$  est définie de la manière suivante :

$$c(|\nabla I_n|) = \begin{cases} |\nabla I_n| & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{n,in}^{init} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction nous permet de rester à l'intérieur de la région  $\Omega_{n,in}^{init}$ . Ces descripteurs nous donnent l'équation d'évolution suivante sur l'image  $n$  de

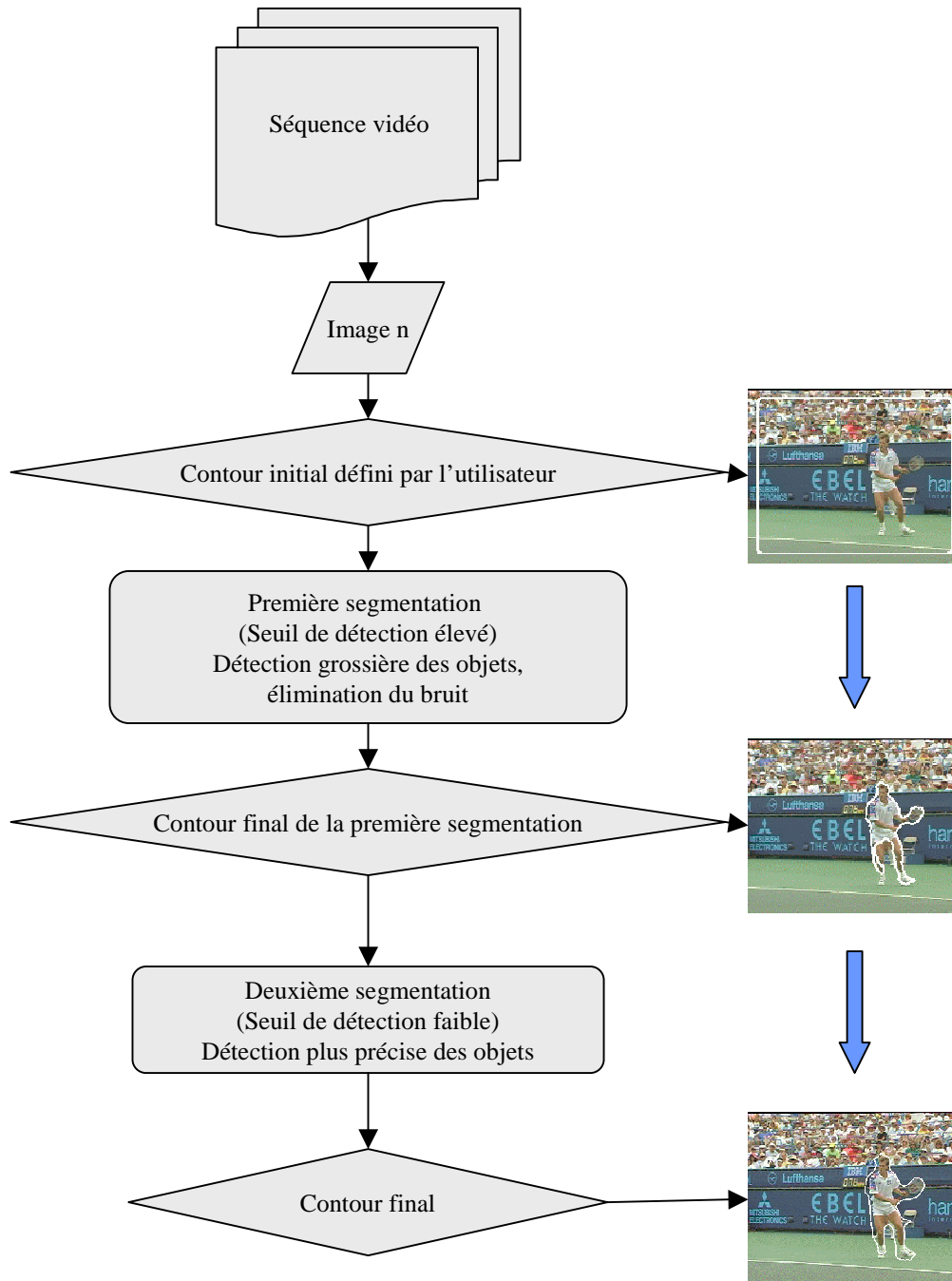


FIG. 7.19 – Principe de l'algorithme "coarse to fine"

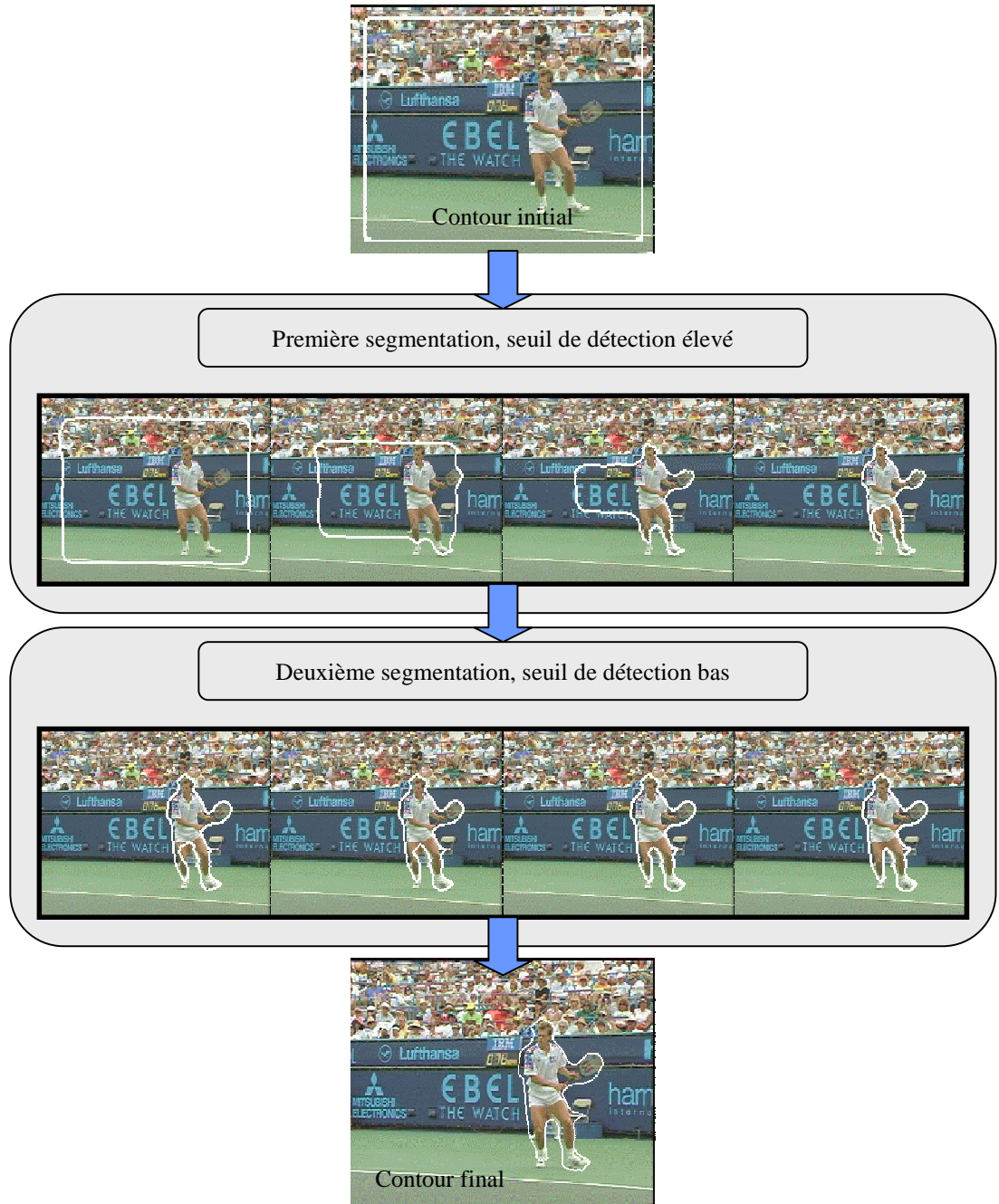


FIG. 7.20 – Evolution du contour lors de l’algorithme “coarse to fine”

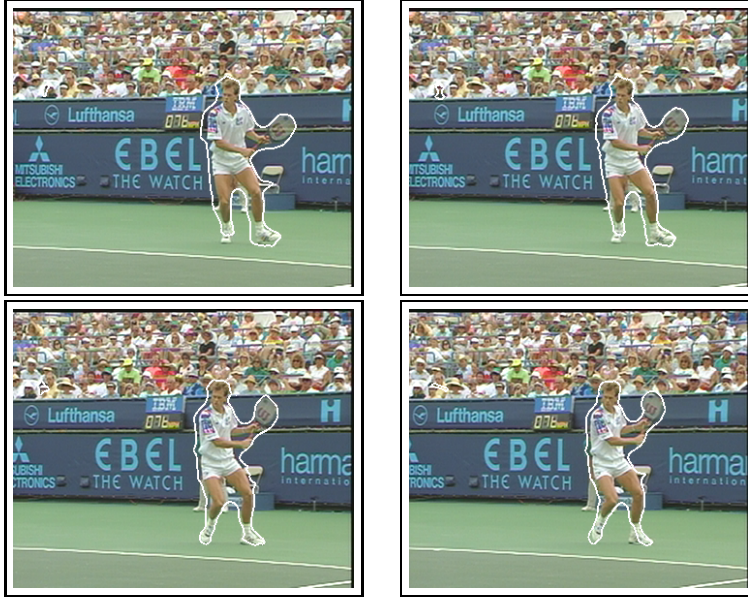


FIG. 7.21 – Résultats obtenus pour la séquence “Edberg”.

la séquence :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial \tau} &= (\alpha_3 - c(|\nabla \mathbf{I}_n(\mathbf{x})|) + \lambda_3 \kappa_n) \mathbf{N} \\ \Gamma_n(0) &= \Gamma_n^{init} \end{aligned}$$

### 7.5.2 Descripteurs utilisant les régions de couleur homogène

Ici nous allons utiliser une segmentation de l'image en régions de couleur homogène. L'idée est de dire que si une région est partiellement incluse dans la région initiale  $\Omega_{n,in}^{init}$  alors cette région sera totalement exclue de la segmentation finale. Parallèlement si une région de couleur homogène est presque totalement incluse dans la segmentation finale, nous ferons en sorte que toute la région soit incluse dans la segmentation finale. Ainsi notre contour actif évoluera de telle sorte à conserver les régions prépondérantes de la segmentation initiale. Une illustration de ce principe est donnée Fig.7.22.

