HAL
open science

Diffusion multiple par des cibles élastiques immergées.Propagation d'ondes cohérentes et interactions résonantes.

Pierre-Yves Le Bas

To cite this version:

Pierre-Yves Le Bas. Diffusion multiple par des cibles élastiques immergées.Propagation d'ondes cohérentes et interactions résonantes.. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Havre, 2004. Français. NNT : . tel-00086985

HAL Id: tel-00086985

https://theses.hal.science/tel-00086985

Submitted on 20 Jul 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

de Pierre-Yves LE BAS

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DU HAVRE

Discipline ***:*** **Sciences pour l'ingénieur**

Spécialité **: Acoustique**

Diffusion multiple par des cibles élastiques immergées.

Propagation d'ondes cohérentes et interactions résonantes

Soutenue le 13 décembre 2004 devant le jury composé de :

M.	**C. Depollier**	**Professeur à l'Université du Maine, *Rapporteur, président***
Mme.	**A.C. Hladky-Hennion**	**Chargée de Recherche HDR, C.N.R.S., Lille, *Rapporteur***
M.	**J.M. Conoir**	**Directeur de Recherche C.N.R.S., Le Havre**
Mme.	**T. Deguin-Leblois**	**Maître de Conférences HDR à l'Université de Besançon**
M.	**A. Lhémery**	**Ingénieur-Chercheur HDR, CEA-Saclay**
Mme.	**F. Luppé**	**Professeur à l'Université du Havre**

Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Electronique

U.M.R. C.N.R.S. 6068

Université du Havre

Résumé :

L'objectif de ce travail est la caractérisation de la diffusion acoustique par un milieu fluide contenant des diffuseurs élastiques aléatoirement répartis. Cette étude se compose de trois parties. La première partie s'intéresse à un nombre restreint de diffuseurs. Elle a permis de mettre en évidence un phénomène de couplage résonant entre des diffuseurs cylindriques proches se manifestant par une démultiplication des fréquences de résonances associées à l'onde A (onde de Scholte-Stoneley). Ces démultiplications ont été validées expérimentalement. La seconde partie présente deux théories de milieu effectif : celle de Waterman et Truell et celle de Fikioris et Waterman. La philosophie de ces deux théories est de déterminer l'onde moyenne résultant d'un moyennage sur les positions des diffuseurs. C'est cette onde que l'on appelle onde cohérente. Ces théories aboutissent au calcul d'un nombre d'onde effectif caractérisant l'onde cohérente. La différence essentielle entre ces deux théories réside dans la prise en compte de la taille des diffuseurs dans celle de Fikioris et Waterman. Les résultats des ces deux théories sont comparés entre eux et avec ceux obtenus par une troisième théorie, celle de Foldy. On note l'influence des fréquences de résonance d'un diffuseur seul sur le nombre d'onde effectif. Les trois théories donnent des résultats similaires pour de faibles concentrations. Dans le cas de fortes concentrations, les résultats issus de la théorie de Fikioris et Waterman se distinguent de ceux obtenus par les deux autres théories. Lorsque l'on considère une couche de milieu multi-diffuseur, on peut déterminer des coefficients de réflexion et de transmission s'exprimant formellement comme ceux d'une plaque fluide. Une analogie entre un milieu multi-diffuseur et un milieu fluide visqueux est possible. L'étude expérimentale menée sur un tel système montre un bon accord avec la théorie en ce qui concerne l'atténuation. La dernière partie de ce document consiste en l'étude d'un milieu multi-diffuseur dans lequel les diffuseurs sont anisotropes. Les diffuseurs du milieu présenté sont constitués de deux diffuseurs cylindriques suffisamment proches pour qu'il y ait couplage résonant. On peut alors déterminer un nombre d'onde effectif à l'aide de la théorie de Fikioris et Waterman, ainsi que des coefficient de réflexion et de transmission. Ces derniers se mettent sous la même forme que ceux associés à un milieu fictif de type fluide pour lequel la vitesse de phase et l'atténuation varieraient en fonction de la direction de propagation.

Mots-clés : diffusion acoustique, résonances, multi-diffusion, onde cohérente, anisotropie, milieu effectif.

Abstract:

This work deals with the acoustic scattering by a random distribution of cylindrical shells in a fluid. This study has three parts. The first one is about a limited number of shells. A resonant coupling is shown. This couple induces a split of the A-wave (Scholte-Stoneley wave) resonances. These splits are experimentally validated. The second part presents two effective media theories: Waterman and Truell's and the Fikioris and Waterman's one. They consist in the analytic averaging of the scattered field with the positions of shells. The average wave obtained is called the effective or coherent wave. The major difference between these theories is that Fikioris and Waterman take into account the size of the shells whereas, in the Waterman and Truell theory, the radius of the shells tends towards zero. These two theories allow the computation of an effective wave number. The influence of the resonances of one shell is seen on the effective phase velocity and on the effective attenuation. The results of these two theories are compared with the ones of a third theory: the one of Foldy. All these theories give similar results for weak concentrations, but, for strong concentrations, the results of the theory of Fikioris and Waterman differ from the others. The study of a slab-like region with randomly placed shells leads to the determination of a reflection and a transmission coefficient. These are similar to the ones obtained by considering a fluid slab. The analogy between the inhomogeneous medium and a viscous fluid is possible. The experimental study of such a medium gives good results for the effective attenuation. The last part deals with inhomogeneous media with the shells replaced by a set of two shells close enough to produce resonant coupling. In this case, an effective wave number is obtained with the Fikioris and Waterman theory. The reflection and transmission coefficients can be expressed as the ones of a fictitious fluid-like slab for which the phase velocity and the attenuation would be dependent of the direction of propagation.

Key-words: acoustic scattering, resonances, multiple scattering, coherent wave, anisotropy, effective media

Index

Table des figures ..... **iii**

Introduction **1**

1 Etude du caractère résonant d'un groupe de *N* tubes **3**

1.1 Rappel du comportement résonant d'un tube 3

1.2 Ensemble de N tubes 11

1.2.1 Principes généraux *11*

1.2.2 Résultats numériques : tubes alignés *13*

1.2.3 Résultats numériques : tubes non alignés *19*

1.3 Matrice S associée 35

1.4 Etude comparée des temps de calcul 38

1.5 Etude expérimentale des résonances d'un groupe de N tubes 39

1.5.1 Dispositif expérimental *40*

1.5.2 Tubes alignés *41*

1.5.3 Triangle équilatéral *44*

1.6 Conclusion 46

2 Détermination d'un milieu effectif pour des diffuseurs aléatoirement répartis **47**

2.1 Présentation de différentes méthodes 48

2.1.1 Théorie de Waterman et Truell *48*

2.1.2 Théorie de Fikioris et Waterman *57*

2.2 Valeur de la distance limite d'approche 61

2.3 Lien entre les différentes théories 63

2.4 Résultats numériques 66

2.4.1 Vitesse effective *66*

2.4.2 Atténuation effective et libre parcours moyen élastique *71*

2.5 Etude comparée des temps de calcul 79

2.6 Conclusion 80

3 Etude d'une couche de milieu multi-diffuseur avec la théorie de Fikioris et Waterman **82**

3.1 Théorie de Fikioris et Waterman pour une couche de milieu multi-diffuseur 82

3.2 Coefficients de réflexion et de transmission 88
3.3 Résultats numériques..... 94
3.3.1 Coefficients de réflexion et de transmission..... 94
3.3.2 Masse volumique effective..... 98
3.3.3 Coefficients à une interface plane, série de Debye 100
3.3.4 Incidence oblique..... 102
3.4 Conclusion..... 107
4 Etude expérimentale d'un milieu multi-diffuseur..... 108
4.1 Présentation du système étudié et du dispositif expérimental..... 108
4.2 Comparaison théorie-expérience..... 112
5 Etude d'un milieu multi-diffuseur anisotrope..... 123
5.1 Introduction de l'anisotropie dans la théorie de Fikioris et Waterman 123
5.2 Vitesses effectives, atténuation et angle d'incidence 126
5.3 Coefficients de réflexion et de transmission dans le cas anisotrope 134
Conclusion générale..... 144
Annexe 1, Matrice de diffusion..... 146
Annexe 2 Calcul des intégrales nécessaires aux théories de Waterman et Truell et Fikioris et Waterman 152
Annexe 3 : Egalités entre D_n et D_{-n}..... 155
Bibliographie..... 157

Table des figures

figure 1-1, présentation des notations utilisées pour la diffusion par une cible 4
figure 1-2 module de la fonction de forme en champ lointain pour un tube de rapport r_{ab}=0,9 en fonction de la fréquence réduite *ka*. 9
figure 1-3 : spectre de résonance pour un tube en aluminium de rapport de rayons r_{ab}=0,9 en fonction de la fréquence réduite *ka*. 10
figure 1-4 présentation des notations utilisées 11
figure 1-5, notations utilisées pour l'application de l'opérateur de Graf 12
figure 1-6, spectre de résonance pour un tube en aluminium de rapport de rayons r_{ab}=0,9 en fonction de la fréquence réduite *ka*. La flèche indique la résonance à laquelle nous allons nous intéresser par la suite. (zoom de la figure 1-3) 14
figure 1-7 évolution des fréquences de résonances en fonction de l'angle d'incidence pour trois tubes alignés en aluminium de rapport r_{ab}=0,9 espacés de 2,06*a*. La flèche indique la position fréquentielle de la résonance d'un tube seul qui a été démultipliée. 15
figure 1-8, schématisation des fréquences de résonance de la figure 1-7. 15
figure 1-9 spectre de résonance pour trois tubes de rapport de rayon r_{ab}=0,9, distants de 2,06*a* à un angle d'incidence de 60°..... 16
figure 1-10 évolution des fréquences de résonances en fonction de l'écart entre les tubes pour trois tubes alignés en aluminium de rapport r_{ab}=0,9 pour un angle d'incidence de 20°. Les flèches indiquent les résonances d'un tube seul. 17
Figure 1-11 schématisation des fréquences de résonance de la figure 1-10 18
figure 1-12, repérage de l'angle d'incidence dans le cas du triangle. 19
figure 1-13, évolution des fréquences de résonances en fonction de l'angle d'incidence pour des tubes de rapport de rayons r_{ab}=0,93 placés aux sommets d'un triangle équilatéral avec un écartement entre tubes de 2,06*a*. Les flèches indiquent les résonances d'un tube seul. 20
figure 1-14, évolution des fréquences de résonance pour un triangle équilatéral en fonction de la taille du triangle pour un angle d'incidence de 20° pour des tubes de rapports de rayons r_{ab}=0,93. Les flèches indiquent les résonances d'un tube seul. 21
figure 1-15 Schématisation des fréquences de résonance de la figure 1-14..... 21

figure 1-16, évolution des fréquences de résonance pour un triangle équilatéral en fonction de la taille du triangle pour un angle d'incidence de 20° lorsque l'un des tubes de rapports de rayons r_{ab}=0,93 est remplacé par un diffuseur rigide. Les flèches indiquent les résonances d'un tube seul. 22
figure 1-17 schématisation des résonances de la figure 1-16 23
figure 1-18, évolution des fréquences de résonance pour un triangle équilatéral en fonction de la taille du triangle pour un angle d'incidence de 20° lorsque l'un des tubes de rapports de rayons r_{ab}=0,93 est remplacé par un diffuseur rigide. Les flèches indiquent les résonances d'un tube seul. 23
figure 1-19 schématisation des fréquences de résonance de la figure 1-18 24
figure 1-20, évolution des fréquences de résonance pour un triangle de diffuseurs rigides en fonction de la taille du triangle. 25
figure 1-21 diagramme d'Argand de la résonance supplémentaire pour trois tubes élastiques de rapport de rayon 0,93 en triangle équilatéral de côté 2,06*a* 26
figure 1-22, évolution des fréquences de résonances pour un carré en fonction de sa taille pour un angle d'incidence de 20° et des tubes de rapports de rayons r_{ab}=0,93. Les flèches indiquent les résonances d'un tube seul. 27
figure 1-23, dérivée d'abscisse curviligne pour trois tubes alignés de la fonction de forme (en jaune) et des quatre fonctions partielles pour un angle d'incidence de 60° avec β=2,06. 29
figure 1-24 fonctions de forme obtenus pour un réseau de 6 par 4 tubes (en haut) et 7 par 4 tubes (en bas) en fonction de la fréquence réduite *ka*. Le pas de chaque réseau est de 2,1*a* dans les deux dimensions. 30
figure 1-25, spectres de résonances obtenus pour un réseau de 6 par 4 tubes (en haut) et 7 par 4 tubes (en bas) en fonction de la fréquence réduite *ka*. Le pas de chaque réseau est de 2,1*a* dans les deux dimensions. La flèche indique la position de la résonance d'un tube seul. 31
figure 1-26 positions des centres des diffuseurs les positions sont normées par *a*, le rayon externe d'un diffuseur. 32
figure 1-27, spectre moyen obtenu à partir de la moyenne de 700 fonctions de forme liées à des variations aléatoires des positions de trois tubes de rapport de rayon r_{ab}=0,93. 33
figure 1-28 comparaison entre les spectres de résonances d'un cylindre en acier inoxydable (en magenta) et de deux cylindres identiques distants de 2,06*a* (en bleu). Les flèches indiquent les fréquences de résonances. 34

figure 1-29 temps de calcul en fonction de l'écart entre tubes pour 6 tubes en éclipse, l'unité de distance est le rayon d'un diffuseur, le temps est exprimé en minutes..... 38
figure 1-30 temps de calcul en fonction du nombre de tubes en éclipse pour un écart entre tubes de 2,2*a*. Le temps est exprimé en minutes. 39
figure 1-31 présentation du dispositif expérimental..... 40
figure 1-32. comparaison théorie (à gauche)-expérience (à droite) de l'évolution des fréquences de résonances en fonction de l'angle d'incidence pour trois tubes en aluminium alignés et équidistants de 2,14 fois leur rayon. La flèche indique le dédoublement secondaire de la coupe présentée figure 1-33 42
figure 1-33 comparaison théorie (en bleu)-expérience (en rouge) des spectres de résonances pour un angle d'incidence de 41° pour trois tubes en aluminium alignés et équidistants de 2,14 fois leur rayon. 43
figure 1-34 comparaison théorie (en rouge)-expérience (en bleu) des spectres de résonances pour trois tubes en aluminium en triangle de côtés 2,05 fois leur rayon avec un angle d'incidence de 20°. La flèche pointe la résonance supplémentaire..... 45
figure 2-1 représentation du milieu multi-diffuseur 48
figure 2-2 représentation des chemins d'intégrations pour le calcul de l'intégrale (2.22)..... 52
figure 2-3 représentation des chemins d'intégrations pour le calcul de l'intégrale (2.52)..... 58
figure 2-4, illustration de la contradiction entre une grande valeur de la distance limite d'approche et une grande concentration de diffuseurs avec n_0=2 diffuseurs/unité de surface et *b*= 2*a*, *b*=11*a* et *b*=12*a*. 61
figure 2-5 Evolution de la partie imaginaire du nombre d'onde effectif en fonction de la fréquence réduite *ka* dans le cas de cylindres avec une densité de 23000 cylindre/m^2 (*c*=0,07), et deux valeurs de la distance limite d'approche. *b=2a* en bleu foncé et b_{max}=*5,1a* en mauve. 62
figure 2-6 évolution de la vitesse de phase effective normée en fonction de la fréquence pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu). En haut, les diffuseurs sont des cylindres, en bas des tubes. La densité de diffuseurs est de 23000 diffuseurs/m^2 (c=0,07)..... 67
figure 2-7 évolution de la vitesse de phase effective normée en fonction de la concentration de cylindres pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu) pour une fréquence réduite de 4,4. 68

figure 2-8 évolution de la vitesse de phase effective normée en fonction de la fréquence réduite *ka* pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu). La concentration de cylindres est 0,25. 69
figure 2-9 évolution de la vitesse de phase effective normée en fonction de la concentration en tubes pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu clair et bleu foncé) pour une fréquence réduite de 4,4. 70
figure 2-10 évolution de l'atténuation effective normée en fonction de la fréquence pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu). En haut, les diffuseurs sont des cylindres, en bas des tubes. La densité de diffuseurs est de 23000 diffuseurs/m^2, *c*=0,07 72
figure 2-11 évolution du libre parcours moyen élastique en fonction de la fréquence pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu). En haut, les diffuseurs sont des cylindres, en bas des tubes. La densité de cylindres est de 23000 diffuseurs/m^2 74
figure 2-12 évolution de l'atténuation effective normée (en haut) et du libre parcours moyen élastique (en bas) en fonction de la densité de diffuseurs pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu). La fréquence réduite est de 4,4. 75
figure 2-13 évolution de l'atténuation effective normée en fonction de la fréquence pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu). La densité de cylindres est de 80000 diffuseurs/m^2. 77
figure 2-14 évolution de l'atténuation effective normée (en haut) et du libre parcours moyen élastique (en bas) en fonction de la densité de tubes pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (première solution en bleu clair, deuxième en bleu foncé). La fréquence est de 4,4. 78
figure 2-15, comparaison des temps de calculs nécessaires pour obtenir le nombre d'onde effectif avec les différentes théories pour un milieu constitué de cylindres avec une densité de 23 000 diffuseurs/m^2 (*c*=0,07) et une variation de la fréquence réduite de 10^{-3} à 10 par pas de $10^{-3.}$ 80
figure 3-1 présentation de la couche de milieu multi-diffuseur 83
figure 3-2 Evolution des modules des coefficients de réflexion (en bleu) et de transmission (en magenta) pour des cylindres (en haut) et des tubes (en bas) en fonction de la fréquence pour une densité de diffuseurs de 23000 diffuseurs/m^2 et une épaisseur de milieu multi-diffuseur de 12cm en incidence normale. 95

figure 3-3 Evolution du module du coefficient de réflexion pour des cylindres en fonction du produit fréquence-épaisseur divisé par la vitesse effective pour une densité de diffuseurs de 23000 diffuseurs/m^2 et une épaisseur de milieu multi-diffuseur de 12cm. 96
figure 3-4 Evolution des phases des coefficients de réflexion (à gauche) et de transmission (à droite) pour des cylindres (en haut) et des tubes (en bas) en fonction de la fréquence pour une densité de diffuseurs de 23000 diffuseurs/m^2 et une épaisseur de milieu multi-diffuseur de 12cm. 97
figure 3-5 Evolution des modules des masses volumiques effectives pour des cylindres (en haut) et des tubes (en bas) en fonction de la fréquence pour une densité de diffuseurs de 23000 diffuseurs/m^2. 99
figure 3-6 décomposition des coefficients de réflexion et de transmission en séries de Debye, présentation des trajets acoustiques considérés. 100
figure 3-7 comparaison entre les modules (lignes 1 et 3) et les phases (lignes 2 et 4) des coefficients de réflexion (lignes 1 et 2) et de transmission (lignes 3 et 4) en bleu et les premiers termes des séries de Debye correspondantes en magenta. 101
figure 3-8 représentation du chemin parcouru par l'onde transmise dans la plaque effective. 102
figure 3-9 évolution du module du coefficient de transmission lorsque les diffuseurs sont des cylindres (en haut) ou des tubes (en bas). La densité de diffuseurs est de 23000 m^{-2} (c=0,07), l'épaisseur de la plaque de 10mm. Comparaison de la valeur exacte (surface) avec l'approximation (3.65) (en pointillés). 103
figure 3-10 représentation des trajets des deux ondes contribuant à l'onde réfléchie..... 104
figure 3-11 évolution du module du coefficient de réflexion lorsque les diffuseurs sont des cylindres (en haut) ou des tubes (en bas). La densité de diffuseurs est de 23000 m^{-2} (c=0,07), l'épaisseur de la plaque de 10mm. Comparaison de la valeur exacte (couleurs) avec l'approximation (3.72) (lignes jaune). 106
figure 4-1 présentation de la cible constitué de cylindres aléatoirement répartis. 108
figure 4-2 vérification de l'uniformité de la répartition aléatoire des cylindres. Concentration de trous par subdivision de la grille. 109
figure 4-3 schéma de l'expérience 111
figure 4-4 temporel présentant une distorsion à son début, la ligne rouge est la ligne d'amplitude nulle. 112

figure 4-5 signaux temporels expérimentaux pour une réalisation du désordre (en haut) et moyenne sur 30 signaux (en bas) 113
figure 4-6 temporel moyen théorique pour une épaisseur de milieu multi-diffuseur de 12 cm. 114
figure 4-7 module de la transformée de Fourier du signal direct. 115
figure 4-8 Comparaison entre les modules du coefficient de transmission théorique (en rouge), expérimental (en bleu) 115
figure 4-9 Comparaison entre les atténuations théorique (en rouge), expérimentale (en bleu) pour 30 acquisitions 116
figure 4-10 Comparaison entre les atténuations théorique (en rouge), expérimentale (en bleu) pour 46 acquisitions 117
figure 4-11 phase déroulée du coefficient de transmission moyen. 119
figure 4-12 phase déroulée du coefficient de transmission moyen expérimental (en bleu), théorique (en noir) et une régression linéaire de la phase expérimentale (en rouge). 120
figure 4-13 en haut, comparaison entre la vitesse de phase théorique (en rouge) et la vitesse de phase expérimentale (en noir). En bas, comparaison entre la vitesse de phase théorique (en bleu) et la vitesse de phase déduite de la phase du coefficient de transmission théorique. (en magenta) 121
figure 5-1 représentation du milieu multi-diffuseur anisotrope 123
figure 5-2 détermination de la distance limite d'approche dans le cas d'un diffuseur constitué de 2 tubes 127
figure 5-3 présentation des différentes situations étudiées 127
figure 5-4 définition de l'angle γ 128
figure 5-5 évolution de la vitesse effective normée par la vitesse dans le fluide extérieur pour un milieu multi-diffuseur constitué de groupes de 2 tubes distants de 2,04a en fonction de la fréquence réduite pour différentes valeurs de $|\delta+\gamma|$: en bleu 90°, en jaune 45°, en magenta 0°. La densité des diffuseurs est de 11 500/m^2 (concentration de tubes c=0,07) 129
figure 5-6 évolution du libre parcours moyen élastique pour un milieu multi-diffuseur constitué de groupes de 2 tubes distants de 2,04a en fonction du nombre d'onde dans le milieu extérieur pour différentes valeurs de $|\delta+\gamma|$: en bleu 90°, en jaune 45°, en magenta 0°. La densité des diffuseurs est de 11 500/m^2(concentration de tubes c=0,07) 130

figure 5-7, évolution de la vitesse effective normée par la vitesse dans le milieu extérieur (en bleu, axe de gauche) et de le libre parcours moyen élastique (en magenta, axe de droite), en fonction de $|\gamma+\delta|$. La fréquence réduite est de 4,4. La densité des diffuseurs est de 11 500/m^2(concentration de tubes c=0,07)..... 131
figure 5-8, comparaison entre les vitesses effectives (en haut) et les libres parcours moyens (en bas) pour une densité de 23 000 tubes/m^2 (concentration de tubes c=0,07), lorsque les diffuseurs sont constitués de 2 tubes avec $|\gamma+\delta|$=0° (en magenta), $|\gamma+\delta|$=45° (en jaune), $|\gamma+\delta|$=90° (en bleu) et lorsque les diffuseurs sont des tubes seuls (en noir). . 132
figure 5-9 visualisation des sections des diffuseurs vues par l'onde cohérente en fonction de $|\gamma+\delta|$..... 133
figure 5-10, modules des coefficients de réflexion (en haut) et de transmission (en bas) pour α= 0° et γ=45° (en bleu foncé), α=45° et γ=0° (en magenta) 139
figure 5-11 modules des coefficients de réflexion (en haut) et de transmission (en bas) pour une couche de milieu multi-diffuseur constituée de 23 000 tubes/m^2 (concentration de tubes c=0,07) lorsque les diffuseurs sont des tubes seuls (en noir), deux tubes distants de 2,04a avec γ=0° (en magenta) et γ=45° (en jaune). Dans tous les cas, α=0°. 141
figure 5-12 modules des coefficients de réflexion pour une couche de milieu multi-diffuseur constituée de 23 000 tubes/m^2 (concentration de tubes c=0,07) lorsque les diffuseurs sont des tubes seuls (en noir), deux tubes distants de 2,04a avec γ=0° (en magenta) et γ=45° (en jaune). Dans tous les cas, α=0°. (zoom de la figure 5-11)..... 142
Figure 5-13 représentation symbolique de l'évolution de θ_{ji} lors du déplacement de O_i sur la droite d'équation x=0..... 152

Introduction

La propagation d'ondes acoustiques dans un milieu homogène est un phénomène bien connu. Les études actuelles, sur ce type de milieu, traitent principalement les difficultés liées à la géométrie des objets ou aux interfaces entre deux milieux. Cependant, beaucoup de matériaux ne sont pas homogènes ; qu'il s'agisse de matériaux naturels, comme les tissus biologiques ou les os, ou de matériaux artificiels, comme les composites ou les bétons. L'étude de la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu inhomogène contenant des diffuseurs est un problème délicat. Il se pose en effet plusieurs sortes de problèmes. Tout d'abord, il faut bien évidemment connaître le comportement acoustique des diffuseurs insérés dans le milieu. Ensuite, il faut connaître leur disposition. Enfin, il faut connaître les paramètres du milieu contenant ces diffuseurs. A tous ces problèmes, se rajoute la question de la faisabilité du passage d'une étude théorique à une étude numérique puis à une étude expérimentale. Nous allons étudier chacun de ces points dans ce manuscrit. Pour simplifier le problème, nous avons choisi de considérer des diffuseurs élastiques immergés dans un fluide. La caractérisation du milieu contenant les diffuseurs n'est donc plus un problème. La première idée devant un tel système consiste à utiliser les théories de diffusion multiple en se disant que même si l'on ne connaît pas la position exacte des diffuseurs, on peut toujours effectuer le calcul pour plusieurs dispositions et faire une moyenne, une moyenne expérimentale permettant ensuite de comparer les résultats. Malheureusement, nous allons voir que le calcul numérique associé à une telle théorie demande un temps et un espace mémoire prohibitifs. Cependant, l'étude effectuée sur un petit nombre de diffuseurs par cette approche va mettre en évidence la possibilité de phénomènes de couplages entre des diffuseurs proches [1-10]. En effet, lorsque des diffuseurs tubulaires sont proches les uns des autres, nous verrons qu'il se produit des dédoublements de résonances dans le domaine fréquentiel de l'onde A (ou onde de Scholte-Stoneley). De tels couplages ont déjà été étudiés dans des configurations particulières notamment par S. Lethuillier [1-4]. Nous étendrons cette étude à d'autres dispositions de diffuseurs afin de voir quelle peut être l'importance de tels phénomènes dans un milieu multi-diffuseur. Nous tenterons d'expliquer l'origine de tels couplages résonants. Nous montrerons également une validation expérimentale des principaux résultats obtenus sur ce couplage [7]. Pour étudier un milieu multi-diffuseur, nous allons être

amenés à utiliser des théories, dites de milieu effectif, qui consistent à déterminer les paramètres d'un milieu homogène équivalent au milieu multi-diffuseur. On peut distinguer deux familles parmi ces théories. La première consiste à déterminer la fonction de Green du milieu multi-diffuseur et à en déduire un nombre d'onde effectif [8, 9, 11]. Plusieurs méthodes comme l'independant scattering approximation (ISA), la coherent potential approximation (CPA), sont issues de cette approche. La deuxième famille recherche un nombre d'onde effectif ainsi que les champs acoustiques moyens diffusés. Dans ce cas, on cherche à caractériser l'onde cohérente, c'est-à-dire l'onde qui « résiste au désordre »[12, 13]. C'est elle que l'on trouvera si l'on effectue la moyenne de plusieurs mesures sur un milieu multi-diffuseur lorsque les diffuseurs ont bougé entre chaque mesure. Pour notre part, nous nous sommes intéressés à des théories de cette deuxième famille. Nous en présenterons deux très proches, celle de Waterman et Truell [23, 24] et celle de Fikioris et Waterman [25, 26]. Nous comparerons également nos résultats avec ceux issus de la théorie de Foldy [27- 30]. Ces trois théories sont basées sur un moyennage statistique des équations de diffusion multiple. Les différences sont liées aux approximations faites lors de la définition des différentes densités de probabilités. Dans tous les cas, la répartition des diffuseurs est considérée comme statistiquement uniforme. Nous verrons alors comment, avec la théorie de Fikioris et Waterman, on peut effectuer une analogie entre une plaque fluide visqueuse et un milieu constitué de diffuseurs immergés [31].

La dernière partie de ce document est consacrée à l'application de la théorie de Fikioris et Waterman au cas de diffuseurs anisotropes constitués, dans notre cas, de groupe de diffuseurs cylindriques similaires à ceux étudiés dans le premier chapitre. La plaque fluide visqueuse équivalente trouvée précédemment devient alors, elle aussi, anisotrope.

Pour résumer, la structure de ce document est la suivante : étude théorique et expérimentale d'ensembles restreints de diffuseurs cylindriques (chapitre 1); présentation des théories de Waterman et Truell et de Fikioris et Waterman, et comparaison des résultats de ces deux théories avec ceux issus de la théorie de Foldy (chapitre 2) ; étude d'une couche de milieu multi-diffuseur à l'aide de la théorie de Fikioris et Waterman (chapitre 3) ; étude expérimentale d'un milieu multi-diffuseur (chapitre 4) ; introduction de l'anisotropie dans la théorie de Fikioris et Waterman (chapitre 5). Les principales conclusions seront rassemblées dans une conclusion générale.

1 Etude du caractère résonant d'un groupe de *N* tubes

Dans ce chapitre, nous allons étudier le caractère résonant d'un groupe de tubes afin de voir les phénomènes de couplage pouvant intervenir entre plusieurs diffuseurs cylindriques proches. De telles interactions ont, en effet, déjà été mises en évidence par S. Lethuillier [4] dans le cas de tubes alignés observés en rétro-diffusion et insonés selon l'axe passant par les centres des tubes. Il a alors montré que les résonances de l'onde A d'un tube seul se démultiplient lorsque les tubes se rapprochent. La plupart des théories de milieu effectif sont basées sur des approximations telles que l'approximation quasi-cristalline [32] qui impose de négliger l'effet d'un diffuseur de référence; elles ne prennent donc pas en compte les couplages résonants entre diffuseurs ; aussi, nous nous proposons d'intégrer de tels couplages en remplaçant chaque diffuseur par un groupe de diffuseurs cylindriques. Ce chapitre est consacré à l'étude théorique de tels groupes. Dans un premier temps, nous rappellerons les ondes se propageant à la surface et dans un diffuseur cylindrique et en quoi leurs propriétés autorisent un couplage résonant. Nous retrouverons ensuite les résultats de S. Lethuillier [1-4] que nous généraliserons dans un troisième temps à des configurations et des angles d'incidence différents. Puis, nous nous appliquerons à définir la matrice de transition et la matrice de diffusion d'un groupe de diffuseurs cylindriques, éléments essentiels aux calculs de milieu effectif. Nous montrerons également, par des considérations sur les temps de calcul, l'impossibilité d'utiliser une technique similaire pour le calcul du champ diffusé par un grand nombre de diffuseurs. Nous terminerons ce chapitre par une validation expérimentale des principaux résultats.

1.1 Rappel du comportement résonant d'un tube

Avant d'étudier le comportement d'un ensemble de tubes, il est intéressant de rappeler les principaux résultats concernant une cible isolée. Dans la suite, ces cibles seront des tubes ou des cylindres infiniment longs. Nous noterons a, le rayon externe de ces cibles, et r_{ab}, le rapport rayon interne sur rayon externe dans le cas des tubes. La cavité des tubes est vide, la pression y est donc nulle. Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la réponse acoustique d'un diffuseur cylindrique insoné par une onde plane. Lorsqu'une onde incidente arrive sur une cible élastique, elle interagit avec cette dernière puis est diffusée dans toutes les directions. Le champ acoustique diffusé est caractéristique de la cible visée. Nous allons dans un premier temps écrire les ondes en présence et les conditions de continuité qu'elles doivent

satisfaire. A partir de là, nous allons pouvoir déterminer une expression de la réponse acoustique d'une cible cylindrique à une onde plane harmonique ainsi que son spectre de résonance.

La première onde à considérer est l'onde incidente. Elle est caractérisée par le potentiel des déplacements suivant :

$$\phi_{inc} = e^{i\vec{k}.\vec{r}} e^{-i\omega t} \tag{1.1}$$

avec $\vec{r}$, le point où l'onde est exprimée, ω, la pulsation et $k=\omega/c_0$, la norme du vecteur d'onde, avec c_0 la vitesse de propagation des ondes acoustique dans le fluide. Dans la suite, l'exponentielle temporelle, $e^{-i\omega t}$, sera omise dans les expressions puisqu'elle est commune à toutes les ondes. En coordonnées cylindriques, (1.1) peut encore s'écrire :

$$\phi_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(kr) e^{in(\theta-\alpha)} \tag{1.2}$$

avec $J_n(kr)$, la fonction de Bessel d'ordre n et d'argument kr ($r = \|\vec{r}\|$) et les angles α et θ étant définis sur la figure 1-1.

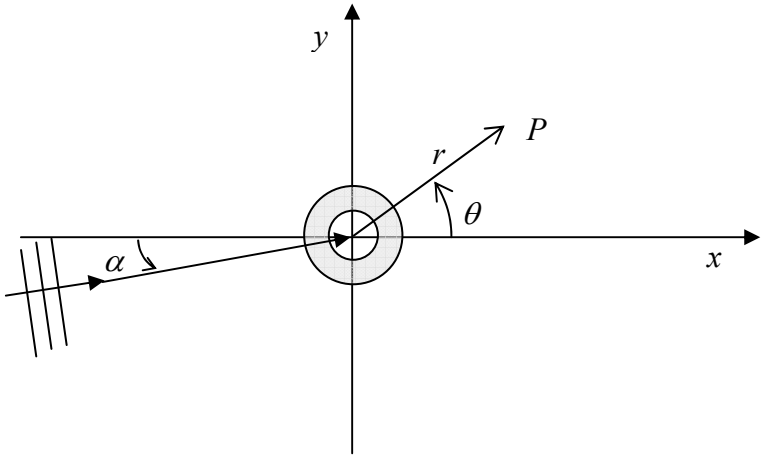


figure 1-1, présentation des notations utilisées pour la diffusion par une cible

Dans le solide coexistent deux ondes, une onde transversale et une onde longitudinale. Ces deux ondes dérivent respectivement d'un potentiel vecteur $\vec{\psi}$ et d'un potentiel scalaire φ_s définis par :

$$\varphi_s = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(c_n J_n(k_L r) + d_n N_n(k_L r) \right) e^{in\theta} \tag{1.3}$$

et

$$\psi_z = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(e_n J_n(k_T r) + f_n N_n(k_T r) \right) e^{ni\theta} \tag{1.4}$$

avec

$$k_L = \frac{\omega}{c_L} \qquad \text{et} \qquad k_T = \frac{\omega}{c_T} \tag{1.5}$$

où c_L est la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans le tube, c_T la vitesse de propagation des ondes transversales dans le tube et $N_n(kr)$ la fonction de Neumann d'ordre n et d'argument kr. Seule la composante selon z du potentiel vecteur est considérée car les cibles étant infiniment longues selon z, le problème est invariant dans cette direction. De plus, l'onde diffusée dans le milieu fluide environnant s'écrit, afin de respecter la condition de décroissance à l'infini :

$$\phi_{diff} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n b_n H_n^{(1)}(kr) e^{in(\theta-\alpha)} \tag{1.6}$$

avec $H_n^{(1)}$ la fonction de Hankel de première espèce. Afin de déterminer les coefficients $b_n, \ldots, fn$, nous allons utiliser les conditions de continuité sur les déplacements et les contraintes aux différentes interfaces. Les composantes radiales des déplacements et du tenseur des contraintes sont continues lors du passage des interfaces ainsi que les composantes tangentielles du tenseur des contraintes. En appliquant ces conditions, on obtient un système linéaire qui permet d'exprimer la pression diffusée dans le fluide. Nous allons alors déterminer les éléments de la matrice de transition, outil essentiel aux calculs de milieu effectif comme nous le verrons par la suite. Cette matrice se définit, avec les notations de Waterman [33], en considérant que l'onde diffusée s'écrit :

$$\phi_{diff} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_{nm}^{1} a_m H_n^{(1)}(kr) e^{in(\theta-\alpha)} \tag{1.7}$$

si l'onde incidente est de la forme :

$$\phi_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n J_n(kr) e^{in(\theta-\alpha)} \tag{1.8}$$

A partir de la relation (1.6), on aboutit alors aux éléments de la matrice de transition suivants pour un diffuseur cylindrique :

$$T^{1}{}_{nm} = b_n \delta_{nm}, \tag{1.9}$$

avec δ_{nm}, le symbole de Kronecker. Afin de présenter quelques particularités de cette matrice, nous allons étudier les systèmes matriciels à résoudre pour déterminer ces éléments. Dans le cas des tubes, ce système est donné sur la page suivante avec ρ_1 la masse volumique du fluide et ρ_2 celle du solide.

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\rho_1}{\rho_2} kaH_n^{(1)}{}'(ka) & k_L a J_n(k_L a) & k_L a N_n(k_L a) & nJ_n(k_L a) & nN_n(k_T a) \\
-\frac{\rho_1{}^2 (k_L a)^2}{c_0^2 \rho_2{}^2} H_n^{(1)}(k_L a) & \begin{matrix} -\frac{1}{c_L^2 - 2c_T^2} k_L a J_n(k_L a) \\ +\frac{2}{c_T^2}\begin{bmatrix} \left(n^2 - (k_L a)^2\right) J_n(k_L a) \\ -k_L a J_n{}'(k_L a) \end{bmatrix} \end{matrix} & \begin{matrix} -\frac{1}{c_L^2 - 2c_T^2} k_L a N_n(k_L a) \\ +\frac{2}{c_T^2}\begin{bmatrix} \left(n^2 - (k_L a)^2\right) N_n(k_L a) \\ -k_L a N_n{}'(k_L a) \end{bmatrix} \end{matrix} & \frac{2}{c_T^2} n \begin{pmatrix} k_T a J_n{}'(k_T a) \\ -J_n{}'(k_T a) \end{pmatrix} & \frac{2}{c_T^2} n \begin{pmatrix} k_T a N_n{}'(k_T a) \\ -N_n{}'(k_T a) \end{pmatrix} \\
0 & \begin{matrix} -\frac{1}{c_L^2 - 2c_T^2} k_L r_{ab} a J_n(k_L r_{ab} a) \\ +\frac{2}{c_T^2}\begin{bmatrix} \left(n^2 - (k_L r_{ab} a)^2\right) J_n(k_L r_{ab} a) \\ -k_L a J_n{}'(k_L r_{ab} a) \end{bmatrix} \end{matrix} & \begin{matrix} -\frac{1}{c_L^2 - 2c_T^2} k_L r_{ab} a N_n(k_L r_{ab} a) \\ +\frac{2}{c_T^2}\begin{bmatrix} \left(n^2 - (k_L r_{ab} a)^2\right) N_n(k_L r_{ab} a) \\ -k_L r_{ab} a N_n{}'(k_L r_{ab} a) \end{bmatrix} \end{matrix} & \frac{2}{c_T^2} n \begin{pmatrix} k_T r_{ab} a J_n{}'(k_T r_{ab} a) \\ -J_n{}'(k_T r_{ab} a) \end{pmatrix} & \frac{2}{c_T^2} n \begin{pmatrix} k_T r_{ab} a N_n{}'(k_T r_{ab} a) \\ -N_n{}'(k_T r_{ab} a) \end{pmatrix} \\
0 & 2n\left[1 - k_L a J_n{}'(k_L a)\right] & 2n\left[1 - k_L a N_n{}'(k_L a)\right] & \begin{matrix} \left((k_T a)^2 - n^2\right) J_n(k_T a) \\ +2J_n{}'(k_T a) \end{matrix} & \begin{matrix} \left((k_T a)^2 - n^2\right) N_n(k_T a) \\ +2N_n{}'(k_T a) \end{matrix} \\
0 & 2n\left[1 - k_L r_{ab} a J_n{}'(k_L r_{ab} a)\right] & 2n\left[1 - k_L r_{ab} a N_n{}'(k_L r_{ab} a)\right] & \begin{matrix} \left((k_T r_{ab} a)^2 - n^2\right) J_n(k_T r_{ab} a) \\ +2J_n{}'(k_T r_{ab} a) \end{matrix} & \begin{matrix} \left((k_T r_{ab} a)^2 - n^2\right) N_n(k_T r_{ab} a) \\ +2N_n{}'(k_T r_{ab} a) \end{matrix}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-\frac{\rho_1}{\rho_2} kaJ_n{}'(ka) \\
\frac{\rho_1{}^2}{c_0^2 \rho_2} (ka)^2 J_n(ka) \\
0 \\
0 \\
0
\end{pmatrix}
\tag{1.10}
$$

Lorsque les diffuseurs sont des cylindres, les coefficients f_n et d_n sont nuls car le champ acoustique ne peut prendre que des valeurs finies. Le système donnant les valeurs des coefficients est alors :

$$\begin{pmatrix} (k_T a)^2 H_n^{(1)}(ka) & \left((k_T a)^2 - 2n^2\right) J_n(k_L a) + 2k_L a J_n'(k_L a) & 2n\left(k_T a J_n'(k_T a) - J_n(k_T a)\right) \\ -\frac{\rho_1}{\rho_2} ka H_n^{(1)}{}'(ka) & -k_L a J_n'(k_L a) & n J_n(k_T a) \\ 0 & 2n\left(k_L a J_n'(k_{LT} a) - J_n(k_L a)\right) & \left((k_T a)^2 - 2n^2\right) J_n(k_T a) + 2k_T a J_n'(k_T a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(k_T a)^2 J_n(ka) \\ \frac{\rho_1}{\rho_2} ka J_n'(ka) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1.11)

Les éléments de la matrice de transition sont calculés par la méthode du déterminant de Cramer. On peut constater que chacun des éléments des matrices qui compose les systèmes (1.10) et (1.11) sont soit nuls, soit une combinaison linéaire de fonctions de Bessel au sens large. Exprimer ces systèmes pour l'ordre $-n$ au lieu de l'ordre n revient donc simplement à multiplier chacun des termes par $(-1)^n$. Les déterminants sont alors multipliés également par $(-1)^n$. Le rapport des déterminants utilisé dans la méthode de Cramer va entraîner une simplification de ce coefficient. On a donc la relation suivante :

$$T^1_{-n-n} = T^1_{nn}. \tag{1.12}$$

Nous allons maintenant chercher à exprimer la fonction de forme en champ lointain définie par :

$$f(\alpha,\theta) = \sqrt{\frac{r}{a}}\frac{p_{diff}}{p_{inc}} \tag{1.13}$$

avec p_{diff} la pression diffusée et p_{inc} la pression incidente, ces deux pressions étant exprimées en champ lointain. Pour cela, il faut se rappeler que la pression se déduit du potentiel des déplacements par la relation suivante, en tenant compte de la dépendance temporelle choisie :

$$p = \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\rho\omega^2\phi \tag{1.14}$$

avec ρ, la masse volumique. En utilisant alors le développement asymptotique de la fonction de Hankel dans la relation (1.6), on peut déterminer l'expression de la fonction de forme en champ lointain, il vient :

$$f(\alpha,\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi ka}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{in(\theta-\alpha)}. \tag{1.15}$$

La fonction de forme contient la réponse fréquentielle de la cible. Toutes les observations que nous ferons dans ce document sont faites en rétro-diffusion, c'est-à-dire avec $\theta=\alpha+\pi$. On sait, en effet, que c'est la position pour laquelle toutes les résonances sont visibles. Pour les applications numériques, les sommes infinies seront tronquées selon un critère qui sera le même pour toutes les sommes infinies de ce document. Nous considérons qu'une somme S_n a convergé à l'ordre N, si les termes S_{N-1} et S_{N-2} sont inférieurs 10^{-5} % de S_N. La figure 1-2 représente le module de la fonction de forme en fonction de la fréquence adimensionnelle ka, appelée fréquence réduite, pour un tube en aluminium avec les paramètres suivants :

r_{ab}= 0,9

masse volumique ρ=2790 kg/m^3

célérité des ondes longitudinales c_l=6120 m/s

célérité des ondes transversales c_t=3020 m/s

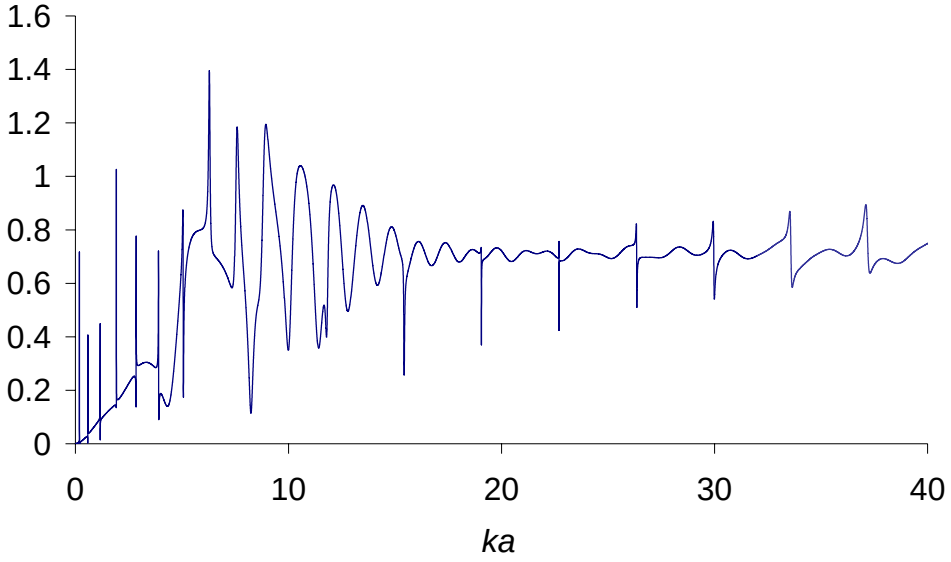


figure 1-2 module de la fonction de forme en champ lointain pour un tube de rapport r_{ab}=0,9 en fonction de la fréquence réduite *ka*.

Sur cette figure, on peut voir que la fonction de forme présente de nombreux accidents liés aux fréquences de résonance du tube. En effet, lorsque le tube est excité à l'une de ses fréquences de résonance, l'onde circonférentielle responsable de la résonance boucle en phase avec elle-même. L'énergie ne sera donc pas réémise dans le fluide environnant de la même façon qu'aux autres fréquences. Pour mettre en valeur le contenu fréquentiel de la fonction de forme, nous allons utiliser une méthode dérivée du diagramme d'Argand développée par S. Derrible *et al.*[34]. Le diagramme d'Argand est la représentation de la fonction de forme dans le plan complexe calculée avec un pas fréquentiel constant. Lorsque l'on se rapproche d'une fréquence de résonance, l'écart entre deux points consécutifs augmente jusqu'à ce que l'on atteigne le point correspondant à la fréquence de résonance, puis cet écart diminue. Les points forment alors un cercle dans le plan complexe dont le rayon représente la largeur fréquentielle de la résonance. Afin de représenter de façon plus simple les fréquences de résonances sur une grande gamme fréquentielle, nous allons tracer l'écart entre deux points consécutifs en fonction de la fréquence. C'est cette représentation que nous appellerons par la suite spectre de résonance. La figure 1-3 montre le spectre de résonance associé à la fonction de forme du tube précédent.

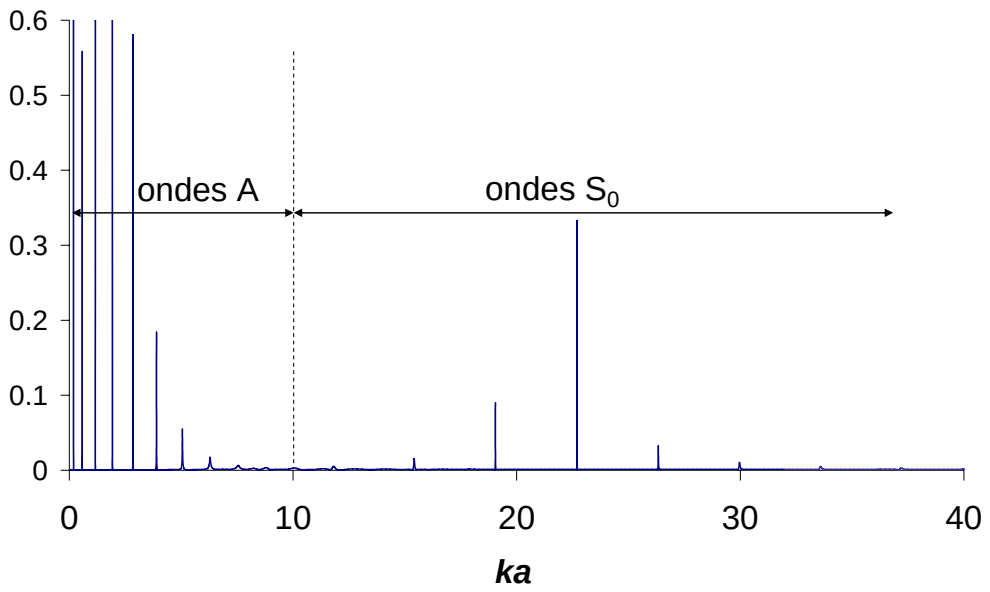


figure 1-3 : spectre de résonance pour un tube en aluminium de rapport de rayons r_{ab}=0,9 en fonction de la fréquence réduite *ka*.

Sur ce spectre, on voit différents pics dont les positions fréquentielles correspondent aux accidents de la fonction de forme de la figure 1-2. Les positions de ces pics donnent les fréquences de résonance [16-18,20-22]. On peut classer les résonances visibles sur la figure 1-3 en deux familles d'ondes [35-37] identifiée à partir de leur évolution lorsque le rayon du diffuseur tend vers l'infini. Dans ce cas, le diffuseur devient assimilable à une plaque, ce qui permet de rattacher les deux familles d'ondes observées à des familles d'ondes connues se propageant dans la plaque. La première, pour des valeurs de *ka* comprises entre 0 et 10, est composée d'ondes A, encore appelées ondes de Scholte-Stoneley. Ces ondes ont la particularité de se propager à la surface de la cible tout en conservant la majeure partie de leur énergie dans le milieu fluide extérieur. C'est cette propriété qui va nous intéresser par la suite. En effet, ce type d'onde va pouvoir provoquer un couplage entre plusieurs cibles.

La deuxième famille d'ondes est dans le domaine *ka* supérieur à 10 et est composée d'ondes S_0. Ces ondes sont essentiellement internes, elles n'interagissent donc que très peu avec les ondes se propageant sur d'autres cibles, même quand les cibles sont très proches. Nous nous concentrerons donc, par la suite, sur le domaine fréquentiel des ondes A. Dans le prochain paragraphe, nous allons présenter l'apparition d'un couplage résonant entre des cibles élastiques lorsque celles-ci sont proches l'une de l'autre.

1.2 Ensemble de N tubes

1.2.1 Principes généraux

Nous allons maintenant nous intéresser aux interactions possibles entre plusieurs diffuseurs proches [6]. Pour cela, nous considérons le système de la figure 1-4. *N* diffuseurs sont positionnés à des emplacements connus. Leurs centres sont repérés, en coordonnées cylindriques, par les couples (d_j,χ_j) dans le repère principal. Le point d'observation a pour coordonnées (r,θ) dans le repère principal et $(r_j,\ \theta_j)$, dans le repère associé au diffuseur *j*.

Si on considère une onde plane incidente sur l'ensemble des tubes avec un angle α par rapport à l'axe *Ox*, elle peut s'écrire, dans le repère principal, sous la forme :

$$\begin{aligned}\phi_{inc}^{0} &= e^{i\vec{k}.\vec{r}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n\left(kr\right) e^{in(\theta-\alpha)}\end{aligned} \tag{1.16}$$

Dans le repère associé au tube *j*, elle s'écrit :

$$\phi_{inc}^{j} = e^{ikd_j\cos\left(\chi_j-\alpha\right)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\alpha} J_n\left(kr_j\right) e^{in\theta_j} \tag{1.17}$$

avec les notations de la figure 1-4.

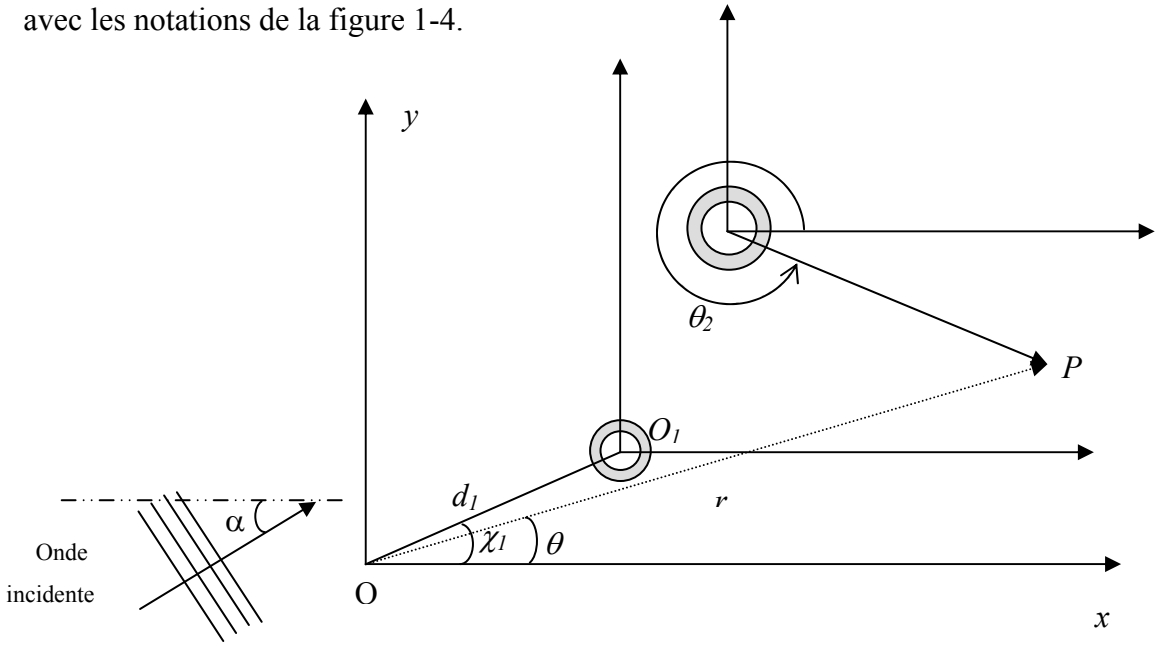


figure 1-4 présentation des notations utilisées

Pour calculer la réponse d'un groupe de tubes, il suffit d'additionner la réponse de chacun d'eux en tenant compte qu'ils sont insonés non seulement par l'onde incidente mais

aussi par les ondes diffusées par les autres cibles du groupe. Si on note l'onde diffusée par le diffuseur *j* par la relation suivante :

$$\phi_j = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m^j H_m^{(1)}\left(kr_j\right) e^{im\theta_j} , \tag{1.18}$$

on peut écrire que l'onde incidente sur la cible *j* est donnée par :

$$\varphi_j = e^{ikd_j \cos(\chi_j - \alpha)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\alpha} J_m\left(kr_j\right) e^{im\theta_j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^l H_n^{(1)}\left(kr_l\right) e^{in\theta_l} \tag{1.19}$$

ou encore,

$$\varphi_j = e^{ikd_j \cos(\chi_i - \alpha)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\alpha} J_m\left(kr_j\right) e^{im\theta_j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^l \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{nm}^{(lj)} J_m\left(kr_j\right) e^{im\theta_j} \tag{1.20}$$

avec

$$G_{nm}^{(jl)} = e^{i(n-m)\theta_{lj}} H_{n-m}^{(1)}\left(kd_{lj}\right), \tag{1.21}$$

l'opérateur de Graf [38] $G^{(jl)}$ permettant d'exprimer une onde diffusée par le cylindre *l* en une onde incidente sur le cylindre *j*. Les notations concernant cet opérateur sont données figure 1-5. Cette relation n'est valable que dans le cas $r_j<d_{jl}$, condition vérifiée ici, puisque nous nous intéressons aux conditions de continuité exprimées en $r_j=a<d_{jl}$.

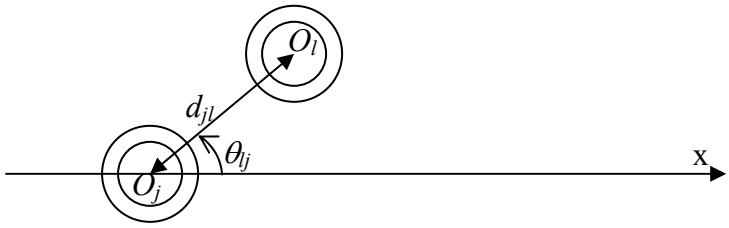


figure 1-5, notations utilisées pour l'application de l'opérateur de Graf

On suppose alors connue la matrice de transition T^j d'une cible définie par (1.9). La pression diffusée par la cible *j* peut donc s'écrire :

$$\phi_j = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[e^{ikd_j \cos(\chi_j - \alpha)} i^m e^{-im\alpha} + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^l G_{nm}^{(lj)} \right] T_{mm}^j H_m^{(1)}\left(kr_j\right) e^{im\theta_j} . \tag{1.22}$$

Cette relation associée à la relation (1.18) nous fournit un système permettant de trouver les coefficients C_m^j. Ce système est de taille infinie, il nous faudra donc le tronquer lors des applications numériques. Le critère de convergence choisi est le même que celui

présenté pour le calcul de la fonction de forme. L'onde diffusée par l'ensemble des tubes est la somme des ondes diffusées par chacun d'eux :

$$\phi_{diff} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m^j H_m^{(1)}\left(kr_j\right) e^{im\theta_j} \tag{1.23}$$

En utilisant le développement asymptotique des fonctions de Hankel pour de grands arguments, on peut écrire, en champ lointain par rapport à l'ensemble des N diffuseurs :

$$\phi_{diff} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^j \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kr - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} e^{-ikd_j \cos\left(\chi_j - \theta\right)} e^{in\theta} \tag{1.24}$$

La fonction de forme en champ lointain du système est alors définie par :

$$f(\alpha,\theta) = \sqrt{\frac{r}{a}} \frac{\phi_{diff}}{\phi_{inc}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^j \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} e^{-in\frac{\pi}{2}} e^{-ikd_j \cos\left(\chi_j - \theta\right)} e^{in\theta} , \tag{1.25}$$

la dépendance en α étant cachée dans les coefficients C_n^j. Nous allons maintenant étudier la fonction de forme en champ lointain, et plus particulièrement la dérivée d'abscisse curviligne qui lui correspond, c'est-à-dire son spectre de résonance, pour des ensembles de tubes de géométrie simple. Nous ferons nos observations en rétro-diffusion, en supposant que, comme pour les diffuseurs seuls, toutes les résonances sont visibles dans cette configuration.

1.2.2 Résultats numériques : tubes alignés

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le comportement de tubes proches les uns des autres. Nous allons voir que lorsque la distance entre les tubes est suffisamment petite, les résonances de chacun des tubes sont perturbées.

La première étude de ce genre a été menée au laboratoire par S. Lethuillier[1][2]. Il a porté son attention sur des ensembles de tubes alignés régulièrement espacés de βa dans une configuration dite en « éclipse », c'est-à-dire avec une incidence le long de l'axe passant par le centre des tubes. Dans ces conditions, il a montré que chaque résonance de l'onde A d'un tube seul se démultiplie lorsque les tubes sont proches, c'est-à-dire $\beta<3$, selon une règle simple : pour N tubes alignés, on observe N résonances à la place d'une seule pour une cible isolée. Aucun phénomène similaire n'a été observé dans la plage fréquentielle correspondant aux ondes S_0. L'explication trouvée à ce comportement est la suivante : les ondes A étant des ondes essentiellement externes, lorsque les tubes sont proches, les ondes A portées par chaque tube interfèrent. Quant au nombre de résonances observées, celui-ci est justifié par la présence de N-1 ondes dites locales et d'une onde dite globale. On appelle, dans ce cas, onde locale, une onde dont le parcours ne fait pas intervenir tous les tubes, et onde globale une onde dont

le parcours inclut toutes les cibles. En remplaçant certain tubes par des cylindres rigides afin de supprimer le couplage, S. Lethuillier a montré que les N-1 résonances locales sont les résonances du groupe de N-1 tubes décalées vers les basses fréquences en raison de la perturbation occasionnée par le $N^{ième}$ tube qui agit comme un masse ajoutée, et que l'onde globale est la résonance la plus haute fréquence. Ces constatations sur l'évolution des fréquences de résonance en fonction de la distance entre tubes sont essentielles. Elles permettent de comprendre pourquoi les modèles de milieux effectifs sont pris en défaut lorsque la densité de diffuseurs augmente. En effet, si la densité de diffuseurs augmente, la distance entre ces derniers diminue logiquement. Des phénomènes de couplage entre diffuseurs tels que ceux décrit par S. Lethuillier entrent alors en jeu. Or, si les théories de milieux effectifs prennent en compte les trajets multiples entre diffuseurs, la taille des diffuseurs ou leur répartition, aucune ne fait intervenir cette notion de couplage résonant. D'où l'idée de remplacer un diffuseur par un groupe de diffuseurs pour lequel le calcul du couplage résonant est effectué. La première étude a donc été de voir les conditions d'apparition d'un tel couplage lorsque l'on diversifie les angles d'incidence et les configurations géométriques des tubes.

Le premier ensemble de tubes étudié ici est, de nouveau, constitué de tubes alignés régulièrement espacés. Les deux paramètres principaux de cette étude sont la distance entre les tubes, βa, et l'angle d'incidence de l'onde plane, α. On s'intéresse à la résonance repérée par une flèche sur la figure suivante, qui est un zoom du spectre de résonances d'un tube seul.

