HAL open science

# Problèmes de linéarisation dans des familles de germes analytiques.

Dominique Vieugué

▶ **To cite this version:**

Dominique Vieugué. Problèmes de linéarisation dans des familles de germes analytiques.. Mathématiques [math]. Université d'Orléans, 2005. Français. NNT : . tel-00069473

**HAL Id: tel-00069473**

**https://theses.hal.science/tel-00069473**

Submitted on 17 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

## PRÉSENTÉE À L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

POUR OBTENIR LE GRADE DE

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

par

**Dominique VIEUGUE**

Discipline : **Mathématiques**

# Problèmes de linéarisation dans des familles de germes analytiques

Soutenue le:**15 septembre 2005**

**MEMBRES DU JURY:**

| | |
|---|---|
| -Todor GRAMCHEV | **Rapporteur** / Professeur, *Université de Cagliari* |
| -Peter HAISSINSKY | **Examinateur** / Maître de conférence, *Université de Provence* |
| -Ricardo PEREZ-MARCO | **Examinateur** / Directeur de recherche, *Université Paris 13* |
| -Jean-Pierre SCHREIBER | **Examinateur** / Professeur, *Université d'Orléans* |
| -Jean-Christophe YOCCOZ | **Président** / Professeur, *Collège de France* |
| -Michel ZINSMEISTER | **Directeur de thèse** / Professeur, *Université d'Orléans* |

# Table des matières

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Michel Zinsmeister qui, tout au long de cette thèse, m'a apporté de précieux conseils et a su guider mes pas avec patience et bienveillance, tout en me laissant une grande liberté dans mes directions de recherche.

Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude à Todor Gramchev et Juan Rivera-Letelier pour avoir accepté d'être rapporteurs de mes travaux.

Je remercie également Todor Gramchev, Peter Haissinsky, Ricardo Perez-Marco, Jean-Pierre Schreiber et Jean-Christophe Yoccoz pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres de mon jury de thèse.

Le laboratoire et le département de mathématiques de l'Université d'Orléans m'ont accueilli dans une ambiance très propice au travail. Je tiens à en remercier tous les membres, notamment leurs responsables, Jean-Philippe Anker et Yves Denizeau, ainsi que les secrétaires Virginie Foucault, Anne-Sophie Jaïs, Anne Liger et Christelle Morillon qui y contribuent beaucoup.

Mes remerciements vont également à tous les collègues thésards, et notamment Barbara Schapira, Bruno Demange, Hermine Biermé et Olivier Prot avec qui nous avions de très longues et très intéressantes discussions concernant les mathématiques, la recherche, l'enseignement, ...

Enfin, je remercie mes parents pour le soutien constant et précieux qu'ils m'ont apporté.

# Chapitre 1

# Introduction

## 1.1 Les problèmes de linéarisation

On va s'intéresser à la linéarisation d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point fixe. Ces problèmes de linéarisation trouvent leur origine en mécanique céleste, dans l'étude du mouvement de $n$ corps soumis à la gravitation newtonienne. Par exemple, dans le cas d'un système planétaire où l'un des corps (le soleil) est beaucoup plus lourd que les autres, le problème essentiel est de savoir si le système est stable. Après simplification de la situation (trajectoires dans un plan assimilé au plan complexe ayant pour origine le soleil, ...) et discrétisation du temps, la position d'une planète à l'instant $n$ , notée $z_n$ est donnée par : $z_0$ et $z_{n+1} = f(z_n)$ où $z_0$ désigne la position initiale et $f$ est une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = \lambda z$ avec $\lambda$ nombre complexe de module 1. Au voisinage de 0, $f(z)$ ressemble à $\lambda z$. La question est alors de savoir, si $z_n$ ressemble à $\lambda^n z_0$.

Pour répondre à cette question, il convient de se demander sous quelles conditions une fonction $f$ analytique ayant 0 comme point fixe et $\lambda$ comme multiplicateur[1], est (ou n'est pas) analytiquement conjuguée au voisinage de l'origine à l'application $z \mapsto \lambda z$, c'est-à-dire sous quelles conditions il existe une fonction $\varphi$ biholomorphe fixant l'origine et vérifiant, sur un voisinage de 0, $f(\varphi(z)) = \varphi(\lambda z)$. Lorsqu'une telle fonction $\varphi$ existe, on dit que $f$ est linéarisable et la fonction $\varphi$, que l'on peut normaliser en imposant $\varphi'(0) = 1$, est appelée une linéarisante de $f$.

Fixons $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $f(z) = \lambda z + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k z^k$.

Deux problèmes se posent. L'un est algébrique : sous quelles conditions a-t-on existence d'une linéarisante formelle, c'est-à-dire d'une série formelle vérifiant l'équation $f(\varphi(z)) = \varphi(\lambda z)$ entre séries formelles. L'autre est analytique : cette série formelle, lorsqu'elle existe, est-elle de rayon de convergence strictement positif ?

1. C'est-à-dire une fonction analytique $f$ définie sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$ de la forme $f(z) = \lambda z + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k z^k$.

La réponse à la première question est connue depuis longtemps. En notant $\mathcal{F}_\lambda = \{f(z) = \lambda z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n \ / \ f$ est de rayon strictement positif $\}$ , on a

**Proposition 1.1.1.** *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et tout $f \in \mathcal{F}_\lambda$.*
*Si $\lambda$ n'est pas racine de l'unité, alors $f$ possède une unique linéarisante formelle $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k z^k$ et les $b_k$ sont déterminés par :*

$$b_1 = 1 \text{ et } b_n = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{2 \leqslant r \leqslant n} a_r \sum_{\substack{(j_1, j_2, \ldots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} j_k = n}} \prod_{1 \leqslant k \leqslant r} b_{j_k} \tag{1.1}$$

**Remarque 1.1.2.** *Le terme qui risque d'entraîner une croissance très rapide des $|b_n|$ est le terme $\frac{1}{|\lambda^n - \lambda|}$ qui risque d'être très grand à cause d'un dénominateur parfois très petit. De là provient la terminologie "problèmes de petits diviseurs".*

**Remarque 1.1.3.** *Nous verrons au prochain chapitre que si $\lambda^q = 1$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et si $f$ est un polynôme de degré $d \geqslant 2$, alors $f$ n'est pas formellement linéarisable. Ceci indique que les racines de l'unité constituent une véritable obstruction à la linéarisation.*

Dans le cas non-racine de l'unité, on a l'existence d'une unique linéarisante formelle et donc, pour savoir si $f$ est ou non linéarisable, il faut déterminer si le rayon de convergence de $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k z^k$ est strictement positif. Pour cela, on peut essayer de majorer ou de minorer les $|b_k|$.

Pour certains $\lambda$, la solution est connue depuis longtemps.

**Théorème 1.1.4.** *G. Koenigs (1884)*
*Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $f \in \mathcal{F}_\lambda$. Si $|\lambda| \neq 1$, alors $f$ est linéarisable.*

Jusqu'à la fin de ce premier chapitre, nous supposerons que $\lambda$ n'est pas une racine de l'unité. Les premiers résultats sur la linéarisation dans le cas où $|\lambda| = 1$ furent obtenus en 1938 par Cremer (voir [Cre38]) et furent négatifs.

**Théorème 1.1.5.** *Si $P \in \mathcal{F}_\lambda$ est un polynôme de degré $d \geqslant 2$ et si $\limsup \dfrac{\ln \ln q_{n+1}}{q_n} > \ln d$, alors $P$ possède des petits cycles, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z \in B(0,\varepsilon) \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $P^{\circ n}(z) = z$. Et ceci constitue une véritable obstruction à la linéarisation[2].*

Cremer a aussi prouvé que, pour presque tous les réels $\theta$ au sens de Baire, on peut trouver un $f \in \mathcal{F}_\lambda$ non linéarisable. Plus précisément,

2. Lorsque la linéarisation est possible, sur un petit voisinage de 0, il n'y a aucun cycle, car la rotation d'angle $2\pi\theta$ ne possède aucun cycle distinct de 0 lorsque $\theta$ est irrationnel.

**Théorème 1.1.6.** *Posons* $W = \{\theta \in \mathbb{R}/P_\theta$ n'est pas linéarisable $\}$ *où* $P_\theta$ *est le polynôme* $P_\theta(z) = e^{i2\pi\theta}z + z^2$*. Alors* $W$ *est un* $G_\delta-$*dense.*

Le premier résultat positif est dû à Siegel en 1942. En remarquant que les $\theta$ qui posent problème sont les rationnels, il s'est intéressé aux nombres qui sont "loin" des rationnels et, en majorant les coefficients de la linéarisante, il a prouvé le (voir [Sie42] ou [SM71])

**Théorème 1.1.7 (Siegel).** *Si* $\theta$ *est diophantien, alors tout* $f \in \mathcal{F}_\lambda$ *est linéarisable.*

**Définition 1.1.8.** *On dit qu'un irrationnel* $\theta$ *est diophantien d'ordre* $\mu$ *s'il existe* $c > 0$ *tel que* $\forall p \in \mathbb{Z}\ \ \forall q \in \mathbb{N}^* \left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{c}{q^\mu}$*. On dit qu'un irrationnel* $\theta$ *est diophantien s'il existe un* $\mu$ *tel que* $\theta$ *est diophantien d'ordre* $\mu$*.*

**Proposition 1.1.9.** *L'ensemble des réels non diophantiens est de mesure de Lebesgue nulle.*

**Remarque 1.1.10.** *Par conséquent, pour presque tous les nombres réels, tout* $f \in \mathcal{F}_\lambda$ *est linéarisable. On voit donc que, du point de vue de la topologie, il y a beaucoup de réels pour lesquels on peut trouver un* $f \in \mathcal{F}_\lambda$ *non linéarisable et il y en a peu pour lesquels tout* $f \in \mathcal{F}_\lambda$ *est linéarisable. Par contre, du point de vue de la mesure, c'est le contraire.*

En 1965, Brjuno améliora le théorème de Siegel (voir [Brj65], [Brj71] et [Brj72]) et prouva, en notant $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ la suite des réduites de $\theta$ :

**Théorème 1.1.11 (Brjuno).** *Si* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} < +\infty$*, alors tout* $f \in \mathcal{F}_\lambda$ *est linéarisable*

La question était alors de savoir si la condition de Brjuno était optimale. Yoccoz obtint la réponse en 1988 et prouva, en utilisant des techniques de chirurgie holomorphe,

**Théorème 1.1.12.** *Si* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} = +\infty$*, alors, il existe* $f \in \mathcal{F}_\lambda$ *tel que* $f$ *soit non linéarisable.*

Yoccoz prouva aussi

**Théorème 1.1.13.** $P_\theta(z) = e^{i2\pi\theta}z + z^2$ *est linéarisable si et seulement si* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} < +\infty$.

Ce résultat prouve que tout polynôme $P(z) = e^{i2\pi\theta}z + a_2z^2$ est linéarisable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} < +\infty$, car $P$ est analytiquement conjugué[3] à $P_\theta$.

Désormais, la question est de savoir si pour tout polynôme $P(z) = e^{i2\pi\theta}z + a_2z^2 + \cdots + a_dz^d$ de degré $d \geqslant 3$, on a $P$ linéarisable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} < +\infty$.

Pour $d = 3$, Perez-Marco a obtenu une avancée vers la réponse en 2003. Tout d'abord, il convient de remarquer que pour montrer ce théorème pour tout polynôme de degré 3 fixant 0 et de multiplicateur $\lambda$, il suffit de le prouver pour la famille $\left(e^{i2\pi\theta}z + bz^2 + z^3\right)_{b\in\mathbb{C}}$, car tout polynôme de degré 3 fixant 0 et de multiplicateur $e^{i2\pi\theta}$ est analytiquement conjugué à un polynôme de ce type.

En 2001, Perez-Marco a prouvé que

**Théorème 1.1.14 (Perez-Marco).** *Si* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} = +\infty$, *alors* $\{b \in \mathbb{C}/P_b(z) = e^{i2\pi\theta}z + bz^2 + z^3$ est linéarisable$\}$ *est de capacité nulle (et donc de mesure nulle)*

Plus généralement, Perez-Marco a prouvé (voir [PM01]) que

**Théorème 1.1.15 (Perez-Marco).** *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *non résonant et pour toute famille* $(f_t)_{t\in\mathbb{C}}$ *de la forme* $f_t(z) = \lambda z + \displaystyle\sum_{j=0}^{d} t^j\varphi_j(z)$ *avec* $\varphi_j(z) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} c_{j,k}z^k$ *série entière de rayon de convergence strictement positif et de valuation supérieure ou égale à 2, on a, en posant* $E = \{t \in \mathbb{C}/f_t$ linéarisable $\}$ *: ou bien* $E = \mathbb{C}$ *ou bien* $cap(E) = 0$.

Un de nos objectifs sera de donner une nouvelle démonstration de ce théorème et de le généraliser à divers cadres.

**Remarque:** Dans [PM01], les résultats sont énoncés en dimension finie $m$ sous une condition de non-résonance multidimensionnelle. Attention toutefois, car de nombreux théorèmes, comme ceux de Siegel ou Brjuno, ne se généralisent à la dimension finie que lorsque le multiplicateur de $f$, qui est en dimension finie une matrice, est diagonalisable. Et ceci n'est pas une commodité technique qui donne une démonstration plus simple, mais bien une obstruction de nature algébrique. En effet, dans [Yoc95], Yoccoz a démontré que

**Théorème 1.1.16.** *Soit* $n \geqslant 2$ *et* $A \in GL_n(\mathbb{C})$. *Si* $A$ *possède une valeur propre de module* 1 *dont le sous-espace caractéristique associé diffère du sous-espace propre,*

3. Cela résulte du fait que, pour tout $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a , en notant $\psi(z) = \mu z$ , $\psi^{-1}(P(\psi(z)) = \dfrac{1}{\mu}\left(e^{i2\pi\theta}\mu z + a_2\mu^2z^2\right) = e^{i2\pi\theta}z + a_2\mu z^2$, d'où, pour $\mu = \dfrac{1}{a_2}$, $\psi^{-1}(P(\psi(z)) = e^{i2\pi\theta}z + z^2 = P_\theta(z)$.

*alors, il existe des germes de difféomorphismes holomorphes de la forme $f(z) = Az + \dots$ qui ne sont pas linéarisables.*

Dans le chapitre 2, nous rappelons les définitions de la linéarisation et nous redémontrons que, sous une condition de non-résonance, il y a existence et unicité de la linéarisante formelle. Les expressions obtenues pour les coefficients de la linéarisante formelle seront utiles pour démontrer des généralisations du théorème de Perez-Marco au chapitre 4. Nous terminerons ce chapitre en donnant, lorsque $\lambda$ est non résonant, une minoration "explicite" des valeurs absolues des coefficients de la linéarisante formelle associée au polynôme $P_\lambda(z) = \lambda z - \lambda z^2$. Ces minorations ne semblent pas directement exploitables, mais une expérimentation sous MAPLE suggère qu'elles sont peut-être suffisantes pour montrer une non-linéarisabilité sous une très mauvaise condition diophantienne.

Dans le chapitre 3, nous redonnons les définitions et les principales propriétés du diamètre transfini en les adaptant au cadre p-adique et nous démontrons un théorème de majoration polynomiale. Ces résultats nous serviront au chapitre 4 pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Perez-Marco et l'adapter au cadre p-adique.

Dans le chapitre 4, nous redémontrons le théorème de Perez-Marco. Dans son article, Perez-Marco utilisait la théorie du potentiel, notamment le lemme de Bernstein [Ran95]. Une approche alternative consiste à utiliser le diamètre transfini pour définir la capacité logarithmique dans $\mathbb{C}$ et à remplacer le lemme de Bernstein par un théorème de majoration polynomiale utilisant uniquement le diamètre transfini. C'est cette approche que nous adoptons ici et elle va nous permettre d'aborder aussi le cas p-adique.

De plus, jusqu'ici, le théorème de Perez-Marco permettait d'obtenir des non-linéarisabilités en faisant apparaître dans la famille $(f_t)$ une fonction dont le comportement était connu. Ici, grâce aux propriétés du diamètre transfini, nous pourrons directement récupérer une information diophantienne.

Nous terminerons ce chapitre, en calculant explicitement un domaine $\mathcal{D}$ du plan pour lequel, lorsque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} = +\infty$, on a

$$t \in \mathcal{D} \Rightarrow \lambda z + tz^2 + z^3 \text{ non linéarisable.}$$

Dans le chapitre 5, nous donnerons une généralisation du théorème de Perez-Marco au cas des fractions rationnelles et nous étudierons une généralisation dans un cas où il y a résonance. A cette occasion, nous retrouvons, par des techniques élémentaires, une version faible de certains résultats d'Ecalle concernant, dans $\mathbb{C}$, le centralisateur de germes tangents à l'identité.

# Chapitre 2

# Linéarisation formelle

## 2.1 Notations

Dans tout ce qui suit, $p$ désignera un nombre premier et $|.|_p$ la valeur absolue $p$-adique.[1]

De manière usuelle, on note $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valuation $p$-adique, $\mathbb{Q}_p^{alg}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ (elle n'est pas complète) et $\mathbb{C}_p$ le complété de $\mathbb{Q}_p^{alg}$. ($\mathbb{C}_p$ est à la fois clos et complet.)
On note aussi $|.|_p$ l'unique valeur absolue qui prolonge $|.|_p$ à $\mathbb{C}_p$.

A partir de maintenant, $(\widetilde{K},|.|)$ désignera soit $(\mathbb{C}_p,|.|_p)$ soit $(\mathbb{C},|.|_\infty)$ où $|z|_\infty$ désigne le module du nombre complexe $z$. Lorsque les théorèmes et démonstrations utiliseront uniquement les propriétés communes à $(\mathbb{C}_p,|.|_p)$ et $(\mathbb{C},|.|_\infty)$, nous utiliserons la notation $(\widetilde{K},|.|)$ et nous signalerons explicitement les endroits où les propriétés diffèrent.

Nous noterons aussi $K$ un sous-corps localement compact et complet (pour la valuation induite) de $\widetilde{K}$. Par exemple, lorsque $\widetilde{K} = \mathbb{C}$, $K$ pourra désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Lorsque $\widetilde{K} = \mathbb{C}_p$, $K$ pourra désigner $\mathbb{Q}_p$ ou une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

L'entier strictement positif $m$ désignera la dimension de l'espace dans lequel nous nous plaçons et nous poserons $V = K^m$. Si $a$ est un vecteur colonne de $V$, nous noterons $||a|| = \sup_{j=1,2,\dots,m} |a_j|$ . La longueur d'un multi-indice $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ sera notée $||\alpha|| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$.

Nous noterons $B(a,r)$ la boule "ouverte" de $V$ de centre $a$ et de rayon $r$, c'est-à-dire $B(a,r) = \{z \in V \ /||z-a|| < r \ \}$ et $B_f(a,r)$ la boule "fermée" de $V$ de centre $a$ et de rayon $r$, c'est-à-dire $B_f(a,r) = \{z \in V \ /||z-a|| \leqslant r \ \}$.

1. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{a}{b}\right|_p = p^{v_p(b)-v_p(a)}$ où $v_p(a)$ désigne l'exposant de $p$ dans la décomposition de $a$ en produit de facteurs premiers.

Nous utiliserons, selon la commodité, deux notations pour les séries entières de $V$ dans $V$. Nous les noterons parfois sous la forme $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_\alpha z^\alpha$ avec $z$ un vecteur colonne de $V$ ayant pour coordonnées $z_1,z_2,\ldots,z_m$ , $a_\alpha$ des vecteurs colonnes de $V$ ayant pour coordonnées $a_{\alpha,1},a_{\alpha,2},\ldots,a_{\alpha,m}$ et $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_m^{\alpha_m}$.

Nous les noterons d'autres fois $f(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(z)$ ou $f(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} f^{(j)}(z)$ avec $f_j$ (ou $f^{(j)}$) polynôme homogène de degré $j$ en $m$ variables et à valeurs dans $V$, ce qui revient à dire, en utilisant la notation précédente que $f_j(z) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^m \\ |\alpha| = j}} a_\alpha z^\alpha$

Nous poserons aussi, pour toute série entière $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_\alpha z^\alpha$,

$R_f = \sup\{r \in \mathbb{R}_+^* / \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^m} ||a_\alpha|| r^{|\alpha|} < +\infty\}$. (rayon de la série entière $f$)

On obtient alors, pour tout $z \in V$, si $||z|| < R_f$, alors $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_\alpha z^\alpha$ est convergente.

Nous noterons aussi $L$ un élément de $GL_m(K)$ et nous identifierons $L$ avec l'application linéaire qu'elle représente. Ainsi, pour tout $z \in V$, l'élément $Lz$ sera parfois noté $L(z)$. Dans le cas de la dimension 1 ($m = 1$), on utilisera la lettre $\lambda$ ($\lambda \in K^*$) plutôt que la lettre $L$ et on notera $\lambda z$ au lieu de $Lz$.

L'ensemble $\mathcal{F}_L$ désignera l'ensemble des séries entières de rayon de convergence strictement positif ayant 0 pour point fixe et $L$ pour multiplicateur, c'est-à-dire $\mathcal{F}_L = \{f(z) = \sum f_j(z) \ / \ f$ est de rayon strictement positif et $f_0(z) = 0$ et $f_1(z) = L(z)\}$. Lorsque $m = 1$, on utilisera indifféremment les notations $\mathcal{F}_L$ ou $\mathcal{F}_\lambda$.

## 2.2 Linéarisation et linéarisation formelle.

**Définition 2.2.1.** *Soit $f \in \mathcal{F}_L$. On dit que $f$ est linéarisable s'il existe une série entière $\varphi = \sum \varphi_j$ de rayon de convergence strictement positif et $t \in ]0,R_\varphi[$ vérifiant $\varphi_0(z) = 0$, $\varphi_1(z) = \widetilde{L}z$ où $\widetilde{L} \in GL_m(K)$, $\varphi(B(0,t)) \subseteq B(0,R_f)$, $L(B(0,t)) \subseteq B(0,R_\varphi)$ et*

$$\forall z \in B(0,t) \quad f(\varphi(z)) = \varphi(L(z)) \tag{2.1}$$

**Remarque 2.2.2.** *La condition $\varphi_0 = 0$ dans la définition précédente signifie simplement que le point fixe 0 de $L$ est envoyé sur le point fixe 0 de $f$.*

**Remarque 2.2.3.** *La condition $\varphi_1 = \widetilde{L}$ avec $\widetilde{L} \in GL_m(K)$ dans la définition précédente signifie que $\varphi$ est inversible et qu'au voisinage de 0, on a $f(z) = \varphi\left(L\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right)$ , ce qui signifie que $f$ est l'application $L$ vue à travers $\varphi$.*

**Proposition 2.2.4.** *Soit $f \in \mathcal{F}_L$. Si $f$ est linéarisable, alors il existe une série entière $\widetilde{\varphi} = \sum \widetilde{\varphi}_j$ de rayon de convergence strictement positif et $\widetilde{t} \in ]0,R_{\widetilde{\varphi}}[$ vérifiant $\widetilde{\varphi}_0(z) = 0$, $\widetilde{\varphi}_1(z) = z$ , $\widetilde{\varphi}(B(0,\widetilde{t})) \subseteq B(0,R_f)$, $L(B(0,\widetilde{t})) \subseteq B(0,R_{\widetilde{\varphi}})$ et*

$$\forall z \in B(0,\widetilde{t}) \quad f(\widetilde{\varphi}(z)) = \widetilde{\varphi}(L(z))$$

*Démonstration :*
Comme $f$ est linéarisable, par définition, il existe une série entière $\varphi = \sum \varphi_j$ de rayon de convergence strictement positif et $t \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\varphi_0(z) = 0$, $\varphi_1(z) = \widetilde{L}z$ où $\widetilde{L} \in GL_m(K)$, $\varphi(B(0,t)) \subseteq B(0,R_f)$, $L(B(0,t)) \subseteq B(0,R_\varphi)$ et

$$\forall z \in B(0,t) \quad f(\varphi(z)) = \varphi(L(z)) \tag{2.2}$$

• Remarquons d'abord que $L \circ \widetilde{L}^{-1} = \widetilde{L}^{-1} \circ L$.
En effet, pour tout $z \in B(0,t)$, on a $f(\varphi(z)) = \varphi(L(z))$,
avec $f(\varphi(z)) = L(\widetilde{L}(z) + \dots) + \dots = L(\widetilde{L}(z)) + \dots$
et $\varphi(L(z)) = \widetilde{L}(L(z) + \dots) + \dots = \widetilde{L}(L(z)) + \dots$.
D'où, en identifiant les parties linéaires, $L(\widetilde{L}(z)) = \widetilde{L}(L(z))$. Cette égalité étant vraie sur un petit voisinage de 0 et les applications étant linéaires, on en déduit que $\forall z \in V \;\; L(\widetilde{L}(z)) = \widetilde{L}(L(z))$, d'où $L \circ \widetilde{L} = \widetilde{L} \circ L$.
On obtient alors $\widetilde{L}^{-1} \circ L \circ \widetilde{L} \circ \widetilde{L}^{-1} = \widetilde{L}^{-1} \circ \widetilde{L} \circ L \circ \widetilde{L}^{-1}$, d'où $\widetilde{L}^{-1} \circ L = L \circ \widetilde{L}^{-1}$

• Construisons $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{t}$.
Posons $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \widetilde{L}^{-1}$. Comme $\widetilde{L}^{-1}$ est linéaire, $\widetilde{\varphi}(z) = \sum \widetilde{\varphi}_j(z)$ est une série entière de rayon strictement positif et on a la relation $\forall j \in \mathbb{N} \;\; \widetilde{\varphi}_j(z) = \varphi_j(\widetilde{L}^{-1}(z))$.
On vérifie facilement que l'on a $\widetilde{\varphi}_0 = \varphi_0 = 0$ et $\forall x \in V \;\; \widetilde{\varphi}_1(x) = \varphi_1(\widetilde{L}^{-1}(x)) = \widetilde{L}(\widetilde{L}^{-1}(x)) = x$, d'où $\widetilde{\varphi}_1 = Id$. Comme $\widetilde{\varphi}$, $L$ et $\widetilde{L}^{-1}$ sont continues avec $\widetilde{\varphi}(0) = 0$, $L(0) = 0$ et $\widetilde{L}^{-1}(0) = 0$, on peut choisir $\widetilde{t} \in ]0,R_{\widetilde{\varphi}}[$ tel que $\widetilde{\varphi}(B(0,\widetilde{t})) \subseteq B(0,R_f)$, $L(B(0,\widetilde{t})) \subseteq B(0,R_{\widetilde{\varphi}})$ et $\widetilde{L}^{-1}(B(0,\widetilde{t})) \subseteq B(0,t)$

• Vérifions que $\forall z \in B(0,\widetilde{t}) \quad f(\widetilde{\varphi}(z)) = \widetilde{\varphi}(L(z))$

Soit $z \in B(0,\widetilde{t})$. On a

$$\begin{aligned} f(\widetilde{\varphi}(z)) &= f(\varphi(\widetilde{L}^{-1}(z))) && \text{avec } \widetilde{L}^{-1}(z) \in B(0,t) \\ &= \varphi(L(\widetilde{L}^{-1}(z))) && \text{d'après (2.2)} \\ &= \varphi(\widetilde{L}^{-1}(L(z))) && \text{car } L \circ \widetilde{L}^{-1} = \widetilde{L}^{-1} \circ L \\ &= \widetilde{\varphi}(L(z)) \end{aligned}$$

□

**Définition 2.2.5.** *Une application $\varphi = \sum \varphi_j$ vérifiant les conditions de la définition (2.2.1) et vérifiant de plus $\varphi_1 = Id$ est appelée une linéarisante de $f$.*

**Problème:**

Soit $L \in GL_m(K)$ et $f \in \mathcal{F}_L$. Le problème qui nous intéresse est de savoir sous quelles conditions sur $L$ et/ou $f$ peut-on dire que $f$ est (ou n'est pas) linéarisable.

La linéarisabilité de $f$ est équivalente à l'existence d'une linéarisante $\varphi$ et là, deux problèmes se posent. L'un algébrique : existe-t-il une série formelle $\varphi(z) = z + \sum_{j \geqslant 2} \varphi_j(z)$ vérifiant $f(\varphi(z)) = \varphi(Lz)$ ? On parle alors de linéarisante formelle. L'autre analytique : cette linéarisante formelle, lorsqu'elle existe, est-elle une série entière de rayon strictement positif ?

**Définition 2.2.6.** *Soit $L \in GL_m(K)$. Notons $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ ses $m$ valeurs propres dans $\widetilde{K}$. On dit que $L$ est non résonante si*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^m \qquad \Big(||\alpha|| \geqslant 2\Big) \Longrightarrow \Big(\forall j \in [\![1,m]\!] \qquad \lambda^\alpha - \lambda_j \neq 0\Big).$$

**Remarque 2.2.7.** *Lorsque $m = 1$, $\lambda$ non résonant signifie que $\forall k \geqslant 2 \;\; \lambda^k - \lambda \neq 0$, c'est-à-dire $\forall k \geqslant 2 \;\; \lambda^{k-1} - 1 \neq 0$, ce qui revient à dire que $\lambda$ n'est pas une racine de l'unité.*

**Proposition 2.2.8.** *Soit $L \in GL_m(K)$ et $f \in \mathcal{F}_L$. Si $L$ est non résonante, alors $f$ possède une unique linéarisante formelle $\varphi$.*

*Démonstration :*
Supposons $L$ non résonante.

• Unicité

Supposons aussi que $f$ possède une linéarisante formelle $\varphi$. En notant $\mathcal{L}_L^{(q)}$ l'opérateur défini sur l'espace des polynômes homogènes de degré $q$ en $m$ variables et à valeurs dans $K^m$, par

$$\mathcal{L}_L^{(q)}(P(z)) = P(Lz) - LP(z)$$

l'équation fonctionnelle

$$f(\varphi(z)) = \varphi(Lz)$$

donne[2]

$$Lz + L\sum_{q \geqslant 2} \varphi^{(q)}(z) + \sum_{l \geqslant 2} f^{(l)} \left( \sum_{i \geqslant 1} \varphi^{(i)}(z) \right) = Lz + \sum_{q \geqslant 2} \varphi^{(q)}(Lz)$$

d'où

$$\sum_{l \geqslant 2} f^{(l)} \left( \sum_{i \geqslant 1} \varphi^{(i)}(z) \right) = \sum_{q \geqslant 2} \varphi^{(q)}(Lz) - \sum_{q \geqslant 2} L\varphi^{(q)}(z)$$

ce qui aboutit à

$$\sum_{l \geqslant 2} f^{(l)} \left( \sum_{i \geqslant 1} \varphi^{(i)}(z) \right) = \sum_{q \geqslant 2} \mathcal{L}_L^{(q)} \left( \varphi^{(q)}(z) \right)$$

2. Ceci a bien un sens car les séries formelles sont de valuation supérieure à 1 et on peut donc les composer.

d'où, notant $\mathcal{P}_q(.)$ la partie homogène de degré $q$ d'un polynôme en $m$ variables et à valeurs dans $K^m$ :

$$\forall q \geqslant 2 \qquad \mathcal{L}_L^{(q)}\left(\varphi^{(q)}(z)\right) = \mathcal{P}_q\left(\sum_{2\leqslant l} f^{(l)}\left(\sum_{1\leqslant i}\varphi^{(i)}(z)\right)\right).$$

et, comme on prend seulement la partie homogène de degré $q$, les parties homogènes d'ordres strictement supérieurs à $q$ n'apportent aucune contribution et on obtient la formule :

$$\forall q \geqslant 2 \qquad \mathcal{L}_L^{(q)}\left(\varphi^{(q)}(z)\right) = \mathcal{P}_q\left(\sum_{2\leqslant l\leqslant q} f^{(l)}\left(\sum_{1\leqslant il\leqslant q}\varphi^{(i)}(z)\right)\right). \tag{2.3}$$

Comme $L$ est non résonante, il est connu que, pour tout $q \geqslant 2$, $\mathcal{L}_L^{(q)}$ est inversible. En effet, comme $\widetilde{K}$ est algébriquement clos, il existe $A$ et $B$ dans $GL_m(\widetilde{K})$ tels que $L = B^{-1}AB$ avec $A$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,m} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{k,k} & \dots & a_{k,m} \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{m,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,m} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_k & \dots & a_{k,m} \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Comme[3] $\mathcal{L}_L^{(q)}(P) = B^{-1}\mathcal{L}_A^{(q)}(BPB^{-1})B$ , il suffit de montrer que $\mathcal{L}_A^{(q)}$ est inversible[4].

Définissons la relation de bon ordre $\trianglelefteq$ sur $\mathbb{N}^m$ de la manière suivante :
pour tout $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$ et tout $\beta = (\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m)$,

$$\alpha \trianglelefteq \beta \text{ si } \begin{cases} ||\alpha|| < ||\beta|| \\ \text{ou} \\ ||\alpha|| = ||\beta|| \text{ et } \alpha \text{ précède } \beta \text{ pour l'ordre lexicographique} \end{cases}$$

3. Cela résulte du fait que $B^{-1}\mathcal{L}_A^{(q)}(BPB^{-1})B = B^{-1}(BPB^{-1}A - ABPB^{-1})B = B^{-1}BPB^{-1}AB - B^{-1}ABPB^{-1}B = PB^{-1}AB - B^{-1}ABP = PL - LP = \mathcal{L}_L(P)$

4. En effet, la relation précédente permet de vérifier facilement que si $\mathcal{L}_A^{(q)}$ est injective et surjective, alors $\mathcal{L}_L^{(q)}$ l'est aussi.

Considérons alors la base $\mathcal{B} = (e_{\alpha,j}(z))_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^m \\ ||\alpha|| = q \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ du $K$-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré $q$ en $m$ variables

et à valeurs dans $K^m$ définie par $e_{\alpha,j}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ z^\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow j\text{-ème ligne}$

On a

$$\mathcal{L}_A^{(q)}\left(e_{\alpha,j}(z)\right) = e_{\alpha,j}\left(Az\right) - Ae_{\alpha,j}(z)$$

avec

$$Ae_{\alpha,j}(z) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & \cdots & a_{1,j} & \cdots & \cdots & a_{1,m} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & \cdots & a_{2,j} & \cdots & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & a_{3,3} & \cdots & \cdots & a_{3,j} & \cdots & \cdots & a_{3,m} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & a_{j,j} & \cdots & \cdots & a_{j,m} \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ z^\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{j} a_{k,j} e_{\alpha,k}(z)$$

i.e.

$$Ae_{\alpha,j}(z) = \lambda_j e_{\alpha,j}(z) + \sum_{k=1}^{j-1} a_{k,j} e_{\alpha,k}(z)$$

et, en définissant la relation de bon ordre $\preccurlyeq$ sur les $(\alpha,k)$ par

$\forall (\beta,k) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N} \quad \forall (\gamma,l) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N} \quad (\beta,k) \preccurlyeq (\gamma,l)$ si $\beta \lhd \gamma$ ou ($\beta = \gamma$ et $k \leqslant l$)

on obtient

$$Ae_{\alpha,j}(z) = \lambda_j e_{\alpha,j}(z) + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant j-1 \\ (\alpha,k) \prec (\alpha,j)}} a_{k,j} e_{\alpha,k}(z)$$

On a aussi

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha,j}(Az) &= e_{\alpha,j}\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,m} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & a_{3,3} & \dots & a_{3,m} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{m,m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}\right) = e_{\alpha,j}\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{1,k}z_k \\ \sum_{k=2}^{m} a_{2,k}z_k \\ \sum_{k=3}^{m} a_{3,k}z_k \\ \vdots \\ \sum_{k=m}^{m} a_{m,k}z_k \end{pmatrix} \\
j\text{-ème ligne} \longrightarrow &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \left(\sum_{k=1}^{m} a_{1,k}z_k\right)^{\alpha_1}\left(\sum_{k=2}^{m} a_{2,k}z_k\right)^{\alpha_2}\left(\sum_{k=3}^{m} a_{3,k}z_k\right)^{\alpha_3}\dots\left(\sum_{k=m}^{m} a_{m,k}z_k\right)^{\alpha_m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \lambda^{\alpha}e_{\alpha,j}(z) + \sum_{\substack{\beta \\ (\beta,j)\prec(\alpha,j)}} b_{\beta}e_{\beta,j}(z)
\end{aligned}
$$

En effet, en posant $B = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{1,k}z_k\right)^{\alpha_1}\left(\sum_{k=2}^{m} a_{2,k}z_k\right)^{\alpha_2}\left(\sum_{k=3}^{m} a_{3,k}z_k\right)^{\alpha_3}\dots\left(\sum_{k=m}^{m} a_{m,k}z_k\right)^{\alpha_m}$,

on a :

$$
\begin{aligned}
B &= \prod_{r=1}^{m}\left(\sum_{k=r}^{m} a_{r,k}z_k\right)^{\alpha_r} \\
&= \prod_{r=1}^{m}\prod_{s=1}^{\alpha_r}\sum_{k_{r,s}=r}^{m} a_{r,k_{r,s}}z_{k_{r,s}}
\end{aligned}
$$

d'où

$$B = \sum_{\substack{(k_{1,1},k_{1,2},\dots,k_{1,\alpha_1},k_{2,1},\dots,k_{2,\alpha_2},\dots,k_{m,1},\dots,k_{m,\alpha_m}) \in N^{||\alpha||} \\ r \leqslant k_{r,s} \leqslant m}} \prod_{\substack{1 \leqslant r \leqslant m \\ 1 \leqslant s \leqslant \alpha_r}} a_{r,k_{r,s}} \prod_{\substack{1 \leqslant r \leqslant m \\ 1 \leqslant s \leqslant \alpha_r}} z_{k_{r,s}}$$

$$= \sum_{\beta \in N^m} \left( \sum_{\substack{(k_{1,1},\dots,k_{1,\alpha_1},\dots,k_{m,1},\dots,k_{m,\alpha_m}) \in N^{||\alpha||} \\ r \leqslant k_{r,s} \leqslant m \\ \prod\limits_{\substack{1 \leqslant r \leqslant m \\ 1 \leqslant s \leqslant \alpha_r}} z_{k_{r,s}} = z^\beta}} \prod_{\substack{1 \leqslant r \leqslant m \\ 1 \leqslant s \leqslant \alpha_r}} a_{r,k_{r,s}} \right) z^\beta$$

Soit $\beta \in \mathbb{N}^m$ et $(k_{1,1},\dots,k_{1,\alpha_1},\dots,k_{m,1},\dots,k_{m,\alpha_m}) \in N^{||\alpha||}$

On suppose que $\forall r \in [\![1,m]\!]$ $\forall s \in [\![r,\alpha_r]\!]$ $\quad r \leqslant k_{r,s} \leqslant m$ et $\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant r \leqslant m \\ 1 \leqslant s \leqslant \alpha_r}} z_{k_{r,s}} = z^\beta$

On a alors $||\beta|| = ||\alpha|| = q$ et de plus :

• si $\beta = \alpha$, alors, comme les $k_{r,s}$ vérifient $r \leqslant k_{r,s} \leqslant m$, forcément, on a

$$k_{1,1} = k_{1,2} = \cdots = k_{1,\alpha_1} = 1$$

puis

$$k_{2,1} = k_{2,2} = \cdots = k_{2,\alpha_2} = 2$$

$\vdots$

$$\dots$$

puis

$$k_{m,1} = k_{m,2} = \cdots = k_{m,\alpha_m} = m$$

et dans ce cas, on a

$$\prod_{\substack{1 \leqslant r \leqslant m \\ 1 \leqslant s \leqslant \alpha_r}} a_{r,k_{r,s}} = \prod_{1 \leqslant r \leqslant m} a_{r,r}^{\alpha_r} = \prod_{1 \leqslant r \leqslant m} \lambda_r^{\alpha_r} = \lambda^\alpha$$

• si $\beta \neq \alpha$. On pose $r_0 = \min\{r \in [\![1,m]\!] / \alpha_r \neq \beta_r\}$.

On a alors, par un raisonnement analogue au précédent,

$$\forall r \in [\![1,r_0-1]\!] \ \ \forall s \in [\![1,\alpha_r]\!] \quad k_{r,s} = r < r_0$$

et

$$\forall r \in [\![r_0+1,m]\!] \ \ \forall s \in [\![1,\alpha_r]\!] \quad k_{r,s} \geqslant r > r_0$$

et

$$\beta_{r_0} = \mathrm{card}(\{s \in [\![1,\alpha_{r_0}]\!] / k_{r_0,s} = r_0\}) \leqslant \alpha_{r_0} \quad \text{et} \quad \alpha_{r_0} \neq \beta_{r_0}$$

Donc $\beta_{r_0} < \alpha_{r_0}$ , d'où $\beta \triangleleft \alpha$ , d'où $(\beta,j) \prec (\alpha,j)$ et par conséquent, on a bien :

$$e_{\alpha,j}(Az) = \lambda^{\alpha} e_{\alpha,j}(z) + \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^m \\ ||\beta|| = q \\ (\beta,j) \prec (\alpha,j)}} b_{\beta} e_{\beta,j}(z)$$

d'où

$$\mathcal{L}_A^{(q)}(e_{\alpha,j}(z)) = e_{\alpha,j}(Az) - A e_{\alpha,j}(z) = (\lambda^{\alpha} - \lambda_j)\, e_{\alpha,j}(z) + \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^m \\ 1 \leqslant k \leqslant m \\ ||\beta|| = q \\ (\beta,k) \prec (\alpha,j)}} c_{\beta,k} e_{\beta,k}(z)$$

d'où

$\mathcal{L}_A^{(q)}$ triangulaire supérieure avec pour coefficients diagonaux $\lambda^{\alpha} - \lambda_j$.

d'où

$\det\left(\mathcal{L}_A^{(q)}\right) = \prod_{\substack{(\alpha,j) \\ ||\alpha|| = q \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} (\lambda^{\alpha} - \lambda_j) \neq 0$ car $L$ non résonante.

et grâce à (2.3), on obtient, pour tout $q \geqslant 2$

$$\varphi^{(q)}(z) = (\mathcal{L}_L^{(q)})^{-1} \left( \mathcal{P}_q \left( \sum_{2 \leqslant l \leqslant q} f^{(l)} \left( \sum_{1 \leqslant il \leqslant q} \varphi^{(i)}(z) \right) \right) \right) \tag{2.4}$$

En se rappelant que $\varphi^{(0)}(z) = 0$ , que $\varphi^{(1)}(z) = z$ et en remarquant que dans le membre de droite de la formule (2.4), les $\varphi^{(i)}$ qui interviennent ont un indice $i$ vérifiant $1 \leqslant i \leqslant \frac{q}{l} \leqslant \frac{q}{2} < q$, on s'aperçoit que (2.4) est une formule de récurrence permettant de calculer les $\varphi^{(q)}(z)$ et l'unicité est ainsi démontrée.

• Existence de la linéarisante formelle.

Pour montrer l'existence de la linéarisante formelle, il suffit de définir $\varphi(z) = \sum \varphi^{(q)}(z)$ en posant $\varphi^{(0)}(z) = 0$ , $\varphi^{(1)}(z) = z$ et, pour tout $q \geqslant 2$

$$\varphi^{(q)}(z) = \left(\mathcal{L}_L^{(q)}\right)^{-1} \left(\mathcal{P}_q \left(\sum_{2\leqslant l \leqslant q} f^{(l)} \left(\sum_{1\leqslant il \leqslant q} \varphi^{(i)}(z)\right)\right)\right)$$

On peut alors remonter les calculs précédents et vérifier que l'on a bien

$$f(\varphi(z)) = \varphi(L(z))$$

□

**Remarque 2.2.9.** *Dans le calcul précédent, si L est diagonalisable, alors on peut choisir une matrice A diagonale et on a*

$$Ae_{\alpha,j}(z) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_j & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ z^\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_j e_{\alpha,j}(z)$$

*et*

$$e_{\alpha,j}(Az) = e_{\alpha,j}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}\right) = e_{\alpha,j}\begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \lambda_2 z_2 \\ \lambda_3 z_3 \\ \vdots \\ \lambda_m z_m \end{pmatrix}$$

*d'où,*

$$\begin{array}{rl} e_{\alpha,j}(Az) & = \\ j\text{-ème ligne} \longrightarrow & \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ (\lambda_1 z_1)^{\alpha_1}(\lambda_2 z_2)^{\alpha_2}(\lambda_3 z_3)^{\alpha_3}\ldots(\lambda_m z_m)^{\alpha_m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda^\alpha z^\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda^\alpha e_{\alpha,j}(z)$$

*Ainsi,*

$$\mathcal{L}_A^{(q)}(e_{\alpha,j}(z)) = e_{\alpha,j}(Az) - Ae_{\alpha,j}(z) = (\lambda^\alpha - \lambda_j)e_{\alpha,j}(z)$$

*et donc $\mathcal{L}_A^{(q)}$ est diagonale.*

**Remarque 2.2.10.** *Dans le cas de la dimension 1, on peut raisonner plus directement et obtenir une formule explicite pour le calcul des coefficients de la linéarisante formelle.*

**Proposition 2.2.11.** *Soit $\lambda \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ et $f(z) = \lambda z + \sum_{j=2}^{+\infty} a_j z^j \in \mathcal{F}_\lambda$. Si $\lambda$ est non-résonant, alors $f$ possède une unique linéarisante formelle $\varphi(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} b_j z^j$ et les $b_j$ sont déterminés par :*

$$b_1 = 1 \text{ et } b_n = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{2 \leqslant r \leqslant n} a_r \sum_{\substack{(j_1, j_2, \ldots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} j_k = n}} \prod_{1 \leqslant k \leqslant r} b_{j_k} \tag{2.5}$$

*Démonstration :*

Supposons $\lambda$ non résonant. Comme $f \in \mathcal{F}_\lambda$, $f$ s'écrit sous la forme $f(z) = \lambda z + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k z^k$. Cherchons une linéarisante formelle $\varphi$ de $f$ sous la forme $\varphi(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} b_k z^k = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k z^k$ avec $b_1 = 1$.

