Analyse et synthèse de l'implémentation de lois de contrôle-commande en précision finie

Étude dans le cadre des applications automobiles sur calculateur embarqué

THIBAULT HILAIRE

—

Rapporteurs	D. ALAZARD	*Supaéro*
	J. WHIDBORNE	*Cranfield University*
Examinateurs	F. AÏOUN	*PSA Peugeot-Citroën*
	P. CHEVREL	*École des mines de Nantes*
	O. SENTIEYS	*Université de Rennes (ENSSAT)*
	Y. TRINQUET	*Université de Nantes (IUT de Nantes)*
Invité	J-P. CLAUZEL	*PSA Peugeot-Citroën*

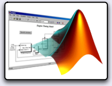
Contexte

- Thèse CIFRE avec PSA Peugeot-Citroën
- Encadrée par
  - P. Chevrel et Y. Trinquet (IRCCyN)
  - J-P. Clauzel (PSA : Commande de Logiciels Organes)

Plan

Contexte industriel

Lois de contrôle-commande



$$H(z) = \frac{0.004708z^6 - 0.0251}{z^6 - 5.653}$$

$$\frac{0251z^5 + 0.05844z^4 - 0.07608}{5.653z^5 + 13.38z^4 - 16.98z^3 +}$$

$$\frac{z^3 + 0.05844z^2 - 0.0251z + 0.}{12.18z^2 - 4.679z + 0.7526}$$

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= AX_k + BU_k \\ Y_k &= CX_k + DU_k \end{aligned}$$

Calculateur embarqué

Contexte

Problématique *numérique*

L'implémentation de la loi entraîne une dégradation de la loi

- modification des caractéristiques
- modification des performances

- Comment évaluer *a priori* la dégradation ?
- Comment comparer différentes réalisations d'une même loi ?
- Quelles réalisations/algorithmes sont à considérer ? Avec quel coût de calcul ?

Sources de dégradations

Sources de dégradations

La dégradation *Précision Finie* a deux origines :

- Quantification des coefficients mis en jeu
  $\longrightarrow$ *erreurs paramétriques*
- Bruits de quantification qui apparaissent dans les calculs, dus aux arrondis
  $\longrightarrow$ *bruits numériques*

On ne s'intéressera ici principalement qu'aux erreurs paramétriques

Calculs en précision finie (*Finite Word Length*)

Tous les réels manipulés sont représentés en virgule fixe ou virgule flottante (selon contexte).

Représentation virgule fixe

- Un nombre est représenté sous la forme

$2^p.N$	N	: nombre entier (signé ou non) sur b bits
	p	: entier fixé représentant le facteur d'échelle

- Le pas de quantification 2^p est fixé, la dynamique des variables est figée (et limitée)

Les 1ers bits de π s'écrivent

$$011_{\Delta}00100100001111110110101010001000\ldots$$

Pour $b = 8$, on choisira, par exemple, $p = -5$

$$\pi \approx 101.2^{-5}$$

Équivalence des réalisations

Pour une loi donnée, il existe une infinité de réalisations mathématiquement équivalentes

- pour un régulateur linéaire sous forme d'état

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_{k+1} & = & AX_k + BU_k \\ Y_k & = & CX_k + DU_k \end{array} \right.$$

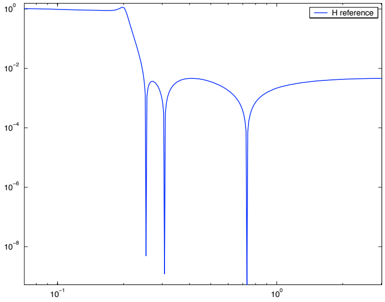
on peut considérer toutes les réalisations équivalentes obtenues par un changement de base sur le vecteur d'état

En précision finie, toutes ces réalisations ne sont plus équivalentes. La dégradation dépend de la réalisation choisie

Exemple

On considère l'exemple suivant [Will86] (filtre passe bas, à bande étroite)

$$H(z) = \frac{0.004708z^6 - 0.0251z^5 + 0.05844z^4 - 0.07608z^3 + 0.05844z^2 - 0.0251z + 0.004708}{z^6 - 5.653z^5 + 13.38z^4 - 16.98z^3 + 12.18z^2 - 4.679z + 0.7526}$$



Exemple

Il existe de nombreuses façons de réaliser numériquement ce filtre

- forme directe (I ou II)
- forme d'état (choix d'une base pour l'état)
- utilisation de l'opérateur δ
- décomposition cascade, parallèle
- ...

