



HAL
open science

Apport d'une méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture pour le dimensionnement des ouvrages en sols renforcés par colonnes

Belgacem Jellali

► **To cite this version:**

Belgacem Jellali. Apport d'une méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture pour le dimensionnement des ouvrages en sols renforcés par colonnes. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Tunis El-Mana, 2006. Français. NNT: . tel-00084276

HAL Id: tel-00084276

<https://theses.hal.science/tel-00084276>

Submitted on 6 Jul 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



المدرسة الوطنية للمهندسين بتونس

école nationale d'ingénieurs de Tunis

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE TUNIS

Spécialité : Génie Civil

par

BELGACEM JELLALI

Sujet de la thèse :

Apport de la méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture pour le dimensionnement des ouvrages en sols renforcés par colonnes

soutenue le 06 mai 2006
devant le jury composé de :

H. SMAOUI	<i>Président</i>
F. DARVE	<i>Rapporteur</i>
H. ZENZRI	<i>Rapporteur</i>
P. DE BUHAN	<i>Examineur</i>
F. KANOUN	<i>Invité</i>
M. BOUASSIDA	<i>Directeur de thèse</i>

DÉDICACES

À ma mère

À mon père

À ma femme et mes filles

À tous ceux qui maintiennent une bougie allumée au bout
du tunnel pour m'éclairer le chemin

Je dédie cet humble travail.

Belgacem

Le peu que je sais, c'est à mon
ignorance que je le dois

(Sacha Guitry (1885 – 1957))

Remerciements

La réalisation de ce travail de recherche n'aurait pas été possible sans le soutien et la participation de plusieurs personnes à qui je souhaite exprimer ici ma reconnaissance.

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Smaoui Hichem, Professeur à l'ENIT, de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je lui adresse un remerciement tout particulier pour son soutien, j'admire en lui une modestie cachant un talent hors pair. Il m'a tendu la main aux moments difficiles, et m'a ouvert les portes de la recherche. Ses conseils m'ont été très utiles et fructueux. Je le remercie de tout mon cœur.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Zenzri Hatem, Maître de conférences et Directeur du département Génie Civil de l'ENIT, et Monsieur Félix Darve, Professeur des Universités, INPG - Laboratoire Sols Solides Structures, qui ont aimablement accepté la lourde tâche de rapporteurs de ce travail. Je remercie Monsieur Kanoun Foued, Professeur à l'Académie Militaire de Menzel Bourguiba de m'honorer par sa présence en tant qu'invité.

Une part importante de ce travail a été réalisée dans le cadre du projet CMCU, m'a permis de découvrir le talent et les qualités pédagogiques incontournables de Monsieur Patrick de Buhan, Professeur à L'ENPC qui m'a accueilli au laboratoire LMSGC, qui n'a jamais cessé malgré ses lourdes tâches, de m'aider, de m'orienter et de m'encourager même à distance. Je souhaite ici lui adresser mes remerciements, même s'ils ne reflètent guère tous mes respects envers sa personne. Je le remercie encore une fois d'avoir accepté d'examiner mon travail. Je remercie à travers Monsieur Patrick, toute l'équipe du LMSGC chez qui je me suis senti très à l'aise.

Je voudrais exprimer ensuite ma gratitude envers Monsieur Bouassida Mounir, Professeur au Département de Génie Civil de l'ENIT et vice-Président pour l'Afrique de la société internationale de mécanique des sols et de géotechnique, qui a dirigé cette thèse. Ses conseils et son savoir ont été fort bénéfiques. La clarté de ses raisonnements scientifiques et ses qualités pédagogiques ont été pour moi très enrichissantes. Monsieur Mounir n'est pas uniquement pour moi un directeur de thèse, il était avant tout un ami qui ne manque pas là où il le faut, de me conseiller. Ses qualités humaines m'ont permis d'entretenir avec lui des relations bien privilégiées.

Je dois également remercier chaleureusement tous mes enseignants qui ont été toujours aussi proches de moi. J'en citerai Messsieurs Hassis Hassis, Zenzri Hatem, Ben Ouezdou Mongi et Jemaii Mehrez .

Je remercie tous les collègues chercheurs du département Génie Civil avec qui j'entretiens des relations amicales, et en particulier ceux de l'unité de recherche "Ingénierie Géotechnique". Merci à tous mes amis (ils se reconnaîtront ici) pour la motivation que leur amitié m'a apportée.

Pour terminer, je voudrais remercier du fond du cœur mes parents et ma famille de m'avoir donné sans cesse leur soutien et leur amour tout au long de mes études.

Enfin et surtout, merci à ALLAH qui nous a ordonné d'étudier.

Résumé

L'étude de stabilité des ouvrages géotechniques sur sol renforcé (capacité portante des fondations, stabilité des remblais et des soutènements) par les méthodes directes du calcul à la rupture souffre parfois d'insuffisances dès que le nombre d'inclusions devient important, ce qui peut conduire à une surestimation des capacités de résistance. Une approche alternative, fondée sur la méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture permet de s'affranchir des difficultés mentionnées en substituant au problème initial, un problème homogène équivalent dont il est plus facile d'estimer les capacités de résistance et d'aboutir ainsi à des méthodes de dimensionnement accessibles à l'ingénieur. Dans le présent travail, une extension a été faite quant à l'application de la méthode d'homogénéisation aux problèmes des sols renforcés par des inclusions tridimensionnelles (colonnes).

La première partie du mémoire est consacrée à l'estimation de la capacité portante d'une fondation sur sol renforcé par une tranchée à l'aide de l'approche cinématique du calcul à la rupture, en se plaçant dans un cas général d'un sol et d'une tranchée pesants cohérents et frottants. Le mécanisme de rupture utilisé à cet effet est du type de "Prandtl", des résultats analytiques intéressants (estimant la borne supérieure de la capacité portante) sont établis : ceux-ci englobent en effet un bon ensemble de résultats antérieurs disponibles dans la littérature. Une analyse critique actualisée des méthodes de calcul de la capacité portante d'un sol renforcé par colonnes est ensuite fournie dans cette première partie du mémoire. On insiste alors sur le caractère limité des approches directes du calcul à la rupture, à appréhender le caractère souvent typiquement anisotrope des ouvrages étudiés, et en particulier ceux renforcés par colonnes.

Après avoir rappelé brièvement les concepts fondamentaux de la méthode d'homogénéisation, on aborde dans la deuxième partie, la détermination du critère de résistance macroscopique d'un sol purement cohérent renforcé par colonnes constituées d'un matériau purement cohérent. Un encadrement précis du critère de résistance macroscopique a été établi. Les résultats ainsi obtenus sont exploités, en déformation plane, pour le calcul de la capacité portante d'une fondation rigide sur sol renforcé homogénéisé. Le résultat qui en découle est une amélioration sensible de la borne supérieure de la capacité portante, par rapport à celle obtenue à l'aide de l'approche cinématique directe du calcul à la rupture. Une autre application portant sur la stabilité d'un remblai construit sur sol renforcé par colonnes est ensuite entamée. Pour ce type d'ouvrage, un majorant du facteur de stabilité du remblai a été déterminé.

La troisième partie du mémoire a été consacrée au renforcement d'un sol purement cohérent (une argile molle par exemple) par des colonnes constituées par un matériau cohérent et frottant (le ballast par exemple). On met en œuvre une approche par l'intérieur (par les contraintes) de la méthode d'homogénéisation à la détermination d'une borne inférieure du critère de résistance

macroscopique. En vue de fournir une formulation, plus facile pour un usage pratique, une linéarisation de la frontière de ce domaine, permettant de se placer du côté de la sécurité, a été faite. C'est alors que la borne inférieure de la capacité portante d'une fondation a été recherchée via un champ de contrainte à trois zones, puis avec un champ à six zones (avec un paramètre variable). Le champ à six zones a permis une amélioration sensible du résultat obtenu avec le champ à trois zones.

En conclusion du mémoire de thèse, on récapitule les principaux résultats tout en insistant sur l'apport, qu'apporte la méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture pour appréhender l'étude de stabilité des ouvrages en sol renforcé par colonnes.

Mots clés : sols renforcés par colonnes, critère de résistance, homogénéisation, périodique, problème homogène associé, cellule de base, domaine de résistance macroscopique, anisotrope, facteur de stabilité, capacité portante, linéarisation.

Abstract

When studying the stability of geotechnical projects on reinforced soils by columns (bearing capacity of footings, stability of embankments and retaining structures) by the use of direct approaches of the yield design theory some difficulties are encountered especially when the number of inclusions becomes important. This leads sometimes to overestimated strength capacities of the reinforced soil. Another alternative, based on the homogenization method in yield design theory, permits to overcome the mentioned difficulties by solving an equivalent homogeneous problem. By this latter, the estimation of strength capacities of the reinforced soil becomes easier and, consequently the design methods will be more “accessible” for practitioners.

The first part of the present thesis is dedicated first to the bearing capacity estimation of foundations resting on reinforced soils by a trench. The direct kinematic approach of yield design theory is carried out by considering the general scheme of cohesive frictional soil and constitutive material of the trench. By exhibiting the Prandtl’s mechanism failure analytical upper bound of bearing capacity has been obtained from which some previous results in literature are found. Then, an updated analysis is done concerning the design methods of bearing capacity of reinforced soil by columns. In this section, it is focused on the limitation encountered by direct approaches of yield design theory for taking account of strength anisotropy, particularly in the case of soils reinforced by columns.

In the second part, basic concepts of the homogenization method are briefly recalled. Then the determination of macroscopic strength criteria has been carried out in the case of purely cohesive native soil reinforced by columns made up of purely cohesive material. A closed boundary is then established for the macroscopic strength criteria. From this result the bearing capacity of rigid foundation resting on the homogenized reinforced soil, has been performed, in plane strain analysis. As interesting result a better upper bound of bearing capacity is obtained regarding the determination by using the direct kinematic approach. The stability of an embankment built on reinforced soil made up of purely cohesive constituents has been also studied. By performing the kinematic approach of yield design theory, an upper bound of the stability factor has been determined.

In the third part, the reinforcement of purely cohesive soil (like soft clays) by columns made up of a cohesive-frictional material (like stone, gravel) is investigated. The static approach (or by inside) is first carried out by the use of homogenization method in yield design theory to establish a lower bound of the macroscopic strength criterion. Such a problem can be formulated easier by making recourse to a linearized boundary of the macroscopic strength criterion hence providing a safer estimation. Therefore lower bounds of bearing capacity of foundation resting on homogenized reinforced soil have been established successively by performing first fields

of stress of three zones and second of six zones. The main result recorded was a sensitive improvement of the lower bound obtained by the stress field of three zones, when the stress field of six zones is carried out.

This work is concluded by focusing on results, and advantages with respect to direct methods, obtained by the method of homogenization in the framework of yield design theory to examine the stability of foundations resting on reinforced soils by columns.

Key words : reinforced soils by columns, strength criterion, homogenization, periodic, associated homogeneous problem, unit cell, macroscopic strength domain, anisotropic, factor of stability, bearing capacity, linearization.

Table des matières

1. Introduction bibliographique	25
1.1. Introduction générale	26
1.2. Problématique du renforcement des sols	27
1.2.1. Le renforcement des sols par colonnes	28
1.2.2. Analyse de stabilité des ouvrages en sols renforcés par le calcul à la rupture	30
1.3. Un cas d'étude : capacité portante d'une semelle filante	32
1.3.1. Analyse de quelques cas de renforcement courants	37
1.3.2. Comparaison avec les résultats de (Madhav et Vitkar, 1978)	38
1.3.3. Conclusion	40
1.4. Analyse critique des méthodes usuelles de dimensionnement des fondations sur sols renforcés par colonnes	40
1.5. Intérêts de recourir à une méthode d'homogénéisation	41
2. Sol purement cohérent renforcé par des colonnes à matériau purement cohérent	43
2.1. Principe général	44
2.1.1. Notion de cellule de base :	44
2.1.2. Position du problème :	44
2.1.3. Structure homogène associée :	45
2.1.4. Problème homogène associé :	45
2.1.5. Validité de la démarche :	45
2.2. Critère de résistance macroscopique	47
2.2.1. Définition d'un mode de chargement sur la cellule de base :	47
2.2.2. Définition statique du domaine \mathbf{G}^{hom}	49
2.2.3. Définition cinématique du domaine \mathbf{G}^{hom}	50
2.3. Critère macroscopique en déformation plane : définition	51
2.4. Encadrement du critère par les approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur	52
2.4.1. Borne inférieure :	52
2.4.2. Borne supérieure :	55

2.4.3. Synthèse des résultats	59
3. Quelques applications	61
3.1. Capacité portante d'une semelle filante reposant sur un sol partiellement renforcé	62
3.2. Approche cinématique par les vitesses	62
3.3. Résultats et commentaires	65
3.4. Calcul d'un majorant de la capacité portante ultime une méthode directe	68
3.5. Stabilité d'un remblai reposant sur un sol renforcé	69
3.5.1. Calcul par la méthode d'homogénéisation	70
3.5.2. Puissance virtuelle des efforts extérieurs	74
3.5.3. Obtention d'un majorant du facteur de stabilité :	75
3.5.4. Comparaison avec une méthode directe	78
3.5.5. Un cas particulier	80
4. Sol purement cohérent renforcé par colonnes cohérentes et frottantes	83
4.1. Introduction	84
4.2. Approche par un champ constant du critère macroscopique en déformation plane	84
4.3. Détermination d'une borne inférieure du critère de résistance macroscopique	88
4.4. Un critère simplifié : linéarisation par l'intérieur	90
4.5. Amélioration de la borne inférieure du critère de résistance macroscopique	91
4.6. Le critère de résistance macroscopique linéarisé	95
4.7. Application au calcul de la capacité portante d'une fondation : approche statique	96
4.7.1. Champ de contraintes à trois zones	96
4.7.2. Champ de contraintes à six zones	98
4.8. Synthèse des résultats et conclusion	101
5. Conclusion et perspectives	103
5.1. Conclusions et perspectives	105
A. Détails de calcul pour la section 3.3	107
A.1. Cas où $0 \leq \lambda \leq 1$	108
A.2. Cas où $1 \leq \lambda \leq 2$	110
A.3. Cas où $2 \leq \lambda \leq 3$	112
B. Détails de calcul de la fonction $\pi(\beta)$	115
B.1. Établissement de l'expression de $\pi(\beta)$	116
C. Établissement de l'expression de la cohésion anisotrope $C(\alpha)$	121
C.1. Établissement d'une expression de $C(\alpha)$	122

. **Declaration**

131

Table des matières

Table des figures

1.1.	Fuseaux granulométriques des sols où le vibro compactage est recommandé . . .	29
1.2.	Les différentes phases d'exécution des colonnes ballastées selon différents procédés	31
1.3.	Mécanisme de rupture par cisaillement généralisé (Prandtl)	34
1.4.	Hodographe des vitesses	35
1.5.	Évolution du facteur N_{c2} en fonction de φ_1	39
2.1.	Le problème homogène associé	46
2.2.	Principe de la méthode d'homogénéisation	46
2.3.	Estimation par défaut du domaine de résistance macroscopique \tilde{G}^{hom}	54
2.4.	Diagramme polaire de $C^-(\alpha)$	56
2.5.	Mécanisme par blocs rigides utilisé pour établir une deuxième estimation de la borne supérieure	58
2.6.	Estimation des bornes inférieure et supérieure du critère de résistance macroscopique du sol renforcé en déformation plane	60
3.1.	Mécanisme de Prandtl pour le problème homogène associé	63
3.2.	Estimation de la borne supérieure N_{hom}^+ du facteur de capacité portante, en fonction de la largeur relative λ de la zone en sol renforcé, pour différentes valeurs de η ($k = 20$).	67
3.3.	Variation de N^+/r en fonction du facteur de renforcement r	69
3.4.	Le problème étudié	70
3.5.	Problème homogène associé : mécanisme de rupture par "blocs" en rotation . . .	72
3.6.	Variation de facteur de stabilité K^{hom} en fonction de l'angle de frottement φ et du facteur de renforcement r pour $k_r = 0$ et $\alpha = 35^\circ$	79
3.7.	Problème traité par une méthode directe : mécanisme de rupture par "blocs" en rotation	80
3.8.	Cas d'un mécanisme de rupture passant par le pied du talus	80
4.1.	Problème initial et cellule de base	87
4.2.	Le domaine de résistance macroscopique pour $k = 0$	89

4.3. Le domaine de résistance macroscopique linéarisé pour $k = 0$ (matériau de la colonne purement frottant)	90
4.4. Champ de contrainte à trois zones en équilibre avec une sollicitation triaxiale de révolution	92
4.5. Variation de la fonction de $(1 + f(\varphi))$ en fonction de φ	94
4.6. Le domaine de résistance macroscopique amélioré (par l'axisymétrie), et linéarisé	95
4.7. Champ de contraintes à trois zones	97
4.8. Évaluation de la capacité portante par un champ à trois zones	98
4.9. Champ de contraintes à six zones	99
4.10. Estimation de la capacité portante par un champ à six zones : cas de renforcement par un matériau purement frottant	100
4.11. Comparaison des résultats obtenus à l'aide des champs à trois zones et six zones	101
A.1. Interprétation de l'angle δ	113
B.1. Interprétation géométrique de la fonction $\pi(\beta)$ dans le plan déviateur	120
C.1. Représentation de Mohr	123

Liste des tableaux

- 1.1. Valeurs particulières de N_{c1} , N_{c2} et N_γ pour un sol homogène 37
- 1.2. Valeurs particulières de N_γ pour un sol homogène selon Biarez et Nhiem et Caquot et Kérisel 37

Principales notations

φ	Angle de frottement interne des colonnes, ou du remblai
K_p	Coefficient de butée du sol : $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$
K_a	Coefficient de poussée du sol : $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$
\underline{x}	Vecteur position du point courant
η	Proportion volumique de l'inclusion par rapport au volume de la cellule de base
$\underline{\hat{U}}(\underline{x})$	Vecteur vitesse virtuelle
$\rho \underline{E}$	Densité volumique d'efforts extérieurs
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes
$\underline{\underline{d}}$	Tenseur vitesse de déformation
$\underline{n}(\underline{x})$	Normale extérieure au point \underline{x}
\underline{Q}	Chargement du système
Q^*	Chargement extrême
K	Ensemble des chargements potentiellement supportables
$G(\underline{x})$	Domaine de résistance du matériau
$\ \cdot\ $	Norme euclidienne classique
C	Cohésion isotrope du sol
$\pi(\underline{x}, \cdot)$	Densité de puissance résistante maximale
$\pi(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}), \cdot)$	Densité de puissance résistante maximale

$P_{rm}(\widehat{\underline{U}})$

Puissance résistante maximale dans le champ $\widehat{\underline{U}}$

$\widehat{\underline{V}}$

Vitesse relative sur une interface

1. Introduction bibliographique

Sommaire

1.1. Introduction générale	26
1.2. Problématique du renforcement des sols	27
1.2.1. Le renforcement des sols par colonnes	28
1.2.2. Analyse de stabilité des ouvrages en sols renforcés par le calcul à la rupture	30
1.3. Un cas d'étude : capacité portante d'une semelle filante	32
1.3.1. Analyse de quelques cas de renforcement courants	37
1.3.2. Comparaison avec les résultats de (Madhav et Vitkar, 1978)	38
1.3.3. Conclusion	40
1.4. Analyse critique des méthodes usuelles de dimensionnement des fondations sur sols renforcés par colonnes	40
1.5. Intérêts de recourir à une méthode d'homogénéisation	41

1.1. Introduction générale

La technique de renforcement par colonnes permet une amélioration des sols médiocres et peut être réalisée avec plusieurs procédés : à savoir les colonnes ballastées, ou pieux de sable, et le traitement aux liants en profondeur (deep mixing) pratiquées généralement pour les argiles molles. Cependant pour les sables lâches on pratique souvent le vibrocompactage.

Le renforcement par colonnes permet d'atteindre généralement les buts suivants :

- l'augmentation de la capacité portante ;
- la réduction du tassement ;
- l'accélération de la consolidation ;
- l'élimination du risque de liquéfaction

C'est grâce à ces avantages pratiques que le renforcement par colonnes est devenu d'usage intense à l'échelle internationale, outre l'aspect économique, (coût, délais d'exécution) par rapport à d'autres solutions telles que les fondations profondes ou autres.

Pour ce qui est du dimensionnement des fondations sur sol renforcé par colonnes, de nombreuses contributions ont été avancées depuis les années soixante dix. La plupart d'entre elles sont basées sur le modèle de la colonne isolée et de la cellule élémentaire.

Aussi bien pour le calcul de la capacité portante que pour l'estimation du tassement, les méthodes de dimensionnement ont été largement commentées [28, 17] il en ressortait souvent l'absence d'un cadre théorique adéquat qui devrait conduire à des résultats exploitables pour le praticien ...

A L'ENIT la recherche sur le renforcement par colonnes a démarré en 1990 sur le thème de la capacité portante par la mise en œuvre des approches directes du calcul à la rupture. Les résultats qui découlaient de cette première investigation [28, 34, 35] ont permis de mettre en évidence particulièrement l'intérêt du modèle "groupe de colonnes".

Cette recherche sur le renforcement par colonnes a fait l'objet d'une autre investigation pour l'estimation du tassement, et a conduit à plusieurs résultats [36, 17, 38].

Néanmoins, la recherche concernant l'estimation de la capacité portante s'est poursuivie en examinant à l'aide des approches directes du calcul à la rupture le cas des colonnes flottantes [30].

Malgré cela, l'étude du renforcement des sols purement cohérents par des colonnes en matériau cohérent et frottant n'a pu être menée avec l'approche cinématique directe du calcul à la rupture alors que les résultats obtenus avec l'approche par l'intérieur du calcul à la rupture nécessitent d'être améliorés. Pour cela une autre ouverture pour le volet "capacité portante" s'est avérée

nécessaire en optant pour la méthode d'homogénéisation à laquelle le recours est bien justifié dans le cas de maillages réguliers de colonnes sous une fondation ayant relativement des dimensions suffisamment grandes par rapport à la longueur des colonnes.

Au début de ce travail, on fait une synthèse de quelques méthodes proposées, pour diverses applications de la mécanique des sols, pour le calcul de la capacité portante des sols renforcés par colonnes. Ensuite, on rappelle les principaux résultats de recherche menée avec les approches directes du calcul à la rupture pour le calcul de la capacité portante dans les années 90. Dans ce cadre, on présente en premier lieu une contribution généralisant la détermination de la capacité portante avec le modèle de la tranchée en adoptant le critère de résistance de Coulomb pour le sol initial et le matériau constitutif des colonnes, en tenant compte de la pesanteur. Cette investigation, rend compte, en particulier la difficulté de mettre en œuvre l'approche cinématique directe du calcul à la rupture pour les matériaux cohérents et frottants.

Cela servira d'argument majeur pour justifier le recours à la méthode d'homogénéisation (hormis l'insuffisance des méthodes directes pour appréhender le caractère anisotrope des structures à étudier) qu'on développera ensuite pour analyser deux situations de renforcement par colonnes :

- la première, développée dans le chapitre 2, concerne le renforcement d'un sol purement cohérent, par un matériau également purement cohérent. Ce développement est précédé par un rappel sur les concepts de base de la méthode d'homogénéisation dans le cadre du calcul à la rupture. Deux applications sont traitées à titre d'illustration.
- la deuxième situation est celle d'un matériau purement cohérent renforcé par des colonnes dont le matériau constitutif est cohérent et frottant. Le développement est présenté au chapitre 4.

A titre d'illustration, on étudie la détermination de la capacité portante d'une fondation rigide sur un massif en sol renforcé.

L'apport de la méthode d'homogénéisation est illustré à travers les comparaisons entre les résultats obtenus par cette méthode et ceux proposés par les approches directes et par d'autres contributions.

1.2. Problématique du renforcement des sols

Au delà de l'extrême diversité des techniques utilisées dans le renforcement des sols, qui tient autant à leur mode d'exécution, qu'à la nature de l'ouvrage à renforcer (massif de fondation, mur de soutènement, ...), le principe de la méthode d'amélioration des sols par renforcement repose sur l'incorporation, dans le sol initial, d'éléments de "structures" appelées *inclusions*, destinées

à permettre à l'ouvrage de résister à des charges qu'il n'était pas en mesure de supporter avant renforcement. En ce sens, ce type de technique est à distinguer d'autres méthodes visant à l'amélioration des propriétés intrinsèques d'un sol, qu'il s'agisse de compactage, de drainage, ou bien encore des procédés de stabilisation chimique du sol "par grandes masses"[6, 37].

D'habitude, on classe les techniques de renforcement des sols à partir de considérations relatives au type de sollicitations que les inclusions mises en place doivent reprendre : efforts de traction ou de compression, sollicitations de cisaillement ou de flexion. De ce point de vue, on peut citer quatre classes distinctes :

- la terre armée ;
- le renforcement par clouage ;
- le renforcement par colonnes ;
- le renforcement par géotextiles.

1.2.1. Le renforcement des sols par colonnes

Les colonnes sont des inclusions verticales dont la section transversale est supposée circulaire. La proportion volumique de renforcement (ou à longueur fixée le facteur de substitution) varie généralement de 5% à 35% contrairement au renforcement par inclusions rigides pour lesquelles la fraction de renforcement est bien inférieure à 5%.

La technique de renforcement des sols par colonne consiste à incorporer dans le sol à renforcer (ou initial) un matériau qui peut être soit un matériau granulaire tel que le ballast (colonnes et plots ballastés), soit un sable (pieux et drains de sable). Le matériau d'apport ayant souvent un angle de frottement élevé (supérieur à 38°) et un module de rigidité en pratique égal à dix fois (ou même plus) celui du sol initial. En outre la perméabilité du matériau d'apport est très élevée (environ de 1 cm/s) lui confère un caractère drainant. Grâce aux caractéristiques du matériau d'apport une plus grande résistance est conférée au sol initial ce qui permettra de reprendre des efforts de compression et de cisaillement élevées. En fonction de la granulométrie du sol initial, par exemple avec le procédé de vibrocompactage, le renforcement par colonnes est envisageable en fonction d'un critère donné tel que illustré sur la figure 1.1

zone A : Les sols de cette zone se prêtent bien au vibro compactage. La courbe limite inférieure, déterminée empiriquement, délimite les matériaux où l'aiguille vibrante ne peut pas atteindre la profondeur de compactage.

zone B : de même que pour les sols de la zone A, au cours du compactage les grains en place se déplacent vers l'aiguille vibrante de sorte qu'il n'est pas nécessaire de procurer un matériau d'apport à partir de la surface. Il en résulte un tassement (affaissement)

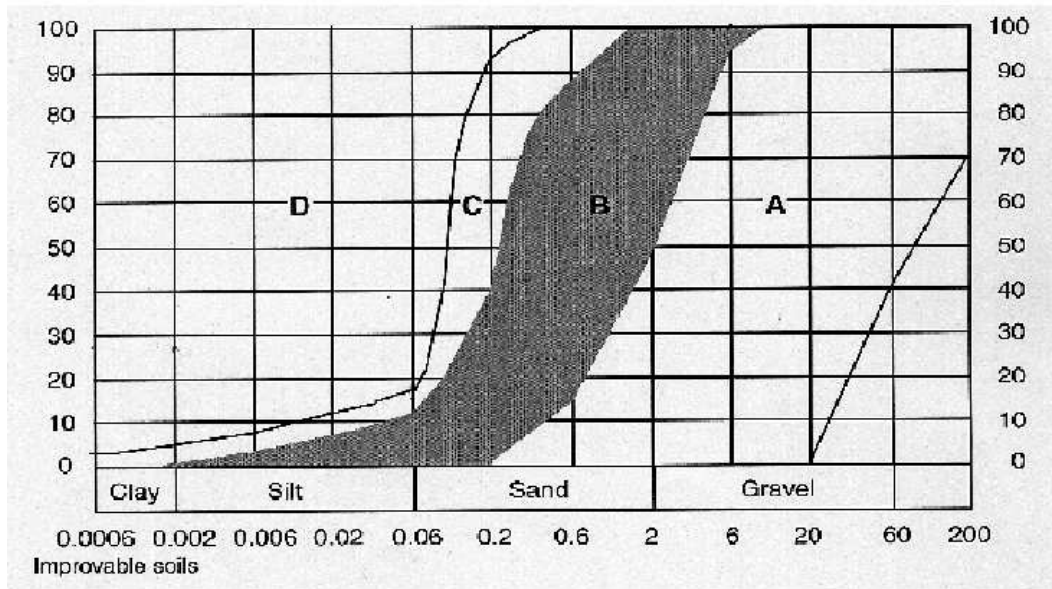


FIG. 1.1: Fuseaux granulométriques des sols où le vibro compactage est recommandé

admissible du massif à traiter. En fonction de l'indice de densité relative initiale et celui exigé, le tassement du massif dû au vibro-compactage varie en général de 2% à 10% de l'épaisseur de la couche à traiter.

zone C : Les sols en question se prêtent également au vibro-compactage, cependant le temps d'exécution augmente beaucoup par rapport à ceux de la zone B. Ceci est dû au surplus d'eau qui ne s'évacue pas rapidement du sol compacté. Le compactage est possible à condition d'ajouter un matériau d'apport approprié (depuis la surface) car les particules du sol en question ne se dirigent pas vers l'aiguille lors des vibrations.

zone D : sols incompatibles avec le vibro-compactage. Le renforcement par colonnes est une alternative possible pour les améliorer.

Le renforcement par colonnes peut être assuré par un traitement aux liants (chaux, ciment ou chaux-ciment) des argiles molles. Dans ce cas c'est le procédé de traitement en profondeur (deep-mixing) qui consiste à adjoindre au sol en place un pourcentage en poids (souvent qui varie de 5% à 20%) du liant et le malaxer par une (ou plus) tarière en rotation. Avec ce procédé, la proportion volumique du sol renforcé peut parfois dépasser les 70%. Les performances du sol renforcé sont caractérisées par une cohésion très élevée (20 à 40 fois celle du sol initial) et un module de rigidité égal environ à quelques centaines de celui du sol initial,

D'une façon générale plusieurs avantages sont atteints suite à un renforcement par colonnes à savoir :

- ❑ l'augmentation de la capacité portante ;
- ❑ une réduction du tassement ;
- ❑ une accélération importante de la consolidation primaire du sol initial ;
- ❑ une diminution importante (voire l'élimination) du risque de liquéfaction lorsque le sol initial est essentiellement un sable lâche saturé.

Ces avantages contribuent ainsi à une meilleure stabilité des ouvrages construits sur sol renforcé par colonnes.

Il existe plusieurs types de procédés d'exécution qui ont été développés depuis les années soixante dix parmi lesquels on cite :

- ❑ les pieux de sable compacté exécutés soit avec le procédé japonais "composer" [20], soit avec le procédé "Franki" des pieux classiques à tubage récupérable [37], ou encore le procédé Ménard-solcompact ;
- ❑ les plots ballastés exécutés par substitution dynamique qui correspond à une autre variante d'usage du procédé de compactage dynamique breveté par Ménard.
- ❑ les colonnes ballastées exécutées soit à l'aide d'un tube enfoncé par battage, soit à l'aide d'un vibreur électrique à sas (de type torpille ou hydraulique) enfoncé dans le sol par lancement à l'air ou à l'eau, ce procédé a été développé par Keller en 1936. Le matériau d'apport est mis en place par expansion latérale dans le sol initial [1]...

Sur la figure 1.2 on illustre pour trois procédés, apparentés, les phases d'exécution du renforcement par colonnes ballastées.

1.2.2. Analyse de stabilité des ouvrages en sols renforcés par le calcul à la rupture

Selon les méthodes proposées, différents modèles ont été considérées pour le calcul de la capacité portante ultime d'un sol renforcé par colonnes qui constitue l'objectif essentiel du présent travail.

La capacité portante ultime d'un sol renforcé par colonnes correspond à la contrainte (ou force) comptée positivement en compression qui provoque la rupture du sol renforcé sous l'action d'un poinçonnement. Les premières contributions de calcul de la capacité portante ultime d'un sol renforcé par colonnes ont été menées par les modèles d'usage courant à savoir la colonne isolée (ou de la tranchée) et la cellule élémentaire (ou composite). Ces deux modèles ont été mis en œuvre soit par la mise en œuvre d'un mécanisme de rupture, soit par la combinaison d'un état de contrainte et d'un mécanisme de rupture. Une étude critique de ces méthodes est détaillée dans [28].