#### 7.5.2.1 Segmentation de l'image en régions de couleur homogène

Nous proposons d'utiliser ici une méthode de croissance de régions. Ainsi le pixel  $\mathbf{x}$  appartient à une région  $\mathcal{R}_i$  s'il satisfait le critère de décision suivant :

$$|I_n^i(\mathbf{x}) - \mu^i| \leq c \quad \forall i \in \{1; 2; 3\} \quad (7.9)$$

avec  $\mu^1$ ,  $\mu^2$  et  $\mu^3$  les moyennes sur la région  $\mathcal{R}_i$  de respectivement  $I_n^1$ ,  $I_n^2$  et  $I_n^3$ . Le paramètre  $c$  est une constante positive choisie afin de décider l'écart

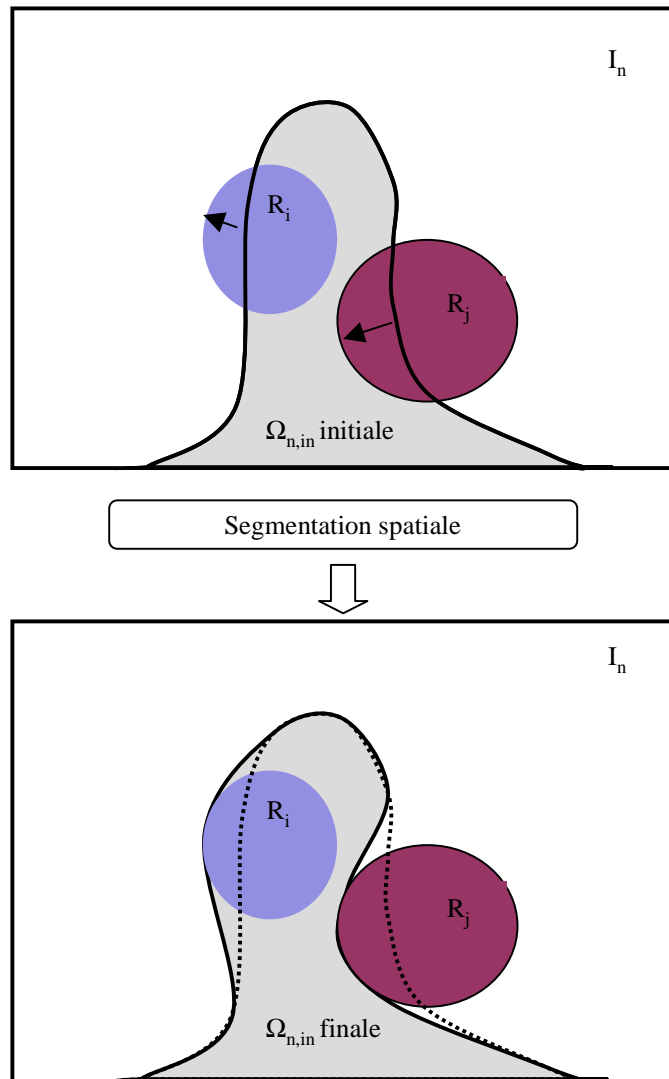


FIG. 7.22 – Principe de la segmentation spatiale utilisant la décomposition de l'image en régions homogènes

maximum laissé entre l'intensité d'un pixel  $\mathbf{x}$  et la moyenne. Ici nous autorisons  $c = 8$ .

Nous prenons un pixel  $\mathbf{x}$  comme pixel initial et nous vérifions tous les points situés dans le voisinage (8-voisinage). Les points vérifiant le critère de décision (7.9) sont insérés dans la région. Cette région va s'étendre jusqu'à ce que plus aucun point du voisinage ne puisse être additionné.

L'algorithme pourrait être amélioré en utilisant des techniques plus performantes de segmentation spatiale [116].

### 7.5.2.2 Descripteurs proposés

Les descripteurs proposés sont fondés sur l'application d'une heuristique utilisant le pourcentage de pixels de chaque région homogène inclus dans la région initiale  $\Omega_{n,in}^{init}$ , comme cela a été proposé dans [89]. L'idée nouvelle est ici d'utiliser ce pourcentage directement dans les descripteurs afin de faire évoluer un contour actif. Nous appelons  $N_i$ , le nombre de pixels de la région  $R_i$ , et  $N_{i,seg}$  le nombre de pixels de  $R_i \cap \Omega_{n,in}^{init}$ , c'est à dire le nombre de pixels de  $R_i$  situés à l'intérieur de la région segmentée  $\Omega_{n,in}^{init}$ .

Les descripteurs proposés sont alors les suivants :

$$\begin{aligned} k_{n,out}(\mathbf{x}) &= d_{out}(\mathbf{x}) \\ k_{n,in}(\mathbf{x}) &= d_{in}(\mathbf{x}) \\ k_{n,b}(\mathbf{x}) &= \lambda_4 \end{aligned} \tag{7.10}$$

avec  $\lambda_4$  une constante positive.

Les fonctions  $d_{in}$  et  $d_{out}$  sont définies de la manière suivante :

$$d_{in}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{|N_i - N_{i,seg}|}{N_i} \leq p\% \text{ avec } \mathbf{x} \in R_i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$d_{out}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{|N_i - N_{i,seg}|}{N_i} \leq p\% \text{ avec } \mathbf{x} \in R_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous choisissons ici  $p\% = 0.02$  afin de limiter le nombre de paramètres.

Ces descripteurs nous donnent l'équation d'évolution suivante sur l'image  $n$  de la séquence :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial \tau} &= (d_{in}(\mathbf{x}) - d_{out}(\mathbf{x}) + \lambda_4 \kappa_n) \mathbf{N} \\ \Gamma_n(0) &= \Gamma_n^{init} \end{aligned}$$



## 7.6 COMBINAISON HIÉRARCHIQUE DE CRITÈRES TEMPORELS ET DE CRITÈRES SPATIAUX

Nous proposons dans cette partie un algorithme dit “3 étapes” afin de combiner hiérarchiquement les informations basées mouvement et les informations spatiales (Fig.7.23). L'idée ici est de n'utiliser les informations spatiales que lorsque l'on a déjà obtenu une première segmentation basée sur le mouvement. En effet cette première segmentation va nous permettre de localiser les objets en mouvement et ainsi d'opérer à une première délimitation. Cette segmentation peut être effectuée avec une estimation du fond de la séquence en utilisant les descripteurs (7.3) ou en utilisant une comparaison avec l'image précédente compensée en mouvement avec les descripteurs (7.7). Ensuite, nous proposons de nous rapprocher au maximum de l'objet en mouvement en faisant évoluer le contour actif vers le gradient le plus proche avec les descripteurs (7.8). La dernière étape va nous permettre de récupérer certaines régions partiellement exclues du contour en utilisant la segmentation de l'image en régions homogènes et les descripteurs (7.10). Le schéma du traitement est donné Fig.7.23. On pourrait aisément imaginer une boucle retour à ce traitement qui nous permettrait de profiter de la segmentation des images précédentes pour affiner le calcul du fond de la séquence par exemple.

### 7.6.1 Résultats expérimentaux

Observons les résultats obtenus pour la séquence “Mother and Daughter” du COST 211 sur la figure 7.24. Afin de limiter les paramètres nous prenons  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 20$ . Le contour initial est un rectangle situé sur les bords de l'image. Il évolue ensuite avec les descripteurs basés mouvement (7.3), avec  $\alpha_1 = 2.5$ ,  $n_B = 60$ . Le premier contour obtenu permet de localiser les objets en mouvement qui sont ici la mère et l'enfant. On peut ensuite se rapprocher des contours les plus proches en utilisant les descripteurs basés sur le gradient (7.8) avec  $\alpha_3 = 1000$ . La dernière étape permet enfin de récupérer certaines régions comme la joue de la petite fille en utilisant les descripteurs (7.10).

On peut ensuite visualiser les résultats sur plusieurs images de la séquence en gardant le même jeu de paramètres. Le contour final et l'objet isolé sont donnés respectivement Fig.7.25 et 7.26.

## 7.7 EVALUATION DES RÉSULTATS

Il est très difficile d'évaluer les résultats d'une segmentation. En effet, la qualité d'un résultat dépend également de l'application envisagée. Pour des applications de post-production (rotoscopie), la segmentation doit être la plus précise possible. D'autres applications nécessitent une précision moindre mais un traitement en temps réel. Par ailleurs une évaluation objective des