Chacune de ces réalisations va utiliser une paramétrisation différente.
L'impact de l'implémentation (quantification des coefficients) sera alors différent.

Exemple

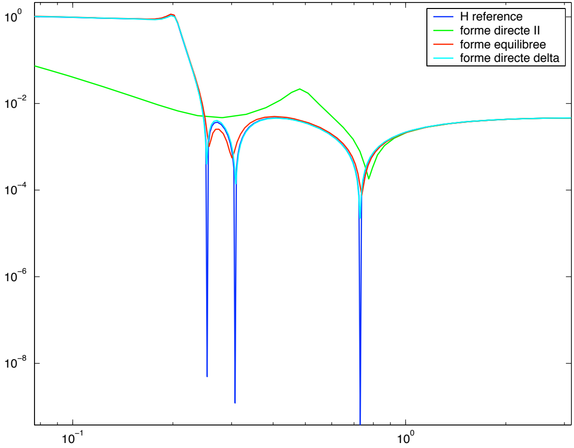


Diagramme de Bode avec coefficients virgule fixe sur 11 bits

Exemple

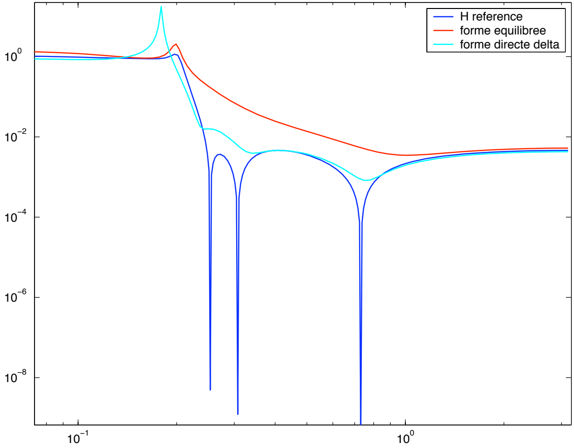


Diagramme de Bode avec coefficients virgule fixe sur 6 bits

Exemple

Ce petit exemple montre l'impact

- de la quantification
- du choix de la paramétrisation
- du choix de la représentation des nombres

L'objectif de ce travail est

- formaliser les différentes possibilités d'implémentation, de paramétrisation
- évaluer *a priori* l'impact de la quantification

Une longue histoire...

- Problématique *Traitement du signal*
  - Rapport signal à bruit de quantification
  - Formes d'état *optimales* (Hwang 1975, Mullis&Roberts 1976, ...)
- Problématique *Automatique*
  - sensibilité paramétrique, sensibilité des pôles
  - formes d'état *optimales* (Thiele 1984, Gevers 1993, Wu 2001, ...)

Plan

Un formalisme unificateur

Comment modéliser toutes ces réalisations ?

Afin de prendre en compte les différentes possibilités de paramétrisation, nous avons proposé d'utiliser une forme implicite spécialisée comme formalisme unificateur [Hila05a] :

Intérêts du formalisme

- description *macroscopique* d'une implémentation en précision finie
- plus général que les précédentes réalisations
- plus réaliste en regard de la paramétrisation utilisée
- directement relié aux calculs effectués (et donc au code utilisé)

Forme implicite spécialisée

On se propose de décrire l'algorithme sous la forme

1. $J.T_{k+1} = M.X_k + N.U_k$
2. $X_{k+1} = K.T_{k+1} + P.X_k + Q.U_k$
3. $Y_k = L.T_{k+1} + R.X_k + S.U_k$

