Géométrie des Groupes de Lie symplectiques

Hassène Siby

UNIVERSITE DE MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II

Discipline : Géométrie
Formation Doctorale : Mathématiques
Ecole Doctorale : Information , Structures et Systèmes

Géométrie des groupes de Lie symplectiques

Présentée et soutenue publiquement par

Hassène SIBY

Décembre 2005

JURY

Alexey Bolsinov, Professeur, Lomonosov Moscow State University
Martin Bordemann, Professeur, Université de Haute Alsace à Mulhouse
Alberto Medina, Professeur, Université de Montpellier II, Directeur
Philippe Revoy, Professeur Emérite, Université de Montpellier II

RAPPORTEURS

A. Bolsinov, Lomonosov Moscow State University
M. Bordemann, Université de Haute Alsace à Mulhouse

Table des matières

INTRODUCTION

Cette thèse est consacrée à l'étude de la géométrie des groupes de Lie symplectiques notamment les structures géométriques invariantes à gauche.Comme thèmes principaux nous nous intéréssons à l'étude :

• de la géométrie de certains groupes de Lie symplectiques exacts qu'on appelera par la suite groupes de Lie-Frobénius

• de la géométrie des groupes de Lie nilpotents de dimension 6

• des transformations affines d'un groupe de Lie symplectique de dimension 4.

Un groupe de Lie G est dit symplectique s'il admet une structure symplectique invariante à gauche c'est-à-dire une 2-forme différentielle fermée invariante à gauche dont le rang est égal à la dimension de G. L'algèbre de Lie d'un tel groupe sera appélée par abus de language algèbre de Lie symplectique (voir [**MR2**]). Soit (G, ω^+) un groupe de Lie symplectique muni d'une forme symplectique (invariante à gauche) tel que $\omega^+ = d\alpha^+$ où α^+ est une 1-forme invariante à gauche sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G ; un tel groupe sera dit symplectique exact ou de Lie-Frobenius .

Les résultats que l'on obtient dans le cadre des groupes de Lie-Frobénius constituent une extension des résultats obtenus sur les groupes de Lie symplectiques ou kählériens (voir [**DM1**],[**DM2**],[**DM3**],[**MR2**]).

On se propose de faire de la géométrie sur ces groupes de Lie.

Ce travail va donc se décomposer en trois chapitres :

Dans le chapitre 1 nous étudions la géométrie de certains groupes de Lie-Frobénius plus précisement les groupes de Lie du type $G_{n,p}(\mathbb{K}) = M_{n,p}(\mathbb{K}) \rtimes GL(\mathbb{K}^n)$ produit semi-direct du groupe additif des matrices à n lignes et p colonnes $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et du groupe $GL(\mathbb{K}^n)$; en désignant par $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'algèbre de Lie de $G_{n,p}(\mathbb{K})$ identifiée dans la suite à son espace tangent en son élément neutre ε et $\mathcal{G}^*_{n,p}(\mathbb{K})$ l'algèbre de Lie duale on munit ce groupe d'une structure symplectique invariante à gauche définit par la 2-forme $\omega^+ := d\alpha^+$ où $\alpha \in \mathcal{G}^*_{n,p}(\mathbb{K})$ est à orbite ouverte et α^+ est la 1-forme invariante à gauche sur $G_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $n = kp$, $p \geq 1$. Nous montrons l'existence de deux feuilletages lagrangiens transverses, à feuilles affines fermées, invariantes à gauche sur ces groupes (Théorème 1.4.2) , ceci implique, compte tenu d'un résultat dû à Hess ([**He**]), que $G_{n,p}(\mathbb{K})$ est muni d'une connexion symplectique à torsion nulle, invariante à gauche (Corolaire 1.4.3). Si $n > p$ (resp. $n = p$), nous décrivons

$G_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp. $G_{n,n}(\mathbb{K})$) comme double extension symplectique, au sens de [**DM2**], du groupe de Lie symplectique $G_{n-p,p}(\mathbb{K})$ (resp. $G_{n,1}(\mathbb{K})$) (Proposition 1.5.4). Enfin nous traitons quelques exemples pour illustrer ces résultats.
Soient (G, ω^+) un groupe de Lie symplectique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, H un sous groupe de Lie de G, d'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ et L_H l'action à gauche de H sur G définie par : $L_H(h, \sigma) = h\sigma$ pour tout $h \in H$ et pour tout $\sigma \in G$. On note $\mathcal{F}$ le sous fibré de TG tangent aux orbites de L_H , et $F^\perp$ son orthogonal symplectique . Il est évident que L_H est une action symplectique de plus $\mathcal{F}^\perp$ est complètement intégrable et si H est distingué, $\mathcal{F}^\perp$ est invariant à gauche et la feuille de $\mathcal{F}^\perp$ passant par l'élément neutre est un groupe de Lie de G.
Dans le cas où G est connexe simplement connexe, l'action L_H admet une application moment J_H définie par :

$$\begin{array}{rrcl} J^H : & G & \longrightarrow & \mathcal{H}^* \\ & \sigma & \longmapsto & J^H(\sigma) = i^t \circ Q(\sigma) \end{array}$$

où Q est le cocycle de G relativement à la représentation coadjointe associée au 1-cocycle de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^*$, $x \longmapsto \omega(x, \dot{})$ et où i est l'inclusion canonique de $\mathcal{H}$ dans $\mathfrak{g}$. J_H est équivariant pour l'action L_H et l'action affine $\oslash$ de H sur $\mathcal{H}^*$ définie par : $\oslash(\sigma, \xi) = Q(\sigma) + Ad^*_{\sigma^{-1}}(\xi)$. J_H est une submersion et le feuilletage $\mathcal{F}^\perp$ est un feuilletage simple dont les feuilles sont les composantes connexes des fibres d'un moment de L_H.
Si H est connexe distingué et fermé alors $J_H^{-1}(0)$ est un sous groupe de Lie de G et le sous groupe d'isotropie en 0 pour l'action $\oslash$ coincide avec $H \bigcap J_H^{-1}(0)$.
la variété $H \backslash H^\perp$ est alors un groupe de Lie symplectique.

Dans le chapitre 2 on traite le cas particulier des groupes de Lie symplectiques de dimension 6 ; nous explicitons la connexion linéaire plate ∇, associée à la structure symplectique invariante à gauche sur ces groupes, donnée par la formule

$$\omega^+\left(\nabla_{x^+} y^+, z^+\right) = -\omega^+\left(y^+, \left[x^+, z^+\right]\right).$$

nous distinguons quelques groupes de Lie qui admettent un couple de feuilletages lagrangiens transverses invariants à gauche (Théorème 2.4.1.1) et montrons que tous les groupes symplectiques nilpotents de dimension 6 admettent une structure affine symplectique invariante à gauche c'est à dire une connexion symplectique à courbure et torsion nulles invariante à gauche (Théorème 2.4.2.4). Nous revisitons ensuite la notion de double extension symplectique au niveau des groupes de Lie simplement connexes nilpotents en mettant en évidence l'application moment et les suites qui la décrivent. Enfin nous donnons des exemples de structures simplectiques sur certains de ces groupes de Lie symplectiques nilpotents et signalons l'existence des réseaux dans tous ces groupes. Ce qui nous fournit des exemples de nilvariétés symplectiques compacts ayant une très riche géométrie.

Enfin dans le chapitre 3 on étudie les groupes de Lie symplectiques de dimension 4 et la géométrie des groupes de Lie doubles en mettant en évidence leurs structures affines et leur structure complexe. Parmi ces groupes de Lie symplectiques de dimension de 4 nous distinguons ceux qui admettent un couple de feuilletages lagrangiens transverses . Nous entammons ensuite l'étude du groupe de transformation affine d'un groupe de Lie symplectique (affine) de dimension ≤ 4 en explicitant les automorphismes de leurs algèbres symétriques à gauche.

Chapitre 1

Géométrie de certains Groupes de Lie-Frobenius

1.1 Introduction.

Soit $G_{n,p}(\mathbb{K}) = M_{n,p}(\mathbb{K}) \rtimes GL(\mathbb{K}^n)$ le groupe de Lie produit semi-direct du groupe additif des matrices à n lignes et p colonnes $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et du groupe $GL(\mathbb{K}^n)$, l'action se faisant au moyen du produit matriciel, et $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ son algèbre de Lie identifiée dans la suite à l'espace tangent à $G_{n,p}(\mathbb{K})$ en son élément neutre ε.
Il est montré dans [**Ra**] que il existe des orbites ouvertes pour la représentation coadjointe de $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ si et seulement si $n = kp$, $p \geq 1$. Désormais nous supposons que n vérifie cette condition.
Si $\alpha \in \mathcal{G}^*_{n,p}(\mathbb{K})$ est à orbite ouverte et α^+ est la 1-forme invariante à gauche sur $G_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par α, la 2-forme $\omega^+ := d\alpha^+$ est une forme symplectique invariante sur $G_{n,p}(\mathbb{K})$. Dans ce travail nous étudions la géométrie du couple $(G_{n,p}(\mathbb{K}), d\alpha^+)$ que nous appelons groupe de Lie-Frobenius ou groupe de Lie symplectique exact.
Nous prouverons, parmi d'autres , les résultats suivants :
• Il existe deux feuilletages lagrangiens transverses, à feuilles affines fermées, invariantes à gauche sur $G_{n,p}(\mathbb{K})$ (Théorème 1.4.2). Ceci implique, compte tenu d'un résultat dû à Hess ([**He**]), que $G_{n,p}(\mathbb{K})$ est muni d'une connexion symplectique à torsion nulle, invariante à gauche.
• Si $n > p$ (resp. $n = p$), le groupe $G_{n-p,p}(\mathbb{K})$ (resp. $G_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \rtimes GL(\mathbb{K}^n)$) est la réduction symplectique de l'orthogonal symplectique $(M_{n,p}(\mathbb{K}))^{\perp}$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $G_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp, dans $G_{n,n}(\mathbb{K})$).
Réciproquement $G_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp. $G_{n,n}(\mathbb{K})$) est double extension symplectique, au sens

de [**DM2**], du groupe de Lie symplectique $G_{n-p,p}(\mathbb{K})$ (resp. $G_{n,1}(\mathbb{K})$) (Théorème 4.1).
Ce travail généralise plusieurs résultats connus pour le groupe affine classique $G_{n,1}(\mathbb{K})$ ([**BMO**],[**Dj**]). En particulier le Lemme 1.2.1 et le Théorème 1.3.5 montrent qu'il y a une unique structure symplectique invariante à gauche sur $G_{n,p}(\mathbb{K})$ ([**Dj**],[**Ag**]).
Pour completer cette introduction rappelons qu'un groupe de Lie symplectique (G, ω^+) possède une structure affine donnée par la connexion (sans courbure ni torsion) invariante à gauche ∇ définie pour x, y, z dans $T_\varepsilon(G_{n,p}(\mathbb{K}))$ par

$$(1) \qquad \omega^+(\nabla^+_{x^+}y^+, z^+) = -\omega^+(y^+, [x^+, z^+])$$

où x^+,désigne le champ de vecteurs invariant à gauche associée à x. On dit alors que le couple (G, ∇^+) est un groupe de Lie affine. Dans ce cas le produit $xy = (\nabla^+_{x^+}y^+)$ sur $\mathcal{G}$ est (à associateur) symétrique à gauche et il vérifie la condition $xy - yx = [x, y]$. Cette structure joue un rôle central dans notre étude.

1.2 Structures symplectiques invariantes à gauche sur les groupes de Lie $G_{n,p}(\mathbb{K})$.

Dans la suite $G_n(\mathbb{K})$ désigne le groupe des transformations affines de l'espace $\mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ est son algèbre de Lie. Par analogie, nous notons $G_{n,p}(\mathbb{K})$ le groupe produit semi-direct $M_{n,p}(\mathbb{K}) \rtimes GL(\mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K}) = M_{n,p}(\mathbb{K}) \rtimes gl(\mathbb{K}^n)$, son algèbre de Lie. On suppose dans la suite $n = kp$, $k \geq 1$ et $p \geq 1$
Il est clair que le groupe $G_{n,1}(\mathbb{K})$ est isomorphe au groupe des transformations affines de $\mathbb{K}^n$. Etant donné que $H^2(\mathcal{G}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathbb{K}) = 0$ (voir [**MR2**]) toute 2-forme alternée invariante à gauche sur $G_{n,1}(\mathbb{K})$ est invariantement exacte.
Ce résultat se généralise à $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ de la façon suivante :

1.2.1 Lemme. *Toute forme symplectique invariante sur $G_{n,p}(\mathbb{K})$ est exacte.*

Preuve. Si $k = p = 1$; $\mathcal{G}_{1,1}$ est isomorphe à $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ et le résultat suit.
Supposons k (ou p) supérieur à 1 et considérons $\omega \in Z^2(\mathcal{G}_{n,p}, \mathbb{K}) = 0$ où $\mathcal{G}_{n,p} \equiv M_{n,p}(\mathbb{K}) \rtimes gl(\mathbb{K}^n)$. Nous avons donc

$$\oint \omega([a, b], c) = 0 \text{ pour tout } a,b,c \text{ dans } \mathcal{G}_{n,p} \qquad (*).$$

où $\oint$ désigne la somme cyclique .
Si on prend $a = (x, u)$, $b = (y, v)$ et $c = (O, Id)$,
l'identité (*) implique $\omega(x, y) = 0$ pour tout $x, y \in M_{n,p}$, et par conséquent

$$\omega(x, b) + \omega(a, y) = \omega(I, uy - vx + [u, v]).$$

Ce qui est équivalent à

$$\omega(a,b) = \omega(I, uy - vx) = -\delta\beta(a,b) \quad \text{avec} \quad \beta = \omega(I,\cdot) \qquad \blacksquare$$

N.B. En fait, pour tout algèbre de Lie $\mathcal{G}$ ayant un élément a telle que ad_a est un projecteur de $\mathcal{G}$, on a $H^2(\mathcal{G},\mathbb{K}) = 0$.

Remarque 1. L'application

$$M_{p,n}(\mathbb{K}) \times gl(n) \longrightarrow (M_{n,p}(\mathbb{K}) \times gl(n))^*$$

$$(H,M) \longmapsto \alpha_{(H,M)}$$

définie par

$$\alpha_{(H,M)}(N,V) = tr(N.H) + tr(M.V)$$

est un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire.
Compte tenu de la remarque, dans la suite l'espace dual $\mathcal{G}^*_{n,p}$ de $\mathcal{G}_{n,p}$ est identifié à l'espace $M_{p,n}(\mathbb{K}) \times gl(n)$.
Se donner une 2-forme fermée invariante à gauche sur $G_{n,p}(\mathbb{K})$ revient donc à se donner une forme linéaire α sur $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$. La 2-forme $d\alpha^+$, où α^+ désigne la 1-forme invariante à gauche définie par α, est symplectique si et seulement si α est à orbite ouverte sous la représentation coadjointe de $G_{n,p}(\mathbb{K})$. Le résultat suivant décrit les représentations coadjointes de $G_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{G}_{n,p}$ quand on regarde $\mathcal{G}^*_{n,p}(\mathbb{K})$ comme ci-dessus, en découpant les matrices en blocs carrés d'ordre p.

1.2.2 Lemme. *Les représentations coadjointes ad^* de $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$et Ad^* de $G_{n,p}(\mathbb{K})$ sont décrites avec des notations évidentes par les formules suivantes :*

(i)
$$ad^*_{(0,u)}(H,N) = (-H.u, [u,N])$$

(ii)
$$ad^*_{(x,0)}(H,N) = (0, x.H)$$

(iii)
$$Ad^*_{(0,U)}(H,N) = (H.U^{-1}, UNU^{-1})$$

(iv)
$$Ad^*_{(X,Id_{\mathbb{K}^n})}(H,N) = (H, N + X.H)$$

ce qui implique $Ad^*_{(X,U)}(H,N) = (H.U^{-1}, UNU^{-1} + XHU^{-1})$

Preuve. Utilisons le plongement canonique de $G_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $GL(\mathbb{K}^{n+p})$; le produit des matrices s'effectuant par blocs d'ordre p. On a alors le produit dans $G_{n,p}(\mathbb{K})$ qui s'exprime par la formule :

$$(X,U)\cdot\left(X^{'},U^{'}\right) = \left(UX^{'} + X, UU^{'}\right)$$

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'identifie à

$$\left\{ \begin{pmatrix} u & x \\ O & O \end{pmatrix}, \quad u \in gl(n), \quad x \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \right\}$$

où les O désignent les matrices blocs de tailles respectives $p \times n$ et $p \times p$ formeés de zéros, muni du crochet de Lie définie par

$$[(x,u),(y,v)] = (uy - vx, [u,v]) \, .$$

Son algèbre de Lie duale d'identifie à

$$\left\{ \begin{pmatrix} N & O \\ H & O \end{pmatrix}, \quad N \in gl(n), \quad H \in M_{p,n}(\mathbb{K}) \right\}.$$

Ainsi on définit l'action adjointe du groupe par les automorphismes intérieurs

$$Ad_{(X,U)} : (x,u) \longmapsto (X,U)\,(x,u)\,(X,U)^{-1}$$

où $(X,U)^{-1} = (-U^{-1}X, U^{-1})$ désigne l'inverse de (X,U). Par suite l'action coadjointe de $G_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{G}^*_{n,p}(\mathbb{K})$ est définie en transposant $Ad_{(X,U)}$ de sorte que

$$Ad^*_{(X,U)}\,(H,N) =^t Ad_{(-U^{-1}X,U^{-1})}\,(H,N)$$

d'où

$$Ad^*_{(X,U)}\,(H,N) = \left(H.U^{-1}, UNU^{-1} + XHU^{-1}\right)$$

ce qui montre (iii) et (iv). Son action infénitésimale est défini par :

$$ad^*_{(x,u)} : (H,N) \longmapsto \left\langle ad^*_{(x,u)}\,(H,N)\,,(y,v)\right\rangle = -\,(H,N)\,([(x,u),(y,v)])$$

d'où

$$ad^*_{(x,u)}\,(H,N) = (-Hu, [u,N] + x.H)$$

ce qui montre (i) et (ii).■

Désignons par H_0 la matrice $p \times n$ dont tous les p-blocs sont nuls sauf le dernier qui est la matrice unité I_p et N_0 la matrice $n \times n$ dont tous les blocs sont nuls sauf ceux sous la diagonale principale qui sont égales à I_p. Les relations précédentes permettent de vérifier que l'orbite de (H_0, N_0) est ouverte puisque la sous algèbre d'isotropie correspondante est triviale.

1.3 Réduction symplectique . Feuilletages symplectiques invariants à gauche sur $G_{n,p}(\mathbb{K})$.

Soient $\alpha \equiv (H, N) \in \mathcal{G}^*_{n,p}(\mathbb{K})$ à orbite coadjointe ouverte, α^+ la 1-forme invariante à gauche sur $G_{n,p}(\mathbb{K})$. Munissons $G_{n,p}(\mathbb{K})$ de la forme symplectique exacte $\omega^+ := d\alpha^+$. Il est clair que l'action naturelle à gauche de $G_{n,p}(\mathbb{K})$ sur lui-même est hamiltonienne. Une application moment pour cette action, $\mu : G_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{G}^*_{n,p}(\mathbb{K})$, est donnée par la formule :

$$\langle \mu(\sigma), x\rangle = \langle \alpha^+(\sigma), x^-(\sigma)\rangle \text{ pour } \quad \sigma \text{ dans } \ G_{n,p}(\mathbb{K})$$

où x^- désigne le champ invariant à droite sur $G_{n,p}(\mathbb{K})$ associée à $x \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il revient au même de poser

$$\mu(\sigma) = Ad^*_\sigma \alpha \text{ pour } \ \sigma \text{ dans } \ G_{n,p}(\mathbb{K})$$

D'autre part puisque le sous-groupe $\mathcal{H} := M_{n,p}(\mathbb{K})$ de $G_{n,p}(\mathbb{K})$ est abélien, il est totalement isotrope dans $\mathcal{G}_{n,p}$ et l'application

$$m : G_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow L(\mathcal{H})^*,$$

où L(H) est l'algèbre de Lie de $\mathcal{H}$, donnée par :

$$m(\sigma) = \mu(\sigma)_{|L(\mathcal{H})} \qquad pour \quad tout \quad \sigma \quad dans \quad G_{n,p}(\mathbb{K})$$

est un moment pour l'action à gauche de $\mathcal{H}$ sur $G_{n,p}(\mathbb{K})$.
Si nous munissons $G_{n,p}(\mathbb{K})$ de la structure affine (**1**) associée à ω^+ nous avons alors le résultat suivant (à comparer avec le théorème 1.3 de [**DM2**]).

1.3.1 Théorème. *Soit $G_{n,p}(\mathbb{K}) \equiv M_{n,p}(\mathbb{K}) \rtimes GL(\mathbb{K}^n)$ muni de la structure symplectique exacte invariante $d\alpha^+$ avec $\alpha \equiv (H, N)$ et m l'application moment ci-dessus définie pour $\mathcal{H} = M_{n,p}(\mathbb{K})$.On a alors :*
1. *$m^{-1}(H)$ est un sous-groupe affine fermé de $G_{n,p}(\mathbb{K})$qui contient $\mathcal{H}$.*
2. *La suite canonique exacte de groupes de Lie*

$$\{\epsilon\} \to \mathcal{H} \to m^{-1}(H) \to m^{-1}(H)/\mathcal{H} \to \{\epsilon\} \tag{2}$$

est scindée. Elle est aussi une suite exacte de groupes de Lie affines.
3.*Le groupe symplectique réduit $m^{-1}(H)/\mathcal{H}$est isomorphe à :*

$$\begin{array}{ll} G_{n-p,p}(\mathbb{K}) & si \quad n > p \\ G_{p-1,1}(\mathbb{K}) & si \quad n = p > 1 \end{array}$$

4. *Dans la fibration principale canonique*

$$m^{-1}(H) \xrightarrow{i} G_{n,p}(\mathbb{K}) \xrightarrow{m} \Theta \tag{3}$$

où Θ est l'ensemble des matrices de rang p dans $M_{n,p}(\mathbb{K})^*$, la fibre $m^{-1}(H)$ est un sous-groupe de Lie affine de $G_{n,p}(\mathbb{K})$, et m est affine pour la structure affine usuelle de $\Theta \subset \mathbb{K}^{n.p}$.

Voici un résultat préalable à la démonstration du théorème.

1.3.2. Lemme. *Avec les notations du théorème, m est une submersion surjective. De plus on a la formule*

$$m((X,T)) = H.T^{-1} \quad \text{où} \quad (X,T) \quad \text{est} \quad \text{dans} \quad G_{n,p}(\mathbb{K}) \tag{4}$$

Preuve. La formule (**4**) est une conséquence directe de la définition de m et du lemme 1.2.1. Ceci étant il est clair que m est une submersion surjective sur l'ensemble Θ des matrices de rang p de $M_{p,n}(\mathbb{K})$.

Démonstration du théorème.

La formule (**4**) implique que $m^{-1}(H) = \{(X,T) \in G_{n,p}(\mathbb{K})/HT^{-1} = H\}$ est un sous-groupe (fermé) de $G_{n,p}(\mathbb{K})$ qui contient $\mathcal{H}$. De plus Le groupe de Lie quotient $m^{-1}(H)/\mathcal{H}$ s'identifie de façon évidente au sous-groupe fermé $\{(0,T) \in G_{n,p}(\mathbb{K})/HT^{-1} = H\}$ de $G_{n,p}(\mathbb{K})$. Ainsi (**2**) est une suite scindée de groups de Lie. D'autre part puisque $\mathcal{H}$ est commutatif et ω^+ est exacte, il suit que $L(\mathcal{H}) \subset L(\mathcal{H})^\perp$ et un calcul direct montre que $L(\mathcal{H})^\perp = L(m^{-1}(H))$.

En outre de la formule

$$\omega(xy, z) = -\omega(y, [x,z])$$

définissant le produit symétrique à gauche sur $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ (voir formule (**1**)) il découle que $L(\mathcal{H})^\perp$ est une sous-algèbre symétrique à gauche de $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ et que $L(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère de $L(\mathcal{H})^\perp$. Par conséquent (**2**) est une suite exacte de groupes de Lie affines c'est à dire que $m^{-1}(H)/\mathcal{H}$ est munis d'une structure affine invariante à gauche. Par ailleurs une explicitation matricielle des éléments du groupe $\{(0,T) \in G_{n,p}(\mathbb{K})/HT^{-1} = H\}$ permet de constater que le groupe $m^{-1}(H)/\mathcal{H}$ est isomorphe au groupe $G_{n-p,p}(\mathbb{K})$ si $n > p$ et à $G_{n-1,1}(\mathbb{K})$ si $n = p$. Ceci montre (**3**).

Montrons maintenant que la variété Θ est muni d'un parallélisme commutatif et donc d'une structure affine qui rend l'application moment affine.

Soit F le sous-fibré de $TG_{n,p}(\mathbb{K})$ tangent aux orbites de l'action L_μ et $F^\perp$ son orthogonal symplectique. Désignons par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^\perp$ les feuilletages associés respectifs. Puique $\mathcal{H}$ est distingué dans $G_{n,p}(\mathbb{K})$, le feuilletage $\mathcal{F}^\perp$ ou bien par les formes invariantes à gauche sur $G_{n,p}(\mathbb{K})$ données par $\eta_j' := i(e_j^+)\omega^+$ où les (e_i) forment une base de $L(\mathcal{H})$ et i désigne le produit intérieur, ou bien par les formes fermées (donc exactes) $\eta_j := i(e_j^-)\omega^+$. Evidemment les η_j sont basiques pour la fibration. Les formes $\bar{\eta}_j$ projetées des η_j par m définissent donc un parallélisme local. Ce parallélisme est global et commutatif car les $\bar{\eta}_j$ exactes. Ainsi donc m est affine. ■

Notons α_1 et α_2 les éléments de $\mathcal{G}^*_{n,p}(\mathbb{K})$ définis respectivement par

$$\alpha_1(X,U) = tr(H.X) \text{ et } \alpha_2(X,U) = tr(NU),$$

où (X,U) est dans $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a $\delta\alpha = \delta\alpha_1 + \delta\alpha_2$ puisque $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, d'autre part Rad$(\delta\alpha_1)$ et Rad$(\delta\alpha_2)$ sont des sous algèbres de Lie symplectiques de $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ car $\delta\alpha$ est non dégénérée. De plus l'espace vectoriel $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ est somme directe de sous-espaces Rad$(\delta\alpha_1)$ et Rad$(\delta\alpha_2)$, en effet

$$\text{Rad}(\delta\alpha_1)\bigcap\text{Rad}(\delta\alpha_2) = \{0\}$$

et dim(Rad$(\delta\alpha_1)$)= $p^2(k-1)k$ tandis que dim(Rad$(\delta\alpha_2)$)= $2p^2k$. Les calculs des dimensions se font facilement dans le cas où $\alpha \equiv (H_0, N_0)$ et on peut les étendre à n'importe quel point à orbite ouverte. Plus précisément, on peut voir facilement que Rad$(\delta\alpha_1)$ est isomorphe à $\mathcal{G}_{n-p,p}(\mathbb{K})$ tandis que Rad$(\delta\alpha_2)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie produit semi-direct $M_{n,p}(\mathbb{K}) \rtimes C(N_0)$, où $C(N_0)$ est la sous-algèbre de $gl(\mathbb{K}^n)$ formée des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_0 & & & \\ A_1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ A_{k-1} & \cdots & A_1 & A_0 \end{pmatrix}$$

Ceci nous permet de reformer le théorème 2.1 dans une version infinitésimale comme suit.

1.3.3. Proposition. *Avec les notations du théorème 1.3.1., si* $I = L(\mathcal{H}) = M_{n,p}(\mathbb{K})$ *la suite canonique*

$$0 \to I \to I^\perp \to I^\perp/I \to 0$$

est une suite exacte scindée d'algèbres de Lie. Elle est aussi une suite exacte d'algèbres symétriques à gauche où $I^\perp = I \times \text{Rad}\delta\alpha_1$ *est isomorphe à* $M_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{G}_{n-p,p}(\mathbb{K})$ et $I^\perp/I$ est isomorphe à Rad$\delta\alpha_1$ qui est isomorphe à $\mathcal{G}_{n-p,p}(\mathbb{K})$
De plus l'espace vectoriel $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ *se décompose comme somme directe des sous algèbres de Lie* $I^\perp$ *et* $C(N_0)$.

Une conséquence géométrique de l'étude qui précède est donnée par le résultat suivant :

1.3.4. Théorème. *Le groupe de Lie symplectique* $(G_{n,p}(\mathbb{K}); d\alpha^+)$ *est muni de deux feuilletages symplectiques transverses invariants à gauche définis par les sous-algèbres Rad*$(\delta\alpha_1)$ *et Rad*$(\delta\alpha_2)$.

Le résultat suivant précise le nombre d'orbites ouvertes dans $\mathcal{G}^*_{n,p}(\mathbb{K})$ ainsi que les structures symplectiques invariantement exactes sur $G_{n,p}(\mathbb{K})$.

1.3.5 Théorème.
i) *Le Nombre d'orbites ouvertes de $G_{n,p}(\mathbb{K})$ pour la représentation coadjointe est* 2 *si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et* 1 *si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*
ii) *Si ω et $\omega^{'}$ sont deux formes symplectiques invariantes à gauche sur $G_{n,p}(\mathbb{K})$, alors il existe un automorphisme φ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ tel que :*

$$\omega_\varepsilon(.,.) = \omega^{'}_\varepsilon(\varphi.,\varphi.).$$

Les lemmes suivants établissent les principales étapes de la démonstration du théorème.

1.3.6 Lemme. *Toute forme linéaire(H, M) sur $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ contient dans son orbite sous la représentation coajointe un élément de la forme $(H^{'}_0, M^{'})$, où $H^{'}_0$ est une matrice $p \times n$ dont tous les blocs sont nuls sauf peut être le dernier.*
Si de plus (H, M) est un point à orbite ouverte sous l'action coadjointe de $G_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on peut prendre $H^{'}_0 = H_0$.

Preuve. Il suffit de remarquer que l'on peut trouver $U \in GL_0(\mathbb{K}^n)$ tel que $HU^{-1} = H^{'}_0$, ce qui est clair si l'on regarde H comme la matrice d'une application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ et U^{-1} comme la matrice d'un changement de base dans $\mathbb{K}^n$.
Supposons maintenant que $(H^{'}_0, M^{'})$ est à orbite ouverte avec $H^{'}_0 = (0, ..., 0, A)$ où A est une matrice $p \times p$, pour tout X de $M_{n,p}(\mathbb{K})$, la condition $ad^*_{(X,0)}(H^{'}_0, M^{'}) = 0 \Rightarrow X = 0$ entraine, d'après le lemme 1.2.1, que A est inversible. Dans ces conditions il existe $U \in GL(\mathbb{K}^n)$ tel que $H^{'}_0 U^{-1} = H_0$, mais cette relation fixe seulement le dernier bloc diagonal de U à la valeur A^{-1}. On pourra donc si $k \geq 2$ prendre un autre bloc diagonal égal à $\det A^{-1} \cdot I_p$ et en complétant la diagonale par des 1, construire une telle matrice U dans $SL(\mathbb{K}^n)$.