Supposons que $\varphi$ vérifie l'équation $f(\varphi(z)) = \varphi(\lambda z)$ entre séries formelles.[5] On a alors

$$\lambda z + \lambda \sum_{n=2}^{+\infty} b_n z^n + \sum_{r=2}^{+\infty} a_r \left( \sum_{j=1}^{+\infty} b_j z^j \right)^r = \lambda z + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n (\lambda z)^n$$

d'où,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} b_n (\lambda^n - \lambda) z^n = \sum_{r=2}^{+\infty} a_r \left( \sum_{j=1}^{+\infty} b_j z^j \right)^r \tag{2.6}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{r=2}^{+\infty} a_r \left( \sum_{j=1}^{+\infty} b_j z^j \right)^r &= \sum_{r=2}^{+\infty} a_r \left( \sum_{j_1=1}^{+\infty} b_{j_1} z^{j_1} \right) \left( \sum_{j_2=1}^{+\infty} b_{j_2} z^{j_2} \right) \dots \left( \sum_{j_r=1}^{+\infty} b_{j_r} z^{j_r} \right) \\
&= \sum_{r=2}^{+\infty} a_r \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r} b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_r} z^{j_1 + j_2 + \dots + j_r} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \sum_{r=2}^{+\infty} a_r \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ j_1 + j_2 + \dots + j_r = n}} b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_r} \right) z^n
\end{aligned}$$

De plus, en tenant compte du fait que chaque $j_k$ est supérieur ou égal à 1, on a $r \leqslant j_1 + j_2 + \dots + j_r = n$, d'où

$$\sum_{r=2}^{+\infty} a_r \left( \sum_{j=1}^{+\infty} b_j z^j \right)^r = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \sum_{r=2}^{n} a_r \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ j_1 + j_2 + \dots + j_r = n}} b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_r} \right) z^n \tag{2.7}$$

De (2.6) et (2.7), on déduit

$$b_n (\lambda^n - \lambda) = \sum_{2 \leqslant r \leqslant n} a_r \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ j_1 + j_2 + \dots + j_r = n}} b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_r}$$

Et comme $\lambda$ est non résonant, on a $\lambda^n - \lambda \neq 0$, d'où

$$b_n = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{2 \leqslant r \leqslant n} a_r \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} j_k = n}} \prod_{1 \leqslant k \leqslant r} b_{j_k}$$

5. Ceci a bien un sens car toutes les séries formelles considérées sont de valuation 1.

On vient de prouver que si la linéarisante formelle existe, alors elle est unique et ses coefficients sont donnés par (2.5).

Réciproquement, on vérifie facilement que la série formelle $\varphi$ dont les coefficients sont définis par (2.5) vérifie $f(\varphi(z)) = \varphi(\lambda z)$. $\square$

**Remarque 2.2.12.** *Si $\lambda$ est résonant, deux cas peuvent se produire.*

• *Ou bien $f$ ne possède aucune linéarisante formelle et par conséquent aucune linéarisante (c'est par exemple le cas pour $\lambda = 1$ et $f(z) = z + z^2$ car une linéarisante formelle $\varphi$ devrait vérifier $\varphi(z) = z + \dots$ et $\varphi^2(z) = 0$, ce qui est impossible).*

• *Ou bien $f$ possède plusieurs linéarisantes formelles (c'est le cas pour $\lambda = -1$ et $f(z) = \frac{1}{1+z} - 1 = \lambda z + \sum_{k=2}^{+\infty} (-z)^k$. On remarque que $\varphi(z) = \exp(z) - 1 = z + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ est une linéarisante de $f$, car $f(\varphi(z)) = \exp(-z) - 1 = \varphi(-z)$, et que pour toute fonction $g(z) = z + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k+1} z^{2k+1}$ analytique impaire, en posant $\varphi_g(z) = \varphi(g(z))$, on a que $\varphi_g$ est une linéarisante de $f$, car $f(\varphi_g(z)) = f(\varphi(g(z))) = \varphi(-g(z)) = \varphi(g(-z)) = \varphi_g(-z)$ et $\varphi_g(z) = z + \dots$)*

**Remarque 2.2.13.** *Si $\lambda$ est résonant ($\lambda^q = 1$ avec $q \in \mathbb{N}^*$) et si $P$ est un polynôme de degré $d \geqslant 2$, alors $P$ n'est pas formellement linéarisable.*[6]

## 2.3 Linéarisation formelle et linéarisation

Si $f \in \mathcal{F}_L$ avec $L$ non-résonant, on a l'existence d'une unique linéarisante formelle $\varphi$ et donc, pour savoir si $f$ est ou non linéarisable, on est amené à déterminer si le rayon de convergence de $\varphi(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \varphi^{(j)}(z)$ est strictement positif. Pour cela, on peut essayer de majorer ou de minorer les valeurs absolues des composantes des coefficients des polynômes homogènes $\varphi^{(j)}(z)$.

Lorsque $K = \widetilde{K} = \mathbb{C}$, en utilisant la technique des séries majorantes (et en majorant explicitement les valeurs absolues des composantes des coefficients des polynômes homogènes $\varphi^{(j)}(z)$),de nombreux résultats ont été obtenus.

**Théorème 2.3.1 (Koenigs).** *Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si $f \in \mathcal{F}_\lambda$ et si $|\lambda| < 1$, alors $f$ est linéarisable.*

**Remarque 2.3.2.** *Le théorème est encore vrai si on remplace la condition $|\lambda| < 1$ par la condition $|\lambda| > 1$. (il suffit de raisonner sur $f^{-1}$ au lieu de $f$.)*

6. Si $P$ était formellement linéarisable, il posséderait une linéarisante formelle $\varphi(z) = z + \dots$ vérifiant $P(\varphi(z)) = \varphi(\lambda z)$. Comme $\varphi$ est une série formelle de valuation 1, elle possède une réciproque formelle de valuation 1 et on a : $P(z) = \varphi\left(\lambda\varphi^{-1}(z)\right)$, $(P \circ P)(z) = P(P(z)) = \varphi\left(\lambda\varphi^{-1}\left(\varphi\left(\lambda\varphi^{-1}(z)\right)\right)\right) = \varphi\left(\lambda\lambda\varphi^{-1}(z)\right) = \varphi\left(\lambda^2\varphi^{-1}(z)\right)$, $(P \circ P \circ P)(z) = \dots = \varphi\left(\lambda^3\varphi^{-1}(z)\right)$, $\dots$, $P^{\circ q}(z) = \varphi\left(\lambda^q\varphi^{-1}(z)\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(z)\right) = z$. Or c'est impossible, car $\deg P^{\circ q} = d^q \neq 1 = \deg z$.

**Théorème 2.3.3 (Poincaré).** *Si $L \in GL_m(\mathbb{C})$, si $f \in \mathcal{F}_L$ et si $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} |\lambda_k| < 1$, alors $f$ est linéarisable.*

**Remarque 2.3.4.** *Comme précédemment, le théorème est encore vrai si on remplace la condition $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} |\lambda_k| < 1$ par la condition $\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} |\lambda_k| > 1$.*

**Notation 2.3.5.** *Jusqu'à la fin de ce chapitre, nous supposerons que $m = 1$, et $\lambda = e^{i2\pi\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. ($|\lambda| = 1$ et $\lambda$ non résonant). Nous noterons alors $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$ le développement en fraction continue de $\theta$ et nous noterons $\frac{p_n}{q_n}$ la n-ième réduite de $\theta$,*

*c'est-à-dire* $\dfrac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$

**Théorème 2.3.6 (Siegel).** *Si $\lambda \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, si $f \in \mathcal{F}_\lambda$ et si $\sup \left( \dfrac{\ln(q_{n+1})}{\ln(q_n)} \right) < +\infty$, alors $f$ est linéarisable.*

**Remarque 2.3.7.** *La condition $\sup \left( \dfrac{\ln(q_{n+1})}{\ln(q_n)} \right) < +\infty$ est équivalente à dire que $\theta$ est diophantien, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ et $\mu > 0$ tels que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{N}^*$, $\left| \theta - \dfrac{p}{q} \right| \geqslant \dfrac{C}{q^\mu}$.*

**Théorème 2.3.8 (Brjuno).** *Si $\lambda \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, si $f \in \mathcal{F}_\lambda$ et si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} < +\infty$, alors $f$ est linéarisable.*

**Remarque 2.3.9.** *Le théorème de Brjuno est un raffinement de celui de Siegel car, si* $M = \sup\left(\dfrac{\ln(q_{n+1})}{\ln(q_n)}\right) < +\infty$*, alors*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{\ln(q_n)} \frac{\ln(q_n)}{q_n} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} M \frac{\ln(q_n)}{q_n} \leqslant 6M < +\infty$$

*Cela résulte du fait que* $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ *est décroissante sur* $[e, +\infty[$ *et que* $\forall n \in \mathbb{N}\ \ q_n \geqslant F_n$ *où* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite de Fibonacci définie par* $F_0 = F_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}\ \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$*.*

**Théorème 2.3.10 (Brjuno).** *Si* $L \in GL_m(\mathbb{C})$*, si* $L$ *est diagonalisable, si* $f \in \mathcal{F}_L$ *et si* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-\ln(\Omega(2^{n+1})}{2^n} < +\infty$ *où* $\displaystyle\Omega(n) = \min_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^m \\ 2 \leqslant ||\alpha|| \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} |\lambda^\alpha - \lambda_j|$

*alors* $f$ *est linéarisable.*

**Remarque 2.3.11.** *Le fait que* $L$ *soit diagonalisable est crucial, car Yoccoz a démontré que si* $L$ *possède une valeur propre associée à un bloc de Jordan non trivial*[7] *alors il existe* $f \in \mathcal{F}_L$ *tel que* $f$ *soit non-linéarisable.*

**Remarque 2.3.12.** *Les théorèmes précédents prouvent que cette attaque directe du problème, en manipulant directement les coefficients de la linéarisante formelle, est très fructueuse pour démontrer des théorèmes de linéarisation. Par contre, jusqu'à ce jour, aucune minoration directe n'a été possible et tous les théorèmes de non- linéarisabilité ont été obtenus par des méthodes indirectes (méthode des petits cycles développée par Cremer, chirurgie holomorphe développée par Yoccoz,...).*

**Théorème 2.3.13.** *Si* $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots + a_d z^d$ *est un polynôme de degré* $d$ *et si* $\displaystyle\limsup_{q\to+\infty} \frac{\ln\ln(1/|\lambda^q - 1|)}{q} > d$*, alors* $P$ *n'est pas linéarisable.*

**Remarque 2.3.14.** *Pour démontrer ce théorème, Cremer prouve que la condition* $\displaystyle\limsup_{q\to+\infty} \frac{\ln\ln(1/|\lambda^q - 1|)}{q} > d$ *entraîne que* $P$ *possède des petits cycles, ce qui empêche la linéarisation*[8] *.*

**Définition 2.3.15.** *On dit que* $P$ *possède des petits cycles si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $z \in B(0,\varepsilon)\setminus\{0\}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $P^{\circ n}(z) = P(P(\ldots(P(z))\ldots)) = z$

7. C'est-à-dire que le sous-espace caractéristique associé à cette valeur propre diffère du sous-espace propre.

8. car si $f$ est conjuguée à la rotation irrationnelle, dans un petit voisinage de 0, elle ne peut posséder aucun cycle.

Yoccoz utilise des techniques de chirurgie holomorphe pour démontrer le

**Théorème 2.3.16.** *$P_\lambda(z) = \lambda z - \lambda z^2$ est linéarisable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} < +\infty$. Ce qui prouve que la condition de Brjuno est optimale.*

Dans [Yoc95], Yoccoz utilise le fait que les coefficients de la linéarisante formelle de $P_\lambda$ sont de la forme $\dfrac{P_n(\lambda)}{\prod_{q=1}^{n}(1-\lambda^q)}$ avec $P_n$ polynôme à coefficients entiers pour obtenir diverses informations sur certaines fonctions lorsque l'on tend vers une racine $q$-ième de l'unité. On peut être tenté de réutiliser cette expression pour obtenir une minoration des coefficients de la linéarisante formelle et essayer d'en déduire la non-linéarisabilité de $P_\lambda$.

**Définition 2.3.17.** *On définit la double suite de polynômes $(G_n^k)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ 0 \leqslant k \leqslant n}}$ par :*
*$G_0^0 = 1$, $G_1^0 = 1$, $G_1^1 = 1$, et pour tout $n \geqslant 2$,*
*$G_n^0 = 1$, $G_n^n = 1$ et $\forall k \in [\![1,n-1]\!] \quad G_n^k = G_{n-1}^{k-1} + X^k G_{n-1}^k$.*
*On définit aussi la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par*

$$P_0 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1 \quad P_n = \sum_{k=0}^{n-1} G_{n-1}^k P_k P_{n-1-k}$$

**Remarque 2.3.18.** *Par récurrence immédiate, les $G_n^k$ sont des polynômes à coefficients entiers positifs, ainsi que les $P_n$.*

**Lemme 2.3.19.** $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in [\![0,n]\!] \quad G_n^k = \dfrac{\displaystyle\prod_{q=1}^{n}(1-X^q)}{\displaystyle\prod_{q=1}^{k}(1-X^q)\prod_{q=1}^{n-k}(1-X^q)}$

*Démonstration :*

Le lemme est clairement vrai pour $G_0^0$, $G_1^0$ et $G_1^1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\forall k \in [\![0,n-1]\!] \quad G_{n-1}^k = \dfrac{\displaystyle\prod_{q=1}^{n-1}(1-X^q)}{\displaystyle\prod_{q=1}^{k}(1-X^q)\prod_{q=1}^{n-1-k}(1-X^q)}$

On a $\quad G_n^0 = 1 = \dfrac{\displaystyle\prod_{q=1}^{n}(1-X^q)}{\displaystyle\prod_{q=1}^{0}(1-X^q)\prod_{q=1}^{n}(1-X^q)}$ , $G_n^0 = 1 = \dfrac{\displaystyle\prod_{q=1}^{n}(1-X^q)}{\displaystyle\prod_{q=1}^{n}(1-X^q)\prod_{q=1}^{0}(1-X^q)}$

et pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, on a

$$G_n^k = G_{n-1}^{k-1} + X^k G_{n-1}^k = \frac{\displaystyle\prod_{q=1}^{n-1}(1-X^q)}{\displaystyle\prod_{q=1}^{k-1}(1-X^q)\prod_{q=1}^{(n-1)-(k-1)}(1-X^q)} + X^k \frac{\displaystyle\prod_{q=1}^{n-1}(1-X^q)}{\displaystyle\prod_{q=1}^{k}(1-X^q)\prod_{q=1}^{n-1-k}(1-X^q)}$$

d'où $G_n^k = \dfrac{\displaystyle\prod_{q=1}^{n}(1-X^q)}{\displaystyle\prod_{q=1}^{k}(1-X^q)\prod_{q=1}^{n-k}(1-X^q)}\left(\dfrac{(1-X^k)}{(1-X^n)} + X^k\dfrac{(1-X^{n-k})}{(1-X^n)}\right)$

avec $\dfrac{(1-X^k)}{(1-X^n)} + X^k\dfrac{(1-X^{n-k})}{(1-X^n)} = \dfrac{(1-X^k)}{(1-X^n)} + \dfrac{(X^k-X^n)}{(1-X^n)} = \dfrac{(1-X^n)}{(1-X^n)} = 1$

d'où $G_n^k = \dfrac{\displaystyle\prod_{q=1}^{n}(1-X^q)}{\displaystyle\prod_{q=1}^{k}(1-X^q)\prod_{q=1}^{n-k}(1-X^q)}$ et par récurrence, on en déduit que le lemme est vrai.

$\square$

Notons $\varphi(z) = \displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} b_j(\lambda) z^j$ la linéarisante formelle de $P_\lambda$.

**Proposition 2.3.20.**

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad b_j(\lambda) = \frac{P_{j-1}(\lambda)}{\displaystyle\prod_{q=1}^{j-1}(1-\lambda^q)}$$

*Démonstration :*
D'après la relation (2.5), on a $b_1(\lambda) = 1$ et $b_n(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^n - \lambda} \displaystyle\sum_{r=2}^{n} a_r(\lambda) \sum_{\substack{(j_1,j_2,\dots,j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ \sum_{1\leqslant k\leqslant r} j_k = n}} \prod_{1\leqslant k\leqslant r} b_{j_k}(\lambda)$,

d'où, comme $a_2(\lambda) = -\lambda$ et $a_j(\lambda) = 0$ pour $j \geqslant 3$, $b_n(\lambda) = \dfrac{-\lambda}{\lambda^n - \lambda} \displaystyle\sum_{\substack{(j_1,j_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ j_1 + j_2 = n}} b_{j_1}(\lambda) b_{j_2}(\lambda)$.

On a alors $b_1(\lambda) = 1 = \dfrac{1}{1} = \dfrac{P_0(\lambda)}{\prod_{q=1}^{0}(1-\lambda^q)}$.
Montrons par récurrence que la proposition est vraie.
Soit $j \geqslant 2$ et supposons que $\forall k \in [\![1,j-1]\!]$, $b_k(\lambda) = \dfrac{P_{k-1}(\lambda)}{\prod_{q=1}^{k-1}(1-\lambda^q)}$.

D'après ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
b_j(\lambda) &= \frac{-\lambda}{\lambda^j - \lambda} \sum_{\substack{(j_1,j_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ j_1 + j_2 = j}} b_{j_1}(\lambda) b_{j_2}(\lambda) \\
&= \frac{1}{1-\lambda^{j-1}} \sum_{d=1}^{j-1} b_d(\lambda) b_{j-d}(\lambda) \\
&= \frac{1}{1-\lambda^{j-1}} \, \frac{\prod_{q=1}^{j-2}(1-\lambda^q)}{\prod_{q=1}^{j-2}(1-\lambda^q)} \sum_{d=1}^{j-1} \frac{P_{d-1}(\lambda)}{\prod_{q=1}^{d-1}(1-\lambda^q)} \, \frac{P_{j-d-1}(\lambda)}{\prod_{q=1}^{j-d-1}(1-\lambda^q)} \\
&= \frac{1}{\prod_{q=1}^{j-1}(1-\lambda^q)} \sum_{d=0}^{j-2} \prod_{q=1}^{j-2}(1-\lambda^q) \frac{P_d(\lambda)}{\prod_{q=1}^{d}(1-\lambda^q)} \, \frac{P_{j-2-d}(\lambda)}{\prod_{q=1}^{j-2-d}(1-\lambda^q)} \\
&= \frac{1}{\prod_{q=1}^{j-1}(1-\lambda^q)} \sum_{d=0}^{j-2} G_{j-2}^{d}(\lambda) P_d(\lambda) P_{j-2-d}(\lambda) = \frac{P_{j-1}(\lambda)}{\prod_{q=1}^{j-1}(1-\lambda^q)}
\end{aligned}$$

□

Par récurrence, la propriété est donc vraie.

Grâce à l'expression des $b_j(\lambda)$ donnée dans la proposition 2.3.20, en passant aux valeurs absolues, on obtient une expression permettant une minoration des $|b_j(\lambda)|$. Malheureusement, à cause des polynômes $P_j$, elle n'est pas directement exploitable. On obtient

**Proposition 2.3.21.**

$$\forall j \geqslant 2 \quad |b_j(\lambda)| \geqslant \frac{|P_{j-1}(\lambda)|}{\prod_{q=1}^{j-1} |1-\lambda^q|}$$

Pour pouvoir utiliser cette inégalité pour montrer de façon élémentaire que $\varphi$ est de rayon nul, il faudrait pouvoir minorer $|P_{j-1}(\lambda)|$ et majorer $\prod_{q=1}^{j-1} |1-\lambda^q|$ .

**Remarque 2.3.22.** *Lorsque $j = 1 + q_k$, il est facile d'obtenir une majoration grossière des $\prod_{q=1}^{j-1} |1-\lambda^q|$. En effet, on a $\forall q \in \mathbb{N}^* \quad 0 < |1-\lambda^q| \leqslant |1|+|\lambda^q| \leqslant 1+1 \leqslant 2$, d'où $\prod_{q=1}^{j-1} |1-\lambda^q| \leqslant 2^{j-2}|1-\lambda^{j-1}| \leqslant 2^{j-1}|1-\lambda^{j-1}| \leqslant 2^{q_k}|\lambda^{q_k}-1|$. Or, d'après la théorie des fractions continues, on a $\left|\theta - \frac{p_k}{q_k}\right| \leqslant \frac{1}{q_k q_{k+1}}$, d'où $|\lambda^{q_k}-1| = \left|e^{i2\pi q_k\theta} - e^{i2\pi p_k}\right| \leqslant 2\pi|q_k\theta - p_k| \leqslant 2\pi\frac{1}{q_{k+1}}$, et finalement, $\prod_{q=1}^{j-1} |1-\lambda^q| \leqslant 2\pi\frac{2^{q_k}}{q_{k+1}}$ Et on peut alors en déduire que, lorsque $j = 1 + q_k$,*

$$|b_{1+q_k}(\lambda)| \geqslant \frac{1}{2\pi} \quad \frac{1}{2^{q_k}} \quad q_{k+1} \quad |P_{q_k}(\lambda)| \tag{2.8}$$

**Remarque 2.3.23.** *Pour montrer que $\varphi$ est de rayon nul, il faudrait pouvoir minorer $|P_{q_k}(\lambda)|$, par exemple par 1. On aurait alors*

$$\frac{1}{1+q_k}\ln(|b_{1+q_k}(\lambda)|) \geqslant \frac{1}{2}\frac{1}{q_k}\left(\ln\left(\frac{1}{2\pi}\right) + \ln\left(\frac{1}{2^{q_k}}\right) + \ln\left(q_{k+1}\right)\right)$$

d'où

$$\frac{1}{1+q_k}\ln(|b_{1+q_k}(\lambda)|) \geqslant -\frac{\ln(2\pi)}{2q_k} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k}$$

Ainsi, si $\limsup_{k\to+\infty} \dfrac{\ln(q_{k+1})}{q_k} = +\infty$, on obtiendrait $\varphi$ de rayon nul.

**Remarque 2.3.24.** *Une étude expérimentale réalisée avec MAPLE suggère que l'on a bien* $|P_{q_k}(\lambda)| \geqslant 1$ *et même mieux. Il semble que l'on ait,*

$$\text{pour tout } j \geqslant 3, \quad m_j = \min_{t\in[0,1]} \ln\left(\left|P_j\left(e^{i2\pi t}\right)\right|\right) \text{ est voisin de } j-2,$$

*ce qui permettrait au moins de minorer* $|P_{j-1}(\lambda)|$ *par* 1*, voire plus.*

Voici le programme MAPLE ayant permis d'obtenir ces suppositions:

---

```
>restart:
>mamaxi:=20:
>G[0,0]:=1:G[1,0]:=1:G[1,1]:=1:for n from 2 to mamaxi do G[n,0]:=1:G[n,n]:=1:for
k from 1 to n-1 do G[n,k]:=expand(G[n-1,k-1]+X^k*G[n-1,k]) od: od:
>P[0]:=1:for n from 1 to mamaxi do S:=0: for k from 0 to n-1 do S:=S+G[n-
1,k]*P[k]*P[n-1-k] od: P[n]:=expand(S) od:
>Q:=proc(n,x)
global P;
local rt,res;
rt:=subs(X=x,P[n]);
res:=ln(abs(evalf(rt)));
end;
>for k from 0 to 7 do print(k, poly, P[k]) od;
>for k from 3 to 12 do print(poly, k);plot(Q(k,exp(I*2*Pi*x)),x=0..1,numpoints=
200) od;
```

---

Grâce à ce programme, on a obtenu pour les polynômes $P_j$ :
$P_0 = 1$ , $P_1 = 1$ , $P_2 = 2$ , $P_3 = X + 5$ , $P_4 = 4X^2 + 6X + 14$ , $P_5 = 6X^4 + 16X^3 + 28X^2 + 28X + 42$ , $P_6 = 4X^7 + 32X^6 + 48X^5 + 108X^4 + 128X^3 + 148X^2 + 120X + 132$ , $P_7 = 27X^10 + 89X^9 + 204X^8 + 327X^7 + 536X^6 + 660X^5 + 811X^4 + 756X^3 + 705X^2 + 495X + 429$ ,...

Voici les graphiques obtenus:

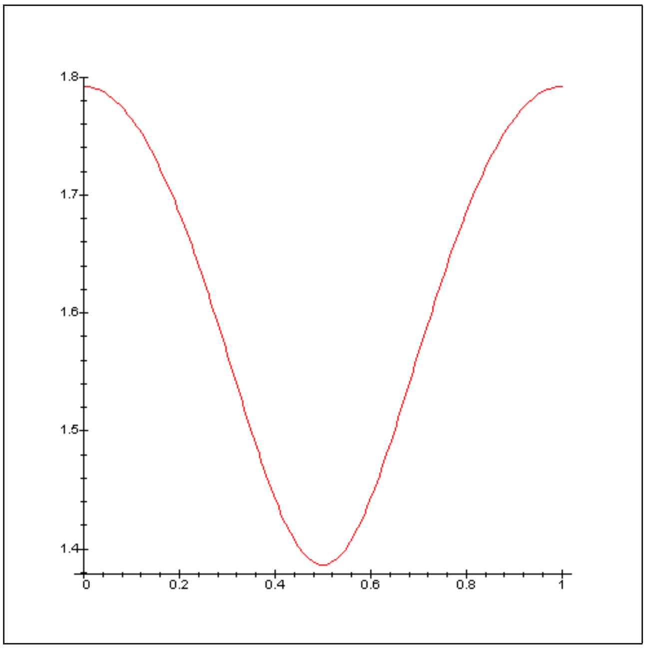


Fig. 2.1 – $t \mapsto \ln(\left|P_3\left(e^{i2\pi t}\right)\right|)$

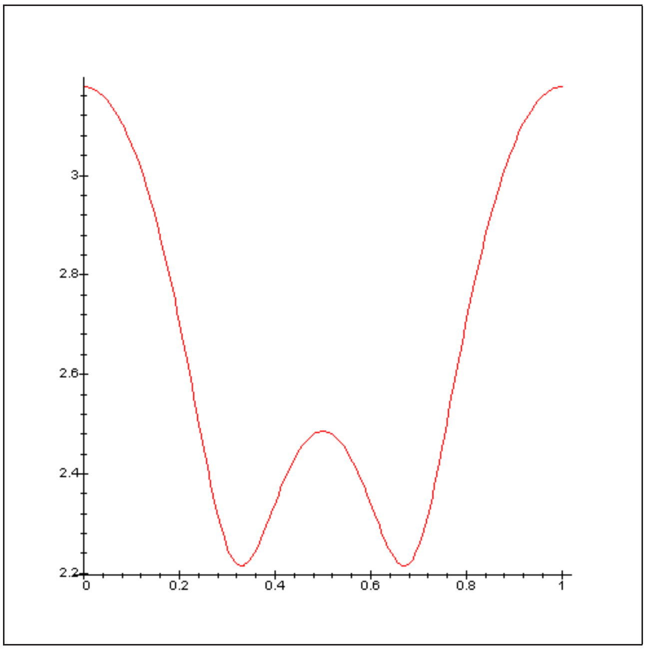


Fig. 2.2 – $t \mapsto \ln(\left|P_4\left(e^{i2\pi t}\right)\right|)$

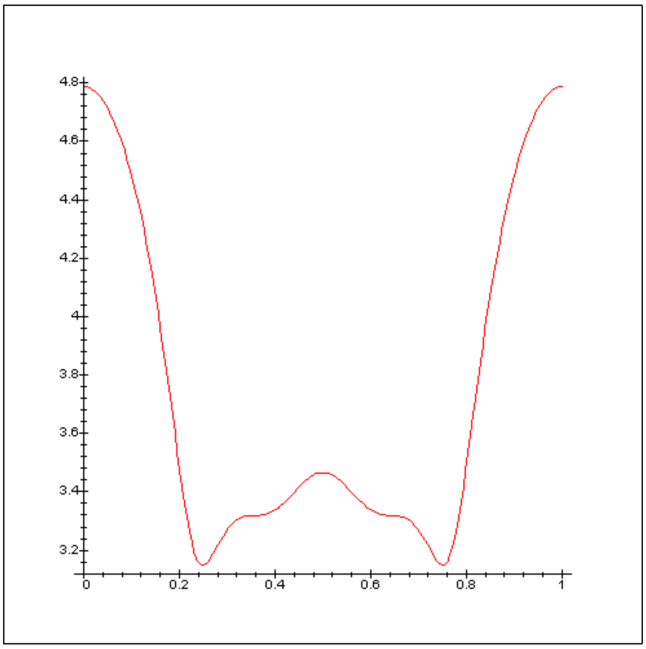


FIG. 2.3 – $t \mapsto \ln(\left|P_5\left(e^{i2\pi t}\right)\right|)$

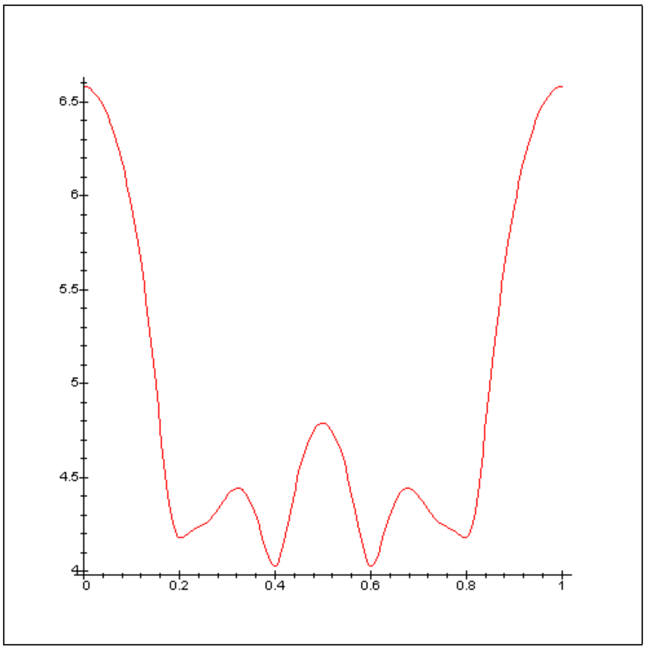


FIG. 2.4 – $t \mapsto \ln(\left|P_6\left(e^{i2\pi t}\right)\right|)$

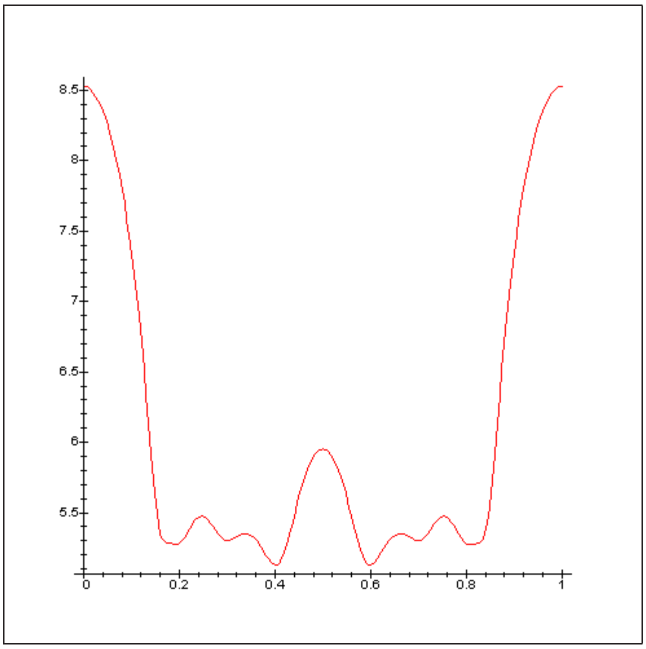


FIG. 2.5 – $t \mapsto \ln(\left|P_7\left(e^{i2\pi t}\right)\right|)$

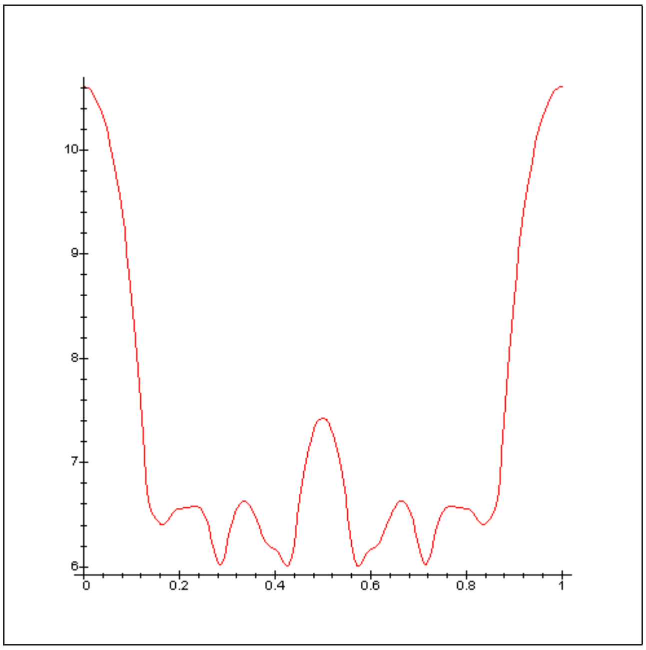


FIG. 2.6 – $t \mapsto \ln(\left|P_8\left(e^{i2\pi t}\right)\right|)$

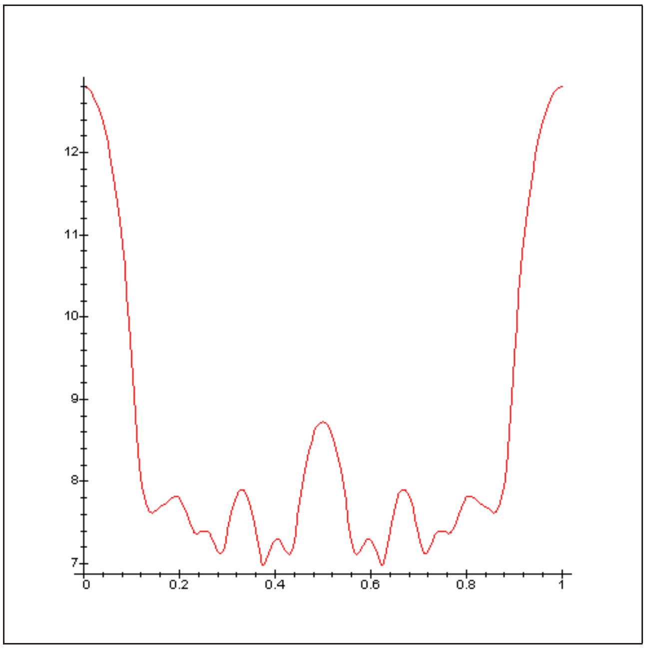


FIG. 2.7 – $t \mapsto \ln(\left|P_9\left(e^{i2\pi t}\right)\right|)$

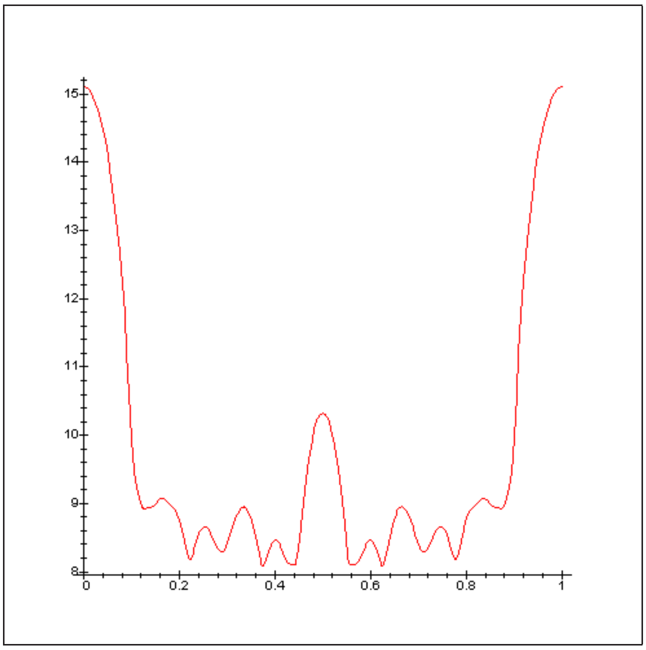


FIG. 2.8 – $t \mapsto \ln(\left|P_{10}\left(e^{i2\pi t}\right)\right|)$

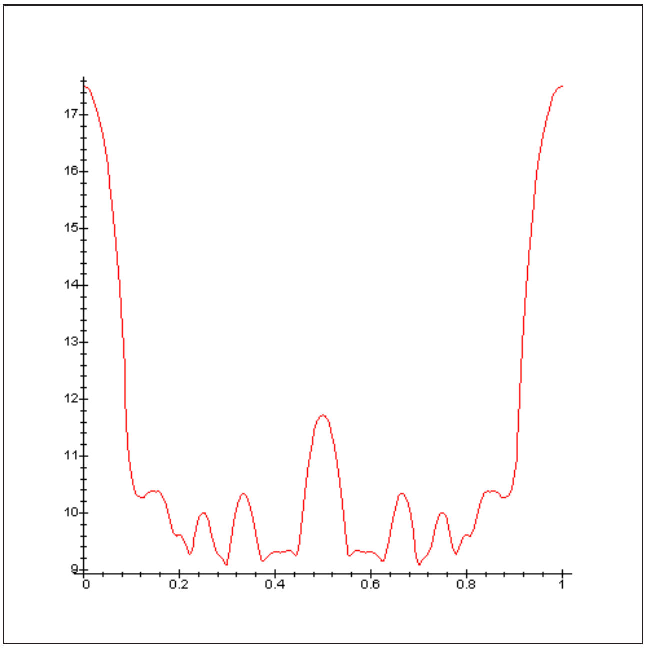


FIG. 2.9 – $t \mapsto \ln(\left|P_{11}\left(e^{i2\pi t}\right)\right|)$

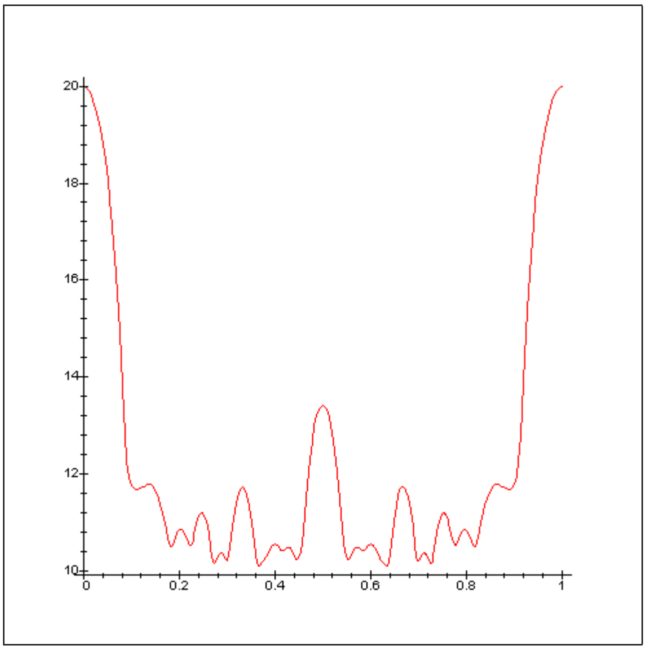


FIG. 2.10 – $t \mapsto \ln(\left|P_{12}\left(e^{i2\pi t}\right)\right|)$

# Chapitre 3

# Diamètre transfini

Comme dans le chapitre précédent, $K$ désignera un sous-corps valué complet de $\widetilde{K}$. Ce chapitre est destiné à prouver que l'on peut généraliser la notion de diamètre transfini au cadre $p$-adique, ce qui nous permettra au prochain chapitre de démontrer l'analogue du théorème de Perez-Marco dans le cadre $p$-adique. Certaines propositions connues dans $\mathbb{C}$ se généralisent à n'importe quel sous-corps valué complet $K$ de $\widetilde{K}$, par contre d'autres nécessitent que $K$ soit localement compact. Nous indiquerons explicitement lesquelles de ces propositions utilisent la locale-compacité. *(Remarque: lorsque $K$ est un sous-corps valué complet localement compact de $\mathbb{C}_p$, forcément $K$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ )*

## 3.1 Définition du diamètre transfini d'un compact

Dans toute cette section, $E$ désigne un compact non vide de $K$.

**Définition 3.1.1.** *Pour tout $n \geqslant 2$, on pose*

$$\Delta_n(E) = \max_{z_1,z_2,\ldots,z_n \in E} \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu = 1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu|$$

*Dans le produit ci-dessus, il y a $n^2 - n$ termes*[1]*. On normalise alors en posant*

$$\delta_n(E) = \Delta_n(E)^{\frac{1}{n(n-1)}}$$

1. car $(\mu,\nu) \in [[1,n]] \times [[1,n]] \setminus$ *diagonale*.

**Remarque 3.1.2.** *Comme $E$ est borné, pour tout $n \geqslant 2$, on a*[2]

$$0 \leqslant \Delta_n(E) \leqslant \operatorname{diam}(E)^{n^2-n} < +\infty \qquad et \qquad 0 \leqslant \delta_n(E) \leqslant \operatorname{diam}(E) < +\infty$$

**Définition 3.1.3.** *On appelle $n-$uplet de Fekete tout point $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de $E^n$ vérifiant*

$$\Delta_n(E) = \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} |x_\mu - x_\nu|$$

**Proposition 3.1.4.** *La suite $(\delta_n(E))_{n \geqslant 2}$ est décroissante et minorée par 0. (et majorée par diam(E))*

*Elle converge donc vers un nombre réel que nous noterons d(E) et que nous appellerons diamètre transfini vérifiant $0 \leqslant$d(E)$\leqslant$ diam(E)*

*On convient aussi de poser d($\emptyset$)=0=diam($\emptyset$).*

*Démonstration :*

Soit $n \geqslant 2$.

<u>1^er cas :</u> $\Delta_{n+1}(E) = 0$
On a alors clairement : $\delta_{n+1}(E) = 0 \leqslant \delta_n(E)$ .

<u>2^ème cas :</u> $\Delta_{n+1}(E) > 0$
L'ensemble $E$ contient alors au moins $n+1$ points distincts et par conséquent, on a aussi $\Delta_n(E) > 0$.
Soit $x = (x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$ un $(n+1)-$uplet de Fekete.

Choisissons $k_0 \in [\![1,n+1]\!]$ de telle sorte que $\displaystyle\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$ soit minimal.

2. Etant donné que $E$ est borné, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $E \subseteq B_f(0,r)$ et, pour tout $z_1,z_2 \in E$, on a $|z_2 - z_1| \leqslant |z_2| + |z_1| \leqslant r + r$, d'où diam$(E)= \sup\limits_{z_1,z_2 \in E} |z_2 - z_1| \leqslant 2r < +\infty$, d'où

$$\max_{z_1,z_2,\ldots,z_n \in E} \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| \leqslant \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} \operatorname{diam}(E) \leqslant \operatorname{diam}(E)^{n^2-n} < +\infty$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
\Delta_{n+1}(E) &\leqslant \prod_{\mu=1}^{n+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{n+1} |x_\mu - x_\nu| \\
&\leqslant \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq k_0}}^{n+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu \\ \nu\neq k_0}}^{n+1} |x_\mu - x_\nu| \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq k_0}}^{n+1} |x_\mu - x_{k_0}| \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu| \\
&\leqslant \Delta_n(E) \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|^2
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\left(\frac{\Delta_{n+1}(E)}{\Delta_n(E)}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu| \tag{3.1}
$$

On a aussi, par définition de $k_0$,

$$
\forall k \in [\![1,n+1]\!] \qquad \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu| \leqslant \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq k}}^{n+1} |x_k - x_\nu|
$$

d'où

$$
\prod_{k=1}^{n+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu| \leqslant \prod_{k=1}^{n+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq k}}^{n+1} |x_k - x_\nu|
$$

i.e.

$$
\left(\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|\right)^{n+1} \leqslant \Delta_{n+1}(E)
$$

i.e.

$$
\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu| \leqslant \Delta_{n+1}(E)^{\frac{1}{n+1}} \tag{3.2}
$$

De (3.1) et (3.2) , on déduit que

$$\left(\frac{\Delta_{n+1}(E)}{\Delta_n(E)}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Delta_{n+1}(E)^{\frac{1}{n+1}}$$

d'où

$$\Delta_{n+1}(E)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}} \leqslant \Delta_n(E)^{\frac{1}{2}}$$

i.e.

$$\Delta_{n+1}(E)^{\frac{n-1}{2(n+1)}} \leqslant \Delta_n(E)^{\frac{1}{2}}$$

d'où, en élevant à la puissance $\frac{2}{n(n-1)}$ ,

$$\Delta_{n+1}(E)^{\frac{1}{n(n+1)}} \leqslant \Delta_n(E)^{\frac{1}{(n-1)n}}$$

i.e.

$$\delta_{n+1}(E) \leqslant \delta_n(E)$$

Par conséquent, la suite $(\delta_n(E))_{n\geqslant 2}$ est décroissante et minorée par 0 et on peut poser

$$\mathrm{d}(E)= \lim_{n\to+\infty} \delta_n(E)$$

**Remarque 3.1.5.** *Si $E$ est un sous-ensemble fini non vide de $K$, alors, $E$ est un compact et $\forall n \geqslant 1+\mathrm{card}(E) \quad \Delta_n(E)=0$.*
*Par conséquent, pour tout sous-ensemble fini de $K$, on a d(E)=0.*

*Si $E$ est un compact de $K$ contenant une infinité de points, alors,*
$\forall n \geqslant 2 \qquad \Delta_n(E) > 0$

**Proposition 3.1.6.** *On a aussi*
1. *Si $E$ et $F$ sont deux compacts de $K$ vérifiant $E \subseteq F$, alors d(E) $\leqslant$ d(F)*
2. *Si $E$ est un compact de $K$ et si $b \in K$, alors d($E+b$)= d(E)*
3. *Si $E$ est un compact de $K$ et si $a \in K$, alors d(aE)=$|a|$ d(E)*
4. *Si $E$ est un compact de $K$, si $r \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\varphi : K \longrightarrow K$ vérifie*
   $\forall x \in K \quad \forall y \in K \qquad |\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant r\ |x-y|$ ,
   *alors* $\quad d(\varphi(E)) \leqslant r\ d(E)$

*Démonstration :*

1. Si $E$ et $F$ sont deux compacts de $K$ vérifiant $E \subseteq F$, alors, par propriété du max, on a, pour tout $n \geqslant 2$, $\Delta_n(E) \leqslant \Delta_n(F)$, d'où $\delta_n(E) \leqslant \delta_n(F)$, d'où finalement $\mathrm{d}(E) \leqslant \mathrm{d}(F)$.

2. Si $E$ est un compact de $K$ et si $b \in K$, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta_n(E+b) &= \max_{z_1,z_2,\ldots,z_n \in E+b} \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| \\
&= \max_{z_1,z_2,\ldots,z_n \in E} \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} |(z_\mu + b) - (z_\nu + b)| \\
&= \max_{z_1,z_2,\ldots,z_n \in E} \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| \\
&= \Delta_n(E)
\end{aligned}$$

d'où $\delta_n(E+b) = \delta_n(E)$, d'où finalement $\mathrm{d}(E+b) = \mathrm{d}(E)$.

3. Si $E$ est un compact de $K$ et si $a \in K$, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta_n(aE) &= \max_{z_1,z_2,\ldots,z_n \in aE} \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| \\
&= \max_{z_1,z_2,\ldots,z_n \in E} \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} |az_\mu - az_\nu| \\
&= |a|^{n^2-n} \max_{z_1,z_2,\ldots,z_n \in E} \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| \\
&= |a|^{n^2-n} \Delta_n(E)
\end{aligned}$$

d'où $\delta_n(aE) = |a|\delta_n(E)$, d'où finalement $\mathrm{d}(aE) = |a|\ \mathrm{d}(E)$.