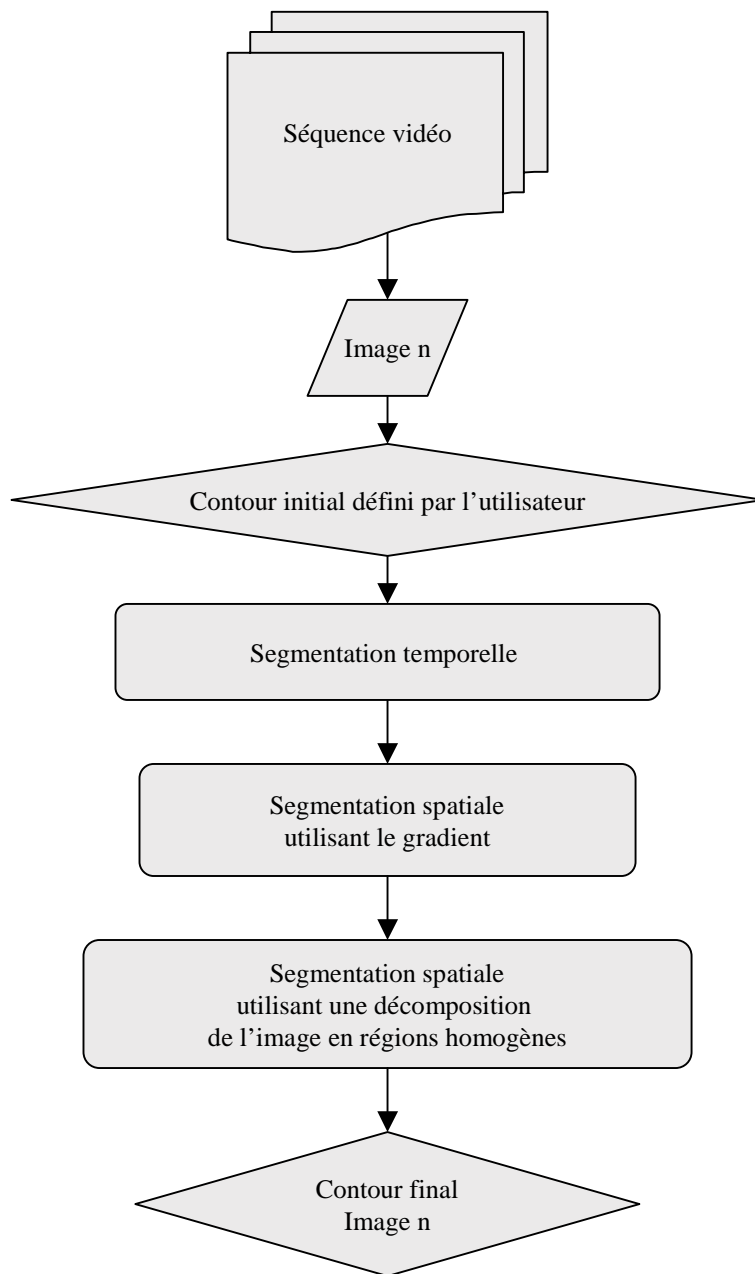


FIG. 7.23 – Principe de l'algorithme "3 étapes"

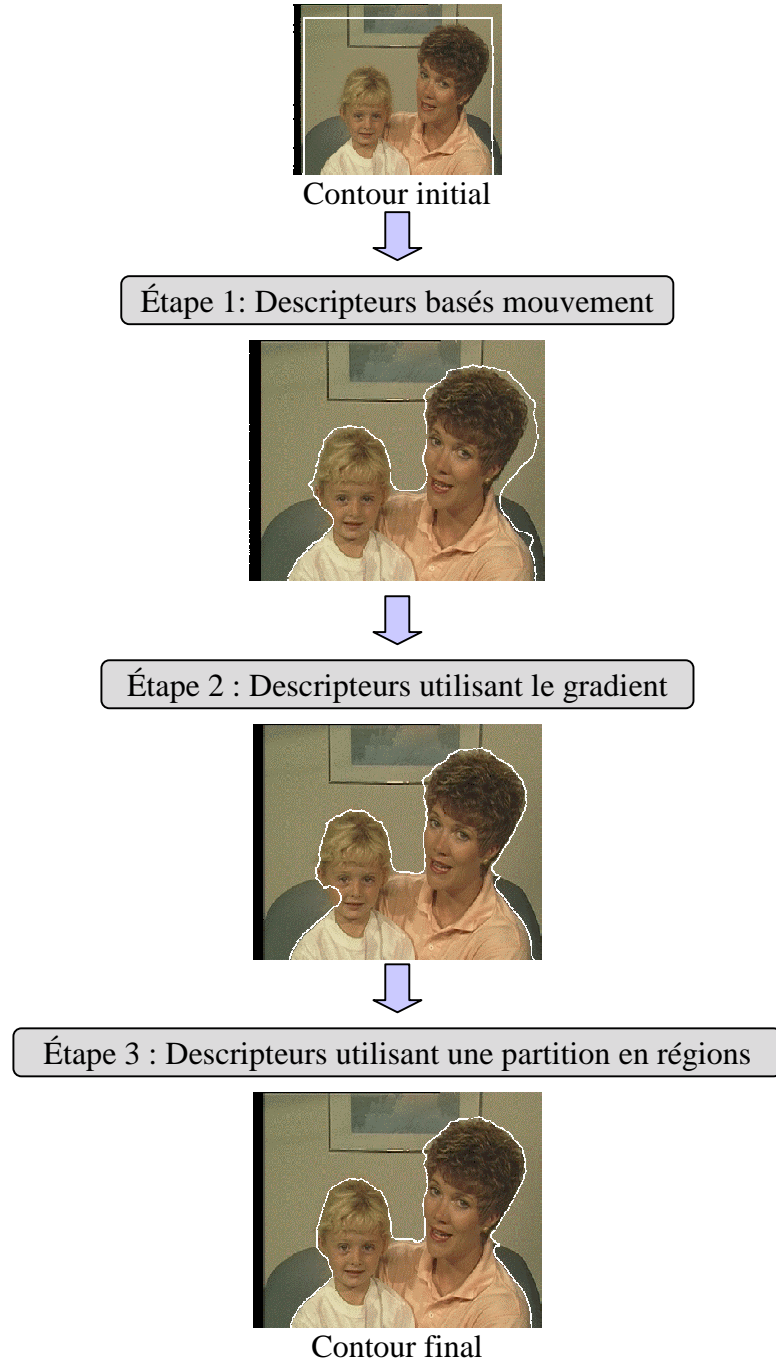


FIG. 7.24 – “Mother and Daughter”, Algorithme “3 étapes”



FIG. 7.25 – Contours finaux obtenus pour la séquence “Mother and Daughter” avec l’algorithme “3 étapes”.



FIG. 7.26 – Objets isolés obtenus pour la séquence “Mother and Daughter” avec l’algorithme “3 étapes”.

résultats utilisant des critères peut ne pas correspondre à l'évaluation subjective, certaines informations étant plus importantes que d'autres dans l'objet d'intérêt (le visage par exemple). Cependant quelques critères objectifs ont été élaborés notamment par le groupe de recherche Européen sur la segmentation COST 211. Trois critères sont suggérés [89] utilisant une segmentation de référence. Deux d'entre eux concernent l'évaluation de la précision spatiale des résultats tandis que le dernier s'attache à la cohérence temporelle de la forme segmentée au cours du temps afin d'en évaluer la stabilité. Le résultat de la segmentation de l'image  $I_n$  est noté  $A_n^{est}$  tandis que l'objet de référence est noté  $A_n^{ori}$ . Nous rappelons ici ces trois critères :

- Distorsion spatiale absolue :

$$d_{abs}(A_n^{est}, A_n^{ori}) = \frac{N_{err}}{N_{frame}} \quad (7.11)$$

- Distorsion spatiale relative :

$$d_{rel}(A_n^{est}, A_n^{ori}) = \frac{N_{err}}{N_{ori}} \quad (7.12)$$

- Cohérence temporelle :

$$T^{est}(n) = d_{rel}(A_n^{est}, A_{n-1}^{est}) \quad (7.13)$$

où  $N_{err}$  désigne le nombre de pixels erronés entre l'objet segmenté et l'objet de référence,  $N_{frame}$  le nombre de pixels de l'image et  $N_{ori}$  le nombre de pixels de l'objet de référence. La cohérence temporelle  $T^{est}(n)$  mesure en nombre de pixels la différence entre l'objet segmenté sur une image et le même objet sur l'image précédente, ce qui correspond à une "mesure d'activité". Cette valeur peut être comparée à la mesure d'activité de l'objet de référence  $T^{ori}(n)$ . Une segmentation de référence manuelle est rendue disponible par le groupe européen de recherche COST 211, notamment pour les séquences "Coastguard" et "Akiyo". Les résultats sont donnés Fig. 7.27 et 7.28.

Dans la Fig.7.27, on peut remarquer que les valeurs de distorsion sont très faibles montrant la précision des résultats. Le calcul de la cohérence temporelle montre une faible mesure d'activité, ce qui est normal puisque le personnage bouge très peu d'une image à l'autre. Cela prouve également la bonne stabilité de la segmentation tout au long de la séquence.

La séquence "Coastguard" est une séquence à caméra mobile et la segmentation est donc plus difficile puisque les objets en mouvement doivent être extraits d'un fond mobile lui-aussi. De plus, la segmentation de référence prend en compte une grande partie de l'eau en mouvement derrière le bateau alors que notre algorithme ne détecte que l'eau sous le bateau. Malgré ces difficultés, les résultats de distorsion Fig.7.28 montrent une bonne précision de la segmentation. Les résultats de cohérence temporelle montrent quant à eux un suivi correct du bateau.

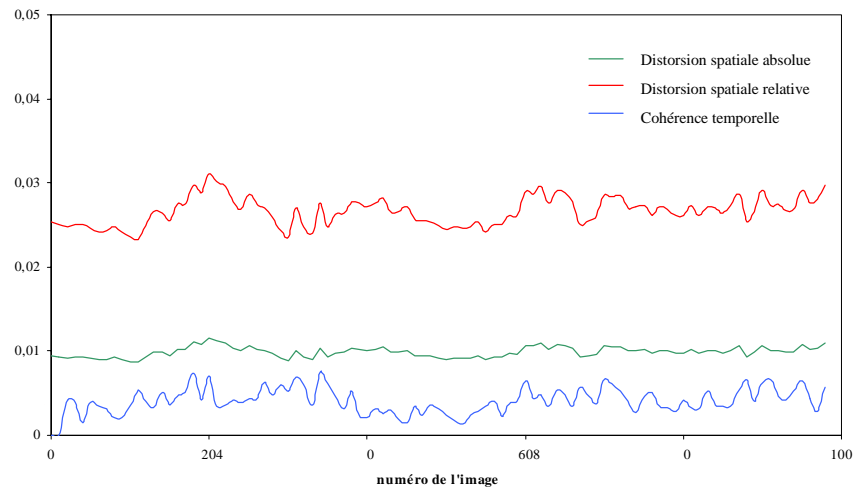


FIG. 7.27 – Résultats de distorsion pour “Akiyo”

