n° d'ordre : 2494

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir

le grade de *DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1*

Mention : Sciences de la Terre

par

RENAUD TOUSSAINT[1]

Équipe d'accueil : Géosciences Rennes[2]
École Doctorale : Physique et Matériaux
UFR : Structures et Propriétés des Matériaux

Fracturation des roches en compression : le processus de localisation en tant que phénomène critique.

Soutenue le 23 Mars 2001 devant la commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

Steven R. Pride	Professeur, (Université de Rennes I)	Directeur de Thèse
George Batrouni	Professeur, (Université de Nice-Sophia)	Rapporteur
Alex Hansen	Professeur, (Université de Trondheim)	Rapporteur
Michel Campillo	Professeur, (Université Joseph Fourier - Grenoble)	Examinateur
Philippe Davy	Directeur de Recherche (C.N.R.S., Géosciences Rennes)	Examinateur
Stéphane Roux	Directeur de Recherche (C.N.R.S./St-Gobain, Paris)	Examinateur

[1]email : Renaud.Toussaint@univ-rennes1.fr

[2]Équipe de géophysique, Géosciences Rennes, Campus de Beaulieu, 35 042 Rennes Cedex, France
Tel : +33 2 99 28 26 37 ; Fax : +33 2 99 60 90

à tous les casseurs de cailloux,
des australopithèques jusqu'à Nino
en passant par Papillon.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma gratitude à Steve Pride, qui m'encadra durant ces trois ans et demi : son ouverture d'esprit et les relations de collaborateur qu'il encourage avec ses étudiants m'ont toujours fait apprécier le travail sous sa responsabilité. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir à la fois laissé une grande latitude dans toutes les étapes de ce travail, y compris les plus stratégiques, et en même temps d'avoir toujours été disponible, lorsque j'étais désemparé devant diverses "pannes", pour "plonger les mains dans le moteur" d'une théorie que nous avons construite à tâtons. Il est très enthousiasmant d'avoir pu travailler sous la houlette d'un scientifique si volontaire, dont je salue le courage et l'honnêteté intellectuels.

Que soient remerciés également les membres du laboratoire de Géosciences Rennes, où a eu lieu l'essentiel de cette thèse, qui m'ont accueilli chaleureusement et fait partager leurs travaux durant ces années : notamment, Dominique Gibert pour m'avoir toujours permis de travailler en conditions idéales, et pour son enthousiasme de tous les instants ; Matthias Holschneider pour ses lumières dans les méandres de sombres calculs analytiques, aussi bien que pour le recul qu'il m'a apporté par rapport à mon sujet ; Philippe Davy et Eric Bonnet pour avoir partagé avec moi divers aspects et résultats de leurs expériences, ce qui me permit d'apercevoir pour la première fois un éclairage expérimental sur la divergence de la longueur de corrélation dans ces processus de localisation ; Marc Pessel pour son expertise et son aide quotidienne sur l'administration de serveurs Linux, domaine qui m'était tout aussi indispensable qu'exotique voici trois ans, ainsi que pour sa réjouissante compagnie.

J'adresse également tous mes remerciements aux membres du Jury, qui ont accepté de se pencher sur mon travail, et m'ont fait l'honneur de leur présence et de leur regard critique au jour de la soutenance. Merci en particulier à Stéphane Roux, qui au cours de discussions à bâtons rompus que nous avons eues en différentes occasions, alors que ce travail en était encore à ses balbutiements naïfs, m'a guidé vers la nécessité capitale de prendre mieux en compte la théorie de l'élasticité pour décrire les interactions entre fractures. Merci également aux autres membres du Jury pour leurs commentaires sur les implications et pistes possibles de ce travail, propres à donner la foi optimiste nécessaire pour poursuivre ce type de sujet.

Je suis très heureux d'avoir pu croiser la route de nombreuses personnes rencontrées en ces lieux, qui m'ont fait partager leur amitié ou un bout de chemin agréable : Valérie Bosse et Christophe Lansigu, à l'immense gentillesse et l'impressionnant stakhanovisme quotidien, Renaud "Tyren" Bouroullec et Dominique "Savadom" Savagnier, leur science de la planète et des gens qui y vivent, Yves Le Gonidec et Stéphanie Gautier qui m'ont patiemment et adorablement supporté durant ces années, Ginette Saracco, Pierre Gavrilenko et Annick Chauvin qui furent toujours prêts à me donner un coup de main, et toute la communauté géologue des hauteurs du bâtiment aux histoires et moeurs festives. Je remercie, malheureusement à titre posthume, Adèle Le Solliec, qui s'est toujours dépensée sans compter pour régler les divers problèmes des membres de l'équipe de géophysique.

Toutes sortes de personnes, en des temps plus reculés, m'ont encouragé durant mon parcours préliminaire pour m'amener finalement, après maints changements de cap, à cette activité de recherche en sciences de la Terre qui me fait vibrer, et je tiens à leur envoyer un modeste coup de chapeau : les divers professeurs que j'ai eu et qui m'ont fait partager leur passion, Sébastien Chevrot et David Aubert qui m'ont initié aux joies de la physique à échelle humaine, et m'ont ainsi convaincu d'abandonner le froc de la pure physique théorique voici quelques années, mes parents bien sûr qui ont très tôt aiguisé ma curiosité pour les choses de science et celles de la nature, et bien d'autres qui j'espère me pardonneront de ne pas tenter de dresser leur liste exhaustive.

Je ne serais certainement pas parvenu à calmer mes sautes d'humeur et mener à bien ce travail de coureur de fond, sans la présence de cœur de la tribu que constitue mes vieux amis, qui m'ont depuis des années soutenus moralement, dans les moments de joie comme de grincements de dents.

Merci enfin et surtout à Natacha et Nino, pour me faire quotidiennement partager leur vie d'êtres merveilleux , pour avoir supporté si longtemps un ami/papa absorbé dans ses hiéroglyphes, et pour leur précieuse aide technique à la mise en place de valeureuses expériences de coin de table.

Résumé.

La fracturation fragile des roches soumises à des cisaillements sous fortes pressions de confinement présente des traits communs avec une transition de phase thermodynamique : la déformation se localise rapidement à l'échelle des grains dès la sortie du régime élastique réversible, tout en restant d'abord homogène aux grandes échelles. Alors que les microfractures individuelles croissent encore de façon stable, apparaissent autour de la contrainte pic des structures de grande échelle (bandes de cisaillement) qui brisent spontanément les symétries translationnelle et rotationnelle du problème.

Analysant des données déformation/contrainte obtenues sur diverses roches et conditions de charge, on montre que celles-ci présentent un haut degré d'universalité, à savoir qu'elles obéissent à une loi $\tau_c - \tau = \alpha(\varepsilon_{i_c} - \varepsilon_i)^{2.2\pm0.3}$, où τ est la contrainte axiale, ε_i est la déformation axiale inélastique, et τ_c, ε_{i_c} deux paramètres très proches de τ et ε_i à la contrainte pic. Cette loi est vérifiée pratiquement de la sortie du régime élastique, à la contrainte pic.

Le fait que cet exposant semble indépendant de la roche, conjoint aux brisures de symétries et à l'émergence d'une structuration macroscopique, est typique d'un point critique. En conséquence, on développe à partir d'un simple postulat de maximisation d'entropie un formalisme de physique statistique adapté à ce problème. On obtient ainsi une distribution de probabilité sur les configurations de microfractures, en fonction de l'énergie nécessaire à leur formation. À partir d'un modèle pour ces énergies basé sur des interactions élastiques, on obtient un système présentant deux transitions de phase : la première correspond à l'initiation de l'activité des microfractures, la seconde à la localisation macroscopique. Ce modèle prédit à l'approche de la seconde transition le comportement quadratique observé dans les données, alors que le module d'Young effectif du matériau reste fini.

Abstract.

Brittle failure of rocks under compressive shear has features in common with a thermodynamical phase transition : deformation localizes quickly at grain scale from the departure of reversible elastic regime, staying at first homogeneous at large scales. Whereas individual microcracks still grow in a stable manner, some large scale structures (shear bands) appear around peak stress, which spontaneously break both translational and rotational symmetries of the problem.

Analyzing stress/strain data obtained on different rocks and load conditions, we show that they present a high degree of universality : they follow a law $\tau_c - \tau = \alpha(\varepsilon_{i_c} - \varepsilon_i)^{2.2\pm0.3}$, where τ is axial stress, ε_i inelastic axial deformation, and τ_c, ε_{i_c} two parameters very close to the values of τ et ε_i at peak stress.

The fact that this exponent seems independant of rock, together with the symmetry breakings and appearance of a macroscopic structuration, is typical of a critical point. Accordingly, we develop from a simple postulate of maximization of entropy, a statistical physics formalism adapted to this problem. We get so a probability distribution on cracks configurations, as a function of the energy necessary for their formation. From a model for those energies, based on elastic interactions, we obtain a system exhibiting two phase transitions : the first one corresponds to the onset of microcracks activity, the second one to the macroscopic localization. This model predicts the quadratic behaviour observed in the data at the approach of the second transition, whereas the material's effective modulus remains finite.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Dans la croûte supérieure de la Terre, les roches se déforment de façon quasi-fragile, ce qui est à l'origine des tremblements de terre. Elles sont soumises à des champs de contrainte cisaillants importants, ainsi qu'à de fortes pressions de confinement. Si le problème de la dynamique des failles déjà existantes est capital, il est également très important de comprendre les mécanismes de formation des hétérogénéités de grande échelle, parfois à partir de milieux ne présentant d'hétérogénéités initiales qu'à des échelles bien inférieures. Le régime quasi-fragile de déformation présente la caractéristique de localiser progressivement la déformation suivant des bandes de cisaillement, à partir de régimes initiaux de déformation diffuse. Ce phénomène est largement étudié sous divers angles : pour n'en citer que quelques-uns, expériences analogiques en laboratoires de tectonique, tests triaxiaux sur des échantillons centimétriques de roche sous fortes pressions de confinement, théorie de la fracture quasi-statique et étude numérique de systèmes dynamiques discrétisés analogues, analyse mathématique de bifurcations dans des équations aux dérivées partielles basées sur des lois mécaniques constitutives, théorie du dommage pour produire de telles lois,...

Quelques aspects de ces processus de localisation ont attiré l'attention de nombreuses communautés scientifiques depuis le développement des théories s'intéressant en général aux transferts d'échelle (analyse fractale ou multifractale, surfaces autoaffines, théories de renormalisation, ...). On peut citer les faits marquants suivants : il existe toute une hiérarchie de fractures de diverses tailles dans les systèmes naturels, et des ensembles organisés de fractures d'échelle donnée peuvent parfois agir comme un objet équivalent de taille supérieure. Sur des modèles numériques de réseaux de fusibles, analogues de problèmes de fracturation en tension, de nombreuses lois d'échelles ont été mises en évidence. Les fronts de fracture naturels présentent des propriétés d'autosimilarité frappantes sur de nombreuses décades.

Pour un système ne comportant initialement que des défauts microscopiques, soumis à une compression cisaillante, on soulignera deux traits : d'une part, lorsque la déformation devient macroscopiquement localisée, les bandes de cisaillement formées brisent spontanément les symétries de la charge imposée. D'autre part, lors d'études expérimentales récentes, il a été mis en évidence pour certains systèmes granulaires que l'on peut définir une longueur de corrélation du champ de déformation, et que celle-ci diverge au moment où la localisation devient macroscopique – ceci a été obtenu en étudiant statistiquement les champs de déplacement enregistrés à la surface d'une couche de sable soumise à un raccourcissement lent.

Ces deux aspects, brisure spontanée de symétrie et divergence d'une longueur de corré-lation, évoquent fortement les théories de phénomène critique, au sens de la physique statistique.

Dans ce travail, on s'intéresse à voir s'il est possible d'établir sur des bases physiques simples une connexion entre de tels phénomènes, et ces outils classiques de physique statistique. Il est largement au-delà de nos objectifs de décrire dans le détail les mécanismes de déformation de chaque roche particulière sous diverses conditions, ce qui constitue tout le champ d'investigation de la mécanique des roches. Les buts principaux de notre démarche sont plutôt les suivants :

– D'une part on extrait de nombreuses données expérimentales, des grandeurs mesurables comparables entre elles, pour tenter éventuellement de dégager quantitativement certains traits communs à la déformation fragile de nombreux milieux, dans le régime précédant la localisation macroscopique.
– En posant un nombre limité de postulats, et en retenant des mécanismes physiques généraux de la déformation des milieux granulaires consolidés sous compression cisaillante, on essaye de construire un formalisme conceptuellement clos et se prêtant aux manipulations analytiques. Le caractère raisonnable des hypothèses, et la cohérence des premières conséquences, est le principal guide de l'élaboration de ce formalisme. Une fois celui-ci développé, il sert de base aux manipulations abstraites classiques des théories de points critiques. Les prédictions en découlant sont finalement comparées à l'analyse initiale des données expérimentales, ce qui constitue la principale validation a posteriori de la démarche suivie.

Un enjeu important est le suivant : pour des problèmes de fracturation en tension, la fracture macroscopique a en général tendance à se nucléer sur un défaut ou un groupe de défauts majeurs. À partir d'une taille typique de défaut, on a une croissance instable d'un objet principal, qui se propage à travers le matériau entier. C'est la raison principale du succès des théories statistiques de défaut le plus faible pour décrire de telles fracturations. Ceci correspond plutôt aux caractéristiques d'une transition de phase du premier ordre, où la longueur de corrélation reste finie au moment de la fracturation macroscopique. Ce résultat a été notamment obtenu sur des modélisations de réseaux de fusible. Par contre, en cisaillement sous pression de confinement, ont lieu des phénomènes de croissance hors-plan suivant des modes tensiles locaux, ce qui permet à une fracture de taille a priori quelconque de croître de façon stable. Il est alors possible que le processus de localisation soit essentiellement un phénomène collectif, non dominé par quelques défauts majeurs. Dans ce cas compressif, la fracturation correspondrait plutôt à une transition de phase continue, dans la mesure où la longueur de corrélation diverge au seuil de localisation. Le fait même que l'on ait des hétérogénéités à toutes les échelles au moment de la localisation, poserait alors un problème pour la validité du concept d'équations constitutives du matériau, censées être valables au-dessus d'une échelle d'homogénéisation : cette échelle serait inexistante au moment de la transition. L'outil le plus indiqué pour décrire la physique de cette transition sera plutôt en principe une renormalisation, ou la description du point critique associé : ceci constitue un des objectifs de ce travail.

Dans la première partie préliminaire, on analysera un ensemble de données de déformation / contrainte, obtenues essentiellement sur des tests triaxiaux lents pour diverses roches et conditions expérimentales, ainsi que sur quelques exemples plus exotiques. On extraira de ces données la divergence d'une observable simple de ces courbes, au voisinage de la contrainte pic. On montrera qu'une loi de puissance décrit assez bien une gamme importante de la loi de déformation, et que si la notion de phénomène critique fait sens pour ce problème, il est plausible que les roches appartiennent toutes à la même classe d'universalité, indépendamment du détail de leur mode de microfracturation (inter ou intragranulaires) . Ceci laisse espérer que des théories assez simples puissent produire des résultats de validité assez générale, sur ces processus menant à la localisation macroscopique.

On abordera ensuite la partie théorique de ce travail :

Au chapitre 2, on élaborera un cadre probabiliste de description de la localisation. Le problème principal est de trouver des critères physiques pour bâtir une distribution de probabilité d'occurrence de configurations de fractures. Les problèmes dynamiques n'étant en général solubles que numériquement, on tentera d'approcher les probabilités qui en résulteraient en principe, à partir de quelques simples postulats et de considérations sur les formes des lois qui en découlent. Ceci permettra d'extraire les grandeurs pertinentes intervenant dans ces lois de probabilité, à savoir une énergie de formation typique de configuration à contrainte donnée, ainsi que la déformation macroscopique associée à cette configuration. On obtiendra ainsi la forme de distribution générale recherchée, en fonction de modèles physiques pour associer ces grandeurs à chaque configuration.

On construira ensuite au chapitre 3 un modèle spécifique pour décrire les degrés de liberté d'un système à l'échelle des fractures, et les aspects physiques principaux à retenir pour obtenir ces énergies de formation et décrire le processus de localisation qui nous intéresse.

Au chapitre 4 finalement, on exploitera le formalisme probabiliste et le modèle élaboré, pour décrire l'évolution d'un tel système en termes de transitions de phase. Étudiant ces transitions, on verra que les prédictions de ce modèle sont qualitativement en accord avec les observations expérimentales sur de nombreux points. On y dérivera également le comportement asymptotique analysé sur les données expérimentales, en tant que régime critique à l'approche d'une transition de phase. L'intérêt principal d'un tel détour par des développements techniques est a priori d'identifier quels sont les termes nécessaires, donc les compétitions entre mécanismes physiques, pour décrire relativement simplement ces processus.

Première partie

Observations expérimentales

Chapitre 1

Analyse de données expérimentales

1.1 Universalité dans des données déformation / contrainte

1.1.1 Type de données expérimentales reliables au phénomène critique

Si le processus conduisant à la fracturation macroscopique peut être interprété comme phénomène critique, cela doit se manifester expérimentalement dans plusieurs types de grandeurs physiques, liées aux différents moments de la distribution des défauts en interaction responsables du processus.

- Comme dans tous les problèmes impliquant un nombre d'objets en interaction très important, accéder de façon détaillée à ces défauts est impossible. (La taille des défauts en jeu est très inférieure à la taille du corps considéré : pour des essais triaxiaux par exemple, des microfractures de dimensions micrométriques interagissent pour finalement former une fracture dans des objets centimétriques).
- On peut en revanche tenter d'accéder aux moments de la distribution :
  - Pour une transition ferro/paramagnétique ou point critique liquide / gaz, des méthodes expérimentales existent qui permettent d'accéder aisément aux deuxièmes moments : des rayonnements respectivement électromagnétiques et électroniques sont diffractés par les objets élémentaires en jeu dans ces transitions, et la section efficace de diffraction donne directement la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation à 2 points à l'intérieur de l'objet. Ici, on n'a malheureusement pas de rayonnement du même type qui nous permettrait de "sonder" aisément les corrélations entre les défauts en cours de croissance : l'analogue le plus proche des deux rayonnements précédents serait d'envoyer des ondes sismiques dans le milieu et de capter de façon directionnelle la réponse aux bords du matériau, mais on a certainement des défauts structuraux qui diffractent également sans participer efficacement au processus de fracturation en cours, rendant l'information sur les défauts importants inutilisable. Nous ne connaissons en tout cas aucune expérience de ce type.
  - Il est par contre possible de faire directement une étude statistique sur des grandeurs microscopiques sensibles à la présence des défauts.

    Par exemple, pour des objets intrinsèquement bidimensionnels, comme une couche de

sable, des analyses statistiques de carte de déformation incrémentale sont effectuées (Bonnet et al, en préparation). Il est possible à partir de ces cartes d'obtenir des informations dérivées intéressantes sur la fonction d'autocorrélation (cf chapitre 1.2.1).
Pour des objets tridimensionnels, le même type d'information peut être recueilli à la surface des matériaux comprimés (pour des essais uniaxiaux sur du béton, cf Bascoul et al. [1993] , Berthaud et al. [1997] ou d'autres travaux réalisés dans le cadre du *GRECO Géomatériaux*). Il serait intéressant d'effectuer le même type d'analyse statistique sur ces cartes de déformation de surface, pour chercher si l'on trouve une corrélation s'établissant progressivement entre la trace des défauts en surface, ou au contraire un phénomène de transition abrupt entre déformation diffuse et localisée macroscopiquement. Toutefois, le fait même que ces mesures soient effectuées à la surface d'échantillons tridimensionnels donnera certainement une information assez biaisée sur le phénomène en cours à l'intérieur, les effets de bord étant certainement prédominants.
Pour avoir une image en volume de la croissance des défauts dans des objets tridimensionnels comme des roches, les méthodes de détection des évènements microacoustiques se sont récemment beaucoup développées (Lockner [1995] ; Lockner et al. [1992]) . Elles permettent de détecter des sources microsismiques, correspondant aux microfractures en mouvement, à partir d'une certaine amplitude d'énergie émise, avec une résolution spatiale de l'ordre du mm, et récemment avec un début de détermination du mécanisme au foyer (Zang et al. [1996]) . On pourrait également tenter une analyse statistique des corrélations sur ce type de données, mais la résolution spatiale actuelle (millimétrique dans des objets centimétriques) ne permet peut-être pas encore d'avoir une population suffisante pour avoir un bon échantillonnage. L'amélioration constante de ces techniques devrait toutefois permettre ceci bientôt.

– On peut enfin s'intéresser à des grandeurs macroscopiques extensives, aisément mesurables, dont on argumentera plus loin qu'elles sont des propriétés émergentes d'une certaine physique statistique, en les reliant théoriquement à des moments de la distribution des défauts (cf chapitre 2.1). Dans les essais triaxiaux effectués couramment, à pression de confinement constante, la courbe d'écrouissage (contrainte macroscopique en fonction de la déformation macroscopique, lors d'un chargement monotone) est une donnée bien contrainte expérimentalement, et est accessible dans la littérature pour de nombreux types de roches et conditions (de type et vitesse de charge, et de pression de confinement). On a donc choisi ici de s'intéresser à ces données.
  Pour une description de la mise en place des expériences et des protocoles de mesure, on se reportera par exemple à Bésuelle [1999] ou Bésuelle et Desrues [1998b] .

1.1.2 Lois recherchées dans les données déformation / contrainte

1.1.2.1 Principe - où chercher une loi de puissance

On cherche à tester, dans les données expérimentales, la cohérence de l'idée de phénomène critique comme modèle du processus d'endommagement conduisant à la localisation macroscopique. Considérant un paramètre de contrôle macroscopique p pour la roche entière permettant d'atteindre le point de localisation macroscopique p_c, on sait qu'un tel phénomène doit se traduire, pour certaines grandeurs physiques G sensibles à la présence des défauts, par des divergences en loi de puissance au voisinage du seuil de localisation :

$$G \underset{p \to p_c}{\sim} \alpha \left| p_c - p \right|^{-\gamma}, \gamma > 0$$

.

Pour des expériences de compression triaxiales effectuées à vitesse très lente, en régime quasi-fragile, (qui correspond aux conditions qui nous intéressent dans la croûte ou le manteau supérieurs, et s'étend sur une grande gamme de pressions de confinement), la contrainte présente un pic à une certaine déformation, et la courbe de déformation / contrainte en charge est relativement régulière et dérivable. En définissant $\left.\frac{\partial \varepsilon_{ax}}{\partial \tau_{ax}}\right|_{\tau_{rad}}$ et $\left.\frac{\partial \varepsilon_{rad}}{\partial \tau_{ax}}\right|_{\tau_{rad}}$ les pentes des courbes de charge (régularisées : sans regarder les petites fluctuations), ces grandeurs doivent donc diverger au voisinage de la contrainte pic. Or, suivant le critère adopté pour caractériser la localisation macroscopique dans l'échantillon de roche, les expérimentateurs situent généralement ce point comme précédant quasi-immédiatement cette contrainte pic (couramment, de 1 à quelques % : Bésuelle [1999]) . De plus, les premières hétérogénéités macroscopiques apparaissant à quelques % de la contrainte pic sont couramment initiées aux angles des échantillons, et sont suivies par la formation aux alentours immédiats de la contrainte pic par une ou plusieurs bandes de cisaillement au centre de l'échantillon, a priori plus représentatives des propriétés de volume du matériau et non de la géométrie des frontières (voir par exemple Berthaud et al. [1997]). Pour rechercher nos lois, on a donc une forte information a priori sur le fait que $p_c \simeq p_{pic}$, valeur du paramètre p à cette contrainte pic.

