



HAL
open science

Transport dans les condensats de Bose-Einstein uni-dimensionnels desordonnes

Nicolas Bilas

► **To cite this version:**

Nicolas Bilas. Transport dans les condensats de Bose-Einstein uni-dimensionnels desordonnes. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2006. Français. NNT: . tel-00083364

HAL Id: tel-00083364

<https://theses.hal.science/tel-00083364>

Submitted on 30 Jun 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE PARIS XI – U.F.R. DES SCIENCES D'ORSAY

Thèse de doctorat de l'université Paris 11

Spécialité :

Physique Théorique

présentée par

Nicolas BILAS

pour obtenir le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 11

Sujet :

Transport dans les condensats
de Bose-Einstein uni-dimensionnels désordonnés

*Soutenue le 23 Juin 2006
devant le jury composé de*

<i>Messieurs</i>	Philippe BOUYER	<i>Examineur</i>
	Franco DALFOVO	<i>Rapporteur</i>
	Marc GABAY	<i>Président du jury</i>
	Leonid PASTUR	<i>Examineur</i>
	Nicolas PAVLOFF	<i>Directeur de thèse</i>
	Bart VAN TIGGELEN	<i>Rapporteur</i>

Prie Dieu, mais continue de nager vers le rivage

Remerciements

Cher lecteur, qui que vous soyez, sachez que si vous êtes en train de lire ces lignes vous avez le droit à toute ma sympathie et mon estime et je vous invite vivement à ne pas vous décourager et à commencer la lecture de ce mémoire.

Mais avant toute chose mon honnêteté morale m'impose de vous dire que cette thèse n'aurait jamais pu exister sans l'aide précieuse de différentes personnes impliquées de près ou de loin dans le bon déroulement de ce travail.

Je tiens à remercier en tout premier lieu Nicolas PAVLOFF d'avoir bien voulu encadrer ce travail de thèse avec toute sa sympathie et son amabilité quotidiennes, je n'aurais jamais pu imaginer un directeur de thèse avec plus de disponibilités et de meilleures qualités humaines.

Toute ma reconnaissance va aussi Franco DALFOVO et Bart VAN TIGGELEN d'avoir accepté la responsabilité de rapporter cette thèse. Je remercie aussi Philippe BOUYER de bien avoir voulu apporter un regard de physicien-expérimentateur sur ce travail, Marc GABAY d'avoir accepté de présider le jury et Leonid PASTUR, mon "presque compatriote", pour avoir apporté son prestigieux regard sur ce travail.

J'ai bien entendu aussi une pensée pour mes "collègues-thésard" : Mélanie, Jérôme et Yacine pour les bons moments et l'ambiance agréable que l'on aura partagé ensemble au bureau. Je remercie aussi Alberto pour les quelques joggings que l'on aura fait ensemble quand le courage ne nous manquait pas et d'une manière générale, je remercie tous les membres du LPTMS pour leur sympathie et la bonne ambiance du laboratoire qui m'aura permis de bénéficier de conditions de travail excellentes .

Je remercie aussi mes différents amis en particulier Christophe, Rudy et mon "collègue-thésard" Yacine de m'avoir initié les rudiments de programmation.

Mes plus grands remerciements vont bien entendu à ma famille, mes parents et ma soeur pour m'avoir encouragé pendant toutes ces années d'études, pour leur confiance qu'ils ont eu en moi et pour avoir été mes meilleurs supporters...

Table des matières

Remerciements	5
Introduction	11
1 La condensation de Bose-Einstein : Généralités	15
1.1 Notions générales	15
1.1.1 Quelques aspects de mécanique statistique	15
1.1.2 Notions expérimentales	20
1.2 Théorie de champ moyen et équation de Gross-Pitaevskii	23
1.3 Fluctuations autour du champ moyen	26
1.3.1 Théorie de Bogoliubov	26
1.3.2 Equations hydrodynamiques	30
1.4 Condensation de Bose Einstein uni-dimensionnelle	32
1.4.1 Quelques généralités sur la condensation en dimension inférieure à trois	32
1.4.2 Passage $3D \rightarrow 1D$	34
1.4.3 Régime de Thomas-Fermi transverse : $an_1 \gg 1$	37
1.4.4 Régime de champ moyen $1D$: $(a/a_\perp)^2 \ll an_1 \ll 1$	39
1.4.5 Fluctuations de la phase	40
1.4.6 Vers le régime de Tonks	43
1.4.7 Equations hydrodynamiques à une dimension	44
1.5 Résumé de la situation	48
2 Les Solitons	49
2.1 Introduction	49
2.2 Equation de Schrödinger non-linéaire (NLS) attractive	50
2.2.1 Solution de l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLS) attractive	50
2.2.2 Observation expérimentale	53
2.3 Equation de Schrödinger non-linéaire (NLS) répulsive	53

2.3.1	Quelques arguments qualitatifs	54
2.3.2	Solution de l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLS) répulsive	55
2.3.3	Observation expérimentale	59
2.4	Méthode inverse	60
2.4.1	Généralités	60
2.4.2	Equations de Zakharov et Shabat	62
2.5	Soliton incident sur un obstacle de taille finie	64
2.5.1	Modèle	65
2.5.2	Méthode Lagrangienne	66
2.5.3	méthode perturbative	67
3	Soliton sombre dans un milieu désordonné	87
3.1	Généralités	87
3.2	Onde linéaire dans un milieu désordonné	88
3.3	Soliton brillant dans un milieu désordonné	90
3.3.1	Diffusion d'un soliton brillant par un pic δ	90
3.3.2	Diffusion d'un soliton brillant par une succession aléatoire de pics δ	93
3.4	Soliton sombre dans un condensat désordonné	94
3.5	Résumé de la situation	99
4	Localisation d'une excitation élémentaire	101
4.1	Introduction	101
4.2	Diffusion d'une excitation élémentaire sur un pic δ	103
4.3	Méthode des matrices de transfert	105
4.4	La méthode du formalisme de phase	107
4.5	Excitation élémentaire dans un condensat désordonné	109
	Conclusion et Perspectives	121
A	Longueur de diffusion	123
B	Energie du fondamental et équation d'état	127
B.1	Energie du fondamental et équation d'état	127
B.1.1	Approximation à l'ordre le plus bas	127
B.1.2	Approximation au premier ordre	129
B.2	Au-delà du champ moyen	131

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	9
C Equations hydrodynamiques : Régime de Thomas-Fermi transverse	133
C.1 Condensat de longueur finie	133
C.2 Condensat de longueur infinie	135
D Equation de Fokker-Planck	137
E Nouveau chapitre de la thèse	141
E.0.1 Introduction	142
E.0.2 Le projet de thèse	145
E.0.3 Compétences	148
E.0.4 Pistes professionnelles	149
E.0.5 Conclusion	149
Bibliographie	151

Introduction

Depuis sa découverte au début du vingtième siècle, la mécanique quantique a permis de faire des progrès considérables dans la compréhension des lois fondamentales qui régissent le comportement de la nature à l'échelle microscopique. Les théories quantiques ont été à l'origine de la compréhension et de la prédiction d'un très grand nombre de phénomènes. Dans cette thèse, nous nous concentrerons sur l'une des ses implications en matière condensée : le phénomène de condensation de Bose-Einstein.

Nous en présenterons les concepts dans le premier paragraphe de ce manuscrit mais rappelons juste, que suite aux travaux de Bose, Einstein prédit en 1924, une transition de phase à très basse température, lorsque la longueur d'onde thermique $h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ devenait de l'ordre de la distance inter-atomique, où le système présentait une quantité macroscopique d'atomes dans le niveau fondamental. Dans un condensat de Bose-Einstein, les paquets d'ondes des bosons individuels se recouvrent entre eux et forment alors une seule onde quantique macroscopique cohérente.

Mais cette prédiction théorique n'eut pas un impact expérimental immédiat, Einstein écrit d'ailleurs sur ce sujet, dans une lettre à son ami Ehrenfest : "cette théorie est belle, mais est-elle vraie?".

Il faudra attendre une assez longue période, un peu moins de quinze années durent alors se dérouler, avant que le domaine redevienne d'actualité. C'est en 1938, immédiatement après la découverte de la superfluidité de l'hélium liquide par Allen, Misener [4] et Kapitza [3] que F. London eut l'idée de relier la superfluidité au phénomène de condensation de Bose-Einstein ¹. Celui-ci remarqua en effet que la température critique de transition de superfluidité $T_s = 2.2\text{K}$ était assez proche de celle de condensation de Bose $T_B = 3.2\text{ K}$, d'un gaz parfait ayant la densité de l'hélium.

Ceci marqua alors le début des théories modernes sur l'hélium liquide et initia le début d'un nombre important de recherches visant à éclaircir et relier précisément ces deux phénomènes².

On obtint différents résultats, on peut citer à ce sujet, la notion de vitesse critique introduite par Landau [2], les travaux de Bogoliubov [8] permettant de décrire le spectre d'excitation, ou bien encore la prédiction de vortex quantifiés par Onsager (1949) et Feynmann (1955) et leur découverte expérimentale par Hall et Vinen en 1956. Mais l'hélium en tant que système présentait une complication majeure pour une description microscopique du système : dans une phase condensée les interactions sont très importantes et compliquent la description théorique

¹L'hélium liquide, liquéfié, pour la première fois par Kammerlingh Onnes, en 1913 constitue en fait un condensat de Bose-Einstein liquide.

²Quelques grands noms de la physique qui furent impliqués sur le sujet comme R. Feynmann ou encore L. Landau [2],[9].

du système³. Alors que dans le cas d'un gaz parfait, on s'attend à avoir 100% d'atomes dans le fondamental à température nulle, on n'en a que 8% pour l'hélium.

La recherche sur les condensats gazeux commença, quant à elle, à se développer dans les années 70, profitant de nouvelles techniques de la physique atomique basées sur le piégeage optique et magnétique et sur des mécanismes de refroidissement. Dans les années 80 furent développées différentes techniques de refroidissement laser et de piégeage magnéto-optique et c'est ainsi qu'au final, en 1995, les groupes de E.A. Cornell et C.W. Wieman à Boulder et W. Ketterle au M.I.T. obtinrent les premiers condensats gazeux. Ces travaux furent récompensés par l'obtention du prix Nobel en 2001.

Dès lors, différents champs d'études connurent des avancées très importantes aussi bien au point de vue théorique, qu'expérimental comme par exemple l'étude des excitations élémentaires de type vortex [10, 11], solitons ou autre phonons. En effet les condensats gazeux (c'est-à-dire en milieu dilué), constituent un système unique de la physique des problèmes à N corps : ils sont suffisamment simples pour permettre une description théorique et quantitative tout en offrant une grande panoplie de phénomènes non-triviaux et constituent ainsi un véritable "laboratoire" d'étude du problème à N corps.

D'un point de vue plus conceptuel, l'une des caractéristiques principales de la condensation de Bose-Einstein est la cohérence de phase du système due à l'accumulation des atomes dans le fondamental. Cette cohérence du système a été montrée dans différentes expériences par l'obtention de franges d'interférence en faisant se recouvrir deux condensats, justifiant ainsi le concept de fonction d'onde⁴ macroscopique introduite F. London en 1938.

De plus à l'inverse, du cas de l'hélium liquide, concernant les condensats gazeux dits dilués, on dispose d'un cadre théorique simple pour décrire les interactions entre les atomes en l'équation de "Gross-Pitaevskii". L'équation décrit l'évolution spatio-temporelle à température nulle de la fonction d'onde macroscopique associée au condensat. Celle-ci contient un terme non-linéaire dû aux interactions entre les atomes du condensat, or dans ce modèle les interactions ont l'avantage d'être caractérisées par un seul paramètre : la longueur de diffusion a du potentiel d'interaction qui est positive ou négative suivant que les interactions entre les atomes sont respectivement répulsives ou attractives.

Ainsi, la condensation de Bose-Einstein a permis d'ouvrir de nouvelles opportunités dans l'étude de phénomènes mésoscopiques et en particulier les avancées techniques dans la production et la propagation de condensats de Bose-Einstein dans des guides d'ondes de plus en plus élaborés ont permis l'essor de l'étude de phénomènes de transport quantiques dans des systèmes cohérent de phase⁵.

Le but de cette thèse entre justement dans ce champ d'étude : étudier les phénomènes de transport non-linéaire avec des condensats de Bose-Einstein. C'est un sujet largement interdisciplinaire qui couvre une large palette de toute la physique actuelle : optique atomique, physique de la matière condensée ou bien encore physique non-linéaire...Ainsi cette thématique

³La détermination de la température critique à laquelle intervient la transition superfluide dans l'hélium n'a ainsi pu être déterminé que très récemment [15].

⁴On peut ici rappeler l'analogie avec le laser. Les deux systèmes peuvent s'expliquer par la présence importante d'atomes ou de photons dans un seul et même état quantique. On pourra ainsi trouver dans la littérature le terme de laser à atomes pour décrire un faisceau d'atomes condensés libre issu d'un condensat.

⁵On peut citer à ce sujet les études sur les effets d'interférences quantiques[5], sur les jonctions Josephson[6] ou encore la superfluidité[7] ...

de recherche ouvre un très vaste éventail de débouchés⁶.

Nous avons, dans un premier temps, axé notre étude sur l'une des conséquences sans aucun doute les plus impressionnantes de l'existence de non-linéarité dans les condensats : l'existence de solitons sombres et l'étude de leur dynamique. Puis dans un deuxième temps, nous avons orienté nos travaux sur l'étude de la propagation d'une excitation élémentaire dans un condensat de Bose-Einstein désordonné et les phénomènes de localisation d'onde de matière qui en découlent.

Plus précisément, nous avons étudié des problèmes relatifs à la condensation de Bose-Einstein en dimension inférieure à trois et plus exactement :

- Nous avons commencé par considérer un condensat de Bose-Einstein uni-dimensionnel décrit par des interactions répulsives dans lequel nous avons étudié la diffusion d'un soliton sombre par un obstacle de taille finie.
- Nous avons ensuite généralisé ce problème à la propagation d'un soliton sombre dans un condensat de Bose désordonné.
- Nous nous sommes ensuite attardés à étudier le "destin" des radiations émises lors de la diffusion du soliton par le milieu désordonné. Pour cela, nous avons étudié la propagation d'excitations élémentaires dans un condensat en présence de désordre.

Ainsi le plan de ce manuscrit est le suivant :

- **I** Dans le premier chapitre, on présentera très succinctement les concepts fondamentaux de la condensation de Bose-Einstein, puis l'on s'attardera un peu plus longuement sur le principal "outil théorique" : l'équation de "Gross-Pitaevskii" qui permet de décrire l'évolution spatio-temporelle de la fonction d'onde du condensat. Après avoir décrit la condensation de Bose-Einstein, nous montrerons comment l'on peut étudier les excitations au sein d'un condensat de Bose. Nous introduirons ensuite le phénomène de condensation de Bose dans des pièges très anisotropes et les modèles de condensats uni-dimensionnels qui en découlent.
- **II** Dans le deuxième chapitre, on présentera la physique des solitons sombres dans les condensats de Bose. On décrira l'évolution d'un soliton sombre et en particulier la diffusion d'un soliton sombre sur un obstacle de taille fini : cela sera fait au travers de deux méthodes l'une variationnelle, l'autre perturbative.
- **III** Ensuite, on étudiera la dynamique d'un soliton dans un milieu désordonné, en ayant au préalable présenté les résultats concernant l'évolution d'une onde plane et d'un soliton brillant dans un milieu désordonné.
- **IV** Le dernier chapitre sera consacré à l'étude des phénomènes de localisation et à la propagation d'excitations au sein d'un condensat désordonné. On présentera deux façons d'étudier alors les phénomènes de localisation, l'une reposant sur le formalisme dit de

⁶Nous n'allons faire une liste exhaustive ici de l'ensemble des sujets possibles mais pour en donner une idée, on peut citer :

- Etude des excitations de type vortex ou des solitons,
- Etude des propriétés de superfluidité de ces systèmes [12, 13, 14, 16],
- Etude de la propagation d'un faisceau d'atomes condensés dans un guide de géométrie variable [17, 18],
- Etude de l'impact du désordre sur la propagation d'un faisceau d'atomes condensés,
- Etude des excitations collectives d'un condensat,
- Etude des condensats dans des géométries uni ou bi-dimensionnelles : on peut passer à des géométries inférieures à trois dimensions grâce à des techniques de piégeage fort selon une ou deux directions transverses de sorte qu'à très basse température le mouvement dans la direction transverse soit gelé.

phase et l'autre sur une méthode matrice de transfert.

V Enfin, des points particuliers seront détaillés dans quatre annexes, où :

- nous commencerons par définir la longueur de diffusion,
- la deuxième annexe sera consacrée au calcul des grandeurs caractéristiques du condensat aux deux premiers ordres : énergie du fondamental, pression du gaz, potentiel chimique et déplétion quantique,
- la troisième annexe sera consacrée à la présentation des équations hydrodynamiques dans le régime de Thomas-Fermi transverse,
- la dernière annexe, sera quant à elle, dédiée à la dérivation de l'équation de Fokker-Planck à partir d'une équation stochastique.

Enfin j'établirai une annexe "plus originale", j'ai lors de ma thèse participé à l'exercice du *Nouveau chapitre de la thèse* organisé par *l'Association Bernard Gregory*. Cet exercice est en fait un inventaire et une mise en valeur des compétences qui ont été nécessaires au bon déroulement de la thèse.

Chapitre 1

La condensation de Bose-Einstein : Généralités

Dans ce chapitre, nous commencerons par établir quelques généralités sur la condensation de Bose-Einstein.

Puis nous justifierons qu'un condensat de Bose puisse être décrit par une fonction d'onde macroscopique et nous présenterons l'équation de Gross-Pitaevskii qui décrit l'évolution spatio-temporelle de cette fonction d'onde.

Nous présenterons ensuite une description des excitations (fraction d'atomes non-condensés) dans un condensat de Bose.

Nous établirons enfin les modèles de condensation de Bose quasi-unidimensionnels qui décrivent les condensats dans des pièges très anisotropes.

1.1 Notions générales

1.1.1 Quelques aspects de mécanique statistique

A) Généralités

Considérons un système constitué de N atomes bosoniques identiques, de masse m , sans spin dans l'ensemble grand-canonique, c'est-à-dire que le système peut échanger de l'énergie et des particules avec un réservoir, supposé beaucoup plus grand [24].

Le nombre de particules et l'énergie du système sont alors :

$$N = \langle \hat{N} \rangle, E = \langle \hat{H} \rangle, \quad (1.1)$$

où \hat{N} et \hat{H} sont les opérateurs nombres de particules et hamiltonien du système à N corps.

Dans le cas d'un gaz en interaction la détermination de ces opérateurs est une tâche ardue mais qui se simplifie considérablement dans le cas d'un gaz parfait.

En effet si les particules n'interagissent pas entre elles, l'hamiltonien du système \hat{H} est alors

tout simplement :

$$\hat{H} = \sum_i \hat{h}_i, \quad (1.2)$$

où \hat{h}_i est l'hamiltonien individuel de la i -ième particule.

Si $|n_\nu\rangle$ est la base des vecteurs propres de l'hamiltonien \hat{h} , d'énergie associée ϵ_ν , on peut alors écrire :

$$\hat{h}|n_\nu\rangle = \epsilon_\nu |n_\nu\rangle, \quad (1.3)$$

Les états propres du système à N corps s'écrivent, quant à eux, dans l'espace de Fock sous la forme $|K\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle$. Où le nombre n_ν de particules dans l'état $|n_\nu\rangle$ peut varier de 0 à N en conservant $\sum_\nu n_\nu = N$.

Les opérateurs \hat{H} et \hat{N} vérifient quant à eux :

$$\hat{N}|K\rangle = N_K |K\rangle \text{ avec } N_K = \sum_\nu n_\nu, \quad (1.4)$$

$$\hat{H}|K\rangle = H_K |K\rangle \text{ avec } H_K = \sum_\nu n_\nu \epsilon_\nu, \quad (1.5)$$

où l'indice K représente un état microscopique possible du système ayant une énergie $E = H_K$ et un nombre de particules $N = N_K$.

Le nombre de particules moyen dans l'état $|k\rangle$, s'écrit[25] :

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}. \quad (1.6)$$

Sur cette expression, on peut voir que le potentiel chimique μ est nécessairement borné par l'énergie du fondamental ϵ_0 (afin de ne pas avoir un nombre de particules négatif).

De ce fait, on peut voir que lorsque μ s'approche de sa valeur limite ϵ_0 le nombre de particules N_0 dans l'état fondamental devient macroscopique :

$$\lim_{\mu \rightarrow \epsilon_0} \langle n_0 \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1} \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

C'est ce phénomène que l'on appelle : "Condensation de Bose-Einstein", les atomes se retrouvent tous dans l'état fondamental du système.

B) Cas du gaz dans une boîte

Nous allons ici traiter le cas du gaz dans une boîte de volume V qui fut le cas qu'avait considéré Einstein dans son article originel.

Dans cette situation, l'hamiltonien d'une seule particule est tout simplement :

$$\hat{h} = \frac{p^2}{2m}, \quad (1.8)$$

et les vecteurs propres φ_p de (1.8) s'écrivent pour des conditions aux limites périodiques :

$$\varphi_p = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}}. \quad (1.9)$$

Dans cette situation, l'état d'énergie le plus bas ϵ_0 correspond à $p = 0$, c'est-à-dire $\epsilon_0 = 0$ et comme expliqué précédemment le potentiel chimique est lui négatif.

Le nombre de particules excitées N_T (c'est-à-dire pour $p \neq 0$) se déduit quant à lui via la fonction grand-canonique¹ :

$$N_T = \sum_{p \neq 0} \frac{1}{\exp[\beta(p^2/2m - \mu)] - 1} = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(e^{\beta\mu}), \quad (1.10)$$

avec

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}}, \quad (1.11)$$

et

$$g_{3/2}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{3/2}}, \quad (1.12)$$

Ainsi le nombre total de bosons N dans la boîte s'écrit :

$$N = N_0 + N_T, \quad (1.13)$$

où N_0 est le nombre d'atomes dans l'état fondamental. Celui-ci pour un potentiel chimique quelconque est de l'ordre de l'unité, et le nombre d'atomes excités N_T est à peu près égal au nombre total d'atomes N , soit $N \simeq N_T$.

En revanche, comme discuté dans le paragraphe précédent lorsque le potentiel chimique tend vers l'énergie du fondamental ϵ_0 , la population du fondamental devient macroscopique et le nombre d'atomes dans le fondamental N_0 est à peu près égal au nombre total d'atomes N , soit $N \simeq N_0$.

On peut alors obtenir la température critique de condensation à partir de (1.10) (dans la limite où μ tend vers zéro), soit :

$$k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{n}{g_{3/2}(1)} \right)^{2/3}, \quad (1.14)$$

avec $g_{3/2}(1) = 2.612$.

Ainsi la température de transition est entièrement déterminée par la densité du gaz et la masse de ses constituants.

¹Pour faire ce calcul nous avons remplacé la somme discrète \sum_p par une intégrale $V/(2\pi\hbar)^3 \int$. Ceci se justifie en fait lorsque l'énergie thermique est grande devant l'écart entre le fondamental et le premier niveau excité, soit :

$$k_B T \gg \delta \epsilon \text{ avec } \delta \epsilon = \frac{\hbar^2}{2mV^{2/3}}.$$

Dans ce cas, on peut considérer le spectre d'énergie comme continu.

Plus précisément la température critique dans une boîte s'écrit :

$$T_c = 6.68 \cdot 10^{-18} \left(\frac{n}{m_a} \right)^{2/3}, \quad (1.15)$$

où m_a est la masse atomique sans dimension et n est exprimé en atomes/m³.

Ainsi la température de condensation semble très faible même pour des densités élevées, par exemple si l'on reprend, l'exemple de l'hélium cité dans l'introduction, on obtient $T_c \simeq 3.2$ K pour $n = 1.3 \cdot 10^{27}$ atomes/m³ et $m_a = 4$

En fait la condensation de Bose a été réalisée dans les années 90 en utilisant un gaz de boson dilué dans un piège harmonique.

Nous présenterons donc dans le prochain paragraphe le cas des bosons piégés dans un potentiel.

C) Cas du gaz piégé dans un potentiel harmonique

Considérons, désormais, pour être plus précis, la situation plus expérimentale où le gaz de bosons toujours idéal est piégé dans un potentiel harmonique isotrope sous la forme :

$$V_{\text{ext}}(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2). \quad (1.16)$$

Les bosons sont alors répartis sur différents niveaux individuels de \hat{h} caractérisés par trois nombres quantiques (n_x, n_y, n_z) , la valeur propre ϵ_n de \hat{h} étant égale alors à :

$$\epsilon_n = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + 3/2) = n\hbar\omega + \epsilon_0, \quad (1.17)$$

avec

$$n \equiv (n_x + n_y + n_z) \text{ et } \epsilon_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega. \quad (1.18)$$

Si l'on prend alors pour zéro d'énergie, l'énergie de l'état fondamental, les valeurs propres de l'hamiltonien \hat{h} à une particule valent $\epsilon_n = n\hbar\omega$ et le nombre moyen de particule n_k occupant un état individuel à une particule associé au niveau d'énergie ϵ_n peut alors s'écrire en prenant $\mu = \epsilon_0 = 0$:

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta n \hbar \omega} - 1}, \quad (1.19)$$

avec :

$$z = e^{\beta\mu} \text{ et } \frac{\hbar\omega}{k_B T} \ll 1, \quad (1.20)$$

où z est la fugacité.

Le nombre moyen de bosons piégés dans le potentiel est alors :

$$N = N_0 + N_T = \frac{z}{1-z} + N_T, \quad (1.21)$$

où N_0 est le nombre de particules dans l'état fondamental (la limite où ce nombre est macroscopique correspond à une situation où $\mu \rightarrow 0$, c'est-à-dire $z \rightarrow 1$).

Concernant le nombre d'atomes non-condensés N_T , on peut montrer, plus précisément que celui-ci, s'écrit [27, 28] :

$$N_T = \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_3(z), \quad (1.22)$$

avec $g_3(z) = \zeta(3)$ dans la limite où $z = 1$ où ζ est la fonction de Riemann.

L'équation (1.21) peut alors s'écrire :

$$N \simeq N_0 + \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_3(1). \quad (1.23)$$

On en déduit finalement la fraction $\frac{N_0}{N}$ condensée dans l'état fondamental :

$$\frac{N_0}{N} \simeq 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \text{ pour } T \leq T_c, \quad (1.24)$$

avec T_c définie par

$$k_B T_c \simeq \hbar \omega \left(\frac{N}{g_3(1)} \right)^{1/3}. \quad (1.25)$$

De (1.25), on voit clairement que $k_B T_c$ peut être beaucoup plus grand que $\hbar \omega$. Dans la plupart des pièges actuels, le nombre d'atomes est de quelques milliers à plusieurs millions de sorte que $k_B T_c$ est deux ordres de grandeurs environ plus grand que $\hbar \omega$, l'approximation $\frac{\hbar \omega}{k_B T} \ll 1$ est clairement valide. La quantité $\hbar \omega$ est fixée expérimentalement, par exemple, dans les premières expériences à JILA [29], celle-ci valait 9 nK ce qui donne une température critique de 300 nK pour 40000 atomes dans le piège.

D'un point de vue chronologique, beaucoup de travaux pour obtenir des condensats gazeux ont pris leur essor au niveau des années 80, utilisant des atomes d'hydrogène mais ont échoué en raison de la recombinaison des atomes pour former des molécules [31]. Or dans ces mêmes années ont été mises au point des techniques de refroidissement par laser [32, 33, 34]. Ces techniques de refroidissement combinées à celles de refroidissement par évaporation [35] ont permis d'atteindre les températures nécessaires à l'obtention du phénomène.

Ainsi, la condensation de Bose-Einstein a été observée pour la première fois en 1995 dans différentes expériences, d'une part utilisant des vapeurs de Rubidium [128] et d'autre part avec des atomes de Sodium [37] refroidis à des températures de l'ordre de la fraction de micro-Kelvin.

Si tous les atomes se trouvent dans le niveau fondamental, ceux-ci seront donc tous décrits par la même fonction d'onde $\Phi(\mathbf{r}, t)$ dite fonction d'onde du condensat (ou paramètre d'ordre du condensat), nous verrons dans la suite comment l'on peut décrire quantitativement cette fonction d'onde mais avant cela nous allons développer quelques notions expérimentales sur la condensation de Bose-Einstein.

1.1.2 Notions expérimentales

A) Quelques résultats expérimentaux

On peut commencer ici par rappeler les "doutes existentiels" d'Einstein. En effet, Einstein, pris de doute, écrivit à son ami Ehrenfest à propos de la condensation de Bose-Einstein : "Cette théorie est belle mais est-elle vraie?".

Nous ne ferons pas ici un long catalogue de résultats expérimentaux, nous nous contenterons simplement de montrer quelques résultats qui répondent par l'affirmative à la question d'Einstein.

Nous allons commencer par montrer l'une des premières et plus célèbres images d'un condensat obtenue par Anderson *et al* en 1995 [128].

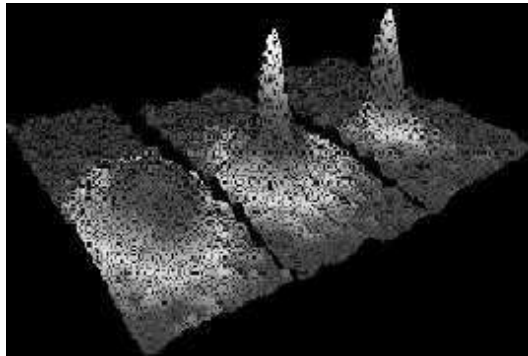


Fig. 1.1 : Cette image représente la densité atomique de rubidium dans les expériences d'Anderson, prise en coupant le piège et en laissant s'étendre le condensat.

L'image de gauche correspond à un gaz juste au-dessus de la température critique, celle du milieu, juste après l'apparition du condensat et celle de droite au condensat quasi pur.

La taille de l'image est de $200\mu\text{m} \times 270\mu\text{m}$ et correspond à une situation où les atomes se sont déplacés pendant un temps de $1/20$ s.

Nous pouvons ensuite illustrer la formule (1.24) qui donne la fraction d'atomes condensés N_0/N en fonction du rapport température (T) sur température critique (T_c^0) face "au test de l'expérience"

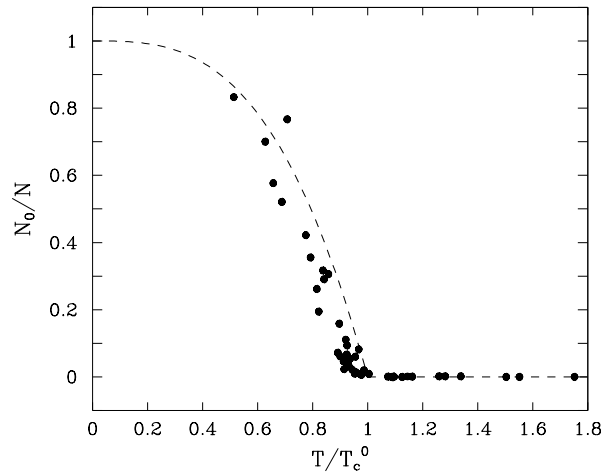


Fig. 1.2 : La ligne en pointillé représente la formule théorique (1.24) tandis que les points représentent eux les résultats expérimentaux obtenus en 1996 par Ensher et al [29].

Sur cette figure, il est clair qu'il existe une température critique pour laquelle un nombre macroscopique d'atomes se retrouvent dans l'état fondamental du système.

Enfin on peut montrer une autre expérience assez spectaculaire qui illustre les propriétés de cohérence des condensats de Bose-Einstein.

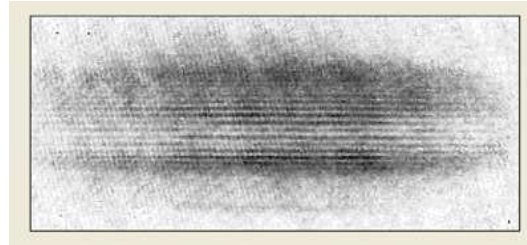


Fig. 1.3 : Cette figure illustre des expériences du M.I.T. où l'on fait se recouvrir deux condensats indépendants qui ont permis d'observer des franges dues aux interférences d'onde de matière qui prouve que les condensats sont bien des systèmes cohérents de phase. Sur cette figure, la taille des franges est de $15\mu\text{m}$.

Ainsi, ces trois résultats répondent par l'affirmative à la question d'Einstein.

Dans le prochain paragraphe, on rappellera les deux principales techniques de refroidissement qui ont permis l'élaboration des condensats.

B) Techniques de refroidissement

La phase de refroidissement se fait en deux étapes principales :

- Le refroidissement par effet Doppler,
- Le refroidissement évaporatif.

La première phase est la phase de refroidissement par laser. On produit à partir d'un four à environ 400 K des atomes. Après différentes techniques, les atomes qui en ressortent entre à l'intérieur d'un solénoïde dans lequel, on a placé un laser contre-propageant au jet atomique. La pression de radiation exercée alors sur les atomes ralentit le jet², jusqu'au niveau du piège magnéto-optique.

a) Refroidissement par effet Doppler Au sein du piège magnéto-optique, on combine trois paires de lasers contre-propageantes. Dans cette situation, la force totale de pression de radiation s'appliquant sur l'atome est proportionnelle au déplacement Doppler[30], c'est-à-dire que :

- si un atome immobile est soumis à deux lasers de même fréquence se propageant en sens inverse alors les deux forces de pressions de radiations qui en résultent sont exactement opposées,
- mais si un atome est animé d'une vitesse V alors les pressions de radiations qui en résultent ne sont plus exactement les mêmes.

Par exemple s'il se déplace vers la droite, il verra la fréquence de l'onde de droite augmentée par effet Doppler et celle de gauche diminuée et la pression de radiation sera orientée vers la gauche. Et inversement, s'il se propage vers la gauche.

Ainsi si l'on éclaire l'atome par trois paires de laser sa vitesse sera amortie quelque soit sa direction. Les atomes sont alors englués au sein des lasers, on parle alors de "mélasse optique".

Or ce type de refroidissement présente une limite intrinsèque : les reculs dus à l'émission spontanée des atomes ont un caractère aléatoire et provoquent ainsi des fluctuations aléatoires de la vitesse. L'atome subit donc d'une part une forte diminution de sa vitesse mais d'autre part, "une succession de choc" qui provoque un "chauffage" intrinsèque.

Il est donc impossible par cette seule méthode d'atteindre le seuil de condensation. On a alors du mettre au point d'autres techniques de refroidissement et donc en particulier celle du refroidissement évaporatif.

b) Refroidissement évaporatif Cette technique de refroidissement a été mise au point en 1987, cette technique a d'abord été réalisée sur de l'hydrogène atomique par l'équipe de H. Hess [40] basée sur une idée développée par ce dernier dans [41].

Une fois que les atomes sont préalablement refroidis par des techniques lasers, on coupe la profondeur du potentiel confinant de sorte à ce que les atomes les plus énergétiques puissent s'échapper. Les atomes restants se rethermalisent alors à une température inférieure.

Dans ce type de refroidissement [42], on perd deux ordres de grandeurs sur le nombre N d'atomes mais on en perd trois sur la température ce qui permet ainsi d'atteindre la température critique de condensation pour une densité d'atomes relativement faible³.

Dans la suite, nous montrerons comment l'on peut décrire quantitativement ces objets.

²La vitesse des atomes diminue d'un facteur 10 en quelques micro-secondes.

³Les expériences sont faites avec un nombre moyen d'atomes de l'ordre de 10^5 .

1.2 Théorie de champ moyen et équation de Gross-Pitaevskii

Considérons un système de N atomes dans un piège harmonique, décrit, dans le formalisme de la seconde quantification, par l'hamiltonien suivant :

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\chi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \right] \hat{\chi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\chi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\chi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\chi}(\mathbf{r}') \hat{\chi}(\mathbf{r}), \quad (1.26)$$

où :

- $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ est le potentiel piégeant,
- $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, le potentiel d'interaction entre deux atomes condensés,
- $\hat{\chi}(\mathbf{r})$ et $\hat{\chi}^\dagger(\mathbf{r})$ sont les opérateurs de champs bosoniques respectivement d'annihilation et de création de particules à la position \mathbf{r} .

On écrit alors l'opérateur de champs sous la forme :

$$\hat{\chi}(\mathbf{r}) = \sum_k \chi_k(\mathbf{r}) \hat{a}_k, \quad (1.27)$$

où $\chi_k(\mathbf{r})$ est la fonction d'onde d'une seule particule et a_k , l'opérateur d'annihilation correspondant. Les opérateurs de création et d'annihilation bosoniques vérifient, quant à eux :

- d'une part les relations suivantes dans l'espace de Fock :

$$\hat{a}_k^\dagger | n_0, n_1, \dots, n_k, \dots \rangle = \sqrt{n_k + 1} | n_0, n_1, \dots, n_k + 1, \dots \rangle, \quad (1.28)$$

$$\hat{a}_k | n_0, n_1, \dots, n_k, \dots \rangle = \sqrt{n_k} | n_0, n_1, \dots, n_k - 1, \dots \rangle, \quad (1.29)$$

où n_k est le nombre de particules dans l'état k .

- d'autre part les relations de commutation suivantes :

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_\beta^\dagger] = \delta_{k,\beta}, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_\beta] = 0, \quad [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_\beta^\dagger] = 0. \quad (1.30)$$

De plus la condensation de Bose-Einstein correspond à une situation où le nombre d'atomes $n_0 \equiv N_0$ dans l'état fondamental est très grand devant 1 et où le rapport N_0/N reste fini dans la limite thermodynamique, c'est-à-dire que l'on a dans cette limite $N_0 \pm 1 \simeq N_0$ correspond au même système physique. Ainsi dans ces conditions, il ressort que l'action des opérateurs a_0 et a_0^\dagger sur le ket $| n_0, n_1, \dots, n_k, \dots \rangle$ est identique et qu'on peut alors approximer \hat{a}_0 et \hat{a}_0^\dagger par $a_0 = a_0^\dagger = \sqrt{n_0}$

Par exemple, si l'on considère, des atomes dans une boîte ⁴ de volume V alors la fonction d'onde χ_k , s'écrit

$$\chi_k = \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}. \quad (1.31)$$

Donc pour le fondamental $\chi_0 = \frac{1}{\sqrt{V}}$ et la relation (1.27) s'écrit

$$\hat{\chi}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{N_0}{V}} + \sum_{k \neq 0} \chi_k(\mathbf{r}) \hat{a}_k, \quad (1.32)$$

$$= \sqrt{\frac{N_0}{V}} + \hat{\chi}'(\mathbf{r}), \quad (1.33)$$

⁴C'est-à-dire que $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = 0$ à l'intérieur de la boîte et est infini à l'extérieur.

où $\hat{\chi}'(\mathbf{r})$ représente la fraction d'atome non-condensée et peut être traité comme on le verra par la suite via la méthode dite de Bogoliubov ⁵. Nous montrerons dans la deuxième annexe que si la densité n du condensat et la longueur de diffusion ⁶ du potentiel d'interaction entre les atomes vérifient $na^3 \ll 1$ (dans ces conditions le condensat est dit dilué ou faiblement interagissant), la fraction d'atomes non-condensés est de l'ordre de 0.2% pour des données expérimentales typiques.

Dans le cas plus général, en présence d'un potentiel externe quelconque, (1.32) s'écrit :

$$\hat{\chi}(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) + \hat{\chi}'(\mathbf{r}, t), \quad (1.34)$$

où $\Phi(\mathbf{r}, t)$, qui est une quantité scalaire, est appelé "fonction d'onde du condensat" ⁷ et vérifie $\Phi(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \hat{\chi}(\mathbf{r}, t) \rangle$. Elle permet de décrire l'occupation macroscopique du fondamental et son module au carré est égal à la densité $n_0(\mathbf{r}, t)$ du condensat, soit $n_0(\mathbf{r}, t) = |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2$

L'évolution temporelle de l'opérateur $\hat{\chi}$ est alors décrite dans le formalisme d'Heisenberg par :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\chi}(\mathbf{r}, t) &= [\hat{\chi}, \hat{H}], \\ &= \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \hat{\chi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\chi}(\mathbf{r}', t) \right] \hat{\chi}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (1.35)$$

On va établir l'évolution spatio-temporelle de $\Phi(\mathbf{r}, t)$ via une théorie de champ moyen en négligeant les fluctuations dans (1.34) :

- On considère que $\hat{\chi}'(\mathbf{r}, t)$ est un terme correctif dans l'expression (1.34).
En effet, on peut montrer que ce terme est proportionnel à $(na^3)^{1/2}$ [39] où n est la densité du condensat et a la longueur de diffusion du potentiel d'interaction.
Or dans les expériences actuelles $a = 2.75$ nm pour du ²³Na[43] ou encore $a = 5.77$ nm pour du ⁸⁷Rb [53] tandis que n est de l'ordre de 10^{13} à 10^{15} atomes.cm⁻³.
On a ainsi toujours $na^3 \ll 1$ (dans ces conditions le système est dit dilué ou faiblement interagissant), on peut alors légitimement remplacer $\hat{\chi}(\mathbf{r}, t)$ par $\Phi(\mathbf{r}, t)$ dans (1.35) et supposer ainsi que toutes les particules sont condensées, (c'est-à-dire $N = N_0$ où N_0 est le nombre de particules condensées).
- De plus si le condensat vérifie la condition $na^3 \ll 1$ alors on peut remplacer le potentiel d'interaction par ⁸ [38]

$$V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (1.36)$$

⁵En raison des interactions entre les atomes dans le condensat, on ne peut pas avoir rigoureusement $N_0 = N$ même à $T = 0$, c'est ce que l'on appelle la déplétion quantique du fondamental due aux interactions.

⁶La longueur de diffusion du potentiel sera définie en détails dans la première annexe de ce manuscrit.

⁷On l'appelle aussi parfois paramètre d'ordre du condensat.

⁸On peut justifier cette approximation de différentes manières :

- L'hypothèse $na^3 \ll 1$ revient à dire que la distance entre les atomes est grande par rapport à la longueur de diffusion du potentiel d'interaction. Dans ces conditions, il semble légitime que l'on puisse "oublier" les détails du potentiel en approximant celui-ci par une constante de couplage $g(a)$, qui dépend d'une longueur typique du potentiel, sa longueur de diffusion a , fois un pic delta.
- Plus quantitativement, la longueur de diffusion est, comme on le verra dans la première annexe, relié au

où la constante de couplage est relié à la longueur de diffusion a du potentiel par :

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (1.37)$$

Ce pseudo-potentiel donne le bon comportement asymptotique des fonctions d'onde, c'est-à-dire quand les atomes sont éloignés les uns des autres mais ne permet pas de décrire le système quand les atomes sont proches les uns des autres. Or dans le cas du gaz dilué, on peut toujours considérer que les atomes sont éloignés les uns des autres.

Avec l'approximation (1.36), on obtient à partir de (1.35) à l'ordre dominant l'équation dite de Gross-Pitaevskii, obtenue indépendamment par Gross et Pitaevskii au début des années 60, pour la fonction d'onde $\Phi(\mathbf{r}, t)$ du condensat

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (1.38)$$

La constante de couplage g peut être positive ou négative suivant que les interactions entre les atomes sont respectivement attractives ou répulsives⁹.

La forme stationnaire de l'équation de Gross-Pitaevskii s'obtient en prenant $\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}) e^{-i\mu t/\hbar}$, ce qui conduit à

$$\mu \Phi(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\Phi(\mathbf{r})|^2 \right) \Phi(\mathbf{r}). \quad (1.39)$$

Nous allons en dernier lieu expliciter le sens physique de μ en démontrant qu'il s'agit bien du potentiel chimique du système.

La fonctionnelle de l'énergie du système $E[\Phi, \Phi^*]$ de l'énergie du système, s'écrit d'après (1.26) :

$$\begin{aligned} E[\Phi, \Phi^*] &= \int d^3\mathbf{r} \Phi^*(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \right) \Phi(\mathbf{r}) + \int d^3\mathbf{r} \frac{g}{2} |\Phi(\mathbf{r})|^4, \\ &= E_1 + E_2, \end{aligned} \quad (1.40)$$

où E_1 est un terme proportionnel au nombre de particules N et E_2 est proportionnel à N^2 .

potentiel d'interaction entre les atomes U_{int} , au premier ordre dans l'approximation de Born, par :

$$a = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} U_{\text{int}}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}.$$

Pour un potentiel d'interaction de type Van der Waals, il est clair que cette intégrale diverge, or la longueur de diffusion a est une donnée mesurable par l'expérience. Il est donc nécessaire d'introduire un pseudo potentiel d'interaction qui doit vérifier les propriétés suivantes :

- conduire à la même longueur de diffusion que le vrai potentiel,
- donner un résultat correct dans le cadre de l'approximation de Born ce qui est important pour établir une théorie de champ moyen,
- être le plus simple possible pour donner lieu à des calculs simples.

Dans ce cas, il s'avère que le potentiel qu'il faille prendre est celui présenté dans (1.36).

⁹A priori, on pourrait conserver les deux possibilités et étudier des condensats avec des interactions répulsives ou attractives. Or il s'avère que le cas usuel est le cas où les interactions sont répulsives.

Or en multipliant par $\Phi^*(\mathbf{r})$, l'équation (1.39) et en l'intégrant sur l'espace, il vient :

$$\mu N = \int d^3r \Phi^*(\mathbf{r}) \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \right) \Phi(\mathbf{r}) + g |\Phi(\mathbf{r})|^4. \quad (1.41)$$

On obtient ainsi :

$$\mu = \frac{E_1}{N} + \frac{2E_2}{N}. \quad (1.42)$$

Ainsi dans la limite $N \gg 1$, on a :

$$\mu \equiv \frac{\delta E[\Phi, \Phi^*]}{\delta N}. \quad (1.43)$$

Par définition le potentiel chimique se déduit de l'énergie libre du système $F = E - TS$ par : $\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_T$.

Or rappelons ici que l'on est à température nulle, donc $F = E$, on a alors : $\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)$.

Ainsi, il ressort que le paramètre μ défini dans (1.43) est bel et bien le potentiel chimique du système.

Nous avons ici décrit via une théorie de champ moyen, c'est-à-dire en négligeant la fraction d'atome non-condensés, un condensat de Bose-Einstein à trois dimensions.

Dans la suite, nous décrirons la dynamique du système, pour cela, on développera deux théories :

- la théorie de Bogoliubov,
- les équations hydrodynamiques.

1.3 Fluctuations autour du champ moyen

En réinjectant l'ansatz (1.34) dans (1.35), nous a permis d'obtenir une équation à l'ordre dominant pour $\Phi(\mathbf{r}, t)$, en l'occurrence l'équation de Gross-Pitaevskii.

Dans la suite, nous allons donc développer le formalisme de Bogoliubov qui permet d'étudier le premier ordre et ainsi les excitations élémentaires dans un condensat de Bose-Einstein..

1.3.1 Théorie de Bogoliubov

A) Equations de Bogoliubov-de Gennes

On cherche des solutions de l'équation de Gross-Pitaevskii sous la forme (1.34) avec $\Phi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\frac{\mu t}{\hbar}} \Phi(\mathbf{r})$ et en développant $\hat{\chi}'(\mathbf{r}, t)$ sous la forme :

$$\hat{\chi}'(\mathbf{r}, t) = e^{-i\frac{\mu t}{\hbar}} \sum_i \left[u_i(\mathbf{r}) \hat{b}_i e^{i\omega_i t} + v_i^*(\mathbf{r}) \hat{b}_i^\dagger e^{-i\omega_i t} \right], \quad (1.44)$$

où les opérateurs \hat{b}_i et \hat{b}_i^\dagger s'interprètent comme des opérateurs d'annihilation et de création d'excitation d'énergie $\hbar\omega_i$ et vérifient les conditions de commutation d'opérateurs bosonique :

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad (1.45)$$

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j] = [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] = 0. \quad (1.46)$$

La condition de normalisation des fonctions u_i et v_i se déduit aisément à partir des propriétés de $\hat{\chi}(\mathbf{r}, t)$. En effet pour un champ bosonique, on a :

$$[\hat{\chi}(\mathbf{r}, t), \hat{\chi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.47)$$

et

$$[\hat{\chi}(\mathbf{r}, t), \hat{\chi}(\mathbf{r}', t)] = [\hat{\chi}^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\chi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = 0. \quad (1.48)$$

Comme $\Phi(\mathbf{r}, t)$ dans l'équation (1.34) est un nombre, l'opérateur $\hat{\chi}'(\mathbf{r}, t)$ vérifie les mêmes conditions de commutations de $\hat{\chi}(\mathbf{r}, t)$, c'est-à-dire :

$$[\hat{\chi}'(\mathbf{r}, t), \hat{\chi}'^\dagger(\mathbf{r}', t)] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.49)$$

et

$$[\hat{\chi}'(\mathbf{r}, t), \hat{\chi}'(\mathbf{r}', t)] = [\hat{\chi}'^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\chi}'^\dagger(\mathbf{r}', t)] = 0. \quad (1.50)$$

En réinjectant l'expression (1.44) dans (1.49), on obtient :

$$\sum_i \sum_j (u_i(\mathbf{r})u_j^*(\mathbf{r}') - v_j^*(\mathbf{r})v_i(\mathbf{r}')) \delta_{ij} e^{i(\omega_i - \omega_j)t} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.51)$$

Ainsi dans le cas d'opérateurs bosoniques les fonctions $u_i(r)$ et $v_i(r)$ vérifient :

$$\sum_i (u_i(\mathbf{r})u_i^*(\mathbf{r}') - v_i^*(\mathbf{r})v_i(\mathbf{r}')) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.52)$$

Sur ce, en réinjectant (1.44) dans (1.35), on obtient alors pour le premier ordre les équations dites de Bogoliubov-de Gennes :

$$\hbar\omega_i u_i(\mathbf{r}) = [H_0 - \mu + 2g\Phi^2(\mathbf{r})] u_i(\mathbf{r}) + g\Phi^2(\mathbf{r})v_i(\mathbf{r}), \quad (1.53)$$

$$-\hbar\omega_i v_i(\mathbf{r}) = [H_0 - \mu + 2g\Phi^2(\mathbf{r})]v_i(\mathbf{r}) + g\Phi^2(\mathbf{r})u_i(\mathbf{r}). \quad (1.54)$$

avec :

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}). \quad (1.55)$$

B) Quelques propriétés des équations de Bogoliubov-de Gennes

Avant de continuer, on peut ici présenter quelques propriétés des équations (1.53) et (1.54).

En multipliant la première équation par u_j^* et la deuxième par v_j^* et en intégrant sur tout l'espace, on peut obtenir :

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} u_j^*(\mathbf{r})H_0u_i(\mathbf{r}) + g u_j^*(\mathbf{r})\Phi^2(\mathbf{r})v_i(\mathbf{r}) + g v_j^*(\mathbf{r})\Phi^2(\mathbf{r})u_i(\mathbf{r}) \\ + v_j^*(\mathbf{r})H_0v_i(\mathbf{r}) = \hbar\omega_i \int d\mathbf{r} u_j^*(\mathbf{r})u_i(\mathbf{r}) - v_j^*(\mathbf{r})v_i(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1.56)$$

et

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} u_i(\mathbf{r})H_0u_j^*(\mathbf{r}) + g u_i(\mathbf{r})\Phi^2(\mathbf{r})v_j^*(\mathbf{r}) + g v_i(\mathbf{r})\Phi^2(\mathbf{r})u_j^*(\mathbf{r}) \\ + v_i(\mathbf{r})H_0v_j^*(\mathbf{r}) = \hbar\omega_j^* \int d\mathbf{r} u_i(\mathbf{r})u_j^*(\mathbf{r}) - v_i(\mathbf{r})v_j^*(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.57)$$

En utilisant une double intégration par parties :

$$\int d\mathbf{r} u_i(\mathbf{r})H_0u_j^*(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} u_j^*(\mathbf{r})H_0u_i(\mathbf{r}), \quad (1.58)$$

$$\int d\mathbf{r} v_i(\mathbf{r})H_0v_j^*(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} v_j^*(\mathbf{r})H_0v_i(\mathbf{r}). \quad (1.59)$$

On peut déduire de (1.56) et (1.57)

$$0 = \hbar(\omega_i - \omega_j^*) \int d\mathbf{r} (u_i(\mathbf{r})u_j^*(\mathbf{r}) - v_i(\mathbf{r})v_j^*(\mathbf{r})). \quad (1.60)$$

Pour $i = j$, on obtient :

$$0 = \hbar(\omega_i - \omega_i^*) \int d\mathbf{r} (|u_i(\mathbf{r})|^2 - |v_i(\mathbf{r})|^2), \quad (1.61)$$

ce qui montre que ω est réelle.

On peut donc toujours écrire¹⁰ :

$$\int d\mathbf{r} (u_i(\mathbf{r})u_j^*(\mathbf{r}) - v_i(\mathbf{r})v_j^*(\mathbf{r})) = \delta_{ij}. \quad (1.63)$$

C) Spectre des excitations

Les équations (1.53) et (1.54) sont dans la plupart des cas résolues numériquement. Mais on peut obtenir une solution analytique dans le cas d'un gaz libre¹¹ ($V_{\text{ext}} = 0$). Dans cette situation la densité est constante, indépendante de \mathbf{r} . Quant au potentiel chimique, il est alors immédiat à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii pour une densité constante de montrer que $\mu = gn$.

¹⁰On peut aussi montrer d'une manière analogue :

$$\int d\mathbf{r} (u_i(\mathbf{r})v_j(\mathbf{r}) - v_i(\mathbf{r})u_j(\mathbf{r})) = 0. \quad (1.62)$$

¹¹Ce modèle est de plus intéressant au point de vue expérimental car dans des pièges très anisotropes, on pourra alors imaginer que le condensat est libre selon sa direction allongée.

Dans ce cas, on cherche des solutions sous la forme $u_i(\mathbf{r}) = u e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ et $v_i(\mathbf{r}) = v e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$. Le système (1.53) et (1.54) se ramène alors à :

$$\hbar\omega u = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} u + gn(u+v), \quad (1.64)$$

$$-\hbar\omega v = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} v + gn(u+v), \quad (1.65)$$

La solution est alors immédiate :

$$(\hbar\omega)^2 = \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m}\right)^2 + \frac{\hbar^2 q^2}{m} gn. \quad (1.66)$$

On peut également écrire :

$$\omega = qc\sqrt{1 + \frac{\xi^2 q^2}{4}}, \quad (1.67)$$

(où c représente la vitesse du son dans le condensat définie par $mc^2 = gn$ et ξ la longueur de relaxation définie elle par $\mu = \frac{\hbar^2}{m\xi^2}$.)

La relation de Bogoliubov (1.67) a la forme suivante :

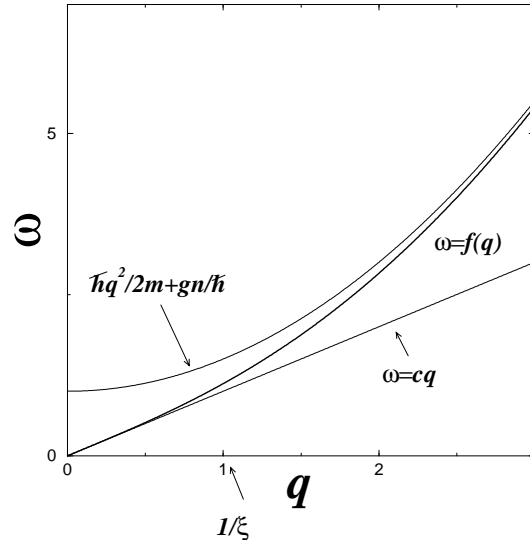


Fig. 1.4 Cette figure représente la relation de dispersion de Bogoliubov (1.67) $\omega = f(q)$ ainsi que ses formes limites pour $q \ll 1/\xi$ et pour $q \gg 1/\xi$ soit respectivement $\omega = cq$ et $\frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\mu}{\hbar}$.

Ce spectre est alors très simple à analyser dans ces deux cas limites :

- Dans la zone de basse longueur d'onde, c'est-à-dire pour $q \gg 1/\xi$, on obtient comme énergie d'excitation $\hbar\omega \simeq \hbar^2 q^2/2m$, les excitations se comportent comme des particules libres.

- Dans la zone de grande longueur d’onde, c’est-à-dire pour $q \ll 1/\xi$, on obtient pour l’énergie d’excitation une relation linéaire $\hbar\omega \simeq q\hbar\sqrt{\frac{gn}{m}}$.
Les excitations de grande longueur d’onde sont donc des ondes sonores dont on retrouve l’expression de leur vitesse définie par ¹² :

$$c = \frac{d\omega}{dq} = \sqrt{\frac{gn}{m}}, \quad (1.69)$$

On retrouve ici le fait que $mc^2 = gn = \mu$.

La méthode de Bogoliubov-de Gennes permet donc d’obtenir le spectre des excitations dans un condensat de Bose-Einstein. On peut alors obtenir la forme analytique de ce spectre dans le cas du condensat homogène.

D’autre part le formalisme de Bogoliubov permet d’étudier l’impact des interactions dans un condensat de Bose, sur l’énergie du niveau fondamental, sur le potentiel chimique du système et sur la déplétion quantique du fondamental, ceci sera établi dans la troisième annexe.

1.3.2 Equations hydrodynamiques

L’évolution spatio-temporelle d’un condensat de Bose-Einstein dilué peut-être décrite :

- soit dans le cadre de l’équation de Gross-Pitaevskii qui décrit l’évolution de la fonction d’onde du condensat,
- soit dans le cadre des équations hydrodynamique qui permettent d’obtenir les équations d’évolutions de la phase et de la densité du condensat.