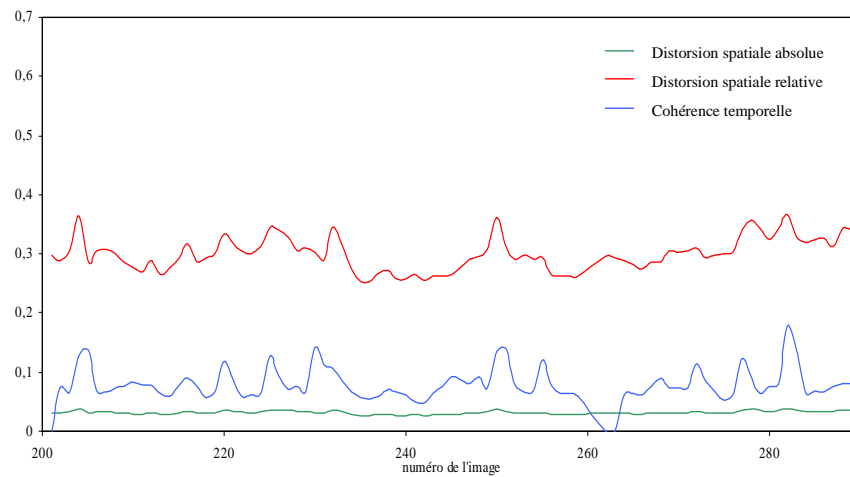


FIG. 7.28 – Résultats de distorsion pour “Coastguard”

## 7.8 CONCLUSION

Nous avons étudié des descripteurs afin de segmenter les objets en mouvement dans une séquence d'images en utilisant les contours actifs basés régions. Nous proposons d'utiliser séquentiellement des descripteurs de mouvement puis des descripteurs spatiaux afin d'affiner la segmentation. Les descripteurs de mouvement utilise une comparaison entre l'image courante et une image de fond ou l'image précédente compensée en mouvement. L'intérêt des contours actifs pour cette étude est certain, puisqu'ils permettent d'obtenir une segmentation correcte à partir d'un signal faible et bruité, comme cela a été montré sur la séquence "Coastguard". Par ailleurs, ils offrent une délimitation spatiale des objets en mouvement intéressante en les englobant à l'intérieur du contour. Ceci rend également plus aisé l'extraction des objets après segmentation. Une fois la segmentation obtenue, des algorithmes d'estimation du mouvement basés sur les ensembles de niveaux ont été mis en œuvre [69]. Par ailleurs, la segmentation obtenue a servi de point de départ pour des algorithmes de mosaïcking performants [47] permettant d'améliorer les résultats de segmentation finaux obtenus.

En ce qui concerne les améliorations possibles, on peut noter que, dans une séquence d'image, deux images consécutives sont très semblables. Nous n'avons pas exploité cette information dans notre approche (hormis pour l'initialisation du contour). On pourrait tout d'abord inclure des termes de régularisation temporelle afin de faire un lissage temporel de la segmentation [61]. On pourrait également combiner l'approche mise en œuvre ici avec celle développée au chapitre 6 utilisant la distance entre deux histogrammes afin de permettre une certaine stabilité temporelle de la segmentation ou afin d'utiliser une première segmentation initiale donnée par l'utilisateur.





Troisième partie

Conclusion



---

## Conclusion

Dans ce mémoire, des modèles de contours actifs basés régions ont été développés pour la segmentation d'images et de vidéos, puis mis en œuvre pour différentes applications.

La première partie de ce document est ainsi consacrée à l'élaboration d'un cadre de travail général pour la segmentation par contours actifs basés régions. Nous proposons de segmenter les régions ou objets en minimisant une fonctionnelle incluant des intégrales de domaines, appelées termes basés régions, et des intégrales de contours, appelées termes basés contours. Les fonctions caractérisant les régions ou les contours sont appelées descripteurs. La recherche d'un minimum est opérée via la propagation d'un contour actif, dit basé région. L'équation d'évolution du contour actif doit alors être déduite de la fonctionnelle introduite, ce qui pose quelques difficultés pour lesquelles des solutions ont été proposées :

- × Afin de pouvoir calculer l'équation d'évolution du contour actif qui permet d'atteindre un minimum de la fonctionnelle introduite, il nous faut caractériser ce minimum par une condition nécessaire en calculant la dérivée du critère. En traitement d'images, la méthode de dérivation classiquement utilisée consiste en la transformation préalable des intégrales de domaines en intégrales de contour afin de pouvoir ensuite utiliser le calcul des variations. Nous proposons ici d'utiliser les outils de dérivation issus de l'optimisation de domaines comme une alternative élégante pour le problème de dérivation rencontré. Nous comparons ensuite les deux approches de dérivation. Les résultats obtenus sont bien sûr identiques. Cependant, les outils de dérivation de domaines semblent mieux adaptés au problème traité puisqu'ils permettent de conserver la formulation initiale de la fonctionnelle.
- × Nous distinguons les descripteurs dépendant de la région et les descripteurs indépendant de la région. Lorsque l'on introduit dans la fonctionnelle des descripteurs dépendant de la région, cette dépendance doit être prise explicitement en compte dans le calcul de la

dérivée. Nous avons développé ici des modèles pour les descripteurs dépendants de la région afin de calculer la dérivée et donc l'équation d'évolution dans un cadre général. Nous montrons que la dépendance des descripteurs avec la région induit des termes supplémentaires dans l'équation d'évolution du contour en comparaison de celle obtenue pour les descripteurs indépendants de la région. A notre connaissance, la mise en évidence de ces termes n'a pas été abordée de manière explicite dans la littérature.

La deuxième partie de ce document propose de mettre en œuvre le cadre de travail développé dans la partie théorique pour quelques descripteurs région-dépendants ou région-indépendants pour différentes applications de segmentation.

- × La première étude concerne l'extraction de régions de couleur homogène d'intérêt comme le visage. Pour cela nous proposons de minimiser l'entropie d'une région par le biais du déterminant de la matrice de covariance. Ce dernier apparaît comme un outil pertinent pour la segmentation du visage dans les séquences d'images. Nous montrons également l'importance des termes additifs provenant de la dépendance des descripteurs avec la région afin d'obtenir une segmentation finale correcte. Par ailleurs, l'évolution des descripteurs est étudiée au cours de la propagation. On opère une estimation des caractéristiques de la région (moyenne, variance, matrice de covariance) conjointement à la segmentation.
- × La seconde étude porte sur des descripteurs région-dépendants utilisant les histogrammes : nous proposons la segmentation d'une région en connaissant son histogramme de référence. Après avoir calculé l'équation d'évolution du contour actif, nous appliquons l'algorithme sur une séquence réelle. La convergence des histogrammes vers les histogrammes de référence est montrée sur une image réelle.
- × La dernière étude porte sur la détection des objets en mouvement dans les séquences d'images. Des descripteurs basés mouvement sont proposés et évalués sur des séquences réelles puis combinés hiérarchiquement à des descripteurs spatiaux. Des résultats sur des séquences réelles démontrent le potentiel des contours actifs pour la segmentation des objets en mouvement.

## PERSPECTIVES

Nous pouvons dégager quelques perspectives au travail présenté ici. Tout d'abord, dans un souci d'exhaustivité, il faudrait étendre les modèles

introduits ici à la partition en  $n$  régions, en utilisant les contours actifs basés régions. Les méthodes de dérivation demeurent les mêmes mais il faut alors introduire des termes d'interaction entre les régions [118, 120] qui n'ont pas été abordés ici.

D'un point de vue applicatif, les méthodes d'implémentation restent encore à perfectionner. La méthode des ensembles de niveaux permet une gestion automatique des changements de topologie et donne de très bons résultats en terme de qualité. Cependant, la réinitialisation de la fonction distance est très coûteuse en temps de calcul. Des algorithmes rapides et performants restent encore à étudier et valider. L'utilisation des contours paramétriques s'avèrent pour le moment la seule solution "temps réel" envisageable, avec toutefois l'inconvénient de la gestion délicate des changements de topologie. Des algorithmes utilisant les B-splines ont été développés pour la détection des objets en mouvement avec les contours actifs basés régions [112].

D'autre part, au sein du cadre de travail développé, différents descripteurs peuvent être expérimentés à des fins de segmentation. Il est possible d'introduire, par exemple, les histogrammes du second ordre afin de décrire les textures [59, 60]. On pourra également étudier les descripteurs proposés par la nouvelle norme de compression MPEG-7 tant pour la couleur que pour la texture [86]. Par ailleurs, l'efficacité de différents espaces de couleur pourra être comparée pour les différents descripteurs couleur employés. L'espace HMMD, qui est utilisé dans MPEG-7, pourra par exemple être testé.

En ce qui concerne la segmentation des visages utilisant le déterminant de la matrice de covariance, on pourra envisager un couplage avec une technique de détection de visages [131].

En ce qui concerne les histogrammes, on pourra considérer les trois composantes de l'espace couleur pour le traitement, cela en adoptant un échantillonnage approprié afin de réduire l'espace mémoire utilisé.

Une fois les objets en mouvement segmentés, une estimation du mouvement a été effectuée en utilisant la conservation de la fonction des ensembles de niveaux au lieu de la conservation de l'intensité utilisée classiquement pour le calcul du flot optique [64, 65, 69]. Les deux méthodes (conservation de la fonction des ensembles de niveaux et conservation de l'intensité) pourraient être couplées en prenant en compte les caractéristiques de l'image pour pondérer l'apport de chaque terme (dans les zones uniformes, on préférera la conservation de la fonction des ensembles de niveaux alors que dans les zones texturées ou sur les contours, on privilégiera la conservation de l'intensité).

Les algorithmes de segmentation des objets en mouvement développés ici sont utilisés comme point de départ pour la construction de mosaïque [47] ou le suivi des objets [48].

Il serait intéressant de pouvoir coupler différents descripteurs pour une même étude. On peut ajouter un terme de suivi temporel fondé sur les histogrammes pour compléter les descripteurs utilisés pour la segmentation des objets en mouvement. Il est même envisageable de pondérer l'apport des

différents termes en fonction de la confiance accordée à chaque descripteur (prenant en compte par exemple l'amplitude du mouvement de l'objet sur les images précédentes).

Enfin, on pourra aller plus avant dans l'utilisation des outils de dérivation de domaines notamment afin d'étudier le cas des descripteurs non différentiables<sup>1</sup>. On pourra par exemple s'intéresser aux descripteurs faisant intervenir l'écart quadratique de l'intensité à la médiane, la distance de Kolmogorov-Smirnov pour comparer deux histogrammes ou la recherche de la valeur propre minimale ou maximale d'un tenseur.

#### VERS LA RÉALISATION DE L'IMAGINAIRE

“Segmenter c'est imaginer”. Par ce mémoire, nous avons fait un pas vers l'imaginaire, mais une longue distance reste à parcourir pour que le rêve devienne réalité. Cependant, comme le souligne Paul Eluard, “Ce qui est maintenant prouvé ne fut autrefois qu'imaginé”, les réalisations d'aujourd'hui ne sont que les utopies d'hier.