Néanmoins à partir des années quatre vingt dix a été investiguée la détermination de la capacité portante d'un sol renforcé par colonnes à l'aide des approches directes du calcul à la rupture à

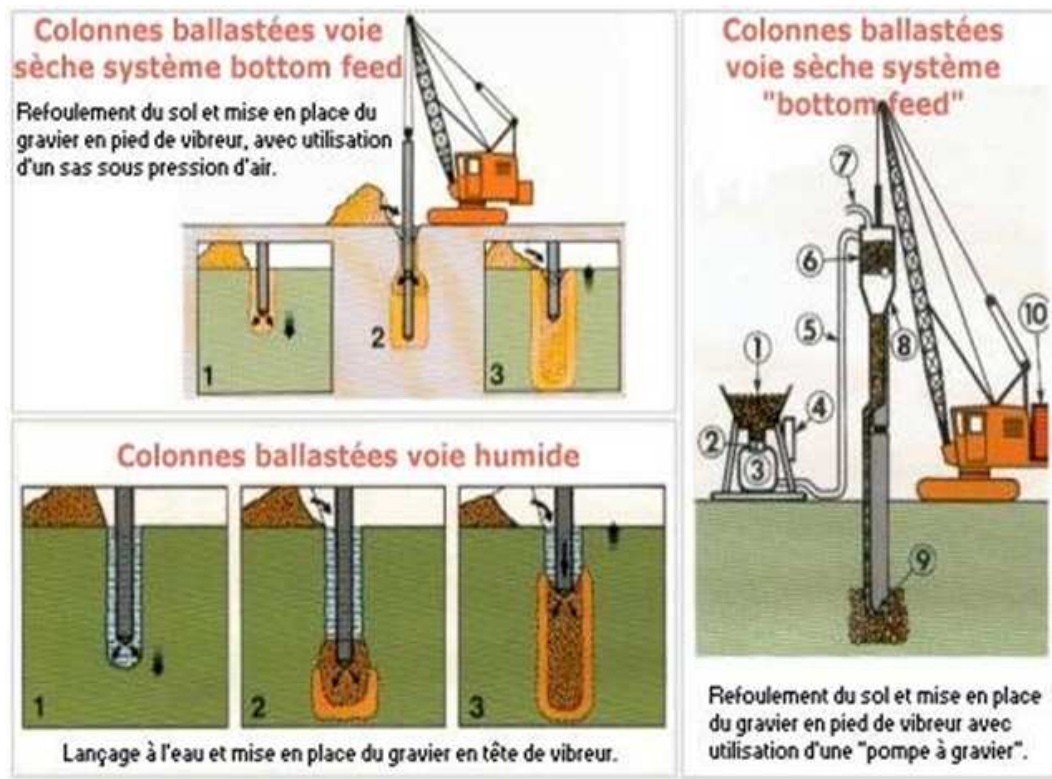


FIG. 1.2: Les différentes phases d'exécution des colonnes ballastées selon différents procédés

l'aide des modèles de la colonne isolée (la tranchée), la cellule composite et le modèle "groupe de colonnes" [34, 33]. Les premiers résultats qui en ressortissaient, dans un cadre théorique clair, ont permis de noter la limitation des approches antérieures qui sont plutôt spécifiques à une situation particulière de renforcement [19], ou parfois même l'incohérence des résultats qui en découlaient [42]. L'intérêt des résultats établis avec les approches directes du calcul à la rupture a été mis en évidence suite à leurs validations sur des modèles réduits en laboratoire, [29, 31]. Malgré cela tous les cas de renforcement, notamment avec le modèle "groupe de colonnes", ou même avec celui de la tranchée n'étaient pas généralement bouclés. Ce qui a conduit à poursuivre les investigations à propos de la capacité portante d'un sol renforcé par colonnes à l'aide des approches directes du calcul à la rupture. En outre, il faudra également réfléchir à d'autres approches qui permettent d'aborder les cas de renforcement "difficiles" à traiter avec les approches directes du calcul à la rupture.

1.3. Un cas d'étude : capacité portante d'une semelle filante

On étudie le problème d'une semelle filante de largeur B , reposant sur un sol cohérent et frottant $(C_2, \varphi_2, \gamma_2)$ renforcé par une tranchée filante de même largeur B , constituée d'un matériau cohérent et frottant $(C_1, \varphi_1, \gamma_1)$.

L'objectif est d'établir une borne supérieure de la capacité portante ultime recherchée à l'aide de l'approche cinématique du calcul à la rupture en considérant un mécanisme de Prandtl généralisé. L'intérêt de ce mécanisme a été de trouver la valeur exacte de la capacité portante ultime pour une fondation filante reposant sur un sol homogène isotrope [22]. Il sera ici, mis en œuvre avec prise en compte de la pesanteur.

Le même problème, ici posé, a été analysé par [41] et a été résolu par application du théorème cinématique de l'analyse limite en ayant recours à des minimisations numériques. Ces auteurs ont exprimé la solution comme étant une valeur exacte de la capacité portante ultime recherchée en se basant sur le principe de superposition de Terzagui.

Le présent travail se veut être une amélioration de la méthode de résolution du même problème, mais considéré dans un cadre théorique rigoureux qu'est le calcul à la rupture. En effet, l'expression de la capacité portante est recherchée via un calcul analytique, donc sans avoir recours à des minimisations numériques douteuses puisque les auteurs les ont faites sur les différents termes de la capacité portante, séparément. Une étude critique détaillée a été présentée dans [28].

Le problème est traité en déformation plane, en tenant compte de l'action de la pesanteur. Par application de l'approche cinématique (par les vitesses) du calcul à la rupture, on détermine un majorant du chargement de ruine pour un ouvrage à géométrie fixée, soumis à un mode de chargement donné, et dont la résistance de ses matériaux constitutifs est décrite par un critère de résistance donné.

Le théorème cinématique du calcul à la rupture se traduit par :

$$W_{ext}(\underline{v}) \leq P(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \text{ cinématiquement admissible} \quad (1.1)$$

où \underline{v} est un champ de vitesse continûment différentiable par morceaux, défini par zones dans

$$\Omega = \cup \Omega_i.$$

$$W_{ext} = \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) + \int_{\Omega} (\underline{\gamma} \cdot \underline{v}) d\Omega \quad (1.2a)$$

$$P(\underline{v}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{d}) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\underline{n}; [\underline{v}]) d\Sigma \quad (1.2b)$$

où :

W_{ext} est la puissance des forces extérieures dans le champ \underline{v} .

$\dot{\underline{q}}(\underline{v})$ désigne le vecteur des paramètres cinématiques associés au vecteur chargement \underline{Q} vertical auquel est soumis le domaine Ω . Le cas de chargements inclinés est investigué dans [15] où on peut trouver plusieurs sortes de mécanismes de rupture du sol sous chargements sismiques par exemple.

$\underline{\gamma}$ désigne l'action de la pesanteur.

Σ est l'ensemble des surfaces de discontinuité de vitesse $[\underline{v}]$ au sein de Ω .

$P(\underline{v})$ désigne la puissance résistante maximale déterminée à partir des capacités de résistance des matériaux constitutifs de l'ouvrage. Les expressions des fonctions $\pi(\underline{d})$ et $\pi(\underline{n}; [\underline{v}])$ sont détaillées dans le paragraphe suivant. Les zones (1), (4) et (4') subissent un mouvement de bloc rigide, alors que les zones (2), (2'), (3) et (3') sont le siège d'une déformation par cisaillement. Les surfaces (AI), (A'I), (IB), (IB'), (BC), (B'C'), (CD) et (C'D') représentent l'ensemble des surfaces de discontinuité de vitesse pour le mécanisme considéré.

Alors que les surfaces (AB) et (A'B') représentent des surfaces de transition entre les zones (2) et (3) d'une part, et (2') et (3') d'autre part, c'est à dire où la discontinuité de vitesse est nulle. Sur ces surfaces, les discontinuités de vitesses sont déterminées à partir de l'hodographe des vitesses (figure 1.4). Les expressions du champ de vitesse ainsi construit, sont :

□ trachée

1. bloc (1) :

$$\underline{v}^{(1)} = U \underline{e}_x \quad (1.3)$$

par rapport au repère orthonormé $(\underline{i}, \underline{j})$

2. zones (2) et (2') :

$$\underline{v}^{(2)} = V_1 \cdot \exp(\theta \tan \varphi_1) \underline{e}_{\theta}; \quad \alpha - \pi/2 \leq \theta \leq 0 \quad (1.4)$$

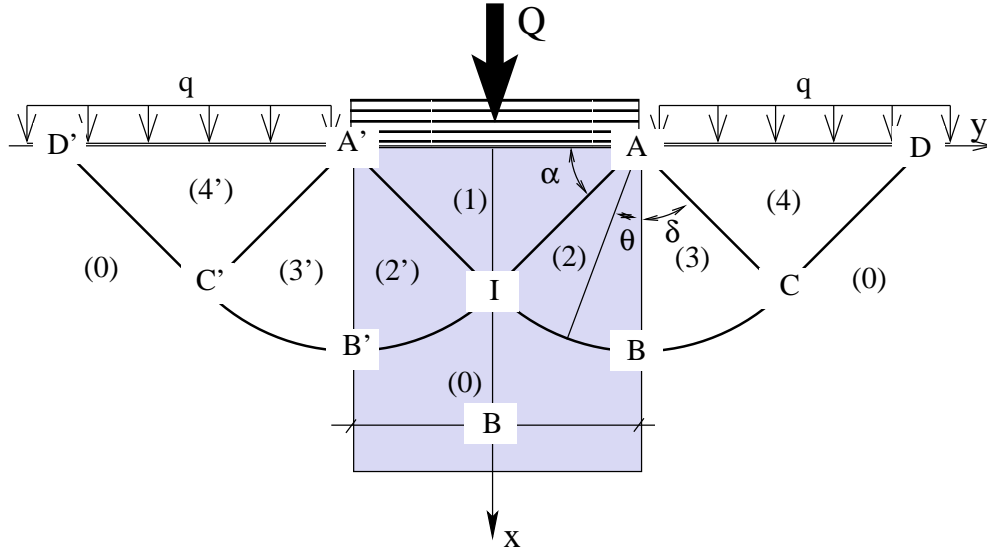


FIG. 1.3: Mécanisme de rupture par cisaillement généralisé (Prandtl)

par rapport à un repère local en coordonnées polaires $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$, le vecteur \underline{e}_r étant porté par le rayon vecteur \underline{AM} (respectivement $\underline{A'M'}$);

□ sol environnant :

1. zones (3) et (3') :

$$\underline{v}^{(3)} = V_1 \cdot \exp(\theta \tan \varphi_2) \underline{e}_\theta; \quad 0 \leq \theta \leq \delta \quad (1.5)$$

2. zones (4) et (4') :

$$\underline{v}^{(4)} = V_2 \cdot \left[-\cos(\delta + \varphi_2) \underline{e}_x + \sin(\delta + \varphi_2) \underline{e}_y \right] \quad (1.6)$$

avec les expressions suivantes que l'on établit à partir de l'hodographe des vitesses (figure 1.4) :

$$V_0 = U \cdot \frac{\cos(\alpha - \varphi_1)}{\cos \varphi_1}; \quad V_1 = V_0 \cdot \exp\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \tan \varphi_1\right]; \quad V_2 = V_1 \cdot \exp(\delta \tan \varphi_2) \quad (1.7)$$

Il convient de bien noter qu'aux points B et B' sur les surfaces de séparation entre la tranchée et le sol environnant, il existe une discontinuité de la tangente aux arcs de spirales logarithmiques (IB) et (BC) conformément aux expressions (1.4) et (1.5) du champ \underline{v} .

Le calcul de la puissance résistante maximale et de la puissance des forces extérieures est détaillé en annexe (section B.1). A partir de (1), (2) et (3), l'application du théorème cinématique conduit à :

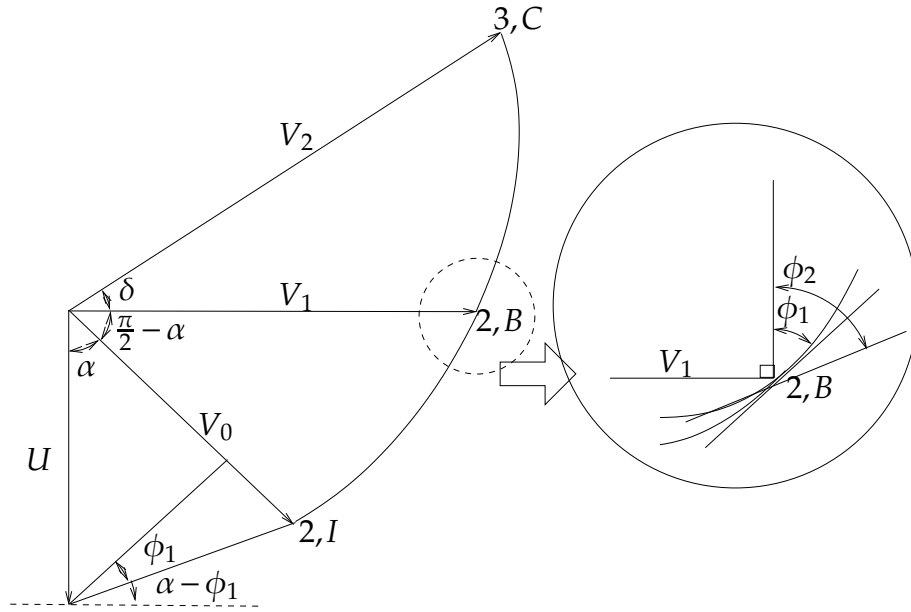


FIG. 1.4: Hodographe des vitesses

$$\underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \leq \int_{\Omega} \pi(\underline{d}) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\underline{n}; [\underline{v}]) d\Sigma - \int_{\Omega} (\underline{\gamma} \cdot \underline{v}) d\Omega \quad (1.8)$$

La meilleure approximation est obtenue après minimisation du second membre de (1.8) par rapport aux paramètres géométriques α et δ , on obtient :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}; \quad \delta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \quad (1.9)$$

Substituant (1.9) dans l'expression (1.8), et en adoptant la forme d'écriture proposée par [41], la borne supérieure de la capacité portante ultime définie par le rapport (Q/B) s'écrit en posant $k = C_1/C_2$:

1. Introduction bibliographique

$$\left(\frac{Q}{B}\right)^* \leq C_2 \cdot N_c + \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot B \cdot N_\gamma + \gamma_2 \cdot D_f \cdot N_q \quad (1.10)$$

où :

$$N_c = k \cdot N_{c1} + N_{c2}; \quad N_\gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot N_{\gamma_1} + N_{\gamma_2}; \quad \gamma_2 \cdot D_f = q \quad (1.11)$$

$$N_{c1} = \cot \varphi_1 \left[\frac{1}{\cos \varphi_1} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \cdot \exp \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) \tan \varphi_1 \right] - 1 \right] \quad (1.12)$$

$$N_{c2} = \frac{\cot \varphi_2}{\cos \varphi_1} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \cdot \exp \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) \tan \varphi_1 \right] \left[(1 + \sin \varphi_2) \cdot \exp \left[\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2 \right) \tan \varphi_2 \right] - 1 \right] \quad (1.13)$$

$$N_q = \frac{1}{\cos \varphi_1} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) (1 + \sin \varphi_2) \cdot \exp \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) \tan \varphi_1 \right] \cdot \exp \left[\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2 \right) \tan \varphi_2 \right] \quad (1.14)$$

$$N_{\gamma_1} = -\frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)}{2} \cdot \left[1 + \frac{1}{\cos \varphi_1 \cdot (1 + 9 \tan^2 \varphi_1)} \left(\frac{\exp \left[\frac{3}{4} (\pi - 2\varphi_1) \tan \varphi_1 \right]}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)} - \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) - 3 \tan \varphi_1 \right) \right] \quad (1.15)$$

$$N_{\gamma_2} = \frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \exp \left[\frac{3}{4} (\pi - 2\varphi_1) \tan \varphi_1 \right]}{2 \cos \varphi_1 (1 + 9 \tan^2 \varphi_1) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)} \cdot \left[1 - \exp \left[\frac{3}{4} (\pi + 2\varphi_2) \tan \varphi_2 \right] \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) - 3 \tan \varphi_2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) \right) \right] + \frac{\cos \varphi_2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right)}{2 \cos \varphi_1 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \exp \left[\frac{3}{4} (\pi - 2\varphi_1) \tan \varphi_1 \right] \exp \left[\frac{3}{4} (\pi + 2\varphi_2) \tan \varphi_2 \right] \quad (1.16)$$

$$N_\gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot N_{\gamma_1} + N_{\gamma_2} \quad (1.17)$$

Le terme de capacité portante N_q rend compte de l'effet d'encastrement de la fondation par le biais de la contrainte verticale uniforme q .

A partir de l'expression (1.10), on peut déterminer la capacité portante d'un sol renforcé par une tranchée, quel que soit le cas de renforcement, il suffit de constater que l'on a par exemple :

$$\lim_{\varphi_2 \rightarrow 0} N_{c2} = 1 + \frac{\pi}{2} \quad (1.18)$$

1.3. Un cas d'étude : capacité portante d'une semelle filante

φ (°)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
N_c	5,14	6,49	8,34	10,98	14,83	20,72	30,14	46,12	75,31	133,87	266,88
N_q	1,00	1,57	2,47	3,94	6,40	10,66	18,40	33,30	64,20	134,87	319,06
N_γ	0,00	0,42	1,18	2,58	5,21	10,30	20,75	43,76	99,50	252,72	753,04

TAB. 1.1: Valeurs particulières de N_{c1} , N_{c2} et N_γ pour un sol homogène

φ (°)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
<i>D.T.U 13 – 12</i>	0,00	0,10	0,50	1,40	3,50	8,10	18,10	41,10	100,00	254,00	720,00
<i>Caquot&Krisel</i>	0,00	0,20	1,00	2,30	5,00	10,40	21,80	47,90	113,00	299,00	910,00

TAB. 1.2: Valeurs particulières de N_γ pour un sol homogène selon Biarez et Nhiem et Caquot et Kérisel

Dans le tableau 1.1, on présente quelques valeurs des facteurs N_{c1} , N_{c2} et N_γ qui permettent de déterminer la capacité portante d'une fondation dans le cas d'un sol homogène.

Si les valeurs des facteurs N_c et N_q coïncident parfaitement avec celles retenues par différents auteurs, il n'en est pas ainsi pour celles de N_γ : les valeurs proposées par différents auteurs pour ce coefficient sont très différentes, car il est possible d'adopter divers schémas de rupture sous la fondation. La plupart des géotechniciens adoptent les valeurs proposées par Caquot et Kérisel. Le *D.T.U 13 – 12* a adopté l'évaluation de Biarez et Nhiem. Le tableau 1.2 reprend les valeurs de N_γ proposées par le *D.T.U 13 – 12* et Caquot et Kérisel.

Lorsque $\varphi \leq 30^\circ$, les valeurs de N_γ proposées par Caquot et Kérisel se rapprochent plus que celles du *D.T.U 13 – 12*, des valeurs du tableau 1.2 ; alors que lorsque $\varphi > 30^\circ$, celles de Caquot et Kérisel s'éloignent nettement de celles proposées dans le *D.T.U 13 – 12*.

1.3.1. Analyse de quelques cas de renforcement courants

1.3.1.1. Sol purement cohérent renforcé par un matériau cohérent et frottant

C'est le cas de renforcement par exemple, d'un sol mou ($\varphi_2 = 0$) par du ballast. Dans ce cas, la capacité portante ultime de la fondation est déterminée à partir de (1.10) avec le facteur N_{c1} toujours exprimé par (1.12), le facteur N_{γ_1} est exprimé par (1.15) et les facteurs ci-dessous :

$$N_{c2} = \frac{1 + \frac{\pi}{2}}{1 - \sin \varphi_1} \cdot \exp \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) \tan \varphi_1 \right] \quad (1.19)$$

$$N_q = \frac{\exp \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) \tan \varphi_1 \right]}{1 - \sin \varphi_1} \quad (1.20)$$

$$N_{\gamma_2} = \frac{\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)}{4 \cos \varphi_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} \exp\left[\frac{3}{4}(\pi - 2\varphi_1) \tan \varphi_1\right] \quad (1.21)$$

Ce résultat a été établi dans ([28]) sous forme de borne supérieure ne tenant pas compte de l'effet de la pesanteur. L'intérêt pratique de ce cas est de faire ressortir la valeur minimale de l'angle de frottement φ_1 du matériau constituant la tranchée, à partir de laquelle il y a augmentation de la capacité portante. Pour le cas de renforcement considéré, et pour $q = 0$; $k = 0$ cette valeur est $\varphi_1 = 16^\circ$ (voir tableau 1.1).

A ce propos, on rappelle que pour le cas des matériaux non pesants, la mise en œuvre des approches par l'intérieur et par l'extérieur du calcul à la rupture ([34]) a permis de trouver que la valeur de φ_1 est située entre 16° et 17° .

On remarque que pour $\varphi_1 = 26^\circ$, l'amélioration de la capacité portante est de 53%, alors que pour $\varphi_1 = 38^\circ$, souvent recommandée en pratique, cette amélioration est de 164%.

1.3.1.2. Sol purement cohérent renforcé par un matériau purement cohérent

C'est par exemple le cas d'une vase renforcée par traitement à la chaux ou au ciment. La capacité portante ultime s'exprime toujours par (1.10) avec :

$$N_{c1} = N_{c2} = 1 + \frac{\pi}{2}; \quad N_q = 1; \quad N_\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \quad (1.22)$$

Le cas particulier d'un sol homogène ($C_2 = C_1$ et $\gamma_1 = \gamma_2$)¹ s'en déduit immédiatement :

$$\left[\frac{Q}{B}\right]^* \leq (2 + \pi)C_2 + q \quad (1.23)$$

1.3.2. Comparaison avec les résultats de (Madhav et Vitkar, 1978)

En négligeant l'effet de la pesanteur, et en l'absence d'une surcharge en surface, la capacité portante ultime dans le cas d'un sol purement cohérent renforcé par une tranchée constituée par un matériau purement frottant d'angle $\varphi_1 = 40^\circ$, peut s'exprimer par :

$$\left[\frac{Q}{B}\right]^* \leq 14,968C_2 \quad (1.24)$$

¹on remarque que pour un matériau homogène, $N_\gamma = 0$

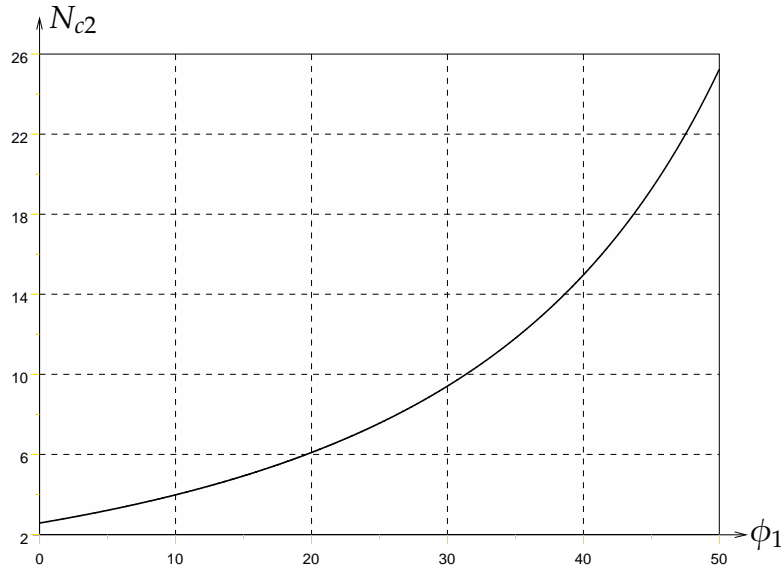


FIG. 1.5: Évolution du facteur N_{c2} en fonction de φ_1

Alors qu'avec les mêmes données que ci-dessus, et pour un rapport des cohésions $k = 1$ (le matériau constitutif de la tranchée et le sol à renforcer ont la même cohésion), on a :

$$\left[\frac{Q}{B} \right]^* \leq 20,715C_2 \quad (1.25)$$

Dans les deux cas, les bornes supérieures fournies par (1.24) et (1.25) correspondent aux valeurs de la capacité portante supposée exacte par Madhav et Vitkar dans ([41]).

Par cette approche, il est à rappeler que le rapport $\frac{Q}{B}$ s'identifie à une contrainte uniformément répartie sur la tranchée, ce qui n'est vrai que dans le cas d'une fondation rigide en particulier.

Le cas particulier, où $A = B$, est obtenu en prenant $\lambda = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2}$.

On remarquera en particulier que pour $\varphi_2 = 0$, le paramètre λ n'intervient pas dans le calcul des facteurs de portance, et on peut vérifier que les courbes proposées par [41] peuvent être calculées à partir du facteur N_{c2} donné par l'expression (1.19) et dont la variation en fonction de l'angle φ_1 est traduite sur la figure 1.5.

1.3.3. Conclusion

Le théorème cinématique [23] de la théorie du calcul à la rupture a été mis en œuvre pour l'établissement d'une borne supérieure de la capacité portante ultime d'un sol cohérent et frottant renforcé par une tranchée cohérente et frottante. Cette borne est déterminée par l'expression (1.10) qui rappelle le principe de superposition de Terzagui. Elle a permis d'étudier tous les cas de renforcement en incluant notamment la pesanteur dont le rôle est prépondérant dans le cas des matériaux frottants. Pour un sol homogène, on vérifie que les facteurs N_c et N_q coïncident parfaitement avec ceux proposés par ([5]) et Meyerhof, alors que le facteur N_γ en est supérieur.

Le résultat proposé a été vérifié en retrouvant les valeurs des facteurs de portance correspondant à des cas particuliers de renforcements particuliers déjà étudiés, ou bien en faisant le passage à la limite relatif au cas du sol homogène. Par ailleurs, une estimation des caractéristiques mécaniques du matériau de renforcement a pu être établie.

1.4. Analyse critique des méthodes usuelles de dimensionnement des fondations sur sols renforcés par colonnes

L'usage de la théorie du calcul à la rupture par les approches directes statique et cinématique a été largement investigué par le calcul de la capacité portante d'une fondation sur sol renforcé par colonnes, en adoptant trois modélisations : la tranchée [32], la cellule composite et le groupe de colonnes.

L'usage d'une approche directe du calcul à la rupture consiste selon une modélisation donnée, à distinguer entre le sol initial (à renforcer) et le matériau constitutif de(s) la colonne(s) comme étant deux matériaux homogènes isotropes ayant des caractéristiques distinctes. Selon le modèle étudié et l'approche considérée, on établit généralement un encadrement de la capacité portante dont la précision est variable. Cependant pour certaines modélisations, des résultats exacts ou un encadrement très satisfaisant ont pu être obtenus et validés sur modèles.

Dans la majorité des contributions, l'hypothèse de colonnes reposant sur un substratum a été la plus adaptée. Néanmoins il convient de noter les résultats relatifs aux colonnes flottantes présentés dans [28] en tenant compte de la pesanteur. Outre les expressions de la capacité portante, ces résultats ont permis d'obtenir une limitation sur la longueur des colonnes. La majorité de ces résultats font actuellement l'objet d'une validation avec des données de projets réalisés et viennent d'être incorporés dans un projet de logiciel en cours d'élaboration.

L'avantage majeur de ces approches directes est d'être valables dans le cas de renforcement

par colonnes réparties selon un maillage non régulier et de diamètres différents. Toutefois, il convient de signaler, par exemple, pour le cas de renforcement d'un sol purement cohérent avec un groupe de colonnes constituées par un matériau cohérent et frottant, l'usage d'une méthode directe du calcul à la rupture (telle que l'approche cinématique) demeure très délicate. En effet, les conditions de pertinence sur les champs de vitesse cinématiquement admissibles à construire dans les deux matériaux ne peuvent être, simultanément vérifiés par exemple soit avec des mécanismes faisant intervenir des surfaces courbes soit avec des zones en déformation.

Outre cet handicap, le retour à la réalité montre que souvent le renforcement est réalisé avec un groupe de colonnes, réparties selon un maillage régulier, ayant un même diamètre. Ce constat conduit à penser déjà qu'une condition de recours à la méthode d'homogénéisation, déjà investiguée dans d'autres cas de matériaux renforcés [6], est bien recommandé. Mais ce recours permet en fait, de faciliter l'étude de cas de renforcement par colonnes difficilement appréhendable. Dans cette vision, se justifie l'usage de la méthode d'homogénéisation dont on présente un bref rappel dans la section suivante-, pour le calcul de la capacité portante d'une fondation sur sol renforcé par colonnes.

1.5. Intérêts de recourir à une méthode d'homogénéisation

La théorie de l'analyse limite (ou du calcul à la rupture) fournit un cadre adéquat pour déterminer, ou du moins, estimer la capacité portante des fondations sur sols renforcés par colonnes. Des résultats intéressants ont été obtenus dans le cas du renforcement par une tranchée sous une fondation rigide [34, 35], puis généralisés au cas d'un groupe de colonnes [29, 33]. Par ailleurs, et dans le cas par exemple d'un sol purement cohérent renforcé par des colonnes cohérentes et frottantes, l'implémentation des approches directes du calcul à la rupture, et plus particulièrement l'approche cinématique, se heurte à des difficultés voire l'impossibilité de mise en œuvre.

En outre, et comme indiqué dans [6], les mécanismes de rupture induisant des surfaces de discontinuité de vitesse dans le sol purement cohérent et les colonnes cohérentes et frottantes, ne sont guère faciles à traiter, et ce du fait de la géométrie tridimensionnelle des colonnes.

Cette situation peut être, en fait, surmontée en faisant recours à la méthode d'homogénéisation telle que développée dans [6] et [13].

Cette méthode jouit de deux avantages :

- la prise compte de l'anisotropie qui permet de tenir compte des variations des caractéristiques mécaniques par rapport à une direction privilégiée [25];

1. Introduction bibliographique

- d'aborder plus facilement la mise en œuvre d'une approche directe du calcul à la rupture une fois le critère de résistance macroscopique du milieu homogénéisé est établi.

2. Sol purement cohérent renforcé par colonnes à matériau purement cohérent

Sommaire

2.1. Principe général	44
2.1.1. Notion de cellule de base :	44
2.1.2. Position du problème :	44
2.1.3. Structure homogène associée :	45
2.1.4. Problème homogène associé :	45
2.1.5. Validité de la démarche :	45
2.2. Critère de résistance macroscopique	47
2.2.1. Définition d'un mode de chargement sur la cellule de base :	47
2.2.2. Définition statique du domaine G^{hom}	49
2.2.3. Définition cinématique du domaine G^{hom}	50
2.3. Critère macroscopique en déformation plane : définition	51
2.4. Encadrement du critère par les approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur	52
2.4.1. Borne inférieure :	52
2.4.2. Borne supérieure :	55
2.4.3. Synthèse des résultats	59

2.1. Principe général

2.1.1. Notion de cellule de base :

Soit Ω_ϵ une structure périodique fortement hétérogène. Par périodicité, nous entendons même période spatiale pour les caractéristiques géométriques et mécaniques. Le réel ϵ , positif, désigné habituellement par facteur d'échelle, caractérisera la taille du volume élémentaire \mathcal{C}_ϵ qui, répété un grand nombre de fois reproduira la structure périodique. Nous appellerons alors *cellule de base* \mathcal{C} , le domaine de l'espace transformé de \mathcal{C}_ϵ par l'homothétie $1/\epsilon$ centrée à l'origine de sorte que $|\mathcal{C}| = 1$.

Dans la suite nous considérerons désormais une cellule de base de section carrée de côté s , contenant une seule inclusion circulaire de rayon ρ de sorte que la fraction volumique occupée par cette inclusion est tout simplement :

$$\eta = \pi \left(\frac{\rho}{s} \right)^2 \quad (2.1)$$

La partie occupée par l'inclusion est notée \mathcal{C}^r alors que celle occupée par le sol initial est \mathcal{C}^s .