4. Si $E$ est un compact de $K$, si $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\varphi : K \longrightarrow K$ vérifie

$$\forall x \in K \quad \forall y \in K \qquad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant r\ |x-y|$$

Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta_n(\varphi(E)) &= \max_{z_1,z_2,\dots,z_n\in\varphi(E)} \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| \\
&= \max_{z_1,z_2,\dots,z_n\in E} \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} |\varphi(z_\mu) - \varphi(z_\nu)| \\
&\leqslant \max_{z_1,z_2,\dots,z_n\in E} \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} r\,|z_\mu - z_\nu| \\
&\leqslant r^{n^2-n} \max_{z_1,z_2,\dots,z_n\in E} \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| \\
&\leqslant r^{n^2-n}\Delta_n(E)
\end{aligned}$$

d'où $\delta_n(\varphi(E)) \leqslant r\delta_n(E)$, d'où finalement $\mathrm{d}(\varphi(E)) \leqslant r\ \mathrm{d}(E)$.

**Théorème 3.1.7.** *Soit $E$ un compact non vide de $K$.*
*Soit $n \geqslant 2$ et soit $x = (x_1,x_2,\dots,x_{n+1})$ un $(n+1)-$ uplet de Fekete.*
*Choisissons $k_0 \in [\![1,n+1]\!]$ de telle sorte que $\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$ soit minimal.*
*Il existe alors $P \in K[X]$ polynôme unitaire de degré $n$ vérifiant*

$$\max_{z\in E} |P(z)| \leqslant \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$$

*Démonstration :*

- 1er cas: $E$ possède au plus $n$ points $y_1,y_2,\dots,y_j$.

Si $j < n$, on pose $y_{j+1} = y_{j+2} = \cdots = y_n = y_j$. On pose ensuite $P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - y_k)$ et on vérifie que $\max_{z\in E} |P(z)| = 0 \leqslant \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$

• 2ème cas: $E$ possède au moins $n+1$ points.

On a alors $\Delta_n(E)>0$ et $\Delta_{n+1}(E)>0$. Soit $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ un $n-$ uplet de Fekete. Posons $P(X)=\prod_{k=1}^{n}(X-y_k)$. On a $P\in K[X]$ et P est un polynôme unitaire de degré $n$. De plus, on a $\Delta_n(E)=\prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n}|y_\mu-y_\nu|$

Soit $z\in E$. Posons $y_{n+1}=z$. On a

$$\begin{aligned}
|P(z)|^2(\Delta_n(E)) &= |P(z)|^2 \prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n}|y_\mu-y_\nu| \\
&= \prod_{k=1}^{n}|z-y_k|^2 \prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n}|y_\mu-y_\nu| \\
&= \prod_{\nu=1}^{n}|y_{n+1}-y_\nu| \prod_{\mu=1}^{n}|y_\mu-y_{n+1}| \prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n}|y_\mu-y_\nu| \\
&= \prod_{\mu=1}^{n+1}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n+1}|y_\mu-y_\nu| \\
&\leqslant \Delta_{n+1}(E)
\end{aligned}$$

De plus, comme $\Delta_n(E)>0$ , on a

$$|P(z)|\leqslant\left(\frac{\Delta_{n+1}(E)}{\Delta_n(E)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

Or, d'après le (3.1) de la proposition 3.1.4, on a

$$\left(\frac{\Delta_{n+1}(E)}{\Delta_n(E)}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k_0}}^{n+1}|x_{k_0}-x_\nu|$$

Par conséquent, on déduit de ce qui précède que

$$|P(z)| \leqslant \left(\frac{\Delta_{n+1}(E)}{\Delta_n(E)}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0}-x_\nu|$$

d'où

$$|P(z)| \leqslant \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0}-x_\nu| \tag{3.4}$$

Ceci étant vrai pour tout $z \in E$, on a

$$\max_{z\in E}|P(z)| \leqslant \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0}-x_\nu|$$

**Lemme 3.1.8.** *Soit $n \geqslant 2$ et soit $z_1,z_2,\ldots,z_n \in K$.*
*On a*

$$\prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| = \left|\left(\begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & {z_1}^3 & \ldots & {z_1}^{n-1}\\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & {z_2}^3 & \ldots & {z_2}^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & z_n & {z_n}^2 & {z_n}^3 & \ldots & {z_n}^{n-1}\end{vmatrix}\right)\right|^2$$

*(la notation ci-dessus signifie que l'on élève au carré la valeur absolue du déterminant.)*

*Démonstration :*

On a

$$\begin{aligned}\prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| &= \prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu<\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| \prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu>\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| \\ &= \prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu<\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| \prod_{\nu=1}^{n}\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu<\nu}}^{n} |z_\nu - z_\mu| \\ &= \left(\prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu<\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu|\right)^2 \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Montrons que

$$\prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu<\mu}}^{n} (z_\mu - z_\nu) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & {z_1}^3 & \dots & {z_1}^{n-1} \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & {z_2}^3 & \dots & {z_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & {z_n}^2 & {z_n}^3 & \dots & {z_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Pour cela, considérons, pour tout $m \in [\![2,n]\!]$,

la propriété $\mathcal{P}(\mathrm{m})$ : $\left\{ \prod_{\mu=1}^{m} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu<\mu}}^{m} (z_\mu - z_\nu) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & {z_1}^3 & \dots & {z_1}^{m-1} \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & {z_2}^3 & \dots & {z_2}^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_m & {z_m}^2 & {z_m}^3 & \dots & {z_m}^{m-1} \end{vmatrix} \right\}$.

$\mathcal{P}(2)$ est vraie car $\prod_{\mu=1}^{2} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu<\mu}}^{2} (z_\mu - z_\nu) = (z_2 - z_1) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{vmatrix}$.

Soit $m \in [\![2,n-1]\!]$ et supposons que $\mathcal{P}(\mathrm{m})$ est vraie

Posons $A_{m+1} = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & \dots & {z_1}^{m-1} & {z_1}^m \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & \dots & {z_2}^{m-1} & {z_2}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{m+1} & {z_{m+1}}^2 & \dots & {z_{m+1}}^{m-1} & {z_{m+1}}^m \end{vmatrix}$

En remplaçant la dernière colonne par la dernière colonne moins $z_{m+1}$ fois l'avant-dernière, puis l'avant-dernière par l'avant-dernière moins $z_{m+1}$ fois l'avant-avant-dernière, etc ... , puis en développant suivant la dernière ligne et enfin en factorisant, on obtient :

$$
\begin{aligned}
A_{m+1} &= \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & \dots & {z_1}^{m-1} & {z_1}^m \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & \dots & {z_2}^{m-1} & {z_2}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{m+1} & {z_{m+1}}^2 & \dots & {z_{m+1}}^{m-1} & {z_{m+1}}^m \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & \dots & {z_1}^{m-1} & {z_1}^{m-1}(z_1 - z_{m+1}) \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & \dots & {z_2}^{m-1} & {z_2}^{m-1}(z_2 - z_{m+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{m+1} & {z_{m+1}}^2 & \dots & {z_{m+1}}^{m-1} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & \dots & {z_1}^{m-2}(z_1 - z_{m+1}) & {z_1}^{m-1}(z_1 - z_{m+1}) \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & \dots & {z_2}^{m-2}(z_2 - z_{m+1}) & {z_2}^{m-1}(z_2 - z_{m+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{m+1} & {z_{m+1}}^2 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&= \begin{vmatrix} 1 & (z_1 - z_{m+1}) & z_1(z_1 - z_{m+1}) & \dots & {z_1}^{m-2}(z_1 - z_{m+1}) & {z_1}^{m-1}(z_1 - z_{m+1}) \\ 1 & (z_2 - z_{m+1}) & z_2(z_2 - z_{m+1}) & \dots & {z_2}^{m-2}(z_2 - z_{m+1}) & {z_2}^{m-1}(z_2 - z_{m+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{m+2} \begin{vmatrix} (z_1 - z_{m+1}) & (z_1 - z_{m+1})z_1 & (z_1 - z_{m+1}){z_1}^2 & \dots & (z_1 - z_{m+1}){z_1}^{m-1} \\ (z_2 - z_{m+1}) & (z_2 - z_{m+1})z_2 & (z_2 - z_{m+1}){z_2}^2 & \dots & (z_2 - z_{m+1}){z_2}^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (z_m - z_{m+1}) & (z_m - z_{m+1})z_m & (z_m - z_{m+1}){z_m}^2 & \dots & (z_m - z_{m+1}){z_m}^{m-1} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^m (z_1 - z_{m+1})(z_2 - z_{m+1})\dots(z_m - z_{m+1}) \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & \dots & {z_1}^{m-1} \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & \dots & {z_2}^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_m & {z_m}^2 & \dots & {z_m}^{m-1} \end{vmatrix} \\
&= (z_{m+1} - z_1)(z_{m+1} - z_2)\dots(z_{m+1} - z_m) \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & \dots & {z_1}^{m-1} \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & \dots & {z_2}^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_m & {z_m}^2 & \dots & {z_m}^{m-1} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

En utilisant la relation de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= \prod_{\nu=1}^{m}(z_{m+1}-z_\nu) \prod_{\mu=1}^{m} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu<\mu}}^{m} (z_\mu - z_\nu) \\ &= \prod_{\mu=1}^{m+1} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu<\mu}}^{m+1} (z_\mu - z_\nu) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}$(m+1) est vraie.
Par récurrence, on en déduit alors que

$$\prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu<\mu}}^{n} (z_\mu - z_\nu) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & {z_1}^3 & \dots & {z_1}^{n-1} \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & {z_2}^3 & \dots & {z_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & {z_n}^2 & {z_n}^3 & \dots & {z_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

d'où, en passant aux valeurs absolues,

$$\prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu<\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| = \left| \left( \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & {z_1}^3 & \dots & {z_1}^{n-1} \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & {z_2}^3 & \dots & {z_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & {z_n}^2 & {z_n}^3 & \dots & {z_n}^{n-1} \end{vmatrix} \right) \right|$$

d'où, en élevant au carré,

$$\left( \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu<\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| \right)^2 = \left| \left( \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & {z_1}^3 & \dots & {z_1}^{n-1} \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & {z_2}^3 & \dots & {z_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & {z_n}^2 & {z_n}^3 & \dots & {z_n}^{n-1} \end{vmatrix} \right) \right|^2$$

d'où, d'après (3.5)

$$\prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| = \left| \left( \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & {z_1}^3 & \dots & {z_1}^{n-1} \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & {z_2}^3 & \dots & {z_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & {z_n}^2 & {z_n}^3 & \dots & {z_n}^{n-1} \end{vmatrix} \right) \right|^2$$

**Théorème 3.1.9.** *Soit $E$ un compact de $K$ et soit $P \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geqslant 1$.*

*On a alors*

$$(\mathrm{d}(E))^n \leqslant \max_{z\in E} |P(z)|$$

*Démonstration :*

Si d($E$)=0, c'est évident.

On suppose désormais que $\mathrm{d}(E) > 0$. L'ensemble $E$ est alors infini et, pour tout $k \geqslant 2$, $\Delta_k(E) > 0$.

Posons $M = \max_{z\in E} |P(z)|$. Si $M = 0$, $E$ est un ensemble fini et le résultat est trivial. On supposera donc désormais que $M > 0$.

Soit $a$ un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout $\mu \in \mathbb{N}$, notons $k_\mu$ le quotient de la division euclidienne de $\mu$ par $n$ et $r_\mu$ le reste de la division euclidienne de $\mu$ par $n$.

On a, pour tout $\mu \in \mathbb{N}$,

$$\mu = k_\mu n + r_\mu \qquad , \qquad 0 \leqslant r_\mu < n \qquad \text{et} \qquad k_\mu n \leqslant \mu < (k_\mu + 1)n.$$

Pour tout $\mu \in \mathbb{N}$, posons aussi

$$P_\mu(X) = X^{r_\mu}(P(X))^{k_\mu}$$

$P_\mu(X)$ est alors un polynôme unitaire de degré $r_\mu + k_\mu n = \mu$ qui s'écrit sous la forme[3]

$$P_\mu(X) = X^\mu + \sum_{k=0}^{\mu-1} a_{\mu,k} X^k \qquad \text{avec les } a_{\mu,k} \text{ dans } K$$

Posons $m = an$.

Soit $z = (z_1,z_2,\dots,z_m)$ un $m-$ uplet de Fekete.

On a

$$\Delta_m(E) = \prod_{\mu=1}^{m} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{m} |z_\mu - z_\nu| = \left| \begin{pmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & {z_1}^3 & \dots & {z_1}^{m-1} \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & {z_2}^3 & \dots & {z_2}^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_m & {z_m}^2 & {z_m}^3 & \dots & {z_m}^{m-1} \end{pmatrix} \right|^2$$

3. avec $P_0(X) = 1$.

C'est-à-dire, en posant $A_m = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & {z_1}^3 & \dots & {z_1}^{m-2} & {z_1}^{m-1} \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & {z_2}^3 & \dots & {z_2}^{m-2} & {z_2}^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_m & {z_m}^2 & {z_m}^3 & \dots & {z_m}^{m-2} & {z_m}^{m-1} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_m(E) \leqslant |A_m|^2 \tag{3.6}$$

Comme $P_{m-1}(X) = X^{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} a_{m-1,k} X^k$, en remplaçant dans le déterminant la dernière colonne par la dernière colonne plus $a_{m-1,0}$ fois la première colonne plus $a_{m-1,1}$ fois la deuxième colonne plus $a_{m-1,2}$ fois la troisième colonne plus ... plus $a_{m-1,m-2}$ fois l'avant dernière colonne, on obtient

$$A_m = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & {z_1}^3 & \dots & {z_1}^{m-2} & P_{m-1}(z_1) \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & {z_2}^3 & \dots & {z_2}^{m-2} & P_{m-1}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_m & {z_m}^2 & {z_m}^3 & \dots & {z_m}^{m-2} & P_{m-1}(z_m) \end{vmatrix}$$

Comme $P_{m-2}(X) = X^{m-2} + \sum_{k=0}^{m-3} a_{m-2,k} X^k$, en remplaçant dans le déterminant l'avant-dernière colonne par l'avant-dernière colonne plus $a_{m-2,0}$ fois la première colonne plus $a_{m-2,1}$ fois la deuxième colonne plus $a_{m-2,2}$ fois la troisième colonne plus ... plus $a_{m-2,m-3}$ fois l'avant-avant-dernière colonne, on obtient

$$A_m = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & {z_1}^2 & {z_1}^3 & \dots & P_{m-2}(z_1) & P_{m-1}(z_1) \\ 1 & z_2 & {z_2}^2 & {z_2}^3 & \dots & P_{m-2}(z_2) & P_{m-1}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_m & {z_m}^2 & {z_m}^3 & \dots & P_{m-2}(z_m) & P_{m-1}(z_m) \end{vmatrix}$$

Etc ...

d'où

$$A_m = \begin{vmatrix} 1 & P_1(z_1) & P_2(z_1) & P_3(z_1) & \dots & P_{m-2}(z_1) & P_{m-1}(z_1) \\ 1 & P_1(z_2) & P_2(z_2) & P_3(z_2) & \dots & P_{m-2}(z_2) & P_{m-1}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & P_1(z_m) & P_2(z_m) & P_3(z_m) & \dots & P_{m-2}(z_m) & P_{m-1}(z_m) \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$A_m = \begin{vmatrix} P_0(z_1) & P_1(z_1) & P_2(z_1) & \dots & P_{m-2}(z_1) & P_{m-1}(z_1) \\ P_0(z_2) & P_1(z_2) & P_2(z_2) & \dots & P_{m-2}(z_2) & P_{m-1}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_0(z_m) & P_1(z_m) & P_2(z_m) & \dots & P_{m-2}(z_m) & P_{m-1}(z_m) \end{vmatrix} \tag{3.7}$$

Comme $E$ est compact, $E$ est borné et il exite $R \in ]1,+\infty[$ tel que $E \subseteq B_f(0,R)$. Pour tout $z \in E$ et tout $\mu \in [\![0,m-1]\!]$, en utilisant le fait que $E \subseteq B_f(0,R)$ et $0 \leqslant r_\mu \leqslant n$, on a

$$|P_\mu(z)| \leqslant R^{r_\mu}|P(z)|^{k_\mu} \leqslant R^n|P(z)|^{k_\mu} \tag{3.8}$$

Soit $\mu \in [\![0,m-1]\!]$, $q \in [\![0,m-1]\!]$ et soit $\sigma$ une permutation de $[\![0,m-1]\!]$. D'après la relation précédente, on a

$$|P_\mu(z_{\sigma(q)})| \leqslant R^n|P(z_{\sigma(q)})|^{k_\mu} \tag{3.9}$$

et, en utilisant le fait que $z_{\sigma(q)} \in E$, on obtient,

$$|P(z_{\sigma(q)})| \leqslant \max_{z\in E}|P(z)|$$

d'où, par définition de $M$ et par croissance sur $\mathbb{R}_+$ de $t \longmapsto t^{k_\mu}$,

$$|P(z_{\sigma(q)})|^{k_\mu} \leqslant \left(\max_{z\in E}|P(z)|\right)^{k_\mu} = M^{k_\mu}$$

d'où, d'après (3.9),

$$|P_\mu(z_{\sigma(q)})| \leqslant R^n M^{k_\mu} \tag{3.10}$$

Pour achever cette démonstration, on va devoir séparer les cas complexes et $p$-adiques, car ce sont des arguments différents qui vont nous permettre d'obtenir les majorations voulues et de conclure.

• si $\widetilde{K} = \mathbb{C}$, grâce à l'inégalité de Hadamard, en notant $||.||$ la norme hermitienne standard et en notant $X_\mu = \begin{pmatrix} P_\mu(z_1) \\ P_\mu(z_2) \\ P_\mu(z_3) \\ \vdots \\ P_\mu(z_m) \end{pmatrix}$, on a

$$|A_m| \leqslant ||X_0|| \quad ||X_1|| \quad ||X_2|| \quad \dots \quad ||X_{m-1}|| \tag{3.11}$$

or, pour tout $\mu \in [\![0,m-1]\!]$, grâce à (3.10) avec $\sigma = I_d$, on a

$$\begin{aligned} ||X_\mu||^2 &\leqslant |P_\mu(z_1)|^2 + |P_\mu(z_2)|^2 + |P_\mu(z_3)|^2 + \dots + |P_\mu(z_{m-1})|^2 \\ &\leqslant R^{2n}M^{2k_\mu} + R^{2n}M^{2k_\mu} + R^{2n}M^{2k_\mu} + \dots + R^{2n}M^{2k_\mu} \\ &\leqslant mR^{2n}M^{2k_\mu} \end{aligned}$$

d'où

$$|A_m|^2 \quad \leqslant \quad mR^{2n}M^{2k_0} \quad mR^{2n}M^{2k_1} \quad mR^{2n}M^{2k_2} \quad \dots \quad mR^{2n}M^{2k_{m-1}}$$

et on obtient ainsi, en utilisant (3.6)

$$\Delta_m(E) \leqslant |A_m|^2 \leqslant m^m R^{2mn} M^{2(k_0+k_1+k_2+\dots k_{m-1})} \tag{3.12}$$

• si $\widetilde{K} = \mathbb{C}_p$, on a, grâce à l'inégalité ultramétrique,

$$\begin{aligned} |A_m| &= \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \epsilon(\sigma) P_0(z_{\sigma(0)}) P_1(z_{\sigma(1)}) P_2(z_{\sigma(2)}) \dots P_{m-1}(z_{\sigma(m-1)}) \right| \\ &\leqslant \max_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \left( |\epsilon(\sigma)| |P_0(z_{\sigma(0)})| |P_1(z_{\sigma(1)})| |P_2(z_{\sigma(2)})| \dots |P_{m-1}(z_{\sigma(m-1)})| \right) \end{aligned}$$

Or $|\varepsilon(\sigma)| = 1$ et grâce à (3.10), on a $|P_\mu(z_{\sigma(q)})| \leqslant R^n M^{k_\mu}$, d'où

$$|A_m| \leqslant 1.R^n M^{k_0}.R^n M^{k_1}.R^n M^{k_2} \dots .R^n M^{k_{m-1}}$$

On obtient alors

$$|A_m| \leqslant R^{mn} M^{k_0+k_1+k_2+\dots+k_{m-1}}$$

d'où,

$$\Delta_m(E) \leqslant |A_m|^2 \leqslant R^{2mn} M^{2(k_0+k_1+k_2+\dots k_{m-1})} \leqslant m^m R^{2mn} M^{2(k_0+k_1+k_2+\dots k_{m-1})}$$

• Suite de la démonstration (commune aux cas complexe et $p$-adique)

Dans les deux cas, on a donc

$$\Delta_m(E) \leqslant m^m R^{2mn} M^{2(k_0+k_1+k_2+\dots k_{m-1})} \tag{3.13}$$

Or

$$k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = 0$$

$$k_n = k_{n+1} = k_{n+2} = \cdots = k_{2n-1} = 1$$

$$k_{2n} = k_{2n+1} = k_{2n+2} = \cdots = k_{3n-1} = 2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$k_{(a-1)n} = k_{(a-1)n+1} = k_{(a-1)n+2} = \cdots = k_{an-1} = a - 1$$

d'où

$$k_0 + k_1 + k_2 + \cdots + k_{m-1} = n \sum_{j=0}^{a-1} j = n\frac{a(a-1)}{2}$$

On déduit alors de (3.13) que

$$\Delta_m(E) \leqslant m^m R^{2mn} M^{2(k_0+k_1+k_2+\dots k_{m-1})} \leqslant m^m \;\; R^{2nm} \;\; M^{na(a-1)} \tag{3.14}$$

d'où, comme $m = an$,

$$\Delta_{an}(E) \leqslant (an)^{an} \;\; R^{2nan} \;\; M^{na(a-1)}$$

d'où, en élevant à la puissance $\frac{1}{(an)(an-1)}$,

$$\Delta_{an}(E)^{\frac{1}{(an)(an-1)}} \leqslant (an)^{\frac{an}{(an)(an-1)}} . R^{\frac{2nan}{(an)(an-1)}} . M^{\frac{na(a-1)}{(an)(an-1)}} \tag{3.15}$$

c'est-à-dire

$$\delta_{an}(E) \leqslant (an)^{\frac{1}{an-1}} . R^{\frac{2n}{an-1}} . M^{\frac{(a-1)}{an-1}} \tag{3.16}$$

Or

$$\delta_{an}(E) \xrightarrow[a \longrightarrow +\infty]{} d(E)$$

et

$$(an)^{\frac{1}{an-1}} = e^{\frac{1}{an-1}\ln(an)} \xrightarrow[a \longrightarrow +\infty]{} e^0 = 1$$

et

$$R^{\frac{2n}{an-1}} = e^{\frac{2n}{an-1}\ln(R)} \xrightarrow[a \longrightarrow +\infty]{} e^0 = 1$$

et

$$M^{\frac{(a-1)}{an-1}} = e^{\frac{(a-1)}{an-1}\ln(M)} \xrightarrow[a \longrightarrow +\infty]{} e^{\frac{1}{n}\ln(M)} = M^{\frac{1}{n}}$$

d'où finalement, en faisant tendre $a$ vers $+\infty$ dans (3.16)

$$d(E) \leqslant M^{\frac{1}{n}}$$

i.e.

$$d(E)^n \leqslant M$$

i.e.

$$d(E)^n \leqslant \max_{z \in E} |P(z)|$$

$\square$

**Théorème 3.1.10.** *Soit $E$ un compact de $K$ tel que $d(E) > 0$.*
*Soit $R \in ]0, +\infty[$ tel que $E \subseteq B_f(0,R)$. Soit $n \geqslant 2$.*
*Soit $P \in K[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$.*

*On a alors, pour tout $z \in K$,*

- *si $\widetilde{K} = \mathbb{C}$ , alors* $|P(z)| \leqslant \max\limits_{a \in E} |P(a)| \quad \left(\dfrac{2}{d(E)}\right)^n \ \Big(|z| + R\Big)^n$
- *si $\widetilde{K} = \mathbb{C}_p$ , alors*

$$\begin{aligned} |P(z)| &\leqslant \max_{a \in E} |P(a)| \quad \left(\frac{1}{d(E)}\right)^n \ \Big(\max(|z|,R)\Big)^n \\ &\leqslant \max_{a \in E} |P(a)| \quad \left(\frac{2}{d(E)}\right)^n \ \Big(|z| + R\Big)^n \end{aligned}$$

*Démonstration :*

Comme $d(E) > 0$, E est un ensemble infini et $\Delta_n(E) > 0$ et $\Delta_{n+1}(E) > 0$. Soit $x = (x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$ un $(n+1)-$uplet de Fekete.

choisissons $k_0 \in [\![1,n+1]\!]$ de telle sorte que $\displaystyle\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$ soit minimal.

D'après le théorème 3.1.7, il existe alors $Q \in K[X]$ polynôme unitaire de degré $n$ vérifiant

$$\max_{z\in E} |Q(z)| \leqslant \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu| \qquad \text{avec } n \geqslant 2$$

D'après le théorème 3.1.9, on a

$$d(E)^n \leqslant \max_{z\in E} |Q(z)|$$

d'où

$$d(E)^n \leqslant \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$$

d'où

$$0 < \frac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|} < \left(\frac{1}{d(E)}\right)^n \tag{3.17}$$

Comme $P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$, d'après le théorème d'interpolation de Lagrange appliqué aux $(n+1)$ points distincts $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}$, on a

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k) \frac{\displaystyle\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (X - x_l)}{\displaystyle\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l)}$$

Soit $z \in K$. On a alors

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k) \frac{\displaystyle\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l)}{\displaystyle\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l)}$$

d'où, en passant à la valeur absolue,

$$|P(z)| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k) \frac{\displaystyle\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l)}{\displaystyle\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l)} \right| \tag{3.18}$$

A nouveau, on va être obligé de distinguer les cas complexe et $p$-adique.

• si $\widetilde{K} = \mathbb{C}$, alors on a

$$|P(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \left( |P(x_k)| \left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l) \right| \frac{1}{\left| \displaystyle\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l) \right|} \right) \tag{3.19}$$

Or, comme les $x_k$ sont dans $E$, on a, pour tout $k \in [\![1,n+1]\!]$,

$$|P(x_k)| \leqslant \max_{a \in E} |P(a)| \tag{3.20}$$

On a aussi, pour tout $k \in [\![1,n+1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left|\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}(x_k-x_l)\right|} &= \frac{1}{\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}|x_k-x_l|}\\
&\leqslant \max_{j=1,2,\ldots,n+1}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1}|x_j-x_l|}\\
&\leqslant \frac{1}{\min\limits_{j=1,2,\ldots,n+1}\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1}|x_j-x_l|}\\
&\leqslant \frac{1}{\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k_0}}^{n+1}|x_{k_0}-x_l|}
\end{aligned}$$

et grâce à (3.17), on en déduit que

$$\frac{1}{\left|\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}(x_k-x_l)\right|} \leqslant \frac{1}{\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k_0}}^{n+1}|x_{k_0}-x_l|} \leqslant \left(\frac{1}{d(E)}\right)^n \tag{3.21}$$

En outre, pour tout $l \in [\![1,n+1]\!]$, en tenant compte du fait que $x_l \in E \subseteq B(0,R)$, on a

$$|z-x_l| \leqslant |z| + |x_l| \leqslant |z| + R$$

d'où

$$\left|\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}(z-x_l)\right| \leqslant \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}|z-x_l| \leqslant \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}(|z|+R) \leqslant (|z|+R)^n \tag{3.22}$$

En utilisant les majorations (3.20), (3.21) et (3.22), l'inégalité (3.19) donne

$$|P(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \max_{a\in E}|P(a)|\left(\frac{1}{d(E)}\right)^n(|z|+R)^n$$

d'où

$$|P(z)| \leqslant (n+1)\max_{a\in E}|P(a)|\left(\frac{1}{d(E)}\right)^n(|z|+R)^n$$

Et comme $n+1 \leqslant 2^n$, on obtient la majoration souhaitée

$$|P(z)| \leqslant \max_{a\in E}|P(a)| \quad \left(\frac{2}{d(E)}\right)^n \quad \Big(|z|+R\Big)^n$$

• si $\widetilde{K}=\mathbb{C}_p$, grâce à l'inégalité ultramétrique, (3.18) donne

$$|P(z)| \leqslant \max_{k=1,2,\ldots,n+1}\left(|P(x_k)|\left|\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}(z-x_l)\right|\frac{1}{\left|\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}(x_k-x_l)\right|}\right) \tag{3.23}$$

Comme dans le cas complexe, on vérifie que, pour tout $k\in [\![1,n+1]\!]$ ,

$$|P(x_k)| \leqslant \max_{a\in E}|P(a)| \text{ et } \frac{1}{\left|\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}(x_k-x_l)\right|} \leqslant \frac{1}{\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k_0}}^{n+1}|x_{k_0}-x_l|} \leqslant \left(\frac{1}{d(E)}\right)^n$$

De plus, on a, pour tout $l \in [\![1,n+1]\!]$,

$$|z - x_l| \leqslant \max(|z|,|x_l|) \leqslant \max(|z|,R)$$

car $|x_l| \leqslant R$ du fait que $x_l \in E \subseteq B(0,R)$,
d'où

$$\left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l) \right| \leqslant (\max(|z|,R))^n$$

L'inégalité (3.23) et les majorations précédentes donnent alors

$$|P(z)| \leqslant \max_{a \in E} |P(a)| \left( \frac{1}{d(E)} \right)^n \Big( \max(|z|,R) \Big)^n$$

□

**Proposition 3.1.11.** *Si $K = \widetilde{K} = \mathbb{C}$, alors $d\big(\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leqslant 1\}\big) = 1$.*

*Démonstration :*

Posons $E = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leqslant 1\}$. $E$ est bien un compact de $\mathbb{C}$ et, d'après le théorème 3.1.9 appliqué au compact $E$ et au polynôme $P = X$, on obtient $d(E) \leqslant \max\limits_{z \in E} |P(z)| = \max\limits_{z \in E} |z| = 1$. On a donc $d(E) \leqslant 1$.

Pour montrer que $d(E) \geqslant 1$, nous allons revenir à la définition de $d(E)$.
Soit $n \geqslant 2$. Posons, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $z_k = e^{i2\pi\frac{k}{n}}$ . On a alors
$\Delta_n(E) \geqslant \prod\limits_{\mu=1}^{n} \prod\limits_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu|$. Le problème étant invariant par rotation, on a,

pour tout $\mu \in [\![1,n]\!]$, $\prod\limits_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| = \prod\limits_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^{n} |z_n - z_\nu| = \left| \prod\limits_{\nu=1}^{n-1} (1 - z_\nu) \right|$.

Posons $P = \prod\limits_{\nu=1}^{n} (X - z_\nu)$ et $Q = \prod\limits_{\nu=1}^{n-1} (X - z_\nu)$.

On a $P = (X-1)Q$ et $P = X^n - 1 = (X-1)\sum\limits_{k=0}^{n-1} X^k$, d'où $Q = \sum\limits_{k=0}^{n-1} X^k$.

On obtient alors $\prod\limits_{\nu=1}^{n-1} (1 - z_\nu) = Q(1) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1^k = n$ ,

d'où

$$\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| = \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq n}}^{n} |z_n - z_\nu| = \left|\prod_{\nu=1}^{n-1}(1-z_\nu)\right| = |n| = n$$

ce qui donne

$$\Delta_n(E) \geqslant \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} |z_\mu - z_\nu| \geqslant \prod_{\mu=1}^{n} n \geqslant n^n$$

On obtient alors $\delta_n(E) \geqslant n^{\frac{1}{n-1}} \geqslant 1$, d'où, en passant à la limite, $d(E) \geqslant 1$.

Ainsi, $d(E) = 1$.

□

**Proposition 3.1.12.** *Si $K = \mathbb{Q}_p$ et $\widetilde{K} = \mathbb{C}_p$, alors $d\big(\{z \in \mathbb{Q}_p / |z| \leqslant 1\}\big) = p^{-\frac{1}{p-1}}$.*

*Démonstration :*

Posons $E = \{z \in \mathbb{Q}_p / |z| \leqslant 1\}$. $E$ est bien un compact de $\mathbb{Q}_p$. Pour calculer $d(E)$, cette fois-ci, nous utiliserons uniquement le fait que

$$d(E) = \lim_{n\to+\infty} \delta_n(E) = \lim_{k\to+\infty} \delta_{p^k}(E)$$

Soit $k \geqslant 2$. On a

$$\Delta_{p^k}(E) = \max_{z_1,z_2,\ldots,z_{p^k}\in E} \prod_{\mu=1}^{p^k} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{p^k} |z_\mu - z_\nu| = \max_{z_1,z_2,\ldots,z_{p^k}\in E} \left(\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant p^k} |z_\mu - z_\nu|\right)^2$$

Or, ce max est atteint pour $z_1 = 1, z_2 = 2, \ldots, z_{p^k} = p^k$ (ce qui correspond géométriquement aux "centres" des $p^k$ boules de rayon $\dfrac{1}{p^k}$ constituant $E$).

Par ailleurs,

$$\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant p^k}|\mu-\nu| = \prod_{\nu=1}^{p^k-1}\prod_{\mu=\nu+1}^{p^k}|\mu-\nu| = \prod_{\nu=1}^{p^k-1}\prod_{\mu=1}^{p^k-\nu}|\mu| = \prod_{\nu=1}^{p^k-1}\left|(p^k-\nu)!\right| = \prod_{\nu=1}^{p^k-1}|\nu!|$$

d'où

$$\ln(\delta_{p^k}(E)) = \frac{1}{p^k(p^k-1)}\ln(\Delta_{p^k}(E)) = \frac{2}{p^k(p^k-1)}\sum_{\nu=1}^{p^k-1}\ln(|\nu!|) \tag{3.24}$$

avec [4]

$$-\frac{\nu}{p-1} \leqslant \frac{\ln(|\nu!|)}{\ln(p)} \leqslant -\frac{\nu}{p-1} + \frac{\ln(\nu)}{\ln(p)} + 1 \tag{3.25}$$

or

$$\sum_{\nu=1}^{p^k-1}\frac{\nu}{p-1} = \frac{1}{p-1}\frac{p^k(p^k-1)}{2} \tag{3.26}$$

$$0 \leqslant \sum_{\nu=1}^{p^k-1}\frac{\ln(\nu)}{\ln(p)} \leqslant \frac{1}{\ln(2)}\int_1^{p^k}\ln(t)dt \leqslant \frac{1}{\ln(2)}p^k\ln(p^k) \tag{3.27}$$

$$0 \leqslant \sum_{\nu=1}^{p^k-1}1 \leqslant p^k \tag{3.28}$$

On déduit alors des inégalités précédentes que

$$-\frac{1}{p-1}\ln(p) \leqslant \ln(\delta_{p^k}(E)) \leqslant -\frac{1}{p-1}\ln(p) + \frac{2\ln(p)}{\ln(2)}\frac{\ln(p^k)}{p^k-1} + \frac{2\ln(p)}{p^k-1} \tag{3.29}$$

d'où

$$\lim_{k\to+\infty}\ln(\delta_{p^k}(E)) = -\frac{1}{p-1}\ln(p) = \ln\left(p^{-\frac{1}{p-1}}\right) \tag{3.30}$$

d'où

$$d(E) = \lim_{k\to+\infty}\delta_{p^k}(E) = p^{-\frac{1}{p-1}}$$

□

4. Cela résulte du fait que $v_p(n!) = \dfrac{n-S_p(n)}{p-1}$ où $S_p(n)$ est la somme des chiffres de $n$ écrit en base $p$ (voir [Rob00] ). On a alors, en notant $r$ le nombre de chiffres de $n$ en base $p$, $0 \leqslant 1 \leqslant S_p(n) \leqslant (p-1)r \leqslant (p-1)(1+\frac{\ln(n)}{\ln(p)})$.

**Remarque 3.1.13.** *Lorsque $K = \mathbb{C}$ et que $E$ est un compact de $K$, le diamètre transfini de $E$ est égal à la capacité de $E$.*
*On peut le voir en utilisant*[5] *d'une part le fait que la fonction de Green $G$ de $\mathbb{C} \setminus E$ relative au point à l'infini existe si et seulement si $d(E) > 0$ et d'autre part le fait que si $d(E) > 0$, alors $G(z) = \ln(|z|) - \ln(d(E)) + \underset{|z| \to \infty}{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$, ce qui permet d'obtenir que $d(E) = cap(E)$.*

**Remarque 3.1.14.** *Lorsque $K$ n'est pas localement compact, les boules fermées ne sont plus compactes, mais on peut, sous réserve que $K$ soit algébriquement clos, récupérer un théorème de majoration polynomiale pour les boules fermées. Nous allons en démontrer un pour $K = \widetilde{K} = \mathbb{C}_p$. Dans la fin de cette section, la notation $B_f(a,r)$ (avec $a \in \mathbb{C}_p$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$) désignera l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}_p / |z-a| \leqslant r\}$.*

**Remarque 3.1.15.** *Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{C}_p[X]$. Alors $\sup_{a \in B_f(0,1)} |P(a)| < +\infty$ (cela résulte de l'inégalité triangulaire) et il existe $b \in B_f(0,1)$ tel que*[6] $|P(b)| = \sup_{a \in B_f(0,1)} |P(a)| = \max_{a \in B_f(0,1)} |P(a)|$.

**Proposition 3.1.16.** *Soit $n \geqslant 2$ et soit $P \in \mathbb{C}_p[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$. On a*

$$\forall z \in \mathbb{C}_p \ \ |P(z)| \leqslant \max_{a \in B_f(0,1)} |P(a)| \ \ 2^n \ \ \left(\max\left(|z|,1\right)\right)^n$$

---

5. On pourra trouver une démonstration des deux faits indiqués dans [Pom75], chap 11, th 11.1.

6. Pour voir ce fait, on peut raisonner par l'absurde. Nous utiliserons les notations traditionnelles $A = B_f(0,1)$, $M = B(0,1)$ et $k = A/M$. On sait que le corps résiduel $k$ est la clôture algébrique de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Notons $P(X) = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ et posons $r = \max_{j=1,2,\ldots,d} |a_j| = |a_{j_0}|$ et $Q(X) = \frac{1}{a_{j_0}} P(X) = \sum_{j=0}^{d} b_j X^j$. Par homothétie, il suffit de montrer qu'il existe $b \in B_f(0,1)$ tel que $|Q(b)| = \sup_{a \in B_f(0,1)} |Q(a)|$. D'une part, pour tout $x \in B_f(0,1)$, on a $|Q(x)| = \left|\sum_{j=0}^{d} b_j x^j\right| \leqslant \max_{j=0,1,\ldots,d} |b_j||x|^j \leqslant 1$. On a alors $\sup_{a \in B_f(0,1)} |Q(a)| \leqslant 1$.
Par l'absurde, supposons que pour tout $x \in B_f(0,1)$, $|Q(x)| < 1$. On a alors, en notant $\overline{x}$ la projection de $x$ dans $k$, $\forall x \in B_f(0,1)$ $\overline{Q}(\overline{x}) = \overline{0}$ (On peut bien projeter le polynôme $Q$ dans $k$, car ses coefficients sont dans $A$). Par conséquent, $\forall \alpha \in k$ $\overline{Q}(\alpha) = \overline{0}$. Mais ceci est impossible, car $k$ est un corps commutatif infini et car $\overline{Q}(X)$ est un polynôme non nul (car $\overline{b_{j_0}} = \overline{1} \neq \overline{0}$). Donc il existe bien $x \in B_f(0,1)$ tel que $|Q(x)| = 1$.

*Démonstration :*

Posons $M = \max_{a \in B_f(0,1)} |P(a)|$ et notons $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} = 1$ les $n+1$ racines distinctes du polynôme $Q(X) = X^{n+1} - 1$. Les $x_k$ sont tous de valeur absolue 1 et sont donc éléments de $B_f(0,1)$. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange appliqué aux $(n+1)$ points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, on a

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k) \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (X - x_l)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l)}$$

Soit $z \in \mathbb{C}_p$. On a alors

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k) \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l)}$$

d'où, en passant à la valeur absolue et en utilisant l'inégalité ultramétrique,

$$|P(z)| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k) \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l)} \right| \leqslant \max_{k=1,2,\ldots,n+1} |P(x_k)| \frac{\left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l) \right|}{\left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l) \right|} \tag{3.31}$$

Or $|P(x_k)| \leqslant M$ et pour tout $l \in [\![1, n+1]\!]$, $|z - x_l| \leqslant \max(|z|, |x_l|) \leqslant \max(|z|, 1)$, d'où $\left|\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}(z-x_l)\right| = \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}|z-x_l| \leqslant (\max(|z|,1))^n$ .

Comme $|x_k| = 1$ et $z \mapsto zx_k^{-1}$ réalise une permutation[7] des racines de $Q(X)$, on a

$$\left|\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}(x_k-x_l)\right| = \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}|x_k-x_l| = \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}|1-x_lx_k^{-1}| = \prod_{j=1}^{n}|1-x_j| = \left|\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)\right|$$

Posons $R(X) = \prod_{j=1}^{n}(X-x_j)$.

On a

$$Q(X) = (X-1)\prod_{j=1}^{n}(X-x_j) = (X-1)R(X)$$

et

$$Q(X) = X^{n+1}-1 = (X-1)\left(\sum_{k=0}^{n}X^k\right)$$

d'où

$$R(X) = \sum_{k=0}^{n}X^k$$

Ainsi,

$$\left|\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}(x_k-x_l)\right| = |R(1)| = |n+1|$$

On déduit alors de (3.31) que

$$|P(z)| \leqslant M\big(\max(|z|,1)\big)^n\frac{1}{|n+1|} \tag{3.32}$$

avec

$$|n+1| = |n+1|_p \geqslant \prod_{q\ premier}|n+1|_q = \frac{1}{|n+1|_\infty} = \frac{1}{n+1}$$

7. car c'est clairement une injection de l'ensemble des racines de $Q(X)$ dans lui-même.

d'où

$$\frac{1}{|n+1|} \leqslant n+1 \leqslant 2^n$$

On déduit alors de (3.32) que

$$|P(z)| \leqslant \max_{a \in B_f(0,1)} |P(a)| \quad 2^n \quad \big(\max(|z|,1)\big)^n$$

## 3.2 Diamètre transfini d'un ensemble quelconque

**Définition 3.2.1.** *Soit $E$ un sous-ensemble de $K$.*
*On pose*

$$d_*(E) = \sup_{\substack{A \text{ compact} \\ A \subseteq E}} \Big(d(A)\Big)$$

*et*

$$d^*(E) = \inf_{\substack{H \text{ ouvert} \\ E \subseteq H}} \Big(d_*(H)\Big)$$

**Proposition 3.2.2.** *Soit $E$ et $F$ deux sous-ensembles de $K$ tel que $E \subseteq F$.*
*On a* $d_*(E) \leqslant d_*(F)$ *et* $d^*(E) \leqslant d^*(F)$ .

*Démonstration :*

• Soit $A$ un compact inclus dans $E$. Comme $E \subseteq F$, on a $A$ compact inclus dans $F$, d'où, $d(A) \leqslant d_*(F)$, et comme ceci est vrai pour tout $A$ un compact inclus dans $E$, on a $d_*(E) \leqslant d_*(F)$

• Soit $H$ un ouvert contenant $F$. Comme $E \subseteq F$, on a $E \subseteq H$, d'où, $d^*(E) \leqslant d_*(H)$, et comme ceci est vrai pour tout $H$ ouvert contenant $F$, on a

$$d^*(E) \leqslant d^*(F)$$

**Proposition 3.2.3.** *Soit $E$ un sous-ensemble de $K$. On a*

$$d_*(E) \leqslant d^*(E)$$

*Démonstration :*

Soit $H$ un ouvert contenant $E$. Comme $E \subseteq H$, d'après la proposition 3.2.2, on a $d_*(E) \leqslant d_*(H)$, et comme ceci est vrai pour tout $H$ ouvert contenant $E$, on a $\quad d_*(E) \leqslant d^*(E)$.

**Lemme 3.2.4.** *Soit* $\varepsilon \in ]0,\frac{1}{2}[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $R \in ]1,+\infty[$, *soit* $a_1,a_2,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad 0 \leqslant a_k \leqslant R$$

*On a alors*

$$\prod_{k=1}^{n} (a_k + \varepsilon) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) + \varepsilon(2R)^n$$

*Démonstration :*

- Pour n=1, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} (a_k + \varepsilon) = \left(\prod_{k=1}^{1} a_k\right) + \varepsilon \leqslant \left(\prod_{k=1}^{1} a_k\right) + \varepsilon(2R)^1$
- Pour n=2, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{2} (a_k+\varepsilon) = a_1a_2+\varepsilon a_1+\varepsilon a_2+\varepsilon^2 \leqslant \left(\prod_{k=1}^{2} a_k\right)+\varepsilon(a_1+a_2+\varepsilon)$

d'où $\displaystyle\prod_{k=1}^{2} (a_k + \varepsilon) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{2} a_k\right) + \varepsilon(R+R+R) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{2} a_k\right) + \varepsilon(2R)^2$

- Soit $n \geqslant 2$ et supposons que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a_k + \varepsilon) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) + \varepsilon(2R)^n$.

On a alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} (a_k+\varepsilon) = (a_{n+1}+\varepsilon) \prod_{k=1}^{n} (a_k+\varepsilon) \leqslant (a_{n+1}+\varepsilon) \left(\prod_{k=1}^{n} a_k + \varepsilon(2R)^n\right)$

d'où

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}\big(a_k+\varepsilon\big) &\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n+1}a_k\right)+a_{n+1}\,\varepsilon(2R)^n+\varepsilon\prod_{k=1}^{n}a_k+\varepsilon\,\varepsilon(2R)^n\\
&\leqslant \prod_{k=1}^{n+1}a_k+\varepsilon\left(a_{n+1}\,2^nR^n+\prod_{k=1}^{n}a_k+\varepsilon 2^nR^n\right)\\
&\leqslant \prod_{k=1}^{n+1}a_k+\varepsilon\left(R2^nR^n+R^n+\frac{1}{2}2^nR^n\right)\\
&\leqslant \prod_{k=1}^{n+1}a_k+\varepsilon 2^nR^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\right)\\
&\leqslant \prod_{k=1}^{n+1}a_k+\varepsilon 2^{n+1}R^{n+1}
\end{aligned}
$$

□

**Proposition 3.2.5.** *Soit $E$ un compact de $K$.*

*On suppose de plus que $K$ est* **localement compact**. *On a alors*

$$d(E)=d_*(E)=d^*(E)$$

*Démonstration :*

(a) Montrons que $d(E)=d_*(E)$.
Comme $E$ est un compact inclus dans $E$, on a $d(E)\leqslant d_*(E)$.
Pour tout $A$ compact inclus dans $E$, on a $d(A)\leqslant d(E)$, d'où $d_*(E)\leqslant d(E)$.
Par conséquent, $d(E)=d_*(E)$.