---

<sup>1</sup>perspective suggérée par le Professeur Alfred Hero, Université de Michigan, USA

Quatrième partie

*Annexes*





## Calcul de l'équation d'évolution avec le déterminant de la matrice de covariance

Nous devons calculer les différents termes de (4.30) pour les descripteurs utilisant le déterminant de la matrice de covariance (5.6).

Le calcul est effectuée pour le descripteur  $k_{in}$ . Le calcul est similaire pour le descripteur  $k_{out}$  avec une normale intérieure à  $\Omega_{out}$  qui est  $-\mathbf{N}$ . On exprime  $k_{in}$  comme une combinaison linéaire de fonctions dépendant de la région  $\Omega_{in}$  :

$$k_{in}(x, y, \tau) = g \left( \frac{Z^{(in)}}{(G_7^{(in)})^2} \right) \quad (\text{A.1})$$

avec  $g = \Phi$ , avec  $\Phi$  la fonction introduite dans (5.6), et :

$$Z^{(in)} = G_1^{(in)} G_2^{(in)} G_3^{(in)} + 2G_4^{(in)} G_5^{(in)} G_6^{(in)} - G_1^{(in)} (G_6^{(in)})^2 - G_2^{(in)} (G_5^{(in)})^2 - G_3^{(in)} (G_4^{(in)})^2$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1^{(in)} = \iint_{\Omega_{in}(\tau)} (I^1 - \mu_{in}^1)^2 dx dy \\ G_2^{(in)} = \iint_{\Omega_{in}(\tau)} (I^2 - \mu_{in}^2)^2 dx dy \\ G_3^{(in)} = \iint_{\Omega_{in}(\tau)} (I^3 - \mu_{in}^3)^2 dx dy \\ G_4^{(in)} = \iint_{\Omega_{in}(\tau)} (I^1 - \mu_{in}^1)(I^2 - \mu_{in}^2) dx dy \\ G_5^{(in)} = \iint_{\Omega_{in}(\tau)} (I^1 - \mu_{in}^1)(I^3 - \mu_{in}^3) dx dy \\ G_6^{(in)} = \iint_{\Omega_{in}(\tau)} (I^2 - \mu_{in}^2)(I^3 - \mu_{in}^3) dx dy \\ G_7^{(in)} = \iint_{\Omega_{in}(\tau)} dx dy \end{array} \right.$$

On en déduit  $m = 7$  et les expressions suivantes pour les fonctions  $h_i^{(in)}$  pour  $i = 1..7$  :

$$\begin{cases} h_1^{(in)} &= (I^1 - \mu_{in}^1)^2 \\ h_2^{(in)} &= (I^2 - \mu_{in}^2)^2 \\ h_3^{(in)} &= (I^3 - \mu_{in}^3)^2 \\ h_4^{(in)} &= (I^1 - \mu_{in}^1)(I^2 - \mu_{in}^2) \\ h_5^{(in)} &= (I^1 - \mu_{in}^1)(I^3 - \mu_{in}^3) \\ h_6^{(in)} &= (I^2 - \mu_{in}^2)(I^3 - \mu_{in}^3) \\ h_7^{(in)} &= 1 \end{cases}$$

A partir de ces expressions, on déduit aisément (en se référant au calcul effectué pour la variance section 4.3.2.4) :

$$B_{ij}^{(in)} = 0 \quad \forall i = 1..7 \quad \forall j$$

Nous devons ensuite calculer les termes  $A_i^{(in)}$  à partir des expressions de  $G_i^{(in)}$ , ce qui conduit à :

$$\begin{cases} A_1^{(in)} &= \iint_{\Omega_{in}(\tau)} \frac{\partial g}{\partial G_1^{(in)}} = \iint_{\Omega_{in}(\tau)} \frac{G_2^{(in)} G_3^{(in)} - (G_6^{(in)})^2}{(G_7^{(in)})^3} \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \\ A_2^{(in)} &= \iint_{\Omega_{in}(\tau)} \frac{\partial g}{\partial G_2^{(in)}} = \iint_{\Omega_{in}(\tau)} \frac{G_1^{(in)} G_3^{(in)} - (G_5^{(in)})^2}{(G_7^{(in)})^3} \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \\ A_3^{(in)} &= \iint_{\Omega_{in}(\tau)} \frac{\partial g}{\partial G_3^{(in)}} = \iint_{\Omega_{in}(\tau)} \frac{G_1^{(in)} G_2^{(in)} - (G_4^{(in)})^2}{(G_7^{(in)})^3} \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \\ A_4^{(in)} &= \iint_{\Omega_{in}(\tau)} \frac{\partial g}{\partial G_4^{(in)}} = \iint_{\Omega_{in}(\tau)} \frac{-2(G_3^{(in)} G_4^{(in)} - G_5^{(in)} G_6^{(in)})}{(G_7^{(in)})^3} \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \\ A_5^{(in)} &= \iint_{\Omega_{in}(\tau)} \frac{\partial g}{\partial G_5^{(in)}} = \iint_{\Omega_{in}(\tau)} \frac{2(G_4^{(in)} G_6^{(in)} - G_2^{(in)} G_5^{(in)})}{(G_7^{(in)})^3} \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \\ A_6^{(in)} &= \iint_{\Omega_{in}(\tau)} \frac{\partial g}{\partial G_6^{(in)}} = \iint_{\Omega_{in}(\tau)} \frac{-2(G_1^{(in)} G_6^{(in)} - G_4^{(in)} G_5^{(in)})}{(G_7^{(in)})^3} \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \\ A_7^{(in)} &= \iint_{\Omega_{in}(\tau)} \frac{\partial g}{\partial G_7^{(in)}} = \iint_{\Omega_{in}(\tau)} \frac{-3Z^{(in)}}{(G_7^{(in)})^4} \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \end{cases}$$

Et en exprimant la matrice de covariance avec les fonctions  $G_j^{(in)}$  comme suit :

$$\Sigma_{in} = \begin{pmatrix} \frac{G_1^{(in)}}{G_7^{(in)}} & \frac{G_4^{(in)}}{G_7^{(in)}} & \frac{G_5^{(in)}}{G_7^{(in)}} \\ \frac{G_4^{(in)}}{G_7^{(in)}} & \frac{G_2^{(in)}}{G_7^{(in)}} & \frac{G_6^{(in)}}{G_7^{(in)}} \\ \frac{G_5^{(in)}}{G_7^{(in)}} & \frac{G_6^{(in)}}{G_7^{(in)}} & \frac{G_3^{(in)}}{G_7^{(in)}} \end{pmatrix}$$

On en déduit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1^{(in)} = (-1)^{(1+1)} \det(M_{in}^{11}) \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \\ A_2^{(in)} = (-1)^{(2+2)} \det(M_{in}^{22}) \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \\ A_3^{(in)} = (-1)^{(3+3)} \det(M_{in}^{33}) \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \\ A_4^{(in)} = (-1)^{(1+2)} 2 \det(M_{in}^{12}) \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \\ A_5^{(in)} = (-1)^{(1+3)} 2 \det(M_{in}^{13}) \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \\ A_6^{(in)} = (-1)^{(2+3)} 2 \det(M_{in}^{23}) \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \\ A_7^{(in)} = -3 \det(\Sigma_{in}) \Phi'(\det(\Sigma_{in})) \end{array} \right.$$

avec  $M_{in}^{kl}$  la matrice déduite de  $\Sigma_{in}$  en supprimant la  $k^{ime}$  ligne et la  $l^{ime}$  colonne. Le calcul pour le descripteur  $k_{out}$  est similaire et nous avons donc toutes les expressions pour calculer l'équation d'évolution dont l'expression complète est donnée par l'équation (5.7).



---

## Bibliographie

- [1] D. ADALSTEINSSON et J.A. SETHIAN. A fast level set method for propagating interfaces. *Journal of Computational Physics*, 118, 1995.
- [2] A. ALATAN, L. ONURAL, M. WOLLBORN, R. MECH, E. TUNCEL, et T. SIKORA. Image sequence analysis for emerging interactive multimedia services - the european COST 211 framework. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 8(7) :802–813, novembre 1998.
- [3] L. ALVAREZ, P.L. LIONS, et J.M. MOREL. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29 :845–866, 1992.
- [4] O. AMADIEU, E. DEBREUVE, M. BARLAUD, et G. AUBERT. Inward and outward curve evolution using level set method. Dans *International Conference on Image Processing*, Kobe, Japon, 1999.
- [5] I. AMONOU et P. DUHAMEL. Iterative backward segmentation for hierarchical wavelet image coding. Dans *International Conference on Image Processing*, Vancouver, Canada, 2000.
- [6] G. AUBERT et J.F. AUJOL. Signed distance functions and viscosity solutions of discontinuous hamilton-jacobi equations. *soumis à SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2002.
- [7] G. AUBERT, M. BARLAUD, O. FAUGERAS, et S. JEHAN-BESSON. Image segmentation using active contours : Calculus of variations or shape gradients? Rapport technique RR 2002-18 / RR-4483, Laboratoire I3S / INRIA, 2002.
- [8] G. AUBERT, M. BARLAUD, O. FAUGERAS, et S. JEHAN-BESSON. Image segmentation using active contours : Calculus of variations or shape gradients? *soumis à SIAM Applied Mathematics*, 2002.
- [9] G. AUBERT et L. BLANC-FÉRAUD. Some remarks on the equivalence between 2D and 3D classical snakes and geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 34(1) :19–28, 1999.