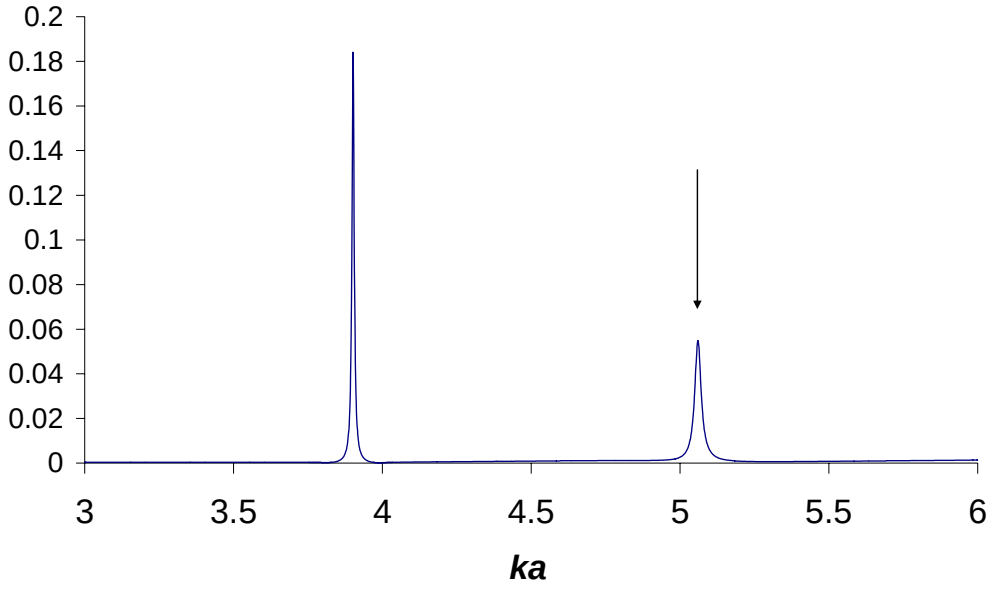


figure 1-6, spectre de résonance pour un tube en aluminium de rapport de rayons r_{ab}=0,9 en fonction de la fréquence réduite *ka*. La flèche indique la résonance à laquelle nous allons nous intéresser par la suite. (zoom de la figure 1-3)

Cette résonance, comme toutes les autres liées à l'onde A, a donné naissance, dans le cas des trois tubes alignés, à trois résonances, comme on peut le voir sur la figure suivante.

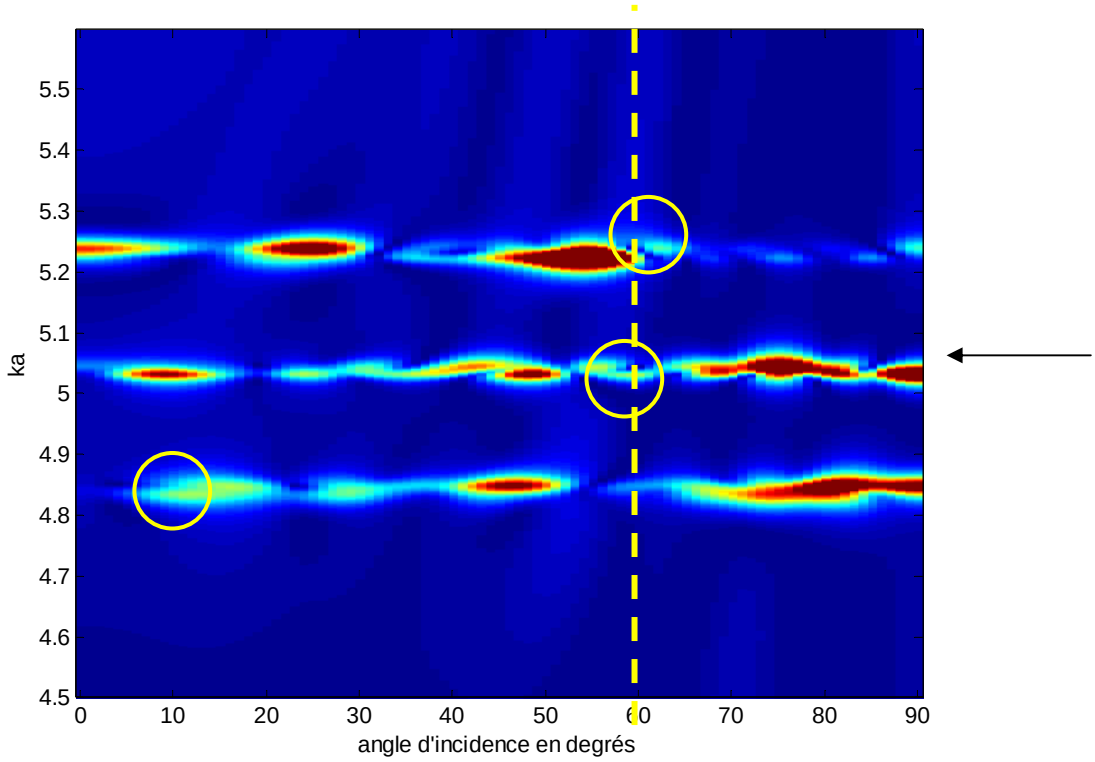


figure 1-7 évolution des fréquences de résonances en fonction de l'angle d'incidence pour trois tubes alignés en aluminium de rapport r_{ab}=0,9 espacés de 2,06*a*. La flèche indique la position fréquentielle de la résonance d'un tube seul qui a été démultipliée.

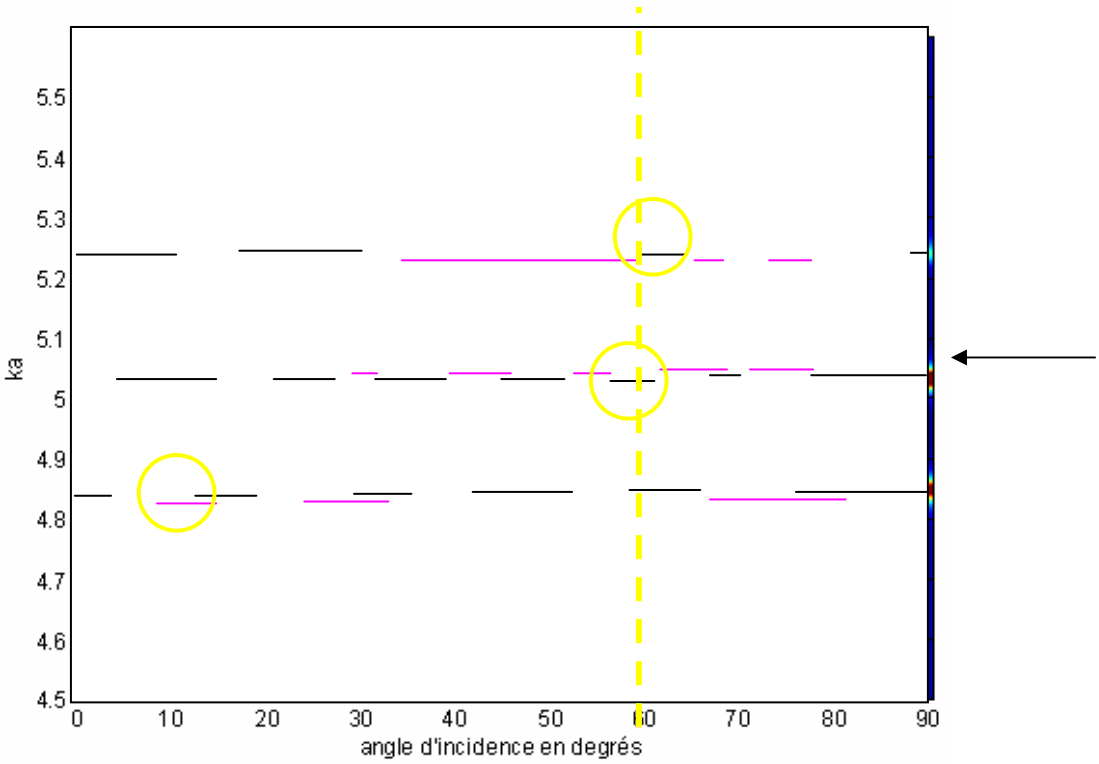


figure 1-8, schématisation des fréquences de résonance de la figure 1-7.

Sur la figure 1-7, l'amplitude des spectres est codée en couleurs, bleu pour une amplitude nulle et rouge pour les plus fortes amplitudes. Pour plus de facilité, l'évolution des fréquences de résonance a été schématisée figure 1-8. Pour un angle d'incidence nul, on constate, comme S. Lethuillier, trois résonances uniquement. Quand l'angle d'incidence augmente, on voit apparaître, pour certains angles, le dédoublement d'une (ou plusieurs) de ces résonances. Ce phénomène, que nous appellerons dédoublement secondaire, est particulièrement visible dans les zones entourées ainsi que sur la figure 1-9 qui est une coupe de la figure 1-7 pour un angle d'incidence de 60°.

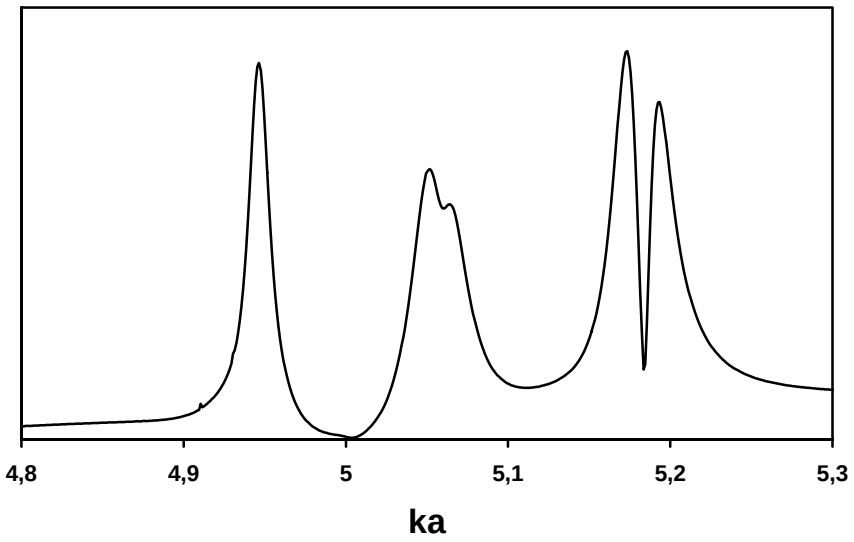


figure 1-9 spectre de résonance pour trois tubes de rapport de rayon r_{ab}=0,9, distants de 2,06*a* à un angle d'incidence de 60°.

Il est intéressant de se demander alors, quelles sont les causes de ces dédoublements secondaires. Une résonance est le résultat d'une onde qui parcourt un trajet fermé dont la longueur est multiple de sa longueur d'onde. Le dédoublement d'une résonance peut donc s'expliquer par la présence de deux chemins possibles pour une même onde. L'un ou l'autre des trajets étant favorisé par l'angle d'incidence. Ceci peut justifier le fait que les deux résonances d'un dédoublement secondaire ne sont que rarement présentes simultanément pour un angle donné. La zone angulaire de transition entre deux résonances montre que l'une augmente pendant que l'autre diminue, ce qui peut s'expliquer par le fait que l'onde passe d'un chemin emprunté majoritairement à l'autre.

S. Lethuillier avait énoncé une règle sur le nombre de résonances obtenues à partir d'une seule résonance de type A dans le cas d'une configuration en éclipse : *N* tubes provoquent une démultiplication en *N* résonances. En modifiant l'angle d'incidence, on s'aperçoit que chacune des *N* résonances peut, à son tour, se dédoubler. On a donc en fait *2N* résonances. Cette relation a été vérifiée numériquement pour des ensembles de 2 à 7 tubes. La validation expérimentale de ce résultat est présentée dans la dernière partie de ce chapitre.

Le paramètre important pour observer ces démultiplications de résonances est la distance entre les tubes. La figure 1-10 montre l'évolution de ces fréquences de résonances en fonction de l'écartement des tubes dans le cas de trois tubes.

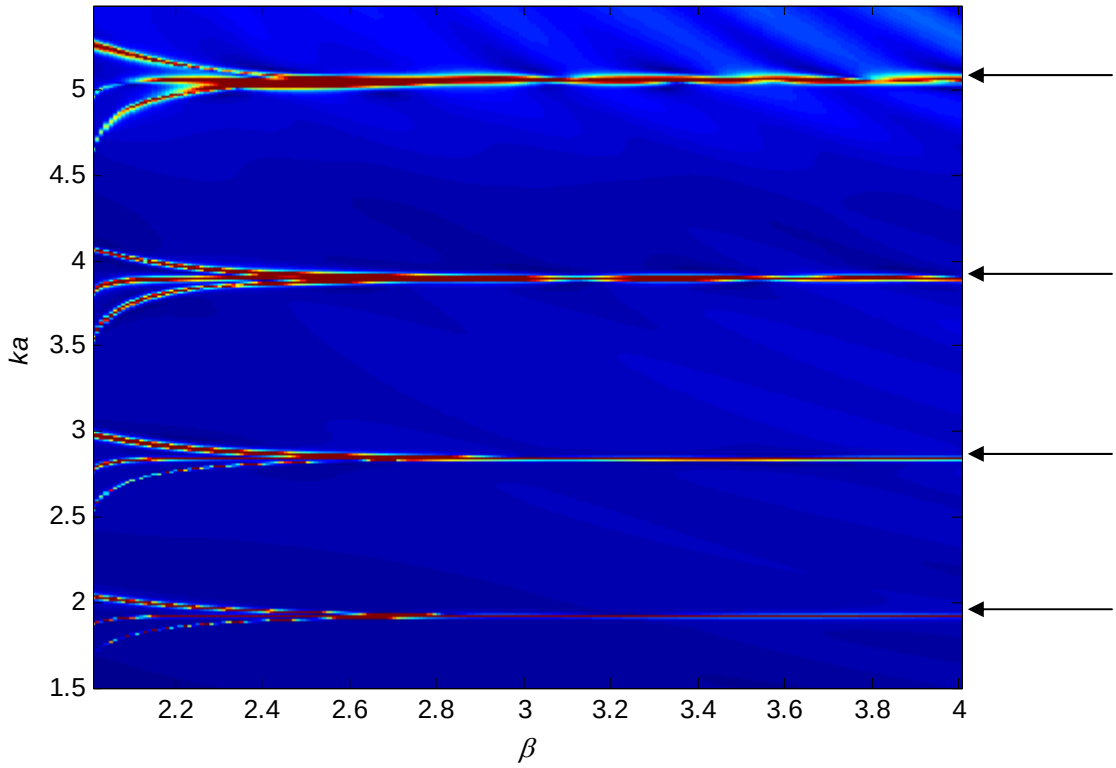


figure 1-10 évolution des fréquences de résonances en fonction de l'écart entre les tubes pour trois tubes alignés en aluminium de rapport r_{ab}=0,9 pour un angle d'incidence de 20°. Les flèches indiquent les résonances d'un tube seul.

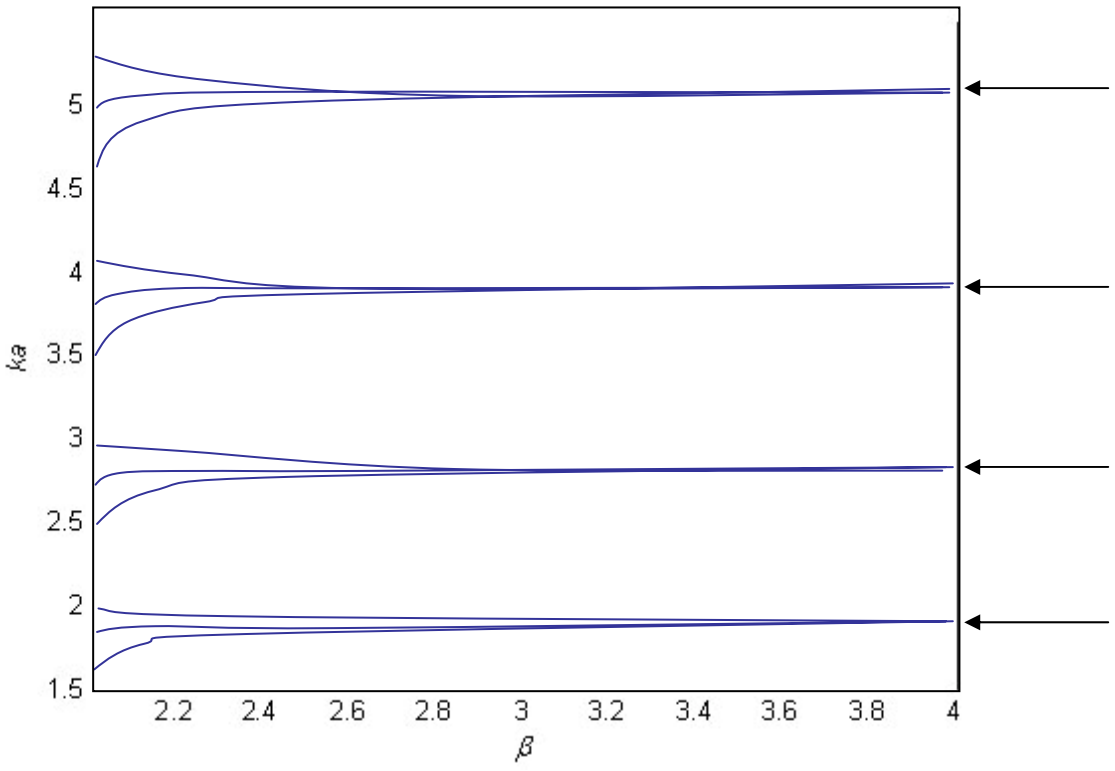


Figure 1-11 schématisation des fréquences de résonance de la figure 1-10

On peut voir sur cette figure que la position fréquentielle des résonances est très sensible à cet écartement et que l'on ne peut observer de démultiplications que pour de faibles distances entre tubes, c'est-à-dire pour $\beta<3$, ce qui correspond aux constatations de S. Lethuillier. Au-delà de cette limite, la séparation des résonances devient plus difficile. Pour de grandes valeurs de β, les résonances se rapprochent jusqu'à fusionner en la résonance de l'onde A d'un tube seul la plus proche.

Les résonances issues d'une même résonance d'un tube seul étant très proches, nous avons voulu étudier ce phénomène avec des tubes de rapport de rayons r_{ab} plus grand. En effet, on sait que plus r_{ab} augmente et plus les résonances ont un étalement fréquentiel faible. La différence n'est cependant pas suffisante pour obtenir une séparation franche lors des dédoublements secondaires ; c'est pourquoi les résultats ne sont pas présentés ici. Cependant, le domaine des ondes A sur un tube plus fin s'étend jusqu'à des fréquences réduites plus grandes. Ceci nous a permis d'observer un autre phénomène lors de l'étude d'autres configurations géométriques. C'est ce que nous allons présenter dans le paragraphe suivant.

1.2.3 Résultats numériques : tubes non alignés

Dans un milieu où les diffuseurs sont aléatoirement répartis, il est peu probable de trouver de grands alignements de diffuseurs. Aussi, nous allons étendre l'application de notre théorie à d'autres géométries. Pour cette étude, nous nous sommes limités à des géométries particulières telles que le triangle équilatéral ou le carré. On peut alors constater que les résonances liées à une onde A pour un tube seul se démultiplient dés que la distance entre les tubes devient suffisamment petite avec les mêmes ordres de grandeurs que dans le cas des tubes alignés. Nous considérons maintenant des tubes plus fins dont les paramètres sont les mêmes que les précédents à l'exception du rapport de rayons r_{ab} qui vaut désormais 0,93. En raison des symétries du triangle, la variation de l'angle d'incidence a été restreinte de 0 à 60°, 0° correspondant à une incidence sur un des sommets du triangle comme le montre la figure 1-12. La figure 1-13 présente l'évolution de ces fréquences de résonance en fonction de l'angle d'incidence dans le cas où les tubes sont aux sommets d'un triangle équilatéral de côté 2,06*a*.

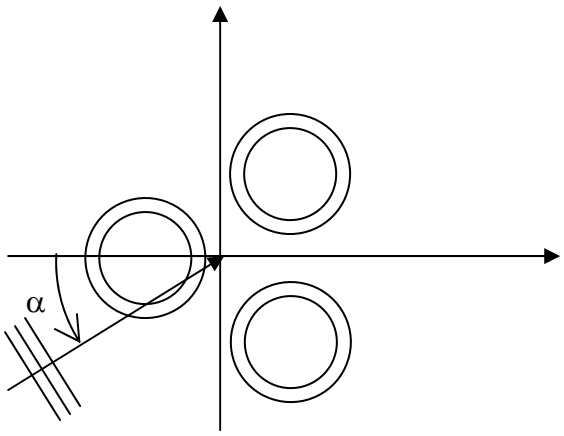


figure 1-12, repérage de l'angle d'incidence dans le cas du triangle.

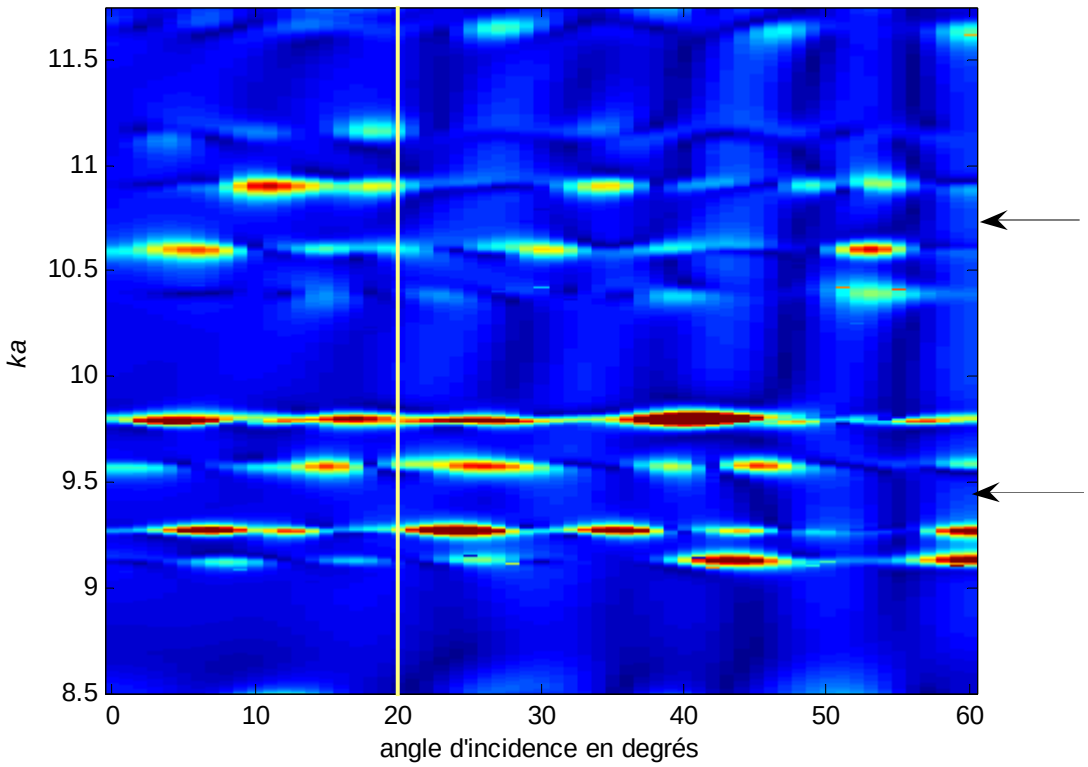


figure 1-13, évolution des fréquences de résonances en fonction de l'angle d'incidence pour des tubes de rapport de rayons r_{ab}=0,93 placés aux sommets d'un triangle équilatéral avec un écartement entre tubes de 2,06*a*. Les flèches indiquent les résonances d'un tube seul.

A la différence des tubes alignés, les résonances du triangle ne présentent pas de dédoublement lors de la variation de l'angle d'incidence mais seulement des variations d'amplitude. Les flèches indiquent les positions des fréquences de résonances d'un tube seul. A la vue de cette seule figure, il est difficile de définir de quelle résonance d'un tube seul est issue telle ou telle résonance de la configuration en triangle. C'est pourquoi la figure 1-14 présente l'évolution de ces fréquences de résonances en fonction de la taille du triangle, pour un angle d'incidence de 20°.

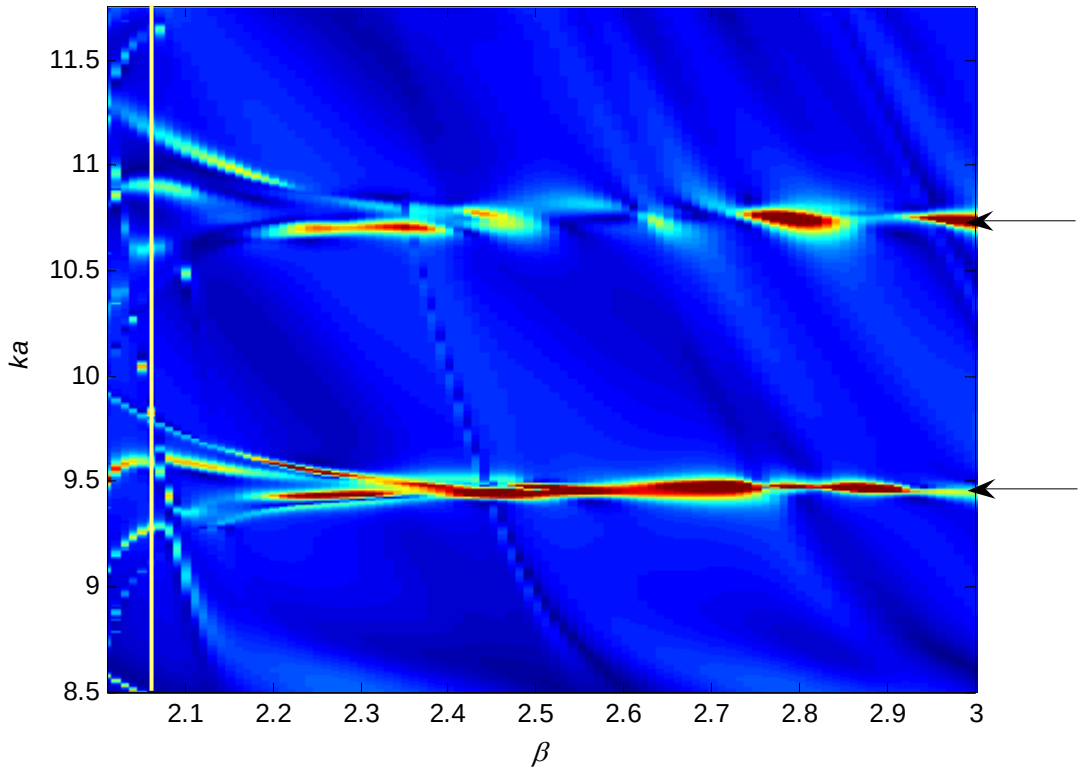


figure 1-14, évolution des fréquences de résonance pour un triangle équilatéral en fonction de la taille du triangle pour un angle d'incidence de 20° pour des tubes de rapports de rayons r_{ab}=0,93. Les flèches indiquent les résonances d'un tube seul.

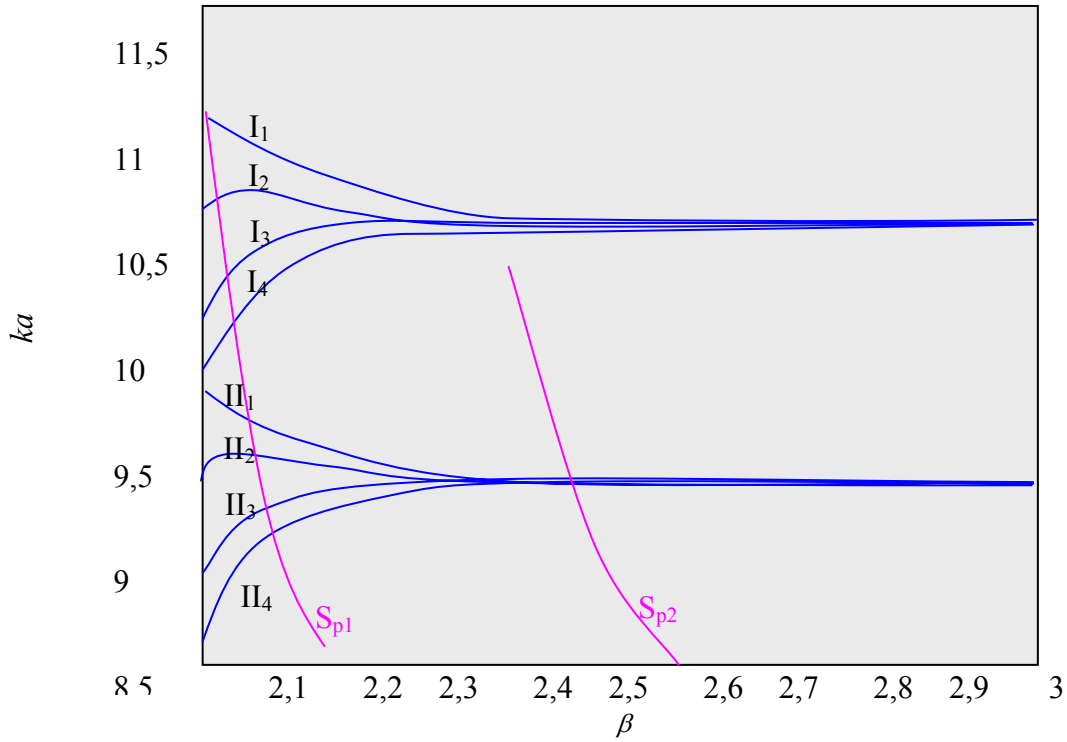


figure 1-15 Schématisation des fréquences de résonance de la figure 1-14

Pour faciliter l'analyse de la figure 1-14, nous avons schématisé l'évolution des fréquences de résonance sur la figure 1-15. Sur cette figure, on retrouve pour β=2,06 (ligne jaune), les résonances de la figure 1-13. Les résonances d'un diffuseur seul sont indiquées par des flèches. On peut voir que chaque résonance d'un diffuseur seul se divise en quatre nouvelles résonances lorsque la taille du triangle diminue. Pour chaque résonance d'un tube seul, on observe 2 résonances (I_3, I_4, II_3, II_4) qui se dirigent vers les basses fréquences, une qui se dirige vers les hautes fréquences (I_1, II_1) et une qui tend vers les hautes fréquences avant de revenir vers les basses fréquences (I_2, II_2). Mais on voit également qu'il existe une autre série de résonances (S_{p1}, S_{p2}) qui varient beaucoup plus rapidement que les autres. Dans la suite, nous appellerons ces résonances, résonances supplémentaires. Nous allons chercher à classer ces résonances en locales et globales en utilisant le même principe que S. Lethuillier : nous allons remplacer chacun des tubes par un diffuseur rigide, l'un après l'autre. L'onde A n'existant pas à la surface d'un diffuseur rigide, nous allons pouvoir déterminer quels diffuseurs sont impliqués dans telle ou telle résonance. La figure 1-18 montre les évolutions obtenues pour deux cas.

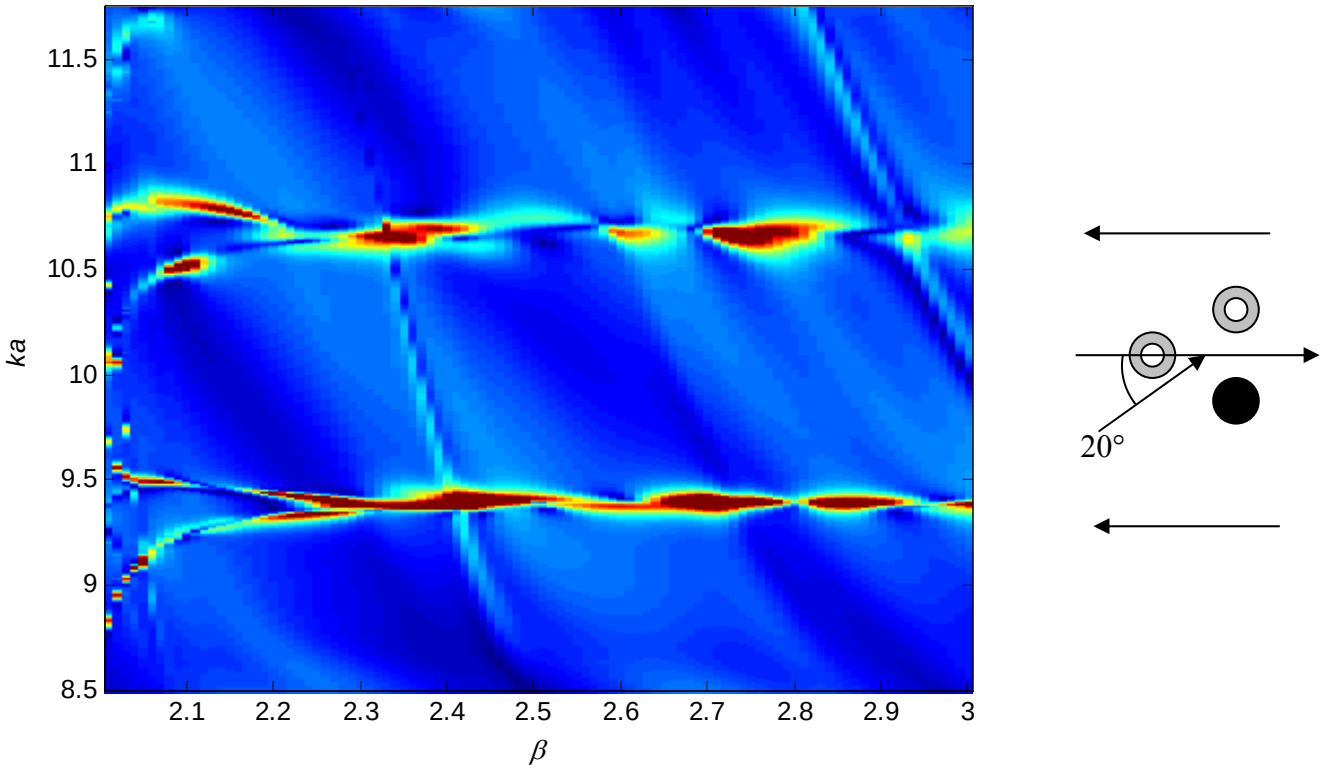


figure 1-16, évolution des fréquences de résonance pour un triangle équilatéral en fonction de la taille du triangle pour un angle d'incidence de 20° lorsque l'un des tubes de rapports de rayons r_{ab}=0,93 est remplacé par un diffuseur rigide. Les flèches indiquent les résonances d'un tube seul.

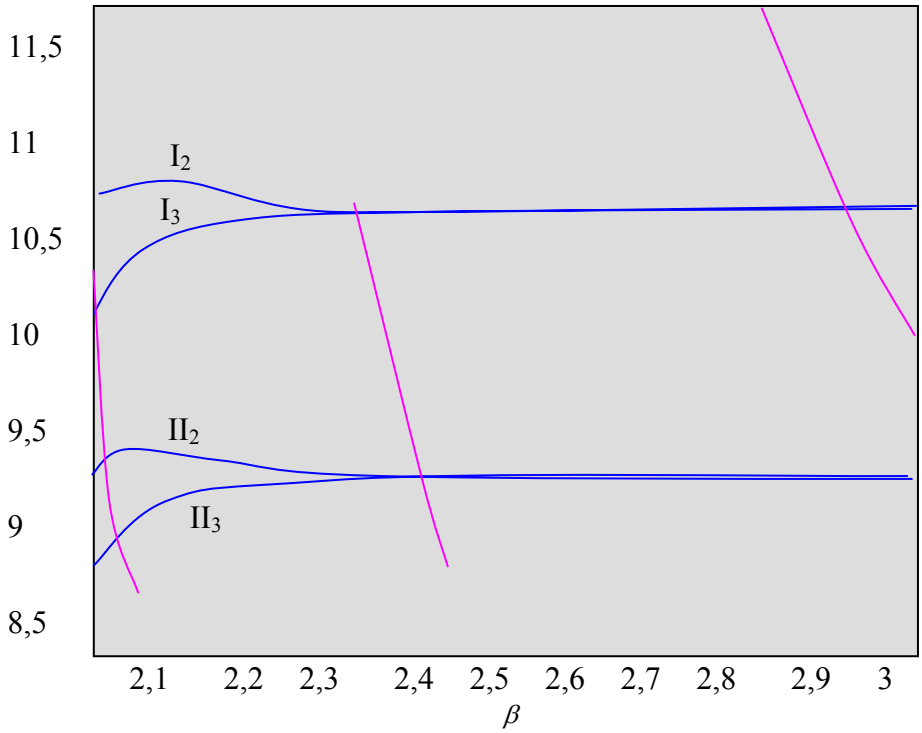


figure 1-17 schématisation des résonances de la figure 1-16

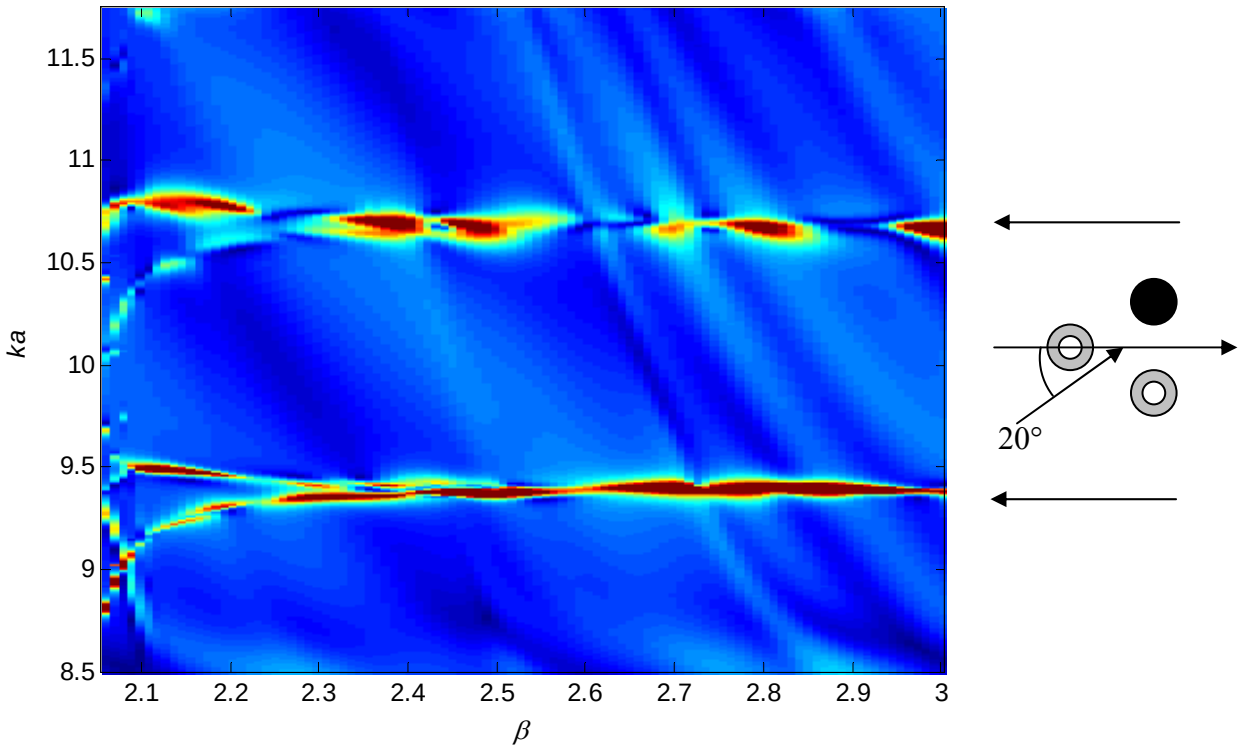


figure 1-18, évolution des fréquences de résonance pour un triangle équilatéral en fonction de la taille du triangle pour un angle d'incidence de 20° lorsque l'un des tubes de rapports de rayons r_{ab}=0,93 est remplacé par un diffuseur rigide. Les flèches indiquent les résonances d'un tube seul.

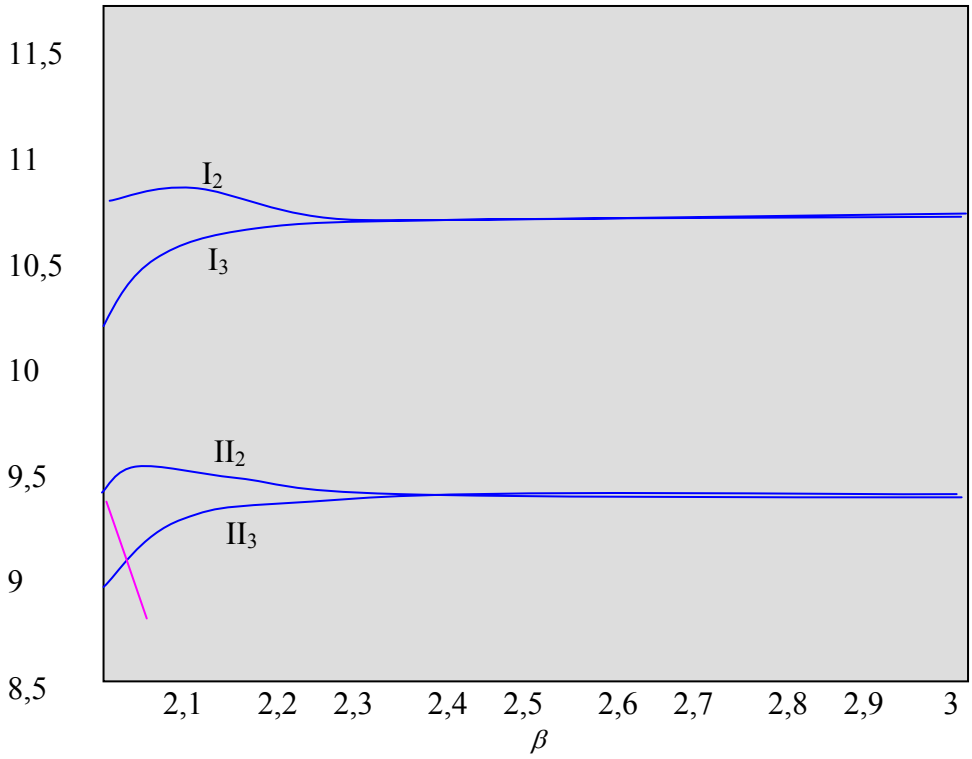


figure 1-19 schématisation des fréquences de résonance de la figure 1-18

Ce sont toujours les mêmes résonances que l'on retrouve. On peut alors en déduire que les résonances I_2, I_3, II_2 et II_3 sont des résonances locales liées à des ondes ne faisant intervenir que deux tubes. La résonance la plus haute fréquence et la plus basse fréquence de chaque groupe sont donc des ondes globales (I_1,I_4,II_1,II_4).

Il reste à déterminer l'origine des résonances supplémentaires S_{p1} et S_{p2}. La particularité la plus surprenante de ces résonances est que, lorsque tous les tubes du triangle sont remplacés par des diffuseurs rigides, il existe toujours une résonance qui évolue de façon similaire quand la taille du triangle augmente.

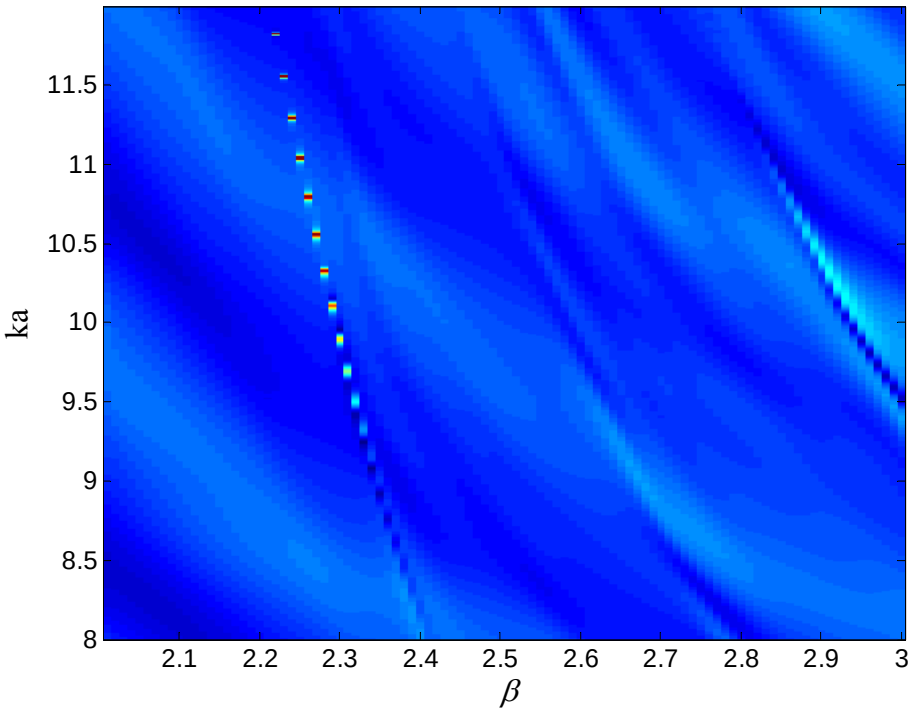


figure 1-20, évolution des fréquences de résonance pour un triangle de diffuseurs rigides en fonction de la taille du triangle.

La figure 1-20 présente les fréquences de résonance observées pour un triangle constitué de diffuseurs rigides en fonction de la taille du triangle. La présence des résonances supplémentaires dans ce cas montre qu'il ne s'agit pas de résonances liées à l'onde A puisque de telles ondes n'existent pas sur un diffuseur rigide. Cependant, il ne s'agit pas non plus de simples interférences géométriques. En effet, deux arguments viennent confirmer qu'il s'agit bien de résonances. Le premier est que leurs positions varient en fonction de la nature du diffuseur. Le second est le diagramme d'Argand de l'une d'elles présenté sur la figure 1-21.

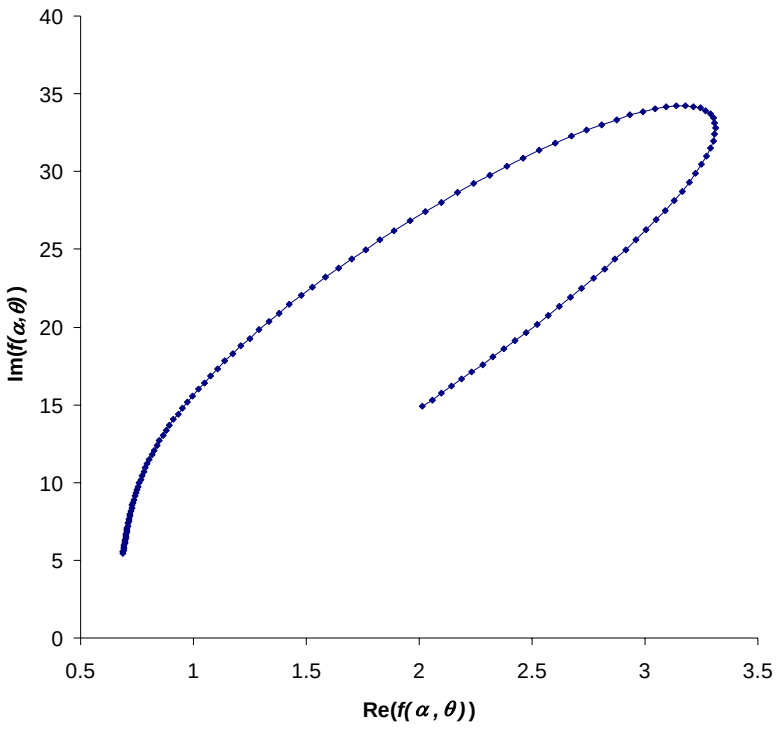


figure 1-21 diagramme d'Argand de la résonance supplémentaire pour trois tubes rigides en triangle équilatéral de côté 2,06*a*.

Sur cette figure, on voit très nettement le cercle formé dans le plan complexe par la fonction de forme ainsi que l'accélération au niveau de la résonance. La nature exacte de l'onde responsable d'une telle résonance n'a cependant pas pu être identifiée.

Ces fréquences de résonance supplémentaires ne sont pas l'apanage du triangle. En effet, des résonances ayant un comportement similaire sont présentes lorsque les diffuseurs sont placés aux sommets d'un carré. Si on regarde sur la figure 1-22 l'évolution des fréquences de résonances de quatre tubes de rapport de rayons égal à 0,93 disposés aux sommets d'un carré en fonction de la taille de ce carré, on observe une démultiplication des résonances d'un diffuseur seul en groupes de trois nouvelles résonances ainsi que la présence de résonances supplémentaires ayant le même comportement que celles du triangle. De plus, les résonances des groupes de trois se dédoublent en fonction de l'angle d'incidence comme dans le cas de tubes alignés.

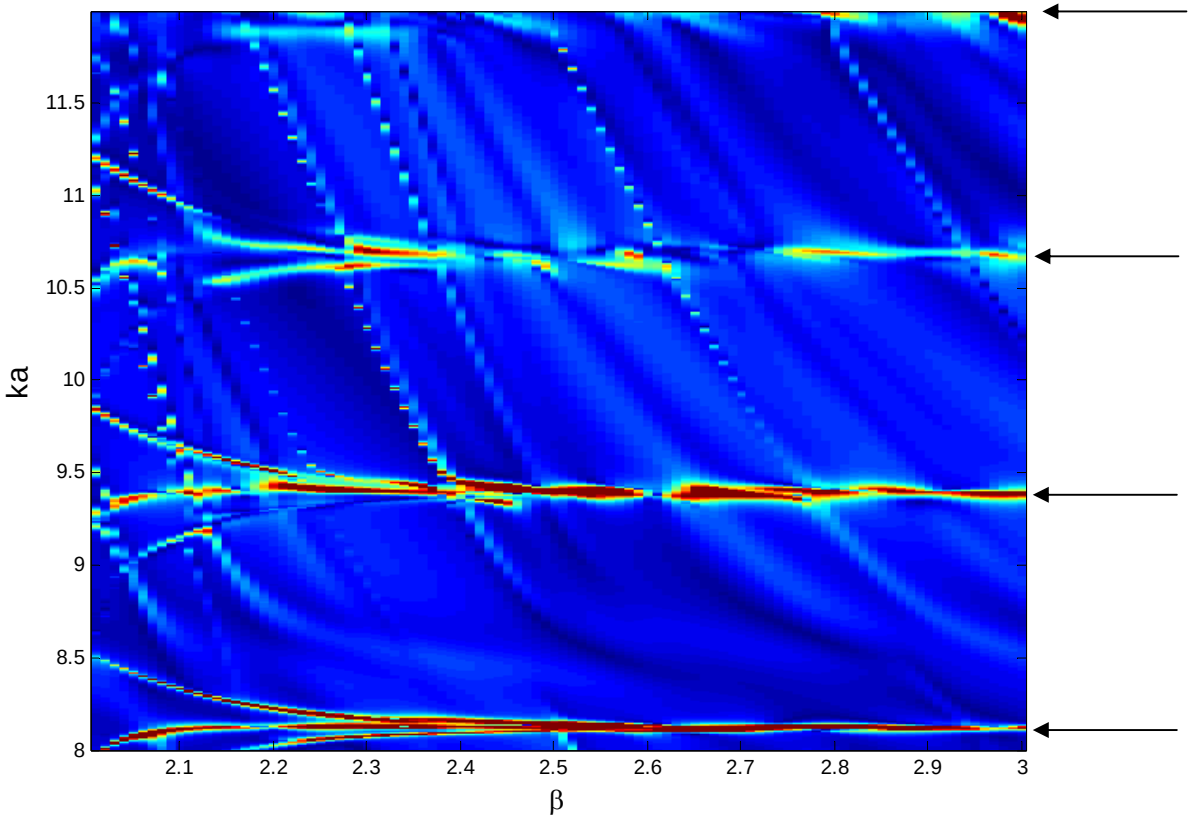


figure 1-22, évolution des fréquences de résonances pour un carré en fonction de sa taille pour un angle d'incidence de 20° et des tubes de rapports de rayons r_{ab}=0,93. Les flèches indiquent les résonances d'un tube seul.

Le triangle n'est donc pas la seule configuration faisant apparaître les résonances dites supplémentaires. Il est intéressant de noter que ces résonances ne sont présentes, dans les cas que nous avons observés, que lorsque les tubes sont disposés de façon à former une « cavité » entre eux. Les résonances pourraient donc être liées à des ondes piégées dans cette cavité, ce qui expliquerait leur variation rapide en fonction de la taille des groupes de diffuseurs. En effet, une petite augmentation du côté du triangle ou du carré provoque une augmentation plus grande de la taille de cette cavité.

Pour ce qui est des dédoublements secondaires, il semble qu'ils ne soient visibles que lorsque l'onde incidente se propage en dehors d'un des axes de symétrie du groupe de tubes. En effet, dans le cas de N tubes alignés, seules N résonances sont visibles en éclipse et lorsque l'angle d'incidence vaut 90°. Il peut donc être intéressant de faire intervenir des considérations sur les symétries du groupe de tubes pour essayer d'expliquer plus précisément l'évolution des résonances en fonction de l'angle d'incidence. On peut alors chercher à déterminer si la fonction de forme associée au groupe de tubes présente des propriétés liées

aux symétries de ce groupe. Une telle étude a été menée par Y. Decanini[39][40] lors d'une analyse des valeurs propres de la matrice de diffusion, matrice S, associée à un tel ensemble de cibles. En effet, les valeurs propres de cette matrice sont les fréquences de résonances complexes du système étudié. Il fait intervenir les notions de groupes de symétries qui permettent de classifier une représentation géométrique en fonction de ses invariances par symétrie axiale et/ou par rotation. Cette classification l'autorise à décomposer la fonction de forme en une somme de fonctions partielles liées aux représentations irréductibles du système, c'est-à-dire aux transformations les plus simples par lesquelles le système reste invariant. Nous avons donc décidé d'appliquer ces décompositions aux fonctions de forme de nos groupes de tubes. En effet, chaque fonction partielle est liée à une symétrie du groupe de tubes. On peut alors supposer que si une résonance est présente dans la dérivée d'abscisse curviligne de l'une des fonctions partielles, alors le chemin de l'onde associée à cette résonance respecte la symétrie liée à cette fonction partielle. De plus, le nombre de fonctions partielles pourrait être un indice pour savoir en combien de résonances chaque résonance de l'onde A d'un tube seul va se démultiplier.

Pour des systèmes qui comportent le nombre minimum de tubes pour appartenir à un groupe de symétrie, cela se révèle concluant sur ce dernier point. En effet, si l'on considère des tubes alignés, les symétries caractéristiques de cet ensemble sont :

- une rotation d'angle π
- deux symétries axiales d'axes perpendiculaires.
- la transformation identité

Dans ce cas, on a :

$$f(\alpha,\theta) = f^{A_1} + f^{A_2} + f^{B_1} + f^{B_2} \tag{1.26}$$

avec :

$$\begin{aligned}
f^{A_1} &= \frac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left[1+(-1)^p\right]\left(f_p + f_{-p}\right)e^{ip(\theta-\alpha)} \\
f^{A_2} &= \frac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left[1+(-1)^p\right]\left(f_p - f_{-p}\right)e^{ip(\theta-\alpha)} \\
f^{B_1} &= \frac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left[1-(-1)^p\right]\left(f_p - f_{-p}\right)e^{ip(\theta-\alpha)} \\
f^{B_2} &= \frac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left[1-(-1)^p\right]\left(f_p - f_{-p}\right)e^{ip(\theta-\alpha)}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

si on pose :

$$f(\alpha,\theta)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n^j\sqrt{\frac{2}{\pi k_{inc}a}}e^{-in\frac{\pi}{2}}e^{-ik_{inc}d_j\cos(\chi_j-\theta)}e^{in\theta}=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}f_p e^{ip\theta} \qquad (1.28)$$

Il y a donc 4 fonctions partielles. Le nombre minimum de tubes alignés est *N*=2. Dans ce cas, on a vu qu'on observait en tout 2*N*=4 résonances, ce qui correspond au nombre de fonctions partielles. De même, pour les groupes qui caractérisent les triangles équilatéraux et les carrés, le nombre de fonctions partielles correspond encore au nombre de résonances effectivement observées. Cependant, le groupe de symétrie qui caractérise deux tubes est le même que celui auquel appartiennent tous les groupes de tubes alignés. Le nombre de fonctions partielles étant lié au nombre de symétries et non au nombre d'éléments du système géométrique, il n'y a plus correspondance entre le nombre de ces fonctions et le nombre de résonances.

La figure 1-23 représente les dérivées d'abscisse curviligne des fonctions partielles dans le cas de trois tubes alignés pour un angle d'incidence de 60° dans ce cas, le spectre de résonance des trois tubes présente deux dédoublements secondaires, soit, au total, cinq résonances.

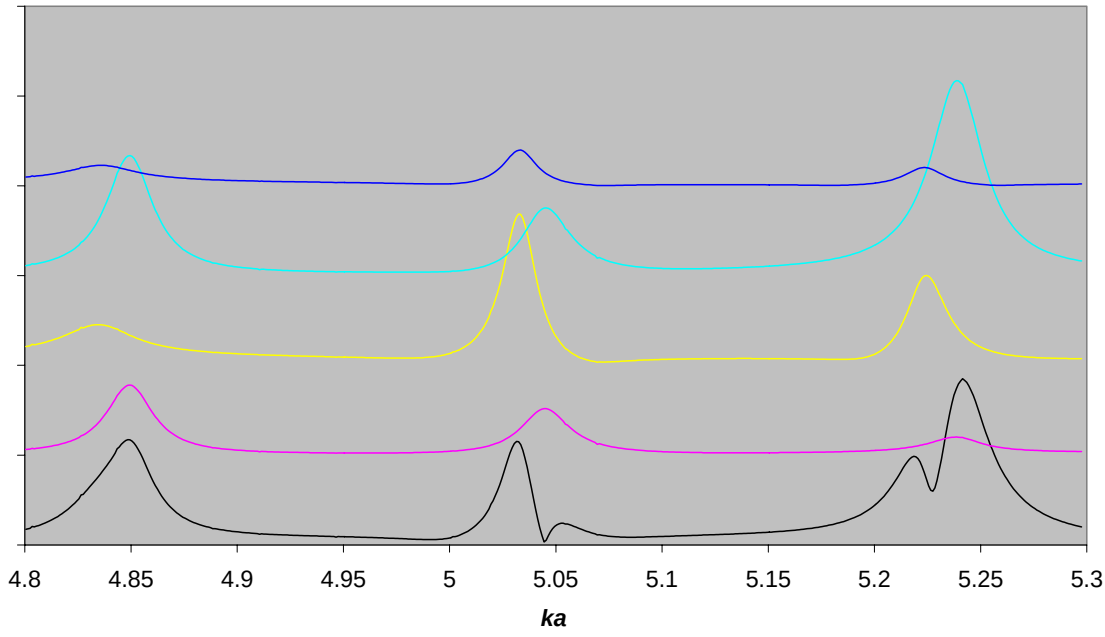


figure 1-23, dérivée d'abscisse curviligne pour trois tubes alignés de la fonction de forme (en noir) et des quatre fonctions partielles pour un angle d'incidence de 60° avec β=2,06.

Sur cette figure, on voit en particulier, qu'une même résonance peut être distribuée sur plusieurs fonctions partielles et donc qu'elle serait associée à une onde dont le parcours respecte les symétries liées à chacune de ces fonctions partielles offrant ainsi de multiples

possibilités de parcours. En conclusion, l'approche par les groupes de symétries ne permet donc pas d'expliquer facilement l'origine des résonances de systèmes composés de plusieurs cibles.

Notre objectif final est d'étudier un milieu contenant un grand nombre de diffuseurs. Nous allons donc maintenant regarder deux systèmes composés de 24 et 28 tubes afin de voir l'évolution des spectres de résonance en fonction du nombre de tubes pour déterminer s'il existe un nombre de tubes au-delà duquel les spectres ne sont plus modifiés par l'ajout de tubes supplémentaires. La figure 1-24 montre les modules des fonctions de forme obtenues pour 24 et 28 tubes de rapport r_{ab}=0,9 répartis respectivement selon une grille de 6 par 4 et 7 par 4, espacés de 2,1*a* lorsque l'onde incidente se propage parallèlement au grand côté de la grille.