1.3.7 Lemme. *Etant un point à orbite ouverte de $\mathcal{G}^*_{n,p}(\mathbb{K})$ de la forme (H_0, M), son orbite contient un unique élément $(H_0, M^{'})$ où la décomposition en blocs de $M^{'}$ s'écrit :*

$$M^{'} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ H_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{avec} \qquad (H_1, M_1) \in \mathcal{G}^*_{n-p,p}(\mathbb{K})$$

Preuve. Etant donné $X \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $Ad^*_{(X,Id)}(H_0, M) = (H_0, M + X.H)$. Vue l'expression de H_0 il est clair qu'il existe un unique $X \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ tel que $M^{'} = M + X.H_0$ satisfait la condition.

1.3.8 Lemme. *Les points $(H_0, M^{'})$ et $(H_o, P^{'})$, où $M^{'} = (H_1, M_1)$ et $P^{'} = (K_1, P_1)$ sont dans la même orbite sous l'action coadjointe de $G_{n,p}(\mathbb{K})$ si et seulement si (H_1, M_1) et (K_1, P_1) sont dans la même orbite sous l'action coadjointe de $G_{n-p,p}(\mathbb{K})$.*

Preuve. Vue les expressions de (H_0, M') et (H_o, P'), ils sont dans la même orbite si et seulement si il existe $U \in GL_0(\mathbb{K}^n)$ tel que : $UM'U^{-1} = P'$ et $H_0U^{-1} = H_o$. Cette dernière condition entraine que l'écriture en blocs de U est du type :

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ X_1 & Id \end{pmatrix}, \qquad avec \qquad U_1 \in GL_0(\mathbb{K}^{n-p})$$

Par ailleurs $UM'U^{-1} = P'$ dans $gl(\mathbb{K}^n)$ équivaut à $Ad^*_{(X_1,U_1)}(H_1, M_1) = (K_1, P_1)$ dans $\mathcal{G}_{n-p,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration du théorème.
Les lemmes précédents entrainent que le nombre d'orbites ouvertes dans $\mathcal{G}^*_{n,p}(\mathbb{K})$ est le même que dans $\mathcal{G}^*_{p,p}(\mathbb{K})$, or $\mathcal{G}^*_{p,p}(\mathbb{K}) \cong \mathcal{G}_{p,p}(\mathbb{K})$, donc suivant le même raisonnement le nombre d'orbites ouvertes est le même que dans $\mathcal{G}_{1,1}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K} \rtimes \mathbb{K}^*$; d'où le résultat.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la deuxième assertion est évidente.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les lemmes permettent de montrer que chaque orbite contient un élément (H_0, N) où $N = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ A_p & \ddots & & & \\ & I_p & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & I_p & 0 \end{pmatrix}$, avec A_p inversible.
Deux telles matrices sont nécéssairement conjuguées sous l'action de $GL(\mathbb{K}^n)$. Celle-ci se fait par des endomorphismes de l'algèbre de Lie. La structure de groupe de Lie symplectique exact par un certain α de $\mathcal{G}^*_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc équivalente à celle définie par (H_0, N_0).
Le résultat qui suit est une conséquence importante de l'étude qui précède.

1.3.9. Proposition. *La composante de l'élément neutre dans $G_{n,p}(\mathbb{K})$ est difféomorphe à une orbite de l'action coadjointe. Par conséquent $G_{n,p}(\mathbb{K})$ est difféomorphe à l'ensemble des points réguliers de l'action coadjointe.*

Démonstration. Il reste à prouver que l'application orbitale :

$$\begin{array}{lll} G_{n,p}(\mathbb{K})_0 & \longrightarrow & \mathcal{G}^*_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (X, U) & \longmapsto & (H_o.U^{-1}, UN_oU^{-1} + X.H_o.U^{-1}) \end{array}$$

est à isotropie triviale.
La condition $H_oU^{-1} = H_0$ entraine que UN_oU^{-1} et N_0 sont des matrices du même type (leur dernière colonne de blocs est formée de 0) et donc que X est nul. De plus U induit un élément de $G_{n-p,p}(\mathbb{K})$ qui est dans l'isotropie de N_0 au sens de la représentation coadjointe de $G_{n-p,p}(\mathbb{K})$. La propriété étant vraie dans $G_{1,1}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K} \rtimes \mathbb{K}^*$, une récurrence immédiate sur p puis sur k termine la démonstration.

1.4 Feuilletages Lagrangiens invariants à gauche et Connexion de Hess.

1.4.1. Précisons un peu les isomorphismes d'algèbres de Lie indiqués par la proposition précédente. L'isomorphisme entre Rad$(\delta\alpha_1)$ et $\mathcal{G}_{n-p,p}(\mathbb{K})$ est déterminé par le choix d'un supplémentaire de $\mathcal{K}(H_0) = \{X \in M_{n,p}(\mathbb{K})/H_0.X = 0\}$ dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons X_0, l'élément de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ formé d'une colonne de blocs nuls sauf le dernier qui est I_p, alors l'application

$$\begin{array}{rcl} Rad(\delta\alpha_1) = \{(0,U) \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})/H_0.U = 0\} & \longrightarrow & \mathcal{G}_{n-p,p}(\mathbb{K}) \\ (0,U) & \longmapsto & (U.X_0, \pi_0(U)) \end{array}$$

où $\pi_0(U)$ désigne la matrice de l'application linéaire définie par U en restriction à $\mathcal{K}(H_0)$ définit un tel isomorphisme. De plus l'image de la forme symplectique réduite est le 2-cobord associé à $(H_1, N_1) \in \mathcal{G}_{n-p,p}(\mathbb{K})^*$ où H_1 et N_1 sont définis par :

$$tr(N_0U) = tr(H_0.U.X_0) + tr(N_1\pi_0(U)).$$

On peut remarquer que (H_1, N_1) reste du même type que (H_0, N_0), on peut donc itérer le procédé de réduction symplectique dans les mêmes conditions. On obtient une décomposition de l'espace $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme somme directe de sous algèbres de Lie :

$$\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathcal{K}_{p-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{K}_0 \oplus C(N_0) \oplus \cdots \oplus C(N_{p-1})$$

où $\mathcal{K}_i$ provient de l'ideal totalement isotrope et $C(N_i)$ de la sous algèbre supplémentaire à son orthogonal dans la i^{eme} itération. En utilisant le prolongement canonique de $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $gl(\mathbb{K}^{(k+1)p})$, le sous espace $L = \mathcal{K}_{p-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{K}_0$ s'identifie à la sous algèbre des matrices triangulaires strictement supérieures d'ordre $p+1$ par blocs carrés d'ordre p et $L' = C(N_0) \oplus \cdots \oplus C(N_{p-1})$ à la sous algèbre des matrices triangulaires inférieures d'ordre p par blocs d'ordre p. Comme les $\mathcal{K}_i$ et les $C(N_i)$ apparaissent comme des sous espaces totalement isotropes à chaque étape des réductions succéssives les sous algèbres L et L' sont lagrangiennes relativement à $\delta\alpha$ où $\alpha \equiv (H_0, N_0)$.
Désignons Λ par et Λ' les sous-groupes de Lie connexes de $G_{n,p}(\mathbb{K})$ d'algèbres de Lie respectives L et L'. Les actions naturelles à gauche de Λ et Λ' sur $(G_{n,p}(\mathbb{K}), d\alpha^+)$ étant hamiltoniennes, le théorème 3.1. de ([**BMO**]) permet d'affirmer que Λ et Λ' sont fermés. Nous avons donc prouvé le resultat suivant :

1.4.2. Théorème. *Le groupe de Lie symplectique* $(G_{n,p}(\mathbb{K}), \omega^+ := d\alpha^+)$ *est muni deux feuilletages lagrangiens transverses invariants à gauche à feuilles fermées.*

Soit $(G_{n,p}(\mathbb{K}), \omega^+)$ muni de sa structure affine ∇ définie par (**1**)
Rappelons qu'une connexion sur $(G_{n,p}(\mathbb{K}), \omega^+)$ est dite *symplectique* si et seulement

si $\nabla\omega = 0$ où $\omega := \omega_\varepsilon^+$, autrement dit :

$$\nabla_a(\omega(b,c)) = \omega(\nabla_a b, c) + \omega(b, \nabla_a c) \quad \forall a = (x,u), b = (y,v), c = (z,r) \in \mathcal{G} = Lie(G)$$

Dans ce qui suit on identifiera un élément a de $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ par le couple (x,u) où $x \in M_{n,p}$ et $u \in gl(n)$.
Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^{'}$ deux sous-algèbres Lagrangiens $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ telles que $\mathcal{G} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^{'}$. Alors on peut écrire $a = a_1 + a_2$ où $a_1 = (x_1, u_1) \in \mathcal{L}$ et $a_2 = (x_2, u_2) \in \mathcal{L}^{'}$. Le produit symétrique à gauche sur $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$ est alors donnée par :

$$(i) \qquad (x,0).(y,0) = (l,f)$$

où $l \in M_{n,p}$ est formé d'une colonne de blocs dont le dernier appartient à $sl(p)$ et $f \in gl(n)$ dont la dernière ligne de blocs est nulle.

$$(ii) \qquad (0,u).(0,v) = (l,-vu)$$

où l est défini comme précédemment.

$$(iii) \qquad (x,0).(0,v) = (l_1,f_1)$$

$$(iv) \qquad (0,u).(y,0) = (l_2,f_2)$$

où l_1,$l_2 \in M_{n,p}$, f_1,$f_2 \in gl(n)$ sont définis comme dans (i).
le résultat suivant est une conséquence de l'étude précédente

1.4.3. Corollaire. *Il existe une unique connexion symplectique $\tilde{\nabla}$ (sans torsion) invariante à gauche (appélée connexion de Hess) telle que*

$$\tilde{\nabla}_{(X,U)} L \subset L, \ \tilde{\nabla}_{(X',U')} L^{'} \subset L^{'}.$$

Elle est définie par les formules :

$$\tilde{\nabla}_{(x,0)^+}(y,0)^+ = (l,0)^+ \quad , \quad \tilde{\nabla}_{(0,u)^+}(0,v)^+ = (0,-vu)^+$$

$$\tilde{\nabla}_{(x,0)^+}(0,v)^+ = 0 \quad , \quad \tilde{\nabla}_{(0,u)^+}(y,0)^+ = (uy,0)^+$$

Vu le type de résultats que nous avons mis en évidence, il est naturel de se demander dans quelle mesure le groupe $(G_{n,p}(\mathbb{K}))$ ne ressort pas des techniques de double extension symplectique décrites dans ([**DM2**]). La réponse est clairement non si $k > 1$, en effet pour que $G_{n,p}(\mathbb{K})$ soit double extension symplectique de $G_{n-p,p}(\mathbb{K})$ au sens de ([**DM2**]) il faut que $I^\perp$ soit un idéal de Lie de $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K})$, ce qui compte tenu de la proposition 1.3.3. entraînerait l'existence d'un idéal de Lie de $gl(\mathbb{K}^n)$ isomorphe à $\mathcal{G}_{n-p,p}(\mathbb{K})$.

1.5 $G_{n,p}(\mathbb{K})$ comme double extension symplectique de $G_{n-p,p}(\mathbb{K})$.

Nous avons montré dans le paragraphe précédent que les techniques de double extension symplectique dévelopées dans ([**DM2**]) ne s'appliquent pas au groupe $G_{n,p}(\mathbb{K})$ pour $k > 1$. Nous allons reprendre en détail l'étude des fibrations canoniques (**2**) et (**3**) pour essayer de comprendre comment fonctionne cet exemple. Nous avons constaté au 1.4.1. que pour l'algèbre de Lie symplectique $(\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{K}), d\alpha)$ où $\alpha \equiv (H_0, N_0)$, une section de la suite exacte canonique

$$0 \to I = M_{n,p}(\mathbb{K}) \to I^{\perp} \to I^{\perp}/I \cong \mathcal{G}_{n-p,p}(\mathbb{K}) \to 0$$

est déterminé par le choix d'un élément X_0 dans $M_{n,p}(\mathbb{K})\backslash\mathcal{K}(H_0)$.
Réciproquement, donnons nous l'algèbre réduite $(\mathcal{G}_{n-p,p}(\mathbb{K}), d\alpha^{'})$, où $\alpha^{'} \equiv (H_1, N_1)$, avec $H_1 = (0, \cdots, 0, I_p)$ et N_1 la matrice dont tous les blocs $p \times p$ sont nuls sauf les sous diagonaux qui valent I_p. Soit i l'injection canonique de $M_{n-p,p}(\mathbb{K})$ dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$ obtenue en mettant zero dans les $n-p+1, \cdots, n$ lignes et Z un élément de $M_{n,p}(\mathbb{K})\backslash M_{n-p,p}(\mathbb{K})$ de rang p (prendre $Z := H_0$).
Notons r l'application linéaire de $M_{n-p,p}(\mathbb{K})$ sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$r \circ i = id_{M_{n-p,p}(\mathbb{K})} \text{ et } r(Z) = 0$$

et soit $H \in M_{n,p}(\mathbb{K})^*$ vérifiant :

(5) $$H \circ i = 0 \text{ et } H.Z = Id_{\mathbb{K}^p}$$

Nous disposons d'une représentation fidèle d'algèbres de Lie :

(6) $$I : \mathcal{G}_{n-p,p}(\mathbb{K}) \to gl(\mathbb{K}^n),\ (x, u) \mapsto (i \circ u \circ r + H.i(x))$$

De I on déduit une représentation de groupes de Lie :

(7) $$J : G_{n-p,p}(\mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K}^n),\ (X, U) \mapsto (i \circ U \circ r + i(X).H)$$

telle que $d_{\epsilon}J = I$.
Considérons par ailleurs l'injection $R : M_{n,p}(\mathbb{K})^* \times gl(\mathbb{K}^{n-p}) \to gl(\mathbb{K}^n)$ définie par :

(8) $$R(H, N) = i \circ N \circ r + Z.(H \circ r)$$

Nous pouvons énoncer le résultat suivant.

1.5.1. Proposition. *Considérons le groupe de Lie symplectique $(G_{n-p,p}(\mathbb{K}), d(H_1, N_1)^+)$. Si H est la forme linéaire définie par (**5**) et si $N = R(H_1, N_1)$ où R est l'injection définie par (**8**) alors $(G_{n,p}(\mathbb{K}), d(H, N)^+)$ est un groupe de Lie symplectique tel que le groupe de Lie symplectique réduit (au sens du théorème 2.1.) est $(G_{n-p,p}(\mathbb{K}), d(H_1, N_1)^+)$.*

Preuve. Par construction de H, on a

$$m^{-1}(H) = M_{n,p}(\mathbb{K}) \times J(G_{n-p,p}(\mathbb{K})).$$

Reste à prouver que $d(H_1, N_1)^+$ est la forme symplectique réduite de $d(H,N)^+_{|m^{-1}(H)}$. En tenant compte de la décomposition $M_{n,p}(\mathbb{K}) = i(M_{n-p,p}(\mathbb{K})) \otimes \mathbb{K}.Z$ on constate que :

$$tr(H_1.X) + tr(N_1 U) = tr(R(H_1, N_1).I(X,U))$$

pour tout (X,U) de $\mathcal{G}_{n-p,p}(\mathbb{K})$. Comme $N = R(H_1, N_1)$ et que $d(H,0)^+$ est nulle sur $m^{-1}(H)$ la forme réduite est bien $d(H_1, N_1)^+$.

1.5.2. Etude de la fibration :

$$(3) \qquad m^{-1}(H) \xrightarrow{i} G_{n,p}(\mathbb{K}) \xrightarrow{m} \Theta$$

D'après le théorème 1.3.5. nous pouvons nous ramener au cas où $\alpha \equiv (H_0, N_0)$. Soit $C = C(N_0) \bigcap GL(\mathbb{K}^n)$ ou, si l'on préfère C est le sous groupe de Lie de $GL(\mathbb{K}^n)$ formé des matrices du type :

$$\begin{pmatrix} A_0 & & & \\ A_1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ A_{k-1} & \cdots & A_1 & A_0 \end{pmatrix}$$

avec A_0 inversible.
D'après le lemme 1.3.2, $m(C) = \{(A_{k-1}, \cdots, A_1, A_0);\ \text{avec } A_0 \text{ inversible }\}$, notons V_0 cet ouvert de Θ.
Soit $V_\gamma = V_0.\sigma_\gamma$ où $\gamma = (i_1, \cdots, i_p)$ et σ_γ est l'élément de $GL(\mathbb{K}^n)$ qui réalise la permutation des k dernières colonnes avec les colonnes indicées par γ dans $M_{p,n}(\mathbb{K})$. Les V_γ sont clairement des ouverts de Θ et m définit un difféomorphisme de $C.\sigma_\gamma$ sur V_γ. Notons S_γ le plongement de V_γ dans $GL(\mathbb{K}^n)$ tel que $S_\gamma(V_\gamma) = C.\sigma_\gamma S_\gamma(V_\gamma) = C.\sigma_\gamma$ et $m \circ S_\gamma = id_{U_\gamma}$ pour tout multi-indice γ.

Nous avons le résultat suivant :

1.5.3. Lemme. *La famille $V_\gamma$avec $\gamma = (i_1, \cdots, i_p)$ où $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$ définie ci-dessus forme un recouvrement ouvert trivialisant pour la fibration* (**3**).

Preuve. Les V_γ recouvrent Θ puisque Θ est formé des matrices de rang p dans $M_{p,n}(\mathbb{K})$ c'est à dire dont p vecteurs colonnes sont indépendants dans $\mathbb{K}^p$, tandis que V_0 est formé des matrices pour lesquelles les p derniers vecteurs colonnes sont indépendants.
Montrer que les V_γ sont trivialisants pour la fibration (**3**) revient à prouver que l'on a

$$m^{-1}(U_\gamma) = S_\gamma(U_\gamma).m^{-1}(H_0).$$

Or pour tout σ de $G_{n,p}(\mathbb{K})$ nous avons l'identité

$$m^{-1}(m(\sigma)) = \sigma.m^{-1}(H_0).$$

En effet si $\sigma' \in m^{-1}(m(\sigma))$ on a par définition de m la formule,

$$\langle Ad^*_\sigma(H,0);(X,0)\rangle = \langle Ad^*_{\sigma'}(H,0);(X,0)\rangle \text{ pour tout } X \text{ dans } M_{n,p}(\mathbb{K})$$

ou ce qui revient au même

$$\langle Ad^*_{\sigma^{-1}\sigma'}(H,0);(X,0)\rangle = \langle (H,0);(X,0)\rangle \text{ pour tout } X \text{ dans } M_{n,p}(\mathbb{K})$$

Cette dernière relation signifie que $\sigma^{-1}\sigma' \in m^{-1}(H_0)$ d'où l'identité annoncée et le fait que les V_γ sont des ouverts trivialisants. Les trivialisations sont alors données par les applications

$$\begin{array}{rl} \phi_\gamma : m^{-1}(V_\gamma) & \longrightarrow V_\gamma \times m^{-1}(H_0) \\ S_\gamma(\alpha).\sigma & \longmapsto (\alpha,\sigma) \end{array}$$

pour tout multi-indice $\gamma = (i_1, \cdots, i_p)$ avec $1 \le i_1 < i_2 < K < i_p \le n$. Le cocycle définissant la fibration (**3**) est donnée par

$$\begin{array}{rrl} \Gamma_{\gamma_1\gamma_2} : V_{\gamma_1} \bigcap V_{\gamma_2} & \longrightarrow & m^{-1}(H_0) \\ \alpha & \longmapsto & S^{-1}_{\gamma_1}(\alpha).S_{\gamma_2}(\alpha) \end{array} \tag{9}$$

Ainsi nous avons prouvé le résultat qui suit

1.5.4. Proposition. *La variété $G_{n,p}(\mathbb{K})$ est difféomorphe à $\coprod V_\gamma \times m^{-1}(H_0)/\sim$ où $(\alpha,\sigma) \sim (\beta,\tau)$ si et seulement si $\alpha = \beta$ et $\sigma = \Gamma_{\gamma_1\gamma_2}(\tau)$ pour (α,σ) dans $V_{\gamma_1} \times m^{-1}(H_0)$ et (β,τ) dans $V_{\gamma_2} \times m^{-1}(H_0)$ le cocycle $\Gamma_{\gamma_1\gamma_2}$ étant défini par* (**9**).

1.6 Exemples

Exemple 1.$G_3(\mathbb{R}) = G_{3,1}(\mathbb{R})$
Soit $\mathcal{G}_{3,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \rtimes gl(3)$ l'algèbre de Lie de $G_3(\mathbb{R}) = G_{3,1}(\mathbb{R})$. Elle s'identifie à

$$\left\{ \begin{pmatrix} & & & x_1 \\ & u & & x_2 \\ & & & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Où $u \in gl(3)$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B} = (e_i)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (e_i^*) sa base duale.

Un point à orbite ouverte pour la representation codajointe du groupe est donné par un $\alpha \equiv (g, M) \in \mathcal{G}^*_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $g = e_1^* + e_2^* + e_3^*$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathfrak{g}_1 = aff\,(ker(g))$ et $\mathfrak{g}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} & & & x_1 \\ & C & & x_2 \\ & & & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ définissent deux sous algèbres symplectiques de $\mathcal{G}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $ker(g) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \backslash x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \equiv \mathbb{R}^2$ et C désigne le commutant de M dans $gl(3)$.
Les suites qui décrivent la double extension sont données par :

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^\perp \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^\perp/\mathbb{R} \cong aff(ker(g)) \longrightarrow \{0\}$$

$$(\mathbb{R}^3)^\perp \longrightarrow \mathcal{G}_{3,1} \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^* - \{0\}$$

Maintenant trouvons deux sous algèbres lagrangiennes qui sont supplémentaires dans $\mathcal{G}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour cela nous allons décrire la sous algèbre réduite comme double extension symplectique.
Puisque l'algèbre de Lie $Ker(g)$ est un idéal totalement isotrope de $aff(Ker(g))$ alors $aff(Ker(g))$ se décompose, au moyen de la double extension comme

$$aff(Ker(g)) = (ker(g) \rtimes aff(Ker(g_1))) \oplus (\mathbb{R}^2)^* - \{0\}$$

où $ker(g_1) = \{(x_1, 0)/x_1 \in \mathbb{R})\}$ et $\alpha_1 = (g_1, M_1) \in aff(Ker(g))^*$ est un point à orbite ouverte avec

$$g_1 = e_1^* - e_2^* \text{ et } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De même l'algèbre de Lie $Ker(g_1)$ est un idéal totalement isotrope de $aff(Ker(g_1))$ qui est isomorphe à $aff(\mathbb{R})$ dont un point à orbite ouverte est donné par $\alpha_2 = (g_2, M_2)$ avec

$$g_2 = e_1^* \text{ et } M = (1) \in aff(ker(g_1))^*$$

Par conséquent,

$$\mathcal{G}_{3,1} = \mathbb{R}^3 \oplus Ker(g) \oplus ker(g_1) \oplus C \oplus C_1 \oplus C_2$$

où C, C_1, C_2 désignent respectivement les commutants de M, M_1, M_2. D'où

$$\mathfrak{l}_1 = \mathbb{R}^3 \oplus Ker(g) \oplus ker(g_1) \text{ et}$$

$$\mathfrak{l}_2 = C \oplus C_1 \oplus C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ m_4 & m_2 & 0 \\ m_6 & m_5 & m_3 \end{pmatrix} \right\}$$

sont deux sous algèbres lagrangiennes supplémentaires.

Exemple 2.$G_{3,3}(\mathbb{R})$
Soit $\mathcal{G}_{3,3}(\mathbb{R}) = M_{3,3} \rtimes gl(3)$. Etant donné un point $\alpha = (H, N) \in \mathcal{G}^*_{3,3}(\mathbb{R})$ à orbite ouverte pour la representation coadjointe avec

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

les suites qui décrivent la double extension symplectique sont données par :

$$\{0\} \longrightarrow M_{3,3} \longrightarrow M_{3,3} \rtimes \mathcal{G}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{G}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \{0\}$$

$$M_{3,3} \rtimes \mathcal{G}_{2,1} \longrightarrow \mathcal{G}_{3,3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \Theta_3$$

où Θ_3 est l'ensemble des matrices de rang 3 dans $M_{3,3}(\mathbb{R})$ En posant $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$; on vérifie que $(\mathfrak{g}_1 = Rad(\omega_2), \omega_1)$ et $(\mathfrak{g}_2 = Rad(\omega_1), \omega_2)$ sont des sous algèbres symplectiques de $\mathcal{G}_{3,3}(\mathbb{R})$ pour $\omega = \omega_1 + \omega_2 = d\alpha$; avec

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ (x, u) \,/ x \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \text{ et } u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_3 \\ 0 & u_5 & u_6 \\ -u_3 & -u_3 & -u_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{et } \mathfrak{g}_2 = \left\{ v \in End(\mathbb{R}^3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v_4 & v_5 & v_6 \\ v_7 & v_8 & v_9 \end{pmatrix} \right\}$$

De plus $\mathfrak{l}_1 = C(N) \times \{(0, u) \in \mathfrak{g}_1\}$ est une sous algèbre lagrangienne de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{l}_2 = \left\{ v \in \mathfrak{g}_2 / v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 \\ v_7 & v_8 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une sous algèbre lagrangienne de $\mathfrak{g}_2$.
D'où $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2$ est une sous algèbre lagrangienne de $\mathcal{G}_{3,3}(\mathbb{R})$

Exemple 3.$G_{4,2}(\mathbb{R})$
Soit $\mathcal{G}_{4,2}(\mathbb{R}) = M_{4,2} \rtimes gl(4)$. Pour un point $\alpha = (H_0, N_0) \in \mathcal{G}^*_{4,2}$ à orbite ouverte défini par

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Les suites qui décrivent la double extension symplectique sont :

$$\{0\} \longrightarrow M_{4,2} \longrightarrow M_{4,2} \rtimes \mathcal{G}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{G}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \{0\}$$

$$M_{4,2} \rtimes \mathcal{G}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{G}_{4,2} \longrightarrow \Theta_4,$$

où Θ_4 est l'ensemble des matrices de rang 2 dans $M_{2,4}(\mathbb{R})$.
On définit deux sous algèbres lagrangiennes de $\mathcal{G}_{4,2}(\mathbb{R})$ supplémentaires par : $\mathfrak{l}_1 = M_{2,4} \oplus Ker(H_0)$ qui s'identifie à l'ensemble des matrices blocs

$$\left\{ \begin{pmatrix} O & O & O & A_1 & A_2 \\ O & O & O & O & A_3 \\ O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O \end{pmatrix} \right\}$$

et $\mathfrak{l}_2 = C(N_0) \oplus C(N_1)$ s'identifie à l'ensemble des matrices blocs

$$\left\{ \begin{pmatrix} O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O \\ B_1 & B_2 & O & O & O \\ B_3 & O & B_4 & O & O \end{pmatrix} \right\}.$$

$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ correspond à la deuxième étape de la réduction symplectique et $C(N_0)$ et $C(N_1)$ désignent respectivement les commutants de N_0 et de N_1.

Chapitre 2

Géométrie des groupes de Lie symplectiques nilpotents de dimension 6

Introduction

Les algèbres de Lie nilpotentes de dimension 6 qui sont munies d'un 2-cocycle scalaire non dégénéré, et que nous appelerons dans la suite, par abus de language, algèbres de Lie symplectiques, ont été déterminé dans [**GKM**].
Dans ce chapitre d'une part nous décrivons les groupes de Lie connexes et simplement connexes associés à ces algèbres de Lie et nous explicitons la connexion linéaire plate ∇, associée à la structure symplectique invariante à gauche sur le groupe, donnée par la formule

$$\omega^+\left(\nabla_{x^+}y^+, z^+\right) = -\omega^+\left(y^+, \left[x^+, z^+\right]\right), \tag{2.1}$$

où ω^+ désigne la forme symplectique invariante à gauche sur G et x^+, y^+, z^+ des champs de vecteurs invariants à gauche sur G. Puisque ces groupes sont unimodulaires cette connexion est complète ([**LM**]).
D'autre part nous distinguons quelques groupes de Lie qui admettent un couple de feuilletages lagrangiens transverses invariants à gauche . Nous en déduissons alors l'existence sur ces groupes d'une unique connexion symplectique invariante à gauche sans torsion compte tenu d'un résultat de Hess [**He**]. Mieux encore nous montrons que tous les groupes symplectiques nilpotents de dimension 6 admettent une structure affine symplectique invariante à gauche c'est à dire une connexion symplectique à courbure et torsion nulles invariante à gauche.
Parmi les groupes de Lie connexes et simplement connexes associés aux algèbres de Lie symplectiques de dimension 6 nous mettons en évidence ceux qui admettent des structures complexes invariantes à gauche.

Nous revisitons la double extension symplectique au niveau des groupes de Lie simplement connexes nilpotents en mettant en évidence l'application moment et les suites qui la décrivent et nous donnons quelques exemples .
Enfin nous signalons l'existence des réseaux dans tous les groupes de Lie connexes et simplement connexes correspondants aux algèbres de Lie symplectiques de dimension 6. Ceci nous fournit des nilvariétés symplectiques compacts ayant une très riche géométrie.
Les preuves des résultas de ce chapitre sont assez techniques et plutôt directes.