- [10] G. AUBERT et P. KORNPORST. *Mathematical problems in image processing. Partial differential equations and the calculus of variations*. Numéro 147. Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag, 2001.
- [11] M. BARLAUD et C. LABIT. *Compression et codage des images et des vidéos*. Hermès, Lavoisier, 2002.
- [12] A. BENZOUGAR, P. BOUTHEMY, et R. FABLET. MRF based moving object detection from MPEG coded video. Dans *International Conference on Image Processing*, pages 402–405, Thessaloniki, Greece, octobre 2001.
- [13] D. BOSQ. *Nonparametric statistics for stochastic processes*, volume 110. Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag.
- [14] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, 1983.
- [15] L. BRUNEL et P. MATHIEU. Méthode rapide de segmentation et d'indexation du flux MPEG1-2 par bloc DCT. Dans *GRETSI conférence sur le traitement du signal et des images*, Toulouse, septembre 2001.
- [16] V. CASELLES, F. CATTE, T. COLL, et F. DIBOS. A geometric model for active contours. *Numerische Mathematik*, 66 :1–31, 1993.
- [17] V. CASELLES, R. KIMMEL, et G. SAPIRO. Geodesic active contours. Dans *International Conference on Computer Vision*, pages 694–699, Boston, USA, juin 1995.
- [18] V. CASELLES, R. KIMMEL, et G. SAPIRO. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 22(1) :61–79, 1997.
- [19] V. CASELLES, J.M. MOREL, G. SAPIRO, et A. TANNENBAUM. Introduction to the special issue on partial differential equations and geometry-driven diffusion in image processing and analysis. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3) :269–273, mars 1998.
- [20] A. CHAKRABORTY et J. DUNCAN. Game-theoretic integration for image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21 :12–30, janvier 1999.
- [21] A. CHAKRABORTY, L. STAIB, et J. DUNCAN. Deformable boundary finding in medical images by integrating gradient and region information. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15 :859–870, décembre 1996.
- [22] T. CHAN et L. VESE. An active contour model without edges. Dans *Scale-Space Theories in Computer Vision*, Corfu Greece, septembre 1999.
- [23] T. CHAN et L. VESE. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2) :266–277, 2001.

- [24] P. CHARBONNIER, L. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT, et M. BARLAUD. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2) :298–311, février 1997.
- [25] H.T. CHEN et T.L. LIU. Trust-region methods for real-time tracking. Dans *International Conference on Computer Vision*, volume 2, pages 717–722, Vancouver, Canada, 2001.
- [26] C. CHESNAUD, P. RÉFRÉGIER, et V. BOULET. Statistical region snake-based segmentation adapted to different physical noise models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21 :1145–1156, novembre 1999.
- [27] L. COHEN. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics and Image Processing : Image Understanding*, 53 :211–218, mars 1991.
- [28] L. COHEN, E. BARDINET, et N. AYACHE. Surface reconstruction using active contour models. Dans *SPIE Conference on Geometric Methods in Computer Vision*, San Diego, CA, 1993.
- [29] D. COMANICIU, V. RAMESH, et P. MEER. Real-time tracking of non-rigid objects using mean shift. Dans *Computer Vision and Pattern Recognition*, volume 2, pages 142–149, Hilton Head, SC, 2000.
- [30] Chopp D.. Computing minimal surfaces via level set curvature flows. Rapport technique, Lawrence Berkeley Laboratory, University of Berkeley, CA, 1991.
- [31] E. DEBREUVE. *Segmentation par contours actifs en imagerie médicale dynamique : application en cardiologie nucléaire*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, France, 2000.
- [32] E. DEBREUVE, M. BARLAUD, G. AUBERT, et J. DARCOURT. Discretization schemes for volume segmentation using a level set method. Rapport technique, Laboratoire I3S, France.
- [33] E. DEBREUVE, M. BARLAUD, G. AUBERT, et J. DARCOURT. Space time segmentation using level set active contours applied to myocardial gated SPECT. Dans *IEEE Medical Imaging Conference*, Seattle USA, 1999.
- [34] E. DEBREUVE, M. BARLAUD, G. AUBERT, et J. DARCOURT. Space time segmentation using level set active contours applied to myocardial gated SPECT. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(7) :643–659, juillet 2001.
- [35] M.C. DELFOUR et J.P. ZOLÉSIO. *Shape and geometries*. Advances in Design and Control, SIAM, 2001.
- [36] R. DERICHE et O. FAUGERAS. Les équations aux dérivées partielles en traitement des images et vision par ordinateur. *Traitement du Signal*, 13(6) :551–577, 1996.



- [37] B.A. DUBROVIN, A.T. FOMENKO, et S.P. NOVIKOV. *Modern Geometry - Methods and Applications I*. Springer-Verlag, New-York, 1984.
- [38] M.P. DUBUISSON JOLLY, S. LAKSHMANAN, et A.K. JAIN. Vehicle segmentation and classification using deformable templates. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(3) :293–308, mars 1996.
- [39] R. DUDA et P. HART. *Pattern Classification and Scene Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 1973.
- [40] A. ELEFHERIADIS et A. JACQUIN. Automatic face location detection for model assisted rate control in h.261 compatible coding of video. *Signal Processing : Image Communication*, 7(3) :435–455, 1995.
- [41] C. EPSTEIN et M. CAGE. *The curve shortening flow*. Wave Motion : Theory, Modeling, and Computation, Springer-Verlag, 1987.
- [42] L.C. EVANS. *Partial Differential Equations*, volume 19 de *Graduate Studies in Mathematics*. ams, 1998.
- [43] O. FAUGERAS et R. KERIVEN. Variational principles, surface evolution, PDE's, level-set methods, and the stereo problem. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7 :336–344, 1998.
- [44] International Organization for STANDARDIZATION. MPEG-7 context and objectives. 1998. ISO/IEC JTC1/SC29/WG11 N2460.
- [45] International Organization for STANDARDIZATION. Overview of the MPEG-4 standard. Mars 1999. ISO/IEC JTC1/SC29/WG11 N2725.
- [46] D. GABOR. Information theory in electron microscopy. *Laboratory Investigation*, 14 :801–807, 1965.
- [47] M. GASTAUD et M. BARLAUD. Video segmentation using active contours on a group of pictures. Dans *International Conference on Image Processing*, Rochester, NY, septembre 2002.
- [48] M. GASTAUD, M. BARLAUD, et G. AUBERT. Tracking video objects using active contours. Dans *Workshop on Motion and Video Computing*, Orlando, Floride, décembre 2002.
- [49] S. GEMAN et D.E. MC LURE. Bayesian image analysis : an application to single photon emission tomography. Dans *Proc. Statist. Comput. Sect.*, 1985.
- [50] S. GEMAN et G. REYNOLDS. Constrained restoration and the recovery of discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14 :367–383, mars 1992.
- [51] J. GOMES et O. FAUGERAS. Reconciling distance functions and level-sets. Dans *Scale space workshop*, Berlin, 1999.
- [52] J. GOMES et O. FAUGERAS. Reconciling distance functions and level sets. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 11 :209–223, 2000.

- [53] J. GOMES et O. FAUGERAS. Representing and evolving smooth manifolds of arbitrary dimension embedded in  $R^n$  as the intersection of  $n$  hypersurfaces : the vector distance functions. Rapport technique 4012, INRIA, 2000.
- [54] R. GRAY et L. DAVIDSON. *An introduction to statistical signal processing*. Version libre, 2000.
- [55] R. GRAY, J. YOUNG, et A AIYER. Minimum discrimination information clustering : modeling and quantization with gauss mixtures. Dans *International Conference on Image Processing*, Thessaloniki, Greece, octobre 2001.
- [56] J. GRINIAS et G. TZIRITAS. Motion segmentation and tracking using a seeded region growing method. Dans *European Signal Processing Conference*, 1998.
- [57] Video Coding Experts GROUP. H.26L test model. Rapport technique, ITU-Telecommunications Standardization Sector, juin 2001.
- [58] J. HADAMARD. Mémoire sur un problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mémoire des savants étrangers, CNRS, Paris, 1968.
- [59] R.M. HARALICK et L.G. SHAPIRO. *Computer and Robot Vision*, volume 1. Addison-Wesley, 1992.
- [60] R.M. HARALICK et L.G. SHAPIRO. *Computer and Robot Vision*, volume 2. Addison-Wesley, Reading MA, 1993.
- [61] S. JEHAN. Segmentation spatio-temporelle d'objets en mouvement dans une séquence d'images par contours actifs déformables. Mémoire de D.E.A., DEA ARAVIS, Université de Nice-Sophia Antipolis, Laboratoire I3S, 1999.
- [62] S. JEHAN, M. BARLAUD, et G. AUBERT. Segmentation spatio-temporelle d'objets en mouvement dans une séquence vidéo par contours actifs déformables. Dans *RFIA*, Paris, France, février 2000.
- [63] S. JEHAN-BESSON, M. BARLAUD, et G. AUBERT. DREAM<sup>2</sup>S : Deformable regions driven by an eulerian accurate minimization method for image and video segmentation. *International Journal of Computer Vision*, à paraître 2003.
- [64] S. JEHAN-BESSON, M. BARLAUD, et G. AUBERT. Detection and tracking of moving objects using a new level set based method. Dans *International Conference on Pattern Recognition*, volume 3, pages 1112–1117, Barcelone, Espagne, septembre 2000.
- [65] S. JEHAN-BESSON, M. BARLAUD, et G. AUBERT. Eulerian region-based active contours for segmentation and tracking of non-rigid video objects. Rapport technique I3S/RR-2000-13-FR, Laboratoire I3S, 2000.

- [66] S. JEHAN-BESSON, M. BARLAUD, et G. AUBERT. Segmentation et suivi des objets en mouvement dans une séquence vidéo par contours actifs basés régions. Dans *CORESA*, Poitiers, France, octobre 2000.
- [67] S. JEHAN-BESSON, M. BARLAUD, et G. AUBERT. A 3-step algorithm using region-based active contours for video objects detection. Dans *WIAMIS Workshop on Image Analysis for Multimedia Interactive Services*, Tampere, Finlande, mai 2001.
- [68] S. JEHAN-BESSON, M. BARLAUD, et G. AUBERT. Contours actifs basés régions pour la segmentation des objets en mouvement dans les séquences à caméra fixe ou mobile. Dans *GRETSI conférence sur le traitement du signal et des images*, Toulouse, septembre 2001.
- [69] S. JEHAN-BESSON, M. BARLAUD, et G. AUBERT. An object-based motion method for video coding. Dans *International Conference on Image Processing*, Thessaloniki, Greece, octobre 2001.
- [70] S. JEHAN-BESSON, M. BARLAUD, et G. AUBERT. Region-based active contours for video object segmentation with camera compensation. Dans *International Conference on Image Processing*, Thessaloniki, Greece, octobre 2001.
- [71] S. JEHAN-BESSON, M. BARLAUD, et G. AUBERT. DREAM<sup>2</sup>S : Deformable regions driven by an eulerian accurate minimization method for image and video segmentation. Rapport technique RR 2001-14, Laboratoire I3S, 2001.
- [72] S. JEHAN-BESSON, M. BARLAUD, et G. AUBERT. Video object segmentation using eulerian region-based active contours. Dans *International Conference on Computer Vision*, Vancouver, Canada, 2001.
- [73] S. JEHAN-BESSON, M. BARLAUD, et G. AUBERT. A 3-step algorithm using region-based active contours for video objects detection. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing, Special issue on Image Analysis for Multimedia Interactive Services*, 2002(6) :572–581, juin 2002.
- [74] S. JEHAN-BESSON, M. BARLAUD, et G. AUBERT. DREAM<sup>2</sup>S : Deformable regions driven by an eulerian accurate minimization method for image and video segmentation, application to face detection in color video sequences. Dans *European Conference on Computer Vision*, Copenhagen, Denmark, mai 2002.
- [75] M. KASS, A. WITKIN, et D. TERZOPOULOS. Snakes : Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1 :321–332, 1988.
- [76] G. KÜHNE, J. WEICKERT, O. SCHUSTER, et S. RICHTER. A tensor-driven active contour model for moving object segmentation. Dans *International Conference on Image Processing*, pages 73–76, Thessaloniki, Greece, octobre 2001.