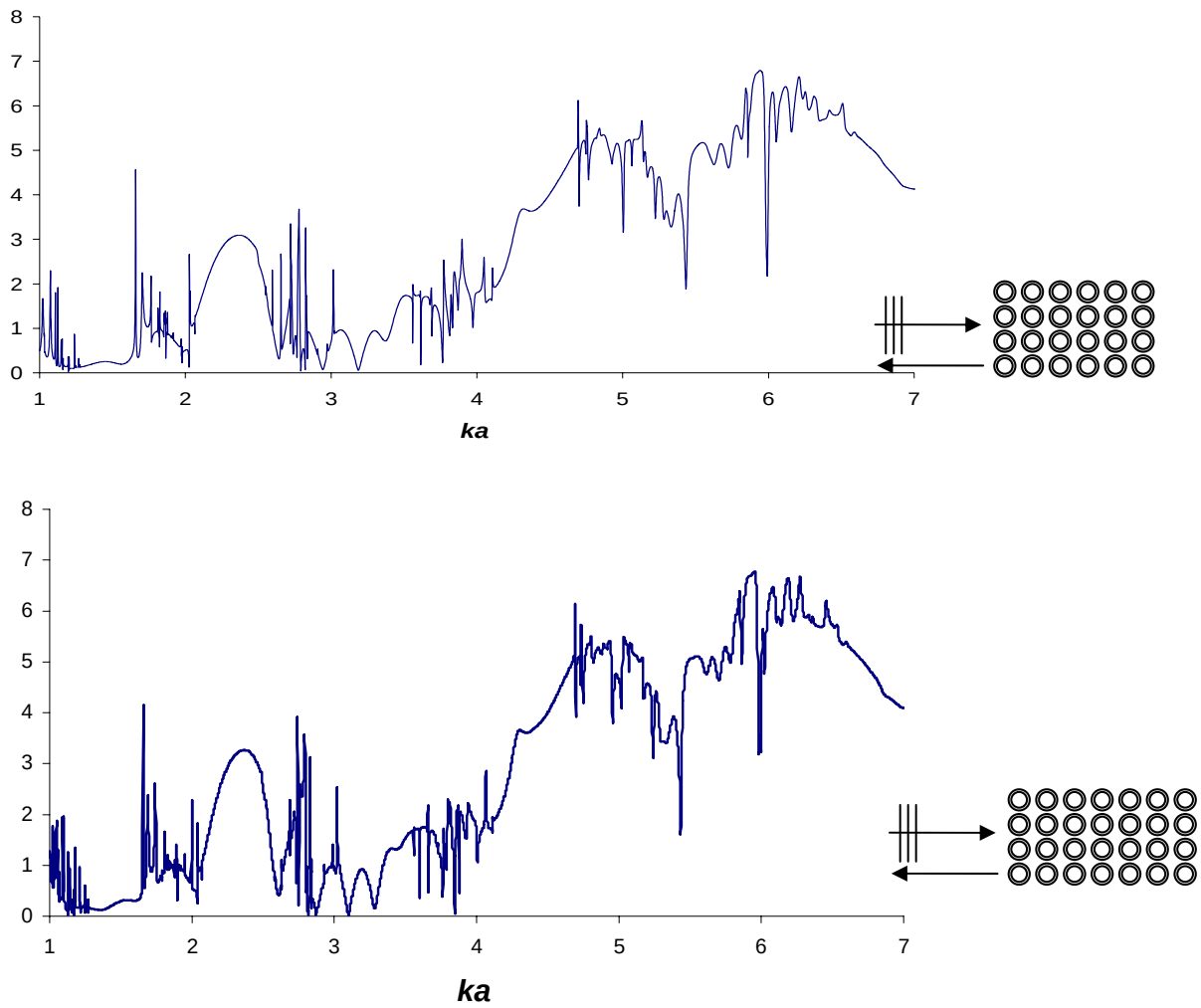


figure 1-24 fonctions de forme obtenus pour un réseau de 6 par 4 tubes (en haut) et 7 par 4 tubes (en bas) en fonction de la fréquence réduite *ka*. Le pas de chaque réseau est de 2,1*a* dans les deux dimensions.

Sur ces figures, on ne constate que peu de différences. On ne voit pas de zones de fortes réflexions correspondant aux bandes d'arrêt observées avec des réseaux infinis, comme dans les résultats présentés par C. Audoly [5], mais ces fonctions de formes sont très perturbées par la présence de nombreuses résonances. Afin de faire apparaître les différences, nous allons maintenant regarder les spectres de résonances liés aux fonctions de forme précédentes. Ils sont présentés figure 1-25.

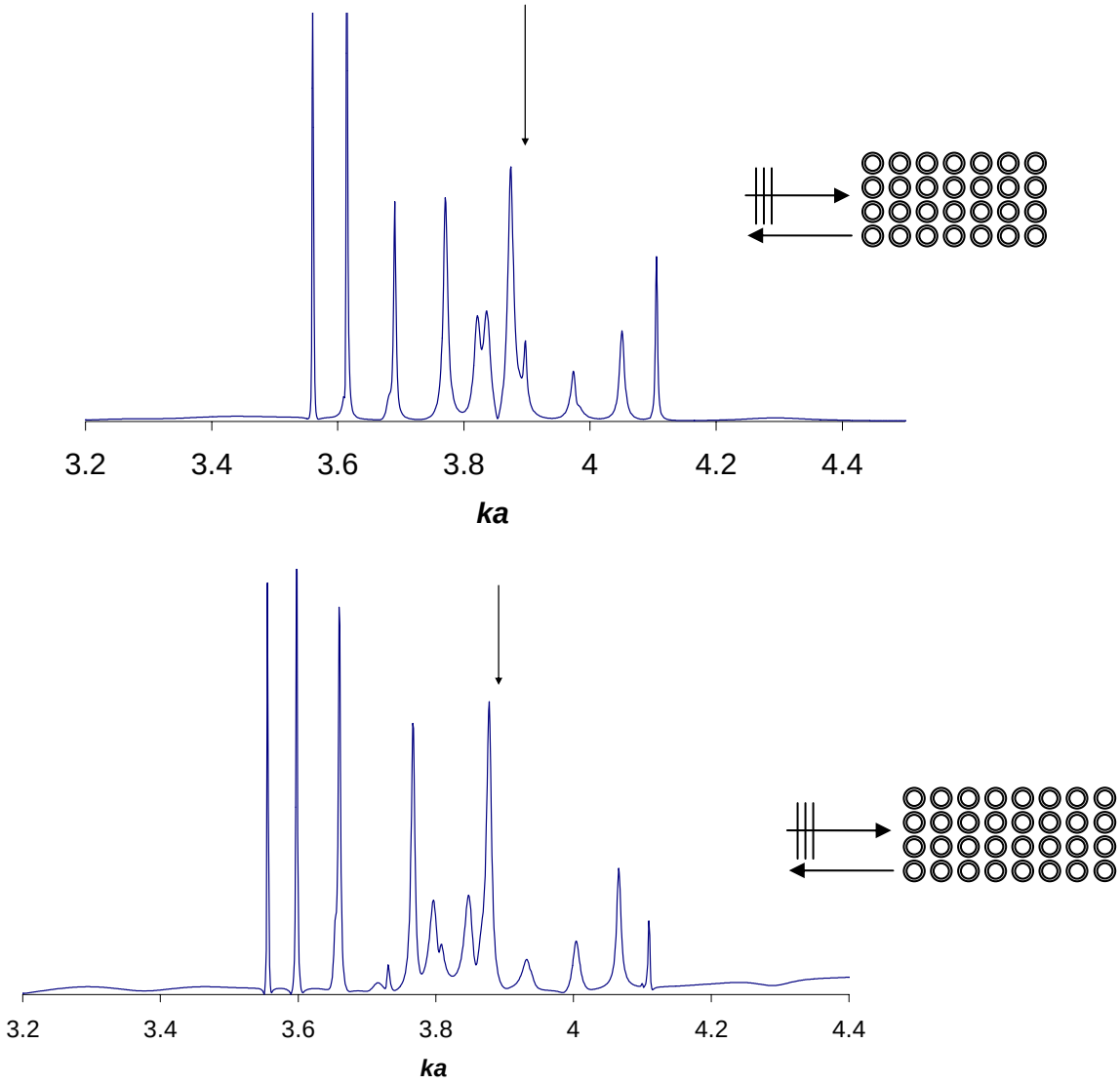


figure 1-25, spectres de résonances obtenus pour un réseau de 6 par 4 tubes (en haut) et 7 par 4 tubes (en bas) en fonction de la fréquence réduite *ka*. Le pas de chaque réseau est de 2,1*a* dans les deux dimensions. La flèche indique la position de la résonance d'un tube seul.

Sur cette figure, on voit que l'ajout d'une rangée supplémentaire perturbe le spectre de résonance en amplitude mais aussi en position. On dénombre 11 résonances sur le spectre concernant le système de 24 tubes et 15 sur celui lié aux 28 tubes. Ces résonances sont

réparties de part et d'autre de la fréquence de résonance d'un tube seul. Le couplage résonant fait donc intervenir l'ensemble des 24 ou 28 diffuseurs et l'on ne peut considérer un couplage faisant intervenir seulement des groupes de quelques tubes. Ceci montre toute la difficulté de traiter un milieu avec une grande densité de diffuseurs. Cependant, ici, les diffuseurs sont arrangés selon une grille précise, ce qui n'est pas le cas dans les milieux multi-diffuseur que nous allons étudier par la suite.

Nous allons maintenant regarder ce que donne un spectre moyen lorsque l'on fait varier trois diffuseurs autour d'une position donnée. Nous allons prendre comme référence une configuration en triangle telle qu'il se produise des démultiplications de résonances. Puis, nous allons faire varier aléatoirement les positions des trois tubes autour de leur position de référence. Après 700 configurations différentes, nous faisons la moyenne arithmétique des 700 fonctions de forme obtenues et nous calculons le spectre de cette fonction de forme moyenne. La figure 1-26 montre les différentes positions des diffuseurs et la figure 1-27 le spectre moyen obtenu.

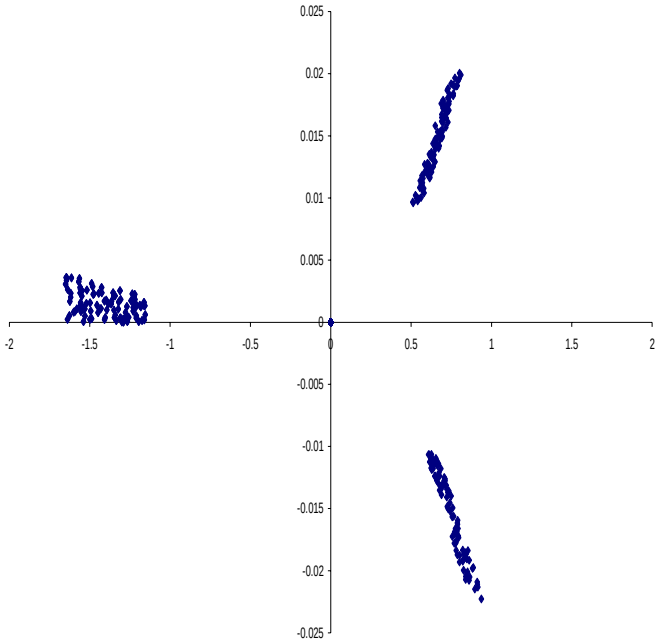


figure 1-26 positions des centres des diffuseurs les positions sont normées par *a*, le rayon externe d'un diffuseur.

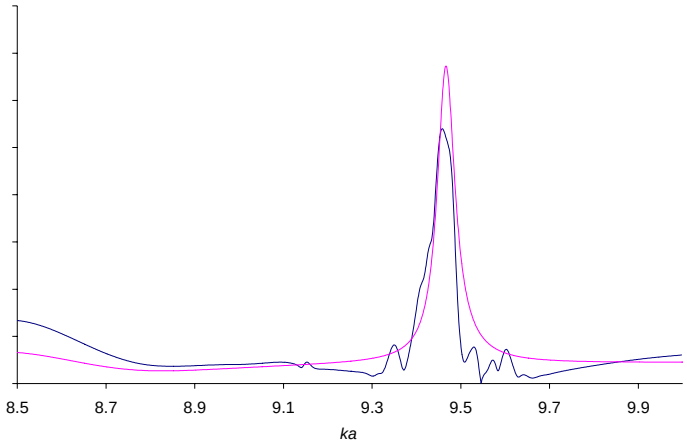


figure 1-27, spectre moyen obtenu à partir de la moyenne de 700 fonctions de forme liées à des variations aléatoires des positions de trois tubes de rapport de rayon r_{ab}=0,93 en magenta et spectre d'un tube seul en bleu.

Sur cette figure, on peut voir que seul le pic correspondant à la résonance d'un seul diffuseur apparaît clairement bien que l'on puisse discerner l'influence de certaines démultiplications. Ceci s'explique par la grande sensibilité des démultiplications en fonction des positions des diffuseurs. Il y a donc peu de chances que des pics liés à des démultiplications apparaissent au même endroit dans plusieurs spectres. Les démultiplications ayant lieu autour des fréquences de résonances d'un diffuseur seul, ce sont ces dernières qui ressortent du moyennage. Dans un milieu où les diffuseurs sont aléatoirement répartis, on ne devrait donc pas voir l'influence de couplages résonants après moyennage sur les différentes configurations possibles, sauf si l'on considère qu'il existe des agrégats de diffuseurs qui ont une disposition particulière comme nous le ferons dans le dernier chapitre.

Tous les résultats trouvés jusqu'à maintenant montrent les phénomènes de couplage qui existent lorsque des tubes sont proches les uns des autres. Ces phénomènes dépendent bien entendu de la nature des cibles. Nous n'avons présenté jusqu'alors que des couplages entre tubes. La figure 1-28 présente le spectre de résonances obtenu pour un cylindre en acier inoxydable, ainsi que celui obtenu pour deux cylindres identiques à une distance de βa=2,06a avec les paramètres suivants :

masse volumique ρ=7816 kg/m^3

célérité des ondes longitudinales c_l=6000 m/s

célérité des ondes transversales c_t=3100 m/s.

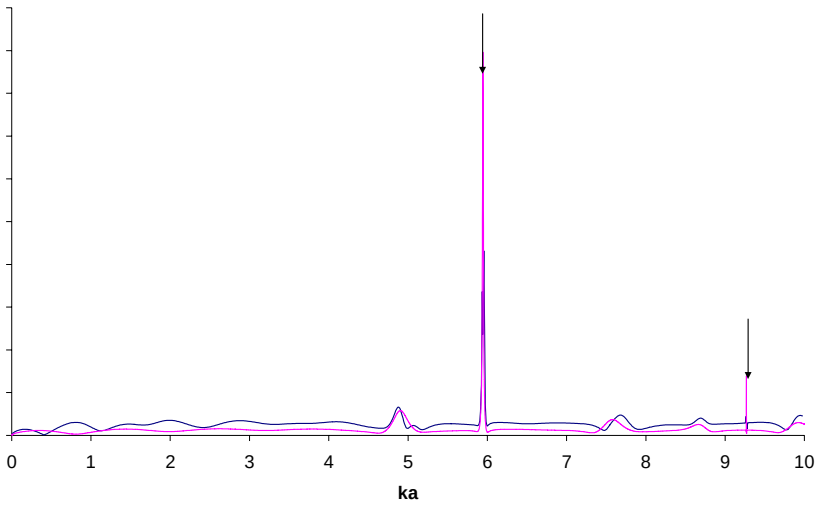


figure 1-28 comparaison entre les spectres de résonances d'un cylindre en acier inoxydable (en magenta) et de deux cylindres identiques distants de 2,06*a* (en bleu). Les flèches indiquent les fréquences de résonances.

Si l'on regarde le spectre de résonance d'un cylindre seul sur cette figure, on distingue deux pics fins repérés par des flèches et plusieurs pics plus larges. Si l'on observe les diagrammes d'Argand de chacun des pics de la figure 1-28, on s'aperçoit que les seuls pics correspondant à des résonances (c'est-à-dire ceux qui correspondent aux fréquences pour lesquelles la fonction de forme décrit un cercle dans le plan complexe avec des écarts variables entre les points) sont ceux repérés par des flèches. Lorsque l'on compare le spectre obtenu pour un seul cylindre et celui obtenu pour deux cylindres proches, on s'aperçoit que les pics correspondant aux résonances sont inchangés. Cette absence de couplage résonant peut s'expliquer de la même façon que l'on explique la présence d'un tel couplage dans le domaine des ondes A pour des tubes et pas dans celui des ondes S_0. Nous avons avancé l'explication suivante : le couplage résonant ne fait intervenir que des ondes à caractère externe. Or, dans le cas des cylindres, les seules ondes donnant naissance à des résonances, dans la gamme de fréquence que nous étudions, sont les ondes de Rayleigh et les ondes de galerie à échos, ondes essentiellement internes. Il n'y a donc pas de possibilité de couplage résonant entre des cylindres proches.

Dans l'étude des milieux effectifs présentée dans les chapitres suivants, nous utiliserons les deux types de cibles (tubes, cylindres) afin de séparer l'influence du couplage entre diffuseurs de celle des autres paramètres.

Afin de valider ces résultats, deux études vont être présentées. La première, dans la section suivante, consiste à construire la matrice S associée à un ensemble de diffuseurs cylindriques et à vérifier son unitarité, garante de la conservation de l'énergie. La seconde est

une validation expérimentale des démultiplications de résonance que nous présenterons dans la dernière partie de ce chapitre.

1.3 Matrice S associée

La matrice de diffusion, matrice S [14, 21], est une matrice qui contient toutes les caractéristiques du champ diffusé par le système étudié. Une des propriétés de cette matrice, liée à la conservation de l'énergie, est qu'elle est unitaire. Nous allons donc construire la matrice *S* associée au groupe de *N* tubes et vérifier son unitarité. Pour cela, nous allons dans un premier temps chercher les éléments de la matrice de transition, *T,* avec les notations de Waterman [33]. En effet, il existe une relation mathématique simple entre ces deux matrices :

$$S = \mathbb{I} + 2T \,. \tag{1.29}$$

De plus la connaissance de la matrice de transition est l'un des éléments nécessaires pour l'utilisation des théories de milieu effectif. L'intérêt de la matrice S dans la diffusion acoustique ainsi que le lien entre son unitarité et la conservation de l'énergie sont montrés dans l'annexe 1.

Nous avons montré dans la première section de ce chapitre que si une onde plane de la forme :

$$\varphi_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\alpha} J_n\left(kr\right) e^{in\theta} \tag{1.30}$$

est incidente sur un ensemble de N cibles cylindriques, l'onde diffusée par cet ensemble peut s'écrire :

$$\phi = \sum_{j=1}^{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^j H_n^{(1)}\left(kr_j\right) e^{in\theta_j} \,. \tag{1.31}$$

Par changement de repère, on va chercher à exprimer cette onde sous la forme :

$$\phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_{nm} i^m e^{-im\alpha} H_n\left(kr\right) e^{in\theta} \tag{1.32}$$

avec T_{nm}, les éléments de la matrice de transition. Pour cela, nous allons utiliser le théorème de Graf, qui nous donne la relation suivante :

$$H_n^{(1)}\left(kr_j\right) e^{in\theta_j} = \sum_p J_p\left(kd_j\right) H_{n+p}^{(1)}\left(kr\right) e^{ip\left(\theta-\chi_j\right)} e^{in\theta} \tag{1.33}$$

cette relation n'est valable que pour $r>d_j$. Dans notre cas, nous cherchons l'onde diffusée à l'extérieur de l'ensemble des diffuseurs, cette relation est donc bien respectée.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^j H_n^{(1)}\left(kr_j\right)e^{in\theta_j} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^j \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p\left(kd_j\right)H_{n+p}^{(1)}\left(kr\right)e^{ip\left(\theta-\chi_j\right)}e^{in\theta} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^j J_{m-n}\left(kd_j\right)e^{-i(m-n)\chi_j}\right]H_m^{(1)}\left(kr\right)e^{im\theta}\end{aligned} \tag{1.34}$$

On a alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{mn} i^n e^{-in\alpha} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^j J_{m-n}\left(kd_j\right)e^{-i(m-n)\chi_j} \tag{1.35}$$

Pour déterminer les éléments de la matrice de transition, nous allons prendre en compte tous les angles d'incidence possible :

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{mn} i^n e^{-in\alpha} e^{il\alpha} d\alpha = \int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^j J_{m-n}\left(kd_j\right)e^{-i(m-n)\chi_j} e^{il\alpha} d\alpha \tag{1.36}$$

On utilise alors l'orthogonalité des exponentielles complexes :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{mn} i^n 2\pi\delta_{ml} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{+} J_{m-n}\left(kd_j\right)e^{-i(m-n)\chi_j}\int_{-\pi}^{+\pi} C_n^j e^{il\alpha} d\alpha \tag{1.37}$$

D'où :

$$T_{ml} = i^{-l}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n}\left(kd_j\right)e^{-i(m-n)\chi_j}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} C_n^j e^{il\alpha} d\alpha \tag{1.38}$$

Afin de faciliter le calcul numérique des éléments de la matrice de transition, nous allons exprimer les intégrales $Y_{nl}^j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} C_n^j e^{il\alpha} d\alpha$. Pour cela nous allons utiliser la relation (1.22) qui est le système donnant les coefficients C_n:

$$\begin{aligned}\phi_j &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[e^{ik_{inc}d_j\cos\left(\chi_j-\alpha\right)} i^m e^{-im\alpha} + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^l G_{nm}^{(lj)}\right]T_{mm}^j H_m^{(1)}\left(kr_j\right)e^{im\theta_j} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m^j H_m^{(1)}\left(kr_j\right)e^{im\theta_j}\end{aligned} \tag{1.39}$$

Puis nous allons projeter ce système sur la base des $e^{il\alpha}$ afin de faire intervenir les intégrales Y_{nl}^j :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m^j H_m^{(1)}\left(kr_j\right)e^{im\theta_j} e^{il\alpha} d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[e^{ik_{inc}d_j\cos\left(\chi_j-\alpha\right)} i^m e^{-im\alpha} + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^l G_{nm}^{lj}\right]T_{mm}^j H_m^{(1)}\left(kr_j\right)e^{im\theta_j} e^{il\alpha} d\alpha \tag{1.40}$$

d'où :

$$Y_{ml}^{j} = T_{mm}^{i} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ikd_i \cos(\chi_i - \alpha)} i^m e^{-im\alpha} e^{il\alpha} d\alpha + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{mm}^{i} G_{nm}^{ji} Y_{nl}^{j} . \tag{1.41}$$

Nous allons maintenant exprimer l'intégrale présente dans (1.41) :

$$\begin{aligned} I_{lm} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ikd_i \cos(\chi_i - \alpha)} i^m e^{i(l-m)\alpha} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ikd_i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \chi_i - \alpha\right)} e^{i\left[m\frac{\pi}{2} + (l-m)\alpha\right]} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} i^l \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ikd_i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \chi_i - \alpha\right)} e^{i(m-l)\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right]} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} i^l e^{-i(m-l)\chi_i} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ikd_i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \chi_i - \alpha\right)} e^{i(m-l)\left[\frac{\pi}{2} + \chi_i - \alpha\right]} d\alpha \end{aligned} . \tag{1.42}$$

Rappelons que :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ix\sin\theta - in\theta} d\theta . \tag{1.43}$$

L'utilisation de (1.43) dans (1.42) donne :

$$I_{lm} = i^l e^{-i(m-l)\chi_i} J_{l-m}(kd_i) . \tag{1.44}$$

La matrice de transition d'un groupe de diffuseurs est donc définie par :

$$T_{ml} = i^{-l} \sum_{j=1}^{N} \sum_{n} J_{m-n}(kd_j) e^{-i(m-n)\chi_j} Y_{nl}^{j} \tag{1.45}$$

avec les Y_{nl}^{j} solutions de :

$$Y_{ml}^{i} = T_{m}^{i} i^l e^{-i(m-l)\chi_i} J_{l-m}(kd_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{m}^{i} G_{nm}^{ji} Y_{nl}^{j} . \tag{1.46}$$

On sait d'après l'annexe 1 que :

$$S = \mathbb{I} + 2T \tag{1.47}$$

avec $\mathbb{I}$ la matrice identité, et que la conservation de l'énergie impose :

$$SS^{\dagger} = \mathbb{I} , \tag{1.48}$$

avec † signifiant la matrice adjointe (transposée, conjuguée). On peut alors calculer les éléments de la matrice S et confirmer que pour chacun des groupes de tubes étudiés, l'unitarité de la matrice S est vérifiée. Ceci valide les résultats précédents. Une autre vérification de ces résultats sera faite dans la dernière section de ce chapitre avec la

comparaison théorie-expérience. Mais avant, pour en finir avec l'étude analytique et numérique, nous allons voir quelques considérations sur les temps et moyens de calculs nécessaires à la mise en œuvre de l'étude présentée jusqu'ici.

1.4 Etude comparée des temps de calcul

Un des inconvénients majeurs de cette théorie est le temps nécessaire pour calculer le champ diffusé par l'ensemble des tubes. En effet, au cours de ce calcul, il intervient plusieurs sommes infinies. Il faut donc choisir un critère de convergence pour les tronquer. Celui que nous avons choisi a été utilisé pour toutes les sommes infinies traitées dans ce document. Nous considérons qu'une somme a convergé à l'ordre M lorsque les éléments M-1 et M-2 sont inférieurs en module à 10^{-5}% du module de la somme calculée à l'ordre M. Nous avons choisi cette méthode car elle est plus précise qu'une tentative de majoration. En effet, aux abords des fréquences de résonances, le système est plus long à converger et nécessite parfois un ordre de convergence supérieur à la limite ka+20 utilisée habituellement [41]. Dans le cas présent, le couplage entre les tubes augmente la taille de la matrice nécessaire à la convergence du système (1.22) par rapport au cas de tubes éloignés traité dans les références [15] et [42]. La figure 1-29 montre l'évolution du temps de calcul en fonction de la distance entre tubes pour 6 tubes en éclipse. Les résultats présentés ici ont été obtenus sur une machine équipée d'un processeur Pentium IV cadencé à 2.8 GHz et de 1 024 Mo de RAM pour un calcul effectué en fréquence réduite de 10^{-3} à 10 par pas de 10^{-3}.

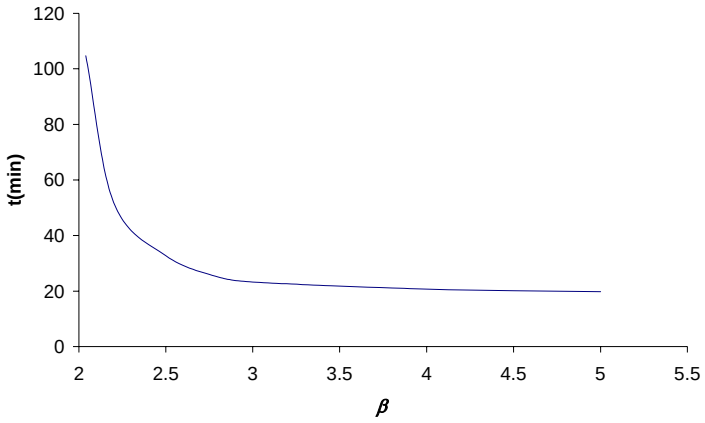


figure 1-29 temps de calcul en fonction de l'écart entre tubes pour 6 tubes en éclipse, l'unité de distance est le rayon d'un diffuseur, le temps est exprimé en minutes.

Ainsi qu'on peut le voir, plus les tubes sont proches, plus le temps nécessaire au calcul augmente. Ceci s'explique par le fait que plus le couplage entre les tubes est fort, plus le système à gérer est grand.

En outre, le nombre de tubes à prendre en compte est bien évidemment important puisque la taille du système (1.22) est proportionnelle à ce nombre. La figure 1-30 montre l'évolution du temps de calcul en fonction du nombre de tubes.

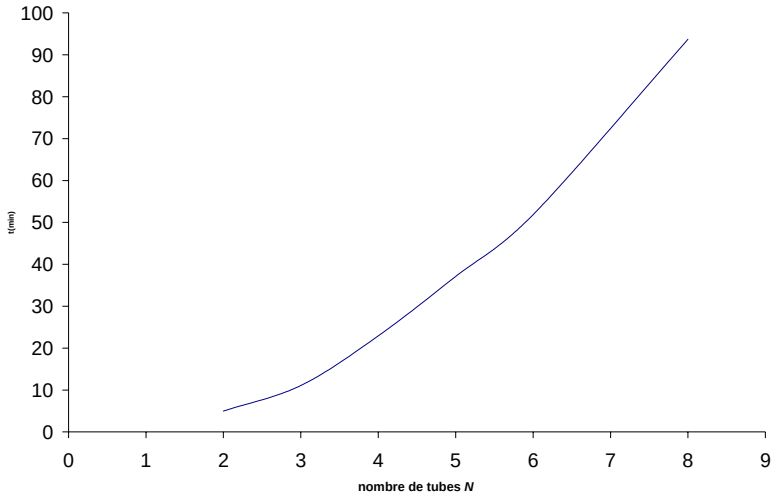


figure 1-30 temps de calcul en fonction du nombre de tubes en éclipse pour un écart entre tubes de 2,2*a*. Le temps est exprimé en minutes.

On peut voir sur cette courbe que le temps de calcul est proportionnel au carré du nombre de tubes. Ceci nous confirme que la théorie utilisée ici ne peut être employée que pour un nombre limité de tubes. Pour de grands nombres, si l'on n'a pas accès à des moyens de calculs sophistiqués, il faut développer d'autres techniques comme les théories de milieu effectif ou des algorithmes récursifs tels que celui proposé par Wang [43]. Cependant, comme nous avons décidé de nous intéresser à des systèmes où les diffuseurs sont répartis aléatoirement, nous avons choisi d'aborder les théories de milieu effectif. Auparavant, nous allons nous intéresser à une validation expérimentale des résultats trouvés jusqu'ici.

1.5 Etude expérimentale des résonances d'un groupe de N tubes

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous avons vu comment peut se manifester un couplage résonant entre des tubes proches. Nous allons ici valider expérimentalement ces résultats théoriques. Dans un premier temps, nous présenterons le dispositif expérimental utilisé, puis nous observerons les démultiplications prédites pour des tubes alignés et enfin, dans une troisième partie, nous retrouverons la fréquence de résonance supplémentaire présente lorsque la géométrie du groupe de tubes est fermée.

1.5.1 Dispositif expérimental

Pour cette étude expérimentale nous utiliserons des tubes maintenus à leurs extrémités par des jeux de cales de façon à garantir leur parallélisme et l'écart entre eux. L'ensemble est placé dans une cuve remplie d'eau suffisamment grande pour éviter les réflexions parasites sur les parois le temps de l'acquisition.

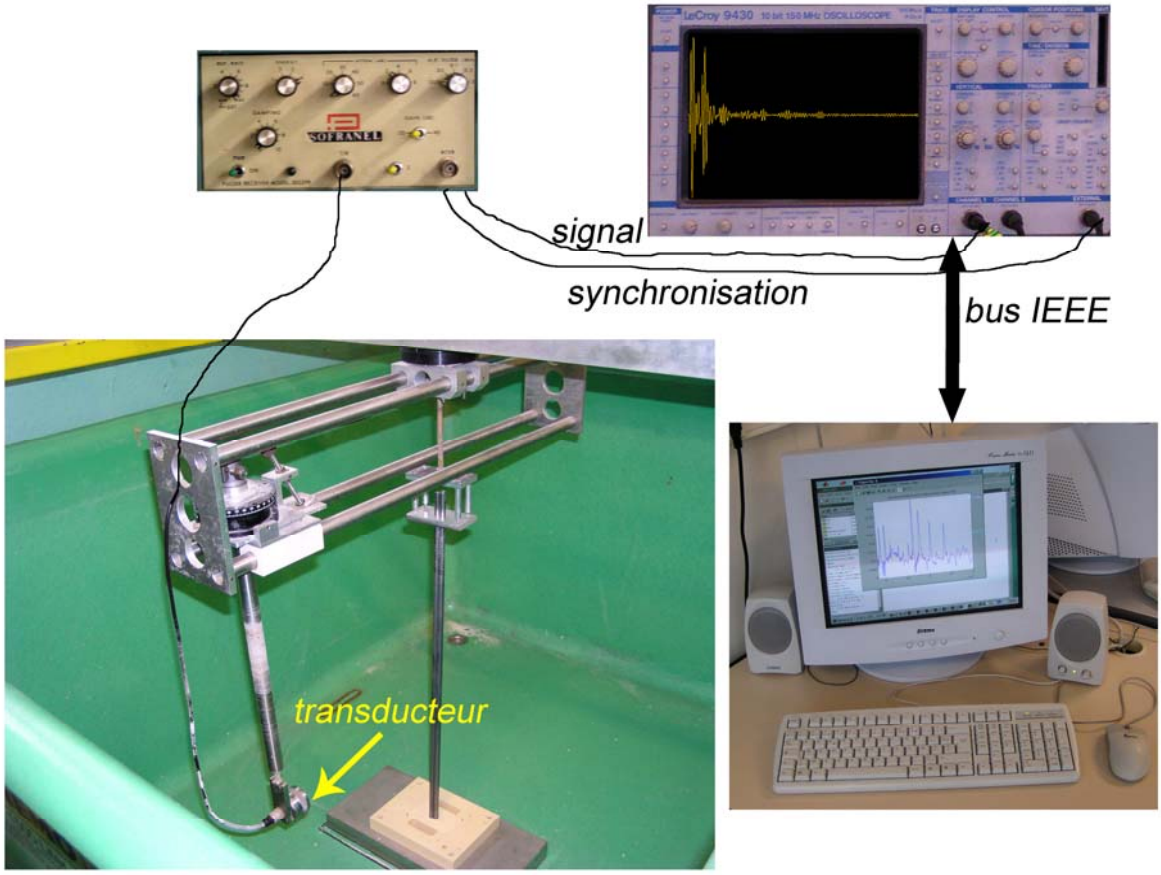


figure 1-31 présentation du dispositif expérimental.

Les mesures sont effectuées à l'aide d'un traducteur de fréquence centrale 500 kHz. La gamme de fréquence utile s'étend alors de 200 kHz à 800 kHz. Le diamètre du traducteur est de 38 mm. Dans ces conditions, la distance de Fresnel donnant la limite entre la zone de champ proche et la zone de champ lointain est de 0,27 m. Dans notre cas, la distance traducteur-cible est de 0,75 m respectant ainsi la condition de champ lointain. L'ouverture angulaire maximale du traducteur étant de 20°, le tube est insoné sur une hauteur de 0,26 m. Comme les tubes ont une longueur de 0,5 m, les extrémités ne sont pas insonées par l'onde incidente. De plus, comme le rapport de la longueur des tubes sur leur rayon est supérieur à

100, nous pouvons les considérer comme infiniment longs. Le traducteur est positionné sur un bras articulé qui peut effectuer un mouvement de rotation autour d'un axe passant par le centre du groupe de tubes. Il fonctionne alternativement en émetteur et en récepteur afin d'enregistrer le signal rétro-diffusé par la cible. Un générateur d'impulsions délivre une impulsion de 300V d'une durée d'environ 200 ns sur le traducteur, et un signal de synchronisation utilisé pour déclencher l'acquisition sur un oscilloscope numérique Lecroy. L'oscilloscope effectue une moyenne sur 100 signaux reçus afin de limiter le bruit inhérent à la mesure, puis le signal moyen est transmis à un ordinateur et stocké pour un traitement ultérieur. L'ensemble de ce dispositif est présenté figure 1-31. Une fois les signaux acquis, nous calculons leurs transformées de Fourier à l'aide d'un algorithme de transformée rapide (FFT). Les résultats des transformées sont ensuite normés, point par point, par la FFT d'un signal de référence acquis par réflexion de l'impulsion sur une plaque rigide. La dérivée de l'abscisse curviligne de la FFT normée peut alors être comparée aux spectres théoriques.

1.5.2 Tubes alignés

Dans cette étude, les tubes utilisés sont des flèches en aluminium avec les paramètres suivants :

rayon externe a=3,572 mm
rapport des rayons interne/externe r_{ab}=0,9
masse volumique ρ=2790 kg/m^3
célérité des ondes longitudinales c_l=6120 m/s
célérité des ondes transversales c_t=3020 m/s

Le rapport des rayons est garanti par le fabricant des flèches. Les vitesses ont été déterminées par comparaison entre un spectre expérimental sur un tube et des spectres théoriques pour plusieurs valeurs de vitesses. Les cavités internes des tubes sont remplies d'air. Les tubes sont immergés dans l'eau dont la masse volumique est de 1000 kg/m^3 et pour laquelle la vitesse des ondes longitudinales est de 1470 m/s. Cette vitesse a été mesurée par une différence de temps de vol entre la réflexion sur une plaque à une position donnée et la réflexion sur cette même plaque décalée de 20 cm.

Comme dans la partie théorique, nous avons, dans un premier temps, repris les expériences de S. Lethuillier avec des tubes alignés, puis nous avons fait varier l'angle d'incidence.

Après avoir retrouvé le résultat de S. Lethuillier sur la démultiplication de résonances pour des tubes proches dans la configuration en éclipse (chaque résonance de l'onde A se démultiplie en N résonances pour N tubes), nous avons cherché à établir la réalité du dédoublement secondaire des résonances en fonction de l'angle d'incidence (présence de 2N résonances en incidence oblique). La figure 1-32 montre la comparaison entre l'étude théorique et l'étude expérimentale dans le cas de trois tubes alignés équidistants. La distance entre les tubes est de 2,14*a*.

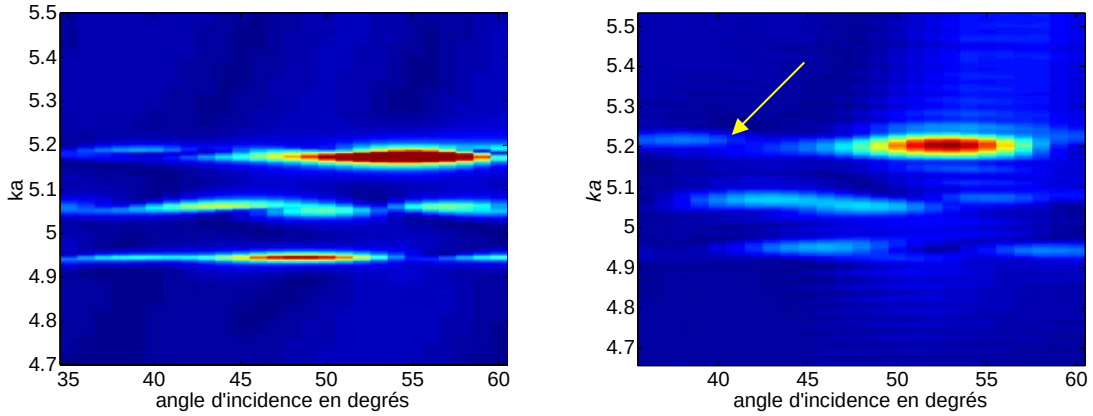


figure 1-32. comparaison théorie (à gauche)-expérience (à droite) de l'évolution des fréquences de résonances en fonction de l'angle d'incidence pour trois tubes en aluminium alignés et équidistants de 2,14 fois leur rayon. La flèche indique le dédoublement secondaire de la coupe présentée figure 1-33

Cette figure représente l'évolution des spectres de résonance théorique et expérimental en fonction de l'angle d'incidence. La comparaison de ces deux spectres laisse apparaître une bonne concordance entre l'expérience et la théorie. On peut notamment observer, sur la résonance aux alentours de *ka*=5,05, le passage de la résonance vue en éclipse à celle issue du dédoublement secondaire pointé par la flèche. On peut également voir, en faisant une coupe à 41°, la correspondance entre le dédoublement secondaire théorique et l'expérimental, comme le montre la figure 1-33.

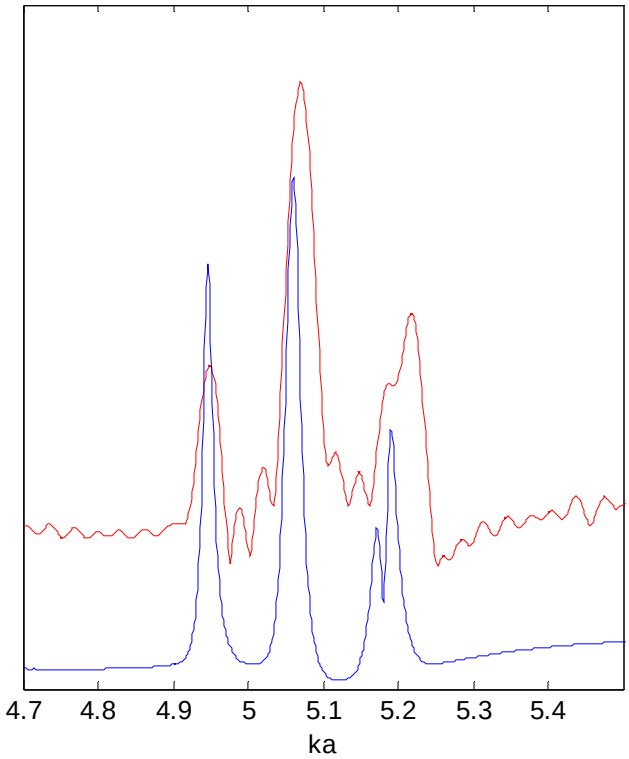


figure 1-33 comparaison théorie (en bleu)-expérience (en rouge) des spectres de résonances pour un angle d'incidence de 41° pour trois tubes en aluminium alignés et équidistants de 2,14 fois leur rayon.

Sur cette figure, on aperçoit bien le dédoublement secondaire de la troisième résonance. Ce dédoublement est moins marqué sur le spectre expérimental car les résonances expérimentales sont plus larges que les théoriques. Ceci est une constatation générale lors d'études expérimentales sur des cibles cylindriques. En effet, notre modèle ne tient pas compte de l'ouverture angulaire du traducteur qui n'émet pas dans une direction unique, mais dans une gamme angulaire autour de son axe. Le groupe de tubes est alors insoné par des ondes incidentes arrivant sous plusieurs angles à la fois notamment dans le plan parallèle à l'axe des tubes. La réponse enregistrée pour un angle d'émission supposé contient en fait la réponse à un intervalle angulaire autour de cet angle. Cependant, l'évolution des résonances en fonction de l'angle d'incidence est la même, entre la théorie et l'expérience, surtout en ce qui concerne les dédoublements secondaires. Ceci valide donc bien notre modèle théorique. Nous allons maintenant nous attacher à valider l'existence de la résonance supplémentaire qui apparaît dans le cas de groupes de tubes formant une cavité.

1.5.3 Triangle équilatéral

Pour vérifier l'existence de la résonance dite supplémentaire, nous allons considérer trois tubes positionnés aux sommets d'un triangle équilatéral. Pour cette expérience, les tubes ont les caractéristiques suivantes :

rayon externe a=4,762 mm
rapport des rayons interne/externe r_{ab}=0,93
masse volumique ρ=2790 kg/m^3
célérité des ondes longitudinales c_l=6380 m/s
célérité des ondes transversales c_t=3190 m/s

Ce changement de tube est nécessaire pour voir la résonance supplémentaire. En effet, celle-ci n'est présente que pour des fréquences réduites suffisamment grandes. Le tube de rapport de rayon interne sur externe 0,93 présente un domaine fréquentiel plus grand pour les ondes A que celui de rapport 0,9. Les fréquences de résonances n'étant pas affectées par l'angle d'incidence, si ce n'est en amplitude, nous avons choisi de ne montrer qu'un seul spectre. La figure 1-34 montre une comparaison entre un spectre théorique (en rouge) et un spectre expérimental (en bleu) dans le cas d'un triangle de côté 2,05a. La résonance supplémentaire est pointée par une flèche.

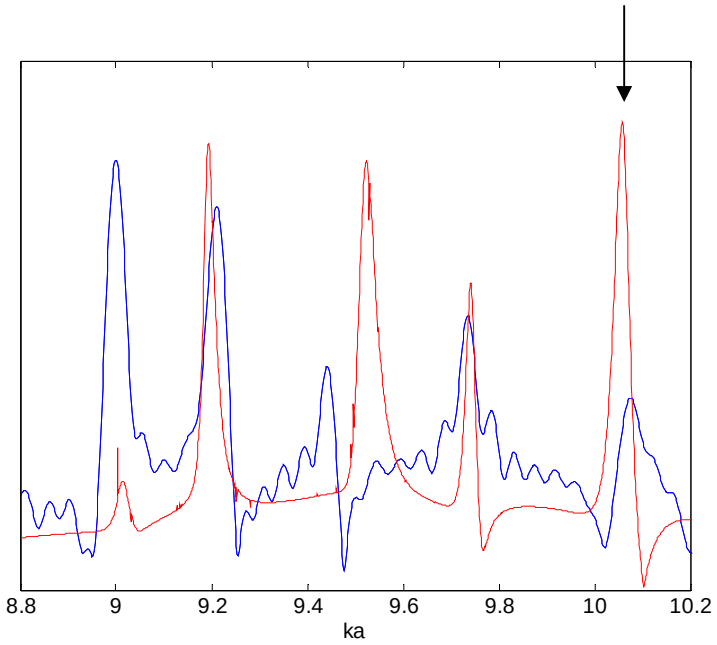


figure 1-34 comparaison théorie (en rouge)-expérience (en bleu) des spectres de résonances pour trois tubes en aluminium en triangle de côtés 2,05 fois leur rayon avec un angle d'incidence de 20°. La flèche pointe la résonance supplémentaire.

En dehors de la fréquence de résonance à $ka \approx 9{,}5$, il y a une bonne correspondance entre l'expérience et la théorie, notamment en ce qui concerne la résonance supplémentaire. Le léger décalage concernant la résonance supplémentaire s'explique facilement par la grande sensibilité de cette résonance à la taille du triangle. Le décalage de la résonance autour de 9,5 est, lui, plus difficile à expliquer. Cependant, nous avons vu lors des variations aléatoires des positions des tubes qu'une imprécision sur la position des tubes peut influencer sur les positions des résonances. Nous n'avons malheureusement pas pu déterminer une configuration telle que toutes les résonances théoriques et expérimentales coïncident exactement.

Nous avons donc montré par une comparaison avec des résultats expérimentaux la validité des calculs menés dans le premier chapitre. Ceci, ajouté à la vérification de la conservation de l'énergie par l'unitarité de la matrice *S*, nous permet d'affirmer que nos résultats sont corrects. Par la suite, nous allons considérer la méthode de calcul comme valide et nous contenter de l'unitarité de la matrice *S* comme critère de vérification.

Nous avons montré dans cette première partie de thèse l'importance du couplage entre deux cibles proches l'une de l'autre. Ceci est un phénomène important à garder en mémoire

lors de l'usage de théories de milieu effectif. Nous allons maintenant présenter certaines de ces théories avant d'y introduire des groupes de tubes pour prendre en compte les couplages entre cibles et introduire de l'anisotropie.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu que les ondes A peuvent provoquer un couplage résonant entre des tubes cylindriques fins proches les uns des autres, couplage qui se manifeste par une démultiplication des résonances d'un tube seul. Ce couplage n'est pas visible avec des cylindres, pour lesquels les ondes circonférentielles donnant lieu à des résonances sont essentiellement internes contrairement aux ondes des tubes. Lorsque le groupe de diffuseurs observé a une géométrie fermée, il apparaît une résonance que nous avons qualifiée de supplémentaire. Ces résultats ont été validés par la vérification de l'unitarité de la matrice *S*, garante de la conservation de l'énergie et par une confrontation avec des résultats expérimentaux. Cependant, cette technique de calcul du champ diffusé demande un temps de calcul important. Il est donc difficilement envisageable d'étudier le champ diffusé par un milieu contenant un grand nombre de diffuseurs avec cette méthode. Dans la suite de ce travail, nous nous intéresserons à des milieux où le nombre de diffuseurs est considéré comme infini, et où les positions des diffuseurs ne sont pas connues de façon exacte mais seulement de manière statistique par l'intermédiaire d'une loi de répartition. Il faudrait donc faire le calcul pour plusieurs configurations et effectuer ensuite un moyennage de tous les champs obtenus. Le temps nécessaire à cette opération est prohibitif. C'est pourquoi des théories de milieu effectif ont été développées. Elles prennent en compte, dès la mise en équation des ondes en présence, la répartition des diffuseurs et ont pour but de déterminer les caractéristiques d'un milieu homogène équivalent au milieu multi-diffuseur. Ce sont de telles théories qui sont développées dans les chapitres suivants. Enfin, afin de prendre en compte une éventuelle anisotropie du milieu multi-diffuseur, nous remplacerons ensuite un diffuseur par un ensemble de diffuseurs tel que ceux présentés dans ce chapitre. Il faut cependant garder à l'esprit que, dans un milieu multi-diffuseur, nous allons faire une moyenne sur les positions des diffuseurs et que de tels couplages seront donc marginaux et négligeables tant que la densité de diffuseurs n'impose par une distance moyenne entre eux très petite.

2 Détermination d'un milieu effectif pour des diffuseurs aléatoirement répartis

Nous avons vu dans le premier chapitre que le calcul exact du champ diffusé par un ensemble de diffuseurs cylindriques n'est guère réalisable dès que le nombre de diffuseurs dépasse quelques dizaines en raison du temps de calcul nécessaire et de la taille des systèmes à gérer. De plus ces méthodes imposent de connaître exactement la position des diffuseurs. C'est pourquoi, afin de traiter ces problèmes, des théories, dites de milieu effectif, ont été développées pour trouver les caractéristiques d'un milieu homogène équivalent à la zone occupée par les diffuseurs. Les paramètres à connaître sont alors la densité de répartition des diffuseurs et la matrice de transition de chaque type de diffuseur. Dans les cas que nous allons étudier, tous les diffuseurs sont identiques. Il n'y a donc qu'une seule matrice de transition à connaître. Il existe plusieurs types de théories de milieu effectif. On peut distinguer principalement deux familles. Dans la première, on recherche la fonction de Green du milieu multi-diffuseur pour déterminer ses propriétés mécaniques. Dans la seconde on cherche à connaître les champs moyens diffusés. Le but étant dans ce dernier cas de caractériser l'onde cohérente, l'onde qui « résiste au désordre », c'est-à-dire l'onde trouvée lorsque l'on va moyenner les ondes diffusées pour différentes positions des diffuseurs. C'est à des méthodes de la seconde famille que nous allons nous intéresser et notamment à celles développées par Waterman et Truell et par Fikioris et Waterman. Ces théories ont la même philosophie et sont le développement l'une de l'autre. Elles consistent à moyenner de façon statistique le champ diffusé en fonction de la position des diffuseurs. Nous verrons aussi le peu de différences entre l'expression du nombre d'onde effectif issue de la théorie de Waterman et Truell et celle issue d'une troisième théorie, celle de Foldy dont nous utiliserons l'expression du nombre d'onde effectif sans pour autant reproduire la démarche nécessaire à son établissement. La théorie de Waterman et Truell va nous permettre d'établir une expression explicite du nombre d'onde effectif, alors que celle de Fikioris et Waterman, bien que basée sur une démarche similaire n'aboutit qu'à une expression implicite. Nous allons présenter la théorie de Waterman et Truell, puis nous montrerons le lien entre le résultat obtenu par cette théorie et celui obtenu par la théorie de Foldy. Enfin, nous approfondirons plus en détail celle de Fikioris et Waterman que nous utiliserons par la suite. Nous allons donc chercher les nombres

d'ondes effectifs déterminés par ces théories, puis nous en déduirons la vitesse et l'atténuation de l'onde effective. Une comparaison des trois théories sera faite.

2.1 Présentation de différentes méthodes

2.1.1 Théorie de Waterman et Truell

Le système étudié est présenté figure 2-1. Il est constitué de N diffuseurs identiques répartis aléatoirement dans le demi-espace d'équation $x \geq 0$. On définit la densité des diffuseurs, n_0, par le nombre de diffuseurs présents par unité de surface.

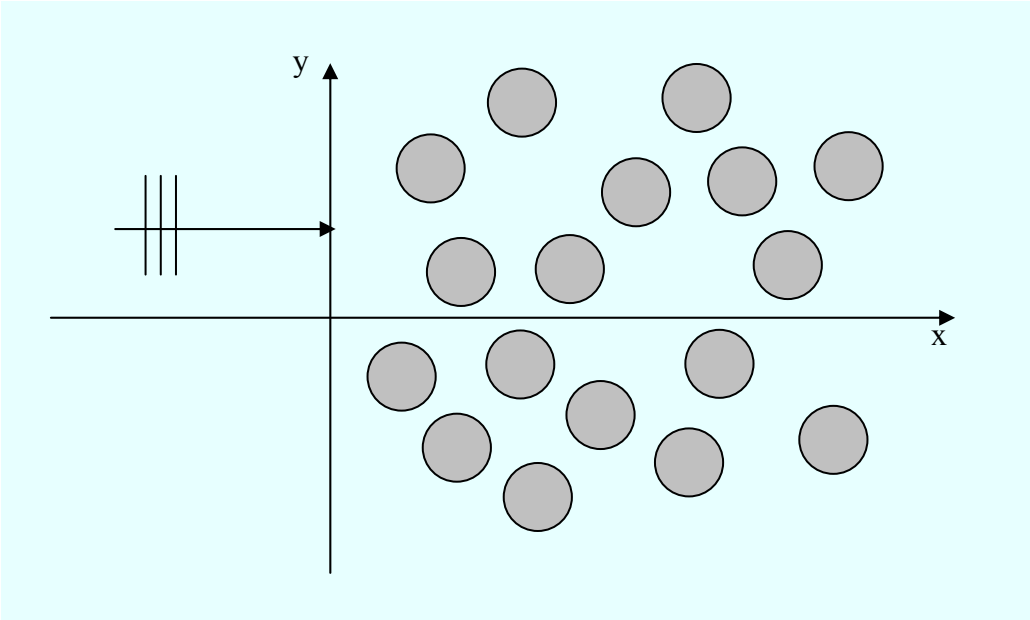


figure 2-1 représentation du milieu multi-diffuseur

Nous allons présenter la théorie de Waterman et Truell en repartant de l'écriture exacte, présentée dans le chapitre précédent, de la diffusion multiple par N diffuseurs. Ainsi, si S est la surface du demi-espace contenant les N diffuseurs, la densité n_0 est :

$$n_0 = \frac{N}{S} \tag{2.1}$$

Les positions respectives des N diffuseurs contrairement au chapitre précédent, ne sont pas supposées connues. On suppose qu'ils sont répartis de façon uniforme sur toute la surface S, avec une densité de probabilité de trouver un diffuseur centré au point repéré par le vecteur $\overrightarrow{d_k}$ définie par :

$$p\left(\overrightarrow{d_k}\right) = \begin{cases} \frac{1}{S} & \overrightarrow{d_k} \in S \\ 0 & \overrightarrow{d_k} \notin S \end{cases} \tag{2.2}$$

On introduit également la densité de probabilité $p\left(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2},\cdots,\overrightarrow{d_n}\right)$ de trouver le diffuseur j en $\overrightarrow{d_j}$, le diffuseur l en $\overrightarrow{d_l}$, et ainsi de suite… Ainsi que la densité de probabilité conditionnelle donnant la probabilité de trouver le diffuseur j en $\overrightarrow{d_j}$, le diffuseur l en $\overrightarrow{d_l}$ … lorsque la position du diffuseur i est fixée, définie par :

$$p\left(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2},\overset{,}{\cdots},\overrightarrow{d_N}\middle|\overrightarrow{d_i}\right)=\frac{p\left(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2},\cdots,\overrightarrow{d_N}\right)}{p\left(\overrightarrow{d_i}\right)}, \tag{2.3}$$

le ' signifiant que l'on omet l'élément d'indice i, de l'énumération. De la même façon, $p\left(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2},\overset{''}{\cdots},\overrightarrow{d_N}\middle|\overrightarrow{d_i},\overrightarrow{d_j}\right)$ est la densité de probabilité de trouver le diffuseur i en $\overrightarrow{d_i}$, le diffuseur l en $\overrightarrow{d_l}$ … lorsque le diffuseur i est en $\overrightarrow{d_i}$ et le diffuseur j en $\overrightarrow{d_j}$. $p\left(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2},\overset{''}{\cdots},\overrightarrow{d_N}\middle|\overrightarrow{d_i},\overrightarrow{d_j}\right)$ est défini par :

$$p\left(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2},\overset{''}{\cdots},\overrightarrow{d_N}\middle|\overrightarrow{d_i},\overrightarrow{d_j}\right)=\frac{p\left(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2},\overset{,}{\cdots},\overrightarrow{d_N}\middle|\overrightarrow{d_j}\right)}{p\left(\overrightarrow{d_i}\middle|\overrightarrow{d_j}\right)} \tag{2.4}$$

avec

$$p\left(\overrightarrow{d_i}\middle|\overrightarrow{d_j}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{S} & \overrightarrow{d_i}\in S, \quad \overrightarrow{d_i}\neq\overrightarrow{d_j}\\ 0 & \overrightarrow{d_i}\notin S\end{cases}. \tag{2.5}$$

La condition $\overrightarrow{d_i}\neq\overrightarrow{d_j}$ assure que deux diffuseurs ne peuvent avoir leurs centres au même endroit. Cependant, cette densité de probabilité conditionnelle ne tient pas compte de la taille des diffuseurs permettant ainsi un chevauchement entre deux diffuseurs. La taille des diffuseurs sera prise en compte dans la théorie de Fikioris et Waterman.

On repart maintenant des expressions (1.18) et (1.22) du chapitre 1, donnant le champ total exact diffusé par le cylindre j :

$$\phi_j=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}C_m^jH_m^{(1)}\left(kr_j\right)e^{im\theta_j} \tag{2.6}$$

$$\phi_j=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[e^{ikd_j\cos\chi_j}i^m+\sum_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n^lG_{nm}^{(lj)}\right]T_{mm}^1H_m^{(1)}\left(kr_j\right)e^{im\theta_j} \tag{2.7}$$

avec T^1 la matrice de transition commune à tous les diffuseurs puisque ceux-ci sont identiques.

A partir de ces relations, on aboutit au système suivant :

$$C_m^j = \left[e^{i\vec{k}.\vec{d}_j \cos\chi_j} i^m + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n^l G_{nm}^{(lj)} \right] T_{mm}^1 \tag{2.8}$$

Si on fait la moyenne de ce champ sur toutes les positions possibles des diffuseurs autres que j, le diffuseur j étant fixé, la relation (2.8) devient :

$$\left\langle C_n^{(j)} \right\rangle_j = e^{i\vec{k}.\vec{d}_j} i^n + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_S p\left(\vec{d}_1,...'...,\vec{d}_N \middle| \vec{d}_j\right) C_m^{(i)} T_{mm}^1 G_{mn}^{(ji)} d\vec{d}_1...'...d\vec{d}_N \tag{2.9}$$

A l'aide des densités de probabilités conditionnelles définies précédemment, la relation (2.9) peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}
\left\langle C_n^{(j)} \right\rangle_j &= e^{i\vec{k}.\vec{d}_j} i^n + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_{mm}^1 \int_S p\left(\vec{d}_i \middle| \vec{d}_j\right) p\left(\vec{d}_1,...''...,\vec{d}_N \middle| \vec{d}_i, \vec{d}_j\right) C_m^{(i)} G_{mn}^{(ji)} d\vec{d}_1...'...d\vec{d}_N \\
&= e^{i\vec{k}.\vec{d}_j} i^n + \frac{1}{S} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_{mm}^1 \int_S G_{mn}^{(ji)} d\vec{d}_i \int_S p\left(\vec{d}_1,...''...,\vec{d}_N \middle| \vec{d}_i, \vec{d}_j\right) C_m^{(i)} d\vec{d}_1...''...d\vec{d}_N \\
&= e^{i\vec{k}.\vec{d}_j} i^n + \frac{1}{S} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_{mm}^1 \int_S G_{mn}^{(ji)} \left\langle C_m^{(i)} \right\rangle_{ji} d\vec{d}_i
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Il apparaît ainsi la quantité $\left\langle C_m^{(i)} \right\rangle_{ji}$ qui représente la moyenne du coefficient $C_m^{(i)}$ pour toutes les configurations des diffuseurs possibles lorsque les diffuseurs i et j sont fixés. On introduit alors l'approximation dite quasi-cristalline de M. Lax [32] :

$$\left\langle C_n^{(j)} \right\rangle_j \cong \left\langle C_n^{(j)} \right\rangle_{ji} \tag{2.11}$$

selon laquelle le champ moyen diffusé par le cylindre j, fixé, est le même qu'on fixe ou pas la position d'un quelconque autre diffuseur ($i\neq j$). Il est difficile de juger, à ce niveau, de la validité de cette approximation. On peut seulement supposer qu'elle devrait être d'autant mieux vérifiée que la concentration de diffuseurs est grande. En outre, c'est une hypothèse fondamentale pour pouvoir poursuivre le calcul analytique plus avant. On a donc, en se rappelant que tous les diffuseurs sont identiques :

$$\left\langle C_n^{(j)} \right\rangle_j = e^{i\vec{k}.\vec{d}_j} i^n + \frac{N-1}{S} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_{mm}^1 \int_S G_{mn}^{(ji)} \left\langle C_m^{(i)} \right\rangle_j d\vec{d}_i \tag{2.12}$$

Pour résoudre cette équation, nous allons faire l'hypothèse fondamentale qui consiste à écrire l'onde dans le milieu multi-diffuseur sous la forme d'une onde plane se propageant selon l'axe des *x* (*cf.* figure 2-1) :

$$\left\langle C_n^{(j)} \right\rangle_j = i^n X_n e^{i\vec{K}.\vec{d}_j}. \tag{2.13}$$

avec

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Cette relation définie le nombre d'onde effectif *K*. La relation (2.12) devient donc :

$$i^n X_n e^{i\vec{K}.\vec{d}_j} = e^{i\vec{k}.\vec{d}_j} i^n + \frac{N-1}{S} \sum_m T_{mm}^1 \int_S G_{mn}^{(ji)} i^m X_m e^{i\vec{K}.\vec{d}_i} d\vec{d}_i \tag{2.15}$$

En introduisant les expressions des coefficients $G_{nm}^{(ji)}$ et en posant *p=m-n*, on a :

$$X_n e^{i\vec{K}.\vec{d}_j} = e^{i\vec{k}.\vec{d}_j} + \frac{N-1}{S} \sum_p T_{(p+n)(p+n)}^1 \int_S e^{ip\theta_{ji}} H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right) i^{p-n} X_m e^{i\vec{K}.\vec{d}_i} d\vec{d}_i \tag{2.16}$$

Ce que l'on peut encore écrire :

$$X_n e^{i\vec{K}.\vec{d}_j} = e^{i\vec{k}.\vec{d}_j} + \frac{N-1}{S} \sum_p T_{(p+n)(p+n)}^1 i^p X_{p+n} I_p \tag{2.17}$$

avec :

$$I_p = \int_S e^{ip\theta_{ji}} H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right) e^{i\vec{K}.\vec{d}_i} d\vec{d}_i \tag{2.18}$$

Il nous faut donc calculer l'intégrale I_p. Celle-ci étant singulière en $d_{ij} = 0$, nous allons la calculer en valeur principale. Pour cela, nous allons exclure du domaine d'intégration une surface que nous ferons ensuite tendre vers zéro. La singularité de l'intégrale n'est pas en contradiction avec la physique du problème. En effet, les diffuseurs étant matériels, il n'existe aucun cas où $d_{ij} = 0$ avec *i* et *j* différents. Pour exprimer I_p, nous allons transformer cette intégrale de surface en une intégrale de contour. Pour cela, il faut se rappeler que l'exponentielle $e^{i\vec{K}.\vec{d}_i}$ et la fonction de Hankel sont toutes deux solutions d'une équation de Helmholtz. Nous avons donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\Delta\left(e^{i\vec{K}.\vec{d}_i}\right) + K^2 e^{i\vec{K}.\vec{d}_i} = 0 \\ &\Delta\left(H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right) + k^2 H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right) = 0 \end{aligned}. \tag{2.19}$$

La combinaison de ces deux équations donne :

$$H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\Delta\left(e^{i\vec{K}.\vec{d}_i}\right) - e^{i\vec{K}.\vec{d}_i}\Delta\left(H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right) = \left(k^2 - K^2\right) e^{i\vec{K}.\vec{d}_i} H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right). \tag{2.20}$$

Le report de (2.20) dans (2.18) donne :

$$I_p = \int_{S'} \frac{e^{ip\theta_{ji}}}{\left(k^2 - K^2\right)} \left[H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right) \Delta\left(e^{i\vec{K}.\vec{d}_i}\right) - e^{i\vec{K}.\vec{d}_i} \Delta\left(H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right) \right] d\vec{d}_i \,, \tag{2.21}$$

où S' est la surface S moins le domaine d'exclusion. Le théorème de Green nous autorise alors à écrire :

$$I_p = \frac{1}{\left(k^2 - K^2\right)} \int_{L'} e^{ip\theta_{ji}} \left[H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right) \vec{n}.\vec{\nabla}\left(e^{i\vec{K}.\vec{d}_i}\right) - e^{i\vec{K}.\vec{d}_i} \vec{n}.\vec{\nabla}\left(H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right) \right] dl \,, \tag{2.22}$$

avec L', contour fermé autour de S' et $\hat{n}$ la normale à L'. Le domaine d'exclusion choisi est un plan de longueur infinie selon y et dont la largeur selon x est de 2ε. L' peut donc être décomposé en plusieurs parties comme le montre la figure 2-2 : une droite en x=0, un demi-cercle de rayon infini, et deux droites en x_j-ε et x_j+ε.