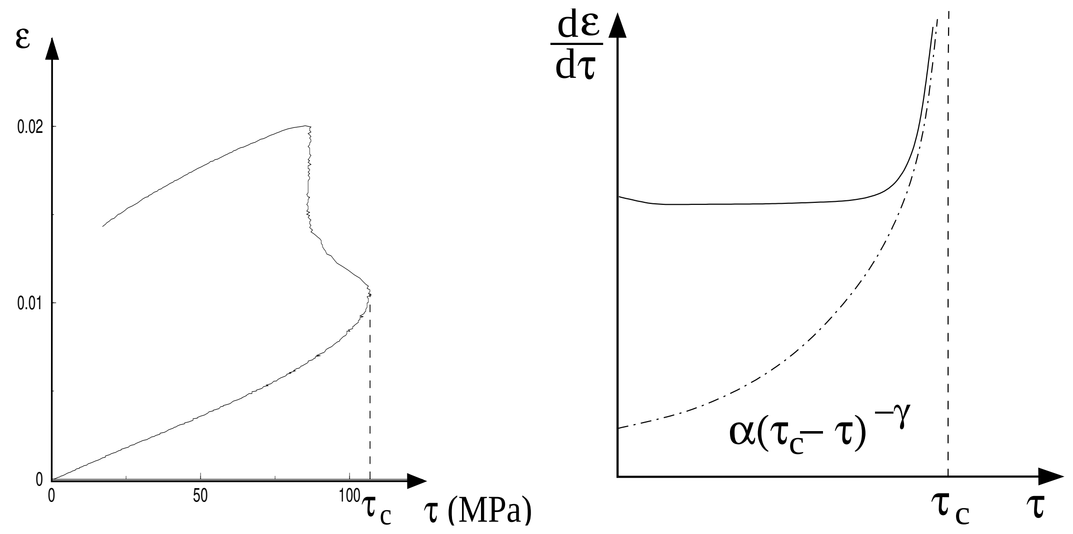
Pour se rapprocher le plus possible des conditions de déformation de la croûte semifragile[1], les expériences sont effectuées à vitesse très lente, i.e. quasi-statiques, et on peut considérer comme paramètre de contrôle, pour la partie précédant la contrainte pic, alternativement la déformation macroscopique ou la contrainte macroscopique. En effet, comme on le vérifiera en section 1.1.4, le fait que le paramètre expérimental imposé soit le taux de déformation, celui de contrainte ou la puissance des émissions microacoustiques ne changent pas la dépendance déformation / contrainte de façon significative pour la partie précédant la contrainte pic - cela modifie par contre radicalement le comportement post-pic, et même la possibilité de faire des mesures dans cette partie, mais on s'attend à ce qu'une physique différente régisse cette partie (la déformation dépendant alors plutôt de phénomènes de broyage au sein de la gouge et de comportements de type "patin" au sein de la bande de cisaillement déjà formée, et non d'un processus collectif impliquant la roche entière) . On cherche donc à mettre en évidence ces lois de puissance uniquement sur la partie précédant p_c .

Étant données ces considérations, on s'intéresse donc à la courbe de charge $\varepsilon_{ax}/\tau_{ax}$, la plus fréquemment mesurée dans les essais triaxiaux, et on cherche des lois du type

$$\left.\frac{\partial \varepsilon_{ax}}{\partial \tau_{ax}}\right|_{\tau_{rad}} \underset{\tau_{ax} \to \tau_{ax_c}^-}{\sim} \alpha \left| \tau_{ax_c} - \tau_{ax} \right|^{-\gamma} \tag{1.1}$$

On a porté en figure 1.1 (a) une courbe de contrainte / déformation axiale mesurée par Pierre Bésuelle sur un grès des Vosges à pression de confinement de 30 MPa , et en 1.1 (b) un schéma de la dérivée $\left.\frac{\partial \varepsilon_{ax}}{\partial \tau_{ax}}\right|_{\tau_{rad}}$ correspondante avant la contrainte pic, et le rapport avec la singularité que l'on cherche.

[1] taux de déformation à l'intérieur des plaques $\dot{\varepsilon} \sim 10^{-18} s^{-1}$, d'après Zoback et Townend [2000] .



(a) Aspect typique d'une courbe de contrainte / déformation axiales (Données : Bésuelle 1999)

(b) Schéma da la pente correspondante (traits pleins) avant la contrainte pic, et loi limite recherchée (pointillés)

FIG. 1.1 – Divergence recherchée

1.1.2.2 But : Test expérimental d'universalité

L'intérêt principal de faire ce type d'inversion dans ces données est de tester expérimentalement l'idée d'universalité dans ces processus :

Un des aspects principaux des phénomènes critiques, lié à l'invariance d'échelle au point critique, est que le comportement macroscopique du système au voisinage de ce point est insensible à de nombreux détails des interactions précises entre degrés de libertés d'échelle la plus basse, mais est plutôt gouverné par des propriétés très générales, topologiques, des interactions : qualitativement, ce qui importe est la façon dont ces interactions à une échelle donnée se transforme en interactions effectives à une échelle supérieure — le lien entre échelles étant que les propriétés macroscopiques de ce système, gouverné par ces interactions à une échelle donnée, sont également propriétés d'un système d'objets à l'échelle supérieure avec ces interactions effectives : processus de *coarse graining* (terme anglais). Ceci a comme conséquence que de nombreux systèmes physiques différents aux propriétés d'interactions microscopiques complexes, peuvent être décrits macroscopiquement aux alentours du point critique par d'autres systèmes aux interactions effectives nettement simplifiées. Tous les systèmes différents dont les interactions effectives après un certain nombre de transformations d'échelles sont asymptotiquement identiques sont dits appartenir à la même **classe d'universalité**, et la conséquence est que leurs **exposants critiques** (exposants apparaissant dans les lois de puissance régissant les grandeurs divergentes) sont **identiques**. C'est l'origine du succès d'un modèle aussi simple que celui d'Ising pour décrire les transitions ferro / paramagnétiques de corps très différents les uns des autres à l'échelle microscopique, et même moyennant certains isomorphismes, les transitions critiques liquide / gaz.

Historiquement, cette propriété d'universalité frappante entre les points critiques de nombreux systèmes a été comprise avec le développement des théories de renormalisation, et pour dépasser la description sommaire de l'idée d'universalité et son origine qui est faite ici, on trouvera une bonne description de ces notions dans des ouvrages de référence comme ceux de Ma [1976] ou Goldenfeld [1992] , ou pour des aspects plus techniques celui de Binney et al. [1992] .

Une question primordiale avant de tenter de décrire le processus de fracturation des roches en compression comme un phénomène critique, est donc de tester expérimentalement si les différentes roches semblent appartenir à une ou plusieurs classes d'universalité si cette description fait sens : si le paramètre γ défini en (1.1) semble être identique aux barres d'erreur près pour de nombreuses roches, on peut espérer que des modèles de physique statistique avec des interactions très simplifiées pourront décrire des aspects communs dans la statistique de ce processus pour de nombreuses roches et conditions expérimentales, sans avoir systématiquement à simuler des systèmes différents suivant les types de défauts microscopiques très variés observés dans les différentes roches (de nombreuses observations par M.E.B. (microscope électronique à balayage) sont disponibles, voir les ouvrages généraux sur l'endommagement ou la déformation comme ceux de Lemaître et Chaboche [1985] , Lemaître [1992] , François et al. [1993] , ou spécifiquement dans les roches, Kranz [1983] ou Batzle et al. [1980]).

1.1.3 Protocole de traitement des données

1.1.3.1 Description qualitative des courbes

On va d'abord rappeler quelques aspects qualitatifs des courbes de charge de compression avec confinement de roches, en régime quasi-fragile (voir par exemple la figure 1.2). Elles présentent typiquement quatre domaines (d'après Paterson [1978]) :

1. une partie initiale convexe, cette augmentation de la rigidité du matériau étant interprété comme résultant de la fermeture des microfractures préexistantes.

2. une partie essentiellement affine, pendant laquelle on a une activité microacoustique tout à fait négligeable, correspondant essentiellement à une pure déformation élastique sans évolution notable de l'endommagement,

3. une partie où la courbe sort progressivement du régime affine[2], simultanément à une augmentation de l'activité microacoustique indiquant la formation / croissance des défauts. La pente de la courbe diminue alors, et la variation de déformation volumique devient progressivement dilatante. Si l'on décharge alors le matériau jusqu'à la contrainte initiale, on constate qu'il reste une déformation résiduelle non nulle (plus ou moins importante suivant le type de roche), et que la rigidité du matériau a diminué. La répartition des microfissures en activité semble alors relativement homogène à l'échelle de l'échantillon.

4. à partir du seuil de localisation macroscopique, situé aux alentours de la contrainte pic, on passe en régime adoucissant (pente négative de la courbe), et on observe alors que la déformation à l'échelle macroscopique et les émissions microacoustiques se concentrent le long d'une bande de cisaillement. Les défauts formés auparavant coalescent, formant progressivement la fracture macroscopique.

[2] i.e. linéaire plus une constane additive.

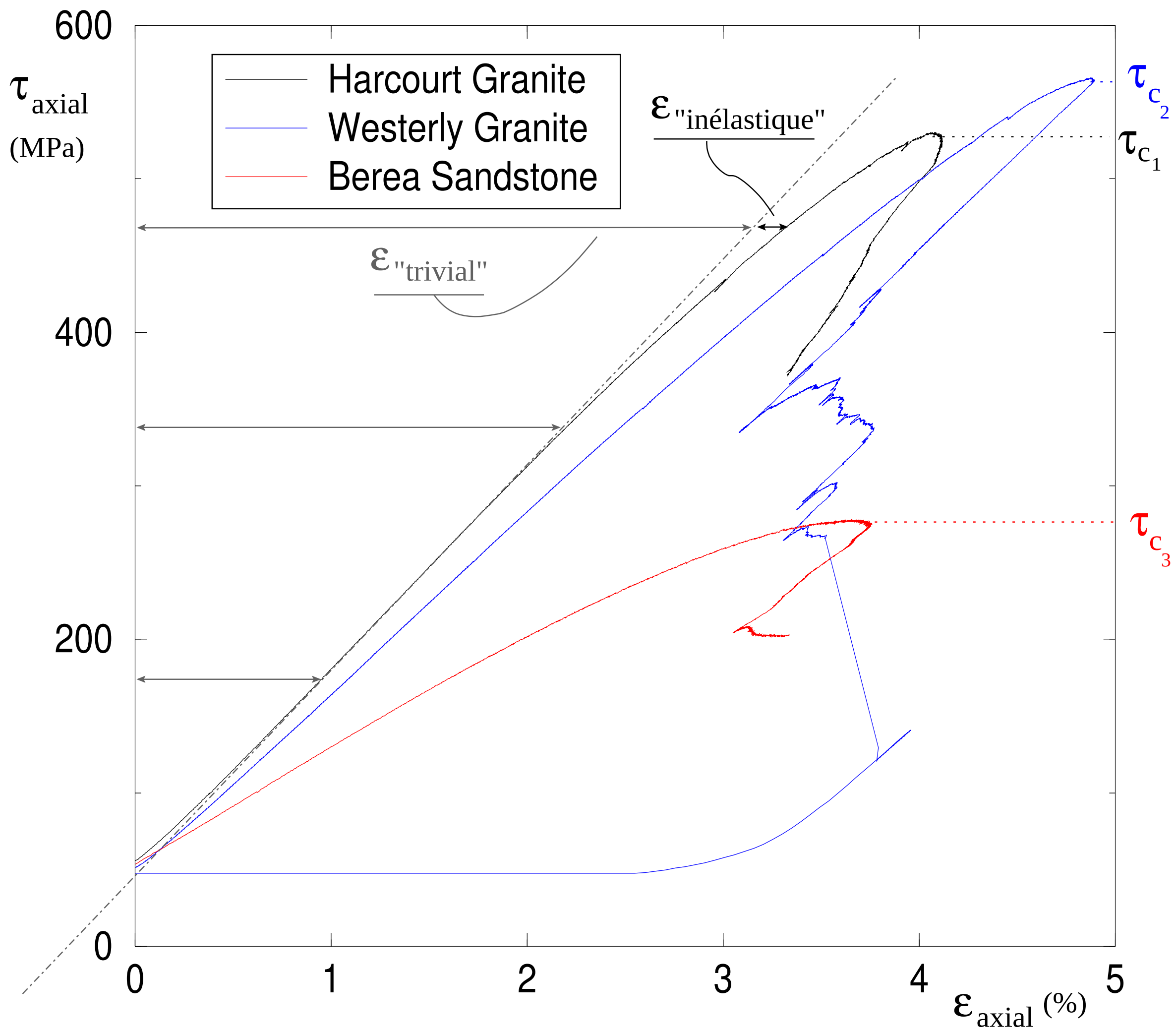


FIG. 1.2 – Transformations opérées sur les courbes déformation / contrainte. (Données : Lockner 1991)

1.1.3.2 Transformation appliquées

Le paramètre γ qui nous intéresse est l'exposant de la singularité de l'inverse de la pente de ce type de courbe, autour de -et avant- la contrainte pic. Il importe de souligner que l'équation (1.1) n'est censée correspondre au comportement de la roche que dans le voisinage de τ_c, où les processus collectifs d'interactions entre microdéfauts jouent un rôle primordial dans la déformation, et peuvent être en régime critique : le comportement régulier de la courbe $\frac{d\varepsilon}{d\tau}(\tau)$, loin du point critique, n'est pas censé être décrit par ce pôle. L'ajout d'une partie affine à la courbe de charge $\varepsilon(\tau)$ correspondant simplement à l'ajout d'une constante dans la dépendance qui nous intéresse, elle ne modifie pas la nature du pôle qui nous intéresse (voir fig 1.1(b)), mais la présence d'une valeur constante réduit en pratique l'extension du voisinage sur laquelle le comportement est dominé par le pôle, puisque $x^{-\gamma} \underset{x\to\infty}{\rightarrow} O$ (voir fig 1.1(b)). La partie de la courbe non affine, et précédant la contrainte pic, étant d'extension assez réduite, le fait de soustraire à la déformation, un polynôme de degré 1 extrapolé à partir de la partie affine représentant la partie la plus régulière de la déformation, permet de façon empirique d'avoir une évaluation moins biaisée de la nature du pôle en étendant le domaine sur lequel on s'attend à ressentir son influence. De plus, physiquement, la partie affine correspond aux propriétés élastiques du matériau comportant un endommagement initial, sans évolution notable des défauts, et est donc plus lié aux propriétés de la matrice, du milieu propagateur des interactions, plutôt qu'à l'évolution de la population de microfissures en interaction : cette partie triviale de la déformation est indépendante du phénomène qui nous intéresse ici. Enfin, on sait que la rigidité finie de la machine de test triaxiale utilisée peut modifier cette pente : les déformations élastiques de la cellule contenant l'échantillon ajoutent une fonction affine de la contrainte aux déformations macroscopiques mesurées. En soustrayant la partie affine de la déformation observée dans les données, on s'affranchit donc de cette dépendance à la rigidité de la machine, ce qui permettra de comparer ces grandeurs pour des expériences effectuées sur des machines différentes.

Pour ces raisons, on a choisi de soustraire à la déformation cette composante triviale, extrapolation du comportement si l'endommagement n'évoluait pas, évaluée par régression linéaire sur la partie approximativement affine, pour extraire la déformation ε_i désignée comme "inélastique" par les expérimentateurs[3] (Lockner [1998]) . (voir la figure 1.2. Données : Lockner, 1991. Essais triaxiaux sur deux granites et un grès, à pression de confinement de 50 MPa).

Le préfacteur α dans les lois de puissance (1.1) étant très dépendant du matériau, et ne présentant pas d'intérêt particulier pour tester l'universalité, les données résultantes sont ensuite adimensionnées en les normalisant par leurs valeurs à la contrainte pic, pour faire apparaître $\varepsilon_{i_n}(\tau_n)$, avec par définition $\varepsilon_{i_n} \hat{=} \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i(\tau_{pic})}$ et $\tau_n \hat{=} \frac{\tau}{\tau_{pic}}$.

1.1.3.3 Difficultés de principe à la mise en œuvre du problème inverse

Après ces préalables, on a alors en principe à résoudre pour chaque jeu de données un problème inverse à quatre paramètres, puisque l'équation (1.1) équivaut pour ces variables à

$$\varepsilon_{i_n}^c - \varepsilon_{i_n} \underset{\tau_n \to \tau_n^{c-}}{\sim} \alpha' (\tau_n^c - \tau_n)^{1-\gamma} \tag{1.2}$$

On a de plus pour ce problème inverse une forte information a priori sur le fait que le seuil de localisation est voisin de la contrainte pic, i.e. $\varepsilon_{i_n}^c \simeq 1$ et $\tau_n^c \simeq 1$.

Il importe toutefois de souligner que cette loi n'est pas censée s'étendre sur l'ensemble des données précédant la contrainte pic, mais est uniquement une loi limite autour du seuil de localisation. D'autre part, cette loi est censée être valable pour des milieux d'extension infinie, et le fait que les expériences réelles soient faites sur des échantillons centimétriques doit provoquer des déviations à cette loi aux alentours du point critique. Ceci est dû essentiellement à trois facteurs :

[3] D'un point de vue terminologique, on peut remarquer que cette déformation inélastique est simplement définie de façon empirique par le procédé décrit, et ne coïncide pas a priori avec la déformation résiduelle que l'on aurait en déchargeant le matériau jusqu'aux conditions initiales. Ce serait le cas si le matériau dans son ensemble avait un comportement de plasticité avec écrouissage, sans modification de ses modules d'élasticité, mais on observe expérimentalement pour les roches, en déchargeant à partir d'un état où cette déformation inélastique est non négligeable, que ces modules sont notablement diminués : ceci est généralement décrit par la mécanique du dommage. La déformation inélastique définie ici résulte, du point de vue d'une description macroscopique par équation constitutive, d'une combinaison de déformation plastique et d'évolution des paramètres de dommage.

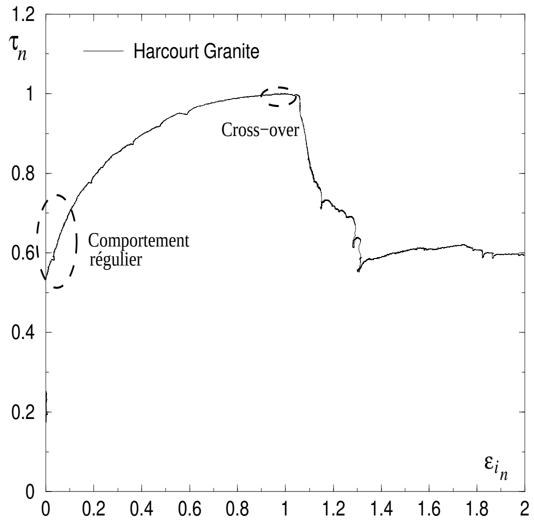


FIG. 1.3 – Compromis à trouver sur la zone où inverser.

– formellement, dans tout phénomène critique, ces déviations avant le régime critique ont lieu et sont désignées comme "*cross-over* de taille finie".
– Les courbes de déformation contrainte enregistrées ne sont pas en pratique réellement dérivables, mais présentent de petites irrégularités correspondant à la nature brutale des glissements sur les microfractures, responsables des émissions acoustiques. Ceci est à l'origine d'un "bruit", du point de vue qui nous intéresse, rendant l'information sur nos paramètres de moins en moins importante pour les points de plus en plus proches du seuil. (La loi (1.2) doit correspondre à une loi affine en $\log(\varepsilon_{i_n}^c - \varepsilon_{i_n}) / \log(\tau_n^c - \tau_n)$, l'information sur γ étant donnée par la pente, mais pour une perturbation d'amplitude de bruit donnée sur ε_{i_n} et τ_n , on a en représentation logarithmique, des fluctuations d'amplitude exponentiellement divergente autour du seuil.)
– enfin, le "bruit" cité ci-dessus n'est pas d'amplitude constante, mais augmente aux alentours de la contrainte pic, rendant cette partie des données encore moins utilisable. Ceci est clair dans l'exemple du grès en figure 1.2, et est dû au fait que les "avalanches" d'évènements augmentent en se rapprochant du pic : un glissement sur une microfissure induit de plus en plus d'autres glissements.

On a donc un compromis à trouver sur la zone où cette loi doit modéliser le comportement : figure 1.3 (ces données correspondent à celles de la figure 1.2) . L'extension des deux zones représentées schématiquement est de plus a priori inconnue.

1.1.3.4 Méthode retenue pour la détermination de γ .

Pour traiter en pratique la recherche du paramètre γ comme un problème inverse, cela rend très malaisé le choix de la norme ("fonction coût") à utiliser pour caractériser l'écart entre le modèle et les données. Suivant l'importance donnée aux différentes parties des données par cette norme, et en ne prenant pas suffisamment en compte l'information a priori sur le fait que les valeurs critiques sont proches des valeurs au pic, on a une barre d'erreur énorme sur la détermination de γ , très sensible à la valeur exacte de ces valeurs critiques. C'est un problème analogue à celui des déterminations expérimentales d'exposants critiques pour les transitions ferro/paramagnétiques, quand on ne connaît pas précisément la valeur exacte de la température critique. La façon la plus efficace de s'affranchir de ce problème habituellement, est d'étudier le *cross-over* de taille finie lui-même en faisant des expériences à taille variable. Ce type de données est malheureusement rarement disponible sur les roches[4].

On a donc choisi une méthode hybride de détermination, mettant une forte emphase sur l'information a priori : on ne traite pas la détermination des deux paramètres $\varepsilon_{i_n}^c$ et τ_n^c comme un problème inverse, mais on les considère comme exactement égaux à 1. La détermination des deux paramètres α' et γ restant est alors trivialement obtenue par régression linéaire en représentation logarithmique. L'incertitude sur γ, due à une indétermination de 1% (pris a priori : voir section 1.1.5) sur $\varepsilon_{i_n}^c$ et τ_n^c, est évaluée a posteriori.

1.1.4 Résultats : mise en évidence du comportement universel de la divergence de la compressibilité

Les données brutes traitées ici ont été obtenues en 1991 par D.A. Lockner, au laboratoire U.S. Geological Survey, Menlo Park, California et en 1999 par P. Bésuelle, à l'université Joseph Fourier, Grenoble I, et nous ont étées aimablement transmises par ces expérimentateurs.

1.1.4.1 Données de David Lockner

Les trois données représentées en figure 1.2 correspondent à trois essais de compression triaxiale effectués sur une même machine avec des échantillons de mêmes dimensions, à pression de confinement de 50 MPa, sur trois roches différentes : le mécanisme de rupture microscopique dans ces roches est de plus de nature très différente, entre les deux granites où les ruptures sont essentiellement intragranulaires, et le grès où elles sont essentiellement intergranulaires. Par ailleurs, la taille des grains diffère entre les deux granites : de l'ordre du centimètre dans le granite de Harcourt, assez supérieure à celle du granite de Westerly. Les conditions de charge sont identiques, désignées par D. Lockner comme "quasistatiques" : le taux d'émissions microacoustiques total est mesuré tout au long de l'expérience, et la vitesse de charge est en permanence ajustée pour qu'il soit maintenu constant. Ces données brutes de très grande qualité comportent chacune quelques dizaines de milliers de points de mesure, et l'erreur faite lors de ces mesures est inférieure à la résolution graphique de cette figure (les petites irrégularités de la courbe sont très bien enregistrées). Les expériences sur le granite de Westerly et le grès de Berea ont été analysées par Lockner et al. [1992] . On a porté en figure 1.4 les données réduites déformation axiale inélastique / contrainte axiale normées correspondantes.

Le degré auquel ces données réduites sont proches est assez frappant, et même surprenant sachant que :

- l'on attend d'universalité que dans l'exposant $1-\gamma$, et non dans le préfacteur multiplicatif α', d'une loi

$$1-\varepsilon_{i_n} \underset{\tau_n \to 1^-}{\sim} \alpha'(1-\tau_n)^{1-\gamma} \tag{1.3}$$

[4] Leur obtention nécessiterait la construction d'une nouvelle machine triaxiale pour chaque taille à tester, ce qui est relativement rédhibitoire vu la lourdeur et la complexité de ces machines dès qu'on s'intéresse à des régimes avec grande pression de confinement.

– et ceci n'est censé être valable qu'au voisinage de 1.

Ces trois roches différentes semblent montrer un comportement des données réduites très proche, y compris pour les préfacteurs, et une très grande étendue du domaine de validité de ce type de comportement, approximativement de $\varepsilon_i \simeq 0.1\varepsilon_{i_c}$ à $\varepsilon_i \simeq \varepsilon_{i_c}$.