On va dans la suite développer ce dernier modèle.

On utilise pour celà la transformations dite de Madelung [125, 126] en écrivant dans l’équation de Gross-Pitaevskii :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{iS(\mathbf{r}, t)}, \quad (1.70)$$

On obtient alors comme équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \nabla \cdot \left(\frac{\hbar}{m} n \nabla S(\mathbf{r}, t) \right) = 0. \quad (1.71)$$

Cette équation peut se traduire comme une équation de continuité pour la densité $n(\mathbf{r}, t)$ à condition de prendre pour courant associé $\mathbf{j} = n \frac{\hbar}{m} \nabla S(\mathbf{r}, t) = n \mathbf{v}$ où l’on a donc défini la vitesse du condensat par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla S(\mathbf{r}, t), \quad (1.72)$$

¹²Ceci peut peut s’expliquer via une description hydrodynamique. Dans ce cas la vitesse du son est définie par :

$$c^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial P}{\partial n}, \quad (1.68)$$

où P est donné par l’équation d’état (B.12) soit $P = gn^2/2$, ce qui conduit à

$$mc^2 = gn,$$

on obtient bien $\mu = gn = mc^2$.

ce qui mène pour deuxième équation à¹³ :

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \left(V_{\text{ext}} + gn - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n(\mathbf{r}, t)}} \nabla^2 \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} + \frac{mv^2}{2} \right) = 0. \quad (1.73)$$

On fait l'hypothèse ici que la densité du condensat est de sorte que le terme cinétique $\frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ soit négligeable dans (1.73) devant le terme d'interaction.

Plus précisément, nous allons commencer par considérer une situation stationnaire où la densité s'écrit $n = n_0(\mathbf{r})$.

Le terme cinétique est de l'ordre de :

$$\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n_0(\mathbf{r})}} \nabla^2 \sqrt{n_0(\mathbf{r})} \sim \frac{\hbar^2}{m d^2}, \quad (1.74)$$

où d est une échelle typique de variation de la densité.

Dans cette situation, une distance typique du problème est r_c , l'échelle typique des variations du potentiel V_{ext} et on peut montrer que la densité varie sur cette longueur. On considère donc $d \sim r_c$.

Il est alors facile de voir que le terme de pression quantique sera alors négligeable par rapport au terme gn si :

$$r_c \gg \xi \quad (1.75)$$

où ξ est la longueur de relaxation définie par $\xi^2 = \frac{\hbar^2}{m g n_\infty}$ avec n_∞ qui représente une valeur typique de n définie pour $V_{\text{ext}} = 0$.

Dans une situation non-stationnaire, on considère alors de petites oscillations pour la densité $n(\mathbf{r}, t)$ de la forme :

$$n(\mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{r}) + \delta n(\mathbf{r}, t), \quad (1.76)$$

où $n_0(\mathbf{r})$ est la densité à l'équilibre.

Dans cette situation on considère que $d = 1/q$, où d est ici la distance typique de variation de δn .

On obtient alors que le terme cinétique sera négligeable par rapport au terme gn si :

$$\frac{\hbar^2 q^2 \delta n}{m n_0} \ll g \delta n, \quad (1.77)$$

ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$q \xi \ll 1. \quad (1.78)$$

Ainsi la description hydrodynamique permet, dans ce contexte, d'étudier les excitations à petit q , c'est-à-dire dans la partie linéaire du spectre (1.67).

Reprenons alors l'équation (1.73), sous la forme :

¹³Les équations (1.71) et (1.73) sont strictement équivalentes à l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps, aucune autre hypothèse n'a du être utilisée pour établir ces deux équations.

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \left(V_{\text{ext}} + gn + \frac{mv^2}{2} \right) = 0. \quad (1.79)$$

En linéarisant au voisinage de $n_0(\mathbf{r})$, les équations (1.71) et (1.79), on obtient alors

$$\partial_t^2 \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \frac{g}{m} \nabla [n_0(\mathbf{r}) \nabla \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{t})], \quad (1.80)$$

$$= \nabla [c^2(\mathbf{r}) \nabla \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{t})], \quad (1.81)$$

avec $c^2(\mathbf{r}) = \frac{gn_0(\mathbf{r})}{m}$.

1.4 Condensation de Bose Einstein uni-dimensionnelle

Dans tout ce que nous venons de présenter, le potentiel de piègeage $V_{\text{ext}}(x, y, z)$ était supposé harmonique et isotrope. Une théorie de champ moyen tri-dimensionnel permettait alors d'obtenir l'équation de Gross-Pitaevskii pour la fonction d'onde du fondamental. Nous avons aussi développé la théorie de Bogoliubov et les équations hydrodynamiques afin de décrire les excitations dans ces systèmes.

Or on a réussi à créer des condensats $3D$ dans des pièges fortement anisotropes où le piégeage est très fort selon une direction longitudinale ou deux directions transverses. Le succès de ces pièges anisotropes a permis ainsi de baisser la dimensionnalité des condensats en passant de situations tri-dimensionnelles à bi-dimensionnelles et uni-dimensionnelles.

Des condensats dilués, répulsifs bi et uni-dimensionnels ont ainsi pu être créés en 2001 avec du ^{23}Na [55] et uni-dimensionnel avec du ^7Li [56], un condensat bi-dimensionnel à la forme d'un disque très mince et celui uni-dimensionnel à la forme d'un cigare très allongé ¹⁴.

Dans le prochain paragraphe, nous allons présenter quelques généralités sur la condensation de Bose en dimension inférieure à trois.

1.4.1 Quelques généralités sur la condensation en dimension inférieure à trois

A) Cas des bosons dans une boîte

On peut traiter le cas des bosons dans une boîte de façon qualitative utilisant des arguments de loi d'échelle.

Considérons donc ici N bosons dans une boîte de longueur L en dimension d .

L'énergie des états excités est :

$$\epsilon = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{4\pi}{L^2} [n_x^2 + n_y^2 + n_z^2]. \quad (1.82)$$

¹⁴Concrètement pour réaliser un condensat bi-dimensionnelle, on part d'un piège tri-dimensionnel très anisotrope avec $\omega_z \gg \omega_y = \omega_x$ et on se place à une température T qui vérifie $k_B T \ll \hbar \omega_z$ de sorte à geler le degré de liberté correspondant à ω_z .

Dans le cas uni-dimensionnel, le piège vérifie alors $\omega_z = \omega_y \gg \omega_x$ et la température est telle que $k_B T \ll \hbar \omega_{z/y}$.

Dans le cas d'une boîte de longueur L , on a donc la loi d'échelle :

$$\epsilon \sim \frac{1}{L^2}. \quad (1.83)$$

Dans un espace de dimension d , si la population N_0 de l'état fondamental est macroscopique, on a :

$$N_0 \sim L^d. \quad (1.84)$$

La population du premier état excité est :

$$N_1 \equiv \frac{1}{\beta(\epsilon_1 - \mu)} \sim L^2. \quad (1.85)$$

On a donc quant au rapport N_1/N_0 :

$$N_1/N_0 \sim L^{2-d}. \quad (1.86)$$

A trois dimensions, il est donc possible de réaliser un rapport N_1/N_0 très faible mais plus à deux et une dimension.

Voyons dans le prochain paragraphe le cas des bosons dans un piège

B) Cas des bosons dans un piège harmonique

On considère N bosons en dimension d dans un piège harmonique, pas forcément isotrope, de la forme :

$$V(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{2} m (\omega_1^2 x_1^2 + \dots + \omega_d^2 x_d^2). \quad (1.87)$$

De la même manière que précédemment, le nombre d'états excités s'écrit

$$N_T = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_d} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}, \quad (1.88)$$

avec

$$\epsilon = \hbar (\omega_1 (k_1 + 1/2) \dots \omega_d (k_d + 1/2)). \quad (1.89)$$

En passant à la limite continue, (1.88) s'écrit quand μ tend vers 0 :

$$N_T = \int \frac{dk_1 \dots dk_d}{e^{\beta\epsilon} - 1}. \quad (1.90)$$

Cette intégrale peut se réécrire avec la densité d'énergie $\rho(\epsilon)$

$$N_T = \int \frac{\rho(\epsilon) d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1}, \quad (1.91)$$

avec $\rho(\epsilon)$ qui s'écrit, dans le cas de N bosons dans un piège harmonique de la forme (1.87) :

$$\rho(\epsilon) = \frac{\epsilon^{d-1}}{\hbar^d (d-1)! \omega_1 \dots \omega_d}. \quad (1.92)$$

Le nombre d'états excités s'écrit donc :

$$N_T = \frac{1}{\hbar^d (d-1)! \omega_1 \dots \omega_d} \int_0^{+\infty} d\epsilon \frac{\epsilon^{d-1}}{e^{\beta\epsilon} - 1}. \quad (1.93)$$

Cette intégrale converge clairement en $+\infty$ mais présente un comportement singulier en 0 suivant la valeur de d : cette intégrale converge en 0 pour $d = 3$ mais aussi pour $d = 2$ ¹⁵. La condensation semble donc possible à deux dimensions dans un piège.

En revanche cette intégrale diverge à une dimension, c'est-à-dire que pour $d = 1$, il est impossible d'avoir N_T/N_0 (où N_0 est le nombre de particules dans l'état fondamental) qui tende vers zéro. Ainsi la condensation de Bose semble de toute évidence ne pas pouvoir exister à une dimension dans un piège harmonique.

Essayons malgré tout de passer outre et définissons comme nous l'avons fait pour le gaz tri-dimensionnel dans l'équation (1.25), une température de condensation "pour voir".

Dans un régime uni-dimensionnel, le nombre d'état excité s'écrit[54] :

$$N_T = -\frac{k_B T}{\hbar \omega} \ln \left(1 - z e^{-\frac{\hbar \omega}{2k_B T}} \right), \quad (1.95)$$

où z est la fugacité définit, on le rappelle par $z = e^{\beta\mu}$.

On définit, de la même manière que pour (1.25), la température de condensation par $N = N_T$, (où N est le nombre total d'atomes) dans la limite où μ tend vers zéro.

Ce qui donne une température de condensation défini par :

$$N = -\frac{k_B T_c}{\hbar \omega} \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar \omega}{2k_B T_c}} \right). \quad (1.96)$$

Dans la limite où $k_B T_c \gg \hbar \omega$, on a alors :

$$k_B T_c = \frac{N \hbar \omega}{\ln 2N}. \quad (1.97)$$

Dans la limite thermodynamique [57], c'est-à-dire $N \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$ et $N\omega \rightarrow cst$, la présence du logarithme dans (1.97) entraîne que T_c tende vers zéro.

Il est donc clair que dans la limite thermodynamique, il n'y a pas de condensat uni-dimensionnel. Mais les expériences sont bien entendu réalisées avec N fini et on peut avoir un nombre N de particules dans le fondamental grand mais fini.

1.4.2 Passage 3D \rightarrow 1D

On considère ici un "vrai" condensat, dans le sens que la phase est parfaitement cohérente, c'est-à-dire puisse être décrit par l'équation de Gross-Pitaevskii.

¹⁵On peut ainsi définir une température de condensation bi-dimensionnelle qui s'écrit :

$$k_B T_c \simeq \hbar \omega \left(\frac{N}{g_3(1)} \right)^{1/2}. \quad (1.94)$$

Nous montrerons dans le paragraphe (1.4.5), dans quelles conditions, cette approximation est valable.

Dans une situation très anisotrope, où le condensat est placé dans un cylindre de longueur infini, il semble "tentant" de chercher un modèle uni-dimensionnel permettant de décrire un tel système.

Nous allons ici montrer comment l'on peut obtenir ce modèle en découplant une situation initialement tri-dimensionnelle en une partie transverse et longitudinale

Il semble relativement intuitif compte tenu de la géométrie du problème d'établir l'ansatz variationnel suivant pour la fonction d'onde $\Phi(\mathbf{r}, t)$ du condensat [58]¹⁶ :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \psi(x, t) \varphi_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, x), \quad (1.98)$$

avec $\partial_x \varphi(\mathbf{r}_{\perp}, x) \ll \partial_{\perp} \varphi(\mathbf{r}_{\perp}, x)$, ceci revient à faire l'hypothèse que la taille transverse du condensat est beaucoup plus petite que la taille typique des variations de $\varphi(\mathbf{r}_{\perp}, x)$ selon x .

De plus on impose la condition de normalisation suivante :

$$\int d^2 r_{\perp} \varphi_{\perp}^2 = 1, \quad (1.99)$$

$$\text{soit } n_1(x, t) = \int d^2 r_{\perp} |\Phi|^2 = \psi^2(x, t). \quad (1.100)$$

Les limites de cet ansatz seront étudiées aux paragraphes (1.4.3) et (1.4.5). Nous verrons, au paragraphe (1.4.3), que l'hypothèse concernant la séparation des mouvements transverses et longitudinaux n'est plus valide dans le régime de Thomas-Fermi transverse et, au paragraphe (1.4.5), que celle concernant la cohérence de phase dans la direction axiale n'est plus valide dans la limite des très basses densités.

L'équation de Gross-Pitaevskii (1.38) peut s'obtenir par une méthode variationnelle, c'est-à-dire que sur une longueur L du condensat, que l'on peut prendre "aussi grande que l'on veut", on écrit pour la fonction d'onde $\Phi(\mathbf{r}, t)$ de celui-ci :

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \Phi^*(\mathbf{r}, t)}, \quad (1.101)$$

avec \mathcal{E} , la fonctionnelle en énergie du système donnée par :

$$\mathcal{E}[\Phi] = \int d^3 r \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Phi|^2 + \frac{g}{2} \Phi^4 + (V_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}) + V_{\text{ext}}(x)) \Phi^2 \right), \quad (1.102)$$

où $V_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp})$ et $V_{\text{ext}}(x)$ représentent respectivement le potentiel transverse confinant et un obstacle éventuellement présent sur la trajectoire du condensat.

Nous allons alors écrire les équations variationnelles en introduisant un paramètre de Lagrange $\lambda(n_1(x, t))$ qui permet de satisfaire la contrainte de normalisation transverse (1.100) pour tout x

On écrit donc :

¹⁶Par simplicité, on supposera, les fonctions réelles.

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \varphi_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp})} \left\{ \mathcal{E} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \lambda(n_1(x, t)) \left[\int d^2 r_{\perp} |\Phi|^2 - n_1(x, t) \right] \right\} &= 0 \text{ et} \\ \frac{\delta}{\delta \psi^*(x, t)} \left\{ \mathcal{E} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \lambda(n_1(x, t)) \left[\int d^2 r_{\perp} |\Phi|^2 - n_1(x, t) \right] \right\} &= i\hbar \partial_t \psi(x, t), \end{aligned} \quad (1.103)$$

L'ansatz (1.98) permet d'écrire :

$$\nabla \Phi = \varphi_{\perp} \partial_x \psi \mathbf{e}_x + \psi \nabla \varphi_{\perp}, \quad (1.104)$$

soit :

$$|\nabla \Phi|^2 = \varphi_{\perp}^2 (\partial_x \psi)^2 + \psi^2 \nabla^2 \varphi_{\perp} + 2\psi \varphi_{\perp} (\partial_x \psi) (\partial_x \varphi). \quad (1.105)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \varphi_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp})} &= -\frac{\hbar^2}{m} (\psi^2 \nabla_{\perp}^2 \varphi_{\perp} + 2\psi \partial_x \psi \partial_x \varphi_{\perp} + \psi \varphi_{\perp} \partial_{xx} \psi) \\ &\quad + 2(V_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}) + V_{\text{ext}}(x)) n_1(x, t) \varphi_{\perp} + 2g\psi^4 \varphi_{\perp}^3. \end{aligned} \quad (1.106)$$

De sorte qu'au final, l'extrémisation (1.103) par rapport à φ_{\perp} donne après division par $2\psi^2$:

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 \varphi_{\perp} + \frac{\partial_x \psi}{\psi} \partial_x \varphi_{\perp} \right) + (V_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}) + g n_1(x, t) \varphi_{\perp}^2) \varphi_{\perp} \\ &= \left[\lambda(n_1(x, t)) - V_{\text{ext}}(x) + \frac{\hbar^2 \partial_{xx} \psi}{2m\psi} \right] \varphi_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}). \end{aligned} \quad (1.107)$$

En utilisant l'hypothèse $\partial_x \varphi(\mathbf{r}_{\perp}, x) \ll \partial_{\perp} \varphi(\mathbf{r}_{\perp}, x)$, on approxime dans (1.107)¹⁷ :

$$-\frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 \varphi_{\perp} + \frac{\partial_x \psi}{\psi} \partial_x \varphi_{\perp} = -\frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 \varphi_{\perp}. \quad (1.108)$$

Quand au terme de droite dans (1.107), on l'écrit sous la forme :

$$\left[\lambda(n_1(x, t)) - V_{\text{ext}}(x) + \frac{\partial_{xx} \psi}{2\psi} \right] \varphi_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}) = \epsilon(x, t) \varphi_{\perp}. \quad (1.109)$$

On obtient donc au final :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\perp}^2 \varphi_{\perp} + (V_{\perp} + g n_1(x, t) \varphi_{\perp}^2) \varphi_{\perp} = \epsilon(x, t) \varphi_{\perp}. \quad (1.110)$$

Quant à l'extrémisation par rapport à ψ^* , on obtient :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{xx} \psi + V_{\text{ext}}(x) \psi + \psi \int d^2 r_{\perp} \left\{ -\frac{1}{2} |\nabla_{\perp} \varphi_{\perp}|^2 + (V_{\perp} + g\psi^2 \varphi_{\perp}^2) \varphi_{\perp}^2 \right\} = i\hbar \partial_t \psi. \quad (1.111)$$

¹⁷On obtient le même résultat si avant la variation, on remplace $\psi^2 \nabla^2 \varphi_{\perp}$ par $\psi^2 \nabla_{\perp}^2 \varphi_{\perp}$.

Il est clair que le terme intégré n'est autre que $\epsilon(x, t)$ ¹⁸.

On obtient donc :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{xx} \psi + V_{\text{ext}}(x)\psi + \epsilon(x, t)\psi = i\hbar \partial_t \psi. \quad (1.112)$$

Ainsi la valeur propre de l'hamiltonien transverse $\epsilon(x, t)$ joue le rôle de potentiel pour la partie longitudinale.

En l'absence de potentiel externe, $\epsilon(x, t)$ ne dépend de x et de t que par l'intermédiaire de $n_1(x, t)$, on le notera alors $\epsilon(n_1(x, t))$.

D'après (1.110), on peut voir que le paramètre sans dimension qui va caractériser nos solutions est $a\psi(x, t)^2 = a n_1(x, t)$ où a est la longueur de diffusion¹⁹ du potentiel d'interaction.

Suivant la valeur de $a n_1$, on aura différents régimes :

- Si $a n_1 \ll 1$: le régime de champ moyen 1D .
- Si $a n_1 \gg 1$: le régime de Thomas Fermi transverse.

1.4.3 Régime de Thomas-Fermi transverse : $a n_1 \gg 1$

Dans le cas où $a n_1 \gg 1$ le terme cinétique devient négligeable dans (1.110) et la condition de normalisation (1.99) permet d'écrire lorsque $V_{\perp} = \frac{m}{2} \omega_{\perp}^2 r_{\perp}^2$:

$$\epsilon(n_1) = 2\hbar\omega_{\perp} \sqrt{n_1 a}, \quad (1.113)$$

avec $n_1(x, t) = n_{\infty}$ en l'absence de potentiel externe.

Si l'on cherche alors une solution stationnaire de (1.112) de la forme $\psi_0(x)e^{-i\mu t/\hbar}$, on obtient lorsque $V_{\text{ext}}(x) = 0$:

$$\mu = 2\hbar\omega_{\perp} \sqrt{n_{\infty} a} \quad (1.114)$$

Dans ce régime, le condensat garde une forme tri-dimensionnelle et le rayon pour lequel la densité s'annule [59] s'écrit

$$R_{\perp} = 2a_{\perp}(a n_{\infty})^{1/4}, \quad (1.115)$$

où a_{\perp} est défini à l'équation (1.146).

Précisons ici, que même dans ce régime la densité tri-dimensionnelle n_{3D} doit toujours vérifier $n_{3D}^{1/3} a \ll 1$, ce qui est équivalent à [63], $n_1 a \ll (a_{\perp}/a)^4$, or a_{\perp}/a est typiquement de l'ordre de 10^3 ce qui permet clairement d'avoir les deux conditions remplies $n_1 a \gg 1$ et $n_{3D}^{1/3} a \ll 1$

On a de plus dans le régime de Thomas Fermi transverse :

$$R_{\perp} \gg \xi, \quad (1.116)$$

où ξ est la longueur de relaxation défini dans le cas uni-dimensionnel par :

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{m\mu}}. \quad (1.117)$$

¹⁸Cela se voit en multipliant les deux termes de (1.110) par φ_{\perp} et en intégrant sur $d^2 r_{\perp}$.

¹⁹On rappelle que $g = 4\pi a \hbar^2/m$.

Ainsi dans ce régime le système présente deux longueurs typiques : R_{\perp} et ξ .

Dans ce régime, la plus basse branche du spectre des excitations a le profil suivant[66, 67, 68] :

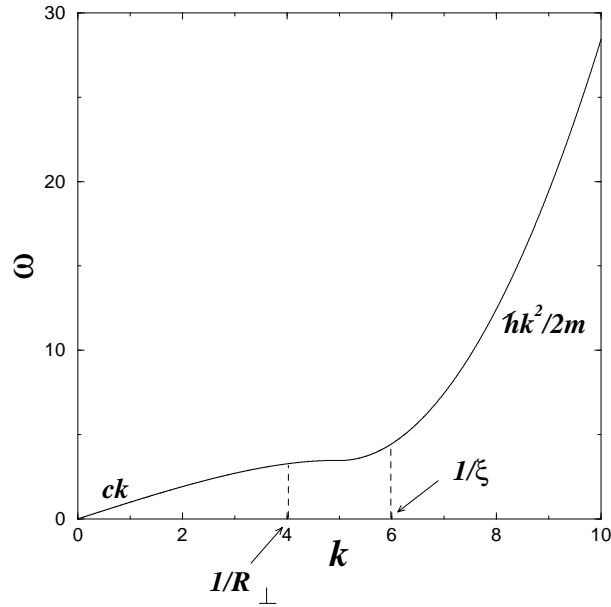


Fig. 1.5 : Cette figure représente le profil de la plus basse branche du spectre des excitations dans le régime de Thomas Fermi transverse.

On observe un changement de convexité de la plus basse branche du spectre des excitations pour des vecteurs d'onde de l'ordre de $1/R_{\perp}$. Cette "chute" de la pente du spectre apparaît lorsque l'on crée des excitations qui ont une longueur d'onde qui leur permet d'explorer les bords du condensat où la vitesse du son est plus faible du au fait la densité y soit plus faible.

C'est un effet qui se situe au-delà de l'approche 1D développée dans (1.4.2) et ne peut ainsi pas être reproduit par l'ansatz (1.98) qui conduirait à la relation de dispersion :

$$(\hbar\omega)^2 = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{m} \mu, \quad (1.118)$$

qui reproduit seulement la partie du spectre à grande longueur d'onde, c'est-à-dire pour $k < 1/R_{\perp}$.

L'approche 1D permet donc de modéliser, dans le régime de Thomas-Fermi, seulement des situations pour lesquels :

$$\omega = ck \ll \frac{c}{R_{\perp}}, \quad (1.119)$$

ce qui est équivalente compte tenu de (1.115) et (1.171) à :

$$\omega \ll \omega_{\perp}. \quad (1.120)$$

et compte tenu de la valeur du potentiel chimique (1.114), la relation (1.120) se réécrit :

$$\omega \ll \frac{\mu}{\hbar}. \quad (1.121)$$

C'est-à-dire que l'on pourra modéliser par l'approche 1D dans le régime de Thomas-Fermi seulement des situations dépendant faiblement du temps.

1.4.4 Régime de champ moyen 1D : $(a/a_{\perp})^2 \ll a n_1 \ll 1$

Il semble intuitif de supposer que le régime dilué dans lequel on peut appliquer une théorie de champ moyen permettant d'obtenir l'équation de Gross-Pitaevskii nécessite que la distance d entre les particules soit beaucoup plus petite que l'échelle typique de longueur sur laquelle la fonction d'onde du système va varier, c'est-à-dire la longueur de relaxation définie par (1.117) :

Afin d'établir la validité de l'approximation de champs moyen à une dimension, étudions le rapport ξ/d en fonction de la densité.

On obtient alors pour le rapport ξ/d , compte tenu de la définition de ξ (1.117) et de la valeur du potentiel chimique (1.126) :

$$\frac{\xi}{d} = \sqrt{\frac{a_{\perp}^2}{4a} n_{\infty}}, \quad (1.122)$$

où la distance inter-atomique d est égale dans le cas uni-dimensionnel à n_{∞}^{-1} , où n_{∞} représente la densité lorsque $V_{\text{ext}}(x) = 0$

Ainsi le rapport $\frac{\xi}{d}$ croît quand la densité augmente. La description de champ moyen devient inadéquate pour décrire les condensats uni-dimensionnels très dilués. Le régime très dilué est appelé régime de Tonks-Girardeau. Nous verrons dans le prochain paragraphe (1.4.5), que l'on perd, dans ce régime, les propriétés de cohérence de la phase et que celui-ci correspond à une situation où l'on a : $n_{\infty} a < \left(\frac{a}{a_{\perp}}\right)^2$.

Considérons donc une situation qui vérifie²⁰ :

$$\left(\frac{a}{a_{\perp}}\right)^2 \ll a n_{\infty} \ll 1. \quad (1.123)$$

La première inégalité permet d'éviter le régime de Tonks-Girardeau et la seconde inégalité, quant à elle, indique que le terme non-linéaire dans l'équation (1.110) peut être considéré comme une perturbation, on obtient un profil gaussien pour la fonction d'onde du fondamental de l'hamiltonien transverse et comme état propre :

$$\epsilon(n_1) = \epsilon_0 + 2 \frac{\hbar^2}{m} \frac{n_1 a}{a_{\perp}^2}, \quad (1.124)$$

avec ϵ_0 qui représente l'énergie du niveau fondamental de l'hamiltonien transverse non perturbé : $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\perp}^2 + V_{\perp}$. On peut toujours choisir l'origine des énergies de sorte que ce terme soit nul.

²⁰Expérimentalement $\left(\frac{a}{a_{\perp}}\right)^2 \sim 10^{-6}$, l'hypothèse $\left(\frac{a}{a_{\perp}}\right)^2 \ll a n_{\infty} \ll 1$ est donc valable sur un très large éventail de densité.

Ainsi (1.112) s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{xx}\psi + g_{1D}|\psi|^2\psi = i\hbar\partial_t\psi, \quad (1.125)$$

avec $g_{1D} = 2\frac{\hbar^2}{m}\frac{a}{a_{\perp}^2}$.

C'est dans ce modèle que nous nous sommes placés pour les articles 1 et 2.

En cherchant une solution stationnaire $\psi_0(x)e^{-i\mu t/\hbar}$ de (1.125), on obtient en l'absence de potentiel externe :

$$\mu = g_{1D}n_{\infty}. \quad (1.126)$$

Le spectre des excitations dans le régime de champ moyen $1D$ peut s'obtenir de manière analogue au cas $3D$ par le formalisme de Bogoliubov en remplaçant \mathbf{r} par x , g par g_{1D} et n par n_1 , on a simplement :

$$(\hbar\omega)^2 = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{m}g_{1D}n_1. \quad (1.127)$$

On définit la vitesse du son, comme la pente des excitations à basse énergie, ce qui donne :

$$c = \sqrt{\frac{g_{1D}n_1}{m}}. \quad (1.128)$$

1.4.5 Fluctuations de la phase

Nous avons vu au paragraphe précédent par des arguments qualitatifs que la description de champ moyen devenait inadaptée pour décrire les condensats uni-dimensionnels à très basse densité.

Nous allons, dans ce paragraphe, revenir d'une manière plus quantitative sur point. Pour cela, nous allons considérer le régime de champ moyen $1D$, et montrer que dans le cas très dilué, c'est-à-dire, plus précisément, dans une situation où l'on a $n_{\infty}a < \left(\frac{a}{a_{\perp}}\right)^2$, on perd alors les propriétés de cohérence de la phase.

On commence par décomposer l'opérateur champ $\hat{\chi}$ en opérateur de densité et de phase, soit $\hat{\chi} = e^{i\hat{\phi}-i\mu t/\hbar}\sqrt{\hat{n}}$

En réinjectant $\hat{\chi}$ dans cette équation (1.125), on obtient pour les opérateurs \hat{n} et $\hat{\phi}$, dans le cas d'un gaz libre, les équations suivantes²¹ :

$$-\hbar\frac{\partial\hat{n}}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{m}\partial_x(\partial_x\hat{\phi}\hat{n}), \quad (1.129)$$

$$-\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x\hat{\phi})^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial_x^2\sqrt{\hat{n}}}{\sqrt{\hat{n}}} + g_{1D}\hat{n} - \mu. \quad (1.130)$$

On va considérer de faibles fluctuations de densité et développer l'opérateur densité en $\hat{n} = n_{\infty} + \delta\hat{n}$. Si l'on linéarise les équations ci-dessus au voisinage de la solution stationnaire, c'est-à-dire $\hat{n} = n_{\infty}$ et $\nabla\hat{\phi} = 0$, on obtient finalement :

²¹On a remplacé dans la deuxième équation le potentiel d'interaction par le potentiel binaire $g_{1D}\delta(x-x')$.

$$\hbar \frac{\partial(\delta\hat{n}/\sqrt{n_\infty})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 (2\sqrt{n_\infty} \hat{\phi}), \quad (1.131)$$

$$-\hbar \frac{\partial 2\sqrt{n_\infty} \hat{\phi}}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + 2\mu \right) \frac{\delta\hat{n}}{\sqrt{n_\infty}}, \quad (1.132)$$

avec $\mu = g_{1D} n_\infty$.

Sur ce, d'une manière analogue à ce que l'on a présenté dans le paragraphe (1.3.1) sur la théorie de Bogoliubov, on décompose $\delta\hat{n}$ et $\hat{\phi}$ sous la forme :

$$\delta\hat{n}(x) = i\sqrt{n_\infty} \sum_i f_i^+ e^{-i\omega_i t} \hat{b}_i + cc, \quad (1.133)$$

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{2\sqrt{n_\infty}} \sum_i f_i^- e^{-i\omega_i t} \hat{b}_i + cc. \quad (1.134)$$

(cc correspond au conjugué complexe)

On obtient alors comme système pour les fonctions $f^{\pm 22}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 f_i^- = \epsilon_i f_i^+, \quad (1.135)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + 2\mu \right) f_i^+ = \epsilon_i f_i^-, \quad (1.136)$$

(avec $\epsilon_i = \hbar\omega_i$)

On peut en résolvant le système précédent calculer les fluctuations de densité et de phase, ceci a été étudié en détail dans la thèse de D. Petrov²³ [47].

On peut vérifier que les solutions du système précédent sont des ondes planes qui s'écrivent :

$$f^\pm(k) = C \left(\frac{\epsilon(k)}{E(k)} \right)^{\mp 1/2} e^{ik \cdot x}, \quad (1.137)$$

avec :

– C qui représente une constante de normalisation,

²²En présence d'un potentiel externe, ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V_{\text{ext}}(x) + g_{1D} n_1(x) - \mu \right) f_i^- &= \epsilon_i f_i^+, \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V_{\text{ext}}(x) + 3g_{1D} n_1(x) - \mu \right) f_i^+ &= \epsilon_i f_i^-. \end{aligned}$$

On retrouve ici l'analogie de la théorie de Bogoliubov, les équations (1.135) sont équivalentes aux équations (1.53) et (1.54) en remplaçant g par g_{1D} , \mathbf{r} par x et en posant $f^\pm = u \pm v$.

La théorie de Bogoliubov peut donc être présentée de deux façons :

- soit en décomposant l'opérateur sous la forme (1.34),
- soit en représentant l'opérateur bosoniques $\hat{\chi}(\mathbf{r}, t)$ avec l'aide de l'opérateur densité : $\hat{n} = n_\infty + \delta\hat{n}$, n_∞ étant la densité moyenne du condensat et de l'opérateur phase $\hat{\phi}$ et en décomposant $\delta\hat{n}$ et $\hat{\phi}$ sous la forme (1.133) et (1.134).

²³On pourra trouvé les détails de ce calcul et le cas du gaz piégé dans [47].

– et $\epsilon(k) = \sqrt{E(k)[E(k) + 2\mu]}$ et $E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

On peut alors calculer les fluctuations de densité et montrer qu'elles sont bornées à température nulle[47] :

$$\langle [\delta\hat{n}(x) - \delta\hat{n}(x')]^2 \rangle / n_\infty < (\mu/k_B T_d)^{1/2}, \quad (1.138)$$

où T_d est définie par $k_B T_d = \hbar^2 n_\infty^2 / m$.

Si l'on considère une situation²⁴ où $\mu \ll k_B T_d$ les fluctuations de densité seront faibles comparées à la densité moyenne n_∞ , on pourra alors les négliger et écrire l'opérateur $\hat{\chi}$ sous la forme :

$$\hat{\chi} \simeq \sqrt{n_\infty} e^{i\hat{\phi}}. \quad (1.139)$$

Ainsi à température nulle, le gaz possède les mêmes propriétés de densité qu'un condensat de Bose-Einstein, mais la phase n'est pas encore uniforme. En effet la réduction des fluctuations de densité n'impliquent en rien la réduction des fluctuations de phase.

Concernant les fluctuations de la phase, à température nulle celle-ci prennent la forme :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \langle [\hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{k_B T_d}} \ln \frac{x}{\xi}. \quad (1.140)$$

Les fluctuations de phase ne sont pas bornées et divergent en $\ln x$, ainsi il n'existe pas de véritable condensat à une dimension.

Toutefois, on peut toujours définir une distance L_ϕ sur laquelle $\langle [\hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle \ll 1$ où l'on pourra alors considérer le système comme cohérent de phase.

Plus précisément, il convient ici d'établir quelques ordres de grandeurs.

Si :

$$\langle [\hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle \sim 1, \quad (1.141)$$

alors la distance L_ϕ sur laquelle a varié la phase s'écrit :

$$L_\phi = \xi \exp\left(\pi \sqrt{\frac{k_B T_d}{\mu}}\right). \quad (1.142)$$

Compte tenu que l'on considère une situation où $\mu \ll k_B T_d$, on a dans ces conditions clairement $L_\phi \gg \xi$, les fluctuations de la phase sont quasiment négligeables, on pourra considérer le système comme un vrai condensat cohérent de phase²⁵ qui pourra être décrit par l'équation de Gross-Pitaevskii.

Or $\mu \ll k_B T_d$ équivaut à $g_{1D} n_\infty \ll \frac{\hbar^2 n_\infty^2}{m}$, de plus, g_{1D} défini à l'équation (1.125) peut se réécrire, d'après (1.146), $2\hbar\omega_\perp a$ où ω_\perp est la fréquence transverse du piège et a la longueur de diffusion.

²⁴Avec des grandeurs expérimentales typiques $n_\infty = 1.8 \cdot 10^7$ atomes/m et $m = 3 \cdot 10^{-26}$ kg alors $T_d \sim 8.4 \cdot 10^{-6}$ K alors que par exemple dans les expériences le potentiel chimique est de l'ordre du kHz ce qui donne en unité de température de $4.8 \cdot 10^{-8}$ K

²⁵Dans le cas où le système n'est pas complètement cohérent de phase, on parle de quasi-condensat.

La condition de cohérence $\mu \ll k_B T_d$ peut donc se réécrire :

$$1 \ll n_\infty a_1, \quad (1.143)$$

ou d'une manière équivalente :

$$\left(\frac{a}{a_\perp}\right)^2 \ll n_\infty a, \quad (1.144)$$

avec a_\perp et a_1 qui sont définis par :

$$g_{1D} = \frac{\hbar^2}{m a_1} \text{ et} \quad (1.145)$$

$$\hbar \omega_\perp = \frac{\hbar^2}{m a_\perp^2}, \quad (1.146)$$

où ω_\perp est la fréquence transverse du piège confinant.

La longueur L_ϕ peut donc se réécrire $L_\phi = \xi e^{\pi\sqrt{a_1 n_\infty}}$ et dans le cas où (1.78) est valide celle-ci est exponentiellement plus grande que la longueur de relaxation ξ . On peut alors, dans ces conditions, considérer le système comme cohérent de phase.

1.4.6 Vers le régime de Tonks

On considère un gaz uni-dimensionnel qui vérifie $n_1 a < (\frac{a}{a_\perp})^2$.

Reprenons donc l'équation (1.112), dans celle-ci, l'ordre de grandeurs du terme cinétique est :

$$E_c \sim -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{d^2}, \quad (1.147)$$

Où d est la distance typique entre les atomes, soit $d = 1/n_1$, d'où $E_c \sim -\frac{\hbar^2 n_1^2}{2m}$

Quant au terme d'interaction, celui-ci vaut :

$$E_{int} = g_{1D} n_1, \quad (1.148)$$

A partir de ces considérations, il est immédiat de voir que :

$$\lim_{n_1 \rightarrow 0} \frac{E_c}{E_{int}} = 0. \quad (1.149)$$

De ce fait, le gaz de Bose à une dimension est plus interagissant à basse densité qu'à haute densité.

Afin d'illustrer ce résultat, il est ici instructif de présenter le problème de base de diffusion de deux atomes à une dimension. Ce problème a été traité par Olshanii [44].

Dans une situation où les atomes n'induisent pas d'excitations transverses, c'est-à-dire vérifie $\hbar^2 k^2 / 2m \ll \hbar \omega_\perp$ ²⁶, l'amplitude de transmission pour deux atomes dans le fondamental transverse, avec un vecteur d'onde k s'écrit :

$$t(k) = 1 - \frac{1}{1 + ika_1 + \mathcal{O}[(ka_\perp)^3]}, \quad (1.150)$$

²⁶Cette situation est bien cohérente avec la définition d'un gaz 1D.

avec $a_1 = a_\perp^2/a$

Cette amplitude de transmission est identique à celle que produirait un pseudo-potentiel $g_{1D}\delta(x-x')$

Nous allons voir que dans le régime de Tonks, les atomes acquièrent un caractère fermionique dans le sens que leur fonction d'onde décroît fortement lorsqu'ils se rapprochent les uns des autres.

Pour $ka_1 \ll 1$, l'amplitude de transmission tend vers zéro et les deux atomes se réfléchissent l'un sur l'autre. En fait le problème est équivalent à la diffusion par une barrière δ à une dimension, si $ka_1 \ll 1$ alors l'énergie incidente est plus faible que la hauteur de la barrière et la probabilité de réflexion est proche de 1.

Si l'on considère le gaz dans son ensemble, si $ka_1 \ll 1$ alors la probabilité de trouver deux bosons proche l'un de l'autre est quasi nulle²⁷. Dans cette situation le gaz se comporte comme un ensemble de bosons impénétrables.

En prenant $k \sim n_1$, la relation $ka_1 \ll 1$ devient équivalente à $n_1 a_1 \ll 1$, d'après (1.143), cela implique que l'on sort du d'applicabilité de l'approximation champ moyen.

Ainsi dans le régime de Tonks-Girardeau, les atomes se réfléchissent donc les uns sur les autres sans jamais s'approcher.

1.4.7 Equations hydrodynamiques à une dimension

On utilise la transformation de Madelung : $\psi(x, t) = \sqrt{n_1(x, t)}e^{iS(x, t)}$ qui réinjectée dans l'équation (1.112) donne :

$$\partial_t n_1 + \partial_x (n_1 v) = 0 \text{ et} \quad (1.151)$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} v + \partial_x \left(V_{\text{ext}}(x) - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n_1}} \partial_x^2 \sqrt{n_1} + \epsilon(n_1) + \frac{mv^2}{2} \right) = 0, \quad (1.152)$$

avec $v = \frac{\hbar}{m} \partial_x S(x, t)$.

On rappelle aussi que le terme $\epsilon(n_1)$ s'écrit :

$$\epsilon(n_1) = 2 a \hbar \omega_\perp n_1 = g_{1D} n_1, \quad (1.153)$$

dans le régime de champ moyen 1D, et,

$$\epsilon(n_1) = 2 \hbar \omega_\perp \sqrt{a n_1}, \quad (1.154)$$

dans le régime de Thomas-Fermi transverse.

Nous allons alors, comme dans le cas tri-dimensionnel, négliger dans (1.152), le terme de pression quantique.

²⁷L'analogie du principe de Pauli joue alors pour les atomes bosoniques, on parle de "fermionisation" du gaz de bosons.

De même qu'à l'équation (1.74), dans le cas d'une situation stationnaire où $n_1 = n_0(x)$, le terme de pression quantique est de l'ordre de :

$$\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n_0}} \partial_x^2 \sqrt{n_0} \sim \frac{\hbar^2}{2m d^2} \quad (1.155)$$

où d est une échelle typique des variations de la densité.

De la même manière qu'à l'équation (1.75), on peut négliger le terme de pression quantique si l'échelle typique r_c des variations du potentiel externe est grande comparée à la longueur de relaxation ξ .

Dans une situation non-stationnaire, on considère alors de petites oscillations autour de la densité d'équilibre $n_0(x)$ de la forme :

$$n_1(x, t) = n_0(x) + \delta n(x, t). \quad (1.156)$$

Dans ce cas, on écrit que $d \sim 1/k$, où d est ici la distance typique de variation de la densité δn . Négliger le terme de pression quantique revient donc à supposer que :

$$\frac{\hbar^2 k^2 \delta n}{2m n_0} \ll \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n} \right)_{n_0} \delta n. \quad (1.157)$$

En utilisant la relation (1.161) dans la limite où $V_{\text{ext}} \ll \mu$ et les définitions de la vitesse du son (1.163) et de la longueur de relaxation (1.117), on peut réécrire la relation (1.157) sous la forme :

$$k \xi \ll 1. \quad (1.158)$$

On retrouve alors une relation analogue à la relation (1.78), dans le cas tri-dimensionnel. On retrouve bien le fait que, les équations hydrodynamiques permettent de décrire les excitations dans la partie linéaire du spectre.

En outre, dans le cas du régime de Thomas-Fermi transverse d'après la forme du spectre des excitations présenté au paragraphe (1.4.3), le régime des équations hydrodynamiques est également contraint par :

$$k \ll \frac{1}{R_{\perp}}, \quad (1.159)$$

où R_{\perp} est la taille transverse du condensat.

Enfin la dépendance en x de la densité d'équilibre peut se déduire de la relation (1.161) dite "d'approximation de la densité locale" ou de Thomas-Fermi.

Cette approximation peut se justifier à partir de l'équation (1.112) sous sa forme stationnaire en présence d'un potentiel externe :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{xx} \psi + (V_{\text{ext}}(x) + \epsilon(n_0(x))) \psi = \mu \psi. \quad (1.160)$$

Dans la limites où $r_c \gg \xi$, on va pouvoir négliger le premier terme dans (1.160), dans ce cas on obtient alors :

$$\mu = V_{\text{ext}}(x) + \epsilon(n_0(x)). \quad (1.161)$$

En combinant les équations (1.151) et (1.152) et l'approximation de densité locale, on obtient alors comme équation pour $\delta n(x, t)$

$$\partial_t^2 \delta n(x, t) = \frac{1}{m} \partial_x \left[n_0(x) \partial_x [\delta n(x, t) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n} \right)_{n_0}] \right]. \quad (1.162)$$

Cette relation est vraie quel que soit le régime mais présente une forme différente suivant les différentes situations.

On définit enfin la vitesse du son local par :

$$m c^2(x) = n_0 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n} \right)_{n_0}. \quad (1.163)$$

A) Régime de champ moyen 1D

Dans le cas du régime champ moyen 1D, compte tenu de l'expression de $\epsilon(n_1)$, on a :

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n} \right)_{n_0} = 2 a \hbar \omega_{\perp}, \quad (1.164)$$

ce qui conduit à :

$$\partial_t^2 \delta n = \partial_x [c^2(x) \partial_x \delta n], \quad (1.165)$$

avec :

$$c^2(x) = 2 \frac{a n_0(x) \hbar \omega_{\perp}}{m} = \frac{g_{1D} n_0(x)}{m}. \quad (1.166)$$

On obtient une équation analogue à l'équation (1.80) obtenue dans le cas tri-dimensionnel à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii .

B) Régime de Thomas-Fermi transverse

Dans le cas du régime de Thomas-Fermi transverse, compte de l'expression de $\epsilon(n_1)$, l'équation (1.162) conduit à :

$$\partial_t^2 \delta n = \partial_x \left[\frac{\hbar \omega_{\perp} \sqrt{a n_0(x)}}{m} \left(\partial_x \delta n - \frac{1}{2} \delta n \frac{\partial_x n_0(x)}{n_0(x)} \right) \right]. \quad (1.167)$$

On écrit alors :

$$\partial_x \delta n \sim k \delta n, \quad (1.168)$$

avec, on le rappelle, $k \sim 1/d$ où d est la distance typique des variations de δn .

Et d'autre part, on écrit que :

$$\delta n \frac{\partial_x n_0(x)}{n_0(x)} \sim \frac{\delta n}{r_c}, \quad (1.169)$$

où r_c , on le rappelle, représente une échelle typique des variations du potentiel externe.

En supposant que $r_c \gg d$, c'est-à-dire que l'échelle typique des variations du potentiel externe est beaucoup plus grande que celle de δn ²⁸, on pourra négliger le second terme dans (1.167) et l'équation (1.162) conduit donc à :

$$\partial_t^2 \delta n = \partial_x [c^2(x) \partial_x \delta n], \quad (1.170)$$

mais avec une vitesse du son différente du cas de champ moyen 1D :

$$c^2(x) = \frac{\hbar \omega_\perp}{m} \sqrt{n_0(x) a}. \quad (1.171)$$

En l'absence de potentiel externe $n_0(x) = n_\infty$ et compte tenu de l'expression du potentiel chimique (1.114), on peut réécrire (1.171) sous la forme :

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{2m}}, \quad (1.172)$$

De plus dans le régime de Thomas-Fermi transverse, on peut écrire grâce à l'équation (1.110) :

$$\epsilon(n_\infty) = \frac{m}{2} \omega_\perp \mathbf{r}_\perp^2 + g n_\infty |\varphi_\perp(\mathbf{r}_\perp)|^2, \quad (1.173)$$

ce qui conduit à :

$$\mu = g n_\infty |\varphi_\perp(0)|^2. \quad (1.174)$$

Ainsi (1.172) peut se réécrire :

$$c = \sqrt{\frac{g n_{3D}(0)}{2m}}, \quad (1.175)$$

où $n_{3D}(0) = n_\infty |\varphi_\perp(0)|^2$ est la densité tri-dimensionnelle prise au centre du piège.

On peut comparer cette expression avec les résultats expérimentaux de Andrews et al [128].

²⁸Nous dériverons dans la troisième annexe l'équation (1.171) d'une manière "plus rigoureuse".

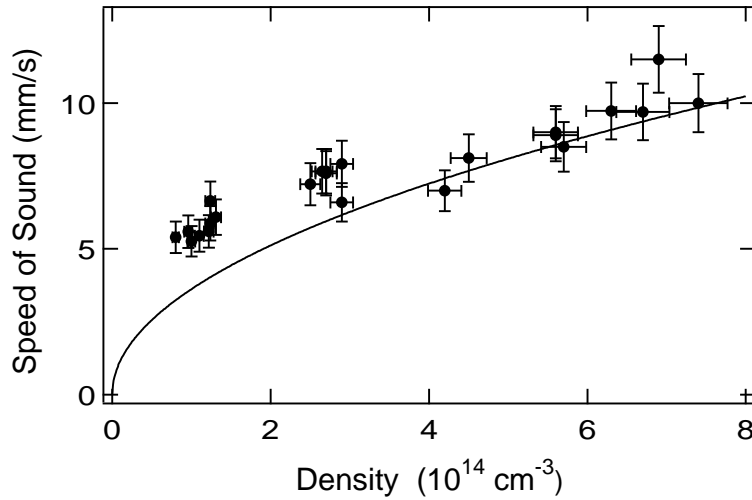


Fig 1.6 : Cette figure représente la vitesse du son par rapport à la densité tri-dimensionnelle $n_{3D}(0)$ [128], on y compare les points expérimentaux à l'expression théorique (1.171) (en ligne continue sur le graphe)

On peut donc voir que l'accord est relativement bon, il semble donc que la vitesse du son dans un condensat anisotrope puisse bien être modélisé par l'équation (1.163).

1.5 Résumé de la situation

Les principaux résultats que nous avons obtenus sont :

- une théorie de champ moyen qui permet de décrire un condensat de Bose-Einstein et d'établir l'équation de Gross-Pitaevskii,
 - un modèle de description de condensat uni-dimensionnel dans des pièges très anisotropes,
- De plus, nous nous sommes attardés à décrire le rôle des interactions dans un condensat de Bose, ceci a débouché sur :
- la théorie de Bogoliubov,
 - les équations hydrodynamiques

Nous allons dans la suite essayer d'étudier le rôle des interactions dans les condensats de Bose uni-dimensionnel.

Or l'une des conséquences les plus spectaculaires des interactions répulsives dans un condensat de Bose uni-dimensionnel est l'existence de solitons sombres.

L'étude de ces systèmes fera l'objet des deux prochains chapitres. Au chapitre 2, nous étudierons la diffusion d'un sombre incident sur un obstacle de taille finie et nous généraliserons la méthode appliquée à une succession aléatoire de pic δ dans le chapitre 3.

Chapitre 2

Les Solitons

2.1 Introduction

C'est en 1834, que J. Russell un ingénieur écossais observa pour la première fois un soliton. Celui-ci alors qu'il montait à cheval sur les rives de l'Union Canal à Edimbourg, remarqua qu'une barge en s'arrêtant brusquement produisait une vague importante qui continuait à se propager en aval du canal en gardant une forme et une vitesse à peu près constante, qu'il nomma "grande onde solitaire" et qu'il décrivit en ces termes :

“ J'observais le mouvement d'un bateau qui était tiré rapidement le long d'un canal étroit par une paire de chevaux quand, soudain le bateau s'arrêta. Mais il n'en fut pas de même pour la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le canal. Elle s'accumula autour de la proue du bateau dans un état de violente agitation, puis, soudainement, l'abandonna, roula vers l'avant à grande vitesse, prenant la forme d'une grande élévation solitaire, d'un paquet d'eau rond, à la forme douce et bien définie, qui continua sa course dans le canal, apparemment sans changement de forme ou diminution de vitesse.

Je la suivis à cheval et la dépassais alors qu'elle roulait encore à la vitesse de 8 ou 9 miles à l'heure, préservant sa forme originale de 30 pieds de long et d'un pied et demi en hauteur. La hauteur diminua peu à peu, et après une poursuite d'un ou deux miles, je la perdais dans les méandres du canal. Tel fut, dans le mois d'août 1834, ma première rencontre avec ce magnifique et singulier phénomène”.

Russell réalisa différentes expériences et publia en 1844 un rapport qui fut très critiqué par deux illustres physiciens : l'astronome Sir G.B. Airy et G.G. Stockes qui par leurs critiques signèrent malheureusement pour Russell l'arrêt de ses travaux sur le sujet. Ainsi il faudra attendre plus de soixante ans en 1895 pour que les travaux de Kortevég et de Vries puissent rendre compte théoriquement pour la première fois de l'observation de Russell via l'équation qui portent désormais leur nom. Enfin c'est en 1965, que suite aux travaux de Zabusky et Kruskal[69], le terme de soliton fut introduit.

Malgré les réticences de Stockes et Airy, depuis la première observation de 1834, les solitons ont fasciné, bon nombre de scientifiques. D'une part bien entendu pour leurs propriétés expérimentales spectaculaires, le soliton est une onde qui correspond à un maximum localisé dans la densité d'énergie du système qui se propage en gardant sa forme et sa vitesse constante à l'image d'une particule et d'autre part aussi pour leurs propriétés mathématiques tout aussi re-

marquables des systèmes intégrables possédant des solutions solitoniques. Ces derniers donnent lieu à des développements théoriques des plus élégants comme par exemple la méthode de diffusion inverse développée dans différents ouvrages [70].

Mais au-delà de l'aspect mathématique, la physique des solitons est elle aussi intéressante par exemple en matière condensée où les expériences sur la condensation de Bose-Einstein sont modélisées via l'équation de Gross-Pitaevskii qui fait partie des équations de base de la théorie des solitons.

Nous commencerons donc ici par présenter l'équation de Schrödinger non-linéaire dans un premier temps attractive avant de présenter l'équation de Schrödinger non-linéaire répulsive qui constitue le cas habituelle pour décrire les condensats de Bose-Einstein,

2.2 Equation de Schrödinger non-linéaire (NLS) attractive

2.2.1 Solution de l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLS) attractive

L'équation NLS attractive s'écrit¹ :

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} - g_{1D}|\psi|^2\psi, \quad (2.1)$$

où g_{1D} est un coefficient positif dans le cas attractif traité ici.

Comme on le verra par la suite ψ est localisée en forme de cloche et $-g_{1D}|\psi|^2$ correspond alors à un puits de potentiel, ce qui est d'ailleurs une condition nécessaire pour que ψ puisse être localisée d'un point de vue spatial. Ainsi ψ "creuse son propre puits de potentiel", ce phénomène qui est appelé "phénomène d'autofocalisation" ou de "self-trapping" met en évidence la possibilité de localiser via des effets non-linéaires.

Pour établir les solutions de l'équation NLS, on commence par écrire ψ sous la forme :

$$\psi(x, t) = \phi(x, t) e^{i\theta(x, t) + if(t)}. \quad (2.2)$$

où ϕ et θ sont des fonctions réelles.

Le terme $\phi^2(x, t)$ représente la densité $n(x, t)$ du condensat et $\frac{\hbar}{m}\partial_x\theta(x, t)$ représente la vitesse du condensat et $f(t)$ représente une phase supplémentaire dont on déterminera l'expression dans la suite. Enfin on notera dans la suite ϕ_0 , l'amplitude maximale du soliton et $\phi_0^2 = n_0$.

On réinjecte (2.2) dans l'équation NLS, ce conduit au système suivant :

$$-\hbar\phi\theta_t - \hbar\phi f_t(t) + \frac{\hbar^2}{2m}\phi_{xx} - \frac{\hbar}{2m}\phi\theta_x^2 + g_{1D}\phi^3 = 0, \quad (2.3)$$

$$\hbar\phi_t + \frac{\hbar^2}{2m}\phi\theta_{xx} + \frac{\hbar}{m}\phi_x\theta_x = 0. \quad (2.4)$$

On cherche alors des solutions se propageant en conservant leur forme et leur vitesse constante :

$$\phi(x, t) = \phi(x - vt), \quad (2.5)$$

$$\text{et } \theta(x, t) = \theta(x - vt). \quad (2.6)$$

¹On a noté $\psi_t = \frac{d\psi}{dt}$ et $\psi_{xx} = \frac{d^2\psi}{dx^2}$.

Le système d'équation (2.3) s'écrit alors

$$v \hbar \phi \theta_x - \hbar f_t \phi + \frac{\hbar^2}{2m} \phi_{xx} - \frac{\hbar^2}{2m} \phi \theta_x^2 + g_{1D} \phi^3 = 0, \quad (2.7)$$

$$-v \hbar \phi_x + \frac{\hbar^2}{2m} \phi \theta_{xx} + \frac{\hbar}{m} \phi_x \theta_x = 0. \quad (2.8)$$

La seconde équation de ce système pouvant alors facilement s'intégrer après multiplication par ϕ menant à :

$$-\frac{v}{2} \phi^2 + \frac{\hbar}{2m} \phi^2 \theta_x = c_1, \quad (2.9)$$

où c_1 est une constante d'intégration.

Nous allons dans la suite, chercher des solutions localisées pour ψ , c'est-à-dire qui tendent vers 0 quand $|x|$ tend vers l'infini, ce qui implique alors nécessairement que la constante c_1 doit être nulle.

On obtient :

$$\frac{\hbar}{m} \theta_x = v, \quad (2.10)$$

ce qui par intégration conduit à

$$\theta = \frac{mv}{\hbar} (x - vt) + c_2, \quad (2.11)$$

La constante c_2 peut être prise égale 0 en choisissant judicieusement l'origine des temps. En réinjectant ce résultat dans la première équation du système (2.3), on obtient :

$$-\hbar f_t \phi + \frac{\hbar^2}{2m} \phi_{xx} + \frac{mv^2}{2} \phi + g_{1D} \phi^3 = 0, \quad (2.12)$$

On peut alors déterminer l'expression de $f(t)$.

D'après l'équation précédente, on a :

$$f_t(t) - \frac{mv^2}{2\hbar} = \frac{\hbar}{2m\phi} \phi_{xx} + \frac{g_{1D}}{\hbar} \phi^2. \quad (2.13)$$

Dans cette équation, le terme de gauche est une fonction uniquement de t alors que tous les membres du terme de droite sont des fonctions de $x - vt$, donc nécessairement $f_t(t) = cst$ soit :

$$f_t(t) = \frac{mv^2}{2\hbar} + \frac{g_{1D}}{\hbar} \phi_0^2, \quad (2.14)$$

ce qui donne :

$$f(t) = \left(\frac{mv^2}{2} + g_{1D} \phi_0^2 \right) \frac{t}{\hbar}, \quad (2.15)$$

$$= \frac{\mu t}{\hbar}. \quad (2.16)$$

On peut alors intégrer l'équation (2.12) ce qui conduit à :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \phi_x^2 + V_{\text{eff}}(\phi) = c_4, \quad (2.17)$$

avec

$$V_{\text{eff}}(\phi) = \frac{g_{1D}}{2} (\phi^2 - \phi_0^2)^2. \quad (2.18)$$

Comme la solution recherchée est localisée, la constante c_4 est nécessairement égale à $\frac{g_{1D}}{2} \phi_0^4$, (2.17) se ramène donc à une équation de mouvement d'une particule classique d'énergie $\frac{g_{1D}}{2} \phi_0^4$, de position ϕ et de temps x .