(b) Montrons que $d(E)=d^*(E)$.
D'après le (a), on a $d(E)=d_*(E)$ et d'après la proposition 3.2.3, on a $d_*(E)\leqslant d^*(E)$, d'où $d(E)\leqslant d^*(E)$.

Soit $\varepsilon>0$. Comme $E$ est un compact, il existe $r>0$ tel que $E\subseteq B_f(0,r)$.
Posons $R=1+2r$. On a, $R>1$ et, pour tout $z_1,z_2\in E$, on a $|z_2-z_1|\leqslant|z_2|+|z_1|\leqslant r+r\leqslant R$. De plus, comme la suite $(\delta_n(E))_{n\geqslant 2}$ décroît vers $d(E)$, il existe $n_0\geqslant 2$ tel que $\delta_{n_0}(E)<d(E)+\varepsilon$. Posons $\beta=(d(E)+\varepsilon)^{n_0(n_0-1)}$.
On a alors $\Delta_{n_0}(E)^{\frac{1}{n_0(n_0-1)}}<d(E)+\varepsilon$, d'où $\Delta_{n_0}(E)<\beta$.
Posons $\eta=\min\big(\beta-\Delta_{n_0}(E),R\big)$. On a $0<\eta\leqslant R$ et $\Delta_{n_0}(E)+\eta\leqslant\beta$.
Posons aussi $N=n_0(n_0-1)$, $\alpha=\dfrac{1}{6}\min\big(\dfrac{\eta}{(2R)^N},R,1\big)$ et $H=\displaystyle\bigcup_{z\in E}B(z,\alpha)$.

$H$ est un ouvert contenant $E$. De plus, comme $E \subseteq B_f(0,r)$ , on a, par définition de $H$, $H \subseteq B_f(0,r+\alpha)$ avec $B_f(0,r+\alpha)$ fermé, d'où $H \subseteq \overline{H} \subseteq B_f(0,r+\alpha)$.
Comme $K$ est localement compact, $B_f(0,r+\alpha)$ est compact et par conséquent l'inclusion précédente nous indique que $\overline{H}$ (fermé inclus dans un compact) est un compact. Comme $H \subseteq \overline{H}$ avec $\overline{H}$ compact, on a aussi

$$d_*(H) \leqslant d_*\left(\overline{H}\right) = d\left(\overline{H}\right) \tag{3.33}$$

Considérons l'application $f : K^{n_0} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(z_1,z_2,\ldots,z_{n_0}) = \prod_{\mu=1}^{n_0} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{n_0} |z_\mu - z_\nu|$$

L'application $f$ est continue[8].
Soit $y_1,y_2,\ldots,y_{n_0} \in H$. Par définition[9] de $H$, il existe $z_1,z_2,\ldots,z_{n_0} \in E$ et $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{n_0} \in B(0,\alpha)$, tels que, pour tout $k \in [\![1,n_0]\!]$, $y_k = z_k + \rho_k$.
On a aussi, $\forall(\mu,\nu) \in [\![1,n_0]\!]^2 \quad |\rho_\mu - \rho_\nu| \leqslant |\rho_\mu| + |\rho_\nu| \leqslant \alpha + \alpha \leqslant 2\alpha$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(y_1,y_2,\ldots,y_{n_0}) &= \prod_{\mu=1}^{n_0} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{n_0} |y_\mu - y_\nu| \\
&= \prod_{\mu=1}^{n_0} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{n_0} |(z_\mu + \rho_\mu) - (z_\nu + \rho_\nu)| \\
&\leqslant \prod_{\mu=1}^{n_0} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{n_0} (|z_\mu - z_\nu| + |\rho_\mu - \rho_\nu|) \\
&\leqslant \prod_{\mu=1}^{n_0} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{n_0} (|z_\mu - z_\nu| + 2\alpha)
\end{aligned}$$

8. par continuité des additions, multiplications et de la valeur absolue.
9. si $y \in B(z,\alpha)$, alors $y = z + (y - z)$ avec $z \in E$ et $y - z \in B(0,\alpha)$

En remarquant que dans ce produit, il y a $N = n_0(n_0 - 1)$ termes, que, par construction de $R$, pour tout $\mu \in [\![1,n_0]\!]$ et tout $\nu \in [\![1,n_0]\!]$, on a $|z_\mu - z_\nu| \leqslant R$ et $2\alpha \leqslant \min(R,\frac{1}{3})$, d'après le lemme 3.2.4, on a

$$\prod_{\mu=1}^{n_0} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n_0} (|z_\mu - z_\nu| + 2\alpha) \leqslant \left( \prod_{\mu=1}^{n_0} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n_0} |z_\mu - z_\nu| \right) + 2\alpha \ \ (2R)^N$$

D'où, d'après les deux inégalités précédentes et la définition de $\Delta_{n_0}(E)$,

$$f(y_1,y_2,\dots,y_{n_0}) \leqslant \Delta_{n_0}(E) + 2\alpha \ \ (2R)^N$$

et grâce à la définition de $\alpha$, on obtient

$$f(y_1,y_2,\dots,y_{n_0}) \leqslant \Delta_{n_0}(E) + \frac{\eta}{(2R)^N} \ \ (2R)^N \leqslant \Delta_{n_0}(E) + \eta \leqslant \beta$$

Par conséquent, pour tout $y_1,y_2,\dots,y_{n_0} \in H$, on a

$$f(y_1,y_2,\dots,y_{n_0}) \leqslant \beta \tag{3.34}$$

Et, par continuité de $f$, on en déduit que

$$\forall y_1,y_2,\dots,y_{n_0} \in \overline{H}^{n_0} \quad f(y_1,y_2,\dots,y_{n_0}) \leqslant \beta \tag{3.35}$$

On obtient alors $\Delta_{n_0}(\overline{H}) \leqslant \beta$, d'où, en élevant à la puissance $\frac{1}{n_0(n_0-1)}$,

$$\delta_{n_0}(\overline{H}) \leqslant (d(E) + \varepsilon) \tag{3.36}$$

Or, par décroissance de $\left(\delta_k(\overline{H})\right)_{k \geqslant 2}$, on a

$$d(\overline{H}) \leqslant \delta_{n_0}(\overline{H}) \tag{3.37}$$

Et comme $\overline{H}$ est compact, on a

$$d_*(\overline{H}) = d(\overline{H}) \tag{3.38}$$

En outre, puisque $H \subseteq \overline{H}$, on a

$$d_*(H) = d_*(\overline{H}) \tag{3.39}$$

De (3.36), (3.37), (3.38) et (3.39), on déduit que

$$d_*(H) \leqslant d(E) + \varepsilon$$

$H$ étant un ouvert contenant $E$, on a alors

$$d^*(E) \leqslant d(E) + \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$d^*(E) \leqslant d(E)$$

D'où finalement,

$$d^*(E) = d(E).$$

$\square$

**Remarque 3.2.6.** *Si $K$ n'est pas localement compact, la démonstration précédente donne seulement, pour tout compact $E$ de $K$*

$$d(E) = d_*(E) \leqslant d^*(E).$$

**Proposition 3.2.7.** *Pour tout $a \in K$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a*

$$d^*(B_f(a,r)) \leqslant r.$$

*Démonstration :*

• Si $\widetilde{K} = \mathbb{C}$, alors $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, ce qui entraîne que $B_f(a,r)$ est compact. On déduit alors de la proposition précédente et de la proposition 3.1.6 que $d^*(B_f(a,r)) = d(B_f(a,r)) = d(a + B_f(0,r)) = d(B_f(0,r)) = d(r.B_f(0,1)) = |r|d(B_f(0,1)) = r.d(B_f(0,1))$.
Or $(B_f(0,1)) \subseteq \{z \in \mathbb{C}/|z| \leqslant 1\}$ et $d(\{z \in \mathbb{C}/|z| \leqslant 1\}) = 1$. Donc $d(B_f(0,1)) \leqslant 1$. On obtient alors $d^*(B_f(a,r)) \leqslant r$.

• Si $\widetilde{K} = \mathbb{C}_p$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $H = B(a,r+\varepsilon)$. $H$ est un ouvert contenant $B_f(a,r)$, donc $d^*(B_f(a,r)) \leqslant d_*(H)$. Soit A, un compact inclus dans $H$. Pour tout $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in A^n$, on a $|x_\mu - x_\nu| = |(x_\mu - a) - (x_\nu - a)| \leqslant \max(|x_\mu - a|,|x_\nu - a|) \leqslant r + \varepsilon$, d'où $\Delta_n(A) \leqslant (r+\varepsilon)^{n(n-1)}$, d'où $\delta_n(A) \leqslant (r+\varepsilon)$ et par conséquent, $d(A) \leqslant r + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout compact $A$ inclus dans $H$, on en déduit que $d_*(H) \leqslant r+\varepsilon$. Et comme $d^*(B_f(a,r)) \leqslant d_*(H)$, on a $d^*(B_f(a,r)) \leqslant r+\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient $d^*(B_f(a,r)) \leqslant r$.

**Théorème 3.2.8.** *Soit $E_1,E_2,\ldots,E_k,\ldots$ une suite de parties de $K$.*
*On a alors*

$$\Big(\forall k \in \mathbb{N}^* \quad d^*(E_k) = 0\Big) \Longrightarrow \left(d^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = 0\right)$$

**Remarque 3.2.9.** *La démonstration de ce théorème dans le corps K est en partie analogue à la démonstration classique dans $\mathbb{C}$. Nous redonnons toutefois cette démonstration entièrement afin de s'assurer qu'elle fonctionne aussi dans le cadre p-adique et que l'on peut se passer de la locale compacité. Pour démontrer le théorème ci-dessus, nous allons commencer par démontrer un lemme.*

**Notation 3.2.10.** *Afin d'alléger les notations, pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, on note $g_R$ l'application de $[0,R[$ dans $[0,+\infty[$ définie par*

$$g_R(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{R}{t}\right)} & \text{si } t \in ]0,R[ \\ \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \tag{3.40}$$

*On vérifie facilement que $g_R$ est continue sur $[0,R[$ et que c'est une bijection strictement croissante de $[0,R[$ sur $[0,+\infty[$. Sa bijection réciproque $g_R^{-1}$ est alors continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. On vérifie aussi immédiatement que l'on a $g_R(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0$.*

**Lemme 3.2.11.** *Soit $R$ et $r$ deux réels vérifiant $R > 2r > 1$. Soit $i \in \mathbb{N}^*$.*
*Soit $A_1,A_2,\ldots,A_i$ des compacts de $K$ vérifiant, $\forall k \in [\![1,i]\!]$ $A_k \subseteq B_f(0,r)$.*
*Posons $A = \bigcup_{k=1}^{i} A_k$. $A$ est un compact de $K$ et on a*

$$g_R\big(d(A)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{i} g_R\big(d(A_k)\big) \tag{3.41}$$

*Démonstration :*

Comme $A$ et les $A_k$ sont inclus dans $B_f(0,r)$, on a, d'après la proposition 3.2.7, $d(A_k) = d^*(A_k) \leqslant d^*(B_f(0,r)) \leqslant r < R$. Par conséquent, les quantités $g_R(A_k)$ et $g_R(A)$ sont bien définies.
Nous allons démontrer ce lemme par récurrence en considérant la propriété $\mathcal{P}(i)$ : "Pour tous compacts $A_1,A_2,\ldots,A_i$ de $K$ vérifiant $\forall k \in [\![1,i]\!]$ $A_k \subseteq B_f(0,r)$, en posant $A = \bigcup_{k=1}^{i} A_k$, on a $g_R\big(d(A)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{i} g_R\big(d(A_k)\big)$".

- étape 1: La propriété $\mathcal{P}(1)$ est trivialement vraie.
- étape 2: Nous démontrerons que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
- étape 3: Montrons que si $\mathcal{P}(i)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(i+1)$ est encore vraie.

Soit $i \geqslant 2$ et supposons que $\mathcal{P}(i)$ est vraie. Soit $A_1,A_2,\ldots,A_i,A_{i+1}$ des compacts de $K$ inclus dans $B_f(0,r)$. Posons $A = \bigcup_{k=1}^{i+1} A_k$, $B_1 = \bigcup_{k=1}^{i} A_k$ et$B_2 = A_{i+1}$.
On a $A = B_1 \bigcup B_2$ avec $B_1$ et $B_2$ compacts, donc, comme $\mathcal{P}(2)$ est vraie, on a : $g_R\big(d(A)\big) \leqslant g_R\big(d(B_1)\big) + g_R\big(d(B_2)\big)$. Or $g_R\big(d(B_2)\big) = g_R\big(d(A_{i+1})\big)$ et, comme $\mathcal{P}(i)$ est vraie, on a aussi $g_R\big(d(B_1)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{i} g_R\big(d(A_k)\big)$. Des inégalités précédentes, on tire alors : $g_R\big(d(A)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{i+1} g_R\big(d(A_k)\big)$. Par conséquent, $\mathcal{P}(i+1)$ est vraie et on peut en déduire que le lemme est vrai par récurrence.

Il reste à démontrer l'étape 2. Soit $A_1$ et $A_2$ deux compacts de $K$.
Posons $A = A_1 \bigcup A_2$. Si $d(A) = 0$, alors, par positivité de $g_R$, on a trivialement $g_R\big(d(A)\big) = g_R(0) = 0 \leqslant g_R\big(d(A_1)\big) + g_R\big(d(A_2)\big)$.
Désormais, on supposera donc que $d(A) > 0$.
Pour tout $n \geqslant 2$, notons $(z_{n,1},z_{n,2},\ldots,z_{n,n})$ un $n$-uplet de Fekete de $A$.
Posons aussi $l_n = \operatorname{card}\{j \in [\![1,n]\!] \;/\; z_{n,j} \in A_1\}$. Quitte à renuméroter les points à l'intérieur de chaque $n$-uplet de Fekete, on peut supposer que

$$\forall j \in [\![1,l_n]\!] \;\; z_{n,j} \in A_1 \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![l_n+1,n]\!] \;\; z_{n,j} \in A_2 \tag{3.42}$$

• <u>1er cas:</u> $(l_n)$ possède une sous-suite $(l_{n_k})$ bornée.

Il existe alors un entier $M$ supérieur à 2 tel que $\forall k \in \mathbb{N}^* \; l_{n_k} \leqslant M$. De plus, on a clairement $n_k - l_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ et pour tout $(j_1,j_2) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$|z_{n,j_1} - z_{n,j_2}| \leqslant |z_{n,j_1}| + |z_{n,j_2}| \leqslant r + r \leqslant R \tag{3.43}$$

Soit $k \geqslant M+3$. On a $n_k \geqslant k > M+2 > 2$, $n_k - l_{n_k} \geqslant k - l_{n_k} \geqslant M+2-M \geqslant 2$ et

$$\Delta_{n_k}(A) = \prod_{\mu=1}^{n_k} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{n_k} |z_\mu - z_\nu| = B \times C \times D \times E \tag{3.44}$$

avec $B = \displaystyle\prod_{\mu=1}^{l_{n_k}} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{l_{n_k}} |z_\mu - z_\nu|$, $C = \displaystyle\prod_{\mu=l_{n_k}+1}^{n_k} \prod_{\substack{\nu=l_{n_k}+1 \\ \nu\neq\mu}}^{n_k} |z_\mu - z_\nu|$,

$D = \displaystyle\prod_{\mu=1}^{l_{n_k}} \prod_{\nu=l_{n_k}+1}^{n_k} |z_\mu - z_\nu|$ et $E = \displaystyle\prod_{\mu=l_{n_k}+1}^{n_k} \prod_{\nu=1}^{l_{n_k}} |z_\mu - z_\nu| = D$.

Grâce à (3.43) et au fait que $l_{n_k} \leqslant M$, on obtient

$$B \leqslant \prod_{\mu=1}^{l_{n_k}} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{l_{n_k}} R \leqslant R^{l_{n_k}(l_{n_k}-1)} \leqslant R^{M(M-1)} \leqslant R^{M^2} \tag{3.45}$$

et

$$D = E \leqslant \prod_{\mu=l_{n_k}+1}^{n_k} \prod_{\nu=1}^{l_{n_k}} R \leqslant R^{l_{n_k}(n_k-l_{n_k})} \leqslant R^{M(n_k-l_{n_k})} \leqslant R^{Mn_k} \tag{3.46}$$

Par définition de $\Delta_{n_k-l_{n_k}}(A_2)$, on a aussi

$$C \leqslant \Delta_{n_k-l_{n_k}}(A_2) \tag{3.47}$$

En passant au logarithme dans (3.44) et en utilisant(3.45), (3.46) et (3.47), on obtient

$$\ln\left(\Delta_{n_k}(A)\right) \leqslant M^2 \ln(R) + \ln\Big(\Delta_{n_k-l_{n_k}}(A_2)\Big) + 2Mn_k \ln(R)$$

d'où

$$\frac{\ln\left(\Delta_{n_k}(A)\right) - M\ln(R)(M+2n_k)}{n_k(n_k-1)} \leqslant \frac{(n_k-l_{n_k})(n_k-l_{n_k}-1)}{n_k(n_k-1)} \frac{\ln\Big(\Delta_{n_k-l_{n_k}}(A_2)\Big)}{(n_k-l_{n_k})(n_k-l_{n_k}-1)}$$

d'où, comme $0 \leqslant M \leqslant n_k$

$$\ln\left(\delta_{n_k}(A)\right) - \frac{3n_k M\ln(R)}{n_k(n_k-1)} \leqslant \left(1 - \frac{l_{n_k}}{n_k}\right)\left(1 - \frac{l_{n_k}}{n_k-1}\right) \ln\Big(\delta_{n_k-l_{n_k}}(A_2)\Big)$$

d'où

$$\ln\left(\delta_{n_k}(A)\right) - \frac{3M\ln(R)}{n_k-1} \leqslant \ln\Big(\delta_{n_k-l_{n_k}}(A_2)\Big)$$

En passant à l'exponentielle, on obtient

$$e^{\ln\left(\delta_{n_k}(A)\right) - \frac{3M\ln(R)}{n_k-1}} \leqslant \delta_{n_k-l_{n_k}}(A_2)$$

et en faisant tendre $k$ vers $+\infty$, on en déduit que

$$d(A) = e^{\ln(d(A))} \leqslant d(A_2)$$

Par croissance et positivité de $g_R$, il en résulte que

$$g_R\big(d(A)\big) \leqslant g_R\big(d(A_2)\big) \leqslant g_R\big(d(A_1)\big) + g_R\big(d(A_2)\big).$$

• <u>2ème cas:</u> $(n-l_n)$ possède une sous-suite $(n_k - l_{n_k})$ bornée.

Une démonstration analogue à la précédente prouve qu'alors

$$g_R\big(d(A)\big) \leqslant g_R\big(d(A_1)\big) \leqslant g_R\big(d(A_1)\big) + g_R\big(d(A_2)\big).$$

• <u>3ème cas:</u> ni $(l_n)$ ni $(n-l_n)$ ne possède de sous-suite bornée.

En faisant deux extractions successives, on peut obtenir une sous-suite $(n_k)$ vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad n_k \geqslant 2$, $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad l_{n_k} \geqslant 2$, $l_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ et $n_k - l_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.

Comme $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant \dfrac{l_{n_k}}{n_k} \leqslant 1$, on peut extraire une sous-suite $\left(\dfrac{l_{n_{k_q}}}{n_{k_q}}\right)$ qui converge vers un réel $\lambda \in [0{,}1]$. Pour alléger les notations, nous noterons $(n_q)$ au lieu de $\big(n_{k_q}\big)$. De nouveau, on a $\Delta_{n_q}(A) = \displaystyle\prod_{\mu=1}^{n_q} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n_q} |z_\mu - z_\nu| = B\times C\times D\times E$ avec

$B = \displaystyle\prod_{\mu=1}^{l_{n_q}} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{l_{n_q}} |z_\mu - z_\nu| \leqslant \Delta_{l_{n_q}}(A_1)$, $C = \displaystyle\prod_{\mu=l_{n_q}+1}^{n_q} \prod_{\substack{\nu=l_{n_q}+1\\ \nu\neq\mu}}^{n_q} |z_\mu - z_\nu| \leqslant \Delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2)$,

$D = \displaystyle\prod_{\mu=1}^{l_{n_q}} \prod_{\nu=l_{n_q}+1}^{n_q} |z_\mu - z_\nu|$ et $E = \displaystyle\prod_{\mu=l_{n_q}+1}^{n_q} \prod_{\nu=1}^{l_{n_q}} |z_\mu - z_\nu| = D \leqslant R^{l_{n_q}\left(n_q-l_{n_q}\right)}$.

On obtient alors

$$\Delta_{n_q}(A) \leqslant \Delta_{l_{n_q}}(A_1)\Delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2)R^{2l_{n_q}\left(n_q-l_{n_q}\right)}. \tag{3.48}$$

d'où, en passant au logarithme et en multipliant par $\dfrac{1}{n_q(n_q-1)}$,

$$\frac{1}{n_q(n_q-1)}\ln\big(\Delta_{n_q}(A)\big) \leqslant \widetilde{A}\times\widetilde{B}\times\widetilde{C}. \tag{3.49}$$

avec $\widetilde{A} = \dfrac{l_{n_q}(l_{n_q}-1)}{n_q(n_q-1)}\dfrac{1}{l_{n_q}\left(l_{n_q}-1\right)}\ln\Big(\Delta_{l_{n_q}}(A_1)\Big) = \dfrac{l_{n_q}(l_{n_q}-1)}{n_q(n_q-1)}\ln\Big(\delta_{l_{n_q}}(A_1)\Big)$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{B} &= \frac{\left(n_q-l_{n_q}\right)\left(n_q-l_{n_q}-1\right)}{n_q(n_q-1)}\frac{1}{\left(n_q-l_{n_q}\right)\left(n_q-l_{n_q}-1\right)}\ln\Big(\Delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2)\Big)\\
&= \left(1-\frac{l_{n_q}}{n_q}\right)\left(1-\frac{l_{n_q}}{n_q-1}\right)\ln\Big(\delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2)\Big),
\end{aligned}$$

et $\widetilde{C} = \dfrac{2l_{n_q}\left(n_q-l_{n_q}\right)}{n_q(n_q-1)}\ln(R) = 2\left(\dfrac{l_{n_q}}{n_q}\right)\left(1-\dfrac{l_{n_q}-1}{n_q-1}\right)\ln(R)$.

Les trois égalités précédentes et la formule (3.49) donnent alors

$$\ln\left(\delta_{n_q}(A)\right) \leqslant \left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right)\left(\frac{l_{n_q}-1}{n_q-1}\right)\ln\left(\delta_{l_{n_q}}(A_1)\right)+$$
$$+\left(1-\frac{l_{n_q}}{n_q}\right)\left(1-\frac{l_{n_q}}{n_q-1}\right)\ln\left(\delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2)\right)+2\left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right)\left(1-\frac{l_{n_q}-1}{n_q-1}\right)\ln(R) \tag{3.50}$$

Pour continuer, nous devons distinguer trois sous-cas:

<u>∘ 1er sous-cas:</u> $d(A_1)=0$. Par l'absurde, supposons que $\lambda>0$.

L'égalité(3.50), le fait que$(\delta_j(A_2))$soit décroissante et le fait que $0\leqslant l_{n_q}\leqslant n_q$ donnent

$$\ln\left(\delta_{n_q}(A)\right) \leqslant \left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right)\left(\frac{l_{n_q}-1}{n_q-1}\right)\ln\left(\delta_{l_{n_q}}(A_1)\right)+\ln\left(\delta_2(A_2)\right)+2\ln(R) \tag{3.51}$$

On a alors $\ln\left(\delta_{n_q}(A)\right) \xrightarrow[q\to+\infty]{} \ln\left(d(A)\right)$, $\dfrac{l_{n_q}}{n_q} \xrightarrow[q\to+\infty]{} \lambda$ , $\dfrac{l_{n_q}-1}{n_q-1} \xrightarrow[q\to+\infty]{} \lambda$ et,

comme $\delta_{n_q}(A_1) \xrightarrow[q\to+\infty]{} d(A_1)=0$, $\ln\left(\delta_{n_q}(A_1)\right) \xrightarrow[q\to+\infty]{} -\infty$, on a

$$\left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right)\left(\frac{l_{n_q}-1}{n_q-1}\right)\ln\left(\delta_{l_{n_q}}(A_1)\right) \xrightarrow[q\to+\infty]{} -\infty$$

En faisant tendre $q$ vers $+\infty$ dans (3.51), on obtient $\ln\left(d(A)\right)\leqslant-\infty$, ce qui est impossible, car $d(A)>0$. On a donc $\lambda=0$, c'est-à-dire $\dfrac{l_{n_q}}{n_q} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$.

En utilisant à nouveau le fait que $(\delta_j(A_1))$ est décroissante et le fait que $0\leqslant l_{n_q}\leqslant n_q$, (3.50) nous donne

$$\ln\left(\delta_{n_q}(A)\right)\leqslant\left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right)\ln\left(\delta_2(A_1)\right)+\left(1-\frac{l_{n_q}}{n_q}\right)\left(1-\frac{l_{n_q}}{n_q-1}\right)\ln\left(\delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2)\right)+2\left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right)\ln(R)$$

d'où

$$\frac{1}{\left(1-\frac{l_{n_q}}{n_q}\right)\left(1-\frac{l_{n_q}}{n_q-1}\right)}\left(\ln\left(\delta_{n_q}(A)\right)-\left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right)\left(\ln\left(\delta_2(A_1)\right)+2\ln(R)\right)\right)\leqslant\ln\left(\delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2)\right)$$

d'où

$$e^{\frac{1}{\left(1-\frac{l_{n_q}}{n_q}\right)\left(1-\frac{l_{n_q}}{n_q-1}\right)}\left(\ln\left(\delta_{n_q}(A)\right)-\left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right)\left(\ln\left(\delta_2(A_1)\right)+2\ln(R)\right)\right)}\leqslant\delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2)$$

Et, en faisant tendre $q$ vers $+\infty$ dans cette inégalité et en tenant compte du fait que $\dfrac{l_{n_q}}{n_q} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$, on obtient

$$d(A) = e^{\ln(d(A))} \leqslant d(A_2).$$

Par croissance et positivité de $g_R$, on en déduit que

$$g_R\big(d(A)\big) \leqslant g_R\big(d(A_2)\big) \leqslant g_R\big(d(A_1)\big) + g_R\big(d(A_2)\big).$$

$\circ$ <u>2ème sous-cas:</u> $d(A_2) = 0$.

Par une démonstration analogue, on démontre que $\lambda = 1$ et que

$$g_R\big(d(A)\big) \leqslant g_R\big(d(A_1)\big) \leqslant g_R\big(d(A_1)\big) + g_R\big(d(A_2)\big).$$

$\circ$ <u>3ème sous-cas:</u> $d(A_1) > 0$ et $d(A_2) > 0$.

En faisant tendre $q$ vers $+\infty$ dans (3.50), on obtient

$$\ln\left(d(A)\right) \leqslant \lambda^2 \ln\left(d(A_1)\right) + (1-\lambda)^2 \ln\left(d(A_2)\right) + 2\lambda(1-\lambda)\ln(R) \tag{3.52}$$

Posons $a = \ln\big(d(A_1)\big)$, $b = \ln\big(d(A_2)\big)$, $c = \ln(R)$, $d = \ln\big(d(A)\big)$
et $P(X) = aX^2 + b(1-X)^2 + 2cX(1-X)$.
L'inégalité précédente devient $d \leqslant P(\lambda)$ avec $\lambda \in [0,1]$.
Or, on a $P(X) = (a+b-2c)X^2 + (2c-2b)X + b$ avec[10] $a+b-2c < 0$.
Le polynôme $P$ atteint donc son maximum au point $\lambda_0$ vérifiant $P'(\lambda_0) = 0$.
Comme $P'(X) = 2(a+b-2c)X + (2c-2b)$, on a $\lambda_0 = \dfrac{b-c}{a+b-2c}$.

10. Cela résulte de $A_1 \subseteq B_f(0,r)$, d'où $d(A_1) \leqslant d^*(A_1) \leqslant d^*(B_f(0,r)) \leqslant r < R$, d'où $a = \ln(d(A_1)) < \ln(R) = c$. Idem pour $b$.

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
d-c &\leqslant P(\lambda)-c\\
&\leqslant P(\lambda_0)-c\\
&\leqslant (a+b-2c)\left(\frac{b-c}{a+b-2c}\right)^2+(2c-2b)\frac{b-c}{a+b-2c}+b-c\\
&\leqslant \frac{(b-c)^2}{a+b-2c}-2\frac{(b-c)^2}{a+b-2c}+(b-c)\frac{a+b-2c}{a+b-2c}\\
&\leqslant \frac{b-c}{a+b-2c}\big(-(b-c)+a+b-2c\big)\\
&\leqslant \frac{b-c}{(a-c)+(b-c)}(a-c)\\
&\leqslant \frac{(b-c)(a-c)}{(b-c)+(a-c)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{d-c}\leqslant\frac{(b-c)+(a-c)}{(b-c)(a-c)}\leqslant\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}$$

i.e.

$$g_R\big(d(A)\big)\leqslant g_R\big(d(A_1)\big)+g_R\big(d(A_2)\big)$$

□

*Retour à la démonstration du théorème:*

<u>1er cas: $E$ borné</u>

Il existe alors $r>0$ tel que $E\subseteq B_f(0,r)$. Posons $R=5r$. Comme $E$ est la réunion des $E_k$, on a aussi, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $E_k\subseteq B_f(0,r)$.

Par ailleurs, on a $d^*(E_k)=\inf\limits_{\substack{H \text{ ouvert}\\ E_k\subseteq H}}\Big(d_*(H)\Big)$ et $g_R$ est croissante et continue, d'où $g_R\big(d^*(E_k)\big)=\inf\limits_{\substack{H \text{ ouvert}\\ E_k\subseteq H}} g_R\Big(d_*(H)\Big)$.

Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, il existe un ouvert $\widetilde{H_k}$ contenant $E_k$ tel que $g_R(d_*(\widetilde{H_k}))-\dfrac{\varepsilon}{2^k}\leqslant g_R(d^*(E_k))$. Posons $H_k=\widetilde{H_k}\bigcap B(0,2r)$ et $H=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*}H_k$.

Comme $H_k \subseteq \widetilde{H_k}$, on a $d_*(H_k) \leqslant d_*(\widetilde{H_k})$, d'où

$$g_R\Big(d_*(H_k)\Big) \leqslant g_R\Big(d_*(\widetilde{H_k})\Big) \leqslant g_R\Big(d^*(E_k)\Big) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

De plus, par construction, $E$ est inclus dans l'ouvert $H$.

Soit $A$ un compact inclus dans $H$. On a $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} H_k$ avec $A$ compact, donc il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} H_k$. Soit $\rho$ un nombre de Lebesgue[11] de ce recouvrement. On a $A \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x,2\rho)$. Comme $A$ est compact, on peut extraire du recouvrement ouvert précédent un sous-recouvrement fini. Ainsi, il existe $x_1,x_2,\ldots,x_q$ des éléments de $A$ vérifiant $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{q} B(x_j,2\rho)$.

Pour tout $j \in [\![1,q]\!]$, on pose $I_j = \min\{k \in [\![1,m]\!] / B(x_j,2\rho) \subseteq H_k\}$ et, pour tout $k \in [\![1,m]\!]$, on pose $\widetilde{A}_k = \bigcup_{\substack{j=1,\ldots,q \\ I_j = k}} B_f(x_j,\rho)$ et $A_k = \widetilde{A}_k \bigcap A$.

On a alors, pour tout $k \in [\![1,m]\!]$, $A_k$ compact[12], $A_k \subseteq \widetilde{A}_k \subseteq H_k$ et $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \widetilde{A}_k$, d'où $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} A_k$ avec $\bigcup_{k=1}^{m} A_k$ compact. L'inclusion précédente et le lemme 3.2.11 nous permettent d'obtenir

$$g_R\big(d(A)\big) \leqslant g_R\left(d\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{m} g_R\big(d(A_k)\big) \tag{3.53}$$

11. c'est-à-dire un nombre réel $\rho > 0$ vérifiant $\forall x \in A \quad \exists j \in \{1,2,\ldots,m\} \quad B(x,2\rho) \subseteq H_j$. L'existence d'un tel $\rho$ provient de la compacité de $A$. En effet, si par l'absurde on suppose le contraire, alors $\forall \rho > 0 \quad \exists x \in A \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\} \quad B(x,2\rho) \nsubseteq H_j$. En définissant la suite $(\rho_n)$ par $\rho_n = 2^{-n}$, on obtient l'existence d'une suite $x_n$ d'éléments de $A$ vérifiant $\forall j \in \{1,2,\ldots,m\} \quad B(x_n,2\rho_n) \nsubseteq H_j$. $A$ étant compact, on en déduit l'existence d'une sous-suite $(x_{n_k})$ qui tend vers un élément $x$ de $A$. Comme $x \in A$ et $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} H_k$, il existe $j_0$ tel que $x \in H_{j_0}$ et comme $H_{j_0}$ est un ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $B(x,3\eta) \subseteq H_{j_0}$. Comme $\rho_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, il existe $k_0$ tel que $\forall k \geqslant k_0 \quad 0 \leqslant 2\rho_{n_k} \leqslant \eta$. De plus, comme $(x_{n_k})$ converge vers $x$, il existe $k_1 \geqslant k_0$ tel que $\forall k \geqslant k_1 \quad |x_{n_k} - x| \leqslant \eta$. On a alors, pour tout $y \in B(x_{n_{k_1}},2\rho_{n_{k_1}})$, $|y - x| \leqslant |y - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - x| \leqslant 2\rho_{n_{k_1}} + \eta \leqslant 2\eta < 3\eta$, d'où $B(x_{n_{k_1}},2\rho_{n_{k_1}}) \subseteq B(x,3\eta) \subseteq H_{j_0}$. Or, $B(x_{n_{k_1}},2\rho_{n_{k_1}}) \nsubseteq H_{j_0}$. Contradiction.

12. car $A_k$ est un fermé qui est inclus dans le compact $A$.

Et comme $A_k$ compact et $A_k \subseteq H_k$, on a $d(A_k) = d_*(A_k) \leqslant d_*(H_k)$. D'où

$$g_R\big(d(A_k)\big) \leqslant g_R\big(d_*(H_k))\big) \leqslant g_R\Big(d^*(E_k)\Big) + \frac{\varepsilon}{2^k} \tag{3.54}$$

De (3.53) et (3.54), on tire

$$g_R\big(d(A)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{m} g_R\Big(d^*(E_k)\Big) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} g_R\Big(d^*(E_k)\Big) + \varepsilon \tag{3.55}$$

Or, comme $d_*(H) = \sup\limits_{\substack{A \text{ compact} \\ A \subseteq H}} \Big(d(A)\Big)$ et comme $g_R$ est croissante et continue, on a

$$g_R\big(d_*(H)\big) = \sup_{\substack{A \text{ compact} \\ A \subseteq H}} g_R\Big(d(A)\Big) \tag{3.56}$$

De (3.55) et (3.56), on tire

$$g_R\big(d_*(H)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} g_R\Big(d^*(E_k)\Big) + \varepsilon \tag{3.57}$$

Comme $g_R\big(d^*(E)\big) = \inf\limits_{\substack{\widetilde{H} \text{ ouvert} \\ E \subseteq \widetilde{H}}} g_R\Big(d_*(\widetilde{H})\Big)$ l'inégalité (3.57) donne

$$g_R\big(d^*(E)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} g_R\Big(d^*(E_k)\Big) + \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$g_R\big(d^*(E)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} g_R\Big(d^*(E_k)\Big) \tag{3.58}$$

Par conséquent, si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $d^*(E_k) = 0$, alors $g_R\big(d^*(E_k)\big) = 0$ et (3.58) nous donne $g_R\big(d^*(E)\big) = 0$, d'où $d^*(E) = 0$.

2ème cas: $E$ quelconque

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_k^{[n]} = E_k \bigcap B(0,n)$ et $E^{[n]} = E \bigcap B(0,n)$. Comme $E_k^{[n]} \subseteq E_k$, on a $d^*(E_k^{[n]}) \leqslant d^*(E_k) \leqslant 0$. D'où $d^*(E_k^{[n]}) = 0$. De plus, $E^{[n]} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} E_k^{[n]}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad d^*(E_k^{[n]}) = 0$ avec $E^{[n]}$ borné, d'où, d'après le 1er cas, $d^*\big(E^{[n]}\big) = 0$ . Comme $g_R\big(d^*(E^{[1]}\big) = \inf\limits_{\substack{H \text{ ouvert} \\ E^{[1]} \subseteq H}} g_R\Big(d_*(H)\Big)$, il existe un ouvert $H_1$ contenant $E^{[1]}$ tel que $g_R\Big(d_*(H_1)\Big) < \varepsilon$. Quitte[13] à réduire $H_1$, on peut supposer $H_1$ borné.

Choisissons $\varepsilon_2$ tel que $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon - g_R\Big(d_*(H_1)\Big)$. Comme $g_R\big(d^*(E^{[2]}\big) = 0$, il existe un ouvert $\widetilde{H_2}$ contenant $E^{[2]}$ tel que $g_R\Big(d_*(\widetilde{H_2})\Big) < \varepsilon_2$. Quitte[14] à réduire $\widetilde{H_2}$, on peut supposer $\widetilde{H_2}$ borné. Posons $H_2 = H_1 \bigcup \widetilde{H_2}$. On a $H_1 \subseteq H_2$ et comme $H_1$, $H_2$ et $\widetilde{H_2}$, sont des ouverts, on a $d_*(H_1) = d^*(H_1)$ et de même pour $H_2$ et $\widetilde{H_2}$. Comme tout est borné, le 1er cas nous donne

$$g_R\Big(d_*(H_2)\Big) \leqslant g_R\Big(d_*(H_1)\Big) + g_R\Big(d_*(\widetilde{H_2})\Big) < g_R\Big(d_*(H_1)\Big) + \varepsilon_2 < \varepsilon$$

Par récurrence on construit ainsi une suite $(H_k)$ d'ouverts de $K$ qui est croissante pour l'inclusion et telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E^{[k]} \subseteq H_k$ et $g_R\Big(d_*(H_k)\Big) < \varepsilon$. Par ailleurs, on a $E \subseteq H = \bigcup_{k=1}^{+\infty} H_k$, d'où $d^*(E) \leqslant d^*(H)$.

Or, pour tout compact $A$ inclus dans $H$, comme $\bigcup_{k=1}^{+\infty} H_k$ est un recouvrement ouvert de $A$, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Il existe alors $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} H_k = H_m$ (par croissance des $H_k$).

Comme $A \subseteq H_m$, on a $d(A) = d_*(A) \leqslant d_*(H_m) < \varepsilon$, d'où $d(A) \leqslant \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout compact $A$ inclus dans $H$, on en déduit que $d_*(H) \leqslant \varepsilon$. Et comme $H$ est un ouvert contenant $E$, on a $d^*(E) \leqslant d^*(H) = d_*(H) \leqslant \varepsilon$. D'où $d^*(E) \leqslant \varepsilon$ . Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $d^*(E) = 0$. $\square$

13. On peut remplacer $H_1$ par $H_1 \bigcap B(0,1)$.
14. On peut remplacer $\widetilde{H_2}$ par $\widetilde{H_2} \bigcap B(0,2)$ .

# Chapitre 4

# Généralisation du théorème de Perez-Marco

Dans [PM01], Perez-Marco démontre que si on perturbe de façon polynomiale un germe de difféomorphisme holomorphe fixant 0, alors on a une loi de « tout ou presque rien ». Il démontre en particulier que pour tout $m,d \in \mathbb{N}^*$, si les $g_i : (\mathbb{C}^m,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m,0)$ sont des germes de fonctions holomorphes de valuation supérieure ou égale à 2, si $A \in GL_m(\mathbb{C})$ est non-résonante et si on pose $f_t(z) = Az + \sum_{i=0}^{d} t^i g_i(z)$ et $E = \{t \in \mathbb{C} / f_t \text{ est linéarisable}\}$, alors ou bien $E$ est égale à $\mathbb{C}$ tout entier ou bien $E$ est un ensemble très petit (un ensemble de capacité logarithmique nulle).

L'objectif de la prochaine section est double. Dans son article, Perez-Marco utilisait la théorie du potentiel, notamment le lemme de Bernstein. Une approche alternative consiste à utiliser le diamètre transfini pour définir la capacité logarithmique dans $\mathbb{C}$ et à remplacer le lemme de Bernstein par un théorème de majoration polynomiale utilisant uniquement le diamètre transfini. C'est cette approche que nous adoptons ici et elle va nous permettre d'une part de fournir une nouvelle démonstration du théorème de Perez-Marco dans $\mathbb{C}$ et d'autre part d'adapter ce théorème au cadre $p$-adique.[1]

## 4.1 Théorème de Perez-Marco généralisé

Soit $K_1$ un sous-corps valué complet de $\widetilde{K}$ et $K_2$ un sous-corps valué complet et localement compact de $K_1$. Lorsque $\widetilde{K} = \mathbb{C}$, forcément, $K_2 = \mathbb{R}$ ou $K_2 = \mathbb{C}$. Lorsque $\widetilde{K} = \mathbb{C}_p$, forcément, $K_2$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

1. La généralisation au cadre $p$-adique ne présente d'intérêt que pour $m \geqslant 2$, car il est classique qu'en dimension 1, tout $\lambda \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}$ non racine de l'unité est diophantien, ce qui entraîne que, dans le cas non-résonant, la linéarisation est toujours possible (voir [HY83])

**Théorème 4.1.1.** *Si $m,d \in \mathbb{N}^*$, si les $h_k : (K_1^m,0) \longrightarrow (K_1^m,0)$ sont des séries entières en $m$ variables de valuation supérieure ou égale à 2 et de rayon de convergence strictement positif, si $L \in GL_m(K_1)$ est non-résonante et si on pose*

$$f_t(z) = Lz + \sum_{k=0}^{d} t^k h_k(z) \text{ et } E = \{t \in K_2 / f_t \text{ est linéarisable}\},$$

*alors,*

$$\text{ou bien } E = K_2 \text{ ou bien } d^*(E) = 0$$

*Démonstration :*

On s'intéresse à la linéarisation de la famille $(f_t : K_1^m \longrightarrow K_1^m)_{t\in K_2}$ avec $f_t$ de la forme

$$f_t(z) = Lz + \sum_{k=0}^{d} t^k h_k(z)$$

avec $L \in GL_m(K_1)$ non-résonante, $h_k$ de la forme $h_k(z) = \sum_{j\geqslant 2} h_k^{(j)}(z)$ de rayon de convergence strictement positif et $h_k^{(j)}(z)$ polynôme homogène de degré $j$ en $m$ variables et à valeurs dans $K_1^m$.

On peut aussi écrire $f_t$ sous la forme

$$f_t(z) = Lz + \sum_{j=2}^{+\infty} f_t^{(j)}(z)$$

avec $f_t^{(j)}(z) = \sum_{0\leqslant k\leqslant d} t^k h_k^{(j)}(z)$ polynôme homogène de degré $j$ en $m$ variables et à valeurs dans $K_1^m$ et dont les composantes des coefficients sont des polynômes en $t$ de degré au plus $d$.

Pour tout $t \in K_2$, comme $L$ est non-résonante, d'après la proposition 2.2.8, $f_t$ possède une unique linéarisante formelle

$$\varphi_t(z) = z + \sum_{j\geqslant 2} \varphi_t^{(j)}(z) = \sum_{j\geqslant 1} \varphi_t^{(j)}(z)$$

et d'après la formule (2.4), avec les notations du chapitre 2, elle est déterminée par

$$\varphi_t^{(1)}(z) = z \quad \text{et, pour tout } q \geqslant 2,$$

$$\varphi_t^{(q)}(z) = \left(\mathcal{L}_L^{(q)}\right)^{-1} \left( \mathcal{P}_q \left( \sum_{2\leqslant l\leqslant q} f_t^{(l)} \left( \sum_{1\leqslant il\leqslant q} \varphi_t^{(i)}(z) \right)\right)\right) \tag{4.1}$$

De cette relation, on déduit immédiatement par récurrence que les composantes des coefficients des polynômes homogènes $\varphi_t^{(q)}$ sont des polynômes en $t$ à coefficients dans $K_1$.

De plus, en notant $W_q$ le degré maximum, en tant que polynôme en $t$, des composantes des coefficients du polynôme homogène $\varphi_t^{(q)}$, on a le lemme suivant

**Lemme 4.1.2.**

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \quad W_q \leqslant d(q-1)$$

*Démonstration du lemme:*

D'après la formule (4.1), comme on a à faire à des polynômes homogènes et comme les composantes des coefficients des $f_t^{(l)}$ sont des polynômes en $t$ de degré au plus $d$, on a $W_1 = 0$ et, pour tout $q \geqslant 2$,

$$W_q \leqslant \max_{\substack{2 \leqslant l \leqslant q \\ 1 \leqslant il \leqslant q}} (d + lW_i) \tag{4.2}$$

On obtient alors que

- pour $q = 1$, le lemme est vrai, car $W_1 = 0 = d(1-1)$.
- pour $q \geqslant 2$, si on suppose que pour tout $j \in [\![1,q-1]\!]$, $W_j \leqslant d(j-1)$,

alors, on tire de (4.2) que

$$W_q \leqslant \max_{\substack{2 \leqslant l \leqslant q \\ 1 \leqslant il \leqslant q}} (d + lW_i)$$

Or, pour tout $l \in [\![2,q]\!]$ et tout $i \in [\![1,\frac{q}{l}]\!]$, on a

$$\begin{aligned} d + lW_i &\leqslant d + ld(i-1) \\ &\leqslant d + dil - ld \\ &\leqslant d + dq - 2d \\ &\leqslant dq - d \\ &\leqslant d(q-1) \end{aligned}$$

d'où

$$W_q \leqslant d(q-1)$$

Par récurrence, il s'en suit que le lemme est vrai.

Pour tout $t \in K_2$ et $q \in \mathbb{N}^*$, notons aussi $B_q(t)$, le maximum (à $t$ fixé) des valeurs absolues des composantes des coefficients du polynôme homogène $\varphi_t^{(q)}$. On a $E = \{t \in K_2 / f_t \text{ est linéarisable}\}$. Posons alors, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$F_q = \{t \in K_2 \quad / \quad |t| \leqslant q\}$$

et

$$G_q = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \{t \in F_q \quad / \quad B_j(t) \leqslant q^j\}$$

**Remarque 4.1.3.** *Les $G_q$ sont des fermés bornés dans $K_2$ qui est localement compact, donc les $G_q$ sont des compacts.*

**Lemme 4.1.4.**

$$E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$$

*Démonstration du lemme:*

•Si $t \in E$. Alors, $f_t$ est linéarisable et $\varphi_t(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_{\alpha,t} z^\alpha$ est une série entière de rayon $R_{\varphi_t} > 0$. Posons $r = \frac{R_{\varphi_t}}{2}$ et $z_0 = (r,r,\ldots,r)$. Comme $||z_0|| < R_\varphi$, $\varphi_t(z_0)$ est convergente et donc $a_{\alpha,t} r^{||\alpha||} \xrightarrow[||\alpha|| \to +\infty]{} 0$. Il existe alors un réel $M > 1$ tel que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^m \quad ||a_{\alpha,t} r^{||\alpha||}|| \leqslant M$. En[2] posant $q_0 = 3 + \left[\frac{M}{r}\right] + \left[\ |t|\ \right]$, on obtient, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$ tel que $||\alpha|| \geqslant 1$,

$$||a_{\alpha,t}|| \leqslant \frac{M}{r^{||\alpha||}} \leqslant \left(\frac{M}{r}\right)^{||\alpha||} \leqslant {q_0}^{||\alpha||} \tag{4.3}$$

et

$$t \in F_{q_0} \tag{4.4}$$

d'où

$$B_{||\alpha||}(t) \leqslant {q_0}^{||\alpha||} \tag{4.5}$$

et

$$t \in F_{q_0} \tag{4.6}$$

On déduit alors de (4.5) et (4.6) que $t \in G_{q_0}$, d'où $t \in \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$.