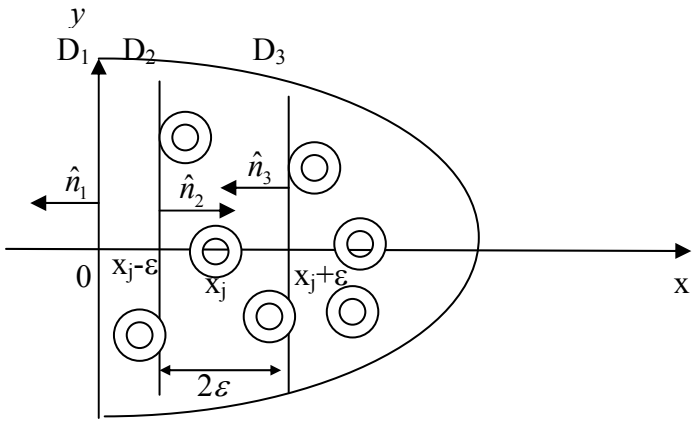


figure 2-2 représentation des chemins d'intégrations pour le calcul de l'intégrale (2.22)

L'intégrale sur le demi-cercle est nulle car il s'agit d'une fonction oscillante sans point de phase stationnaire. Il reste donc à déterminer les intégrales I_{p1}, I_{p2}, I_{p3} sur les trois droites, $x_i=0$ (D_1), $x_i=x_j-\varepsilon$ (D_2), $x_i=x_j+\varepsilon$ (D_3). La normale considérée est dirigée vers l'extérieur du milieu multi-diffuseur. Pour la première et la troisième intégrale on a donc :

$$\hat{n}.\vec{\nabla} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.23}$$

et pour la seconde :

$$\hat{n}.\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.24}$$

Ces trois intégrales s'écrivent donc :

$$
\begin{aligned}
I_{p1} &= \frac{1}{\left(k^2-K^2\right)}\int_{D_1} e^{ip\theta_{ji}}\left[-iKH_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)+e^{i\vec{K}.\vec{d_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right]dy_i \\
I_{p2} &= \frac{1}{\left(k^2-K^2\right)}\int_{D_2} e^{ip\theta_{ji}}\left[iKH_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)e^{iK\left(x_j-\varepsilon\right)}-e^{i\vec{K}.\vec{d_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right]dy_i \\
I_{p3} &= \frac{1}{\left(k^2-K^2\right)}\int_{D_3} e^{ip\theta_{ji}}\left[-iKH_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)e^{iK\left(x_j+\varepsilon\right)}+e^{i\vec{K}.\vec{d_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right]dy_i
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

En se rappelant que le vecteur d'onde effectif est colinéaire à l'axe des x, on a :

$$
\begin{aligned}
I_{p1} &= \frac{1}{\left(k^2-K^2\right)}\left[-iK+e^{iKx_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right]\int_{D_1} e^{ip\theta_{ji}}H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)dy_i \\
I_{p2} &= \frac{1}{\left(k^2-K^2\right)}\left[iKe^{iK\left(x_j-\varepsilon\right)}-e^{iKx_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right]\int_{D_2} e^{ip\theta_{ji}}H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)dy_i \\
I_{p3} &= \frac{1}{\left(k^2-K^2\right)}\left[-iKe^{iK\left(x_j+\varepsilon\right)}+e^{iKx_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right]\int_{D_3} e^{ip\theta_{ji}}H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)dy_i
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Les intégrales des relations (2.26) sont des cas particuliers de celles exprimées dans l'annexe 2 avec K_y=0 et α=0. On a alors :

$$
I_{p1} = \frac{2i^{-p}}{k\left(k^2-K^2\right)}i\left(-K-k\right)e^{ikx_j} \tag{2.27}
$$

$$
I_{p2} = \frac{2i^{-p}}{k\left(k^2-K^2\right)}i\left(K+k\right)e^{ik\varepsilon}e^{iK\left(x_j-\varepsilon\right)} \tag{2.28}
$$

$$
I_{p3} = \frac{2i^{p}}{k\left(k^2-K^2\right)}i\left(-K+k\right)e^{ik\varepsilon}e^{iK\left(x_j+\varepsilon\right)} \tag{2.29}
$$

En introduisant ces résultats dans (2.17), on a :

$$
\begin{aligned}
X_n e^{iK.x_j} &= e^{ik.x_j} \\
&+n_0\sum_p T^1_{(p+n)(p+n)}i^p X_{(p+n)}\frac{2i}{k\left(k^2-K^2\right)} \\
&\left[i^{-p}\left(-K-k\right)e^{ikx_j}+i^{-p}\left(K+k\right)e^{ik\varepsilon}e^{iK\left(x_j-\varepsilon\right)}+i^{p}\left(-K+k\right)e^{-ik\varepsilon}e^{iK\left(x_j+\varepsilon\right)}\right]
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

En faisant tendre maintenant ε vers 0, et en considérant que cette relation doit être vérifiée quelque soit x_j, on a :

$$\begin{aligned} &1+\frac{2in_0}{k(K-k)}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}T_{pp}^{1}X_p=0 \\ &X_n=\frac{2i}{k}n_0\sum_p T_{(p+n)(p+n)}^{1}X_{(p+n)}\left[\frac{-1}{(K-k)}+\frac{(-1)^p}{(K+k)}\right] \end{aligned} \tag{2.31}$$

La première équation donne :

$$K=k-\frac{2in_0}{k}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}T_{pp}^{1}X_p \tag{2.32}$$

En injectant la première relation de (2.31) dans la deuxième, on trouve :

$$X_n=1+\frac{2i}{k}n_0\sum_p T_{pp}^{1}X_p\frac{(-1)^{p-n}}{(K+k)}. \tag{2.33}$$

On va alors remplacer les X_p de la relation (2.33) par l'expression des X_n de cette même relation :

$$X_n=1+\frac{2i}{k}n_0\sum_p T_{pp}^{1}\frac{(-1)^{p-n}}{(K+k)}\left[1+\frac{2i}{k}n_0\sum_q T_{qq}X_q\frac{(-1)^{q-p}}{(K+k)}\right]. \tag{2.34}$$

ce qui peut se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} X_n&=1+\frac{2i}{k}n_0\sum_p T_{pp}^{1}\frac{1}{(K+k)}\left[(-1)^{p-n}+\frac{2i}{k}n_0\sum_q T_{qq}X_q\frac{(-1)^{q-n}}{(K+k)}\right] \\ &=1+\frac{2i}{k}n_0\sum_p T_{pp}^{1}\frac{1}{(K+k)}\left[(-1)^{p-n}-1+1+\frac{2i}{k}n_0\sum_q T_{qq}X_q\frac{(-1)^{q-n}}{(K+k)}\right] \end{aligned} \tag{2.35}$$

On reconnaît alors l'expression (2.33), et l'on a :

$$X_n=1+\frac{2i}{k}n_0\sum_p T_{pp}^{1}\frac{1}{(K+k)}\left[(-1)^{p-n}-1+X_n\right]. \tag{2.36}$$

En regroupant les termes en X_n,on a :

$$X_n\left[1-\frac{2i}{k}n_0\sum_p T_{pp}^{1}\frac{1}{(K+k)}\right]=1+\frac{2in_0}{k}\frac{1}{(K+k)}\sum_p(-1)^{p-n}T_{pp}^{1}-\frac{2in_0}{k}\frac{1}{(K+k)}\sum_p T_{pp}^{1} \tag{2.37}$$

ce qui nous donne, pour les X_n :

$$X_n = \frac{1+\frac{2in_0}{k}\frac{1}{(K+k)}\sum_p (-1)^{p-n}\,T_{pp}^1 - \frac{2in_0}{k}\frac{1}{(K+k)}\sum_p T_{pp}^1}{\left[1-\frac{2i}{k}n_0\sum_p T_{pp}^1\frac{1}{(K+k)}\right]}$$
$$= 1+\frac{\frac{2in_0}{k}\frac{1}{(K+k)}\sum_p (-1)^{p-n}\,T_{pp}^1}{\left[1-\frac{2i}{k}n_0\sum_p T_{pp}^1\frac{1}{(K+k)}\right]} \quad . \qquad (2.38)$$

En injectant (2.38) dans (2.32), on a :

$$K = k-\frac{2in_0}{k}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{pp}^1\left[1+\frac{\frac{2in_0}{k}\frac{1}{(K+k)}\sum_q (-1)^{q-p}\,T_{qq}^1}{\left[1-\frac{2i}{k}n_0\sum_q T_{qq}^1\frac{1}{(K+k)}\right]}\right]$$
$$= k-\frac{2in_0}{k}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{pp}^1 - \frac{2in_0}{k}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{pp}\frac{\frac{2in_0}{k}\frac{1}{(K+k)}\sum_q (-1)^{q-p}\,T_{qq}^1}{\left[1-\frac{2i}{k}n_0\sum_q T_{qq}^1\frac{1}{(K+k)}\right]} \qquad (2.39)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$K\left[K+k-\frac{2i}{k}n_0\sum_q T_{qq}^1\right] = \left[k-\frac{2in_0}{k}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{pp}^1\right]\left[K+k-\frac{2i}{k}n_0\sum_q T_{qq}\right] - \frac{2in_0}{k}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{qq}^1\frac{2in_0}{k}\sum_q (-1)^{q-p}\,T_{qq}^1 \qquad (2.40)$$

ou encore :

$$K^2+kK-\frac{2i}{k}n_0K\sum_q T_{qq}^1 = Kk+k^2-2in_0\sum_q T_{qq}^1 - \frac{2in_0}{k_x}K\sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{pp}^1$$
$$-2in_0\sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{pp}^1 + \left[\frac{2i}{k}n_0\sum_q T_{qq}^1\right]^2 - \frac{2in_0}{k}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{pp}^1\frac{2in_0}{k}\sum_q (-1)^{q-p}\,T_{qq}^1 \qquad (2.41)$$

En simplifiant, on trouve :

$$K^2 = k^2-4in_0\sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{pp}^1 + \left[\frac{2i}{k}n_0\sum_q T_{qq}^1\right]^2 - \frac{2in_0}{k}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}(-1)^p\,T_{pp}^1\frac{2in_0}{k}\sum_q (-1)^q\,T_{qq}^1 \qquad (2.42)$$

D'où l'expression explicite du nombre d'onde effectif :

$$K^2 = \left[k - \frac{2i}{k} n_0 \sum_q T_{qq}^1 \right]^2 - \left[\frac{2in_0}{k} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^p T_{pp}^1 \right]^2 \tag{2.43}$$

Afin d'obtenir une expression adimensionnelle, nous allons introduire la notion de concentration, c, définie par :

$$c = \frac{N\pi a^2}{S} = n_0 \pi a^2 \tag{2.44}$$

La relation (2.43) devient alors :

$$(Ka)^2 = \left[ka - \frac{2ic}{k\pi a} \sum_q T_{qq}^1 \right]^2 - \left[\frac{2ic}{k\pi a} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^p T_{pp}^1 \right]^2 \tag{2.45}$$

L'avantage de cette théorie est l'obtention d'une expression explicite pour le nombre d'onde effectif. Il est intéressant de remarquer que le terme $\sum_q T_{qq}^1$ correspond, à un coefficient près, à la diffusion vers l'avant d'un diffuseur seul, de même que le terme $\sum_q (-1)^q T_{qq}^1$ à la rétro-diffusion d'un diffuseur seul, toujours à un coefficient près.

Nous allons maintenant comparer cette expression du nombre d'onde effectif avec celle obtenue par la théorie de Foldy. Dans sa théorie, Foldy estime que la rétro-diffusion est négligeable devant la diffusion vers l'avant et l'application de sa théorie à des diffuseurs cylindriques impose de considérer les diffuseurs en champs lointain les uns par rapport aux autres[28]. L'application de sa théorie en coordonnées cylindriques donne la relation suivante[44] :

$$K = k + \frac{2n_0}{ik} f\left(\hat{i}, \hat{i}\right). \tag{2.46}$$

où $f\left(\hat{i}, \hat{i}\right)$ représente l'amplitude de diffusion en champ lointain dans la direction d'incidence, lorsqu'un diffuseur est insoné par une onde plane, c'est-à-dire que l'onde moyenne diffusée par l'un des diffuseurs peut se mettre sous la forme :

$$\left\langle \phi_j\left(\vec{r_s}\right) \right\rangle = f\left(\hat{i}, \widehat{\theta_s}\right) G_0^\infty\left(\vec{r} - \vec{r_s}\right) \tag{2.47}$$

où $f\left(\hat{i}, \widehat{\theta_s}\right)$ est l'amplitude de propagation de l'onde diffusée par le diffuseur j dans la direction du vecteur $\widehat{\theta_s}$ lorsque l'onde incidente sur le diffuseur j se propage dans la direction

repérée par le vecteur $\hat{i}$, et $G_0^{\infty}\left(\vec{r}-\vec{r_s}\right)$ est le propagateur en espace libre vérifiant $\left(\vec{\nabla}^2+k^2\right)G_0^{\infty}\left(\vec{r}-\vec{r_s}\right)=-\delta\left(\vec{r}-\vec{r_s}\right)$.

A partir de la relation (1.6), sachant que le propagateur en espace libre en coordonnées cylindriques est $H_0^{(1)}(kr)$, et que Foldy considère la concentration des diffuseur comme suffisamment faible pour pouvoir considérer les diffuseurs en champs lointain les uns par rapport aux autres, on peut en déduire que :

$$f\left(\hat{i},\hat{i}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}T_{nn}^{1} \tag{2.48}$$

d'où :

$$K=k-\frac{2i}{k}n_0\sum_{q}T_{qq}^{1} \tag{2.49}$$

Il est intéressant de voir que l'expression trouvée par Foldy ne diffère de celle trouvée par la théorie de Waterman et Truell que par un terme prenant en compte la rétro-diffusion. L'hypothèse selon laquelle les diffuseurs doivent être en champ lointain les uns par rapport aux autres semble donc avoir le même effet sur la détermination du nombre d'onde effectif que l'approximation quasi-cristalline qui, en considérant que l'on peut négliger un diffuseur autre que celui qui sert de référence, impose une distance entre deux diffuseurs telle que ceux-ci ne soient pas couplés. Cependant, la théorie de Waterman et Truell ne prend pas en compte la taille du diffuseur, puisque la surface du domaine d'exclusion est réduite à zéro. C'est pourquoi, Fikioris et Waterman ont approfondi cette théorie en considérant que les diffuseurs ne peuvent être plus proches les uns des autres que d'une certaine distance appelée distance limite d'approche. C'est ce que nous allons développer dans le paragraphe suivant.

2.1.2 Théorie de Fikioris et Waterman

Afin de se rapprocher le plus possible d'une situation réelle, Fikioris et Waterman reprennent le principe de la théorie de Waterman et Truell en imposant aux diffuseurs une distance limite d'approche pour éviter qu'ils s'interpénètrent. Les relations (2.17) à (2.22) sont toujours valables, à ceci près que le parcours d'intégration *L'* est modifié du fait que la densité de probabilité conditionnelle suivante est considérée :

$$p\left(\overrightarrow{d_k}\middle|\overrightarrow{d_j}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{S} & \left\|\overrightarrow{d_k}-\overrightarrow{d_j}\right\|>b \text{ et } \overrightarrow{d_k}\in S\\ 0 & \left\|\overrightarrow{d_k}-\overrightarrow{d_j}\right\|\le b \text{ ou } \overrightarrow{d_k}\notin S\end{cases}, \tag{2.50}$$

à la place de celle donnée par la relation (2.5). L' est maintenant la frontière d'une nouvelle surface *S'* définie comme la surface *S* moins un disque de rayon *b* centré sur le diffuseur *j*. Ainsi, la distance minimale entre deux centres de diffuseurs est *b*. Nous avons donc les relations suivantes :

$$X_n e^{i\vec{K}.\vec{d}_j} = e^{i\vec{k}.\vec{d}_j} + \frac{N-1}{S}\sum_p T^1_{(p+n)(p+n)} i^p X_{p+n} I_p \tag{2.51}$$

avec

$$I_p = \frac{1}{\left(k^2 - K^2\right)} \int_{L'} e^{ip\theta_{ji}} \left[H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right) \vec{n}.\vec{\nabla}\left(e^{i\vec{K}.\vec{d}_i}\right) - e^{i\vec{K}.\vec{d}_i} \vec{n}.\vec{\nabla}\left(H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right)\right] dl \tag{2.52}$$

Pour continuer le calcul, nous allons utiliser la linéarité de l'intégrale pour décomposer *L'* en plusieurs trajets :

$$L' = L_{C_b} + L_{D_0} + L_{C_\infty}\ , \tag{2.53}$$

avec L_{C_b} le cercle de rayon *b* centré en $\overrightarrow{d_j}$, L_{D_0} la droite d'équation *x*=0 et L_{C_∞} un arc de cercle de rayon infini centré en 0 pour fermer le trajet comme le montre la figure 2-3.

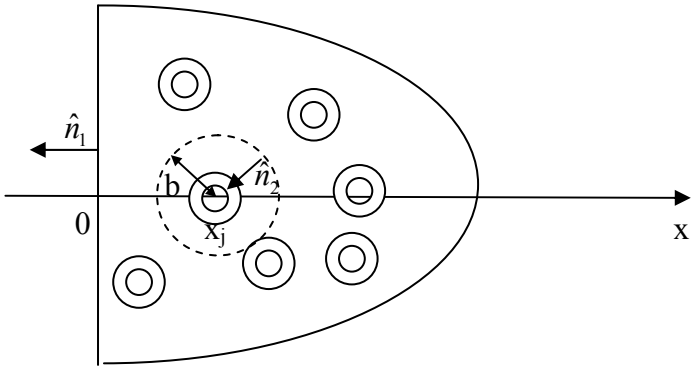


figure 2-3 représentation des chemins d'intégrations pour le calcul de l'intégrale (2.52)

Nous allons donc calculer les intégrales sur les différents parcours séparément.

Parcours L_{C_b}

Sur le cercle de rayon *b*, on a :

$$\begin{aligned} \vec{n}.\vec{\nabla} &= -\frac{\partial}{\partial d_{ij}} \\ dl &= b d\theta_{ij} \end{aligned} \tag{2.54}$$

avec :

$$\theta_{ij} = \pi - \theta_{ji} \tag{2.55}$$

de plus :

$$\overrightarrow{d_i} = \overrightarrow{d_j} + \overrightarrow{O_j O_i}\ . \tag{2.56}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\vec{n}.\vec{\nabla}\left(e^{i\vec{K}.\vec{d}_i}\right) &= -\frac{\partial}{\partial d_{ij}}\left[e^{i\vec{K}.\vec{d}_j}e^{iKd_{ij}\cos\theta_{ij}}\right] \\ &= -e^{i\vec{K}.\vec{d}_j}\frac{\partial}{\partial d_{ij}}\left[\sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^{+q}J_q\left(Kd_{ij}\right)e^{iq\theta_{ij}}\right]. \\ &= -e^{i\vec{K}.\vec{d}_j}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^q K J_q'\left(Kd_{ij}\right)e^{iq\theta_{ij}}\end{aligned} \tag{2.57}$$

D'où, pour l'intégrale sur le parcours L_{C_b} :

$$\begin{aligned}I_{pC_b} &= \frac{1}{\left(k^2-K^2\right)}\int_0^{2\pi} e^{ip\theta_{ji}}\begin{bmatrix}-H_p^{(1)}(kb)e^{i\vec{K}.\vec{d}_j}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^q K J_q'(Kb)e^{iq\theta_{ij}} + \\ kH_p^{(1)}{}'(kb)e^{i\vec{K}.\vec{d}_j}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^q J_q(Kb)e^{iq\theta_{ij}}\end{bmatrix} b\,d\theta_{ij} \\ &= \frac{be^{i\vec{K}.\vec{d}_j}}{\left(k^2-K^2\right)}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^q\left[-KH_p^{(1)}(kb)J_q'(Kb)+kJ_q(Kb)H_p^{(1)}{}'(kb)\right]\int_0^{2\pi} e^{ip\left(\theta_{ji}-\pi\right)}e^{iq\theta_{ij}}d\theta_{ij} \\ &= \frac{be^{i\vec{K}.\vec{d}_j}}{\left(k^2-K^2\right)}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^q\left[-KH_p^{(1)}(kb)J_q'(Kb)+kJ_q(Kb)H_p^{(1)}{}'(kb)\right](-1)^p\,2\pi\delta_{p-q} \\ &= \frac{2\pi be^{i\vec{K}.\vec{d}_j}}{\left(k^2-K^2\right)}i^{-p}\left[-KH_p^{(1)}(kb)J_p'(Kb)+kJ_p(Kb)H_p^{(1)}{}'(kb)\right]\end{aligned} \tag{2.58}$$

L'intégrale sur le trajet L_{C_∞} est, quant à elle, nulle car il s'agit d'une intégrale oscillante sans point de phase stationnaire.

Il nous reste donc à exprimer les intégrales sur le trajet L_{D_0}.

Parcours L_{D_0}

Sur ce trajet, on a :

$$\begin{aligned}\vec{n}.\vec{\nabla} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \\ dl &= dy_i\end{aligned} \tag{2.59}$$

donc :

$$\vec{n}.\vec{\nabla}\left(e^{i\vec{K}\vec{d}_i}\right) = -iK \tag{2.60}$$

L'intégrale sur le contour L_{D_0} peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} I_{pD_0} &= \frac{1}{\left(k^2-K^2\right)} \int_{D_0} e^{ip\theta_{ji}} \left[-H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right) iK + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right)\right] dy_i \\ &= \frac{1}{\left(k^2-K^2\right)} \left[-iK + \frac{\partial}{\partial x_i}\right]_{x_i=0} \int_{D_0} e^{ip\theta_{ji}} \left[H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right] dy_i \end{aligned} \quad . \tag{2.61}$$

D'après l'annexe 2, avec K_y=0 et α=0, on a :

$$\begin{aligned} I_{pD_0} &= \frac{1}{\left(k^2-K^2\right)} \left[-iK + \frac{\partial}{\partial x_i}\right]_{x_i=0} \frac{2}{k} e^{-ip\frac{\pi}{2}} e^{ik\left(x_j-x_i\right)} \\ &= \frac{2i^{-p}}{\left(k^2-K^2\right)k} i\left[-K-k\right] e^{ikx_j} \end{aligned} \tag{2.62}$$

On peut alors rassembler les relations (2.58) et (2.62) pour exprimer les intégrales entières par :

$$I_p = \frac{2i^{-p}}{\left(k^2-K^2\right)} \left\{ -\frac{i}{k}\left(K+k\right) e^{ikx_j} - \pi b e^{iKx_j} \left[KJ_p^{'}\left(Kb\right) H_p^{(1)}\left(kb\right) - kJ_p\left(Kb\right) H_p^{(1)'}\left(kb\right)\right]\right\}$$

(2.63)

En reportant les expressions (2.63) dans (2.51), et en considérant que la relation obtenue est valable quelle que soit la valeur de x_j, on trouve les relations suivantes :

$$X_n = -\frac{2\pi b}{\left(k^2-K^2\right)} \frac{N-1}{S} \sum_p T^1_{(p+n)(p+n)} X_{p+n} \left[KJ_p^{'}\left(Kb\right) H_p^{(1)}\left(kb\right) - kJ_p\left(Kb\right) H_p^{(1)'}\left(kb\right)\right]$$

(2.64)

$$0 = 1 + \frac{2i}{k} \frac{N-1}{S} \left[-\frac{\left(K+k\right)}{\left(k^2-K^2\right)} \sum_p T^1_{pp} X_p \right] \tag{2.65}$$

Contrairement à la théorie précédente, le nombre d'onde effectif ne peut pas être exprimé de façon analytique, il faut résoudre l'équation caractéristique qui est :

$$Dét\left(I + \frac{2\pi b n_0}{\left(k^2-K^2\right)} AT^1 \right) = 0 \tag{2.66}$$

avec :

$$A_{nm} = \left[KJ_{m-n}^{'}\left(Kb\right) H_{m-n}^{(1)}\left(kb\right) - kJ_{m-n}\left(Kb\right) H_{m-n}^{(1)'}\left(kb\right)\right]. \tag{2.67}$$

et I la matrice identité. En utilisant la concentration, la relation (2.66) devient :

$$Dét\left(I + \frac{2bc}{\left(k^2-K^2\right)a^2} AT^1 \right) = 0 \tag{2.68}$$

Il est donc difficile de dire, *a priori*, les différences entre les nombres d'onde trouvés par chacune des trois théories (Foldy, relation (2.46), Waterman et Truell, relation (2.43), Fikioris et Waterman, relation(2.66)). La comparaison ne peut être que numérique. Pour cela, il faut fixer une valeur à la distance limite d'approche. C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant.

2.2 Valeur de la distance limite d'approche

On peut adopter deux critères pour fixer la valeur de la distance limite d'approche b. Le premier est qu'il faut empêcher les diffuseurs de se chevaucher. Le second est de jouer sur la répartition des diffuseurs dans la couche étudiée. Le premier critère se justifie amplement puisque, physiquement, il exclut des situations impossibles. Pour des diffuseurs cylindriques de rayon externe a comme ceux que nous étudions, la distance minimale entre deux centres de diffuseurs est $2a$. Il s'agit donc de la valeur minimale acceptable pour b.

Pour ce qui est du second critère, il est plus discutable. En effet, si on se sert de la distance limite d'approche pour modifier la répartition des diffuseurs, il y a contradiction avec la loi de répartition uniforme des diffuseurs car l'on crée des « zones de vides ». Dans un cas extrême, à concentration de diffuseur donnée, la répartition n'est plus aléatoire mais déterministe. En effet, b est la distance minimale entre deux diffuseurs mais, si on veut obtenir une concentration donnée, on impose une distance maximale entre les diffuseurs. Pour plus de compréhension, on peut observer la figure 2-4. Sur cette figure, on voit que lorsque b=12a, par exemple, on ne peut plus respecter la densité de diffuseurs de 2 diffuseurs par unité de surface. Il existe alors une valeur intermédiaire, ici b≈11a, telle que la position du deuxième diffuseur dans une unité de surface est imposée.

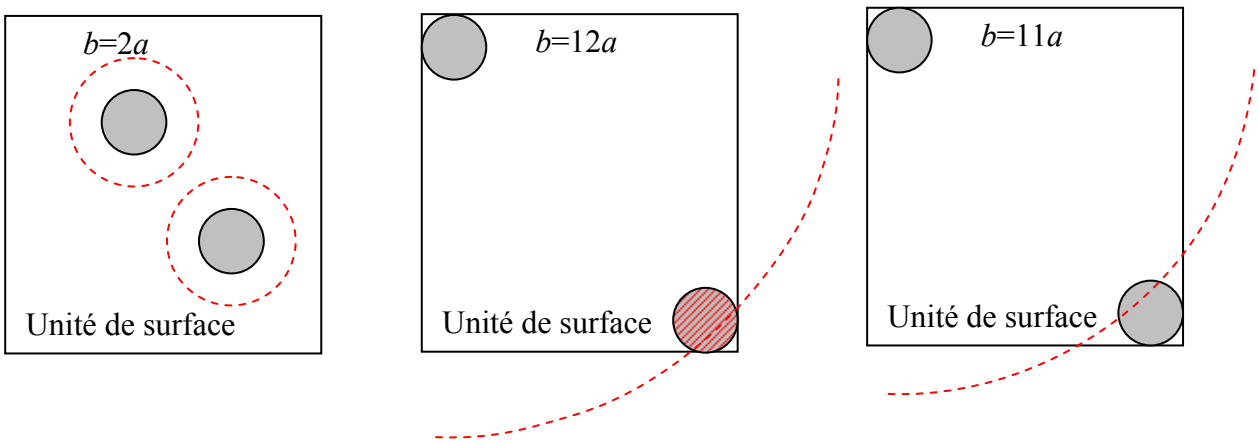


figure 2-4, illustration de la contradiction entre une grande valeur de la distance limite d'approche et une grande concentration de diffuseurs avec n_0=2 diffuseurs/unité de surface et b= 2a, b=11a et b=12a.

Dans les articles parus sur le sujet [45,46], tous les auteurs annoncent prendre $b=2a$, c'est-à-dire que pour eux, la distance limite d'approche sert simplement à éviter des situations matériellement impossibles. Afin de déterminer dans quelle mesure la valeur de b influence celle du nombre d'onde effectif, nous avons tracé sur la figure 2-5 l'atténuation (c'est-à-dire la partie imaginaire du nombre d'onde effectif K) liée aux solutions trouvées pour une valeur de $b=2a$ et pour la valeur de b qui correspond approximativement à la valeur maximale de b pour une densité donnée, cette valeur étant déterminée par la relation suivante :

$$b_{max} = \sqrt{\frac{4}{n_0 \pi}}, \tag{2.69}$$

ce qui revient à dire qu'une surface de 1 m^2 de la couche qui contient n_0 diffuseurs est divisée en n_0 cercles de diamètre b. La figure 2-5 est calculée pour des cylindres en acier inoxydable immergés dans l'eau avec les paramètres suivants :

rayon a=1 mm

masse volumique ρ=7916 kg/m^3

célérité des ondes longitudinales c_l=6000 m/s

célérité des ondes transversales c_t=3100 m/s

densité des diffuseurs : n_0=23000 cylindres/m^2, c=0,07.

Dans ce cas, b_{max}=5,1a.

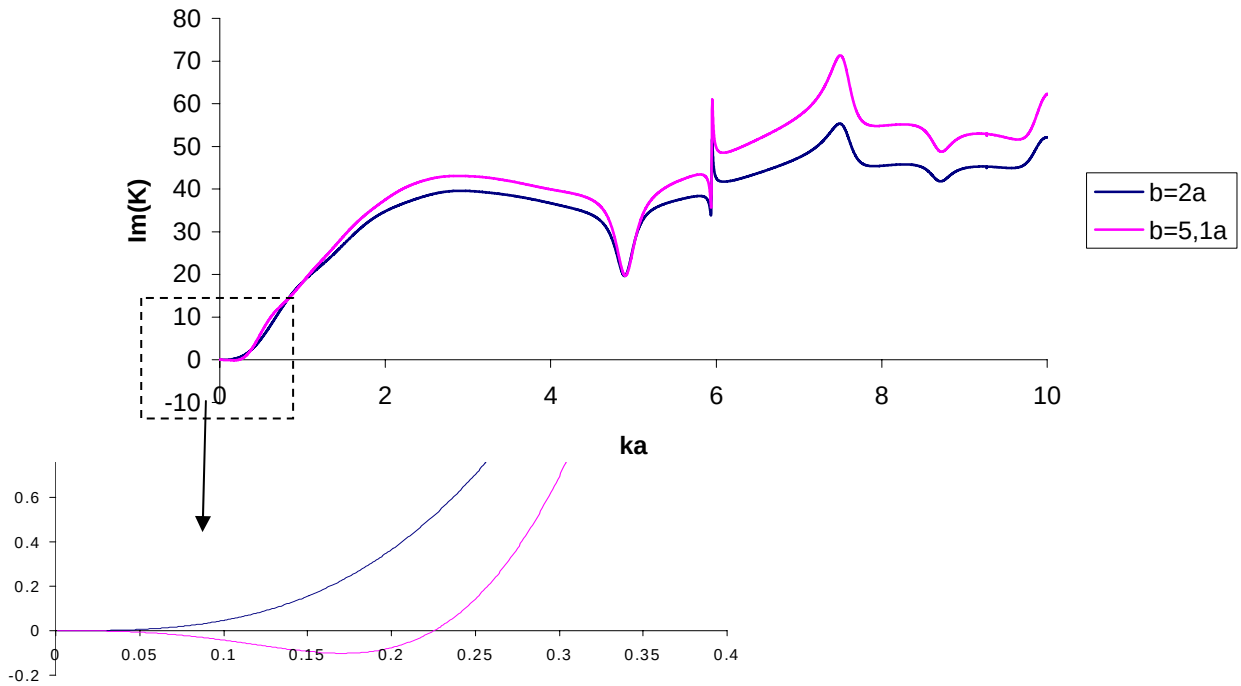


figure 2-5 Evolution de la partie imaginaire du nombre d'onde effectif en fonction de la fréquence réduite *ka* dans le cas de cylindres avec une densité de 23000 cylindres/m^2 (*c*=0,07), et deux valeurs de la distance limite d'approche. *b=2a* en bleu foncé et b_{max}=*5,1a* en magenta.

Ainsi que l'on peut le voir, pour des valeurs de la distance limite d'approche élevée, la partie imaginaire du nombre d'onde effectif, c'est-à-dire l'atténuation de l'onde effective, est négative en basse fréquence, ce qui revient à dire que l'amplitude de l'onde augmente avec sa propagation. Un tel résultat n'est pas acceptable physiquement. Par la suite, nous allons limiter notre étude au cas $b=2a$ pour des diffuseurs cylindriques car c'est la seule valeur à laquelle on peut apporter une justification physique.

L'introduction de la distance limite d'approche est la principale différence entre la théorie de Waterman et Truell et celle de Fikioris et Waterman. Si cette distance tend vers 0, nous devrions donc pouvoir faire le lien entre les résultats fournis par ces deux théories. Ce lien est l'objet du paragraphe suivant.

2.3 Lien entre les différentes théories

Pour faire le lien entre la théorie de Fikioris et Waterman et celle de Waterman et Truell, nous allons reprendre l'équation de dispersion (2.66) et regarder son évolution lorsque b tend vers 0. Pour cela, nous allons utiliser les développements limités pour de petits arguments des fonctions de Bessel :

$$\begin{aligned} J_n(z) &\simeq \left(\frac{1}{2}z\right)^n \frac{1}{n!} \\ H_n^{(1)}(z) &\simeq \left(\frac{1}{2}z\right)^{-n} \frac{1}{i\pi}(n-1)! \end{aligned} \tag{2.70}$$

et pour les fonctions dérivées :

$$\begin{aligned} J_n'(z) &\simeq \frac{z^{n-1}}{2^n}\frac{1}{(n-1)!} \\ H_n^{(1)}{}'(z) &\simeq -\frac{2^n}{i\pi} n! z^{-n-1} \end{aligned} . \tag{2.71}$$

Ces développements ne sont valables que pour des ordres strictement positifs. Dans le cas n=0, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} J_0(z) &\simeq 1 \\ H_0^{(1)}(z) &\simeq \frac{2i\ln(z)}{\pi} \end{aligned} \tag{2.72}$$

et

$$\begin{aligned} J_0'(z) &\simeq 0 \\ H_0^{(1)}{}'(z) &\simeq -\frac{2}{i\pi z} \end{aligned} . \tag{2.73}$$

A partir de ces expressions et de la relation (2.67), on peut établir les relations suivantes pour de faibles valeurs de b:

$$A_{nn} \simeq \frac{2}{i\pi b} \tag{2.74}$$

et

$$\begin{aligned} A_{\substack{nm \\ n\neq m}} &\simeq K(Kb)^{p-1}\frac{1}{i\pi}(kb)^{-p} + k(Kb)^{p}\frac{1}{i\pi}(kb)^{-p-1} \\ &\simeq \frac{2}{i\pi b}\left(\frac{K}{k}\right)^{|n-m|} \forall(n,m) \end{aligned} \tag{2.75}$$

On peut donc réécrire une équation de dispersion pour les petites valeurs de b sous la forme :

$$Dét\left(I - \frac{4in_0}{\left(k^2-K^2\right)}H\right) = 0 \tag{2.76}$$

avec

$$H_{nm} = \left(\frac{K}{k}\right)^{|n-m|} T^1_{mm}\,. \tag{2.77}$$

On va alors utiliser la méthode des cumulants [46] pour calculer le déterminant. Cette méthode donne :

$$Dét\left(I - \frac{4in_0}{\left(k^2-K^2\right)}H\right) = \sum_{q=0}^{+\infty} Q_q \tag{2.78}$$

avec Q_q le cumulant d'ordre q de la matrice $-\frac{4in_0}{\left(k^2-K^2\right)}H$ défini par :

$$Q_0 = 1 \tag{2.79}$$

$$Q_q = \frac{1}{q}\sum_{m=1}^{q}(-1)^{m+1} Q_{q-m}\,\mathrm{Tr}\left(\left(-\frac{4in_0}{\left(k^2-K^2\right)}H\right)^m\right) \tag{2.80}$$

où Tr représente la trace de la matrice.

Dans notre cas, on a :

$$Q_1 = \frac{4in_0}{\left(k^2-K^2\right)}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T^1_{nn} \tag{2.81}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}\left[Tr^2\left(-\frac{4in_0}{\left(k^2 - K^2\right)} \right) - Tr\left(\left(-\frac{4in_0}{\left(k^2 - K^2\right)} H \right)^2 \right) \right] \tag{2.82}$$

$$Dét\left(I - \frac{4in_0}{\left(k^2 - K^2\right)} H \right) = 1 - \frac{4in_0}{\left(k^2 - K^2\right)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{nn}^1 \tag{2.83}$$

Si on limite la somme de la relation (2.78) aux deux premiers termes, on trouve :

$$K^2 = k^2 - 4in_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{nn}^1 \ . \tag{2.84}$$

Cette relation peut encore s'écrire pour de faibles concentrations :

$$K = k - \frac{2in_0}{k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{nn}^1 \tag{2.85}$$

ce qui est la relation de dispersion de Foldy. Il n'existe cependant pas de justification physique ou numérique au fait de négliger les cumulants d'ordre supérieur. Il est surprenant de ne pas retrouver la relation de dispersion de Waterman et Truell. En effet, la démarche effectuée est similaire à celle de Waterman et Truell, on considère une surface d'exclusion autour de chaque diffuseur que l'on fait tendre ensuite vers zéro. Dans la théorie de Waterman et Truell, cette surface ne sert qu'à exclure une singularité mathématique. Pour Fikioris et Waterman, elle se justifie physiquement par l'impossibilité pour deux diffuseurs de s'interpénétrer. Faire tendre *b* vers zéro revient alors à considérer que les diffuseurs ont une taille nulle, on peut alors considérer que les diffuseurs sont en champ lointain les uns par rapport aux autres, hypothèse formulée par Foldy. Cependant, le lien entre la taille des diffuseurs et *b* n'est pas imposé mathématiquement, il n'explique donc pas que l'on retrouve la relation de dispersion de Foldy plutôt que celle de Waterman et Truell. Ce calcul a tout de même l'avantage de confirmer que les hypothèses des trois théories sont très proches. Nous allons maintenant nous attacher à montrer que, même s'il n'y a que peu de différences dans les approches de ces théories, les résultats diffèrent notamment lorsque la concentration de diffuseurs augmente.

2.4 Résultats numériques

Afin de mieux évaluer les différences entre les théories, nous allons nous intéresser à deux grandeurs issues du nombre d'onde effectif. La première est la vitesse de propagation effective définie par :

$$c_{eff} = \frac{\omega}{K'}, \tag{2.86}$$

où K'=Re(K) est la partie réelle du nombre d'onde effectif et ω, la pulsation. La deuxième est l'atténuation qui est tout simplement K'', la partie imaginaire de K. Nous regarderons aussi le libre parcours moyen élastique défini par :

$$L_s = \frac{1}{K''}, \tag{2.87}$$

c'est-à-dire l'inverse de l'atténuation. Cette quantité est importante pour connaître la distance sur laquelle l'onde effective va se propager avant d'être trop atténuée pour être perceptible. En effet, le libre parcours moyen élastique représente la distance parcourue par l'onde avant que son amplitude ait été divisée par e.

2.4.1 Vitesse effective

Le premier paramètre du milieu effectif que nous allons observer est la vitesse effective. La figure 2-6 montre l'évolution de cette vitesse normée par la vitesse $c_0=\omega / k$ dans le fluide extérieur en fonction du nombre d'onde dans le fluide extérieur pour les trois théories et pour deux types de cibles, des cylindres et des tubes de rapport r_{ab}=0,9 dont les paramètres sont identiques à ceux du premier chapitre.

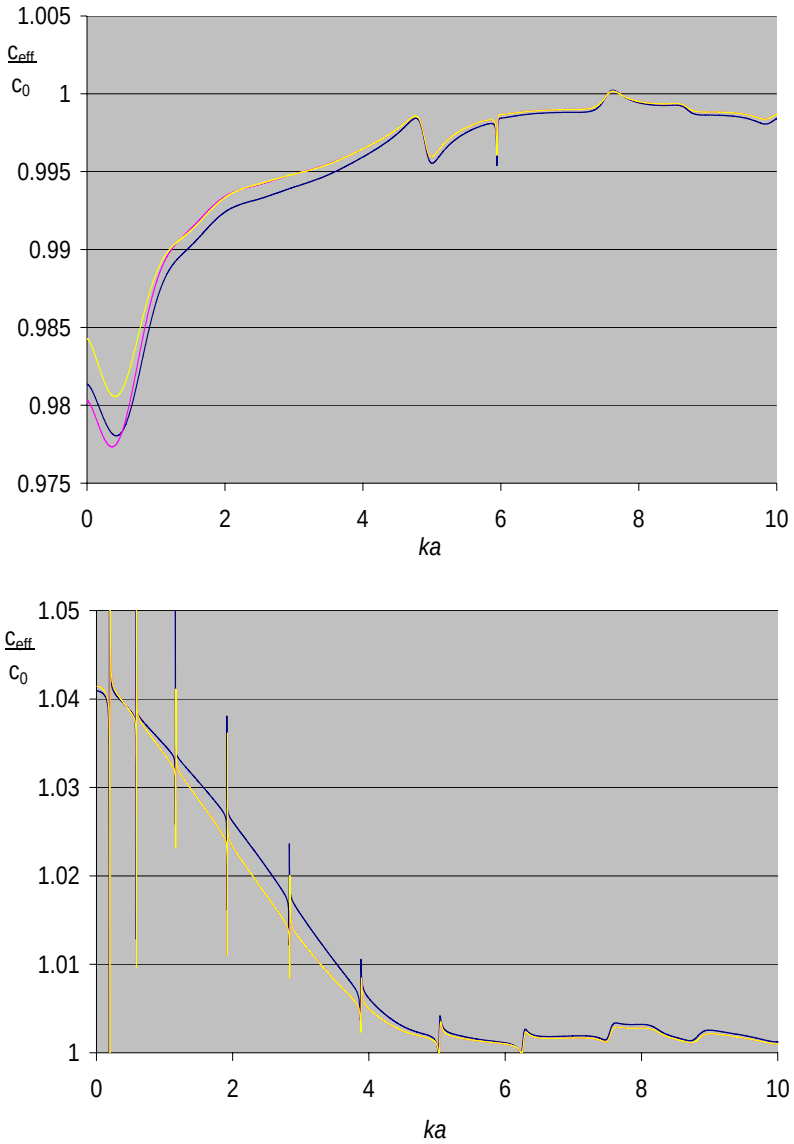


figure 2-6 évolution de la vitesse de phase effective normée en fonction de la fréquence pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu). En haut, les diffuseurs sont des cylindres, en bas des tubes. La densité de diffuseurs est de 23000 diffuseurs/m^2 (c=0,07)

Sur cette figure, on constate que les trois théories donnent des résultats similaires. De manière générale, la vitesse effective reste proche de c_0, ce qui peut s'expliquer par la faible concentration de diffuseurs, le milieu effectif étant donc majoritairement composé du fluide extérieur. La différence maximale, dans ce cas, avec la vitesse c_0 est de 2 à 4%, il va donc être difficile de la mesurer précisément expérimentalement.

On voit que les résultats donnés par la théorie de Foldy et par celle de Waterman et Truell sont les plus proches. Ceci justifie le fait que l'on peut négliger la rétro-diffusion par

rapport à la diffusion vers l'avant, surtout dans le cas des tubes. Cependant, en basses fréquences, les résultats de la théorie de Foldy se rapprochent de ceux donnés par la théorie de Fikioris et Waterman, ce qui peut se justifier par l'étude du paragraphe précédent. En effet, *b* n'intervient que dans des produits *kb* ou *Kb*. Une étude en basse fréquence de la relation de dispersion de Fikioris et Waterman doit donc aboutir à un résultat similaire à celui d'une étude pour de faibles valeurs de *b,* c'est-à-dire à un passage de la théorie de Fikioris et Waterman à celle de Foldy. La vitesse effective est différente de la vitesse c_0 dans le milieu extérieur, mais tend vers c_0 à plus haute fréquence. Les accidents sur chacune des courbes correspondent aux fréquences de résonances d'une cible seule. On peut noter que si l'onde effective est plus lente que l'onde incidente dans le cas de cylindres, elle est plus rapide dans le cas de tubes.

Pour voir apparaître des différences plus importantes entre les théories, nous allons maintenant observer les vitesses effectives prévues par chacune d'elles lorsque la densité de diffuseurs augmente. Ceci est présenté sur la figure 2-7 dans le cas des cylindres pour une fréquence réduite de *ka*=4,4.

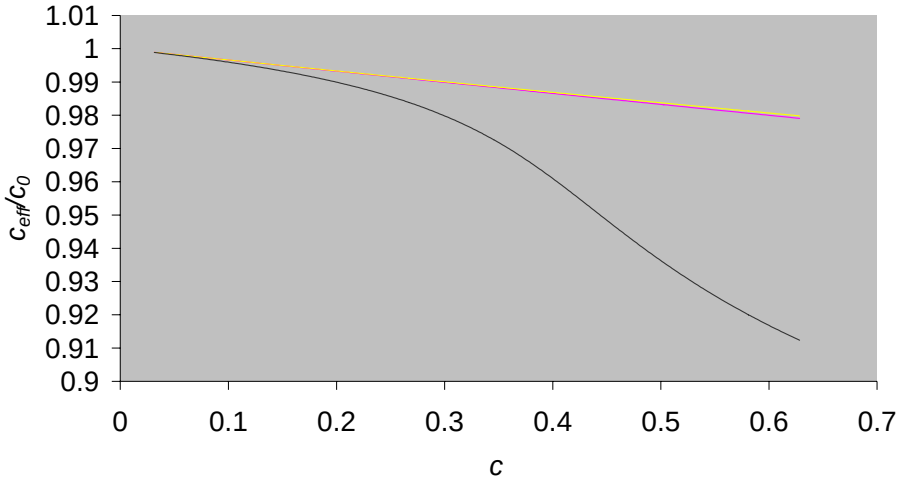


figure 2-7 évolution de la vitesse de phase effective normée en fonction de la concentration de cylindres pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu) pour une fréquence réduite de 4,4.

Les trois théories donnent, en effet, des résultats très voisins pour de faibles concentrations de diffuseurs. Ce n'est que lorsque la concentration augmente que les différentes hypothèses émises prennent de l'importance. Cependant, les vitesses de Foldy et de Waterman et Truell restent proches et permettent donc de conclure qu'il est légitime de

considérer la diffusion vers l'avant comme prépondérante par rapport à la diffusion vers l'arrière. L'apport de la théorie de Waterman et Truell par rapport à celle de Foldy est faible dans ce cas. Au contraire, la prise en compte de la taille des diffuseurs par la théorie de Fikioris et Waterman provoque une variation de la vitesse effective notablement différente pour de grandes densités de diffuseurs. Ceci est visible sur la figure 2-8 qui montre l'évolution des vitesses de phases effectives en fonction de la fréquence réduite pour une concentration de 0,25.

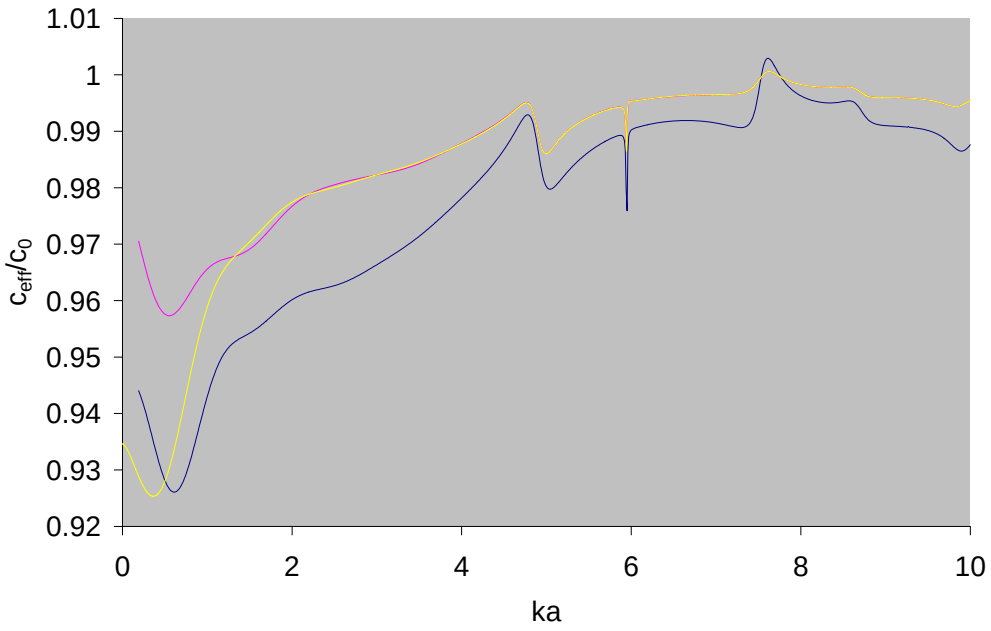


figure 2-8 évolution de la vitesse de phase effective normée en fonction de la fréquence réduite *ka* pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu). La concentration de cylindres est 0,25.

On voit alors qu'en basses fréquences, lorsque la longueur d'onde de l'onde incidente est grande devant la taille des diffuseurs ($ka>2\pi$), la taille des diffuseurs importe peu et la théorie de Waterman et Truell est plus proche de celle développée par Fikioris et Waterman que de celle de Foldy. Dès que cette longueur d'onde est de l'ordre de quelques rayons de diffuseurs, il y a alors une séparation nette entre la théorie de Fikioris et Waterman et les deux autres car elle est la seule à prendre en compte la taille des diffuseurs.

Le cas des tubes devient, quant à lui, plus complexe lorsque la densité de diffuseurs augmente. En effet, nous avons vu dans le premier chapitre que lorsque des tubes identiques sont proches les uns des autres, il peut se produire un couplage entre les tubes. Or, lorsque la

concentration de diffuseurs augmente, la distance entre les tubes diminue globalement. Parmi les trois théories présentées, seule la théorie de Fikioris et Waterman permet d'envisager plusieurs ondes effectives. En effet, le nombre d'onde effectif étant la solution d'une équation homogène, rien ne s'oppose à ce que cette équation ait plusieurs solutions ; et c'est le cas lorsque les diffuseurs sont des tubes et que leur densité est élevée. La figure 2-9 montre les vitesses effectives obtenues pour les trois théories dans le cas des tubes.

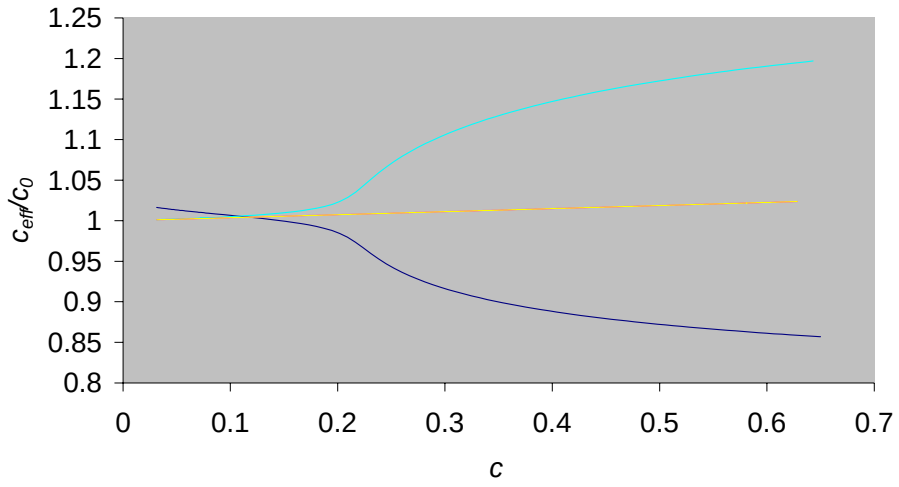


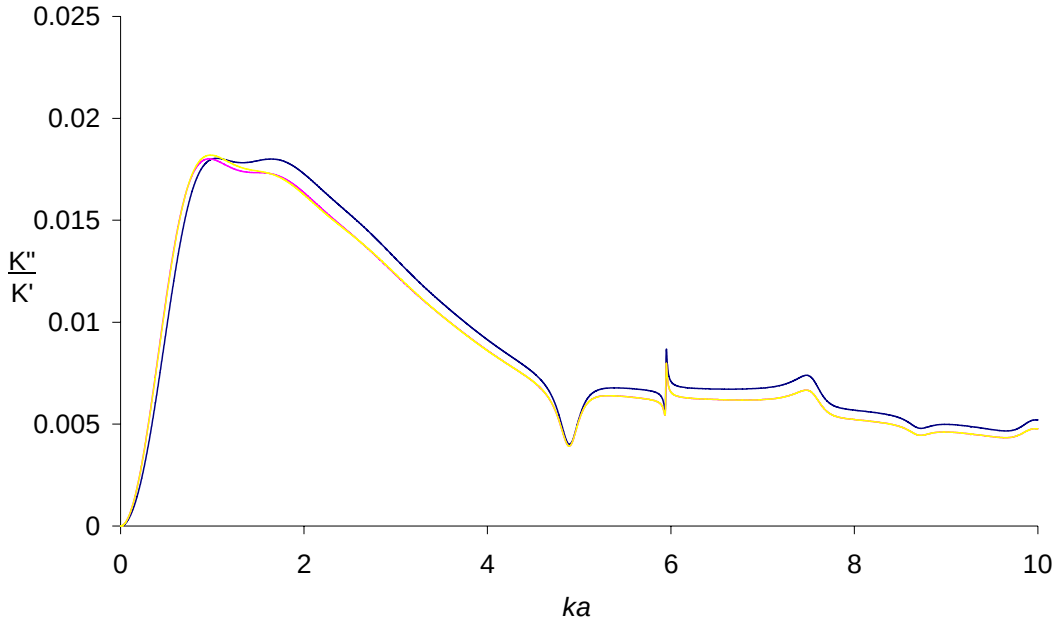
figure 2-9 évolution de la vitesse de phase effective normée en fonction de la concentration en tubes pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu clair et bleu foncé) pour une fréquence réduite de 4,4.

Sur cette figure, on ne voit plus les différences entre les théories de Foldy et de Waterman et Truell en raison des échelles, mais on voit clairement l'importance de prendre en compte la taille des diffuseurs pour des milieux denses. Il existe alors deux vitesses effectives dont l'une (courbe en bleu clair) se confond avec celle trouvée par les deux autres théories en milieu dilué ($c \lesssim 0{,}15$). Nous appellerons cette solution « première » solution (bleu clair) et l'autre, bien évidemment, « seconde » solution (bleu foncé). Ce résultat est similaire à ceux de Jing *et al.*[47][48] sur des sphères en suspension. Ils observent deux « quasimodes », l'un qu'ils appellent haute fréquence, et qui correspond à notre première solution, a la courbe de dispersion la plus proche de celle du milieu environnant. Leur autre solution, appelée «basse fréquence, correspond à notre seconde solution avec une vitesse inférieure à celle du milieu extérieur. Ce second mode est lié à un couplage résonant entre les diffuseurs.

Il est important de rappeler que les ondes se propageant dans le milieu multi-diffuseur sont de type longitudinal puisqu'il n'y a pas continuité de la phase solide. La théorie de Fikioris et Waterman prévoit donc deux ondes de type longitudinal, l'une à une vitesse plus grande que la vitesse dans le fluide, et l'autre à une vitesse inférieure. Ceci peut faire penser aux milieux poreux pour lesquels on considère qu'il existe deux ondes longitudinales et une onde transversale ; en considérant un milieu environnant solide et non plus fluide, il paraît alors envisageable de faire une transition entre un milieu multi-diffuseur et un milieu poreux. Il reste cependant à vérifier que ces ondes vont bien se propager dans le milieu et non pas être atténuées sur des distances telles qu'elles soient négligeables. C'est l'objet du paragraphe suivant dans lequel nous allons étudier les atténuations des différentes ondes effectives trouvées.

2.4.2 Atténuation effective et libre parcours moyen élastique

Dans le paragraphe précédent, nous avons exploité la partie réelle du nombre d'onde effectif calculé. Nous allons maintenant nous intéresser à sa partie imaginaire, qui est directement l'atténuation effective du milieu multi-diffuseur. La figure 2-10 présente l'évolution de l'atténuation effective normée par la partie réelle du nombre d'onde effectif en fonction de la fréquence pour une concentration de diffuseurs de 0,07. L'intérêt de cette représentation est de savoir si une onde est propagative ou non. En effet, le rapport partie imaginaire du nombre d'onde sur partie réelle est proportionnel au produit atténuation par longueur d'onde effective. Ainsi, si ce rapport vaut 1, l'onde verra son amplitude divisée par e sur une distance correspondant à une longueur d'onde. Elle ne sera donc pas considérée comme propagative. De manière générale, on considère qu'une onde va se propager si le rapport considéré est inférieur à 0,1.



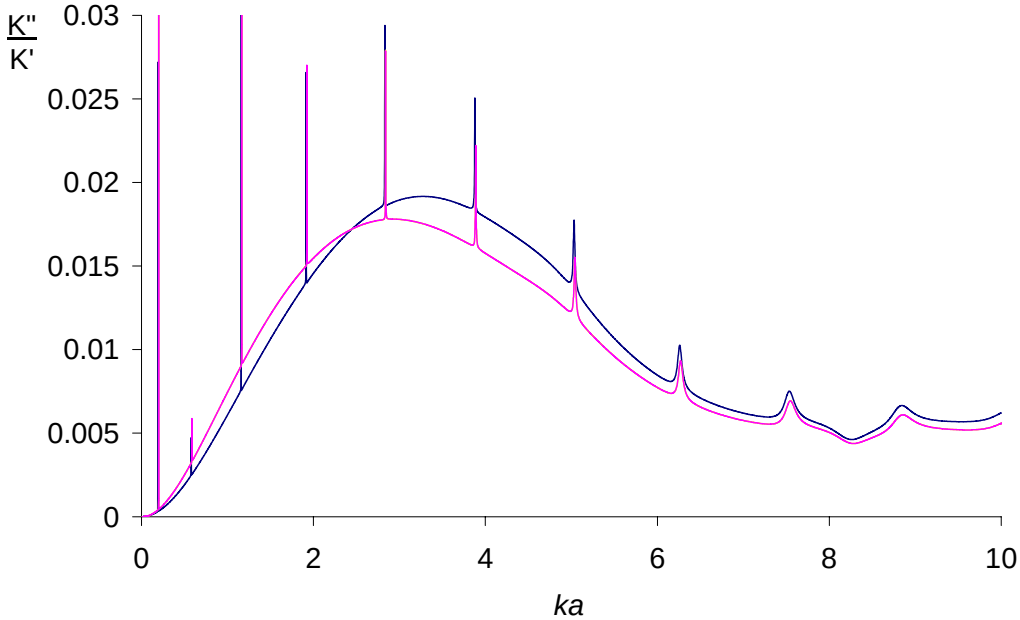


figure 2-10 évolution de l'atténuation effective normée en fonction de la fréquence pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu). En haut, les diffuseurs sont des cylindres, en bas des tubes. La densité de diffuseurs est de 23000 diffuseurs/m^2, *c*=0,07

Sur cette figure, on voit apparaître que dans tous les cas et pour toutes les théories, l'onde effective trouvée est propagative. On peut noter que l'atténuation la plus élevée correspond au cas de la théorie de Fikioris et Waterman. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'il s'agit de la seule théorie qui prenne en compte la taille réelle des diffuseurs, non seulement par l'intermédiaire de la matrice de transition mais aussi dans la loi de répartition conditionnelle des positions des centres des diffuseurs. En effet, si on interdit l'interpénétration entre deux diffuseurs, l'espace total occupé par l'ensemble des diffuseurs va être plus important. L'onde incidente verra donc un milieu plus dense et donc plus atténuateur. De même que pour les vitesses, la différence entre les théories est faible surtout entre celle de Foldy et celle de Waterman et Truell, et les accidents des courbes sont liés aux fréquences de résonances d'un diffuseur seul.