Si g_{1D} est positif alors $V_{\text{eff}} - \frac{g_{1D}}{2} \phi_0^4$ a l'allure suivante :

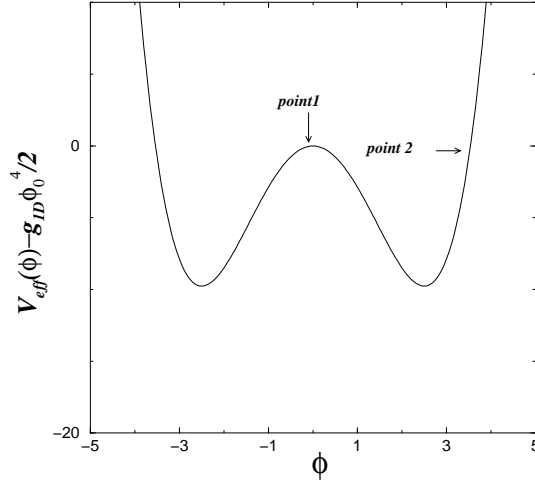


Fig. 2.1 : Cette figure représente l'allure de $V_{\text{eff}} - \frac{g_{1D}}{2} \phi_0^4$ où V_{eff} est défini à l'équation (2.18)

Dans ce cas en considérant, l'équation (2.17), comme l'équation de mouvement d'une particule classique, on peut constater qu'il existe un mouvement borné qui part de l'état $\phi = 0$ (noté 1 sur la figure) pour atteindre le point ϕ_0 , noté 2, puis rebrousse chemin pour revenir à son point initial.

Plus précisément, la forme de la solution s'obtient, en intégrant l'équation (2.17), via le changement de variable $\phi = \frac{\phi_0}{\cosh v}$ ce qui mène à l'expression suivante :

$$\phi = \frac{\phi_0}{\cosh\left[\sqrt{\frac{g_{1D}m\phi_0^2}{\hbar^2}}(x - vt)\right]}. \quad (2.19)$$

La solution complète $\psi(x, t)$ s'écrit alors

$$\psi(x - vt) = \frac{\phi_0}{\cosh\left[\frac{(x-vt)}{L_e}\right]} e^{i\frac{mv}{\hbar}(x-vt)} e^{i\mu t/\hbar}, \quad (2.20)$$

avec $L_e = \frac{\hbar}{\sqrt{g_{1D}m\phi_0^2}}$.

Le nombre de particules N à l'intérieur de soliton s'écrit :

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x - vt)|^2 = 2L_e\phi_0^2. \quad (2.21)$$

L'énergie par particule consiste en une partie cinétique et une partie d'interaction (due aux non-linéarités) et s'écrit alors :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{3} \frac{\hbar^2}{m a_1} N^2, \quad (2.22)$$

où a_1 est relié à g_{1D} par $g_{1D} = \frac{\hbar^2}{m a_1}$.

Un soliton brillant va donc être caractérisé par deux grandeurs, sa vitesse v et son nombre de particules N .

Ainsi la solution de NLS à la forme d'une paquet d'onde de largeur L_e , inversement proportionnelle à l'amplitude ϕ_0 , quand l'amplitude diminue sa largeur augmente. On retrouve bien ici, l'idée que la localisation de la solution est due aux effets non-linéaires, dans la limite linéaire, c'est-à-dire quand $g_{1D} \rightarrow 0$, la solution que l'on obtient est une solution infiniment étendue : une onde plane.

2.2.2 Observation expérimentale

Des solitons brillants ont pu être observés dans des condensats uni-dimensionnels [78].

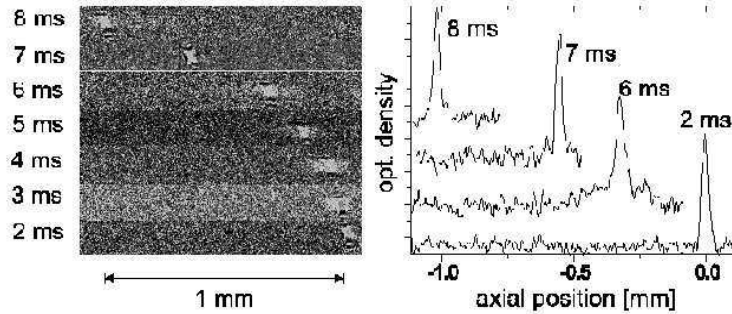


Fig. 2.2 : Cette figure représente la propagation d'un soliton brillant, dans un guide d'onde uni-dimensionnel, obtenu par les équipes du laboratoire Kastler-Brossel de l'école normale [49].

Ainsi donc la solution de l'équations NLS attractive est localisée et a la forme d'une "cloche", le soliton est alors qualifié de "brillant". Or si l'on considère un condensat de Bose-Einstein où l'interaction entre les atomes est répulsive, le système est décrit par l'équation de Schrödinger non-linéaire répulsive. La solution comme on le détaillera dans le prochain paragraphe est un trou se propageant au sein d'un fond constant, ces solutions sont appelées solitons sombres. Ces derniers ont été créés dans les années 80 dans le cadre d'optique non-linéaire [71].

2.3 Equation de Schrödinger non-linéaire (NLS) répulsive

Nous avons vu dans la première partie que l'on savait créer des condensats de Bose-Einstein quasi uni-dimensionnel qui dans la limite champ moyen 1D sont décrits par l'équation de Schrödinger uni-dimensionnelle :

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar}{2m}\psi_{xx} + g_{1D}|\psi|^2\psi. \quad (2.23)$$

Il est instructif de montrer par des arguments qualitatifs que la solution solitonique va correspondre, dans le cas de (2.23), à une dépression de la densité et non plus à une "bosse" comme dans le cas attractif.

2.3.1 Quelques arguments qualitatifs

Commençons par reprendre ici la relation de dispersion de Bogoliubov qui donne la fréquence d'une excitation en fonction du vecteur d'onde q :

$$\omega = q\sqrt{\frac{g_{1D}n}{m} + \frac{\hbar^2 q^2}{4m^2}}, \quad (2.24)$$

$$= qc\sqrt{1 + \frac{\xi^2 q^2}{4}}, \quad (2.25)$$

(où c représente la vitesse du son dans le condensat définie par $mc^2 = g_{1D}n$ et ξ la longueur de relaxation définie par $\xi^2 = \frac{\hbar^2}{mg_{1D}n}$).

Un soliton est une excitation qui peut se propager sans déformation dans un milieu non-linéaire et dispersif.

L'existence des solitons est due en fait à un équilibre entre les effets dispersifs et non-linéaires qui permettent au soliton de garder sa forme. Afin qu'un soliton puisse exister, il est nécessaire que chaque "partie" de l'excitation en question se déplace à la même vitesse pour ne pas "s'étaler" et conserver ainsi sa forme.

Considérons donc dans la suite une déformation de la densité d'amplitude Δn ayant une extension L et se déplaçant à la vitesse du son c . Nous verrons dans la suite que l'amplitude du soliton est corrélée avec sa vitesse et tend vers zéro lorsque que sa vitesse tend vers la vitesse du son. Nous allons donc discuter ici le cas d'une déformation de faible amplitude.

Nous souhaitons alors étudier l'impact des effets dispersifs et non-linéaires sur la vitesse de cette excitation, on aura ainsi affaire à un soliton si les effets dispersifs et non-linéaires s'équilibrent.

Selon (2.25), dans la limite où $q \sim 0$, il est clair que l'excitation va se propager à la vitesse du son c , si l'on tient compte du terme correctif, on a $\omega = qc(1 + \frac{q^2\xi^2}{8})$, et l'excitation se propage alors à une vitesse $\tilde{c} = \frac{d\omega}{dq} = c(1 + \frac{3}{8}q^2\xi^2)$. En prenant $q = 1/L$, on obtient donc que les effets dispersifs augmentent la vitesse de l'excitation d'une quantité Δc de l'ordre de $c\xi^2/L^2$.

Concernant les effets non-linéaires, il est clair en différentiant la relation $mc^2 = g_{1D}n$, que la vitesse de l'excitation au sein de la déformation va différer de la vitesse du son c dans le condensat d'une quantité Δc de l'ordre de $c\Delta n/n$. Ainsi la vitesse du son dans la déformation diminue en raison des effets non-linéaires.

Afin que les effets dispersifs et non-linéaires s'équilibrent, on obtient donc la relation suivante :

$$\frac{\Delta n}{n} \sim -\frac{\xi^2}{L^2}. \quad (2.26)$$

Ainsi, on peut voir que dans les condensats de Bose-Einstein, les solitons sont en fait des trous ($\Delta n < 0$) qui se propagent sur un fond constant.

2.3.2 Solution de l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLS) répulsive

Cherchons une solution de l'équation NLS répulsive sous la forme $\psi = \Psi(x, t) e^{-i\mu t/\hbar}$ avec $|\Psi|^2$ qui représente la densité longitudinale du condensat.

Posons alors :

$$\psi(x, t) = \Psi(x, t) e^{-i\mu t/\hbar} = A(x, t) e^{iS(x, t)} e^{-i\mu t/\hbar}, \quad (2.27)$$

avec :

$$A(x, t) = \sqrt{n(x, t)} \quad \text{et} \quad (2.28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} A(x, t) = \sqrt{n_\infty}, \quad (2.29)$$

où la densité n_∞ du condensat lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ est indépendante à la fois de x et de t .

Les équations hydrodynamiques s'écrivent :

$$\partial_t A^2 + \partial_x (A^2 V) = 0, \quad (2.30)$$

$$m \partial_t V = -\partial_x \left(g_{1D} A^2 - \mu + \frac{1}{2} m V^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_{xx}^2 A}{A} \right). \quad (2.31)$$

Comme nous avons vu dans le paragraphe sur les équations hydrodynamiques, la première équation s'identifie comme une équation de conservation de la densité où nous avons identifié $\frac{\hbar}{m} \partial_x S(x, t)$ à la vitesse $V(x)$ du condensat. Nous verrons dans la suite, que la vitesse V vérifie la condition au limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V = 0. \quad (2.32)$$

On obtient la valeur de μ en considérant l'équation (2.31), lorsque $x \rightarrow \infty$, ce qui conduit à $\mu = g_{1D} n_\infty$

On va chercher une solution solitonique sous la forme :

$$S(x, t) = S(x - vt), \quad (2.33)$$

$$A(x, t) = A(x - vt). \quad (2.34)$$

En substituant dans l'équation (2.31) $\partial_t \equiv -v \partial_x$, celle-ci s'intègre facilement et conduit à :

$$mvV = g_{1D} A^2 - \mu + \frac{1}{2} m V^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_{xx}^2 A}{A}. \quad (2.35)$$

On réécrit cette équation en substituant μ par $g_{1D} n_\infty$ soit :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_{xx}^2 A}{A} = g_{1D} (A^2 - n_\infty) + \frac{1}{2} m (V - v)^2 - \frac{m}{2} v^2. \quad (2.36)$$

On peut éliminer V dans l'équation (2.36) via l'équation (2.30) qui s'intègre facilement (en utilisant $\partial_t \equiv -v \partial_x$) :

$$V = v \left(1 - \frac{n_\infty}{A^2} \right). \quad (2.37)$$

D'après la condition au limite (2.29), on voit bien ici que :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V = 0. \quad (2.38)$$

L'équation (2.36) se réécrit finalement :

$$\frac{\hbar^2}{2mA} \partial_{xx}^2 A = g_{1D}(A^2 - n_\infty) + \frac{mv^2}{2} \left(\frac{n_\infty^2}{A^4} - 1 \right). \quad (2.39)$$

En multipliant l'équation (2.39), par $A \partial_x A$, celle-ci s'intègre assez facilement en :

$$\frac{\hbar^2}{m} (\partial_x A)^2 = g_{1D}(A^2 - n_\infty) - \frac{mv^2}{A^2} (n - n_\infty). \quad (2.40)$$

Cette équation se réécrit en remplaçant A^2 par n et $(\partial_x A)^2$ par $\frac{1}{4n}(\partial_x n)^2$ ce qui donne :

$$\frac{\hbar^2}{4m} (\partial_x n)^2 = (g_{1D}n - mv^2)(n - n_\infty)^2. \quad (2.41)$$

Or $n(x)$ étant réel, $\partial_x n(x)$ l'est aussi et donc nécessairement $n > n_1 = mv^2/g_{1D}$.

L'équation (2.41) peut se réécrire :

$$(\partial_x n)^2 + V_{\text{eff}}(n) = 0. \quad (2.42)$$

On retrouve ici l'image d'une particule de position n avec un temps x , évoluant dans un potentiel effectif défini par :

$$V_{\text{eff}}(n) = -\frac{4mg_{1D}}{\hbar^2}(n - n_1)(n - n_\infty)^2. \quad (2.43)$$

qui a le profil suivant :

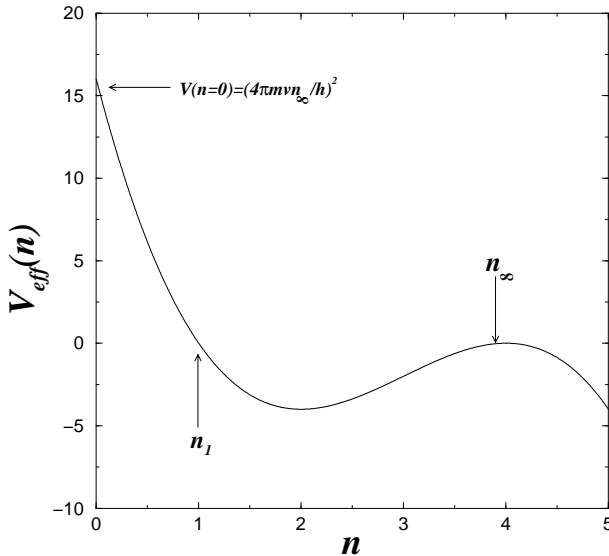


Fig 2.3 : Allure du potentiel effectif $V_{\text{eff}}(n)$

et dont la "position" oscille entre n_1 et n_∞ .

Au final la densité $n(x)$:

– vérifie d'une part l'équation :

$$\frac{dn}{dx} = \pm \sqrt{-V_{\text{eff}}(n)}, \quad (2.44)$$

– et d'autre part a le profil d'un soliton sombre, c'est-à-dire :

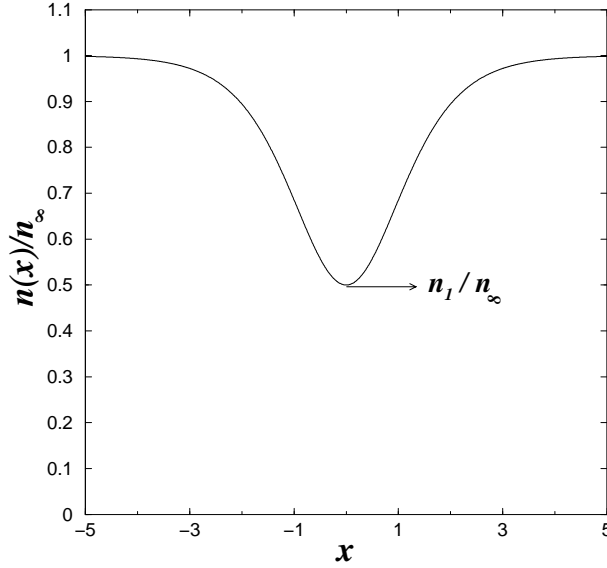


Fig 2.4 : Profil de densité

Plaçons nous dans la région où la densité est croissante, ce qui permet d'écrire (2.44) sous la forme :

$$\frac{dn}{(n_\infty - n)\sqrt{n - n_1}} = \frac{\sqrt{4mg_{1D}}}{\hbar} dx. \quad (2.45)$$

Posons alors :

$$n = n_1 + (n_\infty - n_1)X, \quad (2.46)$$

où X est un paramètre compris entre 0 et 1, en posant $X = \tanh^2 \vartheta$, on peut obtenir :

$$\frac{dn}{(n_\infty - n)\sqrt{n - n_1}} = \frac{2}{\sqrt{n_\infty - n_1}} d\vartheta. \quad (2.47)$$

On a donc au final :

$$\int \frac{2}{\sqrt{n_\infty - n_1}} d\vartheta = \int \frac{\sqrt{4mg_{1D}}}{\hbar} dx, \quad (2.48)$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\vartheta = \frac{\sqrt{mg_{1D}(n_\infty - n_1)}}{\hbar} (x - vt), \quad (2.49)$$

$$= \sqrt{\frac{1 - n_1/n_\infty}{\xi}} (x - vt), \quad (2.50)$$

avec $\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{m g_{1D} n_\infty}}$.

On peut alors écrire :

$$\vartheta = \frac{x - vt}{\zeta}, \quad (2.51)$$

avec :

$$\zeta = \xi \left(1 - \frac{n_1}{n_\infty}\right)^{-1/2}, \quad (2.52)$$

ce qui conduit à :

$$n(x, t) = n_1 + (n_\infty - n_1) \tanh^2 \frac{x - vt}{\zeta}, \quad (2.53)$$

$$n(x, t) = n_\infty - (n_\infty - n_1) \frac{1}{\cosh^2 \frac{x - vt}{\zeta}}. \quad (2.54)$$

Concernant la phase, $S(x - vt)$ celle-ci se détermine en intégrant l'équation (2.37) qui avec le résultat (2.53) se réécrit :

$$-\frac{\hbar}{mV(n_\infty - n_1)} dS = \frac{dx}{n_\infty \cosh^2 \left(\frac{x - vt}{\zeta}\right) - (n_\infty - n_1)}. \quad (2.55)$$

En utilisant la relation :

$$\int \frac{dx}{n_\infty \cosh^2 \left(\frac{x - vt}{\zeta}\right) - (n_\infty - n_1)} = \frac{\zeta}{\sqrt{n_1(n_\infty - n_1)}} \arctan \left[\sqrt{\frac{n_\infty - n_1}{n_1}} \tanh \frac{x - vt}{\zeta} \right], \quad (2.56)$$

et en utilisant la définition de la vitesse du son, établit à l'équation (1.128), dont on rappelle ici l'expression :

$$c^2 = n_\infty \frac{g_{1D}}{m}, \quad (2.57)$$

on obtient² :

$$S(x - vt) = -\frac{m c}{\hbar} \xi \arctan \left[\sqrt{\frac{n_\infty - n_1}{n_1}} \tanh \frac{x - vt}{\zeta} \right], \quad (2.58)$$

$$= -\arctan \left[\sqrt{\frac{n_\infty - n_1}{n_1}} \tanh \frac{x - vt}{\zeta} \right]. \quad (2.59)$$

En comparant avec le résultat (2.53), on obtient la forme de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$:

$$\Psi(x, t) = \sqrt{n_1} - i \sqrt{n_\infty - n_1} \tanh \left[\frac{x - vt}{\zeta} \right]. \quad (2.60)$$

On peut réécrire (2.60), sous la forme³ :

$$\Psi(x, t) = -i \sqrt{n_\infty} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \tanh \left[\frac{(x - vt)}{\xi} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right] + i \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]. \quad (2.61)$$

²En utilisant la définition de la vitesse du son $c^2 = n_\infty \frac{g_{1D}}{m}$ et de la longueur de relaxation $\xi = \frac{1}{\sqrt{m g_{1D} n_\infty}}$, il est facile de voir que $\frac{\hbar}{m} = c\xi$

³La densité n_1 est reliée à la vitesse v par $v = c \sqrt{\frac{n_1}{n_\infty}}$ et donc quand le soliton est noir c'est-à-dire $n_1 = 0$, la vitesse du soliton v du soliton est nul, de plus comme $n_1 \leq n_\infty$, il est clair que la vitesse du soliton est comprise entre 0 et la vitesse du son c .

Comme $v \leq c$, on paramètre $\Psi(x, t)$ sous la forme⁴ :

$$\Psi(x, t) = \sqrt{n_\infty} \left[\cos \theta \tanh\left[\frac{(x - vt)}{\xi} \cos \theta\right] + i \sin \theta \right], \quad (2.62)$$

avec $\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ et $\sin \theta = \frac{v}{c}$ et la longueur de relaxation ξ qui représente la taille typique du soliton.

On a alors les profils suivants pour $|\Psi|^2$ et son argument suivant la valeur de θ :

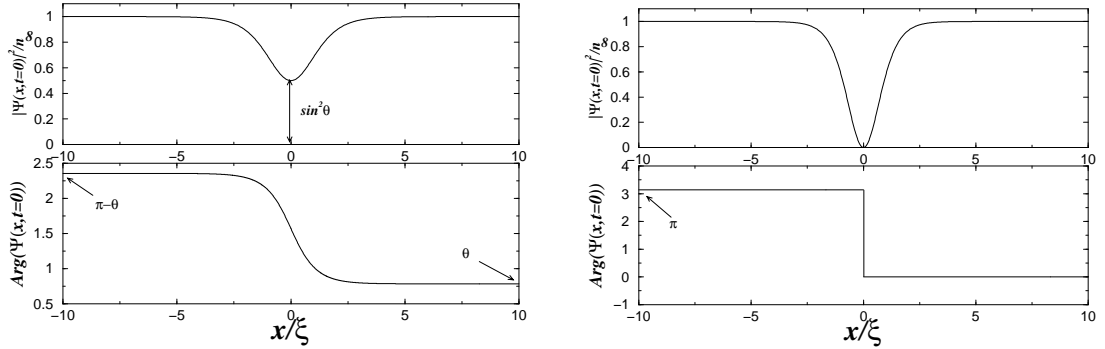


Fig. 2.5.a : Profil de la densité et de la phase pour $\theta = \pi/4$

Fig. 2.5.b : Profil de la densité et de la phase pour $\theta = 0$

Il apparaît dans un premier temps que la vitesse du soliton est bornée par la vitesse du son, il n'existe pas de soliton sombre supersonique. De plus, la vitesse du soliton est corrélée avec sa densité, en conséquence, plus le "trou" est profond, c'est-à-dire plus θ est proche de 0, plus la vitesse du soliton sera faible, pour arriver au cas limite du soliton noir ($\theta = 0$) où le soliton est immobile. Inversement, plus le "trou" est faiblement profond, plus c'est-à-dire plus θ est proche de $\frac{\pi}{2}$, plus la vitesse du soliton est proche de la vitesse du son c , jusqu'au cas limite où le soliton disparaît quand la vitesse du soliton atteint la vitesse du son (c'est-à-dire pour $\theta = \frac{\pi}{2}$).

2.3.3 Observation expérimentale

Des solitons sombres, ont ainsi pu être créés dans des expériences utilisant du ^{23}Na [76] et du ^{87}Rb [77]⁵.

Voici les images obtenues dans [77] :

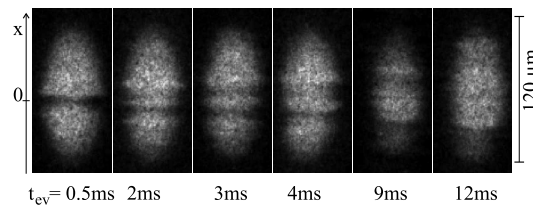


Fig. 2.6 : Cette figure représente un soliton sombre (bande noire sur les figures) se propageant dans un condensat de Bose Einstein quasi uni-dimensionnel pour différents temps d'évolution.

⁴On absorbe le terme $-i$ dans la phase.

⁵Il a été montré que dans le cas de condensats répulsifs homogènes tri et bidimensionnel, qu'il ne pouvait y avoir de solutions solitoniques stables [75].

(Au cours de l'expérience en question, après un temps d'environ 2ms un deuxième soliton "moins sombre" a été créé, qui correspond à la deuxième bande noire.)

Ces solitons ont été créés par la méthode dite "d'impression de la phase" dont nous allons donner l'idée générale dans le prochain paragraphe. Nous expliciterons aussi les "grandes lignes" de la théorie mathématique sous-jacente : la méthode de diffusion inverse.

2.4 Méthode inverse

2.4.1 Généralités

Concernant la physique des solitons, il existe un problème intéressant et important d'un point de vue physique, celui de l'évolution d'une condition initiale quelconque qui va généralement pouvoir produire des solitons [106]. On souhaite alors déterminer leur nombre et étudier leur caractéristique. L'approche qui permet de répondre à cette question est justement la méthode de diffusion inverse qui permet de résoudre une équation non-linéaire par une succession d'étapes linéaires.

Nous ne rentrerons pas ici dans les détails de la méthode, le lecteur intéressé pourra se référer pour plus de détails au livre de Drazin et Johnson [88] ou bien aux articles originaux de Zakharov et Shabat [72, 73].

En fait l'idée de la méthode inverse est de déterminer un problème "inverse" au valeur propre qui fait intervenir un opérateur linéaire L incluant une fonction $\psi(x, t)$ qui est solution d'une équation différentielle non-linéaire dont on connaît la solution initiale $\psi(x, t = 0)$.

Ceci revient en fait à considérer un problème "inverse" où $\psi(x, t = 0)$ joue le rôle de potentiel diffusant des fonctions annexes.

En étudiant le problème, il s'avère que l'on peut reconstruire, à partir des données de diffusion du problème inverse, $\psi(x, t)$ à un instant t quelconque.

Considérons une équation différentielle de la forme⁶ :

$$\partial_t \psi(x, t) = F(\psi(x, t)). \quad (2.63)$$

La condition initiale $\psi(x, t = 0)$ est supposée connue et la fonction $\psi(x, t)$ évolue dans un espace hilbertien \mathcal{E} .

Supposons que l'on puisse écrire l'équation (2.63) sous une forme d'opérateur :

$$L_t - [M, L] = 0, \quad (2.64)$$

où L et M sont des opérateurs dépendant de $\psi(x, t)$ et de ses dérivées qui agissent sur des fonctions d'un espace hilbertien \mathcal{H} (différent de \mathcal{E}) et où L est auto-adjoint, c'est-à-dire que si l'on considère le produit scalaire entre deux éléments \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{H} alors $\langle \mathcal{F} | L \mathcal{G} \rangle = \langle L \mathcal{F} | \mathcal{G} \rangle$.

⁶Le cas qui va nous intéresser dans la suite est bien entendu celui de l'équation de Schrödinger non-linéaire répulsive que l'on peut écrire en notations adimensionnées :

$$i\partial_t \psi(x, t) = -\frac{1}{2}\partial_{xx}\psi(x, t) + |\psi(x, t)|^2\psi(x, t).$$

Le problème inverse que l'on va associer à (2.63) est le suivant :

$$L\mathcal{F} = \lambda\mathcal{F}, \quad (2.65)$$

avec λ qui est indépendant du temps⁷.

Afin que (2.64) et (2.65) soit compatible, \mathcal{F} doit vérifier :

$$\mathcal{F}_t = M\mathcal{F}.$$

Pour une donnée initiale $\psi(x, t = 0)$, on va résoudre le problème (2.65) en $\pm \infty$ qui donne deux solutions \mathcal{F}_+ et \mathcal{F}_- .

Ces deux quantités sont alors reliées par une matrices dite de diffusion S telle que $S\mathcal{F}_+ = \mathcal{F}_-$, dont les éléments a_{ij} constituent les données de diffusions du problème inverse.

En outre l'évolution temporelle des données de diffusion (terme de la matrice S) s'avère relativement simple [72, 73] et ceci combiné au fait que la valeur propre λ reste constante permet, grâce à l'équation de Gel'fand-Levitan-Marchenko de reconstruire à l'instant t , la solution $\psi(x, t)$ ⁸.

On peut résumer le principe de la méthode inverse par le schéma suivant :

⁷On peut aisément monter à partir de (2.64) que λ est indépendant du temps. Pour cela, on dérive (2.65), on peut alors écrire grâce à (2.64) :

$$(ML - LM)\mathcal{F} + L\mathcal{F}_t = \lambda_t\mathcal{F} + \lambda\mathcal{F}_t,$$

soit en réorganisant les termes et en utilisant le fait que $L\psi = \lambda\psi$, on obtient :

$$\lambda_t\mathcal{F} = (L - \lambda)(\mathcal{F}_t - M\mathcal{F}),$$

ce qui donne en faisant le produit scalaire par \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F} | \lambda_t \mathcal{F} \rangle = \lambda_t \langle \mathcal{F} | \mathcal{F} \rangle &= \langle \mathcal{F} | (L - \lambda)(\mathcal{F}_t - M\mathcal{F}) \rangle, \\ &= \langle (L - \lambda)\mathcal{F} | (\mathcal{F}_t - M\mathcal{F}) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

En supposant que \mathcal{F} n'est pas identiquement nulle, il vient $\lambda_t = 0$.

⁸Le problème inverse présente différentes applications pratiques :

- on accède en mécanique quantique, aux potentiel d'interaction entre particules en analysant les expériences de diffusion de faisceaux de particules par une cible,
- en prospection sismique, on caractérise les objets par les ondes qu'ils diffusent...

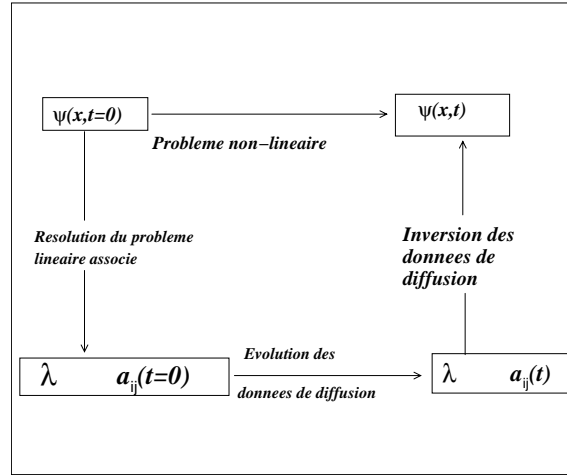


Fig. 2.7 : Schéma de la méthode inverse

2.4.2 Equations de Zakharov et Shabat

Considérons dans la suite, l'équation de Schrödinger non-linéaire répulsive que l'on peut écrire en notations adimensionnées :

$$i\partial_t \psi(x, t) = -\frac{1}{2}\partial_{xx}\psi(x, t) + |\psi(x, t)|^2\psi(x, t). \quad (2.66)$$

Zakharov et Shabat ont montré dans leur article [73] que l'opérateur L associé à (2.64) était

$$L = 2 \begin{pmatrix} i\partial_x & \psi(x, t)^* \\ \psi(x, t) & -i\partial_x \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

et le problème inverse va s'écrire⁹ :

$$\lambda f_1 = 2i\partial_x f_1 + 2\psi(x, t = 0)^* f_2, \quad (2.68)$$

$$\lambda f_2 = -2i\partial_x f_2 + 2\psi(x, t = 0) f_1, \quad (2.69)$$

avec ψ qui vérifie comme condition limite :

$$|\psi(x, t)|^2 \rightarrow 1 \text{ quand } x \rightarrow \pm\infty. \quad (2.70)$$

Zakharov et Shabat ont montré que chaque valeur propre discrète λ_m de (2.68) et (2.69) correspondait à une solution solitonique de vitesse $\lambda_m/2$.

La situation est donc la suivante : à partir d'une condition initiale donnée, on calcule les valeurs propres discrètes et on peut alors en remonter aux caractéristiques du soliton qui découle de la condition initiale donnée.

Des conditions initiales bien précises peuvent s'obtenir par différentes méthodes expérimentales.

Le prochain paragraphe sera consacré à l'une d'entre elle : la méthode d'impression de la phase.

⁹Ces deux équations sont appelés équations de Zakharov Shabat

Exemple d'application : méthode d'impression de la phase La méthode d'impression de la phase est une méthode permettant de créer des solitons sombres[76].

On considère un condensat 1D de densité¹⁰ et de phase uniforme décrit par une fonction d'onde de la forme $e^{i\alpha}$. On va appliquer sur ce dernier un pulse laser sur une moitié du condensat pendant un temps très bref de manière à ne pas affecter la densité mais seulement la phase.

Voici une illustration de cette méthode :

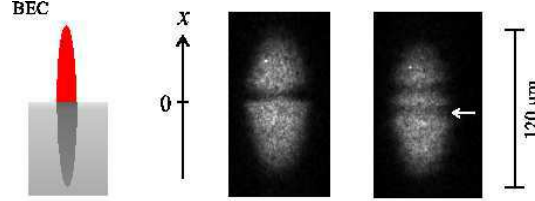


Fig 2.8 : L'image de gauche représente le condensat sur lequel on a appliqué un potentiel sur la moitié inférieure et comme on peut le voir sur les photos de droite, il apparaît à l'interface entre les deux parties du condensat un soliton sombre que l'on peut voir évoluer (la première photo de droite est prise 200μ s après avoir appliqué le potentiel et la deuxième 3 ms).

Les conditions initiales sont donc les suivantes :

$$\psi(x, t = 0) = e^{i\alpha} \text{ pour } x < 0, \quad (2.71)$$

$$\psi(x, t = 0) = e^{i\beta} \text{ pour } x > 0. \quad (2.72)$$

La solution des équations de Zakharov-Shabat va donc s'écrire :

– pour $x < 0$

$$f_1^-(x, \lambda) = K_1 e^{-i\alpha} e^{x\sqrt{1-\lambda^2/4}}, \quad (2.73)$$

$$f_2^-(x, \lambda) = K_1 \left(\lambda/2 - i(1 - \lambda^2/4)^{1/2} \right) e^{x\sqrt{1-\lambda^2/4}}, \quad (2.74)$$

– pour $x > 0$

$$f_1^+(x, \lambda) = K_2 e^{-i\beta} e^{x\sqrt{1-\lambda^2/4}}, \quad (2.75)$$

$$f_2^+(x, \lambda) = K_2 \left(\lambda/2 + i(1 - \lambda^2/4)^{1/2} \right) e^{-x\sqrt{1-\lambda^2/4}}, \quad (2.76)$$

où K_1 et K_2 sont des constantes.

En utilisant les relations de continuité suivantes :

$$f_1^-(0^-, \lambda) = f_1^+(0^+, \lambda), \quad (2.77)$$

$$f_2^-(0^-, \lambda) = f_2^+(0^+, \lambda). \quad (2.78)$$

On obtient alors $\lambda = 2 \cos \phi$ avec $\phi = 1/2(\beta - \alpha)$, ce qui correspond à un soliton de vitesse $\cos \phi$.

On retrouve bien des résultats analogue à ceux de la paramétrisation (2.62) du soliton avec $\phi = \theta - \pi/2$.

¹⁰On considère ici un système adimensionné où la densité vaut 1

2.5 Soliton incident sur un obstacle de taille finie

D'un point de vue mathématique, les équations à solution solitonique fournissent des exemples de système totalement intégrable ce qui a permis le développement dans les années 70 des généralisations de la méthode inverse par V.Zakharov et V.Shabat [72] et [73] et par M.Ablowitz, D. Kaup, A Newell et H. Segur [74].

D'autre part d'un point de vue physique, les solitons sont indispensables pour pouvoir décrire certains phénomènes comme par exemple la propagation de certaines ondes en hydrodynamique ou encore la propagation de certains signaux dans les fibres optiques.

Mais bien entendu, les applications physiques montrent que les solitons dans la nature n'ont qu'une durée de vie finie (le soliton de Russell finit par s'estomper au bout d'une certaine distance). Les systèmes obéissant à des équations non-linéaire ne sont en fait qu'approximativement décrits par des équations à soliton et les solutions solitoniques ne sont qu'alors que des premières approximations dans lesquels on a négligé des phénomènes comme :

- les termes d'ordres supérieur dans l'équation,
- la dissipation,
- une faible variation des paramètres dans l'espace ou le temps...

Différents travaux ont été développés à ce jour pour étudier ces phénomènes, par l'ajout d'un potentiel externe dans l'équation non-linéaire de départ, traduisant la présence d'une perturbation sur la trajectoire du soliton :

- D'un point de vue mathématique, on perd les propriétés d'intégrabilité de l'équation, ce qui revient à l'étude de la dynamique d'un soliton sombre dans un système quasi-intégrable.

On peut citer à ce sujet les travaux de Y. Kivshar et B. Malomed [92] où les auteurs étudient l'impact de la présence d'un terme perturbatif dans les équations de Korteweg de Vries, Schrödinger non-linéaire attractif et Sine Gordon.

- Concernant le cas de l'équation de Schrödinger non-linéaire répulsive, différents travaux numériques ont été développés pour étudier la déformation d'un soliton sombre dans un condensat de Bose inhomogène[93, 94].

Les simulations numériques ont montré qu'un soliton incident sur une région présentant un gradient de densité n'était plus stable et radiait dans ces conditions de l'énergie sous forme d'onde sonore [93, 94].

Ceci correspond alors à la situation expérimentale où l'on considère un condensat de Bose dans un guide d'onde de longueur "infini", décrit dans la limite champ moyen $1D$, c'est-à-dire modélisé par l'équation (2.23). Dans ce condensat, on crée un soliton sombre et on étudie alors la diffusion de ce soliton par un obstacle de taille fini. L'obstacle pouvant être une constriction dans le guide, une courbure du guide, un rayon laser traversant le condensat...

C'est cette situation que nous avons étudié. Nous avons déterminé quantitativement d'une part l'évolution dynamique du soliton sombre, c'est-à-dire l'impact de la présence d'un obstacle sur sa forme et sa vitesse. D'autre part nous avons déterminé la quantité d'énergie radiée lors de la diffusion par l'obstacle.

Ce problème peut alors être traité de différentes manières :

- par la méthode de diffusion inverse, mais ce n'est pas une méthode que nous avons utilisé (toutefois nous donnerons un exemple d'application de cette méthode dans le prochain

- chapitre concernant la diffusion d'un soliton brillant par un obstacle),
- par une méthode variationnelle,
 - par une méthode perturbative autour de la solution solitonique, où l'énergie cinétique du soliton est supposée grande par rapport à l'énergie potentielle due à l'obstacle. C'est la méthode que nous avons utilisée dans la publication présentée à la fin de ce chapitre.

2.5.1 Modèle

On considère un condensat de Bose-Einstein uni-dimensionnel, de densité n_∞ et sans piège longitudinal dans lequel on place un obstacle de taille finie, celui-ci est alors représenté par un potentiel externe $U(x)$ dans l'équation (2.23) :

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar}{2m}\psi_{xx} + [g_{1D}|\psi|^2 + U(x)]\psi. \quad (2.79)$$

Nous avons vu dans le paragraphe (2.3.2) qu'en l'absence de potentiel externe, cette équation admettait des solutions solitoniques de la forme $\psi(x, t) = \Psi(x - vt)e^{-i\frac{\mu t}{\hbar}}$.

En présence de l'obstacle, on va alors suivre la procédure suivante :

- On commence par chercher les solutions stationnaires de l'équation précédente sous la forme $\sqrt{n_\infty} f(\frac{x}{\xi}) e^{-i\frac{\mu t}{\hbar}}$ [80] (où ξ est la longueur de relaxation). $f(\frac{x}{\xi})$ traduit la modification de la densité du condensat au voisinage de l'obstacle ($f(\frac{x}{\xi}) = 1$ en l'absence d'obstacle).
- Il semble naturel de considérer le soliton comme une "distortion du fond stationnaire" et de ce fait, on écrit la fonction d'onde du système sous la forme [81] :

$$\psi(x, t) = \Psi(x, t) \sqrt{n_\infty} f(x) e^{-i\frac{\mu t}{\hbar}}, \quad (2.80)$$

- enfin en se plaçant en notations adimensionnées via

$$T = \frac{t}{t_0}, X = \frac{x}{\xi}, \text{ et } \phi = \frac{\Psi}{\sqrt{n_\infty}}, \quad (2.81)$$

avec $t_0 = \frac{\hbar}{gn_\infty}$.

On obtient une équation de type Schrödinger non-linéaire pour $\phi(X, T)$

$$i\phi_T + \frac{1}{2}\phi_{XX}^2 - [|\phi|^2 - 1]\phi = R[\phi], \quad (2.82)$$

avec

$$R[\phi] = -\phi_X \frac{f_X}{f} + (f^2 - 1)(|\phi|^2 - 1)\phi. \quad (2.83)$$

On suppose alors qu'en présence de l'obstacle, la forme de la fonction d'onde va rester la même mais que ses paramètres vont devenir des fonctions lentement variables du temps, c'est-à-dire :

$$\theta \rightarrow \theta(t) \quad (2.84)$$

$$X_0(t) = \frac{x_0(t)}{\xi} \rightarrow \int_{-\infty}^t dt' \sin \theta(t'). \quad (2.85)$$

La fonction d'onde $\phi(X, T)$ va donc s'écrire désormais :

$$\phi(X, T) = \cos \theta(t) \tanh [\cos \theta(t) (x - X(t))] + i \sin \theta(t) \quad (2.86)$$

– Enfin, on peut remarquer qu'en l'absence d'obstacle $f(X) = 1$ et que l'on a bien $R = 0$

On peut étudier cette équation par une méthode variationnelle, utilisant une technique lagrangienne présentée dans [83].

2.5.2 Méthode Lagrangienne

A) Densité lagrangienne

En l'absence de perturbation, l'équation (2.82) se déduit de la densité lagrangienne suivante¹¹ :

$$\mathcal{L}[\phi, \phi^*] = \frac{i}{2} (\phi^* \phi_T - \phi \phi_T^*) \left(1 - \frac{1}{|\phi|^2}\right) - \frac{1}{2} |\phi_X|^2 - \frac{1}{2} (|\phi|^2 - 1)^2, \quad (2.89)$$

où en notations dimensionnées :

$$\mathcal{L}[\Psi, \Psi^*] = \frac{i \hbar}{2} (\Psi^* \Psi_t - \Psi \Psi_t^*) - \frac{\hbar^2}{2m} |\Psi_x|^2 - \frac{g_{1D}}{2} (|\Psi|^2 - n_\infty)^2 - \frac{i \hbar n_\infty}{2} \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{\Psi}{\Psi^*} \right). \quad (2.90)$$

La densité lagrangienne (2.89) n'est a priori pas la densité lagrangienne la plus intuitive pour redonner l'équation voulue.

On choisit de travailler avec (2.89) pour les raisons suivantes :

– d'une part elle permet d'obtenir une valeur finie pour l'énergie malgré le fait que la fonction d'onde ϕ ne tendent pas vers 0 quand $X \rightarrow \pm\infty$

En effet on a :

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dX \left[|\phi_X|^2 + (|\phi| - 1)^4 \right] = \frac{4}{3} \cos \theta, \quad (2.91)$$

où θ est le paramètre défini à l'équation (2.62).

– D'autre part, on souhaite que l'impulsion p du soliton soit reliée à son énergie via $\delta E = v \delta p$, où v est la vitesse du soliton égale à $\sin \theta$ en notation adimensionnée. De la sorte on pourra considérer le soliton comme un "objet" ayant un comportement ressemblant à celui d'une particule [79].

D'après (2.88), on a :

$$P = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dX (\phi \phi_X^* - \phi^* \phi_X) \left(1 - \frac{1}{|\phi|^2}\right), \quad (2.92)$$

$$= \pi - 2\theta - \sin 2\theta. \quad (2.93)$$

On a bien avec (2.89) la relation $\delta E = v \delta p$ entre l'énergie et l'impulsion du soliton.

¹¹L'énergie et l'impulsion du soliton s'écrivent alors respectivement :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dX \left[\phi_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} + \phi_t^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t^*} - \mathcal{L} \right], \quad (2.87)$$

et

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} dX \left[\phi_X \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} + \phi_X^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t^*} \right]. \quad (2.88)$$

B) Evolution des paramètres du soliton

Nous allons déterminer les équations qui régissent l'évolution de la forme et de la vitesse du soliton.

En définissant le lagrangien L par :

$$L(\theta, X_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dX \mathcal{L} = \dot{X}_0[\pi - 2\theta - \sin 2\theta] - \frac{4}{3} \cos^3 \theta, \quad (2.94)$$

où \mathcal{L} est la densité lagrangienne définie à l'équation (2.89)

On peut montrer que les paramètres du soliton¹² $\theta(t)$ et $X_0(t)$ sont reliés à la présence de l'obstacle par [80] :

$$\partial_{q_i} L - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}_i})L = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dX R^*[\phi] \partial_{q_i} \phi \right\}, \quad (2.95)$$

avec q_i qui est soit égale à θ où soit à X_0 .

On obtient finalement comme équation pour les paramètres du soliton θ et X_0

$$4 \dot{\theta} \cos^2 \theta = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dX R^*[\phi] \partial_{X_0} \phi \right\}, \quad (2.96)$$

et

$$4 \cos^2 \theta (\sin \theta - \dot{X}_0) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dX R^*[\phi] \partial_{\theta} \phi \right\}. \quad (2.97)$$

L'avantage principal de cette méthode étant sa relative simplicité, en revanche cette méthode ne permet pas de tenir compte d'éventuels radiations émises lors de la diffusion du soliton par l'obstacle. Ceci peut être pris en compte via une approche perturbative où l'énergie cinétique du soliton est supposée grande par rapport à l'énergie potentielle due à la présence de l'obstacle.

Ceci fera l'objet de la prochaine partie.

2.5.3 méthode perturbative

Article 1 : Dark soliton past a finite-size obstacle

Dans cette article, nous commençons par présenter, dans la partie *II* quelques généralités sur l'équation de Schrödinger non-linéaire. Puis nous montrons comment la densité du condensat est modifiée par la présence de l'obstacle.

Dans la partie *III*, via un modèle perturbatif, nous déterminons ensuite les équations qui caractérisent la dynamique du soliton et des radiations.

Les principaux résultats obtenus sont quant à eux analysés dans la partie *IV* de l'article.

Nous avons montré que :

- la méthode perturbative donne les mêmes équations d'évolution pour $\theta(t)$ et $X_0(t)$ que la méthode variationnelle,

¹²Les conditions initiales sont $\theta(-\infty) = \theta_0$, $X_0(-\infty) = -\infty$, $\dot{\theta}(-\infty) = 0$ et $\dot{X}_0(-\infty) = \sin \theta_0$

- si la perturbation est d'ordre ϵ alors les radiations émises sont d'ordre ϵ^2 . Donc si l'on considère le problème à l'ordre ϵ , il y a équivalence entre les approches variationnelles et perturbatives.
- On peut décrire le soliton comme une particule classique de masse $2m$ évoluant dans un potentiel effectif qui est la convolution du potentiel décrivant l'obstacle avec la fonction $\frac{1}{\cosh^2 x}$ pour une large palette de vitesse incidente. Cette description est inadaptée uniquement pour des vitesses au voisinage de la vitesse critique où le soliton passe de la situation où il est réfléchi par l'obstacle à celle où il est transmis par l'obstacle.
- Après s'être fait diffusé par l'obstacle, le soliton émet deux paquets d'onde, l'un vers l'avant, l'autre vers l'arrière, se déplaçant à la vitesse du son.
- Le soliton est accéléré après la diffusion par l'obstacle.
- Enfin les effets radiatifs tendent à s'annuler quand la vitesse du soliton tend à s'approcher de la vitesse du son.

Nous présentons, dans la suite, l'article où tous ces résultats sont détaillés.

PHYSICAL REVIEW A **72**, 033618 (2005)**Dark soliton past a finite-size obstacle**

Nicolas Bilas and Nicolas Pavloff

Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, Université Paris Sud, bât. 100, F-91405 Orsay Cedex, France*

(Received 21 December 2004; revised manuscript received 20 May 2005; published 23 September 2005)

We consider the collision of a dark soliton with an obstacle in a quasi-one-dimensional Bose condensate. We show that in many respects the soliton behaves as an effective classical particle of mass twice the mass of a bare particle, evolving in an effective potential which is a convolution of the actual potential describing the obstacle. Radiative effects beyond this approximation are also taken into account. The emitted waves are shown to form two counterpropagating wave packets, both moving at the speed of sound. We determine, at leading order, the total amount of radiation emitted during the collision and compute the acceleration of the soliton due to the collisional process. It is found that the radiative process is quenched when the velocity of the soliton reaches the velocity of sound in the system.

DOI: [10.1103/PhysRevA.72.033618](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.033618)

PACS number(s): 03.75.Lm, 05.60.Gg, 42.65.Tg

I. INTRODUCTION

One of the many interesting aspects of the physics of Bose-Einstein condensation of ultracold atomic vapors is to open opportunities of studying mesoscopiclike phenomena in new types of setups. The advances in the production and propagation of Bose-Einstein condensates in more and more elaborate waveguides (magnetic or optical, microfabricated or not [1]) opens up the prospect of studying a rich variety of quantum transport phenomena for these intrinsically phase-coherent, finite-sized systems. In particular it has been possible to study quantum interference effects [2], Bloch oscillations and Landau-Zener tunneling [3], Josephson junctions [4], and superfluidity [5].

Pushing further the analogy in transport properties of mesoscopic systems and Bose-condensed vapors, one notices that, whereas in mesoscopic physics interaction effects are often difficult to understand, in Bose-Einstein condensates they are more easily accessible to theoretical description and have the advantage of covering a wide range of regimes, ranging from almost noninteracting atom lasers to strongly correlated systems. Along this line, the existence of nonlinearity in the wave equation, resulting in the existence of bright [6] and dark [7] solitons, appears as a natural—and rather simply understood—consequence of interaction on transport phenomena of quasi-one-dimensional Bose-condensed systems.

In the present work we address the problem of transport of a dark soliton in a quasi-one-dimensional Bose-Einstein condensate. More precisely, we consider a guided Bose-Einstein condensate and theoretically study the propagation of a dark soliton encountering an obstacle on its way. In the appropriate limit [see Eq. (1) below] the system is described by a one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. This equation admits bright and dark solitonic solutions, depending on the sign of the interparticle interaction. The obstacle is modeled via an external potential, and this could correspond

to different physical realizations, such as a heavy impurity, a (red or blue) detuned laser beam crossing the atomic beam, a bend, a twist, or a constriction in the shape of the guide.

A soliton under the influence of a perturbation (here, the obstacle) sees its shape and velocity modified and may also radiate energy (see, e.g., Ref. [8]). Despite their mutual dependence, these two phenomena are not easily treated on the same theoretical footing. The evolution of parameters characterizing the soliton is typically studied within the adiabatic approximation (see Ref. [9] and references therein), whereas radiative effects are not so easily described, because their influence on the soliton's parameters only appears at second order in perturbation theory (see the discussion in Sec. IV D). However, it has been possible to treat both phenomena concomitantly in the case of bright solitons [8–12]. Concerning dark solitons, several studies of adiabatic dynamics have appeared [13–19], but until recently radiative effects have been treated mainly numerically [20–22].

In the present paper we study the dynamics of a dark soliton via perturbation theory. This method, based on the theory of linear partial differential equations, has been established in the case of the nonlinear Schrödinger equation with repulsive interaction in Refs. [23,24] (see also the earlier attempt [25]). Although our first interest lies in the physics of guided Bose-Einstein condensates, the method employed and the results displayed also apply to optical waveguides described by a one-dimensional (1D) nonlinear defocusing Schrödinger equation.

The paper is organized as follows. In Sec. II we present the basic ingredients of the model and the resulting equation governing the time evolution of the condensate wave function. In the framework of perturbation theory we then derive the equations determining the dynamics of the soliton and of the radiated part (Sec. III). The results are analyzed in Sec. IV. We show that one can devise a quite successful approximation that we denote as “effective potential theory,” where the soliton is assimilated to a classical particle of mass twice the mass of a bare particle, evolving in an effective potential (Sec. IV A). The agreement of this approximation with the results of the adiabatic approximation is verified even for the position shift induced on the trajectory of the soliton by the obstacle (Sec. IV B). We then consider in Sec. IV C the ra-

*Unité Mixte de Recherche de l'Université Paris XI et du CNRS (UMR 8626).

diated part and show that it is formed of backward- and forward-emitted phonons, which form two counterpropagating wave packets moving at the speed of sound. In the limit of large soliton's velocity we furthermore obtain in Sec. IV D an analytical expression for the total amount of radiation emitted by the soliton during the collision. In addition we show that (within our leading-order evaluation) a soliton reaching the velocity of sound does not radiate, and we propose a physical interpretation for this phenomenon. Finally we present our conclusions in Sec. V. Some technical points are given in the Appendixes. In Appendix A we recall the main properties of the spectrum of the operator governing the wave dynamics of the system around the solitonic solution. In Appendix B we briefly present the Lagrangian approach for deriving the dynamics of the parameters of a dark soliton. In Appendix C we show how to compute some integrals involved in the evaluation of the total amount of radiation emitted by the soliton.

II. MODEL

We consider a condensate confined in a guide of axis z and denote by $n(z, t)$ the 1D density of the system. The condensate is formed by atoms of mass m which interact via a two-body potential characterized by its 3D s -wave scattering length a_{sc} . We consider the case of a repulsive effective interaction—i.e., $a_{sc} > 0$. The condensate is confined in the transverse direction by an harmonic potential of pulsation ω_{\perp} . The transverse confinement is characterized by the harmonic oscillator length $a_{\perp} = (\hbar/m\omega_{\perp})^{1/2}$.

With n_{1D} denoting a typical order of magnitude of $n(z, t)$, we restrict ourselves to a density range such that

$$(a_{sc}/a_{\perp})^2 \ll n_{1D} a_{sc} \ll 1. \quad (1)$$

This regime has been called ‘‘1D mean field’’ in Ref. [26]. In this range the wave function of the condensate can be factorized in a transverse and longitudinal part [27–29]. The transverse wave function is Gaussian (this is ensured by the condition $n_{1D} a_{sc} \ll 1$) and the longitudinal one, denoted by $\psi(z, t)$ [such that $n(z, t) = |\psi(z, t)|^2$], satisfies an effective 1D Gross-Pitaevskii equation (see, e.g., [27–29])

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_{zz} + \{U(z) + 2\hbar\omega_{\perp} a_{sc} |\psi|^2\} \psi = i\hbar \psi_t. \quad (2)$$

In Eq. (2), $U(z)$ represents the effect of the obstacle. We restrict ourselves to the case of localized obstacle such that $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(z) = 0$. Hence, we can consider that the stationary solutions of Eq. (2) have at infinity an asymptotic density unperturbed by the obstacle. Besides, considering solutions without current at infinity, we impose the following form to the stationary solutions:

$$\psi_{\text{sta}}(z, t) = f(z) \exp[-i\mu t/\hbar], \quad \text{with} \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} f(z) = \sqrt{n_{\infty}}, \quad (3)$$

where n_{∞} is the 1D density far from the obstacle and $\mu = 2\hbar\omega_{\perp} a_{sc} n_{\infty}$ the chemical potential [30].

We note here that in Eq. (1) we have discarded very low densities in order to prevent the system from getting in the

Tonks-Girardeau regime where the mean-field picture implicit in Eq. (2) breaks down [28,31]. This can be intuitively understood as follows: it is natural to assume that the Gross-Pitaevskii scheme is valid—i.e., that the system can be described by a collective order parameter ψ —only if the interparticle distance (of order n_{∞}^{-1}) is much smaller than the minimum distance ξ over which ψ can significantly vary [ξ is the healing length, defined by $\xi = \hbar/(m\mu)^{1/2} = a_{\perp}/(2a_{sc} n_{\infty})^{1/2}$]. The condition $n_{\infty}^{-1} \ll \xi$ then imposes us to consider the regime $n_{\infty} a_{sc} \gg (a_{sc}/a_{\perp})^2$ to which, from Eq. (1), we restrict our study. If one considers, for instance, ^{87}Rb or ^{23}Na atoms in a guide with a transverse confinement characterized by $\omega_{\perp} = 2\pi \times 500$ Hz, the ratio a_{sc}/a_{\perp} is roughly of order 10^{-2} and the restriction (1) still allows the density to vary over four orders of magnitude.

In all the following we use dimensionless quantities: the energies are expressed in units of μ , the lengths in units of ξ , and the time in units of \hbar/μ . ψ is also rescaled by a factor $n_{\infty}^{-1/2}$; this corresponds to expressing the linear density in units of the density at infinity, n_{∞} . We keep the same notation $z, t, U(z)$, and $\psi(z, t)$ for the rescaled quantities. Equation (2) now reads

$$-\frac{1}{2} \psi_{zz} + \{U(z) + |\psi|^2\} \psi = i \psi_t. \quad (4)$$

From Eq. (3), the stationary solutions of Eq. (4) are of type $f(z) \exp[-it]$, f being real, and a solution of

$$-\frac{1}{2} f_{zz} + \{U(z) + f^2 - 1\} f = 0, \quad (5)$$

with the asymptotic condition $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} f(z) = 1$.