Pour confirmer ou infirmer ce résultat, nous avons comparé ceci à d'autres données du même expérimentateur, digitalisées à partir des données publiées par Lockner [1998][5]. On a porté les données réduites obtenues en figure 1.5. Les trois premières sont celles de la figure précédente, pour comparaison. Les autres données sont obtenues sur un même granite de Westerly, dans des conditions de charge différentes : huit expériences ont été effectuées dans les conditions plus usuelles de taux de déformation constant, et non taux d'émissions acoustiques. Les données désignées comme taux "lent" sont à $1.57 \times 10^{-7}s^{-1}$, les "rapides" sont à $1.57 \times 10^{-5}s^{-1}$. De plus, la pression de confinement, constante dans tous les cas, a été de 100 à 200 MPa suivant l'expérience (ce qui reste toujours dans le régime quasi-fragile)[6].

Une fois de plus, ces données semblent présenter un comportement très similaire sur une étendue de ε_{i_n} importante : ceci semble relativement indépendant du type de roche et de la condition précise de charge imposée.

Remarque : deux données un peu plus atypiques, à taux de déformation lent, et à pression de confinement de 100 et 200 MPa, présentent un régime initial différent associé à de premiers glissements importants : ceci provient du protocole expérimental, la vitesse de charge n'ayant pas été maintenue constante durant toute l'expérience, mais été abaissée du premier taux au second -pour des raisons évidentes de durée. On note malgré tout que le comportement devient similaire aux autres à partir de $\varepsilon_i \simeq 0.3\varepsilon_{i_c}$

1.1.4.2 Données de Pierre Bésuelle

Pour pouvoir s'affranchir de la dépendance de ce résultat aux conditions expérimentales précises, notamment de la forme de l'échantillon et de la machine utilisée, on a comparé ceci à des expériences effectuées par P. Bésuelle sur un grès des Vosges, à taux de déformation constant de $10^{-5}s^{-1}$, à diverses pressions de confinement (résultats publiés par Bésuelle et Desrues [1998a] et Bésuelle [1999]). Chacune de ces données comporte quelques centaines de points de mesure. Les données de déformation axiale / contrainte axiale initiales ont été portées en figure 1.6.

Les données réduites et normalisées correspondantes sont en figure 1.7 - sans les données uniaxiales, correspondant à un régime différent (géométrie de la fracture macroscopique) et qui

[5]Chaque donnée ainsi reconstituée l'a été avec la précision déterminée par la largeur du trait dans les revues, nous permettant d'obtenir quelques centaines de points par courbe.

[6]On peut remarquer que les taux de charge imposés restent bien supérieurs aux conditions de la croûte inférieure ($10^{-18}s^{-1}$). Ceci est du naturellement à la nécessité d'effectuer les expériences avec des durées humainement concevables (la plupart sont effectuées entre $10^{-5}s^{-1}$ et $10^{-8}s^{-1}$ au minimum, le taux de $10^{-11}s^{-1}$ représentant actuellement la limite de ce qu'on tente d'atteindre dans des essais mécaniques par des méthodes assez sophistiquées, pour la partie précédant immédiatement le seuil de rupture (Mulargia et al. [2000]). L'influence principale du taux de charge est de réduire la valeur de la contrainte pic quand on ralentit l'expérience. L'existence d'une limite inférieure est assez ambiguë à partir des données de laboratoire (Sano et al. [1981]), d'où la question de la représentativité de telles expériences pour le comportement in situ. On note d'une part, que les modifications de la courbe de charge semblent de plus en plus faible vers les taux les plus lents atteints, et d'autre part, que les données réduites semblent insensibles à ces modifications sur deux ordres de grandeur de $\dot{\varepsilon}$ (figure 1.5) : on peut donc raisonnablement espérer que ceci soit le cas jusqu'aux conditions de la croûte.

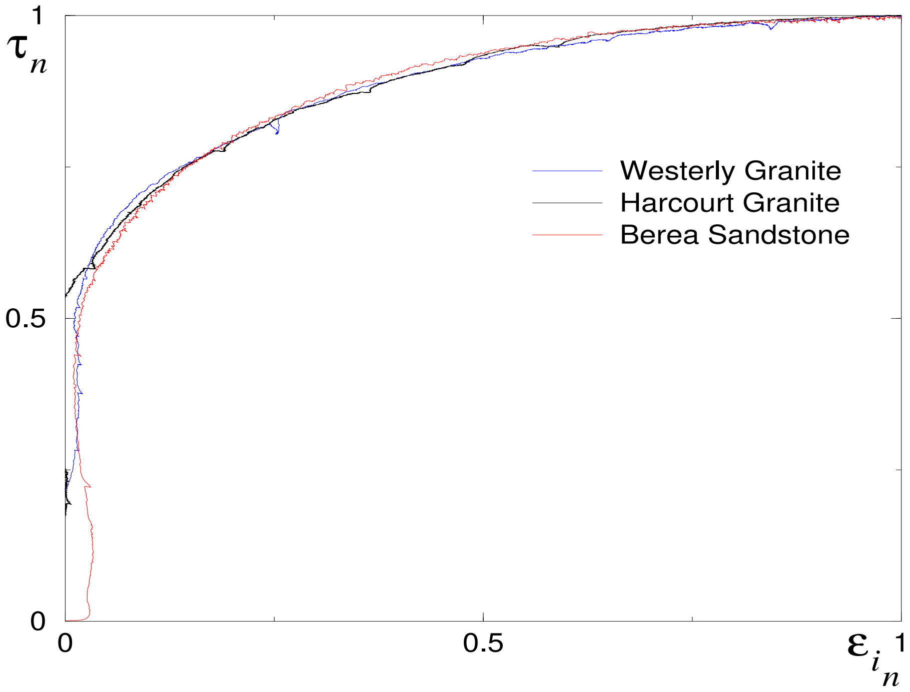


FIG. 1.4 – déformation axiale inélastique / contrainte axiale normalisées correspondant à la figure 1.2.

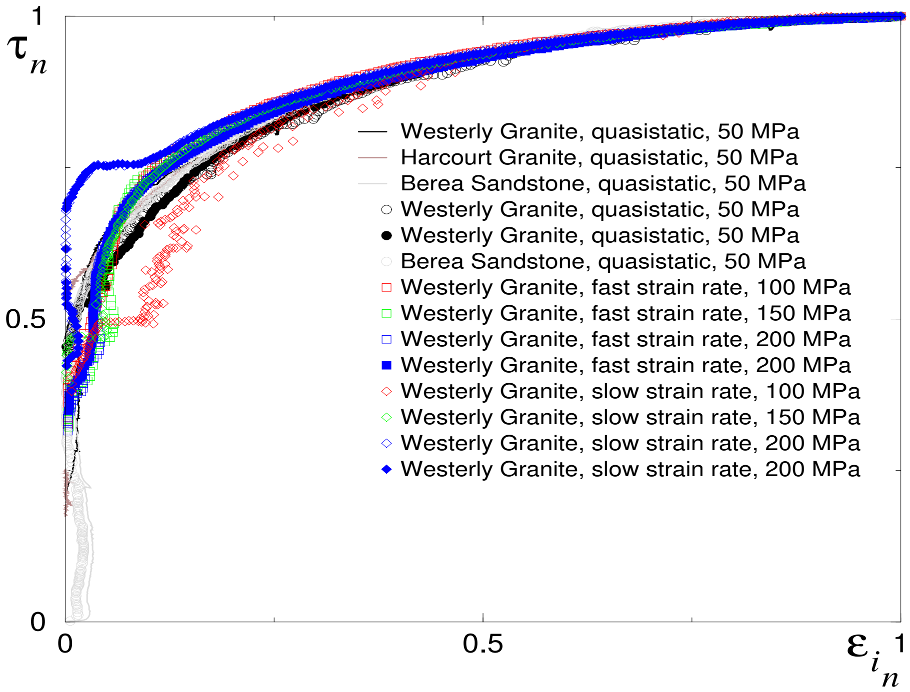


FIG. 1.5 – Avec données additionnelles correspondant à d'autres conditions de charge

se sont avérées dans tous nos tests assez différentes des autres sous cette forme. On observe une fois de plus la similarité de ces données réduites indépendamment de la pression de confinement. Toutefois, elles se démarquent nettement des données précédentes, comme le montre le granite de Westerly porté en référence. On doit alors se souvenir que dans la loi recherchée, $\Delta\varepsilon_{i_n} \underset{\Delta\tau_n \to 0^+}{\sim} \alpha'(\Delta\tau_n)^{1-\gamma}$, on attend pas d'universalité du préfacteur α'. On observe qu'il semble être du même ordre pour des données mesurées sur une même machine, mais différent d'une machine à l'autre. Il pourrait être lié aux dimensions des échantillons, ou à leur facteur de forme.

Pour comparer l'exposant γ des données obtenues sur des machines différentes, et observer de plus la dispersion du facteur multiplicatif pour une même machine, on a choisi de normaliser ce préfacteur par les données de D. Lockner : considérant deux expériences de référence, notées 1 et 2, correspondant aux deux machines, on prend arbitrairement comme référence la valeur $\Delta\varepsilon_{i_n}^{ref} = 0.5$, et les deux valeurs correspondantes $\Delta\tau_n$ sont relevées - en l'occurrence, $(\Delta\varepsilon_{i_n}^{ref}, \Delta\tau_n^{ref1}) = (0.5, 0.065)$ et $(\Delta\varepsilon_{i_n}^{ref}, \Delta\tau_n^{ref2}) = (0.5, 0.045)$. On détermine alors $\beta_2 = \frac{\Delta\tau_n^{ref1}}{\Delta\tau_n^{ref2}}$(et $\beta_1 = 1$), et on représente $\beta.\Delta\tau_n(\Delta\varepsilon_{i_n})$ où $\Delta\tau_n = 1 - \tau_n$ et $\Delta\varepsilon_{i_n} = 1 - \varepsilon_{i_n}$[7] , avec le même facteur β pour toutes les expériences d'une même machine.

Les résultats, en figure 1.8, montrent que les données réduites sont très similaires à ce facteur multiplicatif près, et ce une fois de plus indépendamment de la pression de confinement.

1.1.4.3 Données additionnelles extraites de la littérature

Pour enrichir notre jeu de données, on a relevé dans la littérature récente d'autres données du même type, et après les mêmes transformations (le facteur multiplicatif β étant déterminé pour chaque machine en normalisant par les données du Granite de Westerly : voir tableau 1.1 pour le coefficient utilisé), les résultats sont représentés en figure 1.9. En dehors des données du granite de Westerly portées pour comparaison, les expériences suivantes ont été portées :

- deux compressions triaxiales sur grès synthétiques sont d'après David et al. [1998] , les deux roches comprenant des fractions volumiques de ciment différentes (respectivement 3% et 5%), sous conditions de taux de déformation constant, $10^{-5}s^{-1}$, et pression de confinement constante.
- une compression triaxiale effectuée sur un grès de Locharbriggs à pression de confinement constante et taux de déformation maintenu à $5.10^{-6}s^{-1}$, publiée par Mair et al. [2000] .

et, pour tester l'importance éventuelle de la symétrie axisymétrique du chargement, on a également relevé

- des expériences de compression biaxiale (Ord et al. [1991]) (confinement constant dans une direction radiale, déformation constante selon la direction radiale perpendiculaire), effectuées à taux de déformation constant de $2.78 \times 10^{-6}s^{-1}$.
- et enfin une expérience de nature a priori très différente, d'après Poirier et al. [1992] , où un empilement régulier de pailles cylindriques de même diamètre, posées dans un bac, sont comprimées perpendiculairement à leur longueur, en imposant un déplacement nul aux bords latéraux de l'appareil (modèle de Schneebeli).

[7] en d'autres termes, par rapport à la représentation précédente, on effectue une rotation de 180° suivie d'une transformation affine de l'axe vertical d'un facteur β. Le point de localisation est alors à l'angle inférieur gauche.

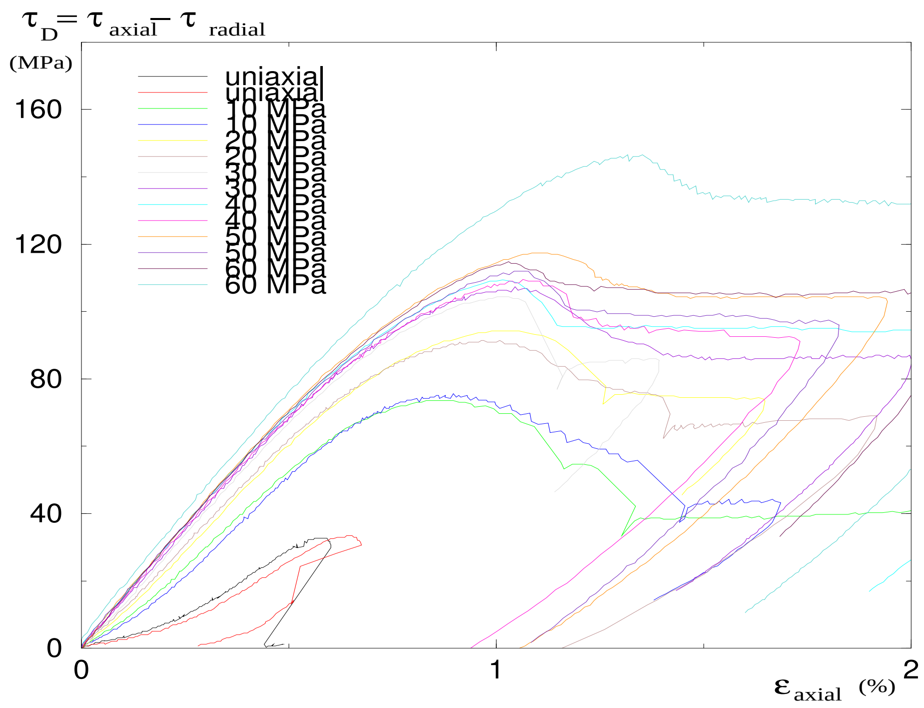


FIG. 1.6 – Courbes de charge sur grès des Vosges à confinement variable

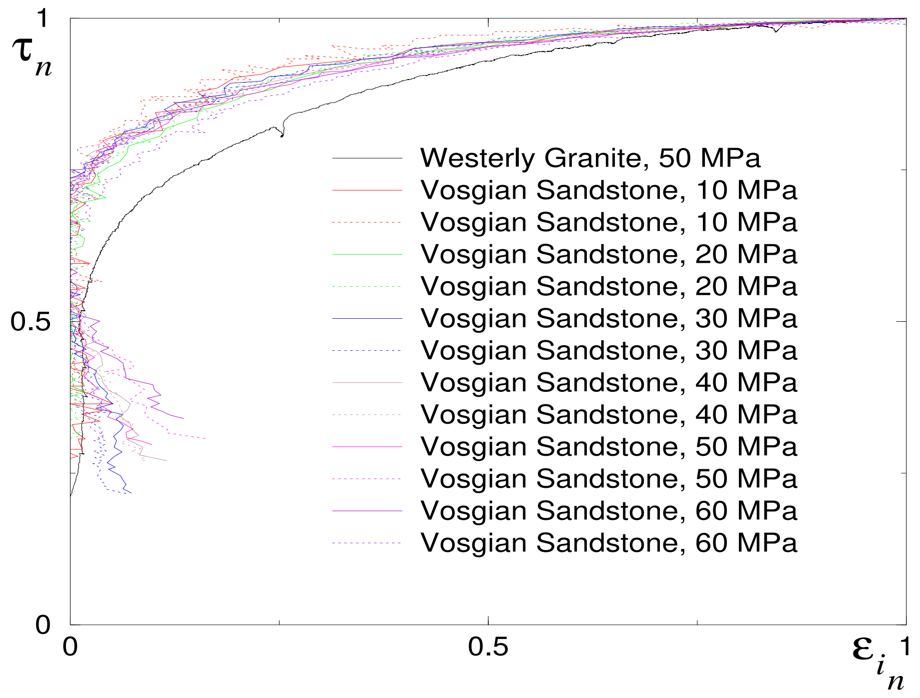


FIG. 1.7 – Données réduites correspondantes, comparées aux précédentes

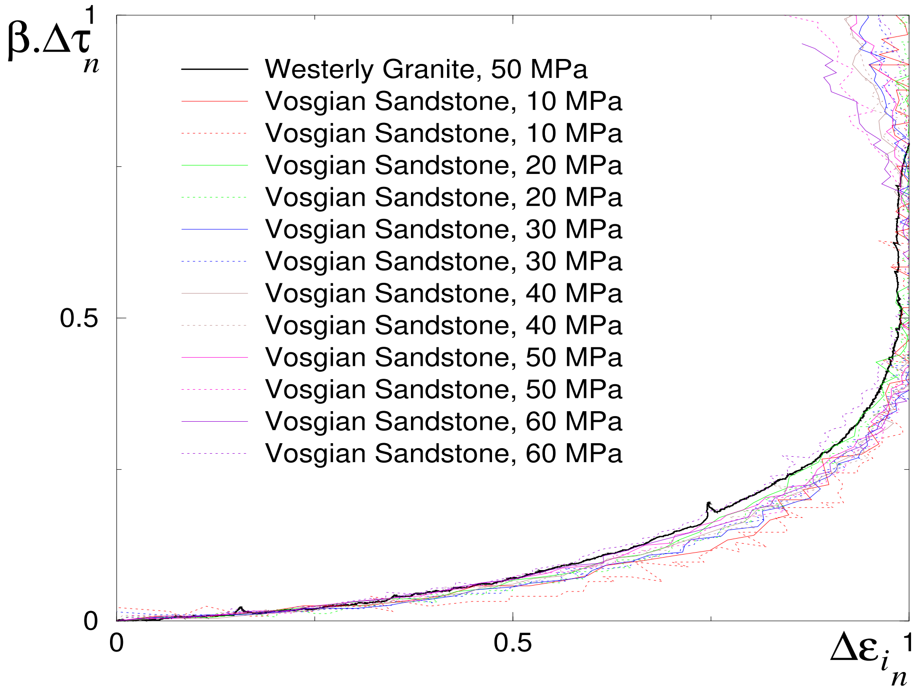


FIG. 1.8 – Après modification du préfacteur

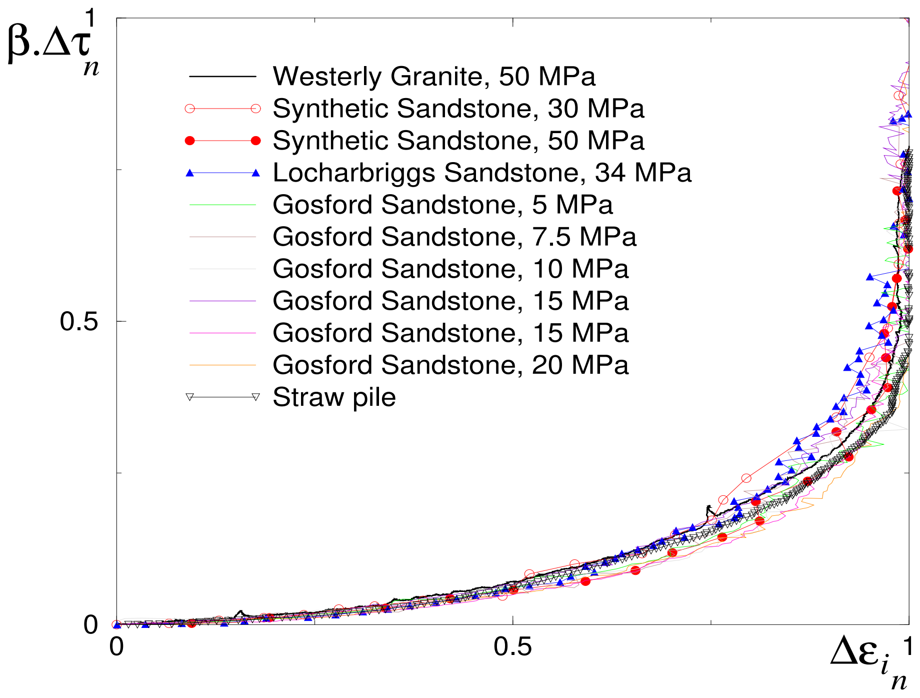


FIG. 1.9 – Données additionnelles

Machine expérimentale	préfacteur β déterminé
Lockner	1 (référence)
Bésuelle	1.44
David et al.	1.86
Mair et al.	1
Ord et al.	1.3
Poirier et al.	1.14

TAB. 1.1 – facteur multiplicatif propre à chaque machine

Les conclusions précédentes sont confirmées ici. On relève également que les deux derniers types de données correspondant à des problèmes plutôt bidimensionnels, dont un objet de nature très différente, ne se distinguent pas particulièrement des autres.

1.1.5 Établissement de l'exposant de divergence

On a représenté jusqu'ici directement les données réduites $\beta.\Delta\tau_n(\Delta\varepsilon_{i_n})$, pour avoir une idée approximative de l'étendue du domaine sur lequel on peut espérer un comportement universel. Pour déterminer en pratique le paramètre qui nous intéresse, on représente $\log_{10}(\Delta\tau_n)/\log_{10}(\Delta\varepsilon_{i_n})$, la pente de régressions linéaires sur ces courbes, dans le domaine de validité de la loi (1.3), devant donner $1/(1-\gamma)$. En figure 1.10, on a le résultat pour les 3 données brutes de D. Lockner, qui sont les mieux contraintes parmi celles disponibles[8].

Conformément à ce qu'on avait noté jusqu'alors, on remarque que les différentes courbes sont très proches les unes des autres. On note également que chacune de ces données est assez proche d'une droite, ce qui montre qu'une loi de puissance (1.3) semble plausible pour modéliser assez bien ces données. On a essentiellement deux zones où ceci ne semble plus être le cas :

approximativement, pour $0.2 \leq \log(\Delta\varepsilon_{i_n}) \leq 0$, et à l'autre extrémité, où la pente des courbes diminue légèrement en même temps que le bruit augmente. La déviation dans la première zone correspond au comportement régulier, éloigné du point critique (début de l'apparition d'une déformation inélastique). Dans la seconde zone, proche de la contrainte pic, la non linéarité est liée à l'erreur faite en forçant les valeurs critiques à celles du pic, comme on le verra plus loin en figure 1.11. Dans cette représentation, cette déviation reste assez importante et étendue, et le modèle (1.3) n'est qu'approximativement vérifié.

On n'a pas représenté ces données en-deçà de $\log_{10}(\Delta\tau_n) \simeq -2.5.$, l'amplitude des irrégularités des données étant en pratique de cet ordre $(\tau_{pic}/100)$[9] . L'extension du domaine de validité de cette loi, bien qu'importante en représentation normale (environ 90% des valeurs de déformation inélastique jusqu'à la contrainte pic), ne correspond pas à un nombre de décades très important

[8]Les résultats des autres expériences n'ont pas été portés ici pour ne pas trop alourdir la lisibilité, mais sont similaires : elles présentent le même type de pente, éventuellement une translation verticale près correspondant au préfacteur β quand elles proviennent d'une autre machine expérimentale.

[9]En pratique, si on représente les quelques rares points situés dans ce quart inférieur gauche du plan, en-deçà de la portée de la figure, on constate qu'ils sont totalement dispersés, et naturellement incohérents avec tout modèle linéaire. Leur distribution doit être reliée à la nature des petites fluctuations - i.e. des avalanches -, et non à la courbe régularisée à laquelle on s'intéresse ici.

en représentation logarithmique : ceci est du à l'impossibilité d'avoir une information en-deçà de cette limite.

Des régressions linéaires sur les parties centrales de ces courbes montrent une pente $p \simeq 2$, i.e. comme $p = \frac{1}{1-\gamma}$, $\gamma \simeq 0.5$.

1.1.6 Détermination plus précise de τ_c - Évaluation de l'erreur sur γ

Jusqu'ici, on a forcé les valeurs critiques à celles du pic. On doit noter que, vu l'amplitude typique des irrégularités de la courbe en contrainte, de l'ordre de 1% de τ_{pic}, il est probable que le point critique, correspondant à un milieu d'extension infinie, soit plutôt situé dans le nuage de points aux alentours de la contrainte pic, et non exactement au pic mesuré : τ_c est probablement situé de 0.5 à 1 % en-dessous de τ_{pic}, et ε_c précède certainement légèrement $\varepsilon(\tau_{pic})$. On a supposé un écart a priori possible de l'ordre de 1% entre ces grandeurs, et on a représenté en figure 1.11 la modification obtenue en considérant séparément $\tau_{c_n} = \frac{\tau_c}{\tau_{pic}} = 1 \pm 0.01$ et $\varepsilon_{i_{c_n}} = \frac{\varepsilon_{i_c}}{\varepsilon_{i_{pic}}} = 1 \pm 0.01$, pour le granite de Westerly (les autres données se comportent de façon identique).