Une autre représentation de l'influence de la valeur de la partie imaginaire du nombre d'onde effectif sur la propagation de l'onde effective est de considérer le libre parcours moyen élastique. Ce dernier représente, en effet, la distance parcourue par l'onde effective avant que son amplitude soit divisée par e. Pour le représenter, nous avons choisi de le normaliser par le rayon d'un diffuseur afin de déterminer le nombre maximal de diffuseurs rencontrés par l'onde effective avant une telle atténuation. La figure 2-11 présente l'évolution du libre parcours moyen élastique en fonction de la fréquence pour des situations identiques à celles étudiées précédemment.

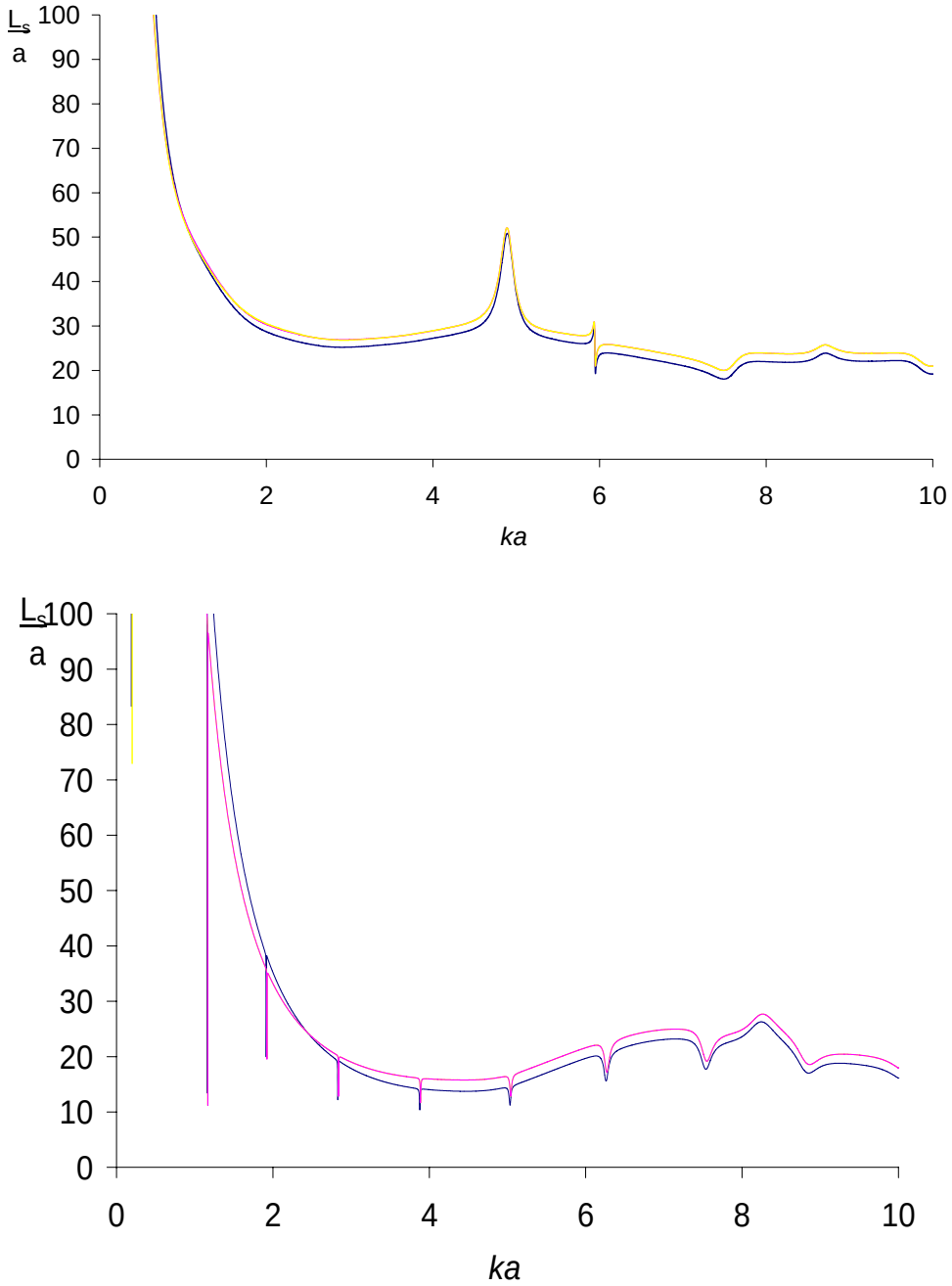


figure 2-11 évolution du libre parcours moyen élastique en fonction de la fréquence pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu). En haut, les diffuseurs sont des cylindres, en bas des tubes. La densité de cylindres est de 23000 diffuseurs/m^2

Cette représentation met moins clairement en évidence les différences entre théories. Comme sur les courbes présentées précédemment, on peut retrouver l'influence des fréquences de résonance d'un diffuseur. L'information principale à extraire de ces courbes est que l'onde effective parcourt une distance d'au moins 14*a* avant de voir son amplitude divisée

par e, c'est-à-dire qu'elle rencontrera moins de 7 diffuseurs. Nous allons maintenant étudier l'évolution des atténuations des ondes effectives présentées ci-dessus en fonction de la densité des diffuseurs. La figure 2-12 présente cette évolution ainsi que celle du libre parcours moyen élastique dans le cas de cylindres.

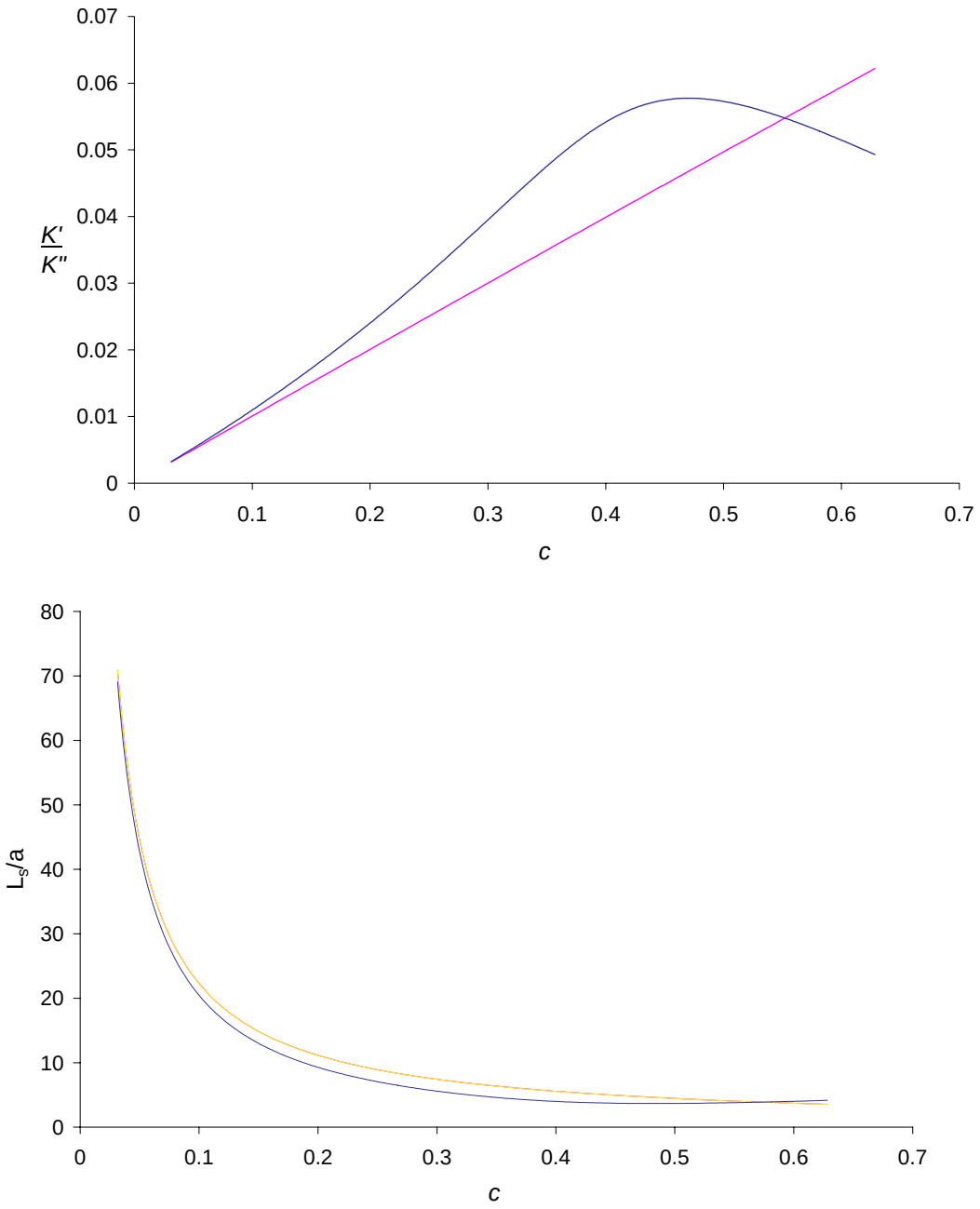


figure 2-12 évolution de l'atténuation effective normée (en haut) et du libre parcours moyen élastique (en bas) en fonction de la densité de diffuseurs pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu). La fréquence réduite est de 4,4.

Sur cette figure, nous pouvons observer que, comme pour les vitesses, les théories de Foldy et de Waterman et Truell donnent des résultats quasiment identiques. De même, la théorie de Fikioris et Waterman, si elle coïncide avec les deux autres à faible densité, donne des résultats différents pour des milieux denses. Cependant, toutes les théories prévoient une augmentation de l'atténuation avec la densité de diffuseurs. La partie surprenante de la figure 2-12 est la décroissance de l'atténuation pour des concentrations en diffuseurs supérieures à 0,45 pour la théorie de Fikioris et Waterman. Ceci est un phénomène déjà observé par F. Vander Meulen [49][50] et Tsang et Kong [45]. Il s'agit en fait d'une limitation de cette théorie qui peut être repoussée si l'on remplace, comme ils le font, la densité de probabilité conditionnelle (2.50) par une fonction continue en fonction de la distance entre les centres des diffuseurs. Une telle densité de probabilité est, par exemple, la fonction de Percus-Yevick[51]. Cette fonction fournie une densité de probabilité telle qu'il est plus probable de trouver un diffuseur loin d'un diffuseur donné que proche. Elle interdit l'interpénétration de deux diffuseurs tout en étant continue. F. Vander Meulen et Tsang et Kong trouvent alors une solution qui se confond avec celle présentée ici pour de faibles concentrations mais qui ne décroît que pour des concentrations plus grandes que celles que nous constatons. On va alors supposer que nos résultats ne sont valides que pour des concentrations telles que les résultats trouvés avec la densité de probabilités que nous avons choisie et celle proposée par Percus-Yevcik coïncident, c'est-à-dire lorsque l'atténuation est croissante. On peut noter, cependant, qu'il existe un domaine de densités où les résultats de cette théorie sont valides et différents des résultats donnés par les théories de Foldy et de Waterman et Truell.

Contrairement aux vitesses de phase effectives, il n'y a pas de différence visible entre les théories de Waterman et Truell et de Foldy même en basse fréquence et pour des concentrations élevées comme le montre la figure 2-13.

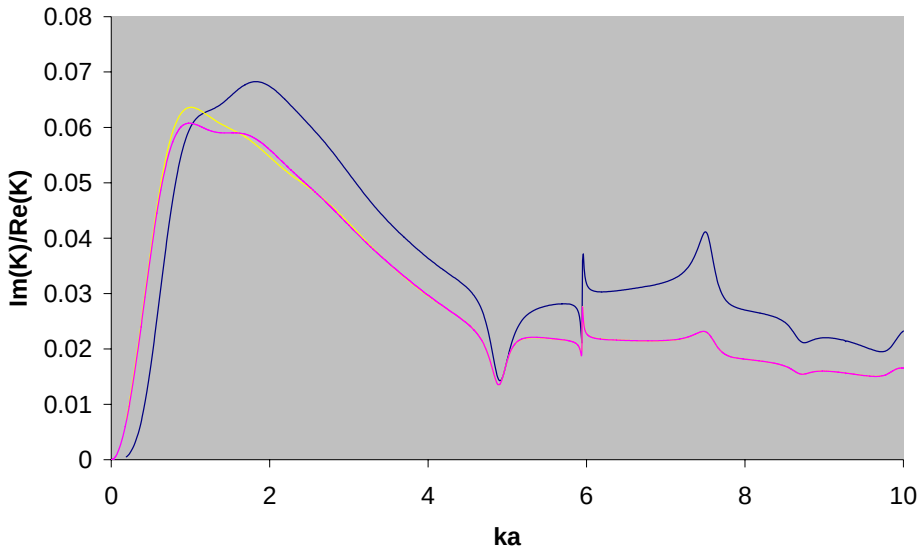


figure 2-13 évolution de l'atténuation effective normée en fonction de la fréquence pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (en bleu). La densité de cylindres est de 80000 diffuseurs/m^2.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas des tubes afin de voir quelles sont les évolutions pour les deux solutions trouvées avec la théorie de Fikioris et Waterman. La figure 2-14 représente l'atténuation et le libre parcours élastique moyen en fonction de la densité de diffuseurs.

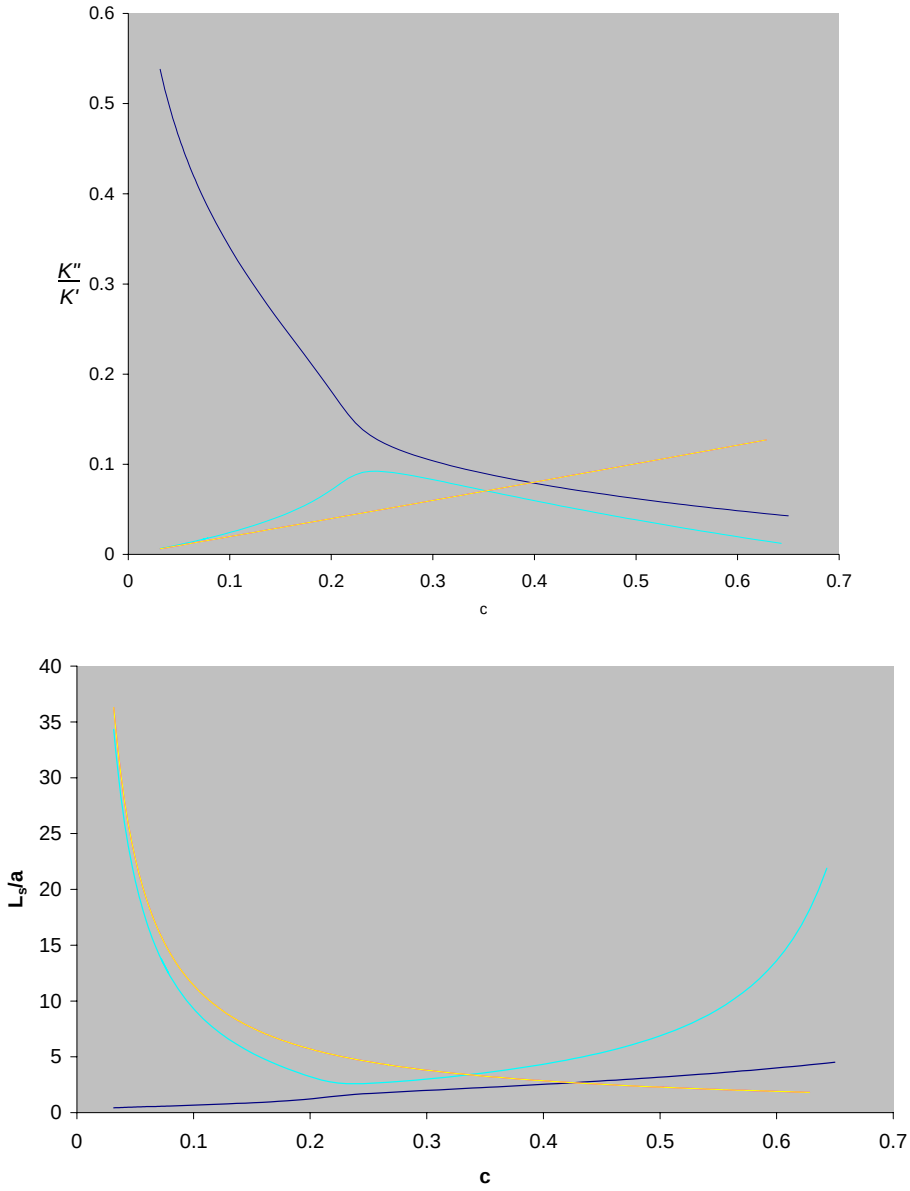


figure 2-14 évolution de l'atténuation effective normée (en haut) et du libre parcours moyen élastique (en bas) en fonction de la densité de tubes pour les théories de Foldy (en magenta), Waterman et Truell (en jaune) et Fikioris et Waterman (première solution en bleu clair, deuxième en bleu foncé). La fréquence est de 4,4.

Sur cette figure, on observe un comportement similaire au cas des cylindres. Ici, il est intéressant de regarder le comportement de la deuxième solution de Fikioris et Waterman (bleu foncé). On peut en effet voir que pour des milieux dilués, cette solution est trop atténuée pour se propager. Elle ne se propage donc pas et l'on retrouve bien qu'un milieu très dilué a des caractéristiques proches de celles du milieu sans diffuseurs. Pour des densités de

diffuseurs plus importantes, l'atténuation de la deuxième solution devient suffisamment faible pour qu'elle se propage et qu'on ne puisse plus la négliger. Cependant, ceci intervient après que l'atténuation de la première solution se soit mise à décroître. En se référant aux travaux de F. Vander Meulen et de Tsang et Kong, nous sommes alors en dehors des limites de la théorie de Fikioris et Waterman. Malheureusement, Vander Meulen et Tsang et Kong n'ont pas étudié de cas comportant deux solutions avec la fonction de Percus-Yevick comme densité de probabilité conditionnelle. Il est donc difficile de savoir s'il existe des conditions telles qu'il y ait bien deux ondes effectives qui se propagent dans le milieu étudié.

Nous allons maintenant nous intéresser à deux grandeurs accessibles expérimentalement, les coefficients de réflexion et de transmission d'une couche de milieu multi-diffuseur. Pour cela, nous allons utiliser la théorie qui prend en compte le plus d'hypothèses « réalistes », c'est-à-dire celle de Fikioris et Waterman. Mais avant, nous allons faire une dernière comparaison entre les trois théories sur les temps de calcul nécessaire à la détermination du nombre d'onde effectif.

2.5 Etude comparée des temps de calcul

Un des paramètres importants dans le choix de l'une des théories présentée ici, est le temps nécessaire à l'obtention du nombre d'onde effectif. Dans la théorie de Fikioris et Waterman, le nombre d'onde est la racine d'un déterminant. La recherche est faite de façon numérique par un algorithme de type Newton-Raphson dans le plan complexe. Il est donc nécessaire de calculer plusieurs déterminants avant de trouver la valeur du nombre d'onde faisant converger l'algorithme. De plus cet algorithme nécessite un point de départ. Dans notre cas, nous choisissons de prendre la valeur du nombre d'onde de Waterman et Truell pour la première valeur, puis d'utiliser la valeur précédente pour les suivantes. Ceci va bien évidemment jouer sur le temps de calcul comme nous allons le voir. Pour les deux autres théories, l'expression du nombre d'onde effectif est explicite, le calcul est donc beaucoup plus rapide. C'est ce que l'on retrouve sur la figure 2-15 qui montre le temps de calcul nécessaire pour trouver les nombres d'onde effectifs lorsque les diffuseurs sont des cylindres, avec une densité de 23 000 diffuseurs/m^2 (c=0,07), pour des fréquences réduites variant de 10^{-3} à 10 par pas de 10^{-3}. La machine utilisée est équipée d'un processeur Pentium IV cadencé à 2,8 GHz et de 256 Mo de RAM.

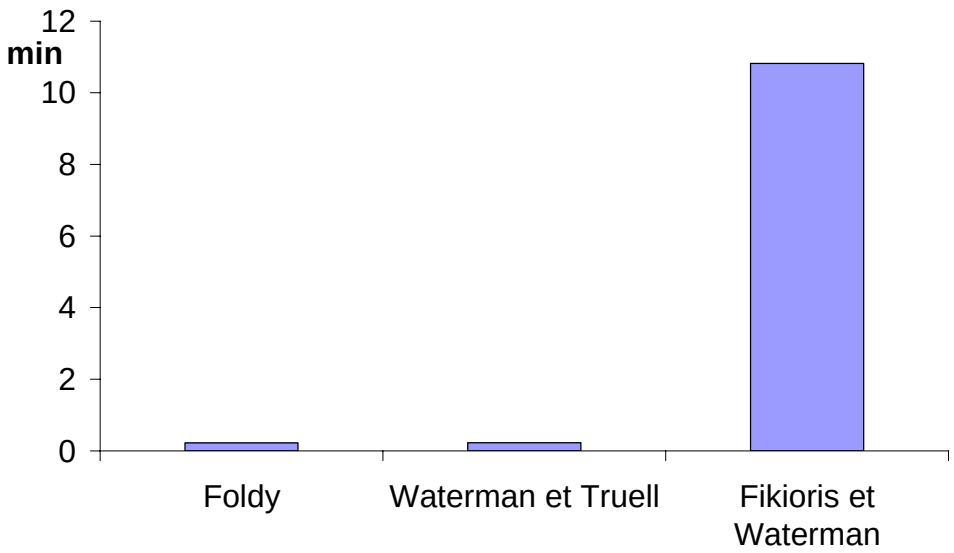


figure 2-15, comparaison des temps de calculs nécessaires pour obtenir le nombre d'onde effectif avec les différentes théories pour un milieu constitué de cylindres avec une densité de 23 000 diffuseurs/m^2 (*c*=0,07) et une variation de la fréquence réduite de 10^{-3} à 10 par pas de $10^{-3.}$

On s'aperçoit alors qu'il faut 50 fois plus de temps avec la théorie de Fikioris et Waterman qu'avec celle de Foldy ou celle de Waterman et Truell. Il faut donc faire un choix en fonction de la densité de diffuseurs pour choisir la théorie la plus rapide donnant des résultats valables. En considérant les résultats des paragraphes précédents, on peut dire que pour de faibles concentrations de diffuseurs, il est plus avantageux de choisir la théorie de Foldy ou celle de Waterman et Truell. En effet, nous avons vu que pour des concentrations inférieures à 0,08, il n'y a que peu de différences entre les trois théories présentées ici. Pour des milieux à plus forte densité, lorsque la longueur d'onde de l'onde incidente est grande devant la taille des diffuseurs, la théorie de Waterman et Truell est satisfaisante, mais lorsque la longueur d'onde devient de l'ordre de quelques rayons de diffuseurs, il est nécessaire d'utiliser la théorie de Fikioris et Waterman malgré son temps de calcul bien supérieur.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des résultats numériques obtenus pour trois théories de milieu effectif proches. Celle de Foldy est la plus « rudimentaire ». Elle néglige la diffusion vers l'arrière au profit de celle vers l'avant et impose aux diffuseurs d'être en champ lointain les uns par rapport aux autres. Celle de Waterman et Truell supprime ces deux

hypothèses. Ces deux théories ont l'avantage de fournir une formulation explicite du nombre d'onde effectif. La théorie de Fikioris et Waterman, quant à elle, prend en compte la taille des diffuseurs. Les différences entre ces trois théories ne sont visibles que pour de grandes densités de diffuseurs. Dans tous les cas, les fréquences de résonance d'un diffuseur sont visibles sur les évolutions de la vitesse et de l'atténuation effectives en fonction de la fréquence. La théorie de Fikioris et Waterman est celle qui nécessite le plus de temps de calcul. Cependant, étant donné que c'est celle qui pose le plus d'hypothèses permettant de se rapprocher d'un milieu réel, nous avons choisi cette théorie pour l'étude d'une couche de milieu multi-diffuseur. C'est ce que nous présentons dans le chapitre suivant.

3 Etude d'une couche de milieu multi-diffuseur avec la théorie de Fikioris et Waterman

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté deux théories de milieu effectif. La théorie de Fikioris et Waterman est la seule qui prenne en compte la taille des diffuseurs. C'est celle que nous avons choisi de développer. Nous allons maintenant nous attacher à déterminer les ondes réfléchie et transmise par une couche de diffuseurs aléatoirement répartis. La première étape va donc consister à reprendre la théorie de Fikioris et Waterman en considérant qu'il peut y avoir, dans le milieu, une onde « réfléchie » sur la deuxième interface de cette couche. Puis, nous exprimerons les champs présents des deux côtés de la couche. Ceci va nous permettre de déterminer l'expression des coefficients de réflexion et de transmission. Nous montrerons de plus que ces coefficients peuvent se mettre sous une forme analogue à ceux d'une plaque fluide immergée dans un fluide.

3.1 Théorie de Fikioris et Waterman pour une couche de milieu multi-diffuseur

Nous sommes maintenant dans la configuration présentée figure 3-1. Les diffuseurs sont contenus dans une surface d'extension infinie selon y mais comprise entre 0 et d selon x. L'onde incidente est incidente selon un angle α. Son vecteur d'onde est donc :

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} k_x = k\cos\alpha \\ k_y = k\sin\alpha \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

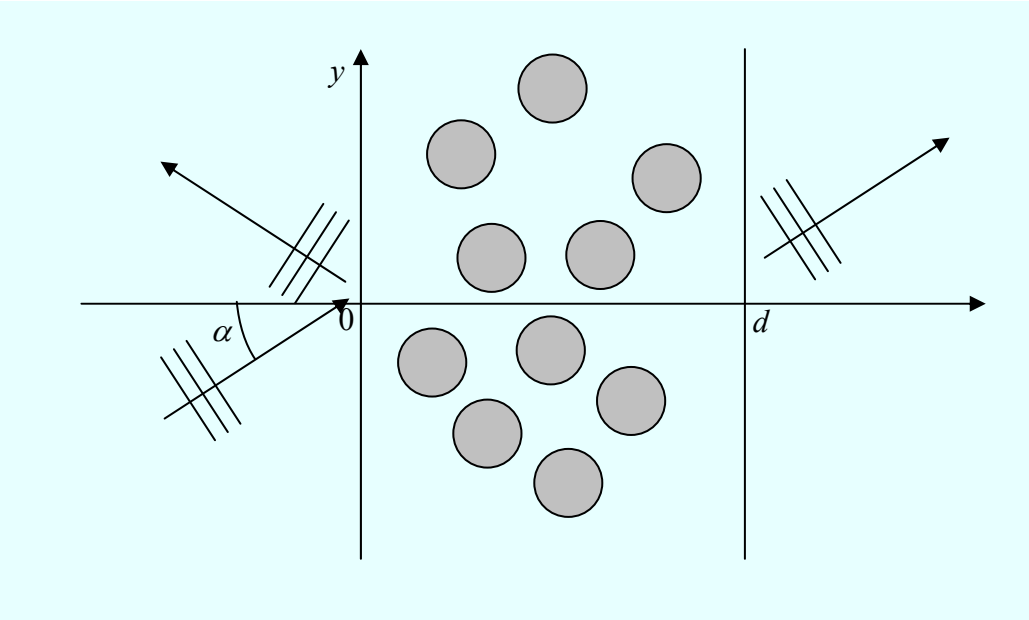


figure 3-1 présentation de la couche de milieu multi-diffuseur

Nous allons, cette fois, supposer que l'onde se propageant dans le milieu effectif est constituée de deux ondes planes, l'une se propageant vers les x croissants sous un angle β, l'autre se propageant vers les x décroissants sous le même angle, elle s'écrit alors :

$$\left\langle C_n^{(j)} \right\rangle_j = i^n e^{-in\beta} X_n^+ e^{i\overrightarrow{K^+}.\vec{d}_j} + i^{-n} e^{in\beta} X_n^- e^{i\overrightarrow{K^-}.\vec{d}_j} \tag{3.2}$$

avec :

$$\overrightarrow{K^+} = \begin{cases} K_x = K\cos\beta \\ K_y = K\sin\beta \end{cases} \qquad \overrightarrow{K^-} = \begin{cases} -K_x \\ K_y \end{cases} . \tag{3.3}$$

La loi de Snell-Descartes impose :

$$k_y = K_y \tag{3.4}$$

c'est-à-dire :

$$k\sin\alpha = K\sin\beta . \tag{3.5}$$

la relation (2.15) devient donc :

$$i^n e^{-in\beta} X_n^+ e^{i\overrightarrow{K^+}.\vec{d}_j} + i^{-n} e^{+in\beta} X_n^- e^{i\overrightarrow{K^-}.\vec{d}_j} = e^{i\vec{k}.\overrightarrow{d_j}} i^n e^{-in\alpha}$$
$$+ \frac{N-1}{S} \sum_m T_{mm}^1 \int_{S'} G_{mn}^{(ji)} \left(i^m e^{-im\beta} X_m^+ e^{i\overrightarrow{K^+}.\vec{d}_i} + i^{-m} e^{+im\beta} X_m^- e^{i\overrightarrow{K^-}.\vec{d}_i} \right) d\vec{d}_i \tag{3.6}$$

En introduisant les expressions des coefficients $G_{nm}^{(ji)}$ et en posant $p=m-n$, on a :

$$\begin{aligned} &X_n^+ e^{i\overrightarrow{K^+}.\vec{d}_j} + (-1)^{-n} e^{+2in\beta} X_n^- e^{i\overrightarrow{K^-}.\vec{d}_j} = e^{i\vec{k}.\vec{d}_j} e^{-in\alpha} e^{in\beta} + \\ &\frac{N-1}{S} \sum_p T^1_{(p+n)(p+n)} \int_{S'} e^{ip\theta_{ji}} H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\left(i^{p-n} e^{ip\beta} X_m^+ e^{i\overrightarrow{K^+}.\vec{d}_i} + i^{-p} e^{+i(2n+p)\beta} X_m^- e^{i\overrightarrow{K^-}.\vec{d}_i}\right) d\vec{d}_i \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ce que l'on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} &X_n^+ e^{i\overrightarrow{K^+}.\vec{d}_j} + (-1)^{-n} e^{2in\beta} X_n^- e^{i\overrightarrow{K^-}.\vec{d}_j} = e^{i\vec{k}.\vec{d}_j} e^{-in\alpha} e^{in\beta} + \\ &\frac{N-1}{S}\left[\sum_p T^1_{(p+n)(p+n)} i^p e^{-ip\beta} X_{p+n}^+ I_p^+ + \sum_p T^1_{(p+n)(p+n)} i^{-p} (-1)^n e^{+i(2n+p)\beta} X_{p+n}^- I_p^-\right] \end{aligned} \tag{3.8}$$

avec :

$$I_p^{\pm} = \int_{S'} e^{ip\theta_{ji}} H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right) e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\vec{d}_i} d\vec{d}_i \tag{3.9}$$

Comme pour le milieu semi-infini, on peut se ramener à une intégrale de contour. De la même façon, nous allons partir du fait que l'exponentielle complexe et la fonction de Hankel sont toutes deux solutions d'une équation de Helmholtz. Nous avons donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\Delta\left(e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\vec{d}_i}\right) + K^2 e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\vec{d}_i} = 0 \\ &\Delta\left(H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right) + k^2 H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right) = 0 \end{aligned} . \tag{3.10}$$

La combinaison de ces deux équations donne :

$$H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\Delta\left(e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\vec{d}_i}\right) - e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\vec{d}_i}\Delta\left(H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right) = \left(k^2 - K^2\right) e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\vec{d}_i} H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right). \tag{3.11}$$

Le report de (3.11) dans (3.9) donne :

$$I_p^{\pm} = \int_{S'} \frac{e^{ip\theta_{ji}}}{\left(k^2 - K^2\right)}\left[H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\Delta\left(e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\vec{d}_i}\right) - e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\vec{d}_i}\Delta\left(H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right)\right] d\vec{d}_i . \tag{3.12}$$

Le théorème de Green nous autorise alors à écrire :

$$I_p^{\pm} = \frac{1}{\left(k^2 - K^2\right)} \int_{L'} e^{ip\theta_{ji}}\left[H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\vec{n}.\vec{\nabla}\left(e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\vec{d}_i}\right) - e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\vec{d}_i}\vec{n}.\vec{\nabla}\left(H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right)\right] dl , \tag{3.13}$$

avec *L'* la frontière de *S'*. Pour continuer le calcul, nous allons utiliser la linéarité de l'intégrale pour décomposer *L'* en plusieurs trajets :

$$L' = L_{C_b} + L_{D_0} + L_{C_{-\infty}} + L_{D_d} + L_{C_{+\infty}} , \tag{3.14}$$

avec L_{C_b} le cercle de rayon b centré en $\overrightarrow{d_j}$, L_{D_0} et L_{D_d} les droites d'équations respectives x=0 et x=d, et $L_{C_{-\infty}}$ et $L_{C_{+\infty}}$ deux arc de cercles de rayon infini en $y \to -\infty$ et $y \to +\infty$ pour fermer le trajet. Nous allons donc calculer les intégrales sur les différents parcours séparément.

- Parcours L_{C_b}

Sur le cercle de rayon b, on a :

$$\begin{aligned} \vec{n}.\vec{\nabla} &= -\frac{\partial}{\partial d_{ij}} \\ dl &= b d\theta_{ij} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sachant que :

$$\overrightarrow{d_i} = \overrightarrow{d_j} + \overrightarrow{O_j O_i}, \quad (3.16)$$

on a :

$$\begin{aligned} \vec{n}.\vec{\nabla}\left(e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\overrightarrow{d_i}}\right) &= -\frac{\partial}{\partial d_{ij}}\left[e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\overrightarrow{d_j}} e^{\pm iKd_{ij}\cos(\theta_{ij}\mp\beta)}\right] \\ &= -e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\overrightarrow{d_j}} \frac{\partial}{\partial d_{ij}}\left[\sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^{\pm q} J_q\left(Kd_{ij}\right) e^{\pm iq\theta_{ij}} e^{-iq\beta}\right]. \\ &= -e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\overrightarrow{d_j}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^{\pm q} K J_q'\left(Kd_{ij}\right) e^{\pm iq\theta_{ij}} e^{-iq\beta} \end{aligned} \quad (3.17)$$

L'intégrale sur le parcours L_{C_b} s'écrit alors :

$$\begin{aligned} I_{pC_b}^{\pm} &= \frac{1}{\left(k^2-K^2\right)} \int_0^{2\pi} e^{ip\theta_{ji}} \begin{bmatrix} -H_p^{(1)}(kb) e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\overrightarrow{d_j}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^{\pm q} K J_q'(Kb) e^{\pm iq\theta_{ij}} e^{-iq\beta} - \\ kH_p^{(1)}{}'(kb) e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\overrightarrow{d_j}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^{q} J_q(Kb) e^{\pm iq\theta_{ij}} e^{-iq\beta} \end{bmatrix} b d\theta_{ij} \\ &= \frac{b e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\overrightarrow{d_j}}}{\left(k^2-K^2\right)} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^{\pm q} e^{-iq\beta}\left[-KH_p^{(1)}(kb) J_q'(Kb) - kJ_q(Kb) H_p^{(1)}{}'(kb)\right] \int_0^{2\pi} e^{ip(\theta_{ji}-\pi)} e^{\pm iq\theta_{ij}} d\theta_{ij} \\ &= \frac{b e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\overrightarrow{d_j}}}{\left(k^2-K^2\right)} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^{\pm q} e^{-iq\beta}\left[-KH_p^{(1)}(kb) J_q'(Kb) - kJ_q(Kb) H_p^{(1)}{}'(kb)\right](-1)^p\, 2\pi\delta_{p\mp q} \\ &= \frac{2\pi b e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\overrightarrow{d_j}}}{\left(k^2-K^2\right)} i^{\mp p} e^{\pm ip\beta}\left[-KH_p^{(1)}(kb) J_p'(Kb) - kJ_p(Kb) H_p^{(1)}{}'(kb)\right] \end{aligned}$$

.(3.18)

Les intégrales sur les trajets $L_{C_{-\infty}}$ et $L_{C_{+\infty}}$ sont, quant à elles, nulles car il s'agit d'intégrales oscillantes sans point de phase stationnaire.

Nous allons maintenant exprimer les intégrales sur les trajets L_{D_0} et L_{D_d} .

- Parcours L_{D_0}

Sur ce trajet, on a :

$$\begin{aligned} \vec{n}.\vec{\nabla} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \\ dl &= dy_i \end{aligned} \tag{3.19}$$

donc :

$$\vec{n}.\vec{\nabla}\left(e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}\overrightarrow{d_i}}\right) = \mp iK_x e^{iK_y y_i} \tag{3.20}$$

L'intégrale sur le contour L_{D_0} devient alors :

$$\begin{aligned} I_{pD_0}^{\pm} &= \frac{1}{\left(k^2-K^2\right)}\int_{D_0} e^{ip\theta_{ji}}\left[\mp H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)iK_x e^{iK_y y_i} + e^{iK_y y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right)\right]dy_i \\ &= \frac{1}{\left(k^2-K^2\right)}\left[\mp iK_x + \frac{\partial}{\partial x_i}\right]_{x_i=0}\int_{D_0} e^{ip\theta_{ji}}\left[H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)e^{iK_y y_i}\right]dy_i \end{aligned} . \tag{3.21}$$

D'après l'Annexe 2, on a:

$$\begin{aligned} I_{pD_0}^{\pm} &= \frac{1}{\left(k^2-K^2\right)}\left[\mp iK_x + \frac{\partial}{\partial x_i}\right]_{x_i=0}\frac{2}{k_x}e^{ip\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}e^{ik_x\left(x_j-x_i\right)} \\ &= \frac{2i^{-p}e^{ip\alpha}}{\left(k^2-K^2\right)k_x}i\left[\mp K_x - k_x\right]e^{ik_x x_j} \end{aligned} \tag{3.22}$$

De même, sur le parcours L_{D_d} , on a :

$$\begin{aligned} \vec{n}.\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \\ dl &= dy_i \end{aligned} \tag{3.23}$$

donc :

$$\vec{n}.\vec{\nabla}\left(e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}\overrightarrow{d_i}}\right) = \pm iK_x e^{iK_y y_i} . \tag{3.24}$$

L'intégrale sur le contour L_{D_d} peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} I_{pD_d}^{\pm} &= \frac{e^{\pm iK_x d}}{\left(k^2-K^2\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\theta_{ji}} \left[\pm H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right) iK_x e^{iK_y y_i} - e^{iK_y y_i} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)\right)\right] dy_i \\ &= \frac{e^{\pm iK_x d}}{\left(k^2-K^2\right)} \left[\pm iK_x - \frac{\partial}{\partial x_i}\right]_{x_{i=d}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\theta_{ji}} \left[H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right) e^{iK_y y_i}\right] dy_i \end{aligned} \quad . \qquad (3.25)$$

D'après l'Annexe 2, on a :

$$\begin{aligned} I_{pD_d}^{\pm} &= \frac{e^{\pm iK_x d}}{\left(k^2-K^2\right)} \frac{2(-1)^p}{k_x} \left[\pm iK_x - \frac{\partial}{\partial x_i}\right]_{x_{i=d}} e^{-ip\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} e^{ik\left(x_i-x_j\right)\cos\alpha} \\ &= \frac{e^{\pm iK_x d}}{\left(k^2-K^2\right)} \frac{2i^{p+1}}{k_x} e^{-ip\alpha} \left[\pm K_x - k_x\right] e^{ik_x\left(d-x_j\right)} \end{aligned} \qquad (3.26)$$

On peut alors rassembler les relations (3.18), (3.22) et (3.26) pour exprimer les intégrales entières par :

$$I_p^{+} = \frac{2i^{-p}}{\left(k^2-K^2\right)} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{i}{k_x}\left(K_x+k_x\right) e^{ik_x x_j} e^{ip\alpha} + (-1)^p e^{i(K_x+k_x)d} \frac{i}{k_x}\left(K_x-k_x\right) e^{-ik_x x_j} e^{-ip\alpha} \\ -\pi b e^{iK_x x_j} e^{ip\beta}\left[KJ_p'\left(Kb\right) H_p^{(1)}\left(kb\right) - kJ_p\left(Kb\right) H_p^{(1)'}\left(kb\right)\right] \end{array} \right\} \qquad (3.27)$$

et

$$I_p^{-} = \frac{2i^{-p}}{\left(k^2-K^2\right)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{i}{k_x}\left(K_x-k_x\right) e^{ik_x x_j} e^{ip\alpha} + (-1)^{p+1} e^{i(k_x-K_x)d} \frac{i}{k_x}\left(K_x+k_x\right) e^{-ik_x x_j} e^{-ip\alpha} \\ +(-1)^{p+1} \pi b e^{-iK_x x_j} e^{-ip\beta}\left[KJ_p'\left(Kb\right) H_p^{(1)}\left(kb\right) - kJ_p\left(Kb\right) H_p^{(1)'}\left(kb\right)\right] \end{array} \right\}$$

(3.28)

En reportant les expressions (3.27) et (3.28) dans (3.8), et en considérant que la relation obtenue est valable quelle que soit la valeur de x_j, on trouve les relations suivantes :

$$X_n^{+} = -\frac{2\pi b}{\left(k^2-K^2\right)} \frac{N-1}{S} \sum_p T_{(p+n)(p+n)}^{1} X_{p+n}^{+} \left[KJ_p'\left(Kb\right) H_p^{(1)}\left(kb\right) - kJ_p\left(Kb\right) H_p^{(1)'}\left(kb\right)\right]$$

(3.29)

$$X_n^- = -\frac{2\pi b}{\left(k^2-K^2\right)}\frac{N-1}{S}\sum_p T^1_{(p+n)(p+n)} X^-_{p+n}\left[KJ'_p\left(Kb\right)H_p^{(1)}\left(kb\right)-kJ_p\left(Kb\right)H_p^{(1)'}\left(kb\right)\right] \tag{3.30}$$

$$0 = 1+\frac{2i}{k_x}\frac{N-1}{S}\left[-\frac{\left(K_x+k_x\right)}{\left(k^2-K^2\right)}\sum_p T^1_{pp}e^{-ip\beta}e^{ip\alpha}X_p^+ + \frac{\left(K_x-k_x\right)}{\left(k^2-K^2\right)}\sum_p T^1_{pp}e^{ip\beta}e^{ip\alpha}X_p^-\right] \tag{3.31}$$

et

$$0 = \left[\frac{\left(K_x-k_x\right)}{\left(k^2-K^2\right)}\sum_p X_p^+ T^1_{pp}\left(-1\right)^p e^{-ip(\beta+\alpha)}e^{iK_x d} - \frac{\left(K_x+k_x\right)}{\left(k^2-K^2\right)}\sum_p T^1_{pp}e^{ip(\beta-\alpha)}X_p^- e^{-iK_x d}\right] \tag{3.32}$$

Les relations (3.29) et (3.30) sont identiques et indépendantes de l'angle d'incidence. Cela justifie bien que le nombre d'onde de l'onde se propageant vers les x positifs est égal à celui de l'onde se propageant vers les x négatifs. L'annulation des déterminants des systèmes (3.29) et (3.30) fournit une équation de dispersion qui est identique à celle du chapitre 2 si l'on pose $\alpha=\beta=0$. Ceci est normal en raison de l'isotropie des diffuseurs. Ces deux relations sont appelées lois de Lorentz-Lorenz. Les relations (3.31) et (3.32) sont appelées théorème d'extinction. Elles expriment les relations entre les ondes planes se propageant dans le milieu effectif ainsi que l'influence des frontières du milieu multi-diffuseur par l'intermédiaire de d, l'épaisseur de la couche.

3.2 Coefficients de réflexion et de transmission

Une des innovations de notre travail est d'exprimer analytiquement les coefficients de réflexion et de transmission d'une couche de milieu multi-diffuseur. Nous allons montrer qu'au cours de ce calcul interviennent des grandeurs permettant de déterminer l'impédance effective du milieu multi-diffuseur. Il est ainsi possible de remplacer la couche étudiée par une plaque fluide visqueuse équivalente.

Pour déterminer les coefficients de réflexion et de transmission, il faut calculer les champs acoustiques présents respectivement dans la région $x<0$ et dans la région $x>d$. La première étape consiste donc à exprimer les coefficients $X_n^{\pm}$. Pour cela, on dispose des

relations (3.29) à (3.32). Le nombre d'inconnues est infini. Nous allons choisir de le tronquer à 2M, *M* étant l'ordre nécessaire à la convergence du déterminant du système (3.29). Dans ces conditions, les deux premières relations sont des systèmes à *M* équations et *M* inconnues. Avec les deux autres relations qui sont des équations à *M* inconnues, nous avons *2M*+2 équations pour *2M* inconnues. Le système total est donc surdéterminé. Il va falloir choisir deux équations à retirer. Les deux dernières relations étant des relations de couplages entre les X_n^+ et les X_n^-, nous allons les garder et choisir de supprimer une équation dans chacun des systèmes. Nous avons décidé de supprimer les équations correspondant à l'ordre 0. Les relations (3.29) et (3.30) peuvent alors s'écrire :

$$\sum_{m\neq 0}\left(\delta_{nm}-\frac{2\pi b n_0}{\kappa^-\kappa^+}A_{nm}T_{mm}^1\right)X_m^\pm=\frac{2\pi b n_0}{\kappa^-\kappa^+}A_{n0}T_{00}^1X_0^\pm, \tag{3.33}$$

avec :

$$\kappa^\pm=K_x\pm k_x. \tag{3.34}$$

On peut alors tout naturellement exprimer les inconnues X_n^+ et X_n^- en fonction de X_0^+ et X_0^- pour $n\neq 0$:

$$X_n^\pm=\frac{2\pi b n_0}{\kappa^-\kappa^+}\frac{D_n}{D}T_{00}^1X_0^\pm=\eta D_n T_{00}^1X_0^\pm \tag{3.35}$$

avec *D* le déterminant du système (3.33) sans l'ordre 0, et D_n, le déterminant du même système quand les coefficients de $X_n^\pm$ sont remplacés par le second membre selon la méthode de Cramer.

La relation (3.31) devient alors :

$$0=1+\frac{2i}{k_x}n_0\left[\frac{1}{\kappa^+}\left(1+\sum_{p=-\infty}^{+\infty}T_{pp}^1e^{-ip\beta}e^{ip\alpha}\eta D_p\right)T_{00}^1X_0^+-\frac{1}{\kappa^+}\left(1+\sum_{p=-\infty}^{+\infty}T_{pp}^1e^{ip\beta}e^{ip\alpha}\eta D_p\right)T_{00}^1X_0^-\right]. \tag{3.36}$$

On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} f&=\sum_{\substack{n=-M\\ n\neq 0}}^{M}D_nT_{nn}^1e^{in(\beta-\alpha)}=\sum_{\substack{n=-M\\ n\neq 0}}^{M}D_nT_{nn}^1e^{-in(\beta-\alpha)}\\ g&=\sum_{\substack{n=-M\\ n\neq 0}}^{M}(-1)^nD_nT_{nn}^1e^{-in(\beta+\alpha)}=\sum_{\substack{n=-M\\ n\neq 0}}^{M}(-1)^nD_nT_{nn}^1e^{in(\beta+\alpha)} \end{aligned}. \tag{3.37}$$

La seconde égalité de chacune des relations de (3.37) est due au fait que l'on a, d'après l'annexe 3 :

$$D_{-n} = D_n \,. \tag{3.38}$$

La relation (3.36) s'écrit alors :

$$0 = 1 + \frac{2i}{k_x} n_0 \left[\frac{1}{\kappa^-}(1+\eta f) T_{00}^1 X_0^+ - \frac{1}{\kappa^+}(1+\eta g) T_{00}^1 X_0^- \right], \tag{3.39}$$

soit encore

$$\frac{ik_x}{2n_0 T_{00}^1} = \left[\frac{X_0^+}{\kappa^-}(1+\eta f) - \frac{X_0^-}{\kappa^+}(1+\eta g) \right]. \tag{3.40}$$

De même la relation (3.32) s'écrit:

$$\kappa^- e^{2iK_x d}(1+\eta g) X_0^+ - \kappa^+(1+\eta f) X_0^- = 0. \tag{3.41}$$

Avec les relations (3.40) et (3.41), on trouve :

$$\begin{aligned} X_0^+ &= \frac{ik_x}{2n_0 T_{00}^1} \frac{\kappa^-}{(1+\eta f)} \frac{1}{1 - Q^2 e^{2iK_x d}} \,, \\ X_0^- &= Q e^{2iK_x d} X_0^+ \end{aligned} \tag{3.42}$$

avec

$$Q = \frac{1+\eta g}{1+\eta f} \frac{\kappa^-}{\kappa^+} \,. \tag{3.43}$$

Les inconnues X_n^+ et X_n^- peuvent donc être totalement déterminées. A l'aide de la relation (3.2) décrivant l'onde présente dans le milieu multi-diffuseur, on peut connaître le champ incident sur un diffuseur.

On va alors chercher à exprimer le champ diffusé par l'ensemble du milieu multi-diffuseur. Pour cela, nous allons partir du principe que ce champ est constitué par la somme des champs diffusés par chacun des diffuseurs. On connaît le champ incident sur un diffuseur si sa position est fixée. A l'aide de la matrice de transition de ce diffuseur, on peut alors exprimer le champ qu'il diffuse. Nous allons ensuite moyenner ce champ sur toutes les positions où peut se trouver ce diffuseur. Puis, tous les diffuseurs étant identiques, nous allons multiplier ce champ moyen par le nombre de diffuseurs N pour connaître le champ diffusé par l'ensemble du milieu multi-diffuseur. Ceci se traduit par la relation suivante :

$$\varphi_{diff} = N \int_S p\left(\overrightarrow{d_l}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\langle C_n^{(l)} \right\rangle_l T_{nn}^1 H_n^{(1)}(kr_l) e^{in\theta_l} d\overrightarrow{d_l} \,. \tag{3.44}$$

En utilisant la relation (3.2), on a :

$$\varphi_{diff} = n_0 \sum_n T_{nn}^1 i^n e^{-in\beta} X_n^+ \int_S H_n^{(1)}(kr_l) e^{in\theta_l} e^{i\overrightarrow{K^+}.\overrightarrow{d_l}} d\overrightarrow{d_l} + n_0 \sum_n T_{nn}^1 i^{-n} e^{in\beta} X_n^- \int_S H_n^{(1)}(kr_l) e^{in\theta_l} e^{i\overrightarrow{K^-}.\overrightarrow{d_l}} d\overrightarrow{d_l} . \tag{3.45}$$

Le calcul des intégrales apparaissant dans la relation (3.45) va donner des résultats différents selon la position de l'observateur par rapport à la couche de milieu multi-diffuseur. Pour cela, nous allons à nouveau utiliser l'annexe 2.

Nous allons, maintenant, exprimer le champ diffusé dans la région $x<0$ et ainsi définir le coefficient de réflexion R par :

$$\varphi_{diff}(x<0) = Re^{-ik_x x} e^{ik_y y} . \tag{3.46}$$

On trouve ainsi :

$$R = \frac{2in_0}{k_x}\left[\frac{1-e^{i\kappa^+ d}}{\kappa^+}\sum_n T_{nn}^1 (-1)^n e^{-in(\beta+\alpha)} X_n^+ + \frac{-1+e^{i\kappa^- d}}{\kappa^-}\sum_n T_{nn}^1 e^{in(\beta-\alpha)} X_n^-\right] \tag{3.47}$$

Ce que l'on peut encore exprimer sous la forme :

$$R = \frac{-Q\left(1-e^{2iK_x d}\right)}{1-Q^2 e^{2iK_x d}} . \tag{3.48}$$

Si l'on regarde le champ acoustique total, φ_T, présent dans la région $x>d$, il est constitué de l'onde incidente et de l'onde diffusée dans cette région par l'ensemble des diffuseurs. On définit alors le coefficient de transmission T par :

$$\varphi_T = \varphi_{inc} + \varphi_{diff}(x>d) = Te^{ik_x x} e^{ik_y y} . \tag{3.49}$$

Son expression est donc :

$$\begin{aligned} T &= \frac{2in_0}{k}\left[\frac{1-e^{i\kappa^- d}}{\kappa^-}\sum_n T_{nn}^1 e^{-in(\beta-\alpha)} X_n^+ + \frac{-1+e^{-i\kappa^+ d}}{\kappa^+}\sum_n T_{nn}^1 (-1)^n e^{in(\beta+\alpha)} X_n^-\right] + 1 \\ &= \frac{\left(1-Q^2\right)e^{iK_x d}}{1-Q^2 e^{2iK_x d}} e^{-ik_x d} \end{aligned} . \tag{3.50}$$

Les expressions des coefficients de réflexion et de transmission trouvées par cette théorie sont formellement semblables à celles correspondant au cas d'une plaque fluide immergée dans un autre fluide[52]. Par identification du facteur Q, nous allons déterminer une

impédance effective pour le milieu multi-diffuseur. En effet, dans le cas d'une plaque fluide, le facteur Q se définit de la façon suivante :

$$Q = \frac{\tau - 1}{\tau + 1}, \tag{3.51}$$

où τ est le rapport de l'impédance du fluide constituant la plaque sur celle du fluide extérieur. En inversant la relation (3.51), on peut exprimer τ en fonction de Q et donc en fonction des éléments calculés précédemment :

$$\tau = \frac{1-Q}{1+Q} = \frac{2k_x + \eta g \kappa^+ - \eta f \kappa^-}{2K_x + \eta g \kappa^+ + \eta f \kappa^-}. \tag{3.52}$$

Nous sommes donc en mesure de remplacer la couche de milieu multi-diffuseur par une couche fluide visqueuse caractérisée par une impédance effective. Ceci est particulièrement intéressant pour faciliter l'étude des interactions d'un tel milieu avec son environnement. En effet, on peut remplacer l'ensemble des diffuseurs par le fluide effectif dans tous les calculs, allégeant ainsi les temps de calculs et leur complexité. Une vérification de cette assertion peut être apportée. A partir de l'impédance d'un fluide, on peut aisément définir les coefficients de réflexion et de transmission à une interface plane infinie entre deux fluides 1 et 2 par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{Z_2 - Z}{Z_2 + Z} = -Q \\ \mathrm{T}_{12} &= \frac{2Z_2}{Z_2 + Z} = 1 - Q \end{aligned}. \tag{3.53}$$

Si on reprend les calculs de la théorie de Fikioris et Waterman en considérant que seule une onde se propageant vers les x positifs existe dans le milieu effectif, c'est-à-dire en reprenant le cas du chapitre précédent, on trouve la relation suivante :

$$\frac{2i}{k_x} n_0 \frac{1}{\kappa^-} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{pp}^1 e^{-ip\beta} e^{ip\alpha} X_p^+ = -1 \tag{3.54}$$

ce qui donne :

$$X_0^+ = \frac{ik_x}{2n_0} \frac{\kappa^-}{(1+\eta f) T_{00}} \tag{3.55}$$

En reprenant l'expression de R trouvée précédemment, en annulant les X_n^- et en faisant tendre d vers l'infini, on a :

$$\begin{aligned} R &= \frac{2n_0}{ik_x}\frac{1}{\kappa^+}(1+\eta g)T_{00}^1 X_0^+ \\ &= -\frac{(1+\eta g)\kappa^-}{(1+\eta f)\kappa^+} \\ &= -Q \end{aligned} \tag{3.56}$$

On retrouve bien l'opposé du coefficient Q, ce qui tend à confirmer que l'on peut bien traiter ce coefficient comme celui qui apparaît lors de l'étude d'une plaque fluide. L'emploi de l'impédance effective pour déterminer les coefficients à une interface plane est donc justifié. Le remplacement d'un milieu multi-diffuseur par un milieu fluide est l'un des intérêts majeurs de ce travail. Cela va nous permettre, de plus, de décomposer les coefficients de réflexion et de transmission en séries de Debye afin de déterminer le nombre d'allers-retours effectués dans la couche par l'onde effective. Nous traiterons ceci dans le paragraphe suivant.

Il est important de noter que les résultats de ce paragraphe sont calculés en ne considérant qu'un seul nombre d'onde effectif. Or, nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il peut y avoir deux solutions à l'équation de dispersion. Pour déterminer les champs diffusés dans ce cas, il faut alors chercher une solution pour l'onde dans le milieu effectif prenant en compte ces deux solutions sous la forme suivante :

$$\left\langle C_n^{(j)} \right\rangle_j = i^n e^{-in\beta} X_n^+ e^{i\overrightarrow{K_1^+}\vec{d}_j} + i^{-n} e^{in\beta} X_n^- e^{i\overrightarrow{K_1^-}\vec{d}_j} + i^n e^{-in\beta_2} Y_n^+ e^{i\overrightarrow{K_2^+}\vec{d}_j} + i^{-n} e^{in\beta_2} Y_n^- e^{i\overrightarrow{K_2^-}\vec{d}_j} . \tag{3.57}$$

On trouve alors quatre équations de dispersion deux à deux identiques. En effet, on trouve deux fois la relation (3.29) pour les nombres d'onde K_1^+ et K_2^+ et deux fois la relation (3.30) pour les nombres d'onde K_1^- et K_2^-. Ces nombres d'onde sont couplés entre eux et avec le nombre d'onde dans le fluide extérieur par les deux relations du théorème d'extinction. Cependant, pour calculer les amplitudes X_n^+, X_n^-, Y_n^+, Y_n^-, il faut, comme dans le cas où on ne considère qu'une seule onde, supprimer une équation de chacun des systèmes homogènes donnant les équations de dispersion. Il faut donc en supprimer quatre. Or le théorème d'extinction ne contient toujours que 2 équations. Nous avons donc un problème sous dimensionné. La deuxième solution n'étant pas propagative dans les limites d'application de la théorie de Fikioris et Waterman selon F. Vander Meulen et Tsang et Kong, nous avons choisi de ne pas poursuivre l'étude dans ce cas et de nous limiter à des densités de diffuseurs telles que l'on reste dans le domaine où l'atténuation augmente avec la densité de diffuseurs.

3.3 Résultats numériques

3.3.1 Coefficients de réflexion et de transmission

A l'aide des expressions présentées dans le paragraphe précédent, nous pouvons maintenant présenter les coefficients de réflexion et de transmission dans le cas où les diffuseurs sont des cylindres et dans le cas où ce sont des tubes en conservant une densité de 23000 diffuseurs/m^2 (c=0,07) et avec une épaisseur de milieu multi-diffuseur de 12 cm. Pour que cette dernière valeur prenne un sens, il faut noter que les diffuseurs ont un rayon de 1 mm, il y a donc, au maximum, 60 diffuseurs dans l'épaisseur de la couche. Il s'agit, de plus de l'épaisseur du système que nous étudierons expérimentalement dans le chapitre suivant.