The method we will expose is quite general and applies to a broad range of potentials $U(z)$, but for concreteness we will often display the explicit solutions of the problem in the case of a pointlike obstacle, where $U(z) = \lambda \delta(z)$; $\lambda > 0$ (< 0) corresponds to a repulsive (attractive) obstacle. For such an obstacle, the solution of Eq. (5) is

$$f(z) = \begin{cases} \tanh(|z| + a) & \text{if } \lambda > 0, \\ \coth(|z| + a) & \text{if } \lambda < 0 \end{cases}$$

with

$$a = \frac{1}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{2}{|\lambda|} \right). \quad (6)$$

In Sec. IV we will concentrate on perturbative aspects of the problem and consider the case of a weak potential $U(z)$. For a pointlike obstacle, this corresponds to the limit $|\lambda| \ll 1$. In this case $\sinh^{-1}(2/|\lambda|) \approx \ln(4/|\lambda|)$ and Eqs. (6) simplify to

$$f(z) \approx 1 - \frac{\lambda}{2} \exp\{-2|z|\}. \quad (7)$$

In the general case, one can design a simple treatment [29,32] valid for any weak potential $U(z)$ leading after linearization of Eq. (5) to the perturbative result $f(z) = 1 + \delta f(z)$ with

$$\delta f(z) \approx -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy U(y) \exp\{-2|z-y|\}, \quad (8)$$

of which Eq. (7) is a particular case. In Sec. IV it will reveal convenient to rewrite Eq. (8) in an other way: denoting by $\hat{U}(q) = \int_{\mathbb{R}} dz U(z) \exp(-iqz)$ the Fourier transform of $U(z)$, one may equivalently express δf defined in Eq. (8) as

$$\delta f(z) \approx -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{\hat{U}(q)}{4+q^2} \exp\{iqz\}. \quad (9)$$

The stationary solutions of the problem being defined, let us now turn to the main subject of the present work and consider the case of time-dependent solutions corresponding to a dark soliton propagating in the system. The soliton will appear as a distortion of the stationary background, and it is here very natural to follow the approach of Frantzeskakis *et al.* [17] who write the wave function of the system as a product:

$$\psi(z,t) = \phi(z,t) f(z) \exp(-it). \quad (10)$$

$\phi(z,t)$ in Eq. (10) accounts for the deformation of the stationary background $f(z) \exp(-it)$ caused by the motion of a soliton in the system. From Eq. (4) we see that the unknown field $\phi(z,t)$ is a solution of the following equation:

$$i\phi_t + \frac{1}{2}\phi_{zz} - \{|\phi|^2 - 1\}\phi = R[\phi], \quad (11)$$

where

$$R[\phi] = -\phi_z \frac{f_z}{f} + (f^2 - 1)(|\phi|^2 - 1)\phi. \quad (12)$$

Far from the obstacle, $f(z)=1$ and thus $R[\phi]=0$. In this case, the motion of a dark soliton in the system is described by the usual solitonic solution of the defocussing nonlinear Schrödinger equation [33]

$$\phi(z,t) = \Phi(z - Vt - b, \theta), \quad (13)$$

where

$$\Phi(x, \theta) = \chi(x, \theta) + iV,$$

with

$$\chi(x, \theta) = \cos \theta \tanh(x \cos \theta) \text{ and } \sin \theta = V. \quad (14)$$

Equations (13) and (14) describe a dark soliton consisting in a density trough located at position $Vt+b$ at time t . The phase change across the soliton is $2\theta - \pi$. The choice of the parameter θ in $[0, \pi/2]$ corresponds to a soliton moving from left to right with a velocity $V = \sin \theta \in [0, 1]$. Note that a dark soliton has a velocity always lower than unity (which, in our rescaled units, is the velocity of sound [34]). When $\theta=0$, the soliton is standing and its minimum density is zero; it is referred to as a black soliton. When $\theta \neq 0$ one speaks of a gray soliton. We display in Fig. 1 the density profile and the phase of the wave function $\psi(z,t)$ [see Eq. (10)] describing a soliton incident with velocity $V=0.4$ on a repulsive pointlike obstacle characterized by $\lambda=0.5$.

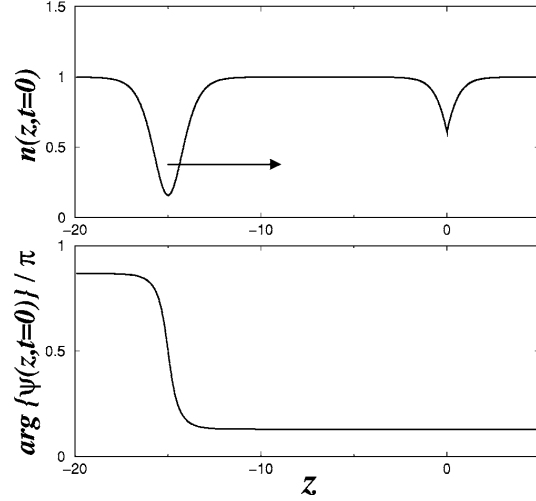


FIG. 1. Upper plot: density profile of a dark soliton incident with velocity $V=0.4$ on a pointlike repulsive obstacle $U(z)=\lambda\delta(z)$ (with $\lambda=0.5$). The arrow represents the direction of propagation of the soliton. Lower plot: phase of the wave function $\psi(z,t=0)$ describing the system. Across the soliton the phase of the wave function changes from $\pi - \theta$ to θ (with $V = \sin \theta$).

III. PERTURBATION THEORY

In the following we will set up the basis for a systematic perturbative expansion, and for properly identifying the orders of perturbation at which the expansion is done, it is customary to introduce an artificial multiplicative parameter ϵ in the potential of the obstacle (otherwise of arbitrary form). We will see in the present section (and justify on physical grounds in the next one) that for an obstacle characterized by $\epsilon U(z)$, the condition of small perturbation reads $V^2 \gg \epsilon U$. Since the soliton velocity is always lower than unity (which is the speed of sound in our dimensionless units), this condition implies $\epsilon U \ll 1$; i.e., Eqs. (8) and (9) hold.

At initial times the soliton is unperturbed and described as in the previous section by $\phi(z,t) = \Phi(z - Vt, \theta_0)$ [Φ is defined in Eq. (14)]; i.e., one considers a soliton incident from left infinity with velocity $V = \sin \theta_0$. The more important effect of the obstacle on the soliton is a modification of its shape; i.e., the parameters characterizing the soliton will become time dependent in the vicinity of the obstacle. Perturbations at next order describe the emission of radiation. One thus looks for solutions of Eq. (11) of the form

$$\phi(z,t) = \phi_{\text{sol}}(z, \bar{z}(t), \theta(t)) + \delta\phi(z,t), \quad (15)$$

where

$$\phi_{\text{sol}}(z, \bar{z}(t), \theta(t)) = \Phi(z - \bar{z}(t), \theta(t)) \quad (16)$$

describes a soliton which is characterized by the two parameters $\bar{z}(t)$ (describing the center of the soliton) and $\theta(t)$ (describing the phase shift across the soliton). $\delta\phi$ describes additional radiative components:

$$\delta\phi(z,t) = \epsilon\phi_1(z,t) + \epsilon^2\phi_2(z,t) + \dots \quad (17)$$

Equations (15)–(17) form the grounds of a secular perturbation theory where the time dependence of the parameters of the soliton allows for the avoidance of the growth of secular perturbation in $\delta\phi$ (see, e.g., the discussion in Ref. [8]).

It is more appropriate to define $\delta\phi$ in Eq. (15) and the ϕ_i 's in Eq. (17) as functions of $z - \bar{z}(t)$ than as functions of z . To this end, we define $x = z - \bar{z}(t)$ and choose to work with x and t as independent parameters rather than z and t . This corresponds to the transformation

$$\partial_z, \partial_t \rightarrow \partial_x, \partial_t - \dot{\bar{z}}\partial_x. \quad (18)$$

Furthermore, in order to take into account the slow time dependence of the parameters of the soliton, it is customary to introduce multiple time scales: $t_n = \epsilon^n t$ ($n \in \mathbb{N}$). A time-dependent function could, for instance, depend on t via t_1 , indicating a weak time dependence (a t_2 dependence being related to an even weaker time dependence and a t_0 dependence to a “normal” time dependence). Generically, time-dependent quantities will be considered as functions of all the t_n 's, with

$$\partial_t = \partial_{t_0} + \epsilon\partial_{t_1} + \epsilon^2\partial_{t_2} + \dots \quad (19)$$

In the following we will make an expansion at order ϵ and it will suffice to consider only the fast time t_0 and the first slow time t_1 . The soliton's parameters θ and \bar{z} are considered as functions $\theta(t_1)$ and $\bar{z}(t_0, t_1)$ [35].

Putting everything together, we see that, at order ϵ , Eqs. (15)–(17) read explicitly

$$\phi(z,t) = \Phi(x, \theta(t_1)) + \epsilon\phi_1(x, t_0, t_1), \quad \text{with } x = z - \bar{z}(t_0, t_1). \quad (20)$$

Equation (11) is now rewritten taking the transformations (18) and (19) into account, with an expansion at order ϵ . To this end, we have to take into account that $R[\phi]$ defined in Eq. (12) is a small quantity and can be written at first order in ϵ as

$$R[\phi] \simeq -\partial_x\Phi(x, \theta)[\partial_z\delta f(z) + 2\Phi(x, \theta)\delta f(z)] \equiv \epsilon\mathcal{R}(x, z), \quad (21)$$

where $z = x + \bar{z}(t_0, t_1)$ and $\delta f(z)$ is defined as in Eqs. (8) and (9), with an extra multiplicative factor ϵ in U which has been written explicitly in the definition of \mathcal{R} on the right-hand side (RHS) of Eq. (21).

We are now ready to expand Eq. (11) in successive orders in ϵ . The leading order reads

$$-\frac{1}{2}\Phi_{xx} + i\bar{z}_{t_0}\Phi_x + (|\Phi|^2 - 1)\Phi = 0, \quad (22)$$

implying that

$$\bar{z}_{t_0} = \sin\theta, \quad (23)$$

whence \bar{z} can be written as

$$\bar{z} = t_0 \sin\theta + \bar{z}(t_1), \quad (24)$$

where $\bar{z}(t_1)$ is a still unknown function [36]. At next order in ϵ one obtains

$$i\partial_{t_0}\phi_1 = \left[-\frac{1}{2}\partial_x^2 + i\sin\theta\partial_x + 2|\Phi|^2 - 1\right]\phi_1 + \Phi^2\phi_1^* + \mathcal{R} - i\theta_{t_1}\Phi_\theta + i\bar{z}_{t_1}\Phi_x. \quad (25)$$

Equation (25) can be rewritten as

$$i\partial_{t_0}|\phi_1\rangle = \mathcal{H}|\phi_1\rangle + \sigma_3|\mathcal{R}\rangle + i\bar{z}_{t_1}|\omega_e\rangle - \frac{\theta_{t_1}}{\cos\theta}|\Omega_e\rangle, \quad (26)$$

where $|\phi_1\rangle = (\phi_1, \phi_1^*)^T$, $|\mathcal{R}\rangle = (\mathcal{R}, \mathcal{R}^*)^T$, σ_3 is the third Pauli matrix, and

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial_x^2 + i\sin\theta\partial_x + 2|\Phi|^2 - 1 & \Phi^2 \\ -\Phi^{*2} & \frac{1}{2}\partial_x^2 + i\sin\theta\partial_x - 2|\Phi|^2 + 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

\mathcal{H} is not diagonalizable, but can be put in a Jordan form in a manner similar to what has been done for the attractive nonlinear Schrödinger equation [37]. Its eigenfunctions and eigenvalues are presented in Appendix A. In particular, $|\omega_e\rangle$ and $|\Omega_e\rangle$ appearing in Eq. (26) belong to the generalized null space of \mathcal{H} ; they verify $\mathcal{H}|\omega_e\rangle = 0$ and $\mathcal{H}|\Omega_e\rangle = \cos^2\theta|\omega_e\rangle$. As well as its null space, \mathcal{H} has two continuous branches of excitations which we denote by its “phonon spectrum.” The corresponding eigenfunctions are denoted by $|\Xi_q^\pm\rangle$ with $q \in \mathbb{R}$ (see Appendix A).

It is physically intuitive that $|\phi_1\rangle$ corresponding to the radiated part should be expanded over the phonon part of the spectrum of \mathcal{H} :

A more technical argument for limiting the expansion (28) to the phonon components of the spectrum of \mathcal{H} is the following: one might think that a greater generality could be achieved by allowing $|\phi_1\rangle$ to have also components on $|\omega_e\rangle$ and $|\Omega_e\rangle$, for instance. However, exactly as in the case of the bright soliton [12], these components can (and should) be imposed to remain zero for avoiding the appearance of secular terms in the evolution of the soliton's parameters.

$$|\phi_1\rangle = \sum_{\alpha=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dq C_q^\alpha(t_0, t_1) |\Xi_q^\alpha\rangle. \quad (28)$$

A. Evolution of the parameters of the soliton

Applying $\langle \omega_e | \sigma_3$ and $\langle \Omega_e | \sigma_3$ onto Eq. (26) and using the orthogonality relations (A6), one obtains the equations of evolution of the parameters of the soliton:

$$\begin{aligned} 4\theta_{t_1} \cos^2 \theta &= -\langle \omega_e | \mathcal{R} \rangle \\ &= -2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Phi_x \mathcal{R}^*(x, x + \bar{z}) \right\} \\ &= \frac{2}{\epsilon} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dz R^*[\phi_{\text{sol}}] \partial_{\bar{z}} \phi_{\text{sol}} \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

and

$$\begin{aligned} 4\bar{z}_{t_1} \cos^2 \theta &= \frac{1}{i \cos \theta} \langle \Omega_e | \mathcal{R} \rangle \\ &= -2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Phi_{\theta} \mathcal{R}^*(x, x + \bar{z}) \right\} \\ &= -\frac{2}{\epsilon} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dz R^*[\phi_{\text{sol}}] \partial_{\theta} \phi_{\text{sol}} \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

The set of equations (23), (29), and (30) describe the time evolution of the soliton's parameter. The same equations are obtained via adiabatic approximation which is a simpler variational approximation where radiative effects are neglected [see Appendix B, Eqs. (B9) and (B10)]. This is evident in the case of Eq. (29) which is the slow time analogous to Eq. (B9) (since $\dot{\theta} = \epsilon \theta_{t_1}$). In a similar way, the prescription (19) indicates that $\dot{\bar{z}} = \bar{z}_{t_0} + \epsilon \bar{z}_{t_1}$; combining Eqs. (23) and (30), one sees that the equations of evolution of \bar{z} obtained in the present section correspond to the multiple-time expansion of Eq. (B10). As a side result of this exact correspondence of the time evolution of the soliton's parameters, we obtain here that, as in the adiabatic approach, $\sin[\theta(t_1 \rightarrow \pm\infty)] = V$ (see the discussion at the end of Appendix B) and the quantity \bar{z} appearing in Eq. (24) is identical when $t_1 \rightarrow +\infty$ to the one defined in Eq. (48).

A technical remark is in order here. One can notice that in Eq. (15) we did not consider the most general variational form for the solitonic component of the wave function. We could have let its global phase depend on time, for instance, and this would have given in Eq. (26) a contribution along $|\omega_e\rangle$ ($|\Omega_e\rangle$ is defined in Appendix A). Similarly, a more general variational ansatz could also have been used in Appendix B. The important point is that if the soliton's parameters are chosen within the same variational space, their time evolution is described—in the adiabatic and perturbative approach—by the same equations. Besides, the radiative term ϕ_1 having in all cases to be restricted to the phonon part of the spectrum, its time evolution is not (at least in the limit $V^2 \gg \epsilon U$; see below) affected by the specific choice of variational parameters used for describing the soliton.

B. Radiated part

The time evolution of the radiative component $|\phi_1\rangle$ is obtained in a manner similar to what is done for the soliton's

parameters. Projecting Eq. (26) onto the phonon eigenfunctions of \mathcal{H} by applying $\langle \Xi_q^\alpha | \sigma_3$ yields

$$i\mathcal{N}_q^\alpha \partial_{t_0} C_q^\alpha = \mathcal{N}_q^\alpha \epsilon_q^\alpha C_q^\alpha + \langle \Xi_q^\alpha | \mathcal{R} \rangle, \quad (31)$$

where $\alpha = \pm$, ϵ_q^α in Eq. (31) is the eigenvalue of \mathcal{H} associated with $|\Xi_q^\alpha\rangle$ [see Eq. (A2)],

$$\epsilon_q^\alpha = q \left(-\sin \theta + \alpha \sqrt{\frac{q^2}{4} + 1} \right), \quad (32)$$

and \mathcal{N}_q^α is a normalization factor [see Eqs. (A4) and (A5)]. In deriving Eq. (31), we have taken into account that the eigenfunctions $|\Xi_q^\alpha\rangle$ depend on t only through the slow time t_1 (via $\sin \theta$). The same holds for ϵ_q^α and \mathcal{N}_q^α . Thus, writing

$$C_q^\alpha(t_0, t_1) = D_q^\alpha(t_0, t_1) \exp\{-i\epsilon_q^\alpha t_0\}, \quad (33)$$

one has, at the same order of approximation as Eq. (31),

$$\partial_{t_0} D_q^\alpha = \frac{1}{i\mathcal{N}_q^\alpha} \langle \Xi_q^\alpha | \mathcal{R} \rangle. \quad (34)$$

In integrating Eq. (34) we can choose between two equivalent strategies. The first (and difficult) one is to solve this equation taking into account that $t_1 = \epsilon t_0$ and that θ and \bar{z} have the time dependence specified by Eqs. (23), (29), and (30). The second one is to integrate this equation considering t_0 and t_1 as independent variables. In this case, the t_1 dependence of θ and \bar{z} will not matter and the t_0 dependence of \bar{z} will be specified by Eq. (24). According to this second method one obtains

$$D_q^\alpha(t_0, t_1) = \frac{1}{i\mathcal{N}_q^\alpha} \int_{-\infty}^{t_0} dt'_0 e^{i\epsilon_q^\alpha t'_0} \langle \Xi_q^\alpha | \mathcal{R} \rangle + \tilde{D}_q^\alpha(t_1), \quad (35)$$

where \tilde{D}_q^α is an unknown function of t_1 [verifying $\tilde{D}_q^\alpha(t_1 \rightarrow -\infty) = 0$] which could be determined by pushing the perturbative expansion to next order in ϵ . In the following we will simply neglect this term. This is legitimate in the limit where all the t_1 -dependent terms are nearly constant—i.e., to the limit where the parameters of the soliton are very weakly affected by the obstacle. We will see in the next section that this limit is reached when $\epsilon U \ll V^2$.

Of most interest to us is the total amount of radiation emitted by the soliton. For the determination of this quantity we need the explicit expression of Eq. (35) at large times. In the limit t_0 and $t_1 \rightarrow +\infty$, Eq. (35) (without the \tilde{D}_q^α term) reads explicitly

$$\begin{aligned} D_q^\alpha(+\infty) &= \frac{1}{i\mathcal{N}_q^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} dx dt'_0 e^{i\epsilon_q^\alpha t'_0} [u_q^{\alpha*}(x) \mathcal{R}(x, x + \bar{z}(t'_0, +\infty)) \\ &\quad + v_q^{\alpha*}(x) \mathcal{R}^*(x, \bar{z}(t'_0, +\infty))], \end{aligned} \quad (36)$$

where the functions $u_q^\alpha(x)$ and $v_q^\alpha(x)$ are the explicit components of $|\Xi_q^\alpha\rangle$ defined in Appendix A [Eq. (A3)]. Note that the t_1 -dependent parameters in Eq. (36) have been given their asymptotic value. In particular, $\sin \theta(t_1 \rightarrow +\infty) = \sin \theta_0 = V$, and according to Eq. (24) one has here $\bar{z}(t'_0, +\infty) = V t'_0 + \bar{z}(+\infty)$. The integration along t'_0 in Eq. (36) can be com-

N. BILAS AND N. PAVLOFF

PHYSICAL REVIEW A **72**, 033618 (2005)

puted easily using the expression (21) for \mathcal{R} and Eq. (9) for δf , leading to

$$D_q^{\alpha(+\infty)} = \frac{4}{iV\mathcal{N}_q^\alpha} \frac{\hat{U}^*(\epsilon_q^\alpha/V)}{4 + (\epsilon_q^\alpha/V)^2} e^{-i\epsilon_q^\alpha \bar{z}(+\infty)/V} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\epsilon_q^\alpha x/V} \partial_x \Phi \times \left[u_q^{\alpha*}(x) \left(\Phi(x) - \frac{i\epsilon_q^\alpha}{2V} \right) + v_q^{\alpha*}(x) \left(\Phi(x)^* - \frac{i\epsilon_q^\alpha}{2V} \right) \right]. \quad (37)$$

A long but straightforward computation gives the final result

$$D_q^{\alpha(+\infty)} = -\frac{1}{16V^3} \frac{q}{\sqrt{1+q^2/4}} \frac{\hat{U}^*(\epsilon_q^\alpha/V) e^{-i\epsilon_q^\alpha \bar{z}(+\infty)/V}}{\sinh\left(\frac{\pi q \sqrt{1+q^2/4}}{2V\sqrt{1-V^2}}\right)}. \quad (38)$$

In this formula the term $\bar{z}(+\infty)$ can be obtained through the numerical determination of $\bar{z}(t)$. We indicate in Sec. IV B different approximation schemes allowing one to obtain an analytical evaluation of this term [Eq. (47) and below]. From expression (38) we see that the radiation contributes to the total wave function (20) with a term of order $(\epsilon \hat{U}/V^2) \sqrt{1-V^2}$. According to the approximation scheme defined in the beginning of the present section we have $V^2 \gg \epsilon U$. Since \hat{U} and U are of same order of magnitude, the radiated part is, as expected, a small quantity.

IV. ANALYSIS OF THE RESULTS

In this section we analyze the solutions of Eqs. (23), (29), (30), (28), (33), and (34) which describe the dynamics of the system within our approach. The separation between the slow and fast times we used up to now in order to identify which time derivatives were negligible is no longer necessary, and we will henceforth only employ the actual time t . We will also drop the multiplicative factor ϵ in front of the perturbing potential $U(z)$ and of $\phi_1(x, t)$. In the two following subsections we study the evolution of the parameters of the soliton and in the two last ones we analyze the radiated part.

A. Effective potential approximation

Since we now use the actual time t , instead of using Eqs. (23), (29), and (30), it is more appropriate to work with the equivalent equations (B9) and (B10). In order to get insight into the details of the dynamics of the soliton, one should solve these equations numerically for a particular obstacle. This is done in Sec. IV B, where we study the behavior of a soliton incident on a delta scatterer. But before going to this point, it is interesting to study some limiting cases. In particular, the dynamics of the variational solution (16) can be more easily understood in the limit of a very dark soliton (almost back). To this end, let us multiply Eq. (B9) by \bar{z} and add it to Eq. (B10) multiplied by $\dot{\theta}$. This gives

$$4\dot{\theta} \sin \theta \cos^2 \theta = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dz R^*[\phi_{\text{sol}}] (\bar{z} \partial_z \phi_{\text{sol}} + \dot{\theta} \partial_\theta \phi_{\text{sol}}) \right\}. \quad (39)$$

In the limit of a weak potential, we have to keep in mind that R is a small quantity (of order of U). It is then legitimate at first order to replace on the RHS of Eq. (39) \bar{z} by $\sin \theta$ and to drop the term $\dot{\theta}$. One thus obtains

$$\dot{\theta} = \frac{3}{4} \cos^2 \theta \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\partial f}{\cosh^4[\cos \theta(z - \bar{z})]}. \quad (40)$$

A further simplification of the equations is obtained in the limit of very dark soliton, when $\theta \rightarrow 0$. In this limit $\dot{\theta} \approx \ddot{\bar{z}}$ and using expression (8) for f we can put Eq. (40) in the following form:

$$2\ddot{\bar{z}} = -\frac{dU_{\text{eff}}}{d\bar{z}}, \quad (41)$$

where

$$U_{\text{eff}}(\bar{z}) = -\frac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\delta f(z)}{\cosh^4(z - \bar{z})} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{U(z)}{\cosh^2(z - \bar{z})}.$$

If we furthermore consider a potential $U(z)$ which slowly depends on z (over a length scale much larger than unity [38]), then $U(z)$ in the convolution of the RHS of Eq. (41) does not appreciably vary over the distance where the term $\cosh^{-2}(z - \bar{z})$ is noticeable. This yields

$$U_{\text{eff}}(\bar{z}) \approx \frac{U(\bar{z})}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{\cosh^2(z - \bar{z})} = U(\bar{z}). \quad (42)$$

Equations (41) and (42) show that in the appropriate limit (very dark soliton, weak and slowly varying potential) the soliton can be considered as an effective classical particle of mass 2 (i.e., twice the mass of a bare particle) of position \bar{z} (the position of the center of the density trough) evolving in a potential $U(\bar{z})$. If we relax the hypothesis of slowly varying potential, the soliton can still be considered as a particle of mass 2, but it now evolves in an effective potential $U_{\text{eff}}(\bar{z})$ defined in Eq. (41) as a convolution of the real potential $U(z)$. The fact that the effective mass of the soliton is twice the one of a bare particle has already been obtained in Refs. [16,17,19,39]. Previous studies mainly focused on slowly varying external potentials and, as a result, the existence of an effective potential U_{eff} —different from U —had not been noticed so far, except in Ref. [17] where this result has already been obtained in the special case of a δ scatterer. In the following, we denote the approximation corresponding to Eq. (41) as the effective potential approximation: the soliton is considered as an effective classical particle of mass 2, position \bar{z} , moving in the potential $U_{\text{eff}}(\bar{z})$.

B. Numerical check

Let us now study in detail a particular example. We consider a soliton incident on a pointlike obstacle—i.e., a δ scatterer characterized by $U(x)=\lambda\delta(x)$. In this case, the static background $f(z)$ is given by Eq. (6) and Eqs. (B9) and (B10) read

$$\dot{\theta} = \text{sgn}(\lambda)\cos^2\theta \int_0^{+\infty} \frac{dz}{\sinh(2z+2a)} \left(\frac{1}{\cosh^4 X} - \frac{1}{\cosh^4 Y} \right) + \frac{\cos^3\theta}{2} \int_0^{+\infty} dz [1-f^2(z)] \left(\frac{\tanh X}{\cosh^4 X} - \frac{\tanh Y}{\cosh^4 Y} \right) \quad (43)$$

and

$$\begin{aligned} \sin\theta - \dot{\bar{z}} = & \text{sgn}(\lambda)\sin\theta \int_0^{+\infty} \frac{dz}{\sinh(2z+2a)} \left(\frac{X \cosh^{-2} X + \tanh X}{\cosh^2 X} + \frac{Y \cosh^{-2} Y + \tanh Y}{\cosh^2 Y} \right) \\ & + \frac{\sin\theta \cos\theta}{2} \int_0^{+\infty} dz [1-f^2(z)] \left(\frac{1-X \tanh X}{\cosh^4 X} + \frac{1-Y \tanh Y}{\cosh^4 Y} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

X and Y in Eqs. (43) and (44) are notations for $(z-\bar{z})\cos\theta$ and $(z+\bar{z})\cos\theta$, respectively, and the expressions of function f and of parameter a are given in Eq. (6). Solving Eqs. (43) and (44) numerically, we obtain the time evolution of the parameters of the soliton. We plot in Figs. 2 and 3 the behavior of \bar{z} as a function of t for different initial velocities V . Figure 2 corresponds to a repulsive interaction with $\lambda=+1$ and Fig. 3 to an attractive one with $\lambda=-1$. The initial conditions for the numerical integration of Eqs. (43) and (44) are taken to be $\bar{z}(t=0)=-10$ and $\dot{\bar{z}}(t=0)=\sin[\theta(t=0)]=V$. Several curves are drawn, corresponding to several values of V . In the repulsive case (Fig. 2), three initial velocities have been chosen: $V=0.9$, 0.707 , and 0.4 . The value $V=0.9$ corresponds to a fast soliton which is weakly perturbed by the barrier, the value $V=0.4$ corresponds to a reflected soliton,

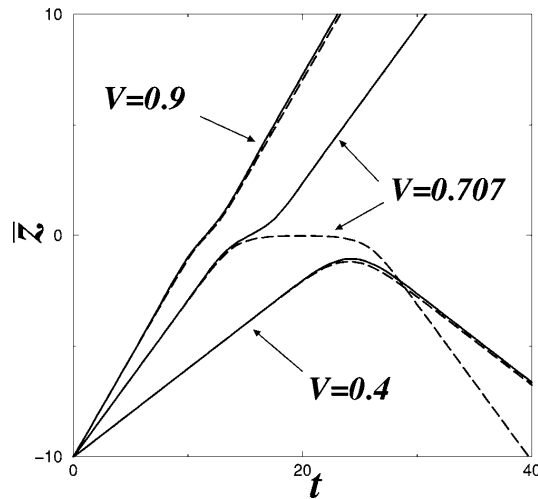


FIG. 2. $\bar{z}(t)$ for solitons of initial velocity V , incident on a repulsive obstacle $U(x)=\lambda\delta(x)$ with $\lambda=+1$. The solid lines correspond to the numerical solution of Eqs. (43) and (44) and the dashed lines to the effective potential approximation (41).

and the value $V=0.707$ is just below the value $V=\sqrt{\lambda/2}$ which, according to the effective potential approximation (41), is the separatrix between transmission and reflexion (corresponding to $V^2=\max\{U_{\text{eff}}(\bar{z})\}=\lambda/2$). In the attractive case (Fig. 3) the curves are drawn in the cases $V=0.707$, 0.4 , and 0.3 . In both figures, the solid lines correspond to the exact numerical solution of Eqs. (43) and (44) and the dashed lines to the result of the effective potential approximation.

We first remark that the case of a δ scatterer we consider here is the worst possible for the effective potential approximation and that this approximation is certainly more at ease with smoother potentials. However, it is interesting to note that the effective potential approximation, which could be thought as oversimplified, is often very good. The worst

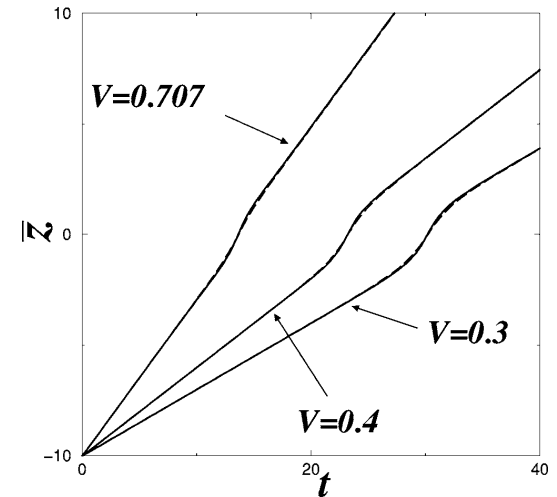


FIG. 3. Same as Fig. 2 for solitons incident on an attractive obstacle $U(x)=\lambda\delta(x)$ with $\lambda=-1$. The dashed lines corresponding to the effective potential approximation are hardly distinguishable from the solid lines which correspond to the numerical solution of Eqs. (43) and (44).

N. BILAS AND N. PAVLOFF

PHYSICAL REVIEW A 72, 033618 (2005)

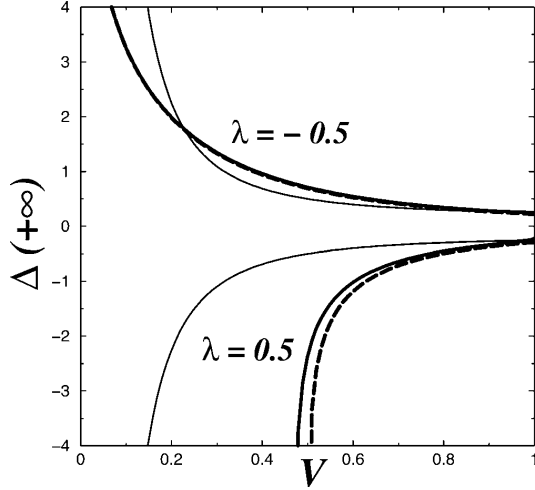


FIG. 4. $\Delta(+\infty)$ as a function of the initial velocity V of a soliton incident on a δ peak $U(x)=\lambda\delta(x)$. The upper curves correspond to the case $\lambda=-0.5$, the lower ones to the case $\lambda=0.5$. The thick solid lines are the exact result (48) obtained from the numerical integration of Eqs. (43) and (44). The dashed curves are the result (49) of the effective potential approximation and the thin solid curves are the approximate result (47).

agreement occurs in the case of repulsive obstacle, near the separatrix (which is estimated by the effective potential approximation to occur in the case of Fig. 2 at $V=1/\sqrt{2}$). As we will see below (Fig. 4), the effective potential approximation does not exactly predict the location of this separatrix whereas, in this region, the trajectories are strongly affected by small changes of the initial velocity V . This is the reason for the bad agreement of the result of the approximate method with the ones given by the numerical integration of Eqs. (43) and (44) for $V=0.707$. However, it is surprising to note that the effective potential approximation is generically valid, even in the case where the soliton is far from being very dark: even the limit $V\rightarrow 1$ is very accurately described by this approximation on Figs. 2 and 3.

In order to investigate more precisely the limit of large initial velocities V and to assess the validity of the effective potential approximation, let us now establish the form of Eqs. (B9) and (B10) in the case of a very weakly perturbed soliton. From the effective potential approximation, one infers that the soliton is weakly perturbed by the obstacle when its initial energy is large compared to the external potential U_{eff} —i.e., in the regime $V^2 \gg U$ (since U_{eff} and U are typically of same order of magnitude). This is confirmed by the numerical results presented on Figs. 2 and 3: the trajectory of the soliton is less modified for large V . In the extreme limit $V^2 \gg U$ one may write $\theta(t)=\theta_0+\Theta(t)$ and $\bar{z}=Vt+\Delta(t)$, with $\Theta \ll \theta_0$ and $\dot{\Delta} \ll V$. Δ has the meaning of a shift in position: it is the difference between the position of the center of the soliton in presence of the obstacle with the value it would have in absence of the obstacle. The perturbative versions of Eqs. (B9) and (B10) read

$$4\dot{\Theta} \cos^2 \theta_0 = -2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dz R^* [\Phi(z-Vt, \theta_0)] \Phi_z(z-Vt, \theta_0) \quad (45)$$

and

$$4 \cos^2 \theta_0 [\Theta \cos \theta_0 - \dot{\Delta}] = 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dz R^* [\Phi(z-Vt, \theta_0)] \times \Phi_\theta(z-Vt, \theta_0). \quad (46)$$

From these equations it is a simple matter to compute analytically the asymptotic expressions of the soliton parameter. One obtains—as expected— $\Theta(+\infty)=0$, and the asymptotic shift in position is

$$\Delta(+\infty) = -\hat{U}(0) \frac{1+2V^2}{6V^2}, \quad (47)$$

where $\hat{U}(0)=\int_{\mathbb{R}} dx U(x)$. Equation (47) for $\Delta(+\infty)$ is an approximation (valid in the regime $V^2 \gg U$) of the exact result

$$\Delta(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \{\bar{z}(t) - Vt\}. \quad (48)$$

Comparing definitions (24) and (48) we see that, since $\sin \theta(t_1 \rightarrow +\infty) = V$, one has $\Delta(+\infty) = \bar{z}(+\infty)$.

In the case of a δ scatterer, the exact value (48) was computed through numerical solution of Eqs. (43) and (44). The result is displayed in Fig. 4 (thick solid curves) and compared with the approximate expression (47) (thin solid curves) and with the result of the effective potential approximation (dashed curves).

In the case of the effective potential approximation, the value of the shift $\Delta(+\infty)$ can be computed either via the numerical solution of the equation of motion (41) or via the formula

$$\Delta(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - U_{\text{eff}}(x)/V^2}} \right]. \quad (49)$$

From this expression, one sees that in the limit $V^2 \gg U_{\text{eff}} \sim U$, the effective potential approximation yields a result $\Delta(+\infty) \simeq -\frac{1}{2} \hat{U}(0)/V^2$. Hence, in this limit, the shift computed via the effective potential approximation at $V=1$ is correct [since it agrees with the result (47) at $V=1$]. This is surprising, because the effective potential approximation is expected to be accurate only for very dark solitons. However, one can also notice that detailed agreement with the exact result (48) is missed since, in the limit $V^2 \gg U$, the asymptotic evaluation (47) of (48) does not exactly match the one of (49). Yet one sees from Fig. 4 that the shift computed via the effective potential approximation is in surprisingly good agreement with the exact value, even for fast solitons. In particular, in the case of an attractive potential, the exact evaluation of $\Delta(+\infty)$ and its approximation (49) are hardly distinguishable.

C. Backward- and forward-emitted wave packets

At this point it is interesting to study in more detail the structure of the phonon part of the wave function—i.e., of

DARK SOLITON PAST A FINITE-SIZE OBSTACLE

PHYSICAL REVIEW A 72, 033618 (2005)

$\phi_1(x, t)$. From Eqs. (28) and (A3) one can separate ϕ_1 into two parts: $\phi_1 = \phi_1^+ + \phi_1^-$ with

$$\phi_1^\alpha(x, t) = \int_{\mathbb{R}} dq C_q^\alpha(t) u_q^\alpha(x). \quad (50)$$

From the explicit expressions (32), (33), and (A3) one sees that ϕ_1^+ (ϕ_1^-) describes waves propagating toward the positive (negative) x .

We are interested in studying the outcome of the collision—i.e., in obtaining an analytical evaluation of Eq. (50) when $t \rightarrow +\infty$. To this end, one uses the fact that at large time one has $C_q^\alpha(t) \propto \exp[-i\varepsilon_q^\alpha [t + \bar{z}(+\infty)/V]]$. Hence, instead of working with the variable t , it is convenient here to define $\tau = t + \bar{z}(+\infty)/V$ and to write Eq. (50) in the form

$$\phi_1^\alpha(x, t) = \int_{\mathbb{R}} dq G^\alpha(q, x) \exp\{i[q(x + V\tau) - \alpha\tau F(q)]\}, \quad (51)$$

where $F(q) = q(q^2/4 + 1)^{1/2}$ and $G^\alpha(q, x) = [q/2 + \varepsilon_q^\alpha/q + i\chi(x)]^2 D_q^\alpha(+\infty) \exp\{i\varepsilon_q^\alpha \bar{z}(+\infty)/V\}$. In the appropriate limit (to be defined soon), one can evaluate this expression through a saddle phase estimate. In this limit, the rapidly oscillating phase in Eq. (51) is stationary at point $\pm q_\alpha$ which are solutions of $x + V\tau = \alpha\tau F'(q)$. One has

$$q_\alpha^2 = \frac{1}{2}[X^2 - 4 + \alpha X \sqrt{X^2 + 8}], \quad \text{with } X = V + \frac{x}{\tau}. \quad (52)$$

One can easily verify that q_α goes to zero when $V + x/\tau = \alpha$ and that q_α^2 is positive only if $\alpha(V + x/\tau) > 1$. From this, one sees that the saddle phase estimate of Eqs. (50) and (51) is accurate when the two saddles are well separated—i.e., in the regime $x \gg (1 - V)\tau$ for $\alpha = +$ and $x \ll -(1 + V)\tau$ for $\alpha = -$. If this condition is fulfilled, one obtains

$$\begin{aligned} \phi_1^\alpha(x, t) &\approx G^\alpha(q_\alpha, x) \sqrt{\frac{2\pi}{|F''(q_\alpha)|}} e^{i[q_\alpha(x + V\tau) - \alpha\tau F(q_\alpha) - \alpha\pi/4]} \\ &+ G^\alpha(-q_\alpha, x) \sqrt{\frac{2\pi}{|F''(q_\alpha)|}} e^{-i[q_\alpha(x + V\tau) - \alpha\tau F(q_\alpha) - \alpha\pi/4]}. \end{aligned} \quad (53)$$

The exact expression computed from Eq. (50) is compared in Fig. 5 with the saddle phase estimate (53). The curves are drawn at $\tau = 60$ [40] for a soliton with incident velocity $V = 0.5$. The obstacle is here taken to be a delta scatterer $\lambda\delta(x)$. ϕ_1 being proportional to λ [through the expression (38) of $D_q^\alpha(+\infty)$] we represent in Fig. 5 the value of $\phi_1(x, t)/\lambda$ (actually its real part) which do not depend on λ .

One sees in Fig. 5 that the semiclassical approximation (53) is excellent in all its expected domain of validity and diverges at $x = (1 - V)\tau = 30$ (for $\alpha = +$) and $x = -(1 + V)\tau = -90$ (for $\alpha = -$) [41]. Hence, these points can be considered as representative of the region where the contribution of ϕ_1^+ and ϕ_1^- to the total wave function is more important. Roughly speaking, the present approach indicates that, long after the collision, $\phi_1^\alpha(x, t)$ is maximum around $x = (\alpha - V)\tau$. We recall that when using x (instead of z) as position coordinate, the

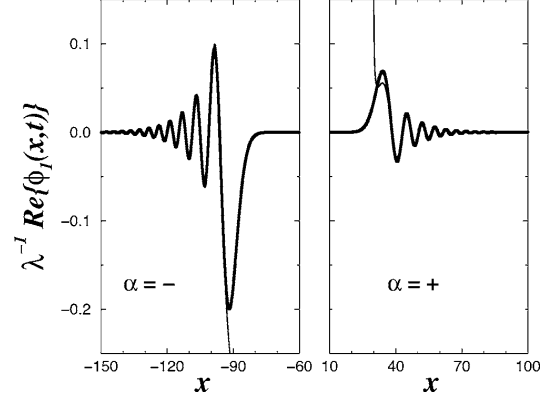


FIG. 5. $\text{Re}\{\phi_1(x, t)\}$ as a function of x for $\tau = 60$ for a soliton of initial velocity $V = 0.5$ incident on a δ scatterer $\lambda\delta(x)$. The thick line represents the result (50) and the thin line its semiclassical approximation (53). For legibility we have separated the region where ϕ_1^- is nonzero (around $x = -90$) from the one where ϕ_1^+ is nonzero (around $x = 30$). Note that in the expected domain of validity of Eq. (53) ($x \gg 30$ and $x \ll -90$) one can hardly distinguish the thick line from its semiclassical approximation.

soliton is, at all times, located around $x = 0$. Hence, going back to the z coordinate, we have a clear picture of the process at large times: the soliton propagates at velocity V (the same as its initial velocity) after having emitted phonons which form two wave packets, one propagating in the forward direction with group velocity 1 (i.e., the sound velocity) and the other one propagating backward with group velocity -1 . The same conclusion seems to be reached in the numerical simulations of Parker *et al.* [21,22].

D. Radiated energy

A quantity of importance for characterizing the system is the total energy radiated by the soliton. Equation (4) for the field ψ which, in the present work, is of the form $\varphi(z, t) \exp(-it)$ [cf. Eq. (10)], conserves the energy \mathcal{E} defined as

$$\mathcal{E}[\varphi] = \int_{\mathbb{R}} dz \left\{ \frac{1}{2} |\varphi_z|^2 + \frac{1}{2} (|\varphi|^2 - 1)^2 + U(z) |\varphi|^2 \right\}. \quad (54)$$

In order to have an expression of the energy in terms of the field ϕ which, when $\phi = \Phi$, matches the usual expression (B3) of the energy of the soliton, we rather work with the quantity $E[\phi] = \mathcal{E}[f\phi] - \mathcal{E}[f]$. $E[\phi]$ is of course a conserved quantity, and we are interested in its expression far before ($t \rightarrow -\infty$) and far after ($t \rightarrow +\infty$) the collision with the obstacle. We note here that $f(z) - 1$ and $U(z)$ are nonzero only when z is close to origin, whereas, in the same region, $\phi(z, t) - 1$ is zero when $t \rightarrow \pm\infty$. After a change of variable from z to $x = z - \bar{z}(t)$, the previous remark allows one to obtain the simplified expression for E (only valid when $t \rightarrow \pm\infty$):

$$E[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dx \{ |\phi_x|^2 + (|\phi|^2 - 1)^2 \}. \quad (55)$$

Using the decomposition (15), keeping the lowest orders in $\delta\phi$, and taking into account the fact that, when $t \rightarrow \pm\infty$, $|\Phi|^2 - 1$ is zero in the regions where $\delta\phi$ is noticeable, one obtains

$$\begin{aligned} E[\phi] &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dx \{ |\Phi_x|^2 + (|\Phi|^2 - 1)^2 \} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dx \{ |\delta\phi_x|^2 + (\Phi^* \delta\phi + \delta\phi^* \Phi)^2 \} + \mathcal{O}(\delta\phi^3). \end{aligned} \quad (56)$$

The first integral on the RHS of Eq. (56) corresponds to the energy of the soliton and is equal to $\frac{4}{3} \cos^3 \theta$. The second integral on the RHS of Eq. (56) corresponds to the energy of the radiated part and is denoted by E_{rad} in the following.

We are now facing a difficulty: we performed a computation at order ϵ and at this order we have $\theta(+\infty) = \theta(-\infty)$ since the equations for the parameters of the soliton are the same as the one obtained in the adiabatic approximation (see the discussion at the end of Appendix B). Accordingly, E_{rad} in Eq. (56) being of order ϵ^2 should be neglected. Hence, at order ϵ nothing has occurred for the energy of the soliton: this quantity is not modified by the collision with the obstacle and the radiated energy should be neglected. Thus, it seems that our first-order approach is unable to predict the amount of energy lost by the soliton during the collision with the obstacle.

However, as already remarked in the study of the scattering of bright solitons [42], one can circumvent this difficulty and extract some second-order information from our results. The procedure is the following: when pushing the computations at order ϵ^2 , the $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ estimate of E_{rad} is still given by the second term on the RHS of Eq. (56) with $\delta\phi = \phi_1$, which we know from our first-order approach. At second order, since E_{rad} is nonzero, the energy of the soliton has been modified by the collision and energy conservation now reads

$$\frac{4}{3} \cos^3[\theta(-\infty)] = E = \frac{4}{3} \cos^3[\theta(+\infty)] + E_{\text{rad}}. \quad (57)$$

Equation (57) allows us to determine the change in the soliton's parameter θ . Writing $\theta(-\infty) = \theta_0$ (with $\sin \theta_0 = V$) and $\theta(+\infty) = \theta_0 + \delta\theta$ one obtains

$$\delta\theta = \frac{E_{\text{rad}}}{4 \cos^2 \theta_0 \sin \theta_0}. \quad (58)$$

From Eq. (58) one can also determine the velocity at $t \rightarrow +\infty$ which is equal to $\sin[\theta(+\infty)] = V + \delta\theta \cos \theta_0$. Thus, we can determine how the collision has affected the soliton's shape and velocity by computing E_{rad} (replacing $\delta\phi$ by ϕ_1). This will be done in the rest of this section.

On the basis of the analysis in terms of forward- and backward-emitted wave packet made in Sec. IV C, one can separate E_{rad} into two parts, which we denote E_{rad}^- and E_{rad}^+ , the first one corresponding to energy radiated backward and the second one to forward-radiated energy, with

$$E_{\text{rad}}^\alpha = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dx \{ |\delta\phi_x^\alpha|^2 + (\Phi^* \delta\phi^\alpha + \delta\phi^{\alpha*} \Phi)^2 \}. \quad (59)$$

A long computation which is summarized in Appendix C yields the result

$$E_{\text{rad}}^\alpha = 16\pi \int_0^{+\infty} dq |D_q^\alpha(+\infty)|^2 (\epsilon_q^\alpha)^2 \left(\frac{q^2}{4} + 1 \right). \quad (60)$$

When $D_q^\alpha(+\infty)$ is given by Eq. (38), one obtains

$$E_{\text{rad}}^\alpha = \frac{\pi}{16V^6} \int_0^{+\infty} dq \frac{q^2 (\epsilon_q^\alpha)^2 |\hat{U}(\epsilon_q^\alpha/V)|^2}{\sinh^2 \left(\frac{\pi q \sqrt{1 + q^2/4}}{2V\sqrt{1 - V^2}} \right)}. \quad (61)$$

The behavior at low and high velocity of E_{rad}^α defined in Eq. (61) is the following:

$$E_{\text{rad}}^\alpha \sim \frac{\pi}{16V} \int_0^{+\infty} dq \frac{q^4 |\hat{U}(q)|^2}{\sinh^2(\pi q/2)} \quad \text{when } V \rightarrow 0 \quad (62)$$

and

$$E_{\text{rad}}^- \sim \frac{4}{15} (1 - V^2)^{5/2} |\hat{U}(0)|^2, \quad (63)$$

$$E_{\text{rad}}^+ \sim \frac{2}{35} (1 - V^2)^{9/2} |\hat{U}(0)|^2, \quad \text{when } V \rightarrow 1.$$

One sees from Eq. (62) that our approach predicts an unphysical divergence of the radiated energy at low incident soliton velocity. On the contrary, numerical computations indicate that a soliton with very low velocity does not radiate [21,22]. However, one must bear in mind that Eq. (61) is the result of a first-order expansion only valid in the limit $V^2 \gg U$ and is unable to tackle the regime of very low incident velocities. More interestingly, in the high-velocity regime—where the first-order perturbation theory is valid—we see from Eq. (63) that the leading-order estimate of the total amount of radiation (forward or backward emitted) vanishes.

In order to fix the ideas, we plot in Fig. 6 the value of E_{rad}^α as a function of the initial soliton velocity V . The obstacle is here taken to be a δ scatterer $U(z) = \lambda \delta(z)$. In this case $\hat{U}(q) = \lambda$.

Figure 6 shows that most of the energy is radiated backward (this was already implicit in Fig. 5) and confirms that, at leading order in U/V^2 , a soliton does not radiate in the limit $V \rightarrow 1$. Besides, not only the absolute value of E_{rad} goes to zero, but also the relative amount of energy radiated E_{rad}/E vanishes [as $(1 - V^2)$]. Very similar results are obtained for an obstacle interacting with the beam through a finite-range potential (for instance, a Gaussian). This absence of radiation of a fast soliton can be explained intuitively as follows: whatever the sign of the potential describing the obstacle, the soliton loses energy under the form of radiated phonons. Accordingly it gets less dark [$\delta\theta > 0$ in Eq. (58)] and is accelerated. This increased velocity after a loss of energy is a typical feature of dark solitons which are sometimes referred to as effective particles having a negative ki-

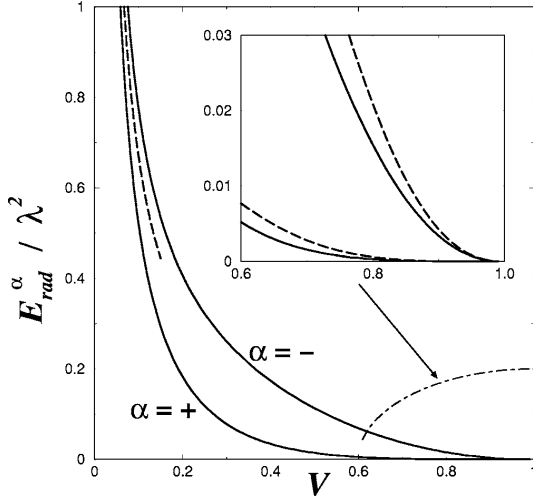


FIG. 6. Energy E_{rad}^{α} radiated in the forward ($\alpha=+$) and backward ($\alpha=-$) directions by a soliton of initial velocity V incident on a δ scatterer. The solid lines represent the result (61) and the dashed line the approximation (62) which reads here $E_{\text{rad}}^{\alpha} \approx \lambda^2 / (15 V)$. The inset displays a blowup of the figure at high velocity. In the inset, the dashed curves are the asymptotic results (63).

netic mass which decreases with increasing energy [43]. However, our results show that, since the soliton velocity cannot exceed the speed of sound, a soliton whose velocity is close to this upper limit cannot be further accelerated and the radiative process is suppressed.

V. CONCLUSION

In this paper we have presented a study of the dynamics of a dark soliton experiencing a collision with a finite-size potential in a quasi-1D condensate. We determined the evolution of the soliton's parameters and also included radiative effects within secular perturbation theory.

A first output of the present work is what we called the "effective potential theory:" in many instances the soliton can be described as an effective classical particle of mass 2 (twice the mass of a bare particle) evolving in an effective potential U_{eff} [defined in Eq. (41)]. This approximation is rigorously valid in the case of a slow soliton incident on a weak potential, but its actual regime of validity appears to be quite broad.

The effective potential theory is an approximation where—as in all adiabatic approaches—radiative effects are neglected. Perturbation theory allows one to get a deeper insight into the collisional process and to determine the amount of radiated energy at leading order in U/V^2 . We show that the radiated waves form two counterpropagating phonon wave packets, and we predict that the radiative process is suppressed in the limit of a soliton moving with a velocity close to the velocity of sound. This result should be checked numerically; work in this direction is in progress.

Whereas adiabatic theory predicts that the soliton's shape and velocity are the same far before and far after the collision with the obstacle, it is an important feature of the perturbative approach of being able to determine finite asymptotic modifications of the soliton's parameters due to the collision. We computed [in Eq. (58)] the modification of the soliton's parameters at leading order in U/V^2 . The qualitative picture of the collisional process drawn from our approach is the following: the soliton radiates energy, gets less dark, and is accelerated. Since the velocity of a dark soliton cannot exceed the velocity of sound in the system, it is natural that this velocity appears as a threshold for emission of radiations. Roughly speaking, a soliton with a velocity close to the velocity of sound cannot radiate [as seen from Eqs. (63)] since its velocity cannot further increase.

ACKNOWLEDGMENTS

It is a pleasure to thank E. Bogomolny, C. Schmit, G. Shlyapnikov, and C. Texier for fruitful discussions. We acknowledge support from CNRS and Ministère de la Recherche (Grant ACI Nanoscience 201). Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques is Unité Mixte de Recherche de l'Université Paris XI et du CNRS, UMR 8626.

APPENDIX A

In this appendix we present the eigenvectors and eigenvalues of the Hamiltonian \mathcal{H} defined in Eq. (27). \mathcal{H} is not diagonalizable because, as we will see below, its null space and the one of \mathcal{H}^2 are not identical. If we denote by its "generalized null space" [37] the union of these two null spaces, one can easily verify that it is spanned by the four vectors $|\omega_o\rangle$, $|\omega_e\rangle$, $|\Omega_o\rangle$, and $|\Omega_e\rangle$ defined as

$$|\omega_o\rangle = \begin{pmatrix} \Phi = \chi + i \sin \theta \\ -\Phi^* = -\chi + i \sin \theta \end{pmatrix}, \quad |\Omega_o\rangle = \begin{pmatrix} x\chi_x + \chi \\ x\chi_x + \chi \end{pmatrix},$$

$$|\omega_e\rangle = \begin{pmatrix} \Phi_x = \chi_x \\ \Phi_x = \chi_x \end{pmatrix}, \quad (A1)$$

$$|\Omega_e\rangle = \begin{pmatrix} i \cos \theta \Phi_\theta = -\cos^2 \theta - i \sin \theta (x\chi_x + \chi) \\ i \cos \theta \Phi_\theta^* = \cos^2 \theta - i \sin \theta (x\chi_x + \chi) \end{pmatrix},$$

where the function $\chi(x, \theta)$ is defined in Eq. (14). The kets defined in Eq. (A1) verify $\mathcal{H}|\omega_o\rangle = \mathcal{H}|\omega_e\rangle = 0$ and $\mathcal{H}^2|\Omega_o\rangle = \mathcal{H}^2|\Omega_e\rangle = 0$, with $\mathcal{H}|\Omega_o\rangle = 2 \cos^2 \theta |\omega_o\rangle$ and $\mathcal{H}|\Omega_e\rangle = \cos^2 \theta |\omega_e\rangle$. One sees from Eq. (A1) that $|\omega_e\rangle$ and $|\Omega_e\rangle$ are, respectively, linked to variations of the center of the soliton and of the parameter θ (i.e., to the phase change across the soliton): this is the reason why the terms in θ_{i_1} and \bar{z}_{i_1} in Eq. (25) can be rewritten in Eq. (26) by means of $|\omega_e\rangle$ and $|\Omega_e\rangle$. One can similarly show that $|\omega_o\rangle$ is linked to modulations of the global phase of the soliton and that $|\Omega_o\rangle$ is linked to variations of the background density at infinity.

The remainder of the spectrum of \mathcal{H} is what we call the "phonon spectrum." It has two branches which we denote "+" and "-." The corresponding eigenvectors and eigenvalues are denoted $|\Xi_q^\pm\rangle$ and ε_q^\pm with

N. BILAS AND N. PAVLOFF

PHYSICAL REVIEW A **72**, 033618 (2005)

$$\mathcal{H}|\Xi_q^\pm\rangle = \varepsilon_q^\pm|\Xi_q^\pm\rangle. \quad (\text{A2})$$

The explicit expression of the eigenvalues is given in the main text [Eq. (32)]. It can be simply obtained by considering the form of Eq. (A2) when $x \rightarrow \pm\infty$. In this limit, Φ goes to a constant, and looking for the eigenvectors under the form of plane waves, $\exp\{iqx\}(U_q^\pm, V_q^\pm)^T$ (where U_q^\pm and V_q^\pm are constants), yields the result (32). This is the reason why we denote these excitations as phonons. A better denomination should be ‘‘Bogoliubov excitations’’ because, far from the soliton, their form and dispersion relation correspond indeed to the elementary excitations of a constant background moving with velocity $-V$.