2.1 Algèbres de Lie symplectiques nilpotentes de dimension 6

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie et $[\bullet, \bullet]$ son crochet de Lie. La série centrale descendante $\left\{C^k\right\}_{k\geq 0}$ de $\mathcal{G}$ est définie inductivement par

$$C^0 = \mathcal{G}, \qquad C^k = \left[C^{k-1}, \mathcal{G}\right], \qquad k \geq 1.$$

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est dite nilpotente s'il existe un entier k tel que $C^k = \{0\}$. Le plus petit entier k tel que $C^k = \{0\}$ est appelé le nil-indice (ou classe de nilpotence) de $\mathcal{G}$. On dira aussi que $\mathcal{G}$ est k-nilpotente.
La classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 6 munies d'un 2-cocycle scalaire non dégénéré a été donné dans [**GKM**]. Nous rappelons cette classification en précisant l'indice de nilpotence k, le centre $Z(\mathcal{G})$ et l'idéal dérivée $\mathcal{D}(\mathcal{G})$.
D'après [**GKM**], toute algèbre de Lie nilpotente symplectique de dimension 6 est symplecto-isomorphe à l'une des algèbres de Lie symplectiques suivantes où l'on explicite seulement les crochets non nuls relativement à une base $\{e_1, \cdots, e_6\}$ de $\mathcal{G}$.
:

1. $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5,$
   $[e_1, e_5] = e_6, \quad [e_2, e_3] = e_5, \quad [e_2, e_4] = e_6,$

$\omega = e_1^* \wedge e_6^* + (1-\lambda) e_2^* \wedge e_5^* + \lambda e_3^* \wedge e_4^*, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$

$$k = 5, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_6\}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

2. $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5,$
   $[e_1, e_5] = e_6, \quad [e_2, e_3] = e_6,$

$\omega^\lambda = \lambda(e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_4^* + e_3^* \wedge e_4^* - e_2^* \wedge e_5^*), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$
$k = 5, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_6\}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$

3. $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5,$
   $[e_1, e_5] = e_6,$

$\omega = e_1^* \wedge e_6^* - e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^*.$

$k=5, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_6\}\,, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$

4. $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_6,$
$[e_2, e_3] = e_5, \quad [e_2, e_5] = e_6,$

$\omega^{(\lambda_1,\lambda_2)} = \lambda_1 e_1^* \wedge e_4^* + \lambda_2(e_1^* \wedge e_5^* + e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_4^* + e_3^* \wedge e_5^*), \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$
$k=4, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_6\}\,, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$

5. $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = -e_6,$
$[e_2, e_3] = e_5, \quad [e_2, e_5] = e_6,$

$\omega_1^{(\lambda_1,\lambda_2)} = \lambda_1 e_1^* \wedge e_4^* + \lambda_2(e_1^* \wedge e_5^* + e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_4^* + e_3^* \wedge e_5^*), \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\omega_2^{\lambda} = \lambda(e_1^* \wedge e_6^* - 2e_1^* \wedge e_5^* - 2e_2^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_6^* + e_3^* \wedge e_4^* + e_3^* \wedge e_5^*), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\omega_3^{\lambda} = \lambda(e_1^* \wedge e_4^* - e_1^* \wedge e_5^* + e_1^* \wedge e_6^* - e_2^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_2^* \wedge e_6^* + e_3^* \wedge e_4^* + e_3^* \wedge e_5^*), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\omega_4^{\lambda} = \lambda(2e_1^* \wedge e_4^* + e_1^* \wedge e_6^* + 2e_2^* \wedge e_5^* + e_2^* \wedge e_6^* + e_3^* \wedge e_4^* + e_3^* \wedge e_5^*), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$
$k=4, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_6\}\,, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$

6. $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5,$
$[e_2, e_3] = e_6,$

$\omega_1 = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_5^* - e_3^* \wedge e_4^*,$
$\omega_2 = -e_1^* \wedge e_6^* - e_2^* \wedge e_4^* - e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^*.$
$k=4, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_5, e_6\}\,, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$

7. $[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = e_6,$
$[e_2, e_3] = e_6, \quad [e_2, e_4] = e_6,$

$\omega_1^{\lambda} = \lambda(e_1^* \wedge e_3^* + e_2^* \wedge e_6^* - e_4^* \wedge e_5^*), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\omega_2^{\lambda} = \lambda(e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* - e_3^* \wedge e_4^*), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\omega_3^{\lambda} = \lambda(-e_1^* \wedge e_6^* - e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^*), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$k=4, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_6\}\,, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_4, e_5, e_6\}$

8. $[e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = e_6,$
$[e_2, e_3] = e_5, \quad [e_2, e_4] = e_6,$

$\omega = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* - e_3^* \wedge e_4^*.$
$k=4, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_6\}\,, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_4, e_5, e_6\}$

9. $[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = e_6,$
$[e_2, e_3] = e_6,$

$\omega^{\lambda} = \lambda(e_1^* \wedge e_3^* + e_2^* \wedge e_6^* - e_4^* \wedge e_5^*, \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$
$k=4, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_6\}\,, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_4, e_5, e_6\}$

10. $[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_3] = e_6, \quad [e_2, e_4] = e_6$

$\omega_1 = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* - e_2^* \wedge e_6^* - e_3^* \wedge e_4^*,$
$\omega_2 = -e_1^* \wedge e_6^* - e_2^* \wedge e_5^* + e_2^* \wedge e_6^* + e_3^* \wedge e_4^*.$
$k=3, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_5, e_6\}\,, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_4, e_5, e_6\}$

11. $[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5,$
$[e_2, e_3] = e_6, \quad [e_2, e_4] = e_6,$
$\omega_1^\lambda = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + \lambda e_2^* \wedge e_6^* - e_3^* \wedge e_4^*,\ \lambda \in \mathbb{R},$
$\omega_2^\lambda = -e_1^* \wedge e_6^* - e_2^* \wedge e_5^* + \lambda e_2^* \wedge e_6^* + e_3^* \wedge e_4^*,\ \lambda \in \mathbb{R}.$
$k = 3, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_5, e_6\}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_4, e_5, e_6\}$

12. $[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_3] = e_6,$
$[e_2, e_3] = -e_5, \quad [e_2, e_4] = e_6,$
$\omega^\lambda = \lambda e_1^* \wedge e_5^* + e_2^* \wedge e_6^* + (\lambda + 1) e_3^* \wedge e_4^*,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}.$
$k = 3, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_5, e_6\}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_4, e_5, e_6\}$

13. $[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_3] = e_5, \quad [e_1, e_4] = e_6,$
$[e_2, e_3] = e_6,$
$\omega_1^\lambda = e_1^* \wedge e_6^* + \lambda e_2^* \wedge e_5^* + (\lambda - 1) e_3^* \wedge e_4^*,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\},$
$\omega_2^\lambda = e_1^* \wedge e_6^* + \lambda e_2^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_5^*,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$
$\omega_3 = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_4^* + \frac{1}{2} e_2^* \wedge e_5^* - \frac{1}{2} e_3^* \wedge e_4^*.$
$k = 3, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_5, e_6\}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_4, e_5, e_6\}$

14. $[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_6, \quad [e_1, e_3] = e_5,$
$\omega_1 = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_4^* + e_3^* \wedge e_5^*,$
$\omega_2 = e_1^* \wedge e_6^* - e_2^* \wedge e_4^* + e_3^* \wedge e_5^*,$
$\omega_3 = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^*.$
$k = 3, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_5, e_6\}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_4, e_5, e_6\}$

15. $[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_6, \quad [e_2, e_3] = e_5,$
$\omega_1 = -e_1^* \wedge e_5^* + e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^*,$
$\omega_2 = e_1^* \wedge e_5^* - e_1^* \wedge e_6^* - e_2^* \wedge e_5^* - e_3^* \wedge e_4^*,$
$\omega_3 = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_4^* + e_3^* \wedge e_5^*.$
$k = 3, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_5, e_6\}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_4, e_5, e_6\}$

16. $[e_1, e_2] = e_5, \quad [e_1, e_3] = e_6,$
$[e_2, e_4] = e_6, \quad [e_3, e_4] = -e_5,$
$\omega_1 = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_3^* - e_4^* \wedge e_5^*,$
$\omega_2 = e_1^* \wedge e_6^* - e_2^* \wedge e_3^* + e_4^* \wedge e_5^*.$
$k = 2, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_5, e_6\}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_5, e_6\}$

17. $[e_1, e_3] = e_5, \quad [e_1, e_4] = e_6, \quad [e_2, e_3] = e_6,$
$\omega = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^*.$
$k = 2, \qquad Z(\mathcal{G}) = vect\,\{e_5, e_6\}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\,\{e_5, e_6\}$

18. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_3]=e_5,\quad [e_2,e_3]=e_6,$
$\omega_1^\lambda = e_1^*\wedge e_6^* + \lambda e_2^*\wedge e_5^* + (\lambda-1)e_3^*\wedge e_4^*,\ \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\},$
$\omega_2^\lambda = e_1^*\wedge e_5^* + \lambda e_1^*\wedge e_6^* - \lambda e_2^*\wedge e_5^* + e_2^*\wedge e_6^* - 2\lambda e_3^*\wedge e_4^*, \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\},$
$\omega_3 = e_3^*\wedge e_5^* - e_1^*\wedge e_6^* + e_2^*\wedge e_5^* + 2e_3^*\wedge e_4^*.$
$k=2,\qquad Z(\mathcal{G}) = vect\{e_4,e_5,e_6\},\qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\{e_4,e_5,e_6\}$

19. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_1,e_5]=e_6,$
$\omega = e_1^*\wedge e_3^* + e_2^*\wedge e_6^* + e_4^*\wedge e_5^*.$
$k=4,\qquad Z(\mathcal{G}) = vect\{e_3,e_6\},\qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\{e_4,e_5,e_6\}$

20. $[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=e_4,$
$[e_1,e_4]=e_5,\quad [e_2,e_3]=e_5,$
$\omega = e_1^*\wedge e_6^* + e_2^*\wedge e_5^* - e_3^*\wedge e_4^*.$
$k=4,\qquad Z(\mathcal{G}) = vect\{e_5,e_6\},\qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\{e_3,e_4,e_5\}$

21. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_6$
$\omega_1 = e_1^*\wedge e_6^* + e_2^*\wedge e_4^* - e_3^*\wedge e_4^* - e_3^*\wedge e_5^*,$
$\omega_2 = e_1^*\wedge e_6^* + e_2^*\wedge e_5^* - e_3^*\wedge e_4^*,$
$\omega_3 = -e_1^*\wedge e_6^* - e_2^*\wedge e_5^* + e_3^*\wedge e_4^*.$
$k=3,\qquad Z(\mathcal{G}) = vect\{e_5,e_6\},\qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\{e_4,e_6\}$

22. $[e_1,e_2]=e_5,\quad [e_1,e_5]=e_6,$
$\omega = e_1^*\wedge e_6^* + e_2^*\wedge e_5^* + e_3^*\wedge e_4^*.$
$k=3,\qquad Z(\mathcal{G}) = vect\{e_3,e_4,e_6\},\qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\{e_5,e_6\}$

23. $[e_1,e_2]=e_5,\quad [e_1,e_3]=e_6,$
$\omega_1 = e_1^*\wedge e_6^* + e_2^*\wedge e_5^* + e_3^*\wedge e_4^*,$
$\omega_2 = e_1^*\wedge e_4^* + e_2^*\wedge e_6^* + e_3^*\wedge e_5^*,$
$\omega_3 = -e_1^*\wedge e_4^* + e_2^*\wedge e_6^* - e_3^*\wedge e_5^*.$
$k=2,\qquad Z(\mathcal{G}) = vect\{e_4,e_5,e_6\},\qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\{e_5,e_6\}$

24. $[e_1,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_5,$
$\omega_1 = e_1^*\wedge e_6^* + e_2^*\wedge e_5^* + e_3^*\wedge e_4^*,$
$\omega_2 = -e_1^*\wedge e_6^* - e_2^*\wedge e_5^* - e_3^*\wedge e_4^*.$
$k=2,\qquad Z(\mathcal{G}) = vect\{e_5,e_6\},\qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\{e_5,e_6\}$

25. $[e_1,e_2]=e_6,\quad \omega = e_1^*\wedge e_6^* + e_2^*\wedge e_5^* + e_3^*\wedge e_4^*.$
$k=2,\qquad Z(\mathcal{G}) = vect\{e_3,e_4,e_5,e_6\},\qquad \mathcal{D}(\mathcal{G}) = vect\{e_6\}$

26. $\mathbb{R}^6$, abelienne, $\omega = e_1^*\wedge e_6^* + e_2^*\wedge e_5^* + e_3^*\wedge e_4^*.$
Les mêmes bases de $\mathfrak{g}_i$ sont utulisées dans tout le chapitre.

2.2 Groupes de Lie symplectiques nilpotents connexes simplement connexes de dimension 6

Dans la suite on désigne par $G_1 \rtimes_\varphi G_2$ le produit semi-direct du groupe de Lie G_1 par le groupe de Lie G_2 suivant une représentation $\varphi : G_2 \longrightarrow Aut(G_1)$ où $Aut(G_1)$ est le groupe des automorphismes continus de G_1. Il est connu que si G_1 est connexe, simplement connexe et nilpotent, le groupe $Aut(G_1)$ est isomorphe au groupe $Aut(\mathcal{G}_1)$ des automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_1$ de G_1 (voir [**Bo, Chap. 2 et 3**]). Si φ est la représentation triviale on écrira simplement $G_1 \times G_2$ (produit direct). De plus par $\mathbb{H}_3$ nous dénoterons le groupe de Lie de Heisenberg de dimension 3.
On a le résultat technique suivant :

Proposition 2.2.1. Un groupe de Lie simplectique connexe et simplement connexe nilpotent de dimension 6 est isomorphe à un des groupes décrits par les tableaux 1 et 2 ci-dessous.

Idée de la preuve
Etant donnée une algèbre de Lie symplectique nilpotente de dimension 6 on la décrit par une suite d'extensions d'algèbres de Lie. A chaque extension d'algèbres de Lie nous lui associons une suite exacte de groupes de Lie connexes et simplement connexes. En remontant de proche en proche on obtient le groupe de Lie cherché.
Pour illustrer la preuve nous décrivons le cas de $\mathfrak{g}_1$. Celle-ci peut s'écrire comme $\mathfrak{g}_1 \equiv Vect(e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) \rtimes_\varphi \mathbb{R}e_1$ où

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}e_1 &\longrightarrow gl\left(Vect(e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)\right) \\ ae_1 &\longmapsto ad(ae_1)_{|Vect(e_2,e_3,e_4,e_5,e_6)} \end{aligned}$$

et la matrice de $\varphi(a)$ dans la base $\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ est $Mat(\varphi(a)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$.
Il est clair que $I_1 = Vect(e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ est un idéal de $\mathfrak{g}_1$ dont le crochet est $[e_2, e_3] = e_5$, $[e_2, e_4] = e_6$. Alors la suite suivante est une suite exacte d'algèbre de Lie

$$\{0\} \longrightarrow I_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathbb{R}e_1 \longrightarrow \{0\}$$

Ainsi I_1 s'écrit comme $I_1 = I_2 \rtimes_\psi \mathbb{R}e_2$ où $I_2 = Vect(e_3, e_4, e_5, e_6)$ est abélien et $Mat\,(\psi(be_2), \{e_3, e_4, e_5, e_6\}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons donc la suite exacte d'algèbre de Lie

$$\{0\} \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \mathbb{R}e_2 \longrightarrow \{0\}$$

Soit H_i, $i = 1, 2$ le groupe de Lie connexe et simplement connexe associé à I_i. Alors H_2 est isomorphe à $(\mathbb{R}^4, +)$. En remontant les suites successives on obtient que H_1 est isomorphe à $H_2 \rtimes_{\bar{\psi}} \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^4 \rtimes_{\bar{\psi}} \mathbb{R}$, le produit étant défini par

$$(\sigma, \tau)\left(\sigma', \tau'\right) = \left(\sigma + \bar{\psi}(\tau)\sigma', \tau + \tau'\right)$$

où $\bar{\psi} : \tau \longmapsto \exp(\psi(\tau e_2))$.

Par conséquent G_1 est isomorphe à $H_1 \rtimes_{\bar{\varphi}} \mathbb{R} \equiv \left(\mathbb{R}^4 \rtimes_{\bar{\psi}} \mathbb{R}\right) \rtimes_{\bar{\varphi}} \mathbb{R}$ avec $\bar{\varphi} : \mu \longmapsto \exp(\varphi(\mu e_1))$. Ainsi le produit sur G_1 est donné par :
$(((\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6), \tau), \mu)\left(((\sigma_3', \sigma_4', \sigma_5', \sigma_6'), \tau'), \mu'\right) =$
$= \Big(\sigma_3 + \mu\tau' + \sigma_3'; \sigma_4 + \frac{\mu^2}{2}\tau' + \mu\sigma_3' + \sigma_4'; \sigma_5 + \frac{\mu^3}{6}\tau' + (\frac{\mu^2}{2} + \tau)\sigma_3' + \mu\sigma_4' + \sigma_5'\,;$
$\sigma_6 + \frac{\mu^4}{24}\tau' + \left(\frac{\mu^3}{6} + \mu\tau\right)\sigma_3' + \left(\frac{\mu^2}{2} + \tau\right)\sigma_4' + \mu\sigma_5' + \sigma_6'; \tau + \tau'; \mu + \mu'\Big)$.
Les autres cas sont traités de façon analogue.■

Tableau 2.1

Algèbre	**Groupe de Lie**
$\mathfrak{g}_1$	$G_1 = (\mathbb{R}^4 \rtimes \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_2$	$G_2 = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}_3) \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_3$	$G_3 = \mathbb{R}^5 \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_4$	$G_4 = (\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_5$	$G_5 = (\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_6$	$G_6 = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}_3) \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_7$	$G_7 = (\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_8$	$G_8 = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{g}_9$	$G_9 = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{g}_{10}$	$G_{10} = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}_3) \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_{11}$	$G_{11} = [\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R})] \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_{12}$	$G_{12} = (\mathbb{R}^4 \rtimes \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_{13}$	$G_{13} = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}_3) \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_{14}$	$G_{14} = \mathbb{R}^5 \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_{15}$	$G_{15} = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}_3) \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_{16}$	$G_{16} = (\mathbb{R}^4 \rtimes \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_{17}$	$G_{17} = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}_3) \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_{18}$	$G_{18} = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}_3) \rtimes \mathbb{R}$
$\mathfrak{g}_{19}$	$G_{19} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^4 \rtimes \mathbb{R})$
$\mathfrak{g}_{20}$	$G_{20} = \mathbb{R} \times [(\mathbb{R} \times \mathbb{H}_3) \rtimes \mathbb{R}]$
$\mathfrak{g}_{21}$	$G_{21} = \mathbb{R} \times [(\mathbb{R} \times \mathbb{H}_3) \rtimes \mathbb{R}]$
$\mathfrak{g}_{22}$	$G_{22} = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R})$
$\mathfrak{g}_{23}$	$G_{23} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^4 \rtimes \mathbb{R})$
$\mathfrak{g}_{24}$	$G_{24} = \mathbb{H}_3 \times \mathbb{H}_3$
$\mathfrak{g}_{25}$	$G_{25} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{H}_3$
$\mathfrak{g}_{26}$	$G_{26} = \mathbb{R}^6$

Ci-dessous est explicité le produit dans chacun des groupes G_i , $1 \leq i \leq 26$.

Tableau 2.2

G_1	$(((\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),\sigma),t)\cdot\big(((\mu_1',\mu_2',\mu_3',\mu_4'),\sigma'),t'\big) =$ $\Big(\mu_1+t\sigma'+\mu_1',\mu_2+\frac{t^2}{2}\sigma'+t\mu_1'+\mu_2',$ $\mu_3+\frac{t^3}{6}\sigma'+(\frac{t^2}{2}+\sigma)\mu_1'+t\mu_2'+\mu_3',$ $\mu_4+\frac{t^4}{24}\sigma'+(\frac{t^3}{6}+t\sigma)\mu_1'+(\frac{t^2}{2}+\sigma)\mu_2'+t\mu_3'+\mu_4',\sigma+\sigma',t+t'\Big)$
G_2	$((\sigma_1,\sigma_2),(\mu_1,\mu_2,\mu_3),t)\cdot\big((\sigma_1',\sigma_2'),(\mu_1',\mu_2',\mu_3'),t'\big) =$ $\Big(\sigma_1+\sigma_1',\sigma_2+t\sigma_1'+\sigma_2',\mu_1+\frac{t^2}{2}\sigma_1'+t\sigma_2'+\mu_1',$ $\mu_2+\frac{t^3}{6}\sigma_1'+\frac{t^2}{2}\sigma_2'+t\mu_1'+\mu_2',$ $\mu_3+\frac{t^4}{24}\sigma_1'+\frac{t^3}{6}\sigma_2'+\frac{t^2}{2}\mu_1'+t\mu_2'+\mu_3'+\mu_1(\frac{t^3}{6}\sigma_1'+\frac{t^2}{2}\sigma_2'+t\mu_1'+\mu_2'),t+t'\Big)$
G_3	$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,t)\cdot(\sigma_1',\sigma_2',\sigma_3',\sigma_4',\sigma_5',t') =$ $\Big(\sigma_1+\sigma_1',\sigma_2+\sigma_2'+t\sigma_1',\sigma_3+\sigma_3'+\frac{t^2}{2}\sigma_1'+t\sigma_2',$ $\sigma_4+\sigma_4'+\frac{t^3}{6}\sigma_1'+(\frac{t^2}{2})\sigma_2'+t\sigma_3',$ $\sigma_5+\sigma_5'+\frac{t^4}{24}\sigma_1'+(\frac{t^3}{6})\sigma_2'+(\frac{t^2}{2})\sigma_3'+t\sigma_4',t+t'\Big)$
G_4	$((\sigma_1,\sigma_2),(\mu_1,\mu_2,\mu_3),t)\cdot\big((\sigma_1',\sigma_2'),(\mu_1',\mu_2',\mu_3'),t'\big) =$ $\Big(\sigma_1+\sigma_1',\sigma_2+t\sigma_1'+\sigma_2',\mu_1+\frac{t^2}{2}\sigma_1'+t\sigma_2'+\mu_1',$ $\mu_2+\sigma_1\mu_1'+\mu_2',\mu_3+(\frac{t^3}{6})\sigma_1'+\frac{t^2}{2}\sigma_2'+t\mu_1'+\frac{\sigma_1^2}{2}\mu_1'+\sigma_1\mu_2'+\mu_3',t+t'\Big)$
G_5	$((\sigma_1,\sigma_2),(\mu_1,\mu_2,\mu_3),t)\cdot\big((\sigma_1',\sigma_2'),(\mu_1',\mu_2',\mu_3'),t'\big) =$ $\Big(\sigma_1+\sigma_1',\sigma_2+t\sigma_1'+\sigma_2',\mu_1+\frac{t^2}{2}\sigma_1'+t\sigma_2'+\mu_1',$ $\mu_2+\sigma_1\mu_1'+\mu_2',\mu_3-\frac{t^3}{6}\sigma_1'-\frac{t^2}{2}\sigma_2'-t\mu_1'+\frac{\sigma_1^2}{2}\mu_1'+\sigma_1\mu_2'+\mu_3',t+t'\Big)$

G_6	$((\sigma_1,\sigma_2),(\mu_1,\mu_2,\mu_3),t)\cdot\big((\sigma_1^{'},\sigma_2^{'}),(\mu_1^{'},\mu_2^{'},\mu_3^{'}),t'\big)=$ $\Big(\sigma_1+\sigma_1^{'},\sigma_2+t\sigma_1^{'}+\sigma_2^{'},\mu_1+\frac{t^2}{2}\sigma_1^{'}+t\sigma_2^{'}+\mu_1^{'},$ $\mu_2+\frac{t^3}{6}\sigma_1^{'}+(\frac{t^2}{2})\sigma_2^{'}+t\mu_1^{'}+\mu_2^{'},$ $\mu_3+\mu_1(\frac{t^3}{6}\sigma_1^{'}+\frac{t^2}{2}\sigma_2^{'}+t\mu_1^{'}+\mu_2^{'})+\mu_3^{'},t+t'\Big)$
G_7	$((\sigma_1,\sigma_2),(\mu_1,\mu_2,\mu_3),t)\cdot\big((\sigma_1^{'},\sigma_2^{'}),(\mu_1^{'},\mu_2^{'},\mu_3^{'}),t'\big)=$ $\big(\sigma_1+\sigma_1^{'},\sigma_2+\sigma_2^{'},\mu_1+t\sigma_1^{'}+\mu_1^{'},$ $\mu_2+\frac{t^2}{2}\sigma_1^{'}+t\mu_1^{'}+\mu_2^{'},\mu_3+\frac{t^3}{6}\sigma_1^{'}+\frac{t^2}{2}\mu_1^{'}+t\mu_2^{'}+\mu_3^{'},t+t'\big)$
G_8	$((\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),(\sigma_1,\sigma_2))\cdot\big((\mu_1^{'},\mu_2^{'},\mu_3^{'},\mu_4^{'}),(\sigma_1^{'},\sigma_2^{'})\big)=$ $\Big(\mu_1+\mu_1^{'},\mu_2+\sigma_1\mu_1^{'}+\mu_2^{'},\mu_3+(\frac{\sigma_1^2}{2}+\sigma_2)\mu_1^{'}+\sigma_1\mu_2^{'}+\mu_3^{'},$ $\mu_4+(\sigma_1\sigma_2+\frac{\sigma_1^3}{6})\mu_1^{'}+(\sigma_2+\frac{\sigma_1^2}{2})\mu_2^{'}+\sigma_1\mu_3^{'}+\mu_4^{'},$ $\sigma_1+\sigma_1^{'},\sigma_2+\sigma_2^{'}\big)$
G_9	$((\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),(\sigma_1,\sigma_2))\cdot\big((\mu_1^{'},\mu_2^{'},\mu_3^{'},\mu_4^{'}),(\sigma_1^{'},\sigma_2^{'})\big)=$ $\big(\mu_1+\mu_1^{'},\mu_2+\sigma_1\mu_1^{'}+\mu_2^{'},\mu_3+\sigma_1\mu_2^{'}+\mu_3^{'},$ $\mu_4-\sigma_1\mu_1^{'}+(\sigma_1^2-\sigma_2)\mu_2^{'}+\sigma_1\mu_3^{'}+\mu_4^{'},\sigma_1+\sigma_1^{'},\sigma_2+\sigma_2^{'}\big)$
G_{10}	$((\sigma_1,\sigma_2),(\mu_1,\mu_2,\mu_3),t)\cdot\big((\sigma_1^{'},\sigma_2^{'}),(\mu_1^{'},\mu_2^{'},\mu_3^{'}),t'\big)=$ $\Big(\sigma_1+\sigma_1^{'},\sigma_2+\sigma_2^{'},\mu_1+t\sigma_1^{'}+\mu_1^{'},\mu_2+\frac{t^2}{2}\sigma_1^{'}+t\mu_1^{'}+\mu_2^{'},$ $\mu_3+t\sigma_2^{'}+\mu_1(\frac{t^2}{2}\sigma_1^{'}+t\mu_1^{'}+\mu_2^{'})+\mu_3^{'},t+t'\Big)$
G_{11}	$((\gamma,(\mu_1,\mu_2,\mu_3),\sigma),t)\cdot\big((\gamma^{'},(\mu_1^{'},\mu_2^{'},\mu_3^{'}),\sigma^{'}),t'\big)=$ $\Big(\gamma+\gamma^{'},\mu_1+t\gamma^{'}+\mu_1^{'},\mu_2+(\frac{t^2}{2})\gamma^{'}+\sigma\mu_1^{'}+\mu_2^{'},$ $\mu_3+\sigma\mu_1^{'}+\sigma\mu_2^{'}+\mu_3^{'},\sigma+\sigma^{'},t+t'\big)$
G_{12}	$((\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),\sigma,t)\cdot\big((\mu_1^{'},\mu_2^{'},\mu_3^{'},\mu_4^{'}),\sigma^{'},t'\big)=$ $\Big(\mu_1+\mu_1^{'},\mu_2+t\sigma^{'}+\mu_2^{'},\mu_3+(\frac{t^2}{2}\sigma+t)\mu_2^{'}-\sigma\mu_1^{'}+\mu_3^{'},$ $\mu_4+\sigma\mu_2^{'}+\mu_4^{'},\sigma+\sigma^{'},t+t'\big)$
G_{13}	$((\sigma_1,\sigma_2),(\mu_1,\mu_2,\mu_3),t)\cdot\big((\sigma_1^{'},\sigma_2^{'}),(\mu_1^{'},\mu_2^{'},\mu_3^{'}),t'\big)=$ $\big(\sigma_1+\sigma_1^{'},\sigma_2+\sigma_2^{'},\mu_1+t\sigma_1^{'}+\mu_1^{'},\mu_2+t\sigma_2^{'}+\mu_2^{'},$ $\mu_3+t\sigma_2^{'}+\mu_1(t\sigma_2^{'}+\mu_2^{'})+(\frac{t^2}{2})\sigma_1^{'}+t\mu_1^{'}+\mu_3^{'},t+t'\Big)$

G_{14}	$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,t)\cdot\big(\sigma_1^{'},\sigma_2^{'},\sigma_3^{'},\sigma_4^{'},\sigma_5^{'},t^{'}\big)=$ $\Big(\sigma_1+\sigma_1^{'},\sigma_2+\sigma_2^{'},\sigma_3+\sigma_3^{'}+t\sigma_1^{'}+\sigma_3^{'},\sigma_4+\sigma_4^{'}+t\sigma_2^{'},$ $\sigma_5+\sigma_5^{'}+\frac{t^2}{2}\sigma_1^{'}+t\sigma_3^{'},t+t'\Big)$
G_{15}	$((\sigma_1,\sigma_2),(\mu_1,\mu_2,\mu_3),t)\cdot\big((\sigma_1^{'},\sigma_2^{'}),(\mu_1^{'},\mu_2^{'},\mu_3^{'}),t'\big)=$ $\big(\sigma_1+\sigma_1^{'},\sigma_2+\sigma_2^{'},\mu_1+t\sigma_1^{'}+\mu_1^{'},\mu_2+t\mu_1^{'}+\mu_2^{'},$ $\mu_3+\mu_1(t\mu_1^{'}+\mu_2^{'})+\mu_3^{'},t+t'\big)$
G_{16}	$(((\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),\sigma),t)\cdot\big(((\mu_1^{'},\mu_2^{'},\mu_3^{'},\mu_4^{'}),\sigma^{'}),t'\big)=$ $\big(\mu_1+\mu_1^{'},\mu_2+\mu_2^{'},\mu_3+t\sigma^{'}+\sigma\mu_2^{'}+\mu_3^{'},$ $\mu_4+t\mu_1^{'}+\sigma\mu_1^{'}+\mu_4^{'},\sigma+\sigma^{'},t+t'\big)$
G_{17}	$((\sigma_1,\sigma_2),(\mu_1,\mu_2,\mu_3),t)\cdot\big((\sigma_1^{'},\sigma_2^{'}),(\mu_1^{'},\mu_2^{'},\mu_3^{'}),t'\big)=$ $\big(\sigma_1+\sigma_1^{'},\sigma_2+\sigma_2^{'},\mu_1+\mu_1^{'},\mu_2+t\sigma_2^{'}+\mu_2^{'},$ $\mu_3+\mu_1(t\sigma_2^{'}+\mu_2^{'})+t\mu_1^{'}+\mu_3^{'},t+t'\big)$
G_{18}	$((\sigma_1,\sigma_2),(\mu_1,\mu_2,\mu_3),t)\cdot\big((\sigma_1^{'},\sigma_2^{'}),(\mu_1^{'},\mu_2^{'},\mu_3^{'}),t'\big)=$ $\big(\sigma_1+\sigma_1^{'},\sigma_2+\sigma_2^{'},\mu_1+t\sigma_1^{'}+\sigma_1^{'},$ $\mu_2+t\sigma_2^{'}+\mu_2^{'},\mu_3+\mu_1(t\sigma_2^{'}+\mu_2^{'})+\mu_3^{'},t+t'\big)$
G_{19}	$(t,((\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),\sigma))\cdot\big(t',((\mu_1^{'},\mu_2^{'},\mu_3^{'},\mu_4^{'}),\sigma^{'})\big)=$ $\Big(t+t',\mu_1+\mu_1^{'},\mu_2+\sigma\mu_1^{'}+\mu_2^{'},\mu_3+(\frac{\sigma^2}{2})\mu_1^{'}+\sigma\mu_2^{'}+\mu_3^{'},$ $\mu_4+(\frac{\sigma^3}{6})\mu_1^{'}+(\frac{\sigma^2}{2})\mu_2^{'}+\sigma\mu_3^{'}+\mu_4^{'},\sigma+\sigma^{'}\Big)$
G_{20}	$(\sigma,((\gamma,(\mu_1,\mu_2,\mu_3)),t))\cdot\big(\sigma^{'},((\gamma^{'},(\mu_1^{'},\mu_2^{'},\mu_3^{'})),t')\big)=$ $\Big(\sigma+\sigma^{'},\gamma+\gamma^{'},\mu_1+t\gamma^{'}+\mu_1^{'},\mu_2+(\frac{t^2}{2})\gamma^{'}+t\mu_1^{'}+\mu_2^{'},$ $\mu_3+(\frac{t^3}{6})\gamma^{'}+(\frac{t^2}{2})\mu_1^{'}+t\mu_2^{'}+\mu_3^{'}+\mu_1(\frac{t^2}{2}\gamma^{'}+t\mu_1^{'})+\mu_2^{'}),t+t'\Big)$

G_{21}	$(\sigma,((\gamma,(\mu_1,\mu_2,\mu_3)),t))\cdot\big(\sigma',((\gamma',(\mu_1',\mu_2',\mu_3')),t')\big)=$ $\big(\sigma+\sigma',\gamma+\gamma',\mu_1+\mu_1',\mu_2+t\gamma'+\mu_2',$ $\mu_3+\frac{t^2}{2}\gamma'+t\mu_2'+\mu_3'+\mu_1(t\gamma'+\mu_2'),t+t'\big)$
G_{22}	$((\sigma_1,\sigma_2),((\mu_1,\mu_2,\mu_3),t))\cdot\big((\sigma_1',\sigma_2'),((\mu_1',\mu_2',\mu_3'),t')\big)=$ $\Big(\sigma_1+\sigma_1',\sigma_2+\sigma_2',\mu_1+\mu_1',\mu_2+t\mu_1'+\mu_2',\mu_3+(\frac{t^2}{2})\mu_1'+t\mu_2'\mu_3',t+t'\Big)$
G_{23}	$(t,((\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),\sigma))\cdot\big(t',((\mu_1',\mu_2',\mu_3',\mu_4'),\sigma')\big)=$ $\big(t+t',\mu_1+\mu_1',\mu_2+\mu_2',\mu_3+\sigma\mu_1'+\mu_3',\mu_4+\sigma\mu_2'+\mu_4',\sigma+\sigma'\big)$
G_{24}	$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6)\cdot\big(\sigma_1',\sigma_2',\sigma_3',\sigma_4',\sigma_5',\sigma_6'\big)=$ $\big(\sigma_1+\sigma_1',\sigma_2+\sigma_2',\sigma_3+\sigma_3',\sigma_4+\sigma_4',\sigma_5+\sigma_5'+\sigma_2\sigma_3',\sigma_6+\sigma_6'+\sigma_1\sigma_4'\big)$
G_{25}	$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6)\cdot\big(\sigma_1',\sigma_2',\sigma_3',\sigma_4',\sigma_5',\sigma_6'\big)=$ $\big(\sigma_1+\sigma_1',\sigma_2+\sigma_2',\sigma_3+\sigma_3',\sigma_4+\sigma_4',\sigma_5+\sigma_5',\sigma_6+\sigma_6'+\sigma_4\sigma_5'\big)$
G_{26}	$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6)\cdot\big(\sigma_1',\sigma_2',\sigma_3',\sigma_4',\sigma_5',\sigma_6'\big)=$ $\big(\sigma_1+\sigma_1',\sigma_2+\sigma_2',\sigma_3+\sigma_3',\sigma_4+\sigma_4',\sigma_5+\sigma_5',\sigma_6+\sigma_6'\big)$

2.3 Structure affine associée à la forme symplectique

Soit (G,ω^+) un groupe de Lie symplectique d'algèbre de Lie $(\mathfrak{g},\omega)$. Pour $x\in\mathfrak{g}$, désignons par x^+(resp. x^-) le champ de vecteurs invariant à gauche (resp. invariant à droite) sur G définie par x. Il est connu que pour $x,y,z\in\mathfrak{g}$ la formule

$$\omega^+\left(\nabla_{x^+}y^+,z^+\right)=-\omega^+\left(y^+,\left[x^+,z^+\right]\right)$$

définit une connexion ∇ invariante à gauche sur G de courbure et torsion nulles. Nous dirons que ∇ est la connexion linéaire plate associée à la forme symplectique ω^+, c'est-à-dire une structure affine invariante (à gauche) sur G. Cette structure est géodésiquement complète si et seulement si (G, ω^+) est unimodulaire (et résoluble) d'après le théorème 3 de [**LM**]. Dans la suite on désignera par $e_i \cdot e_j$ le produit bilinéaire définissant la structure affine associée à la forme symplectique . Dans le tableau suivant on donne l'expression de cette connexion dans les cas non abeliens.