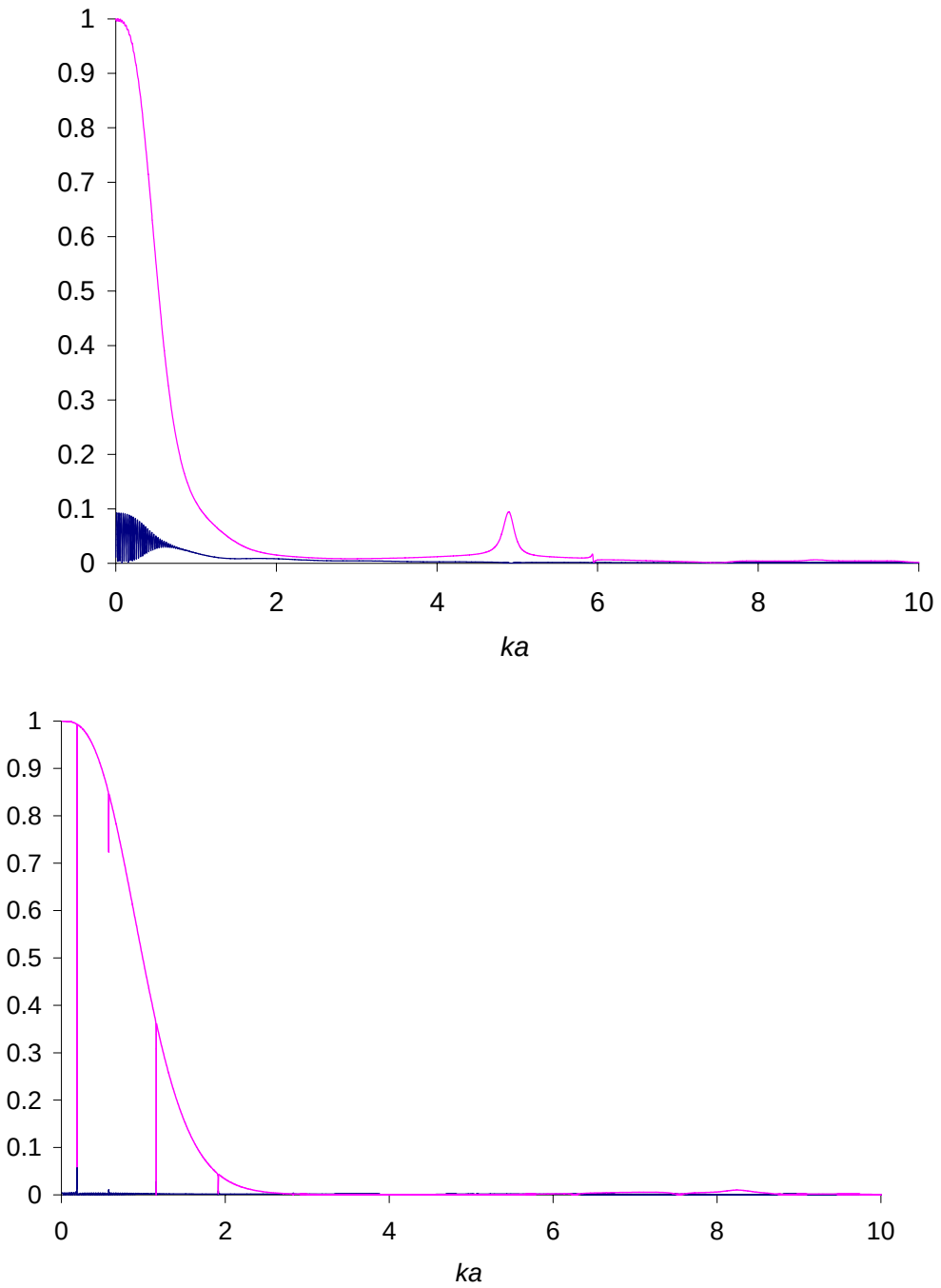


figure 3-2 Evolution des modules des coefficients de réflexion (en bleu) et de transmission (en magenta) pour des cylindres (en haut) et des tubes (en bas) en fonction de la fréquence pour une densité de diffuseurs de 23000 diffuseurs/m^2 et une épaisseur de milieu multi-diffuseur de 12cm en incidence normale.

La figure 3-2 présente l'évolution des modules de ces deux coefficients en fonction de la fréquence réduite pour une incidence de 0°. La première constatation à la vue de ces courbes est qu'il n'existe pas de relation de conservation d'énergie entre les deux coefficients de réflexion et de transmission. En effet, le milieu multi-diffuseur est dissipatif, l'intégralité de l'onde incidente ne se retrouve donc pas dans les ondes réfléchie et transmise.

Comme sur les courbes précédentes, on peut voir l'influence des fréquences de résonance de chaque diffuseur. La présence des résonances se manifeste par des variations qui rompent l'allure générale de la courbe. En dehors des perturbations liées aux résonances, le comportement de ces deux coefficients est similaire quelque soit le type de diffuseur considéré. Le coefficient de transmission vaut 1 en basse fréquence, avant de décroître fortement lorsque l'atténuation augmente comme nous l'avons vu précédemment. Le coefficient de réflexion, quant à lui, est toujours très faible. On peut cependant noter qu'il présente des oscillations en basse fréquence. La figure 3-3 présente un zoom de la figure 3-2 dans le cas de cylindres.

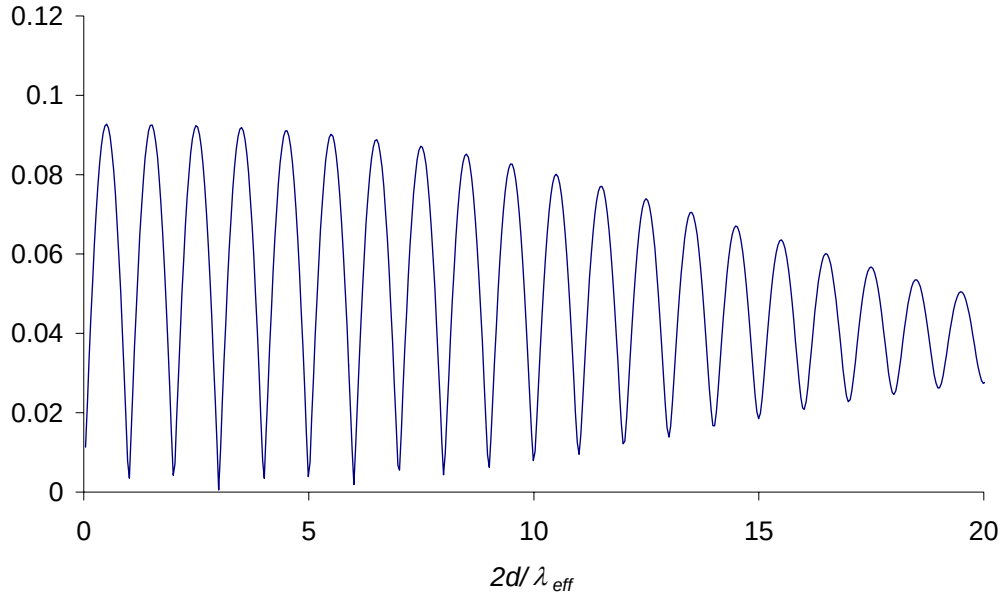


figure 3-3 Evolution du module du coefficient de réflexion pour des cylindres en fonction du produit fréquence-épaisseur divisé par la vitesse effective pour une densité de diffuseurs de 23000 diffuseurs/m^2 et une épaisseur de milieu multi-diffuseur de 12cm.

Sur cette figure, les abscisses ont été changées de manière à mettre en évidence le fait que l'intervalle de fréquence entre deux maxima du coefficient de réflexion correspond à une différence de longueur d'onde de 2*d* dans le milieu effectif. On constate ici que les maxima sont espacés régulièrement d'une unité. Autrement dit, les oscillations de ce coefficient sont dues à l'établissement d'ondes stationnaires dans l'épaisseur du milieu multi-diffuseur. Pour ce qui est des tubes, la même constatation peut être faite, mais les variations brusques de la

vitesse de propagation effective liées aux résonances entraînent des changements rapides de longueur d'onde effective qui rendent la courbe correspondant à la figure 3-3 peu lisible.

D'un point de vue expérimental, on peut utiliser les phases des coefficients de réflexion et de transmission pour déterminer la vitesse de phase d'un milieu inconnu. Nous allons donc nous intéresser aux phases de ces coefficients. La figure 3-4 montre l'évolution des phases des deux coefficients (réflexion et transmission), en fonction de la fréquence. Il faut se rappeler que l'origine des phases est sur la première « face » de la plaque de milieu multi-diffuseur.

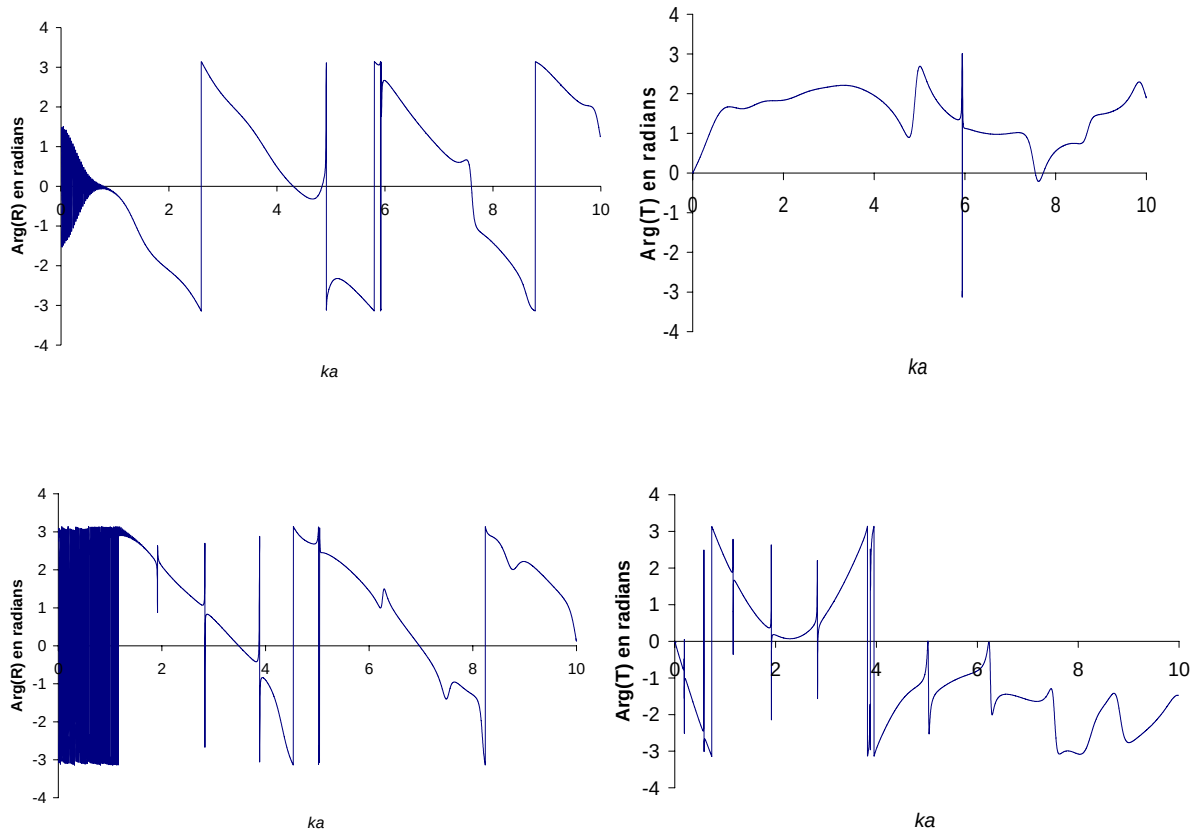


figure 3-4 Evolution des phases des coefficients de réflexion (à gauche) et de transmission (à droite) pour des cylindres (en haut) et des tubes (en bas) en fonction de la fréquence pour une densité de diffuseurs de 23000 diffuseurs/m^2 et une épaisseur de milieu multi-diffuseur de 12cm.

Sur ces courbes, on peut distinguer plusieurs caractéristiques. Tout d'abord, pour les coefficients de réflexion, on retrouve l'influence de l'établissement d'ondes stationnaires dans la couche avec les oscillations présentes en basses fréquences. On voit ensuite plusieurs accidents brusques sur toutes les courbes. Il faut alors discerner deux cas. Le premier

correspond simplement à des sauts de phases de $-\pi$ à $+\pi$. Il ne s'agit alors que de problèmes de représentation. Toutes les autres variations brutales sont liées aux fréquences de résonances de diffuseurs. Contrairement aux autres paramètres du milieu effectif étudiés, la phase des coefficients de réflexion et de transmission est très sensible au changement de diffuseur. C'est donc sur cette grandeur qu'il sera le plus facile de déterminer les caractéristiques du milieu effectif, notamment la vitesse de propagation comme nous le verrons dans le chapitre suivant. Le problème est que la phase de ces coefficients est difficile à obtenir de façon précise expérimentalement.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'une des caractéristiques du milieu effectif que l'on peut déduire de l'impédance effective et du nombre d'onde effectif : la masse volumique effective. Nous allons voir dans le paragraphe suivant que cette grandeur est complexe et varie en fonction de la fréquence.

3.3.2 Masse volumique effective

Nous avons pu exprimer le rapport d'impédance τ, et nous connaissons le nombre d'onde effectif. A partir de ces éléments, on peut déterminer une masse volumique effective. En effet, nous connaissons l'impédance acoustique du fluide extérieur. Nous pouvons donc déterminer celle du milieu multi-diffuseur de la façon suivante :

$$Z_{eff} = \tau\rho_0 c_0 = \frac{2k_x + \eta g\kappa^+ - \eta f\kappa^-}{2K_x + \eta g\kappa^+ + \eta f\kappa^-}\rho_0 c_0 \tag{3.58}$$

La vitesse de propagation effective est connue par l'intermédiaire du nombre d'onde effectif. On peut donc exprimer la masse volumique effective par la relation suivante en incidence normale :

$$\rho_{eff} = \frac{2k_x + \eta g\kappa^+ - \eta f\kappa^-}{2K_x + \eta g\kappa^+ + \eta f\kappa^-}\frac{K}{k}\rho_0 \tag{3.59}$$

La masse volumique effective est complexe, ce qui est caractéristique d'un milieu dissipatif. La figure 3-5 montre l'évolution de son module en fonction de la fréquence.

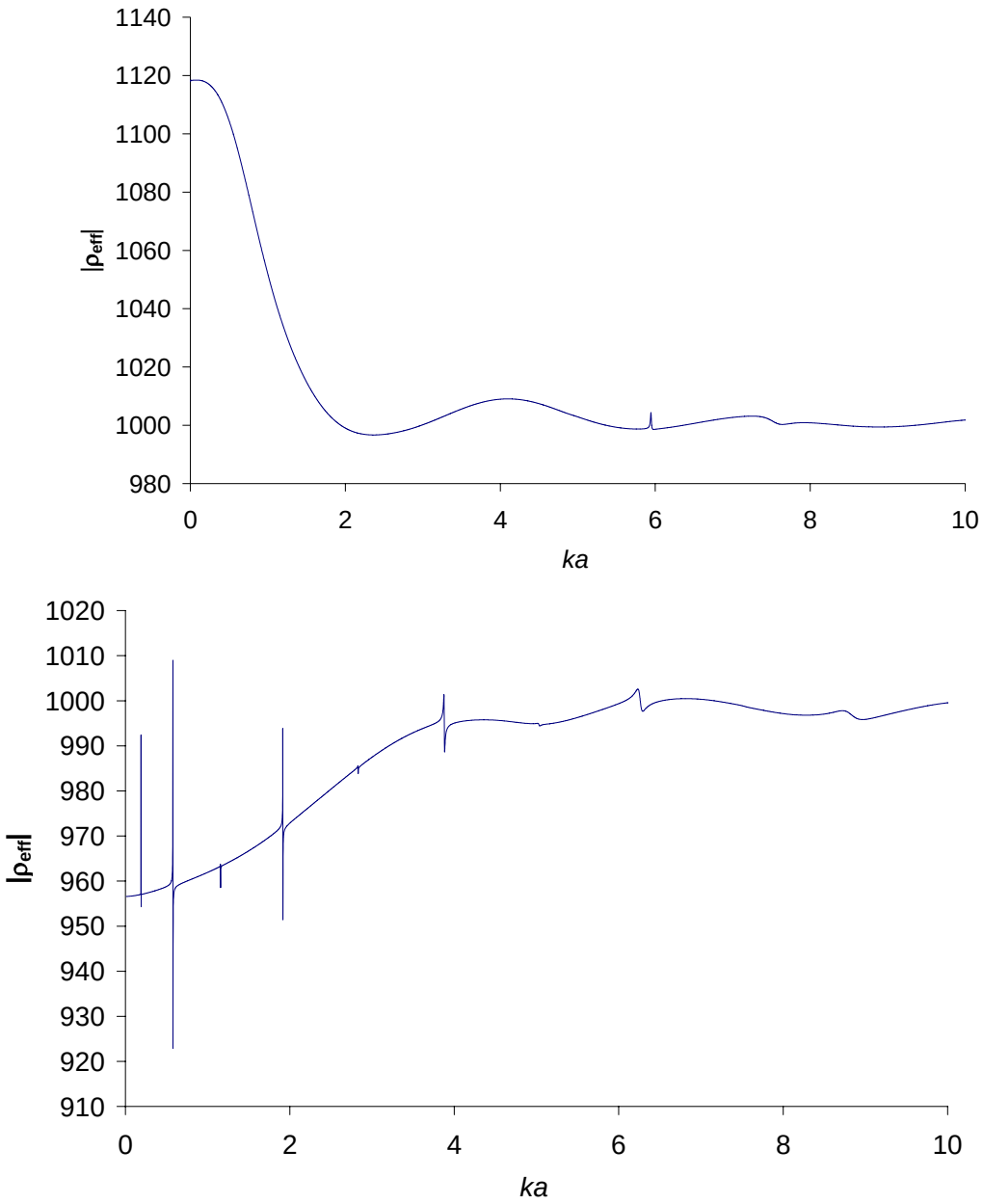


figure 3-5 Evolution des modules des masses volumiques effectives pour des cylindres (en haut) et des tubes (en bas) en fonction de la fréquence pour une densité de diffuseurs de 23000 diffuseurs/m^2.

Comme pour tous les paramètres du milieu effectif étudiés, en haute fréquence, la masse volumique effective tend vers la valeur du milieu fluide extérieur et présente des variations brusques aux fréquences de résonances d'un diffuseur seul. Cependant, la masse volumique effective est supérieure à celle de l'eau dans le cas où les diffuseurs sont des cylindres et inférieure lorsque les diffuseurs sont des tubes. On peut noter que même si la masse volumique est déterminée lors du calcul des coefficients de réflexion et de transmission, elle est indépendante de l'épaisseur du milieu multi-diffuseur considéré et est donc bien une caractéristique du milieu. Ceci peut permettre, connaissant l'impédance

acoustique du milieu effectif, de faire varier sa géométrie en le considérant comme un fluide visqueux d'impédance connue.

3.3.3 Coefficients à une interface plane, série de Debye

Connaissant l'impédance du milieu effectif, nous allons pouvoir exprimer les coefficients de réflexion et de transmission à une interface plane, fluide extérieur-fluide effectif, et ainsi écrire les coefficients de réflexion et transmission de la plaque de milieu multi-diffuseur sous forme de série de Debye. Les séries de Debye pour les coefficients de réflexion et de transmission s'écrivent respectivement en incidence normale:

$$R = R_{12} + T_{12}R_{21}T_{21}e^{2iKd}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(R_{21}{}^{2}e^{2iKd}\right)^{n} \tag{3.60}$$

$$T = T_{12}T_{21}e^{i(K-k)d}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(R_{21}{}^{2}e^{2iKd}\right)^{n} \tag{3.61}$$

avec R_{ij} et T_{ij} respectivement coefficients de réflexion et transmission à une interface plane entre le milieu i et le milieu j. Cette décomposition est issue d'une analogie avec l'interféromètre de Fabry-Perrot en optique et est basée sur un raisonnement en terme de trajets acoustiques. Il s'agit en effet d'ajouter, aux ondes transmise ou réfléchie directement, les contributions de toutes les ondes faisant des allers-retours dans la plaque comme le montre la figure 3-6 tracée pour une incidence quelconque afin de rendre les chemins plus visibles.

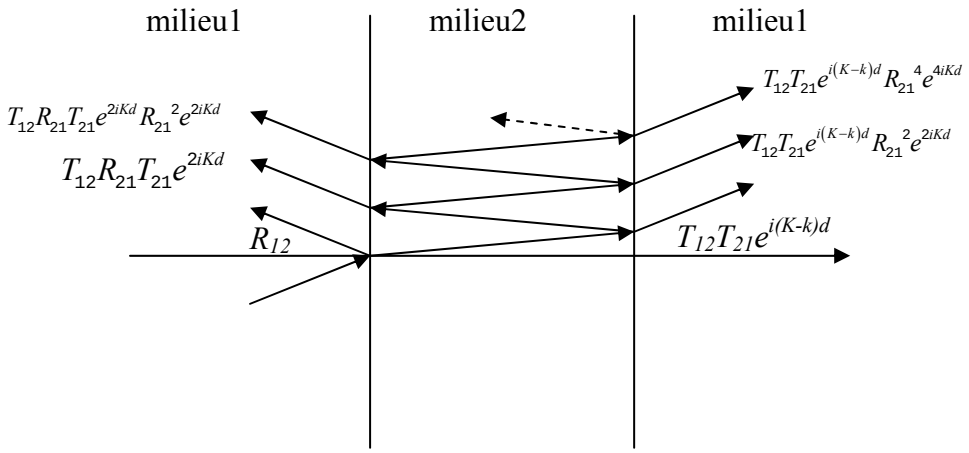


figure 3-6 décomposition des coefficients de réflexion et de transmission en séries de Debye, présentation des trajets acoustiques considérés.

En déterminant l'ordre auquel les séries de Debye convergent vers les coefficients globaux, nous allons pouvoir savoir le nombre d'allers-retours effectués par l'onde effective avant d'être trop atténuée pour apporter une contribution significative aux ondes diffusées. La

figure 3-7 représente les modules et les phases des séries de Debye pour n=0 ainsi que les coefficients globaux.

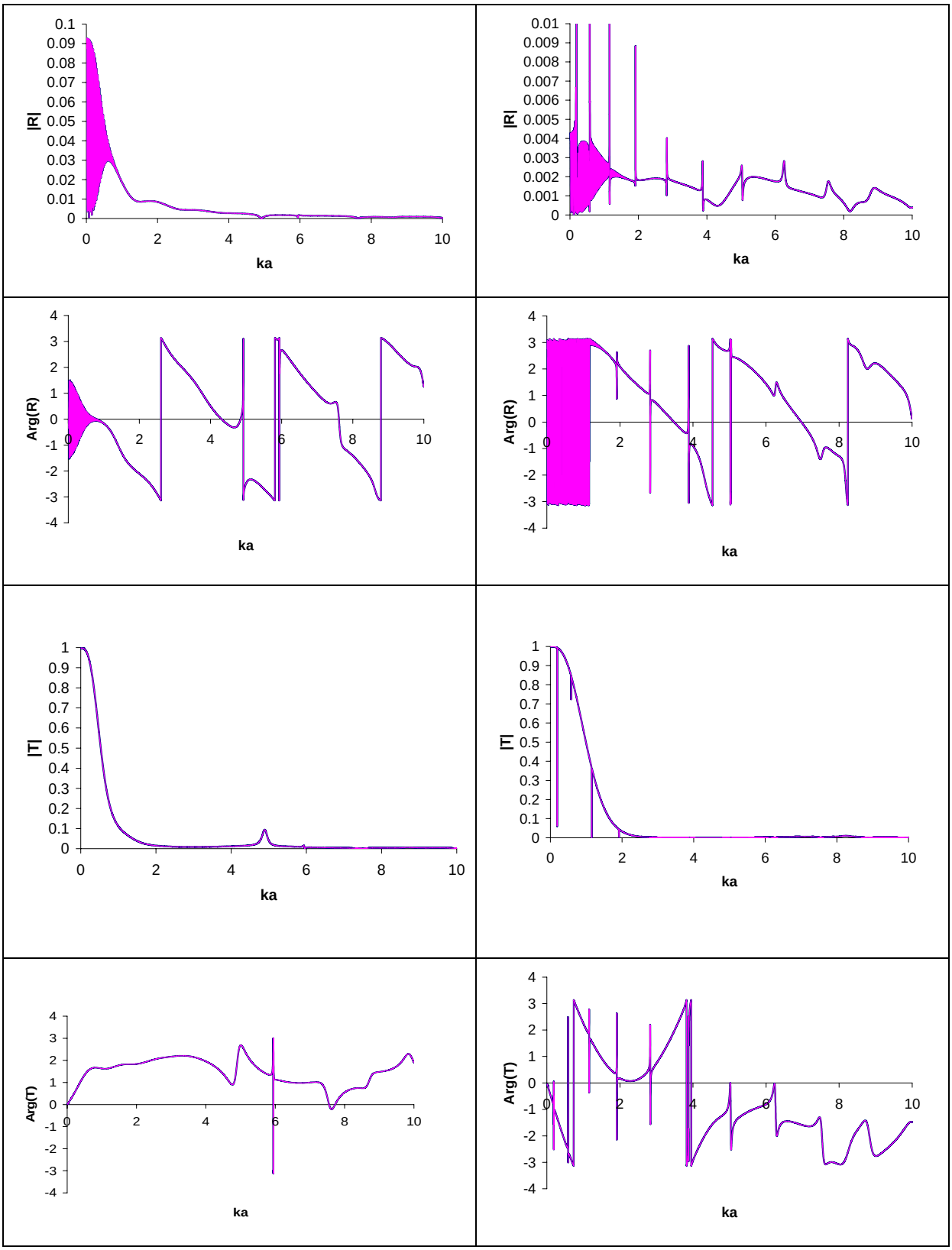


figure 3-7 comparaison entre les modules (lignes 1 et 3) et les phases (lignes 2 et 4) des coefficients de réflexion (lignes 1 et 2) et de transmission (lignes 3 et 4) en bleu et les premiers termes des séries de Debye correspondantes en magenta.

Ainsi qu'on peut le voir, il y a un parfait accord entre les coefficients globaux et les expressions en séries de Debye tronquées à l'ordre 0 tant au niveau du module que de la phase. Cela signifie donc que la partie de l'onde effective qui effectue plus d'un aller-retour dans le milieu multi-diffuseur ne contribue plus significativement aux ondes diffusées à l'extérieur de ce milieu. Ceci va nous permettre d'expliquer facilement l'évolution des coefficients de réflexion et de transmission en fonction de l'angle d'incidence. C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant.

3.3.4 Incidence oblique

Nous allons maintenant nous intéresser aux coefficients de réflexion et de transmission en incidence oblique. Nous allons voir que, comme pour une plaque fluide, on peut observer des variations des coefficients de réflexion et de transmission en fonction de l'angle d'incidence. Pour expliquer ces variations, nous allons exploiter les développements en séries de Debye de ces coefficients. En ce qui concerne le coefficient de transmission, nous avons vu qu'il peut être approximé par :

$$T \simeq T_{12}T_{21}e^{i(K-k)d} \tag{3.62}$$

ou encore, si l'on considère que les coefficients locaux T_{12} et T_{21} sont de l'ordre de 1, par

$$T \simeq e^{i(K-k)d}\,. \tag{3.63}$$

le module de ce coefficient devient donc :

$$|T| \simeq e^{-K''d}\,. \tag{3.64}$$

Lorsque l'on considère un angle d'incidence différent de 0, d doit être remplacé par la distance parcourue dans la plaque, c'est-à-dire, si l'on se réfère à la figure 3-8, par $d/\cos\beta$.

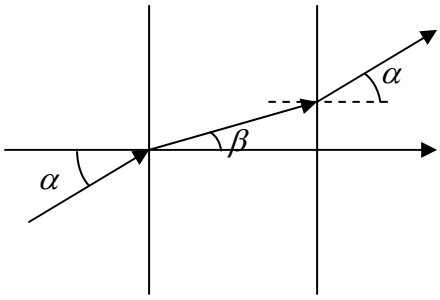


figure 3-8 représentation du chemin parcouru par l'onde transmise dans la plaque effective.

Sur la figure 3-9, nous avons représenté l'évolution du coefficient de transmission en fonction de la fréquence réduite et de l'angle d'incidence pour des cylindres et des tubes. La

densité de diffuseurs est de 23000m^{-2} (c=0,07) et l'épaisseur de la plaque de 10mm. Ce changement d'épaisseur a été effectué afin de rendre les figures plus lisibles. En effet, plus l'épaisseur est petite, et moins l'onde est atténuée, ce qui permet d'obtenir des amplitudes pour les coefficients de transmission et de réflexion plus grandes. Sur ces surfaces, nous avons superposé des lignes correspondant à la relation :

$$|T| \simeq e^{-\frac{K''d}{\cos\beta}} \tag{3.65}$$

et β donné par la relation de Snell-Descartes qui s'écrit :

$$\sin\beta = \frac{k\sin\alpha}{K} \tag{3.66}$$

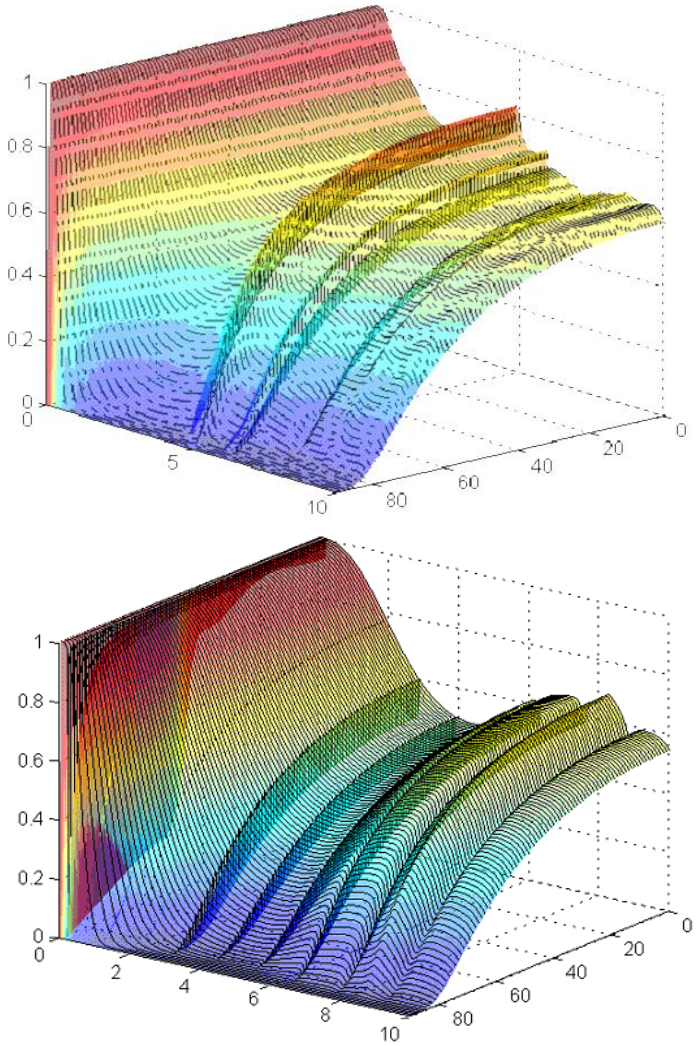


figure 3-9 évolution du module du coefficient de transmission lorsque les diffuseurs sont des cylindres (en haut) ou des tubes (en bas). La densité de diffuseurs est de 23000 m^{-2} (c=0,07), l'épaisseur de la plaque de 10mm. Comparaison de la valeur exacte (surface) avec l'approximation (3.65) (en pointillés).

Sur cette figure, les surfaces en couleur correspondent aux valeurs exactes des coefficients et les pointillés aux valeurs de l'approximation (3.65). On peut voir une bonne corrélation entre l'approximation et le calcul exact. Ceci confirme qu'aucun aller-retour dans la plaque effective n'apporte de contribution significative à l'onde transmise et valide l'hypothèse que les coefficients locaux de transmission vérifient

$$\left|T_{12}T_{21}\right| \simeq 1. \tag{3.67}$$

Le coefficient de transmission peut donc être approximé par la relation (3.63). En ce qui concerne le coefficient de réflexion, nous allons utiliser également la remarque du paragraphe précédent et ne prendre en compte que la réflexion directe sur la première « interface » et le premier aller-retour dans la plaque. Nous allons ensuite traiter la couche de milieu multi-diffuseur comme un interféromètre de Fabry-Perrot pour expliquer les minima et maxima du coefficient de réflexion. Il s'agit simplement de dire que le coefficient de réflexion est maximal lorsque que la différence de phases entre l'onde réfléchie sur la première interface et celle qui émerge de la couche après réflexion sur la seconde interface est multiple de 2π. Les trajets correspondant à ces ondes sont représentés figure 3-10.

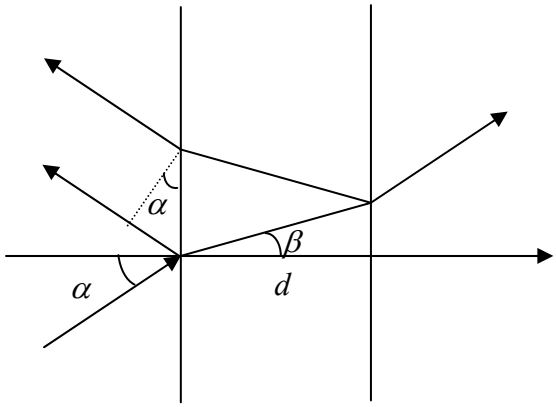


figure 3-10 représentation des trajets des deux ondes contribuant à l'onde réfléchie.

Il y aura donc interférence constructive si :

$$K'L_i + \arg(T_{12}) + \arg(T_{21}) + \arg(R_{21}) - kL_e - \arg(R_{12}) = 2n\pi\ . \tag{3.68}$$

Ici, il faut se rappeler que :

$$R_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = -R_{21} . \tag{3.69}$$

on a donc :

$$\arg(R_{21}) - \arg(R_{12}) = \pm\pi . \tag{3.70}$$

De plus, les arguments des coefficients T_{12} et T_{21} sont négligeables devant π (dans notre cas, ils ne dépasse pas 10^{-2} radians) donc, il y aura interférences constructives si :

$$\frac{2\omega d}{c_{eff}\cos\beta} - \frac{2\omega d}{c_0}\tan\beta\sin\alpha = 2n\pi \mp \pi \tag{3.71}$$

Les maxima des coefficients de réflexion doivent donc suivre les courbes correspondant à l'équation suivante :

$$k = \frac{(n \mp 0,5)\pi}{\frac{d}{\cos\beta}\left(\frac{c_0}{c_{eff}} - \sin\beta\sin\alpha\right)} . \tag{3.72}$$

Sur la figure 3-11, nous avons représenté les modules des coefficients de réflexion en fonction de l'angle d'incidence et de la fréquence réduite. Les amplitudes sont codées en couleurs, bleu pour les minima et rouge pour les maxima. Sur ces images, nous avons superposé en jaune les solutions de l'équation (3.72) pour différentes valeurs de *n*.

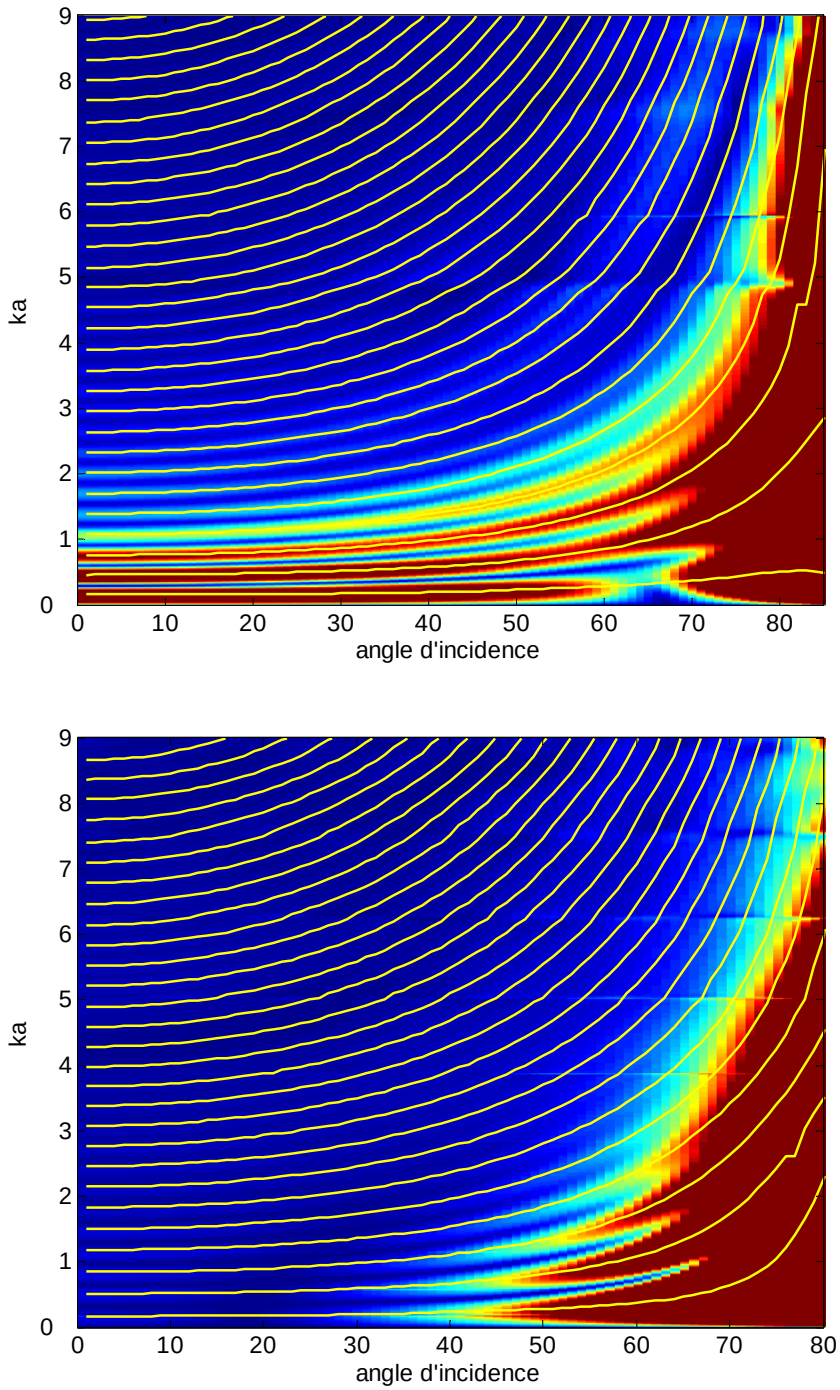


figure 3-11 évolution du module du coefficient de réflexion lorsque les diffuseurs sont des cylindres (en haut) ou des tubes (en bas). La densité de diffuseurs est de 23000 m^{-2} (c=0,07), l'épaisseur de la plaque de 10mm. Comparaison de la valeur exacte (couleurs) avec l'approximation (3.72) (lignes jaunes).

Chacune des courbes jaunes, sur cette figure, correspond bien à un maximum du coefficient de réflexion. La seule évolution des coefficients de réflexion en fonction de l'angle

d'incidence est donc liée à la distance parcourue dans le milieu multi-diffuseur, comme pour le coefficient de transmission.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi les expressions des coefficients de réflexion et de transmission d'une couche de milieu multi-diffuseur. Ces coefficients peuvent se mettre formellement sous la même forme que ceux d'une plaque fluide immergée dans un fluide. Ceci nous a permis d'exprimer l'impédance acoustique du milieu multi-diffuseur permettant ainsi de remplacer ce milieu par un fluide équivalent. Tous les résultats présentés dans ce chapitre sont issus de calculs numériques. Les domaines de validité des différentes théories ont été déterminés en fonction des hypothèses incluses dans ces théories et de considérations physiques sur les résultats. Afin de s'assurer que les résultats trouvés reflètent bien une réalité physique, nous nous proposons maintenant de les confronter avec des résultats expérimentaux. C'est l'objet du chapitre suivant.

4 Etude expérimentale d'un milieu multi-diffuseur

Jusqu'à présent, nous avons présenté les résultats issus de trois théories de milieu effectif. Nous avons discuté de leur validité en fonction des hypothèses émises et du caractère physique ou non des résultats. Nous allons maintenant chercher à valider les résultats théoriques trouvés en les confrontant à l'expérience. Réaliser une telle comparaison est délicat. Il faut en effet se rapprocher des hypothèses théoriques, notamment en ce qui concerne le moyennage spatial. Peu d'expériences ont été tentées par le passé en dehors de particules en suspension. Ici, nous allons essayer d'utiliser un système où les diffuseurs sont fixes et d'effectuer le moyennage spatial en déplaçant l'émetteur et le récepteur ultrasonore. Dans un premier temps, nous décrirons le dispositif utilisé, puis nous comparerons nos résultats avec ceux des chapitres précédents.

4.1 Présentation du système étudié et du dispositif expérimental

Nous allons maintenant confronter les résultats théoriques du chapitre précédent à l'expérience. Le principe de cette étude est inspiré d'une expérience menée au LOA[9,55] avec des diffuseurs dans l'air. D'autres études ont également été menées sur des sphères maintenues dans un gel [53] ou en suspension dans un liquide [47,48]. Le principal problème est de trouver des conditions expérimentales qui respectent le plus possible les hypothèses de répartition uniforme et d'effectuer un moyennage spatial équivalent à celui pratiqué en théorie. La cible avec laquelle nous avons effectué nos expériences est présentée figure 4-1.

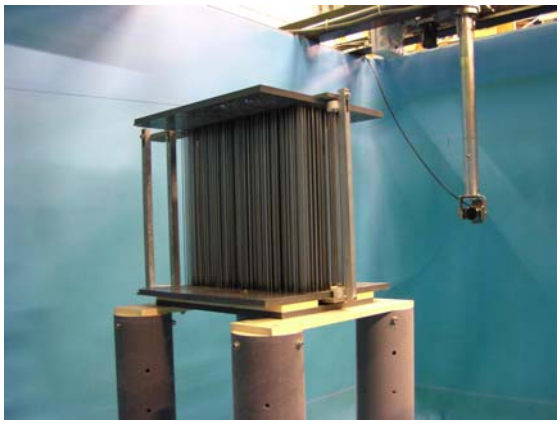


figure 4-1 présentation de la cible constitué de cylindres aléatoirement répartis.

Elle est constituée de 2000 cylindres en acier inoxydable avec les paramètres suivants :

- rayon : 1 mm
- vitesse longitudinale : 6000 m/s
- vitesse transversale : 3100 m/s
- masse volumique : 7816 kg/m^3.

Ces cylindres sont maintenus à chaque extrémité par une plaque percée en PVC de 30 cm sur 30 cm. Ces deux plaques sont placées l'une au dessus de l'autre à une distance de 30 cm, en s'assurant que les diffuseurs sont verticaux. La répartition des trous sur les plaques a été calculée à l'aide d'un programme Matlab afin d'obtenir une répartition aléatoire uniforme en tenant compte d'un espacement minimum entre les cylindres, afin que les trous ne se superposent pas, ainsi que d'une distance minimale avec le bord de la plaque de 5 mm. Afin de vérifier l'uniformité de notre répartition aléatoire, nous avons ensuite divisé une grille en carrés de 6 cm de côté puis nous avons déterminé la concentration de trous dans chaque carré. Le résultat est présenté figure 4-2.

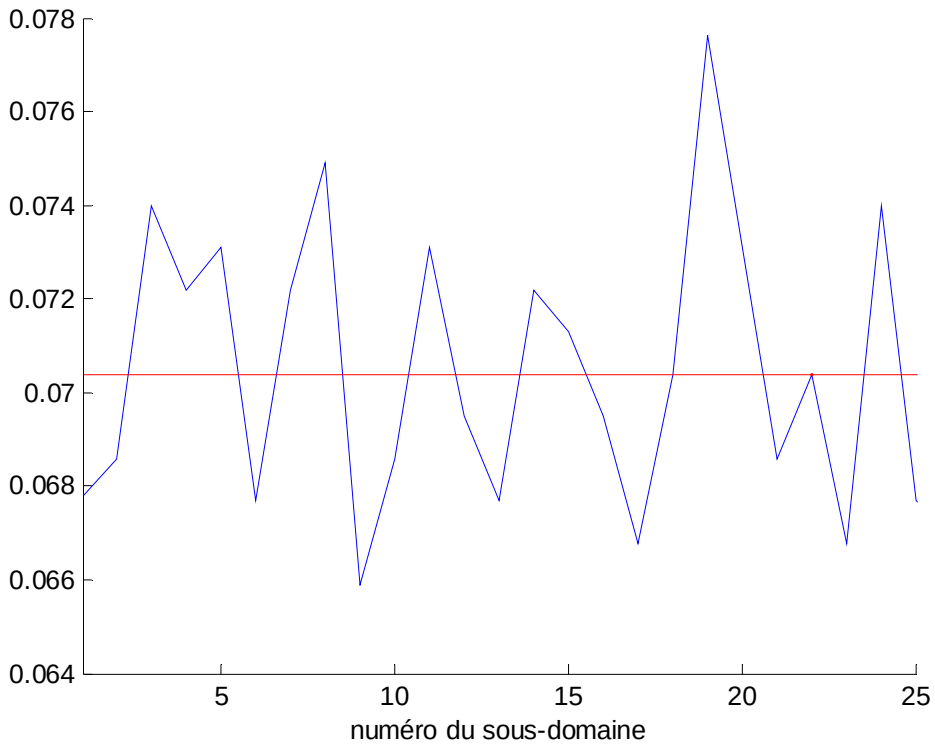


figure 4-2 vérification de l'uniformité de la répartition aléatoire des cylindres. Concentration de trous par subdivision de la grille.

Sur cette figure, on peut voir que la répartition des diffuseurs est bien uniforme et vaut 0,0704 en moyenne avec un écart-type de 0,8 %, ce qui est proche de l'un des cas présentés dans les chapitres 2 et 3. Deux transducteurs, l'un servant d'émetteur et l'autre de récepteur, sont positionnés de part et d'autre de la cible. Ces deux transducteurs ont un diamètre de 3,8 cm et ont une fréquence centrale de 1 MHz offrant une bande passante de 0,2 MHz à 1,2 MHz. Ils sont réglés en l'absence de la cible de façon à être face-à-face en les orientant pour que le signal reçu soit maximal. La distance entre les deux transducteurs est de 2,3 m, la cible étant placée au milieu. La distance de Fresnel est de 42 cm, nous sommes donc bien en champ lointain. L'ouverture angulaire du transducteur est de 21° à 0,2 MHz et de 8,7° à 0,5 MHz. Les premiers cylindres étant à 1 m du transducteur émetteur, le faisceau incident insone la cible sur une hauteur de 60 cm à 0,2 MHz et de 28 cm à 0,5MHz. Compte tenu de la hauteur des cylindres, du fait que le rapport de leur longueur (distance entre les plaques) sur leur rayon est de l'ordre de 300, et de l'ouverture angulaire du transducteur, les cylindres peuvent être considérés comme infinis seulement pour des fréquences supérieures à 0,5 MHz. Pour se rapprocher des hypothèses de la théorie, il faut effectuer une mesure du champ moyen diffusé pour différentes configurations des positions des diffuseurs. Chaque configuration représente une réalisation du désordre. Les grilles fournissent une configuration des positions des cylindres. Cependant, toute la cible n'est pas insonée par le faisceau incident. En déplaçant simultanément les transducteurs parallèlement à la face insonée de la cible, la configuration perçue par l'onde est différente. Nous effectuons donc des mesures sur toute la longueur de la cible à raison d'une tous les 5 mm. A cela s'ajoute le moyennage spatial dû à la taille de la pastille piézo-électrique du transducteur récepteur. Pour chaque mesure, une impulsion est envoyée au transducteur émetteur. Cette impulsion est transformée en une onde ultrasonore qui se propage jusqu'au transducteur récepteur. Le signal reçu est ensuite amplifié et transmis à un oscilloscope numérique. Ce dernier effectue une moyenne sur 100 signaux afin de limiter le bruit inhérent à la mesure. Ce sont ces signaux moyennés en temps que nous étudions. La figure 4-3 montre le schéma de cette expérience.

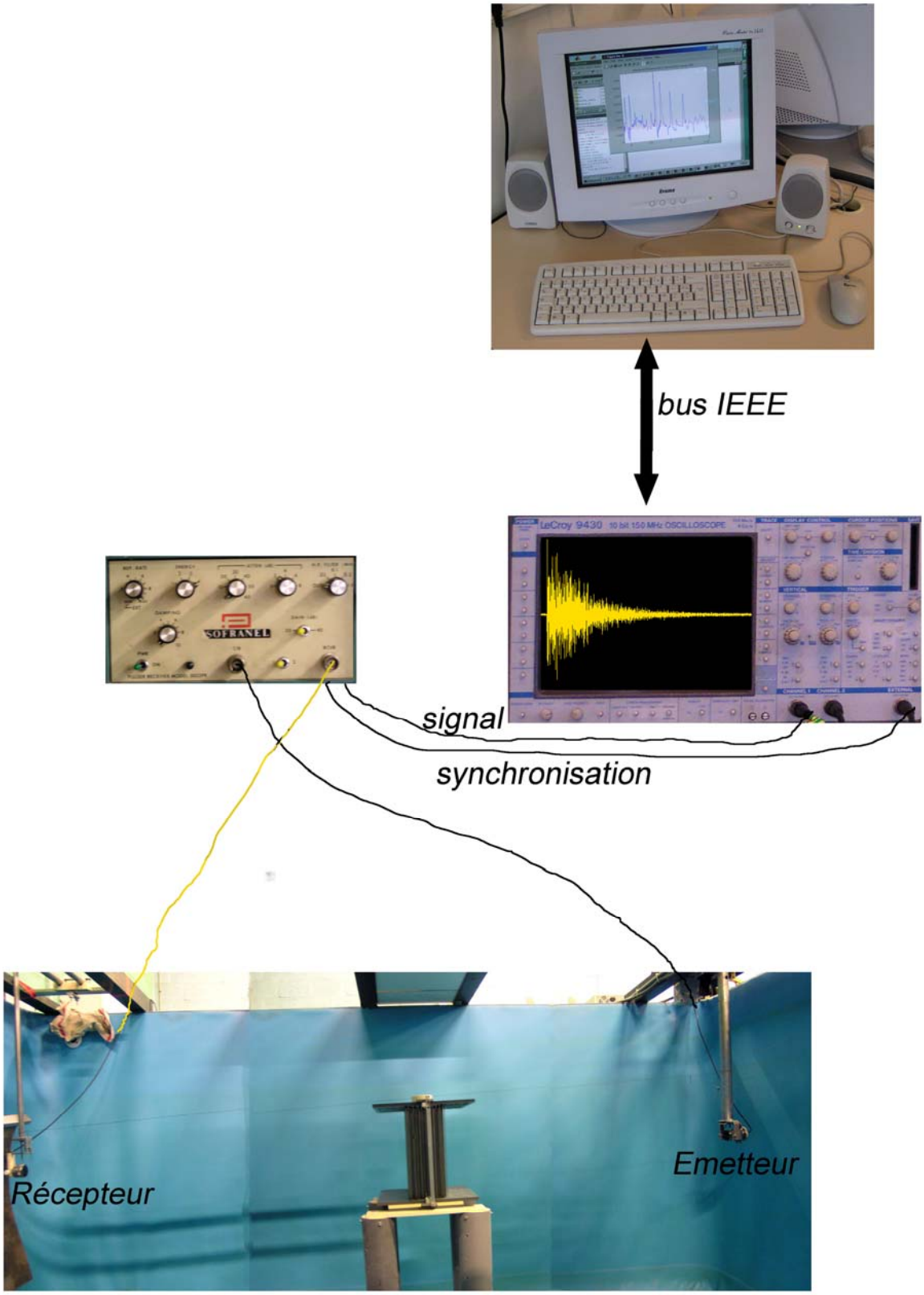


figure 4-3 schéma de l'expérience

Notre but est de déterminer les paramètres d'un milieu effectif associé à la forêt de cylindres et notamment la vitesse et l'atténuation effectives. Nous comparerons les résultats expérimentaux aux résultats issus de la théorie de Fikioris et Waterman présentés dans les chapitres précédents.

4.2 Comparaison théorie-expérience

En raison de la forte atténuation prévue théoriquement, les grilles ne sont remplies de cylindres que sur une épaisseur de 12 cm. Il ne peut donc y avoir que moins de 60 cylindres dans l'épaisseur. Chaque acquisition nous fournit un signal temporel. Ce signal peut présenter une valeur moyenne non nulle ainsi que le montre la figure 4-4.

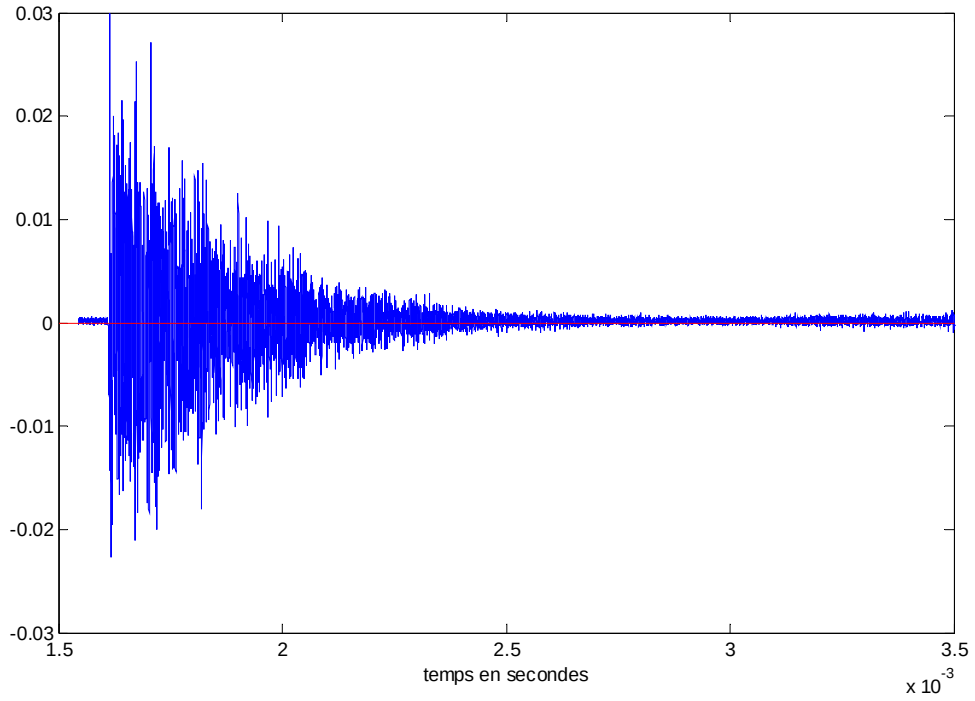


figure 4-4 temporel présentant une distorsion à son début, la ligne rouge est la ligne d'amplitude nulle.

Cette valeur moyenne est alors soustraite à l'ensemble du signal. Nous effectuons ensuite la moyenne de 30 signaux acquis autour du centre de la cible. Un signal temporel corrigé et le signal moyen sont présentés figure 4-5.

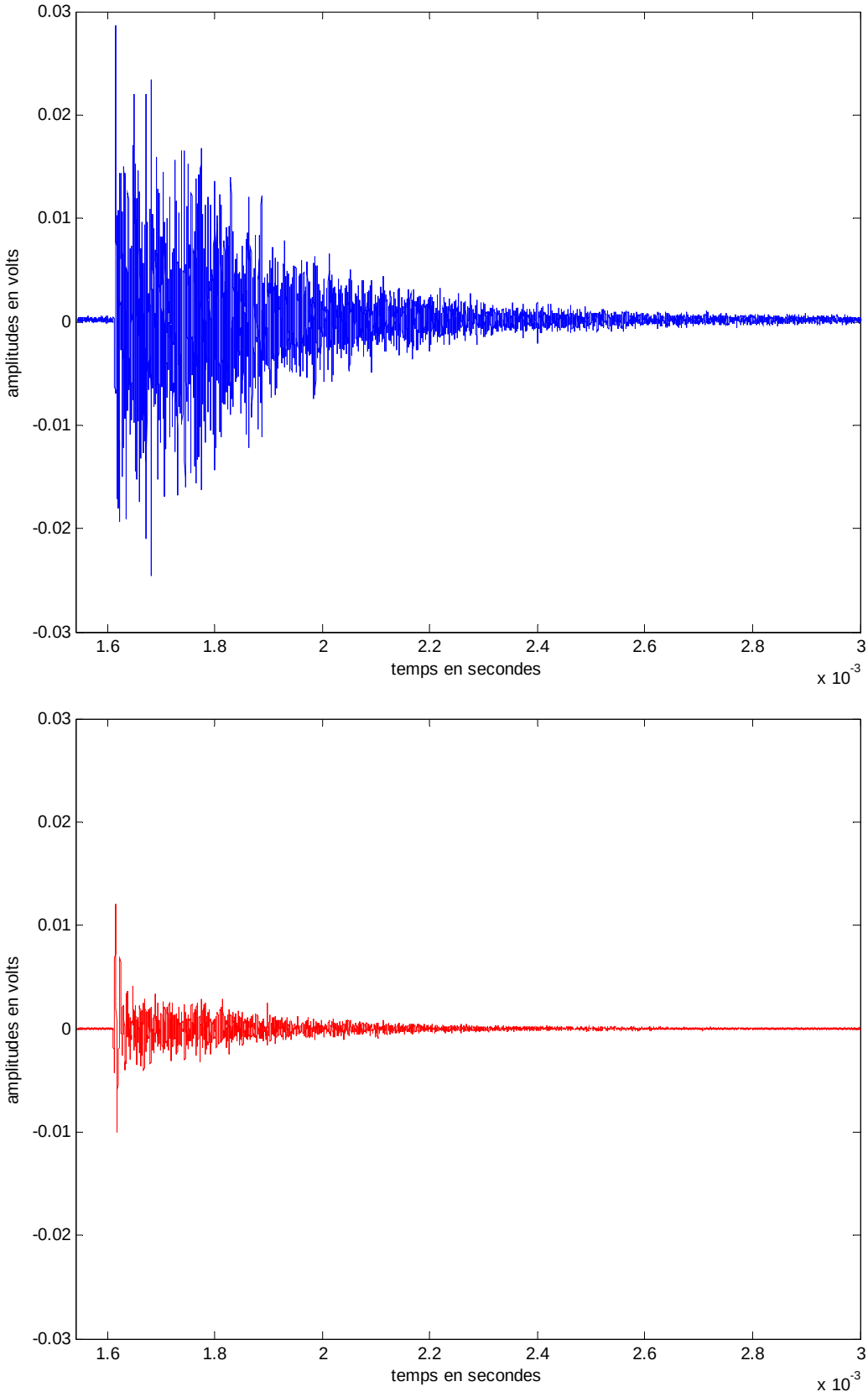


figure 4-5 signaux temporels expérimentaux pour une réalisation du désordre (en haut) et moyenne sur 30 signaux (en bas)

On peut remarquer que le signal associé à l'onde cohérente est de durée nettement plus petite que celle des signaux expérimentaux. Ceci est peut-être dû au fait que, du point de vue expérimental, toutes les configurations possibles n'ont pas été prises en compte. Il subsiste donc encore des échos associés à la composante incohérente du champ diffusé. L'ensemble de ces échos est qualifié de « coda ». Théoriquement, un seul écho doit subsister après moyennage comme le montre la figure 4-6, obtenue par transformée de Fourrier inverse du coefficient de transmission théorique.

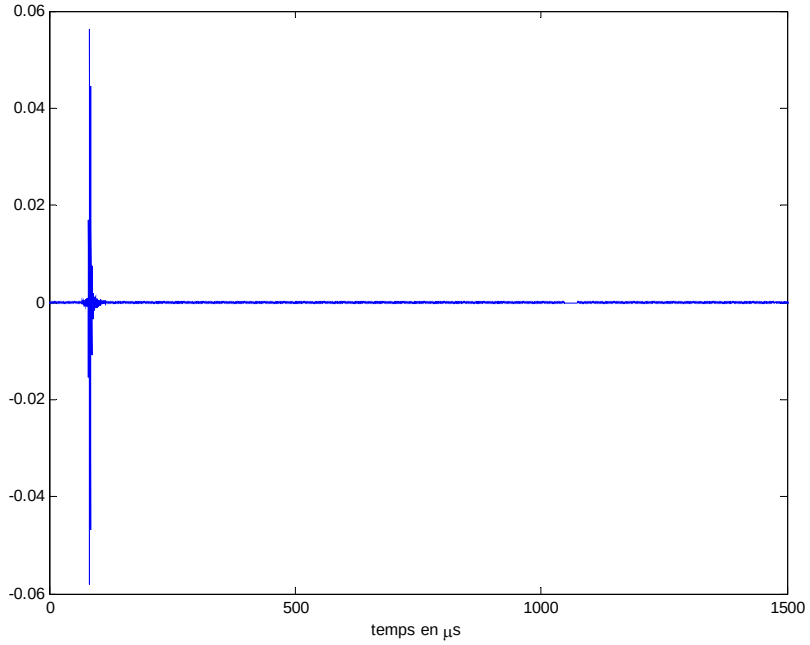


figure 4-6 signal moyen théorique pour une épaisseur de milieu multi-diffuseur de 12 cm.

Une solution serait d'augmenter le nombre de configurations spatiales afin d'effectuer une moyenne sur un plus grand nombre de signaux. Nous verrons cependant que, dans le cas de notre cible limitée en largeur, ceci pose d'autres problèmes.

On peut retrouver l'atténuation et la vitesse de phase du milieu effectif à partir du coefficient de transmission. Nous allons donc chercher à déterminer un coefficient de transmission expérimental. Pour cela, nous effectuons la transformée de Fourrier du signal moyenné et nous la normalisons par la transformée d'un signal de référence, dont le module est montré figure 4-7, acquis dans les mêmes conditions mais sans la cible. La figure 4-8 montre le résultat de cette opération comparé au coefficient de transmission théorique pour des cylindres.

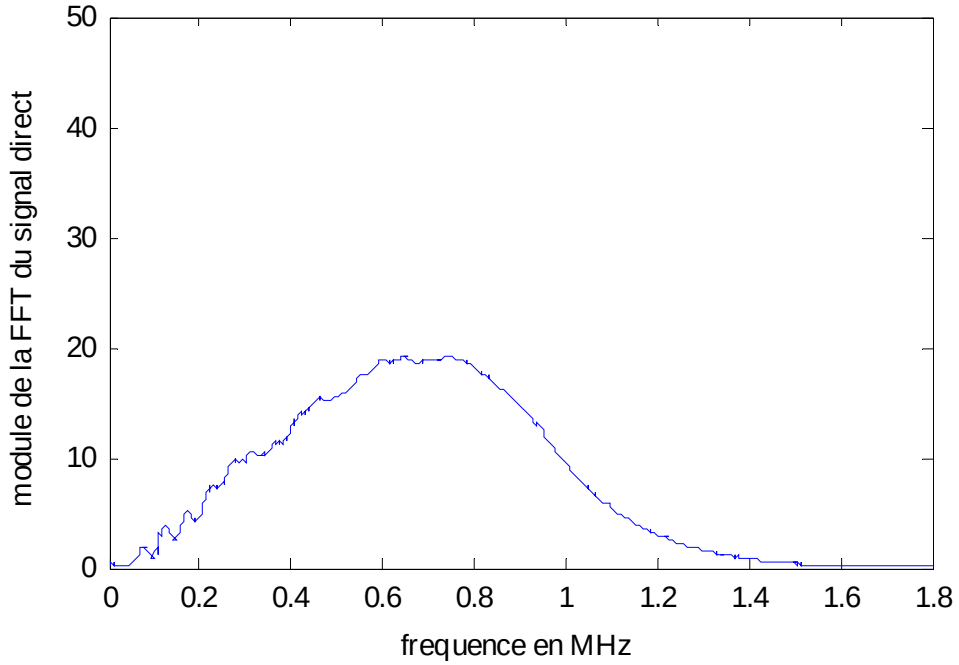


figure 4-7 module de la transformée de Fourier du signal de référence.