- [77] S. KICHENASSAMY, A. KUMAR, P. OLVER, A. TANNENBAUM, et A. YEZZI. Gradient flows and geometric active contour models. Dans *International Conference on Computer Vision*, pages 810–815, Boston, USA, 1995.
- [78] S. KICHENASSAMY, A. KUMAR, P. OLVER, A. TANNENBAUM, et A. YEZZI. Conformal curvature flows : from phase transitions to active vision. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 134 :275–301, 1996.
- [79] R. KOENEN. MPEG-4 multimedia for our time. *IEEE Spectrum*, 36, février 1999.
- [80] P. KORNPORST. *Contribution à la restauration d'images et à l'analyse de séquences : Approches variationnelles et solutions de viscosité*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis.
- [81] P. KORNPORST, R. DERICHE, et G. AUBERT. Image sequence analysis via partial differential equations. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 11 :5–26, 1999.
- [82] J. LI et A.O. HERO. A spectral method for solving elliptic equations for surface reconstruction and 3D active contours. Dans *International Conference on Image Processing*, Thessaloniki, Grèce, octobre 2001.
- [83] R. MALLADI, J.A. SETHIAN, et B.C VEMURI. Evolutionary fronts for topology-independent shape modeling and recovery. Dans J.O. EKLUNDH, éditeur, *European Conference on Computer Vision*, volume 800 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 3–13, Stockholm, Sweden, mai 1994.
- [84] R. MALLADI, J.A. SETHIAN, et B.C VEMURI. Shape modeling with front propagation : a level set approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17 :158–175, février 1995.
- [85] R. MALLADI, J.A. SETHIAN, et B.C. VEMURI. A fast level set based algorithm for topology independant shape modeling. *Journal of Mathematical Imaging and Vision, Special issue on Topology and Geometry*, 6, 1996. A. Rosenfeld and Y.Kong, eds.
- [86] B.S. MANJUNATH, J.R. OHM, et V.V. VASUDEVAN. Color and texture descriptors. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 11(6), juin 2001.
- [87] A.R. MANSOURI et J. KONRAD. Motion segmentation with level sets. Dans *International Conference on Image Processing*, Kobe, Japon, 1999.
- [88] M. MAZIÈRE et F. CHASSAING. Segmentation and tracking of video objects : suited to content-based video indexing interactive television and production systems. Dans *International Conference on Image Processing*, pages 279–283, Vancouver, Canada, septembre 2000.

- [89] R. MECH. Description of the COST 211 analysis model(version 4.0). *COST211*, juillet 1998.
- [90] E. MÉMIN et P. PÉREZ. Dense estimation and object-based segmentation of the optical flow with robust techniques. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(5) :703–718, mai 1998.
- [91] S. MENET, P. SAINT-MARC, et G. MEDIONI. B-snakes : implementation and application to stereo. *Artificial Intelligence and Computer Vision*, pages 223–236, 1991.
- [92] E. MÉMIN et P. PÉREZ. Joint estimation-segmentation of optic flow. Dans *European Conference on Computer Vision1*, volume II, pages 563–577, Freiburg, Germany, juin 1998.
- [93] J. MONTAGNAT, H. DELINGETTE, et N. AYACHE. A review of deformable surfaces : topology, geometry and deformation. *Image and Vision Computing*, 19(14) :1023–1040, décembre 2001.
- [94] J.M. MOREL et S. SOLIMINI. *Variational methods in image segmentation*. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [95] D. MUMFORD et J. SHAH. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42 :577–684, 1989.
- [96] J. ODOBEZ et P. BOUTHEMY. Detection of multiple moving objects using multiscale MRF with camera motion compensation. Dans *International Conference on Image Processing*, pages 257–261, Austin, Texas, novembre 1994.
- [97] J. ODOBEZ et P. BOUTHEMY. Robust multiresolution estimation of parametric motion models. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 6(4) :348–365, décembre 1995.
- [98] J. ODOBEZ et P. BOUTHEMY. MRF-based motion segmentation exploiting a 2D motion model robust estimation. Dans *International Conference on Image Processing*, pages 628–631, Whashington, D.C., octobre 1995.
- [99] S. OSHER et L.I. RUDIN. Feature-oriented image enhancement using shock filters. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 27 :919–940, 1990.
- [100] S. OSHER et J.A. SETHIAN. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 79 :12–49, 1988.
- [101] N. PARAGIOS et R. DERICHE. Geodesic active regions for motion estimation and tracking. Dans *International Conference on Computer Vision*, Corfu Greece, 1999.
- [102] N. PARAGIOS et R. DERICHE. Coupled geodesic active regions for image segmentation : A level set approach. Dans *European Conference in Computer Vision*, Dublin, Irlande, juin 2000.

- [103] N. PARAGIOS et R. DERICHE. Geodesic active regions : A new paradigm to deal with frame partition problems in computer vision. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 13 :249–268, 2002.
- [104] N. PARAGIOS et R. DERICHE. Geodesic active regions and level set methods for supervised texture segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 46(3) :223, 2002.
- [105] S. PATEUX. Spatial segmentation of color images according to MDL formalism. Dans *International conference on Color in Graphics and Image Processing*, Saint Étienne, France, octobre 2000.
- [106] S. PATEUX. Tracking of video objects using a backward projection technique. Dans *Visual Conference on Image Processing*, pages 1107–1114, Perth, Australie, juin 2000.
- [107] D. PENG, B. MERRIMAN, O. OSHER, H. ZHAO, et M. KANG. A PDE-based fast local level-set method. *Journal of Computational Physics*, 155 :410–438, 1999.
- [108] P. PERONA et J. MALIK. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Recognition and Machine Intelligence*, 12 :629–639, 1990.
- [109] F. PRECIOSO et M. BARLAUD. B-spline active contours for fast video segmentation. Dans *International Conference on Image Processing*, Thessaloniki, Greece, octobre 2001.
- [110] F. PRECIOSO et M. BARLAUD. B-spline active contours for fast video segmentation. Dans *WIAMIS Workshop on Image Analysis for Multimedia Interactive Services*, Tampere, Finlande, mai 2001.
- [111] F. PRECIOSO et M. BARLAUD. B-spline active contour for fast video segmentation. *EURASIP Special issue : Image Analysis for Multimedia Interactive Services*, 6 :555–560, juin 2002.
- [112] F. PRECIOSO et M. BARLAUD. Regular spatial B-spline active contours for fast video segmentation. Dans *International Conference on Image Processing*, Rochester, USA, septembre 2002.
- [113] R. RONFARD. Region-based strategies for active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 13(2) :229–251, 1994.
- [114] T. ROY. Segmentation vidéo par contours actifs. Mémoire de D.E.A., DEA ENS Cachan, Laboratoire I3S, 2002.
- [115] S.J. RUUTH, B. MERRIMAN, et S. OSHER. A fixed grid method for capturing the motion of self intersecting interfaces and related PDEs. Rapport technique 99-22, UCLA Computational and Applied Mathematics Reports, juillet 1999.
- [116] P. SALEMBIER et L. GARRIDO. Binary partition tree as an efficient representation for image processing, segmentation, and information retrieval. *IEEE Trans. Image Proc.*, 9 :561–576, avril 2000.

- [117] P. SALEMBIER et F. MARQUÈS. Region-based representations of image and video : segmentation tools for multimedia services. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 9(8) :1–20, décembre 1999.
- [118] C. SAMSON. *Contribution à la classification d'images satellitaires par approche variationnelle et équations aux dérivées partielles*. Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, septembre 2000.
- [119] C. SAMSON, L. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT, et J. ZERUBIA. A level set model for image classification. Dans *Scale-space Theories in Computer Vision*, Corfu Greece, 1999.
- [120] C. SAMSON, L. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT, et J. ZERUBIA. A level set model for image classification. *International Journal of Computer Vision*, 40(3) :187–197, 2000.
- [121] S.J. SANGWINE et R.E.N. HORNE, éditeurs. *The colour image processing handbook*. Chapman & Hall, 1998.
- [122] G. SAPIRO. *Geometric partial differential equations and image analysis*. Cambridge university press, 2001.
- [123] C. SCHNÖRR. Computation of discontinuous optical flow by domain decomposition and shape optimization. *International Journal of Computer Vision*, 8(2) :153–165, 1992.
- [124] J.A. SETHIAN. Numerical algorithms for propagating interfaces : Hamilton-jacobi equations and conservation laws. *Journal of Differential Geometry*, 31 :131–161, 1990.
- [125] J.A. SETHIAN. *Level Set Methods*. Cambridge Univ. Press, 1996.
- [126] J.A. SETHIAN. *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Sciences*. Cambridge Univ. Press, 1999.
- [127] K. SIDDIQI, Y.B. LAUZIÈRE, A. TANNENBAUM, et S.W. ZUCKER. Area and length minimizing flows for shape segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3) :433–443, 1996.
- [128] E. SIFAKIS, I. GRINIAS, et G. TZIRITAS. Video segmentation using fast marching and region growing algorithms. Dans *WIAMIS Workshop on Image Analysis for Multimedia Interactive Services*, Tampere, Finlande, mai 2001.
- [129] E. SIFAKIS et G. TZIRITAS. Moving object localisation using a multi-label fast marching algorithm. *Signal Processing : Image Communication*, 16 :963–976, 2001.
- [130] J. SOKOŁOWSKI et J.P. ZOLESIO. *Introduction to shape optimization*, volume 16 de *Springer series in computational mathematics*. Springer-Verlag, 1992.