Proposition 2.2.2 Soit (G, ω^+) un groupe de Lie connexe symplectique tel que son algèbre de Lie sous jacente $(\mathfrak{g}, \omega)$ soit nilpotente non abélienne de dimension 6. Alors la connexion ∇ associée à la forme symplectique ω^+ s'écrit comme dans le tableau 3 ci-dessous .
La preuve est directe. Pour l'illustrer considérons l'exemple de $(\mathfrak{g}_1, \omega)$.
La formule (**2.1**) est équivalente à

$$\nabla_x = \omega^{-1} \circ ad_x^* \circ \omega, \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Donc dans la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ on trouve

$$\nabla_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda-1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda-1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla_{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{e_5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla_{e_6} = 0$$

D'où
$$\begin{array}{llll} e_1 \cdot e_1 = \frac{1}{\lambda-1} e_2 \ , & e_1 \cdot e_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda} e_3 & e_1 \cdot e_3 = e_4 \ , & e_1 \cdot e_4 = \frac{\lambda}{\lambda-1} e_5 \\ e_2 \cdot e_1 = \frac{-1}{\lambda} e_3, & e_2 \cdot e_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda} e_4, & e_2 \cdot e_4 = \lambda e_6, & e_3 \cdot e_2 = -e_5 \\ e_3 \cdot e_3 = -\lambda e_6 \ , & e_4 \cdot e_1 = \frac{1}{\lambda-1} e_5, & e_4 \cdot e_2 = (\lambda-1) e_6, & e_5 \cdot e_1 = -e_6 \end{array}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.■

Tableau 2.3

Algèbre de Lie symplectique	Connexion affine
$(\mathfrak{g}_1, \omega)$	$e_1 \cdot e_1 = \frac{1}{\lambda-1} e_2 \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ $e_1 \cdot e_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda} e_3$ $e_1 \cdot e_3 = e_4 \ , \ \ e_1 \cdot e_4 = \frac{\lambda}{\lambda-1} e_5$ $e_2 \cdot e_1 = \frac{-1}{\lambda} e_3, \ \ e_2 \cdot e_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda} e_4$ $e_2 \cdot e_4 = \lambda e_6 \ , \ \ e_3 \cdot e_2 = -e_5$ $e_3 \cdot e_3 = -\lambda e_6 \ , \ \ e_4 \cdot e_1 = \frac{1}{\lambda-1} e_5$ $e_4 \cdot e_2 = (\lambda-1) e_6 \ , \ \ e_5 \cdot e_1 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_2, \omega^{\lambda})$	$e_1 \cdot e_1 = e_2 - e_3$ $e_1 \cdot e_2 = e_3 + e_4 + e_5, \ \ e_1 \cdot e_3 = e_4 + e_5$ $e_1 \cdot e_4 = e_5 \ , \ \ e_2 \cdot e_1 = e_4 + e_5$ $e_2 \cdot e_4 = e_6, \ \ e_3 \cdot e_1 = e_5$ $e_3 \cdot e_2 = -e_6 \ , \ \ e_3 \cdot e_3 = -e_6$ $e_4 \cdot e_2 = e_6, \ \ e_5 \cdot e_1 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_3, \omega)$	$e_1 \cdot e_1 = e_2 \ , \ \ e_1 \cdot e_3 = e_4$ $e_1 \cdot e_4 = e_5, \ \ e_2 \cdot e_1 = -e_3$ $e_2 \cdot e_5 = e_6, \ \ e_3 \cdot e_3 = -e_6$ $e_5 \cdot e_1 = -e_6, \ \ e_5 \cdot e_2 = e_6$
$(\mathfrak{g}_4, \omega^{\lambda_1,\lambda_2})$	$e_1 \cdot e_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e_5 - e_2 + e_4$ $e_1 \cdot e_2 = e_5 - e_6 \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \ \lambda_2 \neq 0$ $e_1 \cdot e_5 = -e_4, \ e_2 \cdot e_5 = e_6$ $e_2 \cdot e_1 = -e_5 - e_6 - e_3$ $e_2 \cdot e_3 = e_5 - e_3, \ e_3 \cdot e_1 = -e_4$ $e_3 \cdot e_2 = -e_6, \ \ e_3 \cdot e_3 = -e_4$ $e_4 \cdot e_1 = -e_6, \ \ e_5 \cdot e_1 = -e_4$
$(\mathfrak{g}_5, \omega_1^{\lambda_1,\lambda_2})$	$e_1 \cdot e_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e_5 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e_6 + e_2$ $e_1 \cdot e_2 = e_5 - e_6$ $e_1 \cdot e_5 = -e_4 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e_6 \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \ \lambda_2 \neq 0$ $e_2 \cdot e_1 = e_5 - e_6 - e_3$ $e_2 \cdot e_3 = e_5 - e_6, \ \ e_2 \cdot e_5 = e_6$ $e_3 \cdot e_1 = -e_4, \ \ e_3 \cdot e_2 = -e_6$ $e_3 \cdot e_3 = -e_4 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e_6, \ \ e_4 \cdot e_1 = e_6$ $e_5 \cdot e_1 = -e_4 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e_6$

$(\mathfrak{g}_5,\omega_2^\lambda)$	$e_1\cdot e_1=\frac14e_1-\frac14e_2+\frac12e_3$ $e_1\cdot e_2=\frac14e_1-\frac14e_2+\frac12e_3-e_4-e_5-2e_6$ $e_1\cdot e_3=\frac12e_4+\frac12e_5+e_6\ ,\quad \lambda\neq 0$ $e_1\cdot e_4=\frac14e_4-\frac14e_5-\frac12e_6\ ,\quad e_1\cdot e_5=\frac14e_4-\frac14e_5-\frac12e_6$ $e_2\cdot e_1=\frac14e_1-\frac14e_2-\frac12e_3-e_4-e_5-2e_6$ $e_2\cdot e_2=\frac14e_1-\frac14e_2-\frac12e_3,\quad e_2\cdot e_3=\frac12e_4+\frac12e_5+e_6$ $e_2\cdot e_4=\frac14e_4-\frac14e_5+\frac12e_6,\quad e_2\cdot e_5=\frac14e_4-\frac14e_5+\frac12e_6$ $e_3\cdot e_1=-\frac14e_4+\frac12e_5+e_6,\quad e_3\cdot e_2=\frac14e_4-\frac12e_5+e_6$ $e_3\cdot e_3=-e_6,\quad e_4\cdot e_1=\frac14e_4-\frac14e_5+\frac12e_6$ $e_4\cdot e_2=\frac14e_4-\frac14e_5+\frac12e_6,\quad e_5\cdot e_1=\frac14e_4-\frac14e_5-\frac12e_6$ $e_5\cdot e_2=\frac14e_4-\frac14e_5-\frac12e_6$
$(\mathfrak{g}_5,\omega_3^\lambda)$	$e_1\cdot e_1=\frac14e_1-\frac14e_2+\frac12e_3+\frac12e_4+\frac12e_5$ $e_1\cdot e_2=\frac14e_1-\frac14e_2+\frac12e_3-\frac12e_4-\frac12e_5$ $e_1\cdot e_3=\frac12e_4+\frac12e_5\ ,\quad \lambda\neq 0$ $e_1\cdot e_4=\frac14e_4-\frac14e_5-\frac12e_6\ ,\quad e_1\cdot e_5=\frac14e_4-\frac14e_5-\frac12e_6$ $e_2\cdot e_1=\frac14e_1-\frac14e_2-\frac12e_3-\frac12e_4-\frac12e_5$ $e_2\cdot e_2=\frac14e_1-\frac14e_2-\frac12e_3+\frac12e_4+\frac12e_5,\quad e_2\cdot e_3=\frac12e_4+\frac12e_5$ $e_2\cdot e_4=\frac14e_4-\frac14e_5+\frac12e_6,\quad e_2\cdot e_5=\frac14e_4-\frac14e_5+\frac12e_6$ $e_3\cdot e_1=-\frac12e_4+\frac12e_5,\quad e_3\cdot e_2=\frac12e_4-\frac12e_5$ $e_3\cdot e_3=-e_6,\quad e_4\cdot e_1=\frac14e_4-\frac14e_5+\frac12e_6$ $e_4\cdot e_2=\frac14e_4-\frac14e_5+\frac12e_6,\quad e_5\cdot e_1=\frac14e_4-\frac14e_5-\frac12e_6$ $e_5\cdot e_2=\frac14e_4-\frac14e_5-\frac12e_6$
$(\mathfrak{g}_5,\omega_4^\lambda)$	$e_1\cdot e_1=\frac14e_1-\frac14e_2+\frac12e_3+e_4+e_5-2e_6$ $e_1\cdot e_2=\frac14e_1-\frac14e_2+\frac12e_3$ $e_1\cdot e_3=\frac12e_4+\frac12e_5-e_6\ ,\quad \lambda\neq 0$ $e_1\cdot e_4=\frac14e_4-\frac14e_5-\frac12e_6\ ,\quad e_1\cdot e_5=\frac14e_4-\frac14e_5-\frac12e_6$ $e_2\cdot e_1=\frac14e_1-\frac14e_2-\frac12e_3$ $e_2\cdot e_2=\frac14e_1-\frac14e_2-\frac12e_3+e_4+e_5-2e_6,\quad e_2\cdot e_3=\frac12e_4+\frac12e_5-e_6$ $e_2\cdot e_4=\frac14e_4-\frac14e_5+\frac12e_6,\quad e_2\cdot e_5=\frac14e_4-\frac14e_5+\frac12e_6$ $e_3\cdot e_1=-\frac12e_4+\frac12e_5-e_6,\quad e_3\cdot e_2=\frac12e_4-\frac12e_5-e_6$ $e_3\cdot e_3=-e_6,\quad e_4\cdot e_1=\frac14e_4-\frac14e_5+\frac12e_6$ $e_4\cdot e_2=\frac14e_4-\frac14e_5+\frac12e_6,\quad e_5\cdot e_1=\frac14e_4-\frac14e_5-\frac12e_6$ $e_5\cdot e_2=\frac14e_4-\frac14e_5-\frac12e_6$
$(\mathfrak{g}_6,\omega_1)$	$e_1\cdot e_2=e_3-e_4+e_5$ $e_1\cdot e_3=e_4-e_5$ $e_1\cdot e_4=e_5$ $e_2\cdot e_1=-e_4+e_5$ $e_2\cdot e_4=-e_6,e_3\cdot e_2=-e_6$ $e_3\cdot e_1=-e_5$ $e_3\cdot e_3=e_6$ $e_4\cdot e_2=-e_6$

$(\mathfrak{g}_6,\omega_2)$	$e_1\cdot e_2=e_3-e_4+e_5$ $e_1\cdot e_3=e_4-e_5$ $e_1\cdot e_4=e_5$ $e_2\cdot e_1=-e_4+e_5$ $e_2\cdot e_4=-e_6$,$e_3\cdot e_2=-e_6$ $e_3\cdot e_1=-e_5$ $e_3\cdot e_3=e_6$ $e_4\cdot e_2=-e_6$
$(\mathfrak{g}_7,\omega_1^\lambda)$	$e_1\cdot e_2=e_4$,$e_1\cdot e_4=e_5$ $e_1\cdot e_5=e_6$, $e_2\cdot e_2=-e_1-e_5$ $e_2\cdot e_5=-e_3$,$e_3\cdot e_2=-e_6$ $e_4\cdot e_2=-e_6$ $e_4\cdot e_4=e_3$ $e_5\cdot e_2=-e_3$
$(\mathfrak{g}_7,\omega_2^\lambda)$	$e_1\cdot e_1=-e_2,\quad e_1\cdot e_2=e_3$ $e_1\cdot e_3=-e_5$, $e_2\cdot e_1=e_3-e_4$ $e_2\cdot e_3=e_6$, $e_3\cdot e_1=-e_5$ $e_4\cdot e_1=-e_5$ $e_4\cdot e_2=-e_6$
$(\mathfrak{g}_7,\omega_3^\lambda)$	$e_1\cdot e_1=-e_2,\quad e_1\cdot e_2=e_3$ $e_1\cdot e_3=-e_5$, $e_2\cdot e_1=e_3-e_4$ $e_2\cdot e_3=e_6$, $e_3\cdot e_1=-e_5$ $e_4\cdot e_1=-e_5$ $e_4\cdot e_2=-e_6$
$(\mathfrak{g}_8,\omega)$	$e_1\cdot e_1=-e_2$ $e_1\cdot e_2=e_3$ $e_1\cdot e_3=e_4$ $e_2\cdot e_1=e_3$ $e_2\cdot e_2=-e_4$, $e_3\cdot e_2=-e_5$ $e_3\cdot e_3=e_6$, $e_4\cdot e_1=-e_5$ $e_4\cdot e_2=-e_6$, $e_5\cdot e_1=-e_6$
$(\mathfrak{g}_9,\omega^\lambda)$	$e_1\cdot e_2=e_4,\quad e_1\cdot e_4=e_5$ $e_1\cdot e_5=e_6,\quad e_2\cdot e_2=-e_1$ $e_2\cdot e_5=-e_3,\quad e_3\cdot e_2=-e_6$ $e_4\cdot e_4=e_3,\quad e_5\cdot e_2=-e_3$
$(\mathfrak{g}_{10},\omega_1)$	$e_1\cdot e_1=-e_4$ $e_1\cdot e_2=e_3+e_4$ $e_1\cdot e_3=-e_5$ $e_2\cdot e_1=e_3,\quad e_2\cdot e_2=-e_3$ $e_2\cdot e_3=e_5+e_6$ $e_3\cdot e_1=-e_5-e_6,\quad e_3\cdot e_2=e_5+e_6$ $e_4\cdot e_1=-e_5,\quad e_4\cdot e_2=-e_6$

$(\mathfrak{g}_{10}, \omega_2)$	$e_1 \cdot e_1 = -e_4$ $e_1 \cdot e_2 = e_3 + e_4$ $e_1 \cdot e_3 = -e_5$ $e_2 \cdot e_1 = e_3, \quad e_2 \cdot e_2 = -e_3$ $e_2 \cdot e_3 = e_5 + e_6$ $e_3 \cdot e_1 = -e_5 - e_6, \quad e_3 \cdot e_2 = e_5 + e_6$ $e_4 \cdot e_1 = -e_5, \quad e_4 \cdot e_2 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{11}, \omega_1^\lambda)$	$e_1 \cdot e_2 = e_3 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$ $e_1 \cdot e_3 = -e_5$ $e_2 \cdot e_1 = e_3 - e_4$ $e_2 \cdot e_2 = \lambda e_3 - \lambda e_4$ $e_2 \cdot e_3 = -\lambda e_5 + e_6$ $e_3 \cdot e_1 = -e_5$ $e_3 \cdot e_2 = -\lambda e_5$ $e_4 \cdot e_1 = -e_5, \quad e_4 \cdot e_2 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{11}, \omega_2^\lambda)$	$e_1 \cdot e_2 = e_3 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$ $e_1 \cdot e_3 = -e_5$ $e_2 \cdot e_1 = e_3 - e_4$ $e_2 \cdot e_2 = -\lambda e_3 + \lambda e_4$ $e_2 \cdot e_3 = \lambda e_5 + e_6$ $e_3 \cdot e_1 = -e_5$ $e_3 \cdot e_2 = \lambda e_5$ $e_4 \cdot e_1 = -e_5, \quad e_4 \cdot e_2 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{12}, \omega^\lambda)$	$e_1 \cdot e_1 = -\frac{\lambda}{\lambda+1} e_3 \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ $e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{\lambda+1} e_4$ $e_1 \cdot e_3 = -(\lambda + 1) e_6$ $e_2 \cdot e_1 = -\frac{\lambda}{\lambda+1} e_4$ $e_2 \cdot e_2 = -\frac{1}{\lambda+1} e_3, \quad e_2 \cdot e_3 = \frac{-\lambda-1}{\lambda} e_5$ $e_3 \cdot e_1 = -\lambda e_6, \quad e_3 \cdot e_2 = \frac{-1}{\lambda} e_5$ $e_4 \cdot e_1 = -e_5, \quad e_4 \cdot e_2 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{13}, \omega_1^\lambda)$	$e_1 \cdot e_1 = \frac{-1}{\lambda-1} e_3 \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ $e_1 \cdot e_2 = \frac{\lambda}{\lambda-1} e_4$ $e_1 \cdot e_3 = \frac{\lambda+1}{\lambda} e_5, \quad e_2 \cdot e_1 = \frac{1}{\lambda-1} e_4$ $e_2 \cdot e_3 = (-\lambda + 1) e_6, \quad e_3 \cdot e_1 = \frac{-1}{\lambda} e_5$ $e_3 \cdot e_2 = -\lambda e_6, \quad e_4 \cdot e_1 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{13}, \omega_2^\lambda)$	$e_1 \cdot e_1 = \frac{-1}{\lambda} e_2 + \frac{1}{\lambda} e_3 \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $e_1 \cdot e_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda} e_4 + e_5$ $e_1 \cdot e_3 = \frac{-1}{\lambda} e_4 + e_5, \quad e_2 \cdot e_1 = \frac{-1}{\lambda} e_4 + e_5$ $e_2 \cdot e_2 = (-\lambda) e_6, \quad e_3 \cdot e_1 = \frac{-1}{\lambda} e_4$ $e_3 \cdot e_2 = -e_6, \quad e_3 \cdot e_3 = -e_6$ $e_4 \cdot e_1 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{13}, \omega_3)$	$e_1 \cdot e_1 = 2e_3$ $e_1 \cdot e_2 = -e_4 + 4e_5$ $e_1 \cdot e_3 = -e_5, \quad e_2 \cdot e_1 = -2e_4 + 4e_5$ $e_2 \cdot e_3 = \frac{1}{2} e_6, \quad e_3 \cdot e_1 = -2e_5$ $e_3 \cdot e_2 = -\frac{1}{2} e_6$ $e_4 \cdot e_1 = -e_6$

$(\mathfrak{g}_{14},\omega_1)$	$e_1\cdot e_1=-e_2$ $e_1\cdot e_2=e_4$ $e_1\cdot e_3=e_5,\quad e_2\cdot e_2=-e_6$ $e_3\cdot e_3=-e_6,\quad e_4\cdot e_1=-e_6$
$(\mathfrak{g}_{14},\omega_2)$	$e_1\cdot e_1=e_2$ $e_1\cdot e_2=e_4$ $e_1\cdot e_3=e_5,\quad e_2\cdot e_2=e_6$ $e_3\cdot e_3=-e_6,\quad e_4\cdot e_1=-e_6$
$(\mathfrak{g}_{14},\omega_3)$	$e_1\cdot e_1=-e_3$ $e_1\cdot e_2=e_4$ $e_1\cdot e_3=e_5,\quad e_2\cdot e_3=-e_6$ $e_3\cdot e_2=-e_6,\quad e_4\cdot e_1=-e_6$
$(\mathfrak{g}_{15},\omega_1)$	$e_1\cdot e_1=-e_3$ $e_1\cdot e_3=e_5+e_6$ $e_2\cdot e_1=-e_4,\quad e_2\cdot e_2=e_4$ $e_2\cdot e_3=-e_6,\quad e_3\cdot e_1=e_5+e_6$ $e_3\cdot e_2=-e_5-e_6,\quad e_4\cdot e_1=-e_6$
$(\mathfrak{g}_{15},\omega_2)$	$e_1\cdot e_1=-e_3$ $e_1\cdot e_3=e_5+e_6$ $e_2\cdot e_1=-e_4,\quad e_2\cdot e_2=e_4$ $e_2\cdot e_3=-e_6,\quad e_3\cdot e_1=e_5+e_6$ $e_3\cdot e_2=-e_5-e_6,\quad e_4\cdot e_1=-e_6$
$(\mathfrak{g}_{15},\omega_3)$	$e_1\cdot e_1=-e_2$ $e_1\cdot e_2=e_4$ $e_2\cdot e_2=-e_6$ $e_2\cdot e_3=e_5$ $e_3\cdot e_3=-e_4$ $e_4\cdot e_1=-e_6$
$(\mathfrak{g}_{16},\omega_1)$	$e_1\cdot e_1=-e_2$ $e_1\cdot e_4=-e_3$ $e_2\cdot e_1=-e_5,\ e_2\cdot e_4=e_6$ $e_3\cdot e_1=-e_6,\quad e_3\cdot e_4=-e_5$ $e_4\cdot e_1=-e_3,\quad e_4\cdot e_4=e_2$
$(\mathfrak{g}_{16},\omega_2)$	$e_1\cdot e_1=e_2$ $e_1\cdot e_4=-e_3$ $e_2\cdot e_1=e_5,\ e_2\cdot e_4=-e_6$ $e_3\cdot e_4=-e_5,\quad e_4\cdot e_1=e_3$ $e_4\cdot e_4=e_2$
$(\mathfrak{g}_{17},\omega)$	$e_1\cdot e_1=e_4$ $e_1\cdot e_2=e_5$ $e_2\cdot e_1=-e_3,\ e_2\cdot e_2=-e_6$ $e_3\cdot e_1=-e_6,\quad e_3\cdot e_2=e_3$ $e_4\cdot e_1=-e_5,\quad e_4\cdot e_2=e_4$

$(\mathfrak{g}_{18}, \omega_1^\lambda)$	$e_1 \cdot e_2 = \frac{\lambda}{\lambda-1} e_4 \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ $e_1 \cdot e_3 = \frac{\lambda-1}{\lambda} e_5$ $e_2 \cdot e_1 = \frac{1}{\lambda-1} e_4$ $e_2 \cdot e_3 = (1-\lambda) e_6$ $e_3 \cdot e_1 = \frac{-1}{\lambda} e_5, \quad e_3 \cdot e_2 = -\lambda e_6$
$(\mathfrak{g}_{18}, \omega_2^\lambda)$	$e_1 \cdot e_1 = \frac{-1}{2\lambda} e_4 \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ $e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{2} e_4, \quad e_1 \cdot e_3 = \frac{2\lambda^2}{\lambda^2+1} e_5 - \frac{2\lambda}{\lambda^2+1} e_6$ $e_2 \cdot e_1 = \frac{-1}{2} e_4$ $e_2 \cdot e_3 = \frac{2\lambda}{\lambda^2+1} e_5 + \frac{2\lambda^2}{\lambda^2+1} e_6$ $e_3 \cdot e_1 = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1} e_5 - \frac{2\lambda}{\lambda^2+1} e_6, \quad e_3 \cdot e_2 = \frac{2\lambda}{\lambda^2+1} e_5 + \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1} e_6$
$(\mathfrak{g}_{18}, \omega_3)$	$e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{2} e_4$ $e_1 \cdot e_3 = -\frac{1}{2} e_4 + 2e_5$ $e_2 \cdot e_1 = -\frac{1}{2} e_4$ $e_2 \cdot e_3 = 2e_6, \quad e_3 \cdot e_1 = -\frac{1}{2} e_4 + e_5$ $e_3 \cdot e_2 = e_6, \quad e_3 \cdot e_3 = e_6$
$(\mathfrak{g}_{19}, \omega)$	$e_1 \cdot e_2 = e_4$ $e_1 \cdot e_4 = e_5$ $e_2 \cdot e_5 = -e_3, \quad e_4 \cdot e_4 = e_3$ $e_5 \cdot e_2 = -e_3$
$(\mathfrak{g}_{20}, \omega)$	$e_1 \cdot e_2 = e_3 \;, \quad e_1 \cdot e_3 = e_4$ $e_1 \cdot e_4 = e_5, \quad e_2 \cdot e_2 = -e_4$ $e_2 \cdot e_4 = -e_6, \quad e_3 \cdot e_2 = -e_5$ $e_3 \cdot e_3 = e_6, \quad e_4 \cdot e_2 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{21}, \omega_1)$	$e_1 \cdot e_1 = -e_2, \quad e_1 \cdot e_2 = e_4 - e_5$ $e_1 \cdot e_3 = -e_4 + e_5, \quad e_2 \cdot e_1 = -e_5$ $e_2 \cdot e_2 = -e_6, \quad e_2 \cdot e_3 = e_6$ $e_3 \cdot e_1 = -e_4 + e_5, \quad e_4 \cdot e_1 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{21}, \omega_2)$	$e_1 \cdot e_1 = e_3$ $e_1 \cdot e_3 = -e_5, \quad e_2 \cdot e_1 = -e_4$ $e_2 \cdot e_3 = e_6$ $e_3 \cdot e_1 = -e_5, \quad e_4 \cdot e_1 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{21}, \omega_3)$	$e_1 \cdot e_1 = e_3$ $e_1 \cdot e_3 = -e_5, \quad e_2 \cdot e_1 = -e_4$ $e_2 \cdot e_3 = e_6$ $e_3 \cdot e_1 = -e_5, \quad e_4 \cdot e_1 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{22}, \omega)$	$e_1 \cdot e_1 = -e_2$ $e_1 \cdot e_2 = e_5$ $e_2 \cdot e_2 = -e_6$ $e_5 \cdot e_1 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{23}, \omega_1)$	$e_1 \cdot e_1 = e_4$ $e_1 \cdot e_2 = e_5$ $e_2 \cdot e_2 = -e_6$ $e_3 \cdot e_1 = -e_6$

$(\mathfrak{g}_{23}, \omega_2)$	$e_1 \cdot e_2 = e_5$ $e_1 \cdot e_3 = e_6$ $e_2 \cdot e_3 = -e_4$ $e_3 \cdot e_2 = -e_4$
$(\mathfrak{g}_{23}, \omega_3)$	$e_1 \cdot e_2 = -e_5$ $e_1 \cdot e_3 = -e_6$ $e_2 \cdot e_3 = -e_4$ $e_3 \cdot e_2 = e_4$
$(\mathfrak{g}_{24}, \omega_1)$	$e_1 \cdot e_1 = -e_3$ $e_2 \cdot e_2 = e_4$ $e_3 \cdot e_2 = -e_5$ $e_4 \cdot e_1 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{24}, \omega_2)$	$e_1 \cdot e_1 = -e_3$ $e_2 \cdot e_2 = e_4$ $e_3 \cdot e_2 = -e_5$ $e_4 \cdot e_1 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{25}, \omega)$	$e_1 \cdot e_1 = e_5$ $e_2 \cdot e_1 = -e_6$

2.4 Feuilletages lagrangiens transverses

Soit (M, Ω) une variété symplectique de dimension $2n$.
Un feuilletage $\mathcal{F}$ de rang n dans M est appélé *feuilletage lagrangien* lorsque ses feuilles sont des sous-variétés lagrangiennes de (M, Ω).

Définition 2.4.1 (M, Ω) est dite être munie d'une structure de variété *bilagrangienne* si M est munie de feuilletages lagrangiens partout transverses.

Ainsi, si $M = G$ est un groupe de Lie symplectique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ alors à toute sous-algèbre de Lie lagrangienne de $\mathfrak{g}$ correspond un feuilletage lagrangien invariant à gauche sur G. Ceci motive la détermination des sous-algèbres de Lie lagrangiennes.

2.4.1 Sous algèbres lagrangiennes

Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique , une sous-algèbre $\mathcal{L}$ de $\mathfrak{g}$ est dite *lagrangienne* si elle est totalement isotrope par rapport à ω c'est-à-dire si dim $(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}$dim $(\mathfrak{g})$ et $\omega(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{L}$.

Théorème 2.4.1.1. Les groupes de Lie symplectiques nilpotents de dimension 6 dont l'algèbre de Lie est isomorphe à l'une des algèbres suivantes admettent deux feuilletages lagrangiens invariants à gauche transverses :
$(\mathfrak{g}_6, \omega_1)$; $(\mathfrak{g}_6, \omega_2)$; $(\mathfrak{g}_{11}, \omega_1^0)$; $(\mathfrak{g}_{11}, \omega_2^0)$; $(\mathfrak{g}_{13}, \omega_1^\lambda)$; $(\mathfrak{g}_{14}, \omega_3)$; $(\mathfrak{g}_{17}, \omega)$; $(\mathfrak{g}_{18}, \omega_1^\lambda)$;$(\mathfrak{g}_{18}, \omega_2^\lambda)$; $(\mathfrak{g}_{18}, \omega_3^\lambda)$; $(\mathfrak{g}_{19}, \omega)$; $(\mathfrak{g}_{21}, \omega_2)$; $(\mathfrak{g}_{21}, \omega_3)$; $(\mathfrak{g}_{23}, \omega_1)$; $(\mathfrak{g}_{23}, \omega_2)$; $(\mathfrak{g}_{23}, \omega_3)$; $(\mathfrak{g}_{24}, \omega_1)$; $(\mathfrak{g}_{24}, \omega_2)$; $(\mathfrak{g}_{25}, \omega)$; $(\mathfrak{g}_{26}, \omega)$.
La preuve est directe et calculatoire.