2.1.2. Position du problème :

Soit à étudier le domaine de stabilité d'une structure Ω_ϵ périodique qu'on suppose fortement hétérogène (i.e. $\epsilon \ll 1$), soumise à un chargement caractérisé par un vecteur \underline{Q} des paramètres de chargement. On suppose donné en tout point \underline{y} de Ω_ϵ , le convexe de résistance microscopique $\mathbf{G}^\epsilon(\underline{y})$.

La théorie de calcul à la rupture [21] offre un cadre mécanique adéquat pour mener à bien une telle analyse. Dans ce cadre où nous nous placerons désormais, seule la donnée en tout point d'un critère de résistance suffit pour conclure quant à la stabilité de la structure étudiée.

La détermination du domaine de stabilité \mathbf{K}^ϵ constitué des chargements potentiellement supportables par la structure, soulève de grandes difficultés liées essentiellement à sa forte hétérogénéité. Sa définition est donnée par :

$$\mathbf{K}^\epsilon = \left\{ \underline{Q} \mid \exists \underline{\sigma} \text{ S.A. } \underline{Q}, \quad \underline{\sigma}(\underline{y}) \in \mathbf{G}^\epsilon(\underline{y}) \quad \forall \underline{y} \in \Omega_\epsilon \right\} \quad (2.2)$$

On montre dans [40,7] qu'un tel domaine \mathbf{K}^ϵ converge lorsque ϵ tend vers zéro, vers un domaine de stabilité asymptotique \mathbf{K}^0 :

$$\mathbf{K}^0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{K}^\epsilon \quad (2.3)$$

La complexité de la détermination directe du domaine \mathbf{K}^0 (ou de $\mathbf{K}^\epsilon \ll 1$) justifie l'emploi d'une méthode d'homogénéisation qui, en substituant à Ω_ϵ un milieu homogène équivalent, permet de s'affranchir de la forte hétérogénéité. Nous disposons pour ce faire d'un cadre théorique constitué par la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques en calcul à la rupture [40, 7].

2.1.3. Structure homogène associée :

Cette démarche associe à la structure périodique initiale Ω_ϵ une structure homogène Ω ainsi définie :

- ses caractéristiques géométriques sont identiques à celles de la structure initiale ;
- elle est soumise au même mode de chargement ;
- son milieu constitutif est homogène et ses capacités de résistance sont caractérisées par la donnée dans l'espace de contraintes d'un domaine de résistance "macroscopique" noté \mathbf{G}^{hom} identique en tout point \underline{y} de Ω .

2.1.4. Problème homogène associé :

Partant de là, l'homogénéisation consiste à remplacer le problème de détermination du domaine \mathbf{K}^0 (c'est à dire en pratique de \mathbf{K}^ϵ , avec ϵ suffisamment petit) par un problème homogène associé consistant à déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables par la structure homogène de Ω précédente, définie par [11] :

$$\mathbf{K}^{\text{hom}} = \left\{ \underline{Q} \mid \exists \underline{\underline{\sigma}} \text{ S.A. } \underline{Q}, \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{y}) \in \mathbf{G}^{\text{hom}} \quad \forall \underline{y} \in \Omega_\epsilon \right\} \quad (2.4)$$

Il apparaît donc que la détermination de \mathbf{K}^{hom} nécessite la détermination préalable du domaine de résistance macroscopique \mathbf{G}^{hom} qui caractérise les capacités de résistance du matériau homogène associé. Sa construction s'effectue au niveau de la cellule de base \mathcal{C} en résolvant un problème de calcul à la rupture. Il dépendra a priori, des capacités de résistance des différents matériaux composant \mathcal{C} , ainsi que de leurs proportions volumiques.

2.1.5. Validité de la démarche :

Le problème reste celui du lien entre la solution du problème de calcul à la rupture sur la structure homogène associée et celle du problème initial.

2. Sol purement cohérent renforcé par des colonnes à matériau purement cohérent

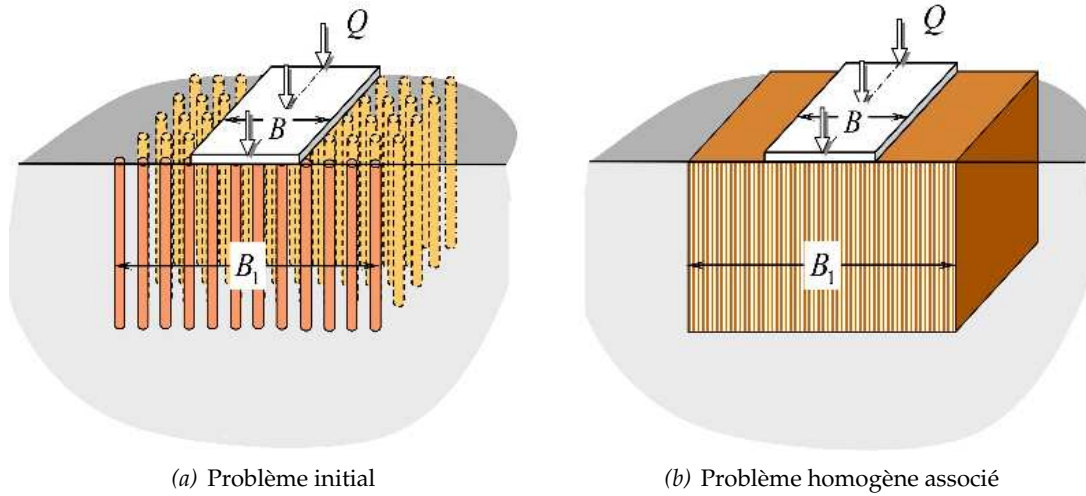


FIG. 2.1: Le problème homogène associé

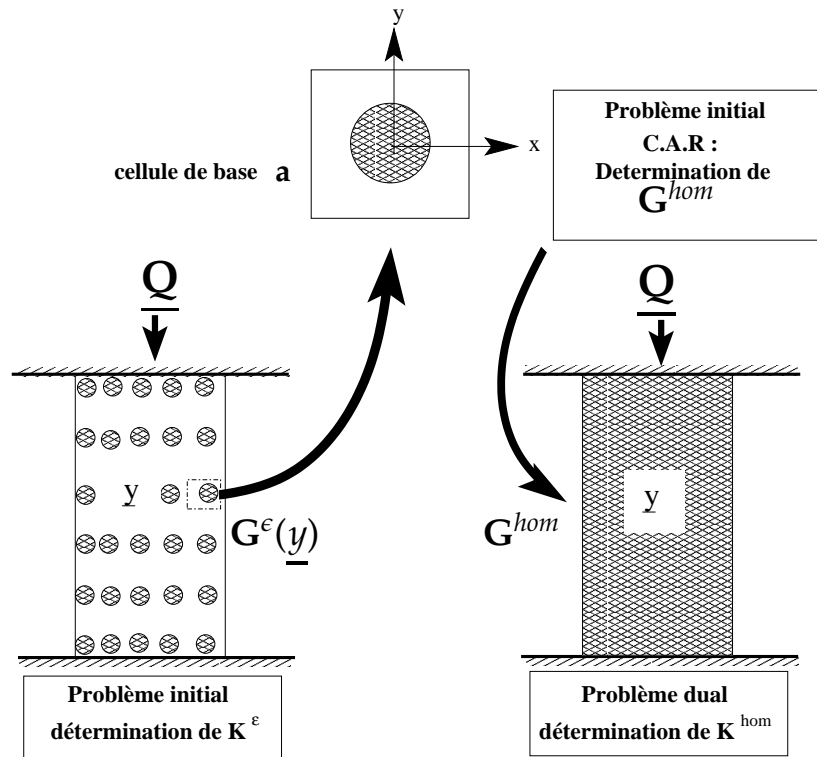


FIG. 2.2: Principe de la méthode d'homogénéisation

Un résultat établi par [40], puis généralisé par [7] permet d'affirmer que les deux problèmes sont équivalents aux effets de bords près.

2.2. Critère de résistance macroscopique

Comme indiqué auparavant, la détermination de \mathbf{K}^{hom} nécessite celle du critère de résistance macroscopique, qui est caractérisé dans l'espace des contraintes par le domaine \mathbf{G}^{hom} .

Cette détermination repose sur la résolution d'un problème auxiliaire de calcul à la rupture posé sur la cellule de base \mathcal{C} .

2.2.1. Définition d'un mode de chargement sur la cellule de base :

D'une manière générale, la mise en évidence d'un mode de chargement est subordonnée à la donnée conjointe de l'espace vectoriel S des champs de contrainte statiquement admissibles et de celui noté C , des champs de vitesse cinématiquement admissibles qu'on introduit ci-après.

2.2.1.1. l'espace S :

Un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ défini en tout point de la cellule de base appartient à S si et seulement si :

- $\text{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\xi}}) = \underline{\underline{\rho}}$: équilibre sans tenir compte de la pesanteur ;
- $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$ est antipériodique.

Cette dernière condition exprime qu'en deux points quelconques situés sur deux faces opposées de \mathcal{C} , les vecteurs contraintes sont opposés.

2.2.1.2. l'espace C :

Un champ de vitesse $\underline{\underline{v}}$ appartient à C si et seulement si :

- $\underline{\underline{v}}$ est défini sur \mathcal{C} ;
- $\underline{\underline{v}}$ est continûment différentiable par morceaux sur \mathcal{C} ;
- le champ $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{v}} - \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\xi}}$ est périodique en $\underline{\underline{\xi}}$ sur \mathcal{C} .

où $\underline{\underline{D}}$ est le tenseur vitesse de déformation "macroscopique" associé à $\underline{\underline{v}}$, c'est à dire :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{C}} (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{v}} \otimes \underline{\underline{n}}) \, d\Sigma \quad (2.5)$$

2. Sol purement cohérent renforcé par des colonnes à matériau purement cohérent

soit encore :

$$\underline{\underline{D}} = \int_{\mathfrak{C}} \underline{\underline{d}}(\underline{v}) d\mathfrak{C} + \frac{1}{2} \int_{\partial\mathfrak{C}} (\underline{n} \otimes [\underline{v}] + [\underline{v}] \otimes \underline{n}) d\Sigma \quad (2.6)$$

où $\underline{\underline{d}}(\underline{v})$ représente le champ des taux de déformation associé à \underline{v} , Σ la surface de discontinuité du champ \underline{v} , et $[\underline{v}]$ la valeur de cette discontinuité lorsqu'on franchit la surface Σ en suivant la normale \underline{n} .

La périodicité du champ \underline{u} signifie qu'en deux points quelconques situés sur des faces opposées de la cellule, \underline{u} prend des valeurs égales. Cette condition peut s'exprimer par le fait qu'en tout point de la cellule, la vitesse de déformation est la somme d'une vitesse de déformation homogène (sa moyenne volumique $\underline{\underline{D}}$) et d'une "fluctuation" $\underline{\underline{\delta}}$ périodique, dont la moyenne sur \mathfrak{C} est nulle :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{\xi}) = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}(\underline{\xi}) \quad \forall \underline{\xi} \in \mathfrak{C} \quad (2.7)$$

avec :

$$\underline{\underline{\delta}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}) \quad \langle \underline{\underline{\delta}} \rangle = 0 \quad (2.8)$$

2.2.1.3. Mode de chargement :

[9, 8]

Les espaces S et C définissent un mode de chargement de la cellule de base \mathfrak{C} qui dépend linéairement de six paramètres scalaires [39].

Plus précisément, les composantes dans un repère orthonormé $Oxyz$, du tenseur des contraintes "macroscopiques" $\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$, moyenne volumique sur la cellule de base de tout élément $\underline{\underline{\sigma}}$ de S , jouent le rôle de paramètres de chargement. De même, les composantes du tenseur vitesse de déformation "macroscopiques" $\underline{\underline{D}} = \langle \underline{\underline{d}} \rangle$ représentent les paramètres cinématiques associés par dualité.

On dira alors que la cellule de base est soumise à un chargement macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$, ou qu'une vitesse de déformation macroscopique $\underline{\underline{D}}$ lui est associée.

En vertu de la dualité mathématique entre les espaces S et C , la puissance de déformation calculée $P(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v})$ sur la cellule de base, d'un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbf{S}$ dans un champ de vitesse

$\underline{v} \in C$ peut être exprimée par :

$$P(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}) = \int_{\mathcal{C}} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{v}) \, d\mathcal{C} \quad (2.9)$$

ou encore :

$$P(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}) = \int_{\mathcal{C}} \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}) \, d\mathcal{C} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \underline{\underline{D}} + \int_{\mathcal{C}} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}) \, d\mathcal{C} \quad (2.10)$$

où l'on a posé :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \int_{\mathcal{C}} \underline{\underline{\sigma}} \, d\mathcal{C} \quad (2.11)$$

En vertu des équations d'équilibre et de la formule de la divergence, l'équation (2.10) peut être écrite sous la forme :

$$P(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}) = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \underline{\underline{D}} + \int_{\partial\mathcal{C}} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \, d\Sigma \quad (2.12)$$

Soit en raison de l'antipériodicité de $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ et de la périodicité de \underline{u} sur le bord de la cellule de base :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \langle \underline{\underline{d}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \quad (2.13)$$

Cette relation généralise, aux cas des milieux périodiques, le lemme de Hill-Mandel : $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{D}}$ représentent respectivement la contrainte et le taux de déformation macroscopiques, qui sont les moyennes des champs microscopiques respectifs sur la cellule de base.

2.2.2. Définition statique du domaine \mathbf{G}^{hom}

Si on désigne par $\mathbf{G}(\underline{\underline{\xi}})$ le domaine de résistance dans l'espace des contraintes, au point $\underline{\underline{\xi}}$ de la cellule de base, le domaine de résistance macroscopique \mathbf{G}^{hom} est défini conformément au raisonnement du calcul à la rupture par la donnée d'une fonction convexe $F(\underline{\underline{\Sigma}})$ telle que :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}^{\text{hom}} \iff F(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \quad (2.14)$$

Soit de façon plus explicite :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}^{\text{hom}} \iff \begin{cases} \exists \underline{\underline{\sigma}} \in S & \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \in \mathbf{G}(\underline{\xi}) & \forall \underline{\xi} \in \mathcal{C} \end{cases} \quad (2.15)$$

En raison de la convexité du domaine $\mathbf{G}(\underline{\xi})$ en tout point de la cellule de base, le domaine \mathbf{G}^{hom} est convexe.

L'exploration des champs de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ vérifiant la condition (2.15) conduit à des évaluations par défaut du critère de résistance macroscopique du milieu hétérogène périodique.

2.2.3. Définition cinématique du domaine \mathbf{G}^{hom}

Cette définition est obtenue par dualisation de l'approche statique par l'intérieur. Un champ de vitesse \underline{v} statiquement admissible dans le mode (avec $\underline{\underline{D}}$) est de la forme

$$\underline{v} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\xi} + \underline{u}(\underline{\xi}) \quad (2.16)$$

Ce champ est tel que :

$$P(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}) = \int_{\mathcal{C}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \, d\mathcal{C} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \quad (2.17)$$

Si on introduit alors la fonction $\pi(\underline{\underline{d}}(\underline{\xi}))$ définie par :

$$\pi(\underline{\underline{d}}(\underline{\xi})) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}}} \left\{ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{\xi}) \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \in \mathbf{G}(\underline{\xi}) \right\} \quad (2.18)$$

le théorème cinématique du calcul à la rupture affirme que l'on a :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}^{\text{hom}} \iff \forall \underline{v} \text{ C.A avec } \underline{\underline{D}} \quad \int_{\mathcal{C}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \, d\mathcal{C} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \left\langle \pi(\underline{\underline{d}}) \right\rangle \quad (2.19)$$

En supposant vérifiées les conditions assurant l'équivalence des approches statiques et cinématiques du domaine \mathbf{G}^{hom} , nous pouvons encore écrire :

$$\forall \widehat{\underline{\underline{D}}} \in \mathbb{R}^6, \quad \pi^{\text{hom}}(\widehat{\underline{\underline{D}}}) = \inf_{\underline{v} \in \text{C}} \left\{ \left\langle \pi(\underline{\underline{d}}) \right\rangle \quad \left\langle \underline{d}(\underline{v}) \right\rangle = \widehat{\underline{\underline{D}}} \right\} \quad (2.20)$$

où $\pi^{hom}(\widehat{\underline{\underline{D}}})$ est la fonction d'appui du convexe \mathbf{G}^{hom} , qu'on peut écrire :

$$\pi^{hom}(\widehat{\underline{\underline{D}}}) = \sup_{\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}^{hom}} \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} : \widehat{\underline{\underline{D}}} \quad \underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}^{hom} \right\} \quad (2.21)$$

La combinaison des relations (2.20) et (2.21) permet alors d'écrire une nouvelle définition du domaine \mathbf{G}^{hom} :

$$\mathbf{G}^{hom} = \cap \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} ; \underline{\underline{\Sigma}} : \widehat{\underline{\underline{D}}} \leq \left\langle \pi(\widehat{\underline{\underline{d}}}) \right\rangle \quad \forall \widehat{\underline{\underline{v}}} \in C ; \left\langle \widehat{\underline{\underline{d}}}(\widehat{\underline{\underline{v}}}) \right\rangle = \widehat{\underline{\underline{D}}}, \widehat{\underline{\underline{D}}} \in \mathbb{R}^6 \right\} \quad (2.22)$$

Cette définition du convexe \mathbf{G}^{hom} apparaît comme un problème de minimisation de la fonctionnelle $P_a(\widehat{\underline{\underline{v}}}) = \left\langle \pi(\widehat{\underline{\underline{d}}}) \right\rangle$ sur l'espace des champs de vitesses virtuelles $\widehat{\underline{\underline{v}}} \in C$, en tenant compte de la condition de moyenne $\left\langle \widehat{\underline{\underline{d}}}(\widehat{\underline{\underline{v}}}) \right\rangle = \widehat{\underline{\underline{D}}}$. Ceci reviendra en fait à écrire $\widehat{\underline{\underline{v}}}$ sous la forme (2.16).

La relation (2.16) traduit ainsi un problème de minimisation sur l'espace des champs de vitesses périodiques $\underline{\underline{u}}$ sur la cellule de base.

2.3. Critère macroscopique en déformation plane : définition

On s'intéresse à la restriction du domaine de résistance macroscopique \mathbf{G}^{hom} dans le plan $Oxyz$.

Pour ce faire, désignons par $\widetilde{\underline{\underline{\Sigma}}}$ le tenseur symétrique d'ordre deux, formé par les composantes de $\underline{\underline{\Sigma}}$ dans le plan Oxy :

$$\widetilde{\underline{\underline{\Sigma}}} = \Sigma_{\alpha\beta} \underline{\underline{e}}_\alpha \otimes \underline{\underline{e}}_\beta \quad \alpha, \beta = x, y \quad (2.23)$$

Le critère de résistance macroscopique "plan" associé au critère macroscopique tridimensionnel défini par la condition (2.14), est :

$$\widetilde{F}(\widetilde{\underline{\underline{\Sigma}}}) = \min_{\Sigma_{zz}} \left\{ F(\Sigma_{\alpha\beta} \underline{\underline{e}}_\alpha \otimes \underline{\underline{e}}_\beta + \Sigma_{zz} \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z) \right\} \leq 0 \quad (2.24)$$

En d'autres termes, il existe un domaine de résistance macroscopique plan $\widetilde{\mathbf{G}}^{hom}$, convexe associé à la fonction $\widetilde{F}(\widetilde{\underline{\underline{\Sigma}}})$, défini par :

$$\widetilde{\mathbf{G}}^{hom} = \left\{ \widetilde{\underline{\underline{\Sigma}}}; \quad \exists \Sigma_{zz} \text{ tel que } \Sigma_{\alpha\beta} \underline{\underline{e}}_\alpha \otimes \underline{\underline{e}}_\beta + \Sigma_{zz} \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z \in \mathbf{G}^{hom} \right\} \quad (2.25)$$

L'équation (2.25) donne une définition du critère macroscopique en déformation plane dans le plan Oxy .

Dans la suite, on étudie la détermination du critère de résistance macroscopique pour le cas des matériaux purement cohérents à l'aide des approches par l'intérieur et par l'extérieur. Les résultats du paragraphe 2.4 ci-dessous ont été publiés dans [3]

2.4. Encadrement du critère par les approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur

2.4.1. Borne inférieure :

Considérons maintenant un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ défini sur la cellule de base de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} & 0 \\ \Sigma_{yx} & \sigma_{yy}^s & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{xx} \end{pmatrix} \text{ si } \underline{\underline{\xi}} \in \mathcal{C}^s \quad (2.26)$$

et

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xx} & 0 \\ \Sigma_{xx} & \sigma_{yy}^r & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{xx} \end{pmatrix} \text{ si } \underline{\underline{\xi}} \in \mathcal{C}^r \quad (2.27)$$

Il est évident que ce champ de contrainte est en équilibre avec le champ de contrainte macroscopique :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta + \Sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (2.28)$$

si la condition suivante est vérifiée :

$$\Sigma_{yy} = (1 - \eta) \sigma_{yy}^s + \eta \sigma_{yy}^r \quad (2.29)$$

Il en va de soit par construction même de ce champ de contrainte, que le vecteur de contrainte reste continu au franchissement de l'interface sol - inclusion.

Par ailleurs est il est toujours possible faire un choix de sorte que la composante Σ_{zz} soit contrainte principale intermédiaire dans les deux constituants de la cellule de base. Désignons

alors par σ_1^s (resp. σ_1^r) et σ_2^s (resp. σ_2^r) les contraintes principales majeure et mineure dans le sol (resp. dans l'inclusion).

Le respect du critère de résistance dans chacun des matériaux de la cellule de base permet d'écrire :

$$\sigma_1^s - \sigma_2^s = \sqrt{(\Sigma_{xx} - \sigma_{yy}^s)^2 + 4\Sigma_{xy}^2} \leq 2C \quad (2.30)$$

dans le sol, et

$$\sigma_1^r - \sigma_2^r = \sqrt{(\Sigma_{xx} - \sigma_{yy}^r)^2 + 4\Sigma_{xy}^2} \leq 2kC \quad (2.31)$$

dans l'inclusion, conditions qu'on peut réécrire autrement :

$$\Sigma_{xx} - 2\sqrt{C^2 - \Sigma_{xy}^2} \leq \sigma_{yy}^s \leq \Sigma_{xx} + 2\sqrt{C^2 - \Sigma_{xy}^2} \text{ et } |\Sigma_{xy}| \leq C \quad (2.32)$$

et

$$\Sigma_{xx} - 2\sqrt{(kC)^2 - \Sigma_{xy}^2} \leq \sigma_{yy}^r \leq \Sigma_{xx} + 2\sqrt{(kC)^2 - \Sigma_{xy}^2} \text{ et } |\Sigma_{xy}| \leq kC \quad (2.33)$$

La condition (2.29) s'écrira alors :

$$|\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy}| \leq 2(1 - \eta) \sqrt{C^2 - \Sigma_{xy}^2} + 2\eta \sqrt{(kC)^2 - \Sigma_{xy}^2} \text{ et } |\Sigma_{xy}| \leq C \quad (2.34)$$

La condition (2.34) définit une estimation par défaut du domaine de résistance macroscopique $\widetilde{\mathbf{G}}^{\text{hom}}$ qu'on peut représenter géométriquement dans le plan des déviateurs en introduisant les variables suivantes :

$$S = \frac{\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy}}{\sqrt{2}}; T = \Sigma_{xy} \sqrt{2} \quad (2.35)$$

qui transforment la condition (2.34) en :

$$|S| \leq (1 - \eta) \sqrt{2C^2 - T^2} + \eta \sqrt{2(kC)^2 - T^2} \text{ et } |T| \leq C \sqrt{2} \quad (2.36)$$

Le domaine correspondant est représenté dans la figure 2.3, dans le plan (S, T) , où l'on a posé $\langle C \rangle = (1 - \eta)C + \eta kC$.

2. Sol purement cohérent renforcé par des colonnes à matériau purement cohérent

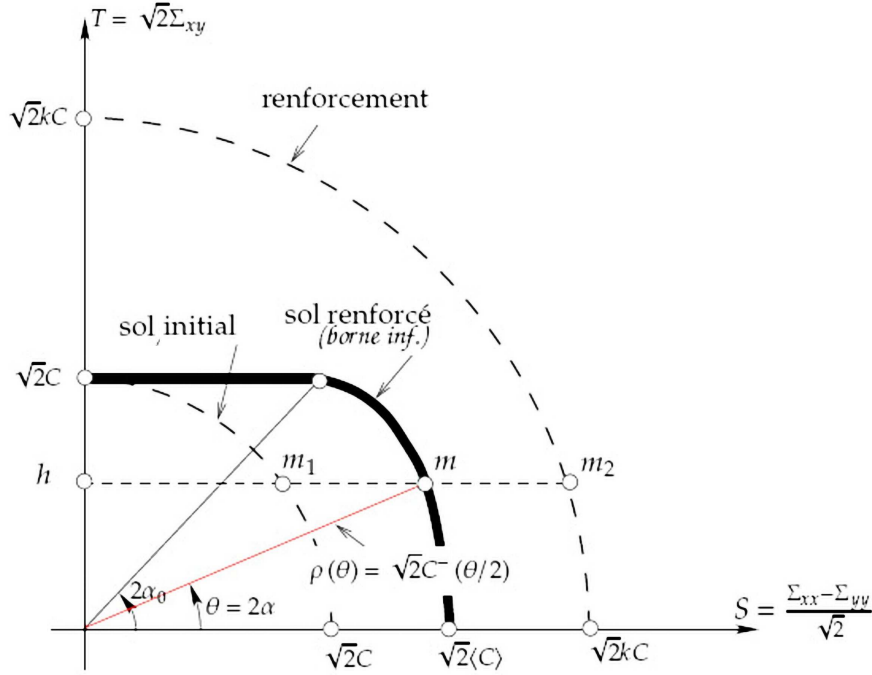


FIG. 2.3: Estimation par défaut du domaine de résistance macroscopique \tilde{G}^{hom}

Cette même figure permet une construction géométrique très simple, de la borne inférieure de \tilde{G}^{hom} : un point m de ce domaine est obtenu à partir de la relation vectorielle

$$\underline{hm} = (1 - \eta) \underline{hm_1} + \eta \underline{hm_2} \quad (2.37)$$

où $h; m_1$ et m_2 sont des points alignés sur une même droite $T = cste$ et situés respectivement sur l'axe vertical, et les cercles de rayons $C\sqrt{2}$ et $kC\sqrt{2}$ représentant respectivement le critère de résistance du sol et de l'inclusion dans le plan déviateur (S, T) . Le point m apparaît comme le barycentre des points m_1 et m_2 affectés des coefficients $1 - \eta$ et η .

Les relations (2.35) s'écrivent :

$$S = \frac{\Sigma_1 - \Sigma_3}{\sqrt{2}} \cos 2\alpha; \quad T = \frac{\Sigma_1 - \Sigma_3}{\sqrt{2}} \sin 2\alpha \quad (2.38)$$

$\Sigma_1 \geq \Sigma_3$ sont les contraintes macroscopiques principales majeure et mineure ($\Sigma_2 = \Sigma_{zz}$ est la contrainte principale intermédiaire), et α est l'angle que la direction de la contrainte principale majeure avec l'axe Ox .

Il découle des relations (2.38) que les coordonnées polaires d'un point $M(S, T)$ sont :

$$\rho = \left[S^2 + T^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\Sigma_1 - \Sigma_3}{\sqrt{2}} \text{ et } \theta = 2\alpha \quad (2.39)$$

de sorte que la condition (2.36) relative à la borne inférieure de domaine de résistance macroscopique s'écrive :

$$\Sigma_1 - \Sigma_3 \leq 2C^-(\alpha) \quad ; \quad \Sigma_1 \geq \Sigma_3 \quad (2.40)$$

où $C^-(\alpha)$ est solution de l'équation implicite suivante (on retrouvera en annexe C.1 une autre façon d'établir cette expression) :

$$C^-(\alpha) \cos 2\alpha = (1 - \eta) \sqrt{C^2 - (C^-(\alpha) \sin 2\alpha)^2} + \eta \sqrt{(kC)^2 - (C^-(\alpha) \sin 2\alpha)^2} \quad (2.41)$$

pour

$$|\alpha| \leq \alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{\eta \sqrt{k^2 - 1}} \right) \quad (2.42)$$

et

$$C^-(\alpha) = \frac{C}{\sin 2\alpha} \text{ autrement} \quad (2.43)$$

$C^-(\alpha)$ peut être interprétée comme une cohésion anisotrope avec les valeurs particulières suivantes :

$$C^-(0) = C^-\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1 - \eta)C + \eta kC = \langle C \rangle \quad (2.44)$$

et

$$C^-\left(\frac{\pi}{4}\right) = C \quad (2.45)$$

Le diagramme polaire correspondant à $C^-(\alpha)$ est donné par la figure 2.4

2.4.2. Borne supérieure :

Une borne supérieure du domaine de résistance macroscopique pour le sol renforcé est obtenue par mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture appliquée à la cellule de base.

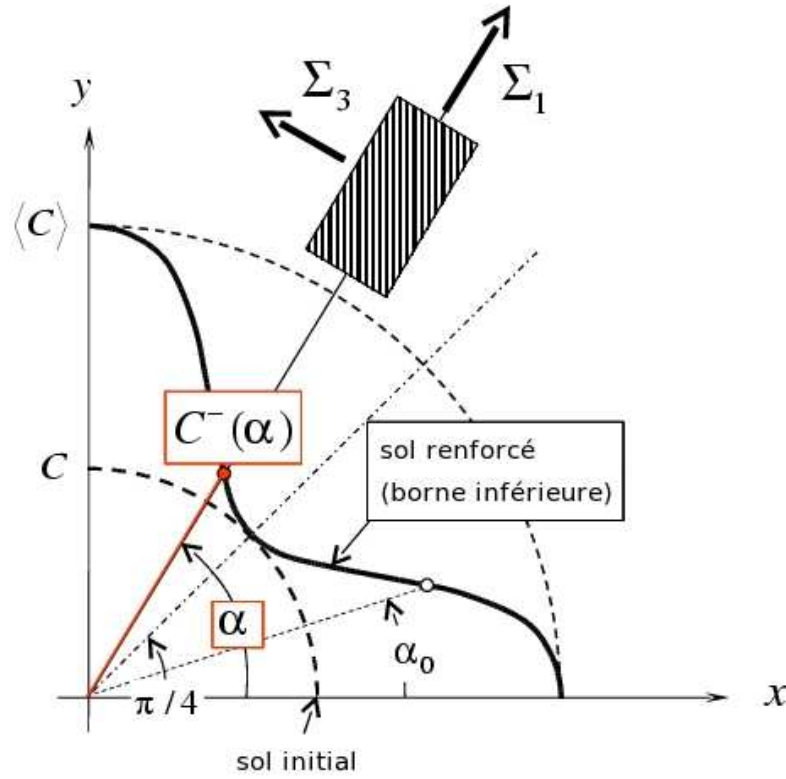


FIG. 2.4: Diagramme polaire de $C^-(\alpha)$

Soit \underline{U} un champ de vitesse virtuelle défini sur la cellule de base \mathbf{C} par

$$\underline{U}(\underline{\xi}) = \underline{F} \cdot \underline{\xi} + \underline{v}(\underline{\xi}) \quad (2.46)$$

où $\underline{v}(\underline{\xi})$ est une fonction périodique de $\underline{\xi}$. L'approche cinématique du calcul à la rupture stipule que tout champ de contrainte macroscopique vérifiant un critère de résistance macroscopique de la forme (2.14) satisfera l'inégalité suivante :

$$F(\underline{\Sigma}) \leq 0 \Rightarrow \forall \underline{U}; \quad \underline{\Sigma} : \underline{D} \leq \langle \pi(\underline{d}) \rangle \quad (2.47)$$

où :

$$\underline{D} = \frac{1}{2} (\underline{F} + {}^t \underline{F}) \quad (2.48)$$

est le tenseur vitesse de déformation macroscopique associé à \underline{U} , tandis que :

$$\langle \pi(\underline{d}) \rangle = \frac{1}{|\mathbf{C}|} \int_{\mathbf{C}} \pi[\underline{d}(\underline{\xi})] d\mathbf{C} \quad (2.49)$$

avec :

$$\underline{d} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{U} + {}^t \underline{\underline{grad}} \underline{U} \right) (\underline{\xi}) \quad (2.50)$$

et :

$$\pi[\underline{d}(\underline{\xi})] = \sup_{\underline{\underline{\sigma}}} \{ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{d}(\underline{\xi}) ; \quad (\sigma_1 - \sigma_3) \leq C \text{ (ou } kC) \} \quad (2.51)$$

Le calcul de la fonction π donne :

$$\pi(\underline{d}) = \begin{cases} C \text{ (ou } kC) (\sum_K |d_K|) & \text{si } \text{tr}(\underline{d}) = 0 \\ +\infty & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.52)$$

où d_K , $K = 1 - 3$, sont les valeurs principales de \underline{d} . $\langle \pi(\underline{d}) \rangle$ est appelée *puissance résistante maximale* développée dans le champ \underline{U} .