Forme implicite spécialisée

$$\begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ -K & I & 0 \\ -L & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{k+1} \\ X_{k+1} \\ Y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M & N \\ 0 & P & Q \\ 0 & R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_k \\ X_k \\ U_k \end{pmatrix}$$

Variables intermédiaires

Les variables intermédiaires introduites permettent

- de faire apparaître explicitement tous les calculs réalisés, ainsi que les variables intermédiaires utilisées
- d'indiquer l'ordonnancement des calculs
- autorisent une paramétrisation plus riche

Forme implicite

La forme présentée est implicite

- l'état ou la sortie peuvent être calculés à partir de variables intermédiaires (calculées lors de la même itération)
- une variable intermédiaire peut être calculée à partir d'une autre variable intermédiaire préalablement calculée (ordonnancement des calculs)
  le calcul de T_{k+1} s'écrit $J.T_{k+1} = M.X_k + N.U_k$

$$\text{avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \star & \ddots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \star & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \star & \ddots & 0 \\ \star & \dots & \dots & \star & 1 \end{pmatrix}$$

Opérateur δ

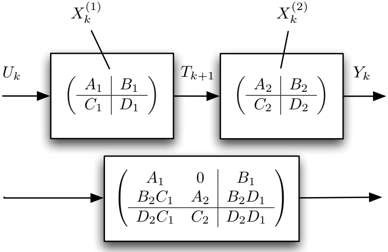
Une réalisation avec l'opérateur δ est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \delta X_k & = & A_\delta X_k + B_\delta U_k \\ Y_k & = & C_\delta X_k + D_\delta U_k \end{array} \right. \qquad \delta \triangleq \frac{q-1}{\Delta}$$

et il correspond à la forme implicite suivante :

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\Delta I & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{k+1} \\ X_{k+1} \\ Y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_\delta & B_\delta \\ 0 & I & 0 \\ 0 & C_\delta & D_\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_k \\ X_k \\ U_k \end{pmatrix}$$

Forme cascade



$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{B_2} \end{pmatrix} & I & 0 \\ -\mathbf{D_2} & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T_{k+1}} \\ \begin{pmatrix} X_{k+1}^{(1)} \\ \mathbf{X_{k+1}^{(2)}} \end{pmatrix} \\ \mathbf{Y_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} \mathbf{C_1} & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{D_1} \\ 0 & \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_k \\ \begin{pmatrix} X_k^{(1)} \\ X_k^{(2)} \end{pmatrix} \\ U_k \end{pmatrix}$$

Forme retour d'état / observateur

La forme retour d'état / observateur

$$\left\{\begin{array}{rcl} \hat{X}_{k+1} & = & A_p\hat{X}_k + B_pU_k + K_f(Y_k - C_p\hat{X}_k) \\ U_k & = & -K_c\hat{X}_k + Q(Y_k - C_p\hat{X}_k) \end{array}\right.$$

où (A_p, B_p, C_p) correspondent au système
et K_c, K_f et Q sont les paramètres du régulateur.

Une paramétrisation

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathbf{Q} & I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -K_f & -B_p \end{pmatrix} & I & 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & -I \end{pmatrix} & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T^{(1)}_{k+1}} \\ \mathbf{T^{(2)}_{k+1}} \end{pmatrix} \\ \mathbf{\hat{X}_{k+1}} \\ \mathbf{U_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\mathbf{C_p} \\ -\mathbf{K_c} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & A_p & 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(1)}_k \\ T^{(2)}_k \end{pmatrix} \\ X_k \\ Y_k \end{pmatrix}$$

Représentativité

La forme implicite spécialisée présentée permet bien

- une meilleure représentativité de la mise en oeuvre numérique
- d'unifier les représentations diverses existantes

Plan

Critères d'analyse

Il faut ensuite mettre en place des *critères génériques de qualité* permettant d'évaluer l'impact de l'implémentation et de choisir une réalisation plutôt qu'une autre.