Ci dessous (tableau 2.4) nous explicitons pour chaque algèbre de Lie symplectique nilpotente de dimension 6 décrite dans le théorème 2.4.1.1, deux sous-algèbres lagrangiennes supplémentaires définissant un couple de feuilletages lagrangiens invariants à gauche sur les groupes de Lie associés.

Tableau 2.4

Algèbres	**sous-algèbres Lagra. suppl.**
$(\mathfrak{g}_6, \omega_1)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_4, e_5)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_3, e_6)$
$(\mathfrak{g}_6, \omega_2)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_4, e_5)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_3, e_6)$
$(\mathfrak{g}_{11}, \omega_1^\lambda)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_4, e_5)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_3, e_6)$ si $\lambda = 0$
$(\mathfrak{g}_{11}, \omega_2^\lambda)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_4, e_5)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_3, e_6)$ si $\lambda = 0$
$(\mathfrak{g}_{13}, \omega_1^\lambda)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_3, e_5)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_4, e_6)$
$(\mathfrak{g}_{14}, \omega_3)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_3, e_5)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_4, e_6)$
$(\mathfrak{g}_{17}, \omega)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_3, e_5)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_4, e_6)$
$(\mathfrak{g}_{18}, \omega_1^\lambda)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_2, e_4)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_3, e_5, e_6)$
$(\mathfrak{g}_{18}, \omega_2^\lambda)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_2, e_4)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_3, e_5, e_6)$
$(\mathfrak{g}_{18}, \omega_3^\lambda)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_4, e_5)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_3, e_6)$
$(\mathfrak{g}_{19}, \omega)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_5, e_6)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_3, e_4)$

$(\mathfrak{g}_{21}, \omega_2)$	$\mathcal{A}_1 = vect\,(e_1, e_3, e_5)$ $\mathcal{A}_2 = vect\,(e_2, e_4, e_6)$
$(\mathfrak{g}_{21}, \omega_3)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_3, e_5)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_4, e_6)$
$(\mathfrak{g}_{23}, \omega_1)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_4, e_5)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_3, e_6)$
$(\mathfrak{g}_{23}, \omega_2)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_2, e_5)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_3, e_4, e_6)$
$(\mathfrak{g}_{23}, \omega_3)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_3, e_6)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_4, e_5)$
$(\mathfrak{g}_{24}, \omega_1)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_3, e_5)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_4, e_6)$
$(\mathfrak{g}_{24}, \omega_2)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_3, e_5)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_4, e_6)$
$(\mathfrak{g}_{25}, \omega)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_3, e_5)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_2, e_4, e_6)$
$(\mathfrak{g}_{26}, \omega)$	$\mathcal{L}_1 = vect\,(e_1, e_2, e_3)$ $\mathcal{L}_2 = vect\,(e_4, e_5, e_6)$

2.4.2 Connexion symplectique associée à la structure bilagrangienne

Définition 2.4.2.1. Une connexion symplectique sur une variété symplectique (M, Ω) est une connexion $\dot{\nabla}$ pour laquelle la forme symplectique est parallèle, c'est-à-dire telle qu'en tout point m de (M, Ω) et tous champs de vecteurs X et Y au voisinage de m :

$$\forall Z \in T_m M,\ \dot{\nabla}_Z\left(\Omega(X,Y)\right) - \Omega\left(\dot{\nabla}_Z X, Y\right) - \Omega\left(X, \dot{\nabla}_Z Y\right) = 0$$

On sait qu'une variété symplectique admet des connexions symplectiques. Les variétés bilangrangiennes admettent une connexion linéaire $\dot{\nabla}$ dite, dans la suite, *de Hess* introduite dans **[He]** dont les caractéristiques sont les suivantes : le tenseur de torsion de $\dot{\nabla}$ est identiquement nul, la forme symplectique Ω est parallèle relativement à $\dot{\nabla}$ c'est-à-dire $\dot{\nabla}\Omega = 0$ et $\dot{\nabla}$ préserve les feuilletages lagrangiens transverses $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Cette connexion est définie par

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_{X_1} Y_1 &= \nabla_{X_1} Y_{1|\mathcal{F}_1} \\ \dot{\nabla}_{X_2} Y_1 &= [X_2, Y_1]_{|\mathcal{F}_1} \\ \dot{\nabla}_{X_1} Y_2 &= [X_1, Y_2]_{|\mathcal{F}_2} \\ \dot{\nabla}_{X_2} Y_2 &= \nabla_{X_2} Y_{2|\mathcal{F}_2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

où $|\mathcal{F}_i$ désigne la projection sur $\mathcal{F}_i$ pour $i = 1, 2$.
Lorsque le tenseur de courbure de la connexion linéaire $\dot{\nabla}$ définie par (**2.2**) est nul, nous dirons que la connexion est *affine*.
Dans [**He**] Hess améliore la méthode classique de quantification de Kostant-Souriau en utilisant les connexions bilagrangiennes. Cette approche unifie plusieurs méthodes de quantification. Une des propriétés importantes mise en évidence par Hess dans son article [**He**] est le théorème suivant :

Théorème 2.4.2.2.(Hess)
Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux sous-fibrés lagrangiens transverses d'une variété symplectique (M, Ω) de dimension $2n$. Alors la connexion bilagrangienne associée est plate si et seulement si dans un voisinage de tout point de M il existe $2n$ fonctions différentiables $(q, p) = (q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots p_n)$ telles que $\{q_i, q_j\}$=$\{p_i, p_j\} = 0$ et $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ et les champs de vecteurs hamiltonniens $X_{q_1}, \cdots, X_{q_n}$ (resp. $X_{p_1}, \cdots, X_{p_n}$) engendrent localement $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$). Ici $\{,\}$ désigne le crochet de Poisson dans $C^\infty(M)$ défini par (M, Ω).

Théorème 2.4.2.3. La connexion de Hess déduite de chacun des couples de feuilletages lagrangiens décrits dans le tableau 4 est à courbure nulle.

Preuve. Montrons que la connexion définit par la formule (2.2) est sans courbure c'est-à-dire $R_{XY}Z = \dot{\nabla}_{[X,Y]}Z - [\dot{\nabla}_X, \dot{\nabla}_Y]Z = 0$ pour tous champ de vecteurs X, YZ invariants à gauche sur G.
Soient $\mathcal{D}_i$ les distributions correspondantes à $\mathcal{F}_i$.
Si $X, Y, Z \in \mathcal{D}_i$, $i = 1, 2$; alors

$$\begin{aligned} R_{XY}Z &= \dot{\nabla}_{[X,Y]}Z - \dot{\nabla}_X\dot{\nabla}_Y Z + \dot{\nabla}_Y\dot{\nabla}_X Z \\ &= \dot{\nabla}_{[X,Y]}Z - \dot{\nabla}_X\nabla_Y Z + \dot{\nabla}_Y\nabla_X Z \\ &= \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z \\ &= 0 \end{aligned}$$

Soient $X_2 \in \mathcal{D}_2$ et $Y_1 \in \mathcal{D}_1$, alors

$$R_{X_2Y_1}Z = \dot{\nabla}_{[X_2,Y_1]_{|\mathcal{D}_1}}Z - [\dot{\nabla}_{X_2}, \dot{\nabla}_{Y_1}]Z.$$

Pour ullustrer le fait que $R_{X_2Y_1}Z = 0$, considérons l'exemple de $(\mathfrak{g}_6, \omega_1)$.

Si $Z \in \mathcal{D}_1$,

$$\begin{aligned}
R_{X_2Y_1}Z &= \dot{\nabla}_{[X_2,Y_1]_{|\mathcal{D}_1}}Z - \dot{\nabla}_{X_2}\nabla_{Y_1}Z + \dot{\nabla}_{Y_1}\nabla_{X_2}Z\\
&= \dot{\nabla}_{[X_2,Y_1]_{|\mathcal{D}_1}}Z - \dot{\nabla}_{X_2}(\nabla_{Y_1}Z) + \dot{\nabla}_{Y_1}\left([X_2,Z]_{|\mathcal{D}_1}\right)\\
&= [[X_2,Y_1],Z]_{|\mathcal{D}_1} - [X_2,\nabla_{Y_1}Z]_{|\mathcal{D}_1} + \nabla_{Y_1}\left([X_2,Z]_{|\mathcal{D}_1}\right)\\
&= [\nabla_{X_2}Y_1 - \nabla_{Y_1}X_2, Z]_{|\mathcal{D}_1} - [X_2,\nabla_{Y_1}Z]_{|\mathcal{D}_1} + \nabla_{Y_1}(\nabla_{X_2}Z - \nabla_Z X_2)\\
&= [\nabla_{X_2}Y_1, Z] - [\nabla_{Y_1}X_2, Z] - [X_2,\nabla_{Y_1}Z] + \nabla_{Y_1}\nabla_{X_2}Z - \nabla_{Y_1}\nabla_Z X_2\\
&= \nabla_{\nabla_{X_2}Y_1}Z - \nabla_Z\nabla_{X_2}Y_1 - \nabla_{\nabla_{Y_1}X_2}Z + \nabla_Z\nabla_{Y_1}X_2 - \nabla_{X_2}\nabla_{Y_1}Z + \nabla_{\nabla_{Y_1}Z}X_2\\
&+\nabla_{Y_1}\nabla_{X_2}Z - \nabla_{Y_1}\nabla_Z X_2\\
&= \left(\nabla_{\nabla_{X_2}Y_1} - \nabla_{\nabla_{Y_1}X_2} - \nabla_{X_2}\nabla_{Y_1} + \nabla_{Y_1}\nabla_{X_2}\right)Z + \nabla_Z\nabla_{Y_1}X_2 - \nabla_{Y_1}\nabla_Z X_2\\
&-\nabla_Z\nabla_{X_2}Y_1 + \nabla_{\nabla_{Y_1}Z}X_2\\
&= 0
\end{aligned}$$

On vérifie aussi que si $Z \in \mathcal{D}_2$, $R_{X_2Y_1}Z = 0$.
De même on calcule $R_{X_1Y_2}Z$ pour $X_1 \in \mathcal{D}_1$ et $Y_2 \in \mathcal{D}_2$ en distinguant les cas $Z \in \mathcal{D}_1$ et $Z \in \mathcal{D}_2$ ■

Rappelons qu'une connexion invariante à gauche sur un groupe de Lie est donnée, par un produit bilinéaire sur son algèbre, en posant $(e_i \bullet e_j)^+ = \nabla_{e_i^+}e_j^+$.
Une analyse exhaustive de chacune des algèbres de Lie symplectiques nilpotentes de dimension 6 nous permet de constater que chacune de ces algèbres est l'algèbre des commutateurs d'un produit symétrique à gauche $ab = L_a(b) = R_a(b)$ qui vérifie la condition

$$\omega(L_a x, y) + \omega(x, L_a y) = 0$$

quels que soient les éléments de l'algèbre en question. Nous avons ainsi le résultat suivant

Théorème 2.4.2.4. Tout groupe de Lie symplectique nilpotent de dimension 6 admet une structure affine symplectique invariante à gauche (voir Tableau 5).

Tableau 2.5

Algèbre de Lie symplectique	**Connexion symplectique affine**
$(\mathfrak{g}_1, \omega)$	$e_1 \bullet e_1 = \frac{1}{\lambda-1} e_2$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ $e_1 \bullet e_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda} e_3$ $e_1 \bullet e_4 = e_5$ $e_1 \bullet e_5 = e_6$ $e_2 \bullet e_1 = \frac{-1}{\lambda} e_3$ $e_2 \bullet e_4 = e_6$
$(\mathfrak{g}_2, \omega^{\lambda})$	$e_1 \bullet e_1 = e_2$ $e_1 \bullet e_2 = e_3$ $e_1 \bullet e_4 = e_5$ $e_1 \bullet e_5 = e_6$
$(\mathfrak{g}_3, \omega)$	$e_1 \bullet e_1 = e_2$ $e_1 \bullet e_4 = e_5$ $e_1 \bullet e_5 = e_6$ $e_2 \bullet e_1 = -e_3$

$(\mathfrak{g}_4, \omega^{\lambda_1,\lambda_2})$	$e_1 \bullet e_1 = -e_2$ $e_1 \bullet e_4 = e_6$ $e_1 \bullet e_5 = -e_4$ $e_2 \bullet e_1 = -e_3$ $e_2 \bullet e_5 = e_6$
$(\mathfrak{g}_5, \omega_1^{\lambda_1,\lambda_2})$	$e_1 \bullet e_1 = e_2$ $e_1 \bullet e_4 = -e_6$ $e_2 \bullet e_1 = -e_3$ $e_2 \bullet e_5 = e_6$
$(\mathfrak{g}_5, \omega_2^{\lambda_1,\lambda_2})$	$e_1 \bullet e_1 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{2}e_3$ $e_1 \bullet e_2 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{2}e_3$ $e_1 \bullet e_4 = -e_6$ $e_2 \bullet e_1 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{2}e_3$ $e_2 \bullet e_2 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{2}e_3$ $e_2 \bullet e_5 = e_6$
$(\mathfrak{g}_5, \omega_3^{\lambda_1,\lambda_2})$	$e_1 \bullet e_1 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{2}e_3$ $e_1 \bullet e_2 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{2}e_3$ $e_1 \bullet e_4 = -e_6$ $e_2 \bullet e_1 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{2}e_3$ $e_2 \bullet e_2 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{2}e_3$ $e_2 \bullet e_5 = e_6$
$(\mathfrak{g}_5, \omega_4^{\lambda_1,\lambda_2})$	$e_1 \bullet e_1 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{2}e_3$ $e_1 \bullet e_2 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{2}e_3$ $e_1 \bullet e_4 = -e_6$ $e_2 \bullet e_1 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{2}e_3$ $e_2 \bullet e_2 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{2}e_3$ $e_2 \bullet e_5 = e_6$
$(\mathfrak{g}_6, \omega_1)$	$e_1 \bullet e_2 = e_3$ $e_1 \bullet e_4 = e_5$ $e_3 \bullet e_1 = -e_4$ $e_3 \bullet e_2 = -e_6$ $e_3 \bullet e_3 = e_6$
$(\mathfrak{g}_6, \omega_2)$	$e_1 \bullet e_2 = e_3$ $e_1 \bullet e_4 = e_5, \quad e_2 \bullet e_1 = -e_4 + e_5$ $e_3 \bullet e_1 = -e_5, \quad e_3 \bullet e_2 = -e_6$ $e_3 \bullet e_3 = e_6, \quad e_4 \bullet e_2 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_7, \omega_1^{\lambda})$	$e_1 \bullet e_2 = e_4$ $e_1 \bullet e_5 = e_6$ $e_2 \bullet e_2 = -e_1$ $e_2 \bullet e_3 = e_6$
$(\mathfrak{g}_7, \omega_2^{\lambda})$	$e_1 \bullet e_1 = -e_2$ $e_1 \bullet e_5 = e_6$ $e_2 \bullet e_1 = -e_4$ $e_2 \bullet e_3 = e_6$ $e_4 \bullet e_1 = -e_5$

$(\mathfrak{g}_7, \omega_3^\lambda)$	$e_1 \bullet e_1 = -e_2$ $e_1 \bullet e_2 = e_3$ $e_1 \bullet e_4 = e_5$ $e_1 \bullet e_5 = e_6$ $e_2 \bullet e_1 = e_3$ $e_2 \bullet e_4 = e_6$
$(\mathfrak{g}_8, \omega)$	$e_1 \bullet e_1 = -e_2$ $e_1 \bullet e_2 = e_3$ $e_1 \bullet e_4 = e_5$ $e_2 \bullet e_1 = e_3$ $e_1 \bullet e_5 = e_6$ $e_2 \bullet e_4 = e_6$
$(\mathfrak{g}_9, \omega^\lambda)$	$e_1 \bullet e_2 = e_4$ $e_1 \bullet e_5 = e_6$ $e_2 \bullet e_2 = -e_1$
$(\mathfrak{g}_{10}, \omega_1)$	$e_1 \bullet e_1 = -e_4$ $e_1 \bullet e_2 = e_4$ $e_1 \bullet e_3 = -e_5$ $e_2 \bullet e_3 = e_5 + e_6$
$(\mathfrak{g}_{10}, \omega_2)$	$e_1 \bullet e_1 = -e_4$ $e_1 \bullet e_2 = e_4$ $e_1 \bullet e_3 = e_6$ $e_3 \bullet e_1 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{11}, \omega_1^0)$	$e_2 \bullet e_1 = -e_4$ $e_2 \bullet e_3 = e_6$ $e_4 \bullet e_1 = -e_5$ $e_4 \bullet e_2 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{11}, \omega_2^0)$	$e_2 \bullet e_1 = -e_4$ $e_2 \bullet e_3 = e_6$ $e_4 \bullet e_1 = -e_5$ $e_4 \bullet e_2 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{12}, \omega^\lambda)$	$e_1 \bullet e_1 = \frac{\lambda}{\lambda+1} e_3 \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ $e_1 \bullet e_2 = \frac{-1}{\lambda} e_1$ $e_2 \bullet e_2 = \frac{-1}{\lambda+1} e_3$ $e_1 \bullet e_5 = e_6, \quad e_2 \bullet e_4 = e_6$
$(\mathfrak{g}_{13}, \omega_1^\lambda)$	$e_1 \bullet e_1 = \frac{-1}{\lambda-1} e_3 \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $e_1 \bullet e_2 = e_4$ $e_1 \bullet e_3 = \frac{\lambda+1}{\lambda} e_5$ $e_3 \bullet e_1 = \frac{-1}{\lambda} e_5$ $e_3 \bullet e_2 = -e_6$ $e_4 \bullet e_1 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{13}, \omega_2^\lambda)$	$e_2 \bullet e_1 = -e_4 \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $e_2 \bullet e_2 = -\lambda e_6$ $e_3 \bullet e_1 = -e_5$ $e_3 \bullet e_2 = -e_6$ $e_3 \bullet e_3 = -e_6$

$(\mathfrak{g}_{13},\omega_3^{\lambda})$	$e_2 \bullet e_1 = -e_4$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ $e_2 \bullet e_3 = \frac{1}{2}e_6$ $e_3 \bullet e_1 = -e_5$ $e_3 \bullet e_2 = -\frac{1}{2}e_6$
$(\mathfrak{g}_{14},\omega_1)$	$e_1 \bullet e_1 = -e_2$ $e_1 \bullet e_4 = e_6$
$(\mathfrak{g}_{14},\omega_2)$	$e_2 \bullet e_1 = -e_4$ $e_2 \bullet e_2 = e_6$
$(\mathfrak{g}_{14},\omega_3)$	$e_1 \bullet e_1 = -e_3$ $e_1 \bullet e_2 = e_4$ $e_1 \bullet e_3 = e_5$ $e_1 \bullet e_4 = e_6$
$(\mathfrak{g}_{15},\omega_1)$	$e_1 \bullet e_1 = -e_3$ $e_1 \bullet e_4 = e_6$
$(\mathfrak{g}_{15},\omega_2)$	$e_2 \bullet e_1 = -e_4$ $e_2 \bullet e_2 = e_4$ $e_2 \bullet e_3 = e_5$
$(\mathfrak{g}_{15},\omega_3)$	$e_1 \bullet e_1 = -e_2$ $e_3 \bullet e_3 = -e_4$
$(\mathfrak{g}_{16},\omega_1)$	$e_1 \bullet e_1 = -e_2$ $e_1 \bullet e_3 = e_6$ $e_4 \bullet e_3 = e_5$ $e_4 \bullet e_4 = e_2$
$(\mathfrak{g}_{16},\omega_2)$	$e_1 \bullet e_1 = e_2$ $e_1 \bullet e_3 = e_6$ $e_2 \bullet e_1 = e_5$ $e_2 \bullet e_4 = e_6$
$(\mathfrak{g}_{17},\omega)$	$e_2 \bullet e_2 = -e_6$ $e_4 \bullet e_2 = e_4$
$(\mathfrak{g}_{18},\omega_1^{\lambda})$	$e_1 \bullet e_2 = \frac{\lambda}{\lambda-1}e_4$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ $e_1 \bullet e_3 = e_5$ $e_2 \bullet e_1 = \frac{1}{\lambda-1}e_4$ $e_2 \bullet e_3 = e_6$
$(\mathfrak{g}_{18},\omega_2^{\lambda})$	$e_1 \bullet e_1 = \frac{-1}{2\lambda}e_4$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ $e_1 \bullet e_2 = \frac{1}{2}e_4$ $e_1 \bullet e_3 = e_5$ $e_2 \bullet e_1 = \frac{-1}{2}e_4$ $e_2 \bullet e_3 = e_6$
$(\mathfrak{g}_{18},\omega_3^{\lambda})$	$e_2 \bullet e_1 = -e_4$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ $e_2 \bullet e_3 = 2e_6$ $e_3 \bullet e_1 = -e_5$ $e_3 \bullet e_2 = e_6$ $e_3 \bullet e_3 = e_6$
$(\mathfrak{g}_{19},\omega)$	$e_1 \bullet e_2 = e_4$ $e_4 \bullet e_4 = e_3$

$(\mathfrak{g}_{20}, \omega)$	$e_1 \bullet e_2 = e_3$ $e_2 \bullet e_4 = -e_6$ $e_1 \bullet e_4 = e_5$
$(\mathfrak{g}_{21}, \omega_1)$	$e_1 \bullet e_1 = -e_2$ $e_1 \bullet e_4 = e_6$
$(\mathfrak{g}_{21}, \omega_2)$	$e_1 \bullet e_1 = e_3$ $e_1 \bullet e_3 = -e_5$ $e_3 \bullet e_1 = -e_5$
$(\mathfrak{g}_{21}, \omega_3)$	$e_1 \bullet e_1 = e_3$ $e_1 \bullet e_3 = -e_5$ $e_3 \bullet e_1 = -e_5$
$(\mathfrak{g}_{22}, \omega)$	$e_1 \bullet e_1 = -e_2$ $e_1 \bullet e_5 = e_6$
$(\mathfrak{g}_{23}, \omega_1)$	$e_2 \bullet e_2 = -e_6$ $e_1 \bullet e_1 = e_4$
$(\mathfrak{g}_{23}, \omega_2)$	$e_1 \bullet e_2 = e_5$ $e_1 \bullet e_3 = e_6$
$(\mathfrak{g}_{23}, \omega_3)$	$e_1 \bullet e_2 = e_5$ $e_1 \bullet e_3 = -e_6$
$(\mathfrak{g}_{24}, \omega_1)$	$e_1 \bullet e_1 = -e_3$ $e_2 \bullet e_2 = e_4$
$(\mathfrak{g}_{24}, \omega_2)$	$e_1 \bullet e_1 = -e_3$ $e_2 \bullet e_2 = e_4$ $e_3 \bullet e_2 = -e_5$
$(\mathfrak{g}_{25}, \omega)$	$e_1 \bullet e_1 = e_5$ $e_1 \bullet e_2 = e_6$

2.5 Réduction symplectique et double extension symplectique.

Soient (M, Ω) une variété symplectique, ϕ une action hamiltonienne d'un groupe de Lie H sur M et J une application moment pour cette action. On désigne par $\psi_{\sigma,x}$ l'application définie par :

$$\begin{array}{rrcl} \psi_{\sigma,x} : & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & X & \longmapsto & \psi_{\sigma,x}(X) = \left\langle J\left(\phi_\sigma(X)\right) - Ad^*_{\sigma^{-1}} J(X), x \right\rangle \end{array} .$$

Alors l'application Q donnée par :

$$\begin{array}{rrcl} Q : & H & \longrightarrow & \mathcal{H}^* \\ & \sigma & \longmapsto & Q(\sigma) = J\left(\phi_\sigma(X)\right) - Ad^*_{\sigma^{-1}} J(X) \quad \text{tel que} \end{array}$$

$\langle Q(\sigma), x\rangle = \psi_{\sigma,x}$ pour tout $x \in \mathcal{H}$ est un cocycle de H relativement à la représentation coadjointe. Ce cocycle détermine aussi une représentation affine $\oslash$ du groupe de Lie H sur le dual $\mathcal{H}^*$ de son algèbre de Lie $\mathcal{H}$ par :$\oslash(\sigma, \xi) = Q(\sigma) + Ad^*_{\sigma^{-1}}(\xi)$, $\forall \sigma \in H$, $\xi \in \mathcal{H}^*$. Le moment J est équivariant pour les deux actions ϕ et $\oslash$ c'est-à-dire que $J(\phi_\sigma(X)) = \oslash(\sigma, J(X))$ pour tout $\sigma \in H$ et tout $X \in M$.
Aussi l'application

$$\begin{array}{rrcl} Q_2: & \mathcal{H} \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & Q_2(x, y) = d\widehat{Q}_y(\varepsilon) \cdot x \end{array}$$

où $\widehat{Q}_y$ est la fonction sur H telle que $\widehat{Q}_y(\sigma) = \langle Q(\sigma), y\rangle$, est un 2-cocycle scalaire de $\mathcal{H}$ pour la représentation adjointe de $\mathcal{H}$.

Pour tout $\mu \in \mathcal{H}^*$, on note H_μ le sous groupe d'isotropie de μ relativement à l'action affine $\oslash$ de H sur $\mathcal{H}^*$ et $\mathcal{H}_\mu$ l'algèbre de Lie de H_μ. On suppose dans ce qui suit que μ est une valeur régulière pour J, donc $J^{-1}(\mu)$ est une sous variété de M. L'équivariance de J pour les actions ϕ et $\oslash$ implique que $J^{-1}(\mu)$ est invariant par H_μ. On note alors $H.x$ l'orbite de x pour l'action de H_μ sur $J^{-1}(\mu)$.
En utilisant le théorème de réduction symplectique de [**MW**] on obtient

Propostion 2.5.3[Me]
On suppose que (G, ω^+) est un groupe de Lie symplectique connexe et simplement connexe . Soient H un sous-groupe de Lie de G, $\mathcal{H}$ son algèbre de Lie et i l'inclusion canonique de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$. On note L_H l'action à gauche de H sur G. Alors L_H est une action hamiltonienne de H sur (G, ω^+) dont une application moment cocycle est :

$$\begin{array}{rrcl} J^H: & G & \longrightarrow & \mathcal{H}^* \\ & \sigma & \longmapsto & J^H(\sigma) = i^t \circ Q(\sigma) \end{array}$$

où i^t est l'application transposée de i, et Q le 2-cocycle de G défini par $Q(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (ad^* x)^{k-1} \omega(x, \cdot)$ avec $exp(x) = \sigma$ et $\omega = \omega^+_\varepsilon$.
Le cocycle $Q_H : H \longrightarrow \mathcal{H}^*$ associé à J^H est donné par : $Q_H = i^t \circ Q \circ I$ où I est l'inclusion canonique de H dans G.
Preuve.
Soit $x \in \mathcal{H}$ et X_G le champ de vecteurs fondamental associé à x par L_H :montrons que $i_{X_G}\omega = d\widehat{J}_x$.
Avec

$$\begin{array}{rrcl} J^H_x: & G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \sigma & \longmapsto & \langle i^t \circ Q(\sigma), x\rangle \end{array}.$$

Comme X_G est un champ de vecteurs invariant à gauche et ω^+ une 2-forme invariante à gauche il suffit de montrer que l'égalité à l'élément neutre ε. Soit $y \in \mathcal{G}$ alors

$$\begin{aligned}
\left(d_\varepsilon J^H_x\right) y &= \tfrac{d}{dt}_{|t=0} \left\langle J^H(expty), x\right\rangle \\
&= \tfrac{d}{dt}_{|t=0} \langle i^t \circ Q(expty), x\rangle \\
&= \tfrac{d}{dt}_{|t=0} \langle Q(expty), x\rangle \\
&= d\widehat{Q}_x(\varepsilon).y \\
&= \omega\,(x, y) \\
&= \left(i_{X_G}\Omega\right)_\varepsilon .y
\end{aligned}.$$

Soit $Q : H \longrightarrow \mathcal{H}^*$ le cocycle associé à J^H. Par définition on a :

$$Q_H(\sigma) = J^H \circ L_H(\sigma, X) - Ad^*_{\sigma^{-1}} J^H X \quad \forall \sigma \in H \text{ et } \forall X \in G.$$

Q_H ne dépendant pas de la valeur choisie pour X, on prend alors $X = \varepsilon$ et compte tenu du fait que $J^H(\varepsilon) = 0$ car $Q(\varepsilon) = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned}
Q_H(\sigma) &= J^H(\sigma) - Ad^*_\sigma J(\varepsilon) \\
&= J^H(\sigma) \\
&= i^t \circ Q(\sigma)
\end{aligned}.$$

d'où $Q_H = i^t \circ Q(\sigma) \circ I$

En plus des hypothèses du proposition 2.5.3 , désignons par H_0 le sous groupe d'isotropie en zéro pour l'action affine $\oslash$ définie par la classe de cohomologie du cocycle Q_H associé à J_H. Alors on a :

Proposition 2.5.4.
Si H est un groupe de Lie fermé et distingué de G alors ${}_{H_0}\backslash \left(J^H\right)^{-1}(0)$ est un groupe de Lie symplectique.
Preuve.

- $\left(J^H\right)^{-1}(0)$ est un sous-groupe de Lie de G.
  En effet :
  Soient σ et $\sigma' \in \left(J^H\right)^{-1}(0)$ alors
  $$\begin{aligned}
  J^H(\sigma.\sigma') &= i^t \circ Q(\sigma.\sigma') \\
  &= i^t \left(Q(\sigma) + Ad^*_{\sigma^{-1}} Q(\sigma')\right) \\
  &= i^t \circ Q(\sigma) + i^t \left(Ad^*_{\sigma^{-1}} Q(\sigma')\right) \\
  &= J^H(\sigma) + i^t \left(Ad^*_{\sigma^{-1}} Q(\sigma')\right) \\
  &= i^t \left(Ad^*_{\sigma^{-1}} Q(\sigma')\right)
  \end{aligned}$$
  Or pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\left\langle i^t \circ Ad^*_{\sigma^{-1}} Q(\sigma'), x\right\rangle = \left\langle Q(\sigma'), Ad_{\sigma^{-1}}\right\rangle = 0$ car $\mathcal{H}$ est stable pour l'action adjointe de G (H distingué). $\left(J^H\right)^{-1}(0)$ est donc stable pour la loi de G.
  $\left(J^H\right)^{-1}(0)$ est stable par passage à l'inverse ; en effet : du fait que $J^H\left(\sigma\sigma^{-1}\right) = 0$;
  $$J^H(\sigma\sigma^{-1}) = J^H(\sigma^{-1}) + i^t \circ (Ad^*_\sigma Q(\sigma)) = 0.$$
  Or $i^t \circ (Ad^*_\sigma Q(\sigma)) = 0$ car $\mathcal{H}$ est invariant par l'action adjointe de G donc

$\left(J^{H}\right)(\sigma^{-1})$.