The exact expression (valid for all $x \in \mathbb{R}$) of the eigenvectors is given by the squared Jost solutions of the inverse problem [23]. They read $|\Xi_q^\pm\rangle = (u_q^\pm(x), v_q^\pm(x))^T$ with

$$\begin{aligned} u_q^\pm(x) &= \exp\{iqx\} \left(\frac{q}{2} + \frac{\varepsilon_q^\pm}{q} + i\chi \right)^2, \\ v_q^\pm(x) &= \exp\{iqx\} \left(\frac{q}{2} - \frac{\varepsilon_q^\pm}{q} + i\chi \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

The natural inner product of two kets is $\langle \cdot | \sigma_3 | \cdot \rangle$, where σ_3 is the third Pauli matrix. The eigenvectors have the following normalization:

$$\begin{aligned} \langle \Xi_p^\beta | \sigma_3 | \Xi_q^\alpha \rangle &= \int_{\mathbb{R}} dx [u_p^{\beta*}(x)u_q^\alpha(x) - v_p^{\beta*}(x)v_q^\alpha(x)] \\ &= \mathcal{N}_q^\alpha \delta_{\alpha,\beta} \delta(p-q), \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

with

$$\mathcal{N}_q^\alpha = 16\alpha\pi q \sqrt{\frac{q^2}{4} + 1} \left(\frac{\varepsilon_q^\alpha}{q} \right)^2. \quad (\text{A5})$$

In the main text we also use the following orthogonality relations:

$$\begin{aligned} \langle \omega_e | \sigma_3 | \omega_e \rangle &= \langle \Omega_e | \sigma_3 | \Omega_e \rangle = \langle \omega_e | \sigma_3 | \Xi_q^\alpha \rangle = \langle \Omega_e | \sigma_3 | \Xi_q^\alpha \rangle \\ &= 0, \quad \langle \omega_e | \sigma_3 | \Omega_e \rangle = -4 \cos^3 \theta \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

and

$$\langle \omega_o | \sigma_3 | \omega_o \rangle = \langle \omega_o | \sigma_3 | \omega_e \rangle = \langle \omega_o | \sigma_3 | \Xi_q^\alpha \rangle = 0, \quad (\text{A7})$$

$$\langle \omega_o | \sigma_3 | \Omega_e \rangle = 2i \sin \theta \cos \theta.$$

APPENDIX B

In this appendix we briefly present the Lagrangian approach for dark soliton of Kivshar and Królkowski [14] and derive the Lagrange equations (B9) and (B10).

In absence of the perturbation $R[\phi]$, Eq. (11) can be derived from the following Lagrangian density:

$$\mathcal{L}[\phi, \phi^*] = \frac{i}{2} (\phi^* \phi_t - \phi \phi_t^*) \left(1 - \frac{1}{|\phi|^2} \right) - \frac{1}{2} |\phi_z|^2 - \frac{1}{2} (|\phi|^2 - 1)^2. \quad (\text{B1})$$

Accordingly, the energy and momentum are defined by

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\phi_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} + \phi_t^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t^*} - \mathcal{L} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz [|\phi_z|^2 + (|\phi|^2 - 1)^2], \\ P &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\phi_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} + \phi_z^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t^*} \right] \\ &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz (\phi \phi_z^* - \phi^* \phi_z) \left(1 - \frac{1}{|\phi|^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

The Lagrangian density (B1) is not *a priori* the most natural one leading to Eq. (11), but for the asymptotic boundary condition we are working with ($|\phi| \rightarrow 1$ when $z \rightarrow \pm\infty$), it yields a finite value of the energy and, besides, the energy and momentum are now, for a field of the form $\phi(x-Vt)$ (in particular, in the case of a soliton), related by the relation $\delta E = V \delta P$, indicating that the background contribution has been removed and allowing one to treat the soliton as a classical particlelike object [33,44]. For completeness, we note that, for a soliton, ϕ is given by Eq. (13) and its energy and momentum defined in Eq. (B2) have the following expressions:

$$E = \frac{4}{3} \cos^3 \theta, \quad P = \pi - 2\theta - \sin(2\theta). \quad (\text{B3})$$

Following Kivshar and Królkowski [14], one can obtain adiabatic equations of motion for the soliton’s parameters in the following way. Let us consider a variational approximation of the type of Eq. (16); the field of the soliton is parametrized with time-dependent quantities $q_1(t), \dots, q_n(t)$ and has no other time dependence: $\phi_{\text{sol}}(z, t) = \phi(z, q_1(t), \dots, q_n(t))$. One first defines the Lagrangian for the q_i ’s as being

$$L(q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \mathcal{L}[\phi_{\text{sol}}, \phi_{\text{sol}}^*]. \quad (\text{B4})$$

Then the quantities $\partial_{q_i} L$ and $\partial_{\dot{q}_i} L$ are computed via

$$\partial_{q_i} L = \int_{-\infty}^{+\infty} dz (\partial_{q_i} \phi \partial \phi \mathcal{L} + \partial_{q_i} \phi_z \partial \phi_z \mathcal{L} + \partial_{q_i} \phi_t \partial \phi_t \mathcal{L}) + \text{c.c.} \quad (\text{B5})$$

and

$$\partial_{\dot{q}_i} L = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \partial_{\dot{q}_i} \phi_t \partial \phi_t \mathcal{L} + \text{c.c.}, \quad (\text{B6})$$

where c.c. stands for complex conjugate. Considering that ϕ is solution of Eq. (11) (including the perturbative term $R[\phi]$), simple manipulations allow one to obtain Lagrange-like equations for the q_i ’s:

$$\begin{aligned} \partial_{q_i} L - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}_i} L) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz [\partial_\phi \mathcal{L} - \partial_z(\partial_{\phi_z} \mathcal{L}) - \partial_t(\partial_{\phi_t} \mathcal{L})] \\ &\quad \times \partial_{q_i} \phi + \text{c.c.} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dz R^*[\phi_{\text{sol}}] \partial_{q_i} \phi_{\text{sol}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

In the particular case where $\phi_{\text{sol}}(z, t) = \Phi(z - \bar{z}(t), \theta(t))$ one obtains

$$L(\theta, \dot{\theta}, \bar{z}, \dot{\bar{z}}) = \dot{\bar{z}} [\pi - 2\theta - \sin(2\theta)] - \frac{4}{3} \cos^3 \theta, \quad (\text{B8})$$

and the equations of motion (B7) read explicitly

$$4\dot{\theta} \cos^2 \theta = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dz R^*[\phi_{\text{sol}}] \partial_z \phi_{\text{sol}} \right\} \quad (\text{B9})$$

and

$$4 \cos^2 \theta (\sin \theta - \dot{\bar{z}}) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dz R^*[\phi_{\text{sol}}] \partial_\theta \phi_{\text{sol}} \right\}. \quad (\text{B10})$$

We note here a general feature, always valid in the framework of the adiabatic approximation: With Eq. (4) conserving energy, one can show that the soliton's energy defined in Eq. (B2) has the same value far before and far after the collision with the obstacle (the demonstration is essentially the same as the one given in Sec. IV D where, in addition, the consequences of soliton's radiation—neglected in the present adiabatic approximation—are taken into account). As a result, one obtains for the solutions of Eqs. (B9) and (B10) that $\theta(+\infty) = \theta(-\infty)$, and $\dot{\bar{z}}(\pm\infty) = \sin \theta(\pm\infty) = V$. Hence the soliton's shape and velocity may change during the collision, but they eventually regain their initial values. This is intimately connected to the neglecting of radiative effects in the adiabatic approximation.

APPENDIX C

In this appendix we briefly indicate how to obtain expression (60) for the radiated energy starting from Eq. (59), where $\delta\phi$ is given by ϕ_1 —i.e., by Eq. (50). Instead of giving a detailed explanation on how to treat all the terms in the integrand of Eq. (59), for brevity we focus on one of the contributions to the expression (59) for E_{rad}^α :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\Phi|^2 |\delta\phi^\alpha|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cosh^2(x \cos \theta)} \right) |\phi_1^\alpha(x, t)|^2. \quad (\text{C1})$$

We recall that we are interested of the evaluation of this term at large times. Expressing ϕ_1 through Eq. (50), one can show

that the term in \cosh^{-2} in the integrand on the RHS of Eq. (C1) can be dropped because it gives a contribution which decreases algebraically at $t \rightarrow +\infty$ (this can be checked by a stationary phase evaluation of the integrals over the momenta). It thus remains to evaluate

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\phi_1^\alpha|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dx \{ C_q^\alpha C_p^{\alpha*} (u_q^\alpha u_p^{\alpha*} \\ &\quad - v_q^{\alpha*} v_p^{\alpha}) + C_q^\alpha C_p^{\alpha*} v_q^\alpha v_p^{\alpha*} \}. \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

In Eq. (C2) we have added and subtracted the contribution $v_q^{\alpha*} v_p^{\alpha}$ in order to make use of the normalization (A4). For the evaluation of the last part of the integrand on the RHS of Eq. (C2), the explicit expressions (A3) of $u_q^\alpha(x)$ and $v_q^\alpha(x)$ are to be used. In the course of this computation, an argument of stationary phase shows that only the x -independent terms with $p=q$ give a finite contribution at $t \rightarrow +\infty$. These terms will contribute as $2\pi\delta(p-q)$ after the integration over x . Altogether one obtains the expression

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\phi_1^\alpha|^2 &\underset{t \rightarrow +\infty}{\simeq} \int_{-\infty}^{+\infty} dq |C_q^{\alpha}|^2 \left\{ \mathcal{N}_q^\alpha + 2\pi \left[\left(\frac{q}{2} - \frac{\varepsilon_q}{q} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos^2 \theta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C3})$$

Noting that \mathcal{N}_q^α defined in Eqs. (A4) and (A5) is an odd function (and thus does not contribute to the integral since $|C_q^\alpha|^2$ is even) and explicitly computing the other contributions, one obtains

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\phi_1^\alpha(x, t)|^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{\simeq} 8\pi \int_0^{+\infty} dq (q^2 + 2) \left(\frac{\varepsilon_q}{q} \right)^2 |D_q^\alpha(+\infty)|^2. \quad (\text{C4})$$

The others contributions to Eq. (59) can be computed similarly. One obtains

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\partial_x \phi_1^\alpha|^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{\simeq} 8\pi \int_0^{+\infty} dq q^2 (q^2 + 2) \left(\frac{\varepsilon_q}{q} \right)^2 |D_q^\alpha(+\infty)|^2 \quad (\text{C5})$$

and

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx (\Phi^* \phi_1^\alpha)^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{\simeq} -16\pi \int_0^{+\infty} dq \left(\frac{\varepsilon_q}{q} \right)^2 |D_q^\alpha(+\infty)|^2. \quad (\text{C6})$$

Gathering all these contributions yields the final result (60).

N. BILAS AND N. PAVLOFF

PHYSICAL REVIEW A **72**, 033618 (2005)

- [1] W. Hänsel, P. Hommelhoff, T. W. Hänsch, and J. Reichel, *Nature (London)* **413**, 498 (2001); K. Bongs *et al.*, *Phys. Rev. A* **63**, 031602(R) (2001); H. Ott, J. Fortagh, G. Schlotterbeck, A. Grossmann, and C. Zimmermann, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 230401 (2001); T. L. Gustavson *et al.*, *ibid.* **88**, 020401 (2001); A. E. Leanhardt *et al.*, *ibid.* **89**, 040401 (2002); J. Fortágh *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* **81**, 1146 (2002); S. Schneider *et al.*, *Phys. Rev. A* **67**, 023612 (2003); Y. J. Lin, I. Teper, C. Chin, and V. Vuletić, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 050404 (2004); T. Lahaye *et al.*, *ibid.* **93**, 093003 (2004).
- [2] Y. Shin *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 050405 (2004).
- [3] M. Cristiani, O. Morsch, J. H. Müller, D. Ciampini, and E. Arimondo, *Phys. Rev. A* **65**, 063612 (2002); O. Morsch, J. H. Müller, M. Cristiani, D. Ciampini, and E. Arimondo, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 140402 (2001).
- [4] B. P. Anderson and M. A. Kasevich, *Science* **282**, 1686 (1998); F. S. Cataliotti *et al.*, *ibid.* **293**, 843 (2001).
- [5] C. Raman *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2502 (1999); R. Onofrio *et al.*, *ibid.* **85**, 2228 (2000); S. Inouye *et al.*, *ibid.* **87**, 080402 (2001).
- [6] L. Khaykovich *et al.*, *Science* **296**, 1290 (2002); K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, *Nature (London)* **417**, 150 (2002).
- [7] S. Burger *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5198 (1999); J. Denschlag *et al.*, *Science* **287**, 97 (2000); Z. Dutton, M. Budde, C. Slowe, and L. V. Hau, *ibid.* **293**, 663 (2001).
- [8] J. P. Keener and D. W. McLaughlin, *Phys. Rev. A* **16**, 777 (1977).
- [9] Y. S. Kivshar and B. A. Malomed, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 763 (1989).
- [10] V. I. Karpman, *Phys. Scr.* **20**, 462 (1979).
- [11] D. J. Kaup and A. C. Newell, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **361**, 413 (1978).
- [12] D. J. Kaup, *Phys. Rev. A* **42**, 5689 (1990); **44**, 4582 (1991).
- [13] Y. S. Kivshar and X. Yang, *Phys. Rev. E* **49**, 1657 (1994).
- [14] Y. S. Kivshar and W. Królikowski, *Opt. Commun.* **114**, 353 (1995).
- [15] V. V. Konotop, V. M. Pérez-García, Y.-F. Tang, and L. Vázquez, *Phys. Lett. A* **236**, 314 (1997).
- [16] T. Busch and J. R. Anglin, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2298 (1999).
- [17] D. J. Frantzeskakis, G. Theocharis, F. K. Diakonou, P. Schmelcher, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. A* **66**, 053608 (2002).
- [18] V. A. Brazhnyi and V. V. Konotop, *Phys. Rev. A* **68**, 043613 (2003).
- [19] V. V. Konotop and L. Pitaevskii, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 240403 (2004).
- [20] S. Burtsev and R. Camassa, *J. Opt. Soc. Am. B* **14**, 1782 (1997).
- [21] N. G. Parker, N. P. Proukakis, M. Leadbeater, and C. S. Adams, *J. Phys. B* **36**, 2891 (2003).
- [22] N. G. Parker, N. P. Proukakis, and C. S. Adams, in *Progress in Soliton Research* (Nova, New York, in press).
- [23] X.-J. Chen, Z.-D. Chen, and N.-N. Huang, *J. Phys. A* **31**, 6929 (1998).
- [24] N.-N. Huang, S. Chi, and X.-J. Chen, *J. Phys. A* **32**, 3939 (1999).
- [25] V. V. Konotop and V. E. Vekslerchik, *Phys. Rev. E* **49**, 2397 (1994).
- [26] C. Menotti and S. Stringari, *Phys. Rev. A* **66**, 043610 (2002).
- [27] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, and C. J. Pethick, *Phys. Rev. A* **58**, 2417 (1998).
- [28] M. Olshanii, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 938 (1998).
- [29] P. Leboeuf and N. Pavloff, *Phys. Rev. A* **64**, 033602 (2001).
- [30] Nonstationary solutions do not fulfill Eq. (3) for the two following reasons: (i) at times when the perturbation of density reaches $x \rightarrow \pm\infty$, the density of nonstationary solutions will not exactly equal n_∞ far from the obstacle, and (ii) an additional phase difference (typically time dependent) will appear between $x \rightarrow -\infty$ and $x \rightarrow +\infty$ (such as the one which occurs in presence of a soliton).
- [31] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3745 (2000).
- [32] V. Hakim, *Phys. Rev. E* **55**, 2835 (1997).
- [33] Y. S. Kivshar and B. Luther-Davies, *Phys. Rep.* **298**, 81 (1998).
- [34] In dimensioned units, the velocity of sound in an unperturbed system of constant density n_∞ is $c = (2\hbar\omega_\perp a_{sc} n_\infty / m)^{1/2}$.
- [35] The fact that \bar{z} depends on the fast time t_0 may seem strange at first sight. This dependence is introduced in order to account for its behavior in absence of obstacle: $\bar{z} = Vt$.
- [36] This is not the only possible way of writing the solution of Eq. (23). With the same degree of accuracy one can equivalently write $\bar{z} = \int^{t_0} \sin[\theta(\epsilon t'_0)] dt'_0 + \hat{z}(t_1)$, where \hat{z} is a (still unknown) function of t_1 .
- [37] M. I. Weinstein, *SIAM J. Math. Anal.* **16**, 472 (1985).
- [38] In dimensioned units this corresponds to a potential which varies slowly over a lengths scale of order of the healing length of the system.
- [39] A. E. Muryshev, H. B. van Linden van den Heuvell, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **60**, R2665 (1999).
- [40] Note that τ is very close to the actual time t and that, here, $t = 0$ corresponds to the time where the soliton's center would be at $z = 0$ in absence of the obstacle.
- [41] At these points the two saddles coalesce to $q_\alpha = 0$ and go to imaginary axis.
- [42] Y. S. Kivshar, A. M. Kosevich, and O. A. Chubykalo, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **93**, 968 (1987) [*Sov. Phys. JETP* **66**, 545 (1987)].
- [43] P. O. Fedichev, A. E. Muryshev, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **60**, 3220 (1999).
- [44] I. V. Barashenkov and E. Yu. Panova, *Physica D* **69**, 114 (1993).

Quelques précisions

Après la lecture de l'article précédent, on peut se rendre compte que le calcul le plus compliqué de cette article est celui de la densité d'énergie radiée, c'est-à-dire l'équation 38.

Afin de permettre au lecteur de pouvoir reproduire ce calcul, nous détaillerons dans ce paragraphe la façon d'arriver au résultat.

Reprenons ici l'équation 37 de l'article :

$$D_q^\alpha(+\infty) = \frac{4}{iV\mathcal{N}_q^\alpha} \frac{\hat{U}^*\left(\frac{\varepsilon_q^\alpha}{V}\right)}{4 + \left(\frac{\varepsilon_q^\alpha}{V}\right)^2} e^{-i\varepsilon_q^\alpha z(+\infty)/V} \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\varepsilon_q^\alpha x/V} \partial_x \Phi \left[u_q^{\alpha*}(x) \left(\Phi(x) - \frac{i\varepsilon_q^\alpha}{2V} \right) + v_q^{\alpha*}(x) \left(\Phi(x)^* - \frac{i\varepsilon_q^\alpha}{2V} \right) \right], \quad (2.98)$$

où on le rappelle ici

$$\begin{aligned} \varepsilon_q^\alpha &= -qV + \alpha q \sqrt{1 + q^2/4} = -qV + \alpha q \lambda_q, \\ &\text{avec } \alpha = \pm 1 \text{ et } \lambda_q = \sqrt{1 + q^2/4}, \\ u_q^\alpha(x) &= \exp\{iqx\} \left(\frac{q}{2} + \frac{\varepsilon_q^\alpha}{q} + i \cos \phi \tanh(x \cos \phi) \right)^2 = \exp\{iqx\} U_q^\alpha(x), \\ v_q^\alpha(x) &= \exp\{iqx\} \left(\frac{q}{2} - \frac{\varepsilon_q^\alpha}{q} + i \cos \phi \tanh(x \cos \phi) \right)^2 = \exp\{iqx\} V_q^\alpha(x), \\ \mathcal{N}_q^\alpha &= 16\pi \frac{\alpha \lambda_q}{q} (\varepsilon_q^\alpha)^2. \end{aligned} \quad (2.99)$$

En posant $Y_q^\alpha = q \frac{q}{2} + \frac{\varepsilon_q^\alpha}{q}$ et $Z_q^\alpha = q \frac{q}{2} - \frac{\varepsilon_q^\alpha}{q}$, de sorte que $U_q^{\alpha*}(x)$ et $V_q^{\alpha*}(x)$ s'écrivent :

$$U_q^{\alpha*}(x) = (Y_q^\alpha)^2 - 2i \cos \phi Y_q^\alpha \tanh(x \cos \phi) + \frac{\cos^2 \phi}{\cosh^2(x \cos \phi)}, \quad (2.100)$$

$$V_q^{\alpha*}(x) = (Z_q^\alpha)^2 - 2i \cos \phi Z_q^\alpha \tanh(x \cos \phi) + \frac{\cos^2 \phi}{\cosh^2(x \cos \phi)}. \quad (2.101)$$

Le terme entre crochets dans l'intégrale (2.98) s'écrit alors :

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \cos \phi \tanh(x \cos \phi) + \mathcal{C} \frac{\cos^2 \phi}{\cosh^2(x \cos \phi)} + \mathcal{D} \frac{\cos^3 \phi \tanh(x \cos \phi)}{\cosh^2(x \cos \phi)}, \quad (2.102)$$

avec

$$\mathcal{A} = \left(4iV - \frac{2i\varepsilon_q^\alpha}{V}\right) [(Y_q^\alpha)^2 - \cos^2 \phi] - 8i \cos^2 \phi Y_q^\alpha \quad (2.103)$$

$$- \left(4iV + \frac{2i\varepsilon_q^\alpha}{V}\right) [(Z_q^\alpha)^2 - \cos^2 \phi] - 8i \cos^2 \phi Z_q^\alpha, \quad (2.104)$$

$$= 4iq \left[q^2 - \alpha \lambda_k \left(2V + \frac{k^2}{2V}\right) + 2V^2 \right], \quad (2.105)$$

$$\mathcal{B} = 4 [(Y_q^\alpha)^2 - \cos^2 \phi] - 2i Y_q^\alpha \left(4iV - \frac{2i\varepsilon_q^\alpha}{V}\right) \quad (2.106)$$

$$+ 4 [(Z_q^\alpha)^2 - \cos^2 \phi] + 2i Z_q^\alpha \left(4iV + \frac{2i\varepsilon_q^\alpha}{V}\right), \quad (2.107)$$

$$= 4k^2 \left(2 - \frac{\alpha \lambda_k}{V}\right), \quad (2.108)$$

$$\mathcal{C} = \left(4iV - \frac{2i\varepsilon_q^\alpha}{V} + 8i Y_q^\alpha\right) + \left(-4iV - \frac{2i\varepsilon_q^\alpha}{V} + 8i Y_q^\alpha\right), \quad (2.109)$$

$$= 4iq \left(3 - \frac{\alpha \lambda_k}{V}\right), \quad (2.110)$$

$$\mathcal{D} = 8. \quad (2.111)$$

En utilisant, les formules suivantes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{\cosh^2(\beta x)} = \frac{\pi k}{\beta^2} \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2|\beta|}\right)}, \quad (2.112)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{\cosh^2(\beta x)} \tanh(\beta x) = \frac{-i\pi k^2}{2\beta^3} \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2|\beta|}\right)}, \quad (2.113)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{\cosh^4(\beta x)} = \frac{2\pi k}{3\beta^2} \left(\frac{k^2}{4\beta^2} + 1\right) \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2|\beta|}\right)}, \quad (2.114)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{\cosh^4(\beta x)} \tanh(\beta x) = \frac{-i\pi k^2}{6\beta^3} \left(\frac{k^2}{4\beta^2} + 1\right) \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2|\beta|}\right)}, \quad (2.115)$$

qui sont les formes générales des intégrales intervenant dans le calcul de D_k^α , on obtient alors l'expression suivante :

$$D_q^\alpha(+\infty) = \frac{4}{iV 16\pi \frac{\alpha \lambda_q}{q} (\varepsilon_q^\alpha)^2} \frac{\hat{U}^*\left(\frac{\varepsilon_q^\alpha}{V}\right)}{4 + \left(\frac{\varepsilon_q^\alpha}{V}\right)^2} e^{-i\varepsilon_q^\alpha \bar{z}(+\infty)/V} \frac{\pi \kappa}{\sinh\left(\frac{\pi \kappa}{2 \cos \phi}\right)} \quad (2.116)$$

$$\left[\mathcal{A} - \frac{i\kappa}{2} \mathcal{B} + \frac{2}{3} \left(\frac{\kappa^2}{4} + \cos^2 \phi\right) \mathcal{C} - \frac{i\kappa}{6} \left(\frac{\kappa^2}{4} + \cos^2 \phi\right) \mathcal{D} \right]$$

avec $\kappa = \frac{\alpha k}{V} \lambda_k$ (2.117)

Pour simplifier cette expression, il est alors nécessaire de remarquer que le terme entre crochets dans l'expression précédente s'écrit

$$4iq \left[2 + q^2 \left(1 + \frac{1}{V^2} \right) + \frac{q^4}{4V^2} - \frac{\alpha}{V} \lambda_q \left(1 + V^2 + q^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4V^2} + \frac{q^4}{16V^2} \right) \right) \right] \quad (2.118)$$

$$= 4iq \left(\tilde{A} - \tilde{B} \frac{\alpha}{V} \lambda_q \right), \quad (2.119)$$

avec :

$$\tilde{A} = 2 + q^2 \left(1 + \frac{1}{V^2} \right) + \frac{q^4}{4V^2}, \quad (2.120)$$

$$\tilde{B} = 1 + V^2 + q^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4V^2} + \frac{q^4}{16V^2} \right). \quad (2.121)$$

De plus, on peut remarquer que le terme $(\varepsilon_q^\alpha)^2 [4 + (\frac{\varepsilon_q^\alpha}{V})^2]$ qui apparait au dénominateur de (2.116) s'écrit :

$$q^2 [4 + 4V^2 + q^2 \left(7 + V^2 + \frac{1}{V^2} \right) + \frac{q^4}{2} \left(3 + \frac{1}{V^2} \right) + \frac{q^6}{16V^2} - \frac{\alpha}{V} \lambda_q (8V^2 + (4 + 4V^2)q^2 + q^4)] \quad (2.122)$$

$$= q^2 \left(\tilde{C} - \tilde{D} \frac{\alpha}{V} \lambda_q \right), \quad (2.123)$$

avec :

$$\tilde{C} = 4 + 4V^2 + q^2 \left(7 + V^2 + \frac{1}{V^2} \right) + \frac{q^4}{2} \left(3 + \frac{1}{V^2} \right) + \frac{q^6}{16V^2}, \quad (2.124)$$

$$\tilde{D} = 8V^2 + (4 + 4V^2)q^2 + q^4. \quad (2.125)$$

Il est alors nécessaire de calculer $\frac{4iq}{q^2} \frac{\tilde{A} - \tilde{B} \frac{\alpha}{V} \lambda_q}{\tilde{C} - \tilde{D} \frac{\alpha}{V} \lambda_q}$, on peut remarquer que cette expression peut se mettre sous la forme :

$$\frac{4i}{q} \frac{1}{\tilde{C}^2 - \frac{\tilde{D}^2}{V^2} \left(\frac{q^2}{4} + 1 \right)} \left(\tilde{A} - \tilde{B} \frac{\alpha}{V} \lambda_q \right) \left(\tilde{C} + \tilde{D} \frac{\alpha}{V} \lambda_q \right). \quad (2.126)$$

En remarquant enfin que

$$\tilde{A}\tilde{C} - \tilde{B}\tilde{D} \frac{1}{V^2} \left(\frac{q^2}{4} + 1 \right) = 0, \quad (2.127)$$

$$\frac{\tilde{B}\tilde{C} - \tilde{A}\tilde{D}}{\tilde{C}^2 - \frac{\tilde{D}^2}{V^2} \left(\frac{q^2}{4} + 1 \right)} = \frac{1}{q^2 + 4}, \quad (2.128)$$

en reinjectant ces différents résultats dans l'expression (2.116), on obtient l'expression 38 de l'article pour $D_q^\alpha(+\infty)$.

Chapitre 3

Soliton sombre dans un milieu désordonné

3.1 Généralités

La condensation de Bose-Einstein est un sujet qui permet de relier différents champs de la physique : matière condensée, optique atomique, physique non-linéaire et est d'autant plus intéressante que comme nous l'avons vu dans le premier chapitre les interactions y sont facilement traitables.

Nous nous sommes donc dans cette thèse penchés sur le rôle des non-linéarités dans la propagation d'onde de matière en présence de désordre afin de pouvoir étudier la "compétition" des effets dus au désordre et au non-linéarités.

La propagation d'onde dans des systèmes linéaires désordonnés a permis d'introduire, en 1958, le concept de localisation d'Anderson[102] : plutôt que de "s'étaler", l'onde reste localisée dans une portion de l'espace.

Ce concept de localisation d'Anderson s'applique à tout phénomène ondulatoire quel qu'il soit, classique ou quantique :

- Concernant les ondes classiques des phénomènes de localisation ont été observés avec des ondes bi-dimensionnelles sur la surface de l'eau [111] et dans le cas uni-dimensionnel [112] avec des ondes lumineuses.
- Au niveau quantique différents travaux ont été réalisés pour étudier les phénomènes de localisations dans des systèmes électroniques uni-dimensionnels [98]. La découverte de la condensation de Bose-Einstein qui est un système avec une grande cohérence quantique a ouvert un nouveau champ de recherche pour l'étude des phénomènes de localisation au niveau des atomes froids. Ceci fera l'objet du prochain chapitre.

Sur ces considérations, différents travaux ont été développés pour étudier le rôle des non-linéarités sur les phénomènes de localisation :

- Historiquement l'étude de l'influence des non-linéarités sur les propriétés de transport dans les systèmes désordonnés a été initiée par Payton *et al* en 1967 [107]. Ils étudièrent le rôle des non-linéarités sur le flux thermique dans des modèles simples sur réseaux. Ils trouvèrent que les non-linéarités augmentaient le flux thermique.
- D'autres études ont montré que l'inclusion de non-linéarités dans le système pouvaient

jouer un rôle opposé à celui du désordre. Par exemple les travaux [99, 100, 101] ont montré qu'en présence de non-linéarités, le coefficient de transmission tendait certes toujours vers zéro avec la taille du système mais suivant une loi de puissance et non plus une loi exponentielle.

- D'autres travaux ont été développés pour étudier la dynamique des solitons brillants dans un milieu désordonné : [95, 87].

Nous avons vu au chapitre précédent que les condensats de Bose étaient justement des systèmes non-linéaires dans lesquels on pouvait créer des solitons sombres [108]. Or jusqu'à présent, l'étude de ces solitons reste moins développée que celle des solitons brillants.

Dans la continuité de l'article précédent, nous allons dans ce chapitre étudier la propagation d'un soliton sombre dans un condensat de Bose-Einstein désordonné et faire ressortir l'impact des non-linéarités dans cette situation sur les phénomènes de localisation.

Afin de mieux mettre en avant le rôle des non-linéarités, nous allons d'abord, dans un premier temps, présenter les études réalisées sur la propagation d'ondes linéaires et des solitons brillants dans un milieu désordonné.

3.2 Onde linéaire dans un milieu désordonné

Nous allons ici rappeler les résultats obtenus par Antsygina *et al* [85] en 1981

Considérons l'équation de Schrödinger linéaire, que l'on écrira ici en notations adimensionnées :

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi, \quad (3.1)$$

$$\text{et } E = k^2, \quad (3.2)$$

où $U(x)$ est potentiel désordonné situé sur l'intervalle $0 \leq x \leq L$.

On considère une onde linéaire de vecteur d'onde k , incidente depuis la droite sur la région désordonnée. En dehors de cette région, la fonction d'onde peut s'écrire sous la forme :

$$\psi(x) \sim e^{-ikx} + r e^{ikx}, \quad x \geq L, \quad (3.3)$$

$$\psi(x) \sim t e^{-ikx}, \quad x \leq 0, \quad (3.4)$$

où r et t sont les amplitudes de réflexion et de transmission.

On écrit la fonction d'onde dans la région désordonnée sous la forme :

$$\psi(x) = \alpha(x)e^{-ikx} + \beta(x)e^{ikx}. \quad (3.5)$$

Les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont choisies de sorte à ce que la dérivée de la fonction d'onde s'écrive dans la région désordonnée :

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = -ik\alpha(x)e^{-ikx} + ik\beta(x)e^{ikx}. \quad (3.6)$$

Sous ces conditions, $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ vérifient le système d'équations différentielles couplées :

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{U(x)}{2ik} (\alpha + \beta e^{2ikx}), \quad (3.7)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{U(x)}{2ik} (\alpha e^{-2ikx} + \beta), \quad (3.8)$$

et vérifient les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= t & \alpha(L) &= 1 \text{ et,} \\ \beta(0) &= 0 & \frac{\beta(L)}{\alpha(L)} &= r. \end{aligned} \quad (3.9)$$

On pose ici $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$, le système d'équation précédent permet d'aboutir pour γ à l'équation différentielle :

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{U(x)}{2ik} (e^{-ikx} + \gamma e^{ikx})^2. \quad (3.10)$$

On écrit alors deux équations stochastiques pour le module et la phase de γ en posant $\gamma = e^{-w-2ikx+i\phi}$:

$$\frac{d\phi}{dx} = 2 - \frac{U(x)}{k} (1 + \cosh w \cos \phi), \quad (3.11)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{U(x)}{k} \sinh w \sin \phi. \quad (3.12)$$

Si $U(x)$ est un bruit blanc gaussien, on peut associer au système précédent une équation de Fokker-Planck¹ pour la distribution de probabilité $P(\phi, w; x)$ [85] qui présente une forme relativement simple à grande énergie.

Considérons une situation où $\frac{U(x)}{k} \ll 1$, d'après l'équation (3.11), $\frac{d\phi}{dx}$ ne dépend alors que faiblement de x . Sous ces conditions la phase $\phi(x)$ est distribuée quasi-uniformément sur l'intervalle $[0, \pi]$ et la distribution $P(\phi, w; x)$ est quasi-indépendante de ϕ , on écrit alors $P(\phi, w; x) \simeq \frac{1}{\pi} P(w; x)$.

Dans ce cas, l'équation vérifiée par $P(w; x)$ est :

$$\frac{\partial P(w; x)}{\partial x} = \frac{D}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} (\sinh^2 w P(w; x)), \quad (3.13)$$

où D est défini par : $\langle U(x)U(x') \rangle = D\delta(x - x')$ et avec d'autre part $\int_0^{+\infty} dw P(w; x) = 1$.

Le coefficient de transmission s'écrit :

$$T = \langle |t|^2 \rangle = 1 - \langle |r|^2 \rangle, \quad (3.14)$$

avec, on le rappelle, $|r|^2 = |\gamma(L)|^2 = e^{-2w}$.

¹On peut établir cette équation par une généralisation de la méthode présentée dans la dernière annexe au cas de plusieurs variables.

On peut donc mettre T sous la forme :

$$T = \int_0^{+\infty} dw (1 - e^{-2w}) P(w; L). \quad (3.15)$$

T. Antsygina *et al* ont déterminé $P(w; L)$ [85] et ont montré que dans la limite où $L \gg l = \frac{4k^2}{D}$, le coefficient de transmission s'écrit :

$$T = \frac{\pi^{5/2}}{2} e^{-L/4l} \left(\frac{l}{L} \right)^{3/2}. \quad (3.16)$$

Ainsi dans le cas d'une onde linéaire, la décroissance du coefficient de transmission fait donc intervenir une longueur typique proportionnelle à $\frac{k^2}{D}$.

Afin de mieux mettre en avant la différence entre la propagation d'ondes linéaires et non-linéaires dans un milieu désordonné, nous présenterons dans le prochain paragraphe le cas du soliton brillant dans un potentiel aléatoire.

3.3 Soliton brillant dans un milieu désordonné

Il s'agit ici d'un cas non-linéaire qui a été traité Kivshar *et al* [87].

L'évolution d'un soliton brillant dans un milieu désordonné s'étudie en deux étapes : premièrement dans [104], les auteurs considèrent la diffusion d'un soliton brillant par un pic δ puis deuxièmement généralisent à une succession aléatoire de pics δ dans [87].

3.3.1 Diffusion d'un soliton brillant par un pic δ

Considérons l'équation de Schrödinger non-linéaire, que l'on écrira ici en notations adimensionnées sous la forme :

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = \epsilon\delta(x)\psi, \quad (3.17)$$

(Nous avons légèrement modifié l'équation par rapport à (2.1) afin de suivre les notations de [87]).

Le terme $\epsilon\delta(x)\psi$ représente un potentiel externe perturbatif. La présence de cette perturbation brise les propriétés d'intégrabilité du système, et le soliton voit alors sa forme et sa vitesse évoluer.

Nous allons ici présenter les résultats que l'on pourra trouver en détails dans [104] où les auteurs étudient l'évolution du soliton en présence de la perturbation ci-dessus dans le formalisme de la méthode inverse ².

Les opérateurs L et M associés à l'équation NLS attractive en l'absence de perturbation s'écrivent ici :

$$L = \begin{pmatrix} -i\partial_x & \psi(x, t)^* \\ -\psi(x, t) & i\partial_x \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

²On pourra trouver un long développement sur l'application de la méthode inverse en présence d'un terme perturbatif dans [92].

et

$$M = \begin{pmatrix} -4i\lambda^3 + 2\lambda|\psi|^2 + \psi^*\psi_x - \psi\psi_x^* & -4i\lambda^2\psi^* - 2i\lambda\psi_x^* + i\psi_{xx}^* + 2i\psi^{*2}\psi \\ -4i\lambda^2\psi + 2i\lambda\psi_x + i\psi_{xx} + 2i\psi^2\psi^* & 4i\lambda^3 - 2\lambda|\psi|^2 - \psi^*\psi_x + \psi\psi_x^* \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

avec $\psi(x, t) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

L'équation aux valeurs propres $L\Psi(x, \lambda) = \lambda\Psi(x, \lambda)$ présente deux bases de solutions en plus et moins l'infini respectivement³ :

$$\Psi_+(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

et

$$\Psi_-(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\phi_2^* \\ \phi_2 & \phi_1^* \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Ces deux bases peuvent alors être reliées par une matrices de transmission $T(\lambda)$:

$$\Psi_-(x, \lambda) = \Psi_+(x, \lambda) T(\lambda), \quad (3.22)$$

où la matrice $T(\lambda)$ a la forme :

$$T = \begin{pmatrix} a^*(\lambda) & b(\lambda) \\ -b^*(\lambda) & a(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

où $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ ⁴ sont reliés par la condition d'unitarité :

$$|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1. \quad (3.24)$$

L'évolution temporelle des coefficients $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ en l'absence de perturbation s'obtient à partir de (2.66) avec l'opérateur M défini en (3.19), ce qui donne :

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad (3.25)$$

$$b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) \exp(4i\lambda^2 t). \quad (3.26)$$

En présence, d'une perturbation $\epsilon P(u)$ ⁵, on obtient [103] concernant l'évolution temporelle du coefficient $b(\lambda)$:

$$\frac{\partial b(\lambda, t)}{\partial t} = 4i\lambda^2 b(\lambda, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\epsilon P(u)\phi_1(x, t, \lambda)\psi_2^*(x, t, \lambda) - \epsilon^* P(u)^*\phi_2(x, t, \lambda)\psi_1^*(x, t, \lambda)). \quad (3.27)$$

D'autre part, la densité de particule $n_{rad}(\lambda)$ radiée lors de la diffusion par l'obstacle peut être calculée dans le formalisme de la méthode inverse par[105] :

$$n_{rad}(\lambda) = \frac{1}{\pi} |b(\lambda)|^2, \quad (3.28)$$

³Les fonctions propres de L sont appelées fonctions de Jost.

⁴Les coefficients $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ sont appelés coefficients de Jost.

⁵Dans la suite, on considère que la perturbation n'altère que très faiblement la vitesse du soliton, c'est-à-dire $V^2 \gg |\epsilon|N$

avec $|b(\lambda)|^2 \ll 1$.

On suppose que lorsque $t \rightarrow -\infty$, on a un soliton pur, c'est-à-dire $b(\lambda, t \rightarrow -\infty) = 0$ et dans le cas où $\epsilon P(u) = \epsilon \delta(x) u(x)$, on obtient[104] :

$$n_{rad}(\lambda) = \frac{\pi \epsilon^2}{4(2(V/4)^2)^6} \frac{[(\lambda - V/4)^2 + N^2/16]^2}{\cosh^2 [4\pi(\lambda^2 - (V/4)^2 + N^2/16)/NV]}, \quad (3.29)$$

où V et N représente respectivement la vitesse et le nombre de particules contenu dans le soliton incident.

Le nombre de particules émis vers l'avant N_t et vers l'arrière N_r et l'énergie rayonnée vers l'arrière E_r et vers l'avant E_t s'écrivent dans le formalisme de la méthode inverse comme :

$$N_t = \int_0^{+\infty} n_{rad}(\lambda) d\lambda, \quad (3.30)$$

$$N_r = \int_{-\infty}^0 n_{rad}(\lambda) d\lambda, \quad (3.31)$$

$$E_t = 4 \int_0^{+\infty} \lambda^2 n_{rad}(\lambda) d\lambda, \quad (3.32)$$

$$E_r = 4 \int_{-\infty}^0 \lambda^2 n_{rad}(\lambda) d\lambda. \quad (3.33)$$

On peut alors définir les coefficients de réflexion en particule

$$R^N = \frac{N_r}{N}. \quad (3.34)$$

De même pour l'énergie :

$$R^E = \frac{E_r}{E}. \quad (3.35)$$

La quantité E représente l'énergie du soliton incident loin avant l'obstacle. En notations adimensionnées, celle-ci s'écrit :

$$E = \frac{NV^2}{4} - \frac{N^3}{12}. \quad (3.36)$$

Les coefficients R^N et R^E s'écrivent[104] :

$$R^N = \frac{\pi \epsilon^2}{64NV} \int_0^{+\infty} dy F(y, \alpha), \quad (3.37)$$

$$R^E = \frac{\pi \epsilon^2 V}{256E} \int_0^{+\infty} dy y^2 F(y, \alpha), \quad (3.38)$$

avec :

$$F(y, \alpha) = \frac{[(y+1)^2 + \alpha^2]^2}{\cosh^2 [\frac{\pi}{4\alpha}(y^2 + \alpha^2 - 1)]}, \quad (3.39)$$

et $\alpha \equiv N/V$. Dans le prochain paragraphe, nous montrerons comment l'on peut généraliser ce résultat à une succession aléatoire de pics δ .

3.3.2 Diffusion d'un soliton brillant par une succession aléatoire de pics δ

A) Equations différentielles

Lors de la propagation d'un soliton brillant sur une série aléatoire de pics δ , si la distance moyenne entre les pics est grande devant la taille du soliton alors on peut considérer les différentes diffusions comme des événements indépendants et dans ce cas, on peut écrire l'énergie et le nombre de particules du soliton après $j + 1$ diffusions comme⁶ :

$$E_{j+1} = E_j T_j^E(E_j, N_j), \quad (3.40)$$

$$N_{j+1} = N_j T_j^N(E_j, N_j), \quad (3.41)$$

soit :

$$\Delta E_{j+1} = E_{j+1} - E_j = -E_j R_j^E(E_j, N_j), \quad (3.42)$$

$$\Delta N_{j+1} = N_{j+1} - N_j = -N_j R_j^N(E_j, N_j), \quad (3.43)$$

ce qui en utilisant la définition de l'énergie du soliton permet d'obtenir les équations d'évolution pour le nombre de particules et la vitesse du soliton :

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{1}{V} \int_0^{+\infty} dy F(y, \alpha), \quad (3.44)$$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{1}{2N} \int_0^{+\infty} dy (y^2 - 1) F(y, \alpha) - \frac{N}{2V^2} \int_0^{+\infty} dy F(y, \alpha). \quad (3.45)$$

B) Résultats

Considérons le paramètre $\alpha = N/V$. Dans la limite où $\alpha \gg 1$ alors le soliton présentera un grand nombre de particules avec une faible extension spatiale. En revanche dans la limite inverse où $\alpha \ll 1$, le soliton devient de plus en plus étendu et son comportement devient similaire à celui d'une onde linéaire.

Il a été montré dans [87] que :

- Si $\alpha \gg 1$, c'est-à-dire si dans l'énergie par particule du soliton (2.22), la partie cinétique $\frac{m}{2} V^2$ est beaucoup plus faible que la partie d'interaction $\frac{\hbar^2 N^2}{ma_1^2}$ ⁷, alors la vitesse V et le nombre de particules N restent à peu près constants.
- Dans la limite inverse où $\alpha \ll 1$, c'est-à-dire si l'énergie cinétique du soliton est beaucoup plus grande que son énergie d'interaction⁸ alors :
 - La vitesse V reste constante.
 - Le nombre de particule N du soliton décroît exponentiellement, sur une longueur caractéristique $l_{loc}(k^2) = 2 \frac{k^2}{D}$ avec $k = \frac{mV}{\hbar}$

⁶On a ici $T_j^{E,N} = 1 - R_j^{E,N}$ avec $R_j^{E,N}$ défini dans (3.37)

⁷C'est-à-dire un régime où les non-linéarités sont importantes.

⁸C'est-à-dire un régime où les non-linéarités sont faibles

Ainsi dans cette situation, il existe un seuil dans l'intensité des non-linéarités pour laquelle les effets de localisation s'annulent.

Voyons maintenant le cas du soliton sombre dans un milieu désordonné

3.4 Soliton sombre dans un condensat désordonné

Article 2 : Propagation of a Dark Soliton in a Disordered Bose-Einstein Condensate

On considère l'équation de Schrödinger répulsif en présence d'un potentiel externe désordonné :

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + [U(x) + g_{1D}|\psi|^2]\psi, \quad (3.46)$$

$$\text{avec } g_{1D} = \frac{\hbar^2}{m a_1}. \quad (3.47)$$

On considère comme potentiel désordonné $U(x)$, une série aléatoire de pics δ :

$$U(x) = g_{\text{imp}} \sum_n \delta(x - x_n), \quad (3.48)$$

où on considère que les x_n sont non-corrélés et uniformément distribués avec une densité moyenne n_{imp} :

$$\langle U(x) \rangle = g_{\text{imp}} n_{\text{imp}} \text{ avec} \quad (3.49)$$

$$g_{\text{imp}} = \frac{\hbar^2}{m b}, \quad (3.50)$$

et

$$\langle U(x_1)U(x_2) \rangle - \langle U(x_1) \rangle \langle U(x_2) \rangle = \left(\frac{\hbar^2}{m}\right)^2 D\delta(x_1 - x_2) \quad (3.51)$$

Nous avons dans la lettre qui suit établi l'équation différentielle qui modélise la propagation d'un soliton sombre dans un milieu désordonné. Pour cela, nous avons utilisé la théorie des perturbations, développée dans le premier article, que nous avons appliquée à une succession de pics δ vérifiée. Nous avons pu donner une solution analytique à cette équation dans la limite où la vitesse du soliton était proche de la vitesse du son.

La "profondeur" d'un soliton sombre étant corrélée avec sa vitesse, nous avons pu en déduire l'évolution de sa forme dans la région désordonnée.

Nous avons trouvé un comportement très différent de celui de l'onde linéaire ou du soliton brillant dans un milieu désordonné :

- Le soliton est accéléré jusqu'à la vitesse du son dans la région désordonnée puis disparaît.
- Sa décroissance n'est pas exponentielle mais algébrique.
- La distance parcourue par le soliton dans la région désordonnée avant de se désintégrer est indépendante de sa vitesse initiale.

Ainsi donc les non-linéarités dans cette situation ont un effet drastique sur les phénomènes de localisation : il n'y a pas de localisation exponentielle.

Dans la suite, nous présentons la lettre où ces résultats ont été obtenus.

Propagation of a Dark Soliton in a Disordered Bose-Einstein Condensate

Nicolas Bilas¹ and Nicolas Pavloff¹

¹Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, Université Paris Sud, bât. 100, F-91405 Orsay Cedex, France

(Received 25 May 2005; published 23 September 2005)

We consider the propagation of a dark soliton in a quasi-1D Bose-Einstein condensate in presence of a random potential. This configuration involves nonlinear effects and disorder, and we argue that, contrarily to the study of stationary transmission coefficients through a nonlinear disordered slab, it is a well-defined problem. It is found that a dark soliton decays algebraically, over a characteristic length which is independent of its initial velocity, and much larger than both the healing length and the 1D scattering length of the system. We also determine the characteristic decay time.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.130403

PACS numbers: 03.75.Lm, 05.60.Gg, 42.65.Tg

Phase coherent systems display wave mechanical properties distinct from those typically observed at macroscopic scale. In particular, transport in presence of disorder is strongly affected by interference effects, leading to weak or strong localization, as observed in many different fields (electronic or atomic physics, acoustics, electromagnetism). Our understanding of these effects have made great progresses over the last decades in the case of noninteracting linear waves. Some studies have considered the propagation of plane waves or bright solitons in a disordered region in the case of attractive interaction [see, e.g., the review [1] and the discussion below of the results of Ref. [2]], but almost nothing is known in the case of repulsive nonlinearity.

The field of Bose condensed atomic vapors allows new investigations of such phenomena in presence of repulsive or attractive interaction, in an intrinsically phase coherent system over which the experimental control is rapidly progressing. Such studies have begun with the observation of “fragmentation of the condensate” over a microchip [3]; random potentials have recently been engineered using an optical speckle pattern [4]; and it has also been proposed to implement disorder by using two different atomic species in an optical lattice [5].

In the present Letter, we study the transport properties of a quasi-one-dimensional (1D) Bose-Einstein condensate in presence of disorder and repulsive interaction. The configuration we study corresponds to the “1D mean field regime” [6], where the system is described by a 1D order parameter $\psi(x, t)$ depending on a single spatial variable: the coordinate x along the direction of propagation. $\psi(x, t)$ obeys the nonlinear Schrödinger equation

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + [U(x) + g|\psi|^2]\psi, \quad (1)$$

where $U(x)$ is the random potential and g an effective coupling constant which reads $g = 2\hbar\omega_{\perp}a$ in the case of particles experiencing an effective repulsive interaction characterized by the 3D s -wave scattering length a ($a > 0$), and a transverse harmonic confinement with pulsation

ω_{\perp} [7]. It is customary to define the oscillator length $a_{\perp} = (\hbar/m\omega_{\perp})^{1/2}$ and $a_1 = a_{\perp}^2/2a$ [$-a_1$ is the 1D scattering length [7]]. Denoting by n_{1D} a typical value of $|\psi(x, t)|^2$, the 1D mean field regime corresponds to a situation where $1 \ll n_{1D}a_1 \ll (a_1/a_{\perp})^2$. The first inequality ensures that the system does not get in the Tonks-Girardeau limit and the second that the transverse wave function is the ground state of the linear transverse Hamiltonian [6,8].

A particular issue specific to Eq. (1) is the very possibility to define a transmission coefficient. Since the equation is nonlinear, it is not possible in general to disentangle an incident and a reflected current in the region upstream the potential (in other words, a reflected atom will interact with the incident beam) [9]. A possible way for avoiding this problem is to change the transverse confining potential upstream the disordered potential so that, in this region, nonlinear effects become negligible [9]. However, even in this case, a technical difficulty arises because of multistability: several stationary solutions exist for a given input state [1,9]. Moreover, in the case of repulsive interaction we consider here, for extended enough disordered region, no stationary solution exists and the transmission coefficient can only be defined via a time average [10].

A way out of these difficulties consists in studying the propagation of a soliton in the system. This constitutes an intrinsically time-dependent problem, but the input and output states can be precisely characterized, and the transmission is simply defined by comparing the large time behaviors ($t \rightarrow \pm\infty$) of the solution. This route has been followed by Kivshar *et al.* [2] in the case of *attractive* nonlinearity ($g < 0$). In this case, a solitary wave is a bright soliton, characterized by two parameters: its velocity V and the number of particles N inside the soliton. The disordered potential was taken as

$$U(x) = g_{\text{imp}} \sum_n \delta(x - x_n), \quad \text{where } g_{\text{imp}} = \frac{\hbar^2}{mb}. \quad (2)$$

$U(x)$ describes a series of static impurities with equal intensity and random positions x_n . The x_n 's are uncorrelated and uniformly distributed with mean density n_{imp} . In

this case $\langle U(x) \rangle = g_{\text{imp}} n_{\text{imp}}$ and $\langle U(x_1)U(x_2) \rangle - \langle U(x_1) \rangle \langle U(x_2) \rangle = (\hbar^2/m)^2 D \delta(x_1 - x_2)$, with $D = n_{\text{imp}}/b^2$. From what is known in the case of linear waves, this type of potential is typical insofar as localization properties are concerned. In the weakly nonlinear regime $mV^2/2 \gg \hbar^2 N^2/(ma_1^2)$, it was found in Ref. [2] that the soliton velocity remains approximately constant in the disordered region, whereas N shows an exponential decay similar to what occurs for a linear wave packet. In the opposite strongly nonlinear regime, it was found that the soliton behaves very differently, leading asymptotically to a configuration where both N and V become practically constant (independent of x).

In the present Letter, we consider the case of *repulsive* nonlinearity where the solitary waves are dark solitons. We find that the propagation of these solitons in a disordered potential is quite peculiar for the two following reasons: first, the strongly and weakly nonlinear cases cannot be considered as distinct because, in a given system, the number of particles forming the soliton cannot evolve independently from its velocity; and second, a dark soliton has a velocity bounded by the velocity of sound in the system. As a result, dark solitons behave differently from the bright ones studied in Ref. [2]: initially rather “non-linear” solitons decay algebraically (and not exponentially), becoming eventually “linear.” Besides, the length covered by the soliton in the disordered region is independent of its initial velocity.

Let us thus consider a dark soliton with initial velocity V , incident from the left on a disordered potential of type (2), with $x_0 = 0 < x_1 < \dots$. This situation is illustrated in Fig. 1. The soliton is characterized by two parameters, its velocity V and the asymptotic background density $n_\infty = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |\psi(x, t)|^2$. Instead of n_∞ , one can equivalently employ the chemical potential $\mu = gn_\infty$, the healing length $\xi = (a_1/n_\infty)^{1/2}$, or the speed of sound $c = \hbar/m\xi$. A dark soliton has a velocity $V \leq c$, an energy

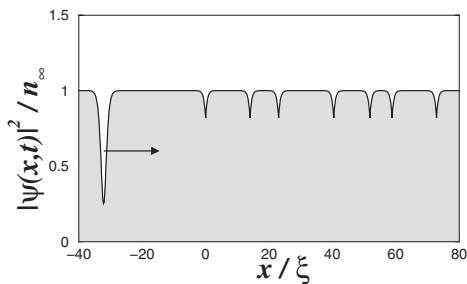


FIG. 1. Density profile of a dark soliton incident with velocity $V = c/2$ on pointlike repulsive obstacles with random positions corresponding to a potential $U(x)$ given in Eq. (2), with $\xi/b = 0.2$ and $n_{\text{imp}}\xi \approx 0.1$. The arrow represents the direction of propagation of the soliton.

$$E_{\text{sol}} = \frac{4}{3} \mu \left(\frac{a_1}{\xi} \right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{3/2}, \quad (3)$$

and consists in a density trough of typical extension $\xi(1 - V^2/c^2)^{-1/2}$, corresponding to a number of missing particles $\Delta N = 2(a_1/\xi)(1 - V^2/c^2)^{1/2}$. In the 1D mean field regime where (1) holds, $a_1 \gg \xi$ and ΔN is typically a large number, except in the limit where V is close to c . This occurs at velocities around $V_{\text{crit}} = c[1 - (\xi/2a_1)^2]^{1/2}$. At such velocities $\Delta N \sim 1$ and the soliton has an extension $\sim a_1$.

We consider the case where the average separation between the impurities is much larger than the healing length ($n_{\text{imp}}\xi \ll 1$) and the initial velocity of the soliton is not close to c . In this case, the scattering of the soliton from the impurities can be treated as a sequence of independent events. When the soliton encounters a single obstacle, it radiates phonons which form two counter propagating wave packets moving at velocity c . Accordingly, its energy decreases by an amount $\delta E_{\text{sol}} = -E_{\text{rad}}^+ - E_{\text{rad}}^-$, where E_{rad}^+ (E_{rad}^-) is the forward (backward) emitted energy. It was found in Ref. [11] that

$$E_{\text{rad}}^\pm = \mu \left(\frac{\xi}{b} \right)^2 F^\pm(V/c), \quad (4)$$

where $F^\pm(v)$ is a dimensionless function defined for $v = V/c \in [0, 1]$ as

$$F^\pm(v) = \frac{\pi}{16v^6} \int_0^{+\infty} dy \frac{y^4 (-v \pm \sqrt{1+y^2/4})^2}{\sinh^2(\frac{\pi y \sqrt{1+y^2/4}}{2v\sqrt{1-v^2}})}. \quad (5)$$

Equation (4) is a perturbative result valid in the limit $b \gg \xi$ and $V^2 \gg c^2(\xi/b)$. The first inequality ensures that the impurity only weakly perturbs the static background and the second that the scattering of the soliton by the impurity can be treated perturbatively. The soliton having lost energy during the collision, its velocity changes by an amount $\delta V = c \delta v$ which, from (3), is related to δE_{sol} via $v \delta v (1 - v^2)^{-1} = -\frac{1}{3} \delta E_{\text{sol}}/E_{\text{sol}}$.

Since $n_{\text{imp}}\xi \ll 1$, one can go to the continuous limit considering the successive collisions as a sequence of random uncorrelated events. Over a length δx the solitons will experience $n_{\text{imp}}\delta x$ such collisions. This leads to the following differential equation:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{4x_0} \frac{F^+(v) + F^-(v)}{v\sqrt{1-v^2}}, \quad (6)$$

where $x_0 = a_1 b^2 / (\xi^3 n_{\text{imp}}) = a_1 / (D \xi^3)$. Equation (6) can be solved analytically in the high velocity regime, when $v \rightarrow 1$. In this limit, $F^+(v) + F^-(v) \approx \frac{4}{15} (1 - v^2)^{5/2}$ and, for a soliton of initial velocity V_{init} one obtains

$$\frac{V(x)}{c} = \left\{ 1 - \frac{1 - (V_{\text{init}}/c)^2}{1 + [1 - (V_{\text{init}}/c)^2] \frac{2x}{15x_0}} \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

We compare in Fig. 2 the results of this approximate solution with the numerical solution of Eq. (6) in the cases $V_{\text{init}}/c = 0.75, 0.5,$ and 0.25 . The agreement is very good, even for initial velocities which are not close to c .