Coût logiciel

- coût de calcul (nb de coefficients *non triviaux*)
- mémoire
- lisibilité, mise au point, maintenance du code

Résilience

- sensibilité à la quantification des coefficients
  - sensibilité entrée/sortie (boucle ouverte, boucle fermée)
  - sensibilité pôles et zéros (mesure de distance à l'instabilité)
- bruits de quantification

Sensibilité paramétrique

Une mesure utilisée est la mesure de sensibilité de la fonction de transfert (de la loi à implémenter) vis à vis des coefficients mis en jeu.

$1^{\text{ère}}$ mesure sensibilité

$$M_{L_2}^1 \triangleq \sum_{X \in \{J,K,L,M,N,P,Q,R,S\}} \left\| \frac{\partial \tilde{H}}{\partial X} \right\|_2^2$$

avec $\tilde{H}(z) \triangleq H(z) - D$

$\tilde{H}$ est strictement propre

$\frac{\partial D}{\partial X}$ est indépendant de toute transformation

Sensibilité paramétrique

- Il ne faut pas prendre en compte les coefficients triviaux
  - 0, ± 1 : dans la forme implicite spécialisée, de nombreux coefficients sont nuls ou égaux à 1
  - Certains coefficients (des puissances de 2, ...) peuvent être représentés exactement
- À une matrice X de coefficients, on associe une matrice de pondération W_X telle que

$$(W_X)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } X_{i,j} \text{ est \textit{exactement} implémenté} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sensibilité paramétrique

Sensibilité paramétrique pondérée [Hila05b]

pour une loi SISO, on obtient une mesure pondérée

$$M_{L_2}^{W} \triangleq \sum_{X \in \{J,K,L,M,N,P,Q,R,S\}} \left\| \frac{\partial \tilde{H}}{\partial X} \times W_X \right\|_2^2$$

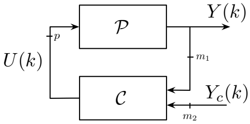
On peut aussi l'écrire (pour faciliter les calculs)

$$M_{L_2}^{W} = \left\| \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Z} \times W_Z \right\|_2^2 \quad \text{avec} \quad Z \triangleq \begin{pmatrix} -J & M & N \\ K & P & Q \\ L & R & S \end{pmatrix}$$

Z : matrice système généralisée

Mesure de stabilité

La quantification des coefficients d'un régulateur peut amener le système en boucle fermée à devenir instable.
Il faut prendre en compte la sensibilité des pôles $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ vis-à-vis des coefficients, ainsi que la distance à l'instabilité.



Mesure de stabilité [Hila06b]

$$\mu(Z) \triangleq \min_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1-|\lambda_k|}{\left\| \frac{\partial|\lambda_k|}{\partial Z} \times W_Z \right\|_S}$$

On peut relier cette mesure au nombre de bits minimum requis (virgule fixe) pour assurer la stabilité.

Extensions

- La mesure de sensibilité paramétrique est étendue au cas boucle fermée et au cas MIMO [Hila06a]
- Les critères précédents sont évaluables facilement (expressions compactes grâce à Z, utilisation de grammiens)
- Ces mesures sont aussi étendues pour prendre en compte la spécificité de la représentation des nombres (virgule fixe, flottante, blocs, etc.)

Exemple

Si on reprend l'exemple du début, on a

Réalisation	Mesure $M_{L_2}^W$	Nb Opérations
Forme directe II	$1.90e+10$	$13\times$ $12+$
Forme équilibrée	$3.99e+2$	$49\times$ $42+$
Forme directe en δ	$1.66e+2$	$19\times$ $18+$

Ces mesures sont bien en accord avec les résultats obtenus après quantification des coefficients.

Plan

Réalisations optimales

Pour une matrice de transfert H donnée, on note $\mathscr{R}_H$ l'ensemble des réalisations $\mathcal{R}$ *équivalentes*, sans contrainte d'ordre.
Le problème de synthèse de réalisation optimale consiste à trouver, parmi $\mathscr{R}_H$, celles qui minimise un critère $\mathcal{J}$ (significatif en précision finie).

$$\mathcal{R}^{\text{opt}} = \underset{\mathcal{R} \in \mathscr{R}_H}{\arg\min}\ \mathcal{J}(\mathcal{R})$$

$\mathscr{R}_H$ étant trop large, on s'intéresse en pratique à un sous-ensemble, celui de réalisations équivalentes ayant une structure donnée (réalisations d'ordre minimal en q, δ, retour d'état observateur, ...)