2.4.2.1. Première estimation de la borne supérieure

Elle est obtenue en utilisant le champ de vitesse suivant :

$$\underline{U} = \underline{D} \cdot \underline{\xi} \Rightarrow \underline{d}(\underline{\xi}) = \underline{D} \quad (2.53)$$

de sorte que (2.47) se transforme en :

$$F(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \Rightarrow \forall \underline{D}; \quad \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{D} \leq \langle \pi(\underline{d}) \rangle \quad (2.54)$$

avec :

$$\langle \pi(\underline{d}) \rangle = \begin{cases} \langle C \rangle \text{ (ou } kC) (\sum_K |d_K|) & \text{si } \text{tr}(\underline{D}) = 0 \\ +\infty & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.55)$$

2. Sol purement cohérent renforcé par des colonnes à matériau purement cohérent

ceci étant, on réécrit la relation (2.54) :

$$F(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \Rightarrow \forall \underline{\underline{D}}; \quad \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \sup_{\underline{\underline{\xi}}} \{ \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}}(\underline{\underline{\xi}}); \Sigma_1 - \Sigma_3 \leq 2\langle C \rangle \} \quad (2.56)$$

ou encore :

$$F(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \Rightarrow \Sigma_1 - \Sigma_3 \leq 2\langle C \rangle \quad (2.57)$$

Cette dernière implication signifie que la première estimation de la borne supérieure de la capacité portante du sol renforcé, est obtenue à partir de celle d'un matériau isotrope, purement cohérent, de cohésion égale à la moyenne des cohésions du sol initial et des inclusions, affectée de fractions volumiques respectives.

2.4.2.2. Deuxième estimation de la borne supérieure

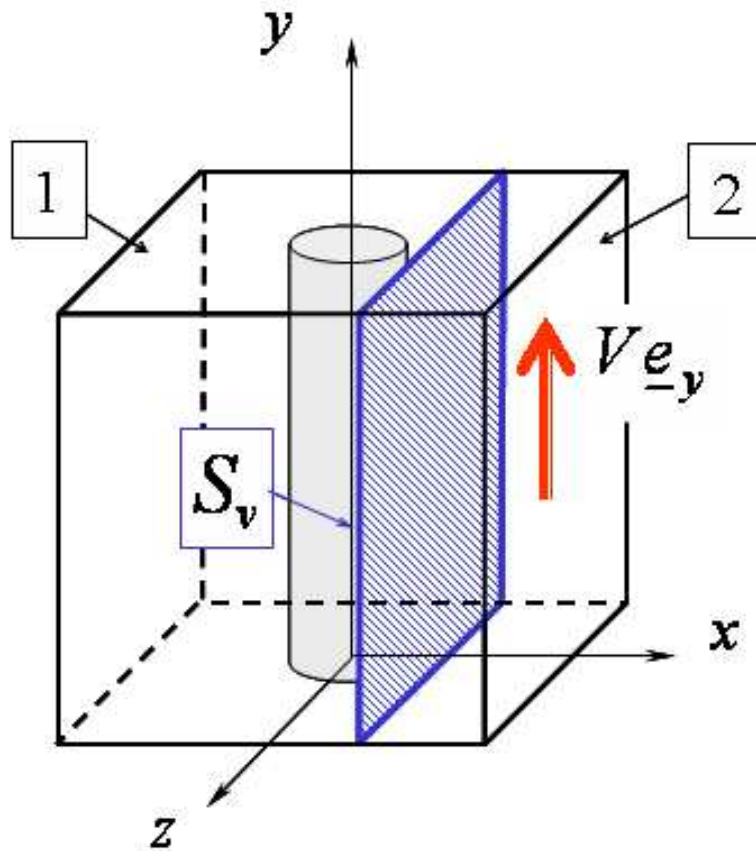


FIG. 2.5: Mécanisme par blocs rigides utilisé pour établir une deuxième estimation de la borne supérieure

On considère maintenant le mécanisme de rupture par blocs rigides illustré sur la figure 2.5 et

défini comme suit :

Le cellule de base est subdivisée en deux blocs parallélépipédiques notés respectivement 1 et 2, séparés par une surface plane S_v , normale à l'axe Ox et localisée dans le sol. Le bloc $N^\circ. 2$ est animé d'une vitesse uniforme $V\mathbf{e}_y$, tandis que le bloc $N^\circ. 1$ est maintenu immobile, de sorte que le saut de vitesse à travers S_v est purement tangentiel. Dans ce cas, le tenseur vitesse de déformation macroscopique est :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{V}{2} (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x) \quad (2.58)$$

dans ce cas, la puissance résistante maximale développée dans un tel champ de vitesse se réduit à la seule contribution de la discontinuité de vitesse le long de S_v :

$$\langle \pi(\underline{\underline{d}}) \rangle = \frac{1}{|\mathbf{C}|} \int_{S_v} C|V|dS = C|V| \quad (2.59)$$

On aura en conséquence :

$$F(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \Rightarrow \forall V; \quad \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = \Sigma_{xy} V \leq C|V| \quad (2.60)$$

ou :

$$F(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \Rightarrow |\Sigma_{xy}| \leq C \Leftrightarrow \Sigma_1 - \Sigma_3 \leq \frac{2C}{\sin 2\alpha} \quad (2.61)$$

2.4.3. Synthèse des résultats

L'estimation des bornes inférieure et supérieure du critère de résistance macroscopique (2.14), développées à partir des approches statique et cinématique du calcul à la rupture, sous l'hypothèse de déformation plane, peut être résumée comme suit :

$$\tilde{\mathbf{G}}^- \subset \tilde{\mathbf{G}}^{\text{hom}} \subset \tilde{\mathbf{G}}^+ \quad (2.62)$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{G}}^- = \{ \underline{\underline{\Sigma}}; \quad \Sigma_1 - \Sigma_3 \leq 2C^-(\alpha) \} \quad (2.63)$$

et :

2. Sol purement cohérent renforcé par des colonnes à matériau purement cohérent

$$\tilde{\mathbf{G}}^+ = \{ \underline{\underline{\Sigma}}; \Sigma_1 - \Sigma_3 \leq 2C^+(\alpha) \} \quad (2.64)$$

Les deux domaines ainsi définis sont représenté sur la figure 2.6 dans le plan (S, T) .

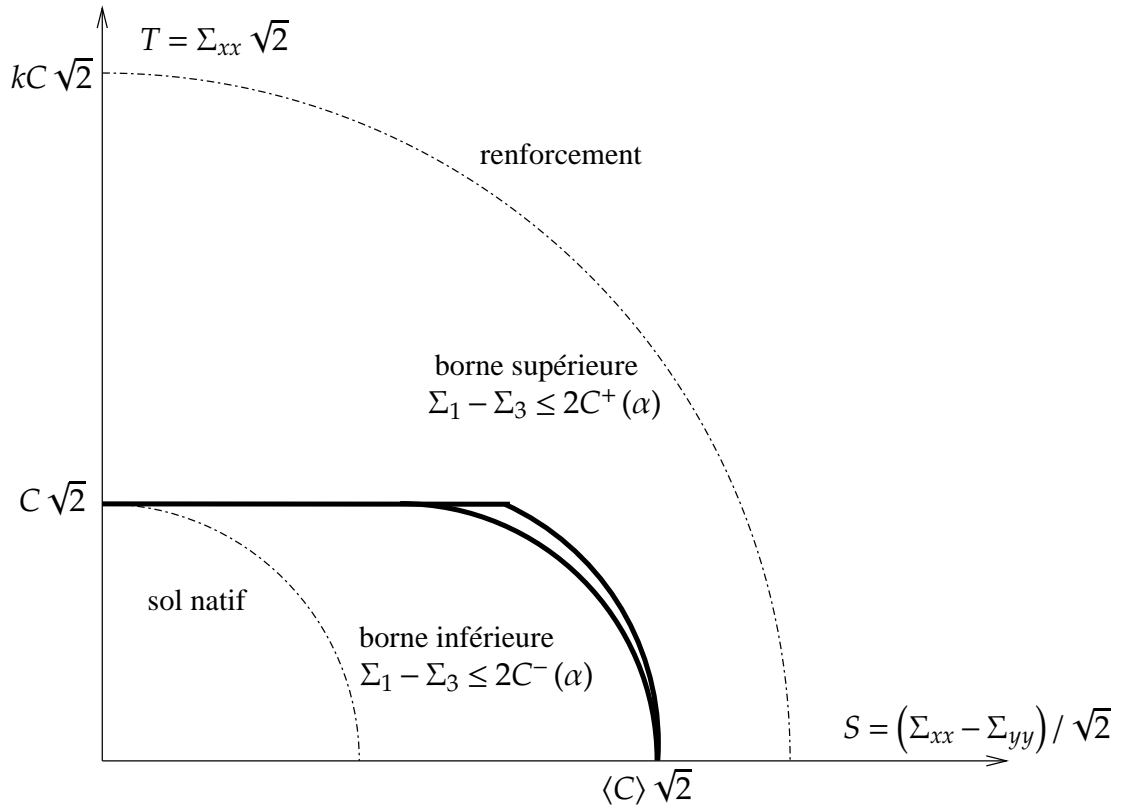


FIG. 2.6: Estimation des bornes inférieure et supérieure du critère de résistance macroscopique du sol renforcé en déformation plane

Pour un facteur de substitution $\eta = 0,15$ et un rapport de cohésions $k = 10$, l'écart relatif maximal entre $C^-(\alpha)$ et $C^+(\alpha)$ est de 12%, produisant ainsi une bonne estimation du critère de résistance macroscopique. Un tel écart devient négligeable pour $k \geq 20$, cas du renforcement par colonnes à la chaux [2]

3. Quelques applications

Sommaire

3.1. Capacité portante d'une semelle filante reposant sur un sol partiellement renforcé	62
3.2. Approche cinématique par les vitesses	62
3.3. Résultats et commentaires	65
3.4. Calcul d'un majorant de la capacité portante ultime une méthode directe . . .	68
3.5. Stabilité d'un remblai reposant sur un sol renforcé	69
3.5.1. Calcul par la méthode d'homogénéisation	70
3.5.2. Puissance virtuelle des efforts extérieurs	74
3.5.3. Obtention d'un majorant du facteur de stabilité :	75
3.5.4. Comparaison avec une méthode directe	78
3.5.5. Un cas particulier	80

3.1. Capacité portante d'une semelle filante reposant sur un sol partiellement renforcé

On se propose d'appliquer les concepts développés dans le chapitre précédent, au calcul de la capacité portante d'une semelle filante de largeur B dans le plan Oxy , reposant sur un sol purement cohérent de cohésion C , renforcé par des colonnes cylindriques, purement cohérentes de cohésion kC , $k \geq 1$. La partie en sol renforcé, de largeur $B_1 = \lambda B$, $\lambda \geq 0$ est symétrique par rapport à l'axe Oxy .

Il a été signalé que la résolution d'un tel problème passe par celle d'un problème en matériau homogène associé tel que montré sur la figure 2.1, peut être traité comme un problème plan de calcul à la rupture, dans lequel la zone en sol renforcé est remplacée par un matériau homogène, dont les capacités de résistance ont déjà été estimées par la méthode d'homogénéisation.

Sachant qu'on peut prouver l'indépendance du chargement ultime Q^* , de la pesanteur [34], le poids volumique des différents constituants de l'ouvrage (sol et colonnes) sera considéré nul dans les développements à suivre.

Procédant à une simple analyse dimensionnelle, il apparaît que le chargement ultime s'écrira sous la forme :

$$Q^* = BCN^*(k, \lambda) \quad (3.1)$$

où N^* est un facteur adimensionnel dépendant des facteurs sans dimension k , $\lambda = B_1/B$, et B_1 désigne la largeur de la zone renforcée qui est supposée suffisamment profonde.

3.2. Approche cinématique par les vitesses

Notre objectif consiste en l'évaluation du facteur N^* , et plus particulièrement à estimer une borne supérieure de ce facteur par application de l'approche cinématique par l'extérieur sur le problème homogénéisé.

Plus précisément, il sera montré que le classique mécanisme de Prandtl qui donne la valeur exacte de $N^* = \pi + 2$ dans le cas d'un matériau non renforcé (sera retrouvé avec $k = 1$ ou $\lambda = 0$), peut être implémenté pour le problème actuel.

Ce mécanisme est illustré sur la figure 3.1. Le bloc triangulaire $A'AI$ localisé sous la fondation, est animé d'un mouvement de bloc rigide caractérisé par la vitesse $-U\mathbf{e}_y$ avec $U \geq 0$, tandis que

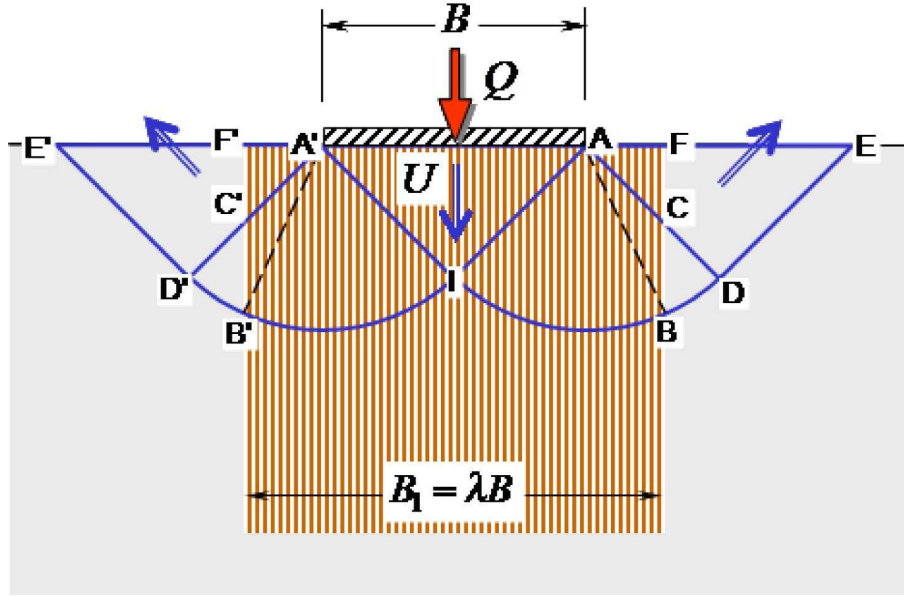


FIG. 3.1: Mécanisme de Prandtl pour le problème homogène associé

les blocs rectangulaires ADE et $A'D'E'$ sont animés d'une même vitesse de module $U \frac{\sqrt{2}}{2}$ mais inclinée de $\pm(\pi/4)$ par rapport à la verticale. Dans les secteurs intermédiaires $A'ID$ et AID , le champ de vitesse est tel que :

$$v_r = 0; \quad v_\theta = U \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3.2)$$

où v_r et v_θ désignent respectivement les composantes radiales et orthoradiale de \underline{v} , avec A ou A' pris comme origine du système de coordonnées.

Alors que la puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit simplement :

$$W_e = QU \quad (3.3)$$

la puissance résistante maximale développée dans ce mécanisme peut être calculée comme suit :

$$W_{mr}(\underline{v}) = W_{mr}^s(\underline{v}) + W_{mr}^{hom}(\underline{v}) \quad (3.4)$$

où $W_{mr}^s(\underline{v})$ et $W_{mr}^{hom}(\underline{v})$ désignent les contributions respectives du sol natif et de la zone renforcée.

La première contribution est calculée de la même manière que pour la solution classique par un mécanisme de Prandtl pour un sol purement cohérent :

3. Quelques applications

$$W_{\text{mr}}^s(\underline{v}) = 2 \left[\int_{BCD} \pi(\underline{d}) dx dy + \int_{BD \cup DE} \pi(\underline{n}; [\underline{v}]) ds \right] \quad (3.5)$$

avec :

$$\pi(\underline{d}) = \sup\{\underline{\Sigma} : \underline{d}; \underline{\Sigma} \in \tilde{G}^{\text{hom}}\} \quad (3.6)$$

et :

$$\pi(\underline{n}; [\underline{v}]) = \sup\{(\underline{\Sigma} \cdot \underline{n}) \cdot [\underline{v}]; \underline{\Sigma} \in \tilde{G}^{\text{hom}}\} \quad (3.7)$$

où \tilde{G}^{hom} est le domaine de résistance macroscopique.

En utilisant maintenant l'estimation par excès \tilde{G}^{hom} du domaine \tilde{G}^{hom} défini par (2.64), la fonction d'appui $\pi(\underline{d})$ est telle que :

$$\pi^{\text{hom}}(\underline{d}) \leq \pi^+(\underline{d}) = \{\underline{\Sigma} : \underline{d}; \Sigma_1 - \Sigma_3 \leq 2C^+(\alpha) = \min\{\frac{2C}{\sin 2\alpha}, 2\langle C \rangle\}\} \quad (3.8)$$

On démontre en annexe01 que l'inégalité (3.8) peut être réécrite sous la forme :

$$\pi^{\text{hom}}(\underline{d}) \leq \pi^+(\underline{d}) = 2d_1 \langle C \rangle \begin{cases} \cos 2(\beta - \beta_0) & \text{si } \sin 2\beta \geq \sin 2\beta_0 \\ 1 & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.9)$$

où d_1 désigne la valeur principale majeure du tenseur \underline{d} , β l'angle que fait la direction de d_1 avec l'axe Ox et β_0 est défini par :

$$\sin 2\beta_0 = \frac{C}{\langle C \rangle} \quad (3.10)$$

Il en découle en particulier, que pour $\beta = \pm(\pi/4)$:

$$\pi^{\text{hom}}(\underline{d}) \leq \pi^+(\underline{d}) = 2d_1 \langle C \rangle \sin 2\beta_0 = 2d_1 C \quad (3.11)$$

Le même type d'inégalité est valide pour la fonction $\pi^{\text{hom}}(\underline{n}; [\underline{v}])$ relative au saut de la vitesse tangentielle, mais où d_1 est à remplacer par $\frac{1}{2}|\underline{v}| = \frac{1}{2}|\underline{V}|$:

$$\pi^{\text{hom}}(\underline{n}; [\underline{v}]) \leq \pi^+(\underline{n}; [\underline{v}]) = \|\underline{v}\| \langle C \rangle \begin{cases} \cos 2(\beta - \beta_0) & \text{si } \sin 2\beta \geq \sin 2\beta_0 \\ 1 & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.12)$$

Mettant en œuvre le mécanisme de Prantl de la figure 3.1 avec $U \geq 0$, le théorème cinématique du calcul à la rupture conduit à une l'estimation d'une borne supérieure du chargement Q^* :

$$W_c = Q^+ U \leq W_{mr}(\underline{v}) = W_{mr}^s(\underline{v}) + W_{mr}^+(\underline{v}) \quad (3.13)$$

ou :

$$Q^* \leq \frac{1}{U} \{W_{mr}^s(\underline{v}) + W_{mr}^+(\underline{v})\} \quad (3.14)$$

avec :

$$W_{mr}^+ = 2 \left[\int_{IACB} \pi^+ \left(\frac{d}{\underline{v}} \right) dx dy + \int_{IBUJA} \pi^{\text{hom}}(\underline{n}; [\underline{v}]) ds \right] \quad (3.15)$$

La dernière quantité peut être calculée analytiquement en utilisant (3.9) et (3.12), fournissant ainsi une estimation de la borne supérieure de Q^* à travers (3.14).

3.3. Résultats et commentaires

Les valeurs particulières suivantes ont été obtenues pour la borne supérieure de $Q^*/BC = N^*$ comme fonction du la largeur relative $\lambda = B_1/B$ de la zone en sol renforcé :

□ $\lambda = 0$ (sol non renforcé)

$$N^* \leq N^+ = (\pi + 2) \quad (3.16)$$

□ $\lambda = 1$

$$N^* \leq N^+ = (1+r) \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{r^2 - 1} - r \arccos \left(\frac{1}{r} \right) \quad (3.17)$$

où $r = \langle C \rangle / C = (1 - \eta) + \eta k$, ($r = 1$ correspond au cas du sol non renforcé).

□ $\lambda = 2$

$$N^* \leq N^+ = 1 + r + 2 \left(\sqrt{r^2 - 1} + r \arcsin \left(\frac{1}{r} \right) \right) \quad (3.18)$$

□ $\lambda \geq 3$

$$N^* \leq N^+ = (\pi + 2)r + 2 \left(\sqrt{r^2 - 1} - r \arccos \left(\frac{1}{r} \right) \right) \quad (3.19)$$

La dernière estimation de la borne supérieure de N^* ($\lambda \geq 3$) a déjà été établie dans les références [6, 7].

Il serait alors intéressant de comparer cette borne à celle obtenue par le même mécanisme de Prantl, mais où le sol renforcé est modélisé comme un sol homogène, isotrope, purement cohérent de cohésion $\langle C \rangle$. En notant ainsi cette borne par N_{iso}^+ :

3. Quelques applications

$$N_{\text{iso}}^+ = (\pi + 2)r \quad (3.20)$$

qui demeure toujours plus grande que N^+ puisque la quantité $(\sqrt{r^2 - 1} - r \arccos(1/r))$ est négative. Cette différence est explicable par le fait qu'en adoptant une cohésion isotrope $\langle C \rangle$ pour le matériau renforcé tend à surestimer les capacités de résistance réelles en laissant tomber le caractère manifestement anisotrope tel que montré sur la figure 2.6, où la courbe en gras qui représente la borne supérieure est totalement à l'intérieur du domaine limité par le cercle de rayon $\sqrt{2}\langle C \rangle$ correspondant au cas d'un matériau avec une cohésion isotrope égale à $\langle C \rangle$.

Plus précisément, il apparaît que l'hypothèse d'une cohésion isotrope pour un sol renforcé est équivalente au calcul direct par l'approche cinématique, de la borne supérieure, en utilisant le mécanisme de Prandtl appliqué au sol composite hétérogène, sans référence, aucune, au concept de l'homogénéisation. En effet, en considérant une surface de discontinuité de vitesse notée Σ , qui sépare la zone déformée AID de la partie fixe du sol renforcé, sa contribution à la puissance résistante maximale (par unité de longueur le long de l'axe Oz) peut être calculée par :

$$W_{\text{mr}}^{\text{dir}}(IB) = \int_{\Sigma^s} C|\underline{v}| \, d\Sigma + \int_{\Sigma^r} kC|\underline{v}| \, d\Sigma = C|\underline{v}|(|\Sigma^s| + k|\Sigma^r|) \quad (3.21)$$

où Σ^s (resp. Σ^r) représente l'intersection de cette surface de discontinuité avec le sol initial (resp. les colonnes). Assumant que l'espacement s entre deux colonnes adjacentes est suffisamment petit en comparaison avec la largeur B de la fondation, il s'en suit finalement :

$$W_{\text{mr}}^{\text{dir}}(IB) \cong C|\underline{v}|((1 - \eta)|\Sigma| + k\eta|\Sigma|) = \langle |\underline{v}| \rangle |\Sigma| \quad (3.22)$$

aboutissant ainsi à la même valeur de la puissance résistante maximale que celle obtenue avec une cohésion isotrope. A titre d'exemple, pour $k = 20$ et $\eta = 0,30$, on obtient $r = 0,67$, et pour $\lambda \geq 3$:

$$N^* \leq N_{\text{hom}}^+ = 28,65 < N_{\text{dir}}^+ = 34,45 \quad (3.23)$$

qui prouve que l'approche cinématique par l'extérieur mise en œuvre dans le cadre de la méthode d'homogénéisation, permet d'améliorer de 17% la borne supérieure obtenue par l'approche directe avec le même mécanisme.

La figure 3.2 affiche une série de courbes donnant une estimation de la borne supérieure pour le facteur N^+ , en fonction de la largeur relative λ de la zone en sol renforcé et ce, pour différentes

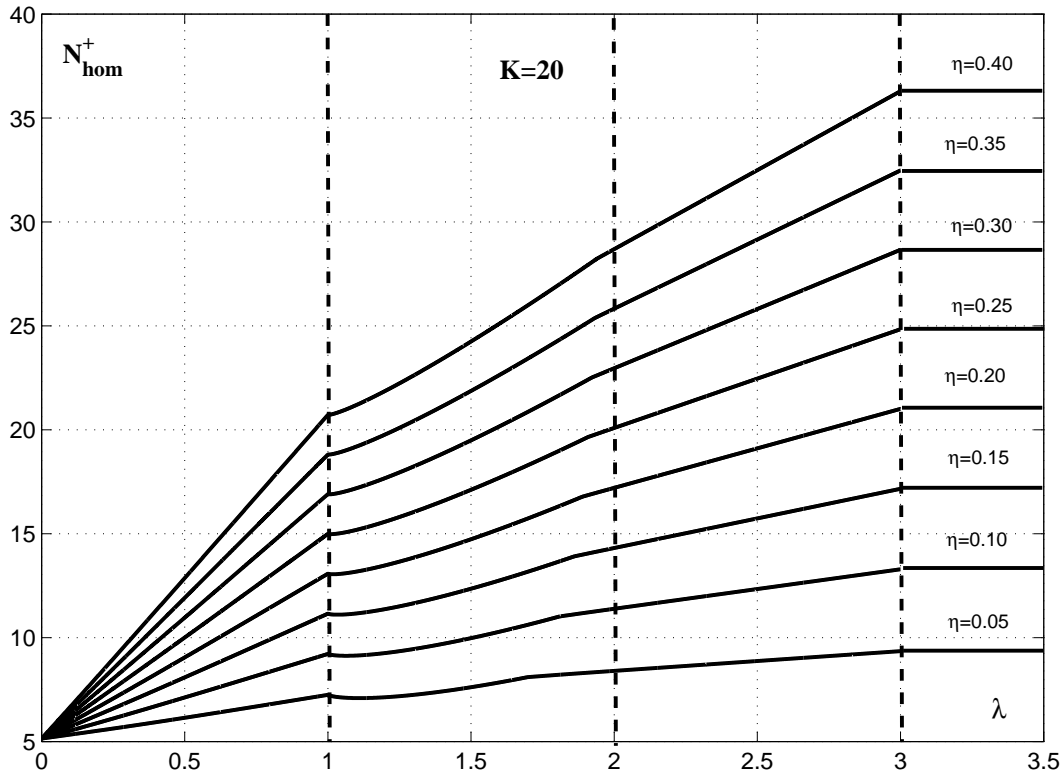


FIG. 3.2: Estimation de la borne supérieure N_{hom}^+ du facteur de capacité portante, en fonction de la largeur relative λ de la zone en sol renforcé, pour différentes valeurs de η ($k = 20$).

valeurs du facteur de substitution η , la cohésion des colonnes de renforcement étant vingt fois plus grande que celle du sol initial ($k = 20$).

Cette figure montre, comme prédit, que la capacité portante estimée est une fonction croissante du facteur λ , avec un maximum constant pour $\lambda \geq 3$ atteint lorsque la largeur de la zone renforcée dépasse celle du mécanisme de Prandtl. Il est à signaler que la tangente à ces courbes accuse une discontinuité pour $\lambda = 1$, tendant vers zéro lorsque λ excède cette valeur particulière. Ceci peut être expliqué par le fait que, pour ce mécanisme particulier, la contribution des éléments de renforcement localisés juste à proximité des bords de la fondation dégénère. Ceci peut être interprété en constatant que, dans ces régions particulières, le mécanisme de Prandtl mobilise la valeur minimale de la cohésion anisotrope du sol renforcé, égale à celle du sol initial.

3.4. Calcul d'un majorant de la capacité portante ultime une méthode directe

Une telle majoration s'obtient simplement en comparant la puissance des forces extérieures obtenue avec le mécanisme de Prandtl décrit précédemment, soit QU , avec la fonctionnelle $P^e(z)$ calculée pour le massif renforcé. Il a été établi dans [7] qu'une telle démarche conduit aux mêmes résultats obtenus pour le cas d'un massif isotrope, mais où la partie en sol renforcé est traitée comme un milieu homogène, de cohésion isotrope égale à $\langle C \rangle$.

La résolution d'un tel problème se fera alors en utilisant directement le théorème cinématique du calcul à la rupture [24].

En étudiant le cas $\lambda \leq 1$ par exemple, un majorant du facteur N^+ est obtenu en posant $\beta_0 = \pi/4$:

$$N^+ = \pi + 2 + (r-1) \left(\lambda + 2\theta_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} (1-\lambda) \ln \left[\frac{\tan\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\theta_0}{2}\right)}{\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)} \right] \right) \quad (3.24)$$

On voit alors que lorsque $\lambda = 0$ (donc $\theta_0 = 0$) ou lorsque $r = 1$, on retrouve le cas d'un sol homogène et isotrope, non renforcé. Alors que pour le cas $\lambda = 1$, correspondant au renforcement de largeur B , on retrouve le résultat $N^+ = (1+r)(1 + \pi/2)$ qui a été établi dans [28].

Pour $\lambda = 1$, la variation du rapport N^+/r est donnée par la courbe 3.3

La figure 3.3 permet de noter que :

□ pour $r = 1$ (sol non renforcé) on retrouve bien la valeur classique :

$$N^+ = \pi + 2$$

□ la majoration obtenue est strictement inférieure à celle que donne la méthode directe, ce qui s'explique par l'anisotropie de la résistance au cisaillement du sol renforcé dont seule la méthode d'homogénéisation en tient compte.

□ le rapport N^+/r décroît en fonction de r , par conséquent le majorant correspondant de la capacité portante, est bien une fonction croissante du coefficient de renforcement r . On remarquera en particulier que pour $\lambda = 1$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N^+}{r} = 2$$

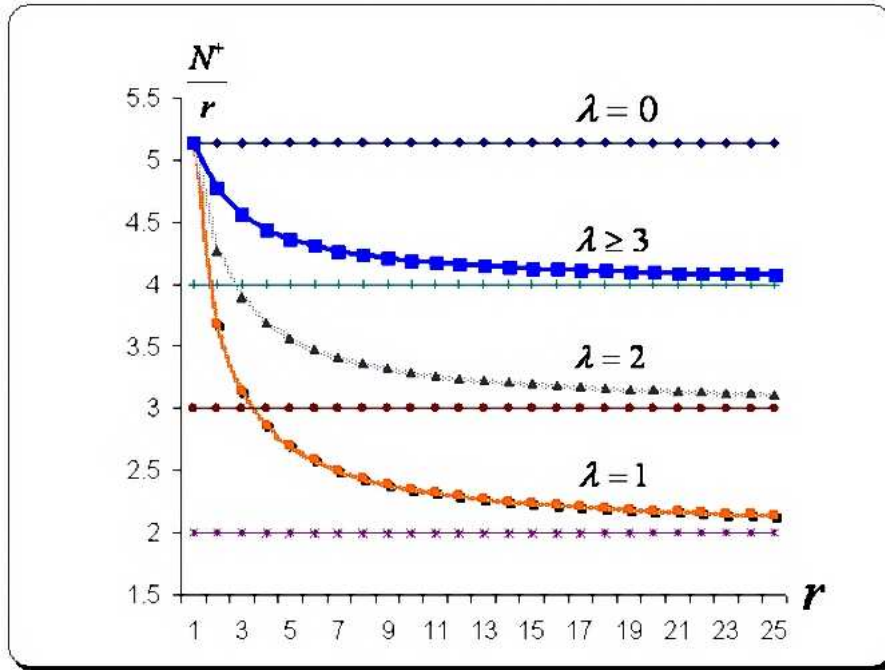


FIG. 3.3: Variation de N^+/r en fonction du facteur de renforcement r .