2. On note $[x]$ la partie entière du réel $x$, c'est-à-dire l'unique entier $n$ vérifiant $n \leqslant x < n+1$ .

$\bullet$Si $t \in \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, alors il existe $q_0$ tel que $t \in G_{q_0}$. On a alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$ tel que $||\alpha|| \geqslant 1$, $||a_{\alpha,t}|| \leqslant B_{||\alpha||}(t) \leqslant {q_0}^{||\alpha||}$. Donc $\varphi_t(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_{\alpha,t} z^\alpha$ est de rayon $R_{\varphi_t} \geqslant \dfrac{1}{q_0} > 0$. Par conséquent, $f_t$ est linéarisable et $t \in E$.

*Fin de la démonstration du théorème:*

Pour démontrer le théorème 4.1.1, il suffit de prouver que si $d^*(E) > 0$, alors $E = K_2$. Supposons donc que $d^*(E) > 0$. D'après le lemme 4.1.4, on a $E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, d'où $d^*\left(\bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q\right) > 0$. Grâce au théorème 3.2.8, on en déduit qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $d^*(G_{q_0}) > 0$. Or, $K_2$ est localement compact et comme d'après la remarque 4.1.3, $G_{q_0}$ est compact, on déduit de la proposition 3.2.5 que $d^*(G_{q_0}) = d(G_{q_0})$. Par conséquent, $d(G_{q_0}) > 0$.
Soit $t \in K_2$, $q \geqslant 2$ et $C(t)$ une des composantes d'un des coefficients du polynôme homogène $\varphi_t^{(q)}(z)$ de degré $q$ en $z$ . Comme $d(G_{q_0}) > 0$ avec $G_{q_0} \subseteq B_f(0,q_0)$ et comme $\deg C \leqslant W_q \leqslant d(q-1) \leqslant dq$ , on a, d'après le théorème 3.1.10

$$|C(t)| \leqslant \max_{a \in G_{q_0}} |C(a)| \quad \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^{dq} \ \Big(|t| + q_0\Big)^{dq}.$$

Or

$$\max_{a \in G_{q_0}} |C(a)| \leqslant \max_{a \in G_{q_0}} B_q(a) \leqslant {q_0}^q$$

d'où

$$|C(t)| \leqslant {q_0}^q \ \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^{dq} \ \Big(|t| + q_0\Big)^{dq}$$

c'est-à-dire

$$|C(t)| \leqslant \left(q_0 \ \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^{d} \ \Big(|t| + q_0\Big)^{d}\right)^q$$

et par conséquent,

$$B_q(t) \leqslant \left( q_0 \left( \frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^d \left( |t| + q_0 \right)^d \right)^q$$

Ainsi, $t \in E$, ce qui entraîne finalement,

$$E = K_2.$$

**Remarque 4.1.5.** *Lorsque $\widetilde{K} = \mathbb{C}_p$, ce théorème ne présente d'intérêt que pour $m \geqslant 2$, car il est classique qu'en dimension 1, tout $\lambda \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}$ non racine de l'unité est diophantien, ce qui entraîne que, dans le cas non-résonant, la linéarisation est toujours possible (voir [HY83])*
*En dimension supérieure, la situation n'est pas triviale. Dans [HY83] est démontré le théorème suivant :*

> *Il existe $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{Z}_p$ et une fonction entière $\theta(z) = \sum_{k\geqslant 2} a_k z^k$ tels que $g(z_1,z_2) = (\lambda_1 z_1,\lambda_2 z_2) + (\theta(z_2),0)$ soit non linéarisable .*

*En appliquant le Théorème 4.1.1 à la famille*

$$f_t(z_1,z_2) = g(z_1,z_2) + t \left( \sum_{\alpha_1+\alpha_2\geqslant 2} {z_1}^{\alpha_1} {z_2}^{\alpha_2}, \sum_{\alpha_1+\alpha_2\geqslant 2} {z_1}^{\alpha_1} {z_2}^{\alpha_2} \right),$$

*on obtient*

**Corollaire 4.1.6.** *Il existe $t \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ tel que $f_t$ soit non linéarisable.*

Ceci donne des exemples de non-linéarisabilité de fonctions d'une forme plus générale.

**Remarque 4.1.7.** *Pour démontrer le théorème précédent, nous avons utilisé le fait que $K_2$ est localement compact à 2 reprises: lorsque nous avons utilisé la remarque 4.1.3 et lorsque nous avons utilisé la proposition 3.2.5. Cela nous a permis de pouvoir ensuite utiliser le théorème 3.1.10.*

*Si on ne suppose pas que $K_2$ est localement compact, on ne peut pas appliquer ce qui précède*[3]*. Toutefois, lorsque $K_2 = K_1 = \mathbb{C}_p$, en utilisant le fait que $\mathbb{C}_p$ est à la fois complet et algébriquement clos, on peut démontrer un théorème de tout ou presque rien plus faible:*

**Théorème 4.1.8.** *Si $K_2 = \mathbb{C}_p$ avec les mêmes notations qu'au théorème 4.1.1, on a*

*ou bien $E = \mathbb{C}_p$, ou bien $E$ est d'intérieur vide.*

3. Même si on essaie de remplacer les "compacts" par des "fermés bornés", on n'arrive pas à conclure.

*Démonstration :*

On va utiliser les mêmes notations que dans la démonstration du théorème 4.1.1. Pour démontrer le résultat, il suffit de montrer que si $E$ est d'intérieur non vide, alors, $E = \mathbb{C}_p$.

Supposons que $E$ est d'intérieur non vide. D'après le lemme 4.1.4, on a $E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$. Par conséquent, comme les $G_q$ sont des fermés (bornés), le théorème de Baire entraîne qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $G_{q_0}$ soit d'intérieur non vide. Il existe alors $a_0$ point de l'intérieur de $G_{q_0}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $B(a_0,r) \subseteq G_{q_0}$.
Soit[4] $b_0 \in B(a_0,r) \setminus \{a_0\}$. On a $r_0 = |b_0 - a_0| < r$ et $B_f(a_0,r_0) \subseteq B(a_0,r) \subseteq G_{q_0}$.
Soit $t \in K_2$, $q \geqslant 2$ et $C(t)$ une des composantes d'un des coefficients du polynôme homogène $\varphi_t^{(q)}(z)$ de degré $q$ en $z$ . Posons $P(X) = C(a_0 + (b_0 - a_0)X)$.
comme $\deg P = \deg C \leqslant W_q \leqslant d(q-1) \leqslant dq$ , on a, d'après la proposition 3.1.16 appliquée au point $z = \dfrac{t - a_0}{b_0 - a_0}$,

$$|P(z)| \leqslant \max_{a \in B_f(0,1)} |P(a)| \quad 2^{dq} \quad \big(\max(|z|,1)\big)^{dq} \tag{4.7}$$

Or

$$P(z) = P\left(\frac{t-a_0}{b_0-a_0}\right) = C\left(a_0 + (b_0-a_0)\frac{t-a_0}{b_0-a_0}\right) = C(a_0+t-a_0) = C(t) \tag{4.8}$$

et, comme $a_0 \in G_{q_0}$, on a aussi

$$|z| = \left|\frac{t-a_0}{b_0-a_0}\right| = \frac{|t-a_0|}{|b_0-a_0|} = \frac{|t-a_0|}{r_0} \leqslant \frac{1}{r_0}\max(|t|,|a_0|) \leqslant \frac{1}{r_0}\max(|t|,q_0) \tag{4.9}$$

On déduit alors de (4.7), (4.8) et (4.9) que

$$|C(t)| \leqslant \max_{a \in B_f(0,1)} |P(a)| \quad \left(\frac{2}{r_0}\right)^{dq} \quad \big(\max(|t|,q_0,r_0)\big)^{dq} \tag{4.10}$$

4. Un tel point existe car $K_2$ contient $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{Q}$, on peut trouver des nombres ayant une valeur absolue aussi petite que l'on veut.

Par ailleurs, pour tout $a \in B_f(0,1)$, on a $P(a) = C\big(a_0 + (b_0 - a_0)a\big)$
avec $a_0 + (b_0 - a_0)a \in B_f(a_0,r_0) \subseteq G_{q_0}$.
D'où $|P(a)| = |C\big(a_0 + (b_0 - a_0)a\big)| \leqslant B_q\big(a_0 + (b_0 - a_0)a\big) \leqslant {q_0}^q$
Ainsi

$$\max_{a \in B_f(0,1)} |P(a)| \leqslant {q_0}^q \tag{4.11}$$

On déduit alors de (4.10) et (4.11) que

$$|C(t)| \leqslant {q_0}^q \ \left(\frac{2}{r_0}\right)^{dq} \ \big(\max\left(|t|,q_0,r_0\right)\big)^{dq} \tag{4.12}$$

d'où

$$|C(t)| \leqslant \left(q_0 \ \left(\frac{2}{r_0}\right)^{d} \ \big(\max\left(|t|,q_0,r_0\right)\big)^{d}\right)^q \tag{4.13}$$

et par conséquent,

$$B_q(t) \leqslant \left(q_0 \ \left(\frac{2}{r_0}\right)^{d} \ \big(\max\left(|t|,q_0,r_0\right)\big)^{d}\right)^q \tag{4.14}$$

Ainsi, $t \in E$, ce qui entraîne finalement,

$$E = \mathbb{C}_p.$$

## 4.2 Généralisation du théorème d'Il'Yashenko

Dans cette section, nous allons montrer que le théorème d'Il'Yashenko [Il'79], démontré par Il'Yashenko dans le cadre complexe, est encore valable dans le cadre $p$-adique.

**Théorème 4.2.1.** *Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des séries entières en $m$ variables et à valeurs dans $K_1^m$ de rayon de convergence strictement positif et de valuation supérieure ou égale à 2.*
*Notons $\mathcal{B}$ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie par $\mathcal{B}(g) = g \circ L - L \circ g$. Soit $h \in \mathcal{E}$.*

*Si $h \notin Im(\mathcal{B})$, alors* $d^*\left(\{t \in K_2 \ \ / \ \ f_t = L + th \text{ linéarisable}\}\right) = 0$.

*En particulier, il existe $t \in B_f(0,1)$ tel que $f_t = L + th$ soit non-linéarisable.*

*Démonstration :*

Notons $f_t(z) = Lz + th(z)$ et posons $E = \{t \in K_2/f_t$ est linéarisable$\}$. Pour démontrer le théorème 4.2.1, il suffit de prouver que si $d^*(E) > 0$, alors $h \in Im(\mathcal{B})$. Supposons donc que $d^*(E) > 0$. D'après le lemme 4.1.4, on a $E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, d'où $d^*\left(\bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q\right) > 0$. Grâce au théorème 3.2.8, on en déduit qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $d^*(G_{q_0}) > 0$. Or, $K_2$ est localement compact et comme d'après la remarque 4.1.3, $G_{q_0}$ est compact, on déduit de la proposition 3.2.5 que $d^*(G_{q_0}) = d(G_{q_0})$. Par conséquent, $d(G_{q_0}) > 0$.

Soit $t \in B_f(0,1)$, $q \geqslant 2$ et $C(t)$ une des composantes d'un des coefficients du polynôme homogène $\varphi_t^{(q)}(z)$ de degré $q$ en $z$ . Comme $d(G_{q_0}) > 0$ avec $G_{q_0} \subseteq B_f(0,q_0)$ et

comme $\deg C \leqslant W_q \leqslant d(q-1) \leqslant dq$ , on a, d'après le théorème 3.1.10

$$|C(t)| \leqslant \max_{a \in G_{q_0}} |C(a)| \quad \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^{dq} \; \Big(|t| + q_0\Big)^{dq}.$$

Or

$$\max_{a \in G_{q_0}} |C(a)| \leqslant \max_{a \in G_{q_0}} B_q(a) \leqslant {q_0}^q$$

d'où

$$|C(t)| \leqslant {q_0}^q \; \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^{dq} \; \Big(|t| + q_0\Big)^{dq}$$

c'est-à-dire

$$|C(t)| \leqslant \left(q_0 \; \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^{d} \; \Big(|t| + q_0\Big)^{d}\right)^q$$

et par conséquent, comme on a également $|t| \leqslant 1$, on a

$$B_q(t) \leqslant \left(q_0 \; \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^{d} \; \Big(1 + q_0\Big)^{d}\right)^q \tag{4.15}$$

Ainsi [5], le rayon $R_{\varphi_t}$ de la série $\varphi_t(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m} a_{\alpha,t} z^\alpha$ est supérieur ou égal à $\dfrac{1}{\left(q_0 \left(\dfrac{2}{d(G_{q_0})}\right)^d \left(1+q_0\right)^d\right)}$, et ceci est vrai pour tout $t \in B_f(0{,}1)$.

Mais, comme les $a_{\alpha,t}$ sont des polynômes en t, la série $\varphi_t(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m} a_{\alpha,t} z^\alpha$ peut aussi être vue comme une série $\psi(z_1,z_2,\ldots,z_m,t) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^{m+1}} b_\beta z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \ldots z_m^{\beta_m} t^{\beta_{m+1}}$ en $m+1$ variables [6] et, en posant $R_0 = \min\left(1, \dfrac{1}{\left(q_0 \left(\dfrac{2}{d(G_{q_0})}\right)^d \left(1+q_0\right)^d\right)}\right)$, on obtient [7] que $R_\psi \geqslant R_0 > 0$.

La série $\psi(z_1,z_2,\ldots,z_m,t) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^{m+1}} b_\beta z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \ldots z_m^{\beta_m} t^{\beta_{m+1}}$ est alors dérivable en n'importe laquelle des variables, en particulier en $t$.

Pour tout $z\in K_1^m$ tel que $||z||<R_0$, considérons l'application $\eta_z : B_f(0{,}1) \longrightarrow K_1^m$ définie par

$$\eta_z(t) = \psi(z_1,z_2,\ldots,z_m,t) = \varphi_t(z)$$

Grâce à (4.15), on contrôle parfaitement les valeurs absolues de toutes les composantes de tous les coefficients des $\varphi_t$ pour $t \in B_f(0{,}1)$. On peut alors en déduire qu' il existe $\varepsilon \in ]0, \min(1,R_0)[$ vérifiant, pour tout $t \in B_f(0{,}1)$, $\varphi_t(B(0,\varepsilon))$ inclus dans le domaine de définition de $f_t$ et $L(B(0,\varepsilon)) \subseteq B(0,R_0)$.

Par conséquent, pour tout $t \in B(0{,}1)$ et tout $z \in B(0,\varepsilon)$, on a

$$f_t(\varphi_t(z)) = \varphi_t(Lz) \tag{4.16}$$

c'est-à-dire

$$f_t(\eta_z(t)) = \eta_{Lz}(t) \tag{4.17}$$

5. En utilisant les notations de la section précédente,
6. toujours à valeurs dans $K_1^m$
7. car on vient de voir que cette série converge pour tout $(z_1,z_2,\ldots,z_m,t)$ vérifiant $\forall k \in [[1,m]] \quad |z_k| < \dfrac{1}{\left(q_0 \left(\dfrac{2}{d(G_{q_0})}\right)^d \left(1+q_0\right)^d\right)}$ et $|t| \leqslant 1$.

c'est-à-dire

$$L\eta_z(t) + th\left(\eta_z(t)\right) = \eta_{Lz}(t) \tag{4.18}$$

c'est-à-dire, en notant $b(t) = h\left(\eta_z(t)\right)$,

$$L\eta_z(t) + tb(t) = \eta_{Lz}(t) \tag{4.19}$$

En dérivant ces séries entières par rapport à $t$, on obtient

$$L\eta'_z(t) + b(t) + tb'(t) = \eta'_{Lz}(t) \tag{4.20}$$

et en prenant $t = 0$, on en déduit que

$$L\eta'_z(0) + b(0) + 0b'(0) = \eta'_{Lz}(0) \tag{4.21}$$

c'est-à-dire

$$L\eta'_z(0) + h\left(\eta_z(0)\right) = \eta'_{Lz}(0) \tag{4.22}$$

Or, pour tout $y \in B(0,\varepsilon)$, on[8] a $\eta_y(0) = \varphi_0(y) = y$, d'où $h\left(\eta_z(0)\right) = h(z)$.
Ce qui entraîne

$$h\left(z\right) = \eta'_{Lz}(0) - L\eta'_z(0) \tag{4.23}$$

De plus, pour tout $y \in B(0,\varepsilon)$ et tout $u \in B(0,1)$, on a

$$\eta'_y(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{\beta\in\mathbb{N}^{m+1}} b_\beta y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_m^{\beta_m} t^{\beta_{m+1}}\right)$$

Donc $\eta'_y(t)$ est une série entière (de rayon strictement positif) en $(y_1,y_2,\dots,y_m,t)$ et par conséquent, $\eta'_y(0)$ est une série entière (de rayon strictement positif) en $y = (y_1,y_2,\dots,y_m)$. Nous la noterons $\gamma(y)$.
Ainsi, $\eta'_y(0) = \gamma(y)$ et l'équation (4.23) devient

$$h\left(z\right) = \gamma(Lz) - L\gamma(z) \tag{4.24}$$

On a alors $h = \mathcal{B}(\gamma)$ , d'où finalement,

$$h \in Im(\mathcal{B}).$$

□

8. car, si $t = 0$, alors $f_t$ est déjà linéaire et par unicité de la linéarisante formelle, on a $\varphi_0 = I_d$.

**Remarque 4.2.2.** *Dans le cas complexe, c'est grâce à ce théorème que Yoccoz (voir [Yoc95]) démontre que :*

*Pour tout $n \geqslant 2$ et tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, si $A$ possède une valeur propre de module $1$ dont le sous-espace caractéristique associé diffère du sous-espace propre, alors, il existe des germes de difféomorphismes holomorphes de la forme $f(z) = Az + \dots$ qui ne sont pas linéarisables.*

**Remarque 4.2.3.** *Dans le cas complexe, ce théorème est aussi l'un des outils qui permet à DeLatte et à Gramchev (voir [DG02]) de démontrer que :*

*Pour tout $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \varepsilon \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ non-résonante avec $|\lambda| > 1$, $|\mu| < 1$ et $\varepsilon \neq 0$, il existe des germes de difféomorphismes holomorphes de la forme $f(z) = Az + \dots$ qui ne sont pas linéarisables.*

## 4.3 Information diophantienne dans le théorème de Perez-Marco

Dans cette section, on supposera que $K_1 = K_2 = \mathbb{C}$ et que $m = 1$. Dans le théorème de Perez-Marco, pour obtenir qu'une famille $f_t$ est non-linéarisable à l'exception d'un ensemble de mesure nulle de $t$, on s'arrange pour faire apparaître dans cette famille un élément $f_{t_0}$ dont on sait déjà qu'il est non-linéarisable. Ainsi, comme ou bien $E = \mathbb{C}$ ou bien $d^*(E) = 0$, comme $t_0 \notin E$, forcément, $d^*(E) = 0$.

Ici, on va construire une famille sur laquelle on récupérera directement une information diophantienne, sans rien connaître à l'avance sur aucun membre de cette famille.

**Théorème 4.3.1.** *Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Posons $\lambda = e^{i2\pi\theta}$ et notons $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \geqslant 0}$ la suite des réduites de $\theta$. Soit $\mathcal{K}$ désignera une partie infinie de $\mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$ et $f(z) = \lambda z + \sum_{n=3}^{+\infty} c_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ .*

*On suppose que $\forall k \in \mathcal{K} \quad c_{1+q_k} \neq 0$ et on considère la famille $(f_t)_{t \in \mathbb{C}}$ définie par*

$$f_t(z) = \lambda z + \sum_{n=3}^{+\infty} c_n t^{n-2} z^n.$$

*En posant $E = \{t \in \mathbb{C} \ / \ f_t \text{ linéarisable}\}$, on a*

*ou bien $E = \mathbb{C}$ et $\exists M > 1 \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad \dfrac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \dfrac{\ln(|c_{1+q_k}|)}{q_k} \leqslant M$.*

*ou bien $d^*(E) = 0$.*

**Remarque 4.3.2.**

- Comme $f_0(z) = \lambda z$, on a automatiquement $0 \in E$.
- En notant $R_t$ le rayon de la série entière $f_t$, on a $\forall t \in \mathbb{C}^* \quad R_t \geqslant \dfrac{R}{t} > 0$
- Comme $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, les $f_t$ sont formellement linéarisables et leur linéarisante

formelle $\varphi_t$ s'écrit sous la forme $\varphi_t(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t) z^n$ où les $b_n(t)$ sont déterminés par la relation de récurrence suivante :

$$b_1(t) = 1 \text{ et } b_n(t) = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{2 \leqslant r \leqslant n} a_r(t) \sum_{\substack{(j_1, j_2, \ldots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} j_k = n}} \prod_{1 \leqslant k \leqslant r} b_{j_k}(t)$$

avec

$$a_2(t) = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 3 \quad a_n(t) = c_n t^{n-2} \qquad \left( i.e. \quad f_t(z) = \lambda z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n(t) z^n \right)$$

*Démonstration du théorème*

On va utiliser les notations du théorème 4.1.1 et poser $F_q = \{t \in \mathbb{C} \quad / \quad |t| \leqslant q\}$ et $G_q = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \{t \in F_q \quad / \quad |b_j(t)| \leqslant q^j\}$. Un analogue du lemme 4.1.4 nous donne que $E = \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} G_q$. (et que les $G_q$ sont des compacts.)

**Lemme 4.3.3.** *$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $b_n(t)$ est un polynôme en $t$.*

*Démonstration :*

Récurrence immédiate en remarquant que les $a_k(t)$ sont des polynômes en $t$.

**Lemme 4.3.4.**

- $\deg(b_1)=0$
- $\forall n \geqslant 2 \qquad \deg(b_n) \leqslant n - 2$
- $\forall n \geqslant 3 \quad \deg\left( \sum_{m=2}^{n-1} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1, j_2, \ldots, j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m \\ j_1 + j_2 + \cdots + j_m = n}} b_{j_1}(t) b_{j_2}(t) \ldots b_{j_m}(t) \right) \leqslant n-3.$
- $\forall n \geqslant 3 \qquad \mathrm{val}(b_n) \geqslant \dfrac{n-1}{2}$

*Démonstration :*

Par définition des $a_m$, on a $\forall m \geqslant 2 \qquad \deg(a_m) \leqslant m - 2$ .

Par définition des $b_n$, on en déduit que $\deg(b_1)$=0, $\deg(b_2)$=0.

On a donc $\deg(b_1) \leqslant 1-1$ et $\deg(b_2) \leqslant 2-2$.

Considérons la propriété $\mathcal{P}(k)$ : " $\forall l \in [\![2,k-1]\!] \quad \deg(b_l) \leqslant l-2$ "

On a déjà vu que $\mathcal{P}(3)$ est vraie.

Soit $n \geqslant 3$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors $\forall l \in [\![2,n-1]\!]$ $\deg(b_l) \leqslant l-2$

Il suffit de montrer que $\deg(b_n) \leqslant n-2$.

Or

$$b_n(t) = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{m=2}^{n} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1,j_2,\dots,j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m \\ j_1+j_2+\dots+j_m = n}} b_{j_1}(t) b_{j_2}(t) \dots b_{j_m}(t)$$

d'où, comme $b_1(t) = 1$,

$$b_n(t) = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} a_n(t) + \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{m=2}^{n-1} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1,j_2,\dots,j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m \\ j_1+j_2+\dots+j_m = n}} b_{j_1}(t) b_{j_2}(t) \dots b_{j_m}(t)$$

Comme $\deg(a_n) \leqslant n-2$, il suffit de montrer que

$$\deg \left( \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{m=2}^{n-1} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1,j_2,\dots,j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m \\ j_1+j_2+\dots+j_m = n}} b_{j_1}(t) b_{j_2}(t) \dots b_{j_m}(t) \right) \leqslant n-2.$$

Nous allons même montrer que

$$\deg \left( \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{m=2}^{n-1} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1,j_2,\dots,j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m \\ j_1+j_2+\dots+j_m = n}} b_{j_1}(t) b_{j_2}(t) \dots b_{j_m}(t) \right) \leqslant n-3.$$

Soit $m \in [\![2,n-1]\!]$ et $(j_1,j_2,\dots,j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m$ tels que $j_1+j_2+\dots+j_m = n$

Comme $m < n$, il existe $k_0 \in [\![1,m]\!]$ tel que $j_{k_0} \geqslant 2$.

On a alors $\deg(a_m) \leqslant m-2$ et $\forall k \in [\![1,m]\!] \setminus \{k_0\} \quad \deg(b_{j_k}) \leqslant j_k - 1$

car $j_k = 1$ ou $2 \leqslant j_k \leqslant n-1$ car $m > 1$ et $j_1+j_2+\dots+j_m = n$.

De plus[9], $\deg(b_{j_{k_0}}) \leqslant j_{k_0} - 2$ .

On a alors :

$$\deg\left(a_m(t) b_{j_1}(t) b_{j_2}(t) \dots b_{j_m}(t)\right) \leqslant m-2+(j_1-1)+(j_2-1)+\dots \\ +\dots+(j_{k_0}-2)+\dots+(j_m-1)$$

9. car $2 \leqslant j_{k_0} \leqslant n-1$ car $m > 1$ et $j_1+j_2+\dots+j_m = n$.

d'où

$$\deg\left(a_m(t)b_{j_1}(t)b_{j_2}(t)\dots b_{j_m}(t)\right) \leqslant m-2+(j_1+j_2+\dots+j_m)-m-1 \leqslant n-3$$

Par conséquent $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc démontré que

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \deg(b_n) \leqslant n-2$$

Au passage, on a aussi démontré que

$$\forall n \geqslant 3 \quad \deg\left(\sum_{m=2}^{n-1} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1,j_2,\dots,j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m \\ j_1+j_2+\dots+j_m=n}} b_{j_1}(t)b_{j_2}(t)\dots b_{j_m}(t)\right) \leqslant n-3.$$

Il reste à montrer que $\forall n \geqslant 3 \ \ val(b_n) \geqslant \dfrac{n-1}{2}$.

On a $b_1(t) = 1$ et $b_2(t) = 0$ (car $a_2(t) = 0$),

donc $val(b_1) = 0 \geqslant \dfrac{1-1}{2}$ et $val(b_2) = +\infty \geqslant \dfrac{2-1}{2}$ .

Considérons la propriété $\mathcal{Q}(k)$: "$\forall j \in [\![1,k-1]\!] \ \ val(b_j) \geqslant \dfrac{j-1}{2}$ ".

On a déjà vu que $\mathcal{Q}(3)$ est vraie.

Soit $n \geqslant 3$ et supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.

Il suffit de montrer que $val(b_n) \geqslant \dfrac{n-1}{2}$.

Or $b_n(t) = \dfrac{1}{\lambda^n - \lambda} \displaystyle\sum_{2 \leqslant r \leqslant n} \sum_{\substack{(j_1,j_2,\dots,j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} j_k = n}} a_r(t) \prod_{1 \leqslant k \leqslant r} b_{j_k}(t)$

Soit $r \in [\![2,n]\!]$ et $(j_1,j_2,\dots,j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que $j_1+j_2+\dots+j_r = n$.

Si $r = 2$, alors $a_2(t) = 0$ et donc $a_r(t) \displaystyle\prod_{1 \leqslant k \leqslant r} b_{j_k}(t) = 0$.

On peut donc supposer $r \geqslant 3$.

En remarquant que $r \geqslant 2$ entraîne $j_1 < n$, $j_2 < n$, $\ldots$, $j_r < n$, on a

$$\begin{aligned}
val\left(a_r \prod_{1\leqslant k\leqslant r} b_{j_k}\right) &\geqslant val(a_r) + \sum_{1\leqslant k\leqslant r} val\left(b_{j_k}\right)\\
&\geqslant r-2+\sum_{1\leqslant k\leqslant r}\frac{j_k-1}{2}\\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(2r-4+\sum_{1\leqslant k\leqslant r} j_k - \sum_{1\leqslant k\leqslant r} 1\right)\\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(2r-4+n-r\right)\\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(r-4+n\right)\\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(-1+n\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, $val(b_n) \geqslant \dfrac{n-1}{2}$ et donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. D'où le résultat.

□

**Remarque 4.3.5.** $\forall n \geqslant 3 \quad \dfrac{n-1}{2} \leqslant \mathrm{val}(b_n) \quad$ et $\quad \deg(b_n) \leqslant n-2.$

**Lemme 4.3.6.**

$\forall k \geqslant 4 \quad b_{1+q_k}(t) = \dfrac{c_{1+q_k}}{\lambda^{1+q_k}-\lambda} t^{q_k-1} +$ *polynôme*[10] *de degré inférieur ou égal à* $q_k - 2$.

*Démonstration :*

Soit $k \geqslant 3$. On a $q_k \geqslant k \geqslant 3$ et d'après le lemme précédent, on a

$$b_{1+q_k}(t) = \frac{1}{\lambda^{1+q_k}-\lambda} a_{1+q_k}(t) + \frac{1}{\lambda^{1+q_k}-\lambda} \sum_{m=2}^{1+q_k-1} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1,j_2,\ldots,j_m)\in(\mathbb{N}^*)^m\\ j_1+j_2+\cdots+j_m=1+q_k}} \prod_{1\leqslant r\leqslant m} b_{j_r}(t)$$

10. en t

avec $\deg\left(\dfrac{1}{\lambda^{1+q_k}-\lambda}\displaystyle\sum_{m=2}^{1+q_k-1} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1,j_2,\ldots,j_m)\,\in\,(\mathbb{N}^*)^m \\ j_1+j_2+\cdots+j_m=1+q_k}} b_{j_1}(t)b_{j_2}(t)\ldots b_{j_m}(t)\right) \leqslant 1+q_k-3 \leqslant q_k-2$

d'où

$$b_{1+q_k}(t) = \frac{1}{\lambda^{1+q_k}-\lambda}\, a_{1+q_k}(t) + \text{ polynôme}^{11} \text{ de degré inférieur ou égal à } q_k-2.$$

d'où

$$b_{1+q_k}(t) = \frac{c_{1+q_k}}{\lambda^{1+q_k}-\lambda}\, t^{q_k-1} + \text{polynôme en t de degré inférieur ou égal à } q_k-2.$$

**Lemme 4.3.7.** *Pour tout $k \in \mathcal{K}$, posons $B_{1+q_k}(T) = \dfrac{(\lambda^{1+q_k}-\lambda)}{c_{1+q_k}}\, b_{1+q_k}(T)$*

*Alors, pour tout $k \in \mathcal{K}$, $B_{1+q_k}(T)$ est un polynôme unitaire de degré $q_k-1$ .*

*Démonstration :*

Cela résulte du lemme précédent et du fait que si $k \in \mathcal{K}$, alors $c_{1+q_k} \neq 0$.

*Fin de la démonstration du théorème:*

Pour démontrer le théorème 4.3.1, on prouve dans un premier temps, d'une manière analogue à celle de la démonstration du théorème 4.1.1 que si $d^*(E) > 0$, alors $E = \mathbb{C}$. Supposons donc que $d^*(E) > 0$. Comme précédemment, en notant $F_q = \{t \in \mathbb{C} \;/\; |t| \leqslant q\}$ et $G_q = \displaystyle\bigcap_{j\in\mathbb{N}^*} \{t \in F_q \;/\; b_j(t) \leqslant q^j\}$, l'analogue du lemme 4.1.4 nous donne $E = \displaystyle\bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, d'où $d^*\left(\displaystyle\bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q\right) > 0$. Grâce au théorème 3.2.8, on en déduit qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $d^*(G_{q_0}) > 0$. Or, $G_{q_0}$ est compact, donc, on déduit de la proposition 3.2.5 que $d^*(G_{q_0}) = d(G_{q_0})$. Par conséquent, $d(G_{q_0}) > 0$. Soit $t \in \mathbb{C}$ et $q \geqslant 2$ Comme $d(G_{q_0}) > 0$ avec $G_{q_0} \subseteq B_f(0,q_0)$ et

comme $\deg b_q \leqslant q-2 \leqslant q$ , on a, d'après le théorème 3.1.10

$$|b_q(t)| \leqslant \max_{a\in G_{q_0}} |b_q(a)| \quad \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^q \left(|t| + q_0\right)^q.$$

Or

$$\max_{a\in G_{q_0}} |b_q(a)| \leqslant {q_0}^q$$

11. en t

d'où

$$|b_q(t)| \leqslant {q_0}^q \quad \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^q \ \left(|t| + q_0\right)^q.$$

c'est-à-dire

$$|b_q(t)| \leqslant \left(q_0 \ \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right) \ \left(|t| + q_0\right)\right)^q.$$

et par conséquent, $t \in E$, d'où finalement,

$$E = \mathbb{C}.$$

Dans un deuxième temps, il reste à prouver qu'il existe $M > 1$ tel que

$$\forall k \in \mathcal{K} \quad \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \frac{\ln(|c_{1+q_k}|)}{q_k} \leqslant M.$$

Soit $k \in \mathcal{K}$. D'après le lemme 4.3.7, $B_{1+q_k}$ est un polynôme unitaire de degré $q_k - 1$. Comme $d(G_{q_0}) > 0$, d'après le lemme 3.1.9, on a

$$(\mathrm{d}(G_{q_0}))^{q_k-1} \leqslant \max_{z \in G_{q_0}} |B_{1+q_k}(z)| \tag{4.25}$$

Et comme

$$\max_{z \in G_{q_0}} |B_{1+q_k}(z)| \leqslant \max_{z \in G_{q_0}} \frac{|\lambda^{1+q_k} - \lambda|}{|c_{1+q_k}|} |b_{1+q_k}(z)| \leqslant \frac{|\lambda^{1+q_k} - \lambda|}{|c_{1+q_k}|} q_0^{1+q_k} \tag{4.26}$$

En posant $\sigma = \min(1, d\big(G_{q_0}\big))$, (4.25) et (4.26) donnent

$$\sigma^{1+q_k} \leqslant \sigma^{q_k-1} \leqslant \big(\mathrm{d}(G_{q_0})\big)^{q_k-1} \leqslant \frac{|\lambda^{1+q_k} - \lambda|}{|c_{1+q_k}|} q_0^{1+q_k} \tag{4.27}$$

En posant $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma}{q_0}\right)$ et $A = \frac{1}{\delta}$, on obtient $0 < \delta < \frac{1}{2}$ et $2 < A$ et

$$\delta^{1+q_k} \leqslant \left(\frac{\sigma}{q_0}\right)^{1+q_k} \leqslant \frac{|\lambda^{1+q_k} - \lambda|}{|c_{1+q_k}|} \tag{4.28}$$

Or, en utilisant le fait que $|\lambda| = 1$ et la remarque 2.3.22, on a

$$|\lambda^{1+q_k} - \lambda| = |\lambda^{q_k} - 1| \leqslant \frac{2\pi}{q_{k+1}} \tag{4.29}$$

d'où

$$\delta^{1+q_k} \leqslant \frac{2\pi}{q_{k+1}|c_{1+q_k}|} \tag{4.30}$$

d'où

$$q_{k+1}|c_{1+q_k}| \leqslant 2\pi A^{1+q_k} \tag{4.31}$$

d'où

$$\ln(q_{k+1}) + \ln(|c_{1+q_k}|) \leqslant \ln(2\pi) + (1+q_k)\ln(A) \tag{4.32}$$

d'où

$$\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \frac{\ln(|c_{1+q_k}|)}{q_k} \leqslant \frac{\ln(2\pi)}{q_k} + \frac{1+q_k}{q_k}\ln(A) \leqslant \ln(2\pi) + 2\ln(A) \tag{4.33}$$

En posant $M = 1 + \ln(2\pi) + 2\ln(A)$, on obtient finalement $M > 1$ et

$$\forall k \in \mathcal{K} \quad \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \frac{\ln(|c_{1+q_k}|)}{q_k} \leqslant M.$$

□

**Corollaire 4.3.8.** *Si* $\left(\dfrac{\ln(q_{k+1})}{q_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *non majorée et si* $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, *alors l'ensemble* $E=\{t \in \mathbb{C} \ / \ f_t(z) = \lambda z + \dfrac{t^{m-2}z^m}{1-tz}$ linéarisable$\}$ *vérifie* $d^*(E) = 0$. *Autrement dit,* $f_t(z) = \lambda z + \dfrac{t^{m-2}z^m}{1-tz}$ *n'est quasiment jamais linéarisable.*

*Démonstration :*

En appliquant le théorème 4.3.1 à $f(z) = \lambda z + \displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty} c_n z^n$ avec $\forall n \geqslant m \quad c_n = 1$, $\mathcal{K} = [\![m,+\infty[\![$ et $E = \{t \in \mathbb{C} \ / \ f_t(z)$ linéarisable$\}$ avec $f_t(z) = \lambda z + \displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty} t^{n-2}z^n = \lambda z + \dfrac{t^{m-2}z^m}{1-tz}$, on obtient :

ou bien $E = \mathbb{C}$ et il existe $M > 1$ tel que $\forall k \in \mathcal{K} \quad \dfrac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \dfrac{\ln(|c_{1+q_k}|)}{q_k} \leqslant M$.

ou bien $d^*(E) = 0$.

Mais le premier cas est impossible car cela entraînerait que[12] pour tout $k \geqslant m$,

$$\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \frac{\ln(|1|)}{q_k} \leqslant M$$

12. On utilise ici le fait que $q_k \geqslant k$.

c'est-à-dire

$$\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} \leqslant M$$

Ce qui contredit le fait que $\left(\dfrac{\ln(q_{k+1})}{q_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est non majorée. Par conséquent, $d^*(E) = 0$.

**Remarque 4.3.9.** *Pour démontrer la non linéarisabilité de beaucoup de $f_t$, on a utilisé uniquement le théorème 4.3.1 et contrairement au théorème de Perez-Marco, il était inutile de connaître à l'avance la non-linéarisabilité d'un $f_{t_0}$.*

**Corollaire 4.3.10.** *Si* $\left(\dfrac{\ln(q_{k+1})}{{q_k}^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *non majorée , alors l'ensemble*

$E$=$\{t \in \mathbb{C}\ /\ f_t(z) = \lambda z + \dfrac{2e^{tz} - t^2z^2 - 2tz - 2}{2t^2}$ linéarisable$\}$ *vérifie* $d^*(E) = 0$.

*Autrement dit,* $f_t(z) = \lambda z + \dfrac{2e^{tz} - t^2z^2 - 2tz - 2}{2t^2}$ *n'est quasiment jamais linéarisable.*

*Démonstration :*

En appliquant le théorème 4.3.1 à $f(z) = \lambda z + \sum_{n=3}^{+\infty} c_n z^n$ avec $\forall n \geqslant 3\ \ c_n = \dfrac{1}{n!}$, $\mathcal{K} = [\![3,+\infty[\![$ et $E = \{t \in \mathbb{C}\ /\ f_t(z)$ linéarisable$\}$ avec $f_t(z) = \lambda z + \sum_{n=3}^{+\infty} t^{n-2} c_n z^n = \lambda z + \dfrac{2e^{tz} - t^2z^2 - 2tz - 2}{2t^2}$ avec $\forall n \geqslant 3\ \ c_n = \dfrac{1}{n!}$, on obtient :

ou bien $E = \mathbb{C}$ et il existe $M > 1$ tel que $\forall k \in \mathcal{K}\ \ \dfrac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \dfrac{\ln(|c_{1+q_k}|)}{q_k} \leqslant M$.

ou bien $d^*(E) = 0$.

Mais le premier cas est impossible car cela entraînerait que[13] pour tout $k \geqslant 3$,

$$\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \frac{\ln\left|\dfrac{1}{(1+q_k)!}\right|}{q_k} \leqslant M$$

d'où

$$\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} \leqslant M + \frac{\ln\left((1+q_k)!\right)}{q_k} \leqslant M + 2\left(1+q_k\right)\frac{\ln\left(1+q_k\right)}{q_k}$$

13. On utilise ici le fait que $q_k \geqslant k$.

d'où

$$\frac{\ln(q_{k+1})}{{q_k}^2} \leqslant \frac{M}{q_k} + 2\frac{(1+q_k)}{q_k}\frac{\ln(1+q_k)}{1+q_k}\frac{(1+q_k)}{q_k} \leqslant M+8$$

Ce qui contredit le fait que $\left(\frac{\ln(q_{k+1})}{{q_k}^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est non majorée. Par conséquent, $d^*(E)=0$.

**Remarque 4.3.11.** *Avec les notations du théorème 4.3.1, on a formellement*[14]*,*

$$\begin{aligned}\varphi_t(z) &= z + \sum_{n=3}^{+\infty} b_n(t)z^n = z + \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\sum_{\frac{n-1}{2}\leqslant k\leqslant n-2} u_{n,k}\ t^k\right) z^n \\ &= z + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{k+2\leqslant n\leqslant 2k+1} u_{n,k}\ z^n\right) t^k = z + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k(z)t^k = \psi_z(t)\end{aligned}$$

*avec*

- *A $t$ fixé, $\varphi_t(z)$ est une série entière en $z$.*
- *A $z$ fixé, $\psi_z(t)$ est une série entière en $t$.*
- *Ici, les $d_k(z)$ sont des polynômes en $z$*

*(dans le théorème de Perez-Marco, les $d_k(z)$ sont des séries entières en $z$ pour lesquelles il est souvent difficile de déterminer si leur rayon est strictement positif.)*

*Par ailleurs, si on pose $\widetilde{E} = \{z\in\mathbb{C}\ /\ \psi_z(t) \text{ de rayon strictement positif }\}$, on va démontrer que si $d^*(E)=0$, on a aussi $d^*(\widetilde{E})=0$. Supposons que $d^*(E)=0$ et posons $\widetilde{F_q} = \{z\in\mathbb{C}\ /\ |z|\leqslant q\}$ et $\widetilde{G}_q = \bigcap_{j\in\mathbb{N}^*}\{z\in\widetilde{F_q}\ /\ |d_j(z)|\leqslant q^j\}$. Un analogue du lemme 4.1.4 nous donne que $\widetilde{E} = \bigcup_{q\in\mathbb{N}^*}\widetilde{G}_q$. (et que les $\widetilde{G}_q$ sont des compacts.). Supposons par l'absurde que $d^*(\widetilde{E})>0$. On a alors $\widetilde{E} = \bigcup_{q=1}^{+\infty}\widetilde{G}_q$, d'où*

*$d^*\left(\bigcup_{q=1}^{+\infty}\widetilde{G}_q\right) > 0$. Grâce au théorème 3.2.8, on en déduit qu'il existe $q_0\in\mathbb{N}^*$*

*tel que $d^*(\widetilde{G}_{q_0})>0$. Or, $\widetilde{G}_{q_0}$ est compact, donc, on déduit de la proposition 3.2.5 que $d^*(\widetilde{G}_{q_0}) = d(\widetilde{G}_{q_0})$. Par conséquent, $d(\widetilde{G}_{q_0})>0$.*

*Soit $z\in B_f(0,1)$ et $q\geqslant 2$ . Comme $d(\widetilde{G}_{q_0})>0$ avec $\widetilde{G}_{q_0}\subseteq B_f(0,q_0)$ et*

*comme $\deg d_q \leqslant 2q+1$ , on a, d'après le théorème 3.1.10*

14. grâce au lemme 4.3.4

$$|d_q(z)| \leqslant \max_{a\in\widetilde{G}_{q_0}} |d_q(a)| \quad \left(\frac{2}{d\left(\widetilde{G}_{q_0}\right)}\right)^{2q+1} \quad \Big(|z|+q_0\Big)^{2q+1}.$$

*Or*

$$\max_{a\in\widetilde{G}_{q_0}} |d_q(a)| \leqslant {q_0}^q$$

*d'où*

$$|d_q(z)| \leqslant {q_0}^q\left(\frac{2}{d(\widetilde{G}_{q_0})}\right)^{2q+1} \Big(|z|+q_0\Big)^{2q+1} \leqslant {q_0}^{2q+1}\left(\frac{2}{d(\widetilde{G}_{q_0})}\right)^{2q+1} \Big(1+q_0\Big)^{2q+1}.$$

*d'où*

$$|d_q(z)| \leqslant \left(q_0 \ \left(\frac{2}{d(\widetilde{G}_{q_0})}\right) \ \Big(1+q_0\Big)\right)^{2q+1} \leqslant \left(q_0 \ \left(\frac{2}{d(\widetilde{G}_{q_0})}\right) \ \Big(1+q_0\Big)\right)^{3q}.$$

*c'est-à-dire*

$$|d_q(z)| \leqslant \left(\left(q_0 \ \left(\frac{2}{d(\widetilde{G}_{q_0})}\right) \ \Big(1+q_0\Big)\right)^{3}\right)^{q}.$$

*On en déduit d'une part, que pour tout $z \in B_f(0,1)$, $\psi_z(t)$ est de rayon strictement positif et donc que $B_f(0,1) \subseteq \widetilde{E}$ (En fait, on a même $\widetilde{E} = \mathbb{C}$)*

*En outre, en posant* $R_0 = \min\left(1, \dfrac{1}{\left(\left(q_0 \ \left(\frac{2}{d(\widetilde{G}_{q_0})}\right) \ \Big(1+q_0\Big)\right)^{3}\right)}\right)$*, on a, pour tout $(z,t) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $|z| < R_0$ et $|t| < R_0$ , la série entière en deux variables* $\Psi(z,t) = \psi_z(t) = z + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k(z)t^k = z + \sum_{n=3}^{+\infty} b_n(t)z^n = \varphi_t(z)$ *est convergente.*

*Cela entraîne que pour tout $t\in B(0,R_0)$, $\varphi_t$ est de rayon de convergence strictement positif, d'où $B_f(0,\frac{R_0}{2}) \subseteq B(0,R_0) \subseteq E$, d'où $d^*(E) \geqslant d^*(B_f(0,\frac{R_0}{2})) \geqslant \frac{R_0}{2} > 0$.*
*Absurde . Donc $d^*(\widetilde{E}) = 0$.*

$\square$

## 4.4 Linéarisation des polynômes de degré 3

Depuis 1988, grâce au théorème de Yoccoz, on sait que tout polynôme de degré 2 de la forme $P_\theta(z) = \lambda z + a_2 z^2$ (avec $a_2 \neq 0$) est linéarisable si et seulement[15] si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} < +\infty$. (On supposera dans toute cette section que $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.)