The soliton is accelerated as it progresses through the disordered region (as seen in Fig. 2) because it radiates energy at each collision with an impurity. This increased velocity after a loss of energy is a typical feature of dark solitons which can be considered as particles with a negative kinetic mass which decreases with increasing energy [12] [see Eq. (3)]. One also notices in Fig. 2 that V saturates when it gets close to c , meaning that, in this regime, the rate of energy loss decreases. The reason for this phenomenon is that a dark soliton cannot have a velocity higher than c . As a result, when its velocity reaches this upper bound, the soliton cannot lose a large fraction of its energy, because this would lead, after the collision, to an unphysical value of V (larger than c). This phenomenon has an important consequence on the maximum distance L over which the soliton can travel in the disordered region. As seen in Fig. 2, L is very large and seems independent from the initial velocity of the soliton. In order to get a quantitative evaluation, we define L as being the length after which the soliton is a trough containing only one particle, i.e., the velocity $V(L)$ in Eq. (7) reaches the value V_{crit} . In this limit the soliton can no longer be detected by standard imaging techniques, and for all practical purposes one can consider that it has totally decayed. From (7) one obtains

$$L = \frac{15x_0}{2} \left(\frac{2a_1}{\xi} \right)^2 = 30a_1 \frac{(a_1/\xi)^2}{D\xi^3}. \quad (8)$$

This confirms what was inferred from Fig. 2: a slow soliton will initially decay more rapidly than a fast one and altogether, the distance over which solitons can travel before completely decaying is independent of their initial velocity. As expected, L decreases for increasing disorder, the effect of the disorder being measured by the dimensionless parameter $D\xi^3$, i.e., by the two points correlation function of the random potential. Irrespective of the value of the parameter $D\xi^3$, we remark that L is large compared with a_1 , since in the 1D mean field regime $a_1 \gg \xi$. Hence, a dark soliton covers quite a large distance in the disordered region before decaying.

The distance L is covered in a time τ which we now evaluate. It is important to realize that V is not the average velocity of the soliton, but its velocity between two obstacles: in vicinity of an impurity, the velocity of the soliton decreases if $g_{\text{imp}} > 0$ and increases if $g_{\text{imp}} < 0$. As a result, the asymptotic position of the soliton is shifted compared to what it would be in absence of obstacle. In the case of a single impurity, this shift Δ can be quite accurately evaluated by means of the ‘‘effective potential theory’’ as being [11]

$$\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - U_{\text{eff}}(x)/mV^2}} \right], \quad (9)$$

where U_{eff} is an effective potential which reads in the case of a pointlike impurity $U_{\text{eff}}(x) = \frac{g_{\text{imp}}}{2\xi} \cosh^{-2}(x/\xi)$. In the limit $V^2 \gg c^2(\xi/b)$ where Eq. (4) holds, the shift reads $\Delta \approx -c^2\xi^2/(2bV^2)$. In the presence of multiple impurities, going to the continuous limit, one obtains that during a time δt the soliton covers a distance $\delta x = V\delta t + (n_{\text{imp}}\delta x)\Delta$. Combining this relation with Eq. (6) one obtains a differential equation allowing to determine $v = V/c$ as a function of t :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{c}{4x_0} \frac{F^+(v) + F^-(v)}{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{1 - n_{\text{imp}}\Delta}. \quad (10)$$

In the limit $v \rightarrow 1$, this equation admits the analytical solution

$$t = \frac{15x_0}{c} \left\{ G\left(v, \frac{n_{\text{imp}}\xi^2}{2b}\right) - G\left(\frac{V_{\text{init}}}{c}, \frac{n_{\text{imp}}\xi^2}{2b}\right) \right\}, \quad (11)$$

where

$$G(v, \alpha) = -\frac{\alpha}{v} + \frac{1+3\alpha}{4} \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + \frac{1+\alpha}{2} \frac{v}{1-v^2} \\ \underset{v \rightarrow 1}{\approx} \frac{1+\alpha}{4(1-v)}. \quad (12)$$

We compared this approximate result with the numerical solution of (10) where Δ was evaluated through (9), and found that the accuracy of (11) is always very good, even

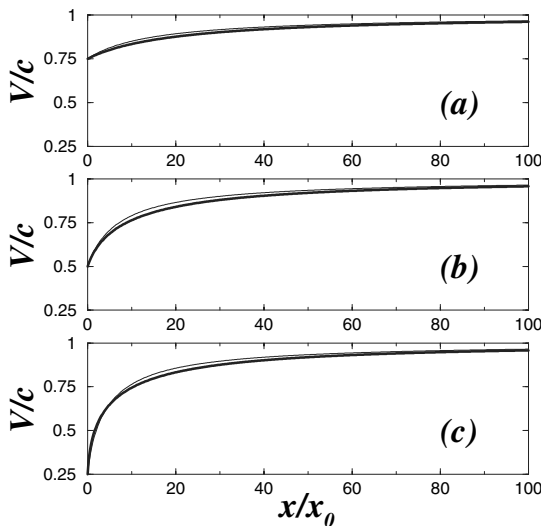


FIG. 2. Evolution of the velocity V of a dark soliton as a function of the distance x traveled in the disordered region. In each plot, the thick line corresponds to the numerical solution of Eq. (6) and the thin line to Eq. (7). Case (a) corresponds to an initial velocity $V_{\text{init}} = 3c/4$, case (b) to $V_{\text{init}} = c/2$, and case (c) to $V_{\text{init}} = c/4$.

for initial velocities not close to c [as was also the case for the approximate expression (7)].

The decay time τ of the soliton is the time at which $v = V_{\text{crit}}/c \approx 1 - \frac{1}{2}(\xi/2a_1)^2$:

$$\tau = \frac{L}{c} \left(1 + \frac{n_{\text{imp}} \xi^2}{2b} \right). \quad (13)$$

In this expression—as in (8)—we neglected a corrective term depending of the initial velocity, smaller by a factor $(\xi/a_1)^2$ than the leading term. τ is proportional to L/c , with a slight modification due to the shift induced at each scattering [13]: repulsive obstacles ($b > 0$) lead to an increased decay time since the soliton covers the distance L slightly more slowly than in the case of attractive obstacles.

Equation (13) can be given a simple physical interpretation (in a less rigorous setting) in the framework of the “effective potential approximation” [11]. In this approximation, solitons are considered as classical particles of mass $2m$ evolving in a potential U_{eff} . One thus has $\langle m\dot{x}^2 + U_{\text{eff}}(x) \rangle = \langle mV^2(x) \rangle$. The mean value of U_{eff} is the same as the one of U [14] and from Fig. 2, one sees that at leading order it is sensible to approximate $\langle mV^2(x) \rangle$ by $mc^2 = \mu$. One thus obtains $\langle \dot{x}^2 \rangle \approx c^2(1 - \langle U(x) \rangle / \mu)$. Finally, τ can be evaluated through the formula

$$\tau = \frac{L}{\langle \dot{x} \rangle} \approx \frac{L}{\langle \dot{x}^2 \rangle^{1/2}} \approx \frac{L}{c} \left(1 + \frac{\langle U(x) \rangle}{2\mu} \right), \quad (14)$$

which is identical to (13). Since formulas (8) and (14) depend only on simple characteristics of the random potential (the average and the two points correlation function), we expect them to be of very general validity, poorly affected by the specific potential present in the disordered region.

A final point to clarify is the effect of the random potential on the occurrence of superfluidity and Bose-Einstein condensation; i.e., is Eq. (1) truly applicable? In the strong disorder limit, a quantum phase transition occurs at $T = 0$ leading to a (nonsuperfluid) Bose glass phase [15] where the description of the system with a single order parameter $\psi(x, t)$ is inappropriate. However, in the case we consider here of an atomic vapor described as a weakly interacting Bose gas, it has been shown that a small amount of disorder does not drastically alter the properties of the system, but merely decreases the condensate and the superfluid fraction [16]. More precisely, based on the evaluations presented in Ref. [17] one can show that this effect is negligible provided $n_{\text{imp}} \xi^3 / b^2 \ll 1$, which is the case in the present study.

In conclusion, we have presented a description of the motion of a dark soliton in a disordered region. The soliton radiates energy when it encounters an obstacle. The repulsion between the particles has important consequences on the propagation of the dark soliton, whose salient features

are all at variance with the one expected in the case of a linear wave packet or of a bright soliton: (i) the soliton is *accelerated* to the velocity of sound and disappears, (ii) its decay is algebraic, and (iii) the characteristic decay length and decay time are independent of the initial velocity of the soliton.

These results are generic and apply to many different fields (among which, optics in nonlinear fibers with positive group velocity dispersion) but the most promising experimental configurations seems to be achievable for a Bose condensed atomic vapor, either in a corrugated magnetic guide over a microchip [3], or in an elongated trap in presence of an optical speckle pattern [4].

We acknowledge support from CNRS and Ministère de la Recherche (Grant ACI Nanoscience 201). Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques is Unité Mixte de Recherche de l'Université Paris XI et du CNRS, UMR 8626.

-
- [1] S. A. Gredeskul and Y. S. Kivshar, Phys. Rep. **216**, 1 (1992).
 - [2] Y. S. Kivshar, S. A. Gredeskul, A. Sánchez, and L. Vázquez, Phys. Rev. Lett. **64**, 1693 (1990).
 - [3] J. Fortágh, H. Ott, S. Kraft, A. Günther, and C. Zimmermann, Phys. Rev. A **66**, 041604(R) (2002); A. E. Leanhardt *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 040401 (2002); J. Estève *et al.*, Phys. Rev. A **70**, 043629 (2004).
 - [4] J. E. Lye *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 070401 (2005); D. Clément *et al.*, cond-mat/0506638.
 - [5] U. Gavish and Y. Castin, Phys. Rev. Lett. **95**, 020401 (2005).
 - [6] C. Menotti and S. Stringari, Phys. Rev. A **66**, 043610 (2002).
 - [7] M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).
 - [8] D. S. Petrov, D. M. Gangardt, and G. V. Shlyapnikov, J. Phys. IV (France) **116**, 5 (2004).
 - [9] P. Leboeuf, N. Pavloff, and S. Sinha, Phys. Rev. A **68**, 063608 (2003).
 - [10] T. Paul, P. Leboeuf, N. Pavloff, K. Richter, and P. Schlagheck, cond-mat/0509446.
 - [11] N. Bilas and N. Pavloff, cond-mat/0501053 [Phys. Rev. A (to be published)].
 - [12] P. O. Fedichev, A. E. Muryshev, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **60**, 3220 (1999).
 - [13] The modification is small because $n_{\text{imp}} \xi^2 / b \ll 1$.
 - [14] This is because U_{eff} is the convolution of U with a normalized function; see [11].
 - [15] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **40**, 546 (1989).
 - [16] K. Huang and H. F. Meng, Phys. Rev. Lett. **69**, 644 (1992); S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, Phys. Rev. B **49**, 12938 (1994).
 - [17] G. E. Astrakharchik and L. P. Pitaevskii, Phys. Rev. A **70**, 013608 (2004).

3.5 Résumé de la situation

Dans ces deux chapitres, nous avons étudié la dynamique des solitons sombres :

- Nous avons montré comment via une description variationnelle nous pouvons étudier l'évolution des paramètres du soliton dans le cas de la diffusion par un obstacle fini.
- Nous avons ensuite présenté une approche perturbative permettant de décrire la diffusion d'un soliton sombre par un obstacle de taille fini (qui tient en compte, à l'inverse de la méthode variationnelle, à la fois de la partie solitonique et radiative) .
- Nous avons ensuite généralisé notre méthode perturbative aux cas d'une succession aléatoire d'obstacle en pic delta.

Nous avons ainsi pu soulever le caractère original de la physique des solitons sombres : nous avons vu que les interactions ont un effet drastique sur les phénomènes de localisation et que le comportement des solitons sombres ne ressemble en rien à ceux des solitons brillants ou des ondes linéaires.

Dans la suite, nous allons nous concentrer sur les radiations émises lors de la diffusion du soliton par l'obstacle, pour cela, nous étudierons la propagation d'excitations élémentaires dans un condensat de Bose désordonné et les effets de localisation qui en découle.

Chapitre 4

Localisation d'une excitation élémentaire

4.1 Introduction

Les récents progrès expérimentaux quant à la manipulation d'atomes froids couplés aux propriétés des condensats de Bose-Einstein, (c'est-à-dire leur cohérence de phase et le fait que les interactions y soient faciles à traiter) ont permis l'essor et l'étude des phénomènes de transport cohérent dans les condensats de Bose-Einstein ¹.

Or comme rappelé dans le précédent chapitre, beaucoup d'études se sont penchées sur le rôle du désordre sur la propagation de différents types ondes : hydrodynamiques, acoustiques Ainsi la condensation de Bose a ouvert un nouveau champs d'étude quant au rôle du désordre sur la propagation d'onde de matière.

De ce fait les recherches sur les condensats de Bose-Einstein en présence de désordre sont devenues un point important de la physique des atomes froids [114, 115, 116, 117, 118].

En effet ces phénomènes de transport cohérent sont grandement affectés par la présence de désordre qui alors conduit à l'apparition de phénomènes de localisation présentés dans le chapitre précédent.

Dans la suite, nous allons étudier l'influence des interactions sur la localisation d'Anderson en considérant la propagation d'excitations élémentaires² dans un condensat de Bose-Einstein quasi-unidimensionnel en présence de désordre.

Dans ce type de situation, les excitations sont localisées autour d'un point avec une enveloppe qui décroît exponentiellement sur une longueur caractéristique appelée longueur de localisation. Il est assez aisé d'obtenir avec des raisonnements d'ordre général le comportement

¹On peut citer d'ailleurs comme phénomènes nouveaux et intéressants qui sont apparus grâce aux développement de ce nouveaux champs d'étude :

- Les interférences d'onde matière [19, 20].
- La transmission solitonique d'un condensat sur une barrière [18]
- La brisure de la superfluidité d'un condensat au travers d'un obstacle [16, 50, 51].
-

²Les excitations sont des faibles déformations de la densité du condensat que l'on traite dans un cadre linéaire.

qualitatif de la longueur de localisation.

Comme on l'a vu, le spectre en énergie des excitations est le suivant :

$$(\hbar\omega)^2 = \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m}\right)^2 + \hbar^2 q^2 c^2, \quad (4.1)$$

(où c est la vitesse du son dans le condensat).

- A basse énergie, on a un spectre en énergie de type phonon. Or le problème sur la propagation de phonons dans une région désordonnée a déjà été étudié, il en est ressorti que la longueur de localisation pour des phonons diverge en $\frac{1}{\omega^2}$ [124].
- A haute énergie, on a un spectre en énergie d'une particule libre. On s'attend alors que la longueur de localisation soit proportionnelle à ω [123].
- Enfin l'énergie typique du système étant le potentiel chimique μ , on s'attend à ce que ces deux régimes se recoupent pour $\hbar\omega \sim \mu$

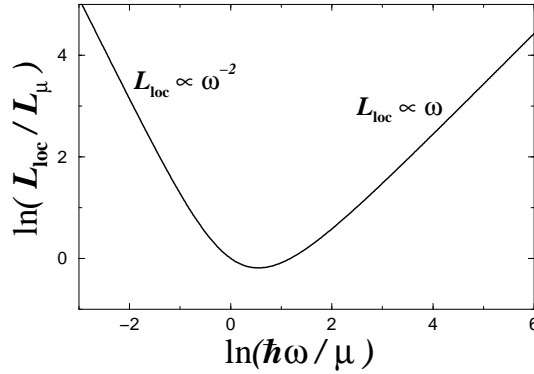


Fig. 4.1 : Ce graphique représente la longueur de localisation L_{loc} en fonction de l'énergie $\hbar\omega$ d'une excitation élémentaire dans une échelle logarithmique (où L_{μ} représente la longueur de localisation pour une énergie $\hbar\omega = \mu$)

Comme on le verra dans le troisième article présenté dans ce manuscrit, en développant deux approches l'une basée sur les équations hydrodynamiques, l'autre sur la théorie de Bogoliubov, nous avons pu déterminer les propriétés de la longueur de localisation d'excitation se propageant dans un condensat de Bose désordonné, qui vérifie bien les propriétés ci-dessus.

Le plan de chapitre sera le suivant :

- Via le formalisme de Bogoliubov, nous calculerons d'abord le coefficient de transmission d'une excitation élémentaire dans un condensat de Bose-Einstein sur un pic δ . Nous présenterons alors la méthode des matrices de transfert qui permet de généraliser ce calcul à une succession aléatoire de pic δ , calcul qui sera quant à lui présenté dans le dernier article de ce manuscrit et qui permet de déterminer la longueur de localisation pour toute énergie.
- Ensuite, nous présenterons la méthode dite du formalisme de phase qui permet de calculer, à partir des équations hydrodynamiques via une équation de Fokker-Planck ³, la longueur de localisation à basse énergie (plus précisément pour $\hbar\omega \ll \mu$).

³La dernière annexe sera consacrée à l'équation de Fokker-Planck, en particulier, sur la manière de dériver une équation de Fokker-Planck à partir d'une équation stochastique.

4.2 Diffusion d'une excitation élémentaire sur un pic δ

La méthode utilisée pour traiter ce problème est une application de la théorie de Bogoliubov.

Reprenons ici les équations de Bogoliubov dans un cas uni-dimensionnel :

$$\hbar\omega u(x) = [H_0 - \mu + 2g_{1D}\psi^2(x)] u(x) + g_{1D}\psi^2(x)v(x), \quad (4.2)$$

$$-\hbar\omega v(x) = [H_0 - \mu + 2g_{1D}\psi^2(x)] v(x) + g_{1D}\psi^2(x)u(x), \quad (4.3)$$

avec :

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V_{\text{ext}}(x), \quad (4.4)$$

$$V_{\text{ext}} = \lambda \mu \xi \delta(x), \quad (4.5)$$

$$\text{avec } \lambda > 0, \quad (4.6)$$

où λ est un paramètre sans dimension.

La densité du condensat est déformée au voisinage de l'obstacle, sa fonction d'onde s'écrit alors :

$$\psi(x) = \sqrt{n_0} \tanh(|x/\xi| + a), \quad (4.7)$$

$$\text{avec } a = \frac{1}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{2}{\lambda} \right). \quad (4.8)$$

Loin de l'obstacle, le condensat n'est pas déformé et une excitation élémentaire d'énergie ω sera alors décrit par $(u(x), v(x)) = \exp(iqx) (u_w, v_w)$, où les constantes (u_w, v_w) sont reliés d'après le système d'équation (4.2) par :

$$\left(\frac{\xi^2 q^2}{2} + 1 - \frac{\hbar\omega}{\mu} \right) u_w + v_w = 0, \quad (4.9)$$

et avec ω et q reliés par (4.1) :

Or au voisinage de l'obstacle, la densité du condensat n'est plus constante et la forme des fonctions $u(x)$ et $v(x)$ devient plus compliquée, mais on peut montrer qu'elles s'écrivent [80] :

$$\Xi_q(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = e^{iqx} \begin{pmatrix} \left(\frac{q\xi}{2} + \frac{\omega}{c_0q} + i \tanh\left(\frac{x}{\xi} + a\right) \right)^2 \\ \left(\frac{q\xi}{2} - \frac{\omega}{c_0q} + i \tanh\left(\frac{x}{\xi} + a\right) \right)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Usuellement on travaille à q fixé, ici nous allons traiter le problème inversement en considérant ω fixé, ce qui donne quatre valeurs possibles pour q , deux valeurs réelles et deux imaginaires correspondantes à des ondes évanescentes.

On considère que les systèmes incidents et sortants ⁴s'écrivent donc :

$$\Xi^-(x) = A_{\text{inc}} \Xi_q^*(-x) + A_{\text{ref}} \Xi_q(-x) + A_{\text{eva-}} \Xi_{ip}(-x), \quad (4.11)$$

⁴ $\Xi^-(x)$ et $\Xi^+(x)$ sont solutions de (4.2) pour respectivement $x < 0$ et $x > 0$.

où A_{inc} , A_{ref} et A_{eva-} représentent respectivement l'onde incidente, réfléchie et évanescence qui n'explose pas en $-\infty$.

$$\Xi^+(x) = A_{tra} \Xi_q(x) + A_{eva+} \Xi_{ip}(x), \quad (4.12)$$

où A_{tra} , et A_{eva+} représentent respectivement l'onde transmise, et évanescence qui n'explose pas en $+\infty$.

Les quantités p et q sont définies par :

$$p = \frac{\sqrt{2}}{\xi} \left[\sqrt{1 + (\hbar\omega/\mu)^2} + 1 \right]^{1/2}, \quad (4.13)$$

$$q = \frac{\sqrt{2}}{\xi} \left[\sqrt{1 + (\hbar\omega/\mu)^2} - 1 \right]^{1/2}. \quad (4.14)$$

En écrivant les conditions de raccordement :

$$\Xi^-(0) = \Xi^+(0), \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{d\Xi^+}{dx} \right)_0 - \left(\frac{d\Xi^-}{dx} \right)_0 = 2\lambda \Xi(0), \quad (4.16)$$

on peut grâce au système d'équations (4.15) et (4.16) obtenir un système de quatre équations pour A_{ref} , A_{tra} , A_{eva-} et A_{eva+} en fonction de A_{inc} qui conduit pour l'amplitude de transmission t et de réflexion r à :

$$t = \frac{A_{tra}}{A_{inc}} = \frac{1}{2} \left[\frac{2 + iq\xi \tanh(2a)}{-2 + iq\xi \tanh(2a)} + \frac{\Delta}{\Delta^*} \right], \quad (4.17)$$

$$r = \frac{A_{ref}}{A_{inc}} = \frac{1}{2} \left[\frac{2 + iq\xi \tanh(2a)}{-2 + iq\xi \tanh(2a)} - \frac{\Delta}{\Delta^*} \right], \quad (4.18)$$

où

$$\Delta = 4 \left(\frac{\hbar\omega}{\mu} + 2i \tanh^2 a \right) \sqrt{\left(\frac{\hbar\omega}{\mu} \right)^2 + 1} \quad (4.19)$$

$$2\xi(p + iq) \tanh \left[a \left[2 \frac{\hbar\omega}{\mu} + i(1 + \tanh^2 a) \right] \right].$$

On peut enfin déterminer différents régimes asymptotiques pour les coefficients de transmission $T = |t|^2$:

– quand $\omega \rightarrow \infty$:

$$T \simeq 1 - \frac{\lambda^2 \mu}{2\hbar\omega}, \quad (4.20)$$

– quand $\omega \rightarrow 0$:

$$T \simeq 1 - \left(\frac{\hbar\omega^2}{2\mu} \right)^2 \left[1 - \frac{2}{\tanh a} + \tanh(2a) \right]^2, \quad (4.21)$$

et si de plus $\lambda \rightarrow 0$ alors

$$T \simeq 1 - \left(\frac{\lambda \hbar \omega}{2\mu} \right)^2, \quad (4.22)$$

– enfin pour $\lambda \ll 1$ et quelle que soit la pulsation ω

$$T \simeq 1 - \frac{(\lambda \xi q/2)^2}{1 + (\hbar \omega/\mu)^2}. \quad (4.23)$$

Dans notre article, nous avons généralisé ceci à une succession aléatoire d'obstacles. Pour cela nous avons développé une technique basée sur une approche de matrice de transfert.

Dans le prochain paragraphe, nous allons présenter la notion de matrice de transfert, quant aux résultats obtenus, ils seront présentés dans le dernier article de ce manuscrit.

4.3 Méthode des matrices de transfert

La "philosophie" de cette méthode revient à supposer que l'on puisse découper le système en "différentes couches" dans lesquelles les propriétés du systèmes sont faciles à évaluer.

Considérons un potentiel $V(x)$ non nul sur un intervalle $[0, L]$ et nul en dehors et une onde plane incidente sur ce potentiel : c'est-à-dire les situations 1 et 2 suivantes⁵ :

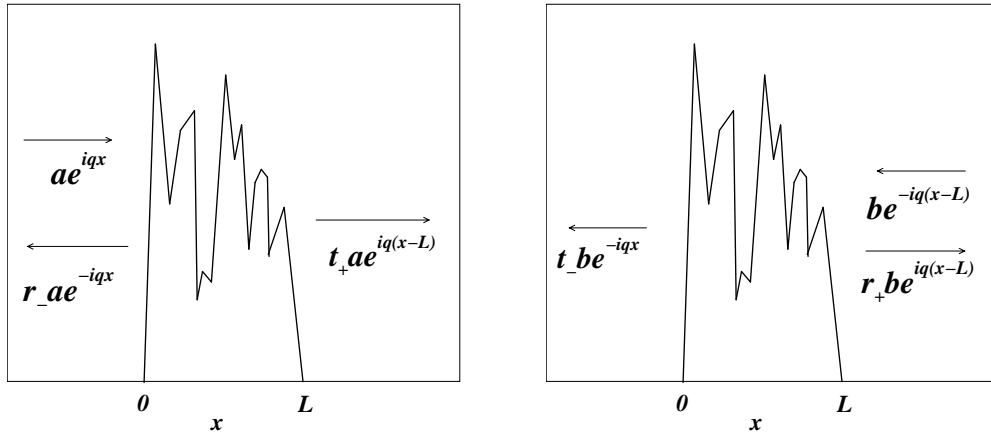


Fig. 4.2a : Situation 1 : l'onde est incidente depuis la gauche sur la région désordonnée.

Fig. 4.2b : Situation 2 : l'onde est incidente depuis la droite sur la région désordonnée.

La situation complexe conjuguée correspondant elle à :

⁵La situation que l'on considérera dans l'article est plus compliquée, nous ne considérons pas des ondes planes mais des vecteurs colonnes. Il n'empêche que l'idée de base est la même dans les deux situations, le point important étant que le complexe conjugué d'une onde plane est une onde qui se propage en sens inverse ce qui sera vrai dans notre cas aussi.

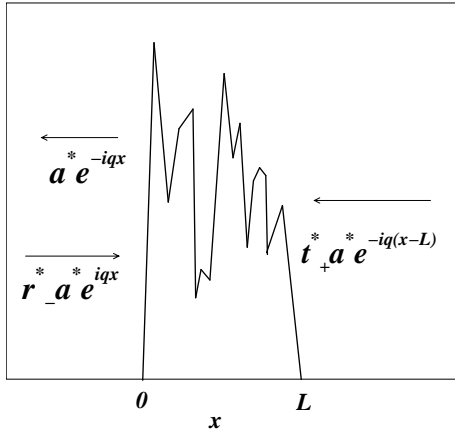


Fig. 4.3a : Situation 1 conjuguée.

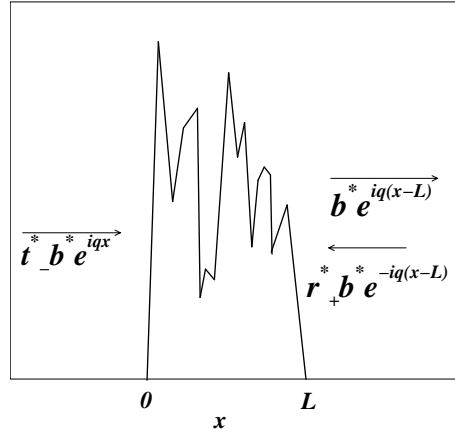


Fig. 4.3b : Situation 2 conjuguée.

Nous allons ici montrer comment l'on peut déterminer la matrice de transfert de ce système donnant la valeur des coefficients de sortie en fonction des coefficients d'entrée.

Sur la figure 4.3a, en considérant $a^{*}e^{iqx}$ comme une onde de "sortie" du système et les deux autres comme des ondes d'entrées, on a :

$$a^{*} = t_{-}t_{+}^{*}a^{*} + r_{-}r_{-}^{*}a^{*}, \quad (4.24)$$

$$0 = t_{+}r_{-}^{*}a^{*} + r_{+}t_{+}^{*}a^{*}. \quad (4.25)$$

La première équation donne :

$$t_{-}t_{+}^{*} + |r_{-}|^2 = 1, \quad (4.26)$$

ce qui donne $t_{-} = t_{+} = t$, la seconde donne quant à elle :

$$r_{+} = -\frac{t}{t^{*}} r_{-}^{*}. \quad (4.27)$$

Notons à présent $r = r_{-}$ et donc $r_{+} = -\frac{tr^{*}}{t^{*}}$

Considérons désormais la situation suivante :

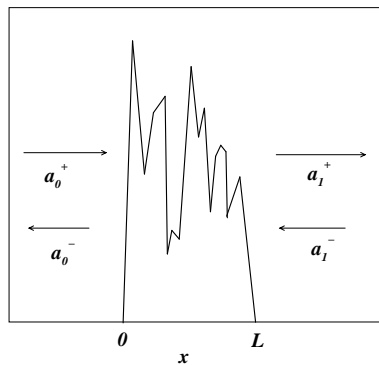


Fig. 4.4 : Les entrées du système correspondent à a_0^{+} et a_1^{-} et les sorties à a_0^{-} et a_1^{+} .

Dans ce cas il vient clairement :

$$a_1^+ = ta_0^+ - \frac{tr^*}{t^*} a_1^-, \quad (4.28)$$

$$a_0^- = ta_1^- + r a_0^+. \quad (4.29)$$

On définit la matrice de transfert comme la matrice qui permet de relier les quantités a_1^\pm aux quantités a_0^\pm .

Il est immédiat de voir :

$$a_1^+ = \frac{1}{t^*} a_0^+ - \frac{r^*}{t^*} a_0^-, \quad (4.30)$$

$$a_1^- = \frac{1}{t} a_0^- - \frac{r}{t} a_0^+, \quad (4.31)$$

et la matrice de transfert s'écrit clairement :

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^*} & -\frac{r^*}{t^*} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Un autre point important est de déterminer la matrice de transfert dans le cas de la propagation libre entre deux points x_1 et x_2 .

Dans une telle situation, on a :

$$r = 0, \quad (4.33)$$

$$t = e^{iq(x_2-x_1)} = e^{iqL}, \quad (4.34)$$

où $L = x_2 - x_1$

Ce qui correspond finalement à la matrice de transfert suivante pour la propagation libre sur une distance L

$$T_0(L) = \begin{pmatrix} e^{+iqL} & 0 \\ 0 & e^{-iqL} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Dans l'article, nous avons appliqué cette méthode à la propagation d'excitations élémentaires dans un condensat de Bose-Einstein désordonné. Le coefficient de transmission total sur N pics est obtenu en multipliant N matrices de transmission ⁶ et $N - 1$ matrices de propagation.

4.4 La méthode du formalisme de phase

La méthode du formalisme de phase a été développée par Benderskii et Pastur en 1970 [121]⁷. Elle permet d'étudier les propriétés de localisation des systèmes uni-dimensionnels.

Dans le paragraphe sur les équations hydrodynamiques, nous avons vu que :

⁶Les coefficients de transmission et de réflexion sont ceux obtenus dans le cas de la diffusion d'une excitation élémentaire sur un pic δ .

⁷Le lecteur pourra aussi trouver une présentation détaillée de la méthode dans [122] et [123].

– L'équation vérifiée par les excitations dans le régime de champ moyen 1D s'écrit :

$$\partial_t^2 \delta n(x, t) = \partial_x [c^2(x) \partial_x \delta n(x, t)], \quad (4.36)$$

ce qui en prenant $\delta n(x, t) = \delta n(x) e^{-i\omega t}$ conduit à :

$$-\omega^2 \delta n(x) = \partial_x [c^2(x) \partial_x \delta n(x)]. \quad (4.37)$$

– La définition de la vitesse du son (1.163) combinée à l'approximation de densité locale (1.161) :

$$\epsilon(n_0(x)) + V(x) = \mu, \quad (4.38)$$

avec $\epsilon(n_0(x)) = 2\pi\hbar a n_0$ et où $n_0(x)$ représente la densité à l'équilibre, permet d'écrire pour la vitesse du son :

$$m c^2(x) + V(x) = \mu. \quad (4.39)$$

Le potentiel désordonné vérifie quant à lui :

$$\langle V(x) \rangle = 0, \quad (4.40)$$

$$\langle V(x)V(0) \rangle = \left(\frac{\hbar^2}{m}\right)^2 D \delta(x). \quad (4.41)$$

Dans l'hypothèse où l'échelle typique de $V(x)$ est petite par rapport à μ , on peut alors écrire :

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{\omega}{c_0} \left(1 + \frac{V(x)}{\mu}\right) \beta(x) \quad (4.42)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{\omega}{c_0} \alpha(x) \quad (4.43)$$

où c_0 est la vitesse du son dans le système non perturbé⁸ et où les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont définies par :

$$\alpha(x) = \frac{\delta n(x)}{n^*}, \quad (4.44)$$

$$\beta(x) = -\frac{m c^2}{\hbar \omega} \frac{\xi}{n^*} \frac{d\delta n}{dx}, \quad (4.45)$$

(où n^* est une valeur typique de $\delta n(x)$ mais qui ne joue aucun rôle dans la suite puisque l'équation (4.37) vérifiée par δn est linéaire).

En l'absence de potentiel, il est clair que les solutions de (4.42) sont de la forme :

$$\alpha(x) = \cos\left(\frac{\omega}{c_0} x\right), \quad (4.46)$$

$$\beta(x) = \sin\left(\frac{\omega}{c_0} x\right). \quad (4.47)$$

En présence du désordre, on va donc chercher des solutions sous la forme

⁸Elle est égale à $\frac{\mu}{m}$

$$\alpha(x) = r(x) \cos(\theta(x)), \quad (4.48)$$

$$\beta(x) = r(x) \sin(\theta(x)). \quad (4.49)$$

On définit alors la longueur de localisation l_{loc} par :

$$\frac{1}{l_{loc}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\langle \ln r(x) \rangle}{x}. \quad (4.50)$$

L'expression (4.50) peut se réécrire à l'aide des fonctions α et β en remarquant que :

– $r(x)$ vérifie :

$$\ln r^2(x) = \frac{2\omega}{c_0} \int_0^x \frac{\alpha(x')}{\beta(x')} dx' + \ln \beta^2(0) - \ln \sin^2 \theta(x), \quad (4.51)$$

– et que la distribution de $\sin \theta$ tend vers une valeur stationnaire quand $x \rightarrow +\infty$ [123], ce qui conduit à :

$$\frac{1}{l_{loc}} = \frac{\omega}{c_0} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1} \int_0^x \frac{\alpha(x')}{\beta(x')} dx' = \frac{\omega}{c_0} \langle \frac{\alpha}{\beta} \rangle_{\text{stationnaire}}. \quad (4.52)$$

Dans l'article qui suit nous avons dérivé une équation de Fokker-Planck⁹ pour la variable $z(x) = \frac{\alpha}{\beta}$. Nous avons alors pu déterminer le comportement de la longueur de localisation dans le régime où l'approche hydrodynamique est valide, c'est-à-dire pour $\hbar\omega < \mu$.

4.5 Excitation élémentaire dans un condensat désordonné

Article 3 : Localization of elementary excitation in a one dimensionnal Bose-Einstein Condensate Cet article est une application des différents concepts que l'on a développés dans ce chapitre :

- Nous avons développé une étude, basée sur le formalisme de phase et l'équation de Fokker-Planck, qui permet de calculer la longueur de localisation dans le cas du régime champ moyen $1D$ où le potentiel est un bruit blanc gaussien à partir de l'équation hydrodynamique (donc à basse fréquence).
- Dans le cas, où le potentiel est une succession aléatoire de pic delta, nous avons développé un formalisme basé sur des techniques de matrices de transfert qui permet de calculer la longueur de localisation pour toutes fréquences¹⁰.

Tous nos résultats seront détaillés dans l'article qui suit, mais rappelons simplement ici que la longueur de localisation obtenue vérifie bien les propriétés présentées dans l'introduction.

- A basse fréquence, les deux approches sont équivalentes et donnent une longueur de localisation proportionnelle à $\left(\frac{\mu}{\hbar\omega}\right)^2$: cas typique pour des phonons.
- A haute fréquence, l'approche des matrices de transfert donne une longueur de localisation proportionnelle à $\left(\frac{\hbar\omega}{\mu}\right)$: cas typique pour des particules libres.

⁹Dans la dernière annexe, nous montrons comment l'on peut dériver une équation de Fokker-Planck à partir d'une équation stochastique.

¹⁰Cette technique redonne bien à basse fréquence le même résultat que celui obtenu par le formalisme de phase.

EPJ manuscript No.
(will be inserted by the editor)

Anderson localization of elementary excitations in a one dimensional Bose-Einstein condensate

N. Bilas and N. Pavloff

Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, Université Paris Sud, bât. 100, F-91405 Orsay Cedex, France

Received: date / Revised version: date

Abstract. We study the elementary excitations of a transversely confined Bose-Einstein condensate in presence of a weak axial random potential. We determine the localization length (l) in the hydrodynamical low energy regime, for a domain of linear densities ranging from the Tonks-Girardeau to the transverse Thomas-Fermi regime, in the case of a white noise potential and (ii) for all the range of energies, in the “one-dimensional mean field regime”, in the case where the randomness is induced by a series of randomly placed point-like impurities. We discuss our results in view of recent experiments in elongated BEC systems.

PACS. 03.75.Kk Dynamic properties of condensates; collective and hydrodynamic excitations, superfluid flow – 05.60.Gg Quantum transport

1 Introduction

The rapid developments of coherent atom manipulation which has recently allowed to study atomic interferometry of Bose-Einstein condensate (BEC) on a chip [1, 2] opens up the prospect of considering a whole set of new transport phenomena in BEC systems. This can be considered as a new domain for studying the concepts issued from mesoscopic physics. As for the clean 2D electronic devices considered in this latter field, the BECS are genuinely phase coherent. Moreover, whereas interactions are difficult to model in mesoscopic physics, their effects in BEC systems are rather well understood and are expected to lead to a whole body of interesting phenomena: atom blockade [3], perfect solitonic-like transmission over a barrier [4], non linear resonant transport [5], breakdown and revival of Bloch oscillations [6], to mention just a few examples.

Coherent transport phenomena are of special interest in presence of disorder. Interference effects have then a prominent role, resulting, in the non interacting case, in weak or strong localization, as observed in many different fields (electronic or atomic physics, acoustics or electromagnetism). The influence of interaction on this phenomenon are of great interest (see, e.g., the review [7]) and have recently been addressed in the case of repulsive two body effective interaction for BEC systems in Refs. [8, 9]. In these latter two references, interaction effects have been shown to lead to genuinely non-linear phenomena that profoundly alter the usual picture of Anderson localization.

In the present work, we also consider the influence of interaction on Anderson localization, but remaining at a

linear level, by studying the propagation of elementary excitations in a disordered BEC system. These are small deformations of a static background and they can be –at leading order– described in a linear framework (neglecting phenomena such as Beliaev damping). Interaction has nonetheless a prominent effect on the spectrum of elementary excitations, which is phonon-like at small energy and becomes similar to the one of free particles at high energy. The crossover between these two regimes occurs at an energy $\hbar\omega$ of order of the chemical potential μ of the system.

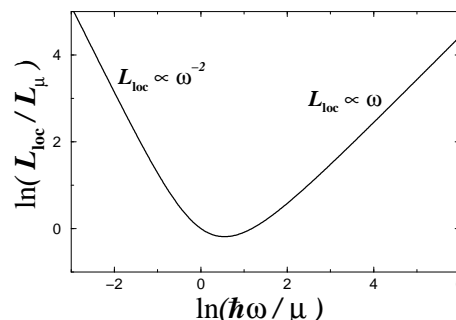


Figure 1: L_{loc} as a function of the energy $\hbar\omega$ of an elementary excitation in logarithmic scale (μ is the chemical potential of the system, and L_μ is the value of L_{loc} when $\hbar\omega = \mu$). The curve has been drawn within the model used in Section 4, employing formulas (40) and (61). This yields $\lambda^2 n_{\text{imp}} L_{\text{loc}} = 4[(\hbar\omega/\mu)^2 + 1]/[\sqrt{(\hbar\omega/\mu)^2 + 1} - 1]$ (the meaning of the parameters λ and n_{imp} in this formula is explained in Section 4).

Accordingly, the localization length L_{loc} of the elementary excitations (i.e., the typical extend of a localized mode, see Section 2 below) is expected to be similar to the one of phonons at low energy ($\hbar\omega \ll \mu$), and to the one of free particles at high energy ($\hbar\omega \gg \mu$) [10]. The localization length of free particles scales linearly with the energy (at high enough energy, see, e.g., [11]), whereas phonons in 1D disordered system have a localization length which diverges as ω^{-2} at small ω , as typically observed in models of disordered harmonic chains [12], in random layered media [13], or in continuous models with random elastic properties [14]. Hence, the localization length L_{loc} of the elementary excitations has the behavior illustrated in Figure 1, with a minimum at $\hbar\omega \simeq \mu$. The main purpose of the present work is to explicitly derive this type of behavior within several approximation schemes and different models of disorder.

The paper is organized as follows. In Section 2 we briefly present the model and the parameter range in which we are working, together with the Bogoliubov-de Gennes equations governing the dynamics of the elementary excitations. In Section 3 we consider the large wave-length limit within an hydrodynamical approach. We consider a Gaussian white noise potential and show in particular that in this domain, one obtains a ω^{-2} behavior of L_{loc} . In Section 4 we consider an other type of disorder (randomly placed delta impurities) and work within the transfer matrix approach. In this regime we are able to work for all the range of energies and obtain an analytic expression for L_{loc} in the scarce impurities limit. This expression matches at low energy the one obtained in Section 3 within the hydrodynamical approach. Very interesting recent experiments have addressed the issue of transport in a disordered BEC [15–17] and in Section 5 we discuss the relevance of our approach for analyzing some of the experimental results. Finally, some technical points are given in the Appendices. Appendix A is devoted to the derivation of a formula allowing to determine the density of state within the “phase formalism” employed in Section 3. In Appendix B we compute the transmission coefficient of an elementary excitation of energy $\hbar\omega$ over a single delta-like impurity.

2 The model

In this Section we present the basic equations describing the elementary excitations of a one dimensional (1D) Bose-Einstein condensed gas in presence of disorder. The condensate is formed by atoms of mass m which interact *via* a two-body potential characterized by its 3D s-wave scattering length $a > 0$. The gas is confined to one dimension by a transverse parabolic potential of frequency ω_{\perp} and “oscillator length” $a_{\perp} = (\hbar/m\omega_{\perp})^{1/2}$. There is no confinement in the axial (x) direction, but disorder is induced along the axis of the guide through a random potential $U(x)$ whose properties will be specified in the next sections.

In this Section (and also in Section 4) we restrict ourselves to the “1D mean field regime” [18] corresponding

to a density range such that

$$(a/a_{\perp})^2 \ll n_{1D} a \ll 1, \quad (1)$$

where n_{1D} denotes a typical order of magnitude of the 1D density $n(x, t)$ of the system. The first of the inequalities (1) ensures that the system does not get in the Tonks-Girardeau limit and the second that the transverse wave function is the ground state of the linear transverse Hamiltonian, see, e.g., the discussion in Refs. [18, 19]. We address the low density case (Tonks-Girardeau limit) and the high density case (transverse Thomas-Fermi) in Section 3.

In the 1D mean field regime, the field operator is a function $\hat{\Psi}(x, t)$ which can be decomposed in the usual Bogoliubov way in c -number (the superfluid order parameter) plus small terms describing the contribution of the elementary oscillations (see, e.g., Ref. [20], chap. 5). For a stationary condensate, the order parameter is of the form $\psi(x) \exp\{-i\mu t/\hbar\}$ where $\psi(x)$ is real, and the Bogoliubov decomposition reads

$$\hat{\Psi}(x, t) = e^{-i\mu t/\hbar} \left\{ \psi(x) + \sum_{\nu} [u_{\nu}(x) \hat{b}_{\nu} e^{-i\omega_{\nu} t} + v_{\nu}^*(x) \hat{b}_{\nu}^{\dagger} e^{i\omega_{\nu} t}] \right\}, \quad (2)$$

where \hat{b}_{ν} and \hat{b}_{ν}^{\dagger} are, respectively, the annihilation and creation operator of the ν th elementary excitation. In the following, we drop the subscript ν for legibility. The order parameter verifies the Gross-Pitaevskii equation

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left\{ U(x) + g_{1D} \psi^2(x) \right\} \psi(x) = \mu \psi(x), \quad (3)$$

with $g_{1D} = 2\hbar\omega_{\perp} a$ [21–23]. The functions $u(x)$ and $v(x)$ are solutions of the Bogoliubov-de Gennes equations (see, e.g., Ref. [20], chap. 5)

$$\begin{pmatrix} H & g_{1D} \psi^2 \\ -g_{1D} \psi^2 & -H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \hbar\omega \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (4)$$

where

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) + 2g_{1D} \psi^2(x) - \mu. \quad (5)$$

In presence of a single elementary excitation of pulsation ω the density reads $n(x, t) = |\psi(x)|^2 + \delta n(x, t)$ where the density oscillation is, at leading order:

$$\delta n(x, t) = \psi(x)[u(x) + v(x)] e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (6)$$

where “c.c.” stands for “complex conjugate”. In Section 3 we use the notation $\delta n(x)$ for the quantity $\psi(x)[u(x) + v(x)]$.

In the absence of potential U , the order parameter is a constant $\psi(x) = n_0^{1/2}$ with $\mu = g_{1D} n_0$, the speed of sound in the system is $c_0 = (\mu/m)^{1/2}$ and the healing length is $\xi = \hbar/(m c_0)$.

Disorder is induced along the axis x of the guide through the random potential $U(x)$. Denoting U_{typ} the typical

value of $|U(x)|$, we work in the limit $U_{\text{typ}} \ll \mu$. This regime is easily reached experimentally [15, 16] and is very relevant for our purpose because it corresponds to a range of parameters where Anderson localization is not blurred by effects connected to "fragmentation of the condensate" [24].

In a 1D disordered system the excitations are expected to be localized around a point with an envelop decreasing exponentially with the distance to this point. This corresponds to functions u , v and δn behaving as $\exp\{\pm\gamma x\}$ when $|x| \rightarrow \infty$. γ is a function of ω known as the Lyapunov exponent; it characterizes the localization properties of the system. Its inverse $L_{\text{loc}} = \gamma^{-1}$ is the localization length [11]. We determine the Lyapunov exponent of the system in Section 3 in the hydrodynamical regime $\hbar\omega \ll \mu$.

In Section 4 we approach the problem in a different –but equivalent– manner. The disordered potential is assumed to be non zero only in a finite region of space, between $x = 0$ and L . We consider an elementary excitation of pulsation ω incident on the random potential. The corresponding transmission coefficient T through the disordered region is related to the Lyapunov exponent *via* $\gamma = -\frac{1}{2} \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \ln T$ [11]. This is simply connected to the fact that the incident wave function decreases exponentially –at a rate γ – in the disordered region, and this corresponds finally to a transmission probability which is (within logarithmic accuracy) $T \sim \exp(-2\gamma L)$.

We note here important features of the localization properties of the elementary excitations. First, Eq. (4) admits a zero energy solution for $u(x) = -v^*(x) = \psi(x)$. Thus, whatever the disordered potential $U(x)$, the excitation at $\omega = 0$ is delocalized since $\psi(x)$ extends to infinity. This implies that L_{loc} diverges as $\omega \rightarrow 0$. Secondly, at $\omega \rightarrow \infty$ the high energy part of the spectrum is well described by a single particle description obtained by neglecting the coupling between the positive (u) and negative (v) frequency components of the excitations (see, e.g., Ref. [20], chap. 12). In this limit one can set $v = 0$ in Eq. (4) and the system is described by the Schrödinger-like Hamiltonian H (5) which localization length behaves as $L_{\text{loc}} \propto \omega$ at high energy. Thus, as already anticipated in the introduction, we expect a behavior of L_{loc} similar to what has been drawn in Fig. 1.

3 Hydrodynamical approach: $\hbar\omega \ll \mu$

The results obtained in this Section are derived within the 1D mean field regime (1). As explained at the end of the Section, they can be easily generalized in the transverse Thomas-Fermi regime and even in the Tonks-Girardeau limit.

In the present Section we only consider the low frequency excitations ($\hbar\omega \ll \mu$). These involve large wave lengths (which are of order $2\pi c_0/\omega$, when $\omega \rightarrow 0$) and accordingly, features at small length scale are not relevant in the potential seen by the excitations. In particular, the ground state order parameter can be evaluated in the

Thomas-Fermi approximation [25] leading to

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\mu - U(x)}{g_{1D}}}. \quad (7)$$

By reintroducing this ansatz in Eq. (3), one can easily show (provided U_{typ} is small compared to μ) that the Thomas-Fermi result (7) is valid in the limit $\xi \ll r_c$, where r_c fixes the length scale of typical variations of U (for instance this is the correlation length of the random potential). If besides, one considers the limit $\xi \ll c_0/\omega$, the density oscillations $\delta n(x)$ obey the hydrodynamical equation [26, 27]

$$-\omega^2 \delta n(x) = \frac{d}{dx} \left(c^2(x) \frac{d}{dx} \delta n(x) \right), \quad (8)$$

where $c(x) = \{[\mu - U(x)]/m\}^{1/2}$ is a local sound velocity.

Disorder is induced along the axis of the guide through the random potential $U(x)$ which is assumed to have zero mean. The case $\langle U \rangle \neq 0$ can be treated with a trivial extension of the present approach which is presented at the end of the Section. In the following of this Section, U will be approximated by a Gaussian white noise. The hypothesis of white noise is only valid if the wave length of the excitations is large compared to the correlation length r_c of the true U (which is not a perfect white noise if we want the Thomas Fermi approximation (7) to hold). Hence, in the present Section, we make the consistent hypothesis that

$$\xi \ll r_c \ll \frac{2\pi c_0}{\omega}. \quad (9)$$

When the inequality (9) is verified, Equations (7) and (8) are both valid and furthermore the approximation of the random potential by a white noise is sound. In the following we thus write

$$\langle U(x)U(0) \rangle = \left(\frac{\hbar^2}{m} \right)^2 D \delta(x). \quad (10)$$

We now evaluate the localization length corresponding to Eq. (8) by means of the phase formalism (see Ref. [11]). We consider a real solution of (8) and define the functions $\alpha(x)$ and $\beta(x)$ by

$$\alpha(x) = \frac{\delta n(x)}{\delta n^*}, \quad \beta(x) = -\frac{c^2(x)}{c_0 \omega} \frac{d\alpha}{dx}. \quad (11)$$

In (11) the quantity δn^* is a typical value of $\delta n(x)$ which is introduced for dimensional purpose, but plays no role in the following [since Eq. (8) is linear]. The functions α and β satisfy the following system of equations:

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{\omega}{c_0} [1 + \eta(x)] \beta(x), \quad \frac{d\beta}{dx} = \frac{\omega}{c_0} \alpha(x). \quad (12)$$

In the first of equations (12), the term $\eta(x)$ is equal to $U(x)/[\mu - U(x)]$. In all the following we assume that U_{typ} is much smaller than μ , and we write $\eta(x) \simeq U(x)/\mu$ [28].

4

N. Bilas and N. Pavloff: Localization of excitations in a one dimensional Bose-Einstein Condensate

It is convenient to parametrize the functions α and β in the form

$$\alpha(x) = r(x) \cos \theta(x), \quad \beta(x) = r(x) \sin \theta(x). \quad (13)$$

The functions $\theta(x)$ and $r(x)$ describe respectively the phase and the envelope of the density oscillations $\delta n(x)$ [and accordingly of $u(x)$ and of $v(x)$]. In particular, the Lyapunov exponent is defined by

$$\gamma(\omega) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\langle \ln r(x) \rangle}{x}. \quad (14)$$

It is convenient to introduce the quantity $z = \alpha/\beta$ because, owing to the equality

$$\ln r^2(x) = \frac{2\omega}{c_0} \int_0^x z(x') dx' + \ln \beta(0) - \ln \sin^2 \theta(x), \quad (15)$$

and to the fact that the probability density of $\sin \theta$ (and thus also that of $z = \cot \theta$) becomes stationary (i.e., x independent) at large x [11], one can write

$$\gamma = \frac{\omega}{c_0} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \int_0^x \langle z(x') \rangle dx' = \frac{\omega}{c_0} \langle z \rangle_{\text{st}}, \quad (16)$$

where $\langle z \rangle_{\text{st}}$ is the mean value of z in the stationary regime. This quantity is determined as follows. From (12) one sees that z verifies the following stochastic differential equation

$$-\frac{c_0}{\omega} \frac{dz}{dx} = 1 + z^2 + \frac{U(x)}{\mu}. \quad (17)$$

Let $P(z; x) dz$ be the probability that $z(x)$ lies in the interval $z, z + dz$. From (17) and (10) P verifies the Fokker-Planck equation (see, e.g., [11, 29])

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\omega}{c_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + z^2) P + \frac{\omega \delta}{2} \frac{\partial P}{\partial z} \right], \quad (18)$$

where $\delta = \xi^4 D/c_0$. The stationary regime corresponds to the case where $\partial_x P = 0$. In this case, writing $P = P_{\text{st}}(z)$, Eq. (18) yields

$$(1 + z^2) P_{\text{st}} + \frac{\omega \delta}{2} \frac{dP_{\text{st}}}{dz} = J_\omega, \quad (19)$$

where J_ω is an integration constant. The solution of (19) is

$$P_{\text{st}}(z) = \frac{2J_\omega}{\omega \delta} \int_0^{+\infty} dt \exp \left\{ \frac{2}{\omega \delta} \left[-(1 + z^2)t + zt^2 - \frac{t^3}{3} \right] \right\}. \quad (20)$$

The value of J_ω is fixed by the normalization of P_{st} . One obtains

$$J_\omega^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega \delta}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left[-\frac{12t^2 + t^6}{6\omega \delta} \right] dt. \quad (21)$$

Simple algebra allows to express the average $\langle z \rangle_{\text{st}} = \int_{\mathbb{R}} z P_{\text{st}}(z) dz$ under the following form:

$$\langle z \rangle_{\text{st}} = J_\omega \sqrt{\frac{\pi}{2\omega \delta}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left[-\frac{12t^2 + t^6}{6\omega \delta} \right] t^2 dt. \quad (22)$$

We are primarily interested in this Section in the small frequency evaluation of the Lyapunov exponent, because Eq. (8) is expected to describe the elementary excitations only in the domain $\hbar\omega/\mu \ll 1$. An expansion of the integrals (21) and (22) in the limit $\omega \delta \rightarrow 0$ yields, after reinserting in (16):

$$\gamma = \frac{\xi^2 D}{8} \left(\frac{\hbar\omega}{\mu} \right)^2 \left[1 - \frac{15}{16} \left(\frac{\omega \delta}{2} \right)^2 + \dots \right]. \quad (23)$$

Although the high frequency limit is not expected to be relevant in the hydrodynamical regime, we note for completeness that when $\omega \delta \rightarrow \infty$ one obtains

$$\gamma = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{\omega \delta}{\sqrt{6}} \right)^{1/3} \times \left[1 - \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{6}}{\omega \delta} \right)^{2/3} + \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{3\Gamma(\frac{5}{6})} - \frac{2[\Gamma(\frac{5}{6})]^2}{\pi} \right) \left(\frac{\sqrt{6}}{\omega \delta} \right)^{4/3} + \dots \right]. \quad (24)$$

The exact value of γ —as determined numerically from Eqs. (16), (21) and (22)—is represented in Fig. 2 (solid line).

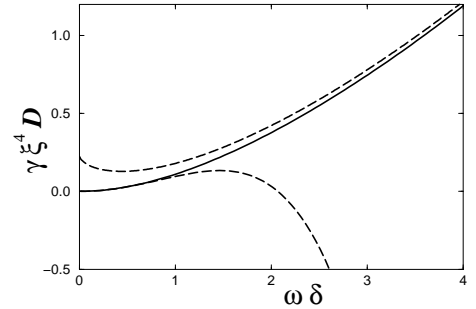


Figure 2: γ as a function of ω in rescaled units. The solid line is the numerical evaluation of γ using formulas (16) and (22). The dashed lines are the small and large $\omega \delta$ approximations [Eqs. (23) and (24)].

The quantity J_ω is also of interest for itself, because it gives informations on the density of states of the excitations. It is show in Appendix A that, if $N(\omega)$ denotes the integrated density of state per unit length, one has

$$N(\omega) = \frac{\omega}{c_0} J_\omega. \quad (25)$$

From (21) one gets the following expansions:

$$N(\omega) = \frac{3\omega}{c_0} \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{\omega\delta}{\sqrt{6}}\right)^{1/3} \times \left[1 + \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{6}}{\omega\delta}\right)^{2/3} + \dots \right]. \quad (26)$$

when $\omega\delta \gg 1$, and

$$N(\omega) = \frac{\omega}{\pi c_0} \left[1 + \frac{5}{32} \left(\frac{\omega\delta}{2}\right)^2 + \dots \right], \quad (27)$$

when $\omega\delta \ll 1$. In the relevant regime of low excitation energies, the leading order in (27) coincides the result in absence of disorder, where one has a linear dispersion relation $\omega = c_0|q|$ in the hydrodynamical regime. This confirms what could have been already anticipated from the fact that $\gamma \rightarrow 0$ when $\omega \rightarrow 0$: the low lying excitations are poorly affected by the presence of disorder (the relevant small parameter being $\omega\delta$). In particular, there is no trapping of the elementary excitations by the disorder and no Lifshitz tail in the density of state. This is linked to the fact that $\omega = 0$ constitutes what is called a “stable genuine boundary” of the spectrum in the book by Lifshits, Gredeskul and Pastur (see Ref. [11], section 7.3).