3.5. Stabilité d'un remblai reposant sur un sol renforcé

On se propose dans cette section de mettre en œuvre la méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture, pour étudier la stabilité d'un remblai.

Le remblai, soumis à son poids propre, constitué d'un matériau pesant, de caractéristiques φ et $C_2 = k_r C$, de pente λ et de hauteur h , repose sur un sol purement cohérent, renforcé par un maillage régulier de colonnes purement cohérentes (figure 3.4). Le renforcement par colonnes est supposé s'étendre à l'infini des deux côtés du remblai.

Un tel problème a fait l'objet de plusieurs contributions, aussi bien pour le cas d'un sol homogène isotrope, que pour le cas d'un sol renforcé. On citera par exemple les travaux de Terzahi relatifs à la stabilité des pentes [26], le cas d'une pente constituée de roches jointives étudié dans [27]. L'essentiel des développements relatifs à ce type de problème est récapitulé dans [13].

Désignant par γ le poids volumique du matériau constitutif du remblai, on sait que la stabilité d'un tel ouvrage est gouvernée par le facteur sans dimension, [23]

$$K = \frac{\gamma h}{C} \quad (3.25)$$

3. Quelques applications

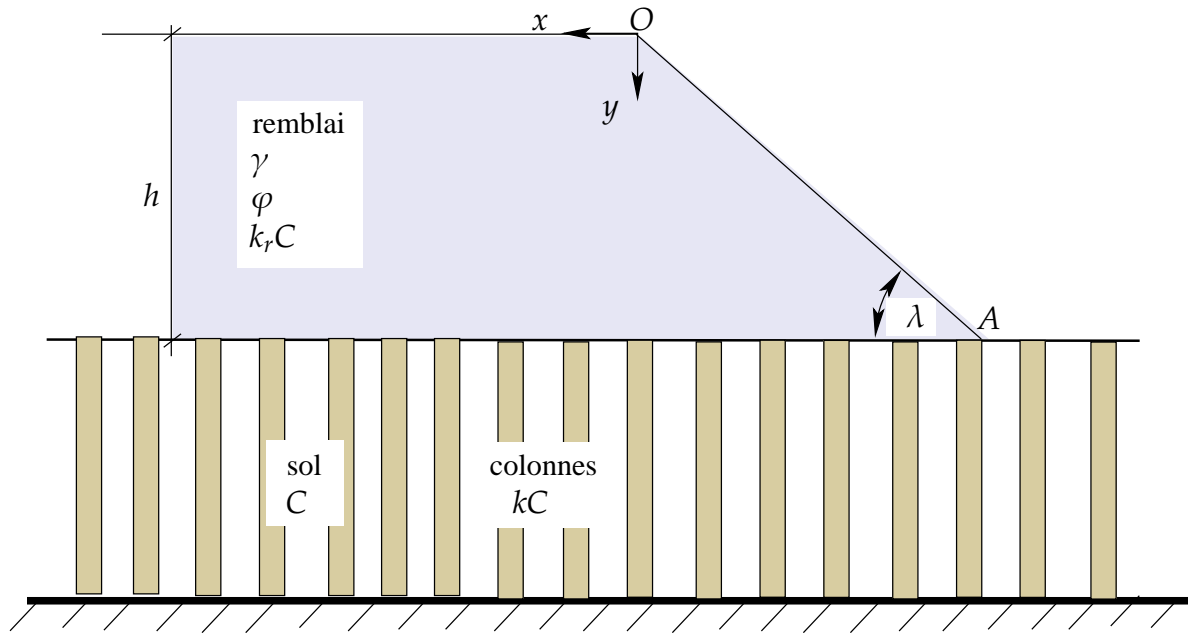


FIG. 3.4: Le problème étudié

qui doit demeurer inférieure à une valeur critique, notée K^* , fonction uniquement de l'angle λ ainsi que des arguments sans dimension η et k :

$$\frac{\gamma h}{C} \leq K^* \iff \text{Talus potentiellement supportable} \quad (3.26)$$

$$K^* = K^*(\eta, \lambda, k) \quad (3.27)$$

3.5.1. Calcul par la méthode d'homogénéisation

L'ouvrage homogène associé au remblai sur sol renforcé est un talus de même géométrie (h, λ) , constitué du même matériau homogène de poids volumique γ , obéissant au même critère de résistance, et reposant sur un sol homogène qui obéit au critère de résistance anisotrope :

$$\Sigma_M - \Sigma_m \leq 2C(\alpha) \quad (3.28)$$

où $\Sigma_M \geq \Sigma_m$ sont les composantes principales de l'état de contrainte macroscopique $\underline{\Sigma}$. Par ailleurs, la cohésion $C(\alpha)$ peut s'écrire sous la forme :

$$C(\alpha) = C \rho(\eta, \lambda, k) \quad (3.29)$$

où ρ est un facteur sans dimension dont on explicite l'expression après résolution de l'équation implicite (2.41).

Compte tenu de l'expression de (3.29), la stabilité du remblai est également conditionnée par le facteur sans dimension $\gamma h/C$. Désignons par K^{hom} la valeur extrême de ce facteur, on peut écrire :

$$\frac{\gamma h}{C} \leq K^*(\eta, \lambda, k, \rho) \quad (3.30)$$

Talus reposant sur sol homogène associé est potentiellement stable

Pour analyser la stabilité de l'ouvrage homogène associé, on fait usage de la méthode cinématique. Elle s'inspire très directement de celle utilisée dans [25].

La fonctionnelle $P^{\text{hom}}(\underline{v})$ calculée dans le champ de vitesse associé à un tel mécanisme s'écrit alors pour le sol homogène associé :

$$P^{\text{hom}}(\underline{n}) = \int_{CD} \pi^{\text{hom}}(\underline{v}, \underline{V}) \, ds \quad (3.31a)$$

$$\text{avec : } \pi^{\text{hom}}(\underline{n}, \underline{V}) = \sup\{-\Sigma_{ij} \cdot n_j \cdot V_i \mid \Sigma_M - \Sigma_m \leq 2C(\alpha)\} \quad (3.31b)$$

Pour que l'approche cinématique qui découle de l'utilisation de tels champs de vitesse ne soit pas triviale, c'est à dire que $P^{\text{hom}}(\underline{v})$ prenne une valeur finie, il est nécessaire dans le cas du critère (3.28), macroscopique du type purement cohérent, que la discontinuité de vitesse \underline{V} soit tangentielle dans le sol, et donc que CD soit une ligne de rupture circulaire. Dans la partie localisée dans le remblai, cette discontinuité doit être déviée d'un angle β tel que $\varphi \leq \beta \leq \pi - \varphi$: en adoptant $\beta = \varphi$, la ligne de discontinuité BC sera un arc de spirale logarithmique.

Dans ces conditions, l'inégalité $P(Q^{\text{hom}}, \underline{v}) \leq P^{\text{hom}}(\underline{v})$ (où Q^{hom} désigne la valeur du chargement extrême) traduisant le théorème cinématique, conduit à un majorant K_c^{hom} du facteur K^{hom} que l'on peut écrire sous la forme :

3. Quelques applications

$$K^{\text{hom}}(\eta, \lambda, k) \leq K_c^{\text{hom}}(\eta, \lambda, k) \quad (3.32)$$

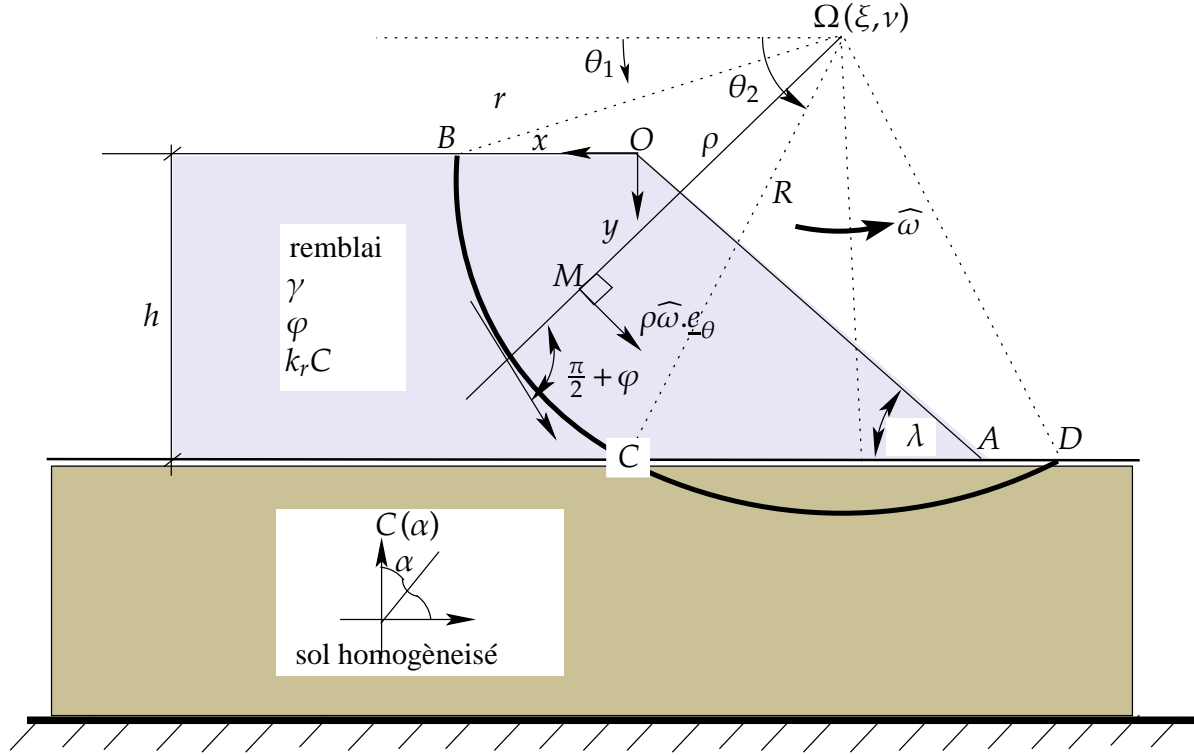


FIG. 3.5: Problème homogène associé : mécanisme de rupture par "blocs" en rotation

3.5.1.1. Calcul de la puissance des efforts extérieurs $P(Q^{\text{hom}}, \underline{v})$

Le bloc $OADC$ est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire $\widehat{\omega}$ autour du centre $\Omega(\xi, \nu)$, de sorte que la vitesse $\underline{v}(M)$ d'un point $M(x, y)$ appartenant au bloc $OABCD$ s'écrit :

$$\underline{v}(M) = \underline{v}(\Omega) + \widehat{\omega} \wedge \underline{\Omega M} = \widehat{\omega} [-(y - \nu) \cdot \underline{e}_x + (x - \xi) \cdot \underline{e}_y] \quad (3.33)$$

Le poids propre du remblai étant l'unique paramètre de chargement, la puissance des efforts extérieurs $P(Q^{\text{hom}}, \underline{v})$ dans le mouvement de rotation du bloc rigide $OABC$ autour de Ω s'écrit alors :

$$P(Q^{\text{hom}}, \underline{v}) = \int_{\Omega=OABC} (\underline{\gamma} \cdot \underline{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \gamma \widehat{\omega} (x - \xi) d\Omega = \int_{s=\partial\Omega} \gamma y (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds \quad (3.34)$$

et ce en vertu du théorème de la divergence ; \underline{n} désigne la normale unitaire sortante au contour du domaine $OABC$.

3.5.1.2. Calcul de la puissance résistante maximale $P^{\text{hom}}(\underline{v})$

S'agissant d'un mécanisme de rupture "par blocs" en rotation, la puissance résistante maximale se réduit à la contribution de la discontinuité de vitesse sur la surface BCD . Rappelons dans ce cas, que la fonction d'appui est fournie par l'expression (3.12)

Dans le remblai : La ligne (surface) de discontinuité BC est un arc de spirale logarithmique d'équation $\rho(\theta) = \rho_1 \exp[(\theta - \theta_1) \tan \varphi]$ dans le système de coordonnées polaires (Ω, ρ, θ) où $r \leq \rho R$. La fonction d'appui sera $\pi(\underline{n}; \underline{V}) = C_2 \widehat{\omega} \rho(\theta) \cos \varphi$.

Le calcul de la puissance résistante maximale sur la ligne de discontinuité BC conduit à :

$$\int_{CB} \pi(\underline{n}; \underline{V}) ds = \frac{1}{2} k_r C \cot \varphi r^2 \widehat{\omega} \{ \exp [2(\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi] - 1 \} \quad (3.35)$$

Dans le sol : La ligne de discontinuité DC est un arc de cercle. La fonction d'appui sera $\pi(\underline{n}; \underline{V}) = \frac{1}{2} \widehat{\omega} \rho_1 \exp [2(\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi] \pi(\theta - \frac{\pi}{4})$.

Grâce aux résultats établis au deuxième chapitre, le calcul de la puissance résistante maximale sur la ligne de discontinuité conduit à :

$$\int_{DC} \pi(\underline{n}; \underline{V}) ds = 2R^2 \widehat{\omega} \int_{\frac{\pi}{4} - \theta_2}^{\frac{\pi}{4}} \pi(\beta) d\beta \quad (3.36)$$

Le calcul de l'intégrale (3.5.1) nécessite d'envisager différents cas selon le signe de $(\pi/4 - \theta_2)$:

3. Quelques applications

□ si $\theta_2 - \frac{\pi}{4} \leq 0$, on aura :

$$P_{rm}(DC) = R^2 \langle C \rangle \widehat{\omega} \begin{cases} 4\beta_0 + \cos 2\beta_0 + \cos(2\theta_2 + 2\beta_0) & \text{si } \beta_0 \leq \frac{\pi}{4} - \theta_2 \\ \frac{\pi}{2} - 2\theta_2 + 2\beta_0 + \cos 2\beta_0 & \text{si } \beta_0 \geq \frac{\pi}{4} - \theta_2 \end{cases} \quad (3.37)$$

□ si $\theta_2 - \frac{\pi}{4} \geq 0$, on aura :

$$P_{rm}(DC) = R^2 \langle C \rangle \widehat{\omega} \begin{cases} \cos 2\beta_0 + \cos(2\theta_2 - 2\beta_0) & \text{si } \beta_0 \leq \theta_2 - \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} - 2\theta_2 + 2\beta_0 + \cos 2\beta_0 & \text{si } \beta_0 \geq \theta_2 - \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (3.38)$$

On rappellera à cet effet que :

$$\langle C \rangle = (1 - \eta)C + \eta k^c C; \quad r = \frac{\langle C \rangle}{C}; \quad \beta_0 = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{r}\right)$$

La puissance résistante maximale totale sera alors la somme de (3.35) et (3.37) ou (3.38).

3.5.2. Puissance virtuelle des efforts extérieurs

Les efforts extérieurs se réduisent à l'effet de la pesanteur $\underline{\gamma} = \gamma \underline{e}_y$ dans le remblai. Le calcul de la puissance virtuelle des efforts extérieurs se fera par usage de la formule (3.34). On posera dans la suite pour un paramètre p , $\bar{p} = p/h$:

□ sur OB : on a $y = 0$, et l'intégrale sur OB sera alors, tout simplement nulle.

□ sur AO : on a $\underline{n} = -\sin \lambda \underline{e}_x - \cos \lambda \underline{e}_y$ et $\underline{n} \cdot \underline{v} = -\widehat{\omega}(x - \xi) \cos \alpha + \widehat{\omega}(y - v) \sin \alpha$. En utilisant une intégration par parties et en remarquant que $dy = -ds \sin \lambda$ et $dx = ds \cos \lambda$; on obtiendra :

$$\int_{AO} \gamma y (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds = \frac{1}{2} \gamma \widehat{\omega} h^3 \left(\frac{2}{3 \sin^2 \lambda} + \bar{\xi} \cot \lambda + \bar{r} \sin \theta_1 \right) \quad (3.39)$$

□ sur CA : on a $\underline{n} = \underline{e}_y$ et $\underline{n} \cdot \underline{v} = \widehat{\omega}(x - \xi)$ avec $y = h$. Dans ce cas :

$$\int_{CA} \gamma y (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds = \frac{1}{2} \gamma \widehat{\omega} h^3 \left[\bar{r}^2 \cos^2 \theta_2 \exp[2(\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi] - (\bar{\xi} + \cot \lambda)^2 \right] \quad (3.40)$$

□ sur BC : il s'agit d'un arc de spirale logarithmique de foyer Ω , et d'équation $\rho(\theta) = r \exp[(\theta - \theta_1) \tan \varphi]$ avec $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, et de normale unitaire sortante $\underline{n} = \cos \varphi \underline{e}_\rho - \sin \varphi \underline{e}_\theta$; soit $\underline{n} \cdot \underline{v} = -\rho(\theta) \widehat{\omega} \sin \varphi$.

Sur la courbe BC , les relations suivantes sont vérifiées :

$$dx = -\frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin \varphi} d\rho \quad (3.41a)$$

$$dy = \frac{\cos(\theta - \varphi)}{\sin \varphi} d\rho \quad (3.41b)$$

$$ds = -\frac{d\rho}{\sin \varphi} = \frac{\rho}{\cos \varphi} d\theta \quad (3.41c)$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs se calcule par exemple, en intégrant par parties, par rapport à ρ la quantité :

$$\int_{BC} \gamma y(\underline{v}, \underline{n}) ds = -\gamma \widehat{\omega} \int_r^R y \rho d\rho \quad (3.42)$$

En intégrant ensuite par rapport à θ , l'expression (3.42) se transforme en posant $f(x) = 2 \exp[3(x - \theta_1) \tan \varphi] (3 \sin x \tan \varphi - \cos x)$

$$\int_{BC} \gamma y(\underline{v}, \underline{n}) ds = \frac{1}{2} \gamma \widehat{\omega} h^3 r^3 \left(\sin \theta_1 (\exp[2(\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi] - 1) - \frac{f(\theta_2) - f(\theta_1)}{1 + 9 \tan^2 \varphi} \tan \varphi \right) \quad (3.43)$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs sera la somme de (3.39), (3.40) et (3.43).

3.5.3. Obtention d'un majorant du facteur de stabilité :

Une relation évidente, reliant h à R est (figure 3.5) :

$$-\sin \theta_1 + \sin \theta_2 \exp[(\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi] = \frac{h}{r} = \frac{1}{\bar{r}} \quad (3.44)$$

On a par ailleurs :

$$R = r \exp[(\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi]; \quad v = -r \sin \theta_1 \quad (3.45)$$

Parmi les classes de mécanisme de rupture possibles, on étudie celui présenté sur la figure 3.5

3. Quelques applications

où l'on doit vérifier :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.46a)$$

$$0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.46b)$$

$$\theta_1 \leq \theta_2 \quad (3.46c)$$

$$\bar{\xi} + \bar{r} \cos \theta_1 \geq 0 \quad \text{obtenue par} \quad x_B \geq 0 \quad (3.46d)$$

$$\bar{\xi} + \bar{R} \cos \theta_2 + \cot \lambda \geq 0 \quad \text{obtenue par} \quad x_A - x_C \leq 0 \quad (3.46e)$$

$$\bar{\xi} - \bar{R} \cos \theta_2 + \cot \lambda \leq 0 \quad \text{obtenue par} \quad x_A - x_D \geq 0 \quad (3.46f)$$

$$\bar{r} \cos \theta_1 - \bar{R} \cos \theta_2 \geq 0 \quad \text{obtenue par} \quad x_B - x_C \geq 0 \quad (3.46g)$$

La condition (3.46b) garantit en particulier l'existence du point Ω au dessus du sol alors que la condition (3.46c) garantit l'existence de ce point dans le demi-plan supérieur à la médiane des points B et C , et d'assurer par conséquent $R \geq r$. Si on convient d'écrire :

$$P_{rm}(\underline{v}) = C h^2 \widehat{\omega} \Theta(\bar{\xi}, \theta_1, \theta_2) \quad \text{et} \quad \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v}) = h^3 \widehat{\omega} \gamma \Phi(\bar{\xi}, \theta_1, \theta_2) \quad (3.47)$$

l'approche cinématique du calcul à la rupture fournit une condition nécessaire de stabilité du remblai en écrivant que, dans le champ de vitesse virtuel précédent, la puissance des efforts extérieurs doit être inférieure à la puissance résistante maximale :

$$\left(\frac{\gamma h}{C} \right)^* \leq \frac{\Theta(\xi; \theta_1; \theta_2)}{\Phi(\xi; \theta_1; \theta_2)} \quad (3.48)$$

Il y a lieu de minimiser la quantité de droite de l'inégalité (3.48) par rapport aux angles θ_1 , θ_2 et de \bar{v} , en tenant compte des relations (3.44) à (3.46g) qui sont en fait les contraintes du problème. La détermination d'un majorant de $\left(\frac{\gamma h}{C} \right)^*$ se ramène à la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} K^{\text{hom}} = \min\left\{\frac{\Theta(\bar{\xi};\theta_1;\theta_2)}{\Phi(\bar{\xi};\theta_1;\theta_2)}\right\} \\ g_1 : \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ g_2 : \quad 0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \\ g_3 : \quad \theta_1 \leq \theta_2 \\ g_4 : \quad \bar{\xi} + \bar{r} \cos \theta_1 \geq 0 \\ g_5 : \quad \bar{\xi} + \bar{R} \cos \theta_2 + \cot \alpha \geq 0 \\ g_6 : \quad \bar{\xi} - \bar{R} \cos \theta_2 + \cot \alpha \leq 0 \\ g_7 : \quad \bar{r} \cos \theta_1 - \bar{R} \cos \theta_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.49)$$

C'est un problème d'optimisation avec contraintes non linéaires. L'expression complexe de la fonction objective (le facteur de stabilité) rend non envisageable la résolution analytique de ce problème car elle suppose tout d'abord que nous sachions résoudre le système d'équations obtenues en annulant les dérivées premières de la fonction objective K^{hom} , par rapport aux variables de décision $(\theta_1, \theta_2, \bar{\xi})$. En outre, il est possible que la solution optimale se trouve sur le bord du domaine admissible, sans correspondre pour autant à un point où les dérivées premières de la fonction objective s'annulent. Il est plus raisonnable d'essayer de résoudre le problème (3.49) par voie numérique.

On peut traiter le problème (3.49) en recherchant le minimum par une "technique de grille" consistant à balayer systématiquement le domaine de variation dans R^3 des variables de minimisation, et ne retenir que le plus petit des minimums. Cette méthode a été utilisée dans [14] pour améliorer la borne supérieure du facteur de stabilité d'un talus vertical en milieu non renforcé.

Une autre possibilité pour résoudre ce problème est d'utiliser des algorithmes d'optimisation globale tels que le solveur "LGO" dont une version commerciale est disponible pour "EXCEL", ou encore "What's Best" qui fonctionne lui aussi sous "EXCEL". Ces deux solveurs puissants n'ont pas permis de résoudre dans leurs versions limitées, le présent problème.

Une autre alternative consiste à mettre en œuvre la macro **E04UCF** de la bibliothèque scientifique *NAG Foundation Toolbox for MATLAB* [18]. Il s'agit d'une routine de minimisation avec contraintes non linéaires d'une fonction à plusieurs variables. Il est toléré pour celles-ci d'avoir des dérivées premières et secondes discontinues (le jacobien et le hessien sont calculés par différences finies). Cette routine restitue un minimum local de la fonction objective. Moyennant un choix judicieux du point initial qu'on doit fournir lors de l'initialisation, ce minimum peut être en fait le minimum global recherché. Un tel choix se fait à l'aide d'une opération préalable qui consiste à calculer les valeurs de la fonction à minimiser, aux nœuds d'un quadrillage du

3. Quelques applications

domaine admissible des variables θ_1 , θ_2 et $\bar{\xi}$ et n'en retenir que ceux fournissant la plus petite valeur de la fonction à minimiser.

Il est à remarquer que la puissance résistante maximale est indépendante de la variable $\bar{\xi}$. Le dénominateur de l'expression (3.48) indique, à un facteur multiplicatif près, que la puissance des efforts extérieurs est maximale lorsque $\bar{\xi} = -0,5 \cot \lambda$. Ceci implique que le point ω est nécessairement situé sur la demi-droite verticale passant par le milieu de OA . Il est clair que les points de cette demi-droite appartiennent au domaine admissible des variables, puisqu'on peut toujours imaginer et construire des mécanismes de rupture respectant les conditions sur θ_1 et θ_2 .

Ceci étant, on est ramené à résoudre le problème d'optimisation suivant qui ne fait intervenir que deux variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} K^{\text{hom}} = \min\left\{\frac{\Theta(\theta_1;\theta_2)}{\Phi(\theta_1;\theta_2)}\right\} \\ g_1 : \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ g_2 : \quad 0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \\ g_3 : \quad \theta_1 \leq \theta_2 \\ g_4 : \quad \exp[(\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi] \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \leq 0 \\ g_5 : \quad \frac{1}{2} \cot \alpha - \bar{R} \cos \theta_2 \leq 0 \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Les résultats de minimisation sont reportés sur la figure 3.6, pour $\alpha = 45^\circ$ et des angles φ variant de 25° à 35° , et pour des facteurs de renforcement $1 \leq r \leq 8$.

3.5.4. Comparaison avec une méthode directe

On traite, maintenant, le même problème du remblai mais reposant sur un sol homogène, isotrope de cohésion $\langle c \rangle$.

Dans ce cas, les calculs de la puissance virtuelle des efforts extérieurs ne sont pas affectés, il en est de même pour la puissance résistante maximale dans le remblai.

La puissance résistante maximale dans le sol devient alors :

$$P_{rm}(DC) = R^2 \widehat{\omega}(C) (\pi - 2\theta_2) \quad (3.51)$$

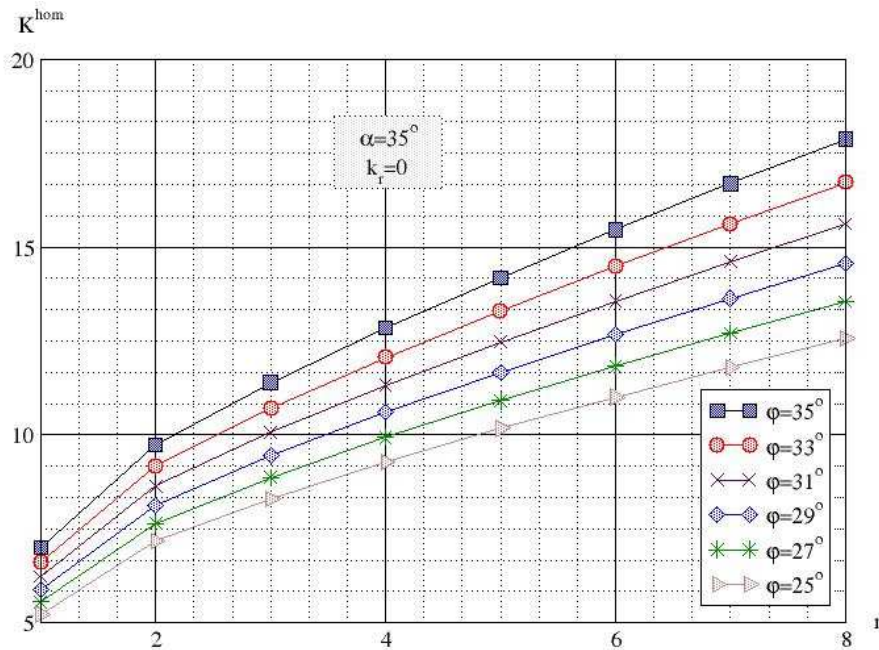


FIG. 3.6: Variation de facteur de stabilité K^{hom} en fonction de l'angle de frottement φ et du facteur de renforcement r pour $k_r = 0$ et $\alpha = 35^\circ$.

Pour un remblai purement frottant, la puissance résistante maximale sera multiple du facteur de renforcement $\langle C \rangle / C$. Il s'en suit que le facteur de stabilité du matériau renforcé, supposé isotrope de cohésion $\langle C \rangle$, sera égal à celui d'un sol non renforcé, multiplié par $\langle C \rangle / C$.

Pour un remblai d'angle au pied $\lambda = 45^\circ$ et purement frottant, d'angle de frottement $\varphi = 25^\circ$, reposant sur un sol non renforcé, on obtiendra avec le mécanisme utilisé :

$$\left(\frac{\gamma h}{C}\right)^{\text{hom}} = 5,234$$

Pour un coefficient de renforcement $r = 5$, un majorant du facteur de stabilité par la méthode d'homogénéisation est égal à 10,172 alors que ce majorant serait de 26,169 pour une méthode directe considérant le sol renforcé comme homogène isotrope de cohésion égale à $\langle C \rangle$.

L'écart important qu'on peut observer entre les résultats d'un calcul direct et ceux issus de la méthode d'homogénéisation, indique clairement que l'évaluation par excès de la hauteur "critique" du talus sur sol renforcé, obtenue par les méthodes directes (autres que celle des cercles de glissement puisqu'elle est totalement inopérante dans le présent cas) peut être largement supérieure à la valeur exacte de cette hauteur. Il peut dès lors en résulter une surestimation dangereuse des conditions réelles de stabilité de l'ouvrage.

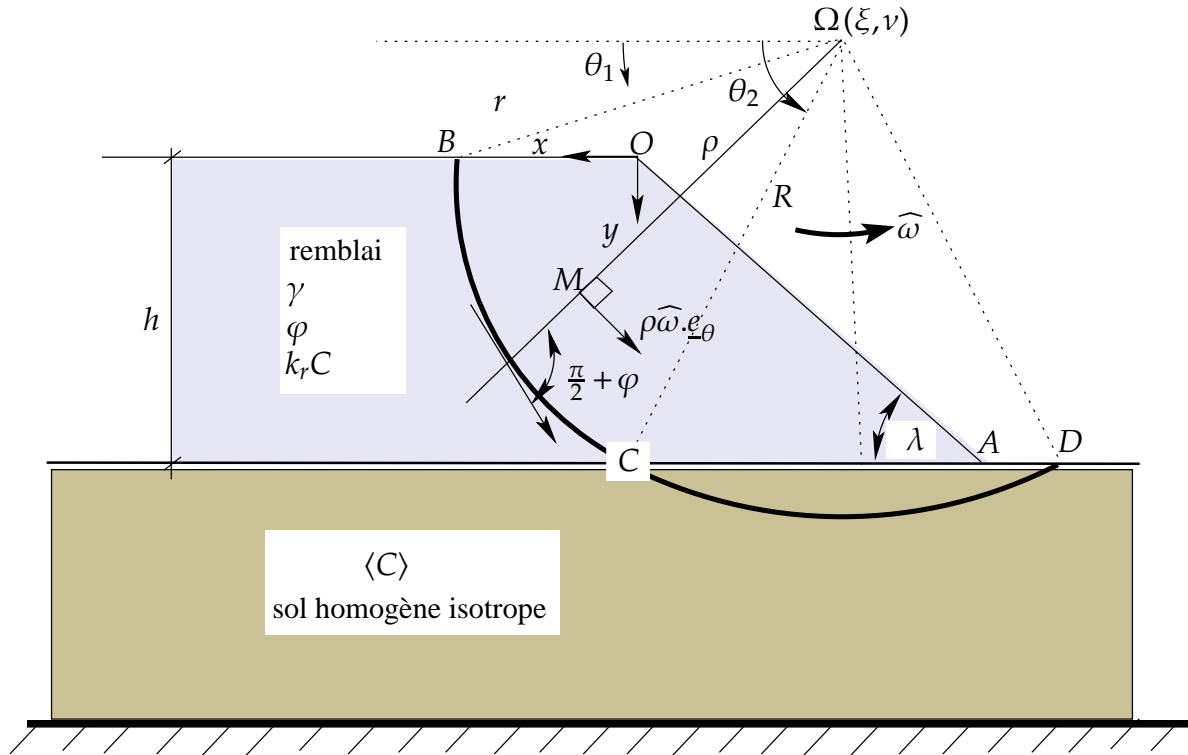


FIG. 3.7: Problème traité par une méthode directe : mécanisme de rupture par "blocs" en rotation

3.5.5. Un cas particulier

Le cas particulier d'un mécanisme de rupture passant par le pied d'un talus homogène et ne concernant que le remblai, peut bien évidemment être déduit à partir des calculs précédents.