On conjecture actuellement que tout polynôme $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ (avec $a_3 \neq 0$) est linéarisable si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} < +\infty$. Grâce au théorème de Brjuno, on sait que si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} < +\infty$, alors $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ est linéarisable.
Pour prouver la conjecture ci-dessus pour tout polynôme de degré 3, il suffit de le prouver[16] pour tout polynôme de degré 3 de la forme $P_{\theta,b}(z) = \lambda z + b z^2 + z^3$ avec $b \in \mathbb{C}$.

C'est pour tenter de répondre à cette conjecture que Perez-Marco a développé son théorème, ce qui lui a permis d'obtenir une grande avancée vers la conjecture.

**Théorème 4.4.1 (Perez-Marco).** *Soit $\theta \in R \setminus \mathbb{Q}$. Posons $\lambda = e^{i2\pi\theta}$ et notons $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des réduites de $\theta$. Pour tout $t \in \mathbb{C}$, posons $f_t(z) = \lambda z + t z^2 + z^3$ et posons $E = \{t \in \mathbb{C} \ / \ f_t \text{ linéarisable}\}$.*

*Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = +\infty$, alors $d^*(E) = 0$.*

*Démonstration :*

Supposons que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = +\infty$. Pour démontrer ce théorème, nous allons nous intéresser à la famille de polynômes $g_t(z) = \lambda z + z^2 + t z^3$.

---

15. en notant $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des réduites de $\theta$ avec $\lambda = e^{i2\pi\theta}$

16. En effet, en posant, pour tout $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\psi(z) = uz$, on a $\psi^{-1} P_{\theta,b}(\psi(z)) = \frac{1}{u} P_{\theta,b}(uz) = \frac{1}{u}\left(\lambda u z + b(uz)^2 + (uz)^3\right) = \lambda z + buz^2 + u^2 z^3$, donc $P_{\theta,b}$ et $z \mapsto \lambda z + buz^2 + u^2 z^3$ sont simultanément linéarisables (en effet si $\varphi$ est la linéarisante formelle du premier, alors $\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi$ est la linéarisante formelle du second et elles ont simultanément un rayon de convergence strictement positif.) Si $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ est un polynôme quelconque , alors, en prenant pour $u$ l'une des racines de $X^2 - a_3$ et en posant $b = a_2 u^{-1}$, on obtient que $P$ est linéarisable si et seulement si $P_{\theta,b}$ est linéarisable.

En posant $\widetilde{E} = \{t \in \mathbb{C} \ / \ g_t$ linéarisable$\}$, d'après le théorème 4.1.1, on a ou bien $\widetilde{E} = \mathbb{C}$ ou bien $d^*(\widetilde{E}) = 0$. Or, comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = +\infty$, d'après le théorème de Yoccoz, on a $g_0(z) = \lambda z + z^2$ non-linéarisable, donc $0 \notin \widetilde{E}$ et par conséquent $\widetilde{E} \neq \mathbb{C}$. On en déduit alors que $d^*(\widetilde{E}) = 0$. En particulier, il existe $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $g_{t_0}(z) = \lambda z + z^2 + t_0 z^3$ soit non linéarisable. Or $g_{t_0}(z) = \lambda z + z^2 + t_0 z^3$ est conjugué à $f_{t_1}(z) = \lambda z + t_1 z^2 + z^3$ où $t_1 = u^{-1}$ avec $u$ racine de $X^2 - t_0$ . Donc $f_{t_1}(z)$ est non linéarisable, d'où $t_1 \notin E$ et ainsi $E \neq \mathbb{C}$. Or d'après le théorème 4.1.1, on a ou bien $E$=$\mathbb{C}$ ou bien $d^*(E)$=0. Par conséquent, $d^*(E)$=0. $\square$

**Remarque 4.4.2.** *Ce théorème démontre en particulier que si* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = +\infty$, *alors* $f_t(z) = \lambda z + tz^2 + z^3$ *n'est jamais linéarisable, à l'exception éventuelle d'un tout petit*[17] *ensemble de valeurs de* $t$.

**Remarque 4.4.3.** *En utilisant le théorème de rectification des applications à allure polynomiale de Douady-Hubbard [DH85], nous pouvons préciser légèrement ce théorème.*

**Théorème 4.4.4.** *Soit* $\theta \in R \setminus \mathbb{Q}$. *Posons* $\lambda = e^{i2\pi\theta}$ *et notons* $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des réduites de* $\theta$. *Pour tout* $t \in \mathbb{C}$, *posons* $f_t(z) = \lambda z + tz^2 + z^3$ *et posons* $E = \{t \in \mathbb{C} \ / \ f_t$ linéarisable$\}$.

*Si* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = +\infty$, *alors* $E \subseteq B_f(0{,}2\sqrt{2})$.

*Démonstration :*

Nous allons montrer que $B_f(0{,}2\sqrt{2})^c \subseteq E^c$. Soit $b \in B_f(0{,}2\sqrt{2})^c$.
Comme $|b| > 2\sqrt{2}$, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $2\sqrt{2} < \beta < |b|$.

Considérons l'application $h : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{2}{x} + x$.
On vérifie facilement que sur $]0,\sqrt{2}]$, $h$ décroît strictement de $+\infty$ à $2\sqrt{2}$ et que sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, $h$ croît strictement de $2\sqrt{2}$ à $+\infty$. Comme $2\sqrt{2} < \beta < |b|$, par continuité de $h$, on obtient l'existence d'un réel $\alpha \in ]0,\sqrt{2}[$ tel que $\beta = h(\alpha)$. On a alors

$$|b| > \beta \qquad \text{avec} \qquad \beta = h(\alpha) = \frac{2}{\alpha} + \alpha = \frac{2\alpha + \alpha^3}{\alpha^2} \tag{4.34}$$

17. Dans $\mathbb{C}$, la capacité et le diamètre transfini coïncident.

Posons $\varepsilon = \dfrac{\alpha^2}{2}\left(|b| - \dfrac{2\alpha+\alpha^3}{\alpha^2}\right)$. D'après (4.34), on a $\varepsilon > 0$ et $\dfrac{2\varepsilon}{\alpha^2} = |b| - \dfrac{2\alpha+\alpha^3}{\alpha^2}$.
d'où

$$|b| = \frac{2\alpha+\alpha^3}{\alpha^2} + \frac{2\varepsilon}{\alpha^2} > \frac{2\alpha+\alpha^3}{\alpha^2} + \frac{\varepsilon}{\alpha^2}$$

d'où

$$\alpha^2|b| > \alpha + \alpha^3 + \alpha + \varepsilon \quad (\text{avec } 0 < \alpha < \sqrt{2} \text{ et } \varepsilon > 0) \tag{4.35}$$

Considérons les applications $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $f_b : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \lambda z + z^3 \quad \text{et} \quad f_b(z) = f(z) + bz^2$$

et posons $\mathcal{W} = \{z \in \mathbb{C} \;\; / \;\; |z| < \alpha+\varepsilon\}$ et $\mathcal{W}_b = \{z \in \mathbb{C} \;\; / \;\; |z| < \alpha \text{ et } f_b(z) \in \mathcal{W}\}$.
Considérons aussi l'application $F_b : \mathcal{W}_b \longrightarrow \mathcal{W}$ définie par $F_b(z) = f_b(z)$.
Par définition de $\mathcal{W}_b$, $F_b$ est bien définie et clairement, $f$, $f_b$ et $F_b$ sont holomorphes.
De plus, 0 est clairement un point fixe de $F_b$. Nous allons démontrer que $(\mathcal{W},\mathcal{W}_b,F_b)$ est une application à allure polynomiale de degré 2, c'est-à-dire que $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}_b$ sont deux ouverts connexes et simplement connexes de $\mathbb{C}$ distincts de $\mathbb{C}$, que $\mathcal{W}_b$ est relativement compact dans $\mathcal{W}$ et que $F_b : \mathcal{W}_b \longrightarrow \mathcal{W}$ est holomorphe et propre de degré 2.

- $\mathcal{W}$ ouvert connexe et simplement connexe de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$.

C'est évident car $\mathcal{W} = B(0,\alpha+\varepsilon)$.

- $\mathcal{W}_b$ ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$.

Comme $\mathcal{W}_b \subseteq B(0,\alpha)$, $\mathcal{W}_b$ est clairement distinct de $\mathbb{C}$. De plus,
$\mathcal{W}_b = B(0,\alpha) \bigcap {f_b}^{-1}(\mathcal{W})$ avec $\mathcal{W}$ et $f_b$ continue sur $\mathbb{C}$, donc $\mathcal{W}_b$ est un ouvert.
Par l'absurde, supposons que $\mathcal{W}_b$ n'est pas simplement connexe. Il existe alors un lacet simple fermé $\gamma$ tel que $[\gamma]$, l'image du chemin $\gamma$, soit incluse dans $\mathcal{W}_b$ et que $\gamma$ ne soit pas homotope à un point. Notons $\Omega$ l'intérieur du lacet $\gamma$. On a $\partial\Omega = [\gamma]$.
Comme $\gamma$ n'est pas homotope à un point, il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $z_0 \notin \mathcal{W}_b$. D'après le principe du maximum, on a [18]

$$|z_0| \leqslant \sup_{z\in\Omega} |z| \leqslant \max_{z\in\partial\Omega} |z| = |z_2| < \alpha$$

18. car $z_2 \in [\gamma] \subseteq \mathcal{W}_b \subseteq B(0,\alpha)$

d'où

$$z_0 \in B(0,\alpha) \tag{4.36}$$

De plus, comme $[\gamma] \subseteq \mathcal{W}_b \subseteq f_b^{-1}(\mathcal{W})$, pour tout $z \in [\gamma]$, on a $|f_b(z)| < \alpha + \varepsilon$.
D'après le principe du maximum, on a[19]

$$|f_b(z_0)| \leqslant \sup_{z\in\Omega} |f_b(z)| \leqslant \max_{z\in\partial\Omega} |f_b(z)| = |f_b(z_2)| < \alpha + \varepsilon$$

Donc $f_b(z_0) \in B(0,\alpha+\varepsilon) = \mathcal{W}$, d'où

$$z_0 \in f_b^{-1}(\mathcal{W}) \tag{4.37}$$

Par conséquent, (4.36) et (4.37) donnent $z_0 \in B(0,\alpha) \bigcap f_b^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{W}_b$.
Or $z_0 \notin \mathcal{W}_b$. Absurde, donc $\mathcal{W}_b$ est simplement connexe.

- $F_b : \mathcal{W}_b \longrightarrow \mathcal{W}$ est propre de degré 2.

Comme $f_b$ est un polynôme de degré 3, chaque point de $\mathcal{W}$ possède 3 préimages par $f_b$ dans $f_b^{-1}(\mathcal{W})$. Nous allons montrer ici que dans $\mathcal{W}_b = f_b^{-1}(\mathcal{W}) \bigcap B(0,\alpha)$ il y en a exactement 2.
Soit $w \in \mathcal{W}$. On a $|w| < \alpha + \varepsilon$. Posons $\mathcal{C}(0,\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \ \ / \ \ |z| = \alpha\}$.
Considérons l'application $g_b : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $g_b(z) = f_b(z) - w$.
Montrer que $w$ possède 2 préimages dans $\mathcal{W}_b$ par $f_b$ revient à montrer que 0 possède 2 préimages[20] dans $\mathcal{W}_b$ par $g_b$.
Soit $z \in \mathcal{C}(0,\alpha)$. On a

$$\begin{aligned}
|g_b(z) - bz^2| &= |f_b(z) - w - bz^2| \\
&= |\lambda z + bz^2 + z^3 - w - bz^2| \\
&= |\lambda z + z^3 - w| \\
&\leqslant |\lambda z| + |z^3| + |w| \\
&\leqslant |\lambda||z| + |z|^3 + |w| \\
&\leqslant 1.\alpha + \alpha^3 + |w| \\
&< \alpha + \alpha^3 + \alpha + \varepsilon
\end{aligned}$$

19. car $z_2 \in [\gamma]$
20. Le nombre de préimages est compté avec multiplicité.

Or, d'après (4.35)

$$\alpha + \alpha^3 + \alpha + \varepsilon < \alpha^2|b| = |z|^2|b| = |bz^2|$$

d'où

$$|g_b(z) - bz^2| < |bz^2| \tag{4.38}$$

et ceci est vrai pour tout $z \in \mathcal{C}(0,\alpha)$. Grâce au théorème de Rouché, on en déduit que $g_b$ et $z \mapsto bz^2$ ont même nombre de racines (comptées avec multiplicité) dans $B(0,\alpha)$. Donc $g_b$ possède 2 racines dans $\mathcal{W}$ et par conséquent $w$ possède 2 préimages par $f_b$ dans $B(0,\alpha)$. Ainsi, tout $w \in \mathcal{W}$ possède 2 préimages par $F_b$ dans $B(0,\alpha) \bigcap f_b^{-1}(\mathcal{W})$.

Pour montrer que $F_b$ est propre de degré 2, il suffit maintenant de vérifier que $F_b$ est propre. Soit $K$ un compact de $\mathcal{W}$. $K$ est alors un compact de $\mathbb{C}$ et on a $K$ fermé et borné dans $\mathbb{C}$. Comme $f_b$ est un polynôme de degré 3 (donc continue), $f_b^{-1}(K)$ est un fermé de $\mathbb{C}$ et de plus $f_b^{-1}(K)$ est borné dans $\mathbb{C}$. Donc $f_b^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{C}$. De plus, $f_b^{-1}(K) \bigcap B_f(0,\alpha)$ est aussi un compact de $\mathbb{C}$. Pour montrer que $F_b^{-1}(K)$ est compact, nous allons montrer que $F_b^{-1}(K) = f_b^{-1}(K) \bigcap B_f(0,\alpha)$. Comme $K$ est un compact de $\mathcal{W}$ et que $F_b : \mathcal{W}_b \longrightarrow \mathcal{W}$ est définie par $F_b(z) = f_b(z)$ avec $\mathcal{W}_b = B(0,\alpha) \bigcap f_b^{-1}(\mathcal{W})$, on a $F_b^{-1}(K) = f_b^{-1}(K) \bigcap B(0,\alpha)$. Il suffit donc de montrer que $f_b^{-1}(K) \bigcap B(0,\alpha) = f_b^{-1}(K) \bigcap B_f(0,\alpha)$. On a clairement $f_b^{-1}(K) \bigcap B(0,\alpha) \subseteq f_b^{-1}(K) \bigcap B_f(0,\alpha)$. Par l'absurde, supposons que $f_b^{-1}(K) \bigcap B(0,\alpha) \neq f_b^{-1}(K) \bigcap B_f(0,\alpha)$. Il existe alors $z \in f_b^{-1}(K) \bigcap B_f(0,\alpha)$ tel que $z \notin f_b^{-1}(K) \bigcap B(0,\alpha)$. Nécessairement, $z \in f_b^{-1}(K)$ et $|z| = \alpha$. En particulier, on a

$$f_b(z) \in K \subseteq \mathcal{W} = B(0,\alpha + \varepsilon). \tag{4.39}$$

Or

$$|f_b(z)| = |\lambda z + z^3 + bz^2| \geqslant |bz^2| - |\lambda z + z^3| \geqslant |b||z|^2 - |\lambda||z| - |z|^3 \geqslant |b|\alpha^2 - \alpha - \alpha^3 \tag{4.40}$$

et d'après (4.35), on a

$$\alpha^2|b| > \alpha + \alpha^3 + \alpha + \varepsilon \tag{4.41}$$

d'où

$$\alpha^2|b| - \alpha - \alpha^3 > \alpha + \varepsilon \tag{4.42}$$

On a alors

$$|f_b(z)| > \alpha + \varepsilon \quad \text{avec } f_b(z) \in B(0,\alpha + \varepsilon).$$

Absurde. Donc $f_b^{-1}(K) \bigcap B(0,\alpha) = f_b^{-1}(K) \bigcap B_f(0,\alpha)$ et $F_b^{-1}(K)$ est compact.

Ainsi, $F_b$ est une application propre de degré 2.

- $\mathcal{W}_b$ connexe.

D'après ce qui précède, on sait que $F_b$ est une application propre de degré 2. Par l'absurde, supposons que $\mathcal{W}_b$ n'est pas connexe. $U$ la composante connexe de $\mathcal{W}_b$ contenant 0 est alors envoyée de façon biholomorphe sur $\mathcal{W}$ par l'application $f_b$. D'après le théorème de représentation conforme de Riemann, il existe $\phi : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$ biholomorphe et $\psi : U \longrightarrow \mathbb{D}$ biholomorphe tels que $\phi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\phi'(0) > 0$, $\psi'(0) > 0$ . Comme $U \subseteq \mathcal{W}_b \subsetneq \mathcal{W}$, $\phi'(0) < \psi'(0)$. Par ailleurs, comme $f_b$ est un biholomorphisme de $U$ sur $\mathcal{W}$, $\zeta = \phi \circ f_b$ est un biholomorphisme de $U$ sur $\mathbb{D}$ vérifiant $\zeta(0) = 0$ et $|\zeta'(0)| = |\phi'(0)||f_b'(0)| = \phi'(0)|\lambda| = \phi'(0)$. Par unicité de la représentation conforme, on en déduit que $|\zeta'(0)| = |\psi'(0)| = \psi'(0)$. Or $\psi'(0) = |\zeta'(0)| = \phi'(0)$. D'où $\phi'(0) = \psi'(0)$ et $\phi'(0) < \psi'(0)$. Absurde.
Donc $\mathcal{W}_b$ est connexe.

- $\mathcal{W}_b$ est relativement compact dans $\mathcal{W}$

C'est évident car $\mathcal{W}_b \subseteq B(0,\alpha)$ et $\mathcal{W} = B(0,\alpha + \varepsilon)$.
On peut ainsi appliquer le théorème de rectification des applications à allure polynomiale de Douady-Hubbard et on en déduit qu'il existe un homéomorphisme $\Phi$ qui conjugue[21], sur un voisinage de 0, $F_b$ à un polynôme $\widetilde{P}$ de degré 2 fixant 0 .
Par conséquent, $F_b(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$ est topologiquement conjugué à un polynôme $\widetilde{P}(z) = \lambda' z + a_2 z^2$ (sur un voisinage de 0). Comme $\widetilde{P}(z) = \lambda' z + a_2 z^2$ est lui-même conjugué à $P(z) = \lambda' z + z^2$ grâce à la conjugante $\psi_u(z) = uz$ avec $u = a_2^{-1}$ (déjà vu), on en déduit que $f_b(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$ est topologiquement conjugué à $P(z) = \lambda' z + z^2$. En outre, un résultat de Naïshul [Nai83] affirme que la valeur propre en un point fixe d'un germe de difféomorphisme holomorphe, lorsqu'elle est de module 1, est un invariant de conjugaison topologique. Par conséquent, on a $\lambda' = \lambda$ et $f_b(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$ est topologiquement conjugué à $P(z) = \lambda z + z^2$.

Pour finir la démonstration du théorème, nous allons à nouveau raisonner par l'absurde. Supposons que $f_b(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$ soit linéarisable. Alors, $f_b(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$ est analytiquement conjugué à la rotation $r_\lambda(z) = \lambda z$. D'après ce qui précède, on en déduit aussi que $P(z) = \lambda z + z^2$ est topologiquement conjugué à la rotation $r_\lambda(z) = \lambda z$. Or, il est connu [CG95] que dans $\mathbb{C}$, conjugaison analytique et conjugaison topologique sont équivalentes. Par conséquent, $P(z) = \lambda z + z^2$ est analytiquement conjugué à la rotation $r_\lambda(z) = \lambda z$, ce qui veut exactement dire que $P(z) = \lambda z + z^2$ est linéarisable. Or comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = +\infty$, le théorème de Yoccoz nous dit que $P(z) = \lambda z + z^2$ n'est pas linéarisable. Absurde.
Par conséquent, $f_b(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$ n'est pas linéarisable.

**Remarque 4.4.5.** *Le fait que l'on ait ce théorème seulement pour $|b| > 2\sqrt{2}$ provient de la position des racines du polynôme $f_b(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$. Il faut en effet pouvoir regrouper les préimages d'un voisinage de 0 en deux paquets: un qui contient 0 et qui contient exactement 2 préimages de chaque point du voisinage et un qui contient à chaque fois la troisième préimage.*

21. c'est-à-dire $\forall z \in B(0,\varepsilon') \quad f_b(\Phi(z)) = \Phi(\widetilde{P}(z))$.

*Sur les dessins-ci dessous, on s'est intéressé aux polynômes* $P(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$, *pour différentes valeurs de* $b$, *avec* $\lambda = e^{i2\pi\theta}$ *et* $\theta = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ *et on a tracé en gris clair la boule de centre* $0$ *et de rayon* $\alpha$, *en gris foncé, la préimage de cette boule par* $P$ *et en noir, la préimage d'une très petite boule centrée en* $0$ *afin d'indiquer où se trouvent les zéros de* $P$.

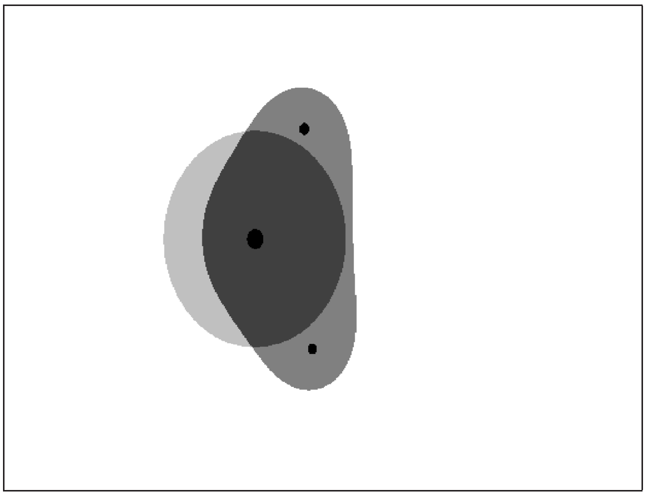

FIG. 4.1 – $P^{-1}(B(0,\alpha))$ *pour* $P(z) = \lambda z - z^2 + z^3$

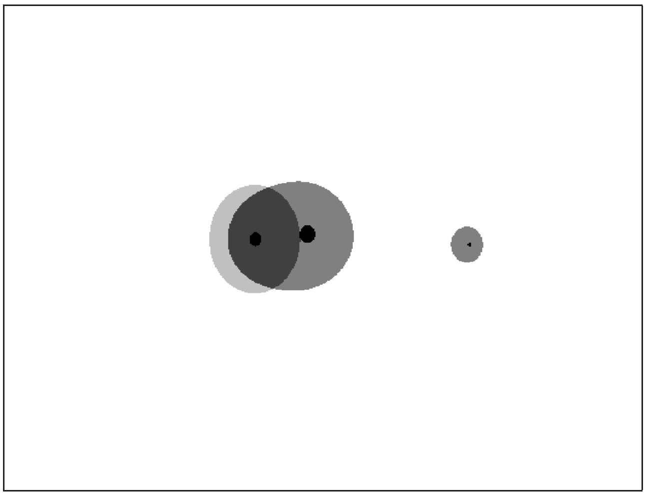

FIG. 4.2 – $P^{-1}(B(0,\alpha_1))$ *pour* $P(z) = \lambda z - 2z^2 + z^3$

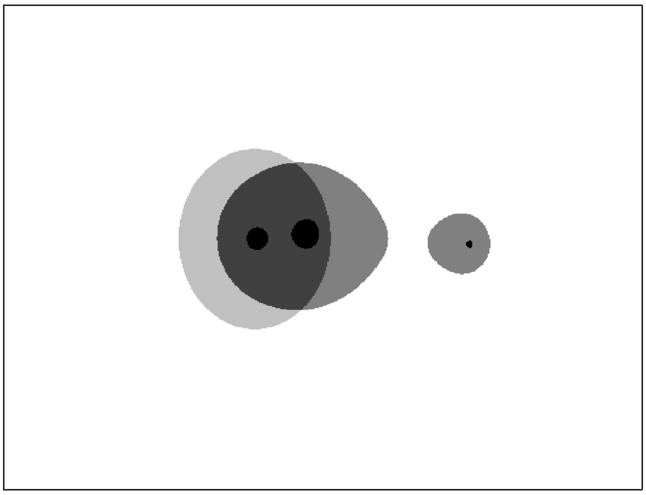

Fig. 4.3 – $P^{-1}(B(0,\alpha_2))$ *pour* $P(z) = \lambda z - 2z^2 + z^3$

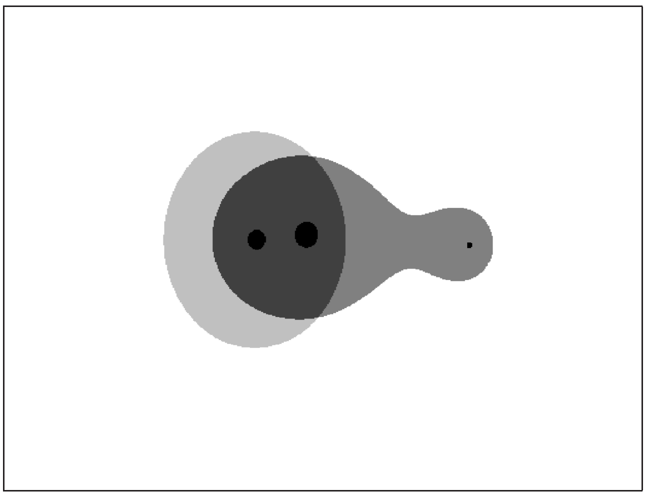

Fig. 4.4 – $P^{-1}(B(0,\alpha_3))$ *pour* $P(z) = \lambda z - 2z^2 + z^3$

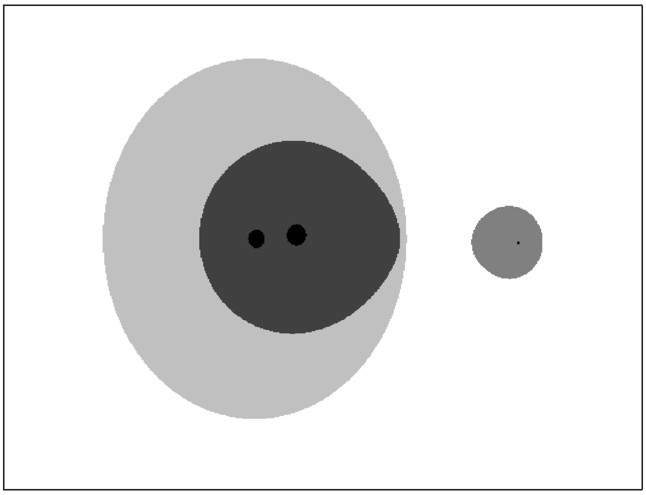

FIG. 4.5 – $P^{-1}(B(0,\alpha))$ *pour* $P(z) = \lambda z - 2.86z^2 + z^3$

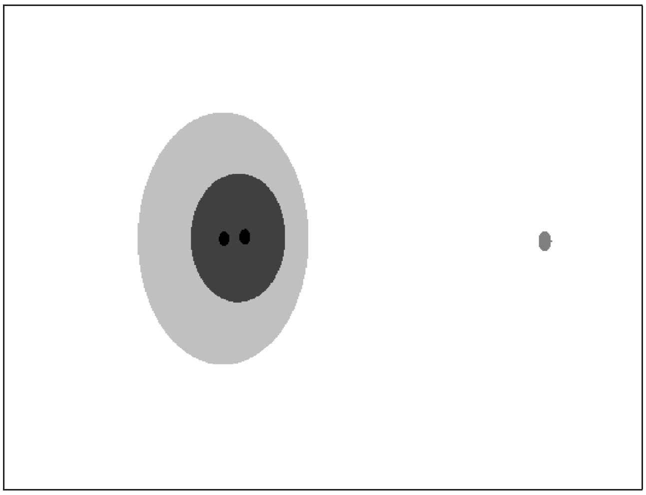

FIG. 4.6 – $P^{-1}(B(0,\alpha))$ *pour* $P(z) = \lambda z - 4z^2 + z^3$

# Chapitre 5

# Compléments

## 5.1 Généralisation du théorème de Perez-Marco aux fractions rationnelles en t

On reprend les notations du début du chaptitre 4. $K_1$ désigne un sous-corps valué complet de $\widetilde{K}$ et $K_2$ un sous-corps valué complet et localement compact de $K_1$. ( Lorsque $\widetilde{K} = \mathbb{C}$, forcément, $K_2 = \mathbb{R}$ ou $K_2 = \mathbb{C}$. Lorsque $\widetilde{K} = \mathbb{C}_p$, forcément, $K_2$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.)

**Théorème 5.1.1.** *Si $m,d,r,s \in \mathbb{N}^*$,si $y_1,y_2,\ldots,y_s$ sont $s$ points distincts de $K_2$, si les $h_k : (K_1^m,0) \longrightarrow (K_1^m,0)$ et les $g_{j,l} : (K_1^m,0) \longrightarrow (K_1^m,0)$ sont des séries entières en $m$ variables de valuation supérieure ou égale à 2 et de rayon de convergence strictement positif, si $L \in GL_m(K_1)$ est non-résonante et si on pose, pour tout $t \in K_2 \smallsetminus \{y_1,y_2,\ldots,y_s\}$*

$$f_t(z) = Lz + \sum_{\substack{j = 1,2,\ldots,s \\ l = 1,2,\ldots,r}} \frac{1}{(t-y_j)^l}\, g_{j,l}(z) + \sum_{k=0}^{d} t^k h_k(z)$$

*et*

$$E = \{t \in K_2 \smallsetminus \{y_1,y_2,\ldots,y_s\} / f_t \text{ est linéarisable}\},$$

*alors,*

$$\text{ou bien } E = K_2 \smallsetminus \{y_1,y_2,\ldots,y_s\} \text{ ou bien } d^*(E) = 0$$

*Démonstration :*

On s'intéresse à la linéarisation de la famille $(f_t : K_1^m \longrightarrow K_1^m)_{t \in K_2 \smallsetminus \{y_1,y_2,\ldots,y_s\}}$

avec $f_t$ de la forme

$$f_t(z) = Lz + \sum_{\substack{j=1,2,\dots,s \\ l=1,2,\dots,r}} \frac{1}{(t-y_j)^l}\, g_{j,l}(z) + \sum_{k=0}^{d} t^k h_k(z)$$

avec $L \in GL_m(K_1)$ non-résonante, $h_k$ de la forme $h_k(z) = \sum_{j\geqslant 2} h_k^{(j)}(z)$ de rayon de convergence strictement positif et $h_k^{(j)}(z)$ polynôme homogène de degré $j$ en $m$ variables et à valeurs dans $K_1^m$ et $g_{j,l}$ de la forme $g_{j,l}(z) = \sum_{j\geqslant 2} g_{j,l}^{(j)}(z)$ de rayon de convergence strictement positif et $g_{j,l}^{(j)}(z)$ polynôme homogène de degré $j$ en $m$ variables et à valeurs dans $K_1^m$.

Pour tout $t \in K_2 \smallsetminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$, on peut aussi écrire $f_t$ sous la forme

$$f_t(z) = Lz + \sum_{j=2}^{+\infty} f_t^{(j)}(z)$$

avec $f_t^{(j)}(z) = \sum_{1\leqslant j\leqslant s \text{ et } 1\leqslant l\leqslant r} \frac{1}{(t-y_j)^l}\, g_{j,l}^{(j)}(z) + \sum_{0\leqslant k\leqslant d} t^k h_k^{(j)}(z)$ polynôme homogène de degré $j$ en $m$ variables et à valeurs dans $K_1^m$ et dont les composantes des coefficients sont des fractions rationnelles en $t$ .

Posons $P(X) = \prod_{j=1}^{s} (X-y_j)^r$ et, pour tout $j \geqslant 2$, $g_t^{(j)}(z) = P(t) f_t^{(j)}(z)$.

Les $g_t^{(j)}(z)$ sont alors des polynômes homogènes de degré $j$ en $m$ variables et à valeurs dans $K_1^m$ et dont les composantes des coefficients sont des polynômes en $t$ de degré au plus $d + rs$.

Pour tout $t \in K_2$, comme $L$ est non-résonante, d'après la proposition 2.2.8, $f_t$ possède une unique linéarisante formelle

$$\varphi_t(z) = z + \sum_{j\geqslant 2} \varphi_t^{(j)}(z) = \sum_{j\geqslant 1} \varphi_t^{(j)}(z)$$

et d'après la formule (2.4), avec les notations du chapitre 2, elle est déterminée par

$$\varphi_t^{(1)}(z) = z \quad \text{et, pour tout } q \geqslant 2,$$

$$\varphi_t^{(q)}(z) = \left(\mathcal{L}_L^{(q)}\right)^{-1} \left( \mathcal{P}_q \left( \sum_{2\leqslant l\leqslant q} f_t^{(l)} \left( \sum_{1\leqslant il\leqslant q} \varphi_t^{(i)}(z) \right) \right) \right) \tag{5.1}$$

Pour tout $j \geqslant 1$, posons $\psi_t^{(j)}(z) = (P(t))^{j-1}\varphi_t^{(j)}(z)$.
La relation de récurrence précédente devient alors

$$\psi_t^{(1)}(z) = z \quad \text{et, pour tout } q \geqslant 2,$$

$$\frac{\psi_t^{(q)}(z)}{(P(t))^{q-1}} = (\mathcal{L}_L^{(q)})^{-1}\left(\mathcal{P}_q\left(\sum_{2\leqslant l\leqslant q}\frac{g_t^{(l)}}{P(t)}\left(\sum_{1\leqslant il\leqslant q}\frac{\psi_t^{(i)}(z)}{(P(t))^{i-1}}\right)\right)\right)$$

d'où

$$\psi_t^{(q)}(z) = (\mathcal{L}_L^{(q)})^{-1}\left(\mathcal{P}_q\left(\sum_{2\leqslant l\leqslant q}(P(t))^{q-1}\frac{g_t^{(l)}}{P(t)}\left(\sum_{1\leqslant il\leqslant q}\frac{\psi_t^{(i)}(z)}{(P(t))^{i-1}}\right)\right)\right)$$

d'où

$$\psi_t^{(q)}(z) = (\mathcal{L}_L^{(q)})^{-1}\left(\mathcal{P}_q\left(\sum_{2\leqslant l\leqslant q}(P(t))^{q-2}g_t^{(l)}\left(\sum_{1\leqslant il\leqslant q}\frac{\psi_t^{(i)}(z)}{(P(t))^{i-1}}\right)\right)\right)$$

Comme les $g_t^{(l)}(z)$ sont des polynômes homogènes de degré $l$, les parties homogènes de degré $q$ sont obtenues à chaque fois à partir de $l$ coefficients provenant de $\dfrac{\psi_t^{(i)}}{(P(t))^{i-1}}$ ayant pour indices (éventuellement répétés) $i_1,i_2,\ldots,i_l \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $i_1 + i_2 + \cdots + i_l = q$.
On peut alors isoler chacun des $\psi_t^{(i_k)}$ en sortant chacun des $\dfrac{1}{(P(t))^{i_k-1}}$ devant $g_t^{(l)}$ et, en faisant ceci pour $i_1,i_2,\ldots,i_l$, on obtient, devant $g_t^{(l)}$, quelque chose de la forme

$$(P(t))^{q-2}\prod_{k=1}^{l}\frac{1}{(P(t))^{i_k-1}}$$

avec

$$\begin{aligned}(P(t))^{q-2}\prod_{k=1}^{l}\frac{1}{(P(t))^{i_k-1}} &= (P(t))^{q-2-(i_1-1)-(i_2-1)-\cdots-(i_l-1)}\\ &= (P(t))^{q-2-(i_1+i_2+\cdots+i_l)+l}\\ &= (P(t))^{q-2-q+l}\\ &= (P(t))^{l-2}\end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour toutes les parties homogènes de degré $q$, comme pour le calcul des $\psi_t^{(q)}$, seul compte ce qui est homogène de degré $q$, on en déduit que

$$\psi_t^{(q)}(z) = (\mathcal{L}_L^{(q)})^{-1} \left( \mathcal{P}_q \left( \sum_{2 \leqslant l \leqslant q} (P(t))^{l-2} g_t^{(l)} \left( \sum_{1 \leqslant il \leqslant q} \psi_t^{(i)}(z) \right) \right) \right) \tag{5.2}$$

On déduit alors de (5.2) que les composantes des coefficients des polynômes homogènes $\psi_t^{(q)}$ sont des polynômes en $t$ à coefficients dans $K_1$.

De plus, en notant $W_q$ le degré maximum, en tant que polynôme en $t$, des composantes des coefficients du polynôme homogène $\psi_t^{(q)}$ et en posant $h = d + rs$ on a le lemme suivant

**Lemme 5.1.2.**

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \quad W_q \leqslant h(q-1)$$

*Démonstration du lemme:*

D'après la formule (5.2), comme on a à faire à des polynômes homogènes, comme les composantes des coefficients des $g_t^{(l)}$ sont des polynômes en $t$ de degré au plus $d + rs$ et comme $P$ est un polynôme de degré $rs$, on a

$$W_1 = 0$$

et, pour tout $q \geqslant 2$,

$$W_q \leqslant \max_{\substack{2 \leqslant l \leqslant q \\ 1 \leqslant il \leqslant q}} ((l-2)(rs) + (d+rs) + lW_i) \tag{5.3}$$

d'où,

$$W_q \leqslant \max_{\substack{2 \leqslant l \leqslant q \\ 1 \leqslant il \leqslant q}} ((l-2)h + h + lW_i) \tag{5.4}$$

On obtient alors que

- pour $q = 1$, le lemme est vrai, car $W_1 = 0 = h(1-1)$.
- pour $q \geqslant 2$, si on suppose que pour tout $j \in [\![1,q-1]\!]$, $W_j \leqslant h(j-1)$,

alors, on tire de (5.4) que

$$W_q \leqslant \max_{\substack{2 \leqslant l \leqslant q \\ 1 \leqslant il \leqslant q}} ((l-2)h + h + lh(i-1))$$

Or, pour tout $l \in [\![2,q]\!]$ et tout $i \in [\![1,\frac{q}{l}]\!]$, on a

$$\begin{aligned}((l-2)h+h+lh(i-1)) &\leqslant (l-1)h+lh(i-1)\\ &\leqslant (l-1)h+lhi-lh\\ &\leqslant (l-1)h+qh-lh\\ &\leqslant h(q-1)\end{aligned}$$

d'où

$$W_q \leqslant h(q-1)$$

Par récurrence, il s'en suit que le lemme est vrai.

**Notation 5.1.3.**
Pour tout $t \in K_2 \diagdown \{y_1,y_2,\ldots,y_s\}$ et$q{\in}\mathbb{N}^*$, notons aussi $B_q(t)$, le maximum (à $t$ fixé) des valeurs absolues des composantes des coefficients du polynôme homogène $\varphi_t^{(q)}$.
On a $E{=}\{t{\in}K_2 \diagdown \{y_1,y_2,\ldots,y_s\}/f_t$ est linéarisable$\}$. Posons alors, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$F_q = \{t \in K_2 \diagdown \{y_1,y_2,\ldots,y_s\} \quad / \quad |t| \leqslant q \text{ et } \forall k \in [\![1,s]\!] \quad |t-y_k| \geqslant \frac{1}{q}\}$$

et

$$G_q = \bigcap_{j\in\mathbb{N}^*} \{t \in F_q \quad / \quad B_j(t) \leqslant q^j\}$$

**Remarque 5.1.4.** *Les $G_q$ sont des fermés bornés dans $K_2$ qui est localement compact, donc les $G_q$ sont des compacts.*

**Lemme 5.1.5.**

$$E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$$

*Démonstration du lemme:*

•Si $t \in E$. Alors, $t \in K_2 \diagdown \{y_1,y_2,\ldots,y_s\}$, $f_t$ est linéarisable et $\varphi_t(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m} a_{\alpha,t}z^\alpha$ est une série entière de rayon $R_{\varphi_t} > 0$. Posons $r = \dfrac{R_{\varphi_t}}{2}$ et $z_0 = (r,r,\ldots,r)$.
Comme $||z_0|| < R_\varphi$, $\varphi_t(z_0)$ est convergente et donc $a_{\alpha,t}r^{||\alpha||} \xrightarrow[||\alpha||\to+\infty]{} 0$.
Il existe alors un réel $M > 1$ tel que $\forall\alpha \in \mathbb{N}^m \quad ||a_{\alpha,t}r^{||\alpha||}|| \leqslant M$.

En posant $q_0 = 3 + \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant s} \dfrac{1}{|t-y_k|} + \left[\dfrac{M}{r}\right] + \left[\,|t|\,\right]$, on obtient, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$ tel que $||\alpha|| \geqslant 1$,

$$||a_{\alpha,t}|| \leqslant \frac{M}{r^{||\alpha||}} \leqslant \left(\frac{M}{r}\right)^{||\alpha||} \leqslant {q_0}^{||\alpha||} \tag{5.5}$$

et

$$t \in F_{q_0} \tag{5.6}$$

d'où

$$B_{||\alpha||}(t) \leqslant {q_0}^{||\alpha||} \tag{5.7}$$

et

$$t \in F_{q_0} \tag{5.8}$$

On déduit alors de (5.7) et (5.8) que $t \in G_{q_0}$, d'où $t \in \bigcup\limits_{q=1}^{+\infty} G_q$.

•Si $t \in \bigcup\limits_{q=1}^{+\infty} G_q$, alors il existe $q_0$ tel que $t \in G_{q_0}$. On a alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$ tel que $||\alpha|| \geqslant 1$, $||a_{\alpha,t}|| \leqslant B_{||\alpha||}(t) \leqslant {q_0}^{||\alpha||}$. Donc $\varphi_t(z) = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_{\alpha,t} z^\alpha$ est de rayon $R_{\varphi_t} \geqslant \dfrac{1}{q_0} > 0$. Par conséquent, $f_t$ est linéarisable et $t \in E$.

**Lemme 5.1.6.** *Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Il existe $m_q > 0$ et $M_q > 1$ tels que*

$$\forall t \in F_q \quad m_q \leqslant |P(t)| \leqslant M_q$$

*Démonstration du lemme:*

On a $F_q = \{t \in K_2 \setminus \{y_1, y_2, \ldots, y_s\} \;\;/\;\; |t| \leqslant q \text{ et } \forall j \in [\![1,s]\!] \;\; |t-y_j| \geqslant \frac{1}{q}\}$ et $P(X) = \prod\limits_{j=1}^{s} (X-y_j)^r$. Donc, pour tout $t \in F_q$, on a

$$|P(t)| = \left|\prod_{j=1}^{s} (t-y_j)^r\right| = \prod_{j=1}^{s} |t-y_j|^r \tag{5.9}$$

Or, en posant $h = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant s} |y_j|$, on a, pour tout $j \in [\![1,s]\!]$, $|t-y_j| \leqslant |t| + |y_j| \leqslant q+h$, donc, en posant $M_q = 1 + (q+h)^{rs}$, on obtient

$$|P(t)| \leqslant M_q \tag{5.10}$$

On a aussi $\forall j \in [\![1,s]\!] \quad |t-y_j| \geqslant \dfrac{1}{q}$, donc, en posant $m_q = \dfrac{1}{q^{rs}}$, (5.9) donne

$$|P(t)| \geqslant m_q \tag{5.11}$$

$\square$

<u>*Fin de la démonstration du théorème:*</u>

Pour démontrer le théorème 5.1.1, il suffit de prouver que si $d^*(E) > 0$, alors $E = K_2 \setminus \{y_1,y_2,\dots,y_s\}$. Supposons donc que $d^*(E) > 0$. D'après le lemme 5.1.5, on a $E = \bigcup\limits_{q=1}^{+\infty} G_q$, d'où $d^*\left(\bigcup\limits_{q=1}^{+\infty} G_q\right) > 0$. Grâce au théorème 3.2.8, on en déduit qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $d^*(G_{q_0}) > 0$. Or, $K_2$ est localement compact et comme d'après la remarque 5.1.4, $G_{q_0}$ est compact, on déduit de la proposition 3.2.5 que $d^*(G_{q_0}) = d(G_{q_0})$. Par conséquent, $d(G_{q_0}) > 0$.
Soit $t_0 \in K_2 \setminus \{y_1,y_2,\dots,y_s\}$. Posons $G = G_{q_0} \bigcup \{t_0\}$. Comme $G_{q_0}$ est compact, $G$ est lui-aussi compact et comme $G_{q_0} \subseteq G$, on a $d\left(G_{q_0}\right) \leqslant d(G)$, donc $d(G) > 0$.
Posons aussi $R = q_0 + [t_0] + 1$. Comme $G_{q_0} \subseteq B_f(0,q_0)$, on a $G \subseteq B_f(0,R)$.
Par ailleurs, comme $K_2 \setminus \{y_1,y_2,\dots,y_s\} = \bigcup\limits_{q\in\mathbb{N}^*} F_q$, il existe $v \in \mathbb{N}^*$ tel $t_0 \in F_v$.
Comme $G_{q_0} \subseteq F_{q_0}$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_n \subseteq F_{n+1}$, en posant $w = q_0 + v$, on obtient $G = G_{q_0} \bigcup \{t_0\} \subseteq F_w$.
Soit $q \geqslant 2$ et $C(t)$ une des composantes d'un des coefficients du polynôme homogène $\psi_t^{(q)}(z)$ de degré $q$ en $z$ . Comme $d(G) > 0$ avec $G \subseteq B_f(0,R)$ et comme $\deg C \leqslant W_q \leqslant h(q-1) \leqslant hq$ , on a, d'après le théorème 3.1.10

$$|C(t_0)| \leqslant \max_{a\in G} |C(a)| \quad \left(\frac{2}{d(G)}\right)^{hq} \quad \Big(|t_0| + R\Big)^{hq}.$$

Or, comme $\psi_t^{(q)}(z) = (P(t))^{q-1}\varphi_t^{(q)}(z)$, en utilisant le fait que $G \subseteq F_w$, avec les notations du lemme 5.1.6, on a

$$\max_{a\in G} |C(a)| \leqslant \max_{a\in G} \Big|(P(a))^{q-1} B_q(a)\Big| \leqslant {M_w}^{q-1} {q_0}^q \leqslant {M_w}^q {q_0}^q \leqslant (M_w q_0)^q$$

d'où,

$$|C(t_0)| \leqslant (M_w q_0)^q \quad \left(\frac{2}{d(G)}\right)^{hq} \quad \Big(|t_0| + R\Big)^{hq}$$

c'est-à-dire

$$|C(t_0)| \leqslant \left( (M_w q_0) \ \left(\frac{2}{d(G)}\right)^h \ \left(|t_0| + R\right)^h \right)^q \tag{5.12}$$

Soit $D(t)$ une des composantes d'un des coefficients du polynôme homogène $\varphi_t^{(q)}(z)$ de degré $q$ en $z$. Comme $\psi_t^{(q)}(z) = (P(t))^{q-1}\varphi_t^{(q)}(z)$ et comme (5.12) est vraie pour toute composante $C(t)$ d'un des coefficients du polynôme homogène $\psi_t^{(q)}(z)$, on obtient (en notant $C(t)$ la composante qui est associée à $D(t)$) et en utilisant le fait que $t_0 \in F_w$ et le lemme 5.1.6,

$$|D(t_0)| \leqslant \frac{|C(t_0)|}{(P(t))^{q-1}} \leqslant \left(\frac{1}{m_w}\right)^{q-1} \left( (M_w q_0) \ \left(\frac{2}{d(G)}\right)^h \ \left(|t_0| + R\right)^h \right)^q \tag{5.13}$$

et comme $\left(\frac{1}{m_w}\right)^{q-1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{m_w}\right)^{q-1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{m_w}\right)^q$, on a

$$|D(t_0)| \leqslant \left(1 + \frac{1}{m_w}\right)^q \left( (M_w q_0) \ \left(\frac{2}{d(G)}\right)^h \ \left(|t_0| + R\right)^h \right)^q \tag{5.14}$$

d'où

$$|D(t_0)| \leqslant \left( \left(1 + \frac{1}{m_w}\right) \ (M_w q_0) \ \left(\frac{2}{d(G)}\right)^h \ \left(|t_0| + R\right)^h \right)^q \tag{5.15}$$

et par conséquent,

$$|B_q(t_0)| \leqslant \left( \left(1 + \frac{1}{m_w}\right) \ (M_w q_0) \ \left(\frac{2}{d(G)}\right)^h \ \left(|t_0| + R\right)^h \right)^q$$

Ainsi, $t_0 \in E$, ce qui entraîne finalement,

$$E = K_2 \setminus \{y_1, y_2, \ldots, y_s\}.$$

□

**Remarque 5.1.7.** *Dans le théorème précédent, on avait besoin que $K_2$ soit localement compact pour pouvoir utiliser la remarque 5.1.4 et la proposition 3.2.5, ce qui permettait par la suite d'utiliser le théorème 3.1.10. Lorsque $K_2$ n'est pas localement compact mais est égal à $\mathbb{C}_p$, on peut toutefois démontrer un théorème de tout ou presque rien plus faible:*

**Théorème 5.1.8.** *Si* $m,d,r,s \in \mathbb{N}^*$*,si* $y_1,y_2,\ldots,y_s$ *sont* $s$ *points distincts de* $\mathbb{C}_p$*, si les* $h_k : (\mathbb{C}_p^m,0) \longrightarrow (\mathbb{C}_p^m,0)$ *et les* $g_{j,l} : (\mathbb{C}_p^m,0) \longrightarrow (\mathbb{C}_p^m,0)$ *sont des séries entières en* $m$ *variables de valuation supérieure ou égale à 2 et de rayon de convergence strictement positif, si* $L \in GL_m(\mathbb{C}_p)$ *est non-résonante et si on pose, pour tout* $t \in \mathbb{C}_p \setminus \{y_1,y_2,\ldots,y_s\}$

$$f_t(z) = Lz + \sum_{\substack{j=1,2,\ldots,s \\ l=1,2,\ldots,r}} \frac{1}{(t-y_j)^l}\, g_{j,l}(z) + \sum_{k=0}^{d} t^k h_k(z)$$

*et*

$$E = \{t \in \mathbb{C}_p \setminus \{y_1,y_2,\ldots,y_s\} / f_t \text{ est linéarisable}\},$$

*alors,*

$$\text{ou bien } E = \mathbb{C}_p \setminus \{y_1,y_2,\ldots,y_s\} \text{ ou bien } E \text{ est d'intérieur vide.}$$

*Démonstration :*

La démonstration est analogue à celle du théorème 5.1.1 à deux exceptions près. On utilise les mêmes lemmes et le fait que, pour démontrer le théorème 5.1.8, il suffit de prouver que si $E$ est d'intérieur non vide, alors $E = \mathbb{C}_p \setminus \{y_1,y_2,\ldots,y_s\}$. Supposons donc que $E$ soit d'intérieur non vide. D'après le lemme 5.1.5, on a $E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, avec les $G_q$ fermés (et bornés). Le théorème de Baire nous assure alors l'existence d'un $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $G_{q_0}$ soit d'intérieur non vide. La suite de la démonstration est alors analogue à celle du théorème précédent en remarquant que (avec les mêmes notations que dans la démonstration du théorème précédent), $G = G_{q_0} \bigcup \{t_0\}$ est aussi d'intérieur non vide et est comme précédemment inclus dans l'un des $F_w$. On obtient alors l'existence d'un point $a \in G$ et d'un $\varepsilon > 0$ tels que $B(a,\varepsilon) \subseteq G \subseteq F_w$. La suite de la démonstration est analogue en remplaçant le théorème 3.1.10 par le théorème 3.1.16 qui permet d'obtenir une majoration polynomiale à partir d'une majoration sur une boule.