- [131] K.K. SUNG et T. POGGIO. Example-based learning for view-based human face detection. *IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 20(1) :39–51, 1998.
- [132] M. SUSSMAN, P. SMEREKA, et S. OSHER. A level set method for computing solutions of incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 114 :146–159, 1994.
- [133] A.M. TEKALP. *Digital Video Processing*. Prentice Hall, 1995.
- [134] A.M. TEKALP. *Handbook of Image and Video Processing*, chapitre Video Segmentation, pages 383–399. Academic Press, 2000.
- [135] S. VALETTE. *Modèles de maillages déformables 2D et multirésolution surfaciques 3D sur une base d'ondelettes*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2002.
- [136] S. VALETTE, I.E. MAGNIN, et R. PROST. Active mesh for video segmentation and objects tracking. Dans *International Conference on Image Processing*, Thessaloniki, Grèce, octobre 2001.
- [137] J. WEICKERT. *Anisotropic diffusion in image processing*. ECMI Series, TeubnerVerlag, Stuttgart, Germany, 1998.
- [138] A. YEZZI, S. KICHENASSAMY, A. KUMAR, P.J. OLVER, et A. TANNENBAUM. A geometric snake model for segmentation of medical imagery. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16 :199–209, 1997.
- [139] A. YEZZI, A. TSAI, et A. WILLSKY. A statistical approach to snakes for bimodal and trimodal imagery. Dans *International Conference on Image Processing*, Kobe Japon, 1999.
- [140] H.-K. ZHAO, S. OSHER, B. MERRIMAN, et M. KANG. Implicit and non-parametric shape reconstruction from unorganized points using variational level set method. *Computer Vision and Image Understanding*, 80, 2000.
- [141] H.K. ZHAO, T. CHAN, B. MERRIMAN, et S. OSHER. A variational level-set approach to multiphase motion. *Journal of Computational Physics*, 127 :179–195, 1996.
- [142] S. ZHU, T.S. LEE, et A. YUILLE. Region competition : unifying snakes, region growing, and bayes/MDL for multiband image segmentation. Dans *International Conference on Computer Vision*, pages 416–423, 1995.
- [143] S. ZHU et A. YUILLE. Region competition : unifying snakes, region growing, and bayes/MDL for multiband image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18 :884–900, septembre 1996.





---

# Publications

## REVUES INTERNATIONALES

**IJCV'03**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, DREAM<sup>2</sup>S : Deformable regions driven by an eulerian accurate minimization method for image and video segmentation, *International Journal of Computer Vision*, à paraître.

**EURASIP'02**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, A 3-Step algorithm using region-based active contours for video objects detection, *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, Vol. 2002, n°6, juin 2002.

**SIAM (soumis)**, G. Aubert, M. Barlaud, O. Faugeras, S. Jehan-Besson, Image segmentation using active contours : calculus of variations or shape gradients?, soumis à *SIAM Applied Mathematics*.

## CONFÉRENCES INTERNATIONALES

**ICPR'00**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, Detection and tracking of moving objects using a new level set based method, *International Conference on Pattern Recognition*, Barcelone, Espagne, septembre 2000.

**WIAMIS'01**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, A 3-Step algorithm using region-based active contours for video objects detection, *Workshop on Image Analysis For Multimedia Interactive Services*, Tampere, Finlande, mai 2001.

**ICCV'01**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, Video object segmentation using eulerian region-based active contours, *International Conference on Computer Vision*, Vancouver, Canada, juillet 2001.

**ICIP'01**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, An object-based motion method for video coding, *International Conference on Image Processing*, Thessaloniki, Grèce, octobre 2001.

**ICIP'01**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, Region-based active contours for video object segmentation with camera compensation, *International Conference on Image Processing*, Thessaloniki, Grèce, octobre 2001.

**ECCV'02**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, DREAM<sup>2</sup>S : Deformable Regions driven by an Eulerian Accurate Minimization Method for image and video segmentation, application to face detection in color video

sequences, *European Conference on Computer Vision*, Copenhague, Danemark, mai 2002.

#### CONFÉRENCES NATIONALES

**RFIA'00**, S. Jehan, E. Debreuve, M. Barlaud, G. Aubert, Segmentation spatio-temporelle d'objets en mouvement dans une séquence vidéo par contours actifs déformables, *Congrès de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle*, Paris, février 2000.

**CORESA'00**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, Segmentation et suivi des objets en mouvement dans une séquence vidéo par contours actifs basés régions, *Compression et Représentation des Signaux Audiovisuels*, Poitiers, octobre 2000.

**GRETSI'01**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, Contours actifs basés régions pour la segmentation des objets en mouvement dans les séquences à caméra fixe ou mobile, *GRETSI conférence sur le traitement du signal et des images*, Toulouse, septembre 2001.

#### RAPPORTS DE RECHERCHE

**Rapport de DEA**, S. Jehan, Segmentation spatio-temporelle d'objets en mouvement dans une séquence d'images par contours actifs déformables, septembre 1999.

**Rapport de recherche interne I3S, RR-2000-13-FR**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, Eulerian region-based active contours for segmentation and tracking of non-rigid video objects, décembre 2000.

**Rapport de recherche interne I3S, RR-2001-14-FR**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, DREAM<sup>2</sup>S : Deformable Regions driven by an Eulerian Accurate Minimization Method for image and video segmentation, novembre 2001.

**Rapport de recherche interne I3S, RR-2002-18-FR / Rapport de recherche INRIA, RR-4483**, G. Aubert, M. Barlaud, O. Faugeras, S. Jehan-Besson, Image Segmentation Using Active Contours : Calculus of Variations or Shape Gradients?, mai 2002.

#### AUTRES SÉMINAIRES

##### **GDR ISIS : Groupe de Recherche en Information-Signal-Image-Vision**

**GDR ISIS octobre 1999**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, Segmentation spatio-temporelle d'objets en mouvement dans une séquence d'images par contours actifs déformables pour la norme MPEG-4, ENST, Paris.

**GDR ISIS mars 2001**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, Contours

actifs basés régions pour la détection des objets vidéos, ENST, Paris.

***The European COST 211 Group - Research on Redundancy Reduction Techniques and Content Analysis for Multimedia Services***

**COST 211 novembre 1999**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, Space-time segmentation of moving objects in a sequence of images using active contours, Munich, Autriche.

**COST 211 juin 2000**, S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, Detection and Tracking of moving objects using a new level set based method, Laboratoire I3S, Sophia Antipolis.

***Projet OSIAM (Outils pour la Segmentation d'Images Animées pour MPEG4/7) du RNRT (Réseau National de la Recherche en Télécommunications)***

**Projet OSIAM janvier 2000**, S.Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, Segmentation spatio-temporelle d'objets en mouvement dans une séquence d'images par contours actifs déformables pour la norme MPEG-4, ENST, Paris.

**Projet OSIAM juin 2000**, S.Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, Detection and tracking of moving objects using a new level set based method, Philips R&D, Paris.

**Projet OSIAM janvier 2001**, S.Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, Eulerian region-based active contours for segmentation of moving video objects, ENST, Paris.

**Projet OSIAM juin 2001**, S.Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert, A 3-Step Algorithm using Region-Based Active Contours for Video Objects Detection, ENST, Paris.



## RÉSUMÉ

L'objectif de cette thèse est l'élaboration de modèles de contours actifs basés régions pour la segmentation d'images et de vidéos. Nous proposons de segmenter les régions ou objets en minimisant une fonctionnelle composée d'intégrales de régions et d'intégrales de contours. Dans ce cadre de travail, les fonctions caractérisant les régions ou les contours sont appelées "descripteurs". La recherche du minimum se fait via la propagation d'un contour actif dit basé régions. L'équation d'évolution associée est calculée en utilisant les outils de dérivation de domaines. Par ailleurs, nous prenons en compte le cas des descripteurs dépendant de la région qui évoluent au cours de la propagation du contour. Nous montrons que cette dépendance induit des termes supplémentaires dans l'équation d'évolution.

Le cadre de travail développé est ensuite mis en œuvre pour des applications variées de segmentation. Tout d'abord, des descripteurs statistiques basés sur le déterminant de la matrice de covariance sont étudiés pour la segmentation du visage. L'estimation des paramètres statistiques se fait conjointement à la segmentation. Nous proposons ensuite des descripteurs statistiques utilisant une distance à un histogramme de référence. Enfin, la détection des objets en mouvement dans les séquences à caméra fixe et mobile est opérée via l'utilisation hiérarchique de descripteurs basés mouvement et de descripteurs spatiaux.

**Mots clés :** Segmentation, régions et contours actifs, minimisation, dérivation de domaines, équations aux dérivées partielles, ensembles de niveaux, séquences vidéo, objets vidéo, détection du mouvement, segmentation du visage, histogrammes, déterminant de la matrice de covariance.

## ABSTRACT

The general issue of our work is the elaboration of region-based active contours models for image and video segmentation. We propose to segment regions or objects by minimizing a general functional including domains and boundaries integrals. In this framework, the functions characterizing regions or boundaries are named "descriptors". The minimum is searched using the propagation of a region-based active contour. The associated evolution equation is computed using shape derivation tools. Besides, we take into account the case of region-dependent descriptors that evolve during the curve propagation. We show that this variation induces supplementary terms in the evolution equation.

Region-based active contours models are then applied to various applications of segmentation. First, statistical descriptors based on the matrix covariance determinant are proposed for face segmentation. Statistical parameters estimation is performed jointly to the segmentation. Second, we propose statistical descriptors using a distance to a reference histogram. Endly, detection of moving objects in sequences acquired either by a static or a mobile camera is performed using a hierarchical association of motion-based descriptors and spatial ones.

**Keywords :** Segmentation, active regions and contours, minimization, shape derivation, partial differential equations, Level sets, video sequences, video objects, motion detection, face segmentation, histograms, matrix covariance determinant.