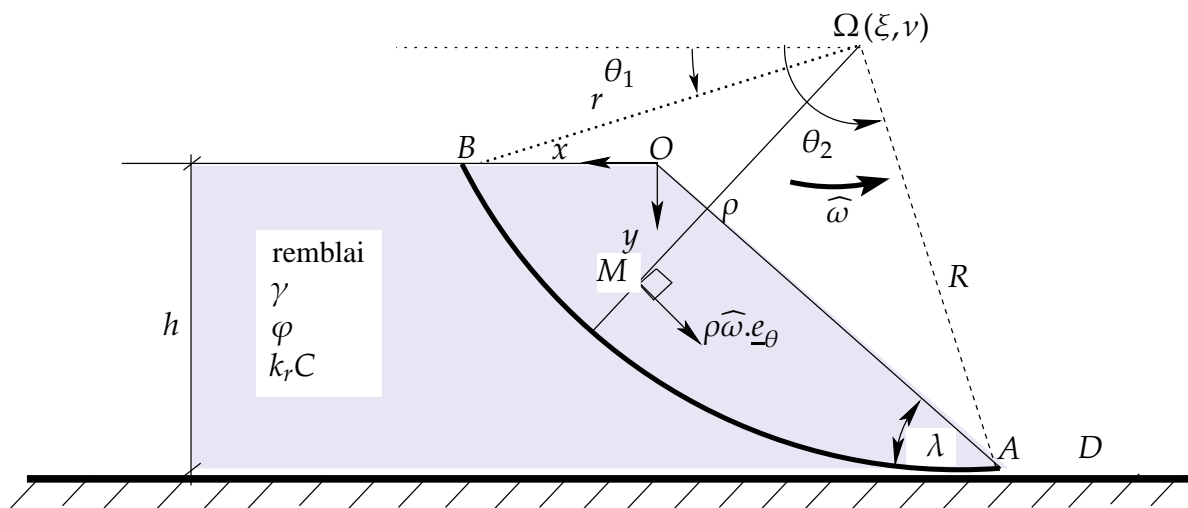


FIG. 3.8: Cas d'un mécanisme de rupture passant par le pied du talus

La puissance virtuelle des efforts extérieurs est la somme des intégrales de contour sur OB , BC et AO (celle de CA n'a pas lieu d'être prise en compte). La puissance résistante maximale se réduit à la contribution de la discontinuité de vitesse le long de BC (qui sera nulle en l'absence de cohésion).

Ceci étant, le raisonnement sera le même que celui fait dans les paragraphes précédents mais où $\bar{\xi} = -\cot \lambda - \bar{R} \cos \theta_2$. En outre, l'angle θ_2 peut varier, dans ce cas, jusqu'à π avec la condition $\bar{\xi} + \bar{r} \cos \theta_1 \geq 0$. On obtient pour $\lambda = 90^\circ$ et $\varphi = 0^\circ$ la valeur classique 3,831 établie dans [16] et améliorée ensuite à 3,817 [14].

4. Sol purement cohérent renforcé par colonnes cohérentes et frottantes

Sommaire

4.1. Introduction	84
4.2. Approche par un champ constant du critère macroscopique en déformation plane	84
4.3. Détermination d'une borne inférieure du critère de résistance macroscopique	88
4.4. Un critère simplifié : linéarisation par l'intérieur	90
4.5. Amélioration de la borne inférieure du critère de résistance macroscopique .	91
4.6. Le critère de résistance macroscopique linéarisé	95
4.7. Application au calcul de la capacité portante d'une fondation : approche statique	96
4.7.1. Champ de contraintes à trois zones	96
4.7.2. Champ de contraintes à six zones	98
4.8. Synthèse des résultats et conclusion	101

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, on aborde la détermination de la capacité portante d'un sol purement cohérent, à l'instar d'une argile molle, renforcé par un matériau cohérent et frottant constitutif des colonnes, qui peut être du sable ou du ballast (gravier, tout-venant). Ce cas de renforcement étant très courant en pratique.

En vue de déterminer, pour ce cas de renforcement, la capacité portante d'un sol renforcé par un groupe de colonnes avec la méthode d'homogénéisation on suivra la même démarche utilisée lors de l'étude du renforcement par des matériaux purement cohérents détaillée au chapitre 2. En premier lieu, on aborde la détermination du critère de résistance macroscopique en utilisant l'approche par l'intérieur du calcul à la rupture. Ensuite, on met de nouveau en œuvre, sur l'ouvrage renforcé homogénéisé, l'approche par l'intérieur du calcul à la rupture pour déterminer la meilleure borne inférieure de la capacité portante recherchée.

Une comparaison des résultats ici établis avec ceux des méthodes directes, permettra de ressortir l'avantage de recourir à la méthode d'homogénéisation. Pour cette dernière, on termine par expliquer les difficultés rencontrées en vue d'établir une borne supérieure du critère de résistance macroscopique et par suite, un majorant de la capacité portante du sol renforcé étudié dans le présent chapitre.

4.2. Approche par un champ constant du critère macroscopique en déformation plane

Soit un sol purement cohérent, de cohésion C , renforcé par un matériau de cohésion kC , et d'angle de frottement interne φ . Le matériau de renforcement occupe une proportion volumique η de la masse du sol initial.

La cellule de base étant supposée le siège d'un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ constant par morceaux, tel que :

□ dans le sol :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} & 0 \\ \Sigma_{xy} & \sigma_{yy}^s & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

4.2. Approche par un champ constant du critère macroscopique en déformation plane

□ dans la colonne :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} & 0 \\ \Sigma_{xy} & \sigma_{yy}^r & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Un champ de contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ en équilibre avec $\underline{\underline{\sigma}}$ (champ microscopique défini sur la cellule de base), est choisi sous la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} & 0 \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

avec :

$$\Sigma_{yy} = (1 - \eta)\sigma_{yy}^s + \eta\sigma_{yy}^r \quad (4.4)$$

Il est possible de montrer que l'on peut toujours choisir le champ de contrainte ainsi défini de façon à ce que la contrainte Σ_{zz} soit la contrainte principale intermédiaire, en tout point du sol renforcé.

On se trouve ainsi amené à l'étude d'un problème en déformation plane dans (Oxy) . La vérification des critères de résistance conduit à :

□ dans le sol :

$$\sqrt{(\Sigma_{xx} - \sigma_{yy}^s)^2 + 4\Sigma_{xy}^2} \leq 2C \quad (4.5)$$

□ dans la colonne :

$$(\Sigma_{xx} + \sigma_{yy}^r) \sin \varphi + \sqrt{(\Sigma_{xx} - \sigma_{yy}^r)^2 + 4\Sigma_{xy}^2} \leq 2kC \cos \varphi \quad (4.6)$$

En tenant compte de (4.4), qu'on substitue dans (4.5) et (4.6) on obtient :

□ dans le sol initial :

$$\Sigma_{xx} - 2\sqrt{(C^2 - \Sigma_{xy}^2)} \leq \sigma_{yy}^s \leq \Sigma_{xx} + 2\sqrt{(C^2 - \Sigma_{xy}^2)} \quad (4.7)$$

Cette expression ne sera définie que pour :

$$|\Sigma_{xy}| \leq C \quad (4.8)$$

□ dans la colonne :

4. Sol purement cohérent renforcé par colonnes cohérentes et frottantes

$$\begin{aligned} \Sigma_{xx} (1 + 2 \tan^2 \varphi) - 2kC \tan \varphi - \sqrt{\left(2 \frac{kC}{\cos \varphi} - 2 \Sigma_{xx} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}\right)^2 - \left(2 \frac{\Sigma_{xy}}{\cos \varphi}\right)^2} \leq \\ \sigma_{yy}^r \leq \Sigma_{xx} (1 + 2 \tan^2 \varphi) - 2kC \tan \varphi + \sqrt{\left(2 \frac{kC}{\cos \varphi} - 2 \Sigma_{xx} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}\right)^2 - \left(2 \frac{\Sigma_{xy}}{\cos \varphi}\right)^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le système (4.9) n'est défini que pour $\Sigma_{xx} \leq kC \cot \varphi$ et $|\Sigma_{xy}| \leq kC - \Sigma_{xx} \tan \varphi$, pour le demi-espace défini par $\Sigma_{xy} \geq 0$. En comparant les conditions imposées sur Σ_{xy} , on remarquera que le renforcement ne sera effectif que pour des valeurs de $\Sigma_{xx} \leq (k-1)C \cot \varphi$.

Dans le cas particulier $\Sigma_{xy} = 0$, le critère de résistance dans la colonne se réduit à $\Sigma_{xx} K_p \leq \sigma_{yy}^r \leq \Sigma_{xx} K_a$, avec $\Sigma_{xx} \leq kC \cot \varphi$.

Une approche par l'intérieur du domaine de résistance macroscopique \mathbf{G}^{hom} sera obtenue en combinant les relations (4.7) et (4.9) dans (4.4).

Ainsi, le problème de capacité portante illustré sur la figure 4.1, où le sol renforcé est considéré comme un milieu homogénéisé peut être traité comme un problème en déformation dans le plan Oxy , pour lequel on se propose de déterminer le critère de résistance macroscopique. Notant par $\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}$ le tenseur de contrainte bidimensionnel, formé à partir des composantes de $\underline{\underline{\Sigma}}$ dans le plan Oxy :

$$\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}} = \Sigma_{\alpha\beta} \underline{\underline{e}}_\alpha \otimes \underline{\underline{e}}_\beta, \quad \alpha, \beta = x, y \quad (4.10)$$

La condition de "résistance en déformation plane" associée au critère de résistance macroscopique tridimensionnel :

$$F(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \quad (4.11)$$

est définie comme suit :

$$\tilde{F}(\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}) = \min_{\Sigma_{xx}} \left\{ \left(\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}} + \Sigma_{zz} \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z \right) \right\} \quad (4.12)$$

En d'autres termes, en notant par $\tilde{\mathbf{G}}^{\text{hom}}$ le domaine de résistance macroscopique, défini par :

$$\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}} \in \tilde{\mathbf{G}}^{\text{hom}} \Leftrightarrow \tilde{F}(\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}) \leq 0 \quad (4.13)$$

4.2. Approche par un champ constant du critère macroscopique en déformation plane

Le domaine de résistance macroscopique dans le plan (Oxy) pourra alors être défini par :

$$\tilde{\mathbf{G}}^{\text{hom}} = \left\{ \underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}; \exists \Sigma_{zz} \text{ tel que } \underline{\underline{\tilde{\Sigma}}} + \Sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \in \mathbf{G}^{\text{hom}} \right\} \quad (4.14)$$

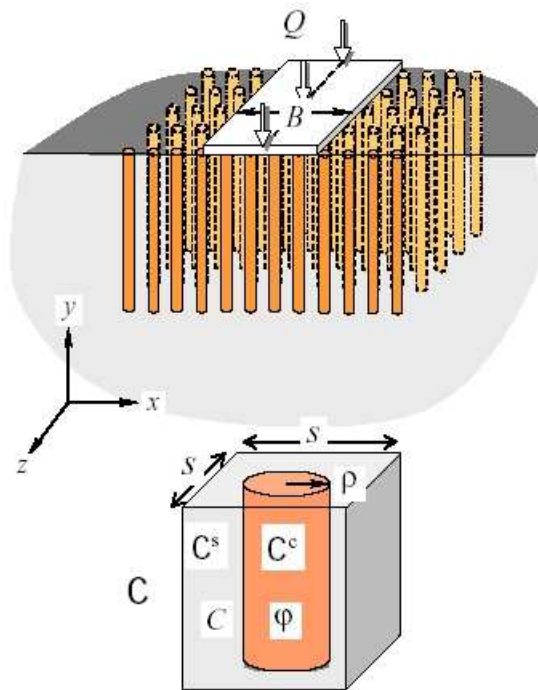
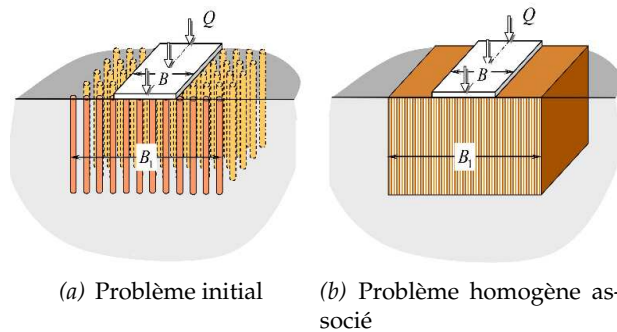


FIG. 4.1: Problème initial et cellule de base



4.3. Détermination d'une borne inférieure du critère de résistance macroscopique

Le critère de résistance macroscopique en déformation plane parallèle au plan Oxy étant approximé par l'intérieur, par des champs de contrainte constants ; on se propose de le représenter dans l'espace des contraintes macroscopiques qu'on désigne par :

$$X = \Sigma_{xx}; Y = \Sigma_{yy}; Z = \Sigma_{xy} \sqrt{2} \quad (4.15)$$

Une coupe de ce domaine par un plan $Z = cte \geq 0$, mettra en évidence deux branches de courbes Γ^- et Γ^+ reliées à leurs extrémités bornées, par un segment passant par les points P^+ et P^- (figure 4.2). Les courbes Γ^\pm et les coordonnées des points P^\pm sont exprimées par les équations ci-dessous :

$$\Gamma^\pm = (1 - \eta) \left[X \pm 2 \sqrt{C^2 - \frac{Z^2}{2}} \right] + \eta \left[X(1 + 2 \tan^2 \varphi) - 2kC \tan \varphi \pm \sqrt{\left(\frac{2kC}{\cos \varphi} - 2X \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \right)^2 - \left(\frac{Z \sqrt{2}}{\cos \varphi} \right)^2} \right] \quad (4.16)$$

et :

$$X(P^\pm) = kC \cot \varphi - \frac{Z}{\sqrt{2}} \cot \varphi; \\ Y(P^\pm) = X(1 + 2\eta \tan^2 \varphi) - 2\eta kC \tan \varphi \pm 2(1 - \eta) \sqrt{C^2 - \frac{Z^2}{2}} \quad (4.17)$$

Pour $Z = \sqrt{2}C$, les points P^+ et P^- seront confondus en un point M , et l'on aura ¹ :

$$X(M) = (k - 1)C \cot \varphi; \quad Y(M) = -C \cot \varphi(1 - k + 2\eta \tan^2 \varphi); \quad Z(M) = C \sqrt{2} \quad (4.18)$$

¹ ces points sont obtenus pour $\left(2X \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{2kC}{\cos \varphi} \right)^2 - \left(\frac{Z \sqrt{2}}{\cos \varphi} \right)^2 = 0$; soit pour $Z \geq 0$, puisque $X \leq kC \cot \varphi$, $Z = kC \sqrt{2} - X \cot \varphi \sqrt{2}$. Cette dernière équation sera celle du plan passant par les points $A; B$ et M illustrés sur la figure 4.2

4.3. Détermination d'une borne inférieure du critère de résistance macroscopique

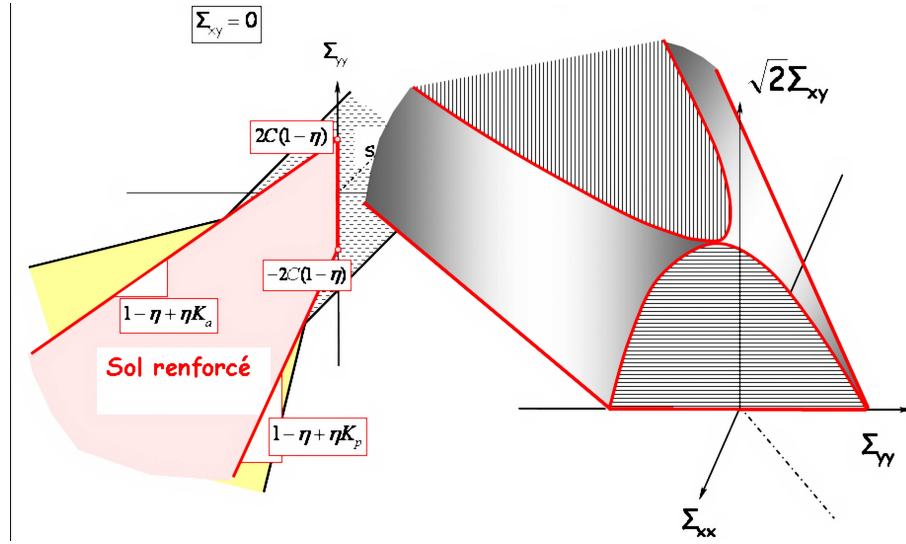


FIG. 4.2: Le domaine de résistance macroscopique pour $k = 0$

Les courbes Γ^\pm qui sont des tronçons d'hyperboles, admettent pour asymptotes, dans le plan (MXY) , les droites d'équations $D^+ : Y = [1 - \eta + \eta K_a] X$ et $D^- : Y = [1 - \eta + \eta K_p] X$. Il est possible de montrer que le domaine de résistance macroscopique coupe le plan $Z = 0$ en deux demi-droites Δ^\pm d'équations :

$$\Delta^+ : Y = [1 - \eta + \eta K_a] X + 2(1 - \eta)C + 2\eta kC \sqrt{K_a}; \quad (4.19)$$

$$\Delta^- : Y = [1 - \eta + \eta K_p] X - 2(1 - \eta)C - 2\eta kC \sqrt{K_p} \quad (4.20)$$

qui seront respectivement coplanaires, chacune à l'une des asymptotes ci-dessus mentionnées c'est à dire D^+ et D^- . L'intersection de Δ^\pm avec l'axe $X = kC \cot \varphi$ seront les points B de coordonnées :

$$X(B) = kC \cot \varphi; Y(B) = [1 - \eta + \eta K_a] kC \cot \varphi + 2(1 - \eta)C + 2\eta kC \sqrt{K_a}; Z(B) = 0 \quad (4.21)$$

et le point A d'ordonnée $Y(A) = [1 - \eta + \eta K_p] kC \cot \varphi - 2(1 - \eta)C - 2\eta kC \sqrt{K_p}$.

Pour le cas particulier de renforcement par un matériau constitutif des colonnes purement cohérent ($\varphi = 0; k = 0$) est retrouvé à partir des équations (4.5) à (4.9)

4.4. Un critère simplifié : linéarisation par l'intérieur

En vue de proposer une formulation simple, d'utilisation pratique et en exploitant le fait que les droites Δ^\pm et D^\pm sont coplanaires, on construit une borne inférieure du domaine de résistance macroscopique de façon à ce qu'il soit limité par :

1. la surface plane limitée par les segments AB , BM et AM ;
2. la partie plane située pour $Z = C\sqrt{2}$, entre les segments de droites, parallèles à Δ^\pm et commençant à partir du point M ;
3. enfin, par les surfaces planes limitées par les droites Δ^\pm et leur parallèles passant par le point M .

Le domaine ainsi obtenu est illustré sur la figure 4.3. Cette linéarisation du critère de résistance macroscopique correspond à une estimation par défaut de la borne inférieure des capacités de résistance du sol renforcé, d'où il en découle une estimation de la capacité portante du sol renforcé du côté de la sécurité.

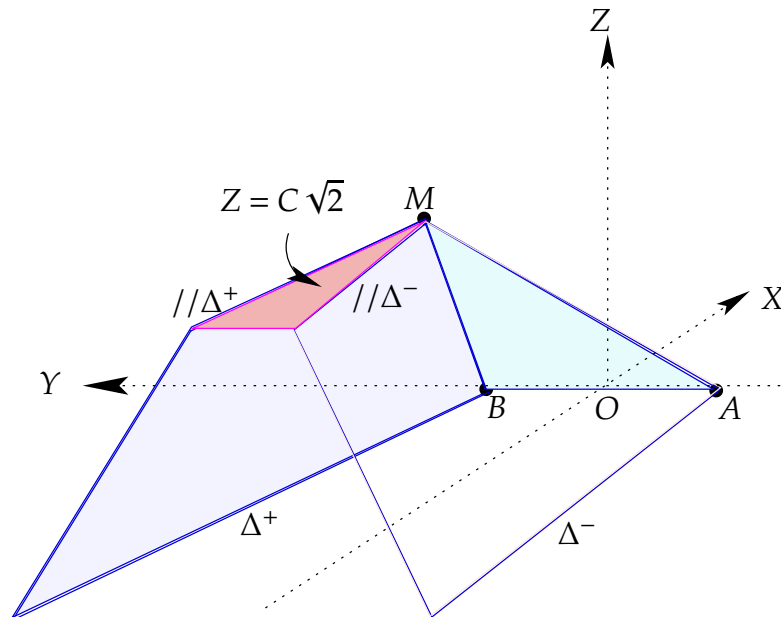


FIG. 4.3: Le domaine de résistance macroscopique linéarisé pour $k = 0$ (matériau de la colonne purement frottant)

On doit finalement compléter la construction du domaine de résistance macroscopique, en changeant Z par $-Z$ puisque ce domaine est symétrique par rapport au plan (XY) en vertu des inéquations (4.9).

4.5. Amélioration de la borne inférieure du critère de résistance macroscopique

Cette tentative d'amélioration des résultats obtenus au paragraphe (4.3) se basera sur le résultat proposé dans [12].

On considère l'état de contrainte macroscopique :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = X(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + Y\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (4.22)$$

et on définit une classe de champs de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ à un paramètre $s \geq r_1 \geq \rho$ (voir figure 4.4) par zones dans une cellule élémentaire carrée de côté s où la colonne de renforcement a pour rayon r_0 :

$$r > r_1; \quad |z| \leq \frac{s}{2}; \quad |x| \leq \frac{s}{2}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = X(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + (X - 2C)\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (4.23)$$

$$r_1 > r > \rho;$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} = \left(X - 2C \ln \frac{r_1}{r}\right)(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + \left(X - 2C \ln \frac{r_1}{r} + 2C\right)\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad (4.24)$$

$$r \leq \rho;$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} = (X - 2C \ln \lambda)(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + \left[K_p(X - 2C \ln \lambda) - 2kC \sqrt{K_p}\right]\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (4.25)$$

où l'on a posé $\lambda = r_1/\rho \geq 1$ et $K_p = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$. Le facteur de substitution η est tel que :

$$\eta = \frac{\pi\rho^2}{s^2} \quad (4.26)$$

Le champ de contraintes ainsi défini est à symétrie de révolution par rapport à l'axe (Oy); il vérifie par construction les critères de résistance locaux sous la condition :

$$X \leq kC \cot \varphi + 2C \ln \lambda \quad (4.27)$$

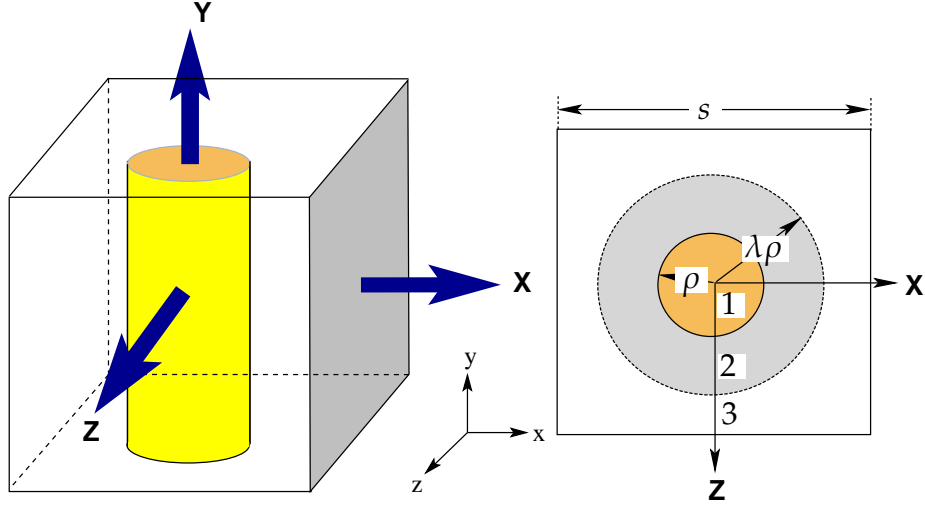


FIG. 4.4: Champ de contrainte à trois zones en équilibre avec une sollicitation triaxiale de révolution

Par ailleurs, il est statiquement admissible avec le tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}$ de la forme (4.22) pour :

$$Y = \langle \sigma_{yy} \rangle = \frac{1}{s^3} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} dy \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{yy} dx dz$$

soit, tous calculs faits :

$$Y = X(1 - \eta + \eta K_p) - 2\eta k C \sqrt{K_p} - 2(1 - \eta)C - 2\eta C \left[(K_p - 1) \ln \lambda - \frac{\lambda^2 - 1}{2} \right] \quad (4.28)$$

La droite définie par (4.28) est parallèle à Δ^- d'équation (4.19), elle est décalée par rapport à celle-ci (dans le sens des Y négatifs) de la quantité $2\eta C \left[(K_p - 1) \ln \lambda - \frac{\lambda^2 - 1}{2} \right]$. Par le champ de contrainte défini par (4.23) à (4.25) on améliore, donc, la borne inférieure du domaine de résistance macroscopique proposée dans la section (4.3).

On remarque de passage, que la valeur $\lambda = 1$ correspond au cas particulier où le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ prend des valeurs constantes respectivement dans le sol en place et dans la colonne. L'évaluation par l'intérieur notée $Y^-(X)$ de $Y(X)$ ainsi obtenue s'écrit, pour $X \leq kC \cot \varphi$:

$$Y^-(X) = X(1 - \eta + \eta K_p) - 2\eta k C \sqrt{K_p} - 2(1 - \eta)C \quad (4.29)$$

qui n'est autre que celle obtenue pour Δ^- d'équations (4.19).

4.5. Amélioration de la borne inférieure du critère de résistance macroscopique

Posons $g(\varphi) = (K_p - 1) \ln \lambda - \frac{\lambda^2 - 1}{2}$; cette fonction s'annule pour $K_p = (2 \ln \lambda - 1 + \lambda^2) / (2 \ln \lambda)$ et lorsque $\lambda = 1$ on aura $K_p = 2$, c'est à dire que $\varphi = 19,47^\circ$. Par ailleurs, pour toute valeur $\lambda \geq 1$, et parmi la classe des champs de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ définie par les formules (4.23), (4.24) et (4.25) obtenue lorsque λ décrit l'intervalle $[1, s/2\rho]$, celui qui équilibre la valeur minimale de Y , et donc conduit à la meilleure estimation de $Y^{min}(X)$, est associé à la valeur $\lambda = \sqrt{K_p - 1}$, obtenue en annulant la dérivée de (4.28) par rapport à λ :

1. $\lambda = 1$ lorsque $K_p \leq 2$. Le champ optimal est alors constant par morceaux ;
2. $\lambda = \sqrt{K_p - 1}$ lorsque $K_p \in [2, 1 + s^2/4\rho^2]$;
3. $\lambda = s/2\rho$ lorsque $K_p > 1 + s^2/4\rho^2$, du fait que la fonction définie par (4.28) est croissante pour $\lambda \geq \sqrt{K_p - 1}$.

Les valeurs de φ (souvent entre 30° et 50°) et de η (entre 5% et 30%), utilisées dans la pratique correspondent à la situation $\varphi > 19,47^\circ$. En posant alors $f(\varphi) = \frac{1}{2} [(K_p - 1) \ln(K_p - 1) - K_p]$, l'expression (4.28) se transforme alors en² :

$$Y = X(1 - \eta + \eta K_p) - 2\eta k C \sqrt{K_p} - 2(1 - \eta)C - 2\eta C [1 + f(\varphi)] \quad (4.30)$$

La variation de la fonction $(1 + f(\varphi))$ est représentée sur la figure 4.5 ; elle permet de conclure que la droite définie par (4.30), notée D^- est située au dessous de la droite Δ^- d'équation (4.19).

La quantité " $-2\eta C [1 + f(\varphi)]$ " représente le gain de résistance macroscopique (en compression notamment) qui conduira à une amélioration de la capacité portante du sol renforcé. Tout en remarquant que ce gain de résistance croît exponentiellement pour les valeurs élevées de l'angle de frottement φ du matériau constitutif des colonnes.

Pour $\lambda = \sqrt{K_p - 1}$, on aura avec $X = C. [k \cot \varphi + \ln(K_p - 1)]$;
 $Y = C [k \cot \varphi + \ln(K_p - 1)] (1 - \eta + \eta K_p) - 2\eta k C \sqrt{K_p} - 2C [1 + \eta f(\varphi)]$. On vient de déterminer ainsi un nouveau point dans le plan (XY) , qui appartient au domaine de résistance macroscopique. Ce point qu'on désignera par A_1 :

$$A_1 \left(C. [k \cot \varphi + \ln(K_p - 1)], \right. \\ \left. C [k \cot \varphi + \ln(K_p - 1)] (1 - \eta + \eta K_p) - 2\eta k C \sqrt{K_p} - 2C [1 + \eta f(\varphi)], 0 \right) \quad (4.31)$$

²et en utilisant $\lambda = \sqrt{K_p - 1}$

4. Sol purement cohérent renforcé par colonnes cohérentes et frottantes

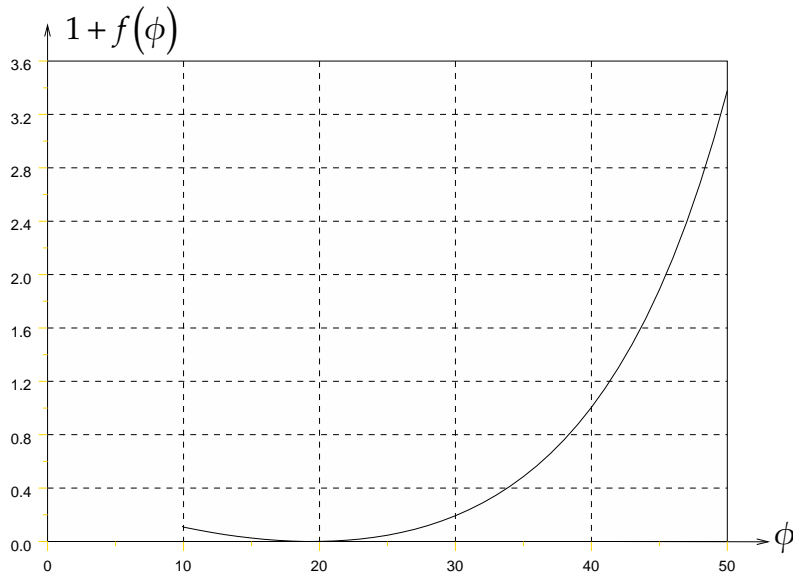


FIG. 4.5: Variation de la fonction de $(1 + f(\varphi))$ en fonction de φ

permettra d'améliorer par convexité de G^{hom} la borne inférieure du domaine de résistance établie dans le paragraphe (4.3)

Enfin, pour les valeurs de $X > C \cdot [k \cot \varphi + \ln(K_p - 1)]$, il est possible de prolonger l'approche par l'intérieur du domaine G^{hom} à l'aide du champ de contrainte défini par (4.23), (4.24) et (4.25) correspondant aux valeurs de $\lambda \in [\sqrt{K_p - 1}, s/2\rho]$, [12]

Sachant que la contrainte Y définie par (4.28) est croissante en λ pour $\lambda \geq \sqrt{K_p - 1}$, on prendra $\lambda = s/2\rho = \sqrt{\pi/4\eta}$ pour déterminer un nouveau point, noté N , situé sur la frontière de G^{hom} : ainsi, pour $X = C \ln\left(\frac{\pi}{4\eta}\right) + kC \cot \varphi$, on aura :

$$N\left(kC \cot \varphi + C \ln\left(\frac{\pi}{4\eta}\right), C \left[k \cot \varphi + \ln\left(\frac{\pi}{4\eta}\right) \right] (1 - \eta + \eta K_p) - C \left[2 - \eta - \frac{\pi}{4} + \eta (K_p - 1) \ln\left(\frac{\pi}{4\eta}\right) + 2k\eta \sqrt{K_p} \right], 0 \right) \quad (4.32)$$

permettra d'améliorer la borne inférieure déjà établie au paragraphe (4.3).