Classes d'équivalences

Le *Principe d'Inclusion* (Šiljak) permet de caractériser des classes d'équivalences de réalisations.
Il est possible de l'étendre à la forme implicite, et permet de décrire comment parcourir une classe d'équivalence.

Dans le cas simple où l'on se restreint à ne pas changer les dimensions du système, on peut parcourir la classe d'équivalence par une similarité sur Z

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y} & & \\ & \mathcal{U}^{-1} & \\ & & I_p \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} \mathcal{W} & & \\ & \mathcal{U} & \\ & & I_m \end{pmatrix}$$

$\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{W}$ inversibles

Exemple

On peut parcourir la classe d'équivalence des réalisations structurée en δ à partir de la donnée d'une réalisation

$$\mathscr{R}_H^\delta = \left\{ \begin{array}{l} Z = \begin{pmatrix} \mathcal{U}^{-1} & & \\ & \mathcal{U}^{-1} & \\ & & I_p \end{pmatrix} Z_0 \begin{pmatrix} \mathcal{U} & & \\ & \mathcal{U} & \\ & & I_m \end{pmatrix} \\ \forall \mathcal{U} \text{ inversible} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{U}^{opt} = \underset{\mathcal{U} \text{ inversible}}{\arg\min} \; \mathcal{J}(\mathcal{U})$$

On utilise un algorithme d'optimisation globale (Recuit Simulé Adaptatif *ASA*).

Exemple

Dans le cas d'une réalisation en δ, l'optimum trouvé a pour mesure de sensibilité $M_{L_2}^W = 11.32$

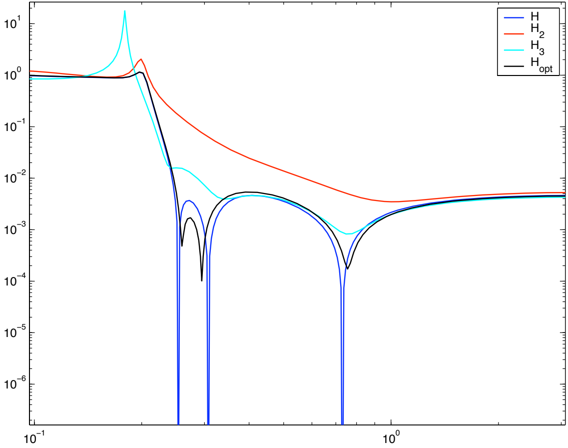


Diagramme de Bode avec coefficients virgule fixe sur 6 bits

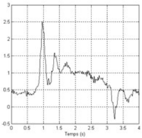
Réalisations optimales

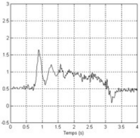
Nous avons cherché ici une réalisation en δ optimale, mais d'autres réalisations structurées optimales sont possibles

- découpage cascade ou parallèle
- réalisations mixte q/δ
- réalisations creuses
- ...

Contrôle actif de la dynamique longitudinale d'un véhicule

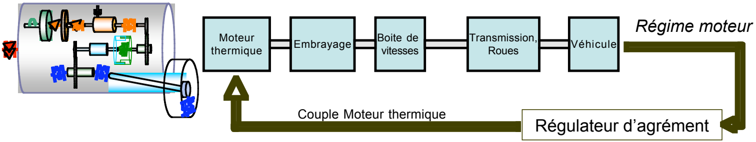
L'exemple utilisé ici est un régulateur permettant, sur un groupe moto-propulseur, de réduire les oscillations longitudinales de la chaîne de transmission (D. Lefebvre / P. Chevrel).