Une erreur de 1% en ε_c change assez peu l'aspect de cette courbe, et ne modifie que la seconde décimale de la pente. Par contre, cet aspect est très sensible à la valeur précise du paramètre τ_c : on constate que la concavité de cette courbe $\log_{10}(\frac{\tau_c-\tau}{\tau_c})/\log_{10}(\frac{\varepsilon_{i_c}-\varepsilon_i}{\varepsilon_{i_c}})$ au voisinage de (τ_c, ε_c) (en bas à gauche dans la figure) disparaît progressivement lorsqu'on diminue légèrement τ_c, puis que l'incurvation s'inverse et la courbe devient convexe. Cette incurvation finale en représentation logarithmique étant un écart au modèle de loi de puissance recherchée (1.2), on peut utiliser ceci pour pratiquer une inversion ad hoc du paramètre τ_c, en le contraignant à une valeur telle que cette courbe soit le plus proche de la linéarité. On n'utilise pas dans ce procédé les points en deçà du domaine visible dans la figure (1.11), puisqu'ils correspondent à des valeurs $\frac{\tau_c-\tau}{\tau_c} \leq 10^{-2.5}$, ce qui est la limite de l'amplitude des fluctuations : on n'a plus d'information exploitable en-deçà de ce seuil. Ceci permet de déterminer τ_c avec une précision relative de 0.1%.

On représente alors $\log_{10}(\frac{\tau_c-\tau}{\tau_c})/\log_{10}(\frac{\varepsilon_c-\varepsilon}{\varepsilon_c})$ avec le paramètre τ_c ainsi déterminé : en figure 1.12 et 1.13, on a porté respectivement les trois données brutes de D. Lockner, et l'ensemble des données obtenues sur cette machine en ajoutant celles de l'article en référence. En figure 1.14, on a ajouté les données fournies par P. Bésuelle [10], en appliquant à $\Delta\tau$ le préfacteur $\beta = 0.44$ -ce qui correspond à une simple translation verticale.

On a enfin porté en figure 1.15 le résultat du même traitement, sur les données additionnelles extraites de la littérature. Les valeurs du paramètre déterminé τ_c sont situées pour chaque donnée entre 0.3 et 1% en-deçà de la contrainte pic, ce qui correspond bien à l'information a priori que l'on avait. Sur les deux dernières figures, on a également porté en référence deux droites de pente 2.5 et 1.95, pour comparaison.

On constate que ce comportement en loi de puissance est particulièrement bien vérifié lorsque l'on fait cette inversion supplémentaire pour τ_c , et ce très rapidement après l'apparition de la déformation inélastique, et jusqu'à la limite de la résolution expérimentale possible provenant des

[10] Remarque : on note essentiellement un outsider, correspondant au deuxième test sur le grès Vosgien à 10 MPa. Les points correspondants sont très dispersés, ce qui vient du fait que la donnée originale était nettement plus bruitée que les autres – cf figure 1.8 et 1.6. Cette donnée est toutefois cohérente avec le comportement d'ensemble, mais ne porte pratiquement aucune information pour l'exposant recherché.

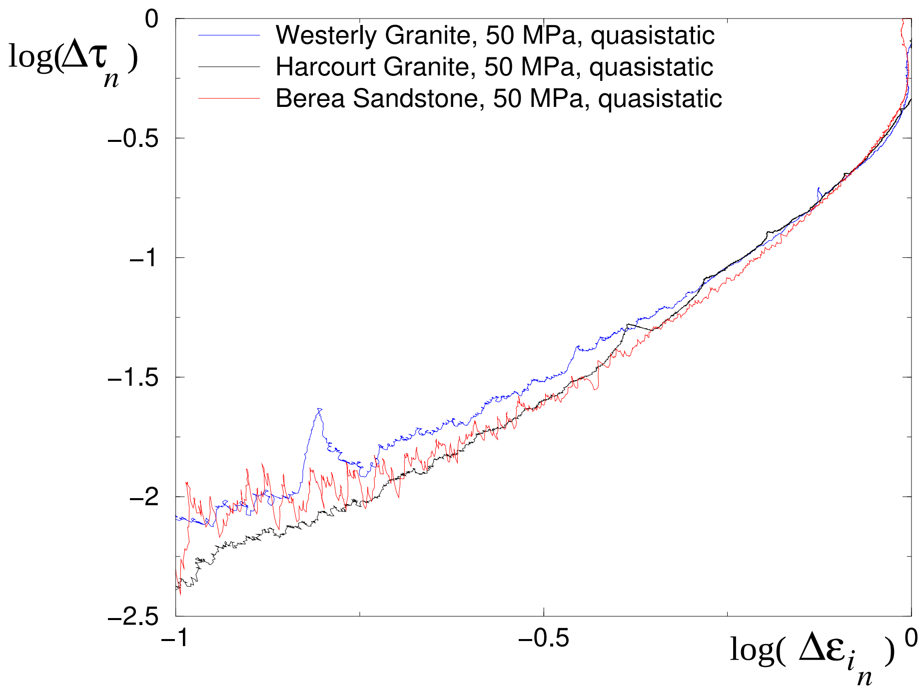


FIG. 1.10 – Détermination pratique de γ

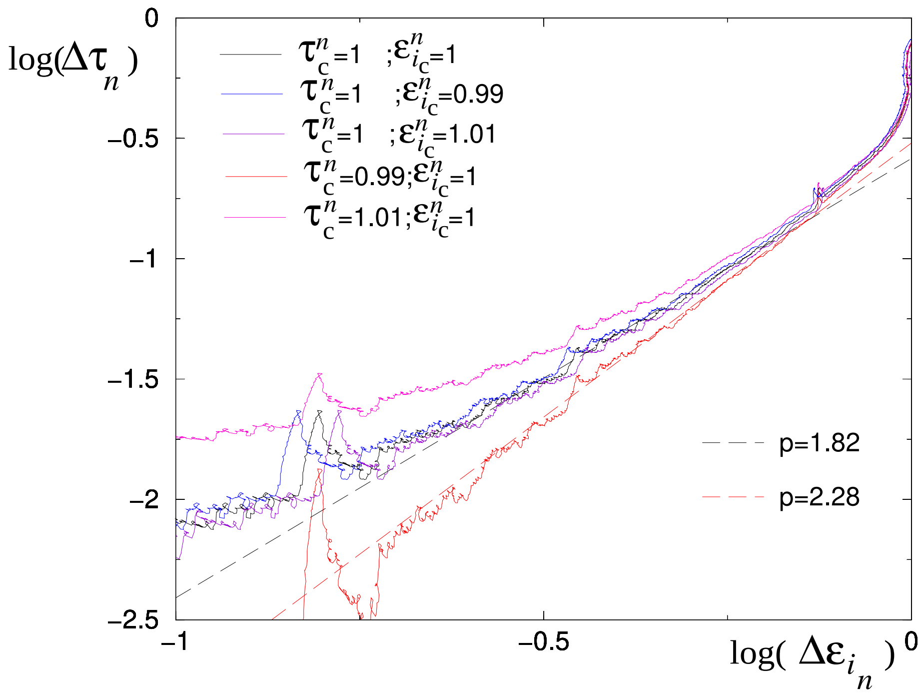


FIG. 1.11 – Évaluation de l'erreur.

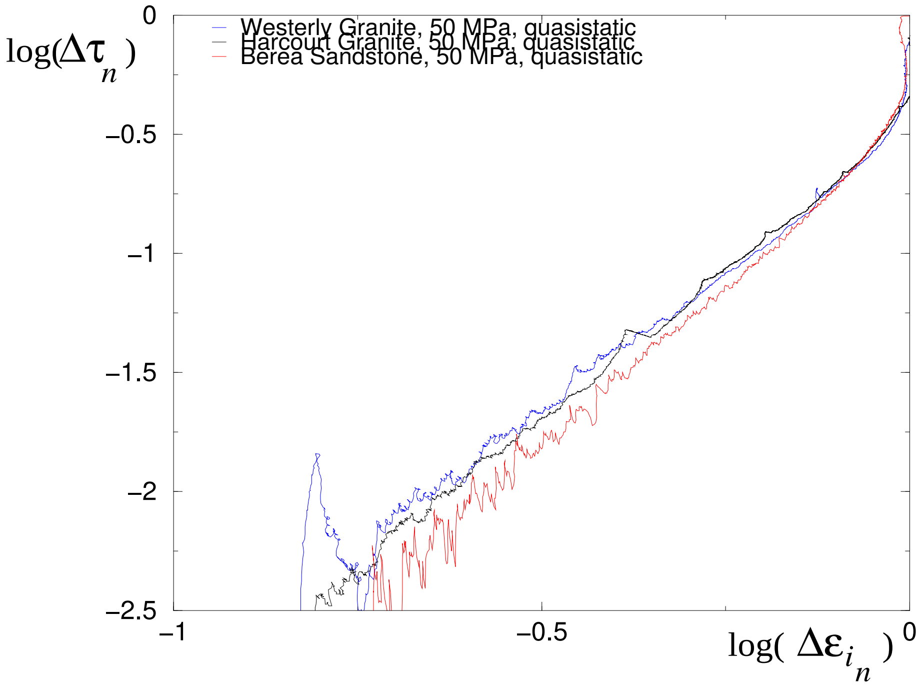


FIG. 1.12 – Inversion des données brutes de D. Lockner

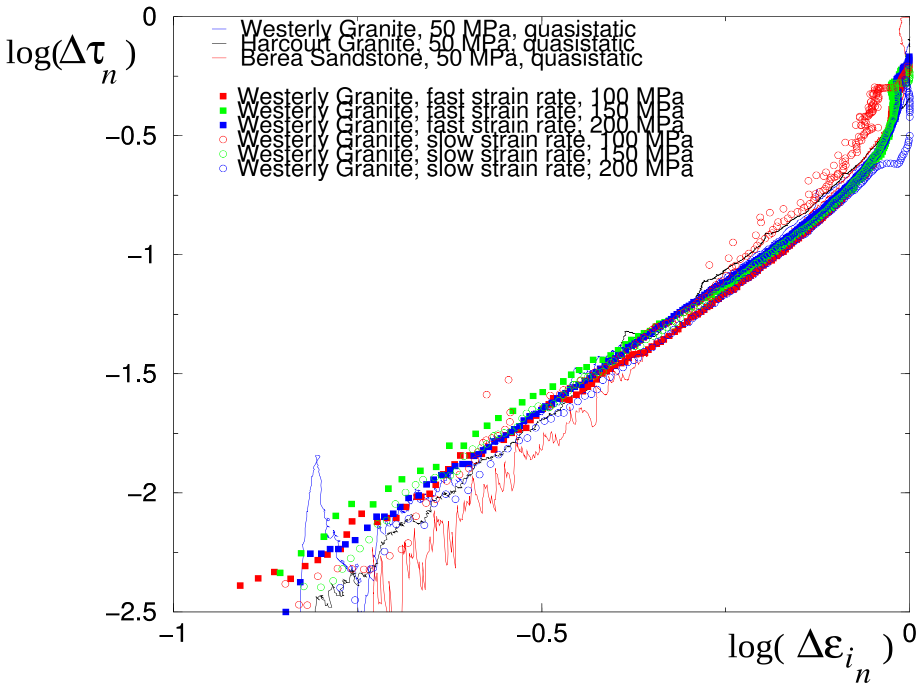


FIG. 1.13 – Ensemble des données expérimentales de D. Lockner

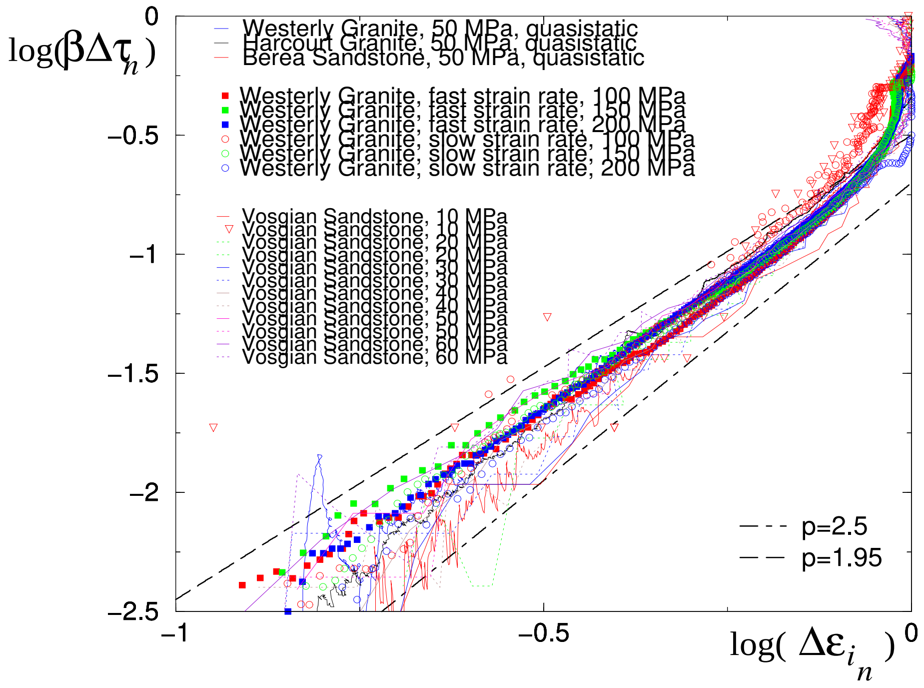


FIG. 1.14 – Ensemble des données de D. Lockner et P.Bésuelle après inversion de τ_c

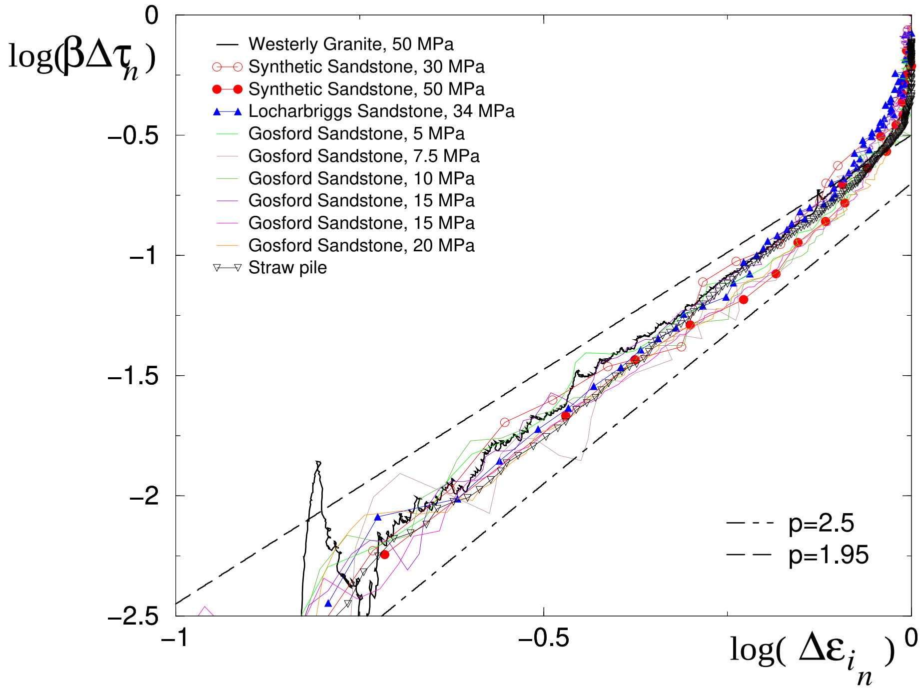


FIG. 1.15 – Ensemble des données additionnelles après inversion de τ_c
Les expériences sur le grès de Gosford, biaxiales, et la compression des pailles, correspondent plutôt à des systèmes de nature bidimensionnelles.

fluctuations. La pente de ces courbes est également assez fixe d'une roche et condition à l'autre, ce qui correspond à l'universalité que l'on recherchait.

Dans la dernière figure enfin, les tests sur le grès de Gosford sont biaxiaux, et on peut donc supposer que les microfractures développées à l'intérieur ont des normales préférablement orientées dans un plan (porté par les directions principales de contrainte correspondant à la plus grande et la plus petite des trois valeurs propres). La contrainte macroscopique n'y est pas axisymétrique contrairement aux tests triaxiaux, mais présente de simples symétries de parité[11] . La compression du réseau de paille enfin, présente pratiquement une symétrie de translation suivant l'axe longitudinal des pailles (aux effets de bord près). Ces deux expériences impliquent soit des objets bidimensionnels, soit même pratiquement un milieu bidimensionnel. On constate ici que ces caractéristiques ne modifient pas de façon visible l'exposant critique que l'on cherche à déterminer. Cette observation peut encourager à espérer que les processus, dans des milieux bi- ou tri-dimensionnels, appartiennent à la même classe d'universalité – bien qu'il ne s'agisse bien sûr aucunement d'une preuve –. Si c'est effectivement le cas, des résultats obtenus sur des modèles bidimensionnels pourront avoir certaines caractéristiques également valables pour des milieux tridimensionnels.

On peut estimer l'erreur sur le paramètre γ de la façon suivante : faisant varier τ_c dans une gamme de 0.2% autour de la valeur déterminée pour chaque courbe (on a vu qu'on avait une précision légèrement supérieure), et relevant la pente correspondante pour chaque courbe, on obtient que celle-ci varie entre les bornes $1.95 \leq p \leq 2.5$, ce qui correspond à

$$0.47 \leq \gamma \leq 0.6 \tag{1.4}$$

1.1.7 Conclusions

On a mis en évidence la similitude des données déformation inélastique / contrainte axiales aux alentours de la contrainte pic, cohérentes sur une grande extension avec un comportement en loi de puissance $\left.\frac{\partial \varepsilon_{ax}}{\partial \tau_{ax}}\right|_{\tau_{rad}} \underset{\tau_{ax} \to \tau_{ax_c}^-}{\sim} \alpha \left|\tau_{ax_c} - \tau_{ax}\right|^{-\gamma}$, avec $0.47 \leq \gamma \leq 0.6$. Avec ces marges d'erreur, l'exposant γ ne peut pas être distingué entre de nombreuses roches, aux processus microscopiques de fracturation différents, et diverses conditions expérimentales de charge (pression de confinement et conditions de contrôle).

Il importe toutefois de remarquer que, malheureusement, l'exposant déterminé ne se distingue pas de 0.5, qui correspond à une courbe quadratique $\tau_{pic} - \tau \underset{\tau \sim \tau_{pic}}{\sim} (\varepsilon_{i_{pic}} - \varepsilon_i)^2$ aux alentours de la contrainte pic : or le fait qu'une courbe considérée comme dérivable deux fois, soit quadratique au voisinage d'un maximum, est une simple tautologie.

Les résultats exposés ne s'expliquent toutefois pas uniquement par cette trivialité, dans la mesure où on a établi que ce comportement semble valable sur près de 90% de l'extension des valeurs de ε_i, et non sur un petit voisinage[12] : a contrario, cette analyse faite sur la partie post-pic

[11] si on note $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ les trois directions principales de contrainte, ce problème est conservé dans toute symétrie par rapport à un des trois plans portés par une paire de ces vecteurs.

[12] Pour vérifier la validité du protocole utilisé, on peut le tester sur diverses fonctions $\tau(\varepsilon)$ artificiellement générées, présentant simplement un maximum : appliquant les mêmes transformations, et en contraignant de même de façon forte τ_c à être dans un voisinage de 1% de τ_{pic} , on aboutit à des représentations logarithmiques aux portions linéaires nettement plus réduites, où la pente deux n'est pas particulièrement privilégiée.

montrerait en général un domaine de validité très réduit de cette expansion (de 1 à quelques % de $\varepsilon_{i_{pic}}$), où de surcroît les déviations dues aux irrégularités de la courbe sont de même amplitude que le "signal" du modèle.

De plus, rien ne permet de supposer a priori le caractère deux fois dérivable de la courbe "lissée" qu'on a considérée au maximum : Par exemple, les expériences uniaxiales, différentes de celles étudiées ici, présentent plutôt un maximum avec une dérivée à gauche finie (positive non nulle) au pic, et un rebroussement en ce point (voir par exemple Byerlee [1968] , ou les données uniaxiales de la figure 1.6). Ceci correspond plutôt à $\tau_{pic} - \tau \underset{\tau \sim \tau_{pic}^-}{\sim} (\varepsilon_{i_{pic}} - \varepsilon_i)^1$. Le fait que quand on a pression de confinement, on observe au contraire que la dérivée semble s'annuler continûment aux alentours du pic (aux petites irrégularités près) permet :

- d'une part, de voir que le processus conduisant à la fracturation macroscopique est de nature différente . Ceci est confirmé par le fait que la structure des bandes de localisation est différente dans les deux cas : "axial splitting" (bande contenant la direction de contrainte principale) sans pression de confinement, bandes de cisaillement (inclinée sur l'axe de contrainte principale) avec confinement.
- d'autre part, en terme de typologie mathématique, d'affirmer que la fonction $\varepsilon(\tau)$ est $\mathcal{C}^1$ (de dérivée naturellement nulle au maximum), et non deux fois dérivable ($\mathcal{D}^2$). Un comportement de type $\tau_{pic} - \tau \underset{\tau \sim \tau_{pic}}{\sim} (\varepsilon_{i_{pic}} - \varepsilon_i)^\delta$, avec $\delta > 1$ mais $\delta \neq 2$, serait tout aussi possible que $\delta = 2$, et ne s'en distinguerait pas énormément en apparence.

Enfin, pour vérifier la validité du protocole utilisé, on peut le tester sur diverses fonctions $\tau(\varepsilon)$ artificiellement générées, présentant simplement un maximum : appliquant les mêmes transformations, et en contraignant de même de façon forte τ_c à être dans un voisinage de 1%de τ_{pic} , on aboutit à des représentations logarithmiques aux portions linéaires nettement plus réduites, où la pente deux n'est pas particulièrement privilégiée.

Pour conclure sur ces remarques de non-trivialité du résultat, même en supposant a priori que la dépendance $\varepsilon(\tau_{\text{axial}})$ est C^2 et que l'on doit avoir une contrainte pic, ceci n'expliquerait la dépendance quadratique observée que sur un voisinage très restreint (certainement quelques %). La présence d'un maximum dans la contrainte correspond à l'apparition d'une instabilité de la variation de la déformation à l'intérieur de la roche. On argumentera plus loin, et il est observé expérimentalement, que lorsque la roche subit une pression de confinement, une telle instabilité nécessite la présence antérieure d'une bande où s'est concentrée la porosité de fractures – en d'autres termes, la localisation macroscopique précède la contrainte pic. La façon dont cette bande se forme est indépendante du fait qu'elle amène postérieurement à une instabilité. On développera en partie II une théorie décrivant la formation de cette porosité de fractures, indépendante de l'idée d'existence a priori d'une contrainte pic. On verra qu'elle décrit la formation de cette bande comme une transition de phase, et qu'elle prédit la loi quadratique observée, en tant que régime critique de $\left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau_{ax}}\right|_{\tau_{rad}} (\tau_{ax})$. Cette théorie explique donc l'existence de cette loi sur une telle gamme de la déformation inélastique.

Enfin, les données expérimentales analysées ici ne correspondent pas à une étude directe du phénomène de localisation à l'intérieur de la roche, mais à l'étude de grandeurs macroscopiques supposées sensibles au développement de ce processus. On doit donc considérer que ces données de déformation / contrainte ne démontrent pas que le processus de fracturation est un phénomène critique, mais plutôt que si on l'envisage comme tel, il est cohérent que ces processus pour des matériaux et conditions différentes, tant qu'on reste en compression cisaillante avec pression de confinement en régime quasi-fragile, appartiennent à la même classe d'universalité.