The results presented in this Section have been obtained for a random potential with zero mean. They are very easily adapted to the case $\langle U \rangle \neq 0$: it suffices to write $U(x) = \langle U \rangle + U_1(x)$, and to define $\mu_1 = \mu - \langle U \rangle$, $c_1 = (\mu_1/m)^{1/2}$, $\xi_1 = \hbar/mc_1$, $\delta_1 = \xi_1^4 D/c_1$. Then, all the results presented from Eq. (11) to Eq. (27) remain valid provided $U(x)$, μ , c_0 , ξ and δ are replaced by the similar quantities with subscript “1”, with the coefficient D being now defined by $\langle U_1(x)U_1(0) \rangle = (\hbar^2/m)^2 D \delta(x)$ [instead of (10)].

The present hydrodynamical approach is very interesting because it has natural extensions out of the 1D mean field regime defined by Eq. (1). For high linear densities, when $n_{1D}a \gg 1$, one reaches the “transverse Thomas-Fermi regime” also named “3D cigar” in Ref. [18]. In this regime the system cannot be considered as truly unidimensional. However, the lowest branch of the spectrum corresponds to excitations that are isotropic in the transverse direction, and, as shown by Stringari in Ref. [30], they can still be described within the hydrodynamical approach. In this case, averaging the 3D hydrodynamical equation over the transverse direction, one gets a 1D equation of the form (8) where the local sound velocity $c(x)$ is now taken to be $c(x) = \{[\frac{1}{2}\mu - U(x)]/m\}^{1/2}$. So, all the results presented from Eq. (11) to Eq. (27) remain valid provided μ , c_0 and ξ and are replaced by $\mu' = \mu/2$, $c'_0 = (\mu'/m)^{1/2}$ and $\xi' = \hbar/(m c'_0)$.

The low density regime $n_{1D}a \ll (a/a_\perp)^2$ (Tonks-Girardeau) can also be studied within the hydrodynamical framework (see for instance Ref. [18]). In this case one has $\mu = (\pi \hbar n_0)^2/2m$, $c_0 = (2\mu/m)^{1/2}$ and Eq. (8) is replaced by

$$-\omega^2 \delta n(x) = \frac{d}{dx} \left\{ c(x) \frac{d}{dx} [c(x) \delta n(x)] \right\}, \quad (28)$$

with the local sound velocity being defined by $c(x) = \{[\frac{2}{m}[\mu - U(x)]]^{1/2}$. In the present case we define [instead of (11)]

$$\alpha(x) = \frac{c(x)}{c_0} \frac{\delta n(x)}{\delta n^*}, \quad \beta(x) = \frac{c(x)}{\omega} \frac{d\alpha}{dx}. \quad (29)$$

Writing $\alpha = r \sin \theta$ and $\beta = r \cos \theta$, one obtains:

$$\frac{dr}{dx} = 0, \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{\omega}{c(x)}. \quad (30)$$

From the second of these equations, in the limit where $1/c(x) = c_0^{-1}[1 + \frac{1}{2}U(x)/\mu]$, one can show that the phase $\theta(x)$ has a Gaussian distribution of the form

$$Q(\theta; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega^2 x \delta/c_0}} \exp \left\{ -\frac{(\theta - \theta_0 - \frac{\omega x}{c_0})^2}{2\omega^2 x \delta/c_0} \right\}, \quad (31)$$

with $\delta = (\hbar^2/2m\mu)^2 D/c_0$.

The first of Eqs. (30) is more interesting. It shows that the envelope of function $\alpha(x)$ remains exactly constant. Assuming that the localization properties of $\alpha(x)$ are the same than those of $\delta n(x)$ [31], this equation points to the absence of exponential localization in the hydrodynamical limit of the Tonks-Girardeau regime.

4 Transfer Matrix approach

In this Section, we study Anderson localization of the elementary excitations of a Bose-Einstein condensate with an other type of disordered potential and in a framework different from the one used in the previous Section. Namely, we study the transmission through a disordered region of extend L , in the 1D mean field regime (1), by means of a transfer matrix approach for a disordered potential:

$$U(x) = g_{\text{imp}} \sum_n \delta(x - x_n), \text{ where } g_{\text{imp}} = \lambda \mu \xi. \quad (32)$$

$U(x)$ describes a series of static impurities with equal intensity and random positions x_n . The peak intensity is measured by the dimensionless parameter λ . We consider here the repulsive case $\lambda > 0$. The x_n 's are uncorrelated and uniformly distributed with mean density n_{imp} . In this case $\langle U(x) \rangle = g_{\text{imp}} n_{\text{imp}}$ and $\langle U(x_1)U(x_2) \rangle - \langle U(x_1) \rangle \langle U(x_2) \rangle = (\hbar^2/m)^2 D \delta(x_1 - x_2)$, with $D = n_{\text{imp}}(\lambda/\xi)^2$. From what is known in the case of Schrödinger equation, this type of potential is typical insofar as localization properties are concerned [11]. Besides, it has recently been proposed to implement a very similar type of random potential by using two different atomic species in an optical lattice [32].

The static background is deformed around each impurity over a distance which is at most of order ξ . We consider the regime where this deformation does not extend to the nearest impurity ($n_{\text{imp}}\xi \ll 1$ [33]). In this case, the propagation of an elementary excitation in presence of the disordered potential $U(x)$ can be treated as

6

N. Bilas and N. Pavloff: Localization of excitations in a one dimensional Bose-Einstein Condensate

a sequence of scatterings over isolated perturbations. Besides –as shown in Appendix B– both the scattering of an elementary excitation over such a perturbation, and its propagation between two successive impurities (separated by a distance ℓ) are, in this regime, described by a 2×2 transfer matrix, denoted respectively \mathcal{T}_λ and $\mathcal{T}_0(\ell)$ with (see, e.g., [34])

$$\mathcal{T}_\lambda = \begin{pmatrix} 1/t_\lambda^* & -r_\lambda^*/t_\lambda^* \\ -r_\lambda/t_\lambda & 1/t_\lambda \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_0(\ell) = \begin{pmatrix} 1/t_0^* & 0 \\ 0 & 1/t_0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

r_λ and t_λ in Eq. (33) are the transmission and reflexion amplitudes of an elementary excitation with energy $\hbar\omega$ across the background deformation induced by a single delta-like impurity. Their dependence on λ and ω is determined in Appendix B [Eqs. (57) and (58)]. The scattering states we choose for writing the matrices \mathcal{T}_λ and $\mathcal{T}_0(\ell)$ are the one introduced in this Appendix. They are pictured in Fig. 3.

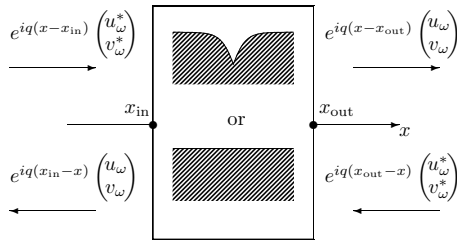


Figure 3: Scattering channels used for writing the transfer matrices \mathcal{T}_λ and $\mathcal{T}_0(\ell)$ of (33). In the case of unperturbed motion over a length ℓ one has $x_{\text{out}} - x_{\text{in}} = \ell$. In the case of scattering by a delta peak located at $(x_{\text{in}} + x_{\text{out}})/2$, one should take $\xi \ll x_{\text{out}} - x_{\text{in}} \ll n_{\text{imp}}^{-1}$.

The coefficients u_ω and v_ω in Figure 3 are chosen in order to make the incoming and outgoing channels identical to these appearing naturally in Appendix B when considering the scattering of an elementary excitation by a single impurity. One thus takes

$$\begin{pmatrix} u_\omega \\ v_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\frac{q\xi}{2} + \frac{\omega}{c_0 q} + i \right]^2 \\ \left[\frac{q\xi}{2} - \frac{\omega}{c_0 q} + i \right]^2 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

where q is defined in Eq. (56). In the case of scattering by an impurity, this corresponds indeed to the scattering channels defined by Eqs. (53), (54) and (55). In the case of free motion over a length ℓ , it is easy to see that these scattering channels correspond to a matrix $\mathcal{T}_0(\ell)$ such as defined in Eq. (33) with

$$t_0(\ell, \omega) = e^{i(q\ell - 2\alpha)}, \quad \text{where} \quad e^{-2i\alpha} = \frac{u_\omega^*}{u_\omega} = \frac{v_\omega^*}{v_\omega}. \quad (35)$$

Then, the scattering by a series of N delta peaks separated by distances $\ell_1 = x_2 - x_1, \dots, \ell_{N-1} = x_N - x_{N-1}$, is described by the transfer matrix \mathcal{T}_N which is the product

$$\mathcal{T}_N = \mathcal{T}_\lambda \times \mathcal{T}_0(\ell_{N-1}) \times \mathcal{T}_\lambda \dots \times \mathcal{T}_0(\ell_1) \times \mathcal{T}_\lambda. \quad (36)$$

\mathcal{T}_N defined in Eq. (36) is of the general form

$$\mathcal{T}_N = \begin{pmatrix} 1/t_N^* & -r_N^*/t_N^* \\ -r_N/t_N & 1/t_N \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Eq. (37) is used for computing the reflexion and transmission amplitudes (r_N and t_N) of the elementary excitation over the potential (32). The transmission probability over this potential is $T_N = |t_N|^2$.

As discussed at the end of Section 2, the analogous of the Lyapunov exponent already computed in Section 3 [Eq. (14)] is here defined as

$$\gamma = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_{\text{imp}}}{N} \langle \ln |t_N| \rangle = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_{\text{imp}}}{2N} \langle \ln T_N \rangle. \quad (38)$$

We calculated γ numerically, by a Monte Carlo averaging over 50 realizations of the disorder, taking $N = 2000$ [35]. The result is shown in Figure 4 for $\lambda = 1$ and $n_{\text{imp}} \xi = 0.02$. In the present model the lengths $\ell_i = x_{i+1} - x_i$ are independent, Poisson distributed, random variables with $P(\ell) = n_{\text{imp}} \exp\{-\ell n_{\text{imp}}\}$. Thus, for a fraction of lengths equal to $n_{\text{imp}} \xi$ the transfer matrix approach fails because the distance between two successive impurities is smaller than ξ [36]. This is the reason why we consider a rather small value of density of impurities: for the chosen value $n_{\text{imp}} \xi = 0.02$, only 2 % of the distances violate the criterion of applicability of the transfer matrix approach.

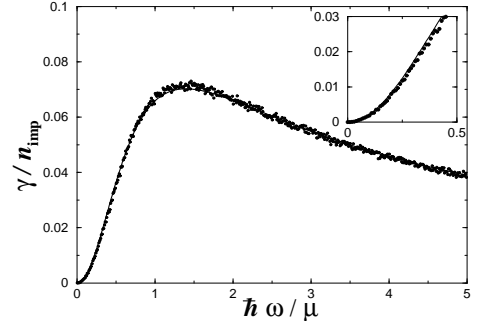


Figure 4: γ as a function of ω in rescaled units. The plot is drawn for $\lambda = 1$ and $\xi n_{\text{imp}} = 0.02$. The dots are the results of the numerical simulation and the solid line is the analytical result from Eq. (40). The inset displays a blowup of the figure at low energy.

As shown in Ref. [38], in the limit $n_{\text{imp}} \ll q$, one can obtain an analytical estimate of γ . From the relation $\mathcal{T}_{N+1} = \mathcal{T}_\lambda \times \mathcal{T}_0(\ell_N) \times \mathcal{T}_N$ one gets

$$\langle \ln |t_{N+1}| \rangle = \langle \ln |t_\lambda| + \langle \ln |t_N| \rangle - \left\langle \ln \left| 1 + r_\lambda r_N^* \frac{t_N}{t_N^*} t_0^2(\ell_N) \right| \right\rangle. \quad (39)$$

ℓ_N is typically of order n_{imp}^{-1} , and in the limit $n_{\text{imp}} \ll q$, one may assume that the phase of $t_0(\ell_N, \omega)$ given in (35)

is uniformly distributed in $[0, 2\pi]$. Then, the last term of the r.h.s. averages out to zero [37,38]. This yields

$$\gamma = -n_{\text{imp}} \ln |t_\lambda| = -\frac{n_{\text{imp}}}{2} \ln T_\lambda, \quad (40)$$

where we recall that the explicit expression of t_λ is given in Eq. (57) and $T_\lambda = |t_\lambda|^2$. Formula (40) corresponds to the solid line in Fig. 4. The agreement with the result of the numerical simulation is very good, even at low energy, as shown in the inset of the figure. This is not a surprise because the breakdown of (40) is expected only at extremely low energies for the present value n_{imp} : when $q \lesssim n_{\text{imp}}$, i.e., $\hbar\omega/\mu \simeq \xi q \lesssim 0.02$. For larger values of n_{imp} , the good agreement of Eq. (40) with the numerical data is limited to a smaller range of energies, mainly because the transfer matrix approach fails.

From Eq. (60), in the limit of small ω and $\lambda \ll 1$ formula (40) yields

$$\gamma \simeq \frac{\lambda^2}{8} \left(\frac{\hbar\omega}{\mu} \right)^2 n_{\text{imp}}. \quad (41)$$

The precise range of validity of formula (41) in the energy domain is expected to be $\xi n_{\text{imp}} \ll \hbar\omega/\mu \ll 1$; the first inequality ensures that (40) is valid and the second that (60) is applicable. The accuracy of formula (41) is tested in Fig. 5 in the case $\lambda = 0.2$ and $\xi n_{\text{imp}} = 0.03$. As already seen on Fig. 4, one notices on this Figure that the restriction $\xi n_{\text{imp}} \ll \hbar\omega/\mu$ turns out to be of no practical importance.

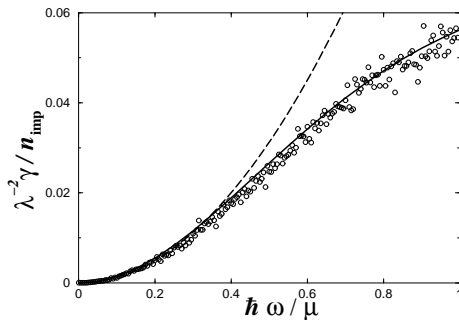


Figure 5: γ as a function of ω in rescaled units. The plot is drawn for $\lambda = 0.2$ and $\xi n_{\text{imp}} = 0.03$. The dots are the results of the numerical simulation and the solid line is the analytical result from Eq. (40). The dashed line is the approximate result (41).

Formula (41) is interesting because it is identical to the first term of expansion (23) which has been obtained in Section 3 in a completely different framework, and this permits to bridge the gap between the hydrodynamical approach and the present transfer matrix method. As just mentioned, formula (41) is restricted to small values of λ , but the approach of Section 3 is similarly limited to the

domain $U_{\text{typ}} \ll \mu$. Also, Eq. (23) is restricted to small values of $\omega\delta$. But in the present case $\omega\delta = \xi n_{\text{imp}} \lambda^2 (\hbar\omega/\mu)$ is very small, even if $\hbar\omega \sim \mu$, so the restriction $\omega\delta \ll 1$ turns out to be of no practical importance here. Also, the results obtained in the present Section correspond to a potential with $\langle U \rangle = \lambda \mu \xi n_{\text{imp}} \neq 0$. However, the comparison with the results of Section 3 is possible with the rule given at the end of this Section for treating the case of a potential with non zero mean. In this case the first term of expansion (23) modifies to $\gamma = \frac{1}{8} \lambda^2 n_{\text{imp}} (\hbar\omega/\mu)^2 (1 - \lambda \xi n_{\text{imp}})^{-3}$. The correcting term $(1 - \lambda \xi n_{\text{imp}})^{-3}$, due to the non zero average of the potential, gives an undetectable modification of the result (the relative difference with (41) is of order 0.18 % in the case of Figure 5).

5 Discussion and conclusion

In this paper we have studied Anderson localization of elementary excitations in a 1D BEC system. Emphasis has been put on the determination of the localization length which has been determined in Section 3 using the “phase formalism” in the hydrodynamical approach (valid for $\hbar\omega \ll \mu$) and in Section 4, using a transfer matrix approach valid in the whole energy domain in the 1D mean field regime (provided $n_{\text{imp}} \xi \ll 1$). Results from the two approaches match within the appropriate limit. The hydrodynamic approach has the advantage of being able to deal with a large range of linear densities, ranging from the low density Tonks-Girardeau regime to the high density transverse Thomas-Fermi regime. In particular the puzzling absence of localization at low energy in the Tonks-Girardeau limit deserves further studies.

Our findings can be tested in realistic experimental setups. Up to now, 3 experiments, lead at Firenze, Orsay and Hannover, have been done which all use similar configurations [15–17]. Each of these experiments involves an elongated cigar shaped condensate in a magnetic trap with an optical speckle pattern creating the disordered potential [39]. The experimental random potential has a non zero mean value, and the experiments are done in the transverse Thomas-Fermi regime. We can thus study localization in this configuration using (for excitations of energy small compared to the chemical potential μ) the above hydrodynamical approach of Section 3 adapted as explained at the end of this Section (replacing in all the formulas μ by $\mu'_1 = \frac{\mu}{2} - \langle U \rangle$, $c'_1 = (\mu'_1/m)^{1/2}$, etc...). One writes $U(x) = \langle U \rangle + U_1(x)$. The auto-correlation $\langle U_1(x)U_1(0) \rangle$ has a typical range r_c which is in all the cases much larger than the healing length ξ : $r_c = 20 \mu\text{m}$ and $\xi = 0.35 \mu\text{m}$ in the Firenze experiment; $r_c = 5.2 \mu\text{m}$ and $\xi = 0.16 \mu\text{m}$ in the Orsay experiment [40]; $r_c \approx 7 \mu\text{m}$ and $\xi = 0.3 \mu\text{m}$ for $N = 8 \times 10^4$ atoms at Hannover. The condition (9) is fulfilled provided the pulsation ω of the excitations is much lower than $2\pi c'_1/r_c$ (which, for instance is equal to $2\pi \times 340 \text{ Hz}$ for $\langle U \rangle/\mu = 0.2$ in the Orsay experiment). In this regime, the potential can be approximated by a white noise with a coefficient D and a correlation radius

r_c defined by

$$\left(\frac{\hbar^2}{m}\right)^2 D = \int_{\mathbb{R}} \langle U_1(x) U_1(0) \rangle dx = \langle U \rangle^2 r_c. \quad (42)$$

Following the procedure explained in Section 3 this leads to

$$L_{loc} = \frac{\xi^2}{r_c} \left(\frac{\mu}{\langle U \rangle}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\hbar\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{2\langle U \rangle}{\mu}\right)^3. \quad (43)$$

The experimental configuration which is closer to the one considered in the present paper is the one of the Firenze group [15] which has studied elementary excitations of an elongated condensate in presence of a speckle pattern. The discrete excitation modes in elongated systems are similar to the continuous ones of infinite systems we have described in the present article only in the case of high quantum numbers (see, e.g., Ref. [20], chap. 12). Unfortunately, only the low lying dipole and quadrupole modes have been studied in Ref. [15]. We nonetheless discuss this experiment using our results, keeping in mind that we can only provide rough orders of magnitude.

The data of the Firenze group are presented in a way more easily analyzed within the model of random delta peaks of Section 4. However, in the regime where Eq. (43) is valid, all models are expected to yield the same result, as argued in Section 3 and verified in Section 4. The only relevant parameter being the parameter D , or equivalently r_c [which is related to D by (42)]. Within the model of random δ -peaks one has $\langle U \rangle = \lambda\mu\xi n_{imp}$ and $D = n_{imp}(\lambda/\xi)^2$ yielding $r_c = n_{imp}^{-1} = 20 \mu\text{m}$ [15]. The chemical potential in the Firenze experiment is $\mu = 1 \text{ kHz}$ and the excitations considered are the dipole ($\nu_1 = 8.74 \text{ Hz}$) and quadrupole ($\nu_2 = 13.8 \text{ Hz}$). For a disorder such that $\langle U \rangle/\mu = 0.1$ (which is typical in this experiment) the dipole excitation corresponds to a localization length $L_{loc}^1 = 4.1 \text{ mm}$, whereas for the quadrupole one gets $L_{loc}^2 = 1.6 \text{ mm}$ ($L_{loc}^2 = \frac{2}{5}L_{loc}^1$ since $\nu_2/\nu_1 = \sqrt{5/2}$). We also note that higher excited modes having frequency $\nu_n = \frac{\nu_1}{2}\sqrt{n(n+3)}$ [41, 30] have lower localization lengths: $L_{loc}^n = \frac{4}{n(n+3)}L_{loc}^1$. L_{loc}^n becomes comparable with the typical axial size of the condensate ($110 \mu\text{m}$) for $n \sim 10$ [42].

A precise plot of the oscillations of a dipole mode is presented in Ref. [15] in the case $\langle U \rangle/\mu = 0.06$ which corresponds to a limit we can address using Eq. (43) [43]. An experimental estimate of the value of the localization length can be obtained by fitting the experimental data with a sinusoidal oscillation at frequency ν_1 with a damping $\exp\{-2X(t)/L_{loc}^{exp}\}$, where $X(t) = 4\Delta\nu_1 t$ is the distance traveled by the dipole mode for an oscillation of maximal amplitude Δ . From the data presented in Ref. [15] we obtain $L_{loc}^{exp} \simeq 1.7 \text{ mm}$. This does not agree with the value $L_{loc}^1 = 15 \text{ mm}$ obtained from Eq. (43) in the case $\langle U \rangle/\mu = 0.06$, but we recall that we do not expect the dipole mode to be equivalent to an excitation of an infinite system. Thus, the damping observed in the Firenze experiment [15] cannot be accounted for by a model of

infinitely long condensate with no axial trapping. Quantitative theoretical description of this experiment should take the axial trapping fully into account. We nonetheless hope that the experimental study of higher excited modes could directly confirm the result (43).

It is also interesting to discuss the expected localization length in the Orsay experiment [16], where the properties of the random potential are well characterized. In this experiment, the potential is Poisson distributed with a mean value $\langle U \rangle$ which is a fraction of the chemical potential ($\mu = 4.47 \text{ kHz}$). Taking $\langle U \rangle/\mu = 0.2$, and for instance $\omega = \omega_z = 2\pi \times 6.7 \text{ Hz}$ (corresponding to the dipole excitation) one obtains $L_{loc} = 11.8 \text{ mm}$. Besides, if one is able to generate excitations with $\omega \simeq 6 \times \omega_z$, one still remains in the hydrodynamical regime and the above value of L_{loc} is decreased by a factor 36, becoming of the order of the axial size of the condensate ($300 \mu\text{m}$ in the Orsay experiment [16]). We recall that the present approach does not strictly apply for low lying excitations of a trapped condensate, but it is nevertheless interesting to get an estimation of the typical length scale for observing Anderson localization experimentally.

We note that the Firenze [44], Orsay [16] and Hannover [17] groups observed a saturation of the expansion of a condensate in a disordered potential. In the 3 experiments this phenomenon has been interpreted (see also [45, 46]) as being due to the trapping of the wings of the condensate by the large peaks of the speckle potential, with no relation to Anderson localization. We hope that in the near future, new experiments will be able to directly address Anderson localization of elementary excitations in transversely confined Bose-Einstein condensates, in configurations corresponding to the scenario analyzed in the present work. In this case, our study indicates that localization is more easily achieved for excitations of energy of order μ (see Fig. 1) created for instance through Bragg spectroscopy [47]. This range of energy is out of the hydrodynamical regime presented in Section 3, but the approach of Section 4 allows to get a quantitative estimate of L_{loc} in this case (for the 1D mean field regime).

It is a pleasure to acknowledge fruitful discussions with L. Pastur, G. Shlyapnikov and C. Texier. This work was supported by the Ministère de la Recherche (Grant ACI Nanoscience 201), by the ANR (grants ANR-05-Nano-008-02 and ANR-NT05-2-42103) and by the IFRAF Institute. Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques is Unité Mixte de Recherche de l'Université Paris XI et du CNRS, UMR 8626.

A Appendix: Density of state within the phase formalism

In this Appendix we briefly demonstrate Eq. (25) following a similar demonstration in Ref. [11]. We first demonstrate that the phase θ defined in (13) is a monotonic function of ω . This can be shown by introducing the auxiliary variable $y = -c_0 z/\omega$. Expressing (17) in terms of the variable y ,

differentiating with respect to ω and then integrating the resulting equation one gets

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = \frac{2\omega}{c_0^2} \int_0^x dx' y^2(x') \exp\left\{\frac{2\omega^2}{c_0^2} \int_{x'}^x y(x'') dx''\right\} > 0. \quad (44)$$

Thus $z = -\omega y/c_0$ is a decreasing function of ω , and θ is an increasing function of ω (since θ is a continuous function and $\partial z/\partial \theta = -1 - z^2$). θ verifies the equation

$$c_0 \frac{d\theta}{dx} = 1 + \sin^2 \theta \frac{U(x)}{\mu}. \quad (45)$$

The fact that θ is an increasing function of ω immediately implies that the number of eigenmodes [solutions of (8) or equivalently of (12)] with pulsation between 0 and ω verifying the boundary condition $\cot \theta(0) = \theta_0$ and $\cot \theta(L) = \theta_L$ coincides with the number of pulsations $\omega' \in [0, \omega]$ for which the accumulated phase $\theta(\omega', L)$ as determined by (46) with the initial condition $\theta(\omega', 0) = \theta_0$ verifies $\theta(\omega', L) = \theta_L + m\pi$. This number is equal to

$$E \left[\frac{\theta(\omega, L) - \theta(0, L)}{\pi} \right] = E \left[\frac{\theta(\omega, L) - \theta_0}{\pi} \right], \quad (46)$$

where $E(x)$ denotes the integer part of x . Passing to the limit $L \rightarrow \infty$ and allowing for the fact the number of states is a self averaging quantity one obtains

$$N(\omega) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle \theta(\omega, L) \rangle}{\pi L}. \quad (47)$$

But the number (47) is also seen to be the number of times where the variable θ equals zero modulo π in the interval $[0, L]$. This stems from the fact that $\theta(x)$ can change interval $[n\pi, (n+1)\pi]$ only toward a higher interval and cannot go backward to a lower interval, because, as seen from (46), $d\theta/dx|_{\theta=n\pi} = \omega/c_0 > 0$. One may thus write

$$N(\omega) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\omega}{c_0 L} \int_0^L dx Q^{\text{red}}(0; x), \quad (48)$$

where

$$Q^{\text{red}}(\theta; x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\langle \delta(\theta(x) - n\pi - \theta) \right\rangle, \quad (49)$$

is the probability density for the reduced phase. Owing to the fact that Q^{red} reaches a stationary (i.e., x independent) distribution $Q_{\text{st}}^{\text{red}}(\theta)$, (49) yields

$$N(\omega) = \frac{\omega}{c_0} Q_{\text{st}}^{\text{red}}(0) = \frac{\omega}{c_0} \lim_{z \rightarrow \infty} (1 + z^2) P_{\text{st}}(z), \quad (50)$$

where the last equality follows from the relation $z = \cot \theta$. The explicit expression (20) of P_{st} evaluated at large z then yields the desired result (25).

B Appendix: Transmission through a single delta peak

In this Appendix we determine the transmission and reflexion amplitude of an elementary excitation of energy

$\hbar\omega$ incident from the left on a delta-like impurity located at $x = 0$. These coefficients have already been obtained by Kagan *et al.* in the case of a barrier of finite width [41]. In the present case the impurity interacts with the atoms forming the condensate via a potential $\lambda \mu \xi \delta(x)$ with $\lambda > 0$. The condensate is deformed near the impurity and the order parameter reads

$$\psi(x) = \tanh(|x/\xi| + a), \quad \text{with} \quad a = \frac{1}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{2}{\lambda} \right). \quad (51)$$

This form of $\psi(x)$ corresponds to two portions of black solitons matched together at $x = 0$ in order to satisfy the condition $\xi [\psi'(0^+) - \psi'(0^-)] = 2\lambda \psi(0)$. Far from the impurity (at $x \rightarrow \pm\infty$), the background is not perturbed and an elementary excitation of energy $\hbar\omega$ has a wave vector q such that $\omega = c_0 q (1 + q^2 \xi^2 / 4)^{1/2}$, and is described by $(u(x), v(x)) = \exp(iqx)(u_\omega, v_\omega)$ where – by Eq. (4) – the constants u_ω and v_ω are related by

$$\left(\frac{\xi^2 q^2}{2} + 1 - \frac{\hbar\omega}{\mu} \right) u_\omega + v_\omega = 0. \quad (52)$$

The background is deformed near the impurity [as described by (52)], and in this region the form of the wave function of the elementary excitation is affected in a non trivial manner. However, one still has an analytical description of the excitations around (52) because the expression of the excitation around a soliton is known (it is given by the squared Jost functions of the inverse problem [42], see also Appendix A of Ref. [43]). Thus one can write the appropriate incoming, transmitted and reflected modes of the problem. It is important however to realize that the system has also evanescent modes localized around the impurity [41]. More specifically, the scattering process of an excitation of energy $\hbar\omega$ incident from $-\infty$ is described by

$$\Xi^{(-)}(x) = A_{\text{inc}} \Xi_q^*(-x) + A_{\text{ref}} \Xi_q(-x) + A_{\text{eva}}^{(-)} \Xi_{ip}(-x), \quad (53)$$

when $x < 0$, and

$$\Xi^{(+)}(x) = A_{\text{tra}} \Xi_q(x) + A_{\text{eva}}^{(+)} \Xi_{ip}(x), \quad (54)$$

when $x > 0$. The indexes “inc”, “ref”, “tra” and “eva” correspond respectively to incident, reflected, transmitted and evanescent channels. The expression of $\Xi_k(x)$ ($k = q$ or ip) in (54) and (55) is

$$\Xi_k(x) = e^{ikx} \begin{pmatrix} \left[\frac{k\xi}{2} + \frac{\omega}{c_0 k} + i \tanh\left(\frac{x}{\xi} + a\right) \right]^2 \\ \left[\frac{k\xi}{2} - \frac{\omega}{c_0 k} + i \tanh\left(\frac{x}{\xi} + a\right) \right]^2 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

and the quantities q and p are wave vectors related to ω by

$$q\xi = \sqrt{2} \left\{ \sqrt{(\hbar\omega/\mu)^2 + 1} - 1 \right\}^{1/2}, \quad p\xi = \sqrt{2} \left\{ \sqrt{(\hbar\omega/\mu)^2 + 1} + 1 \right\}^{1/2}. \quad (56)$$

The wave functions defined in Eqs. (53) and (54) are the most general solutions of (4) corresponding to an elementary excitation of energy $\hbar\omega$ incoming from the left and scattering on a potential $U(x) = \lambda \xi \mu \delta(x)$. In particular, the incident, transmitted and reflected components of (53,54) all verify (52) far from the impurity. The assumption $n_{\text{imp}}\xi \ll 1$ made in Section 4 ensures that the evanescent mode Ξ_{ip} does not reach the nearest impurity [51]. This is the reason why the scattering on potential (32) can be described via a transfer matrix approach using only 2×2 matrices.

The matching at $x = 0$ corresponds to $\Xi^{(-)}(0) = \Xi^{(+)}(0)$ and $d\Xi^{(+)}(0)/dx - d\Xi^{(-)}(0)/dx = 2\lambda\xi^{-1}\Xi(0)$. This yields a system of 4 linear equations determining the coefficients A_{ref} , A_{tra} , $A_{\text{eva}}^{(-)}$ and $A_{\text{eva}}^{(+)}$ in terms of A_{inc} . A tedious but straightforward computation yields

$$t_{\lambda} = \frac{A_{\text{tra}}}{A_{\text{inc}}} = \frac{1}{2} \left[\frac{2 + iq\xi \tanh(2a)}{-2 + iq\xi \tanh(2a)} + \frac{\Delta^*}{\Delta} \right], \quad (57)$$

and

$$r_{\lambda} = \frac{A_{\text{ref}}}{A_{\text{inc}}} = \frac{1}{2} \left[\frac{2 + iq\xi \tanh(2a)}{-2 + iq\xi \tanh(2a)} - \frac{\Delta^*}{\Delta} \right], \quad (58)$$

where

$$\Delta = 4 \left(\frac{\hbar\omega}{\mu} + 2i \tanh^2 a \right) \sqrt{\left(\frac{\hbar\omega}{\mu} \right)^2 + 1} + 2\xi(p + iq) \tanh a \left[\frac{2\hbar\omega}{\mu} + i(1 + \tanh^2 a) \right]. \quad (59)$$

The transmission probability $T_{\lambda} = |t_{\lambda}|^2$ has the asymptotic form $T_{\lambda} \simeq 1 - \lambda^2 \mu / (2\hbar\omega)$ when $\omega \rightarrow \infty$, and in the opposite small energy limit ($\hbar\omega \ll \mu$) one has

$$T_{\lambda} \simeq 1 - \left(\frac{\hbar\omega}{2\mu} \right)^2 \left[1 - \frac{2}{\tanh a} + \tanh(2a) \right]^2 \underset{\lambda \rightarrow 0}{\simeq} 1 - \left(\frac{\lambda \hbar\omega}{2\mu} \right)^2. \quad (60)$$

A typical behavior of T_{λ} as a function of ω is plotted on Fig. 6. The transmission probability is 1 at small frequency. This anomalous behavior of the transmission at small energy has already been noticed in Ref. [48] in the case of a barrier of finite extend. It is also in agreement with the findings of Ref. [50] where a dark soliton with velocity $v_{\text{sol}} \rightarrow c_0$ (and thus reaching the limit where it becomes a mere density perturbation, i.e., a phonon, which is an elementary excitation with $q \rightarrow 0$) was shown to pass over an obstacle without radiating energy, i.e., without reflection.

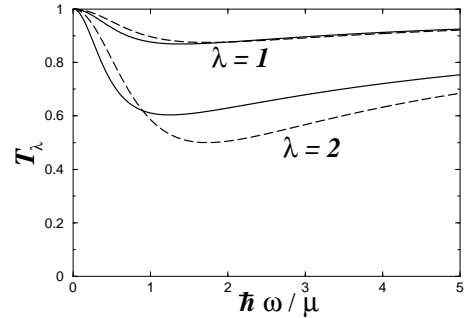


Figure 6: Transmission probability T_{λ} across a potential $U(x) = \lambda \mu \xi \delta(x)$ as a function of ω (in rescaled units). The solid line is the exact result (57) in the cases $\lambda = 1$ and $\lambda = 2$. The dashed line are the corresponding small λ approximations (61).

The exact formula for T_{λ} [from (57)] is compared on Figure 6 with an approximation valid for all ω when $\lambda \ll 1$:

$$T_{\lambda} \simeq 1 - \frac{(\lambda \xi q/2)^2}{(\hbar\omega/\mu)^2 + 1}. \quad (61)$$

It is seen on the Figure that this approximation is reasonably accurate already when $\lambda = 1$. More precisely, for $\lambda = 1$, the relative error due to the use of Eq. (61) is lower than 3 % (the error is maximum around $\hbar\omega \simeq 0.7\mu$); for $\lambda = 0.5$, this errors is lower than 0.5 %.

References

1. Y.-J. Wang *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94**, 090405 (2005).
2. Y. Shin *et al.*, Phys. Rev. A **72**, 021604(R) (2005).
3. I. Carusotto and G. C. La Rocca, Phys. Rev. Lett. **84**, 399 (2000); I. Carusotto, Phys. Rev. A **63**, 023610 (2001).
4. P. Leboeuf, N. Pavloff and S. Sinha, Phys. Rev. A **68**, 063608 (2003).
5. T. Paul, K. Richter, and P. Schlagheck, Phys. Rev. Lett. **94**, 020404 (2005).
6. D. Witthaut, M. Werder, S. Mossmann, and H. J. Korsch, Phys. Rev. E **71**, 036625 (2005).
7. S. A. Gredeskul and Y. S. Kivshar, Phys. Rep. **216**, 1 (1992).
8. N. Bilas and N. Pavloff, Phys. Rev. Lett. **95**, 130403 (2005).
9. T. Paul, P. Leboeuf, N. Pavloff, K. Richter and P. Schlagheck, Phys. Rev. A **72**, 063621 (2005).
10. To our knowledge, this was first pointed out by G. Shlyapnikov (private communication).
11. I. M. Lifshits, S. A. Gredeskul, and L. A. Pastur, *Introduction to the theory of disordered systems*, John Wiley (New-York 1988).
12. K. Ishii, Prog. Theor. Phys. Suppl. **53**, 77 (1973).
13. V. Baluni and J. Willemsen, Phys. Rev. A **85**, 3358 (1985).
14. P. Sheng, B. White, Z.-Q. Zhang, and G. Papanicolaou, Phys. Rev. B **34**, 4757 (1986).

15. J. E. Lye *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 070401 (2005).
16. D. Clément *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 170409 (2005).
17. T. Schulte *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 170411 (2005).
18. C. Menotti and S. Stringari, Phys. Rev. A **66**, 043610 (2002).
19. D. S. Petrov, D. M. Gangardt, and G. V. Shlyapnikov, J. Phys. IV France **116**, 5 (2004).
20. L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Clarendon Press (Oxford 2003).
21. M. Olshani, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).
22. A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, and C. J. Pethick, Phys. Rev. A **58**, 2417 (1998).
23. P. Leboeuf and N. Pavloff, Phys. Rev. A **64**, 033602 (2001).
24. J. Fortágh, H. Ott, S. Kraft, A. Günther, and C. Zimmermann, Phys. Rev. A **66**, 041604(R) (2002); A. E. Leanhardt *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 040401 (2002); J. Estève *et al.*, Phys. Rev. A **70**, 043629 (2004).
25. Note that this is an *axial* Thomas-Fermi approximation which is done when the *transverse* wave-function is far from the Thomas-Fermi regime. When the transverse component gets also in the Thomas-Fermi regime, Eq. (7) still holds, but the form of the sound velocity in (8) is modified (as discussed at the end of Section 3).
26. S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **77**, 2360 (1996).
27. P. Öhberg *et al.*, Phys. Rev. A **56**, R3346 (1997).
28. A mathematically more rigorous presentation would be to have made no hypothesis on the type of randomness of $U(x)$ so far, and only at the present point to make the assumption –based on physical motivations– that $\langle \eta \rangle = 0$ and $\langle \eta(x)\eta(0) \rangle = \xi^4 D \delta(x)$ which is equivalent to (10) if $\eta(x) = U(x)/\mu$.
29. C. Itzykson and J. M. Drouffe, *Statistical field theory*, volume 2, Cambridge University Press (Cambridge 1989).
30. S. Stringari, Phys. Rev. A **58**, 2385 (1998).
31. This makes sense when the typical value U_{typ} of $|U(x)|$ is much smaller than μ , since in this case $c(x)/c_0 \simeq 1$, and from (29) $\alpha(x)$ is thus roughly similar to $\delta n(x)$.
32. U. Gavish and Y. Castin, Phys. Rev. Lett. **95**, 020401 (2005).
33. This condition is valid even when $\lambda \rightarrow \infty$. In this case, each impurity induces a deformation of the background which is a black soliton centered at the position of the impurity, with typical extend ξ . The nearest impurity is typically located at distance n_{imp}^{-1} and thus does not see the perturbation induced by its neighbor if $n_{\text{imp}}\xi \ll 1$.
34. J. B. Pendry, Adv. Physics **43**, 461 (1994).
35. Since, $\ln |t_N|^2$ is a self averaging quantity, one could equivalently consider a single realization of the disorder with $N = 50 \times 2000$, see, e.g., A. Crisanti, G. Paladin, and, A. Vulpiani, *Products of Random Matrices*, Springer Series in Solid State Sciences **104**, Springer-Verlag (Berlin 1993).
36. The exact fraction of lengths inferior to ξ is $\int_0^\xi P(\ell) d\ell = 1 - \exp\{-\xi n_{\text{imp}}\}$, which is approximatively equal to ξn_{imp} when $\xi n_{\text{imp}} \ll 1$.
37. P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **22**, 3519 (1980).
38. M. V. Berry and S. Klein, Eur. J. Phys. **18**, 222 (1997).
39. The Hannover experiment has the possibility of an additional optical lattice.
40. The conventions we use in the present work is slightly different from the ones of Ref. [16] : we note r_c what is denoted by Δz in this reference, and there is a difference by a factor $\sqrt{2}$ in our definition of ξ and in the one used in Ref. [16].
41. M. Fliesser, A. Csordás, P. Szépfalussy, and R. Graham, Phys. Rev. A **56**, R2533 (1997).
42. A possible way to further decrease the localization length would be to decrease the typical peak spacing of the speckle pattern.
43. The damping of the dipole oscillations are also studied for other amplitude of disorder in Ref. [15]: $\langle U \rangle / \mu = 0.4$ and 1, but we cannot address these regimes, Eq. (43) being only valid if $2 \langle U \rangle / \mu \ll 1$.
44. C. Fort *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 170410 (2005).
45. M. Modugno, Phys. Rev. A **73**, 013606 (2006).
46. L. Sanchez-Palencia *et al.*, private communication, in preparation.
47. S. Richard *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 010405 (2003).
48. Yu. Kagan, D. L. Kovrizhin, and L. A. Maksimov, Phys. Rev. Lett. **90**, 130402 (2003).
49. X.-J. Chen, Z.-D. Chen, and N.-N. Huang, J. Phys. A **31**, 6929 (1998).
50. N. Bilas and N. Pavloff, Phys. Rev. A **72**, 033618 (2005).
51. This is due to the exponential decrease $\exp\{-p|x|\}$ of these modes, and to the fact that, from (56), the wave vector p is approximatively $2\xi^{-1}$ when $\omega \rightarrow 0$, and $[2\omega/(\xi c_0)]^{1/2}$ when $\omega \rightarrow \infty$. Thus, $\exp\{-p/n_{\text{imp}}\}$ is always small.

Conclusion et perspectives

Ce mémoire s'axe principalement autour de l'étude du transport cohérent dans les condensats de Bose-Einstein désordonnés uni-dimensionnels.

Plus précisément, :

- Nous avons commencé par présenter dans ce manuscrit un travail sur la dynamique d'un soliton sombre incident vis-à-vis d'un obstacle puis dans un deuxième temps nous avons généralisé nos résultats dans le cas d'un condensat de Bose désordonné.
- Nous avons ensuite étudié la propagation des excitations élémentaires dans un condensat de Bose-Einstein désordonné et les propriétés de localisation qui en découle.

Nous avons développé un modèle perturbatif qui nous a permis d'obtenir différents résultats sur la physique des solitons sombres :

- Un soliton sombre est accéléré après avoir été diffusé par un obstacle.
- Dans la plupart des cas, le soliton se comporte comme une particule classique de masse $2m$ évoluant dans un potentiel effectif qui est la convolution du potentiel décrivant l'obstacle avec la fonction $\frac{1}{\cosh^2 x}$.
- Après s'être fait diffusé par l'obstacle, le soliton émet deux paquets d'onde, l'un vers l'avant, l'autre vers l'arrière, se déplaçant à la vitesse du son.
- Enfin les effets radiatifs tendent à s'annuler quand la vitesse du soliton tend à s'approcher de la vitesse du son.

Ainsi à l'inverse des théories adiabatiques déjà développées sur le sujet qui prédisent que la forme et la vitesse du soliton reste la même loin avant et après l'obstacle, nous avons pu déterminer les modifications asymptotiques des paramètres du soliton dues à la collision.

Nous avons ensuite appliqué notre modèle perturbatif à la propagation d'un soliton sombre dans un milieu désordonné, nous avons montré que :

- Le soliton est accéléré jusqu'à la vitesse du son dans la région désordonnée puis disparaît.
- Sa décroissance n'est pas exponentielle mais algébrique.
- La distance parcourue par le soliton dans la région désordonnée avant de se désintégrer est indépendante de sa vitesse initiale.

Nous avons ainsi pu mettre en évidence le caractère original de la physique des solitons sombres en comparaison à d'autres phénomènes ondulatoires comme les solitons brillants ou les ondes linéaires.

En effet, on peut relever quelques analogies entre le comportement des solitons brillants et des ondes planes dans un milieu désordonné (concernant plus précisément la décroissance exponentielle, dans une certaine limite, sur une longueur typique qui s'écrit de la même forme

dans les deux cas), à l'inverse des solitons sombres.

Dans la dernière partie, nous avons établi deux formalismes qui permettent d'étudier les propriétés de localisations des excitations élémentaires dans un condensat de Bose : l'un basé sur "le formalisme de phase" développé dans la limite hydrodynamique (c'est-à-dire valide pour $\hbar\omega \ll \mu$) et l'autre basé sur une approche de matrice de transfert valable quelle que soit l'énergie : les deux méthodes s'accordant dans la limite appropriée.

Les résultats que nous avons obtenus ici sont quant à eux conformes à l'intuition :

- A basse énergie, nous avons obtenu que la longueur de localisation divergeait en $\frac{1}{\omega^2}$ et ce conformément aux propriétés de localisation auquel on s'attendrait pour des phonons.
- A haute énergie, nous avons obtenu que la longueur de localisation divergeait en ω et ce conformément aux propriétés de localisation auquel on s'attendrait pour des particules libres.

Enfin quant aux perspectives possibles de recherche, on pourrait développer davantage l'application de la méthode inverse aux solitons sombres.

On pourrait étudier la diffusion d'un soliton sombre par un obstacle dans le cadre de la méthode inverse ce qui permettrait de généraliser les travaux de Kivshar et Malomed [92] quant à l'application de la méthode inverse dans le cadre de l'équation de Schrödinger non-linéaire répulsif.

On pourrait aussi étudier la propagation d'un soliton sombre dans différents potentiels, "plus exotiques". On peut d'ailleurs citer à ce sujet les travaux de F. Abdullaev et J. Garnier [129] qui ont étudié la propagation d'un soliton brillant dans un potentiel non-linéaire.

Enfin rappelons que ce type d'étude sur le désordre dans les condensats de Bose est particulièrement en phase avec les recherches expérimentales actuelles. On peut citer, par exemple, à ce sujet le laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique dont le groupe d'Alain Aspect et de Philippe Bouyer qui développe une expérience visant à étudier les phénomènes de localisation dans les condensats uni-dimensionnel ou bien le groupe LENS de l'université de Florence qui travaille sur les mêmes thématiques.

Annexe A

Longueur de diffusion

Dans le paragraphe sur l'équation de Gross-Pitaievskii, nous avons vu que le paramètre fondamental entrant dans la description physique du condensat était la longueur de diffusion a ¹ du potentiel d'interaction.

Nous allons dans cette annexe commencer par définir la longueur de diffusion et en calculer ces deux premiers termes dans le cadre de l'approximation dite de Born².

Considérons deux particules de masse m qui interagissent via un potentiel d'interaction U_{int} , décrit par l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + U_{int}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}). \quad (\text{A.1})$$

Si l'on se place dans l'espace de Fourier, en définissant³ :

$$\tilde{\psi}(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}, \quad (\text{A.3})$$

$$\tilde{U}(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_{int}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}. \quad (\text{A.4})$$

Sous ces notations, il n'est pas très difficile de voir que l'équation de Schrödinger est équivalente dans l'espace de Fourier à :

$$\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} - E \right) \tilde{\psi}(\mathbf{q}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \tilde{\psi}(\mathbf{q}') \frac{d^3\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} = 0. \quad (\text{A.5})$$

¹Nous avons vu que si la longueur de diffusion a était reliée à la densité n du condensat par $na^3 \ll 1$ alors on pouvait décrire le condensat par une théorie de champ moyen menant à l'équation de Gross-Pitaievskii

²Seul le premier terme est nécessaire pour décrire le condensat, le deuxième étant lui important pour décrire les excitations dans le cadre de la théorie de Bogoliubov.

³La transformée de Fourier inverse se déduit par

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}. \quad (\text{A.2})$$

On écrit alors la fonction d'onde du système sous la forme d'une onde plane incidente plus d'une partie diffusée :

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.6})$$

où $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ a la forme d'une onde sphérique lorsque $r \rightarrow +\infty$.

Dans l'espace de Fourier, l'équation (A.6) se réécrit sous la forme :

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{k}) + \tilde{\chi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}), \quad (\text{A.7})$$

ce qui substitué dans A.5 permet d'écrire :

$$\frac{\hbar^2}{2m} (k^2 - q^2) \tilde{\chi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \tilde{U}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \tilde{\chi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}') \frac{d^3 \mathbf{q}'}{(2\pi)^3}. \quad (\text{A.8})$$

On écrit alors $\tilde{\chi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ sous la forme :

$$\tilde{\chi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{F(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{q^2 - k^2 - i0^+}. \quad (\text{A.9})$$

Le terme $i0^+$ signifie limite de $i\delta$ quand δ tend vers 0 par valeur positive. Il permet d'éviter la singularité en $q^2 = k^2$ de sorte que lorsque $r \rightarrow \infty$, $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ ait la forme d'une onde sphérique $\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} F(k\mathbf{n}, k\mathbf{n}')$ avec $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ [120].

On peut alors montrer que le terme $F(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ vérifie l'équation :

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = -\tilde{U}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) - \frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{U}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') F(\mathbf{k}, \mathbf{q}')}{q'^2 - k^2 - i0^+} \frac{d^3 \mathbf{q}'}{(2\pi)^3}. \quad (\text{A.10})$$

En première approximation, en négligeant le terme intégrale dans A.10, on a :

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = -\tilde{U}(\mathbf{q} - \mathbf{k}). \quad (\text{A.11})$$

En réinjectant cette expression dans A.10, on obtient en deuxième approximation :

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = -\tilde{U}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) + \frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{U}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \tilde{U}(\mathbf{q}' - \mathbf{k})}{q'^2 - k^2 - i0^+} \frac{d^3 \mathbf{q}'}{(2\pi)^3}. \quad (\text{A.12})$$

On définit l'amplitude de diffusion $f(\mathbf{n}, \mathbf{n}')^4$ par :

$$f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \frac{m}{2\pi\hbar^2} F(k\mathbf{n}, k\mathbf{n}'). \quad (\text{A.13})$$

On obtient donc :

$$f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left(\tilde{U}(k\mathbf{n}' - k\mathbf{n}) + \frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') \tilde{U}(\mathbf{k}'' - \mathbf{k})}{k^2 - k''^2 + i0^+} \frac{d^3 \mathbf{k}''}{(2\pi)^3} \right). \quad (\text{A.14})$$

⁴L'amplitude de diffusion est déterminée par la valeur $q = k$ de la fonction $F(\mathbf{k}, \mathbf{q})$

A basse température, seuls interviennent les termes de basse énergie et on définit la longueur de diffusion a par :

$$a = - \lim_{k \rightarrow 0} f(\mathbf{n}, \mathbf{n}'). \quad (\text{A.15})$$

Enfin si l'on considère la collision de deux particules identiques interagissant via un potentiel $U_{int}(\mathbf{r})$, on se place dans le référentiel du centre de masse et on remplace m par $m/2$ dans A.14, on obtient alors au final :

$$a = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \left(\tilde{U}_0 + \frac{m}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{U}(-\mathbf{k}'') \tilde{U}(\mathbf{k}'')}{-k''^2 + i0^+} \frac{d^3 k''}{(2\pi)^3} \right), \quad (\text{A.16})$$

avec $\tilde{U}_0 = \tilde{U}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_{int}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}$

Annexe B

Energie du fondamental et équation d'état

Dans cette annexe, nous décrirons l'évolution de la fraction d'atomes non-condensés. Une manière de faire est d'utiliser l'approche de Bogoliubov que ce dernier a établi en 1947. Celle-ci repose sur deux hypothèses :

- D'une part d'écrire l'opérateur champ bosonique du système sous la forme :

$$\hat{\chi}(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) + \hat{\chi}'(\mathbf{r}, t), \quad (\text{B.1})$$

où l'on décrit le condensat grâce à un champ scalaire.

- D'autre part en supposant que la fraction d'atomes non-condensés est faible comparée à la fraction d'atomes condensés.

Nous allons étudier l'impact des interactions sur l'énergie du fondamentale du condensat, son potentiel chimique et sur la déplétion quantique du fondamental. Puis nous étudierons le spectre des excitations dans un condensat de Bose du aux interactions.

B.1 Energie du fondamental et équation d'état

B.1.1 Approximation à l'ordre le plus bas

Reprenons ici l'hamiltonien du système qui décrit un gaz uniforme :

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\chi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right] \hat{\chi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\chi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\chi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\chi}(\mathbf{r}') \hat{\chi}(\mathbf{r}), \quad (\text{B.2})$$

Pour un gaz uniforme occupant un volume V , l'opérateur champ peut s'écrire :

$$\hat{\chi}(\mathbf{r}, t) = \sum_p \hat{a}_p \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}. \quad (\text{B.3})$$

En réinjectant cette expression dans B.2, l'hamiltonien prend la forme suivante :

$$\hat{H} = \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{1}{2V} \sum_{p_1, p_2, q} V_q \hat{a}_{p_1+q}^\dagger \hat{a}_{p_2-q}^\dagger \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2}, \quad (\text{B.4})$$

où V_q représente la transformée de Fourier du potentiel d'interaction $V(r)$ soit :

$$V_q = \int d\mathbf{r} V(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar}. \quad (\text{B.5})$$

Or on considère que la très grande majorité des atomes sont dans le fondamental, on prendra donc en première approximation $q = 0$, ce qui conduit à¹ :

$$V_0 = \int d\mathbf{r} V(\mathbf{r}). \quad (\text{B.6})$$

L'hamiltonien B.4 s'écrit donc finalement :

$$\hat{H} = \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{V_0}{2V} \sum_{p_1, p_2, q} \hat{a}_{p_1+q}^\dagger \hat{a}_{p_2-q}^\dagger \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2}. \quad (\text{B.7})$$

Le point important consiste dans le cas dilué à remplacer l'opérateur \hat{a}_0 par un nombre, soit :

$$\hat{a}_0 \equiv \sqrt{N_0}. \quad (\text{B.8})$$

Dans un gaz idéal à température nulle tous les atomes sont dans le fondamental $p = 0$, en revanche dans le cas du gaz dilué, le nombre d'atomes dans des états excités $p \neq 0$ est fini mais reste faible par rapport à la fraction d'atomes condensée.

En première approximation, on néglige alors ces termes dans l'hamiltonien B.7, en prenant donc $N_0 \sim N^2$, on obtient comme énergie du fondamental :

$$E_0 = \frac{N^2 V_0}{2V}. \quad (\text{B.9})$$

En approximant, le potentiel d'interaction par :

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (\text{B.10})$$

avec $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ et où a est la longueur d'onde de diffusion du potentiel d'interaction.

Dans ce cas, on obtient finalement pour l'énergie du fondamental :

$$E_0 = \frac{1}{2} N n g, \quad (\text{B.11})$$

où $n = N/V$ correspond à la densité du gaz

A partir de B.11, on peut définir, la pression, la compressibilité du gaz et son potentiel chimique à température nulle :

– On a pour la pression, l'équation d'état suivante :

$$P = -\frac{\partial E_0}{\partial V} = \frac{g n^2}{2}, \quad (\text{B.12})$$

¹On retrouve ici le fait que pour un condensat dilué, ce qui importe est non pas le potentiel d'interaction mais son intégrale ce qui justifie qu'on puisse l'approximer par un potentiel effectif plus simple.

²Cette approximation revient à remplacer \hat{a}_0 non pas par $\sqrt{N_0}$ mais par \sqrt{N} .

– Concernant la compressibilité, on a :

$$\chi = \frac{\partial n}{\partial P} = \frac{1}{g n}, \quad (\text{B.13})$$

– Enfin concernant le potentiel chimique, on a³ :

$$\mu = \frac{\partial E_0}{\partial N} = g n. \quad (\text{B.16})$$

Dans la prochain partie nous expliciterons donc le rôle des interactions sur ces quantités.

B.1.2 Approximation au premier ordre

Reprenons notre hamiltonien B.4

$$\hat{H} = \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{1}{2V} \sum_{p_1, p_2, q} V_q \hat{a}_{p_1+q}^\dagger \hat{a}_{p_2-q}^\dagger \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2}. \quad (\text{B.17})$$

On considère, cette fois-ci les termes quadratiques en \hat{a}_p , B.4, s'écrit alors :

$$\hat{H} = \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{V_0}{2V} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \frac{V_0}{2V} \sum_{p \neq 0} \left(4 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_p + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{-p}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_p \hat{a}_{-p} \right). \quad (\text{B.18})$$

On remplace alors dans le troisième terme de B.18, \hat{a}_0 et \hat{a}_0^\dagger comme précédemment par \sqrt{N} . En revanche dans le second terme, on utilise la relation de normalisation :

$$\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \sum_{p \neq 0} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p = N, \quad (\text{B.19})$$

ce qui conduit à écrire $\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0$ sous la forme :

$$\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 = N^2 - 2N \sum_{p \neq 0} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p. \quad (\text{B.20})$$

De même, la transformée de Fourier V_0 du potentiel d'interaction, si l'on considère les états $p \neq 0$ s'écrit[120] dans le cadre de la deuxième approximation de Born :

$$V_0 = g \left(1 + \frac{g}{V} \sum_{p \neq 0} \frac{m}{p^2} \right). \quad (\text{B.21})$$

³On peut établir la vitesse du son par des considérations hydrodynamiques soit :

$$\frac{1}{m c^2} = \frac{\partial n}{\partial P}, \quad (\text{B.14})$$

qui conduit à :

$$c = \sqrt{\frac{g n}{m}}, \quad (\text{B.15})$$

ce qui mène à $\mu = m c^2$.