Contrôle actif de la dynamique longitudinale d'un véhicule

Le régulateur a été obtenu grâce à une synthèse H_∞. Il réduit les oscillations de la chaîne de transmission en agissant sur le couple produit par le moteur, et à partir d'une mesure du régime moteur.



Sous forme discretisée, il est défini par la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{-0.214z^{10} + 1.332z^9 - 3.402z^8 + 4.265z^7 - 1.803z^6 - 2.23z^5 + 4.105z^4 - 3.072z^3 + 1.285z^2 - 0.2948z + 0.02914}{z^{10} - 6.205z^9 + 16.34z^8 - 23.14z^7 + 17.51z^6 - 3.82z^5 - 5.545z^4 + 6.323z^3 - 3.294z^2 + 0.9679z - 0.1328}$$

Résultats

On peut comparer la sensibilité paramétrique et le coût de calcul (nombre d'opérations) pour quelques réalisations

Sensibilité et coût

realisation	**sensibilité**	**coût**
forme q compagne	$5.664e{+}15$	20x 21+
forme q équilibrée	4.881	110x 121+
forme q optimale	4.840	110x 121+
forme δ compagne	$1.19e{+}14$	20x 31+
forme δ optimale	2.28	120x 131+
Re/Obs	$1.905e{+}3$	120x 131+
Réalisation en cascade	3.563	30x 41x

Plan

Conclusion et perspectives

Résumé

- Problématique *précision finie*
- La forme implicite spécialisée
  - formalisme unificateur
  - forme macroscopique plus représentative des calculs mis en œuvre
  - ouvre le champ de l'analyse et la synthèse d'implémentation
- Critères d'analyse
  - coût de calcul
  - mesure de sensibilité paramétrique
  - mesure de stabilité
- Un exemple illustratif

Principales contributions

Les principales contributions de la thèse sont

- Un formalisme unificateur, macroscopique, pour décrire l'ensemble des réalisations
- Une mesure de sensibilité paramétrique
- Une mesure de sensibilité des pôles (relative à la stabilité)
- Pour chacune de ces mesures
  - cas SISO et MIMO
  - boucle ouverte et boucle fermée
  - prise en compte de la spécificité de représentation (virgule fixe, flottante, ...)
- Le problème de réalisation structurée optimale

Conclusion et perspectives

Perspectives (1/2)

- Mesure du bruit de quantification (modélisation fine du code associé)
- Synthèse multi-objectifs (gestion de compromis)
  - bruits de calculs, sensibilité paramétrique, sensibilité des pôles
  - coût de calcul (caractère creux des matrices)
- Cas Linéaire à Paramètres Variants
- Méthodologie (cartographie des sensibilités, blocs élémentaires, ...)

Conclusion et perspectives

Perspectives (2/2)

Développement à court terme d'une *toolbox*

- les mesures développées sont déjà implémentées
- cela permettrait
  - l'analyse de sensibilité
  - la synthèse de réalisations optimales
  - la génération automatique de code (choix pour la virgule fixe, ordre des calculs, ...)

Publications

[Hila05a] T. Hilaire, P. Chevrel, and Y. Trinquet.
Implicit state-space representation : a unifying framework for FWL implementation of LTI systems.
In *Proc. of IFAC05 Wolrd Congress*, July 2005.

[Hila05b] T. Hilaire, P. Chevrel, and Y. Trinquet.
Designing low parametric sensitivity FWL realizations of LTI controllers/filters within the implicit state-space framework.
In *Proc. of CDC-ECC'05*, December 2005.

[Hila06a] T. Hilaire, P. Chevrel, and J-P. Clauzel.
Low Parametric Sensitivity Realization Design for FWL Implementation of MIMO Controllers : Theory and Application to the Active Control of Vehicle Longitudinal Oscillations
In *Proc. of Control Applications of Optimisation*, April 2006.

[Hila06b] T. Hilaire, P. Chevrel, and J-P. Clauzel.
Pole Sensitivity Stability Related Measure of FWL Realization with the Implicit State-Space Formalism
To appear in *Proc. of ROCOND'06*, July 2006.