De façon plus surprenante, ces lois semblent présenter non seulement une universalité attendue de l'exposant, mais également des préfacteurs multiplicatifs très proches pour les expériences faites sur une même machine. Ce préfacteur, pouvant être relié à la valeur de la contrainte à laquelle les processus de microfracturation commencent de façon significative (où apparaît la déformation inélastique), par rapport à celle de la contrainte pic, pourrait être relié aux dimensions et/ou facteur de forme des échantillons utilisés. Ceci demande à être confirmé par plus de données.

1.2 Lien avec d'autres travaux expérimentaux et perspectives

1.2.1 Lien avec d'autres travaux : divergence de la longueur de corrélation dans la compression d'une couche de sable

Un autre type de données expérimentales accessible, au prix d'un travail très important d'enregistrement et analyse, est le champ de déformation à la surface des échantillons en cours de déformation. Ce type d'expérience a été réalisé par E. Bonnet et P. Davy sur un système bidimensionnel de 50cm x 1m, constitué d'une couche de sable surmontant une fine couche de silicone. Ce système était déformé à taux de déformation constant lent, en maintenant les bords latéraux fixes. En enregistrant de façon incrémentale l'évolution d'une grille de pas de 2cm dessinée à la surface, le champ de déformation dans le plan a été reconstitué au cours de l'expérience. On trouvera des descriptions détaillées par Davy et al. [1995] ou Bonnet [1997] .

Une mesure intéressante a été faite récemment sur ces données : en prenant la déformation locale évaluée à une échelle l donnée, le second invariant du tenseur de déformation, $I_l = \sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+4\varepsilon_{12}^2}$, mesure de l'amplitude locale de cisaillement, a été déterminé en chaque point, puis moyenné sur l'ensemble de la surface, pour obtenir $\langle I_l\rangle(p)$, où p désigne le paramètre de contrôle du système, à savoir la déformation axiale macroscopique. Le champ de déplacement étant une grandeur vectorielle et non scalaire, cette grandeur n'est pas indépendante de l'échelle d'évaluation l du champ de déformation : aux échelles où on a des corrélations statistiques importantes dans le champ de déformation, on a $\langle I_l\rangle > I_{macroscopique}$, ce qui provient du fait que des déplacements correspondant à des cisaillements orientés suivant des axes principaux différents ne s'ajoutent pas simplement les uns aux autres lorsqu'on évalue le cisaillement à une échelle supérieure. D'après Bonnet et al. (en préparation) , il a été établi que pour des tailles d'évaluation petites, on a une loi d'échelle

$$< I_l > \sim \alpha l^{-\Psi} \ , \text{ avec } \Psi \simeq 0.1 \tag{1.5}$$

Cette loi s'étend jusqu'à une échelle supérieure ξ, au-delà de laquelle $< I_l > \simeq I_{macroscopique}$, indiquant que les orientations des cisaillements locaux sont statistiquement décorrélés pour des points distants de plus de ξ : cette échelle de saturation est donc une évaluation dérivée de la longueur de corrélation.

L'évolution de cette échelle de coupure en fonction du paramètre de contrôle macroscopique, la déformation axiale, est très intéressante : elle croît jusqu'à atteindre précisément les dimensions macroscopiques du système, au moment du seuil de localisation macroscopique, puis décroît au-delà. Désignant par p_c la valeur de la déformation macroscopique au seuil de localisation, il a été établi que cette évolution correspond à une loi de puissance,

$$\xi \simeq \alpha \left| p_c - p \right|^{-\nu} \quad , \text{ avec } \nu \simeq 0.33 \tag{1.6}$$

et ce en-deçà et au-delà du seuil de localisation (avec un préfacteur multiplicatif α différent dans les deux domaines). Cette divergence sature naturellement à un certain maximum vers p_c : il a été établi que maximum correspond exactement aux dimensions du système, ce qui s'interprète naturellement comme un cross-over de taille finie.

Ce résultat peut être vu comme majeur, car il correspond exactement à l'image d'un phénomène critique : cela prouve que la nature du processus de localisation en compression est radicalement différent de ceux simulés par réseaux de fusibles, analogues d'une fracturation en extension. En effet, il a été établi par Delaplace et al. [1996] , que pour ces systèmes que la longueur de corrélation croît jusqu'à une valeur finie, sans divergence, après quoi on a une localisation macroscopique. Ceci correspond plutôt à une image de transition de premier ordre, et non du second.

Sur cet exemple, certains des exposants critiques sont de plus déterminés expérimentalement, ce qui est assez délicat et apporte d'importantes contraintes pour l'établissement d'une théorie.

Enfin, en s'intéressant aux corrélations statistiques du champ à l'intérieur de l'échantillon, ces résultats prouvent qu'il est raisonnable d'envisager les divergences que l'on a étudié dans les données déformation / contrainte avec notre vocabulaire, et que le regroupement des données que nous avons observé n'est pas un simple artefact correspondant à un développement de Taylor au voisinage d'un maximum.

1.2.2 Perspectives expérimentales

1.2.2.1 Détermination de la contrainte pic et de la déformation correspondante par monitoring

Le fait que, dans les données déformation / contrainte, le comportement en loi de puissance (1.3) observé s'étende jusque bien avant la contrainte pic, pratiquement jusque vers la sortie du régime affine, suggère un usage prédictif qui pourrait être fait de ce genre de loi :

À la suite de nombreuses expériences de calibration, la contrainte maximum supportable par un matériau bien connu est d'ordinaire assez précisément déterminée, avec une dispersion typique d'un essai à l'autre : ceci est généralement décrit par une distribution de Weibull. Toutefois, dans certains problèmes de génie civil, pour des matériaux déjà en place à la géométrie assez simple (piliers de mine ?), il arrive certainement qu'on ne connaisse pas la nature exacte du matériau, ou que le paramètre de dispersion naturelle de la loi de Weibull correspondante soit important, et que l'on ait besoin d'aller au-delà de cette connaissance. Il serait alors utile d'avoir une estimation prédictive de la contrainte maximum et déformation correspondante qui pourra être atteinte, sans devoir utiliser de table générique ou étudier la modification de la microstructure, mais en utilisant uniquement des mesures de déformation / contrainte macroscopiques qui auraient étées effectuées jusqu'au point actuel de l'histoire de la déformation en cours.

Il serait intéressant, avec les données disponibles, de traiter comme un problème inverse l'établissement des trois paramètres τ_c, ε_c et α', en considérant uniquement une partie initiale des données, et en fixant par exemple $\gamma = 0.5$. Il importe de voir comment évolue l'erreur dans l'estimation de τ_c et ε_c en fonction de l'avancement du processus de fracturation, et surtout de voir si cette erreur devient inférieure à l'amplitude de la dispersion dans les lois de Weibull, à un stade suffisamment peu avancé de l'histoire. Si c'est le cas, ces lois pourraient être d'une utilité pratique et directe, indépendamment de leur intérêt de compréhension fondamentale.

Ce problème n'a pas été traité ici, mais le test mériterait d'être fait.

1.2.2.2 Intérêt d'études couplées analyse statistique de déformation incrémentale à la surface d'échantillons / déformation - contrainte

La loi de divergence de la longueur d'autocorrélation (1.6), déterminée pour un matériau granulaire, a d'importantes implications sur la façon d'envisager l'apparition des bandes de cisaillement d'une façon alternative à la modélisation classique en mécanique[13]. Il serait très intéressant de voir si on les retrouve dans des roches en compression, et si elles sont systématiquement présentes, de tester les différents exposants ν ainsi déterminés : Ceci permettrait sur ce type d'analyse plus détaillée du processus de tester l'appartenance à une même classe d'universalité.

Anticipant sur les résultats de la partie théorique de ce travail, on verra que s'il est formellement possible de tenter de prédire la divergence de la longueur d'autocorrélation, les approximations que l'on fera ne permettent pas encore de mener ceci à bout. Par contre, au moment de la localisation macroscopique, l'apparition des bandes de cisaillement ne se traduit pas seulement par une divergence de cette longueur de corrélation, mais également par l'émergence d'une anisotropie macroscopique du matériau. On verra qu'on peut également en principe relier un exposant critique à cette grandeur. Ceci doit également pouvoir se retrouver dans les données expérimentales de déformation incrémentale, mais il faudrait pour cela adopter un protocole différent dans la construction des "boîtes" servant à évaluer la déformation à une échelle l donnée – si la résolution du champ de déplacement permet un échantillonage suffisant – : plutôt que de considérer des boîtes de forme fixée, circulaire ou carrée, de dimension l, on pourrait envisager de généraliser ceci à des ellipses ou rectangles de dimensions l_1 et l_2, avec arbitrairement $l_1 < l_2$, l_1 étant par exemple orienté suivant l'une ou l'autre des directions majoritaires des futures bandes de cisaillement macroscopiques. Il serait alors intéressant d'analyser la quantité $< I_{l_1,l_2} >$ainsi construite, pour tester si l'on y trouve également des lois d'échelles, généralisation de (1.5), de type

$$< I_{l_1,l_2} >\sim \alpha l_1^{-\Psi}(l_2/l_1)^{-\zeta}$$

Si une telle loi peut être mise en évidence, elle s'étendra elle aussi certainement sur un domaine fini du plan (l_1, l_2), dont on peut étudier l'extension en fonction du paramètre de contrôle macroscopique. Désignant par (ξ_1, ξ_2) les cut-off typiques de la loi ci-dessus dans ce plan, on peut espérer retrouver la loi (1.6) pour ξ_1, et une autre loi pour la forme du domaine de validité : si cette forme devient de plus en plus piquée, on s'attendra à $\xi_2/\xi_1 \alpha\, |p_c - p|^{-\kappa}$. Toutes ces informations expérimentales permettraient de caractériser géométriquement l'apparition de l'anisotropie du matériau.

On peut également envisager de chercher à corréler l'évolution de grandeurs macroscopiques divergentes, et des grandeurs venant de l'analyse des moments de la distribution statistique de la

[13]bifurcation des solutions d'équations aux dérivées partielles formulées à l'aide de la mécanique des milieux continus, avec des équations constitutives (élastoplastiques ou plus compliquées) pour modéliser le comportement du matériau : Rudnicki et Rice [1975] .

déformation mésoscopique. Par exemple, lorsque contrainte, déformation macroscopique et carte de déformation incrémentale sont enregistrés pour une même expérience, en reliant l'évolution de la longueur ξ déterminée, et la pente des courbes de charge sur laquelle on s'est focalisé dans ce travail. Cela permettrait notamment d'avoir un critère basé sur le champ microscopique pour déterminer précisément le seuil de localisation, et voir précisément l'écart entre la contrainte correspondante et la contrainte pic.

Concernant la mise en œuvre de ces expériences, les cartes de déformation incrémentales au cours de la déformation sont généralement assez lourdes à obtenir, mais elles sont disponibles notamment dans de nombreuses études faites sur les bétons dans le cadre du *GRECO Géomatériaux*, et il serait intéressant d'effectuer le même type d'analyse statistique sur ces données -lorsqu'elles présentent une résolution suffisante pour permettre un bon échantillonnage. Il est toutefois possible que les effets de bord dominent et empêchent de voir ce type de divergence de ξ. Les données obtenues dans des expériences biaxiales avec confinement, avec des échantillons d'épaisseur très faible en comparaison des autres dimensions, avec des machines de test du type décrit par Desrues [1995] , sont certainement moins sensibles à ce problème : les expériences qui y sont effectuées sur des sables et des roches tendres pourraient être ainsi analysées.

Enfin, pour d'autres matériaux, et des problèmes en extension, des cartes de déformation très précises sont disponibles pour des métaux, par exemple des échantillons centimétriques de cuivre étudiés par microscopie électronique à balayage (Hoc et al.[2000]). Il serait là aussi intéressant d'effectuer ce type d'analyse statistique, pour vérifier expérimentalement la nature de la localisation (non-divergence de ξ en tension, d'après Delaplace & al.[1996]).

Deuxième partie

Considérations théoriques

Chapitre 2

Fondement d'une physique statistique pour une population de microfractures

2.1 Aspect statistique du problème : Lien entre les grandeurs mesurables et un espace des microétats.

On s'intéresse ici aux propriétés mécaniques de roches à une échelle suffisamment grande, i.e. à des milieux fortement hétérogènes en leurs constituants (milieux *désordonnés*). Ces milieux sont en effet constitués de grains aux propriétés mécaniques variées, et de vides ou de liants de consolidations divers entre ces grains. On choisit toutefois de se restreindre à des milieux relativement homogènes à l'échelle de l'expérience : on suppose qu'il existe une taille caractéristique au-dessus de laquelle on peut moyenner ces propriétés, sans plus avoir de gradient macroscopique de ces moyennes, mais uniquement des fluctuations d'un volume de cette taille à un autre. Autrement dit, on exclut un *"grand désordre"*, c.à.d. qu'on n'a pas d'hétérogénéités macroscopiques préexistantes comme une faille ou une inclusion de la taille de l'objet étudié. En termes géologiques, on s'intéresse à la formation d'une hétérogénéité macroscopique à partir d'hétérogénéités microscopiques, et non à la dynamique des failles et aux tremblements de terre reliés.

2.1.1 Variables macroscopiques

Dans la mesure où on s'intéresse à des systèmes à taux de variation extrêmement lent, où le système peut relaxer en permanence vers des états d'équilibre, le temps n'intervient pas dans ces propriétés si ce n'est pour orienter les variations (on n'a pas de viscosité). Les propriétés mécaniques que l'on recherche consistent en relations entre des observables macroscopiques et leurs variations, déformation ε, contrainte τ, et densité d'énergie totale E, au cours d'une histoire de déformation dépendant du contrôle macroscopique imposé.

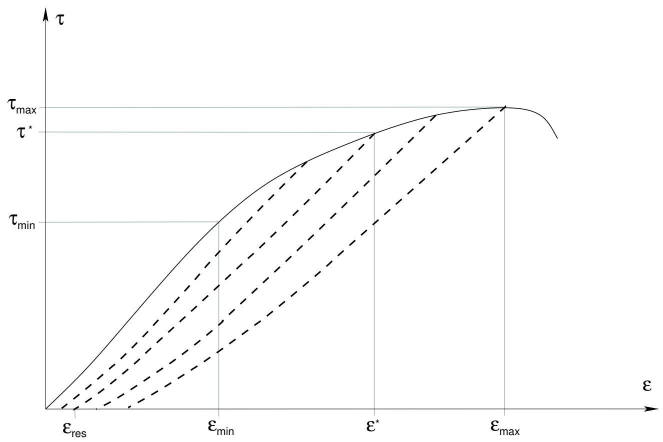


FIG. 2.1 – Donnée typique de laboratoire : courbe de charge/décharges en contrainte axiale / déformation axiale
On utilise ici la convention ordinaire d'orienter négativement ces deux axes.

2.1.1.1 Restrictions sur les chemins de charge considérés et modélisation du comportement

On veut pouvoir modéliser des courbes de charge lors de compressions triaxiales comme celles analysées au chapitre 1.1, ainsi que les chemins de décharge correspondant : voir figure 2.1. On n'a porté sur cette figure que la composante axiale de la déformation, mais les composantes radiales sont également supposées connues. Par la suite, on désignera par τ le tenseur de contrainte complet, ε le tenseur de déformation, et tout produit entre ces grandeurs sera interprété comme un produit scalaire (produit " :"), sauf autre précision.

Ces expériences correspondent à exercer sur un échantillon de roche, des conditions aux frontières uniformes en contrainte, que l'on fait évoluer graduellement de la façon suivante : Partant d'une condition initiale isotrope $\tau_{\text{initial}} = -p_{\text{confinement}}.\text{Id}$, on augmente régulièrement la contrainte axiale (en valeur absolue), sans modifier les directions principales de contrainte, ni ses valeurs propres correspondant aux directions radiales, jusqu'à une valeur où $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = (\tau^*, -p_{\text{confinement}}, -p_{\text{confinement}})$. On peut ensuite éventuellement décharger l'échantillon jusqu'à une autre valeur de τ_1.

2.1.1.1.1 Simplifications sur le comportement observé. Pour définir les variables macroscopiques qui nous intéressent, on modélise la réponse typique d'une roche à ce genre de sollicitation, telle qu'on veut être capable de l'expliquer théoriquement : en figure 2.1, la courbe en traits pleins noirs, (ε^*, τ^*), représente la courbe de charge, réponse à un chargement monotone. Tant qu'on reste en-deçà d'un certain seuil $\tau_{\min}$, la roche réagit de façon essentiellement élastique, sans modification de la structure des défauts, et lors de toute décharge/recharge, on suivra la même courbe. Les déformations axiale et radiales sont respectivement négative et positives. Audelà de ce seuil (si $|\tau^*| > |\tau_{\min}|$), des microfracturations ont lieu dans la roche, et on a création et évolution de microfractures de façon irréversible : il en résulte, si l'on diminue la contrainte, que la dépendance (ε, τ) sera différente à la décharge, suivant une courbe en pointillé. En revenant jusqu'à l'état initial de contrainte, on aura une déformation résiduelle non nulle (également négative pour la déformation axiale, positive pour la déformation radiale, la déformation volumique totale étant positive, ce qui correspond au comportement dilatant résultant de la création de fractures). Nous supposons que la déformation suivant ces courbes est totalement réversible, c'est à dire que l'on n'a pas création de nouveaux microfractures lors de cycles de décharge / recharge jusqu'à la contrainte maximum τ^* précedemment atteinte. En pratique, on a une légère hystérésis pendant quelques cycles avant d'atteindre un cycle limite, mais on ignore ce fait ici. Cette simplification revient à dire que l'on ne cherchera pas à modéliser la fracturation par fatigue, mais que l'on cherche simplement à conserver le fait capital que la pente le long d'une courbe de charge est différente suivant que l'on augmente ou diminue la charge.

En d'autres termes, on demande que le comportement macroscopique de la roche corresponde à une loi élastoplastique avec écrouissage, et on ignore les effets de viscosité.

2.1.1.1.2 Nombre de degrés de libertés pour les paramètres de contrôle macroscopiques On a donc deux degrés de liberté pour nos variables macroscopiques : un pour la contrainte maximum précedemment atteinte, τ^*, un autre pour la contrainte actuelle, τ_1.

Le premier degré de liberté est en fait vectoriel : en spécifiant que l'on a un chargement triaxial, on a spécifié une information sur la direction de la variation de (τ_1, τ_2, τ_3) , le vecteur formé à partir des valeurs propres de contrainte. On veut pouvoir en fait traiter un cas un peu plus général de chemin de déformation : l'important pour nous est simplement d'exclure les chemins totalement multiaxiaux, mais de nous restreindre à des chemins du type suivant :

Partant d'une condition initiale homogène τ_{initial}, on doit pouvoir modifier la contrainte suivant un chemin linéaire, sans modifier les directions principales de contrainte (on s'intéresse à des compressions cisaillantes, et non à l'effet de faire tourner les contraintes appliquées) : portant le vecteur formé par les valeurs propres du tenseur de contrainte dans un espace à D dimensions (D étant la dimensionnalité de l'espace réel), il existe un certain vecteur unitaire $\hat{d}$ caractéristique du chargement tel que la variation $(\tau_i)_{i=1,..,D} - (\tau_{\text{initial}_i})_{i=1,..,D}$ soit colinéaire et de même sens que $\hat{d}$. Ce vecteur unitaire est de plus de composantes toutes négatives (on s'intéresse à des états restant compressifs selon toutes les directions)[1]. L'ensemble des chemins de charge considéré peut alors être décrit par des déplacements dans cet espace le long d'une demi-droite d'origine $(\tau_{\text{initial}_i})_{i=1,..,D}$ et de direction et orientation définis par $\hat{d}$. Nos hypothèses sur la réversibilité des cycles de charge/décharge reviennent à exiger de plus que les propriétés mécaniques du système peuvent être entièrement connues par la donnée conjointe de deux abscisses curvilignes le long de cette demi-droite, l'une correspondant à la donnée de τ^* la charge maximum atteinte, la deuxième à τ_{actuel}. En d'autres termes, on suppose que le comportement macroscopique du système sera décrit par une loi de élastoplastique avec écrouissage.

Ceci montre que l'on a $D+1$ degrés de libertés scalaires pour nos variables macroscopiques : $D-1$ pour la direction $\hat{d}$, plus deux pour les deux abscisses curvilignes.[2]

[1] Les chemins de compression triaxiale classique, par exemple, correspondent à $\hat{d} = (-1, 0, 0)$.

[2] On pourrait imaginer d'englober également des chemins de charge un peu différents, correspondant à des conditions aux frontières mixtes : par exemple, un déplacement nul sur les faces radiales, plus la donnée de la direction axiale de la contrainte sur les faces axiales. Ceci correspondrait au même nombre de degrés de liberté.

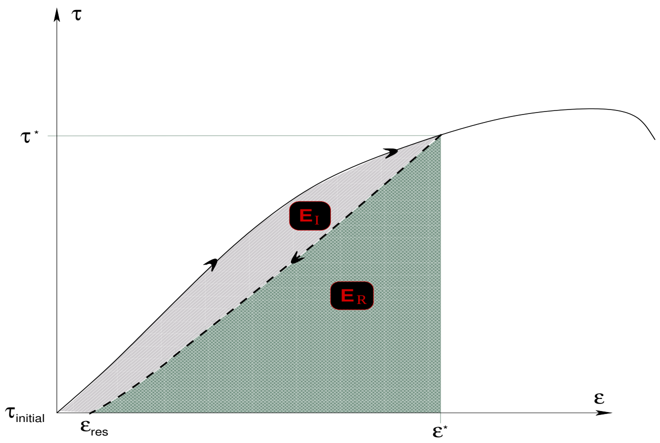


FIG. 2.2 – Partition de l'énergie entre réversible et irréversible sur une courbe de charge.

2.1.1.2 Partition de l'énergie

On peut mesurer expérimentalement la densité d'énergie totale dans l'échantillon, obtenue directement comme l'intégrale du travail effectué par l'opérateur extérieur. On se restreint à la partie précédant la contrainte pic, qui nous intéresse ici. La courbe de charge peut alors être décrite par une dépendance $\varepsilon^*(\tau)$ – on ignore les petites irrégularités–.

– Si on est à contrainte τ^* sur la courbe de charge,

$$U(\tau^*) = \int_{\tau_{\text{initial}}}^{\tau^*} \tau \frac{d\varepsilon^*}{d\tau} d\tau \tag{2.1}$$

– Si on a atteint une contrainte maximum τ^*, puis que l'on a déchargé jusqu'à une contrainte donnée τ_{actuel}, suivant une courbe de décharge $\varepsilon^d(\tau, \tau^*)$ –représentée en pointillés dans la figure 2.1–, le premier indice portant sur la contrainte actuelle le long de la courbe en pointillés, le deuxième indiçant de quelle courbe de décharge il s'agit, i.e. la contrainte maximum atteinte, on a

$$U(\tau_{\text{actuel}}, \tau^*) = \int_{\tau_{\text{initial}}}^{\tau^*} \tau \frac{d\varepsilon^*}{d\tau} d\tau + \int_{\tau^*}^{\tau_{\text{actuel}}} \tau \left.\frac{\partial \varepsilon^d}{\partial \tau}\right|_{\tau^*} (\tau, \tau^*) d\tau \tag{2.2}$$

Le long de la courbe de charge, à tout stade de la déformation τ^* ayant dépassé le seuil de création de microfractures $\tau_{\min}$, le fait que la dépendance en décharge soit différente de $\varepsilon^*(\tau)$ implique que l'on ait une énergie irréversible stockée dans la roche : on a une partition de l'énergie totale entre réversible et irréversible,

$$U(\tau^*) = E_R(\tau^*) + E_I(\tau^*) \tag{2.3}$$

où l'énergie réversible E_R correspond à l'énergie que l'on peut récupérer en déchargeant jusqu'à l'état de contrainte initial,

$$E_R(\tau^*) = \int_{\tau_{\text{initial}}}^{\tau^*} \tau \left.\frac{\partial \varepsilon^d}{\partial \tau}\right|_{\tau^*} (\tau, \tau^*) d\tau \tag{2.4}$$

et où l'énergie irréversible est naturellement

$$E_I(\tau^*) = U(\tau_{\text{initial}}, \tau^*) = U(\tau^*) - E_I(\tau^*) \tag{2.5}$$

La figure 2.2 illustre ceci.