## 5.2 Un exemple de cas résonant

On conserve toujours les mêmes notations. $K_1$ désigne un sous-corps valué complet de $\widetilde{K}$ et $K_2$ un sous-corps valué complet et localement compact de $K_1$.

On s'intéresse désormais au cas $m = 1$ et $\lambda = 1$. Une fonction $f(z) = z + \ldots$ distincte de l'identité n'est jamais conjuguée à l'identité[1].

1. En effet, cela entraînerait $f(\varphi(z)) = \varphi(z)$, d'où $f(z) = \varphi\left(\varphi^{-1}(z)\right) = z$ et ceci est impossible si $f$ n'est pas l'identité.

Dans ce cas, il faut essayer de conjuguer $f$ à un autre type de fonctions très simples et ces dernières sont appelées formes normales. En général, on essaie de voir si $f$ est conjuguée à une fonction du type $z \mapsto z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1}$ et dans le cas particulier où $\mu = 1$, on essaie parfois de conjuguer à $z \mapsto \frac{z}{1-z^q}$.

Dans un premier temps, nous rappellerons ce qui est connu dans $\mathbb{C}$ en montrant que c'est encore vrai dans $K_1$ (lorsque $\widetilde{K} = \mathbb{C}$ ou $\widetilde{K} = \mathbb{C}_p$) et ensuite nous montrerons que dans un cas très particulier on a encore un théorème analogue à celui de Perez-Marco.

**Proposition 5.2.1.** *Soit* $f(z) = z + bz^{q+1} + \sum_{k=q+2}^{+\infty} a_k z^k$ *une série entière à coefficients dans* $K_1$ *ayant un rayon de convergence strictement positif.*

*Si le polynôme* $X^q - \frac{1}{b}$ *possède une racine* $u \in K_1$*, alors, il existe* $g$ *et* $\varphi$ *deux séries entières à coefficients dans* $K_1$ *de rayon de convergence strictement positif avec* $g$ *de la forme* $g(z) = z + z^{q+1} + \sum_{k=q+2}^{+\infty} c_k z^k$ *et avec* $\varphi$ *vérifiant* $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \neq 0$ *et, pour tout* $z$ *assez petit,*

$$f(\varphi(z)) = \varphi(g(z))$$

*Démonstration :*

Supposons que le polynôme $X^q - \frac{1}{b}$ possède une racine $u \in K_1$. On a $u^q b = 1$. Posons $\varphi(z) = uz$. $\varphi$ est bien une série entière à coefficients dans $K_1$ de rayon de convergence strictement positif et on a $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = u \neq 0$. Posons aussi $g(z) = \varphi^{-1}(f(\varphi(z)))$. Comme $f$, $\varphi$ et $\varphi^{-1}$ sont des séries entières à coefficients dans $K_1$ de rayon strictement positif, $g$ est elle aussi une série entière à coefficients dans $K_1$ de rayon strictement positif. De plus, elle est de la forme

$$\begin{aligned} g(z) &= \varphi^{-1}(f(\varphi(z))) = \frac{1}{u}(uz) + b(uz)^{q+1} + \sum_{k=q+2}^{+\infty} a_k (uz)^k \\ &= z + u^q b z^{q+1} + \textstyle\sum_{k=q+2}^{+\infty} a_k u^{k-1} z^k \\ &= z + z^{q+1} + \textstyle\sum_{k=q+2}^{+\infty} c_k z^k \end{aligned}$$

et par construction de $g$, sur un voisinage de 0, on a aussi $f(\varphi(z)) = \varphi(g(z))$.

**Proposition 5.2.2.** *Soit* $f(z) = z + z^{q+1} + \sum_{k=q+2}^{+\infty} a_k z^k$ *une série entière à coefficients dans* $K_1$ *ayant un rayon de convergence strictement positif.*

*Alors, il existe* $g$ *et* $\varphi$ *deux séries entières à coefficients dans* $K_1$ *de rayon de convergence strictement positif avec* $g$ *de la forme* $g(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k=2q+2}^{+\infty} c_k z^k$ *et avec* $\varphi$ *vérifiant* $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ *et, pour tout* $z$ *assez petit,*

$$f(\varphi(z)) = \varphi(g(z))$$

*Démonstration :*

Posons $f_2(z) = f(z) = z + z^{q+1} + a_{2,q+2}z^{q+2} + \sum_{j=q+3}^{+\infty} a_{2,j}z^j$.

Soit $k \in [\![2,q]\!]$ et supposons que $f_k$, série entière à coefficients dans $K_1$ de rayon de convergence strictement positif, est construite et vérifie

$$f_k(z) = z + z^{q+1} + a_{k,q+k}z^{q+k} + \sum_{j=q+k+1}^{+\infty} a_{k,j}z^j$$

Posons $H_k(z) = z + \beta_k z^k$ avec $\beta_k = \dfrac{a_{k,q+k}}{q+1-k}$. Comme $\beta_k \in K_1$, $H_k$ est bien une série entière à coefficients dans $K_1$ de rayon de convergence strictement positif et on a $H_k(0) = 0$ et $H_k'(0) = 1 \neq 0$. Posons alors $f_{k+1}(z) = H_k(f_k(H_k^{-1}(z)))$. Comme $f_k$, $H_k$ et $H_k^{-1}$ sont des séries entières à coefficients dans $K_1$ de rayon strictement positif, $f_{k+1}$ est elle aussi une série entière à coefficients dans $K_1$ de rayon strictement positif. De plus, en notant $u = H_k^{-1}(z)$, elle est de la forme

$$\begin{aligned}
f_{k+1}(z) &= H_k(f_k(H_k^{-1}(z))) \\
&= H_k(f_k(u)) \\
&= (f_k(u)) + \beta_k(f_k(u))^k \\
&= (u + u^{q+1} + a_{k,q+k}u^{q+k} + \dots) + \beta_k(u + u^{q+1} + a_{k,q+k}u^{q+k} + \dots)^k \\
&= (u + u^{q+1} + a_{k,q+k}u^{q+k} + \dots) + \beta_k u^k(1 + u^q + a_{k,q+k}u^{q+k-1} + \dots)^k \\
&= (u + u^{q+1} + a_{k,q+k}u^{q+k} + \dots) + \beta_k u^k(1 + ku^q + \dots)
\end{aligned}$$

On a alors

$$f_{k+1}(z) = u + \beta_k u^k + u^{q+1} + (a_{k,q+k} + k\beta_k)u^{q+k} + \dots \tag{5.16}$$

Par ailleurs,

$$u + \beta_k u^k = H_k(u) = z \tag{5.17}$$

De plus, comme $H_k(z) = z + \beta_k z^k$, on a

$$H_k^{-1}(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n z^n.$$

Or

$$\begin{aligned} z &= H_k^{-1}(H_k(z))) \\ &= z + \beta_k z^k + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n (z + \beta_k z^k)^n \\ &= z + \beta_k z^k + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n z^n (1 + \beta_k z^{k-1})^n \\ &= z + \sum_{n=2}^{k-1} b_n z^n + \beta_k z^k + b_k z^k + \dots \end{aligned}$$

d'où $\forall n \in [\![2,k-1]\!] \quad b_n = 0$ et $b_k = -\beta_k$. Ce qui entraîne

$$u = H_k^{-1}(z) = z - \beta_k z^k + \dots \tag{5.18}$$

On a alors

$$u^{q+k} = z^{q+k} + \dots \tag{5.19}$$

et

$$\begin{aligned} u^{q+1} &= (z - \beta_k z^k + \dots)^{q+1} = z^{q+1}(1 - \beta_k z^{k-1} + \dots)^{q+1} \\ &= z^{q+1}(1 - (q+1)\beta_k z^{k-1} + \dots) = z^{q+1} - (q+1)\beta_k z^{q+k} + \dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u^{q+1} = z^{q+1} - (q+1)\beta_k z^{q+k} + \dots \tag{5.20}$$

De (5.16), (5.17), (5.19) et (5.20), on déduit

$$f_{k+1}(z) = z + z^{q+1} - (q+1)\beta_k z^{q+k} + (a_{k,q+k} + k\beta_k) z^{q+k} + \dots \tag{5.21}$$

Autrement dit,

$$f_{k+1}(z) = z + z^{q+1} + (a_{k,q+k} - (q+1-k)\beta_k) z^{q+k} + \sum_{j=q+k+1}^{+\infty} a_{k+1,j} z^j \tag{5.22}$$

Et comme $\beta_k = \dfrac{a_{k,q+k}}{q+1-k}$, on a

$$f_{k+1}(z) = z + z^{q+1} + \sum_{j=q+k+1}^{+\infty} a_{k+1,j} z^j \tag{5.23}$$

i.e.

$$f_{k+1}(z) = z + z^{q+1} + a_{k+1,q+k+1}\, z^{q+k+1} + \sum_{j=q+k+2}^{+\infty} a_{k+1,j}\, z^j \tag{5.24}$$

De plus, sur un voisinage de 0, on a

$$H_k(f_k(z)) = f_{k+1}(H_k(z)) \quad \text{avec} \quad H_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad H_k'(0) = 1$$

Autrement dit, sur un voisinage de 0, on a

$$f_k(z) = H_k^{-1}\left(f_{k+1}\left(H_k(z)\right)\right) \quad \text{avec} \quad H_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad H_k'(0) = 1$$

et comme on peut appliquer ce procédé pour tout $k \in [\![2,q]\!]$ et comme $f = f_2$, on a, sur un voisinage[2] de 0,

$$\begin{aligned} f(z) &= H_2^{-1}\left(f_3\left(H_2(z)\right)\right) \\ &= H_2^{-1}\left(H_3^{-1}\left(f_4\left(H_3\left(H_2(z)\right)\right)\right)\right) \\ &= H_2^{-1}\left(H_3^{-1}\left(H_4^{-1}\left(f_5\left(H_4\left(H_3\left(H_2(z)\right)\right)\right)\right)\right)\right) \\ &= H_2^{-1}\left(H_3^{-1}\left(\ldots\left(H_q^{-1}\left(f_{q+1}\left(H_q\left(H_3\left(H_2(z)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right) \end{aligned}$$

En posant $\varphi(z) = H_2^{-1}\left(H_3^{-1}\left(\ldots\left(H_q^{-1}\left(z\right)\right)\right)\right)$, on obtient, sur un voisinage de 0,

$$f(z) = \varphi\left(f_{q+1}\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = 1$$

Et comme $f_{q+1}$ s'écrit sous la forme

$$f_{q+1}(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k=2q+2}^{+\infty} c_k z^k,$$

le résultat est démontré.

**Notation 5.2.3.** *Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout $\mu \in K_1$, on pose*

$$g_{q,\mu}(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1}$$

*et*

$$\tau_q(z) = \frac{z}{1 - z^q}.$$

**Théorème 5.2.4.** *Soit $f(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k\geqslant 2q+2} c_k z^k$ une série entière à coefficients dans $K_1$ de rayon de convergence strictement positif. Il existe alors $\varphi(z) = z + \sum_{k\geqslant 2} b_k z^k$ une série formelle à coefficients dans $K_1$ vérifiant*

$$f(\varphi(z)) = \varphi(g_{q,\mu}(z)).$$

*Autrement dit, toute fonction $f$ de la forme $f(z) = z+z^{q+1}+\mu z^{2q+1}+\sum_{k\geqslant 2q+2} c_k z^k$ est formellement conjuguée à $g_{q,\mu}(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1}$.*

2. une intersection finie de voisinage de 0.

*Démonstration :*

Soit $f(z) = z+z^{q+1}+\mu z^{2q+1}+\sum_{k\geqslant 2q+2} c_k z^k$ une série entière à coefficients dans $K_1$ de rayon de convergence strictement positif. Comme $\varphi(z) = z + \sum_{k\geqslant 2} b_k z^k$, il revient au même de montrer qu'il existe $h(z) = z + \sum_{k\geqslant 2} d_k z^k$ $(h = \varphi^{-1})$ vérifiant

$$h(f(z)) = g_{q,\mu}(h(z))$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons procéder par analyse-synthèse.

• Supposons qu'il existe $h(z) = z + \sum_{k\geqslant 2} d_k z^k$ une série formelle à coefficients dans $K_1$ vérifiant

$$h(f(z)) = g_{q,\mu}(h(z)). \tag{5.25}$$

Comme on a à faire à des séries formelles de valuation 1, il n'y a aucun problème pour conjuguer et on a (en notant $d_1 = 1$)

$$\begin{aligned} g_{q,\mu}(h(z)) &= h(z) + (h(z))^{q+1} + \mu(h(z))^{2q+1} \\ &= z + \sum_{k\geqslant 2} d_k z^k + \left(\sum_{k\geqslant 1} d_k z^k\right)^{q+1} + \mu\left(\sum_{k\geqslant 1} d_k z^k\right)^{2q+1} \end{aligned}$$

Or, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, en notant $D(s,n) = \displaystyle\sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_s)\,\in\,\mathbb{N}^{*s} \\ k_1+k_2+\cdots+k_s = n}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_s}$, on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k\geqslant 1} d_k z^k\right)^s &= \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_s)\,\in\,\mathbb{N}^{*s}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_s} z^{k_1+k_2+\cdots+k_s} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_s)\,\in\,\mathbb{N}^{*s} \\ k_1+k_2+\cdots+k_s = n}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_s} \right) z^n \\ &= \sum_{n=s}^{+\infty} \left( \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_s)\,\in\,\mathbb{N}^{*s} \\ k_1+k_2+\cdots+k_s = n}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_s} \right) z^n \\ &= \sum_{n=s}^{+\infty} D(s,n) z^n \end{aligned}$$

Donc

$$g_{q,\mu}(h(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n z^n + \sum_{n=q+1}^{+\infty} D(q+1,n) z^n + \mu \sum_{n=2q+1}^{+\infty} D(2q+1,n) z^n \tag{5.26}$$

On a aussi, en notant $f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k$ et en posant $C(s,n) = \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_s) \in \mathbb{N}^{*s} \\ k_1+k_2+\cdots+k_s = n}} c_{k_1} c_{k_2} \ldots c_{k_s}$

$$\left(\sum_{k \geqslant 1} c_k z^k\right)^s = \sum_{n=s}^{+\infty} C(s,n) z^n$$

et

$$\begin{aligned}
h(f(z)) &= h(\sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} d_j \left(\sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k\right)^j \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} d_j \sum_{n=j}^{+\infty} C(j,n) z^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} d_j C(j,n)\right) z^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(d_n C(n,n) + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)\right) z^n
\end{aligned}$$

et comme $C(n,n) = 1$, on a

$$h(f(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)\right) z^n \tag{5.27}$$

On déduit alors de (5.25), (5.26) et (5.27) que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)\right) z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n z^n + \sum_{n=q+1}^{+\infty} D(q+1,n) z^n + \mu \sum_{n=2q+1}^{+\infty} D(2q+1,n) z^n$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)\right) z^n = \sum_{n=q+1}^{+\infty} D(q+1,n) z^n + \mu \sum_{n=2q+1}^{+\infty} D(2q+1,n) z^n \quad (5.28)$$

Or, comme $c_1 = 1$ et $c_2 = c_3 = \cdots = c_q = 0$, on a[3], pour tout $s \in \mathbb{N}^*$,

$$C(s,s) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,q-1]\!] \quad C(s,s+k) = 0 \quad (5.29)$$

et, pour tout $1 \leqslant n \leqslant q$ et tout $1 \leqslant j \leqslant n-1$, on a $1 \leqslant n-j \leqslant q-j \leqslant q-1$, d'où

$$C(j,n) = C(j,j+(n-j)) = 0$$

La formule (5.28) devient alors

$$\sum_{n=q+1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)\right) z^n = \sum_{n=q+1}^{+\infty} D(q+1,n) z^n + \mu \sum_{n=2q+1}^{+\infty} D(2q+1,n) z^n \quad (5.30)$$

Par ailleurs, on a, grâce à (5.29) et au fait que $c_{q+1} = 1$,

$$\sum_{j=1}^{(q+1)-1} d_j C(j,q+1) = d_1 C(1,q+1) + 0 = 1 \times 1 = 1$$

et comme $d_1 = 1$, on a aussi

$$D(q+1,q+1) = 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1 \quad (5.31)$$

La formule (5.30) devient alors

$$\sum_{n=q+2}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)\right) z^n = \sum_{n=q+2}^{+\infty} D(q+1,n) z^n + \mu \sum_{n=2q+1}^{+\infty} D(2q+1,n) z^n \quad (5.32)$$

Comme $c_1 = c_{q+1} = 1$ et $0 = c_2 = c_3 = \cdots = c_q = c_{q+2} = c_{q+3} = \cdots = c_{2q}$ , on a aussi[4], pour tout $s \in \mathbb{N}^*$,

$$C(s,s) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,q-1]\!] \bigcup [\![q+1,2q-1]\!] \quad C(s,s+k) = 0 \quad (5.33)$$

et, pour tout $q+1 \leqslant n \leqslant 2q$ et tout $1 \leqslant j \leqslant n-1$, on a $1 \leqslant n-j \leqslant q-j \leqslant 2q-1$, d'où

$$C(j,n) = C(j,j+(n-j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n-j \neq q \\ j & \text{si } n-j = q \end{cases}$$

3. car dans le produit apparaît au moins l'un des $c_j$ avec $2 \leqslant j \leqslant q$.
4. car dans le produit apparaît au moins l'un des $c_j$ avec $2 \leqslant j \leqslant q$ ou $q+2 \leqslant j \leqslant 2q$.

On obtient alors pour tout $n \in [\![q+2,2q]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) = d_{n-q} C(n-q, n-q+q) = d_{n-q}(n-q) \tag{5.34}$$

D'après (5.32) et (5.34), pour $n = q+2$, on obtient

$$(q+2-q) d_{q+2-q} = D(q+1, q+2)$$

i.e.

$$2d_2 = d_1 d_1 \dots d_1 d_2 + d_1 \dots d_1 d_2 d_1 + \dots + d_2 d_1 \dots d_1 = (q+1) d_2$$

Donc, si $q > 1$, alors $d_2 = 0$.

D'après (5.32) et (5.34), pour $n = q+3$, on obtient

$$(q+3-q) d_{q+3-q} = D(q+1, q+3)$$

i.e. [5]

$$3d_3 = 0 + d_1 d_1 \dots d_1 d_3 + d_1 \dots d_1 d_3 d_1 + \dots + d_3 d_1 \dots d_1 = (q+1) d_3$$

Donc, si $q > 2$, alors $d_3 = 0$.

On procède ainsi par récurrence jusqu'à $n = q+q$.

D'après (5.32) et (5.34), pour $n = q+q$, on obtient

$$(q+q-q) d_{q+q-q} = D(q+1, q+q)$$

i.e. [6]

$$q d_q = 0 + d_1 d_1 \dots d_1 d_q + d_1 \dots d_1 d_q d_1 + \dots + d_q d_1 \dots d_1 = (q+1) d_q$$

Donc, comme $q > q-1$, alors $d_q = 0$. (5.35)

Ainsi $d_2 = d_3 = \dots = d_q = 0$ (si $q = 1$, on n'a aucune annulation) et (5.32) devient

$$\sum_{n=2q+1}^{+\infty} \left( \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) \right) z^n = \sum_{n=2q+1}^{+\infty} D(q+1,n) z^n + \mu \sum_{n=2q+1}^{+\infty} D(2q+1,n) z^n \tag{5.36}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=2q+1}^{+\infty} \left( \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) \right) z^n = \sum_{n=2q+1}^{+\infty} \big( D(q+1,n) + \mu D(2q+1,n) \big) z^n \tag{5.37}$$

5. Dans la somme, les produits comprenant $d_2$ apportent une contribution nulle

6. Dans la somme, les produits comprenant $d_2$ ou $d_3$ ou … ou $d_{q-1}$ apportent une contribution nulle

On déduit alors de (5.37) que, pour tout $n \geqslant 2q+1$,

$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) = D(q+1,n) + \mu D(2q+1,n) \tag{5.38}$$

avec

$$d_1 = 1 \text{ et } d_2 = d_3 = \cdots = d_q = 0 \tag{5.39}$$

Or

$$\begin{aligned}
D(s,n) &= \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_s) \in \mathbb{N}^{*s} \\ k_1+k_2+\cdots+k_s = n}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_s} \\
&= d_1 \ldots d_1 d_{n-(s-1)} + \cdots + d_{n-(s-1)} d_1 \ldots d_1 + \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_s) \in \mathbb{N}^{*s} \\ k_1+k_2+\cdots+k_s = n \\ \forall j \quad k_j < n-(s-1)}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_s} \\
&= s \quad d_{n-(s-1)} + \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_s) \in \mathbb{N}^{*s} \\ k_1+k_2+\cdots+k_s = n \\ \forall j \quad k_j < n-(s-1)}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_s}
\end{aligned}$$

donc

$$D(q+1,n) = (q+1) \quad d_{n-q} + \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1+k_2+\cdots+k_{q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n-q}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{q+1}} \tag{5.40}$$

et

$$D(2q+1,n) = (2q+1) \quad d_{n-2q} + \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1} \\ k_1+k_2+\cdots+k_{2q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n-2q}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{2q+1}} \tag{5.41}$$

d'où

$$D(2q+1,n) = \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1} \\ k_1+k_2+\cdots+k_{2q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n-q}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{2q+1}} \tag{5.42}$$

Or, d'après (5.33), on obtient aussi

$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) = (n-q) d_{(n-q)} + \sum_{j=1}^{n-2q} d_j C(j,n) \tag{5.43}$$

On déduit alors de (5.38), (5.40), (5.42) et (5.43) que pour tout $n \geqslant 2q+1$,

$$(n-(2q+1))d_{n-q} = A_{n,q} + B_{n,q} - C_{n,q} \tag{5.44}$$

avec

$$A_{n,q} = \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1+k_2+\cdots+k_{q+1}=n \\ \forall j \quad k_j < n-q}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{q+1}}$$

et

$$B_{n,q} = \mu \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1} \\ k_1+k_2+\cdots+k_{2q+1}=n \\ \forall j \quad k_j < n-q}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{2q+1}}$$

et

$$C_{n,q} = \sum_{j=1}^{n-2q} d_j C(j,n) = \sum_{j=1}^{n-2q} d_j \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_j) \in \mathbb{N}^{*j} \\ k_1+k_2+\cdots+k_j=n}} c_{k_1} c_{k_2} \ldots c_{k_j}$$

On s'aperçoit que pour $n = 2q+1$, cette relation n'impose aucune condition sur $d_{q+1}$ et que, pour tout $n \geqslant 2q+2$, le coefficient $d_{n-q}$ est déterminé de manière unique par la relation de récurrence ci-dessus.

Ainsi, les coefficients d'une conjuguante formelle sont déterminés par

$$d_1 = 1 \ , \ d_2 = d_3 = \cdots = d_q = 0 \ , \ d_{q+1} = u \in K_1 \tag{5.45}$$

et, pour tout $n > 2q+1$,

$$((n-(2q+1))d_{n-q} = A_{n,q} + B_{n,q} - C_{n,q} \tag{5.46}$$

avec

$$A_{n,q} = \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1+k_2+\cdots+k_{q+1}=n \\ \forall j \quad k_j < n-q}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{q+1}}$$

et

$$B_{n,q} = \mu \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1} \\ k_1+k_2+\cdots+k_{2q+1}=n \\ \forall j \quad k_j < n-q}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{2q+1}}$$

et

$$C_{n,q} = \sum_{j=1}^{n-2q} d_j C(j,n) = \sum_{j=1}^{n-2q} d_j \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_j) \in \mathbb{N}^{*j} \\ k_1+k_2+\cdots+k_j=n}} c_{k_1} c_{k_2} \ldots c_{k_j}$$

• Réciproquement, pour tout choix de $u \in K_1$, on vérifie que la série formelle $h(z) = z + \sum_{k \geqslant 2} d_k z^k$ définie par la relation de récurrence (5.45) et (5.46) est une série formelle à coefficients dans $K_1$ vérifiant

$$h(f(z)) = g_{q,\mu}(h(z)).$$

$\square$

**Théorème 5.2.5.** *Supposons que $\widetilde{K} = \mathbb{C}_p$. Soit $f(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k \geqslant 2q+2} c_k z^k$ une série entière à coefficients dans $K_1$ de rayon de convergence strictement positif et vérifiant $|\mu|_p \leqslant 1$ et $\forall k \geqslant 2q+2 \quad |c_k|_p \leqslant 1$.*
*Il existe alors $h(z) = z + \sum_{k \geqslant 2} d_k z^k$ une série entière à coefficients dans $K_1$ de rayon de convergence strictement positif vérifiant*

$$h(f(z)) = g_{q,\mu}(h(z)).$$

*Autrement dit, toute fonction $f$ de la forme $f(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k \geqslant 2q+2} c_k z^k$ avec $|\mu|_p \leqslant 1$ et $\forall k \geqslant 2q+2 \quad |c_k|_p \leqslant 1$ est analytiquement conjuguée à $g_{q,\mu}(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1}$.*

*Démonstration :*

Considérons la série formelle $h(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k z^k$ définie par la relation de récurrence

$$d_1 = 1 \ , \ d_2 = d_3 = \cdots = d_q = 0 \ , \ d_{q+1} = 1$$

et, pour tout $n > 2q+1$,

$$((n - (2q+1))d_{n-q} = A_{n,q} + B_{n,q} - C_{n,q}$$

avec

$$A_{n,q} = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \ldots, k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_{q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n-q}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{q+1}}$$

et

$$B_{n,q} = \mu \sum_{\substack{(k_1, k_2, \ldots, k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1} \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_{2q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n-q}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{2q+1}}$$

et

$$C_{n,q} = \sum_{j=1}^{n-2q} d_j C(j,n) = \sum_{j=1}^{n-2q} d_j \sum_{\substack{(k_1, k_2, \ldots, k_j) \in \mathbb{N}^{*j} \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_j = n}} c_{k_1} c_{k_2} \ldots c_{k_j}$$

D'après la démonstration précédente, on a

$$h(f(z)) = g_{q,\mu}(h(z)).$$

et pour démontrer le théorème 5.2.5, il suffit de prouver que $h(z)$ possède un rayon de convergence strictement positif.

Comme tous les $c_k$ vérifient $|c_k|_p \leqslant 1$, on obtient grâce à l'inégalité ultramétrique que tous les $C(j,n)$ vérifient aussi

$$|C(j,n)|_p \leqslant 1. \tag{5.47}$$

De plus, on vérifie immédiatement que $\forall k \in [\![1,q+1]\!] \quad |d_k| \leqslant 1$ et l'inégalité ultramétrique appliquée à la relation de récurrence définissant les $d_k$ nous donne

$$|n-(2q+1)|_p |d_{n-q}|_p \leqslant \max\Big(|A_{n,q}|_p, |B_{n,q}|_p, |C_{n,q}|_p\Big) \tag{5.48}$$

avec

$$|A_{n,q}|_p \leqslant \max_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1+k_2+\cdots+k_{q+1}=n \\ \forall j \quad k_j < n-q}} |d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \ldots |d_{k_{q+1}}|_p \tag{5.49}$$

et (en utilisant le fait que $|\mu| \leqslant 1$),

$$|B_{n,q}|_p \leqslant \max_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1} \\ k_1+k_2+\cdots+k_{2q+1}=n \\ \forall j \quad k_j < n-q}} |d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \ldots |d_{k_{2q+1}}|_p \tag{5.50}$$

et, en utilisant (5.47),

$$|C_{n,q}|_p \leqslant \max_{j=1,2,\ldots,n-2q} |d_j|_p |C(j,n)|_p \leqslant \max_{j=1,2,\ldots,n-2q} |d_j|_p \tag{5.51}$$

Comme $\forall k \in [\![1,q+1]\!] \quad |d_k| \leqslant 1$, on a, pour $n = 2q+2$,

$$|1|_p |d_{q+2}|_p \leqslant 1$$

c'est-à-dire

$$|d_{q+2}|_p \leqslant \frac{1}{|(2-1)!|_p} \tag{5.52}$$

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad |d_{q+k}|_p \leqslant \dfrac{1}{|(k-1)!|_p}$.

- On vient de vérifier que $|d_{q+2}|_p \leqslant \dfrac{1}{|(2-1)!|_p}$.
- Soit $k \geqslant 2$ et supposons que pour tout $2 \leqslant j \leqslant k$, $|d_{q+j}|_p \leqslant \dfrac{1}{|(j-1)!|_p}$.

Posons $n = 2q+k+1$. On a alors

$$|k|_p \quad |d_{q+k+1}|_p \leqslant \max\Big(|A_{2q+k+1,q}|_p, |B_{2q+k+1,q}|_p, |C_{2q+k+1,q}|_p\Big)$$

On convient de noter, pour tout entier $m < 0$, $m! = 1$. L'hypothèse de récurrence devient alors

$$\forall j \in [\![1,q+k]\!] \qquad |d_j|_p \leqslant \frac{1}{|(j-q-1)!|_p} \tag{5.53}$$

**Remarque 5.2.6.** *Pour démontrer que* $|d_{q+k+1}|_p \leqslant \dfrac{1}{|k!|_p}$*, il suffit de prouver*

*a)* $|A_{2q+k+1,q}|_p \leqslant \dfrac{1}{|(k-1)!|_p}$

*b)* $|B_{2q+k+1,q}|_p \leqslant \dfrac{1}{|(k-1)!|_p}$

*c)* $|C_{2q+k+1,q}|_p \leqslant \dfrac{1}{|(k-1)!|_p}$

*On pourra notamment utiliser le fait que* $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \dfrac{1}{|(n-1)!|_p} \leqslant \dfrac{1}{|n!|_p}$

• c) D'après (5.51), (5.53), et le fait que $k+1 \leqslant q+k$ , on a,

$$|C_{2q+k+1,q}|_p \leqslant \max_{j=1,2,\ldots,k+1} |d_j|_p \leqslant \max_{j=1,2,\ldots,k+1} \frac{1}{|(j-q-1)!|_p} \leqslant \max_{j=1,2,\ldots,k+1} \frac{1}{|(k-q)!|_p}$$

d'où

$$|C_{2q+k+1,q}|_p \leqslant \frac{1}{|(k-q)!|_p} \leqslant \frac{1}{|(k-1)!|_p} \tag{5.54}$$

• a) D'après (5.49), on a

$$|A_{2q+k+1,q}|_p \leqslant \max_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1+k_2+\cdots+k_{q+1}=2q+k+1 \\ \forall j \quad k_j < q+k+1}} |d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \ldots |d_{k_{q+1}}|_p$$

Soit $(k_1,k_2,\ldots,k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1}$ tel que

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{q+1} = 2q+k+1$$

et

$$\forall j \in [\![1,q+1]\!] \quad k_j < q+k+1$$

On a alors

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \ldots |d_{k_{q+1}}|_p \leqslant \frac{1}{|(k_1-q-1)!|_p} \frac{1}{|(k_2-q-1)!|_p} \cdots \frac{1}{|(k_{q+1}-q-1)!|_p}$$

Quitte à réordonner les $k_j$, on peut supposer que

$$k_1-q-1 \geqslant k_2-q-1 \geqslant \cdots \geqslant k_r-q-1 \geqslant 1 > k_{r+1}-q-1 \geqslant k_{q+1}-q-1$$

Et comme $\forall m \leqslant 1 \quad m! = 1$, on a

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \dots |d_{k_{q+1}}|_p \leqslant \frac{1}{|(k_1-q-1)!|_p} \frac{1}{|(k_2-q-1)!|_p} \cdots \frac{1}{|(k_r-q-1)!|_p} \tag{5.55}$$

avec

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r \leqslant 2q + k + 1 \tag{5.56}$$

Or, il est connu que pour tout $(n_1,n_2,\dots,n_r) \in \mathbb{N}^r$, on a

$$\frac{(n_1+n_2+\cdots+n_r)!}{n_1!n_2!\dots n_r!} \in \mathbb{N}^*$$

d'où

$$\left|\frac{(n_1+n_2+\cdots+n_r)!}{n_1!n_2!\dots n_r!}\right|_p \leqslant 1$$

d'où

$$|(n_1+n_2+\cdots+n_r)!|_p \leqslant |n_1!n_2!\dots n_r!|_p$$

d'où

$$\frac{1}{|n_1!n_2!\dots n_r!|_p} \leqslant \frac{1}{|(n_1+n_2+\cdots+n_r)!|_p} \tag{5.57}$$

On déduit alors de (5.55) et (5.57) que

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \dots |d_{k_{q+1}}|_p \leqslant \frac{1}{|(k_1-q-1)+(k_2-q-1)+\cdots+(k_r-q-1)!|_p} \tag{5.58}$$

c'est-à-dire

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \dots |d_{k_{q+1}}|_p \leqslant \frac{1}{|(k_1+k_2+\cdots+k_r-rq-r)!|_p} \tag{5.59}$$

et comme d'après (5.56) $k_1 + k_2 + \cdots + k_r \leqslant 2q + k + 1$, on a

$$\frac{1}{|(k_1+k_2+\cdots+k_r-rq-r)!|_p} \leqslant \frac{1}{|(2q+k+1-rq-r)!|_p} \leqslant \frac{1}{|\big((2-r)q+k+(1-r)\big)!|_p}$$

d'où

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \dots |d_{k_{q+1}}|_p \leqslant \frac{1}{|\big((2-r)q+k+(1-r)\big)!|_p} \tag{5.60}$$

Or, par définition de $r$, on a

$$(k_1-q-1)+(k_2-q-1)+\cdots+(k_r-q-1) \geqslant 1+1+\cdots+1 \geqslant r$$

donc

$$\big((2-r)q+k+(1-r)\big) \geqslant (k_1+k_2+\cdots+k_r-rq-r) \geqslant r \geqslant 0$$

i.e.

$$0 \leqslant \big((2-r)q+k+(1-r)\big) \tag{5.61}$$

$\circ\circ$ si $r \geqslant 2$, on a alors

$$0 \leqslant \big((2-r)q + k + (1-r)\big) \leqslant k-1$$

d'où

$$\frac{1}{\big|\big((2-r)q + k + (1-r)\big)!\big|_p} \leqslant \frac{1}{|(k-1)!|_p}$$

et (5.60) nous donne

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \ldots \big|d_{k_{q+1}}\big|_p \leqslant \frac{1}{|(k-1)!|_p} \tag{5.62}$$

ce qui est le résultat voulu.

$\circ\circ$ si $r = 0$, par construction de $r$, il s'en suit immédiatement que

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \ldots \big|d_{k_{q+1}}\big|_p = 1 \leqslant \frac{1}{|(k-1)!|_p} \tag{5.63}$$

ce qui est le résultat voulu.

$\circ\circ$ Reste le cas $r = 1$. On a alors

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \ldots \big|d_{k_{q+1}}\big|_p \leqslant \frac{1}{|(k_1-q-1)!|_p} \tag{5.64}$$

avec[7]

$$k_1 < q + k + 1$$

c'est-à-dire

$$k_1 \leqslant q + k$$

d'où

$$k_1 - q - 1 \leqslant q + k - q - 1 \leqslant k - 1$$

d'où

$$\frac{1}{|(k_1-q-1)!|_p} \leqslant \frac{1}{|(k-1)!|_p}$$

On déduit alors de (5.64) et de l'inégalité précédente que

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \ldots \big|d_{k_{q+1}}\big|_p \leqslant \frac{1}{|(k-1)!|_p} \tag{5.65}$$

ce qui est le résultat voulu.

7. car $k_1$ est un indice dans $A_{2q+k+1,q}$

Ainsi, dans tous les cas, on a

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \dots \left|d_{k_{q+1}}\right|_p \leqslant \frac{1}{|(k-1)!|_p} \tag{5.66}$$

d'où

$$|A_{2q+k+1,q}|_p \leqslant \frac{1}{|(k-1)!|_p} \tag{5.67}$$

• b) Par une démonstration analogue, on démontre que

$$|B_{2q+k+1,q}|_p \leqslant \frac{1}{|(k-1)!|_p} \tag{5.68}$$

Et finalement, grâce à la remarque 5.2.6 et à (5.67) , (5.68) et (5.54), on a

$$|d_{q+k+1}|_p \leqslant \frac{1}{|k!|_p}$$

Par récurrence, il s'en suit alors que,

$$\forall k \geqslant 2 \qquad |d_{q+k}|_p \leqslant \frac{1}{|(k-1)!|_p} \tag{5.69}$$

On obtient alors, comme $k-1 \leqslant q+k$,

$$\forall k \geqslant 2 \qquad |d_{q+k}|_p \leqslant \frac{1}{|(k-1)!|_p} \leqslant \frac{1}{|(q+k)!|_p} \tag{5.70}$$

et comme

$$\forall j \in [\![1,q+1]\!] \qquad |d_j|_p \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{|j!|_p} \tag{5.71}$$

finalement, (5.70) et (5.71) donnent

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad |d_k|_p \leqslant \frac{1}{|k!|_p} \tag{5.72}$$

mais comme[8]

$$p^{-\frac{k}{p-1}} \leqslant |k!|_p \tag{5.73}$$

on a

$$\frac{1}{|k!|_p} \leqslant p^{\frac{k}{p-1}} \leqslant \left(p^{\frac{1}{p-1}}\right)^k \tag{5.74}$$

Finalement, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad |d_k|_p \leqslant \left(p^{\frac{1}{p-1}}\right)^k \tag{5.75}$$

et par conséquent $h(z)$ est une série entière de rayon $R \geqslant p^{\frac{-1}{p-1}} > 0$.

□

8. voir (3.25)

**Proposition 5.2.7.** *Soit $f(z) = z+\sum_{k\geqslant 2}\widetilde{c}_k z^k$ une série entière à coefficients dans $K_1$ de rayon de convergence strictement positif. On suppose qu'il existe $q_1 \in \mathbb{N}^*$, $q_2 \in \mathbb{N}^*$, $\mu_1 \in K_1$, $\mu_2 \in K_1$, et $\varphi_1(z) = z+\sum_{k\geqslant 2} b_{1,k}z^k$ et $\varphi_2(z) = z+\sum_{k\geqslant 2} b_{2,k}z^k$ deux séries formelles à coefficients dans $K_1$ vérifiant*

$$f(\varphi_1(z)) = \varphi_1(g_{q_1,\mu_1}(z)) \quad \text{et} \quad f(\varphi_2(z)) = \varphi_2(g_{q_2,\mu_2}(z))$$

*Alors*

$$q_1 = q_2 \quad \text{et} \quad \mu_1 = \mu_2$$

*Démonstration :*

On a

$$\varphi_1\left(g_{q_1,\mu_1}\left(\varphi_1^{-1}(z)\right)\right) = f(z) = \varphi_2\left(g_{q_2,\mu_2}\left(\varphi_2^{-1}(z)\right)\right)$$

d'où, en composant par $\varphi_2^{-1}$ à gauche et par $\varphi_1$ à droite,

$$\varphi_2^{-1}\left(\varphi_1\left(g_{q_1,\mu_1}(z)\right)\right) = g_{q_2,\mu_2}\left(\varphi_2^{-1}(\varphi_1(z))\right)$$

ce qui donne, en posant $h(z) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(z))$,

$$h\left(g_{q_1,\mu_1}(z)\right) = g_{q_2,\mu_2}\left(h(z)\right)$$

avec $h(z) = z + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} d_k z^k$ série formelle à coefficients dans $K_1$.

Or, d'après (5.26), on a, en utilisant les notations de la démonstration précédente,

$$g_{q_2,\mu_2}(h(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n z^n + \sum_{n=q_2+1}^{+\infty} D(q_2+1,n)z^n + \mu_2 \sum_{n=2q_2+1}^{+\infty} D(2q_2+1,n)z^n$$

et, en notant $g_{q_1,\mu_1}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k$ , on a aussi, d'après (5.27)

$$h\left(g_{q_1,\mu_1}(z)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)\right) z^n$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)\right) z^n &= h\left(g_{q_1,\mu_1}(z)\right) = g_{q_2,\mu_2}\left(h(z)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} d_n z^n + \sum_{n=q_2+1}^{+\infty} D(q_2+1,n)z^n + \mu_2 \sum_{n=2q_2+1}^{+\infty} D(2q_2+1,n)z^n\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)\right) z^n = \sum_{n=q_2+1}^{+\infty} D(q_2+1,n)z^n + \mu_2 \sum_{n=2q_2+1}^{+\infty} D(2q_2+1,n)z^n \quad (5.76)$$

Or, d'après (5.31), on a
$$D(q_2+1,q_2+1)=1$$
Donc (5.76) devient
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)\right) z^n = z^{q_2+1}+\sum_{n=q_2+2}^{+\infty} b_n z^n \tag{5.77}$$
Or d'après (5.33), pour tout $n \leqslant q_1$, on a[9]
$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)=0$$
et d'après (5.43), pour $n=q_1+1$, on a
$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)=(n-q_1)d_{(n-q_1)}+\sum_{j=1}^{n-2q_1} d_j C(j,n)=1d_1+0=1$$
(5.77) devient alors
$$z^{q_1+1}+\sum_{n=q_1+2}^{+\infty}\widetilde{b}_n z^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)\right) z^n = z^{q_2+1}+\sum_{n=q_2+2}^{+\infty} b_n z^n \tag{5.78}$$
d'où
$$q_1+1=q_2+1$$
et par conséquent,
$$q_1=q_2.$$
On a aussi, grâce à (5.76), en notant $q=q_1=q_2$, pour tout $n \geqslant 2q+1$,
$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)=D(q+1,n)+\mu_2 D(2q+1,n).$$
En particulier pour le coefficient de degré $n=2q+1$, on obtient
$$\sum_{j=1}^{2q} d_j \quad C(j,2q+1)=D(q+1,2q+1)+\mu_2 D(2q+1,2q+1). \tag{5.79}$$
Or, d'une part, d'après (5.43)
$$\sum_{j=1}^{2q} d_j C(j,2q+1)=(q+1)d_{q+1}+\sum_{j=1}^{1} d_j C(j,2q+1)$$

9. On utilise ici le fait que $c_1=1,c_{q_1+1}=1,c_{2q_1+1}=\mu_1 \quad \text{et} \quad \forall k \notin \{1,q_1+1,2q_1+1\} \quad c_k=0$

avec

$$d_1 = 1 \quad \text{et} \quad C(1{,}2q+1) = c_{2q+1} = \mu_1$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{2q} d_j C(j{,}2q+1) = (q+1)d_{q+1} + \mu_1 \tag{5.80}$$

et d'autre part,

$$D(2q+1{,}2q+1) = 1 \tag{5.81}$$

et [10]

$$D(q+1{,}2q+1) = (q+1) \quad d_{q+1} + \sum_{\substack{(k_1,k_2,\dots,k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*\,q+1} \\ k_1+k_2+\cdots+k_{q+1} = 2q+1 \\ \forall j \quad k_j < q+1}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{q+1}}$$

d'où, comme $d_2 = d_3 = \cdots = d_q = 0$,

$$D(q+1{,}2q+1) = (q+1) \quad d_{q+1} + 0 = (q+1) \quad d_{q+1} \tag{5.82}$$

On déduit alors de (5.79), (5.80), (5.81) et (5.82) que

$$(q+1)d_{q+1} + \mu_1 = (q+1)d_{q+1} + \mu_2$$

d'où

$$\mu_1 = \mu_2$$

□

Nous allons maintenant essayer de généraliser le théorème de Perez-Marco à ce cadre.