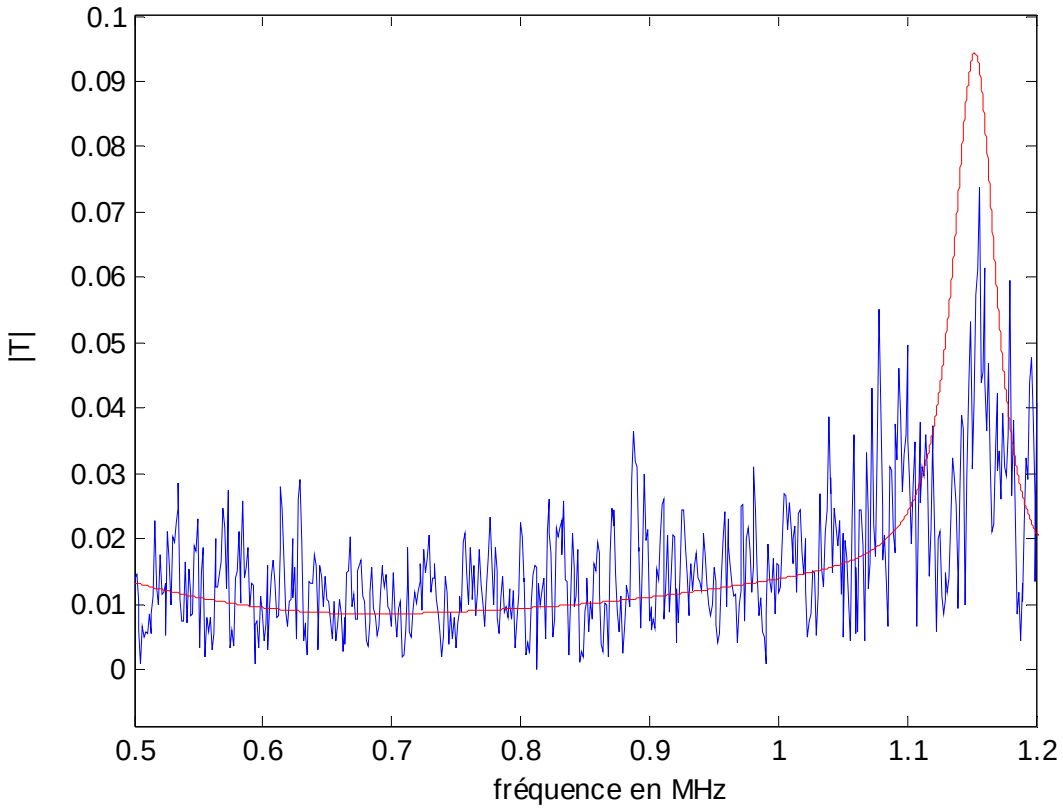


figure 4-8 Comparaison entre les modules du coefficient de transmission théorique (en rouge), et expérimental (en bleu)

La visualisation a été restreinte à la gamme de fréquence correspondant à la bande passante et aux fréquences pour lesquelles les cylindres peuvent être considérés comme infiniment longs. Comme on peut le voir, le coefficient expérimental est très bruité. Cependant, on peut noter une bonne concordance entre la théorie et le coefficient expérimental. Ceci va nous permettre de déterminer une atténuation effective expérimentale. En effet, le bon accord entre le premier terme de la série de Debye et le coefficient de transmission global vu au chapitre précédent, nous permet d'approximer le module du coefficient de transmission, en considérant que les coefficients pour les interfaces planes ont un module de l'ordre de 1, par la relation suivante :

$$|T| = e^{-K''d} \tag{4.1}$$

La figure 4-9 montre la comparaison entre les rapports *K''/k* théorique et expérimental.

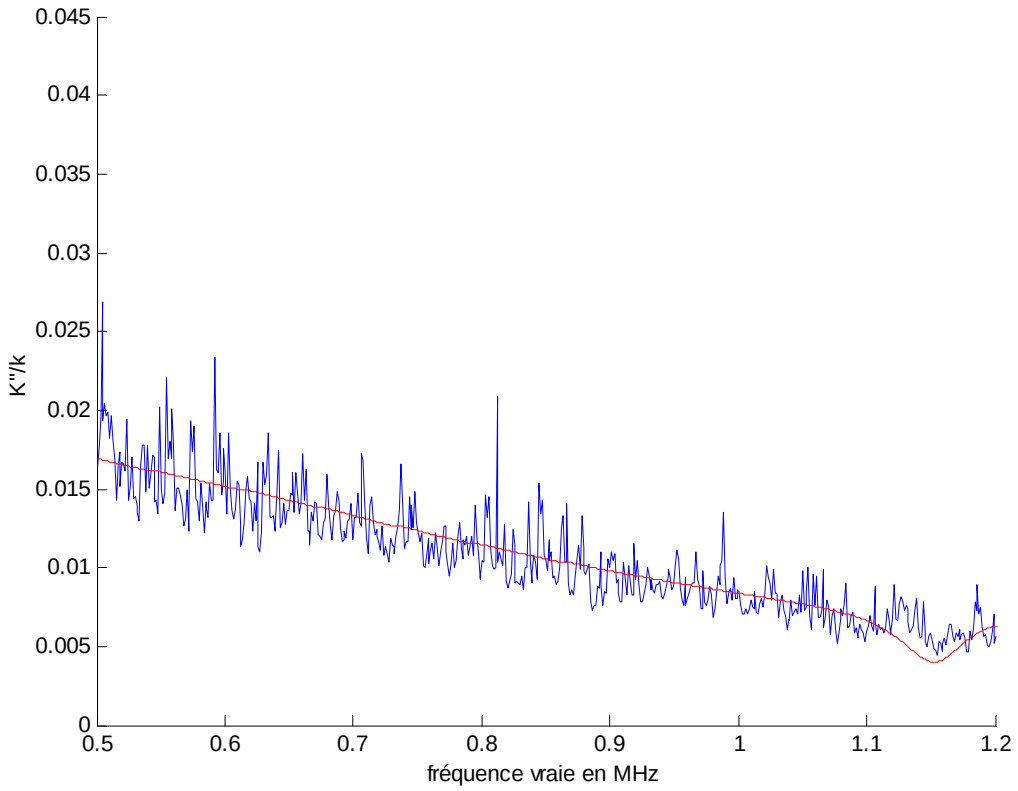


figure 4-9 Comparaison entre les atténuations théorique (en rouge), expérimentale (en bleu) pour 30 acquisitions

La mesure de la vitesse de propagation dans l'eau est effectuée en mesurant la différence de temps de vol entre la réflexion directe sur une plaque et la réflexion directe sur

cette même plaque reculée de 30 cm. La figure 4-9 nous permet de voir qu'il y a un bon accord entre les prévisions théoriques et la mesure expérimentale entre 0,5 MHz et 1,2 MHz. Il reste cependant des différences importantes entre les deux courbes.

C'est sur cette détermination de l'atténuation que l'on s'aperçoit de l'influence de la largeur limitée de notre cible. En effet, si l'on augmente le nombre d'acquisitions de 30 à 46, en prenant toujours des signaux répartis autour du centre de la cible, l'atténuation expérimentale s'éloigne de l'atténuation théorique comme le montre la figure 4-10.

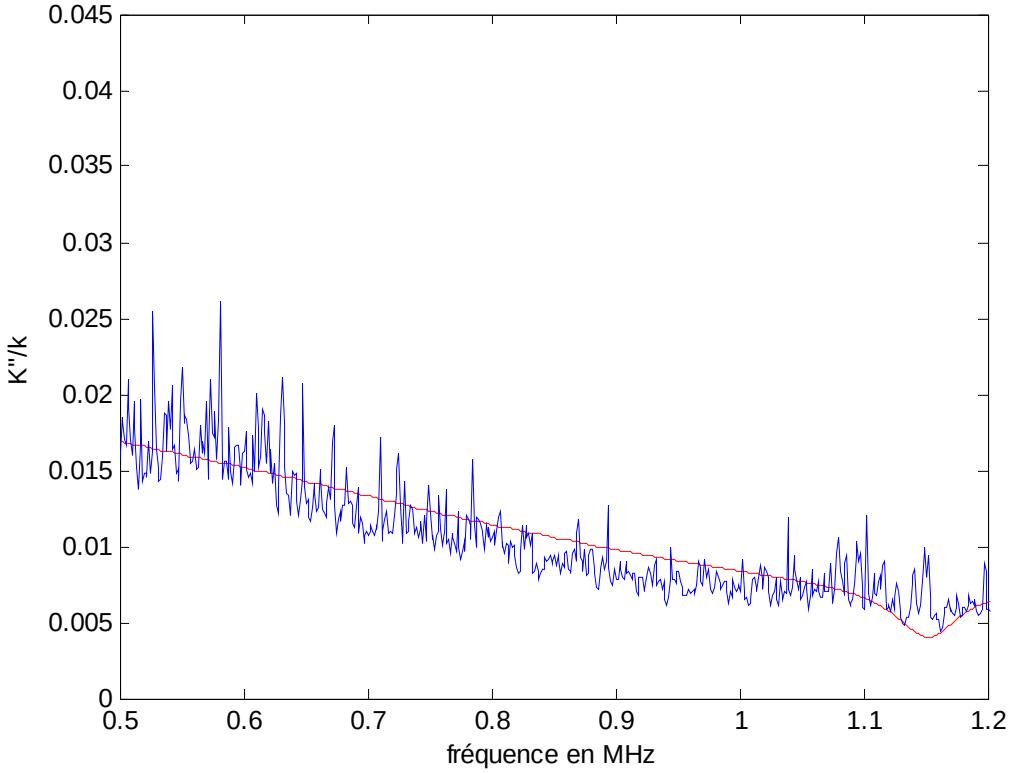


figure 4-10 Comparaison entre les atténuations théorique (en rouge), expérimentale (en bleu) pour 46 acquisitions

Sur cette figure, on voit que les atténuations expérimentale et théorique coïncident moins que lorsque l'on ne prend que 30 signaux. Ceci peut s'expliquer par le fait que lorsque l'on considère 30 signaux, le faisceau incident insone le milieu multi-diffuseur sans « voir » les extrémités. Mais, lorsque l'on considère 46 acquisitions, il ne reste que 3 cm entre le bord du transducteur et le bord de la cible pour la configuration associé aux deux derniers signaux. En tenant compte de l'ouverture du transducteur, on se rend compte que la totalité du signal incident ne rencontre pas le milieu multi-diffuseur et qu'une partie de l'onde entrée dans la forêt de cylindres peut « s'échapper » par les bords. Nous ne sommes donc plus dans les conditions d'un milieu infini selon un axe parallèle au front d'onde incident. La construction

d'une cible permettant d'augmenter le nombre d'acquisitions sans être gêné par de tels effets de bord est envisagée mais n'a pu être menée à bien actuellement.

Nous allons maintenant nous attacher à trouver une vitesse de phase effective expérimentale. Un premier calcul sur la différence de temps de propagation entre l'émetteur et le récepteur avec et sans la cible nous permet de trouver un ordre de grandeur pour cette vitesse de phase de l'ordre de 1250m/s, ce qui est proche de la vitesse dans l'eau comme le prévoie la théorie. Nous allons maintenant chercher à déterminer l'évolution fréquentielle de la vitesse de phase. Pour cela, nous allons utiliser une méthode inspirée de celle de Sachse et Pao [54]. Nous allons considérer le premier terme de la série de Debye du coefficient de transmission en négligeant les coefficients de transmission d'interface plane qui sont de l'ordre de 1:

$$\phi_T = e^{iKd} e^{ik(L-d)}, \tag{4.2}$$

avec T_{ij} le coefficient de transmission à une interface plane entre le milieu i et le milieu j (1 étant ici le milieu fluide extérieur et 2 le milieu multi-diffuseur), et L la distance entre l'émetteur et le récepteur. Dans la partie théorique, nous avons fixé l'origine des phases en x=0. Expérimentalement, cette origine se trouve au niveau du transducteur émetteur. Nous allons donc recaler les phases expérimentales en utilisant le signal de référence acquis sans la cible. Ce signal s'écrit :

$$\phi_{direct} = e^{ikL} \tag{4.3}$$

Avec l'origine des phases en x=0, le coefficient de transmission de la couche de milieu multi-diffuseur peut alors s'écrire :

$$T_1 = e^{iKd} e^{-ikd} \tag{4.4}$$

La phase de ce coefficient est :

$$\varphi_T = K'd - kd\,. \tag{4.5}$$

On a alors la relation suivante :

$$c_{eff} = \frac{kc_0 d}{\varphi_T + kd}\,. \tag{4.6}$$

Pour utiliser ces relations, on part du principe que les phases sont continues. C'est-à-dire, notamment, qu'il n'y a pas de saut de phase de $-\pi$ à π, pour cela, on est amené à « dérouler » la phase du signal normé. En effectuant cette opération on obtient la figure 4-11.

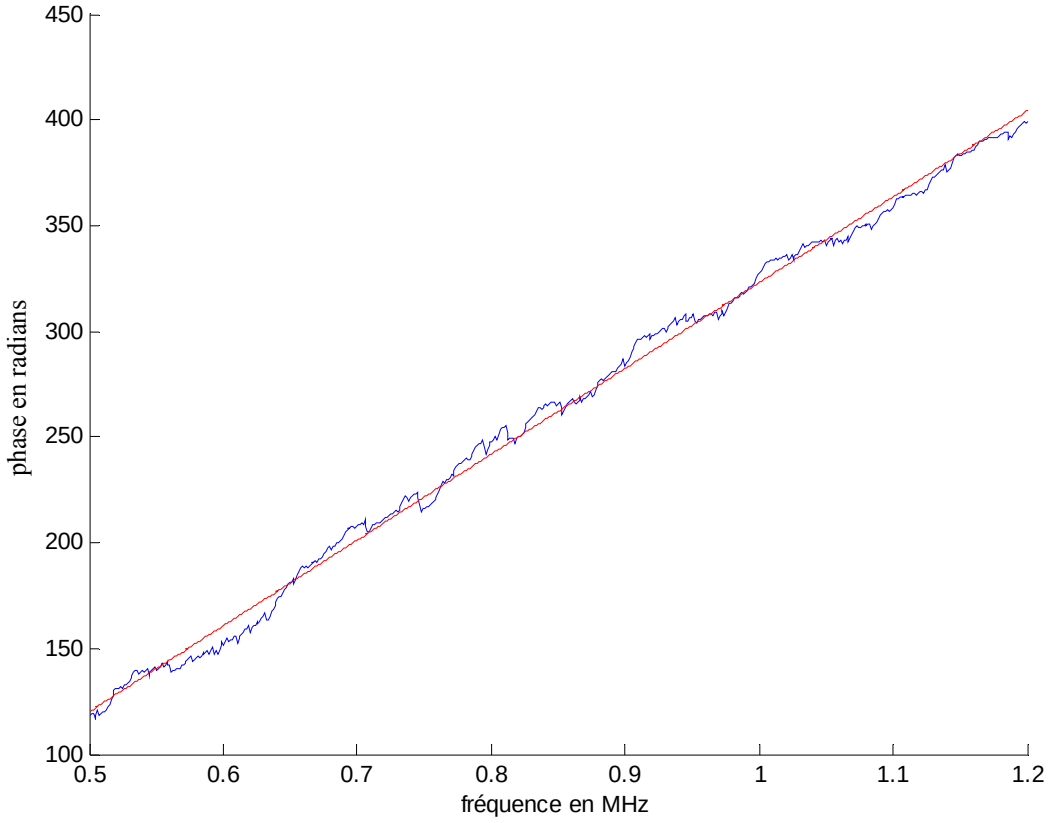


figure 4-11 phase déroulée du coefficient de transmission moyen.

Pour calculer la vitesse de phase expérimentale, il ne faut pas oublier que la référence des phases choisie. On va donc calculer une pente moyenne pour la phase déroulée, puis à partir de cette régression linéaire, on va calculer la correction à apporter à la phase pour que la droite moyenne passe par l'origine du plan fréquence-phase. Sur la figure 4-12, sont présentées la phase expérimentale recalée, sa régression linéaire et la phase déroulée théorique.

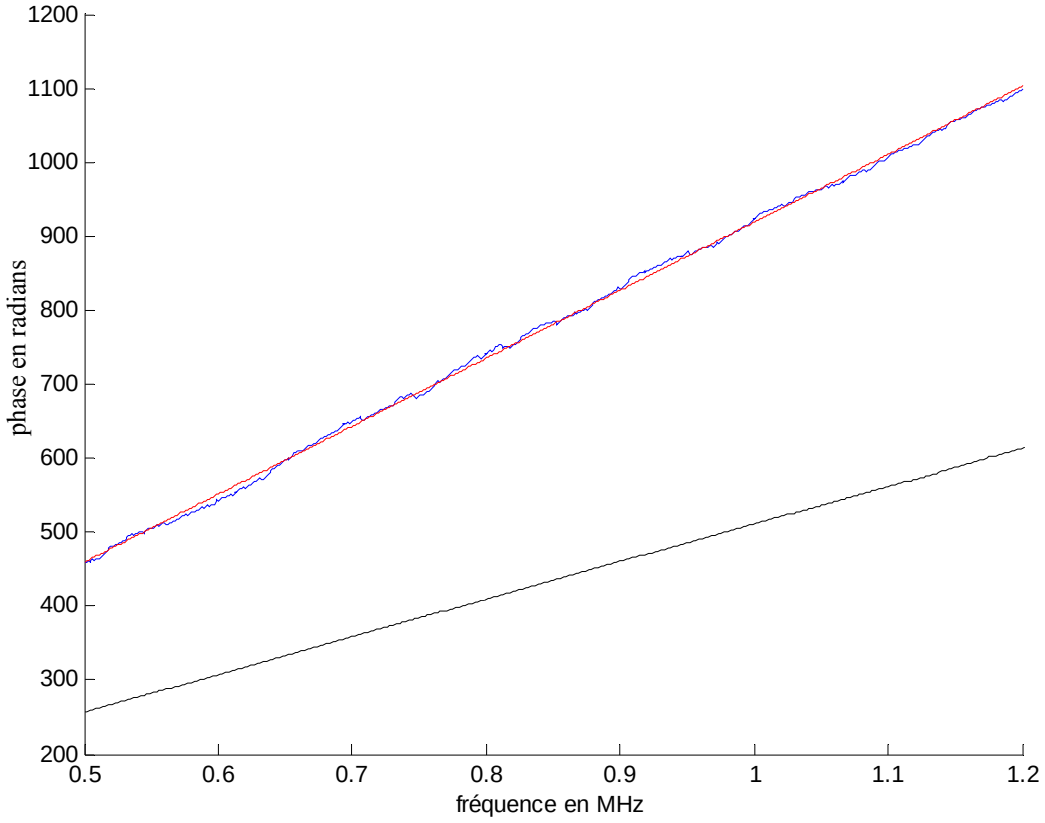


figure 4-12 phase déroulée du coefficient de transmission moyen expérimental (en bleu), théorique (en noir) et une régression linéaire de la phase expérimentale (en rouge).

Sur cette figure, on voit en bleu la phase expérimentale recalée, en rouge la régression linéaire recalée et en noir, la phase déroulée du signal calculée théoriquement à partir du temporel de la figure 4-6. On s'aperçoit qu'il y a une grande différence de comportement entre les phases théorique et expérimentale. Ceci va induire des différences entre les vitesses de phase expérimentale et théorique. La figure 4-13 montre la comparaison entre la vitesse de phase trouvée dans le chapitre précédent, la vitesse effective trouvée expérimentalement et la vitesse de phase obtenue à partir du coefficient de transmission théorique avec la relation (4.6) ..

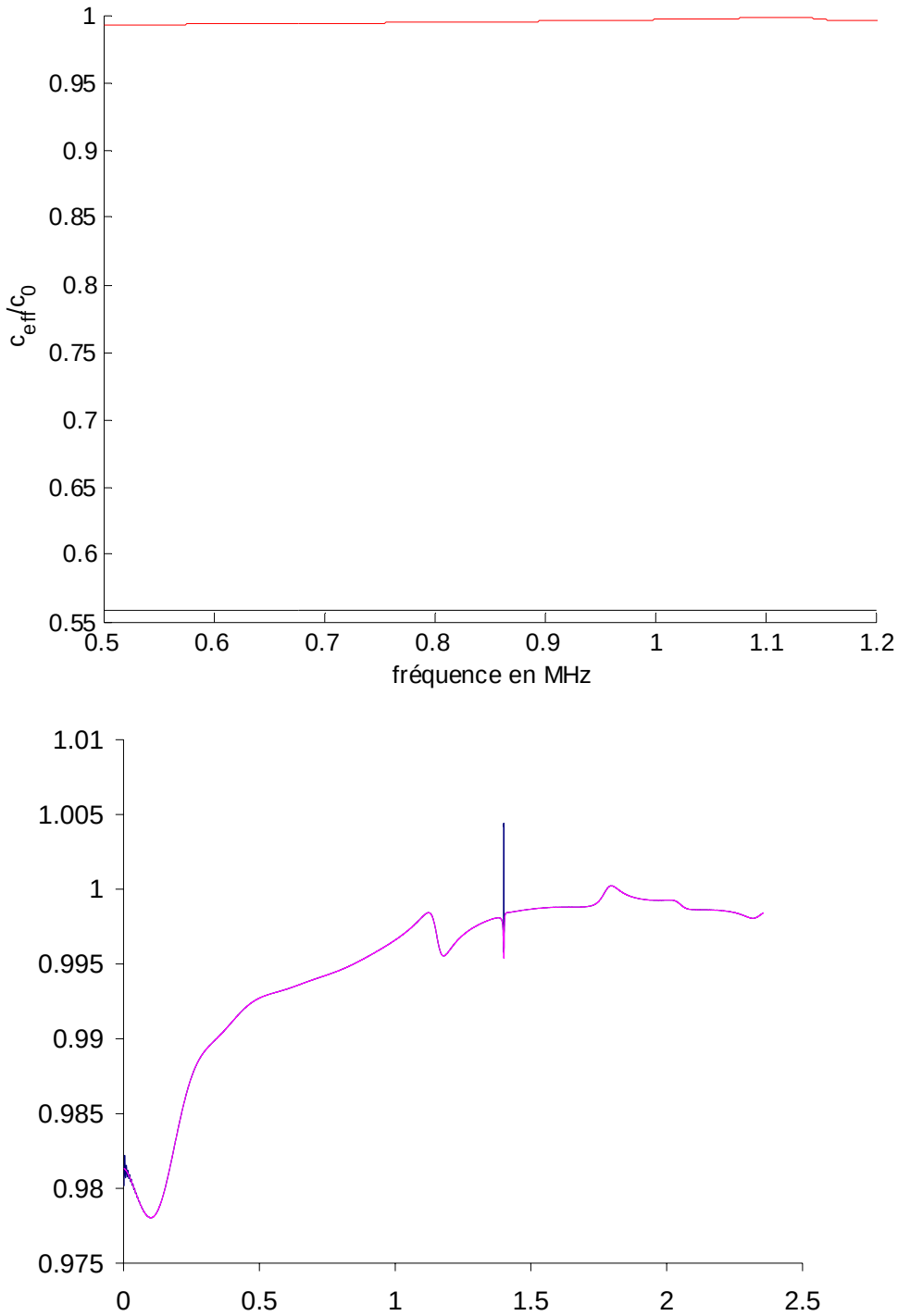


figure 4-13 en haut, comparaison entre la vitesse de phase théorique (en rouge) et la vitesse de phase expérimentale (en noir). En bas, comparaison entre la vitesse de phase théorique (en bleu) et la vitesse de phase déduite de la phase du coefficient de transmission théorique. (en magenta)

La courbe théorique de cette figure nous permet de voir que les approximations sur les arguments des coefficients d'interface plane sont justifiées. Cependant, la vitesse de phase expérimentale est loin de concorder avec la théorie. Il convient donc d'essayer de déterminer l'ensemble des éléments pouvant provoquer une erreur dans la mesure de la phase expérimentale ou dans les traitements effectués. Pour cela, il ne faut pas oublier les circonstances dans lesquelles les signaux ont été acquis. Tout d'abord, les transducteurs émetteur et récepteur sont déplacés entre chaque acquisition. Lors des expériences présentées ici, ce déplacement était effectué à la main, sur des rails supposés parallèles. Il est bien évident que, si les directions de translations ne sont pas parfaitement colinéaires, il va se produire une modification de la distance entre les deux transducteurs introduisant ainsi un déphasage inconnu entre les différentes acquisitions. De plus, le signal que nous traitons est un signal moyen. Si tous les signaux moyennés n'ont pas exactement la même référence de phase, la phase résultante sera faussée. Les corrections effectuées visant à s'assurer d'une phase nulle pour une fréquence nulle peuvent également être remises en question. En effet, cette correction est effectuée sur le signal moyenné. Si l'on ajoute à cela que, même en ce qui concerne le module du coefficient de transmission, le résultat expérimental est très « bruité », on s'aperçoit qu'il faudrait en plus augmenter le nombre de configurations sur lequel est fait le moyennage. Malheureusement, la taille de la cible ne nous permet guère d'en faire plus actuellement. On peut supposer, cependant, que si ce nombre augmente, on va se rapprocher des hypothèses théoriques et qu'ainsi les résultats expérimentaux vont converger vers les prédictions théoriques. Ces expériences ayant été menées en fin de thèse, toutes les options n'ont pas pu être traitées.

Afin de résoudre certains des problèmes de phase observés, une autre expérience est envisagée. Il s'agit de construire une cible permettant de bouger des ensembles de diffuseurs. Associé au balayage spatial, ce système permettrait d'augmenter sensiblement le nombre de signaux acquis. Il offrira, de plus, la possibilité de faire des acquisitions en laissant les transducteurs fixes permettant ainsi d'être sûr que tous les signaux ont la même référence de phase.

Nous allons maintenant voir comment se comporte la théorie de Fikioris et Waterman lorsque les diffuseurs ne sont pas isotropes.

5 Etude d'un milieu multi-diffuseur anisotrope

Afin d'étendre le champ d'application de notre étude, nous allons maintenant remplacer chaque diffuseur cylindrique par un groupe de tubes analogue à ceux étudiés dans le premier chapitre. Ces diffuseurs sont anisotropes, ce qui est la principale motivation de cette action afin de jauger l'influence du type de diffuseur sur les résultats obtenus. Nous allons dans un premier temps voir les modifications à apporter à la théorie pour prendre en compte l'anisotropie des diffuseurs, puis nous nous attacherons à l'analyse des résultats numériques.

5.1 Introduction de l'anisotropie dans la théorie de Fikioris et Waterman

Pour introduire de l'anisotropie dans notre modèle, nous allons simplement remplacer les diffuseurs cylindriques par des ensembles de N tubes suffisamment proches pour qu'il puisse exister entre eux une interaction résonante. On s'intéresse alors à un système semblable à celui de la figure 5-1 pour lequel N=2. Ce système est constitué d'une couche de milieu multi-diffuseur, et l'on va chercher à déterminer le nombre d'onde effectif, ainsi que les coefficients de réflexion et de transmission.

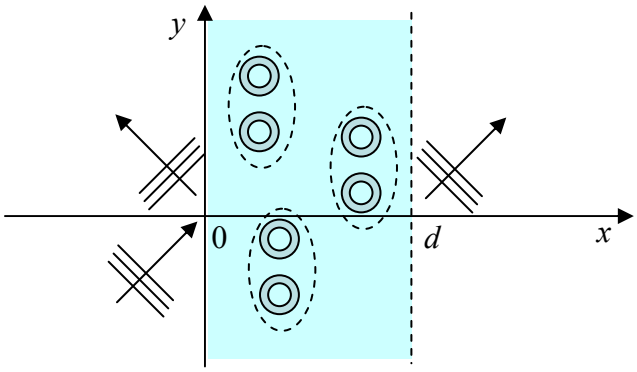


figure 5-1 représentation du milieu multi-diffuseur anisotrope

Dans la théorie de Fikioris et Waterman, ce qui caractérise un diffuseur, c'est sa matrice de transition. Celle-ci a été présentée au chapitre 1, tant dans le cas où le diffuseur est un tube que lorsque le diffuseur est un groupe de N tubes. Dans la première situation, nous

avons vu que cette matrice de transition est diagonale, ce qui n'est pas le cas dans la seconde. Nous allons donc présenter les principaux changements induits par la prise en compte des termes non diagonaux de la matrice de transition en nous référant toujours aux relations du cas isotrope présentées dans les chapitres 2 et 3. La première relation où intervient cette différence est bien évidemment la relation donnant l'onde diffusée par un diffuseur. Ceci se retrouve lors de l'écriture de l'onde incidente totale insonant le diffuseur j :

$$\begin{aligned}\phi^{(j)} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(j)} J_n\left(kr_j\right) e^{in\theta_j} \\ &= e^{i\vec{k}.\vec{d}_j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n\left(kr_j\right) e^{in\theta_j} e^{-in\alpha} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_n^{(i)} T_{mn} G_{ml}^{(ji)} J_l\left(kr_j\right) e^{il\theta_j},\end{aligned} \tag{5.1}$$

relation équivalente à (2.10), dans laquelle la matrice de transition T^1 d'un diffuseur seul a été remplacée par la matrice de transition T d'un groupe de N tubes. T est définie par ses composantes dans la relation (1.45) du chapitre 1. La somme infinie supplémentaire qui apparaît est due au fait que T n'est pas une matrice diagonale, à la différence de T^1. Après moyennage sur toutes les configurations possibles et introduction de l'approximation quasi-cristalline, nous obtenons la relation suivante pour les amplitudes moyennes $\left\langle C_n^{(j)} \right\rangle_j$:

$$\left\langle C_n^{(j)} \right\rangle_j = e^{i\vec{k}.\vec{d}_j} i^n e^{-in\alpha} + \frac{N-1}{S} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} T_{ml} \int_{S'} G_{mn}^{(ji)} \left\langle C_l^{(i)} \right\rangle_i d\vec{d}_i \,. \tag{5.2}$$

C'est ici qu'intervient la deuxième modification importante. En effet, nous allons décider de la forme sous laquelle nous allons chercher la solution. Or, comme les diffuseurs sont anisotropes, le milieu multi-diffuseur est, *a priori*, lui aussi anisotrope. Il n'y a donc pas de raison, dans le cas général, pour que l'onde se propageant vers les x croissants ait le même nombre d'onde que celle se propageant vers les x décroissants. C'est pourquoi nous introduisons des vecteurs d'onde effectifs différents dans la relation suivante :

$$\left\langle C_n^{(j)} \right\rangle_j = i^n e^{-in\beta_1} X_n^+ e^{i\overrightarrow{K^+}.\vec{d}_j} + i^{-n} e^{in\beta_2} X_n^- e^{i\overrightarrow{K^-}.\vec{d}_j} \tag{5.3}$$

avec :

$$\overrightarrow{K^+} = \begin{cases} K_{1x} = K_1 \cos\beta_1 \\ K_{1y} = K_1 \sin\beta_1 \end{cases} \qquad \overrightarrow{K^-} = \begin{cases} K_{2x} = -K_2 \cos\beta_2 \\ K_{2y} = K_2 \sin\beta_2 \end{cases} \,. \tag{5.4}$$

Le premier terme de la somme dans la relation (5.3) est relatif à une onde cohérente se propageant vers les x croissants, le second à une onde cohérente se propageant vers les x décroissants.

La relation de Snell-Descartes est toujours vérifiée, on a donc :

$$k_y = K_{1y} = K_{2y} \tag{5.5}$$

ce qui s'écrit encore :

$$k \sin\alpha = K_1 \sin\beta_1 = K_2 \sin\beta_2 \tag{5.6}$$

L'introduction de (5.3) dans (5.2) va nous donner la relation suivante :

$$\begin{aligned} &X_n^+ e^{i\overrightarrow{K^+}.\vec{d}_j} + (-1)^{-n} e^{in(\beta_1+\beta_2)} X_n^- e^{i\overrightarrow{K^-}.\vec{d}_j} = e^{i\vec{k}.\vec{d}_j} e^{-in\alpha} e^{in\beta_1} + \\ &\frac{N-1}{S}\left[\sum_p \sum_l T_{(p+n)l} i^{l-n} e^{i(n-l)\beta_1} X_l^+ I_p^+ + \sum_p \sum_l T_{(p+n)l} i^{-n-l} e^{+i(n\beta_1+l\beta_2)} X_l^- I_p^-\right] \end{aligned} \tag{5.7}$$

avec :

$$I_p^{\pm} = \int_{S'} e^{ip\theta_{ji}} H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right) e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\vec{d}_i} d\vec{d}_i \ . \tag{5.8}$$

L'intégrale (5.8) est similaire à celle présente dans (3.9). On peut donc réutiliser les expressions trouvées. Comme précédemment, les relations déterminées doivent être vérifiées quelle que soit la position du diffuseur j et le système est invariant selon y ; on peut donc poser sans perte de généralité $y_j=0$, et égaliser les termes en fonctions des différentes exponentielles en x_j. On trouve alors les relations suivantes :

$$X_n^+ = -\frac{2\pi b}{\left(k^2 - K_1^{\,2}\right)} \frac{N-1}{S} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} T_{(p+n)l} X_l^+ i^{l-n-p} e^{i(n-l+p)\beta_1} \left[K_1 J_p^{'}\left(K_1 b\right) H_p^{(1)}\left(kb\right) - kJ_p\left(K_1 b\right) H_p^{(1)'}\left(kb\right)\right] \tag{5.9}$$

$$X_n^- = -\frac{2\pi b}{\left(k^2 - K_2^{\,2}\right)} \frac{N-1}{S} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} T_{(p+n)l} X_l^- i^{n-l+p} e^{i(-n+l-p)\beta_2} \left[K_2 J_p^{'}\left(K_2 b\right) H_p^{(1)}\left(kb\right) - kJ_p\left(K_2 b\right) H_p^{(1)'}\left(kb\right)\right] \tag{5.10}$$

$$0=1+\frac{2i}{k_x}\frac{N-1}{S}\left[-\frac{\left(K_{1x}+k_x\right)}{\left(k^2-K_1^{\,2}\right)}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}T_{pl}i^{l-p}e^{-il\beta_1}e^{ip\alpha}X_l^+ +\frac{\left(K_{2x}-k_x\right)}{\left(k^2-K_2^{\,2}\right)}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}T_{pl}i^{-l-p}e^{il\beta_2}e^{ip\alpha}X_l^-\right] \quad (5.11)$$

et

$$0=\left[\frac{\left(K_{1x}-k_x\right)}{\left(k^2-K_1^{\,2}\right)}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}X_l^+T_{pl}i^{l-p}e^{-il\beta_1}\left(-1\right)^p e^{iK_{1x}d}e^{-ip\alpha}-\frac{\left(K_{2x}+k_x\right)}{\left(k^2-K_2^{\,2}\right)}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}T_{pl}i^{-l-p}e^{il\beta_2}X_l^-\left(-1\right)^p e^{-iK_{2x}d}e^{-ip\alpha}\right] \quad (5.12)$$

Contrairement au cas isotrope, les deux équations de dispersion, obtenues en annulant les déterminants des systèmes (5.9) et (5.10), sont différentes et dépendent de l'angle d'incidence par l'intermédiaire de β_1 et β_2. On peut vérifier de plus que si la matrice de transition est diagonale, alors, les quatre relations ci-dessus sont respectivement égales aux relations (2.64), (3.30), (2.65) et (3.32).

Pour suivre le même cheminement que dans le cas isotrope, nous allons maintenant nous intéresser aux vitesses et atténuations effectives de chacune des ondes cohérentes pour différents cas, puis nous continuerons notre calcul pour arriver à l'expression des coefficients de réflexion et de transmission de la couche de milieu multi-diffuseur.

5.2 Vitesses effectives, atténuation et angle d'incidence

D'un point de vue numérique, on s'intéresse à des diffuseurs constitués de deux tubes en aluminium de rapport rayon interne sur rayon externe 0,9. Les paramètres de ces tubes sont les mêmes que ceux du chapitre 1. A l'intérieur de chaque diffuseur, les tubes sont distants de βa=2,04a de telle sorte qu'il existe une interaction résonante non négligeable entre eux. La distance limite d'approche entre deux diffuseurs n'est plus b=2a mais : b=(β+2)a=4,04a.

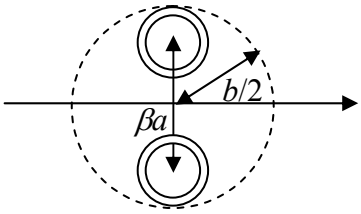


figure 5-2 détermination de la distance limite d'approche dans le cas d'un diffuseur constitué de 2 tubes

Pour caractériser l'anisotropie du milieu, nous allons nous intéresser à l'évolution des nombres d'onde effectifs en fonction de deux angles caractéristiques. Le premier est l'angle d'incidence α, le second est l'angle entre l'axe passant par les centres des tubes formant le diffuseur et l'axe Oy. Ce dernier angle sera noté γ. Nous allons considérer deux orientations du diffuseur γ=90° et γ=45°. Pour ces deux configurations, nous allons étudier différents angles d'incidence : α=0°, α=45° et α=-45°. Les six situations possibles sont présentées sur la figure 5-3.

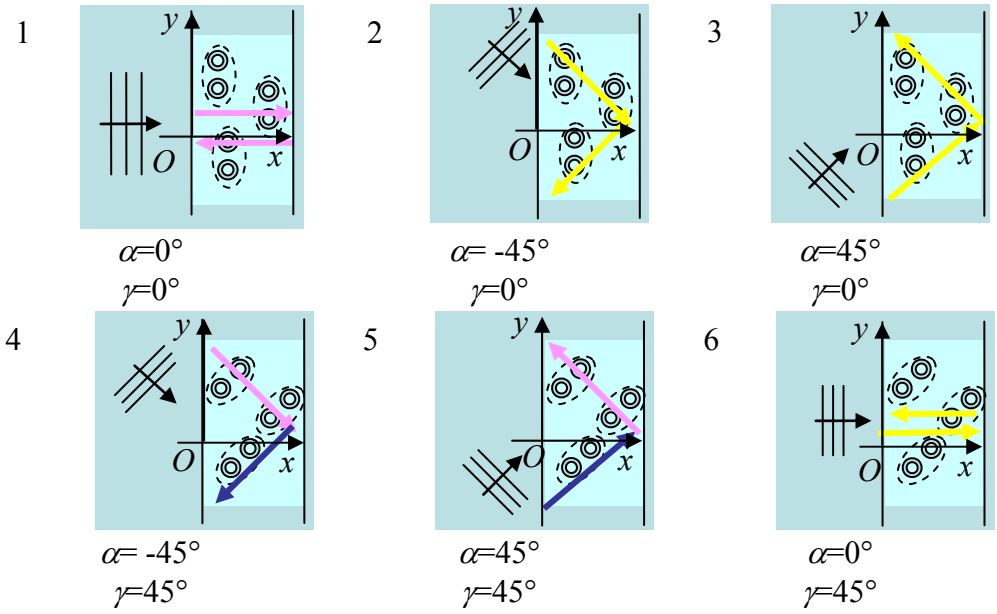


figure 5-3 présentation des différentes situations étudiées

Sur cette figure, les flèches de couleur représentent la direction et le sens de propagation des ondes qui seraient transmises et réfléchies à l'intérieur de la couche en l'absence de diffuseurs. Leurs directions respectives sont très proches de celles des deux

ondes cohérentes, correspondant respectivement aux nombres d'ondes effectifs notés K_1 et K_2 dans le paragraphe précédent. Quand on étudie l'évolution de ces nombres d'onde effectifs avec la fréquence, on constate, en effet, que leurs valeurs restent toujours très proches de celle du nombre d'onde k de l'onde incidente. Dans le chapitre précédent, K_1 et K_2 étaient égaux, et indépendants de l'angle d'incidence. L'anisotropie se manifeste ici par le fait qu'ils sont maintenant différents l'un de l'autre et dépendent à la fois de l'angle d'incidence et de γ. Pour les situations représentées sur la figure 5-3, K_1 et K_2 sont égaux dans la première situation, égaux également à K_1 dans la situation 4, et à K_2 dans la situation 5. De même, les valeurs de K_1 et K_2 sont égales dans les situations 2, 3 et 6, et celle de K_2 dans la situation 4 est égale à celle de K_1 dans la situation 5. Ces différentes égalités sont symbolisées par un code de couleurs (jaune, magenta ou bleu) sur la figure 5-3. L'examen de cette figure confirme ainsi que les propriétés d'une onde cohérente ne dépendent, de façon logique, que de l'angle entre sa direction de propagation et l'axe des diffuseurs. Soit δ l'angle orienté entre la direction de propagation de l'onde effective et l'axe Ox, comme représenté sur la figure ci-dessous.

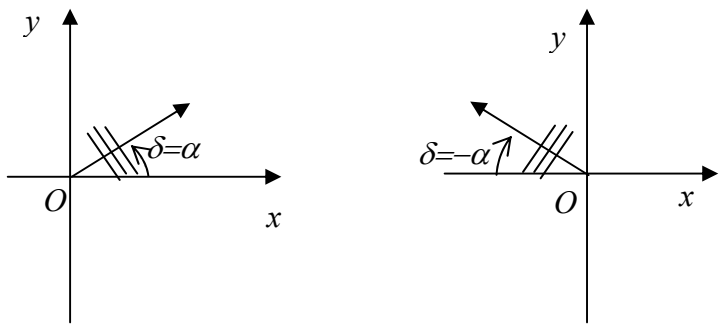


figure 5-4 définition de l'angle γ

La valeur du nombre d'onde effectif, à fréquence donnée, dépend donc uniquement de celle de $|\gamma+\delta|$, comme le montre le tableau récapitulatif suivant, dans lequel le même code de couleur que pour la figure 5-3 est utilisé, et où l'onde effective numéro 1 est celle se propageant vers les x croissants et l'onde effective numéro 2 celle se propageant vers les x décroissants.

situation	1		2		3		4		5		6	
Onde effective n°	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
$\delta \simeq$	0	0	-45	45	45	-45	-45	45	45	-45	0	0
$\lvert\delta+\gamma\rvert$	0	0	45	45	45	45	0	90	90	0	45	45

La figure 5-5 et la figure 5-6 représentent respectivement la vitesse effective et le libre parcours moyen élastique pour les différentes valeurs de $|\delta+\gamma|$ pour 11 500 diffuseurs/m², c'est-à-dire 23 000 tubes/m², soit une concentration *c* de tubes égale à 0,07.

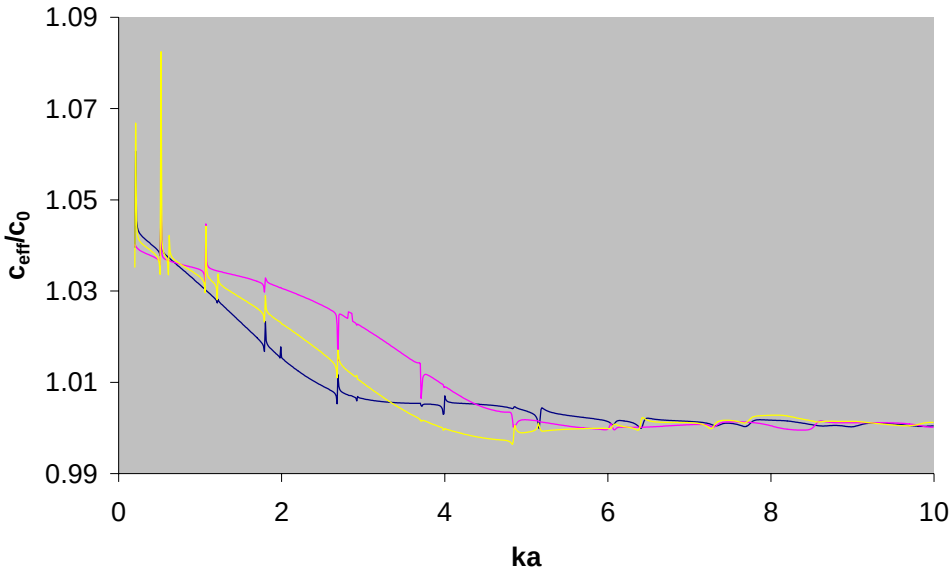


figure 5-5 évolution de la vitesse effective normée par la vitesse dans le fluide extérieur pour un milieu multi-diffuseur constitué de groupes de 2 tubes distants de 2,04*a* en fonction de la fréquence réduite pour différentes valeurs de $|\delta+\gamma|$: en bleu 90°, en jaune 45°, en magenta 0°. La densité des diffuseurs est de 11 500/m^2 (concentration de tubes *c*=0,07).

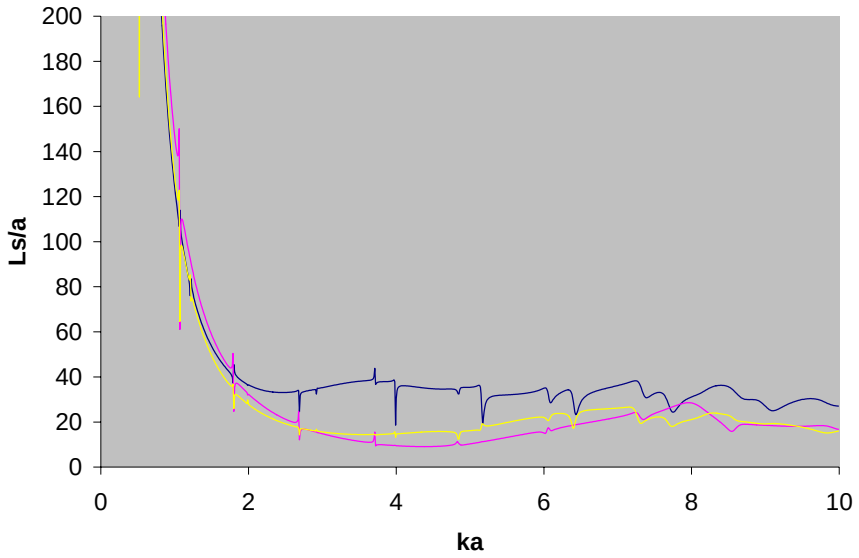


figure 5-6 évolution du libre parcours moyen élastique pour un milieu multi-diffuseur constitué de groupes de 2 tubes distants de 2,04*a* en fonction du nombre d'onde dans le milieu extérieur pour différentes valeurs de $|\delta+\gamma|$: en bleu 90°, en jaune 45°, en magenta 0°. La densité des diffuseurs est de 11 500/m^2(concentration de tubes *c*=0,07).

Sur les figures précédentes, on constate que, pour des fréquences réduites comprises entre 1 et 3, la vitesse effective est d'autant plus petite que la valeur de $|\gamma+\delta|$ est grande. A partir de *ka* de l'ordre de 5, elle ne dépend quasiment plus de $|\gamma+\delta|$. La différence entre les trois situations est visible sur une plus grande gamme de fréquence ($2<ka<6$) quand on considère le libre parcours moyen élastique. L'atténuation effective est donc plus sensible à l'anisotropie que la vitesse effective.

La figure 5-7 présente l'évolution de ces deux grandeurs pour une fréquence intermédiaire (ka=4,4) en fonction de $|\gamma+\delta|$.

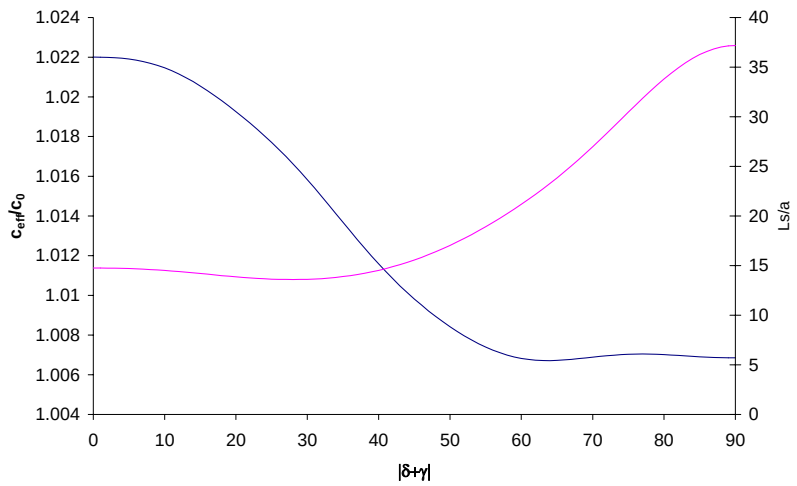


figure 5-7, évolution de la vitesse effective normée par la vitesse dans le milieu extérieur (en bleu, axe de gauche) et de le libre parcours moyen élastique (en magenta, axe de droite), en fonction de $|\gamma+\delta|$. La fréquence réduite est de 4,4. La densité des diffuseurs est de 11 500/m^2(concentration de tubes *c*=0,07).

Quand l'angle $|\gamma+\delta|$ augmente, la section du diffuseur vue par l'onde cohérente diminue comme on peut le vérifier par l'examen conjugué de la figure 5-3 et du tableau précédent. Les propriétés de l'onde cohérente se rapprochent donc, logiquement, de celles de l'onde incidente ($c_{eff}=c_0$ et Ls infini) quand $|\gamma+\delta|$ augmente.

On va maintenant s'intéresser à la différence entre deux milieux multi-diffuseurs de même concentration de tubes, l'un isotrope, l'autre anisotrope. Dans les deux cas, le nombre de tubes par unité de surface vaut 23 000 (c= 0,07). Pour le milieu isotrope, chaque tube représente un diffuseur, comme dans le chapitre 2. Pour le milieu anisotrope, chaque diffuseur est constitué de 2 tubes espacés de 2,04a, et nous allons considérer les trois nombres d'ondes effectifs correspondant à $|\gamma+\delta|$=0°, $|\gamma+\delta|$=45° et $|\gamma+\delta|$=90°. La figure 5-8 reprend les figures 5-4 et 5-5, avec les résultats du milieu isotrope en plus.

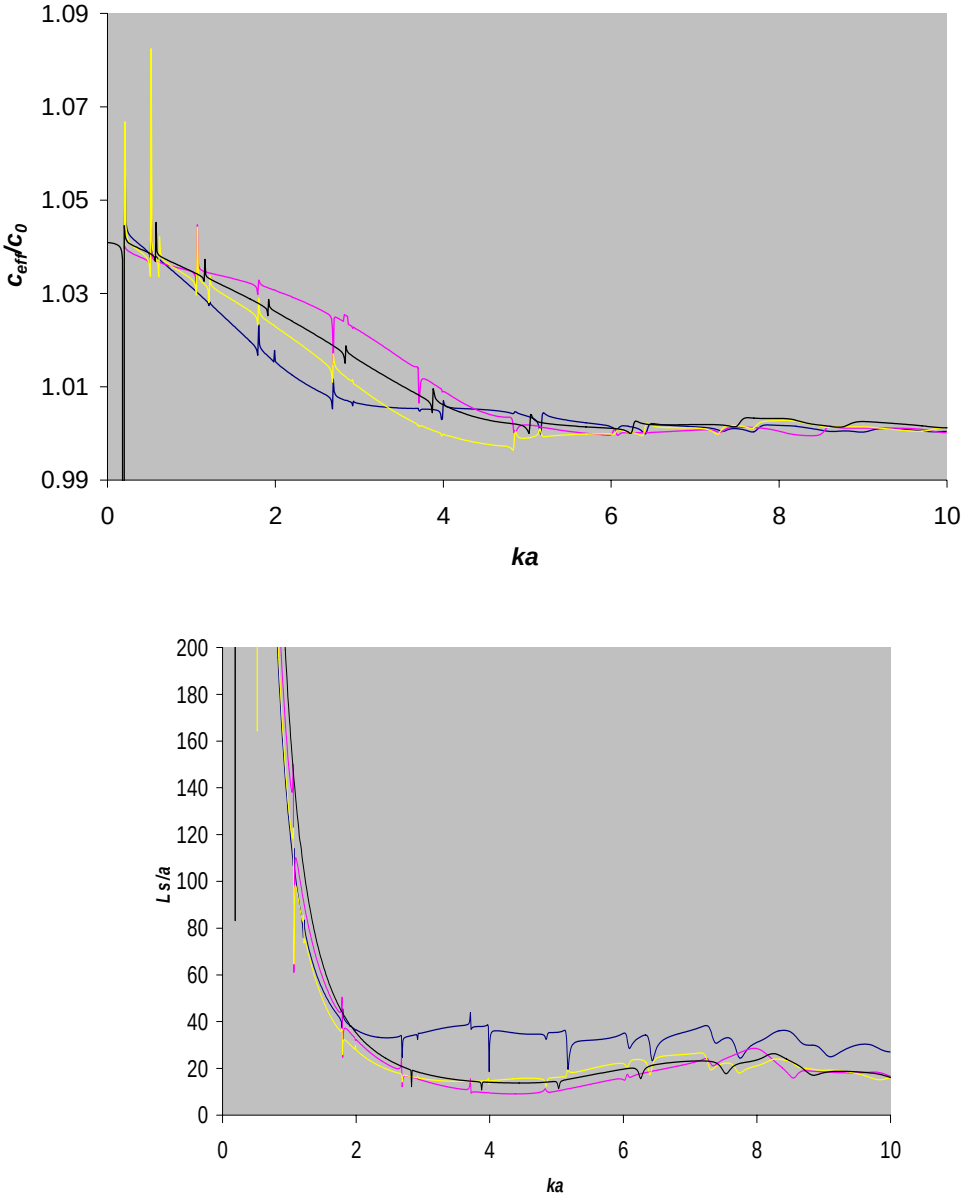


figure 5-8, comparaison entre les vitesses effectives (en haut) et les libres parcours moyens (en bas) pour une densité de 23 000 tubes/m^2 (concentration de tubes *c*=0,07), lorsque les diffuseurs sont constitués de 2 tubes avec $|\gamma+\delta|=0°$ (en magenta), $|\gamma+\delta|=45°$ (en jaune), $|\gamma+\delta|=90°$ (en bleu) et lorsque les diffuseurs sont des tubes seuls (en noir).

On constate que les courbes correspondant au cas isotrope s'intègrent naturellement entre celles des cas anisotropes extrêmes $|\gamma+\delta|=0$ et $|\gamma+\delta|=90°$, en respectant le principe selon lequel plus la section « visible » du diffuseur est grande, plus les propriétés de l'onde cohérente diffèrent de celles de l'onde incidente. La figure suivante permet une comparaison entre les sections de diffuseurs visibles selon les cas.

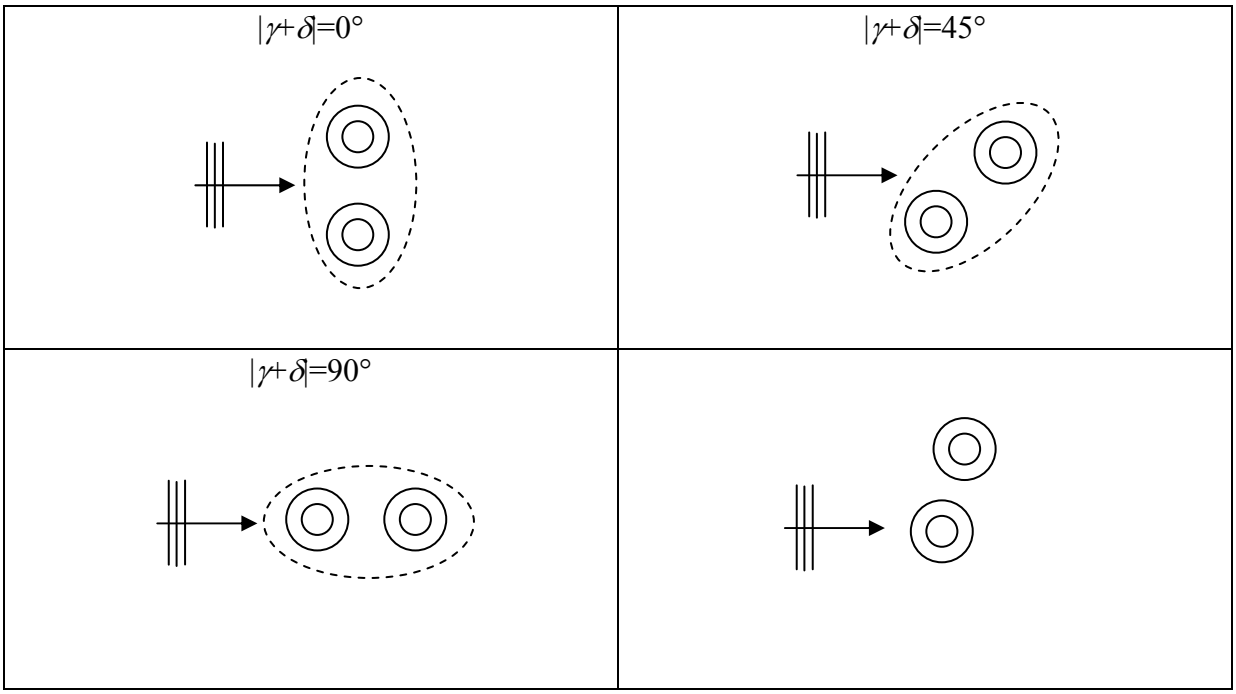


figure 5-9 visualisation des sections des diffuseurs vues par l'onde cohérente en fonction de |γ+δ|

Il est difficile, par contre, de juger, *a priori*, si cette section est plus grande dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope γ=45° ou si c'est le contraire. Du point de vue du libre parcours moyen, le milieu anisotrope γ=45° est quasiment identique au milieu isotrope. Seul l'examen de la vitesse effective permet d'observer une différence.

La démultiplication des résonances, quand on compare la réponse d'un tube à celle de deux tubes proches, est également visible sur cette figure. En effet, chaque accident sur les courbes en noir est encadré par deux accidents sur les courbes bleue, jaune et magenta. On retrouve donc les résultats du chapitre 1 concernant la configuration « tubes alignés ».

Avant de nous intéresser à la comparaison des coefficients de réflexion et de transmission associés à ces deux milieux, il nous faut déterminer analytiquement ces coefficients dans le cas du milieu anisotrope. C'est l'objet du paragraphe suivant.