La nature de cette énergie irréversible, au niveau microscopique, correspond en fait à des phénomènes très variés, décrits de façon assez détaillée par Lawn [1993] : elle englobe certainement

- des contributions de pure énergie de surface pour ouvrir les nouvelles microfractures (définie initialement par Griffith [1920]),
- une partie dissipée par effet Joule lors de frictions entre les lèvres des microfractures,
- une partie dissipée durant des déformations plastiques au voisinage immédiat des extrémités de microfractures (Orowan [1944])
- une partie émise sous forme d'ondes sismiques, puis transmises et dissipées dans le milieu ambiant (pas plus de quelques pourcents, en général)
- et enfin éventuellement une énergie élastique bloquée, si certaines inclusions, lors de transformations de phase, ont acquis des "déformations libres" incompatibles entre elles (cf par exemple François et al [1991]).

Ce qui nous intéresse principalement ici est qu'elle est entièrement associée à la création et évolution des microfractures, et que l'on suppose qu'elle n'évolue pas tant qu'on ne réactive pas ce processus d'évolution des défauts en dépassant la charge maximum précedemment atteinte.

2.1.2 Relation entre observables macroscopiques et espace des microétats

2.1.2.1 Notion d'indépendance statistique entre volumes mésoscopiques

Les variables macroscopiques qui nous intéressent, déformation ε, contrainte τ, et densité d'énergie totale E, correspondent toutes à des moyennes en volume des champs microscopiques équivalents.

Si on s'intéresse aux valeurs de ces moyennes volumiques sur des sous-ensembles (parties restreintes de la roche), on obtiendra la valeur macroscopique à un terme de fluctuations près. Tant qu'on n'a pas atteint la formation d'une hétérogénéité macroscopique, au-dessus d'une certaine échelle de sous-ensemble considérée, ces fluctuations deviennent statistiquement indépendantes les unes des autres, c'est à dire que l'on ne discerne pas de corrélations systématiques dans ces moyennes de sous-ensemble même lorsqu'ils sont voisins. Cette échelle limite correspond à la notion de Volume Élémentaire Représentatif en mécanique, dont la taille sera désignée comme longueur d'autocorrélation ξ en utilisant un vocabulaire de physique statistique.

Expérimentalement, ceci est mis en évidence par exemple par Bonnet et al. (in prep) (cf chapitre 1.2.1). Théoriquement, ceci se comprend bien par un phénomène de compétition : les défauts préexistants créent des concentrations de contrainte à leurs extrémités, qui en champ lointain tombent en $(\frac{l}{r})^D$, l étant une dimension caractéristique du défaut, r la distance à ce défaut, et D la dimensionnalité de l'espace. Pour modéliser l'évolution de chaque défaut, on peut supposer qu'ils vont évoluer suivant un critère basé sur la contrainte locale, avec un seuil donné pour chaque défaut intervenant dans ce critère, ces seuils étant distribués selon une certaine loi de probabilité, où les valeurs prises sur chaque défaut sont considérées comme indépendantes les unes des autres. On a alors une compétition entre la tendance de chaque défaut à “activer” ses voisins par cette accumulation de contrainte, et la tendance à fracturer les défauts les plus faibles répartis de façon homogène dans le milieu (cf Roux et Hansen [1990]).

2.1.2.2 Hypothèse ergodique

Ne pouvant pas connaître l'état précis de l'ensemble des défauts à l'intérieur de l'ensemble de la roche considérée, il est impossible d'avoir une information déterministe sur le système : le problème que l'on se pose est par essence de nature statistique.

L'indépendance statistique observée pour des sous-ensembles d'une taille donnée l, supérieure à ξ, nous amène plutôt à formuler le problème de cette façon : divisant notre système en sous-ensembles mésoscopiques de cette taille, les variables macroscopiques, moyennes en volume, sont ds par la moyenne des variables correspondantes évaluées sur les blocs mésoscopiques.

Supposons que l'on puisse obtenir, connaissant la valeur des paramètres de contrôle macroscopiques, d'une part la probabilité p_j d'observer une configuration possible de microfractures désignée par un indice j dans un volume mésoscopique, et d'autre part que l'on puisse associer à chaque microétat j et valeur du paramètre de contrôle macroscopique, les valeurs E_j, ε_j et τ_j .

L'indépendance statistique entre systèmes mésoscopiques nous permettra alors de formuler l'hypothèse ergodique suivante[3] :

Les moyennes d'ensemble effectuées avec cette distribution de probabilité coïncident avec les moyennes en volume, donc avec les valeurs macroscopiques.

Remarques

- Ordinairement, les moyennes d'ensemble décrites par la physique statistique correspondent à des moyennes en temps. Comme on décrit ici des objets en permanence à l'équilibre, sans dynamique notable tant qu'on ne change pas les conditions aux limites, les moyennes d'ensemble que l'on décrit, sur la base de l'hétérogénéité du matériau, doivent correspondre à des *moyennes en volume*.
- Le fait d'avoir des blocs mésoscopiques d'une taille suffisante pour qu'ils soient statistiquement indépendants, implique que l'on n'aura pas à se préoccuper a priori de poser des équations de compatibilité pour garantir que le champ de déformation soit statiquement admissible quand on considère les frontières entre volumes mésoscopiques voisins : au-delà de la taille mésoscopique, on considérera que le milieu est plongé dans un champ de contrainte uniforme, donné par les paramètres de contrôle macroscopique. En effet, les corrélations spatiales du champ de déformation dues à de telles équations de compatibilités doivent être importantes uniquement à une échelle inférieure, et les interactions d'un bloc mésoscopique avec le reste du milieu seront données par un champ moyen.

[3] Plus précisément, si la grandeur G a une moyenne sur la distribution de probabilité des configurations mésoscopiques $< G >$, et une variance $\delta G = \sqrt{< (G - < G >)^2 >}$, alors $\sum_{n\ blocs} G_{bloc} \sim n < G > + \sqrt{n}\,\delta G$ et la variation relative entre la moyenne en volume et la moyenne d'ensemble est d'ordre typique $\frac{\frac{1}{n}\sum_{n\ blocs} G_{bloc} - <G>}{<G>} \sim \frac{\delta G}{<G>}\frac{\sqrt{n}}{n}$. Comme par ailleurs la taille des blocs l est nettement inférieur aux dimensions du système L, on a ordinairement $n = (\frac{L}{l})^D >> (\frac{<G>}{\delta G})^2$, et les mesures effectuées correspondent aux moyennes d'ensemble.

– On n'a pas besoin d'avoir $n = (\frac{L}{l})^D$ grand devant le nombre de configurations possibles (qui est rapidement lui-même très grand) pour que la moyenne d'ensemble soit représentative de la moyenne en volume : il suffit qu'il soit grand devant $(\frac{<G>}{\delta G})^2$ pour que l'on ait un bon échantillonnage des valeurs possibles de la grandeur qui nous intéresse.
– Quand on approche de la fracturation macroscopique, la longueur d'autocorrélation ξ devient de l'ordre des dimensions macroscopiques du matériau, et le critère précédent ne s'applique plus : on doit alors voir des *effets de taille finie.* On peut s'intéresser directement à ces effets, mais on doit aussi noter que, si l'échantillon étudié est suffisamment grand, on observera le régime critique auquel on veut s'intéresser dans ce travail avant d'avoir un "cross-over" dû à la taille finie.

2.1.3 Construction formelle de l'espace des phases

L'espace des phases est par définition, l'espace des microétats possibles. La donnée d'un microétat j correspond à la spécification entière des variables cachées régissant le processus qui nous intéresse, à savoir, pour nous, la donnée de l'ensemble des microfractures, défauts, etc... qui forme notre système. Pour rendre les choses un peu plus précises, prenons l'exemple d'un système où les microfractures admissibles sont contraintes à être nucléées sur un réseau de points précisé à l'avance, et à correspondre à des défauts plans en mode II, d'une certaine taille et d'une certaine forme, avec un déplacement relatif des lèvres précisé par avance. La donnée d'un microétat j correspondra alors à la spécification d'un champ $\varphi(r)$ du même type qu'un champ de spins, où pour tous les lieux r sur le réseau, φ indique l'orientation de la microfracture et la valeur du paramètre de contrôle macroscopique τ^* à laquelle il s'est formé. Si un site ne comporte pas de microfracture, on pose $\varphi = 0$.

2.1.3.1 Définition des variables mésoscopiques associées aux variables macroscopiques.

On doit pouvoir, à chaque état j, associer des valeurs aux variables ε_j, τ_j et E_j, correspondant aux variables macroscopiques, évaluées à cette échelle mésoscopique.

On doit alors souligner que, contrairement aux modélisations ordinaires de physique statistique, pour décrire par exemple un gaz de particules en interactions, on ne spécifie pas entièrement l'état de la matière au niveau microscopique : Un microétat ne correspond pas à la spécification de l'ensemble des nombres quantiques du système, ou pour une approximation classique à la donnée des positions et vitesses de toutes les particules constituantes. On veut ici établir une physique statistique pour une **population de microfractures en interaction**, où les objets élémentaires sont eux-même d'une taille considérable (couramment jusqu'à quelques dizaines de μm). La matière séparant les défauts spécifiés par le microétat est considérée comme décrite par la théorie de l'élasticité, sans qu'on ait besoin de spécifier son état plus précisément. On peut donc porter un bloc mésoscopique à une déformation ε_j arbitraire, en imposant un champ de déplacement linéaire aux frontières et en fixant "par la pensée" l'état des microfractures le composant : on interdit aux défauts d'évoluer. On doit alors résoudre en principe un problème d'élastostatique, où les conditions aux frontières extérieures sont fixées par la donnée de ε_j imposé, les conditions sur les frontières intérieures étant fixées par la donnée du champ φ. Ceci permet en principe d'obtenir le champ de contrainte et de déformation sur le bloc mésoscopique entier, et τ_j est donné par la moyenne du tenseur de contrainte sur le volume mésoscopique. Cette fonction $\tau_j(\varepsilon_j)$ est naturellement différente d'un microétat à un autre, puisqu'elle est sensible aux conditions aux frontières intérieures imposées.

La définition de l'énergie E_j correspondante est un peu plus subtile : il s'agit de l'énergie nécessaire pour porter un volume mésoscopique non endommagé (ne contenant aucune microfracture), sous les conditions aux frontières initiales isotropes, pris comme état de référence d'énergie nulle, jusque dans l'état actuel de déformation aux frontières extérieures, et de population de microfractures (frontières intérieures). Cette énergie comporte une part irréversible, ou résiduelle, du même type que celle décrite plus haut (section 2.1.1.2), plus une part d'énergie potentielle élastique non bloquée. On argumentera plus loin (cf annexe F) qu'à une raisonnable approximation, cette énergie est relativement indépendante de l'ordre dans lequel les défauts sont apparus. Ceci n'est pas une condition indispensable, mais simplifie grandement la description des microétats : il est alors inutile de préciser dans le champ φ des informations sur l'histoire comme la valeur de τ^* à laquelle une microfracture s'est formée, et ce champ se réduit à une information géométrique sur les défauts présents dans l'état actuel (orientation, éventuellement taille du défaut et amplitude du déplacement relatif, etc...).

Sous cette hypothèse simplificatrice, on définit l'énergie $E_j(\varepsilon_j)$ de façon univoque[4] : Considérant un volume non endommagé, sous contrainte isotrope τ_{initial}, on occupe le système avec les microfractures spécifiées par le champ φ, ce qui porte le volume mésoscopique à une déformation mésoscopique $\varepsilon_{\text{initial}_j}$ et coûte une énergie caractéristique de l'état φ, E_{initial_j}. On déforme ensuite le système d'une façon purement élastique, jusqu'à la déformation ε_j imposée, d'où une énergie totale

$$E_j(\varepsilon_j) = E_{\text{initial}_j} + \int_{\varepsilon_{\text{initial}_j}}^{\varepsilon_j} \tau_j(\varepsilon) d\varepsilon \tag{2.6}$$

On a naturellement

$$\frac{dE_j}{d\varepsilon_j} = \tau_j \tag{2.7}$$

Définitions alternatives : On peut tout aussi bien imposer aux frontières du volume mésoscopique une contrainte uniforme τ_j, résoudre le problème d'élastostatique pour obtenir le champ de déformation dans le volume, qui moyenné donnera $\varepsilon_j(\tau_j)$, et définir

$$E_j(\tau_j) = E_{\text{initial}_j} + \int_{\tau_{\text{initial}}}^{\tau_j} \tau \frac{d\varepsilon_j}{d\tau} d\tau \tag{2.8}$$

.

[4] On fait l'hypothèse supplémentaire que les cracks ne guérissent pas au cours du temps, c'est à dire ne restituent pas l'énergie stockée lors de leur formation –les liaisons moléculaires brisées pour former un crack ne coïncident plus spatialement après une petite déformation, et ne peuvent donc se reformer. On considère que les échanges thermiques avec le milieu ambiant, au cours du processus, sont négligeables devant les échanges de travaux mécaniques, i.e. on interdit les courants de chaleur : sans modifier les conditions aux frontières de la roche, on a donc pas d'échange possible entre les microcracks et les molécules du milieu ambiant, permettant des transitions entre états plus ou moins excités dans un milieu au prix de transitions dans l'autre. La température classique est alors considérée comme constante, comme on ne s'intéresse pas à la fracturation par changement de contraintes résiduelles due à des dilatations thermiques, mais par compression. L'énergie désignée ici, au sens thermodynamique usuel, est donc indifféremment l'énergie interne ou l'énergie libre, l'influence de la température classique se réduisant à fixer les valeurs des constantes élastiques du milieu, et l'énergie de création de surface.

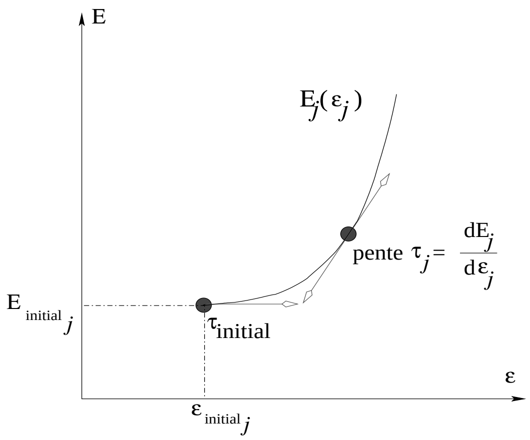


FIG. 2.3 – Variables mécaniques associées à un microétat

2.1.3.2 Rôle double de la contrainte

Il importe de souligner la différence fondamentale entre cet espace de microétats, et les modèles microscopiques utilisés usuellement en physique statistique :

D'ordinaire, en précisant le microétat, on fixe entièrement les valeurs associées pour les variables macroscopiques extensives, hormis l'entropie : énergie, volume occupé, éventuellement nombre de particules d'un type ou un autre, etc. Autrement dit, chaque microétat correspond à un point dans l'espace des variables macroscopiques – hors entropie.

Il n'y a par contre pas de sens à associer à un microétat des valeurs pour les grandeurs intensives conjuguées, comme la température, la pression (ou contrainte si le microétat est associé à une déformation), des potentiels chimiques, ou pour l'entropie, qui sont des propriétés émergentes du système statistique, i.e. de l'ensemble des microétats.

Le fait que les objets constituants nos microétats dans ce travail, laissent des degrés de liberté d'élasticité à la matière correspondant au continuum entre les défauts, implique que l'énergie et déformation ne sont pas entièrement spécifiés par le microétat, mais que l'on puisse exercer des conditions arbitraires aux frontières à l'échelle mésoscopique, ce qui interviendra comme paramètre extérieur. Il y a alors un sens à discuter la contrainte à l'échelle mésoscopique, en tant que moyenne volumique à cette échelle : cette contrainte n'est pas uniquement une propriété émergente de l'ensemble des microétats. Si ces conditions aux frontières sont imposées en contrainte, on aura à la fois une contrainte mésoscopique, paramètre extérieur pour les variables E_j et ε_j, et une contrainte moyenne d'ensemble, propriété émergente du système.

Un microétat ne correspond alors pas uniquement à un point dans l'espace (E_j, ε_j), mais à une dépendance $E_j(\varepsilon_j)$, la spécification du paramètre extérieur τ_j étant nécessaire pour réduire ceci à un point : voir figure 2.3[5].

[5] Dans cette figure, ainsi que dans les deux suivantes (2.4 et 2.5), on est naturellement réduit à utiliser des paramètres scalaires pour la contrainte τ et la déformation ε. On choisit arbitrairement de représenter sur ces schémas explicatifs la contrainte et déformation déviatoriques. L'état initial étant isotrope, la valeur de τ_{initial} représentée est nulle.

2.1.4 Traduction de l'irréversibilité du processus dans les relations micro-macroscopiques

2.1.4.1 Influences des deux paramètres de contrainte, actuelle et maximum

On a fait en section 2.1.1.1.1, l'hypothèse que les cycles de charge / décharge sont entièrement réversibles, et que la population de microfractures dans la roche n'évolue que quand la contrainte dépasse le seuil maximum précédemment atteint. Ceci se traduit, pour les relations entre champs microscopiques et macroscopiques, par le fait que la distribution de probabilité sur l'espace des microétats P_j n'évolue que quand on dépasse ce seuil, i.e. dépendent de τ^*, alors que le paramètre extérieur intervenant dans les valeurs mésoscopiques des champs, E_j et ε_j, est naturellement la contrainte appliquée sur le volume mésoscopique, τ_j, qui doit être relié à la valeur actuelle de la contrainte macroscopique, τ_{actuel}. Le rôle double de la contrainte, souligné plus haut (section 2.1.3.2), correspond donc aux deux paramètres macroscopiques de contrainte nécessaires pour décrire le système : τ_{actuel} joue le rôle de paramètre extérieur, alors que τ^* correspondra à la propriété émergente du système statistique lorsque l'on est sur la courbe de charge, grandeur conjuguée de la déformation macroscopique. Cette distinction est l'origine de l'irréversibilité dans notre description, qui sinon correspondrait purement à un formalisme de physique statistique réversible.

Pour illustrer ceci, on a représenté en figure 2.4 trois étapes dans l'évolution, lors d'une charge suivie d'une décharge, d'un petit système caricatural constitué uniquement de trois états. Les trois microétats, numérotés, correspondent à trois dépendances $E_j(\varepsilon_j)$ différentes, représentées en traits plein. On a supposé ici que la valeur du paramètre extérieur est fixée par le fait que les trois microétats subissent les mêmes conditions aux frontières, données par le champ de contrainte macroscopique imposé :

$$\forall j \ , \ \tau_j = \tau_{\text{actuel}} \tag{2.9}$$

On a à chacune des trois étapes,

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_j P_j(\tau^*)\varepsilon_j(\tau_j) \tag{2.10}$$

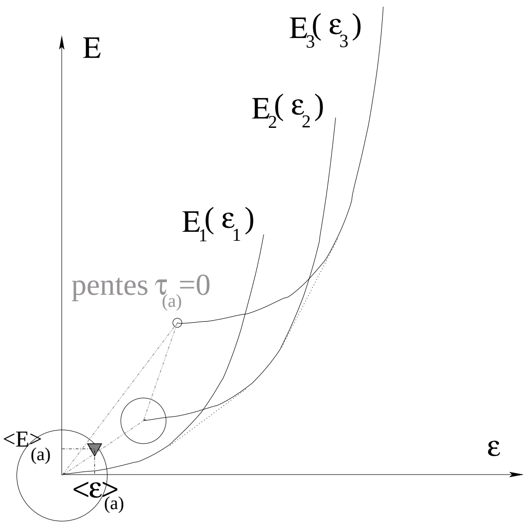
$$\langle E \rangle = \sum_j P_j(\tau^*)E_j(\tau_j) \tag{2.11}$$

Les probabilités d'occupation évoluent durant la charge, entre les deux premières étapes, et restent par contre fixées à la décharge, entre des deux suivantes[6]. La valeur de l'énergie et déformation macroscopique est représentée par les coordonnées des triangles, barycentres des centres des cercles avec des poids proportionnels aux rayons. On remarque que $\langle E \rangle_{(c)} > \langle E \rangle_{(a)}$ et $\langle \varepsilon \rangle_{(c)} > \langle \varepsilon \rangle_{(a)}$, ce qui correspond au fait que l'on a accumulé énergie et déformation irréversibles en chargeant le système jusqu'à l'étape (b).

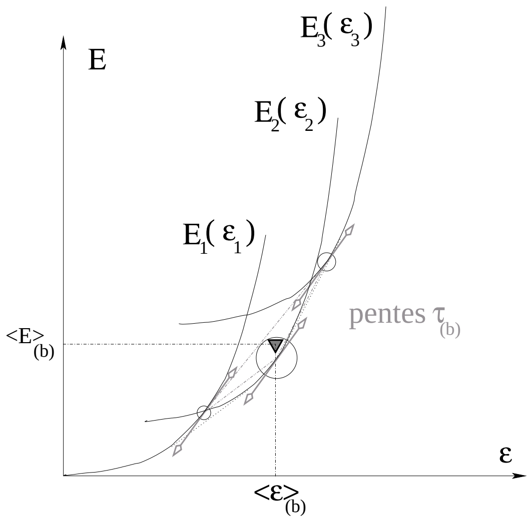
2.1.4.2 Conséquence sur les dérivées de l'énergie macroscopique

On a noté qu'à partir d'un point de la courbe de charge, le fait d'augmenter ou diminuer la contrainte correspond à deux valeurs différentes de $\frac{d\varepsilon}{d\tau}$. L'approche développée ici explique

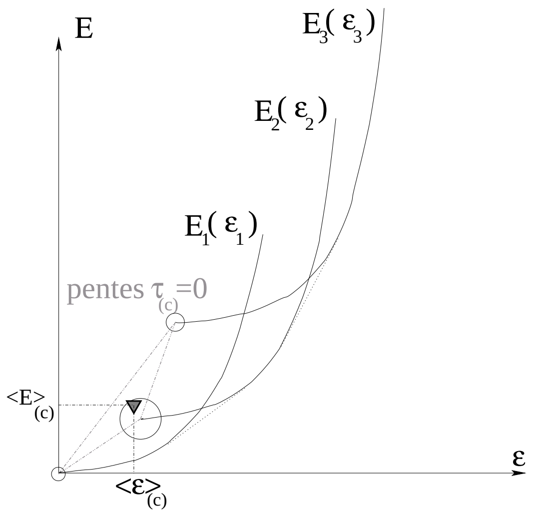
[6] On n'a pas encore précisé ce qui fixe exactement ces probabilités : ici, on a considéré arbitrairement $(P_1; P_2; P_3)(\tau^* = 0) = \frac{1}{16}(10; 5; 1)$ et $(P_1; P_2; P_3)(\tau^* = \tau_{(b)}) = \frac{1}{16}(10; 5; 1)$



(a) État initial à contrainte nulle

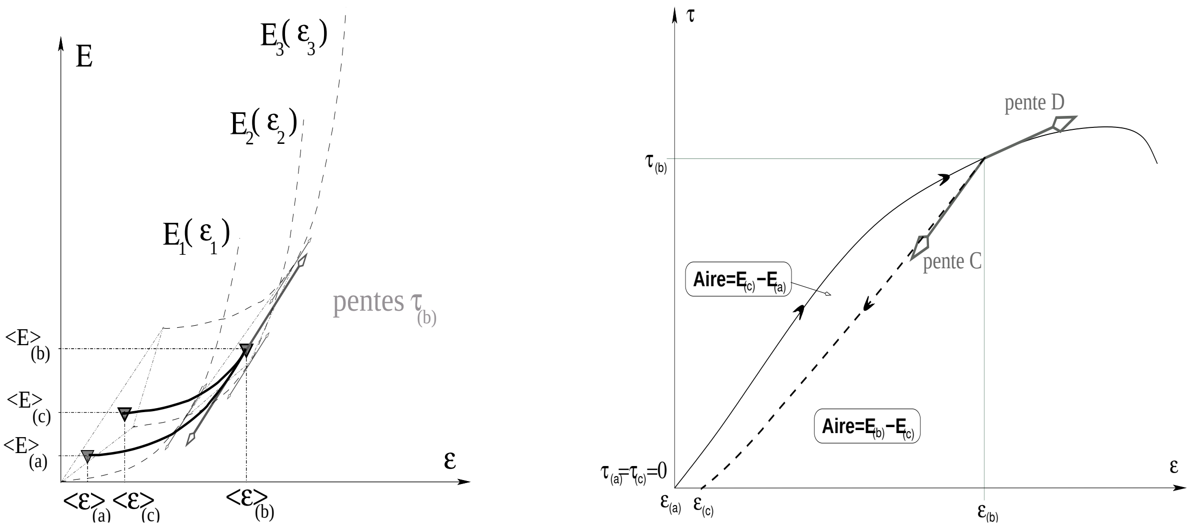


(b) Après une charge quasistatique



(c) Après avoir redéchargé jusqu'à contrainte nulle

FIG. 2.4 – Illustration de l'évolution des variables mécaniques d'un système au cours de la déformation.
Les cercles représentent par leur centre le point occupé par les microétats dans l'état de contrainte donné, et leur rayon est proportionnel à la probabilité d'occupation du microétat concerné. Le triangle indique les valeurs de l'énergie et déformation du système global, moyenne d'ensemble sur les microétats. Les pointillés correspondent à la trace de l'enveloppe convexe des trois courbes dans l'espace $E-\varepsilon$, à l'intérieur de laquelle se trouvent nécessairement ces valeurs.