**Définition 5.2.8.** *Soit $f(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k z^k$ une série entière à coefficients dans $K_1$ et de rayon de convergence strictement positif.*

*On note $\widetilde{C}(f)$ le centralisateur formel de $f$, c'est-à-dire l'ensemble des séries formelles $h(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k z^k$ vérifiant $f(h(z)) = h(f(z))$.*

*On note $C(f)$ le centralisateur de $f$, c'est-à-dire l'ensemble des séries entières $h(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k z^k$ à coefficients dans $K_1$ et de rayon de convergence strictement positif vérifiant $f(h(z)) = h(f(z))$.*

*Lorsque $\widetilde{C}(f) = C(f)$, on dit que $f$ est pleinement itérable.*

**Théorème 5.2.9.** *Si $d,q \in \mathbb{N}^*$, si $\mu \in K_1$, si les $h_k : K_1 \longrightarrow K_1$ sont des séries entières de valuation supérieure ou égale à $2q+2$ et de rayon de convergence strictement positif et si on pose*

$$f_t(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k=0}^{d} t^k h_k(z) \text{ et } E = \{t \in K_2 / f_t \text{ est conjuguée à } g_{q,\mu}\},$$

*Si on suppose de plus que $g_{q,\mu}$ est pleinement itérable, alors,*

$$\text{ou bien } E = K_2 \text{ ou bien } d^*(E) = 0$$

10. d'après (5.40) appliqué à $n = 2q+1$.

**Remarque 5.2.10.** *Pour $K_1 = K_2 = \widetilde{K} = \mathbb{C}$, ce théorème ne donne malheureusement que très rarement une information, car la condition $C(g_{q,\mu}) = \widetilde{C}(g_{q,\mu})$ est très rarement réalisée. En effet, Ecalle a démontré (voir [Eca81a] et [Eca81b]) que :*

*Pour toute série entière $f(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k z^k$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ et de rayon de convergence strictement positif, si l'on fait varier $r$ de ces coefficients $(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_r})$ dans $\mathbb{C}^r$, alors $f$ n'est pleinement itérable que pour un ensemble de mesure nulle de $\mathbb{C}^r$.*

*En particulier, cela entraîne que $g_{q,\mu}$ n'est pleinement itérable que pour un ensemble de mesure nulle de $\mu \in \mathbb{C}$.*

**Remarque 5.2.11.** *Le fait que l'on ait ici besoin d'une condition du type $g_{q,\mu}$ pleinement itérable provient du fait que la conjuguante formelle n'est pas unique (voir théorème 5.2.4 ), mais que (avec les notations de la démonstration du théorème 5.2.4), on peut choisir le coefficient $d_{q+1} = u$ de la conjuguante formelle comme on veut. On notera $h_{t,u}$ la conjuguante formelle de $f_t$ qui vérifie de plus $d_{q+1} = u$. Le problème qui apparaît alors est qu'il est possible qu'une conjuguante formelle $h_{t_0,u_0}$ de $f_{t_0}$ soit une série entière de rayon strictement positif alors qu'une autre conjuguante formelle $h_{t_0,u_1}$ de $f_{t_0}$ soit une série entière de rayon nul.*
*De plus, lorsque l'on passe de $t_0$ à $t_1$, il se peut que cette fois-ci, la conjuguante formelle $h_{t_1,u_0}$ de $f_{t_1}$ soit une série entière de rayon nul alors que la conjuguante formelle $h_{t_1,u_1}$ de $f_{t_1}$ soit une série entière de rayon strictement positif.*
*La condition $g_{q,\mu}$ pleinement itérable permet de résoudre le problème car elle entraîne que tous les $h_{t_0,u}$ sont simultanément linéarisables.*
*En effet, $h_{t_0,u}$ et $h_{t_0,1}$ sont deux conjuguantes formelles de $f_{t_0}$, alors on a $h_{t_0,u}^{-1}(g_{q,\mu}(h_{t_0,u}(z))) = f_{t_0}(z) = h_{t_0,1}^{-1}(g_{q,\mu}(h_{t_0,1}(z)))$, d'où $h_{t_0,1}\left(h_{t_0,u}^{-1}(g_{q,\mu}(z))\right) = g_{q,\mu}\left(h_{t_0,1}\left(h_{t_0,u}^{-1}(z)\right)\right)$, d'où, en posant, $\widetilde{h}(z) = h_{t_0,1}\left(h_{t_0,u}^{-1}(z)\right) = z + \ldots$, $\widetilde{h}\left(g_{q,\mu}(z)\right) = g_{q,\mu}\left(\widetilde{h}(z)\right)$. Donc $\widetilde{h} \in \widetilde{C}\left(g_{q,\mu}\right)$. Et comme $g_{q,\mu}$ est pleinement itérable, on a $\widetilde{h} \in C\left(g_{q,\mu}\right)$, d'où $\widetilde{h}$ série entière de rayon de convergence strictement positif. Comme $\widetilde{h}\left(h_{t_0,u}(z)\right) = h_{t_0,1}(z)$ avec $\widetilde{h}$ rayon de convergence strictement positif , on en déduit que $h_{t_0,u}$ est de rayon de convergence strictement positif si et seulement si $h_{t_0,1}$ est de rayon de convergence strictement positif.*

**Remarque 5.2.12.** *Dans le chapitre 4, il y avait unicité de la linéarisante formelle et en notant, comme à la fin du chapitre 4, $r_\lambda(z) = \lambda z$ avec $\lambda = e^{i2\pi\theta}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a $\widetilde{C}\left(r_\lambda\right) = \{Id\} = C\left(r_\lambda\right)$.*

**Remarque 5.2.13.** *Soit $f(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k z^k$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}$ et de rayon de convergence strictement positif. Pour étudier la structure de $C(f)$ et $\widetilde{C}(f)$, Ecalle a d'abord prouvé, dans [Eca71], que $\widetilde{C}(f)$ est l'ensemble ayant pour éléments tous les $f^{\{w\}}$ (itérées $w$ ième de $f$) avec $w \in \mathbb{C}$ . Ensuite, dans [Eca74], Ecalle a démontré que $W_f = \{w \in \mathbb{C} / f^{\{w\}}$* est de rayon strictement positif $\}$ *est soit égal à $\mathbb{C}$ tout entier (auquel cas $f$ est pleinement itérable), soit égal à $\frac{1}{m}\mathbb{Z}$ avec*

*$m \in \mathbb{N}^*$. On peut utiliser la technique de Perez-Marco pour démontrer de façon beaucoup plus élémentaire un résultat un peu plus faible que le théorème d'Ecalle. Comme le cas qui nous intéresse est celui des fonctions $g_{q,\mu}$, on va se restreindre (pour ne pas alourdir les calculs) à l'étude des fonctions $f$ de la forme $f(z) = z + z^{q+1} + \sum_{k=2q+1}^{+\infty} c_k z^k$.*

**Théorème 5.2.14.** *Soit $f(z) = z + z^{q+1} + \sum_{k=2q+1}^{+\infty} c_k z^k$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}$ et de rayon de convergence strictement positif .*
*Alors, ou bien $W_f = \mathbb{C}$, ou bien $d^*(W_f) = 0$.*

*Démonstration :*

Pour démontrer ce théorème, nous allons procéder par plusieurs étapes.

• étape 1: détermination de $\widetilde{C}(f)$.

∘ Soit $h(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k z^k \in \widetilde{C}(f)$. On a, avec les notations du théorème 5.2.4, en faisant une démonstration analogue à celle de la formule (5.27)

$$h(f(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) \right) z^n \tag{5.83}$$

et

$$f(h(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( c_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_j D(j,n) \right) z^n \tag{5.84}$$

d'où, pour tout $n \geqslant 3$,

$$d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) = c_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_j D(j,n)$$

i.e.

$$d_n + \sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) + d_1 C(1,n) = c_n + \sum_{j=2}^{n-1} c_j D(j,n) + c_1 D(1,n)$$

i.e.

$$d_n + \sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) + d_1 c_n = c_n + \sum_{j=2}^{n-1} c_j D(j,n) + c_1 d_n$$

d'où, pour tout $n \geqslant 3$,

$$\sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) = \sum_{j=2}^{n-1} c_j D(j,n) \tag{5.85}$$

Comme $c_1 = 1 = c_{q+1}$ et $0 = c_2 = c_3 = \cdots = c_q = c_{q+2} = \cdots = c_{2q}$, on a, par une démonstration analogue à celle de (5.43), pour tout $n \geqslant q+2$

$$\sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) = (n-q)d_{(n-q)} + \sum_{j=2}^{n-2q} d_j C(j,n) \tag{5.86}$$

Les relations (5.85) et (5.86) appliquées à $n = q+2$ donnent

$$2d_2 = \sum_{j=2}^{q+1} d_j C(j,q+2) = \sum_{j=2}^{q+1} c_j D(j,q+2) = c_{q+1} D(q+1,q+2) = (q+1)d_2$$

Donc, si $q > 1$, alors $d_2 = 0$.
On regarde ce qui se passe pour $n = q+3$ et finalement, par une démonstration analogue à celle de (5.35), on démontre que $d_2 = d_3 = \cdots = d_q = 0$ (si $q = 1$, on n'a aucune annulation)
De plus[11], par un raisonnement analogue à celui de (5.40), on a

$$\begin{aligned} D(q+1,n) &= (q+1) \quad d_{n-q} + \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1+k_2+\cdots+k_{q+1}=n \\ \forall j \quad k_j < n-q}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{q+1}} \\ &= (q+1) \quad d_{n-q} + D'(q+1,n,n-q-1) \end{aligned}$$

et comme[12]

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n-1} c_j D(j,n) &= c_{q+1} D(q+1,n) + \sum_{j=2q+1}^{n-1} c_j D(j,n) \\ &= D(q+1,n) + \sum_{j=2q+1}^{n-1} c_j D'(j,n,n-q-1) \end{aligned}$$

on obtient

$$\sum_{j=2}^{n-1} c_j D(j,n) = (q+1) \quad d_{n-q} + D'(q+1,n,n-q-1) + \sum_{j=2q+1}^{n-1} c_j D'(j,n,n-q-1) \tag{5.87}$$

11. En notant $D'(s,n,r) = \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_s) \in \mathbb{N}^{*s} \\ k_1+k_2+\cdots+k_s=n \\ \forall j \quad k_j \leqslant r}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_s}$ .

12. car $c_1 = 1 = c_{q+1}$ et $0 = c_2 = c_3 = \cdots = c_q = c_{q+2} = \cdots = c_{2q}$ et $\forall j \geqslant 2q+1 \quad n-(j-1) \leqslant n-2q \leqslant n-q-q \leqslant n-q-1$ .

On déduit alors de (5.85), (5.86) et (5.87) que, pour tout $n \geqslant 2q+1$,

$$(n-(2q+1))d_{n-q} = D'(q+1,n,n-q-1) + \sum_{j=2q+1}^{n-1} c_j D'(j,n,n-q-1) - \sum_{j=2}^{n-2q} d_j C(j,n) \tag{5.88}$$

Pour $n = 2q+1$, aucune condition n'est imposée sur $d_{q+1}$, mais, une fois le coefficient $d_{q+1} = u \in \mathbb{C}$ choisi, tous les $d_k$ d'indice supérieur sont déterminés de manière unique par cette relation de récurrence.

A l'avenir, nous noterons $h_u$ cette conjuguante formelle $h$ pour indiquer que le coefficient $d_{q+1} = u$.

On vient de prouver que, lorsque $u$ est fixé, $h_u$ est unique et vérifie ainsi:

$$d_1 = 1, \quad d_2 = d_3 = \cdots = d_q = 0, \quad d_{q+1} = u \tag{5.89}$$

et, pour tout $n \geqslant 2q+1$,

$$(n-(2q+1))d_{n-q} = D'(q+1,n,n-q-1) + \sum_{j=2q+1}^{n-1} c_j D'(j,n,n-q-1) - \sum_{j=2}^{n-2q} d_j C(j,n) \tag{5.90}$$

$\circ$ Réciproquement, pour tout $u \in \mathbb{C}$, considérons la série formelle
$h_u(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k z^k$ définie par

$$d_1 = 1, \quad d_2 = d_3 = \cdots = d_q = 0, \quad d_{q+1} = u$$

et, pour tout $n \geqslant 2q+1$,

$$(n-(2q+1))d_{n-q} = D'(q+1,n,n-q-1) + \sum_{j=2q+1}^{n-1} c_j D'(j,n,n-q-1) - \sum_{j=2}^{n-2q} d_j C(j,n).$$

On vérifie alors que $h_u(f(z)) = f(h_u(z))$ et ainsi, $h_u \in \widetilde{C}(f)$.

**Remarque 5.2.15.** *$h_u$ vérifie alors les propriétés de l'itéré $u$ ème de $f$.
Comme $Id(f(z)) = f(z) = f(Id(z))$ et $Id(z)$ est une série formelle ayant son $q+1$ ème coefficient nul, forcément,*

$$h_0 = Id. \tag{5.91}$$

*De manière analogue, comme $f(f(z)) = f(f(z))$ et $f(z)$ est une série formelle ayant son $q+1$ ème coefficient égal à 1, on a*

$$h_1 = f. \tag{5.92}$$

*Par ailleurs*[13]*, pour tout $u \in \mathbb{C}$ et tout $v \in \mathbb{C}$, on a*

$$h_u(h_v(f(z))) = h_u(f(h_v(z))) = f(h_u(h_v(z)))$$

*avec*

$$\begin{aligned} h_u(h_v(z)) &= h_u\big(z + vz^{q+1} + \dots\big) \\ &= \big(z + vz^{q+1} + \dots\big) + u\big(z + vz^{q+1} + \dots\big)^{q+1} + \dots \\ &= z + vz^{q+1} + \dots + uz^{q+1} + \dots = z + (u+v)z^{q+1} + \dots \end{aligned}$$

*On en déduit alors que*

$$h_u \circ h_v = h_{u+v}. \tag{5.93}$$

*Cela entraîne en particulier que $h_2 = h_1 \circ h_1 = f \circ f$, $h_3 = h_2 \circ h_1 = f \circ f \circ f$, ....*
*Et aussi, $Id = h_0 = h_{1-1} = h_{(-1)+1} = h_1 \circ h_{-1} = h_{-1} \circ h_1 = f \circ h_{-1} = h_{-1} \circ f$, d'où $h_{-1} = f^{-1}$, etc ...*

• étape 2: majoration du degré (en tant que polynôme en u) des coefficients de $h_u$.

On a prouvé que, pour tout $u \in C$, $h_u(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k z^k$ est définie par

$$d_1 = 1, \quad d_2 = d_3 = \dots = d_q = 0, \quad d_{q+1} = u \tag{5.94}$$

et, pour tout $n \geqslant 2q+1$,

$$(n-(2q+1))d_{n-q} = D'(q+1,n,n-q-1) + \sum_{j=2q+1}^{n-1} c_j D'(j,n,n-q-1) - \sum_{j=2}^{n-2q} d_j C(j,n) \tag{5.95}$$

Cela entraîne en particulier, par récurrence immédiate, que les $d_k$ sont des polynômes en $u$.

On remarque aussi immédiatement que $d_1, d_2, \dots, d_q$ sont des polynômes constants et que $d_{q+1}$ est un polynôme de degré 1. De plus

**Lemme 5.2.16.** .
*Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $d_{q+m}$ est un polynôme en $u$ de degré au plus $q+m$.*

*Démonstration :*

• On a déjà vu que $d_{q+1}$ est un polynôme de degré 1.

13. Comme toutes les séries formelles sont de valuation 1, il n'y a aucun problème pour les composer.

• Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et supposons que pour tout $r \in [\![1,m]\!]$, $\deg d_{q+r} \leqslant r$.
Posons $n = m + 2q + 1$. On a $d_{q+m+1} = d_{n-q}$. Il nous reste à étudier les 3 termes de la relation de récurrence (5.95).
◦ Le 3 ème terme ne pose aucun problème car pour tout $j \leqslant n - 2q$, on a $j \leqslant n - 2q \leqslant n - q - 1 \leqslant q + n - 2q - 1 \leqslant q + m$, d'où $\deg(d_j) \leqslant m \leqslant m + 1$.
◦ Etudions le 2 ème terme. Soit $j \in [\![2q + 1,n - 1]\!]$ . On a

$$D'(j,n,n-q-1) = \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_j) \in \mathbb{N}^{*j} \\ k_1+k_2+\cdots+k_j = n \\ \forall j \quad k_j \leqslant n-q-1}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_j}$$

Soit $(k_1,k_2,\ldots,k_j) \in \mathbb{N}^{*j}$ tel que $k_1 + k_2 + \cdots + k_j = n$. Quitte à réordonner les $k_j$, on peut supposer que $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_r \geqslant q + 1 > k_{r+1} \geqslant \cdots \geqslant k_j$ .
On a alors

$$\begin{aligned}
\deg\left(d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_j}\right) &\leqslant \deg\left(d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_r}\right) \\
&\leqslant \deg(d_{k_1}) + \deg(d_{k_2}) + \cdots + \deg(d_{k_r}) \\
&\leqslant (k_1 - q) - (k_2 - q) - \ldots (k_r - q) \\
&\leqslant k_1 + k_2 + \cdots + k_r - rq \\
&\leqslant n - rq \\
&\leqslant m + 2q + 1 - rq \\
&\leqslant m + 1 + (2 - r)q
\end{aligned}$$

◦ si $r \geqslant 2$, alors $\deg\left(d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_j}\right) \leqslant m + 1$ et on a le résultat voulu.

◦ si $r = 0$, alors, pour tout $i \leqslant j$, $d_{k_i}$ est un polynôme constant, donc $d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_j}$ est polynôme constant et $\deg\left(d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_j}\right) \leqslant 0 \leqslant m+1$ et on a le résultat voulu.

◦ si $r = 1$, alors, comme précédemment, $d_{k_2} \ldots d_{k_j}$ est polynôme constant et on a $\deg\left(d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_j}\right) \leqslant \deg(d_{k_1})$ avec $k_1 \leqslant n - q - 1 \leqslant m + q$, d'où $\deg(d_{k_1}) \leqslant m$.
On a alors $\deg\left(d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_j}\right) \leqslant \deg(d_{k_1}) \leqslant m \leqslant m + 1$ et on a le résultat voulu.

◦ Pour le 1er terme, la démonstration est analogue à la précédente et on a $\deg\left(d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{q+1}}\right) \leqslant m + 1$

Finalement, on a $d_{q+m+1} \leqslant m + 1$ et le lemme s'en déduit par récurrence.

• étape 3: fin de la démonstration du théorème.

Posons pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$F_q = \{u \in \mathbb{C} \quad / \quad |u| \leqslant q\}$$

et

$$G_q = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \{u \in F_q \quad / \quad d_j(u) \leqslant q^j\}$$

Les $G_q$ sont des compacts de $\mathbb{C}$ et on vérifie facilement que, en posant

$$E = \{u \in \mathbb{C} \quad / \quad h_u(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k(u) z^k \text{ de rayon strictement positif.}\},$$

on a

$$E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$$

Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que si $d^*(E) > 0$, alors $E = \mathbb{C}$. Supposons donc que $d^*(E) > 0$. D'après ce qui précède, on a $E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, d'où $d^* \left( \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q \right) > 0$. Grâce au théorème 3.2.8, on en déduit qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $d^*(G_{q_0}) > 0$. Comme $G_{q_0}$ est compact, on déduit de la proposition 3.2.5 que $d^*(G_{q_0}) = d(G_{q_0})$. Par conséquent, $d(G_{q_0}) > 0$.
Soit $u \in \mathbb{C}$ et $q \geqslant 2$. Comme $d(G_{q_0}) > 0$ avec $G_{q_0} \subseteq B_f(0,q_0)$ et comme $\deg d_q \leqslant q$, on a, d'après le théorème 3.1.10

$$|d_q(u)| \leqslant \max_{a \in G_{q_0}} |d_q(a)| \quad \left( \frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^q \left( |u| + q_0 \right)^q.$$

Or

$$\max_{a \in G_{q_0}} |d_q(a)| \leqslant {q_0}^q$$

d'où

$$|d_q(u)| \leqslant {q_0}^q \left( \frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^q \left( |u| + q_0 \right)^q$$

c'est-à-dire

$$|d_q(u)| \leqslant \left(q_0 \ \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right) \ \left(|u| + q_0\right)\right)^q$$

Ainsi, $u \in E$, ce qui entraîne finalement,

$$E = \mathbb{C}.$$

<u>*Revenons désormais à la démonstration du théorème 5.2.9*</u>.

On a $f_t(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k=2q+2}^{+\infty} c_k(t) z^k$ avec les $c_k(t)$ polynômes en $t$ de degré au plus $d$. En vertu de la remarque 5.2.11, comme dans les hypothèses du théorème on a supposé $g_{q,\mu}$ pleinement itérable, toutes les conjuguantes $h_u^{(t)}$ sont , à $t$ fixé, simultanément de rayon de convergence strictement positif. On peut donc se restreindre à $h_1^{(t)}$ et on a que $f_t$ est conjuguée à $g_{q,\mu}$ si et seulement si $h_1^{(t)}$ est de rayon de convergence strictement positif. On notera alors, dans toute la suite $h_t = h_1^{(t)}$ la conjuguante formelle de $f_t$. On a alors

$$E = \{t \in K_2 \quad / \quad h_t \text{ de rayon strictement positif } \}.$$

Le principe de la démonstration étant analogue à la démonstration précédente ou à la démonstration du théorème 4.1.1, il suffit de prouver que les coefficients de $h_t(z)$ sont des polynômes en $t$ dont on sait majorer le degré.

Or, d'après (5.45) et (5.46), on a

$$d_1 = 1 \ , \ d_2 = d_3 = \cdots = d_q = 0 \ , \ d_{q+1} = 1 \tag{5.96}$$

et, pour tout $n > 2q + 1$,

$$(n - (2q + 1))d_{n-q} = A_{n,q} + B_{n,q} - C_{n,q} \tag{5.97}$$

avec

$$A_{n,q} = \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*\,q+1} \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_{q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n-q}} d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{q+1}}$$

et

$$B_{n,q} = \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*\,2q+1} \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_{2q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n-q}} \mu d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{2q+1}}$$

et

$$C_{n,q} = \sum_{j=1}^{n-2q} \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_j) \in \mathbb{N}^{*\,j} \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_j = n}} d_j c_{k_1} c_{k_2} \ldots c_{k_j}$$

Montrons par récurrence que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\deg(d_{q+j}) \leqslant d(j-1)$.

• Comme $d_{q+1} = 1$, on a $\deg(d_{q+1}) = 0 \leqslant d(1-1)$.

• Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\forall j \leqslant m \quad d_{q+j} \leqslant d(j-1)$.

Posons $n = m + 2q + 1$. On a $d_{q+m+1} = d_{n-q}$. Grâce à (5.97), il suffit d'étudier $A_{n,q}$, $B_{n,q}$ et $C_{n,q}$.

∘ Etude de $C_{n,q}$.

Soit $j \in [\![1,n-2q]\!]$ et $(k_1,k_2,\ldots,k_j) \in \mathbb{N}^{*j}$ tel que $k_1 + k_2 + \cdots + k_j = n$. Quitte à réordonner les $k_i$, on peut supposer que

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_r \geqslant q+2 > k_{r+1} \geqslant \cdots \geqslant k_j.$$

□ si $j = 1$, on a $\deg(d_1 c_n) = \deg(c_n) \leqslant d \leqslant dm$.

□ si $j \in [\![2,q]\!]$, on a $\deg\left(d_j c_{k_1} c_{k_2} \ldots c_{k_j}\right) = \deg(0) \leqslant dm$.

□ si $j \geqslant q+1$, on a

$$\begin{aligned}
\deg\left(d_j c_{k_1} c_{k_2} \ldots c_{k_j}\right) &\leqslant \deg\left(d_j c_{k_1} c_{k_2} \ldots c_{k_r}\right) \\
&\leqslant \deg(d_j) + \deg(c_{k_1}) + \cdots + \deg(c_{k_r}) \\
&\leqslant d(j-q-1) + d + \cdots + d \\
&\leqslant dj - dq - d + rd \\
&\leqslant d(j-q-1+r)
\end{aligned}$$

Or

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r \geqslant (q+2) + (q+2) + \cdots + (q+2) \geqslant r(q+2)$$

et

$$k_{r+1} + k_{r+2} + \cdots + k_j \geqslant 1 + 1 + \cdots + 1 \geqslant j - r$$

d'où

$$n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r + k_{r+1} + k_{r+2} + \cdots + k_j \geqslant r(q+2) + (j-r)$$

c'est-à-dire

$$n \geqslant rq + r + j$$

d'où

$$n - rq - q - 1 \geqslant r + j - q - 1$$

c'est-à-dire

$$m + q - rq \geqslant r + j - q - 1$$

On obtient alors

$$\deg\left(d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}\right) \leqslant d(m+q-rq) \leqslant d(m+(1-r)q) \tag{5.98}$$

$\triangle$ si $r \geqslant 1$, on obtient

$$\deg\left(d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}\right) \leqslant d(m+(1-r)q) \leqslant dm$$

ce qui est le résultat voulu.

$\triangle$ si $r=0$, alors[14], comme $j \leqslant n-2q \leqslant n-q-1 \leqslant q+m$, on a

$$\deg\left(d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}\right) \leqslant \deg(d_j) \leqslant d(m-1) \leqslant dm$$

ce qui est le résultat voulu.

$\circ$ Etude de $B_{n,q}$.

Soit $(k_1,k_2,\dots,k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1}$ tel que $k_1+k_2+\dots+k_{2q+1}=n$ et $\forall j \quad k_j < n-q$. Quitte à réordonner les $k_j$, on peut supposer que

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \dots \geqslant k_r \geqslant q+2 > k_{r+1} \geqslant \dots \geqslant k_{2q+1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\deg\left(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}}\right) &\leqslant \deg\left(d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_r}\right) \\
&\leqslant \deg(d_{k_1}) + \deg(d_{k_2}) + \dots + \deg(d_{k_r}) \\
&\leqslant d(k_1-q-1) + d(k_2-q-1) + \dots + d(k_r-q-1) \\
&\leqslant d\left((k_1+k_2+\dots+k_r) - rq - r\right) \\
&\leqslant d(n-rq-r)
\end{aligned}$$

$\triangle$ si $r \geqslant 2$, on obtient

$$\deg\left(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}}\right) \leqslant d(n-rq-r) \leqslant d(n-2q-2) \leqslant d(m-1) \leqslant dm$$

ce qui est le résultat voulu.

$\triangle$ si $r=0$, on obtient

$$\deg\left(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}}\right) \leqslant 0 \leqslant dm$$

ce qui est le résultat voulu.

$\triangle$ si $r=1$, on obtient, comme $k_1 \leqslant n-q-1 \leqslant m+q$

$$\deg\left(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}}\right) \leqslant \deg(k_1) \leqslant d(m-1) \leqslant dm$$

14. On remarque que tous les $c_{k_i}$ sont des polynômes constants.

ce qui est le résultat voulu.

∘ Etude de $A_{n,q}$.

Par une démonstration analogue, on majore les degrés des $d_{k_1}d_{k_2}\dots d_{k_{q+1}}$ par $dm$.

Et finalement, on obtient que $\deg(d_{q+m+1}) \leqslant dm$.

Par récurrence, on en déduit alors que

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad \deg\left(d_{q+j}\right) \leqslant d(j-1) \tag{5.99}$$

Ainsi, on a

$$\forall j \geqslant q+1 \quad \deg\left(d_j\right) \leqslant d(j-q-1) \leqslant dj \tag{5.100}$$

Ce qui permet de démontrer le théorème. □

Nous terminerons ce chapitre en donnant un cas particulier où l'on peut appliquer le théorème de Perez-Marco. Pour $q=1$ et $\mu=1$, plutôt que d'essayer de conjuguer à $g_{1,1}(z) = z + z^2 + z^3$, on va essayer de conjuguer à $\tau_1(z) = \dfrac{z}{1-z} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} z^k$.

**Théorème 5.2.17.** *Soit $f(z) = z + z^2 + z^3 + \sum_{k=4}^{+\infty} c_k z^k$.*
*Il existe alors une unique série formelle $h(z) = z + z^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} d_k z^k$ telle que*

$$h(f(z)) = \tau_1(h(z))$$

*Démonstration :*

On a, avec les notations du théorème 5.2.4, en faisant une démonstration analogue à celle de la formule (5.27)

$$h(f(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) \right) z^n \tag{5.101}$$

et

$$\tau_1(h(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( 1 + \sum_{j=1}^{n-1} D(j,n) \right) z^n \tag{5.102}$$

d'où, pour tout $n \geqslant 3$,

$$d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} D(j,n)$$

i.e.

$$d_n + \sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) + d_1 C(1,n) = 1 + \sum_{j=2}^{n-1} D(j,n) + D(1,n)$$

i.e.

$$d_n + \sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) + d_1 c_n = 1 + \sum_{j=2}^{n-1} D(j,n) + d_n$$

d'où, pour tout $n \geqslant 3$,

$$c_n + \sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) = 1 + \sum_{j=2}^{n-1} D(j,n) \tag{5.103}$$

Pour $n = 3$, on a

$$1 + 1 = c_3 + d_2 C(2,2) = 1 + c_2 D(2,2) = 1 + 1$$

Pour $n \geqslant 4$, on a [15]

$$\sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) = (n-1) d_{(n-1)} + \sum_{j=2}^{n-2} d_j C(j,n) \tag{5.104}$$

et [16]

$$\sum_{j=2}^{n-1} D(j,n) = 2 \quad d_{n-1} + D'(2,n,n-2) + \sum_{j=3}^{n-1} D'(j,n,n-2)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=2}^{n-1} D(j,n) = 2 \quad d_{n-1} + \sum_{j=2}^{n-1} D'(j,n,n-2) \tag{5.105}$$

On déduit alors de (5.103), (5.104) et (5.105) que

$$(n-3) d_{n-1} = 1 - c_n - \sum_{j=2}^{n-2} d_j C(j,n) + \sum_{j=2}^{n-1} D'(j,n,n-2) \tag{5.106}$$

Ce qui donne une relation de récurrence déterminant les $d_k$ de manière unique.

Réciproquement, si on définit les $d_k$ par $d_1 = 1 = d_2$ et pour tout $n \geqslant 4$

$$(n-3) d_{n-1} = 1 - c_n - \sum_{j=2}^{n-2} d_j C(j,n) + \sum_{j=2}^{n-1} D'(j,n,n-2),$$

et si on pose $h(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k z^k$, on vérifie que

$$h(f(z)) = \tau_1(h(z))$$

15. démonstration analogue à celle de (5.86).
16. démonstration analogue à celle de (5.87).

**Théorème 5.2.18.** $\tau_1$ *est pleinement itérable.*

*Démonstration :*

Pour vérifier que $\tau_1$ est pleinement itérable, on va déterminer explicitement tous les $h_u(z)$ et montrer que ce sont toutes des séries entières de rayon de convergence strictement positif. Pour cela, on peut commencer par remarquer que

$$h_2(z) = h_1(h_1(z)) = \tau_1(\tau_1(z)) = \tau_1\left(\frac{z}{1-z}\right) = \frac{\frac{z}{1-z}}{1-\frac{z}{1-z}} = \frac{z}{1-z-z} = \frac{z}{1-2z}$$

Cela suggère que, $h_u(z)$ est probablement de la forme $h_u(z) = \dfrac{z}{1-uz}$.
Posons $\varphi_u(z) = \dfrac{z}{1-uz}$. On a d'une part

$$\varphi_u(\tau_1(z)) = \frac{\frac{z}{1-z}}{1-u\frac{z}{1-z}} = \frac{z}{1-z-uz} = \frac{z}{1-uz-z} = \frac{\frac{z}{1-uz}}{1-\frac{z}{1-uz}} = \tau_1(\varphi_u(z))$$

et d'autre part,

$$\varphi_u(z) = \frac{z}{1-uz} = z(1+uz+\dots) = z+uz^2+\dots$$

Donc $h_u(z) = \varphi_u(z) = \dfrac{z}{1-uz}$. Il s'en suit alors que pour tout $u \in \mathbb{C}$, $h_u(z)$ est de rayon de convergence strictement positif. Donc $\tau_1$ est pleinement itérable.

**Théorème 5.2.19.** *Si $d \in \mathbb{N}^*$, si les $h_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sont des séries entières de valuation supérieure ou égale à 4 et de rayon de convergence strictement positif et si on pose*

$$f_t(z) = z + z^2 + z^3 + \sum_{k=0}^{d} t^k h_k(z) \text{ et } E = \{t \in \mathbb{C}/f_t \text{ est conjuguée à } \tau_1\},$$

*Alors,*

$$\text{ou bien } E = \mathbb{C} \text{ ou bien } d^*(E) = 0$$

*Démonstration :*

Comme $\tau_1$ est pleinement itérable, toutes les conjuguantes $h_u^{(t)}$ de $f_t$ sont , à $t$ fixé, simultanément de rayon de convergence strictement positif. On peut donc se restreindre à $h_1^{(t)}$ et on a que $f_t$ est conjuguée à $\tau_1$ si et seulement si $h_1^{(t)}$ est de rayon de convergence strictement positif. On notera alors, dans toute la suite $h_t = h_1^{(t)}$ la conjuguante formelle de $f_t$. On a alors

$$E = \{t \in \mathbb{C} \ \ / \ \ h_t \text{ de rayon strictement positif } \}.$$

Le principe de la démonstration étant analogue à la démonstration précédente.Il suffit de prouver que les coefficients de $h_t(z)$ sont des polynômes en $t$ dont on sait majorer le degré.

Ecrivons $f_t(z)$ sous la forme $f(z) = z + z^2 + z^3 + \sum_{k=4}^{+\infty} c_k(t)z^k$ où les $c_k(t)$ sont des polynômes en $t$ de degré au plus $d$. D'après le théorème 5.2.17, $f_t$ possède une unique conjuguante formelle de la forme $h_t(z) = z + z^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} d_k(t)z^k$ et on a les relations suivantes sur les $d_k(t)$: $d_1(t) = 1 = d_2(t)$ et pour tout $n \geqslant 4$,

$$(n-3)d_{n-1}(t) = 1 - c_n(t) - \sum_{j=2}^{n-2} d_j(t)C(j,n)(t) + \sum_{j=2}^{n-1} D'(j,n,n-2)(t) \quad (5.107)$$

On a alors $\deg(d_1) = \deg(d_2) = 0$. Montrons par récurrence que

$$\forall j \geqslant 2 \quad \deg(d_j) \leqslant d(j-2).$$

• On a déjà vu que $\deg(d_2) = 0 \leqslant d(2-2)$.

• Soit $m \geqslant 2$ et supposons que $\forall j \in [\![2,m]\!] \quad \deg(d_j) \leqslant d(j-2)$
Posons $n = m+2$. On a $d_{m+1} = d_{n-1}$ avec

$$\deg(1) = 0 \leqslant d(m-1) \quad (5.108)$$

et

$$\deg(c_n) \leqslant d \leqslant d(m-1) \quad (5.109)$$

◦ Etude de $\sum_{j=2}^{n-2} d_j(t)C(j,n)(t)$.

Soit $j \in [\![2,n-2]\!]$ et $(k_1,k_2,\ldots,k_j) \in \mathbb{N}^{*j}$ tel que $k_1 + k_2 + \cdots + k_j = n$.
Quitte à réordonner les $k_i$, on peut supposer que

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_r \geqslant 3 > k_{r+1} \geqslant \cdots \geqslant k_j.$$

on a

$$\begin{aligned}
\deg\left(d_j c_{k_1} c_{k_2} \ldots c_{k_j}\right) &\leqslant \deg\left(d_j c_{k_1} c_{k_2} \ldots c_{k_r}\right) \\
&\leqslant \deg(d_j) + \deg(c_{k_1}) + \cdots + \deg(c_{k_r}) \\
&\leqslant d(j-2) + d + \cdots + d \\
&\leqslant dj - 2d + rd \\
&\leqslant d(j-2+r)
\end{aligned}$$

Or

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r \geqslant 3 + 3 + \cdots + 3 \geqslant 3r$$

et

$$k_{r+1} + k_{r+2} + \cdots + k_j \geqslant 1 + 1 + \cdots + 1 \geqslant j - r$$

d'où

$$n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r + k_{r+1} + k_{r+2} + \cdots + k_j \geqslant 3r + (j - r) \geqslant j + 2r$$

c'est-à-dire

$$m + 2 \geqslant j + 2r$$

d'où

$$m - r \geqslant j - 2 + r$$

On obtient alors

$$\deg\left(d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}\right) \leqslant d(m - r) \tag{5.110}$$

△ si $r \geqslant 1$, on obtient

$$\deg\left(d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}\right) \leqslant d(m - 1)$$

ce qui est le résultat voulu.

△ si $r = 0$, alors, comme $j \leqslant n - 2 \leqslant m$, on a

$$\deg\left(d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}\right) \leqslant \deg(d_j) \leqslant d(m - 2) \leqslant d(m - 1)$$

ce qui est le résultat voulu.

∘ Etude de $D'(j,n,n-2)(t)$.

Soit $j \in [\![2,n-1]\!]$ et $(k_1,k_2,\dots,k_j) \in \mathbb{N}^{*j}$ tel que $k_1 + k_2 + \cdots + k_j = n$ et $\forall j \quad k_j < n - 1$. Quitte à réordonner les $k_j$, on peut supposer que

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_r \geqslant 3 > k_{r+1} \geqslant \cdots \geqslant k_j.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\deg\left(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_j}\right) &\leqslant \deg\left(d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_r}\right) \\
&\leqslant \deg(d_{k_1}) + \deg(d_{k_2}) + \cdots + \deg(d_{k_r}) \\
&\leqslant d(k_1 - 2) + d(k_2 - 2) + \cdots + d(k_r - 2) \\
&\leqslant d\left((k_1 + k_2 + \cdots + k_r) - 2r\right) \\
&\leqslant d(n - 2r) \\
&\leqslant d(m + 2 - 2r) \\
&\leqslant d(m + 2(1 - r))
\end{aligned}$$

△ si $r \geqslant 2$, on obtient

$$\deg\left(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_j}\right) \leqslant d(m + 2(1-r)) \leqslant d(m-2) \leqslant d(m-1)$$

ce qui est le résultat voulu.

△ si $r = 0$, on obtient

$$\deg\left(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_j}\right) \leqslant 0 \leqslant d(m-1)$$

ce qui est le résultat voulu.

△ si $r = 1$, on obtient, comme $k_1 \leqslant n-2 \leqslant m$

$$\deg\left(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}}\right) \leqslant \deg(k_1) \leqslant d(m-2) \leqslant d(m-1)$$

ce qui est le résultat voulu.

Finalement, on obtient que $\deg(d_{m+1}) \leqslant d(m-1)$.

Par récurrence, on en déduit alors que

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad \deg\left(d_j\right) \leqslant d(j-2) \tag{5.111}$$

Posons pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$F_q = \{t \in \mathbb{C} \quad / \quad |t| \leqslant q\}$$

et

$$G_q = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \{t \in F_q \quad / \quad d_j(t) \leqslant q^j\}$$

Les $G_q$ sont des compacts de $\mathbb{C}$ et on vérifie facilement que, comme $\tau_1$ est pleinement itérable, on a

$$E = \{t \in \mathbb{C} \quad / \quad h_t(z) = z + z^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} d_k(t) z^k \text{ de rayon strictement positif.}\},$$

avec

$$E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$$

Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que si $d^*(E) > 0$, alors $E = \mathbb{C}$. Supposons donc que $d^*(E) > 0$. D'après ce qui précède, on a $E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, d'où $d^*\left(\bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q\right) > 0$. Grâce au théorème 3.2.8, on en déduit qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $d^*(G_{q_0}) > 0$. Comme $G_{q_0}$ est compact, on déduit de la proposition 3.2.5

que $d^*(G_{q_0}) = d(G_{q_0})$. Par conséquent, $d(G_{q_0}) > 0$.

Soit $t \in \mathbb{C}$ et $q \geqslant 2$. Comme $d(G_{q_0}) > 0$ avec $G_{q_0} \subseteq B_f(0,q_0)$ et comme $\deg d_q \leqslant d(q-1) \leqslant dq$, on a, d'après le théorème 3.1.10

$$|d_q(t)| \leqslant \max_{a \in G_{q_0}} |d_q(a)| \quad \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^{dq} \quad \left(|t| + q_0\right)^{dq}.$$

Or

$$\max_{a \in G_{q_0}} |d_q(a)| \leqslant {q_0}^q$$

d'où

$$|d_q(t)| \leqslant {q_0}^q \ \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^{dq} \ \left(|t| + q_0\right)^{dq}$$

c'est-à-dire

$$|d_q(t)| \leqslant \left(q_0 \ \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^{d} \ \left(|u| + q_0\right)^{d}\right)^q$$

Ainsi, $t \in E$, ce qui entraîne finalement,

$$E = \mathbb{C}.$$

$\square$

# Bibliographie


[Brj65] A. Brjuno – « Convergence of transformations of differential equations to normal forms », *Dokl. Akad. Nauk.* **165** (1965), p. 987–989.

[Brj71] A. Brjuno – « Analytical form of differential equations », *Trans. Moscow Math. Soc.* **25** (1971), p. 131–288.

[Brj72] A. Brjuno – « Analytical form of differential equations », *Trans. Moscow Math. Soc.* **26** (1972), p. 199–239.

[Car04] T. Carletti – « Exponentially long time stability for non-linearizable analytic germs of ($\mathbb{C}^n$,0) », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (2004), p. 989–1004.

[CG95] L. Carleson et T. Gamelin – *Complex dynamics*, Springer, 1995.

[Cre38] H. Cremer – « Über der Häufigkeit der Nichtzentren », *Math. Ann.* **115** (1938), p. 573–580.

[DG02] D. DeLatte et T. Gramchev – « Biholomorphic maps with linear parts having jordan blocks: linearization and resonance type phenomena », *Mathematical Physics Electronic Journal* **8** (2002).

[DH85] A. Douady et J. Hubbard – « On the dynamics of polynomial-like mappings », *Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série* **18** (1985), p. 287–343.

[Eca71] J. Ecalle – « Théorie itérative des transformations formelles à une variable complexe », Thèse, Université d'Orsay, 1971.

[Eca74] J. Ecalle – *Théorie des invariants holomorphes*, Publications Mathématiques d'Orsay, 1974.

[Eca81a] J. Ecalle – *Les fonctions résurgentes (tome 1)*, Publications Mathématiques d'Orsay, 1981.

[Eca81b] J. Ecalle – *Les fonctions résurgentes (tome 2)*, Publications Mathématiques d'Orsay, 1981.

[HY83] M. Herman et J. Yoccoz – « Generalizations of some theorems of small divisors to non archimedian fields », *Lecture Notes in Maths* **1007** (1983), p. 408–447.

[Il'79] Y. Il'Yashenko – « Divergence of series reducing an analytic differential equation to linear normal form at a singular point », *Funct. Analysis and Appl.* **13** (1979), p. 227–229.

[Nai83] V. Naishul – « Topological invariants of analytic and aera preserving mappings and their applications to analytic differential equations in $\mathbb{C}^2$ and $\mathbb{CP}^2$ », *Trans. Moscow Math. Soc.* **42** (1983), p. 239–250.

[PM01] R. Perez-Marco – « Total convergence or general divergence in small divisors », *Communications in Mathematical Physics* (2001), p. 451–464.

[Pom75] C. Pommerenke – *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, 1975.

[Ran95] T. Ransford – *Potential theory in the complex plane*, Cambridge University Press, 1995.

[Rob00] M. Robert – *A course in p-adic analysis*, Springer, 2000.

[Sie42] C. Siegel – « Iteration of analytic functions », *Ann. Math.* **43** (1942), p. 265–269.

[SM71] C. Siegel et J. Moser – *Lectures on celestial mecanics*, Springer-Verlag, 1971.

[Yoc95] J. Yoccoz – « Théorème de Siegel, nombres de Brjuno et polynômes quadratiques », *Astérisque* **231** (1995).

Problèmes de linéarisation dans des familles de germes analytiques.

Nous nous intéressons à la linéarisation de certaines familles de germes analytiques. En généralisant les définitions et propriétés du diamètre transfini, nous obtenons un théorème de majoration polynomiale valable à la fois pour les nombres complexes et p-adiques. Nous utilisons ensuite ces outils pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Perez-Marco concernant la linéarisation des familles non résonantes de germes analytiques qui subissent une perturbation polynomiale. Cette nouvelle preuve permet de démontrer un analogue du théorème de Perez-Marco dans le cadre p-adique. De plus, cette nouvelle technique nous permet de récupérer une information diophantienne et donne de nouveaux exemples de germes non linéarisables. Nous généralisons ensuite ce théorème au cas des perturbations par des fractions rationnelles et finissons par étudier un cas résonant et retrouvons, de façon élémentaire, certaines propriétés concernant le centralisateur des germes tangents à l'identité.

Problems of linearization in some families of analytic germs.

We are interested in the linearization of some families of analytic germs. By generalizing definitions and properties of transfinite diameter, we obtain a polynomial majoration theorem that works both for the complex and the p-adic numbers. Then these tools are used to give a new proof of Perez-Marco's theorem about the linearization of non-resonant families of analytic germs under a polynomial perturbation. This proof allows the generalization of Perez- Marco's theorem to the p-adic case. Furthermore, with this new point of view, we obtain a diophantine information and give new examples of non linearizable germs. We generalize this theorem to the case of a perturbation with rational maps.Finally, a reasonant case is studied and we give a new proof, more elementary, of some properties of the centralizer of germs tangent to identity.

Discipline: Mathématiques
Mots clés: linéarisation, petits diviseurs, condition diophantienne, diamètre transfini, capacité, systèmes dynamiques, résonance, formes normales.

Laboratoire MAPMO
Université d'Orléans
B.P. 6759
45067 Orléans Cedex 2
France