– H_0 est un sous-groupe de Lie distingué de $\left(J^{H}\right)^{-1}(0)$; en effet,

$$\begin{aligned} H_0 &= \{\sigma \in H / \oslash(\sigma, 0) = 0\} \\ &= \{\sigma \in H / i^t \circ Q(\sigma) = 0\} \\ &= \left\{\sigma \in H / J^H(\sigma) = 0\right\} \\ &= H \cap \left(J^{H}\right)^{-1}(0) \end{aligned}$$

– ${}_{H_0}\backslash \left(J^{H}\right)^{-1}(0)$ est un groupe de Lie. Le théorème de réduction symplectique implique l'existence sur ${}_{H_0}\backslash \left(J^{H}\right)^{-1}(0)$ d'une 2-forme symplectique $\widehat{\omega}$ unique telle que $\pi^*\widehat{\omega} = i^*\Omega$ avec π la projection canonique de $\left(J^{H}\right)^{-1}(0)$ sur ${}_{H_0}\backslash \left(J^{H}\right)^{-1}(0)$ et i l'inclusion canonique de $\left(J^{H}\right)^{-1}(0)$ dans G.

– $\left({}_{H_0}\backslash \left(J^{H}\right)^{-1}(0), \widehat{\omega}\right)$ est un groupe de Lie symplectique.En effet il suffit de prouver que $\forall \sigma \in \left(J^{H}\right)^{-1}(0)$, la 2-forme symplectique $\left(L_{\pi(\sigma)}\right)^* \widehat{\omega}$ vérifie la relation

$$\pi^* \left(L_{\pi(\sigma)}\right)^* \widehat{\omega} = i^*\Omega.$$

$$\begin{aligned} \pi^* \left(L_{\pi(\sigma)}\right)^* \widehat{\omega} &= \left(L_{\pi(\sigma)} \circ \pi\right)^* \widehat{\omega} \\ &= (\pi \circ L_\sigma)^* \widehat{\omega} \\ &= (L_\sigma)^*.\pi^*\widehat{\omega} \\ &= (L_\sigma)^*.i^*\Omega \\ &= (i \circ L_\sigma)^* \Omega \\ &= (L_\sigma \circ i)^* \Omega \quad (\text{car } \sigma \in \left(J^{H}\right)^{-1}(0) \text{ qui est un sous groupe de } G) \\ &= i^*(L_\sigma)^*\Omega \\ &= i^*\Omega \end{aligned}$$

Exemples

Exemple 1. Soit G_1 le groupe de Lie connexe simplement connexe de dimension 6 dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_1$. Le 2-cocycle $\omega = e_1^* \wedge e_6^* + (1-\lambda)e_2^* \wedge e_5^* + \lambda e_3^* \wedge e_4^*$, où $\{e_1^*, \cdots, e_6^*\}$ est la base duale de la base $\{e_1, \cdots, e_6\}$ de $\mathfrak{g}_3$, définit dans G_1 par translation à gauche une structure de groupe de Lie symplectique .
Considérons l'idéal central $\mathcal{I} = Vect_{\mathbb{R}}(e_6)$. Le sous-groupe de Lie connexe H associé à $\mathcal{I}$ est un sous-groupe fermé distingé dans G_1 qui est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
Soit L_H l'action à gauche de H sur G_1. Un moment pour cette action est donné par : $J(\exp x) =^t i \circ Q(\exp x)$ où

$$Q(\exp x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(ad_x^*\right)^{k-1} \omega(x, \bullet).$$

Alors pour $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathfrak{g}_1$,

$$\begin{array}{l}
Q[\exp(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)] = \\
= [-x_6 - \frac{1}{2}x_2\lambda x_4 + (\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{6}x_2x_1)\lambda x_3 + (\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{6}x_2^2 - \frac{1}{6}x_3x_1 + \frac{1}{24}x_2x_1^2)(1-\lambda)x_2 \\
+(\frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{6}x_3x_2 - \frac{1}{6}x_4x_1 + \frac{1}{24}x_2^2x_1 - \frac{1}{24}(-x_2^2 - x_3x_1)x_1 - \frac{1}{120}x_2x_1^3)x_1]e_1^* \\
+[(\lambda-1)x_5 + \frac{1}{2}\lambda x_1x_4 - \frac{1}{6}\lambda x_1^2x_3 + (\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{6}x_2x_1 - \frac{1}{24}x_1^3)(1-\lambda)x_2 + \frac{1}{2}x_4x_1 - \frac{1}{6}x_3x_1^2 \\
-\frac{1}{12}x_2x_1^3 + \frac{1}{120}x_1^5]e_2^* \\
+[-\lambda x_4 - \frac{1}{2}\lambda x_1x_3 + \frac{1}{2}(1-\lambda)x_2^2 + \frac{1}{6}(1-\lambda)x_1^2x_2 + \frac{1}{3}x_2x_1^2 - \frac{1}{24}x_1^4]e_3^* \\
+[\lambda x_3 + \frac{1}{2}(\lambda-1)x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{6}x_1^3]e_4^* \\
+[(1-\lambda)x_2 - \frac{1}{2}x_1^2]e_5^* \\
+[x_1]e_6^*
\end{array}.$$

Calcul du "moment cocycle" J_H et de $H^\perp$

$$\begin{array}{rl}
J_H : G & \longrightarrow \mathcal{I}^* \\
\exp(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) & \longmapsto x_1 e_6^*
\end{array}$$

$H^\perp = J_H^{-1}(0)$ et est isomorphe à $\mathbb{R}^4 \rtimes \mathbb{R}$.
D'après la proposition 2.5.4 $H \backslash H^\perp$ est un groupe de Lie symplectique. Il s'identifie au groupe de Lie symplectique abélien $\left(\mathbb{R}^4, \overline{\omega^+}\right)$ où $\overline{\omega^+} = (1-\lambda)\theta_2 \wedge \theta_5 + \lambda\theta_3 \wedge \theta_4$.
Les suites qui décrivent la double extension symplectique, au sens de [**DM2**], au niveau des groupes sont données par

$$\{\varepsilon\} \to H \to \mathbb{R}^4 \rtimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 \to \{\varepsilon\}$$

$$\mathbb{R}^4 \rtimes \mathbb{R} \to G \to \mathbb{R}$$

Exemple 2. Soit G_3 le groupe de Lie connexe simplement connexe de dimension 6 dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_3$. Le cocycle $\omega = e_1^* \wedge e_6^* - e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^*$, où $\{e_1^*, \cdots, e_6^*\}$ est la base duale de la base $\{e_1, \cdots, e_6\}$ de $\mathfrak{g}_3$, définit dans G_3 une structure de groupe de Lie symplectique dont la forme symplectique est donnée par :

$$\omega^+ = \theta_1 \wedge \theta_6 + \theta_5 \wedge \theta_2 + \theta_3 \wedge \theta_4$$

où $\{\theta_i\}_{i=1\ldots6}$ désigne la 1-forme invariante à gauche sur G associée à $\{e_i^*\}$.
On considère l'idéal central $\mathcal{I} = Vect_{\mathbb{R}}(e_6)$. Le sous-groupe de Lie connexe H associé à $\mathcal{I}$ est un sous-groupe fermé distingé dans G_3 qui est isomorphe à :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Considerons L_H l'action à gauche de H sur G_3 . Un moment pour cette action est : $J(\exp x) = J(\exp(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)) =^t i \circ Q(\exp x)$ où

$$Q(\exp x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (ad_x^*)^{k-1} \omega(x,\bullet)$$

Pour $x = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \in \mathfrak{g}_3$ on obtient

$$\begin{aligned}
&Q[\exp(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)] = \\
&= [-x_6 - \tfrac{1}{2}x_2x_4 + x_3\left(\tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{6}x_1x_2\right) - x_2\left(\tfrac{1}{2}x_4 - \tfrac{1}{6}x_3x_1 + \tfrac{1}{24}x_1^2x_2\right) \\
&+x_1\left(\tfrac{1}{2}x_5 - \tfrac{1}{6}x_1x_4 + \tfrac{1}{24}x_1^2x_3 - \tfrac{1}{120}x_1^3x_2\right)]e_1^* \\
&+[x_5 + \tfrac{1}{2}x_1x_4 - \tfrac{1}{6}x_1^2x_3 + \tfrac{1}{24}x_1^3x_2 + \tfrac{1}{120}x_1^5]e_2^* \\
&+[-x_4 - \tfrac{1}{2}x_1x_3 - \tfrac{1}{6}x_1^2x_2 - \tfrac{1}{24}x_1^4]e_3^* \\
&+[x_3 + \tfrac{1}{2}x_1x_2 + \tfrac{1}{6}x_1^3]e_4^* \\
&+[-x_2 - \tfrac{1}{2}x_1^2]e_5^* \\
&+[x_1]e_6^*
\end{aligned}$$

Calcul du "moment cocycle" J_H et de $H^{\perp}$

$$\begin{aligned} J_H : G &\longrightarrow \mathcal{I}^* \\ \exp(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) &\longmapsto x_1e_6^* \end{aligned}$$

$$H^{\perp} = J_H^{-1}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6 \in \mathbb{R} \right\}.$$

D'après la proposition 2.5.4 $H\backslash H^{\perp}$ est un groupe de Lie symplectique. Il s'identifie au groupe abélien $\left(\mathbb{R}^4, \overline{\omega^+}\right)$ où $\overline{\omega^+} = \theta_5 \wedge \theta_2 + \theta_3 \wedge \theta_4$.
Les suites qui décrivent la double extension symplectique, au sens de [**DM2**], au niveau des groupes sont données par

$$\{\varepsilon\} \to H \to \mathbb{R}^5 \to H\backslash J_H^{-1}(0) \to \{\varepsilon\}$$

$$\mathbb{R}^5 \to G \to \mathbb{R}$$

Exemple 3. Soit $\left(G, \omega_3^+\right)$ le groupe de Lie connexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{18}$ muni de la forme symplectique $\omega_3 = e_3^* \wedge e_5^* - e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + 2e_3^* \wedge e_4^*$. Il est clair que $\mathcal{I} = Vect_{\mathbb{R}}(e_6)$ est un idéal de $\mathfrak{g}_{18}$. Soit H le sous-groupe de Lie de G, connexe associé à $\mathcal{I}$; bien évidemment H est un sous-groupe distingué dans G.

Un moment pour l'action à gauche L_H de H sur G est donné par $J(\exp x) = i^t \circ Q(\exp x) = x_1 e_6^*$.
$J_H^{-1}(0)$ s'identifie alors à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}_3$ et $\underline{H \backslash J_H^{-1}(0)}$ est isomorphe au groupe abélien $(\mathbb{R}^4, +)$ muni de la forme symplectique $\overline{\omega_3^+} = \theta_3 \wedge \theta_5 + \theta_2 \wedge \theta_5 + \theta_3 \wedge \theta_4$.
Les suites qui décrivent la double extension au niveau du groupe sont données par

$$\{\varepsilon\} \to H \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}_3 \to \mathbb{R}^4 \to \{\varepsilon\}$$

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}_3 \to G \to \mathbb{R}$$

2.6 Structures complexes invariantes à gauche

Soit (G, ω^+) un groupe de Lie symplectique d'algèbre de Lie $(\mathcal{G}, \omega)$

Définition 2.6.1. Une structure complexe invariante à gauche sur G est la donnée d'un champ de tenseur de type $(1,1)$ invariant à gauche qui est, en chaque point σ de la variété, un endomorphisme J de l'espace tangent $T_\sigma G$ tel que $J^2 = -Id_{T_\sigma G}$ et $N_J = 0$, où N_J désigne le tenseur de Nijenhuis.
Du point de vue infinitésimal ceci équivaut à la donnée d'un endomorphisme j de l'espace vectoriel $\mathcal{G}$, tel que :

- (i) $j^2 = -Id$
- (ii) $N_j(x, y) = 0 = [j(x), j(y)] - [x, y] - j([j(x), y]) - j([x, j(y)])\, \forall x, y \in \mathcal{G}$
- (iii) $\omega\left(j(x), j(y)\right) = \omega\left(x, y\right),$ pour tout $x, y \in \mathcal{G}$.

Lemme 2.6.5 Il n'y a pas de structure complexe invariante à gauche sur les groupes de Lie (nilpotents) d'algèbres de Lie suivantes : $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_5$, $\mathfrak{g}_6$, $\mathfrak{g}_7$, $\mathfrak{g}_8$, $\mathfrak{g}_9$, $\mathfrak{g}_{11}$, $\mathfrak{g}_{19}$, $\mathfrak{g}_{20}$, $\mathfrak{g}_{22}$.
Preuve. Pour $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_5$, $\mathfrak{g}_6$, $\mathfrak{g}_7$, $\mathfrak{g}_8$, $\mathfrak{g}_9$, il n'existe pas de strucutres complexes en effet, puis qu'elles sont 4-nilpotentes et les ideaux dérivées sont de dimension au moins 3, les seules structures complexes possibles sont de la forme $[j(x), j(y)] = [x, y]$ ou $[j(x), y] = [x, y]$; Or dans ces cas le tenseur $N_j \neq 0$.
Pour $\mathfrak{g}_{11}$, $\mathfrak{g}_{19}$, $\mathfrak{g}_{20}$, $\mathfrak{g}_{22}$, la condition (iii) de la définition 2.6.1 n'est pas satisfaite. D'où le lemme.■

Proposition 2.6.6 Les groupes de Lie symplectiques nilpotents de dimension 6 dont l'algèbre de Lie est isomorphe à l'une parmi les algèbres suivantes admettent une structure complexe invariante à gauche : $\mathfrak{g}_{10}$, $\mathfrak{g}_{12}$, $\mathfrak{g}_{13}$, $\mathfrak{g}_{14}$, $\mathfrak{g}_{15}$, $\mathfrak{g}_{16}$, $\mathfrak{g}_{17}$, $\mathfrak{g}_{18}$, $\mathfrak{g}_{21}$, $\mathfrak{g}_{23}$, $\mathfrak{g}_{24}$, $\mathfrak{g}_{25}$, $\mathfrak{g}_{26}$.
Le tableau suivant donne des exemples de structure complexe sur ces groupes de Lie :

Tableau 2.6

Algèbres	structures complexes
$\mathfrak{g}_{10}$	$j(e_1) = e_2, \quad j(e_4) = e_3, \quad j(e_5) = -\frac{1}{2}e_6,$
$\mathfrak{g}_{12}$	$j(e_1) = e_2, \quad j(e_3) = e_4, \quad j(e_5) = e_6$
$\mathfrak{g}_{13}$	$j(e_1) = e_2, \quad j(e_4) = -e_3, \quad j(e_6) = \frac{-1}{2}e_5$
$\mathfrak{g}_{14}$	$j(e_1) = e_2, \quad j(e_4) = e_3, \quad j(e_6) = e_5$
$\mathfrak{g}_{15}$	$j(e_1) = e_1 + e_2, \quad j(e_4) = e_4 - e_3, \quad j(e_6) = -\frac{1}{2}e_5$
$\mathfrak{g}_{16}$	$j(e_1) = -e_4, \quad j(e_2) = e_3, \quad j(e_5) = e_6$
$\mathfrak{g}_{17}$	$j(e_1) = -e_2, \quad j(e_3) = -e_4, \quad j(e_5) = -2e_6$
$\mathfrak{g}_{18}$	$j(e_1) = e_6, \quad j(e_2) = e_3, \quad j(e_5) = -e_4$
$\mathfrak{g}_{21}$	$j(e_1) = -e_2, \quad j(e_3) = e_4, \quad j(e_5) = e_6$
$\mathfrak{g}_{23}$	$j(e_1) = -e_4, \quad j(e_2) = e_3, \quad j(e_5) = e_6$
$\mathfrak{g}_{24}$	$j(e_1) = e_6, \quad j(e_2) = e_5, \quad j(e_3) = e_4$
$\mathfrak{g}_{25}$	$j(e_1) = e_2, \quad j(e_3) = e_4, \quad j(e_5) = -e_6$
$\mathfrak{g}_{26}$	$j(e_1) = e_2, \quad j(e_3) = e_4, \quad j(e_5) = e_6$

2.7 Quelques remarques sur les réseaux des groupes de Lie symplectiques nilpotents de dimension 6

Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie .
Définition 2.7.2 Un réseau Γ dans un groupe de Lie G est un sous groupe discret cocompact de G . Ceci implique que la variété quotient $\Gamma\backslash G$ est compacte [**Ra**]. L'espace quotient $\Gamma\backslash G$ est alors appélé *nilvariété compacte*.
D'après Malcev G admet un réseau si et seulement si $\mathfrak{g}$ admet une base $\mathcal{B}$ à constantes de structure rationnelles (voir aussi [**Ma**],[**CG**],[**Ep**]). On dit alors que $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{B})$ définie une structure rationnelle sur $\mathfrak{g}$; c'est-à-dire que, $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{Q}$ et $\dim_{\mathbb{Q}}\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}$.

Ainsi des objets essentiels pour construire des nilvariétés symplectiques compactes sont les algèbres de Lie symplectiques réelles nilpotentes ayant une $\mathbb{Q}$-structure d'algèbre de Lie.
Donc à commensurabilité près, les nilvariétés symplectiques compactes de dimension 6 pourront être déterminées à l'aide de la classification des $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie nilpotentes de dimension 6 due à Morozov et de la liste des algèbres de Lie symplectiques donnée dans [**GMK**].
Une analyse de la liste des algèbres de Lie symplectiques de dimension 6 donné en début de ce chapitre montre que toutes ces algèbres de Lie sont à constantes de structures rationelles. D'où la proposition suivante :

Proposition 2.7.7.
Soit G un groupe de Lie simplectique nilpotent simplement connexe de dimension 6 , alors G admet des réseaux.

Compte tenu de cette dernière proposition , du Tableau 5 et de ce qui précède nous obtenons à partir des groupes de Lie considérés un grand nombre de nilvariétés symplectiques compactes munies de structures affines symplectiques.

Chapitre 3

Géométrie des groupes de Lie symplectiques de dimension 4

3.1 Introduction

On s'intéresse à l'étude des groupes de Lie symplectiques de dimension 4. Nous partons des algèbres de Lie symplectiques de dimension 4(dans le sens défini plus haut dans le chapitre 2) qui sont toujours résolubles d'après un resultat de **[LM]**. Nous mettons en évidence les groupes de Lie connexes simplement connexes associés à ces algèbres .
Nous montrons l'existence d'un couple de feuilletages lagrangiens transverses dans certains de ces groupes en donnant des exemples de sous-algèbres lagrangiennes supplémentaires (Tableau 3.3). Ceci nous permet d'exhiber une connexion symplectique invariante à gauche sans torsion que nous appellons de Hess sur ces groupes de Lie (Tableau 3.3bis). Dans **[DiM]**, A. Diatta et A. Medina ont mis en évidence l'existence d'une structure affine et d'une structure complexe sur le groupe de Lie double (défini par une solution de l'equation de Yang-Baxter) de tout groupe de Lie symplectique. Nous, nous exhibons dans les cas de dimension 4 la structure affine et une structure complexe sur le double de ces groupes de Lie .
Enfin nous entamons l'étude du groupe de transformations affines d'un groupe de Lie symplectique (donc affine) en explicitant le cas de la dimension 2 et des exemples de la dimension 4. En trouvant le groupe des automorphismes de l'algèbre symétrique à gauche nous classifions par la dimension le groupe de transformations affines de ces groupes de Lie.

3.2 Groupes de Lie symplectiques de dimension 4

3.2.1 Algèbres de Lie symplectiques de dimension 4

Toute algèbre de Lie symplectique de dimension 4 est résoluble (voir **[Cby]**). La classification des algèbres de Lie résolubles de dimension 4 est rappelée dans **[BC]** par M. Vergne. Dans **[MR2]** Medina et Revoy ont classifié les algèbres symplectiques de dimension 4. Utilisant cette classification nous explicitons le produit symétrique gauche associée à la forme ymplectique. Les notations utilisées dans la proposition suivante sont celles de **[BC]**.

Proposition 3.1.1.
Toute algèbre de Lie symplectique de dimension 4 est symplecto-isomorphe à l'une des algèbres de Lie suivantes citées dans le tableau 1 (voir **[MR2]**) :

Tableau 3.1

	Algèbre	crochet de Lie
1	$\mathfrak{g}_1^4$	tous les crochets sont nuls $\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$
2	$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,1}$	$[e_2, e_3] = e_4$ $\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$
3	$\mathfrak{g}_1^2 \times \mathfrak{g}_2$	$[e_3, e_4] = e_4$ $\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$
4	$\mathfrak{g}_{4,1}$	$[e_1, e_3] = e_3; [e_1, e_4] = e_4; [e_2, e_3] = e_4$ $\omega = e_1^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_3^*$
5	$\mathfrak{g}_{4,2}$	$[e_1, e_3] = e_3; [e_1, e_4] = e_4; [e_2, e_3] = -e_4; [e_2, e_4] = e_3$ $\omega = e_1^* \wedge e_4^* - e_2^* \wedge e_3^*$
6	$\mathfrak{g}_{4,3}$	$[e_1, e_2] = e_3; [e_1, e_3] = e_4$ $\omega = e_1^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_3^*$
7	$\mathfrak{g}_{4,4}$	$[e_1, e_2] = e_3; [e_1, e_4] = e_4$ $\omega = e_1^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_3^*$
8	$\mathfrak{g}_2^2$	$[e_1, e_2] = e_2; [e_3, e_4] = e_4$ $\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$
9	$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,2}^{(-1)}$	$[e_2, e_3] = e_3; [e_2, e_4] = -e_4$ $\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$
10	$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,4}^{(0)}$	$[e_2, e_3] = -e_4; [e_2, e_4] = e_3$ $\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$
11.a	$\mathfrak{g}_{4,5}^{(-1,\beta)}$ $0 < \beta < 1$	$[e_1, e_2] = e_2; [e_1, e_3] = -e_3; [e_1, e_4] = \beta e_4$ $\omega = e_1^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_3^*$
11.b	$\mathfrak{g}_{4,5}^{(-1,1)}$	$[e_1, e_2] = e_2; [e_1, e_3] = -e_3; [e_1, e_4] = -e_4$ $\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$
11.c	$\mathfrak{g}_{4,5}^{(\alpha,-\alpha)}$ $-1 < \alpha < 0$	$[e_1, e_2] = e_2; [e_1, e_3] = \alpha e_3; [e_1, e_4] = -\alpha e_4$ $\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$
12	$\mathfrak{g}_{4,6}^{(-1)}$	$[e_1, e_2] = -e_2; [e_1, e_3] = e_3 + e_4; [e_1, e_4] = e_4$ $\omega = e_1^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_3^*$
13	$\mathfrak{g}_{4,8}^{(\alpha,0)}$ $\alpha > 0$	$[e_1, e_2] = \alpha e_2; [e_1, e_3] = -e_4; [e_1, e_4] = e_3$ $\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$
14.a	$\mathfrak{g}_{4,9}^{(1/2)}$	$[e_1, e_2] = -\frac{1}{2}e_2; [e_1, e_3] = e_3; [e_1, e_4] = \frac{1}{2}e_4; [e_2, e_3] = e_4$ $\omega = e_1^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_3^*$
14.b	$\mathfrak{g}_{4,9}^{(\alpha)}$ $0 < \alpha \leq 2$ et $\alpha \notin \{1, 1/2\}$	$[e_1, e_2] = (\alpha - 1)e_2; [e_1, e_3] = e_3; [e_1, e_4] = \alpha e_4; [e_2, e_3] = e_4$ $\omega = \alpha e_1^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_3^*$
15	$\mathfrak{g}_{4,10}$	$[e_2, e_3] = e_4; [e_1, e_2] = e_2 + e_3; [e_1, e_3] = e_3; [e_1, e_4] = 2e_4$ $\omega = 2e_1^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_3^*$
16	$\mathfrak{g}_{4,11}^{(\alpha)}$ $\alpha > 0$	$[e_2, e_3] = e_4; [e_1, e_2] = \alpha e_2 - e_3; [e_1, e_3] = e_2 + \alpha e_3;$ $[e_1, e_4] = 2\alpha e_4$ $\omega = 2\alpha e_1^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_3^*$

Idée de la Démonstration du théorème 3.2.2.1. La preuve se fait de façon exhaustive. Pour chaque algèbre de Lie résoluble de dimension 4 on détermine les 2-cocycles scalaires ω et on trouve ensuite ceux qui sont non dégénérées . ■

3.2.2 Détermination des groupes de Lie symplectiques connexes et simplement connexes

Désignons par $G \rtimes_{\varphi} F$ le produit semi-direct du groupe de Lie G par le groupe de Lie F suivant une représentation $\varphi : F \longrightarrow Aut(G)$ où $Aut(G)$ est le groupe des automorphismes continus de G. Si φ est la représentation triviale on écrira simplement $G \times F$ (produit direct). Dans le tableau suivant nous donnons la description du groupe de Lie connexe simplement connexe associé à chaque algèbre de Lie symplectique.

Tableau 3.2

Algèbre	**Groupe de Lie**	**Produit dans le groupe**
$\mathfrak{g}_1^4$	$G_1 = \mathbb{R}^4$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+x',y+y',z+z',t+t')$
$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,1}$	$G_2 = \mathbb{H}_3 \times \mathbb{R}$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+x',y+y',z+z'+xy',t+t')$
$\mathfrak{g}_1^2 \times \mathfrak{g}_2$	$G_3 = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+^*)$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+x',y+y',z+tz',tt')$
$\mathfrak{g}_{4,1}$	$G_4 = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}_+^*$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+tx',y+zx'+ty',zt'+tz',tt')$
$\mathfrak{g}_{4,2}$	$G_5 = \mathbb{R}_+^{*2} \rtimes \mathbb{R}_+^{*2}$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(xx'z\cos(\ln(t)),yy'z\sin(\ln(t)),zz',tt')$
$\mathfrak{g}_{4,3}$	$G_6 = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}_+^*$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+x',y+y'+x'\ln(t),$ $z+z'+y'\ln(t)+\frac{x'}{2}\ln^2(t),tt'\big)$
$\mathfrak{g}_{4,4}$	$G_7 = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}_+^*$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+x',y+y'+x'\ln(t),z+z',tt')$
$\mathfrak{g}_2^2$	$G_8 = Aff(\mathbb{R}) \times Aff(\mathbb{R})$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(xx',y+xy',zz',t+zt')$
$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,2}^{(-1)}$	$G_9 = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}_+^*$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+x',y+ty',z+t^{-1}z',tt')$
$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,4}^{(0)}$	$G_{10} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}_+^*$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+x',y+y'\cos(\ln(t))+z'\sin(\ln(t)),$ $z-y'\sin(\ln(t))+z'\cos(\ln(t)),tt')$
$\mathfrak{g}_{4,5}^{(-1,\beta)}$ $0<\beta<1$	$G_{11.a} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}_+^*$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $\big(x+tx',y+t^{-1}y',z+t^{\beta}z',tt'\big)$
$\mathfrak{g}_{4,5}^{(-1,1)}$	$G_{11.b} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}_+^*$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+tx',y+t^{-1}y',z+tz',tt')$
$\mathfrak{g}_{4,5}^{(\alpha,-\alpha)}$ $-1<\alpha<0$	$G_{11.c} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}_+^*$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+tx',y+t^{\alpha}y',z+t^{-\alpha}z',tt')$
$\mathfrak{g}_{4,6}^{(-1)}$	$G_{12} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}_+^*$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+t^{-1}x',y+ty',z+ty'\ln(t)+tz',tt')$
$\mathfrak{g}_{4,8}^{(\alpha,0)}$ $\alpha>0$	$G_{13} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}_+^*$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+t^{\alpha}x',y+y'\cos(\ln(t))+z'\sin(\ln(t)),$ $z-y'\sin(\ln(t))+z'\cos(\ln(t)),tt')$
$\mathfrak{g}_{4,9}^{(1/2)}$	$G_{14.a} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}_+^*$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $\Big(x+\frac{x'}{\sqrt{t}},y+ty',z+\sqrt{t}z',tt'\Big)$
$\mathfrak{g}_{4,9}^{(\alpha)}$ $0\leq\alpha\leq 2$ et $\alpha\notin\{0,1,1/2\}$	$G_{14.b} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}_+^*$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+t^{\alpha-1}x',y+ty',z+t^{\alpha}z',tt')$
$\mathfrak{g}_{4,10}$	$G_{15} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}_+^*$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+tx',y+ty'+tx'\ln(t),z+t^2z',tt')$
$\mathfrak{g}_{4,11}^{(\alpha)}$ $\alpha>0$	$G_{16} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}_+^*$	$(x,y,z,t)\,(x',y',z',t') =$ $(x+t^{\alpha}x'\cos(\ln(t))+t^{\alpha}y'\sin(\ln(t)),$ $y-t^{\alpha}x'\sin(\ln(t))+t^{\alpha}y'\cos(\ln(t)),z+t^{2\alpha}z',$ $tt')$

3.2.3 Feuilletages lagrangiens.

L'existence d'un couple de feuilletages lagrangiens transverses dans les groupes de Lie simplectiques unimodulaires de dimension 4 a été traité par A.Medina et Ph. Revoy dans **[MR3]**. Le théorème suivant est une suite directe de ces résultats ; par souci de complétude nous reproduisons ci-dessous les grandes lignes de la démonstration proposée dans **[MR3]**.

Théorème 3.2.2.1. Tout groupe de Lie symplectique de dimension 4 contient des sous-groupes de Lie lagrangiens. Plus précisement tout groupe de Lie symplectique de dimension 4 admet un couple de feuilletages lagrangiens transverses invariants à gauche exceptés ceux qui sont isomorphes à G_6, G_{10}, G_{13} et G_{16}.

Démonstration . Désignons par $\mathfrak{g}_i$ les algèbres de Lie respectives des groupes de Lie respectifs G_i, pour $i \in \{1, 2, \cdots, 16\}$. Nous dévrons décrire les sous algèbres de Lie lagrangiennes supplémentaires de $\mathfrak{g}_i$. Pour le faire nous allons l'ullustrer par les exemples de g_9 dans laquelle elles existent et de $\mathfrak{g}_{10}$ dans lequelle elles n'existent pas.

Dans les deux cas tout 2-cocycle non dégénéré sur $\mathfrak{g}_i$, $i = 9, 10$ peut se mettre sous la forme $(e_1^* + be_3^* + ce_4^*) \wedge (ae_2^*) + de_3^* \wedge e_4^*$ où $\left\{e_j^*\right\}$ est la base duale de $\{e_j, 1 \leq j \leq 4\}$ et a, b, c et d sont des réels tels que $ad = 0$. Si $i = 9$ ou 10 alors $\mathrm{Ker}e_2^* = [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] + Z(\mathfrak{g}_i)$, où $Z(\mathfrak{g}_i)$ désigne le centre de $\mathfrak{g}_i$, est un idéal caractéristique et abélien de $\mathfrak{g}_i$. Soit B une sous-algèbre de Lie dimension 2 de $\mathfrak{g}_i$, $i = 9, 10$. Supposons que $B \subset \mathrm{Ker}e_2^*$. Si $B = Vect\{b_1, b_2\}$ est lagrangienne on aura $e_3^* \wedge e_4^*(b_1, b_2) = 0$ par conséquent $B = Vect\{e_1, \lambda e_3 + \mu e_4\}$ avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Si B n'est pas contenu dans $\mathrm{Ker}e_2^*$, $B = Vect\{b_1 = ue_1 + ve_3 + we_4, b_2\}$ avec $e_2^*(b_2) \neq 0$ car $B \cap \mathrm{Ker}e_2^*$ est de dimension 1. On peut supposer que $b_2 = e_2 + b_2^{'}$ avec $b_2^{'} \in \mathrm{Ker}e_2^*$ et $[b_1, b_2^{'}] = 0$. Si $i = 10$, B doit être abélienne, $u = v = 0$ et $B = Vect\left\{e_1, e_2 + b_2^{'}\right\}$ n'est pas lagrangienne. Ce qui montre que $\mathfrak{g}_{10}$ ne contient pas de sous algèbres lagrangiennes, nécessairement incluses dans $\mathrm{Ker}e_2^*$, par conséquent il n' y a pas de couple de sous-algèbres lagrangiennes supplémentaires dans $\mathfrak{g}_{10}$.