(a) En traits pleins, trajectoire des variables macroscopiques dans l'espace des phases

(b) Courbe de charge / décharge correspondante

FIG. 2.5 – Origine de la différence de pente des courbes de charge et décharge

aisément ce phénomène : À partir de l'histoire (ε, E) des variables macroscopiques, la première dérivée correspond à la contrainte appliquée $\frac{dE}{d\varepsilon} = \tau_{\text{actuel}}$, la seconde à la pente de la courbe de charge, $\frac{d\tau_{\text{actuel}}}{d\varepsilon}$.

On a porté en figure 2.5 (a), l'évolution de (ε, E) macroscopique pour notre système exemple, durant la charge du point (a) au point (b) dans l'histoire, puis la décharge de (b) à (c). Au point (b) , on n'a pas de discontinuité dans les valeurs de E, ε et τ_{actuel} , ce qui correspond au fait que les deux courbes ont un point commun et une même pente $\tau_{(\text{b})}$ (identique à celle des systèmes mésoscopiques) : on a un point de rebroussement dans la trajectoire. Le fait que les probabilités de chaque état évoluent de (a) à (b), et soient fixées de (b) à (c), entraîne par contre que la dérivée seconde de E, le long de la trajectoire de décharge, soit supérieure à celle le long de la trajectoire de charge. En figure 2.5 (b), on voit la conséquence de ceci pour la dépendance déformation / contrainte : les deux courbes ont un point commun, mais la pente en décharge C , qui est un simple module élastique de la roche, est supérieure à la pente en charge D, qui inclut une composante d'écrouissage[7].

2.2 Obtention de la distribution de probabilité

Ayant posé comment les variables macroscopiques découlent de moyennes d'ensemble sur un espace de microétat, le nœud du problème est naturellement d'obtenir la distribution de probabilité sur cet espace.

[7]Formellement, utilisant les définitions de 2.1.1.2, $\varepsilon^*(\tau^* = \tau_{(\text{b})}) = \varepsilon^d(\tau_{\text{actuel}} = \tau_{(\text{b})}, \tau^* = \tau_{(\text{b})})$, mais $C \hat{=} \left.\frac{\partial \varepsilon^d}{\partial \tau_{\text{actuel}}}\right|_{\tau^*} (\tau_{\text{actuel}} = \tau_{(\text{b})}, \tau^* = \tau_{(\text{b})}) > D \hat{=} \frac{d\varepsilon^*}{d\tau}(\tau^* = \tau_{(\text{b})})$. Par rapport à un paramètre d'écrouissage h , on a la relation usuelle $D = \frac{h}{1+h/C}$.

2.2.1 Postulat fondamental. Contraintes possibles

On développera en annexe A une argumentation qualitative sur l'influence de l'hétérogénéité du milieu et de la présence de pression de confinement, dont on retiendra deux points :

- L'évolution d'une population de fractures peut être modélisée comme un système dynamique, ou un processus stochastique. En principe, la probabilité d'occurrence d'une configuration doit donc venir de l'application associant à la donnée des variables aléatoires sous-jacentes, l'état du système à un instant donné –si on a un désordre gelé, à chaque condition initiale sera associé un chemin déterministe, et la mesure sur les conditions initiales se transformera ainsi en mesure sur l'espace des phases. Si le désordre évolue à chaque transformation du système (désordre "recuit" – *annealed disorder* en anglais –), la probabilité d'observer un état à un instant donné s'exprimera comme une intégrale de chemin, i.e. la somme des probabilités de tous les chemins menant vers cet état, chacun de ces chemins ayant une probabilité égale à un produit de probabilités de transition. Malheureusement, les équations d'évolution que l'on peut écrire sont toutes très non-linéaires par rapport aux variables d'état (donnée du microétat)[8], et même avec une modélisation simpliste, il est en général impossible d'intégrer ces équations au cours de l'histoire pour obtenir une forme analytique de nos probabilités.
- Dans le contexte d'un cisaillement avec pression de confinement, la formation et croissance des fractures se font de façon stable, indépendamment de la taille de la fracture, tant que l'interaction entre de multiples objets n'amène pas une instabilité globale.

Étant donné des équations d'évolution sur des modèles discrets, il est naturellement possible de simuler numériquement l'histoire de tels systèmes de taille réduite. Sans suivre directement l'histoire, numériquement ou en intégrant les équations, vu les deux remarques précédentes, on peut toutefois espérer que le système sous-jacent soit suffisamment complexe, et ait suffisamment de temps pour se développer, pour qu'il explore l'espace des microétat selon des probabilités qui maximisent le désordre, sous des contraintes mathématiques correspondant à la donnée d'observables macroscopiques du système.

Comme mesure du désordre présent dans notre roche, l'entropie de Shannon correspond parfaitement à nos besoins. Son expression résulte des cinq hypothèses suivantes (que l'on trouvera dans tout ouvrage d'introduction à la mécanique statistique, comme Diu et al. [1989]) :

1. S est définie entièrement en fonction des probabilités d'occupation $\{P_j\}$, et est une fonction positive, symétrique et continue de ses arguments.
2. L'ordre maximum a lieu quand l'information est complète, c.à.d. que tout système est contraint à se trouver dans un état J fixé, i.e. $P_J = 1, \quad \forall j \neq J \ P_j = 0$. Le manque d'information (désordre) est alors nul, $S = 0$.
3. Les évènements impossibles apportent une contribution nulle au manque d'information, i.e. si on ajoute à N états possibles, un $N+1$-ième tel que $P_{N+1} = 0$, alors $S(P_1, P_2, ...P_N, 0) = S(P_1, P_2, ...P_N)$.

[8]Exemple de source de non-linéarité : Si dans un cadre élastostatique linéaire, on utilise les fonctions de Green pour obtenir la contrainte en un point comme la somme de l'influence des conditions aux frontières, et de celle de chaque crack préexistant, un critère de Coulomb pour décider du mouvement d'un crack fermé se formule avec le rapport d'une contrainte tangentielle sur une contrainte normale, d'où une forte non-linéarité.

4. Si tous les évènements sont équiprobables, le désordre doit augmenter avec le nombre d'états possible : $S(P_1 = P_2 = ... = P_N = \frac{1}{N})$ est une fonction croissante de N.
5. L'entropie est une fonction additive des désordres partiels, au sens suivant : si l'on divise l'espace des états Ω en M sous-ensembles $\{\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_M\}$, on désignera par $f_i = \sum_{\text{états} j \in \Omega_i} P_j$ la probabilité de se trouver dans le sous-ensemble Ω_i, et par $P_j^i = P(j|j \in \Omega_i)$ la probabilité conditionnelle d'être dans l'état j, sachant que l'on est dans le sous-ensemble i. Sachant que l'on est dans un sous-ensemble Ω_i, reste une entropie partielle $S_i = S(P_1^i, P_2^i, ..., P_{\mathrm{Card}(\Omega_i)}^i)$. L'entropie du système global doit alors vérifier

$$S = S(f_1, f_2, ..., f_M) + \sum_{i=1}^{M} f_i S_i$$

Sous ces hypothèses, Shannon [1948] démontra que la mesure du désordre S est nécessairement de la forme

$$S = -\sum_j P_j \ln P_j \tag{2.12}$$

à une constante multiplicative près correspondant simplement au choix d'une unité pour la température. Cette constante étant sans intérêt particulier dans notre cadre (on verra qu'on ne peut mesurer de température de réseau de microfractures avec un thermomètre), on la fixe arbitrairement à 1.

Notre postulat fondamental sera donc le suivant :

> La distribution des probabilités d'occupation des différents microétats est telle qu'elle maximise l'entropie de Shannon, sous contraintes fixées par les observables mécaniques macroscopiques le long de la courbe de charge.

Les variables mécaniques mésoscopiques ayant été définies précédemment (section 2.1.3), la distribution sera donc fixée par le choix de ces contraintes mathématiques.

On va maintenant explorer un choix possible de ces contraintes, sélectionné par un simple critère de cohérence de l'image du processus en résultant.

2.2.2 Ensemble Énergie-contrainte

On a remarqué en section 2.1.1.1.2, que le nombre de degrés de liberté macroscopiques de notre système est de $D + 1$. Préciser l'état de notre système le long de la courbe de charge revient donc à poser ce nombre de contraintes scalaires. Ceci correspond à la donnée de la contrainte macroscopique (ou alternativement d'une déformation), plus une variable scalaire correspondant à la décharge éventuelle du système. On a donc un nombre de degrés de liberté correspondant à la donnée de la contrainte ou déformation macroscopique, plus l'énergie. En étudiant les conséquences de l'un ou l'autre choix, on verra à la fin de ce chapitre, en section 2.2.4, qu'il est nécessaire de considérer énergie et contrainte comme variables indépendantes : l'autre choix, énergie et déformation, ne permettrait pas de distinguer travail réversible et irréversible, ce qui est contradictoire avec une simple analyse naïve de l'évolution de l'entropie, faite en section 2.2.3. Notons enfin que contrairement à d'autres problèmes, l'extensivité ou l'intensivité des variables ne peut nous guider dans ce choix : contrainte et déformation sont toutes deux des variables intensives, les variables extensives correspondantes étant la force transmise et le déplacement moyen suivant une direction[9]. Un choix ou l'autre sont donc également possibles par rapport à la nature des variables sous changement d'échelle.

2.2.2.1 Contrainte mathématique correspondante - établissement de la distribution

Comme les différents volumes mésoscopiques doivent être en équilibre mécanique, une contrainte mathématique possible est de supposer que les contraintes à cette échelle, correspondant au volume élémentaire représentatif, sont égales à la contrainte macroscopique. On exigera de plus que la moyenne des densités d'énergie est égale à la densité macroscopique, et une condition de normalisation pour les probabilités. L'entropie doit alors être maximisée sous ces contraintes, lorsque le système est le long de la courbe de charge, i.e. lorsque $\tau_{\text{actuel}} = \tau^*$.

Considérant tous les microétats j possibles[10], les probabilités P_j sont données par le fait qu'elles maximisent S sous les contraintes

$$\begin{aligned} \forall j,\, \tau_j &= \tau^* && (2.13)\\ \sum_j P_j(\tau^*)E_j(\tau_j) &= U(\tau^*) && (2.14)\\ \sum_j P_j(\tau^*) &= 1 && (2.15) \end{aligned}$$

Notons que les valeurs des variables mésoscopiques sont fixées en posant la condition (2.13). Elles ne dépendent formellement que de la variable τ_j, et n'ont pas de dépendance explicite aux variables macroscopiques, comme U ou S. Pour résoudre ce problème de maximisation sous contraintes, on utilisera la traditionnelle approche variationnelle des multiplicateurs de Lagrange. Multipliant les deux dernières contraintes par des multiplicateurs de Lagrange, et considérant les variations par rapport aux probabilités, autour de la solution $\{P_j\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} -\delta S &= 0 = \sum_j (\ln P_j + 1)\delta P_j && (2.16)\\ \lambda_0 \delta 1 &= 0 = \lambda_0 \sum_j \delta P_j && (2.17)\\ \lambda_1 \delta U &= 0 = \lambda_1 \sum_j E_j \delta P_j && (2.18) \end{aligned}$$

[9] Considérons un systéme donné, de dimensions initiales L^D, de champ de déplacement moyen sur ses faces u_i, et sur lequel on exerce sur chacune de ses faces perpendiculaire à $\hat{e}_i$ une force F_i. On peut adjoindre n^D systèmes dans le même état – en négligeant la nonuniformité des champs u et τ sur les faces, ce qui correspond à notre hypothèse d'indépendance statistique –, en cube (si $D = 3$), et on obtient alors un système de champ de déplacement moyen nu_i, et sur lequel on exerce sur ses faces des forces $n^{D-1}F_i$.

[10] Remarque : il n'est pas contradictoire de supposer que tous les micro-états peuvent être observés, bien que l'on s'attende à ce que certains soient peu compatibles avec un état de contrainte donné : il apparaîtra que ceux-ci ont une probabilité infinitésimale, et n'apparaissent jamais en pratique. Ceci est toujours le cas en physique statistique, où par exemple dans un gaz, il faudra attendre un temps défiant tout observateur pour observer un état où une molécule transporte pratiquement toute l'énergie cinétique du gaz, alors que les autres sont pratiquement immobiles, bien que cet état ne soit pas formellement exclu : sa probabilité d'apparition est infinitésimale.

Ajoutant ces trois équations, on obtient que pour toute variation δP_j autour de la solution,

$$\sum_j (\ln P_j + 1 + \lambda_0 + \lambda_1 E_j)\delta P_j = 0 \tag{2.19}$$

Comme dans tout texte d'introduction à la mécanique statistique (par exemple, d'après Callen [1985]), on argumentera qu'il doit exister une valeur des multiplicateurs de Lagrange (λ_0, λ_1), telle que $\ln P_k + 1 + \lambda_0 + \lambda_1 E_k = 0$ pour deux états k donnés, et l'égalité ci-dessus n'implique alors plus qu'une somme de variations pour $N - 2$ variables indépendantes, N étant le nombre total de microétats (et 2 le nombre de contraintes). Ceci devant être vérifié pour toute variation $\{\delta P_j\}$autour de la solution, on en conclut que celle-ci vérifie, avec cette valeur de (λ_0, λ_1) :

$$\forall j,\ \ln P_j + 1 + \lambda_0 + \lambda_1 E_j = 0 \tag{2.20}$$

$$\text{i.e. } \forall j,\ P_j = e^{-(1+\lambda_0+\lambda_1 E_j)}$$

Les deux paramètres (λ_0, λ_1) sont déterminés à partir des contraintes (2.14) et (2.15) :

le premier s'élimine trivialement en introduisant cette expression dans la contrainte de normalisation ($e^{(1+\lambda_0)} = \sum_j e^{-\lambda_1 E_j}$), et avec V le volume mésoscopique de référence, en posant

$$\beta \ \hat{=}\ \frac{\lambda_1}{V} \tag{2.21}$$

$$Z \ \hat{=}\ \sum_j e^{-\beta V E_j} \tag{2.22}$$

$$\text{on obtient } \forall j,\ P_j = \frac{e^{-\beta V E_j}}{Z} \tag{2.23}$$

Z et P_j sont alors formellement dépendant du paramètre τ^* intervenant dans la contrainte (2.13), et du paramètre β, multiplicateur de Lagrange de la contrainte (2.14) divisé par le volume[11] . Le deuxième multiplicateur se détermine à partir de la contrainte sur l'énergie, formellement en inversant l'équation non-linéaire

$$\sum_j [E_j(\tau^*) - U(\tau^*)]e^{-\beta V E_j(\tau^*)} = 0 \tag{2.24}$$

Ceci permettra d'obtenir $\beta(\tau^*)$, et à partir de ceci, Z, P_j et S qui ne peuvent dépendre que du point atteint sur la courbe de charge, τ^*, en remplaçant leur dépendance explicite en β par une dépendance implicite en τ^* : on notera $P_j(\tau^*) \hat{=} P_j(\tau^*, \beta(\tau^*))$. De même pour Z et S.

2.2.2.2 Relations thermodynamiques - Établissement d'une première loi

On appellera potentiel thermodynamique, par définition, la quantité

$$F \hat{=} -\frac{\ln Z}{\beta V} \tag{2.25}$$

[11] Ce facteur de volume est introduit car les énergies définies ici sont des densités. On verra que son introduction permet de rétablir les dimensions usuelles des lois thermodynamiques.

On établit alors aisément

$$
\begin{aligned}
F &= \sum_j P_j.(-\frac{\ln Z}{\beta V}) \\
&= \frac{1}{\beta V}\sum_j P_j \left[\beta V E_j + \ln(e^{-\beta V E_j}) - \ln Z\right] \\
&= \sum_j P_j E_j + \frac{1}{\beta V}\sum_j P_j \ln P_j
\end{aligned}
$$

en utilisant d'abord la condition de normalisation (2.15), l'introduction d'un terme nul, puis l'expression des probabilités (2.23) . D'où finalement, utilisant les définitions de S et E, (2.12) et (2.14), et en notant s la densité d'entropie,

$$s = \frac{S}{V} \tag{2.26}$$

$$F = U - \frac{s}{\beta} \tag{2.27}$$

Ce potentiel F dépend des variables macroscopiques τ et β, chaque E_j ne dépendant que de τ.

Considérant les variations de $F(\tau, \beta)$, on écrira donc :

$$
\begin{aligned}
dF &= -\frac{d\ln Z}{\beta V} - \ln(Z)d(\frac{1}{\beta V}) \\
&= -\frac{1}{\beta V}\frac{dZ}{Z} + \ln(Z)\frac{d\beta}{V\beta^2} \\
&= -\frac{1}{\beta}\sum_j[(-d\beta)E_j - \beta dE_j]\frac{e^{-\beta V E_j}}{Z} + \frac{\ln Z}{\beta V}\frac{d\beta}{\beta} \\
&= (\sum_j P_j E_j + \frac{\ln Z}{\beta V})\frac{d\beta}{\beta} + \sum_j P_j \frac{dE_j}{d\tau}d\tau \\
&= (U - F)\frac{d\beta}{\beta} + (\sum_j P_j \frac{dE_j}{d\tau})d\tau
\end{aligned}
$$

On a utilisé la définition de F (2.25) pour l'établissement de la première et la dernière équation, celle de Z (2.22) pour la troisième, et celle de U (2.14) pour la dernière, et enfin le fait que V, volume de référence fixe des cellules mésoscopiques, est constant par définition. En se servant de la relation entre le potentiel et les variables macroscopiques (2.27) pour éliminer le premier terme, on obtient alors ;

$$dF = s\frac{d\beta}{\beta^2} + (\sum_j P_j \frac{dE_j}{d\tau})d\tau \tag{2.28}$$

En posant alors par définition

$$C_j \hat{=} \frac{d\tau_j}{d\varepsilon_j}(\tau_j = \tau) \tag{2.29}$$

qui est le tenseur des modules d'élasticité de l'état j à la contrainte τ, comme la déformation de l'état j sous une variation de contrainte est supposée purement élastique, on a d'après (2.8),

$$\frac{dE_j}{d\tau} = \tau \frac{d\varepsilon_j}{d\tau} = \tau C_j^{-1} \tag{2.30}$$

En posant de plus

$$T \hat{=} \frac{1}{\beta} \tag{2.31}$$

– on justifiera plus loin une telle notation –, l'équation pour la variation du potentiel thermodynamique (2.28) devient

$$dF = -sdT + \tau \left\langle C^{-1} \right\rangle d\tau \tag{2.32}$$

(où par convention, pour une grandeur G donnée, la notation $\langle G \rangle$ désigne la moyenne d'ensemble $\sum_j P_j G_j$).

Rappelant la relation entre le potentiel, l'énergie et l'entropie (2.27), ceci implique pour la variation de l'énergie :

$$\begin{aligned} dU &= d(F + Ts) \\ &= dF + sdT + Tds \end{aligned}$$

d'où avec (2.32), la première loi de thermodynamique :

$$dU = Tds + \tau \left\langle C^{-1} \right\rangle d\tau \tag{2.33}$$

L'énergie U, transformée de Legendre de F – comme l'indique (2.27) – étant fonction naturellement de S (conjugué de T) et τ, cette relation équivaut à

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \tau}\right|_S = \tau \left\langle C^{-1} \right\rangle \tag{2.34}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right|_\tau = T \tag{2.35}$$

Ceci justifie la notation T utilisée : cette grandeur est bien une température, au sens formel de la physique statistique. On notera toutefois que puisque l'on a exclu les couplages thermiques avec le milieu ambiant, il sera impossible de mesurer physiquement cette température avec un thermomètre : l'énergie de création des microfractures, irréversible, n'ira pas exciter les molécules du liquide thermométrique.

Dérivées secondes du potentiel thermodynamique F : À titre d'information, on a établi ces dérivées en annexe B.1, et elles sont naturellement reliées aux moyennes de fluctuations. On ne se servira pas de ces résultats dans le travail présent.

2.2.2.3 Cohérence - relation avec les observables de pente le long de la courbe de charge

2.2.2.3.1 Décharge La relation (2.34) correspond tout à fait à l'image que nous avons de la distribution de probabilité évoluant lors de la charge, et non de la décharge : En déchargeant le système, la distribution n'évolue pas, et on a par conséquent $dS = 0$. La variation d'énergie est alors purement élastique, et cette relation exprime simplement que

$$dU = d(\sum_j P_j E_j) = \sum_j P_j dE_j = \sum_j P_j \tau C_j^{-1} d\tau = \tau \left\langle C^{-1} \right\rangle d\tau \tag{2.36}$$

Comme on n'a pas supposé de couplage thermique, la variation d'énergie est d'autre part simplement égale au travail mécanique macroscopique

$$dU = \tau d\varepsilon \tag{2.37}$$

et la variation de la déformation macroscopique est reliée à la variation de contrainte via le tenseur de module d'élasticité macroscopique C, par

$$d\varepsilon = C^{-1} d\tau \tag{2.38}$$

d'où en décharge,

$$dU = \tau C^{-1} d\tau \tag{2.39}$$

Comparant ceci à (2.36), on en conclut que

$$C^{-1} = \sum_j P_j C_j^{-1} \tag{2.40}$$

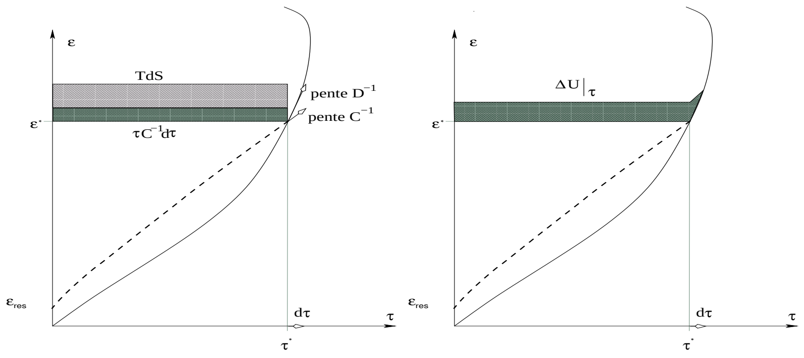
c.à.d. que le tenseur de complaisance macroscopique est égal à la moyenne des tenseurs de complaisance mésoscopiques. Comme on a supposé au départ que la taille des volumes mésoscopiques était telle qu'il soient tous plongés dans la même contrainte macroscopique, sans se préoccuper de compatibilité entre eux (hypothèse d'indépendance statistique), ce résultat est une trivialité, qui montre simplement la cohérence de cette approche.

2.2.2.3.2 Charge En chargeant le système au-delà du seuil précédemment atteint, on activera l'évolution des défauts, c.à.d. que l'on va modifier la distribution $\{P_j\}$. La première loi (2.33) sera alors à considérer avec les deux termes, et on attend que le développement du système de microfractures se traduise par $dS > 0$. L'évolution de l'énergie sera alors

$$dU = d(\sum_j P_j E_j) = \sum_j P_j dE_j + \sum_j E_j dP_j = \sum_j P_j \tau C_j^{-1} d\tau + \sum_j E_j dP_j = \tau \left\langle C^{-1} \right\rangle d\tau + \sum_j E_j dP_j$$

La première loi (2.33) traduit simplement le fait qu'on a alors un terme supplémentaire dans la variation de l'énergie, donné par $\sum_j E_j dP_j = T ds$.