5.3 Coefficients de réflexion et de transmission dans le cas anisotrope

Comme dans les paragraphes précédents, nous allons reprendre la démarche du chapitre 3 pour exprimer les coefficients de réflexion et de transmission lorsque les diffuseurs sont anisotropes. Comme dans le cas isotrope, nous allons maintenant chercher à exprimer les amplitudes $X_n^{\pm}$. Nous avons établi deux systèmes infinis d'où l'on peut tirer les équations de dispersion, ainsi que les deux équations du théorème d'extinction. Ce sont les relations (5.9) à (5.12). Nous avons alors 2M+2 équations pour 2M inconnues si M est la taille de la matrice nécessaire à la convergence des deux déterminants. Il nous faut donc supprimer 2 équations. Comme dans le cas isotrope, nous allons supprimer les équations correspondant à l'ordre 0. Si on réécrit les relations (5.9) et (5.10) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{m\neq 0}\left(\delta_{nm}+\frac{2\pi b n_0}{\left(k^2-K_1^{\,2}\right)}A_{nm}\right)X_m^{+} &= \frac{2\pi b n_0}{\left(K_1^{\,2}-k^2\right)}A_{n0}X_0^{+} \\ \sum_{m\neq 0}\left(\delta_{nm}+\frac{2\pi b n_0}{\left(k^2-K_2^{\,2}\right)}B_{nm}\right)X_m^{-} &= \frac{2\pi b n_0}{\left(K_2^{\,2}-k^2\right)}B_{n0}X_0^{-} \end{aligned} , \tag{5.13}$$

alors, on a les relations suivantes pour $n\neq 0$:

$$\begin{aligned} X_n^{+} &= \eta_A D_{A_n} X_0^{+} \\ X_n^{-} &= \eta_B D_{B_n} X_0^{-} \end{aligned} \tag{5.14}$$

avec

$$\begin{aligned} \eta_{\mathrm{A}} &= \frac{2\pi b n_0}{\kappa_1^{\,-}\kappa_1^{\,+}D_A} \\ \eta_{\mathrm{B}} &= \frac{2\pi b n_0}{\kappa_2^{\,-}\kappa_2^{\,+}D_B} \end{aligned} , \tag{5.15}$$

où D_A et D_B sont les déterminants respectifs du premier et du deuxième système de (5.13), et D_{A_n} et D_{B_n} ces mêmes déterminants lorsque la colonne n a été remplacée par A_{n0} ou B_{n0}, et

$$\begin{aligned}\kappa_1^{\pm} &= K_{1x} \pm k_x \\ \kappa_2^{\pm} &= K_{2x} \pm k_x\end{aligned}. \tag{5.16}$$

Avec ces résultats, les relations (5.11) et (5.12) deviennent :

$$-\frac{1}{\kappa_1^-}\sum_p\left(\eta_A f_p + T_{p0} f_{0p}\right)X_0^+ + \frac{1}{\kappa_2^+}\sum_p\left(\eta_B g_p + T_{p0} g_{0p2}\right)X_0^- = \frac{k_x}{2in_0} \tag{5.17}$$

et

$$\frac{1}{\kappa_1^+}e^{iK_x d}\sum_p\left(\eta_A G_p + T_{p0}\frac{1}{g_{0p}}\right)X_0^+ - \frac{1}{\kappa_2^-}e^{-iK_{2x}d}\sum_p\left(\eta_B F_p + T_{p0}\frac{1}{f_{0p2}}\right)X_0^- = 0 \tag{5.18}$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} f_{lp1} &= i^{l-p}e^{i(p\alpha - l\beta_1)} & f_{lp2} &= i^{l-p}e^{i(p\alpha - l\beta_2)} \\ g_{lp1} &= i^{-l-p}e^{i(p\alpha + l\beta_1)} & g_{lp2} &= i^{-l-p}e^{i(p\alpha + l\beta_2)} \end{aligned} \tag{5.19}$$

et

$$\begin{aligned} f_p &= \sum_{l\neq 0} D_{A_l} T_{pl} f_{lp1} & F_p &= \sum_{l\neq 0} D_{B_l} T_{pl}\frac{1}{f_{lp2}} \\ G_p &= \sum_{l\neq 0} D_{A_l} T_{pl}\frac{1}{g_{lp1}} & g_p &= \sum_{l\neq 0} D_{B_l} T_{pl} g_{lp2} \end{aligned}. \tag{5.20}$$

La résolution du système formé par (5.17) et (5.18) donne :

$$X_0^+ = \frac{ik_x}{2n_0}\frac{\kappa_1^-}{\sum_p\left(\eta_A f_p + T_{p0} f_{0p1}\right)}\frac{1}{\left[1 - Q^2 e^{i(K_{1x}+K_{2x})d}\right]} \tag{5.21}$$

et

$$X_0^- = \frac{\sum_p\left(\eta_A G_p + T_{p0}\frac{1}{g_{0p1}}\right)}{\sum_p\left(\eta_B F_p + T_{p0}\frac{1}{f_{0p2}}\right)}\frac{\kappa_2^-}{\kappa_1^+}e^{i(K_{1x}+K_{2x})d}X_0^+, \tag{5.22}$$

avec

$$Q^2 = \left(\frac{\kappa_1^- \kappa_2^-}{\kappa_1^+ \kappa_2^+}\right) \frac{\sum_p \left(\eta_B g_p + T_{p0} g_{0p2}\right) \sum_p \left(\eta_A G_p + T_{p0} \frac{1}{g_{0p1}}\right)}{\sum_p \left(\eta_A f_p + T_{p0} f_{0p1}\right) \sum_p \left(\eta_B F_p + T_{p0} \frac{1}{f_{0p2}}\right)}. \tag{5.23}$$

Dans ce cas, le coefficient Q^2 n'est pas réellement un terme élevé au carré, mais un produit de deux termes liés chacun à l'une des ondes se propageant dans le milieu effectif sous la forme suivante :

$$Q^2 = Q_1 Q_2 = \left(\frac{\kappa_1^-}{\kappa_1^+} \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(\eta_A G_p + T_{p0} \frac{1}{g_{0p1}}\right)}{\sum_{p-\infty}^{+\infty} \left(\eta_A f_p + T_{p0} f_{0p1}\right)}\right) \left(\frac{\kappa_2^-}{\kappa_2^+} \frac{\sum_{p-\infty}^{+\infty} \left(\eta_B g_p + T_{p0} g_{0p2}\right)}{\sum_{p-\infty}^{+\infty} \left(\eta_B F_p + T_{p0} \frac{1}{f_{0p2}}\right)}\right). \tag{5.24}$$

On va maintenant chercher les coefficients de réflexion et de transmission. Pour cela, on va chercher à exprimer le champ diffusé par l'ensemble des diffuseurs de la même façon que dans le chapitre 3. On reprend l'expression (3.44):

$$\phi_{diff} = n_0 \sum_n \sum_m T_{mn} \int_S \left\langle C_n^{(j)} \right\rangle H_m^{(1)}\left(kr_j\right) e^{im\theta_j} d\vec{d}_j \,, \tag{5.25}$$

et on obtient :

$$\phi_{diff} = n_0 \sum_n \sum_m T_{mn} X_n^+ i^n e^{-in\beta_1} I_j^+ + n_0 \sum_n \sum_m T_{mn} X_n^- i^{-n} e^{+in\beta_2} I_j^- \tag{5.26}$$

avec :

$$I^{\pm} = \int_S e^{i\overrightarrow{K^{\pm}}.\vec{d}_j} H_m^{(1)}\left(kr_j\right) e^{im\theta_j} d\vec{d}_j \,, \tag{5.27}$$

qui est la même intégrale que dans le cas isotrope.

Un calcul sans difficulté particulière permet d'écrire le coefficient de réflexion sous la forme :

$$R = -Q_1 \frac{\left[1 - e^{i(K_{1x}+K_{2x})d}\right]}{\left[1 - Q^2 e^{i(K_{1x}+K_{2x})d}\right]} \tag{5.28}$$

et le coefficient de transmission comme :

$$T = \frac{\left(1-Q^2\right)e^{iK_{1x}d}e^{-ik_x d}}{1-Q^2 e^{i(K_{1x}+K_{2x})d}}. \tag{5.29}$$

Les expressions de ces coefficients sont globalement semblables à celles du cas isotrope. Nous allons nous attacher à justifier les différences. Pour cela, nous allons considérer un cas d'étude constitué d'une plaque de fluide anisotrope immergée dans un autre fluide. Par fluide anisotrope, nous entendons un fluide tel que l'onde qui se propage dans la plaque s'écrit sous une forme similaire à (5.3).

Considérons les pressions suivantes :

$$\begin{aligned} p_i &= e^{ik_x x} \\ p_R &= Re^{-ik_x x} \\ p_T &= Te^{ik_x x} \\ p_p &= Ae^{ik_{1x}x} + Be^{-ik_{2x}x} \end{aligned} \tag{5.30}$$

avec p_i la pression incidente sur la plaque, p_R la pression réfléchie, p_T la pression transmise, et p_p la pression dans la plaque. Avec les conditions de continuité de la pression, et des déplacements normaux aux deux interfaces ($x=0$ et $x=d$), on trouve :

$$R = \frac{\left[\left(\frac{\rho_2 k_x}{\rho_1}\right)^2 - \frac{\rho_2 k_x}{\rho_1}k_{1x} + \frac{\rho_2 k_x}{\rho_1}k_{2x} - k_{1x}k_{2x}\right]}{\left[\left(\frac{\rho_2 k_x}{\rho_1}\right)^2 + \frac{\rho_2 k_x}{\rho_1}k_{2x} + \frac{\rho_2 k_x}{\rho_1}k_{1x} + k_{1x}k_{2x}\right]}\frac{\left(1-e^{i(k_{1x}+k_{2x})d}\right)}{1-Q^2 e^{i(k_{1x}+k_{2x})d}} \tag{5.31}$$

et

$$T = \frac{\left(1-Q^2\right)e^{ik_{1x}d}}{1-Q^2 e^{-i(k_{2x}+k_{1x})d}}e^{-ik_x d} \tag{5.32}$$

avec

$$Q^2 = \frac{\left[\left(\frac{\rho_2 k_x}{\rho_1}\right)^2 - \frac{\rho_2 k_x}{\rho_1}k_{1x} - \frac{\rho_2 k_x}{\rho_1}k_{2x} + k_{1x}k_{2x}\right]}{\left[\left(\frac{\rho_2 k_x}{\rho_1}\right)^2 + \frac{\rho_2 k_x}{\rho_1}k_{2x} + \frac{\rho_2 k_x}{\rho_1}k_{1x} + k_{1x}k_{2x}\right]} \tag{5.33}$$

où ρ_1 et ρ_2 sont les masses volumiques respectives du fluide extérieur et du fluide anisotrope. Comme la vitesse de propagation dépend de la direction de propagation, l'impédance acoustique aussi. Nous allons donc introduire deux impédances acoustiques :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \rho_2 k_{1x} \\ Z_2 &= \rho_2 k_{2x} \end{aligned} . \tag{5.34}$$

De même que dans le cas du milieu multi-diffuseur, Q^2 peut s'écrire :

$$Q^2 = Q_1 Q_2 \tag{5.35}$$

avec

$$Q_1 = \frac{1-\tau_1}{1+\tau_1}; \qquad Q_2 = \frac{1-\tau_2}{1+\tau_2}; \qquad \tau_1 = \frac{Z_1}{Z}; \qquad \tau_2 = \frac{Z_2}{Z}. \tag{5.36}$$

On a alors pour le coefficient de réflexion :

$$R = -Q_1 \frac{\left(1 - e^{i(k_{1x}+k_{2x})d}\right)}{1 - Q^2 e^{i(k_{1x}+k_{2x})d}}. \tag{5.37}$$

Il est donc justifié de faire une analogie entre un milieu multi-diffuseur constitué de diffuseurs anisotropes répartis aléatoirement selon une loi uniforme et un fluide anisotrope. Comme dans le cas isotrope, il est alors possible de déterminer les impédances du milieu multi-diffuseur.

Nous avons vu que seule la valeur de $|\gamma+\delta|$ est importante pour déterminer le nombre d'onde effectif. Pour ce qui est des coefficients de réflexion et de transmission, il est bien entendu nécessaire de connaître l'angle d'incidence par rapport aux « interfaces » fictives, en x=0 et x=d, du milieu multi-diffuseur ainsi que l'orientation du diffuseur. En effet, ces coefficients dépendent des deux nombres d'onde effectifs, celui de l'onde se propageant vers les x croissants, et celui de l'onde se propageant vers les x décroissants, mais aussi du parcours effectué par l'onde effective dans la plaque. La figure 5-10 confirme cette affirmation.

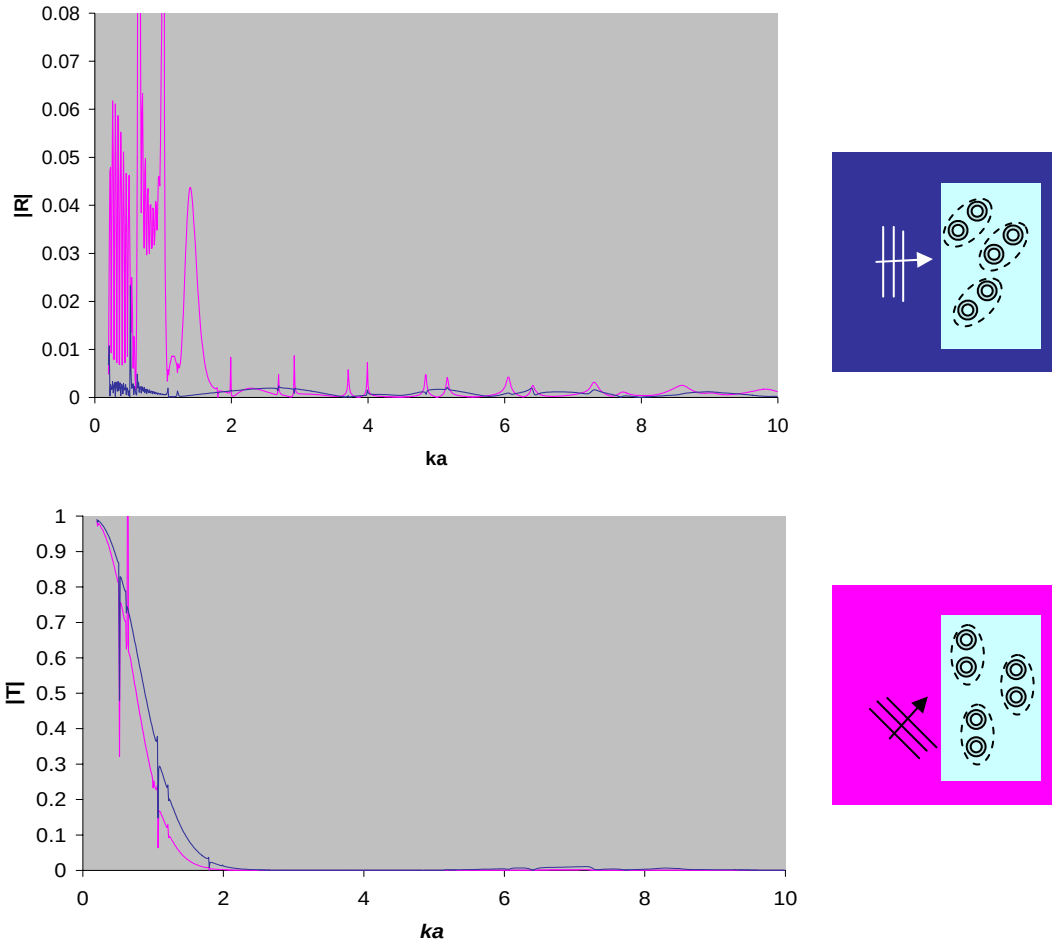


figure 5-10, modules des coefficients de réflexion (en haut) et de transmission (en bas) pour α= 0° et γ=45° (en bleu foncé), α=45° et γ=0° (en magenta)

La représentation du module du coefficient de réflexion a été volontairement limitée à une amplitude de 0,08 pour que la figure soit lisible, les seules valeurs supérieures à 0,08 sont liées à des résonances des diffuseurs et restent inférieures à 1. Lors du tracé de cette figure, on a pu constater que dans le cas d'une inclinaison du diffuseur nulle (γ=0), on obtient les mêmes coefficients de réflexion et de transmission avec une incidence de 45° et de -45°. Mais ces coefficients sont différents lorsque l'incidence est normale (α=0) et le diffuseur incliné de 45° (γ=45°) alors que, dans tous les cas, l'angle $|\gamma+\delta|$ est de 45°.

Ceci montre bien qu'il faut tenir compte aussi bien de l'angle d'incidence sur l'interface (α) que de l'angle entre l'axe des diffuseurs et l'interface (γ). En effet, du premier angle va dépendre l'épaisseur du milieu multi-diffuseur parcourue par l'onde effective. Dans le cas où l'axe du diffuseur est parallèle à l'interface, considérer une incidence de 45° ou de

-45° donne le même résultat car on peut passer d'un cas à l'autre par symétrie axiale. Les parcours des ondes sont donc équivalents.

On constate en outre que le module du coefficient de réflexion, dans le cas α=45°, γ=0, est supérieur à celui correspondant au cas α=0, γ=45°, alors que c'est l'inverse pour ce qui concerne les coefficients de transmission. Pour ce qui concerne le module du coefficient de transmission, ceci s'explique par le fait que, comme nous l'avons vu au chapitre 3, il est quasiment égal à $e^{-K''l}$, où l est la distance parcourue par l'onde cohérente à l'intérieur de la couche. En effet, les deux situations correspondent à des nombres d'onde effectifs K identiques. Par contre, la distance l dans le cas de l'incidence oblique est supérieure à celle parcourue dans le cas de l'incidence normale.

Nous allons maintenant comparer les coefficients de réflexion et de transmission obtenus dans le cas d'un milieu anisotrope avec ceux d'un milieu isotrope contenant le même nombre de tubes par unité de surface. Pour cela, nous reprenons les milieux considérés dans le paragraphe 5.2 pour la comparaison des vitesses effectives des milieux isotrope et anisotrope. La figure 5-11 présente les modules des coefficients de réflexion et de transmission en incidence normale dans le cas isotrope (en noir) et pour le milieu anisotrope quand les diffuseurs sont orientés, soit parallèlement à l'interface (γ=0 en magenta) soit selon un angle de 45° (γ=45° en jaune).

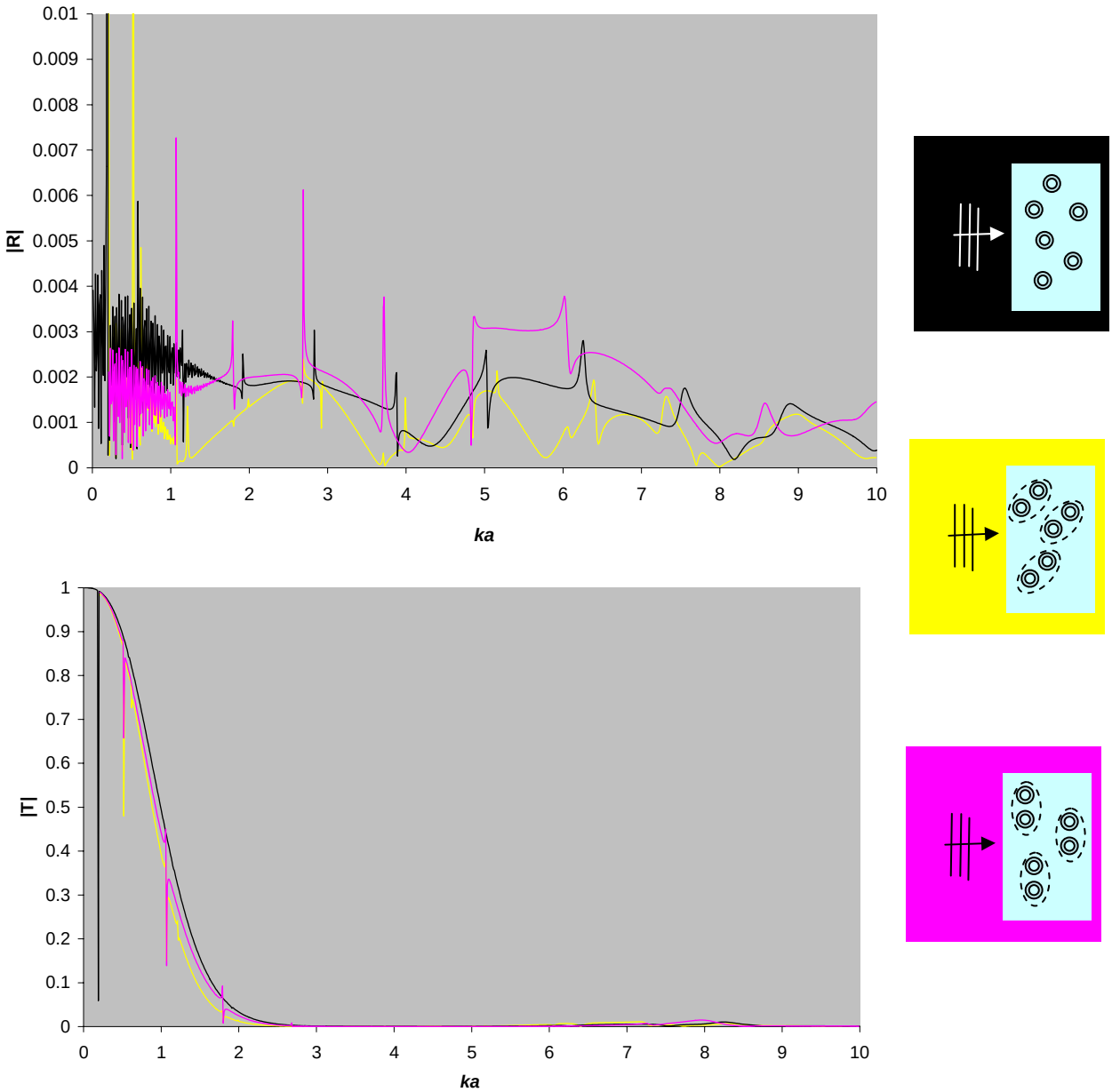


figure 5-11 modules des coefficients de réflexion (en haut) et de transmission (en bas) pour une couche de milieu multi-diffuseur constituée de 23 000 tubes/m^2 (concentration de tubes *c*=0,07) lorsque les diffuseurs sont des tubes seuls (en noir), deux tubes distants de 2,04*a* avec γ=0° (en magenta) et γ=45° (en jaune). Dans tous les cas, α=0°.

La comparaison des modules des coefficients de transmission confirme les constatations faites sur l'évolution du libre parcours moyen. En effet, comme nous l'avons vu, le coefficient de transmission peut s'approximer par $e^{-K''l}$. Dans les cas considérés ici, la distance l parcourue dans le milieu multi-diffuseur est identique. La seule différence vient

donc de la valeur du nombre d'onde effectif, liée à la section du diffuseur visible par l'onde cohérente.

L'analyse du module du coefficient de réflexion est plus complexe. En effet, nous avons vu au chapitre 3 que l'approximation du coefficient de réflexion nécessite la prise en compte de deux termes lors de l'écriture sous forme de séries de Debye. On peut cependant constater l'établissement d'ondes stationnaires dans l'épaisseur du milieu multi-diffuseur en basse fréquence. La figure 5-12 présente un zoom des modules des coefficients de réflexion de la figure 5-11.

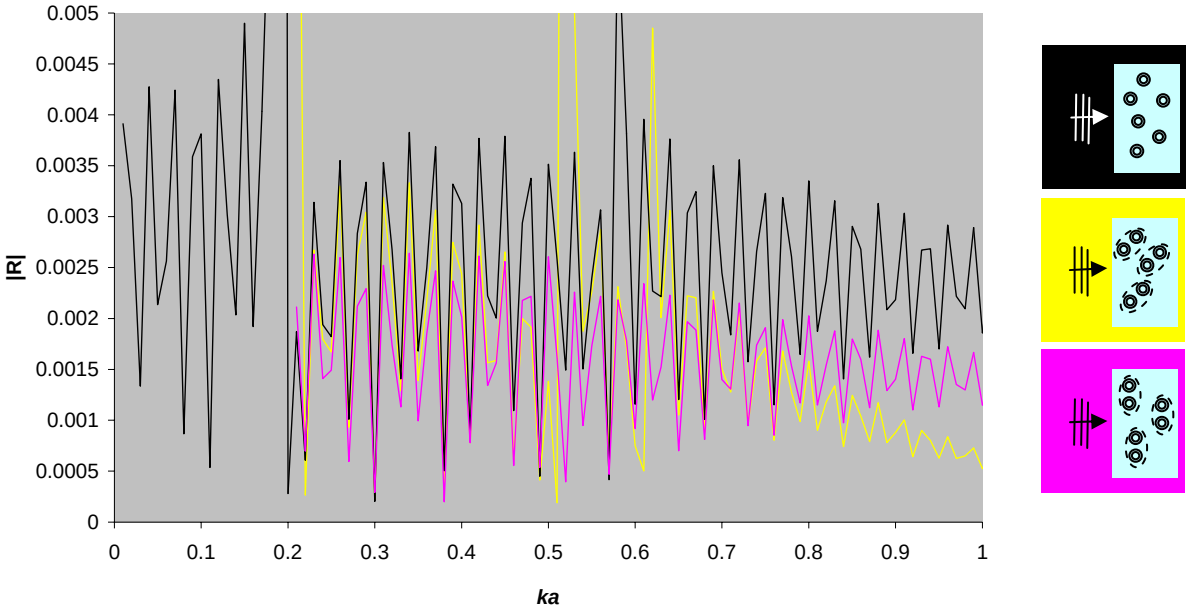


figure 5-12 modules des coefficients de réflexion pour une couche de milieu multi-diffuseur constituée de 23 000 tubes/m^2 (concentration de tubes c=0,07) lorsque les diffuseurs sont des tubes seuls (en noir), deux tubes distants de 2,04a avec γ=0° (en magenta) et γ=45° (en jaune). Dans tous les cas, α=0°. (zoom de la figure 5-11)

Sur cette figure, on voit que la période des oscillations est la même dans tous les cas. Nous avons vu dans le chapitre 3 que, dans le cas isotrope, ces oscillations correspondent à des ondes stationnaires effectuant des allers-retours à la vitesse effective dans l'épaisseur du milieu multi-diffuseur. En se référant à la figure 5-8, on constate que les vitesses effectives des trois cas considérés sont les mêmes pour des fréquences réduites inférieures à 1. Les oscillations des coefficients de réflexion dans les cas anisotropes correspondent donc bien à des ondes stationnaires.

Dans ce chapitre, nous avons montré que lorsque les diffuseurs ne sont pas isotropes, la théorie de Fikioris et Waterman peut être facilement adaptée afin de trouver un milieu fluide visqueux anisotrope équivalent au milieu multi-diffuseur. On trouve alors un nombre d'onde effectif qui ne dépend que de $|\gamma+\delta|$. L'évolution du libre parcours moyen élastique en fonction de $|\gamma+\delta|$ peut s'expliquer par la section des diffuseurs visible par le front d'onde de l'onde cohérente. Les coefficients de réflexion et de transmission dépendent à la fois de l'angle entre l'interface et la direction d'incidence et de l'angle entre l'onde effective et le diffuseur. La transmission est modifiée par l'anisotropie en raison de la variation de l'atténuation effective. La réflexion présente des oscillations dues à l'établissement d'ondes stationnaires dans l'épaisseur de la couche.

Conclusion générale

Nous nous sommes intéressés, dans ce document, à la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu multi-diffuseur. Nous avons montré les principaux problèmes liés à ce type de milieu. Tout d'abord, il est impossible d'effectuer un calcul de diffusion multiple lorsque le nombre de diffuseurs dépasse quelques dizaines en raison de la taille des matrices à gérer qui demande un espace mémoire important et du temps de calcul nécessaire. Ensuite, lorsque les diffuseurs sont des tubes et que la distance moyenne entre eux devient petite par rapport à leur taille, il se produit des couplages entre les tubes. Ces couplages se manifestent par des démultiplications des résonances de l'onde A d'un tube seul. Si l'on regarde un groupe restreint de diffuseurs, les nouvelles résonances observées peuvent alors être attribuées à des ondes locales, c'est-à-dire des ondes dont le parcours n'inclut pas tous les diffuseurs du groupe, ou à des ondes globales, ondes dont les parcours font intervenir tous les diffuseurs du groupe. Une étude expérimentale menée sur des groupes de tubes alignés et aux sommets d'un triangle équilatéral a confirmé ce comportement, ainsi que la présence de résonances supplémentaires dans les cas où les diffuseurs sont positionnés selon une géométrie fermée, résonance dont la nature reste indéterminée.

La seconde partie nous a permis de comparer trois théories de milieu effectif : celle de Foldy, celle de Waterman et Truell et celle de Fikioris et Waterman. La théorie de Foldy néglige la rétro-diffusion devant la diffusion vers l'avant et considère les diffuseurs comme ponctuels. Celle de Waterman et Truell utilise l'approximation quasi-cristalline et fait tendre la taille des diffuseurs vers 0. Ces deux théories sont très voisines. Elles aboutissent toutes deux à une expression explicite du nombre d'onde effectif et donnent des résultats similaires. La théorie de Fikioris et Waterman donne également des résultats proches pour de faibles densités de diffuseurs mais, comme elle est la seule à prendre en compte la taille réelle des diffuseurs, elle se différencie des deux théories précédentes dès que la longueur d'onde devient de l'ordre de quelques fois la taille des diffuseurs. L'expression du nombre d'onde effectif, dans cette théorie, est implicite. Pour de fortes densités de diffuseurs, cette théorie aboutit à des atténuations négatives en basses fréquences, ces résultats étant non physiques. Elle permet cependant de déterminer les caractéristiques (densité, vitesse de phase et atténuation) d'un milieu fluide visqueux homogène équivalent dans sa zone de validité. Ceci

est le point majeur de ce travail. Une validation expérimentale a été tentée mais n'a abouti que pour ce qui concerne l'atténuation effective. Des limitations dues à la taille de notre échantillon n'ont pas permis d'effectuer un moyennage suffisant pour se rapprocher des conditions théoriques. Enfin, la généralisation de la théorie de Fikioris et Waterman à des diffuseurs anisotropes a été effectuée, aboutissant à la détermination des caractéristiques d'un fluide visqueux anisotrope équivalent.

Ce travail doit être complété par une recherche de validation expérimentale. Dans ce but, il est envisagé de mettre au point une expérience dans laquelle les diffuseurs pourront être déplacés pour augmenter le nombre de configurations possibles afin de se rapprocher le plus possible de la moyenne statistique effectuée en théorie. De plus, si une répartition uniforme des diffuseurs est acceptable dans le cas d'un matériau artificiel, si l'on souhaite s'intéresser à des matériaux naturels, une répartition gaussienne des diffuseurs serait sans doute plus réaliste. Cependant, il parait alors peu probable d'obtenir un milieu effectif aussi simple que celui trouvé ici. Il pourrait donc être envisagé l'usage de méthodes utilisées dans le cas de phénomènes localisés comme les interphases en divisant l'espace occupé par les diffuseurs en une série de milieux de densités différentes. Connaissant les impédances de chacune de ces couches, il devient alors possible de jouer sur les épaisseurs pour se rapprocher au mieux d'une variation gaussienne de la densité de diffuseurs.

Annexe 1, Matrice de diffusion

La matrice de diffusion, ou matrice *S*, est un des outils important de la diffusion acoustique. En effet, elle renferme la plupart des propriétés de diffusion du système étudié : ses valeurs propres donnent les fréquences de résonance complexes de ce système. De plus, nous allons voir qu'il y a équivalence entre son unitarité et la conservation de l'énergie. Il existe plusieurs définitions de cette matrice ainsi que de la matrice de transition qui lui est directement liée. La matrice de transition intervient, quant à elle, de façon naturelle dans les calculs de champ diffusé. Suivant les conventions utilisées, elle va donc avoir une expression différente, et la relation qui la lie à la matrice de diffusion va donc elle aussi changer. Dans cette annexe, nous allons tout d'abord présenter la matrice *S*, ainsi que le lien entre cette matrice et la matrice de diffusion utilisée par Waterman. Nous montrerons ensuite que la conservation de l'énergie impose à la matrice *S* d'être unitaire.

Annexe1.1 Présentation de la matrice *S*.

Pour introduire la matrice *S*, nous allons suivre la présentation faite par L. Landau et E. Lifchitz.[19] Considérons un système insoné par une onde plane sous un angle d'incidence α. En champ lointain, cette onde plane s'écrit :

$$\phi_{inc} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\theta-\alpha)}\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{in(\theta-\alpha)}\frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}\right]. \qquad \text{(A1.1)}$$

Le champ lointain diffusé par tout le système étudié s'écrit, en géométrie cylindrique :

$$\phi_{diff} = f(\alpha,\theta)\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}. \qquad \text{(A1.2)}$$

Dans cette expression apparaît le développement asymptotique de la fonction de Green, en géométrie cylindrique, en facteur de la fonction de forme en champ lointain du système, $f(\alpha,\theta)$.

Le champ total est la somme du champ incident et du champ diffusé. Il s'écrit donc:

$$\phi_{tot} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\theta-\alpha)}\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{in(\theta-\alpha)}\frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}\right] + f(\alpha,\theta)\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}. \qquad \text{(A1.3)}$$

Afin de prendre en compte tous les phénomènes de diffusion, nous allons maintenant considérer que le système est, insoné par un spectre angulaire d'ondes planes se propageant dans des directions variables, ce qui nous donne comme nouveau champ total :

$$\phi_{tot} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)e^{-in\alpha}d\alpha\right)e^{in\theta}\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)e^{-in\alpha}d\alpha\right)(-1)^n e^{in\theta}\frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}\right]$$
$$+\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)f(\alpha,\theta)d\alpha\right)\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} \tag{A1.4}$$

Dans cette expression, l'amplitude *F(α)*, des ondes planes est une fonction 2π périodique. Nous allons maintenant utiliser les propriétés des séries de Fourier pour simplifier cette expression. Posons :

$$F_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)e^{-in\alpha}d\alpha\,. \tag{A1.5}$$

On peut alors réécrire (A1.4) sous la forme suivante :

$$\phi_{tot} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{in\theta}\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n(-1)^n e^{in\theta}\frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}\right] + \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)f(\alpha,\theta)d\alpha\right)\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}$$
. (A1.6)

Or,

$$F(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n\, e^{in\alpha}\,, \tag{A1.7}$$

donc :

$$\phi_{tot} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[F(\theta)\frac{e^{+i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} + F(\pi-\theta)\frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}\right] + \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)f(\alpha,\theta)d\alpha\right)\frac{e^{+i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}\,. \tag{A1.8}$$

En observant les exponentielles de propagation, on peut séparer l'expression (A1.8) en une partie convergente et une partie divergente :

$$\phi_{tot} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\pi-\theta)\frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}}_{\textit{Onde convergente}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[F(\theta)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} F(\alpha)f(\alpha,\theta)d\alpha\right]\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}}_{\textit{Onde divergente}}\,. \tag{A1.9}$$

Posons maintenant :

$$f(\alpha,\theta) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}T(\alpha,\theta), \tag{A1.10}$$

Avec les notations de Waterman, on peut écrire en champ lointain que :

$$\phi_{diff} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_{nm} i^m e^{-im\alpha}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{ikr}e^{-i\frac{\pi}{4}}i^{-n}\right]e^{in\theta} \tag{A1.11}$$

Par comparaison avec (A1.2), on a :

$$f(\alpha,\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_{nm} i^{m-n} e^{-im\alpha} e^{in\theta} = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}T(\alpha,\theta). \tag{A1.12}$$

Avec ces notations, la composante divergente du champ total peut s'écrire :

$$\phi_{div} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[F(\theta) + \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)T(\alpha,\theta)d\alpha\right]\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}. \tag{A1.13}$$

On peut alors introduire l'opérateur $\hat{T}$ définit par :

$$\hat{T}F(\theta) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(\alpha,\theta)F(\alpha)d\alpha, \tag{A1.14}$$

ce qui permet d'écrire le champ divergent sous la forme :

$$\phi_{div} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[I+2T]F(\theta)\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} = \hat{S}F(\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}, \tag{A1.15}$$

avec I, l'opérateur unité et $\hat{S} = I + 2\hat{T}$, l'opérateur de diffusion. Pour caractériser la matrice S, nous allons effectuer une projection sur la base des $e^{ip\alpha}$. Ceci nous donne :

$$\begin{aligned}
\hat{S}\left(e^{ip\alpha}\right)(\theta) &= \left(I+2\hat{T}\right)\left(e^{ip\alpha}\right)(\theta) \\
&= e^{ip\theta} + 2\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(\alpha,\theta)e^{ip\alpha}d\alpha \\
&= e^{ip\theta} + 2\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_{nm} i^{m-n-1} e^{-im\alpha} e^{in\theta} e^{ip\alpha}d\alpha \\
&= e^{ip\theta} + 2\frac{i}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_{nm} i^{m-n-1} e^{in\theta}\int_0^{2\pi} e^{i(p-m)\alpha}d\alpha \\
&= e^{ip\theta} + 2\frac{i}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_{nm} i^{m-n-1} e^{in\theta} 2\pi\delta_{mp} \\
&= e^{ip\theta} + 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{np} i^{p-n} e^{in\theta}
\end{aligned} \tag{A1.16}$$

La matrice associée à l'opérateur $\hat{T}$, ainsi définie, est alors identique à celle présentée dans le chapitre 1.

Annexe1.2 Matrice S et conservation de l'énergie.

Le champ total est constitué d'une onde convergente et d'une onde divergente. Pour qu'il y ait conservation de l'énergie, il faut donc que les flux d'énergie de ces deux ondes à travers une surface englobant le système étudié soient égaux. Nous allons maintenant nous attacher à montrer que c'est bien le cas. Considérons un cercle C de rayon R contenant tous les diffuseurs. Nous allons calculer les flux des vecteurs de Poynting des champs convergeant et divergeant quand R tend vers l'infini. Pour que la conservation de l'énergie soit vérifiée, il faut que ces deux flux soient égaux. Nous verrons que cela équivaut à dire que la matrice S est unitaire. Le vecteur de Poynting, $\vec{j}$, est défini par :

$$\vec{j} = \frac{\omega}{2}\mathrm{Im}\left(p\vec{u}^*\right). \tag{A1.17}$$

avec p, la pression et $\vec{u}$ le vecteur déplacement acoustique.

Son flux à travers le cercle C est donné par :

$$J = \int_0^{2\pi} \left[j_r r\right]_{r=R} d\theta, \tag{A1.18}$$

où j_r est la composante radiale de $\vec{j}$ .Calculons dans un premier temps, le flux de l'onde convergente. Comme on se place dans le fluide, la seule composante utile du déplacement $\vec{u}$ est sa composante radiale u_r.

On a alors:

$$\phi_{conv} = \frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F\left(\pi-\theta\right) \tag{A1.19}$$

donc, en posant $F\left(\theta\right) = e^{ip\alpha}\left(\theta\right)$, il vient :

$$u_{conv} = \frac{\delta\Phi_{conv}}{\delta r} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-ike^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}F\left(\pi-\theta\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}\frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\left(kr\right)^{3/2}}F\left(\pi-\theta\right) \tag{A1.20}$$

et

$$p_{conv} = \lambda \Delta \phi_{conv} = \lambda \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_{conv}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_{conv}}{\partial r} \right) \right]$$

$$= \lambda \left[\frac{1}{r^2} \frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F'' + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-ik) e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} F(\pi-\theta) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r}{2} \frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{(kr)^{3/2}} F(\pi-\theta) \right) \right]$$

$$= \lambda \left[\begin{array}{l} \frac{1}{r^2} \frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F'' - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{(-ik) e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{(kr)^{3/2}} F(\pi-\theta) \\ -k^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} F(\pi-\theta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{3}{4} \frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{(kr)^{5/2}} F(\pi-\theta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{ik}{2} \frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{(kr)^{3/2}} F(\pi-\theta) \end{array} \right]$$

(A1.21)

En exprimant ces deux quantités en $r=R$ en faisant tendre R vers l'infini, on a :

$$\begin{array}{l} u_{conv} = \xrightarrow[r\to\infty]{} -ik\phi_{conv} \\ p_{conv} \xrightarrow[r\to\infty]{} k^2 \lambda \phi_{conv} \end{array} \qquad \text{(A1.22)}$$

D'où l'expression du flux lié à l'onde convergente :

$$J_{conv} = \frac{\rho \omega^3}{2}. \qquad \text{(A1.23)}$$

Considérons maintenant le flux lié à l'onde divergente. On a :

$$\phi_{div} = \frac{e^{+i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} SF(\theta) \qquad \text{(A1.24)}$$

On exprime alors de la même façon que pour l'onde convergente les composantes radiales des contraintes et des déplacements :

$$u_{div} = \frac{\delta \phi_{div}}{\delta r} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{ike^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} SF(\theta) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{(kr)^{3/2}} SF(\theta) \qquad \text{(A1.25)}$$

$$p_{div} = \lambda \Delta \phi_{div} = \lambda \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_{div}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_{div}}{\partial r} \right) \right]$$

$$= \lambda \left[\frac{1}{r^2} \frac{e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F'' + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\sqrt{2\pi}} \frac{ike^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} SF(\theta) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r}{2} \frac{e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}}{(kr)^{3/2}} SF(\theta) \right) \right]$$

$$= \lambda \left[\begin{array}{l} \frac{1}{r^2} \frac{e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} SF'' - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{ike^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}}{(kr)^{3/2}} SF(\theta) \\ -k^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} SF(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{3}{4} \frac{e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}}{(kr)^{5/2}} SF(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{ik}{2} \frac{e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}}{(kr)^{3/2}} SF(\theta) \end{array} \right]$$

(A1.26)

En exprimant ces deux quantités en $r=R$ en faisant tendre R vers l'infini, on a :

$$\begin{array}{l} u_{div} = \xrightarrow[r \to \infty]{} ik\phi_{div} \\ p_{div} \xrightarrow[r \to \infty]{} k^2 \lambda \phi_{div} \end{array} \qquad \text{(A1.27)}$$

On en déduit alors le flux de l'onde divergente :

$$J_{div} = \frac{\rho \omega^3}{2} \sum_q \left| S_{pq} \right|^2 \qquad \text{(A1.28)}$$

L'égalité des flux d'énergie des ondes convergente et divergente nous conduit à écrire :

$$\frac{\rho \omega^3}{2} \sum_q \left| S_{pq} \right|^2 = \frac{\rho \omega^3}{2} \qquad \text{(A1.29)}$$

d'où :

$$\sum_q \left| S_{pq} \right|^2 = 1 \qquad \text{(A1.30)}$$

Il y a donc équivalence entre l'unitarité de la matrice S et la conservation de l'énergie. Ceci permet, entre autre, de valider la partie numérique de nos calculs.

Annexe 2 Calcul des intégrales nécessaires aux théories de Waterman et Truell et Fikioris et Waterman

L'intégrale que l'on cherche à évaluer est la suivante :

$$U_p\left(x_i\right)=\int_{D_\theta} e^{ip\theta_{ji}}\left[H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)e^{iK_y y_i}\right]dy_i \tag{A2.1}$$

Rappelons que la loi de Snell-Descartes nous donne :

$$\vec{k}=\begin{bmatrix}k_x=k\cos\alpha\\ k_y=k\sin\alpha\end{bmatrix};\qquad \vec{K}=\begin{bmatrix}K_x=K\cos\beta\\ K_y=K\sin\beta=k_y\end{bmatrix} \tag{A2.2}$$

La première étape consiste à exprimer la fonction de Hankel à l'aide du contour de Sommerfeld, noté W dans les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}U_p\left(x_i\right)&=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\theta_{ji}}H_p^{(1)}\left(kd_{ij}\right)e^{ik\sin\alpha y_i}dy_i\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_W \frac{1}{\pi}e^{ip\theta_{ji}}e^{ip\left(\gamma-\frac{\pi}{2}\right)}e^{ikd_{ij}\cos\gamma}e^{ik\sin\alpha y_i}d\gamma dy_i\end{aligned} \tag{A2.3}$$

Il existe alors deux cas que nous allons traiter séparément :

$$\begin{matrix}x_i<x_j\\ x_i>x_j\end{matrix}. \tag{A2.4}$$

* $\underline{x_i<x_j}$

Géométriquement, nous sommes dans la situation suivante :

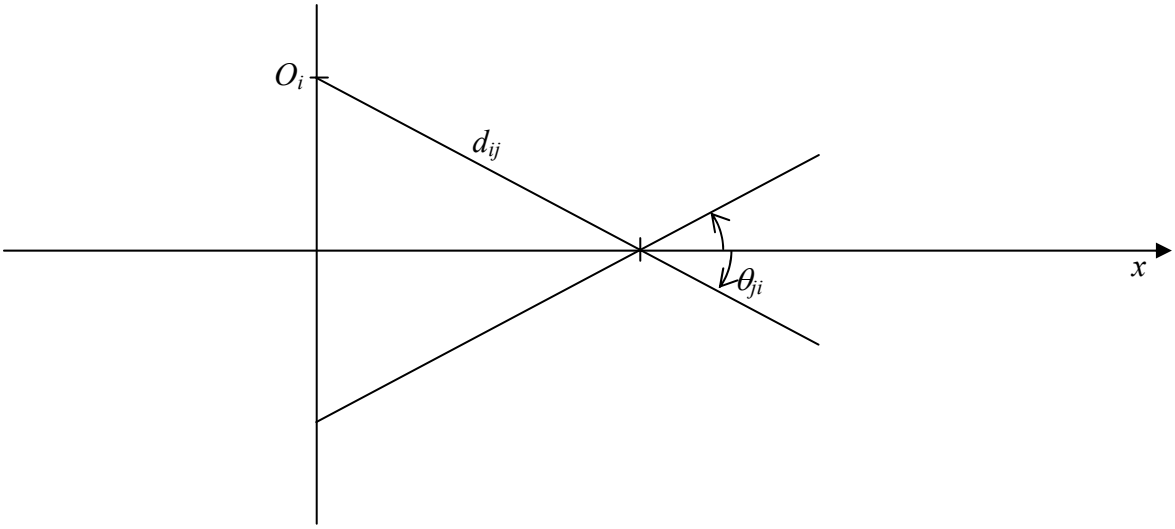


Figure 5-13 représentation symbolique de l'évolution de θ_{ji} lors du déplacement de O_i sur la droite d'équation x=0.

Lorsque y_i varie de $-\infty$ à $+\infty$, θ_{ji} varie donc de $\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$ en passant par 0.

Si on pose :

$$\gamma_1 = \gamma + \theta_{ji} \tag{A2.5}$$

et si l'on remarque que :

$$\begin{aligned} d_{ij}\cos\theta_{ji} &= x_j - x_i \\ d_{ij}\sin\theta_{ji} &= -y_i \end{aligned}, \tag{A2.6}$$

alors, $U_p(x_i)$ devient :

$$\begin{aligned} U_p(x_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_W \frac{1}{\pi} e^{ip\left(\gamma_1-\frac{\pi}{2}\right)} e^{ikd_{ij}\cos\gamma_1\cos\theta_{ji}} e^{ikd_{ij}\sin\gamma_1\sin\theta_{ji}} e^{ik\sin\alpha y_i} d\gamma_1 dy_i \\ &= \int_W \frac{1}{\pi} e^{ip\left(\gamma_1-\frac{\pi}{2}\right)} e^{ik\cos\gamma_1(x_j-x_i)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik\sin\gamma_1 y_i} e^{ik\sin\alpha y_i} dy_i\right) d\gamma_1 \end{aligned}. \tag{A2.7}$$

Avec la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik\sin\gamma_1 y_i} e^{ik\sin\alpha y_i} dy_i = \frac{2\pi}{k\cos\alpha}\delta(\alpha-\gamma_1) \tag{A2.8}$$

où δ est la distribution de Dirac, on a :

$$\begin{aligned} U_p(x_i) &= \int_W \frac{1}{\pi} e^{ip\left(\gamma_1-\frac{\pi}{2}\right)} e^{ik\cos\gamma_1(x_j-x_i)} \frac{2\pi}{k\cos\alpha}\delta(\alpha-\gamma_1) d\gamma_1 \\ &= e^{ip\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} e^{ik\cos\alpha(x_j-x_i)} \frac{2}{k\cos\alpha} \\ &= \frac{2i^{-p}}{k_x} e^{ip\alpha} e^{ik_x(x_j-x_i)} \end{aligned}. \tag{A2.9}$$

Nous allons maintenant considérer le deuxième cas.

*<u>$x_i > x_j$</u>

$$U_p(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\theta_{ji}} \left[H_p^{(1)}(kd_{ij}) e^{iK_y y_i}\right] dy_i . \tag{A2.10}$$

Ici, θ_{ji} ne va pas subir la même variation. En effet, dans ce cas, il va varier de $\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$ en passant par π.

Si on pose :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma + \theta_{ij} \\ e^{ip\theta_{ji}} &= (-1)^p e^{ip\theta_{ij}} \end{aligned} \tag{A2.11}$$

et si l'on remarque que :

$$\begin{aligned} d_{ij}\cos\theta_{ij} &= x_i - x_j \\ d_{ij}\sin\theta_{ij} &= y_i \end{aligned}, \tag{A2.12}$$

alors, $U_p(x_i)$ devient :

$$\begin{aligned} U_p(x_i) &= \frac{(-1)^p}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_W e^{ip\left(\gamma_1-\frac{\pi}{2}\right)} e^{ik\cos\gamma_1(x_i-x_j)} e^{ik\sin\gamma_1 y_i} e^{ik\sin\alpha y_i} d\gamma_1 dy_i \\ &= \frac{(-1)^p}{\pi}\int_W e^{ip\left(\gamma_1-\frac{\pi}{2}\right)} e^{ik\cos\gamma_1(x_i-x_j)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\sin\gamma_1 y_i} e^{ik\sin\alpha y_i} dy_i\right) d\gamma_1 \end{aligned}. \tag{A2.13}$$

En utilisant (A2.8), on trouve :

$$\begin{aligned} U_p(x_i) &= \frac{(-1)^p}{\pi}\int_W e^{ip\left(\gamma_1-\frac{\pi}{2}\right)} e^{ik\cos\gamma_1(x_i-x_j)} \left(\frac{2\pi}{k\cos\alpha}\delta(-\alpha-\gamma_1)\right) d\gamma_1 \\ &= \frac{2(-1)^p}{k\cos\alpha} e^{ip\left(-\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} e^{ik\cos\alpha(x_i-x_j)} \\ &= \frac{2i^p}{k_x} e^{-ip\alpha} e^{ik_x(x_i-x_j)} \end{aligned}. \tag{A2.14}$$

Annexe 3 : Egalités entre D_n et D_{-n}

Nous allons chercher à établir ici l'égalité entre les déterminants D_n et D_{-n} utilisés dans la théorie de Fikioris et Waterman. Le système auquel nous faisons référence est le suivant :

$$\sum_{m\neq 0}\left(\delta_{nm}-\frac{2\pi b n_0}{\kappa^-\kappa^+}A_{nm}T^1_{mm}\right)X^{\pm}_m=\frac{2\pi b n_0}{\kappa^-\kappa^+}A_{n0}T^1_{00}X^{\pm}_0 \tag{A3.1}$$

avec :

$$A_{nm}=KJ'_{m-n}(Kb)H^{(1)}_{m-n}(kb)-kJ_{m-n}(Kb)H^{(1)'}_{m-n}(kb)\,. \tag{A3.2}$$

De part les propriétés des fonctions de Bessel, on voit que :

$$A_{nm}=A_{-n-m} \tag{A3.3}$$

et on sait de plus, d'après le chapitre 1, que :

$$T^1_{nn}=T^1_{-n-n} \tag{A3.4}$$

La matrice dont le déterminant est D est donc de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1+o & c & b & d & e \\ j & 1+m & a & f & g \\ h & i & 1+n & i & h \\ g & f & a & 1+m & j \\ e & d & b & c & 1+o \end{bmatrix}. \tag{A3.5}$$

La matrice dont le déterminant est D_n est de la forme :

$$M_1=\begin{bmatrix} 1+o & c & b & z & e \\ j & 1+m & a & y & g \\ h & i & 1+n & x & h \\ g & f & a & y & j \\ e & d & b & z & 1+o \end{bmatrix} \tag{A3.6}$$

La matrice dont le déterminant est D_{-n} est de la forme :

$$M_{2=}\begin{bmatrix} 1+o & z & b & d & e \\ j & y & a & f & g \\ h & x & 1+n & i & h \\ g & y & a & 1+m & j \\ e & z & b & c & 1+o \end{bmatrix} \tag{A3.7}$$

La question est alors : les déterminants de M_1 et M_2 sont-ils égaux ?

Pour passer de M1 à M2, on effectue une symétrie de M_1 par rapport à la ligne centrale soit M permutations si la taille de la matrice est de 2M+1 (de-M à M) :

$$M_1^{'}=\begin{bmatrix} e & d & b & z & 1+o \\ g & f & a & y & j \\ h & i & 1+n & x & h \\ j & 1+m & a & y & g \\ 1+o & c & b & z & e \end{bmatrix} \tag{A3.8}$$

A ce stade, le déterminant est multiplié par $(-1)^M$.

Puis on effectue une symétrie par rapport à la colonne centrale soit M permutations si la taille de la matrice est de 2M+1 (de-M à M) :

$$M_1^{''}=\begin{bmatrix} 1+o & z & b & d & e \\ j & y & a & f & g \\ h & x & 1+n & i & h \\ g & y & a & 1+m & j \\ e & z & b & c & 1+o \end{bmatrix}=M_2 \tag{A3.9}$$

Le déterminant est alors multiplié à nouveau par $(-1)^M$. Au total, il est multiplié par $(-1)^{2M}$, il est donc inchangé.

D'où :

$$D_n=D_{-n}. \tag{A3.10}$$

Bibliographie

[1] S. Lethuillier, P. Pareige, J.L. Izbicki, J.M. Conoir, *scattering by two adjacent immersed shells : theory and experiment* proceedings du Fourth European Conference on Underwater Acoustics, pp.837-842, Rome (1998)

[2] S. Lethuillier, *Interactions résonantes dans un réseau de tubes élastiques: théorie-expérience* thèse soutenue à l'université du Havre, le 18 décembre 2002

[3] S. Lethuillier, P.Pareige, J.M. Conoir, J.L. Izbicki, *Scattering by two very close immersed shells: numerical results*, Proceedings du 1999 IEEE International Ultrasonics Symposium, 731-734 (1999).

[4] S. Lethuillier , J.M. Conoir, P.Pareige, J.L. Izbicki, *Resonant acoustic scattering by a finite linear grating of elastic shells*, Ultrasonics 41, 655-662 (2003).

[5] C. Audoly, G. Duméry, *Acoustic wave propagation in media containing two-dimensional periodically spaced elastic inclusions*, Phys. Acoust., Eds. O. Leroy et M. A. Breazeale, Plenum Press, New-York, pp. 199-204, 1991

[6] P.Y. Le Bas, F. Luppé, J.M. Conoir, H. Franklin, *N-shell cluster in water: multiple scattering and splitting of resonances*, J. Acoust. Soc. Am., 115 (4) pp.1460-1467 (2004)

[7] P.Y. Le Bas, P. Pareige, *Numerical and experimental study of the resonant behavior of N elastic shells embedded in water*, proceedings du 2004 IEEE International ultrasonics, ferroelectrics and frequency control joint 50th anniversary conference, Montréal (2004)

[8] A. Tourin, *Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores* thèse soutenue à l'université de Paris VII le 26 novembre 1999

[9] A. Tourin, M. Fink, A. Derode, *Multiple scattering of sound,* Wave Random media n°10 ppR31-R59 (2000)

[10] G.C. Gaunaurd, H. Überall, *Resonance effects and the ultrasonic effective properties of particulate composites*, J. Acoust. Soc. Am. 74 (1), 305-313 (1983).

[11] D. Sornette, *Acoustic waves in random media*, Acustica 67, Part I:199-215, Part II :251-265, Part III :Acustica 68, 15-25 (1989)

[12] S.K. Bose, A.K. Mal, *Longitudinal shear waves in a fiber-reinforced composite*, Int. J. Solids Structures 9, 1075-1085 (1973)

[13] R.B. Yang, A.K. Mal, *Multiple scattering of elastic waves in a fiber-reinforced composite*, J. Mech. Phys. Solids 42(12), 1945-1968 (1994)

[14] *Acoustic Resonance Scattering*, edited by Herbert Uberall, Gordon and Breach Science Publishers (1992).

[15] H.Huang, G.L. Gaunaurd, *Acoustic scattering of a plane wave by two spherical elastic shells*, J. Acoust. Soc. Am. 98 (4), 2149-2156 (1995).

[16] L. Flax, G.C. Gaunaurd, H. Uberall, "Theory of resonance scattering", Physical Acoustics XV, Academic Press, New-York, 191-293 (1981).

[17] J.L. Izbicki, J.L. Rousselot, A. Gérard, G. Maze, J. Ripoche, *Analysis of resonances related to Scholte-Stoneley waves around circular cylindrical shells*, J. Acoust. Soc. Am. 90, 2602-2608 (1991).

[18] M. Talmant, J.L. Izbicki, G. Maze, G. Quentin, J. Ripoche, *External wave resonances on thin cylindrical shells*, J. Acoustique 4, 509-523 (1991).

[19] L. D. Landau and E. M. Lifchitz, *Quantum Mechanics : Non-relativistic Theory*, Pergamon Press, Oxford (1966).

[20] N.D. Veksler, J.L. Izbicki, J.-M. Conoir, *Bending A wave in the scattering by a circular cylindrical shell : relation with bending eigenmodes*, J. Acoust. Soc. Am. 96, 287-293 (1994).

[21] E.B. Danila, J.M. Conoir, P. Pareige, J.L. Izbicki, *Multichannel resonant scattering theory applied to the acoustic scattering by an eccentric elastic cylindrical shell immersed in a fluid*, Wave motion 28, 297-318 (1998).

[22] A. Gérard, J.L. Rousselot, J.L. Izbicki, G. Maze, J. Ripoche, *Résonances d'ondes d'interface de coques cylindriques minces immergées : détermination et interprétation*, Rev. Phys. Appl. 23, 289-299 (1988)

[23] P.C. Waterman, R. Truell, *Multiple scattering of waves*, J Math Phys vol. 2 n°4 pp.512-537 (1961)

[24] Y.C. Angel, C. Aristégui, J.Y. Chapelon, *Reflection and transmission of plane waves by anisotropic line-scatterers*, Poromechanics II, Auriault et al. (eds.), Sweets & Zeitlinger, Lisse, ISBN 90 5809 394 8, 607-618 (2002)

[25] J.G. Fikioris, P.C. Waterman, *Multiple scattering of Waves. II. "Hole Corrections" in the scalar case*, J. Math. Phys. Vol5 n°10 pp.1413-1420 (1964)

[26] V.K. Varadan, V.V. Varadan, Y.H. Pao, *multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section. I. SH waves.* , J. Acoust. Soc. Am. Vol63 n°5, pp 1310-1319, (1978)

[27] L.L. Foldy, *The multiple scattering of waves. I- General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers*, Phys. Rev. 67(3,4), 107-119 (1945).

[28] A. Ishimaru, *Wave propagation and scattering in random media*, Academic Press New York, San Francisco, London (1978).

[29] V. Twersky, *On scattering of waves by random distributions. I. Free-space scatterer formalism*, J. Math. Phys 3(4), 700-715 (1962)

[30] M. Lax, *Multiple scattering of waves*, Revs. Modern Phys. 23(4), 287-310 (1951).

[31] P.Y. Le Bas, F. Luppé, J.M. Conoir, H. Franklin, *Reflection and transmission by randomly spaced elastic cylinders in a fluid slab-like region* , J. Acoust. Soc. Am., Accepté, publication prévue entre décembre 2004 et février 2005

[32] M. Lax, *Multiple scattering of waves. II. The effective field in dense systems*, Phys. Rev. 85(4) pp. 621-629 (1952)

[33] P.C. Waterman, *New formulation of Acoustic scattering*, J. Acoust. Soc. Am. Vol45 n°6, pp 1417-1429, (1969)

[34] S. Derible, P. Rembert, J.L. Izbicki, *Experimental determination of acoustic resonance width via the Argand diagram*, Acustica 84, 270-279 (1998).

[35] J.W.Dickey, G.V.Frisk, H. Uberall, *Whispering Gallery wave modes on elastic cylinders* , J. Acoust. Soc. Am. 59, 1339-1346 (1976)

[36] M. Talmant, J.L. Izbicki, G. Maze, G. Quentin, J. Ripoche, *External wave resonances on thin cylindrical shells*, J. Acoustique 4, pp 509-523 (1991).

[37] G.V.Frisk, J.W.Dickey, H. Uberall, *Surface wave modes on elastic cylinders* , J. Acoust. Soc. Am. 58, 996-1008 (1975)

[38] M. Abramovitz, I. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York (1964)

[39] Y. Decanini, A. Folacci, E.Fournier, P. Gabrielli, *Exact S-matrix for N-disc and various boundary conditions : I. Generalization of the Korringa-Kohn-Rostoker-Berry method,* J. Phys. A: Math. Gen. 31, pp 7865-7889, (1998)

[40] Y. Decanini, A. Folacci, E.Fournier, P. Gabrielli, *Exact S-matrix for N-disc and various boundary conditions : II. determination and partial classification of resonances,* J. Phys. A: Math. Gen. 31, pp 7891, (1998)

[41] E.K. Kheddioui, J.M. Conoir, P.Pareige, J.L. Izbicki, *Resonant scattering by two elastic cylindrical shells*, Acta Acustica 84, 980-986 (1998).

[42] E.K. Kheddioui, P.Pareige, J.L. Izbicki, *Experimental resonant scattering by two elastic cylindrical shells in an eclipsed configuration*, Acoustic Letters 16, 157-162 (1993).

[43] Y.M. Wang, W.C. Chew, *A recursive T-matrix approach for the solution of electromagnetic scattering by many spheres*, IEEE transactions on antennas and propagation 41(12), 1633-1639 (1993)

[44] J.-M. Conoir, *Essai de synthèse concernant les différents modèles de diffusion multiple qui conduisent au calcul d'un nombre d'onde effectif*. 2° journées du GDR Ultrasons 2501, Aussois, France, 8-12 décembre 2003. éd INRIA, ISBN 2-7261-1282-x

[45] L.Tsang, J. Au Kong, *Scattering of electromagnetic waves – Advanced topics*, Wiley Series in remote sensing, John Wiley & Sons Inc., ISBN 0-471-38801-7 (2001)

[46] A. Wirzba, *Quantum mechanics and semiclassics of hyperbolic n-disk scattering systems* (2002)

[47] X. Jing, P. Sheng, M. Zhou, *Theory of acoustic excitations in colloidal suspensions*, Phys. Rev. Lett. 66(9), 1240-1243 (1991)

[48] X. Jing, P. Sheng, M. Zhou, *Acoustic and electromagnetic quasimodes in dispersed random media*, Phys. Rev. A 46(10), 6513-6534 (1992)

[49] F. Vander Meulen, *Application des théories de diffusion multiple à la caractérisation ultrasonore de milieu biphasique*, thèse soutenue à l'université de Tour le 15 décembre 2000

[50] F.Vander Meulen, G. Feuillard, O. Bou Matar, F. Levassort, M. Lethiecq, *Theoretical and experimental study of the influence of the particle size distribution on acoustic wave properties of strongly inhomogeneous media*, J. Acoust. Soc. Am. 110(5), 2301-2307 (2001)

[51] S. Torquato, *Random heterogeneous materials – Microstructure and macroscopic properties*, Interdisciplinary Applied Mathematics Volume 16, Springer-Verlag New York, ISBN 0-387-95167-9 (2002)

[52] J.M. Conoir, chap.5 de N. GESPA, *La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple. Théories et expériences*, ISBN 2-7170-0884-5, édité par CEDOCAR, Paris (1987)

[53] M. Eude, *Etude expérimentale de la propagation d'une onde acoustique dans un milieu atténuant en présence d'hétérogénéités* thèse soutenue à l'université Claude Bernard-Lyon 1, le 20 janvier 2004

[54] W. Sachse, Y.H. Pao, *on the determination of phase and group velocities of dispersive waves in solids* J. Appl. Phys. 49(8) pp.4320-4327 (1978)

[55] A. Derode, A. Tourin, M. Fink, *Random multiple scattering of ultrasound I. Coherent and ballistic waves.* Phys. Rev. E vol64 036605 (2001)