Supposons maintenant que $i = 9$. Si $w \neq 0$ and $(u, v) \neq (0, 0)$, B sera de dimension 3, donc $(u, v) = (0, 0)$ et $B = Vect\left\{e_1, e_2 + b^{'}\right\}$ n'est pas lagrangienne.

Si $w = 0$ il y a deux possibilités : $B = Vect\left\{e_3, e_2 + b^{'}\right\}$ ou $B = Vect\left\{e_4, e_2 + b^{'}\right\}$.

Dans le premier cas, on peut supposer $b' = \lambda e_4 + \mu e_1$ et $\omega(e_2 + b^{'}, e_3) = a\mu - d\lambda$, donc on choisit λ de sorte que B soit lagrangienne. En fait $\mathfrak{g}_9$ contient aussi des sous algèbres lagrangiennes de type $\mathrm{Vect}\left\{e_2 + b^{'}, e_4\right\}$. De plus $L = Vect\left\{\lambda^{'} e_3 + \mu^{'} e_4, e_1\right\}$, dans $\mathrm{Ker}e_2^*$, est une sous algèbre lagrangienne supplémentaire de $B = Vect\{e_2 + \lambda e_1 + \mu e_3, e_4\}$ si et seulement si $\lambda^{'} \neq 0$. Ainsi il existe des couples de sous algèbres lagrangiennes dans $\mathfrak{g}_9$. ■

Ci-dessous dans le tableau 3.3 nous exhibons un couple de sous-algèbres lagrangiennes supplémentaires dans le cas où elles existent :

Tableau 3.3

Algèbre	Sous-algèbres lagran. Suppl.
$\mathfrak{g}_1^4$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_2\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_3, e_4\rangle$
$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,1}$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_3\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_2, e_4\rangle$
$\mathfrak{g}_1^2 \times \mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_3\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_2, e_4\rangle$
$\mathfrak{g}_{4,1}$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_3\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_2, e_4\rangle$
$\mathfrak{g}_{4,2}$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_2\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_3, e_4\rangle$
$\mathfrak{g}_{4,4}$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_3\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_2, e_4\rangle$
$\mathfrak{g}_2^2$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_3\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_2, e_4\rangle$
$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,2}^{(-1)}$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_4\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_2, e_3\rangle$
$\mathfrak{g}_{4,5}^{(-1,\beta)}$ $0 < \beta < 1$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_2\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_3, e_4\rangle$
$\mathfrak{g}_{4,5}^{(-1,1)}$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_3\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_2, e_4\rangle$
$\mathfrak{g}_{4,5}^{(\alpha,-\alpha)}$ $-1 < \alpha < 0$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_3\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_2, e_4\rangle$
$\mathfrak{g}_{4,6}^{(-1)}$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_2\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_3, e_4\rangle$
$\mathfrak{g}_{4,9}^{(1/2)}$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_2\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_3, e_4\rangle$
$\mathfrak{g}_{4,9}^{(\alpha)}$ $0 \leq \alpha \leq 2$ et $\alpha \notin \{0, 1, 1/2\}$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_2\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_3, e_4\rangle$
$\mathfrak{g}_{4,10}$	$\mathfrak{l}_1 = Vect\langle e_1, e_3\rangle$ $\mathfrak{l}_2 = Vect\langle e_2, e_4\rangle$

Une conséquence de cet théorème et du résultat de Hess (voir Chapitre 2 section 2.4.2) nous permet dénoncer le résultat suivant :

Proposition 3.2.1 Soit (G, ω^+) un groupe de Lie symplectique dont l'algèbre de Lie est l'une des algèbres citées dans le tableau 3.3. Alors G possède une unique connexion symplectique invariante à gauche $\dot\nabla$ sans torsion telle que $\dot\nabla \mathfrak{l}_i \subset \mathfrak{l}_i$, $i = 1, 2$ où $\mathfrak{l}_i$ sont les deux sous-fibrés de TG associés au couple de sous groupes lagrangiens de G.
Dans le tableau suivant nous décrivons la connexion de Hess dans chacun des groupes de Lie cités dans la proposition ci-dessus.

Tableau 3.3bis

Algèbre	**Connexion de Hess**
$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,1}$	$\dot\nabla_{e_1} = 0,\ \dot\nabla_{e_2} = 0,\ \dot\nabla_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \dot\nabla_{e_4} = 0$
$\mathfrak{g}_1^2 \times \mathfrak{g}_2$	$\dot\nabla_{e_1} = 0,\ \dot\nabla_{e_2} = 0,\ \dot\nabla_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \dot\nabla_{e_4} = 0$
$\mathfrak{g}_{4,1}$	$\dot\nabla_{e_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \dot\nabla_{e_2} = 0,$ $\dot\nabla_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \dot\nabla_{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_{4,2}$	$\dot\nabla_{e_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \dot\nabla_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$ $\dot\nabla_{e_3} = 0,\ \dot\nabla_{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_{4,4}$	$\dot\nabla_{e_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \dot\nabla_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \dot\nabla_{e_3} = 0,\ \dot\nabla_{e_4} = 0$

$\mathfrak{g}_2^2$	$\dot{\nabla}_{e_1}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $\dot{\nabla}_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\dot{\nabla}_{e_2}=0$, $\dot{\nabla}_{e_4}=0$
$\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_{3,2}^{(-1)}$	$\dot{\nabla}_{e_1}=0$, $\dot{\nabla}_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$, $\dot{\nabla}_{e_3}=0$, $\dot{\nabla}_{e_4}=0$
$\mathfrak{g}_{4,5}^{(-1,\beta)}$ $0<\beta<1$	$\dot{\nabla}_{e_1}=\begin{pmatrix}-\beta&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&\beta\end{pmatrix}$, $\dot{\nabla}_{e_2}=0$, $\dot{\nabla}_{e_3}=0$, $\dot{\nabla}_{e_4}=0$
$\mathfrak{g}_{4,5}^{(-1,1)}$	$\dot{\nabla}_{e_1}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\dot{\nabla}_{e_2}=0$, $\dot{\nabla}_{e_3}=0$, $\dot{\nabla}_{e_4}=0$
$\mathfrak{g}_{4,5}^{(\alpha,-\alpha)}$ $-1<\alpha<0$	$\dot{\nabla}_{e_1}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\alpha&0\\0&0&0&-\alpha\end{pmatrix}$, $\dot{\nabla}_{e_2}=0$, $\dot{\nabla}_{e_3}=0$, $\dot{\nabla}_{e_4}=0$
$\mathfrak{g}_{4,6}^{(-1)}$	$\dot{\nabla}_{e_1}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$, $\dot{\nabla}_{e_2}=0$, $\dot{\nabla}_{e_3}=0$, $\dot{\nabla}_{e_4}=0$
$\mathfrak{g}_{4,9}^{(1/2)}$	$\dot{\nabla}_{e_1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\dot{\nabla}_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $\dot{\nabla}_{e_3}=0$, $\dot{\nabla}_{e_4}=0$
$\mathfrak{g}_{4,9}^{(\alpha)}$ $0\leq\alpha\leq 2$ et $\alpha\notin\{0,1,1/2\}$	$\dot{\nabla}_{e_1}=\begin{pmatrix}\alpha&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix}$, $\dot{\nabla}_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-\alpha&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $\dot{\nabla}_{e_3}=0$, $\dot{\nabla}_{e_4}=0$
$\mathfrak{g}_{4,10}$	$\dot{\nabla}_{e_1}=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$, $\dot{\nabla}_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$, $\dot{\nabla}_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-2&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$, $\dot{\nabla}_{e_4}=0$

3.3 Géométrie du groupe de Lie double

3.3.1 Structure affine sur le double

Soit $r \in \wedge^2\mathcal{G}$ est une solution inversible de l'équation de Yang Baxter classique dans G d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, alors elle munit G d'une structure symplectique invariante à gauche et donc d'une structure affine invariante à gauche . Dans ce cas si on note $\mathcal{D}(\mathcal{G}, r)$ et $D(G)$ respectivement l'algèbre de Lie double et le groupe de Lie double du groupe de Lie-Poisson $(G, \pi = r^+ - r^-)$, $D(G)$ a une structure affine invariante à gauche $\widetilde{\nabla}$ et une structure complexe invariante à gauche J , toutes deux définies par r , telles que $\widetilde{\nabla}J = 0$ (voir **[DiM]**). Voici l'énoncé exacte de ce théorème :

Théorème 3.3.1.2(**[DiM]**) Soit $r \in \wedge^2\mathcal{G}$ une solution inversible de l'équation de Yang-Baxter classique sur un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Alors tout groupe de Lie $D(G)$ d'algèbre de Lie l'algèbre de Lie double $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*(r)$ d'un groupe de Lie Poisson $(G, \pi = r^+ - r^-)$ est muni d'une structure affine invariante à gauche ∇ et d'une structure complexe invariante à gauche J satisfaisant $\nabla J = 0$ respectivement définie par

$$\nabla_{(x,\alpha)^+}(y, \beta)^+ := \left(xy + ad^*_\alpha y, ad^*_{r(\alpha)}\beta + ad^*_x\beta\right)$$

$$J\left((x, \alpha)^+\right) := (-r(\alpha), q(x))^+$$

Dans le tableau 3.4 ci-dessous nous donnerons une écriture de cette structure affine en définissant le produit bilinéaire associé à cette structure .

Tableau 3.4

1. $e_i \cdot e_j = 0$

    2. $e_2 \cdot e_3 = e_4$
    $e_2 \cdot e_4^* = -e_3^*$
    $e_3 \cdot e_3 = e_1$
    $e_3 \cdot e_4^* = e_2^*$
    $e_1^* \cdot e_3 = -e_4$
    $e_1^* \cdot e_4^* = e_3^*$
    $e_4^* \cdot e_3 = e_1$
    $e_4^* \cdot e_4^* = e_2^*$

3. $e_3 \cdot e_3 = -e_3$
   $e_3 \cdot e_4^* = -e_4^*$
   $e_4 \cdot e_3 = -e_4$
   $e_4 \cdot e_4^* = e_3^*$
   $e_3^* \cdot e_3 = e_4$
   $e_3^* \cdot e_4^* = -e_3^*$
   $e_4^* \cdot e_3 = -e_3$
   $e_4^* \cdot e_4^* = -e_4^*$
4. $e_1 \cdot e_1 = -e_1 \quad e_4^* \cdot e_4^* = -e_1^*$
   $e_1 \cdot e_2 = -e_2 \quad e_1^* \cdot e_1 = e_4$
   $e_1 \cdot e_3^* = -e_3^* \quad e_1^* \cdot e_4^* = -e_1^*$
   $e_1 \cdot e_4^* = -e_4^* \quad e_2^* \cdot e_1 = e_3$
   $e_2 \cdot e_1 = -e_2 \quad e_2^* \cdot e_2 = e_4$
   $e_2 \cdot e_4^* = -e_3^* \quad e_2^* \cdot e_3^* = -e_1^*$
   $e_3 \cdot e_1 = -e_3 \quad e_2^* \cdot e_4^* = -e_2^*$
   $e_3 \cdot e_2 = -e_4 \quad e_3^* \cdot e_1 = -e_2$
   $e_3 \cdot e_3^* = e_1^* \quad e_3^* \cdot e_4^* = -e_3^*$
   $e_3 \cdot e_4^* = e_2^* \quad e_4^* \cdot e_1 = -e_1$
   $e_4 \cdot e_1 = -e_4 \quad e_4^* \cdot e_2 = -e_2$
   $e_4^* \cdot e_3^* = -e_3^* \quad e_4^* \cdot e_4^* = -e_4^*$
5. $e_1 \cdot e_1 = -e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = -e_2$
   $e_1 \cdot e_3^* = -e_3^*, \quad e_1 \cdot e_4^* = -e_4^*$
   $e_2 \cdot e_1 = -e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = e_1$
   $e_2 \cdot e_3^* = -e_4^*, \quad e_2 \cdot e_4^* = e_3^*$
   $e_3 \cdot e_1 = -e_3, \quad e_3 \cdot e_2 = e_4$
   $e_3 \cdot e_3^* = e_1^*, \quad e_3 \cdot e_4^* = -e_2^*$
   $e_4 \cdot e_1 = -e_4, \quad e_4 \cdot e_2 = -e_3$
   $e_4 \cdot e_3^* = e_2^*, \quad e_4 \cdot e_4^* = e_1^*$
   $e_1^* \cdot e_1 = e_4, \quad e_1^* \cdot e_2 = e_3$
   $e_1^* \cdot e_3^* = -e_2^*, \quad e_1^* \cdot e_4^* = -e_1^*$
   $e_2^* \cdot e_1 = -e_3, \quad e_2^* \cdot e_2 = e_4$
   $e_2^* \cdot e_3^* = e_1^*, \quad e_2^* \cdot e_4^* = -e_2^*$
   $e_3^* \cdot e_1 = e_2, \quad e_3^* \cdot e_2 = -e_1$
   $e_3^* \cdot e_3^* = e_4^*, \quad e_3^* \cdot e_4^* = -e_3^*$
   $e_4^* \cdot e_1 = -e_1, \quad e_4^* \cdot e_2 = -e_2$
   $e_4^* \cdot e_3^* = -e_3^*, \quad e_4^* \cdot e_4^* = -e_4^*$

6. $e_1 \cdot e_1 = -e_2, \quad e_1 \cdot e_2 = e_3$
$e_1 \cdot e_3^* = -e_2^*, \quad e_1 \cdot e_4^* = -e_3^*$
$e_2 \cdot e_2 = -e_4, \quad e_2 \cdot e_3^* = e_1^*$
$e_3 \cdot e_1 = -e_4, \quad e_3 \cdot e_4^* = e_1^*$
$e_2^* \cdot e_1 = e_4, \quad e_2^* \cdot e_4^* = -e_1^*$
$e_3^* \cdot e_2 = -e_4, \quad e_3^* \cdot e_3^* = e_1^*$
$e_4^* \cdot e_1 = -e_2, \quad e_4^* \cdot e_2 = e_3$
$e_4^* \cdot e_3^* = -e_2^*, \quad e_4^* \cdot e_4^* = -e_3^*$

7. $e_1 \cdot e_1 = -e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_3$
$e_1 \cdot e_3^* = -e_2^*, \quad e_1 \cdot e_4^* = -e_4^*$
$e_2 \cdot e_2 = -e_4, \quad e_2 \cdot e_3^* = e_1^*$
$e_4 \cdot e_1 = -e_4, \quad e_4 \cdot e_4^* = e_1^*$
$e_1^* \cdot e_1 = e_4, \quad e_1^* \cdot e_4^* = -e_1^*$
$e_3^* \cdot e_2 = -e_4, \quad e_3^* \cdot e_3^* = e_1^*$
$e_4^* \cdot e_1 = -e_1, \quad e_4^* \cdot e_2 = e_3$
$e_4^* \cdot e_3^* = -e_2^*, \quad e_4^* \cdot e_4^* = -e_4^*$

8. $e_1 \cdot e_1 = -e_1, \quad e_1 \cdot e_2^* = -e_2^*$
$e_2 \cdot e_1 = -e_2, \quad e_2 \cdot e_2^* = e_1^*$
$e_3 \cdot e_3 = -e_3, \quad e_3 \cdot e_4^* = -e_4^*$
$e_4 \cdot e_3 = -e_4, \quad e_4 \cdot e_4^* = e_3^*$
$e_1^* \cdot e_1 = e_2, \quad e_1^* \cdot e_2^* = -e_1^*$
$e_2^* \cdot e_1 = -e_1, \quad e_2^* \cdot e_2^* = -e_2^*$
$e_3^* \cdot e_3 = e_4, \quad e_3^* \cdot e_4^* = -e_3^*$
$e_4^* \cdot e_3 = -e_3, \quad e_4^* \cdot e_4^* = -e_4^*$

9. $e_2 \cdot e_3 = e_3 \quad e_1^* \cdot e_3 = -e_3$
$e_2 \cdot e_4 = -e_4 \quad e_1^* \cdot e_4 = e_4$
$e_2 \cdot e_3^* = -e_3^* \quad e_1^* \cdot e_3^* = e_3^*$
$e_2 \cdot e_4^* = e_4^* \quad e_1^* \cdot e_4^* = -e_4^*$
$e_3 \cdot e_4 = -e_1 \quad e_3^* \cdot e_3 = e_1$
$e_3 \cdot e_3^* = e_2^* \quad e_3^* \cdot e_4^* = e_2^*$
$e_4 \cdot e_3 = -e_1 \quad e_4^* \cdot e_4 = -e_1$
$e_4 \cdot e_4^* = -e_2^* \quad e_4^* \cdot e_3^* = e_2^*$

10. $e_2 \cdot e_3 = -e_4 \quad e_1^* \cdot e_3 = e_4$
$e_2 \cdot e_4 = e_3 \quad e_1^* \cdot e_4 = -e_3$
$e_2 \cdot e_3^* = -e_4^* \quad e_1^* \cdot e_3^* = e_4^*$
$e_2 \cdot e_4^* = e_3^* \quad e_1^* \cdot e_4^* = -e_3^*$
$e_3 \cdot e_3 = -e_1 \quad e_3^* \cdot e_4 = e_1$
$e_3 \cdot e_4^* = -e_2^* \quad e_3^* \cdot e_3^* = -e_2^*$
$e_4 \cdot e_4 = -e_1 \quad e_4^* \cdot e_3 = -e_1$
$e_4 \cdot e_3^* = e_2^* \quad e_4^* \cdot e_4^* = -e_2^*$

11.a. $e_1 \cdot e_1 = -\beta e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2$
$e_1 \cdot e_3 = -e_3, \quad e_1 \cdot e_2^* = -e_2^*$
$e_1 \cdot e_3^* = e_3^*, \quad e_1 \cdot e_4^* = -\beta e_4^*$
$e_2 \cdot e_3 = e_4, \quad e_2 \cdot e_2^* = e_1^*$
$e_3 \cdot e_2 = e_4, \quad e_3 \cdot e_3^* = -e_3^*$
$e_4 \cdot e_1 = -\beta e_4, \quad e_4 \cdot e_4^* = \beta e_1^*$
$e_1^* \cdot e_1 = \beta e_4, \quad e_1^* \cdot e_4^* = -\beta e_1^*$
$e_2^* \cdot e_2 = -e_4, \quad e_2^* \cdot e_3^* = e_1^*$
$e_3^* \cdot e_3 = e_4, \quad e_3^* \cdot e_2^* = e_1^*$
$e_4^* \cdot e_1 = -\beta e_1, \quad e_4^* \cdot e_2 = e_2$
$e_4^* \cdot e_3 = -e_3, \quad e_4^* \cdot e_2^* = -e_2^*$
$e_4^* \cdot e_3^* = e_3^*, \quad e_4^* \cdot e_4^* = -\beta e_4^*$

11.b. $e_1 \cdot e_1 = -e_1, \quad e_1 \cdot e_3 = -e_3$
$e_1 \cdot e_4 = e_4, \quad e_1 \cdot e_2^* = -e_2^*$
$e_1 \cdot e_3^* = e_3^*, \quad e_1 \cdot e_4^* = -e_4^*$
$e_2 \cdot e_1 = -e_2, \quad e_2 \cdot e_2^* = e_1^*$
$e_3 \cdot e_4 = -e_2, \quad e_3 \cdot e_3^* = -e_1^*$
$e_4 \cdot e_3 = -e_2, \quad e_4 \cdot e_4^* = e_1^*$
$e_1^* \cdot e_1 = e_2, \quad e_1^* \cdot e_2^* = -e_1^*$
$e_2^* \cdot e_1 = -e_1, \quad e_2^* \cdot e_3 = -e_3$
$e_2^* \cdot e_4 = e_4, \quad e_2^* \cdot e_2^* = -e_2^*$
$e_2^* \cdot e_3^* = e_3^*, \quad e_2^* \cdot e_4^* = -e_4^*$
$e_3^* \cdot e_3 = e_2, \quad e_3^* \cdot e_4^* = -e_1^*$
$e_4^* \cdot e_4 = -e_2, \quad e_4^* \cdot e_3^* = -e_1^*$

11.c. $e_1 \cdot e_1 = -e_1, \quad e_1 \cdot e_3 = \alpha e_3$
$e_1 \cdot e_4 = -\alpha e_4, \quad e_1 \cdot e_2^* = -e_2^*$
$e_1 \cdot e_3^* = -\alpha e_3^*, \quad e_1 \cdot e_4^* = \alpha e_4^*$
$e_2 \cdot e_1 = -e_2, \quad e_2 \cdot e_2^* = e_1^*$
$e_3 \cdot e_4 = \alpha e_2, \quad e_3 \cdot e_3^* = \alpha e_1^*$
$e_4 \cdot e_3 = \alpha e_2, \quad e_4 \cdot e_4^* = -\alpha e_1^*$
$e_1^* \cdot e_1 = e_2, \quad e_1^* \cdot e_2^* = -e_1^*$
$e_2^* \cdot e_1 = -e_1, \quad e_2^* \cdot e_3 = \alpha e_3$
$e_2^* \cdot e_4 = -\alpha e_4, \quad e_2^* \cdot e_2^* = -e_2^*$
$e_2^* \cdot e_3^* = -\alpha e_3^*, \quad e_2^* \cdot e_4^* = \alpha e_4^*$
$e_3^* \cdot e_3 = -\alpha e_2, \quad e_3^* \cdot e_4^* = \alpha e_1^*$
$e_4^* \cdot e_4 = \alpha e_2, \quad e_4^* \cdot e_3^* = \alpha e_1^*$

12. $e_1 \cdot e_1 = -e_1 - e_2, \quad e_1 \cdot e_2 = -e_2$
$e_1 \cdot e_3 = e_3, \quad e_1 \cdot e_2^* = e_2^*$
$e_1 \cdot e_3^* = -e_3^*, \quad e_1 \cdot e_4^* = -e_3^* - e_4^*$
$e_2 \cdot e_3 = -e_4, \quad e_2 \cdot e_2^* = -e_1^*$
$e_3 \cdot e_1 = -e_4, \quad e_3 \cdot e_2 = -e_4$
$e_3 \cdot e_3^* = e_1^*, \quad e_3 \cdot e_4^* = e_1^*$
$e_4 \cdot e_1 = -e_4, \quad e_4 \cdot e_4^* = e_1^*$
$e_1^* \cdot e_1 = e_4, \quad e_1^* \cdot e_4^* = -e_1^*$
$e_2^* \cdot e_1 = e_4, \quad e_2^* \cdot e_2 = e_4$
$e_2^* \cdot e_3^* = -e_1^*, \quad e_2^* \cdot e_4^* = -e_1^*$
$e_3^* \cdot e_3 = -e_4, \quad e_3^* \cdot e_2^* = -e_1^*$
$e_4^* \cdot e_1 = -e_2 - e_1, \quad e_4^* \cdot e_2 = -e_2$
$e_4^* \cdot e_3 = e_3, \quad e_4^* \cdot e_2^* = e_2^*$
$e_4^* \cdot e_3^* = -e_3^*, \quad e_4^* \cdot e_4^* = -e_3^* - e_4^*$

13. $e_1 \cdot e_1 = -\alpha e_1, \quad e_1 \cdot e_3 = -e_4$
$e_1 \cdot e_4 = e_3, \quad e_1 \cdot e_2^* = -\alpha e_2^*$
$e_1 \cdot e_3^* = -e_4^*, \quad e_1 \cdot e_4^* = e_3^*$
$e_2 \cdot e_1 = -\alpha e_2, \quad e_2 \cdot e_2^* = \alpha e_1^*$
$e_3 \cdot e_3 = e_2, \quad e_3 \cdot e_4^* = -e_1^*$
$e_4 \cdot e_4 = e_2, \quad e_4 \cdot e_3^* = e_1^*$
$e_1^* \cdot e_1 = \alpha e_2, \quad e_1^* \cdot e_2^* = -\alpha e_1^*$
$e_2^* \cdot e_1 = -\alpha e_1, \quad e_2^* \cdot e_3 = -e_4$
$e_2^* \cdot e_4 = e_3, \quad e_2^* \cdot e_2^* = -\alpha e_2^*$
$e_2^* \cdot e_3^* = -e_4^*, \quad e_2^* \cdot e_4^* = e_3^*$
$e_3^* \cdot e_4 = -e_2, \quad e_3^* \cdot e_3^* = -e_1^*$
$e_4^* \cdot e_3 = e_2, \quad e_4^* \cdot e_4^* = -e_1^*$

14.a. $e_1 \cdot e_1 = -\frac{1}{2}e_1$, $e_1 \cdot e_2 = -e_2$
$e_1 \cdot e_3 = \frac{1}{2}e_3$, $e_1 \cdot e_2^* = -\frac{1}{2}e_2^*$
$e_1 \cdot e_3^* = -e_3^*$, $e_1 \cdot e_4^* = -\frac{1}{2}e_4^*$
$e_2 \cdot e_1 = -\frac{1}{2}e_2$, $e_2 \cdot e_3 = -e_4$
$e_2 \cdot e_2^* = -\frac{1}{2}e_1^*$, $e_2 \cdot e_4^* = -e_3^*$
$e_3 \cdot e_1 = -\frac{1}{2}e_3$, $e_3 \cdot e_2 = -2e_4$
$e_3 \cdot e_3^* = e_1^*$, $e_3 \cdot e_4^* = e_2^*$
$e_4 \cdot e_1 = -\frac{1}{2}e_4$, $e_4 \cdot e_4^* = \frac{1}{2}e_1^*$
$e_1^* \cdot e_1 = -\frac{1}{2}e_4$, $e_1^* \cdot e_4^* = -\frac{1}{2}e_1^*$
$e_2^* \cdot e_1 = \frac{1}{4}e_3$, $e_2^* \cdot e_2 = e_4$
$e_2^* \cdot e_3^* = -\frac{1}{2}e_1^*$, $e_2^* \cdot e_4^* = -\frac{1}{2}e_2^*$
$e_3^* \cdot e_1 = -\frac{1}{4}e_2$, $e_3^* \cdot e_3 = -\frac{1}{2}e_4$
$e_3^* \cdot e_2^* = -\frac{1}{4}e_1^*$, $e_3^* \cdot e_4^* = -\frac{1}{2}e_3^*$
$e_4^* \cdot e_1 = -\frac{1}{2}e_1$, $e_4^* \cdot e_2 = -e_2$
$e_4^* \cdot e_3 = \frac{1}{2}e_3$, $e_4^* \cdot e_2^* = \frac{1}{2}e_2^*$
$e_4^* \cdot e_3^* = -e_3^*$, $e_4^* \cdot e_4^* = -\frac{1}{2}e_4^*$

14.b. $e_1 \cdot e_1 = -\alpha e_1$, $e_1 \cdot e_2 = -e_2$
$e_1 \cdot e_3 = (-\alpha + 1)\, e_3$, $e_1 \cdot e_2^* = (1 - \alpha)\, e_2^*$
$e_1 \cdot e_3^* = -e_3^*$, $e_1 \cdot e_4^* = -\alpha e_4^*$
$e_2 \cdot e_1 = -\alpha e_2$, $e_2 \cdot e_3 = \frac{\alpha-1}{\alpha}e_4$
$e_2 \cdot e_2^* = (\alpha - 1)\, e_1^*$, $e_2 \cdot e_4^* = -e_3^*$
$e_3 \cdot e_1 = -\alpha e_3$, $e_3 \cdot e_2 = -\frac{1}{\alpha}e_4$
$e_3 \cdot e_3^* = e_1^*$, $e_3 \cdot e_4^* = e_2^*$
$e_4 \cdot e_1 = -\alpha e_4$, $e_4 \cdot e_4^* = \alpha e_1^*$
$e_1^* \cdot e_1 = e_4$, $e_1^* \cdot e_4^* = -e_1^*$
$e_2^* \cdot e_1 = e_4$, $e_2^* \cdot e_2 = \frac{1}{\alpha}e_4$
$e_2^* \cdot e_3^* = -e_1^*$, $e_2^* \cdot e_4^* = -e_2^*$
$e_3^* \cdot e_1 = -\alpha e_2$, $e_3^* \cdot e_3 = -\frac{\alpha-1}{\alpha}e_4$
$e_3^* \cdot e_2^* = (\alpha - 1)\, e_1^*$, $e_3^* \cdot e_4^* = -e_3^*$
$e_4^* \cdot e_1 = -e_1$, $e_4^* \cdot e_2 = -\frac{1}{\alpha}e_2$
$e_4^* \cdot e_3 = \frac{1-\alpha}{\alpha}e_3$, $e_4^* \cdot e_2^* = \frac{1-\alpha}{\alpha}e_2^*$
$e_4^* \cdot e_3^* = -\frac{1}{\alpha}e_3^*$, $e_4^* \cdot e_4^* = -e_4^*$

15. $e_1 \cdot e_1 = -2e_1,$ $\quad e_1 \cdot e_2 = -e_2 + e_3$
$e_1 \cdot e_3 = -e_3,$ $\quad e_1 \cdot e_2^* = -e_2^*$
$e_1 \cdot e_3^* = -e_2^* - e_3^*,$ $\quad e_1 \cdot e_4^* = -2e_4^*$
$e_2 \cdot e_1 = -2e_2,$ $\quad e_2 \cdot e_2 = -\frac{1}{2}e_4$
$e_2 \cdot e_3 = \frac{1}{2}e_4,$ $\quad e_2 \cdot e_2^* = e_1^*$
$e_2 \cdot e_3^* = e_1^*,$ $\quad e_2 \cdot e_4^* = -e_3^*$
$e_3 \cdot e_1 = -2e_3,$ $\quad e_3 \cdot e_2 = -\frac{1}{2}e_4$
$e_3 \cdot e_3^* = e_1^*,$ $\quad e_3 \cdot e_4^* = e_2^*$
$e_4 \cdot e_1 = -2e_4,$ $\quad e_4 \cdot e_4^* = 2e_1^*$
$e_1^* \cdot e_1 = e_4,$ $\quad e_1^* \cdot e_4^* = -e_1^*$
$e_2^* \cdot e_1 = 2e_3,$ $\quad e_2^* \cdot e_2 = \frac{1}{2}e_4$
$e_2^* \cdot e_3^* = -e_1^*,$ $\quad e_2^* \cdot e_4^* = -e_2^*$
$e_3^* \cdot e_1 = -2e_2,$ $\quad e_3^* \cdot e_2 = -\frac{1}{2}e_4$
$e_3^* \cdot e_3 = \frac{1}{2}e_3,$ $\quad e_3^* \cdot e_2^* = e_1^*$
$e_3^* \cdot e_3^* = e_1^*,$ $\quad e_3^* \cdot e_4^* = -e_3^*$
$e_4^* \cdot e_1 = -e_1,$ $\quad e_4^* \cdot e_2 = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3$
$e_4^* \cdot e_3 = -\frac{1}{2}e_3,$ $\quad e_4^* \cdot e_2^* = -\frac{1}{2}e_2^*$
$e_4^* \cdot e_3^* = -\frac{1}{2}e_2^* - \frac{1}{2}e_3^*,$ $\quad e_4^* \cdot e_4^* = -e_4^*$

16. $e_1 \cdot e_1 = -2\alpha e_1,$ $\quad e_1 \cdot e_2 = -\alpha e_2 - e_3$
$e_1 \cdot e_3 = e_2 - \alpha e_3,$ $\quad e_1 \cdot e_2^* = (-\alpha - 1)e_2^*$
$e_1 \cdot e_3^* = e_2^* - \alpha e_3^*,$ $\quad e_1 \cdot e_4^* = -2\alpha e_4^*$
$e_2 \cdot e_1 = -2\alpha e_2,$ $\quad e_2 \cdot e_2 = -\frac{1}{2\alpha}e_4$
$e_2 \cdot e_3 = \frac{1}{2}e_4,$ $\quad e_2 \cdot e_2^* = \alpha e_1^*$
$e_2 \cdot e_3^* = - - \alpha e_1^*,$ $\quad e_2 \cdot e_4^* = -\alpha e_3^*$
$e_3 \cdot e_1 = -2\alpha e_3,$ $\quad e_3 \cdot e_2 = -\frac{1}{2}e_4$
$e_3 \cdot e_3 = \frac{1}{2\alpha}e_4,$ $\quad e_3 \cdot e_2^* = e_1^*$
$e_3 \cdot e_3^* = \alpha e_1^*,$ $\quad e_3 \cdot e_4^* = e_2^*$
$e_4 \cdot e_1 = -2\alpha e_4,$ $\quad e_4 \cdot e_4^* = 2\alpha e_1^*$
$e_1^* \cdot e_1 = e_4,$ $\quad e_1^* \cdot e_4^* = -e_1^*$
$e_2^* \cdot e_1 = 2\alpha e_3,$ $\quad e_2^* \cdot e_2 = \frac{1}{2}e_4$
$e_2^* \cdot e_3 = -\frac{1}{2\alpha}e_4,$ $\quad e_2^* \cdot e_2^* = -e_1^*$
$e_2^* \cdot e_3^* = -\alpha e_1^*,$ $\quad e_2^* \cdot e_4^* = -e_2^*$
$e_3^* \cdot e_1 = -2\alpha^2 e_2,$ $\quad e_3^* \cdot e_2 = \frac{1}{2}e_4$
$e_3^* \cdot e_3 = \frac{1}{2}e_4,$ $\quad e_3^* \cdot e_2^* = \alpha e_1^*$
$e_3^* \cdot e_3^* = -\alpha e_1^*,$ $\quad e_3^* \cdot e_4^* = -e_3^*$
$e_4^* \cdot e_1 = -e_1,$ $\quad e_4^* \cdot e_2 = -\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2\alpha}e_3$
$e_4^* \cdot e_3 = \frac{(-\alpha-1)}{2\alpha}e_3,$ $\quad e_4^* \cdot e_2^* = -\frac{1}{2}e_2^* - \frac{1}{2\alpha}e_3^*$
$e_4^* \cdot e_3^* = -\frac{1}{2}e_3^* + \frac{1}{2\alpha}e_2^*,$ $\quad e_4^* \cdot e_4^* = -\alpha e_4^*$

3.3.2 Structure complexe sur le groupe de Lie double

Suivant le Théorème 3.3.1.2, ci-dessous, dans le tabeau 5, nous donnons un exemple de structure complexe (2ème colonne) sur le groupe de Lie double défini par une solution inversible r de l'équation de Yang-Baxter classique vu comme un isomorphisme de $\mathfrak{g}^*$ dans $\mathfrak{g}$ (3ème colonne).