Ainsi donc l'hamiltonien va s'écrire :

$$\hat{H} = \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{g N^2}{2V} + \frac{g n}{2} \sum_{p \neq 0} \left(2 \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{-p}^\dagger + \hat{a}_p \hat{a}_{-p} + \frac{m g n}{p^2} \right). \quad (\text{B.22})$$

L'étape suivante consiste à linéariser cette hamiltonien, pour cela on utilise les transformations suivantes :

$$\hat{a}_p = u_p \hat{b}_p + v_{-p}^* \hat{b}_{-p}^\dagger, \quad (\text{B.23})$$

$$\hat{a}_p^\dagger = u_p^* \hat{b}_p^\dagger + v_{-p} \hat{b}_{-p}, \quad (\text{B.24})$$

avec \hat{b}_p qui vérifie les règles usuelles de commutation pour un opérateur bosonique soit : $\hat{b}_p \hat{b}_{p'}^\dagger - \hat{b}_{p'}^\dagger \hat{b}_p = \delta_{pp'}$, il est alors facile de voir que u_p et v_{-p} doivent satisfaire :

$$|u_p|^2 - |v_{-p}|^2 = 1. \quad (\text{B.25})$$

On peut donc choisir :

$$u_p = \cosh \alpha_p, \quad (\text{B.26})$$

$$v_{-p} = \sinh \alpha_p. \quad (\text{B.27})$$

Concernant le paramètre α_p , on le détermine de sorte à ce que lorsque l'on réinjecte les transformations B.23 et B.24 dans B.22, les termes non-diagonaux en $\hat{b}_p^\dagger \hat{b}_{-p}^\dagger$ et $\hat{b}_p \hat{b}_{-p}$ soient nuls. Afin que l'hamiltonien B.22 s'écrive comme une constante auquel s'ajoute des termes en $\hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p$.

Cette condition mène à :

$$\frac{g n}{2} (|u_p|^2 + |v_{-p}|^2) + \left(\frac{p^2}{2m} + g n \right) u_p v_{-p} = 0, \quad (\text{B.28})$$

ce qui conduit à :

$$\coth 2\alpha_p = -\frac{p^2/2m + g n}{g n}. \quad (\text{B.29})$$

Au final les coefficients u_p et v_{-p} deviennent :

$$u_p = \sqrt{\frac{p^2/2m + g n}{2\epsilon(p)} + \frac{1}{2}}, \quad (\text{B.30})$$

$$v_{-p} = -\sqrt{\frac{p^2/2m + g n}{2\epsilon(p)} - \frac{1}{2}}, \quad (\text{B.31})$$

où

$$\epsilon(p) = \left[\frac{g n}{m} p^2 + \left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{B.32})$$

Ainsi donc avec les résultats B.30, B.31 et B.23,B.24 l'hamiltonien B.22 s'écrit :

$$\hat{H} = E_0 + \sum_p \epsilon(p) \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p. \quad (\text{B.33})$$

Cet hamiltonien apparait comme une somme d'hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques décrivant les excitations élémentaires dans le condensat, ces excitations peuvent ainsi être décrites comme des particules ayant un spectre en énergie $\epsilon(p)$ et dont les opérateurs de création et d'annihilation sont \hat{b}_p^\dagger et \hat{b}_p

On peut donc désormais déterminer l'énergie du fondamental, le potentiel chimique et la déplétion quantique du fondamental au-delà du champ moyen.

B.2 Au-delà du champ moyen

En considérant les interactions, l'énergie du fondamental est donc :

$$E_0 = g \frac{N^2}{2V} + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \left[\epsilon(p) - gn - \frac{p^2}{2m} + \frac{m(gn)^2}{p^2} \right]. \quad (\text{B.34})$$

La dernière étape dans le calcul de l'énergie du fondamental est de remplacer dans B.34, la somme discrète sur p par une intégrale sur $V d\mathbf{p}/(2\pi\hbar)^3$, il vient alors :

$$E_0 = g \frac{N^2}{2V} \left[1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} (na^3)^{1/2} \right]. \quad (\text{B.35})$$

Le premier terme du membre de droite de B.35 correspond au terme de champ moyen et le second à ces corrections.

Pour le potentiel chimique $\mu = \partial E_0 / \partial N$, il est alors facile d'obtenir :

$$\mu = gn \left[1 + \frac{32}{3\sqrt{\pi}} (na^3)^{1/2} \right]. \quad (\text{B.36})$$

Enfin le dernier point que l'on peut étudier est la déplétion quantique du condensat. Le nombre d'atomes dans un état $p \neq 0$ est $n_p = \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \rangle$, ce qui d'après B.23 peut s'écrire :

$$n_p = \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \rangle = |v_{-p}|^2 + |u_p|^2 \langle \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p \rangle + |v_{-p}|^2 \langle \hat{b}_{-p}^\dagger \hat{b}_{-p} \rangle. \quad (\text{B.37})$$

Le nombre de particules condensées est donc :

$$N_0 = N - \sum_{p \neq 0} n_p = N - \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \left[|v_p|^2 + \frac{|u_p|^2 + |v_{-p}|^2}{\exp[\beta \epsilon(p)] - 1} \right]. \quad (\text{B.38})$$

En intégrant B.38, on obtient :

$$N_0 = N \left[1 - \frac{8}{15\sqrt{3\pi}} (na^3)^{1/2} \right]. \quad (\text{B.39})$$

Avec des données expérimentales typique, soit $a = 5\text{nm}$ et $n = 10^{15}\text{atomes.cm}^{-3}$, on obtient :

$$\frac{\Delta N}{N} \sim 0.2\%. \quad (\text{B.40})$$

L'approximation de champ moyen est donc très bien vérifiée

Annexe C

Equations hydrodynamiques : Régime de Thomas-Fermi transverse

C.1 Condensat de longueur finie

Nous allons ici montrer comment dans le cas d'un condensat de taille finie dans le régime de Thomas-Fermi transverse, nous pouvons pour le plus bas mode d'excitation obtenir une description hydrodynamique en l'absence de désordre.

Pour cela, considérons un potentiel confinant de la forme :

$$U(x, \mathbf{r}_\perp) = \frac{m\Omega^2}{2} \left(x^2 + \frac{r_\perp^2}{\lambda^2} \right), \quad (\text{C.1})$$

avec $\lambda \gg 1$, ce qui donne un condensat très allongé.

On définit la vitesse du son local $c^2(x, \mathbf{r}_\perp)$ par :

$$m c^2(x, \mathbf{r}_\perp) = g n_{TF}(x, \mathbf{r}_\perp) = \mu - U(x, \mathbf{r}_\perp), \quad (\text{C.2})$$

où $n_{TF}(x, \mathbf{r}_\perp)$ est la densité de Thomas-Fermi.

En posant $\mu = \frac{m}{2} \Omega^2 X^2$, la vitesse $c^2(x, \mathbf{r}_\perp)$ s'écrit :

$$c^2(x, \mathbf{r}_\perp) = \frac{\Omega^2}{2} \left(X^2 - x^2 - \frac{r_\perp^2}{\lambda^2} \right). \quad (\text{C.3})$$

L'extension transverse s'écrit quant à elle :

$$R_\perp^2(x) = \lambda^2 (X^2 - x^2), \quad (\text{C.4})$$

avec bien entendu $c^2(x, R_\perp(x)) = 0$ car la densité $n_{TF}(x, \mathbf{r}_\perp)$ s'annule sur les bords.

Comme nous nous l'avons déjà vu, en considérant des petites oscillations autour de la densité d'équilibre $n_{TF}(x, \mathbf{r}_\perp)$ de la forme $n(t, \mathbf{r}) = n_{TF}(x, \mathbf{r}_\perp) + e^{-i\omega t} \delta n(\mathbf{r})$, on obtient d'après l'équation (1.81) :

$$-\omega^2 \delta n = \nabla(c^2(x, \mathbf{r}_\perp) \nabla \delta n) \quad (\text{C.5})$$

$$= \partial_x(c^2(x, \mathbf{r}_\perp) \partial_x \delta n) + \nabla_\perp(c^2(x, \mathbf{r}_\perp) \nabla_\perp \delta n). \quad (\text{C.6})$$

On va considérer ici que les modes $m = 0$, c'est-à-dire un δn qui ne dépend que de x et r_\perp , on obtient alors :

$$-\omega^2 \delta n = \partial_x (c^2(x, \mathbf{r}_\perp) \partial_x \delta n) + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} \left[r_\perp c^2(x, \mathbf{r}_\perp) \frac{\partial \delta n}{\partial r_\perp} \right]. \quad (\text{C.7})$$

Le second terme du membre de droite ne va jouer aucun car dans la suite, on va moyenner sur $\int_0^{R_\perp} r_\perp dr_\perp$ et cela annule ce terme car $r_\perp c^2(x, \mathbf{r}_\perp) \frac{\partial \delta n}{\partial r_\perp}$ est nul en $r_\perp = 0$ et $r_\perp = R_\perp$.

Il reste donc :

$$-\omega^2 \delta n = \partial_x (c^2(x, \mathbf{r}_\perp) \partial_x \delta n). \quad (\text{C.8})$$

On développe la solution sous la forme :

$$\delta n(x, \mathbf{r}_\perp) = \delta n_0(x) + \lambda^2 r_\perp^2 \delta n_1(x) + \dots \quad (\text{C.9})$$

Puis on intègre sur $\int_0^{R_\perp(x)} r_\perp dr_\perp$, cela donne :

$$\int_0^{R_\perp(x)} r_\perp dr_\perp \delta n = \frac{R_\perp^2(x)}{2} \delta n_0(x) + \lambda^2 \frac{R_\perp^4(x)}{4} \delta n_1(x) + \dots \quad (\text{C.10})$$

Lorsque $\lambda \rightarrow 0$ seuls les termes en δn_0 vont importer.

Le terme de droite de (C.8) va alors s'écrire :

$$-\Omega^2 x \partial_x \delta n_0 + c^2(x, \mathbf{r}_\perp) \partial_x^2 \delta n_0, \quad (\text{C.11})$$

qui intégré de 0 à $R_\perp(x)$ donne :

$$\begin{aligned} & -\Omega^2 x \partial_x \delta n_0 \frac{R_\perp^2(x)}{2} + \frac{\Omega^2}{2} \int_0^{R_\perp(x)} r_\perp dr_\perp [X^2 - x^2] \partial_x^2 \delta n_0 \\ & = -\Omega^2 x \partial_x \delta n_0 \frac{R_\perp^2(x)}{2} + \frac{\Omega^2}{2} \frac{R_\perp^2(x)}{2} \frac{1}{2} (X^2 - x^2). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

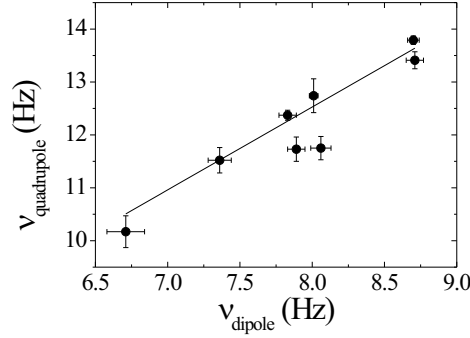
On obtient donc :

$$-\omega^2 \delta n_0(x) = -\Omega^2 x \partial_x \delta n_0 + \frac{\Omega^2}{4} (X^2 - x^2) \partial_x^2 \delta n_0(x). \quad (\text{C.13})$$

Finalement en développant δn_0 en série entière sous la forme $\delta n_0 = \sum_n a_n x^n$, on obtient :

$$\omega^2 = \frac{\Omega^2}{4} n(n+3). \quad (\text{C.14})$$

On peut illustrer ce résultat par les expériences du groupe de Florence qui ont mesuré les fréquences d'oscillations quadrupolaires et dipolaires dans des expériences avec du Rubidium [82] :



Rapport du mode quadrupolaire $n = 2$ sur le mode dipolaire $n = 1$.

La pente de la droite obtenue est de 1.57 ± 0.01 qui corrobore bien la valeur théorique prédit par (C.14).

C.2 Condensat de longueur infinie

Nous allons ici traiter le cas du condensat en l'absence de piège longitudinal en présence d'un potentiel désordonné $V_{ext}(x)$.

On écrit le potentiel confinant transverse V_{\perp} sous la forme :

$$V_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}) = \frac{m}{2}\Omega^2 r_{\perp}^2. \quad (\text{C.15})$$

L'équation (C.2) se réécrit ici :

$$m c^2(x, \mathbf{r}_{\perp}) = g n_{TF}(x, \mathbf{r}_{\perp}) = \mu - \frac{m}{2}\Omega^2 r_{\perp}^2 - V(x). \quad (\text{C.16})$$

On écrit alors $\mu = \frac{m}{2}\Omega^2 R_{\perp}^2$ avec R_{\perp} qui représente la taille transverse du condensat qui ne dépend désormais plus de x .

De la même manière, que ce que l'on a fait précédemment pour les équations (C.10) et (C.12), on écrit :

$$\int_0^{R_{\perp}} r_{\perp} dr_{\perp} (-\omega^2 \delta n) = \int_0^{R_{\perp}} r_{\perp} dr_{\perp} [\partial_x [c^2(x, \mathbf{r}_{\perp}) \partial_x \delta n]], \quad (\text{C.17})$$

avec d'une part :

$$\delta n(x, \mathbf{r}_{\perp}) \simeq \delta n_0(x) + (q r_{\perp})^2 \delta n_1(x) + \dots \quad (\text{C.18})$$

et d'autre part :

$$q R_{\perp} \ll 1. \quad (\text{C.19})$$

On peut montrer, de plus, que :

$$\int_0^{R_\perp} r_\perp dr_\perp c^2(x, \mathbf{r}_\perp) = \frac{R_\perp^2}{2} \frac{\mu/2 - V_{ext}(x)}{m}, \quad (\text{C.20})$$

ce qui conduit finalement pour l'équation (C.17) à :

$$-\omega^2 \delta n_0(x) = \partial_x [c^2(x) \partial_x \delta n_0(x)], \quad (\text{C.21})$$

avec $m c^2(x) = \frac{\mu}{2} - V_{ext}(x)$.

On retrouve donc ici un résultat analogue à celui obtenu à l'équation (1.170).

Annexe D

Equation de Fokker-Planck

Nous allons montrer dans cette annexe, comment à partir d'un processus stochastique pour une variable $z(x)$ s'écrivant sous la forme suivante :

$$\frac{dz}{dx} = a(z) + b(z)v(x), \quad (\text{D.1})$$

où $v(x)$ est un potentiel aléatoire, on peut associer une équation de Fokker-Planck pour la densité de probabilité associée à z .

On considère la probabilité que $z(x)$ soit dans l'intervalle $\zeta, \zeta + \delta\zeta$, celle-ci s'écrit $P(\zeta, x) d\zeta$ avec :

$$P(\zeta, x) = \langle \delta(z(x) - \zeta) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-i\alpha\zeta} \langle e^{i\alpha z(x)} \rangle. \quad (\text{D.2})$$

Si l'on calcule $\partial_x P(\zeta, x)$, on a :

$$\partial_x P(\zeta, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-i\alpha\zeta} i\alpha \langle [a(z) + b(z)v(x)] e^{i\alpha z(x)} \rangle. \quad (\text{D.3})$$

Le premier terme de droite de D.3 s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-i\alpha\zeta} i\alpha \langle a(z) e^{i\alpha z(x)} \rangle = -\partial_\zeta \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-i\alpha\zeta} \langle a(z) e^{i\alpha z(x)} \rangle, \quad (\text{D.4})$$

$$= -\partial_\zeta \langle a(z(x)) \delta[z(x) - \zeta] \rangle, \quad (\text{D.5})$$

$$= -\partial_\zeta \langle a(z(x)) P(\zeta, x) \rangle. \quad (\text{D.6})$$

Il reste ensuite à calculer le terme $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-i\alpha\zeta} i\alpha \langle b(z)v(x) e^{i\alpha z(x)} \rangle$.

Pour cela nous allons démontrer la formule suivante :

$$\langle v(x) R[v(x)] \rangle = \left\langle \frac{\delta R}{\delta v(x)} \right\rangle. \quad (\text{D.7})$$

Pour n'importe quelle fonctionnelle $R[v(x)]$, où $v(x)$ est un bruit blanc gaussien qui vérifie :

$$\langle v(x)v(0) \rangle = \delta(x) \quad (\text{D.8})$$

Pour celà écrivons $R[v]$ sous la forme suivante :

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n \frac{\delta^n R}{\delta v(x_1) \dots \delta v(x_n)} v(x_1) \dots v(x_n). \quad (\text{D.9})$$

De là, on en déduit que $\langle v(x) R[v(x)] \rangle$ peut s'écrire :

$$\langle v(x) R[v(x)] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n \frac{\delta^n R}{\delta v(x_1) \dots \delta v(x_n)} \langle v(x) v(x_1) \dots v(x_n) \rangle. \quad (\text{D.10})$$

Comme $v(x)$ est un bruit blanc gaussien le terme entre crochet dans D.10 s'écrit quant à lui :

$$\langle v(x) v(x_1) \dots v(x_n) \rangle = n \langle v(x) v(x_1) \rangle \langle v(x_2) \dots v(x_n) \rangle, \quad (\text{D.11})$$

$$= n \delta(x - x_1) \langle v(x_2) \dots v(x_n) \rangle, \quad (\text{D.12})$$

où le facteur n vient du fait que l'on peut contracter $v(x)$ avec n'importe lequel des $v(x_i)$

Ainsi $\langle v(x) R[v(x)] \rangle$ s'écrit finalement :

$$\langle v(x) R[v(x)] \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \dots dx_n \frac{\delta^n R}{\delta v(x) \delta v(x_2) \dots \delta v(x_n)} \langle v(x_2) \dots v(x_n) \rangle, \quad (\text{D.13})$$

$$= \left\langle \frac{\delta R}{\delta v(x)} \right\rangle. \quad (\text{D.14})$$

On en déduit donc que $\langle b(z) v(x) e^{i\alpha z(x)} \rangle$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\langle b(z) v(x) e^{i\alpha z(x)} \rangle = \left\langle \left[\frac{db}{dz} + i\alpha b(z(x)) \right] e^{i\alpha z(x)} \frac{\delta z(x)}{\delta v(x)} \right\rangle. \quad (\text{D.15})$$

Calculons donc $\frac{\delta z(x)}{\delta v(x)}$, on définit pour celà une fonction $G(x, y)$ par $G(x, y) = \frac{\delta z(x)}{\delta v(y)}$.

On intègre D.1 depuis $-\infty$ et l'on fait propager la solution vers les x croissants ainsi donc l'on aura $G(x, y) = 0$ pour $y > x$.

Dans le cas où $x > y$, on pose dans D.1 $v \rightarrow v + \delta v$ et $z \rightarrow z + \delta z$, on obtient alors :

$$\left[\frac{d}{dx} - \frac{da}{dz(x)} - \frac{db}{dz(x)} v(x) \right] \delta z(x) = b(z(x)) \delta v(x). \quad (\text{D.16})$$

On peut alors écrire $\delta z(x)$, sous la forme

$$\delta z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y) \delta v(y) dy, \quad (\text{D.17})$$

où $G(x, y)$ est lui solution de :

$$\left[\frac{d}{dx} - \frac{da}{dz} - \frac{db}{dz} v(x) \right] G(x, y) = b(z(y)) \delta(x - y), \quad (\text{D.18})$$

et vérifie $G(x, y) = 0$ pour $y > x$.

L'équation D.18 peut facilement être résolue, on obtient :

$$G(x, y) = b(z(y)) \Theta(x - y) \exp \left[\int_y^x \left[\frac{da}{dz(x')} + \frac{db}{dz(x')} v(x') \right] dx' \right], \quad (\text{D.19})$$

soit

$$G(x, x) = b(z(x)) \Theta(0). \quad (\text{D.20})$$

Reste ici un paramètre inconnu quant à la valeur de $\Theta(0)$.

Pour surmonter cette difficulté, on va remplacer dans l'équation (D.8), la fonction δ par une distribution de Dirac régularisée $\delta_\epsilon(x)$ paire, positive, très piqué autour de zéro, d'intégrale unité et tendant vers δ quand ϵ tend vers zéro.

Ce qui revient à remplacer dans D.19, $\Theta(x - y)$ par $\int_{-\infty}^{x-y} \delta_\epsilon(x') dx'$ ou dans D.20 $\Theta(0)$ par $\int_{-\infty}^0 \delta_\epsilon(x') dx'$. Or compte tenu des propriétés de $\delta_\epsilon(x)$, il est clair que $\int_{-\infty}^0 \delta_\epsilon(x') dx' = \frac{1}{2}$ qu'il convient donc de remplacer $\Theta(0)$ par $\frac{1}{2}$

On a donc :

$$G(x, x) = \frac{1}{2} b(z(x)), \quad (\text{D.21})$$

ce qui permet d'écrire :

$$\langle b(z) v(x) e^{i\alpha z(x)} \rangle = \frac{1}{2} \langle [b(z(x)) \frac{db}{dz} + i\alpha b^2(z(x))] e^{i\alpha z(x)} \rangle. \quad (\text{D.22})$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-i\alpha\zeta} i\alpha \langle b(z) v(x) e^{i\alpha z(x)} \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha\zeta} i\alpha \langle b(z(x)) \frac{db}{dz} e^{i\alpha z(x)} \rangle, \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha\zeta} (i\alpha)^2 \langle b^2(z(x)) e^{i\alpha z(x)} \rangle \\ &= \frac{-1}{2} \partial_\zeta [b(\partial_\zeta b) P] + \frac{1}{2} \partial_\zeta^2 [b^2 P], \\ &= \frac{1}{2} \partial_\zeta [b \partial_\zeta (b P)]. \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Ainsi au final, l'équation de Fokker Planck associée à D.1 pour la densité de probabilité $P(\zeta, x)$ est :

$$\partial_x P(\zeta, x) = \frac{1}{2} \partial_\zeta [b \partial_\zeta (b P(\zeta, x))] - \partial_\zeta [a P(\zeta, x)]. \quad (\text{D.24})$$

Annexe E

Nouveau chapitre de la thèse

Valorisation des compétences-un nouveau chapitre de la thèse

Prénom, Nom du doctorant : Nicolas BILAS.

Ecole doctorale : Ecole doctorale 381 : Constituants élémentaires et systèmes complexes

Université ou organisme de rattachement : Laboratoire de physique théorique et modèles statistiques-UMR 8626. Université Paris Sud (Orsay)

nom du "mentor" : Philippe BERTRAND-Société ATEMA

Sujet de thèse : Transport dans les condensats de Bose-Einstein uni-dimensionnels désordonnés

Nom du directeur de thèse : Nicolas PAVLOFF

Date de soutenance : 23 Juin 2006

E.0.1 Introduction

Contexte et objectif de la ma thèse

J'ai étudié durant ma thèse la "condensation de Bose-Einstein". Sans rentrer dans les détails techniques, il est assez facile, par une analogie, de présenter l'idée générale de ce dont en quoi consiste ce phénomène. Dans une lampe "normale", les constituants de lumière¹ y sont indépendants les uns des autres (énergies différentes, propagation différente...). En revanche dans un laser, tous ses constituants ont la même énergie, même direction de propagation...et à l'inverse de la lumière "normale" la lumière laser se propage en ligne droite sur de longues distances.

La "condensation de Bose-Einstein" est l'analogue au laser mais avec de la matière et non pas avec de la lumière. A l'inverse d'un gaz usuel où tous les atomes du gaz sont indépendants les uns des autres, dans un condensat de Bose tous les atomes sont, à l'image de la lumière laser, dans le même état, tous les atomes sont décrits de la même manière; on parle ainsi parfois de laser à atomes.

On parle également du domaine des "atomes froids", le phénomène de condensation ayant lieu pour une température $t \sim -273C$.

La condensation de Bose est un sujet très vaste qui ouvre un large éventail d'étude. Ce que j'ai étudié plus précisément tourne autour de deux axes :

- l'étude des solitons : les solitons sont des ondes qui ont la propriété de pouvoir se propager en conservant leur forme : le mascaret en Gironde est un exemple de soliton.
Certes, mon étude s'est placée dans un cadre différent, celui de la mécanique quantique et de la condensation de Bose, mais formellement les équations sont identiques. En effet, on peut rencontrer des solitons dans des domaines très différents (à la surface de l'eau, fibres optiques...). En revanche on peut décrire tous ces solitons par un ensemble très restreint d'équations (quatre équations permettent de décrire la plupart des solitons).
- l'autre partie de mon travail se situe sur le rôle du désordre sur la propagation de différents types d'onde. De nouveau, mon étude s'est placée dans un cadre bien précis mais les phénomènes aléatoires se retrouvent dans bon nombres de domaines : finances, turbulences, météorologie et leur étude est toujours formellement plus ou moins identiques.

J'ai choisi de faire cette thèse car :

- la physique des "atomes froids" est actuellement, disons, "à la mode". Ainsi faire une thèse dans ce domaine, m'a permis d'entrer dans un domaine dynamique, en pleine évolution,
- la condensation de Bose-Einstein est un domaine qui se situe à la croisée de bon nombres de domaines différents. Pouvoir travailler dans ce domaine m'a permis de conserver une certaine polyvalence et de pouvoir avoir un regard sur une large palette de la physique,
- j'ai décidé de faire une thèse en théorique, pour un goût pour les mathématiques, mais tout en restant à un niveau "concret". En effet, mon travail est proche des expériences actuelles, un point important qui m'a attiré était donc de "faire des mathématiques" sans m'éloigner de la réalité expérimentale.

¹C'est-à-dire ce qu'on appelle des photons

Enjeux du projet

Le but de ma thèse était de faire du transport avec des condensats, c'est-à-dire les mettre en mouvement d'une manière guidée mais sous un point de vue théorique. Ma thèse aura été une thèse théorique, c'est-à-dire que mon travail a consisté, pour schématiser, à établir des équations pour décrire le phénomène en question.

La recherche expérimentale étant dans ce domaine en pleine expansion, le "but du jeu" d'une telle thèse est, disons, de "devancer" l'expérience et donc de prédire ainsi ce que pourraient donner ces expériences qui essayent de transporter des condensats. La recherche expérimentale dans ce domaine n'étant pas une recherche à très très long terme, on peut facilement imaginer que d'ici quelques années les expériences vont pouvoir tester et vérifier la plupart des résultats théoriques que j'aurais pu obtenir durant ma thèse.

D'autre part, je ne voudrais pas ici négliger l'impact industriel de mon travail. En effet les débouchés en tant que tels de mon travail semblent assez restreints ou relever de l'imagination. En revanche, si l'on regarde le problème d'une manière un peu plus générale, on peut voir que les solitons ont des applications dans des domaines des plus variés :

- La société Algety Telecom a été créée, en 1999, par une équipe d'ingénieurs du CNET, le centre de Recherche et Développement de France Telecom. Cette équipe, qui a travaillé pendant plus de huit ans sur la technologie des solitons, est à l'origine de nombreuses avancées technologiques et détient le record de vitesse de transmission de données : 1 téraoctet/seconde sur 1000 km. Avec de telles capacités, on pourrait transmettre simultanément plus de 15 millions de communications téléphoniques sur une fibre optique fine comme un cheveu
- Numéro un mondial dans le domaine des transmissions sous-marines, Alcatel développe des recherches dans le domaine de la transmission soliton.
- Des travaux réalisés à l'INRIA ont modélisé l'écoulement du sang dans les artères et ont fait intervenir des solitons.

Je peux aussi citer des applications plus "originales" des solitons dans la nature comme le mascaret ou bien encore dans des domaines plus fondamentaux, les équations à solitons apparaissent dans l'étude de l'ADN ou de protéines ².

Les exemples que j'ai cités montrent que les solitons peuvent avoir des applications très importantes et que les concepts de ma thèse peuvent être utiles dans le développement futur de technologies à base de soliton.

Outres les solitons, les atomes froids trouvent aussi d'autres applications dans des domaines très variés.

Par exemple, dans ce qui a attiré à la mesure du temps, les atomes froids permettent de créer les horloges ou les dispositifs à mesurer l'accélération les plus précis qu'il soit.

Ainsi certaines entreprises s'intéressent de près aux atomes froids comme l'ONERA, Thalès

²Les problèmes qui font apparaître des solitons sont ce que l'on appelle en mathématiques des problèmes non-linéaires. Certains de ces problèmes, qui sont pour le moins "frappant", restent encore non-résolus, par exemple celui des vagues scélérates.

Les vagues scélérates sont des vagues qui ont une taille totalement démesurée par rapport à ce qu'on peut attendre dans les conditions de mer qui règnent lorsqu'elles surviennent. Les dernières théories, sur leur formation, font appel à une équation à soliton mais il n'existe pas véritablement de théorie explicative qui fassent l'unanimité quant à leur formation. Cela reste donc encore un problème ouvert.

ou bien encore SAGEM.

Par exemple l'ONERA qui est le leader mondial de l'accélérométrie spatiale cherche à développer la technologie des atomes froids pour donner des accéléromètres spatiaux de plus grandes performances.

La fédération de recherche

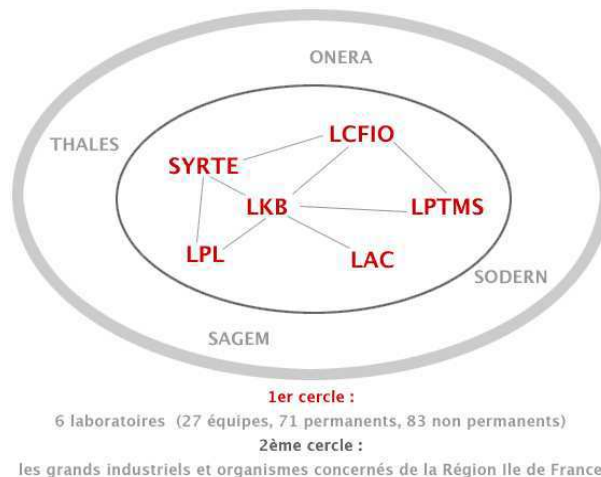
En fait, le groupe de théoriciens du LPTMS dans lequel j'ai fait ma thèse entre dans une structure beaucoup plus grande de fédération de laboratoires en Ile de France : l'Institut Francilien de Recherche sur les Atomes Froids IFRAF.

L'IFRAF est né de la volonté d'un certain nombre d'équipes de recherche franciliennes travaillant dans le domaine des atomes froids de se constituer un réseau de recherche. L'idée de l'IFRAF a été proposée initialement par Claude Cohen Tannoudji (prix Nobel de physique en 1997).

Le projet de l'IFRAF a été élaboré par Michèle Leduc (du LKB à l'ENS). Il a été présenté au Conseil Scientifique de la Région Ile-de-France en 2004 et à celui de la Ville de Paris en 2005. L'IFRAF a été déclaré ouvert au 1er octobre 2005. Il est créé pour 4 ans.

L'ensemble des projets IFRAF repose sur des financements d'origine multiple (CNRS, universités, agences nationales, collectivités territoriales, commission européenne, contrats privés). Parmi ceux-ci le soutien de la Région Ile-de-France est très important et a joué un rôle déterminant dans la mise en réseau des équipes de l'IFRAF.

Plus précisément, l'IFRAF développe un réseau de recherche regroupant une trentaine d'équipes appartenant à six laboratoires franciliens universitaires³, tous affiliés au CNRS et dépendant de sept établissements. L'IFRAF associe également dans un second cercle les industriels franciliens et les organismes impliqués dans les développements technologiques des travaux de recherche.



Ainsi donc, ma thèse participe, à sa mesure, à la structuration d'un pôle de compétences

³Ces laboratoires sont : le Laboratoire Kastler Brossel (LKB), le Laboratoire Charles Fabry (LCFIO), le laboratoire Systèmes de Référence Temps Espace (SYRTE), le Laboratoire Aimé Cotton (LAC), le Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques (LPTMS), le Laboratoire de Physique des Lasers (LPL).

national.

E.0.2 Le projet de thèse

Equipe projet

J'ai fait ma thèse au laboratoire de physique théorique et modèles statistiques (LPTMS) d'Orsay. Ce laboratoire est un laboratoire de théoriciens qui comprend 24 chercheurs permanents dont quatre dans le domaine dits des atomes froids auquel je peux ajouter les visiteurs, les posts-doc et les étudiants ce qui conduit à un total d'environ une dizaine de personnes travaillant sur cette thématique.

En ce qui concerne mon projet, j'ai eu une multitude de discussions et de rencontres informelles dont il serait impossible, ici, de faire la liste de tous les acteurs.

Ainsi, l'équipe projet "resserrée" a compris mon directeur de thèse ainsi que deux informaticiens en charge de toute la maintenance informatique sans lesquels je n'aurais jamais pu travailler.

Au total, mon projet a ainsi mobilisé environ 1,3 personnes équivalent à temps plein.

Les clients du projet

La "clientèle" d'une thèse, comme la mienne, consiste d'une part, bien entendu, dans les autres groupes de théoriciens vis-à-vis des différents concepts développés, mais il est ici important de souligner que ce genre de travail ne s'adresse pas seulement à un public théorico-théoricien mais aussi à une "clientèle" expérimentatrice qui est elle aussi très intéressée par ces études. Par exemple, mon troisième article intéresse beaucoup le groupe expérimental de l'Institut d'optique d'Orsay.

Au delà bien sûr, et dans une perspective à plus long terme, on peut imaginer des transferts de compétences vers l'industrie comme ceux décrits précédemment.

Les étapes du projet

La première étape que je qualifierais plutôt "d'étape 0" a consisté à orienter les recherches sur un thème précis : celui des solitons dans les condensats de Bose. Ceci a été fait par mon directeur de thèse et je n'ai pas vraiment eu de rôle ici.

La première étape, où je me suis impliqué véritablement, a consisté à m'approprier le sujet et les différentes techniques et concepts qui en découlent. Pour cela, j'ai établi un travail bibliographique "d'état des lieux".

Cette première étape m'a permis de choisir les techniques pour réaliser mon projet.

Il y a eu deux techniques :

- une bien connue dans la littérature, qui m'a permis d'avoir des résultats assez facilement,
- une autre, nouvelle, que j'ai développée. Cette méthode était donc plus risquée mais elle m'aura permis d'avoir des résultats plus intéressants.

La deuxième étape de mon travail a donc consisté, justement, à développer ces deux techniques pour pouvoir les appliquer au problème voulu précisément.

La troisième étape a été celle de vérification où j'ai vérifié que dans une certaine limite les deux techniques redonnaient les mêmes résultats.

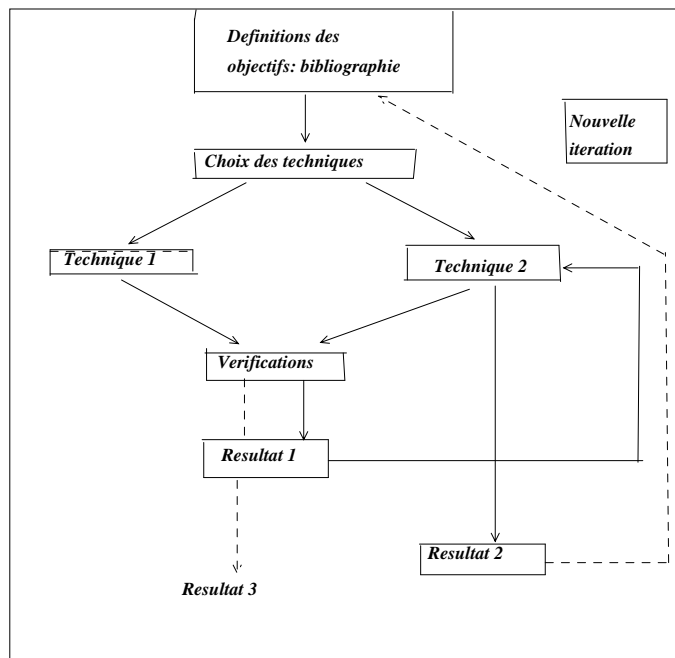
J'ai alors obtenu mes premiers résultats.

Ensuite pour obtenir mes seconds résultats, j'ai approfondi plus les techniques que j'avais développées, j'ai alors obtenu des résultats un peu plus intéressants.

Au vue de ces seconds résultats et après en avoir discuté autour de moi, il est apparu un nouvel objectif.

J'ai réalisé une nouvelle itération qui m'a permis d'obtenir mes derniers résultats.

Je peux résumer les différentes étapes par le schéma suivant :



Coût du projet

On peut évaluer le coût du projet. Celui-ci se décompose de la façon suivante :

- mon salaire personnel : je n'ai pas été à temps plein sur le sujet, j'ai enseigné deux semestres, en DEUG, ce qui m'aura donné un temps de travail effectif de 34 mois sur les 36 des trois ans de thèse,
- le salaire de mon directeur de thèse : concernant mon directeur de thèse, on peut évaluer son temps de travail effectif à 12 mois,
- le salaire des deux informaticiens, sans lesquels je n'aurais jamais pu travailler : les informaticiens ont travaillé tout au plus un mois sur nos problèmes informatiques.

Le temps de travail effectif peut donc se résumer par le tableau suivant :

Temps de travail effectif

<i>Doctorant</i>	<i>34mois</i>
<i>Directeur de these</i>	<i>12 mois</i>
<i>Informaticiens</i>	<i>1 mois</i>
	<i>47 mois</i>

- le coût d'infrastructure : Afin d'évaluer ce coût, je le considère équivalent à celui des charges salariales .
- les différents achats (Ecrans d'ordinateur, système informatique etc...)
- les coûts des déplacements.

Je peux donc résumer par le schéma suivant qui montre d'une part les dépenses et d'autre par les financements :

Depenses

<i>Salaires (charges comprises)</i>	<i>90000 Euros</i>
<i>Infrastructure</i>	<i>30000 Euros</i>
<i>Achat de materiel</i>	<i>1000 Euros</i>
<i>Deplacement</i>	<i>1000 Euros</i>
<i>Total</i>	<i>122000 Euros</i>

Finances

<i>Organisme</i>	<i>Montant</i>	<i>%</i>
<i>Universite</i>	<i>66000 Euros</i>	<i>54%</i>
<i>Ministere</i>	<i>51000 Euros</i>	<i>42%</i>
<i>C.N.R.S.</i>	<i>3000 Euros</i>	<i>2.4%</i>
<i>Fonds propres</i>	<i>2000 Euros</i>	<i>1.6%</i>
<i>Total</i>	<i>122000 Euros</i>	<i>100%</i>

Au vue du deuxième tableaux, mon travail a donc été principalement financé par l'université. Au vue du premier il est clair que la recherche fondamentale "coute cher".

E.0.3 Compétences

Je suis physicien de formation, plus précisément je suis diplômé du magistère de physique fondamentale de l'Université Paris 7 depuis 2003 ; j'ai obtenu le DEA "Champs, Particules, Matière" la même année (tous deux obtenu avec la mention assez bien). Je prépare, actuellement, une thèse de doctorat de physique au laboratoire de physique théorique et modèles statistiques de l'université d'Orsay.

A l'issue de ma thèse, je disposerai donc d'une expérience professionnelle de trois ans en tant que chercheur. Ma spécialité en physique est la mécanique quantique qui est la branche de la physique qui étudie l'univers à très petite échelle et je suis plutôt un théoricien.

Les compétences que j'ai pu développées au cours de ces trois années se situent principalement autour de trois axes :

◆ La gestion d'un projet de recherche :

- J'ai durant ces trois ans développé mon projet de recherche. Il aura fallu que je le suive depuis sa création jusqu'à sa finalité, ce qui m'aura permis d'acquérir beaucoup de recul pour pouvoir orienter mon travail suivant la situation auquel j'avais à faire face. Je pense aussi avoir développé des qualités d'adaptation vis-à-vis de tous les différents problèmes rencontrés.

Je pense aussi avoir su faire preuve de polyvalence. En effet mon travail se retrouve à la croisée de bon nombres de chemins : mathématiques, physique expérimentale, théorique (et même aussi l'industrie).

D'autre part, je pense être capable de m'adapter facilement à un projet nouveau et de pouvoir rapidement passer d'un projet à l'autre.

D'une manière plus générale, j'ai travaillé sur un point très précis dans le domaine des atomes froids et je suis tout à fait capable de travailler sur autre chose que des solitons. Il existe bien d'autres sujets auxquels je pourrais participer (après peut-être une courte période d'adaptation).

◆ Mes compétences que l'on pourrait qualifier de plus techniques se situent d'une part au niveau des mathématiques appliquées. Mon travail de recherche a consisté à mettre en œuvre les mathématiques pour décrire et développer des concepts liés à des phénomènes de la mécanique quantique : plus précisément, il s'agit de thèmes liés aux phénomènes non-linéaires, équations aux dérivées partielles et phénomènes aléatoires.

D'autres part, j'ai des compétences en programmation numérique. En effet durant ma thèse, j'ai, certes, développé des concepts mathématiques mais en parallèle, j'ai établi des modèles numériques pour pouvoir corroborer ces concepts.

◆ D'autre part, j'ai enseigné durant ma thèse. J'ai donc eu une expérience vis-à-vis d'étudiants où je pense avoir su faire preuve de pédagogie et de communication.

De plus, outre le passage hebdomadaire auprès des étudiants, enseigner nécessite de longues préparations en amont. Il est donc important de savoir organiser son travail pour pouvoir mener

à bon terme le projet de recherche et celui d'enseignement.

En cette fin de thèse, je pense avoir bien su gérer ces deux points : avoir été un "pas trop mauvais enseignant" et avoir conduit à terme un projet de recherche.

D'autre part, avec le recul, je pense avoir, outre les qualités de pédagogie nécessaires à l'enseignement, de bonnes aptitudes à la vulgarisation scientifique.

Au delà, je pense avoir des qualités, d'une part, au niveau rédactionnel, et d'autre part aussi en l'anglais.

Sur un plan plus personnel, je suis ouvert à la critique et certainement pas un individualiste, j'ai un esprit curieux avec une bonne culture générale.

E.0.4 Pistes professionnelles

En cette fin de thèse, avec le recul, je me suis aperçu que je préférerais en fait "expliquer" la science qu'en "faire" véritablement. Je pense être un meilleur "vulgarisateur" que scientifique en soit.

Les pistes professionnelles que je cible en priorité :

- Une piste possible serait l'édition scientifique. C'est un domaine où il est nécessaire d'avoir une excellente culture générale et un bon background scientifique ce que je pense disposer.
- Une autre possibilité consisterait à passer l'agrégation de physique pour m'orienter vers l'enseignement.

D'autre part, je ne souhaite pas non plus me fermer d'autre portes et en particulier dans l'industrie, "en n'ayant pas peur de l'inconnu", en effet c'est un monde qui ne m'est pas familier.

- Dans les centres de *R&D* des groupes industriels où les mathématiques ont un rôle prépondérant à jouer. Par exemple en ce qui concerne les mathématiques financières, l'optimisation des données où bien encore l'analyse statistique.
- Dans ce domaine, et au-delà des grandes sociétés, il existe également des PME spécialisés sur ces domaines dont le but est de développer des modèles mathématiques (par exemples CFM qui propose des modèles d'investissements) .

E.0.5 Conclusion

Je conclurais donc ce rapport par les deux points importants qui caractérisent et qui valorisent, à mon avis, le mieux ma formation :

- Sur l'aspect propre au métier de chercheur : pouvoir et devoir s'adapter constamment aux différents problèmes rencontrés,
- sur un point personnel : je connais très bien l'une des langues les plus internationales du monde, celle des mathématiques qui peut s'appliquer dans un nombre de situation quasi-infini.

Bibliographie

- [1] F. London, Nature (London) **141**, 643 (1938).
- [2] L. D. Landau, J. Phys. (Moscou) **5**, 71 (1941) et L. D. Landau, J. Phys. (Moscou) **11**, 91 (1947).
- [3] P.L. Kapitza, Nature (London) **141**, 74 (1938).
- [4] H. Allen et H. Misener **141**, 75 (1938).
- [5] Y. Shin *et al*, Phys. Rev. Lett. **92**, 050405 (2004).
- [6] B. P. Anderson et M. A. Kasevich, Science **282**, 1686 (1998).
- [7] C. Raman *et al*, Phys. Rev. Lett **83**, 2502 (1999).
- [8] N.N. Bogoliubov , J. Phys. (USSR) **11**, 23 (1947).
- [9] R. P. Feynmann, Prog. Low Temp, Phys.1 ,17, édité par J. Gorter North Holland, Amsterdam (1955).
- [10] M.R Matthews *et al*, Phys. Rev. Lett **83**, 2498 (1999).
- [11] K. W. Madison *et al*, Phys. Rev. Lett **84**, 806 (2000).
- [12] S. Burger *et al*, Phys. Rev. Lett **83**, 2502 (1999).
- [13] J.B. Jackson *et al*, Phys. Rev. A **61**, 51603 (2000).
- [14] C. Raman *et al* , Phys. Rev. Lett **83**, 2502 (1999).
- [15] M. Holzmann, La transition de Bose-Einstein dans un gaz dilué, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, (2000).
- [16] N. Pavloff, Phys. Rev. A **66**, 013610 (2002).
- [17] P. Leboeuf et N. Pavloff, Phys. Rev. A **64**, 033602 (2001).
- [18] S. Sinha *et al*, Phys. Rev. A **68**, 063608 (2003).
- [19] Y.J. Wang *et al*, Phys. Rev. Lett. **94**, 090405 (2005).
- [20] Y. Shin *et al*, Phys. Rev. A **72**, 021604 (2005).
- [21] A. Einstein, Sitzber, Kgl preuss. Akand. Wiss., 261 (1924).
- [22] A. Einstein, Sitzber, Kgl preuss. Akand. Wiss., 3 (1925).
- [23] S. N. Bose, Z. Phys **26**, 178 (1924).
- [24] C. Cohen Tannoudji Séminaire Poincaré 2003 : La condensation de Bose-Einstein.
- [25] B. Diu *et al* Physique Statistique, Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts.
- [26] A. Radouani, Thèse de doctorat de l'université de Rabat, soutenue le 30 Septembre 2004.

- [27] C. Cohen Tannoudji Cours au Collège de France (1997-1998).
- [28] Y. Castin, Cours d'école d'été des Houches 2001 : ArXiv, cond-mat 0105058
- [29] J.R. Ensher *et al* Physical Review Letters, **77**, 4984 (1996).
- [30] Cours du DEA de mécanique quantique d'atomes froids : http://www.lkb.ens.fr/recherche/atfroids/francais/activite_fr.html.
- [31] I.F. Silvera et J.T.M. Walraven Phys. Rev. Lett. **44**, 164 (1980).
- [32] S. Chu, Rev of Mod. Phys. **70**, 685 (1998).
- [33] C. Cohen Tannoudji, Rev of Mod. Phys. **70**, 707 (1998).
- [34] W.D. Philips , Rev of Mod. Phys. **70**, 721 (1998).
- [35] C. Cohen Tannoudji Cours au Collège de France (1996-1997).
- [36] M.H. Anderson *et al*, Science **269**, 198 (1995).
- [37] K.B. *et al* Physl Rev Lett **75**, 3969 (1995).
- [38] C. Cohen Tannoudji Cours au Collège de France (1998-1999).
- [39] F.Chevy, Thèse de doctorat de l'université Paris 6, soutenue le 17 Décembre 2001.
- [40] H.Hess *et al*, Phys. Rev. Lett. **59**, 672 (1987).
- [41] H.Hess, Phys. Rev. B **34**, 3476 (1986).
- [42] F.Gerbier , Thèse de doctorat de l'université Paris 6, soutenue le 9 Septembre 2003
- [43] E. Tiesinga *et al*, J. Rest. Natl. Inst. Stand. Technol **101**, 505 (1996).
- [44] M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).
- [45] K.V. Kheruntsyan *et al*, Phys. Rev. Lett. **91**, 40403 (2003).
- [46] D. Gangardt et G. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **90**, 10401 (2003).
- [47] D. Petrov, Thèse de Doctorat, soutenue le 9 Avril 2003 à l'université d'Amsterdam disponible à l'adresse : <http://staff.science.uva.nl/walraven/walraven/Theses.htm>.
- [48] D. Petrov *et al*, Phys. Rev. Lett. **85**, 3745 (2000).
- [49] L. Khaykovich *et al*, Science **296**, 1290-1293 (2002).
- [50] C. Raman *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2502 (1999)
- [51] R.Onofrio *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 2228 (2000)
- [52] W. Kane et L. Kadanoff, Phys. Rev. **155**, 80 (1967).
- [53] Boesten *et al*, Phys. Rev. A **55**, 636 (1997).
- [54] C. Cohen Tannoudji Cours au Collège de France (1997-1998).
- [55] A. Goerlitz *et al*, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402, (2001).
- [56] F. Schreck *et al*, Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001).
- [57] F. Dalfovo *et al*, Rev. of Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [58] A. D. Jackson *et al*, Phys. Rev. A **58**, 2417 (1998).
- [59] L.Pitaievskii, S.Stringari, "Bose-Einstein Condensation", Oxford University Press (2003).
- [60] M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).
- [61] J.H. Thywissen *et al* , Eur.Phys. J. D **7**, 361 (1999).

- [62] D.S. Petrov *et al*, Phys. Rev. Lett. **85**, 3745 (2000).
- [63] N. Pavloff et P. Leboeuf, Phys. Rev. A **64**, 33602 (2001).
- [64] C.A. Sackett *et al*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2031 (1998).
- [65] C.A. Sackett *et al*, Phys. Rev. Lett. **82**, 876 (1999).
- [66] E. Zaremba, Phys. Rev. A. **57**, 518 (1998).
- [67] S. Stringari, Phys. Rev. A. **58**, 2385 (1998).
- [68] P. O. Fedichev et G. V. Shlyapnikov , Phys. Rev. A. **63**, 45601 (2001).
- [69] Zabusky N.J., Phys. Rev. Lett. **15**, 240-243 (1965).
- [70] Michel Peyrard et Thierry Dauxois, Physique des Solitons, CNRS-Editions
- [71] D.Krökel *et al*, Phys. Rev.Lett. **60**,29 (1988).
- [72] V.E. Zakharov, A. R. Shabat, Sov Phys JETP **34**, 62-69 (1972).
- [73] V.E. Zakharov., A. R. Shabat, Sov Phys JETP **37**, 823 (1973).
- [74] M. Ablowitz *et al*, Studies in Applied Mathematics **53**, 249-315 (1994).
- [75] K.A. Kuznetsov et S.K. Turil'syn , Sov Phys JETP **37** 1583 (1988).
- [76] J.Denschlag *et al*, Science **287**, 97 (2000).
- [77] S.Burger *et al* Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999).
- [78] J. Cubizolles, Thèse de doctorat de l'université Paris 6, préparée au laboratoire Kastler Brossel, soutenue le 22 Juin 2004
- [79] I. V. Barashenkov and E. Yu. Panova, Physica D **69**, 114 (1993).
- [80] N. Bilas et N. Pavloff, Phys. Rev. A, **72**, 033618 (2005).
- [81] D. J. Frantzeskakis *et al*, Phys. Rev. A **66**, 053608 (2002).
- [82] C. Fort *et al*, Phys. Rev. Lett. **90**, 140405 (2003).
- [83] Y. S. Kivshar et W. Krolikowski, Opt. Comm. **114**, 353 (1995).
- [84] S. A. Gredeckul et Y. S. Kivshar, Physics Reports, **216**, No. 1
- [85] T. Antsygina *et al*, Fiz. Nizk. Temp **7**, 5 (1981).
- [86] L. A. Pastur et E.P. Fel'dman, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **67** **487** (1974).
- [87] Y.S. Kivshar *et al*, Phys. Rev. Lett. **64**,1693 (1990).
- [88] P.G. Drazin et R.S. Johnson, Solitons : an Introduction, Cambridge University Press
- [89] Messiah, Mécanique Quantique, Dunod, Paris (1995).
- [90] V.E. Zakharov, A. R. Shabat, Sov Phys JETP **34**, 62-69 (1972).
- [91] M. Ablowitz *et al*, Studies in Applied Mathematics, **53**, 349-315 (1974).
- [92] Y.S. Kivshar et B. Malomed, Rev. of Mod. Phys. **61**, 763-915 (1989).
- [93] N.G. Parker *et al*, J. Phys. B **36**, 2891 (2003).
- [94] N.G. Parker *et al*, in *Progress in Soliton Research* (Nova, New York, in press.
- [95] F.G Bass *et al*, Phys. Rep. **63**, 157 (1988).
- [96] A. R. Bishop *et al*, eds, Springer Proceedings in physics, Vol 39 : Disorder and non-linearity (Springer-Berlin) (1989).
- [97] F. Abdullaev *et al*, eds Springer Proceedings in physics, Vol 39 : Disorder and non-linearity (Springer-Berlin) (1991).

- [98] P. Erdős et R. Herndon, *Adv. in Phys.* **31**, 65 (1988).
- [99] P. Devillard et B. Souillard, *J. Stat. Phys.* **43**, 423 (1986).
- [100] B. Douçot et R. Rammal, *Europhys. Lett.* **3**, 969 (1987).
- [101] R. Knapp *et al*, *J. Stat. Phys.* **63**, 567 (1991).
- [102] P. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [103] V.I. Karpman, *Phys Scr* **20**, 462 (1979).
- [104] Y. Kivshar *et al*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **93**, 968 (1987).
- [105] V.E. Zakharov *et al*, *Theory of Solitons* (Nauka, Moskow)(in Russian) (English translation, Consultants Bureau, New York) (1984).
- [106] S.A. Gredeskul *et al*, *Phys. Rev. A* **41**, 3994 (1990).
- [107] D.N. Payton *et al*, *Phys Rev* **160**, 760 (1967).
- [108] J. Denschlag *et al*, *Science* **287**, 97 (2000).
- [109] P. Leboeuf *et al*, *Phys. Rev. A* **68**, 063608 (2003).
- [110] N. Pavloff, *Phys. Rev. A* **66**, 013610 (2002).
- [111] P.E. Lindelof *et al*, *Phys. Scr. T* **14**, 17 (1986).
- [112] M.V. Berry, S. Klein, *Eur. J. Phys* **18**, 222 (1997).
- [113] D.S. Wiersma *et al*, *Nature* **390**, 671 (1997).
- [114] R. Roth et K. Burnett, *Phys. Rev. A* **68**, 023604 (2003).
- [115] B. Damski *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080403 (2003).
- [116] U. Gavish et Y. Castin, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 020401 (2005).
- [117] D. Clement *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 140409 (2005).
- [118] C. Fort *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 70401 (2005).
- [119] S. John *et al*, *Phys. Rev. B* **27**, 05592 (1983).
- [120] L. Landau et E. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon, Oxford (1987).
- [121] M. M. Benderskii et L. A. Pastur, *Sov Phys JETP*, **30**(1), 158 (1970).
- [122] Antsygina *et al*, *Sov. Jour. of low Temp. Phys.* **7**(1), 1 (1981).
- [123] Lifshitz *et al*, *Introduction to the Theory of disordered system*, John Willey & Sons (1988).
- [124] K. Ishii, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **53**, 77 (1973)
- [125] R.J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II*, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [126] E.A. Spiegel, *Fluid dynamical form of the linear and non-linear Schrodinger equation*, *Phys* **D1**, 236, 1980.
- [127] C. Menotti et S. Stringari, *Phys. Rev. A* **66**, 43610 (2002).
- [128] M.R. Andrews, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 553 (1997).
- [129] F. Abdullaev, J. Garnier, *Phys. Rev. A*, Vol. 72, 061605R (2005).

Résumé

Cette thèse présente une étude théorique de phénomènes de transport dans les condensats de Bose uni-dimensionnels en présence de désordre. Nous avons porté une attention particulière aux effets non-linéaires causés par les interactions entre les atomes. En premier lieu, nous avons étudié la diffusion d'un soliton sombre par un obstacle de taille finie. Nous avons développé une méthode perturbative qui nous a permis d'étudier l'évolution dynamique du soliton et de déterminer la quantité d'énergie radiée lors de la diffusion. Puis, nous avons appliqué cette approche à l'étude de la diffusion d'un soliton par une succession aléatoire d'obstacles ponctuels. Nous avons montré que le soliton est accéléré jusqu'à la vitesse du son puis disparaît. Sa décroissance est alors algébrique et la distance parcourue par le soliton avant de se désintégrer est indépendante de sa vitesse initiale. Finalement, nous nous sommes intéressés au "destin" des radiations émises lors de la diffusion du soliton, ce qui nous a conduit à étudier les propriétés de localisation d'excitations élémentaires dans un condensat désordonné. Nous avons pour cela utilisé deux méthodes (l'une basée sur le formalisme de phase et l'autre sur celui des matrices de transfert) qui nous ont permis de déterminer la longueur de localisation à basse énergie dans le premier cas et quelle que soit l'énergie dans le second. Nous avons obtenu, à basse et à haute énergie, un comportement analogue à celui attendu respectivement pour des phonons et des particules sans interaction.

mots-clés : Ondes non-linéaires, condensation de Bose-Einstein, soliton sombre, localisation d'Anderson.

Abstract

This thesis presents a theoretical study of coherent transport phenomena in unidimensional Bose-Einstein condensates in presence of disorder. We devoted a particular attention to the nonlinear effects caused by the interactions between the atoms. In a first stage, we have studied the scattering of a dark soliton by a finite-size obstacle. We have developed a perturbative method which has enabled us to study the dynamics of the soliton and to determine the quantity of radiated energy during the scattering. We have then applied this approach to the study of the propagation of a soliton in presence of a random succession of point-like obstacles. We have shown that the soliton is accelerated until it reaches the speed of sound and then disappears. Its decay is not exponential but algebraic and the distance covered by the soliton in the disordered region before decaying is independent of its initial speed. Finally, we have studied the "fate" of the radiations emitted during the scattering of the soliton. This has led us to study the localization's properties of elementary excitations in a disordered condensate. We have used two methods (one based on the phase formalism and the other on the transfer matrix approach) which allowed us to determine the localization length at low energy in the first case and for all the range of energy in the second. We obtained, at low and high energy, a behavior similar to that of phonons and without interaction particles respectively.

keywords : Non-linear waves, Bose-Einstein condensation, dark soliton, Anderson's localization.