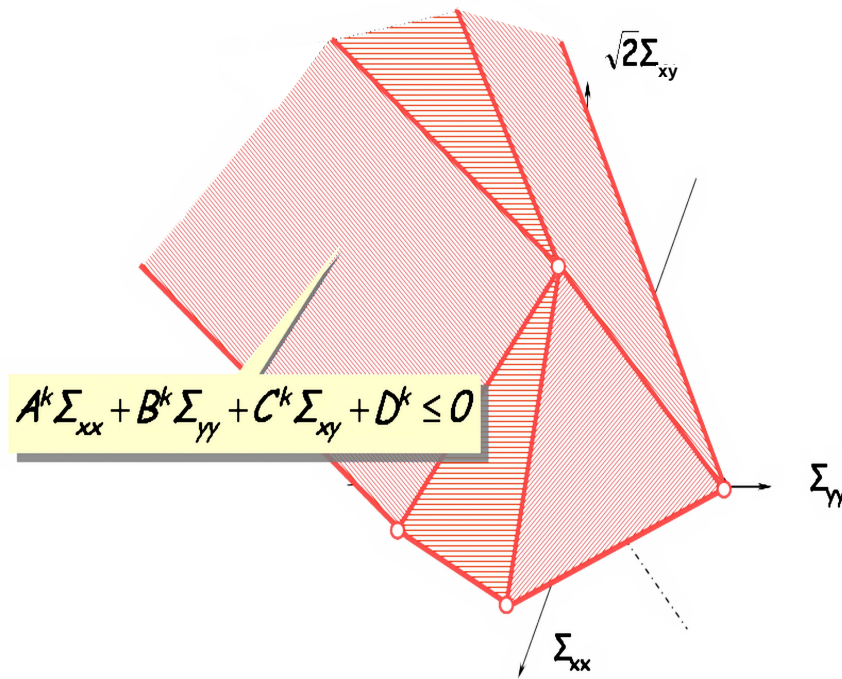


FIG. 4.6: Le domaine de résistance macroscopique amélioré (par l'axisymétrie), et linéarisé

4.6. Le critère de résistance macroscopique linéarisé

Ce domaine de résistance est construit comme indiqué au paragraphe (4.4), il sera limité par (figure 4.6) :

1. la surface plane limitée par les segments BM , BN et NM ;
2. la surface plane limitée par les segments A_1N , A_1M et NM ;
3. la partie plane comprise pour $Z = C\sqrt{2}$, entre les segments de droites, parallèles à Δ^\pm et commençant à partir du point M ;
4. par le plan passant par la droite Δ^+ et le point M .
5. par le plan contenant la droite passant par le point M et parallèle à Δ^- , et le point A_1 .

On doit finalement compléter la construction du domaine de résistance macroscopique, en changeant Z par $-Z$ puisque ce domaine est symétrique par rapport au plan $Z = 0$ et ce du fait que les équations (4.16) sont paires en Z .

Ce domaine de résistance macroscopique linéarisé peut être décrit au moyen d'un ensemble de dix (10) contraintes linéaires de la forme :

$$k = 1, \dots, 10, \quad F^k(X, Y, Z) = A^k X + B^k Y + C^k Z + D^k = 0 \quad (4.33)$$

où les différents coefficients (A^k, B^k, C^k, D^k) sont fonctions de la cohésion C du sol initial, de l'angle de frottement φ du matériau de renforcement et du facteur de substitution η .

Il est à remarquer que ce domaine ne présente aucune symétrie axiale, par conséquent c'est un domaine typiquement anisotrope.

Dans le cas particulier où le matériau constitutif des colonnes est purement frottant ($k = 0$), la construction du critère de résistance macroscopique est détaillée dans [4]

4.7. Application au calcul de la capacité portante d'une fondation : approche statique

On se propose maintenant, de mettre en application, les développements précédents à la détermination d'une borne inférieure de la capacité portante d'une semelle filante, rigide reposant sur un sol purement cohérent renforcé par un matériau cohérent et frottant. Le contact semelle - sol sera supposé à adhérence parfaite. La résistance du massif en sol renforcé sera régie par la borne inférieure du critère de résistance macroscopique linéarisé retenu dans le paragraphe (4.6).

Pour ce faire, on traitera le problème en deux temps : en considérant un champ de contraintes constant par morceaux à trois zones, puis un champ à six zones.

4.7.1. Champ de contraintes à trois zones

Ce champ est illustrée sur la figure (4.7). Pour une fondation filante de largeur B , on définit un champ de contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ de la façon suivante :

dans la zone 1

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{(1)} = \Sigma_{xx}^{(1)} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \Sigma_{xy}^{(1)} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \Sigma_{yy}^{(1)} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (4.34a)$$

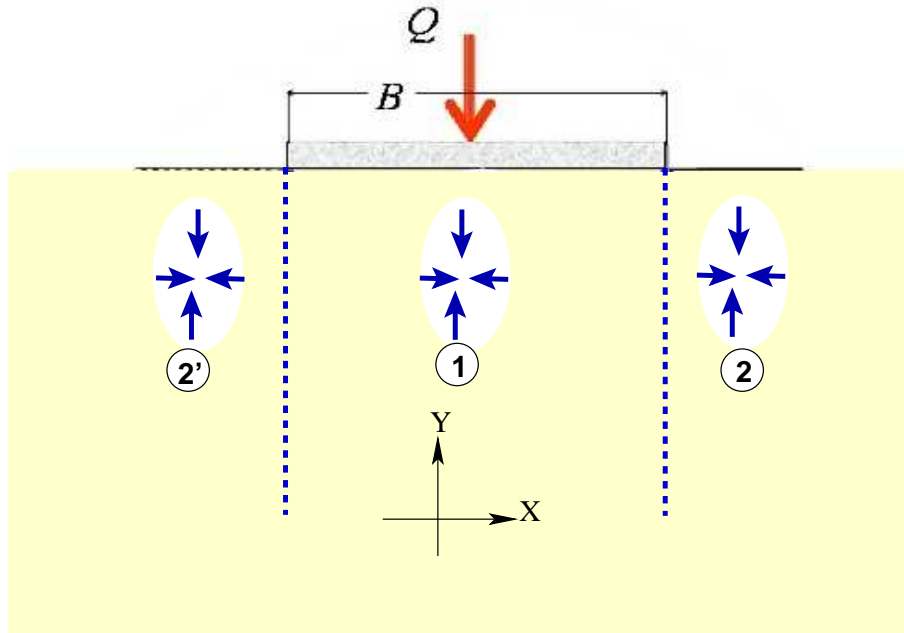


FIG. 4.7: Champ de contraintes à trois zones

dans les zones symétriques 2 et 2'

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{(2)} = \Sigma_{xx}^{(2)} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \Sigma_{xy}^{(2)} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \Sigma_{yy}^{(2)} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (4.34b)$$

Ce champ vérifie par construction même, les équations d'équilibre (la pesanteur n'étant pas prise en compte). Par ailleurs, la continuité du vecteur de contrainte et les conditions aux limites imposent d'avoir :

dans la zone 1

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{(1)} = \Sigma \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \frac{Q}{B} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (4.35a)$$

dans les zones symétriques 2 et 2'

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{(2)} = \Sigma \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (4.35b)$$

4. Sol purement cohérent renforcé par colonnes cohérentes et frottantes

C'est à dire que l'on a :

$$X_{11} = X_{22} = \Sigma; \quad Z_{11} = Z_{22} = 0; \quad Y_{11} = -Q/B; \quad Y_{22} = 0 \quad (4.36)$$

La recherche d'une borne inférieure de la capacité portante se ramène à minimiser la quantité $-Q/B$ ou à maximiser Q/BC (en compression) dans le domaine G^{hom} :

$$\max\left(\frac{Q}{BC}\right) \quad ; \quad \underline{\underline{\Sigma}} \in G^{\text{hom}} \quad (4.37)$$

la fonction objective ainsi que les contraintes du problème (4.37) sont linéaires en $X; Y$ et Z ; ceci permettra d'utiliser avantageusement, les concepts de la programmation linéaire à la détermination d'une borne inférieure du chargement extrême Q^* .

La figure (4.8) montre la variation du minorant du facteur $(Q/BC)^-$ en fonction de l'angle de frottement φ des colonnes, pour différentes valeurs du facteur de substitution η

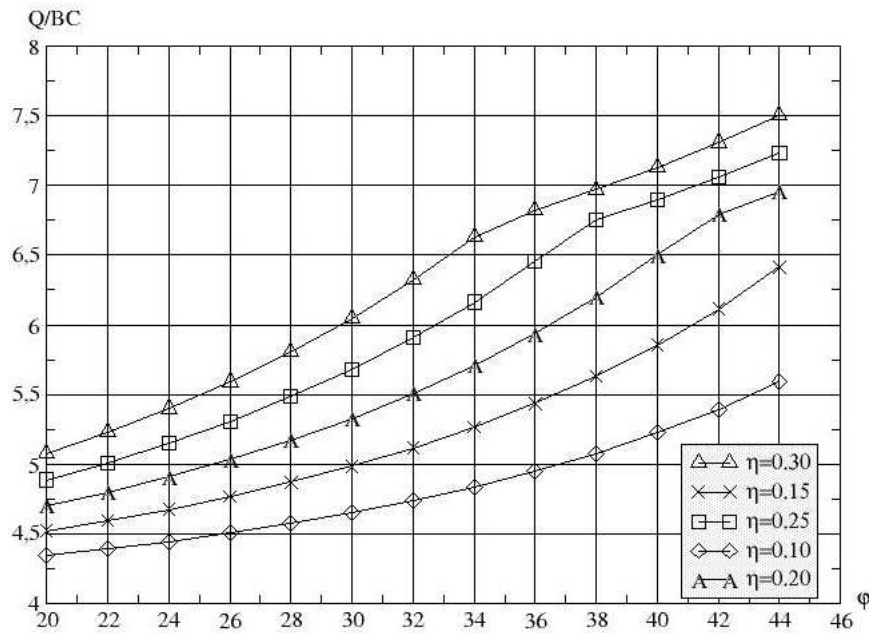


FIG. 4.8: Évaluation de la capacité portante par un champ à trois zones

4.7.2. Champ de contraintes à six zones

On se propose maintenant de raffiner l'étude précédente en considérant un champ de contraintes à six zones, constant par morceaux et illustré sur la figure (4.9).

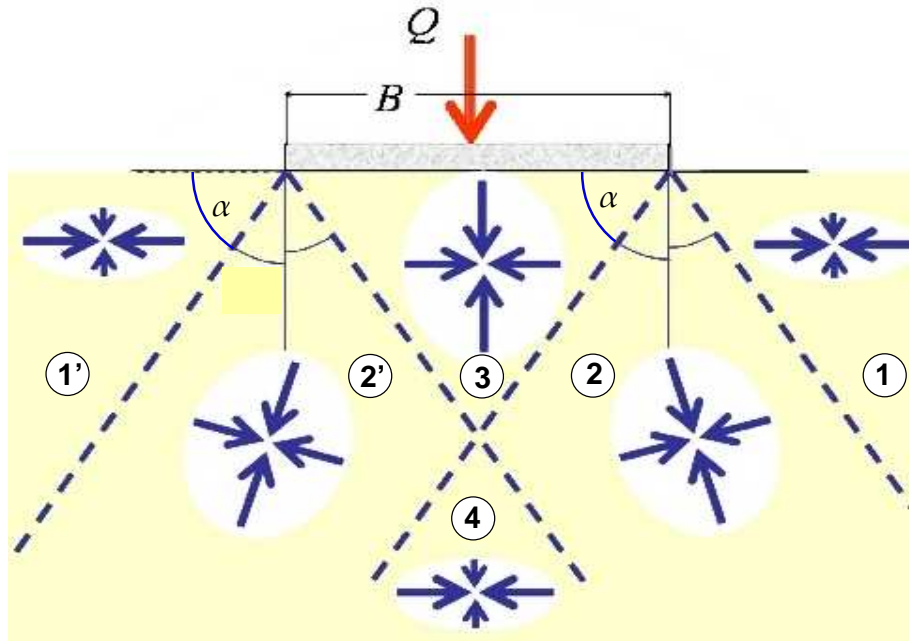


FIG. 4.9: Champ de contraintes à six zones

On définit un champ de contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ de la façon suivante :

dans les zones symétriques 1, 1' et 4

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{(1)} = \left(\Sigma + \frac{Q}{B} \cot^2 \alpha \right) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (4.38a)$$

dans les zones symétriques 2 et 2'

$$\left(\Sigma + \frac{Q}{2B} \cot^2 \alpha \right) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{Q}{2B} \cot \alpha \left(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x \right) - \frac{Q}{2B} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (4.38b)$$

dans la zone 3

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{(1)} = \Sigma \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \frac{Q}{B} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (4.38c)$$

Il est évident que cette classe de champ de contrainte dépendant des deux paramètres Σ et α , est statiquement admissible avec le chargement Q , c'est à dire que la continuité du vecteur contrainte au passage des surfaces séparant les différentes zones, est particulièrement assurée.

4. Sol purement cohérent renforcé par colonnes cohérentes et frottantes

En fixant par exemple le paramètre angulaire α , la recherche de la borne inférieure du facteur de capacité portante (Q/BC) se trouve de ce fait, ramenée à la résolution d'un problème de programmation linéaire avec contraintes formulé par :

$$\left(\frac{Q}{BC}\right)^+ \geq \left(\frac{Q}{BC}\right)^\alpha = \max\left\{\frac{Q}{BC}\right\} \quad \text{avec } \forall k \quad (4.39a)$$

$$F^k(\Sigma + Q \tan^2 \alpha / B, 0, 0) \leq 0 \quad (4.39b)$$

$$F^k(\Sigma + Q \tan^2 \alpha / 2B, -Q/2B, \pm \sqrt{2}Q \tan \alpha / 2B) \leq 0 \quad (4.39c)$$

$$F^k(\Sigma, -Q/B, 0) \leq 0 \quad (4.39d)$$

La meilleure borne inférieure du facteur de capacité ainsi recherchée sera alors la plus grande parmi toutes celles correspondant aux différentes valeurs de α .

$$\left(\frac{Q}{BC}\right)^+ \geq \max\left\{\frac{Q}{BC}^\alpha ; 0 \leq \alpha \leq \pi/2\right\} \quad (4.40)$$

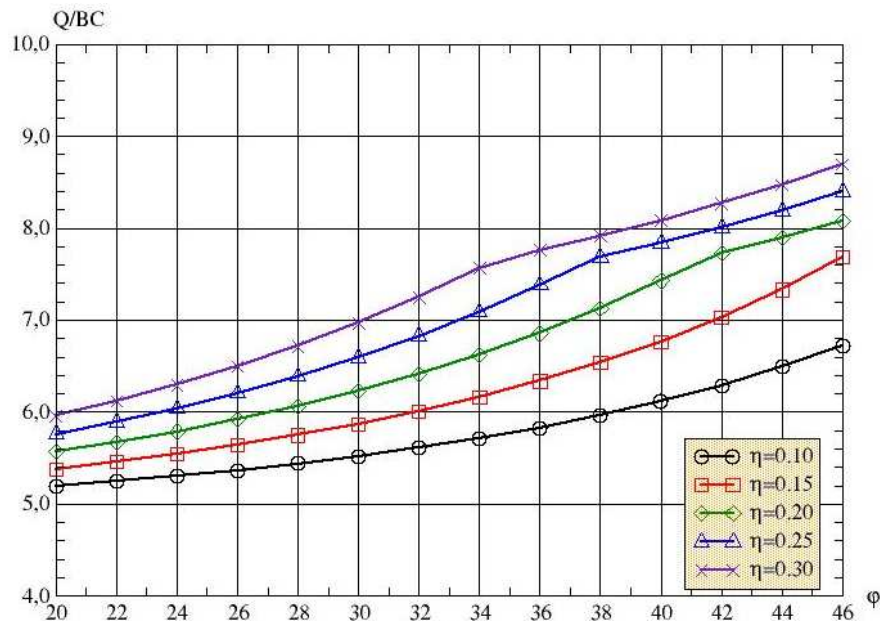


FIG. 4.10: Estimation de la capacité portante par un champ à six zones : cas de renforcement par un matériau purement frottant

L'implémentation de ce problème d'optimisation est alors facilement faite avec les logiciels dotés de bibliothèques d'optimisation telles que la macro "NMinimize" de Mathematica, ou "NLPsolve" de Maple si on veut traiter le même problème mais où α est inclus dans l'ensemble

des variables de décision.

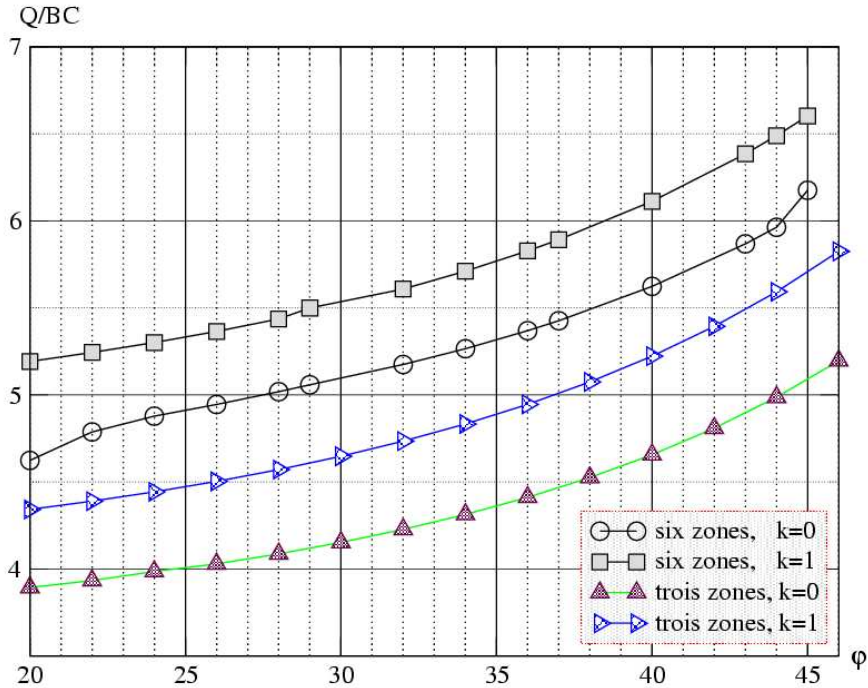


FIG. 4.11: Comparaison des résultats obtenus à l'aide des champs à trois zones et six zones

On vérifie que pour un matériau de Coulomb, homogène non renforcé, la recherche du chargement extrême vérifiant le critère de résistance et les équations d'équilibre, en tout point de la structure, mène à $\left(\frac{Q}{BC}\right)^* \geq 4,828k \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ obtenue pour $\Sigma = -2\sqrt{2}C$ et $\alpha = \frac{3\pi}{8}$.

4.8. Synthèse des résultats et conclusion

L'approche par la méthode de l'homogénéisation en calcul à la rupture a été appliquée, en premier lieu, à l'évaluation de la charge ultime d'une fondation reposant sur un sol renforcé par colonnes ballastées. Les résultats préliminaires découlant de l'exemple illustratif d'une semelle filante chargée verticalement et reposant sur un demi espace uniformément renforcé, fournissent une première estimation quantitative du renforcement effectif attendu d'une telle technique. Les résultats sont exprimés en terme de facteur adimensionnel de capacité portante, fonction de l'angle de frottement des colonnes et de fraction du volumique du renforcement.

L'un des avantages que procure la méthode d'homogénéisation réside dans son pouvoir d'analyser tout type de problème sans restriction particulière quant à l'ouvrage géotechnique à

4. Sol purement cohérent renforcé par colonnes cohérentes et frottantes

dimensionner vis à vis de la rupture, la géométrie de la zone renforcée, ou encore le type de chargement. Néanmoins, comme l'approche cinématique du calcul à la rupture s'est généralement avérée la méthode la plus convenable pour analyser la stabilité des ouvrages géotechniques, une borne supérieure du domaine de résistance macroscopique du sol renforcé devra être établie pour pouvoir mettre en œuvre une telle étude de stabilité.

5. Conclusion et perspectives

5. *Conclusion et perspectives*

5.1. Conclusions et perspectives

Dans ce travail, la détermination de la capacité portante d'un sol renforcé par colonnes a été entreprise par la méthode d'homogénéisation dans le cadre de la théorie du calcul à la rupture. Partant d'une synthèse de résultats antérieurs établis, pour le même problème, à l'aide des approches directes du calcul à la rupture on justifie le recours à la méthode d'homogénéisation dont on a rappelé brièvement les fondements théoriques ; à savoir le concept du problème auxiliaire résolu sur la cellule de base et le critère de résistance macroscopique homogénéisé. Le sol renforcé est caractérisé par deux directions de périodicité.

Pour un premier cas relatif aux sols renforcés constitués par deux matériaux purement cohérents, un encadrement satisfaisant du critère de résistance macroscopique homogénéisé a été établi mettant en évidence l'anisotropie de la cohésion du sol renforcé homogénéisé.

Deux applications ont été abordées, la première concerne la capacité portante d'une fondation rigide filante reposant sur le sol renforcé homogénéisé de largeur multiple de celle de la fondation. A l'aide de l'approche cinématique du calcul à la rupture la borne supérieure du facteur de portance a été sensiblement améliorée par comparaison à celle obtenue avec l'approche directe du calcul à la rupture (c'est à dire sans faire recours à la méthode d'homogénéisation).

La deuxième application est relative à la stabilité d'un remblai dont le matériau constitutif est purement frottant, édifié sur le sol renforcé. Le deuxième cas, très courant en pratique, est relatif à un sol purement cohérent renforcé par un matériau cohérent et frottant. En premier lieu, une borne inférieure du critère de résistance macroscopique homogénéisé a été établie après résolution d'un problème de maximisation sous contraintes. En raison de la nature asymptotique du critère de résistance établi, une approximation par défaut (donc allant du côté de la sécurité) a été adoptée pour faciliter sa mise en œuvre en vue de calculer la borne inférieure de la capacité portante d'une fondation rigide filante.

Avec l'approche par l'intérieur du calcul à la rupture, la construction de champs de contraintes constants à trois zones et à six zones ont permis de proposer des abaques donnant l'évolution du facteur de portance en fonction du facteur de substitution, de l'angle de frottement du matériau constitutif des colonnes et du rapport des cohésions.

Pour les deux cas de renforcement investigués, des comparaisons ont été faites entre les résultats obtenus à l'aide de la méthode d'homogénéisation et ceux établis par d'autres méthodes.

En guise de perspective, il y a lieu de rappeler la difficulté à surmonter en vue de déterminer une borne supérieure du critère de résistance macroscopique homogénéisé pour le cas de renforcement d'un sol purement cohérent avec un matériau cohérent et frottant, et par suite la

5. Conclusion et perspectives

détermination d'une borne supérieure du facteur de portance (ou de stabilité) d'une fondation rigide (d'un remblai). Tel que mentionné au départ de ce travail, l'approche cinématique directe du calcul à la rupture n'étant pas facile à mettre en œuvre elle demeure également posée même avec le recours à la méthode d'homogénéisation en raison de construire des champs de vitesse pertinents sur la cellule de base. Il y aura, donc, lieu de réfléchir sur ce point et également aborder la validation des résultats établis dans ce travail avec des résultats expérimentaux. Cela permettra en particulier de les inclure dans un logiciel de dimensionnement de fondations sur sol renforcé par colonnes.

A. Détails de calcul pour la section 3.3

Sommaire

A.1. Cas où $0 \leq \lambda \leq 1$	108
A.2. Cas où $1 \leq \lambda \leq 2$	110
A.3. Cas où $2 \leq \lambda \leq 3$	112

Cette annexe détaille les calculs dont les résultats figurent à la section 3.3 du chapitre 3.

A.1. Cas où $0 \leq \lambda \leq 1$

C'est le cas où la partie renforcée se situe strictement sous la semelle, la géométrie du problème est définie par $\theta_0 = -\frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{1-\lambda}{\sqrt{2}}\right)$

□ le secteur ABD :

$$\int_{ABD} \pi(\underline{d}) d\Omega = \int_0^{\frac{B}{\sqrt{2}}} \int_{-\frac{3\pi}{4} + \theta_0}^{\theta_0 - \frac{\pi}{4}} U \frac{\sqrt{2}}{4\rho} 2C d\rho d\theta = \frac{1}{2} BUC \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \quad (\text{A.1})$$

□ dans l'arc de cercle BD :

$$\int_{BD} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \int_{ABD} \pi(\underline{d}) d\Omega = \frac{1}{2} BUC \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \quad (\text{A.2})$$

□ dans le triangle ABC :

$$\begin{aligned} \int_{ABC} \pi(\underline{d}) d\Omega &= \int_0^{-\frac{B-B_1}{2\cos\theta}} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{3\pi}{4} + \theta_0} U \frac{\sqrt{2}}{4\rho} \pi\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) d\rho d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (B - B_1) UC \ln \left[\frac{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta_0}{2}\right)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

□ dans l'arc IB : la valeur de puissance résistante maximale due à la discontinuité de vitesse dépend de la comparaison de β_0 à θ_0 ; en effet, on a :

$$\int_{IB} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{3\pi}{4} + \theta_0} U \frac{\sqrt{2}}{4\rho} \pi\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \frac{B}{\sqrt{2}} d\theta = \frac{1}{4} BU \int_0^{\theta_0} \pi(\beta) d\beta \quad (\text{A.4a})$$

Cette intégrale se calcule en distinguant deux cas, selon le signe de $\beta_0 - \theta_0$:

si $\beta_0 \leq \theta_0$

$$\int_{IB} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \frac{1}{2} BU \langle C \rangle \left[\beta_0 + \frac{1}{2} \sin(2\theta_0 - 2\beta_0) \right] \quad (\text{A.4b})$$

si $\beta_0 \geq \theta_0$

$$\int_{IB} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \frac{1}{2} BU \langle C \rangle \theta_0 \quad (\text{A.4c})$$

□ dans BIC :

$$\begin{aligned} \int_{BIC} \pi(\underline{d}) d\Omega &= \int_{-\frac{B-B_1}{2\cos\theta}}^{\frac{B}{\sqrt{2}}} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{3\pi}{4}+\theta_0} U \frac{\sqrt{2}}{4\rho} \pi\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) d\rho d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} UC \int_0^{\theta_0} \left(\frac{B}{\sqrt{2}} + \frac{B-B_1}{2\cos\left(\beta + \frac{5\pi}{4}\right)} \right) d\beta \end{aligned} \quad (\text{A.5a})$$

là aussi on distinguera deux cas :

si $\beta_0 \leq \theta_0$, on aura :

$$\int_{BIC} \pi(\underline{d}) d\Omega = \Psi_1 - \Psi_2 \quad (\text{A.5b})$$

où l'on a posé

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} BU \langle C \rangle \left[\beta_0 + \frac{1}{2} \sin(2\theta_0 - 2\beta_0) \right] - \frac{\sqrt{2}}{4} (B - B_1) U \langle C \rangle \ln \left[\frac{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\beta_0}{2}\right)} \right] \quad (\text{A.5c})$$

et

$$\Psi_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} (B - B_1) U \langle C \rangle \left[2 \sin\left(\theta_0 - 2\beta_0 - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(\beta_0 + \frac{\pi}{4}\right) - \sin 2\beta_0 \ln \left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\beta_0}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta_0}{2}\right)} \right) \right] \quad (\text{A.5d})$$

si $\beta_0 \geq \theta_0$, on aura :

$$\int_{BIC} \pi(\underline{d}) d\Omega = \frac{1}{2} BU \langle C \rangle \theta_0 - \frac{\sqrt{2}}{4} (B - B_1) U \langle C \rangle \ln \left[\frac{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta_0}{2}\right)} \right] \quad (\text{A.5e})$$

□ dans AC :

$$\int_{AC} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \frac{1}{2} (B - B_1) UC \quad (\text{A.6})$$

□ dans CI :

$$\int_{CI} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \frac{1}{2} B_1 U \langle C \rangle \quad (\text{A.7})$$

□ dans DE :

$$\int_{DE} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \frac{1}{2} B U C \quad (\text{A.8})$$

A.2. Cas où $1 \leq \lambda \leq 2$

La géométrie du problème est définie par $\theta_0 = -\frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{\lambda-1}{\sqrt{2}}\right)$

□ dans AI :

$$\int_{AI} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \frac{1}{2} B U \langle C \rangle \quad (\text{A.9})$$

□ dans AIB : on aura

$$\int_{AIB} \pi(\underline{d}) d\Omega = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}-\theta_0} \int_0^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}} \pi\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) U \frac{\sqrt{2}}{4\rho} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta_0} \pi(\beta) d\beta \quad (\text{A.10a})$$

si $\beta_0 \leq \theta_0$ on aura :

$$\int_{AIB} \pi(\underline{d}) d\Omega = \frac{1}{2} B U \langle C \rangle \left[\beta_0 + \cos 2\beta_0 - \frac{1}{2} \sin(2\theta_0 - 2\beta_0) \right] \quad (\text{A.10b})$$

si $\beta_0 \geq \theta_0$ on aura :

$$\int_{AIB} \pi(\underline{d}) d\Omega = \frac{1}{2} B U \langle C \rangle [2\beta_0 - \theta_0 + \cos 2\beta_0] \quad (\text{A.10c})$$

□ dans IB :

$$\int_{IB} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \int_{AIC} \pi(\underline{d}) d\Omega \quad (\text{A.11a})$$

si $\beta_0 \leq \theta_0$ on aura :

$$\int_{IB} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \frac{1}{2} B U \langle C \rangle \left[\beta_0 + \cos 2\beta_0 - \frac{1}{2} \sin(2\theta_0 - 2\beta_0) \right] \quad (\text{A.11b})$$

si $\beta_0 \geq \theta_0$ on aura :

$$\int_{IB} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \frac{1}{2} B U \langle C \rangle [2\beta_0 - \theta_0 + \cos 2\beta_0] \quad (\text{A.11c})$$

□ dans ABC : on a

$$\int_{ABC} \pi(\underline{d}) d\Omega = \int_0^{\frac{B-B_1}{2\cos\theta}} \int_{\frac{-\pi}{4}-\theta_0}^{\frac{-\pi}{4}} U \frac{\sqrt{2}}{4\rho} \pi\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) d\rho d\theta = \frac{\sqrt{2}}{8} (B - B_1) U \int_0^{\theta_0} \frac{\pi(\beta)}{\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)} d\beta \quad (\text{A.12a})$$

si $\beta_0 \leq \theta_0$ on aura :

$$\int_{ABC} \pi(\underline{d}) d\Omega = A1 + A2 \quad (\text{A.12b})$$

où l'on a posé :

$$A1 = \frac{\sqrt{2}}{4} (B_1 - B) U \langle C \rangle \left[2 \sin\left(\theta_0 - 2\beta_0 - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(\beta_0 + \frac{\pi}{4}\right) + \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\beta_0}{2}\right)}\right) \right] \quad (\text{A.12c})$$

et

$$A2 = \frac{\sqrt{2}}{4} (B_1 - B) U \langle C \rangle \sin 2\beta_0 \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\beta_0}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta_0}{2}\right)}\right) \quad (\text{A.12d})$$

si $\beta_0 \geq \theta_0$ on aura :

$$\int_{ABC} \pi(\underline{d}) d\Omega = A1 + \frac{\sqrt{2}}{4} (B_1 - B) U \langle C \rangle \left[\sin 2\beta_0 \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta_0}{2}\right)}\right) - \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\beta_0}{2}\right)}\right) \right] \quad (\text{A.12e})$$

□ dans BD :

$$\int_{BD} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \frac{1}{2} B U C \theta_0 \quad (\text{A.13})$$

□ dans BCD :

$$\begin{aligned} \int_{BCD} \pi(\underline{d}) d\Omega &= \int_{-\frac{B-B_1}{2\cos\theta}}^{\frac{B}{\sqrt{2}}} \int_{\frac{-\pi}{4}-\theta_0}^{-\frac{\pi}{4}} U \frac{\sqrt{2}}{4\rho} 2C\rho dp d\theta \\ &= \frac{1}{2}BU\langle C \rangle \theta_0 - \frac{\sqrt{2}}{4}(B_1 - B)U\langle C \rangle \ln \left[\frac{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta_0}{2}\right)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

□ dans DE : $\int_{DE} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \frac{1}{2}BUC$

A.3. Cas où $2 \leq \lambda \leq 3$

La géométrie est définie par le paramètre $\theta_0 = \arctan(\lambda - 2)$

□ dans AI :

$$\int_{AI} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \frac{1}{2}BU\langle C \rangle \quad (\text{A.15})$$

□ dans ID

$$\int_{ID} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} U \frac{\sqrt{2}}{4} \pi(\delta) \frac{B}{\sqrt{2}} d\theta = \frac{1}{4}BU \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \pi\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi(\beta) d\beta \quad (\text{A.16a})$$

soit

$$\int_{ID} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = BU\langle C \rangle \left(\beta_0 + \frac{1}{2} \cos 2\beta_0 \right) \quad (\text{A.16b})$$

□ dans AID

$$\int_{AID} \pi(\underline{d}) d\Omega = \int_{ID} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = BU\langle C \rangle \left(\beta_0 + \frac{1}{2} \cos 2\beta_0 \right) \quad (\text{A.17})$$

□ dans DB

$$\int_{DB} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \frac{1}{2}BU\langle C \rangle \tan \theta_0 \quad (\text{A.18})$$

□ dans BE

$$\int_{CE} \pi(\underline{n}; \underline{V}) d\Sigma = \frac{1}{2}BUC(1 - \tan \theta_0) \quad (\text{A.19})$$

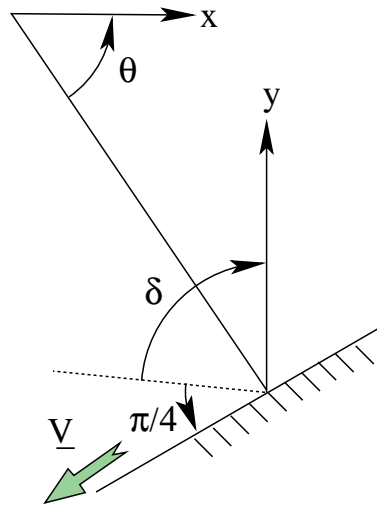


FIG. A.1: Interprétation de l'angle δ

Les cas particuliers $\lambda = 0, 1, 2$ s'obtiennent en faisant tendre λ vers ces valeurs, dans l'expression du facteur de capacité portante.