Tableau 3.5

	Structure complexe	r correspondant
1.	$J(e_1) = e_2^*$, $J(e_2) = -e_1^*$ $J(e_3) = e_4^*$, $J(e_4) = -e_3^*$ $J(e_1^*) = -e_2$, $J(e_2^*) = -e_1$ $J(e_3^*) = e_4$, $J(e_4^*) = -e_3$	$r(e_1^*) = -e_2$ $r(e_2^*) = e_1$ $r(e_3^*) = -e_4$ $r(e_4^*) = e_3$
2.	$J(e_1) = e_2^*$, $J(e_2) = -e_1^*$ $J(e_3) = e_4^*$, $J(e_4) = -e_3^*$ $J(e_1^*) = e_2$, $J(e_2^*) = -e_1$ $J(e_3^*) = e_4$, $J(e_4^*) = -e_3$	$r(e_1^*) = -e_2$ $r(e_2^*) = e_1$ $r(e_3^*) = -e_4$ $r(e_4^*) = e_3$
3.	$J(e_1) = e_2^*$, $J(e_2) = -e_1^*$ $J(e_3) = e_4^*$, $J(e_4) = -e_3^*$ $J(e_1^*) = e_2$, $J(e_2^*) = -e_1$ $J(e_3^*) = e_4$, $J(e_4^*) = -e_3$	$r(e_1^*) = -e_2$ $r(e_2^*) = e_1$ $r(e_3^*) = -e_4$ $r(e_4^*) = e_3$
4.	$J(e_1) = e_4^*$, $J(e_2) = e_3^*$ $J(e_3) = -e_2^*$, $J(e_4) = -e_1^*$ $J(e_1^*) = e_4$, $J(e_2^*) = e_3$ $J(e_3^*) = -e_2$, $J(e_4^*) = -e_1$	$r(e_1^*) = -e_4$ $r(e_2^*) = -e_3$ $r(e_3^*) = e_2$ $r(e_4^*) = e_1$
5.	$J(e_1) = e_4^*$, $J(e_2) = -e_3^*$ $J(e_3) = e_2^*$, $J(e_4) = -e_1^*$ $J(e_1^*) = e_4$, $J(e_2^*) = -e_3$ $J(e_3^*) = e_2$, $J(e_4^*) = -e_1$	$r(e_1^*) = -e_4$ $r(e_2^*) = e_3$ $r(e_3^*) = -e_2$ $r(e_4^*) = e_1$
6.	$J(e_1) = e_4^*$, $J(e_2) = e_3^*$ $J(e_3) = -e_2^*$, $J(e_4) = -e_1^*$ $J(e_1^*) = e_4$, $J(e_2^*) = e_3$ $J(e_3^*) = -e_2$, $J(e_4^*) = -e_1$	$r(e_1^*) = -e_4$ $r(e_2^*) = -e_3$ $r(e_3^*) = e_2$ $r(e_4^*) = e_1$
7.	$J(e_1) = e_4^*$, $J(e_2) = e_3^*$ $J(e_3) = -e_2^*$, $J(e_4) = -e_1^*$ $J(e_1^*) = e_4$, $J(e_2^*) = e_3$ $J(e_3^*) = -e_2$, $J(e_4^*) = -e_1$	$r(e_1^*) = -e_4$ $r(e_2^*) = -e_3$ $r(e_3^*) = e_2$ $r(e_4^*) = e_1$
8.	$J(e_1) = e_2^*$, $J(e_2) = -e_1^*$ $J(e_3) = e_4^*$, $J(e_4) = -e_3^*$ $J(e_1^*) = e_2$, $J(e_2^*) = -e_1$ $J(e_3^*) = e_4$, $J(e_4^*) = -e_3$	$r(e_1^*) = -e_2$ $r(e_2^*) = e_1$ $r(e_3^*) = -e_4$ $r(e_4^*) = e_3$
9.	$J(e_1) = e_2^*$, $J(e_2) = -e_1^*$ $J(e_3) = e_4^*$, $J(e_4) = -e_3^*$ $J(e_1^*) = e_2$, $J(e_2^*) = -e_1$ $J(e_3^*) = e_4$, $J(e_4^*) = -e_3$	$r(e_1^*) = -e_2$ $r(e_2^*) = e_1$ $r(e_3^*) = -e_4$ $r(e_4^*) = e_3$
10.	$J(e_1) = e_2^*$, $J(e_2) = -e_1^*$ $J(e_3) = e_4^*$, $J(e_4) = -e_3^*$ $J(e_1^*) = e_2$, $J(e_2^*) = -e_1$ $J(e_3^*) = e_4$, $J(e_4^*) = -e_3$	$r(e_1^*) = -e_2$ $r(e_2^*) = e_1$ $r(e_3^*) = -e_4$ $r(e_4^*) = e_3$
11.a.	$J(e_1) = e_4^*$, $J(e_2) = e_3^*$ $J(e_3) = -e_2^*$, $J(e_4) = -e_1^*$ $J(e_1^*) = -e_4$, $J(e_2^*) = -e_3$ $J(e_3^*) = e_2$, $J(e_4^*) = 1e_1$	$r(e_1^*) = -e_4$ $r(e_2^*) = -e_3$ $r(e_3^*) = e_2$ $r(e_4^*) = e_1$

	Structure complexe	r correspondant
11.b.	$J(e_1) = e_2^*$, $J(e_2) = -e_1^*$ $J(e_3) = e_4^*$, $J(e_4) = -e_3^*$ $J(e_1^*) = e_2$, $J(e_2^*) = -e_1$ $J(e_3^*) = e_4$, $J(e_4^*) = -e_3$	$r(e_1^*) = -e_2$ $r(e_2^*) = e_1$ $r(e_3^*) = -e_4$ $r(e_4^*) = e_3$
11.c.	$J(e_1) = e_2^*$, $J(e_2) = -e_1^*$ $J(e_3) = e_4^*$, $J(e_4) = -e_3^*$ $J(e_1^*) = e_2$, $J(e_2^*) = -e_1$ $J(e_3^*) = e_4$, $J(e_4^*) = -e_3$	$r(e_1^*) = -e_2$ $r(e_2^*) = e_1$ $r(e_3^*) = -e_4$ $r(e_4^*) = e_3$
12.	$J(e_1) = e_4^*$, $J(e_2) = e_3^*$ $J(e_3) = -e_2^*$, $J(e_4) = -e_1^*$ $J(e_1^*) = e_4$, $J(e_2^*) = e_3$ $J(e_3^*) = -e_2$, $J(e_4^*) = -e_1$	$r(e_1^*) = -e_4$ $r(e_2^*) = -e_3$ $r(e_3^*) = e_2$ $r(e_4^*) = e_1$
13.	$J(e_1) = e_2^*$, $J(e_2) = -e_1^*$ $J(e_3) = e_4^*$, $J(e_4) = -e_3^*$ $J(e_1^*) = e_2$, $J(e_2^*) = -e_1$ $J(e_3^*) = e_4$, $J(e_4^*) = -e_3$	$r(e_1^*) = -e_2$ $r(e_2^*) = e_1$ $r(e_3^*) = -e_4$ $r(e_4^*) = e_3$
14.a.	$J(e_1) = e_4^*$, $J(e_2) = 2e_3^*$ $J(e_3) = -2e_2^*$, $J(e_4) = -e_1^*$ $J(e_1^*) = e_4$, $J(e_2^*) = \frac{1}{2}e_3$ $J(e_3^*) = -\frac{1}{2}e_2$, $J(e_4^*) = -e_1$	$r(e_1^*) = -e_4$ $r(e_2^*) = -\frac{1}{2}e_3$ $r(e_3^*) = \frac{1}{2}e_2$ $r(e_4^*) = e_1$
14.b.	$J(e_1) = \alpha e_4^*$, $J(e_2) = e_3^*$ $J(e_3) = -e_2^*$, $J(e_4) = -\alpha e_1^*$ $J(e_1^*) = \frac{1}{\alpha}e_4$, $J(e_2^*) = e_3$ $J(e_3^*) = -e_2$, $J(e_4^*) = -\frac{1}{\alpha}e_1$	$r(e_1^*) = -\frac{1}{\alpha}e_4$ $r(e_2^*) = -e_3$ $r(e_3^*) = e_2$ $r(e_4^*) = \frac{1}{\alpha}e_1$
15.	$J(e_1) = 2e_4^*$, $J(e_2) = e_3^*$ $J(e_3) = -e_2^*$, $J(e_4) = -2e_1^*$ $J(e_1^*) = \frac{1}{2}e_4$, $J(e_2^*) = e_3$ $J(e_3^*) = -e_2$, $J(e_4^*) = -\frac{1}{2}e_1$	$r(e_1^*) = -\frac{1}{2}e_4$ $r(e_2^*) = -e_3$ $r(e_3^*) = e_2$ $r(e_4^*) = \frac{1}{2}e_1$
16.	$J(e_1) = 2\alpha e_4^*$, $J(e_2) = e_3^*$ $J(e_3) = -e_2^*$, $J(e_4) = -2\alpha e_1^*$ $J(e_1^*) = \frac{1}{2\alpha}e_4$, $J(e_2^*) = e_3$ $J(e_3^*) = -e_2$, $J(e_4^*) = -\frac{1}{2\alpha}e_1$	$r(e_1^*) = -\frac{1}{2\alpha}e_4$ $r(e_2^*) = -e_3$ $r(e_3^*) = e_2$ $r(e_4^*) = \frac{1}{2\alpha}e_1$

3.4 Groupe de transformations affines de certains groupes de Lie symplectiques de dimension ≤ 4

Nous nous intéressons ici à une première description du groupe des transformations affines de certains groupes de Lie symplectiques de dimension ≤ 4. La structure affine en question est celle déduite de la forme symplectique ; on distinguera au pas-

sage le cas bi-invariant et le cas invariant à gauche. Etant donnée une variété lisse connexe et simplement connexe M munie d'une connexion linéaire sans courbure ni torsion, on sait que le groupe $Aff(M,\nabla)$ de toutes les transformations affines de (M,∇) est un groupe de Lie pour la topologie compact-ouvert (voir **[KN]**) qui opère transitivement sur M et est isomorphe au groupe de toutes les transformations affines de $\mathbb{R}^n$ (voir Kobayashi-Nomizu) ; mais si la connexion n'est pas complète, il y aura moins de transformations affines.
Rappelons qu'une transformation affine d'une variété affine (M,∇) est un difféomorphisme ϕ de M qui vérifie la condition

$$\phi^*\left(\nabla_X Y\right) = \nabla_{\phi^*(X)}\left(\phi^*(Y)\right) \quad \forall X, Y \in \chi(M) \tag{3.1}$$

Si le flot d'un $X \in \chi(M)$ vérifie (localement) cette équation. On dit que X est une transformation infinitésimale affine de (M,∇), c'est-à-dire que X vérifie

$$[X, \nabla_Y Z] = \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y[x, Z] \quad \forall Y, Z \in \chi(M). \tag{3.2}$$

Si M est connexe l'ensemble $\mathrm{aff}(M,\nabla)$ des champs affines est une sous-algère de $\chi(M)$ de dimension au plus n^2+n(voir **[KN]**).
Dans la suite on pose $M = G$, où G est un groupe de Lie que l'on munit d'une connexion linéaire ∇ de torsion et de courbure notées respectivement

$$T^{\nabla}\left(X, Y\right) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{3.3}$$

$$R^{\nabla}\left(X, Y\right)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \quad \forall Y, Z \in \chi(G) \tag{3.4}$$

Supposons que ∇ définisse une structure affine (invariante à gauche sur G), c'est-à-dire que ∇ est à torsion et courbure nulles ; alors ∇ détermine un produit bilinéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{G}$:

$$X.Y := \left(\nabla_X Y\right)(\varepsilon) \tag{3.5}$$

Il résulte de (**3.3**) et (**3.4**) que l'on a

$$[X, Y] = X.Y - Y.X \tag{3.6}$$

$$X.(Y.Z) - (X.Y).Z = Y.(X.Z) - (Y.X).Z \tag{3.7}$$

la dernière équation montre que le produit "$\cdot$" définit sur l'espace $\mathcal{G}$ une structure d'algèbre (à association) symétrique à gauche.
Si de plus ∇ est bi-invariante, c'est-à-dire si les champs de vecteurs invariants à gauche sont aussi affines , alors le produit "$\cdot$" est associatif et réciproquement (voir

[**BM**]).
Considérons le sous-groupe fermé de Aff(M, ∇) qui fixe ε

$$Aff_\varepsilon(G, \nabla) := \{\phi \in Aff(G, \nabla); \phi(\varepsilon) = \varepsilon\}$$

On a alors les décompositions suivantes

$$Aff(G, \nabla) = L_G \circ Aff_\varepsilon(G, \nabla)$$

$$aff(G, \nabla) = L_{\mathcal{G}} \oplus aff_\varepsilon(G, \nabla)$$

3.4.1 Groupe de transformations affines des groupes de Lie symplectiques de dimension 2

Cas abélien. Soit $G = \mathbb{R}^2$ muni de la forme symplectique ω_0, on trouve sans peine que Aff$(G = \mathbb{R}^2, \nabla^0) = \mathbb{R}^2 \rtimes GL(2, \mathbb{R})$.

Cas non abélien. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie resoluble de dimension 2 définie dans une base $\{e_1, e_2\}$ par $[e_1, e_2] = e_2$.
$\mathfrak{g}$ admet alors une forme simplectique exacte $\omega = d(e_2^*) = -e_1^* \wedge e_2^*$ où $\{e_1^*, e_2^*\}$ désigne la base duale de $\{e_1, e_2\}$.
Le groupe de Lie connexe $G = G_{n,1}(\mathbb{R})$ associé à $\mathfrak{g}$ est le groupe de transformations affines de la droite ; c'est un groupe de Lie Kählérien (voir [**LM**]) dont la connexion ∇^0 associée à la forme symplectique est donnée comme suit dans la base $\{e_1, e_2\}$:

$$\nabla^0_{e_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \nabla^0_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le groupe des automorphismes de (G, ∇^0) s'identifie alors à $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, c \in R, d \in \mathbb{R}^* \right\}$; donc le groupe de transformations affines de (G, ∇^0) s'identifie à

$$Aff(G, \nabla^0) \equiv G_{n,1}(\mathbb{R}) \times G_{n,1}(\mathbb{R})$$

3.4.2 Groupe de transformations affines d'un groupe de Lie symplectique affine de dimension 4

Parmi la liste des algèbres de Lie symplectiques de dimension 4 donnée dans la Proposition 3.1 seules les algèbres $\mathfrak{g}_1^4$, $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,1}$ et $\mathfrak{g}_{4,3}$ sont nilpotentes ; soit G_1, G_2, G_6 les groupes de Lie connexes et simplement connexes correspondants à ces algèbres de Lie.
Et puisque ces groupes sont munis d'une structure affine bi-invariante ; d'après la Proposition 6.1 de [**BM**] le groupe de transformations affines Aff(G_i, ∇) de

G_i, $i = 1,2$ est isomorphe au groupe de transformations affines de $\mathbb{R}^4$, à savoir $Aff(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^4 \rtimes GL(4,\mathbb{R})$.
D'où le théorème suivant :
Théorème 3.5.2. Soit G un groupe de Lie symplectique connexe et simplement connexe de dimension 4 muni de sa structure affine ∇, déduite de sa forme symplectique ω. Si G est unimodulaire alors le groupe de transformations affines de (G,∇) est isomorphe au groupe de transformation affine de $\mathbb{R}^4$.
Les groupes de Lie symplectiques qui sont définis dans ce théorème sont G_1, G_2, G_6, G_9 et G_{10}.
Démonstration. La connexion affine en question définie sur G_1, G_2 et G_6 est bi-invariante tandis que celle définie sur G_9 et G_{10} est invariante à gauche.
D'après ce qui précède il nous reste à montrer que $Aff(G_9,\nabla)$, $Aff(G_{10},\nabla)$ sont isomorphes à $Aff(\mathbb{R}^4)$. Puisque G_9 et G_{10} sont unimodulaires et résolubles , alors ils sont complets (voir le Théorème 3 de **[LM]**) ; on sait alors (voir **[KN]**), page 234, Théorème 2.4) que leurs groupes de transformations affines $Aff(G_9,\nabla)$ (resp. $Aff(G_{10},\nabla)$) opèrent transitivement sur G_9 (resp. sur G_{10}) et sont isomorphes au groupe de toutes les transformations affines de $\mathbb{R}^4$.■

Proposition 3.5.2. Soit (G,ω) un groupe de Lie symplectique non unimodulaire, connexe et simplement connexe de dimension 4.

- (i) Si G est muni d'une structure affine ∇ bi-invariante, alors G est isomorphe à G_3, G_4, G_5, et G_8 et le groupe de transformations affines de (G,∇) est de dimension comprise entre 9 et 12.
- (ii) Si G est muni d'une structure affine invariante à gauche ∇, alors G est isomorphe à G_7, $G_{11.a}$, $G_{11.b}$,$G_{11.c}$, G_{12}, G_{13}, $G_{14.a}$, $G_{14.b}$, G_{15} et G_{16} et le groupe de transformations affines de G est de dimension comprise entre 6 et 11.

Preuve
(i) Soit $Aff_\varepsilon(G,\nabla)$ l'isotropie en l'élément neutre du groupe $Aff(G,\nabla)$ où G est l'un des groupes de Lie citée dans la Proposition. D'après **[BM]**) une obstruction à la complétude de ∇ est l'existence d'un élément x de G tel que dim $Aff_x(G,\nabla) < n^2 = (dimG)^2$. Puisque ces groupes de Lie sont résolubles et non unimodulaires alors ∇ n'est pas complète sinon il existérait un $e \in \mathfrak{g}$ tel que $x.e = e\ \forall x \in \mathfrak{g}$. D'où $\dim Aff_\varepsilon(G,\nabla) < 16$.
Par ailleurs G étant connexe $Aut(G,\nabla)$ s'identifie à $Aut(\mathfrak{g},\cdot)$. Donc dans le cas bi-invarariant , on a $5 \leq dimAut(\mathfrak{g},\cdot) \leq 8$ (voir Tableau en annexe) par conséquent $9 \leq dim(Aff(G,\nabla)) \leq 12$.
ii) Dans le cas où ∇ est invariante à gauche , $1 \leq dimAut(\mathfrak{g},\cdot) \leq 6$ par conséquent $5 \leq dim(Aff(G,\nabla)) \leq 10$.■

Ci dessous en annexe nous déterminons les automorphismes des algèbres de Lie munies de la structure symétrique à gauche déduite de la forme symplectique dans les cas non unimodulaires.

Annexe

Automorphismes d'algèbres de Lie symétriques à gauche de dimension 4

Nous identifions un automorphisme φ avec sa representation matricielle par rapport à la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4,\}$.

Tableau 3.6

Algèbres	Automorphismes
3	$\begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{41} & \psi_{44} \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & \psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & 0 & 0 \\ \psi_{31} & \psi_{22}\psi_{31} & \psi_{33} & \psi_{33}\psi_{22} \\ \psi_{41} & \psi_{22}\psi_{41} & \psi_{43} & \psi_{22}\psi_{33} + \psi_{22}\psi_{43} \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & \psi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & 0 & 0 \\ \psi_{31} & \psi_{31}\psi_{31}\psi_{12} + \psi_{41}\psi_{22} & \psi_{33} & -\psi_{33}\psi_{12} - \psi_{43}\psi_{22} \\ \psi_{41} & \psi_{31}\psi_{22} + \psi_{41}\psi_{12} & \psi_{43} & \psi_{33}\psi_{22} - \psi_{43}\psi_{12} \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{32} & \psi_{22} & 0 \\ \psi_{41} & \psi_{42} & 0 & \psi_{44} \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{pmatrix}$
11.a	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{22}\psi_{33} \end{pmatrix}$

11.b	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} & \psi_{34} \\ 0 & 0 & \psi_{43} & \psi_{44} \end{pmatrix}$
11.c	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{33}\psi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{44} \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \psi_{31} & 0 & \psi_{33} & 0 \\ \psi_{41} & \psi_{31} & 0 & \psi_{33} \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{33}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} & \psi_{34} \\ 0 & 0 & -\psi_{34} & \psi_{33} \end{pmatrix}$
14.a	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} & 0 \\ \psi_{41} & 0 & 0 & \psi_{22}\psi_{33} \end{pmatrix}$
14.b	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} & 0 \\ \psi_{41} & 0 & 0 & \psi_{22}\psi_{33} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & \psi_{23} & 0 \\ 0 & \psi_{32} & \psi_{33} & 0 \\ \psi_{41} & 0 & 0 & \psi_{22}\psi_{33} \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}\psi_{22} & \psi_{22} & 0 \\ \psi_{41} & 0 & 0 & \psi_{22}^2 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{22} & 0 \\ \psi_{41} & 0 & 0 & \psi_{22}^2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & -\frac{1}{\alpha}\psi_{22} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha}\psi_{22} & \psi_{22} & 0 \\ \psi_{41} & 0 & 0 & \left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\right)\psi_{22}^2 \end{pmatrix}$

Bibliographie

[AM] R. Abraham et J.E. Marsden, Fondation of Mechanics, *Benjamin/Cummings Pub., Princeton, N.J,* 1978.

[Ag] Y.Agoaka, Uniqueness of Left Invariant Symplectic Structures on the Affine Lie Group, *Proc.Amer.Math.Soc.*, **Vol.129** *N°***9** (2001), pp 2753-2762.

[BC] P. Bernat , et N. Conze Representations des groupes de Lie resolubles, *Dunod* , Paris (1972).

[BM] M. Bordemann , et A. Medina, Le groupe des transformations affines d'un groupe de Lie à structure affine bi-invariante , *Research and Exposition in Mathematics* **25** (2002), pp 149-179.

[BMO] M. Bordemann , et A. Medina, et A. Ouadfel, Le groupe affine comme variété symplectique, *Tohuku Math. J.* **45**, *N°*3 (1993), pp 423-436.

[Bo] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie chapitre 2 et 3, *Hermann, Paris* 1972.

[Cby] B. Y. Chu , Symplectic homogeneous spaces , *Trans. Am. Math. Soc.* **197** (1974), pp 145-159.

[CG] L. Corwin, et P. Greenleaf, Representations of Nilpotent Lie groups and their apllications, *Cambridge Univ. Press, Cambridge* (1990).

[Ch] C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie. Groupes algébriques. Théorèmes généraux sur les algèbres de Lie *Hermann* (1968).

[Da] Dazord, P., Invariants Homotopiques attachés aux fibrés symplectiques, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **(29)**(1919), pp 25-78.

[DiM] A.Diatta et A. Medina, Classical Yang-Baxter equation and left invariant affine geometry on Lie groups , *manuscripta math.* **114** (2004), pp 477-486.

[Dj] J.M. Dardié , Groupes de Lie à structures symplectique ou kählériens et double extension, *Thèse de Doctorat, Univ.Montpellier II* ,1993.

[DM1] J.M. Dardié et A. Medina, Groupes de Lie à structures symplectique invariante, *in "Séminaire Gaston darboux", Montpellier* **t.328, série I**,(1990-1991),p.77-85.

[DM2] J.M. Dardié et A. Medina, Double extension symplectique d'un groupe de Lie symplectique, *Adv. Math.* **117** (1996), pp 208-227.

[DM3] J.M. Dardié et A. Medina, Algèbres de Lie kählériennes et double extension , *J. Algebra.* **185** (1996), pp 774-795.

[Ep] P. Eberlein, Geometry of 2-step nilpotent Lie groups with left invariant metrics , *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **27** (1994), pp 611-660.

[GKM] M. Goze, Y. Khakimdjanov A. Medina, Symplectic or contact structures on Lie groups. , *Differential Geom. Appl.* **21** (2004), no. 1, pp 41-54.

[He] H. Hess Connexions on symplectic manifolds and geometric quantization, *Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Conf., Aix-en-Provence/Salamanca)* (1979), pp 153-166.

[KN] Kobyashi, S. and Nomizu , K. Fondations of Differential Geometry - Vol I , *Insterscience Publishers,* **Wiley and Sons,** (1963).

[Li] Lichnerowicz, A., Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *Journal of différential geometry* **12** (1977), pp 253-300.

[LM] Lichnerowicz, A., Medina, A. On Lie Groups with Left-Invariant Symplectic or Kählerian Structures, *Letters in Mathematical Physics* **16** (1988), pp 225-235.

[LMa] Liberman, P., Marle , C.M. Introduction aux, *Publica Paris VI* **5** (1974), pp 121-130.

[Ma] J. Martinet, Les réseaux parfaits des espaces euclidiens, *Masson* (1996).

[Mal] A.I. Mal'cev, On a class of homogeneous spaces, *Amer. Math. Soc. Translation 39*, (1951)*Izv. Akad. Nauk USSR,Ser. Mat. 13,* (1949) pp 9-32.

[Me] Medina, A., Communication privé.

[Me1] Medina, A. Structures de Poissons affines, *Seminaire Gaston Darboux Montpellier* **1986-1987**, pp 123-153.

[Mo] Morvan, J.M., Une nouvelle obstruction topologique à la transversalité de deux fibrés Lagrangiens, *Séminaire de géométrie différentielle, Université de Monpellier II* (1982-1983),**9**.

[MR1] Medina, A. et Revoy , Ph. Caractérisation des groupes de Lie ayant une pseudo-métrique bi-invariante, *Collection Travaux en cours, Sud -Rhodanien III* **Hermann Paris** (1984).

[MR2] A. Medina et Ph. revoy Groupes de Lie à structure symplectique invariante , *Groupoids and integrable Systems, M.R.S.I.Pub.)* Berkeley (1991), pp 247-266.

[MR3] A. Medina et Ph. revoy Lattice in symplectic Lie groups, en Préparation.

[MW] Marsden, J., Weinstein , A. Symplectic Reduction with symmetry, *Rep. Math-Phys* **5** (1974), pp 121-130.

[Nb] Nguiffo-Boyom M., Métriques Kählériennes Affinement Plates de Certaines Variétés Symplectiques I, *Proc. London Math. Soc.* **3** 66 (1996), pp 358-280.

[Oo] Ooms. A.I., On Frobenius Lie Algebras, *Communications in Algebra,* **8**(**1**) (1980), pp 13-52.

[Ra] M. Rais, La représentation coadjointe du groupe affine, *Ann. Inst. Fourier* **28** (1978), pp 207-237.

[Rag] Raghunathan, M.S, Discrete subgroups of Lie groups, *Springer Verlag* **New york** (1972).

[We] Weinstein, A., Lectures on Symplectic Manifolds, *Reg. Conf. Serie in Math.* **29**, Amer. Math. Soc. Providence R.I. (1977).

2005

UNIVERSITE DE MONTPELLIER II
Sciences et Techniques du Languedoc

Hassène SIBY

Résumé.

Un groupe de Lie est dit symplectique s'il est muni d'une forme symplectique invariante à gauche . Ces groupes sont naturellement munis d'une structure affine associée à la forme symplectique.
Dans cette thèse d'une part nous déterminons les groupes de Lie symplectiques connexes et simplement connexes de dimension 4 et 6 et d'autre part nous étudions une famille infinie de groupes symplectiques dans lesquels la forme symplectique est "invariantement" exacte.
Dans tous ces cas nous nous intéressons à l'existence de sous-groupes lagrangiens et parfois des sous-groupes lagrangiens transverses pour mettre en évidence des structures symplectiques affines invariantes à gauche. La structure de ces groupes est étudiée à l'aide de l'application moment.

Mots clés :
Groupes de Lie symplectiques - Groupes de Lie-Frobénius - Groupes de Lie affines - Connexion symplectique - Application moment - Réduction symplectique - Double extension symplectique.

Abstract.

A symplectic Lie group is a Lie group endowed with a left invariant symplectic form. These groups are naturally endowed with an affine structure associted to a symplectic form.
In this thesis, on the one hand, we determine the 4 and 6-dimentional connected and simply connected symplectic Lie groups and on the other hand we study an infinity familly of symplectic groups in which the symplectic form is "invariantly" exact.
In all these cases we are interesting to the existence of the Lagrangian subgroups and sometimes transversal Lagrangian subgroups to underline left invariant symplectic affines structures.
The structure of these groups is studied using the momentum map.