B. Détails de calcul de la fonction $\pi(\beta)$

Sommaire

B.1. Établissement de l'expression de $\pi(\beta)$	116
--	-----

B.1. Établissement de l'expression de $\pi(\beta)$

Définissons un champ vitesse de déformation microscopique, sur la cellule de base de la manière suivante :

Laisant de côtés certains développements théoriques qu'on peut consulter dans les références [7, 10], il a été signalé au paragraphe 2.2.1 que la vitesse de déformation (sur la cellule de base) est la somme d'une vitesse de déformation homogène (de moyenne volumique $\underline{\underline{D}}$) et d'une "fluctuation" $\underline{\underline{d}}$ périodique, dont la moyenne sur \mathbf{a} est nulle ; ceci nous incitera de considérer le champs vitesse de déformation suivant :

$$\underline{\underline{D}} = \langle \underline{\underline{d}} \rangle = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{yx} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

avec

$$\text{tr}(\underline{\underline{D}}) = D_{xx} + D_{yy} = 0 \quad (\text{B.2})$$

Ce champ tenseur vitesse de déformation plane dans Oxy a les valeurs principales suivantes :

$$D_1 = \sqrt{D_{xx}^2 + D_{xy}^2}; \quad D_2 = 0; \quad D_3 = -\sqrt{D_{xx}^2 + D_{xy}^2} \quad (\text{B.3})$$

Considérant un champ de contrainte macroscopique de la forme 2.28, la définition 2.22 se traduira alors par :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = (\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy})D_{xx} + 2\Sigma_{xy}D_{xy} = \langle \pi(\underline{\underline{d}}) \rangle = 2\langle C \rangle \sqrt{D_{xx}^2 + D_{xy}^2} \quad (\text{B.4})$$

Le chargement macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ étant tel que sa direction principale majeure fasse un angle α avec la direction Ox , ses composantes dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ peuvent être exprimées en fonction des valeurs principales :

$$\Sigma_{xx} = \Sigma_1 \cos^2 \alpha + \Sigma_3 \sin^2 \alpha; \quad \Sigma_{xy} = (\Sigma_1 - \Sigma_3) \sin \alpha \cos \alpha; \quad \Sigma_{yy} = \Sigma_1 \sin^2 \alpha + \Sigma_3 \cos^2 \alpha \quad (\text{B.5})$$

Le tenseur vitesse de déformation $\underline{\underline{D}}$ étant tel que sa direction principale majeure fasse un angle β avec la direction Ox , ses composantes dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ peuvent être exprimées en fonction des valeurs principales :

$$D_{xx} = D_1 \cos 2\beta; \quad D_{xy} = D_1 \sin 2\beta; \quad D_{yy} = -D_1 \cos 2\beta \quad (\text{B.6})$$

Utilisant les relations B.5 et B.6 dans B.4, il sera encore possible d'écrire :

$$(\Sigma_1 - \Sigma_3)D_1 \cos 2(\beta - \alpha) \leq \left\langle \pi \left(\underline{\underline{d}} \right) \right\rangle = 2D_1 \langle C \rangle \quad (\text{B.7})$$

La fonction d'appui du domaine G^{hom} deviendra alors :

$$\pi^{\text{hom}} \left(\underline{\underline{D}} \right) = \sup_{\alpha} \{ D_1 (\Sigma_1 - \Sigma_3) \cos 2(\beta - \alpha) \} \quad (\text{B.8})$$

Soit en posant à priori :

$$\pi(\beta) = \sup_{\alpha} \{ 2C^+(\alpha) \cos 2(\beta - \alpha) \} \quad (\text{B.9})$$

on écrira en définitive :

$$\pi^{\text{hom}} \left(\underline{\underline{D}} \right) = D_1 \pi(\beta) \quad (\text{B.10})$$

La détermination de la fonctionnelle $\pi(\beta)$ est équivalente à la résolution du problème d'optimization sous contraintes suivant :

$$\begin{cases} \pi^{\text{hom}} = \sup \{ -S \sqrt{2} D_{xx} + T \sqrt{2} D_{xy} \} \\ g_1 : |T| \leq C \sqrt{2} \\ g_2 : \sqrt{S^2 + T^2} \leq C^+(\alpha) \sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

On se limitera au domaine $S \geq 0; T \geq 0$ pour la résolution de ce problème, qui admet la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} f = -\pi^{\text{hom}} = \min \{ S \sqrt{2} D_{xx} - T \sqrt{2} D_{xy} \} \\ g_1 : T - C \sqrt{2} \leq 0 \\ g_2 : \sqrt{S^2 + T^2} - C^+(\alpha) \sqrt{2} \leq 0 \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Le problème (B.12) est un problème d'optimization convexe en vertu de la convexité même du domaine de résistance macroscopique G^{hom} . Formons en le Lagrangien :

$$L = f + \sum_{i=1}^2 \lambda_i g_i \quad (\text{B.13})$$

Une solution de (B.12) annule nécessairement ∇L , soit :

B. Détails de calcul de la fonction $\pi(\beta)$

$$\nabla f + \sum_{i=1}^2 \lambda_i g_i \geq 0 \quad (\text{B.14-a})$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (\text{B.14-b})$$

$$g_i \leq 0 \quad (\text{B.14-c})$$

$$\lambda_i g_i = 0 \quad (\text{B.14-d})$$

La condition de complémentarité impose de ne pas avoir en même temps $\lambda_i = 0$ et $g_i = 0$. Les equations (B.14-a) à (B.14-d) permettront d'écrire alors, tous calculs faits :

$$\lambda_1 = \sqrt{2} \left(D_{xy} + D_{xx} \frac{T}{S} \right) \quad (\text{B.15-a})$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{2} D_{xx} \frac{\sqrt{S^2 + T^2}}{S} \quad (\text{B.15-b})$$

Il est clair que λ_2 ne peut s'annuler sous peine d'avoir $D_{xx} = 0$; en effet, aucune limitation autre que $\text{tr}(\underline{\underline{D}}) = 0$ n'est imposée au tenseur $\underline{\underline{D}}$. Ceci mène tout naturellement à avoir $g_2 = 0$ et ce, en vertu de la condition de complémentarité.

$$g_2 = 0 \implies \sqrt{S^2 + T^2} = \sqrt{2} C^+(\alpha) \quad (\text{B.16})$$

Il reste à discuter suivant les valeurs de λ_1 :

□ $\lambda_1 = 0$: dans ce cas on a nécessairement $T/S = -D_{xy}/D_{xx}$ et en vertu de la relation (B.16)

$$S = \sqrt{2} C^+(\alpha) \frac{|D_{xx}|}{\sqrt{D_{xx}^2 + D_{xy}^2}} \quad (\text{B.17-a})$$

$$T = \sqrt{2} C^+(\alpha) \frac{|D_{xy}|}{\sqrt{D_{xx}^2 + D_{xy}^2}} \quad (\text{B.17-b})$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\pi^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}}) = -f = 2C^+(\alpha) \sqrt{D_{xx}^2 + D_{xy}^2} \quad (\text{B.18})$$

$$C^+(\alpha) \frac{|D_{xx}|}{\sqrt{D_{xx}^2 + D_{xy}^2}} \leq C \quad (\text{B.19})$$

□ $\lambda \geq 0$: on aura alors toujours d'après la condition de complémentarité $T - \sqrt{2}C = 0$, ou encore :

$$T = \sqrt{2}C \quad (\text{B.20-a})$$

$$S = \sqrt{2}C^+(\alpha) \sqrt{1 - \left(\frac{C}{C^+(\alpha)}\right)^2} \quad (\text{B.20-b})$$

En posant à priori :

$$\min_{\alpha} \left\{ \frac{C}{C^+(\alpha)} \right\} = \frac{C}{\langle C \rangle} = \sin 2\beta_0 \quad (\text{B.21})$$

et en faisant usage des relations (B.6) :

$$\pi(\beta) = \begin{cases} \infty & \text{si } \text{tr}(\underline{\underline{D}}) \neq 0 \\ 2C^+(\alpha) & \text{si } \sin 2\beta \leq \sin 2\beta_0 \\ 2C^+(\alpha) |\cos 2(\beta - \beta_0)| & \text{si } \sin 2\beta \geq \sin 2\beta_0 \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

avec :

$$\sin 2\beta_0 = \frac{1}{r} = \frac{C}{\langle C \rangle} = \frac{1}{1 + (k-1)\eta}; \quad 0 \leq \beta_0 \leq \frac{\pi}{4} \quad (\text{B.23})$$

La fonction $\pi(\underline{n}; \underline{V})$ peut bien évidemment être déduite à partir de l'expression (B.22) : il suffira en effet de prendre $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{n} \otimes \underline{V} + \underline{V} \otimes \underline{n})$, d'exprimer $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{V} = [\underline{v}]$ dans le repère $(\underline{n}; \underline{t})$ défini par :

$$\underline{n} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)\underline{e}_x - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)\underline{e}_y \quad ; \quad \underline{t} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)\underline{e}_x + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)\underline{e}_y \quad (\text{B.24})$$

et en imposant à la composante normale de \underline{V} d'être nulle, on obtient :

$$D_{xx} = \frac{1}{2}|\underline{V}|\cos 2\beta \quad ; \quad D_{xy} = -D_{yx} = \frac{1}{2}|\underline{V}|\sin 2\beta \quad (\text{B.25})$$

Il suffira alors d'appliquer les formules B.6 au calcul de D_1 pour avoir l'expression de $\pi(\underline{n}; \underline{V})$.

B. Détails de calcul de la fonction $\pi(\beta)$

La fonction $\pi(\beta)$ possède les propriétés remarquables suivantes :

$$\pi(\beta) = \pi(-\beta) \quad (\text{B.26a})$$

$$\int_a^b \pi(\beta) d\beta = \int_{-b}^{-a} \pi(\beta) d\beta \quad (\text{B.26b})$$

La fonction $\pi(\beta)/\sqrt{2}$ a une interprétation géométrique simple dans le plan déviateur $(S, T\sqrt{2})$: en effet, elle apparaît comme la distance à l'origine de la droite de normale $(\cos 2\beta, \sin 2\beta)$ tangente à la courbe définie par $\rho = \sqrt{2}C(\alpha)$.

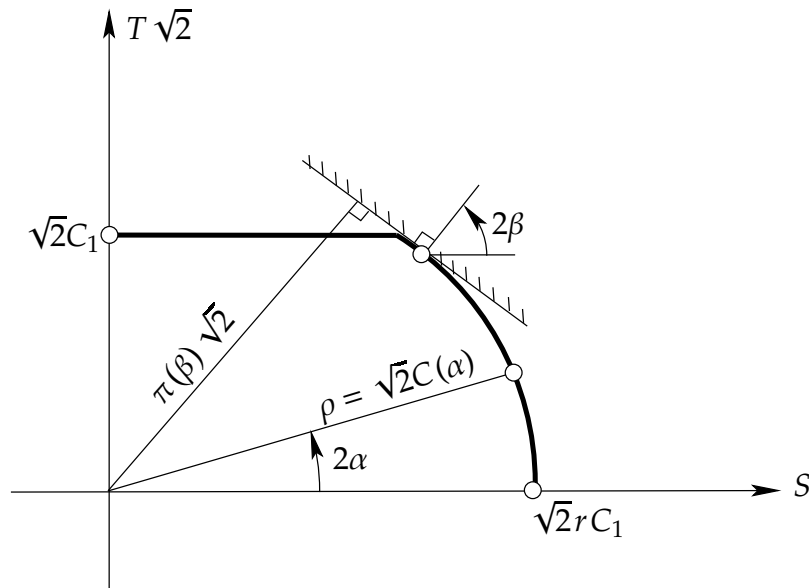


FIG. B.1: Interprétation géométrique de la fonction $\pi(\beta)$ dans le plan déviateur

C. Établissement de l'expression de la cohésion anisotrope $C(\alpha)$

Sommaire

C.1. Établissement d'une expression de $C(\alpha)$	122
--	-----

C.1. Établissement d'une expression de $C(\alpha)$

Afin d'établir une expression de la cohésion anisotrope $C(\alpha)$, définissons sur la cellule de base, un champ de contrainte tel que :

dans le sol initial

$$\underline{\underline{\sigma}}^s = \Sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \Sigma_{xy} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \sigma_{yy}^s \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \Sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (\text{C.1a})$$

dans la colonne

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = \Sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \Sigma_{xy} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \sigma_{yy}^r \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \Sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (\text{C.1b})$$

Un champ de contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ appartient au domaine G^{hom} si et seulement si, il vérifie :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = (1 - \eta) \underline{\underline{\sigma}}^s + \eta \underline{\underline{\sigma}}^r \quad (\text{C.2a})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \underline{e}_1 = \underline{\underline{\sigma}}^r \cdot \underline{e}_2 \quad (\text{C.2b})$$

$$\sigma_M^{(i)} - \sigma_m^{(i)} \leq 2C_i, \quad i, j = s, r \quad (\text{C.2c})$$

Il s'en suit que le champ de contrainte $\underline{\underline{\Sigma}}$ s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \Sigma_{xy} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \Sigma_{yy} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \Sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (\text{C.3a})$$

$$\Sigma_{yy} = (1 - \eta) \sigma_{yy}^s + \eta \sigma_{yy}^r \quad (\text{C.3b})$$

La contrainte Σ_{zz} étant intermédiaire.

On supposera par la suite que la direction de la contrainte principale majeure $\sigma_M^{(i)}$, $i, j = 1, 2$ est orientée de l'angle α_i par rapport à l'axe vertical des colonnes Oy , et que celle du tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}$ est orientée de α par rapport au même axe.

En utilisant la représentation de Mohr pour les contraintes, on remarquera tout d'abord que

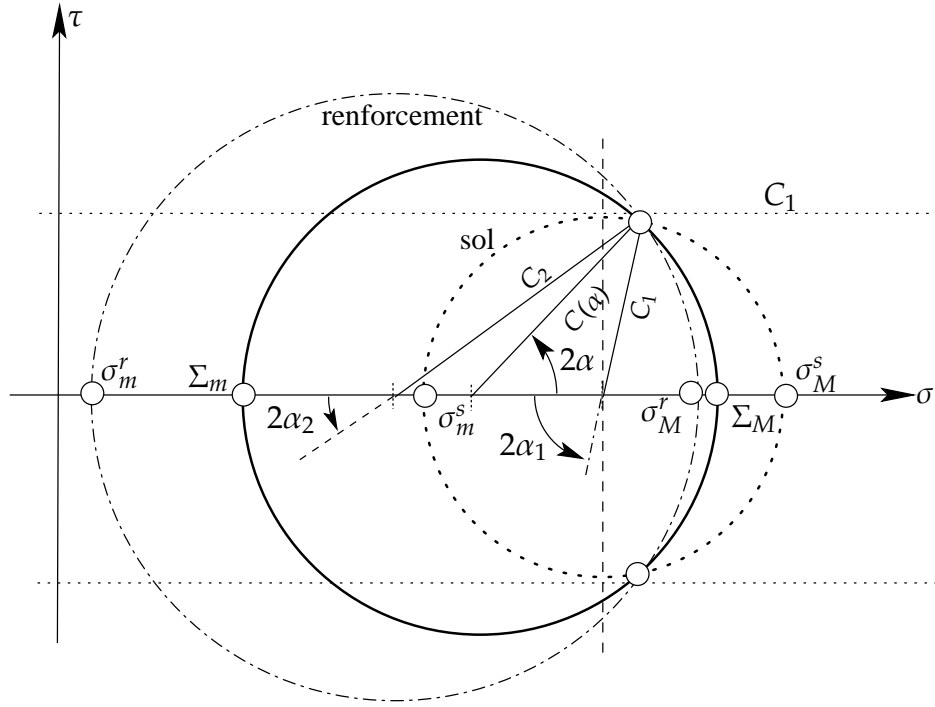


FIG. C.1: Représentation de Mohr

les trois cercles représentatifs de $\underline{\underline{\sigma}}^s$, $\underline{\underline{\sigma}}^r$ et $\underline{\underline{\Sigma}}$ passent par un même point (continuité de \underline{T}), et la détermination de la cohésion anisotrope $C(\alpha)$ se ramène alors à la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\max(\Sigma_M - \Sigma_m) \quad \text{tel que} \quad (C.4a)$$

$$\sigma_M^s - \sigma_m^s - 2C_1 \leq 0 \quad (C.4b)$$

$$\sigma_M^r - \sigma_m^r - 2C_2 \leq 0 \quad (C.4c)$$

$$(\Sigma_M - \Sigma_m) \sin 2\alpha - (\sigma_M^s - \sigma_m^s) \sin 2\alpha_1 = 0 \quad (C.4d)$$

$$(\Sigma_M - \Sigma_m) \sin 2\alpha - (\sigma_M^r - \sigma_m^r) \sin 2\alpha_1 = 0 \quad (C.4e)$$

Ce problème peut être réécrit sous la forme équivalente suivante :

C. Établissement de l'expression de la cohésion anisotrope $C(\alpha)$

$$\min(-\Sigma_M + \Sigma_m) \quad \text{s.t} \quad (\text{C.5a})$$

$$g_1 : \frac{\Sigma_M - \Sigma_m}{\sin 2\alpha_1} \sin 2\alpha - 2C_1 \leq 0 \quad (\text{C.5b})$$

$$g_2 : \frac{\Sigma_M - \Sigma_m}{\sin 2\alpha_2} \sin 2\alpha - 2C_2 \leq 0 \quad (\text{C.5c})$$

Par ailleurs, la vérification des conditions (C.2) et en particulier, la continuité du vecteur contrainte \underline{T} permet d'écrire :

$$(\Sigma_M - \Sigma_m) \sin 2\alpha = (\sigma_M^s - \sigma_m^s) \sin 2\alpha_1 = (\sigma_M^r - \sigma_m^r) \sin 2\alpha_2 \quad (\text{C.6a})$$

$$(\sigma_M^s + \sigma_m^s) - (\sigma_M^s - \sigma_m^s) \cos 2\alpha_1 = (\sigma_M^r + \sigma_m^r) - (\sigma_M^r - \sigma_m^r) \cos 2\alpha_2 \quad (\text{C.6b})$$

$$(\sigma_M^s + \sigma_m^s) - (\sigma_M^s - \sigma_m^s) \cos 2\alpha_1 = (\Sigma_M + \Sigma_m) - (\Sigma_M - \Sigma_m) \cos 2\alpha \quad (\text{C.6c})$$

Le problème (C.5) étant convexe en Σ_M et Σ_m , l'écriture des conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker pour le résoudre conduit à :

$$\lambda_1 \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha_1} + \lambda_2 \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha_2} = 1 \quad (\text{C.7a})$$

$$\lambda_1 \cdot g_1 = 0 \quad (\text{C.7b})$$

$$\lambda_2 \cdot g_2 = 0 \quad (\text{C.7c})$$

$$\lambda_1 \geq 0 \quad (\text{C.7d})$$

$$\lambda_2 \geq 0 \quad (\text{C.7e})$$

λ_1 et λ_2 sont les multiplicateurs de Lagrange.

Il est clair, d'après les capacités de résistance du sol et des colonnes, que le critère de résistance du sol sera le premier à être saturé si on augmente le chargement, après quoi, la résistance des colonnes sera mobilisée. En d'autres termes, si $g_1 \leq 0$ et $g_2 < 0$, le sol résistera tout seul au chargement sans avoir besoin d'être renforcé. Les cas extrêmes pouvant être envisagés sont $g_2 \leq 0$ et $g_1 = 0$, ou $g_1 = 0$ et $g_2 = 0$.

si $g_1 = 0$ et $g_2 \leq 0$: dans ce cas on aura $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = \sin 2\alpha_1 / \sin 2\alpha$. En maximisant alors $(\Sigma_M - \Sigma_m)$ tout en respectant le fait que $g_2 \leq 0$, on aura pour tout angle α ; $0 \leq \alpha \leq \pi/4$, la cohésion anisotrope $C(\alpha)$ est définie par :

$$C(\alpha) = \frac{C_1}{\sin 2\alpha} \quad (\text{C.8})$$

si $g_1 = 0$ et $g_2 = 0$: les deux critères sont alors saturés ; la relation (C.6c) fournit alors deux équations dont la combinaison donnera :

$$C(\alpha) \cos 2\alpha = (1 - \eta) C_1 \cos 2\alpha_1 + \eta C_2 \cos 2\alpha_2 \quad (\text{C.9})$$

A partir de (C.6a), on aura alors :

$$C_1 \cos 2\alpha = C(\alpha) \sin 2\alpha \quad (\text{C.10})$$

qui permet de réécrire l'équation (C.9) sous la forme :

$$C(\alpha) \cos 2\alpha = (1 - \eta) \sqrt{C^2 - C(\alpha)^2 \sin^2 2\alpha} + \eta \sqrt{(kC)^2 - C(\alpha)^2 \sin^2 2\alpha} \quad (\text{C.11})$$

Cette relation fournit une définition implicite de la cohésion anisotrope $C(\alpha)$. On remarque tout de suite qu'en vertu de l'équation (C.11), on a :

$$C(\alpha) = C(-\alpha) = C\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad (\text{C.12})$$

La définition (C.11) n'est bien évidemment valable que lorsque $C_1 - C(\alpha) \sin 2\alpha \geq 0$.

En posant :

$$\frac{C_1}{C(\alpha_0)} \quad (\text{C.13})$$

Alors, l'angle α_0 à partir duquel la relation (C.11) ne sera plus valable est, d'après (C.11) et (C.12) :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{C_1}{\eta \sqrt{C_2^2 - C_1^2}} \right) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{\eta \sqrt{k^2 - 1}} \right) \quad (\text{C.14})$$

où l'on a posé $k = C_2/C_1$.

Bibliographie

- [1] Dhouib A. and Blondeau F. *Colonnes ballastées, techniques de mise en œuvre, domaines d'application, comportement, justification, contrôle, axes de recherche et développement*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées-Paris, 2005.
- [2] Broms B B. Lime and lime/columns. summary and visions. In *Proc. 4th Int. Conf. On Ground Improvement Geosystems :keynotes lecture - Helsinki*, pages 43–93, 2002.
- [3] Jellali B., Bouassida M., and de Buhan P. A homogenization method for estimating the bearing capacity of soils reinforced by columns. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*, (29) :989–1004, 2005.
- [4] Jellali B., Bouassida M., and de Buhan P. A homogenization approach to estimate the ultimate bearing capacity of a stone column-reinforced foundation. *First Euro Mediterranean in Advances on Geomaterials and Structures–Hammamet, Tunisia*, 3–5 May 2006.
- [5] Caquot and Kérisel. Table de poussée et de butée. DTU13-1.
- [6] de Buhan P. Détermination de la capacité portante d'une fondation sur sol renforcé par une méthode d'homogénéisation. In *Coll. Int. Renf. des sols en place, Paris*, pages 127–132, 1984.
- [7] de Buhan P. *Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sol renforcé*. PhD thesis, Université P. & M. Curie, Paris VI, 1986.
- [8] de Buhan P. Renforcement par inclusions des sols et des roches : de la modélisation mécanique au calcul des ouvrages. A paraître dans la Revue Européenne de Génie Civil, 2004.
- [9] de Buhan P. *Cours de plasticité et calcul à la rupture*. ENPC, France, 2004–2005.
- [10] de Buhan P. and Taliencio A. A homogenisation approach to the yield strength of composite materials. *Eur. J. Mech.A/Solids*, 10(2) :227–232, 1987.
- [11] de Buhan P. and de Felice G. A homogenization approach to the ultimate strength of brick masonry. *J. Mech. Phys. Solids*, 45(7) :1085–1104, 1997.
- [12] de Buhan P. and L. Dormieux. Approche du critère de résistance macroscopique d'un sol renforcé par colonnes. *C.R. Acad. Sci.*, (Série II), 1993.

- [13] de Buhan P. and Salençon J. Analyse de stabilité des ouvrages en sols renforcés par une méthode d'homogénéisation. *Revue Française de Géotechnique*, (41) :29–43, 1987.
- [14] de Buhan P., Dormieux L., and Maghous S. Stabilité d'un talus vertical : amélioration de la borne cinématique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 317(Série II) :131–136, 1993.
- [15] Jossieron E. Capacité portante des fondations sous sollicitations sismiques. Technical report, Centre commun ENPC–Ecole Polytechnique, France, février 1994.
- [16] Chen W. F. *Limit analysis and soil plasticity*. Elsevier Scientific Publishing Company, 1975.
- [17] Guetif Z., Fessi, Bouassida M., and de Buhan P. Prédiction du tassement d'un sol renforcé par colonnes à l'aide d'un modèle poro-élastique. pages 155–162, 9-10 Septembre 2004.
- [18] NAG Foundation. *NAG toolbox.pdf : Essential Introduction*.
- [19] Broms B. G. Lime columns in theory and practice. pages 149–165, 1982.
- [20] Aboshi H., Ichimoto E., and Harada K. A method to improve characteristics of soft clays by inclusion of large diameter sand columns. *The Composer, Colloque Int. sur le renforcement des sols, Paris*, 01 :211–216, 1979.
- [21] Salençon J. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses des Ponts et Chaussées-Paris, 1993.
- [22] Salençon J. *Application of the theory of plasticity in soil mechanics*. J. Willey et Sons, 1974.
- [23] Salençon J. An introduction to the yield design theory and its applications to soil mechanics. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 09(05) :447–500, 1990.
- [24] Salençon J. Yield design : a survey of the theory. in evaluation of global bearing capacities of structures. volume CISM courses and lectures, pages 1–44. Springer-Verlag, Wien, New York, 1993.
- [25] Salençon J. and Tristan-Lopez A. Calcul à la rupture en mécanique des sols : cas des sols cohérents anisotropes. Number 413, pages 53–83. *Annales de l'I.T.B.T.P*, 1983.
- [26] Terzaghi K. *Theoretical soil mechanics*. John Wiley & Sons, 1943.
- [27] Siad L. and Megueddem M. Stability analysis of jointed rock slope. *Mechanics Research Communications*, 25(6) :661–670, 1998.
- [28] Bouassida M. *Détermination de la capacité portante des fondations posées sur un sol renforcé par colonnes*. PhD thesis, ENIT, 1996.
- [29] Bouassida M. étude expérimentale du renforcement de la vase de tunis par colonnes de sable-application pour la validation de la résistance en compression théorique d'une cellule composite confinée. *Revue Française de Géotechnique*, (75) :03–12, 1996.
- [30] Bouassida M. Bearing capacity of soils reinforced by floating columns. In *Proc. 4th Int. Conf. on Ground Improvement Geosystems including reinforcement, Helsinki*, pages 439–448, 7–9 June 2000.

- [31] Bouassida M. and Porbaha A. Ultimate bearing capacity of soft clays reinforced by a group of columns—application to a deep mixing technique. *Soils & Foundations*, 44(3) :91–101, June 2004.
- [32] Bouassida M. and Jellali B. Capacité portante d'un sol renforcé par une tranchée. *Revue Française de Génie Civil*, (06(07-08)) :1381–1395, 2002.
- [33] Bouassida M., de Buhan P., and Dormieux L. Bearing capacity of a foundation resting on a soil reinforced by a group of columns. *Géotechnique*, 45(01) :25–34, 1995.
- [34] Bouassida M. and Hadhri T. Extreme load of soils reinforced by columns : The case of an isolated column. *Soils and Foundations*, 35(01) :21–36, 1995.
- [35] Bouassida M. and Hadhri T. Extreme load of soils reinforced by columns : The case of an isolated column : discussion proposed by porbaha a. *Soils and Foundations*, 36(01) :117–119, 1996.
- [36] Bouassida M., Guetif Z., de Buhan P., and Dormieux L. Estimation du tassement en élasticité linéaire d'une fondation rigide sur sol renforcé par colonnes. In *Comptes Rendus Séminaire International GEOMAT'02, Algerie*, pages 01–13, 10–11 mars 2003.
- [37] Bustamante M., Jacquard C., and Berthelot P. Comportement á long terme de colonnes ballastées pilonnées. pages 345–348. Actes de la 10^{ème} conférence européenne de Mécanique des Sols et des Travaux de Fondations. Florence, 1991.
- [38] Debat J. M., Guetif Z., and Bouassida M. Soft soil improvement due to vibrocompacted columns installation. In *Proc. International Workshop on Geotechnics of soft soils-Theory and practice. Noordwijkerhout-Netherlands*, pages 551–556. Vermer et al Eds, September 2003.
- [39] Suquet P. *Plasticité et homogénéisation*. PhD thesis, Paris VI, 1982.
- [40] Suquet P. Analyse limite et homogénéisation. *C.R.A.S, Paris*, (t.296, Série II) :1355–1358, 1983.
- [41] Madhav M. R. and Vitkar P. P. Stripfooting on weak clay stabilized with a granular trench or pile. *Can. Geotech. Journal*, 1978.
- [42] Barksdale R.D. and Bachus R.C. Design and construction of stone columns. Technical Report Vol 1. Final report n° FHWA/RD 83–06, US Federal Highway Administration, Washington, 1983.

Déclaration

Le travail de cette thèse est basé sur les recherches entreprises au Département de Génie Civil de l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, en collaboration, dans le cadre d'un projet CMCU, avec le Laboratoire LMSGC de l'École Nationale de Ponts et Chaussées, France. Aucune partie de cette thèse n'a été soumise ailleurs pour l'obtention d'une quelconque qualification. Sauf mention explicite des développements cités dans le texte, cette thèse est le résultat de mon propre travail.

Copyright © ; 2006 by Belgacem JELLALI.