Ce terme a une conséquence macroscopique observable : si la variation totale d'énergie est toujours donnée par le travail mécanique suivant la même expression (2.37) , la variation de la



(a) Partition de l'énergie entre les deux termes

(b) Variation de l'énergie en augmentant S à τ_{actuel} fixé

FIG. 2.6 – Illustration du rapport entre variation d'entropie et pente de la courbe de charge.

déformation avec la contrainte ne correspond plus à une déformation purement élastique donnée par la complaisance macroscopique C^{-1}, mais inclut une composante d'écrouissage : notant par définition D la pente de la courbe de charge, on a

$$d\varepsilon = D^{-1} d\tau \tag{2.41}$$

d'où avec (2.37),

$$dU = \tau D^{-1} d\tau \tag{2.42}$$

On a donc en considérant la variation totale d'énergie (2.33), et l'égalité (2.40),

$$dU = \tau D^{-1} d\tau = \tau C^{-1} d\tau + T ds \tag{2.43}$$

d'où le fait que la dérivée totale de la densité l'entropie par rapport à la contrainte maximum atteinte est donnée par

$$ds = \beta\tau(D^{-1} - C^{-1})d\tau \tag{2.44}$$

Le fait que la pente en charge soit inférieure à celle en décharge, i.e. que $\tau(D^{-1} - C^{-1})d\tau > 0$, traduit le fait la température est également positive : une création de microfractures doit être associée à $dS > 0$ – l'information sur le système doit être de plus en plus faible quand on ajoute des microfractures, ce qui constitue en quelque sorte notre seconde loi de thermodynamique –, et $T = \frac{\partial U}{\partial s}\big|_\tau$ est également positif : augmenter l'énergie à contrainte actuelle fixée, exige que l'on dépasse cette contrainte actuelle pour stocker de l'énergie irréversible, puis que l'on relâche le système jusqu'à la contrainte précédente. Ceci est représenté graphiquement en figure 2.6.

Cette relation permet de dériver la pente de la courbe de charge $D(\tau^*)$ à partir du moment où l'on connaît la dépendance $T(\tau^*)$.

2.2.2.4 Établissement de l'évolution de la température en fonction de la charge imposée

On a déterminé sous nos hypothèses, que l'énergie et la déformation macroscopiques, après avoir atteint une contrainte maximale τ^*, et lorsque la contrainte actuelle est de τ, sont données par

$$U(\tau,\tau^*) = \sum_j P_j(T,\tau^*)E_j(\tau) \tag{2.45}$$

$$\langle\varepsilon\rangle(\tau,\tau^*) = \sum_j P_j(T,\tau^*)\varepsilon_j(\tau) \tag{2.46}$$

Pour clore ce formalisme, il reste à déterminer la forme de la fonction $T(\tau^*)$, i.e. comment la température varie avec la contrainte maximale atteinte.

En posant les contraintes (2.14) et (2.15) sur notre système, nous avons considéré que nous avions un nombre de degrés de liberté macroscopiques égale à la donnée d'un tenseur de contrainte, plus une variable scalaire. Cela est effectivement le cas pour décrire l'ensemble des états accessibles au système, mais en exigeant que le système soit précisément sur la courbe de charge pour estimer les énergies $E_j(\tau^*)$ entrant dans l'expression des probabilités, i.e. que $\tau_{\text{actuel}} = \tau^*$, doit réduire ce nombre de degrés de liberté de 1, c'est à dire ajouter une relation scalaire.

Jusqu'ici, on n'a pas exploité la loi sur la déformation, (2.46). Lorsque l'on suit la courbe de charge, on doit exiger que la variation d'énergie soit d'origine purement mécanique (2.37). Utilisant les expressions (2.45) et (2.46), ceci s'exprime

$$\begin{aligned}
0 &= dU - \tau d\langle\varepsilon\rangle \\
&= [\sum_j (dP_j)E_j + \sum_j P_j dE_j] - \tau[\sum_j (dP_j)\varepsilon_j + \sum_j P_j d\varepsilon_j] \\
&= \sum_j P_j(dE_j - \tau d\varepsilon_j) + \sum_j (dP_j)(E_j - \tau\varepsilon_j)
\end{aligned}$$

Le premier terme est automatiquement nul, puisque l'énergie apportée à chaque volume mésoscopique est également uniquement mécanique, et qu'ils sont tous soumis à la même contrainte τ (hypothèse (2.13)). En explicitant les dépendances (quand la distribution évolue, on est à $\tau = \tau^*$), cette exigence se ramène donc à

$$\sum_j dP_j(T,\tau^*)[E_j(\tau^*) - \tau^*\varepsilon_j(\tau^*)] = 0 \tag{2.47}$$

La dérivée totale des P_j s'obtient aisément, en utilisant l'expression de ces probabilités (2.23) et la loi de variation élastique des $E_j(\tau)$, (2.30) :

$$\begin{aligned}
dP_j &= d(\frac{e^{-\beta V E_j}}{Z}) \\
&= (-E_j d\beta - \beta dE_j)V\frac{e^{-\beta V E_j}}{Z} - dZ\frac{e^{-\beta V E_j}}{Z^2} \\
&= P_j[E_j(-d\beta)V - \beta V\tau C_j^{-1}d\tau - d\ln Z]
\end{aligned}$$

or comme F est la transformée de Legendre de U (2.27), avec la définition de F (2.25)et la première loi (2.32), on établit

$$\begin{aligned}\frac{d\ln Z}{V} &= d(-\beta F) \\ &= -\beta dF - F d\beta \\ &= -\beta s\frac{d\beta}{\beta^2} - \beta\tau\left\langle C^{-1}\right\rangle d\tau - (U - \frac{s}{\beta})d\beta\end{aligned}$$

$$\text{i.e. } \frac{d\ln Z}{V} = -\beta\tau\left\langle C^{-1}\right\rangle d\tau - U d\beta \tag{2.48}$$

en réintroduisant ceci dans la relation précédente, on obtient la dérivée totale de chaque P_j :

$$dP_j = P_j V[(U - E_j)d\beta + \beta\tau(C^{-1} - C_j^{-1})d\tau] \tag{2.49}$$

Utilisant ces dérivées dans la condition exprimant que l'énergie est d'origine mécanique, (2.47), on obtient

$$\sum_j P_j(U - E_j)(E_j - \tau\varepsilon_j)d\beta + \beta\tau\sum_j P_j(C^{-1} - C_j^{-1})(E_j - \tau\varepsilon_j)d\tau = 0$$

qui doit être vérifiée pour $\tau = \tau^*$. Écrivant ceci sous la forme

$$\frac{1}{\beta(\tau^*)}\frac{d\beta}{d\tau^*} = -\tau^*\frac{\sum_j P_j(\beta,\tau^*)[C^{-1}(\beta,\tau^*) - C_j^{-1}(\tau^*)][E_j(\tau^*) - \tau^*\varepsilon_j(\tau^*)]}{\sum_j P_j(\beta,\tau^*)[U(\beta,\tau^*) - E_j(\tau^*)][E_j(\tau^*) - \tau^*\varepsilon_j(\tau^*)]} \tag{2.50}$$

il est clair que ceci est une équation différentielle ordinaire.

On verra en annexe B.2 une façon alternative d'obtenir cette même équation à partir d'un principe de maximisation.

Avec un modèle particulier des dépendances mécaniques sur les microétats $\{E_j(\tau)\}$, et sous l'hypothèse que le désordre initial dans la roche maximise également l'entropie sous contraintes, i.e. que la distribution initiale soit de la forme (2.23), la résolution de cette équation différentielle permettra en principe d'obtenir la fonction $T(\tau^*)$. Ceci permettra alors de clore ce formalisme, en précisant entièrement l'évolution des probabilités, c.à.d. le système entier.

La valeur initiale de la température peut être déterminée ainsi : la compression isotrope initiale n'est pas associée avec une quelconque création de microfractures a priori, et en considérant que la roche est initialement peu endommagée par rapport aux configurations qui émergeront ultérieurement dans le processus de localisation, on est presque certain d'être dans la configuration intacte de référence, i.e. dans l'état d'ordre absolu. L'énergie minimum $E_{min}(\tau_{\text{initial}}) = \min_j E_j(\tau_{\text{initial}})$ étant réalisée uniquement par cet état – état de base non dégénéré –, la loi de Nernst ou troisième loi de thermodynamique est valable, et $T = 0$ correspond à $S = 0$. Ceci détermine que la température initiale est proche de $T_{\text{initial}} \simeq 0$.

2.2.3 Interprétation qualitative de l'évolution du système du point de vue de la théorie de l'information

Nous avons supposé en préliminaire que la distribution de probabilité d'occupation sur les microétats, que nous obtenons en supposant qu'elle maximise l'entropie sous contrainte, provient physiquement d'un processus stochastique ou un système dynamique sous-jacent.

Considérons par exemple un système avec désordre recuit, où les sites potentiels de microfractures sont les faces d'un réseau donné, et où la dynamique de ces fractures est contrôlée par un critère de Coulomb. Les seuils de Coulomb intervenant dans ce critère sont des variables aléatoires indépendantes pour chaque site, d'une distribution commune. Un modèle de désordre recuit correspondra au fait qu'à chaque glissement sur une microfracture, on réinitialise la valeur du seuil pour cette microfracture.

Supposons que l'on connaisse parfaitement l'état initial du système, en demandant par exemple qu'il soit intact. L'information est alors totale, et $S = 0$.

Si la distribution élémentaire des seuils de Coulomb présente un cut-off inférieur, tant qu'on n'aura pas atteint une certaine valeur de la contrainte axiale, à contrainte radiale fixée, on sera certain que la contrainte locale sur chaque microfracture n'a pas atteint le rapport $\tau_{\mathrm{tangent}}/\tau_{\mathrm{normal}}$ correspondant à ce cut-off, et que le système est toujours dans la configuration initiale : S n'aura pas évolué, et la déformation sera entièrement réversible. À partir du moment où ce cut-off est dépassé sur certains sites, il sera possible d'avoir une évolution des microfractures, et l'information sur le système diminuera. À chaque glissement de microfracture, une nouvelle valeur de variable aléatoire étant tirée dans la distribution, on aura de moins en moins d'information a priori sur l'état du système, et S devra croître régulièrement[12].

Cette image est qualitativement en accord avec la première loi (2.43), partageant le travail apporté au système durant un incrément de charge $d\tau$, en une énergie réversible et une contribution TdS correspondant à la création de microfractures.

2.2.4 Remarques sur les autres contraintes possibles

Le choix des contraintes mathématiques sous lesquelles on fixe l'entropie est capital, puisque la distribution de probabilités sur les différentes configurations est entièrement fixé par ces contraintes. Il importe de recenser les autres choix possibles a priori, et d'analyser la cohérence des résultats en découlant, et les éventuelles équivalences entre eux.

On a vu en section 2.1.1.1.2 que l'état du système macroscopique doit être entièrement fixé par la donnée de $D + 1$ variables scalaires, ce qui correspond à la donnée de l'énergie plus les valeurs propres du tenseur de contrainte, ou de déformation, macroscopiques. Préciser à la fois les valeurs propres de la contrainte et la déformation n'est pas cohérent : cela surcontraindrait le système, puisque cela correspondrait à la donnée de $2D$ variables macroscopiques.

[12]Même dans le cas d'une évolution en temps décrite par un système dynamique avec désordre gelé, cette conclusion qualitative s'applique : il faut remarquer que dans la définition de l'espace des microétats j que l'on a adoptée, chaque j correspond uniquement à des informations géométriques sur les défauts, et non à la donnée de l'ensemble des valeurs réalisées sur chaque site des variables aléatoires contrôlant la dynamique (par exemple des seuils de Coulomb). La géométrie initiale des défauts étant fixée dans un tel modèle (on pourra par exemple les supposer initialement tous intacts), l'information sur les variables définissant nos microétats est initialement totale. Ensuite, le fait que le système mène à des états crackés montre de même que l'entropie S, propriété émergente de la distribution $\{P_j\}$, probabilités sur notre espace de microétats, croît.

On a par contre encore une certaine latitude dans la formulation des contraintes : on a d'une part la latitude de faire porter les contraintes mathématiques sur les valeurs propres de la déformation macroscopique, ou de la contrainte macroscopique. D'autre part, on peut faire porter les contraintes sur les variables mécaniques, soit en fixant leur moyenne d'ensemble, soit en fixant la valeur précise de ces variables pour les microétats réalisés. Schématiquement, on peut énoncer huit façons possibles de poser les contraintes :

2.2.4.1 Contraintes mathématiques portant sur la contrainte macroscopique

Les quatre ensembles possibles correspondent à

1. $\sum_j P_j E_j = U$; $\forall j\ \tau_j = \tau$. Il s'agit de l'ensemble contrainte-énergie que l'on a décrit jusqu'ici. Le paramètre extérieur est fixé par la condition $\forall j\ \tau_j = \tau$.
2. $\sum_j P_j E_j = U$; $\sum_j P_j \tau_j = \tau$. Le paramètre extérieur est libre de fluctuer, et dans la fonction de partition, on doit faire une somme additionnelle sur la valeur réalisée de τ_j, ce qui alourdit notablement le formalisme.
3. $\forall j\ E_j = U$; $\sum_j P_j \tau_j = \tau$. Le paramètre extérieur pour les variables micromécaniques est donné par la condition $\forall j\ E_j = E = U$.
4. $\forall j\ E_j = U$; $\forall j\ \tau_j = \tau$. Alors $P_j = \frac{1}{\#\{j/E_j = U\,;\tau_j = \tau\}}$. Cet ensemble est un ensemble microcanonique pour lequel seul apparaît le sous-ensemble compatible avec les deux conditions. Tous ses membres sont équiprobables.

Ces ensembles s'obtiennent les uns à partir des autres en faisant le même type de transformation que pour passer du microcanonique au canonique, par exemple. Les potentiels correspondant s'obtiennent par transformée de Legendre les uns des autres, soit par rapport à l'énergie, soit par rapport à la contrainte , comme on peut aisément le vérifier. Un résultat classique de physique statistique nous garantit alors que dans la limite thermodynamique[13], les moyennes obtenues avec chacun de ces ensembles doivent coïncider.

Le deuxième ensemble ajoute une sommation, et le quatrième restreint l'ensemble sur lequel effectuer les sommes, ce qui est peu manipulable par la suite. Pour le choix entre les deux ensembles restant, il est nettement plus simple d'obtenir l'énergie d'un état dont on donne les conditions aux frontières extérieures en fixant entièrement τ_j, et les conditions aux frontières intérieures en fixant j, que d'obtenir τ_{axial_j}, avec la donnée conjointe de E, τ_{radial_j} et j. On a pour ces raisons pratiques fait le choix de travailler à l'aide du premier, les autres donnant des résultats équivalents.

2.2.4.2 Contraintes mathématiques portant sur la déformation

on peut également poser les contraintes de quatre façons différentes :

1. $\sum_j P_j E_j = U$; $\forall j\ \varepsilon_j = \varepsilon$.
2. $\sum_j P_j E_j = U$; $\sum_j P_j \varepsilon_j = \varepsilon$.
3. $\forall j\ E_j = U$; $\sum_j P_j \varepsilon_j = \varepsilon$.

[13] qui correspondrait, pour nous, à une taille des volume mésoscopique tendant elle-même vers l'infini, ce qui est possible formellement pour un milieu infini.

4. $\forall j\; E_j = U$; $\forall j\; \varepsilon_j = \varepsilon$.

Là encore, ces ensembles donnent des potentiels transformés de Legendre les uns des autres. Ils ne sont par contre pas équivalents aux précédents.

En manipulant les potentiels en découlant, on peut établir pour chacun d'eux que la première loi peut se mettre sous la forme

$$dE = \tau d\varepsilon + TdS$$

Comme on fait par ailleurs l'hypothèse que l'énergie contenue dans la roche est entièrement d'origine mécanique, on a également

$$dE = \tau d\varepsilon$$

ce qui impliquerait que

$$TdS = 0$$

lors de la charge : le processus devrait être adiabatique.

Ceci est en totale contradiction avec les arguments qualitatifs développés en section 2.2.3. Alors qu'en faisant porter les contraintes sur la contrainte macroscopique, on distingue clairement dans la première loi le terme réversible, de pure élasticité, et le terme irréversible, lié à la création de microfractures, c'est impossible ici. Hors la création et l'évolution des microfractures, qui sont des effets de seuil, phénomènes abrupts en temps, correspondent eux-même à de petites transitions de phase de premier ordre : on doit nécessairement avoir une entropie non nulle associée à la création de microfractures. L'impossibilité de ces ensembles à rendre compte de ceci est liée au fait que les différences en énergie entre charge et décharge sont du premier ordre, $O(d\tau)$, pour une variation de contrainte donnée, puisque $d\tau/d\varepsilon$ est différent dans les deux cas, mais du second ordre, $O(d\varepsilon^2)$, pour une variation de la déformation, puisque τ est identique en charge et en décharge. Choisir ε comme variable indépendante amène donc des résultats incohérents, car l'énergie irréversible associée à la création de microfractures ne peut apparaître avec cette variable.

En conclusion, seuls les quatre ensembles de la section 2.2.4.1 peuvent de façon concevable donner des résultats pertinents, et sont supposés équivalents les unes aux autres. Celui que l'on a décrit jusqu'ici est le plus simple à manipuler par la suite.

Chapitre 3

Un modèle spécifique pour l'hamiltonien

Pour exploiter le formalisme général de physique statistique développé au chapitre 2, il faut maintenant élaborer un modèle spécifique décrivant l'ensemble des microétats possibles, et les expressions des dépendances mécaniques $E_j(\varepsilon_j)$ associées à chacun d'eux. On ne pourra naturellement pas inclure dans ce modèle la généralité des défauts possibles menant à la fracturation, qui sont incroyablement variés suivant le type de roche, et conduiraient à un formalisme beaucoup trop lourd. Par contre, en intégrant suffisamment des aspects qui semblent clé dans la description de ces défauts par rapport au processus de localisation, et dans la façon dont ils interagissent, on peut espérer construire un modèle assez simple qui capture la physique du problème. On a établi (section 1.1) qu'il est plausible que les processus de localisation pour de nombreux types de roche, en tant que phénomènes critiques, appartiennent à la même classe d'universalité. On peut alors espérer que les résultats obtenus sur un modèle spécifique simple puissent avoir une validité très générale, tout comme le modèle d'Ising, simplissime, décrit de nombreuses propriétés des transitions ferro/paramagnétiques de corps très variés.

Les traits principaux que l'on veut incorporer dans cette modélisation sont les suivants :

- portée et directionalité des interactions entre défauts (c'est l'aspect primordial à capturer pour mettre en évidence une transition de phase correspondant à la localisation macroscopique).
- effet de la friction sur les microfractures, dans la mesure où on s'intéresse à des conditions de fortes pressions de confinement.
- prise en compte de phénomènes stabilisateurs du type "wing-cracks", i.e. de la préférence du front de fracture à s'ouvrir suivant les modes tensiles locaux que s'étendre en mode II : on a discuté en annexe A.1 le caractère primordial de cet aspect, qui est la principale origine de la stabilité de l'ouverture d'une fracture sous compression cisaillante avec pression de confinement, par opposition à l'instabilité intrinsèque du problème en tension, au-delà d'une taille critique de défaut.
- aspect abrupt de la dynamique de croissance des fractures, celles-ci apparaissant en général par des déformations finies lors d'un changement infinitésimal de contrainte.

3.1 Principes du modèle

3.1.1 Variables de l'espace des phases

Pour construire l'espace des microétats possibles, on va tenter de définir un paramètre d'ordre en se fondant sur des arguments de symétrie : dans des essais triaxiaux, le chargement imposé est à axisymétrique. En considérant une masse rocheuse virtuellement infinie, soumise à une contrainte uniforme à l'infini, le problème est également symétrique par translation. Tant qu'on n'a pas atteint la localisation macroscopique, la réponse de l'ensemble de la roche respecte les symétries du problème (en faisant abstraction des effets aux frontières de tonnelage, dus à aux difficultés techniques d'imposer dans les expériences réelles un glissement parfait sur les faces axiales des échantillons : la contrainte imposée sur ces faces n'est en pratique pas parfaitement uniforme, puisque la force imposée sur ces frontières comporte inévitablement une composante tangentielle à la surface, variable). La localisation macroscopique se caractérise par l'apparition de bandes de cisaillement macroscopiques traversant la roche, inclinées par rapport à la direction de contrainte principale, où la déformation est concentrée. Il est clair qu'un tel champ de déformation macroscopique brise spontanément les deux symétries, rotationnelle et translationnelle, du problème.

Conformément à la démarche usuelle pour décrire un phénomène critique, on va focaliser la description de nos microétats sur un paramètre d'ordre φ, nul quand les symétries sont respectées, et caractérisant le type et l'amplitude de la brisure de symétrie locale quand elle a lieu. Ce paramètre d'ordre pourra avoir localement des valeurs non nulles tout au long de l'histoire, puisque la déformation d'un milieu hétérogène est localisée aux plus petites échelles (grains et frontières de grains) dès le début de la déformation. Les brisures de symétrie macroscopiques se traduiront par une valeur moyenne du paramètre d'ordre non nul. La fonction d'autocorrélation à deux points de ce paramètre d'ordre devra faire apparaître l'échelle caractéristique à laquelle la déformation peut être considérée comme localisée.

Un microétat indicé j correspondra à la donnée du champ $\varphi(r)$ pour tout point r d'un volume mésoscopique. Ce champ peut être relié à une image géométrique de la configuration de microfractures simplifiées de la façon suivante : on discrétise le milieu en un réseau régulier, de mailles microscopiques de taille linéaire Λ_m– de volume élémentaire $V_m = \Lambda_m^{D}$[1]. Chaque maille est contrainte à contenir au maximum une microfracture, modélisée le plus simplement possible, comme une sphéroïde oblate ayant deux $(D-1)$ grands axes égaux à l, et un troisième négligeable devant eux. Si r spécifie la position de la maille considérée, on définit $\varphi(r)$ comme un divecteur colinéaire à ce petit axe (normale de la microfracture), de norme égale au rapport $\frac{l^D}{\Lambda_m^D}$.

3.1.2 Principe de l'énergie d'interaction entre microfractures

Il faut maintenant associer à chaque microétat, une énergie en fonction de la déformation aux limites d'un volume mésoscopique. Cette énergie se scindera en termes additifs sur le champ φ, du type $\int f(\varphi(r))dr$, et en termes d'interaction entre microfractures impliquant des intégrales multiples emboîtées, du type pour les plus simples $\int\int g(\varphi(r_1), \varphi(r_2))dr_1 dr_2$.

[1] D étant la dimensionnalité de l'espace

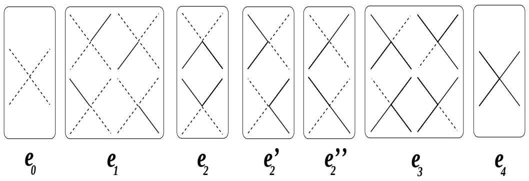


FIG. 3.1 – Exemple de modèle local :
Les fractures sont contraintes à être sur les liens d'un réseau carré, brisés (traits pleins) ou non (pointillés). Avec une hypothèse de localité, on peut écrire toutes les énergies d'interaction possibles entre liens voisins, càd joignant un même vertex. Ces énergies doivent respecter les symétries du problème, i.e. être inchangées par translation (indépendantes de la position), et par symétrie par rapport à un axe vertical ou horizontal (directions de contrainte principales). On représente les sept termes possibles, et les vertex associés.

Une hypothèse de localité sur les interactions entre microfractures nous permettrait de restreindre le terme d'interaction à des contributions entre microfractures suffisamment proches. En demandant alors que seules les interactions entre plus proches voisins contribuent, et en exigeant que ces termes aient les propriétés de symétrie du problème, il est alors possible d'écrire la forme générale de ces interactions[2]. Cette approche permettrait en principe d'obtenir la forme la plus générale d'interactions locales, réduites à des interactions de plus proches voisins.

Pour ce problème, il est toutefois très important de noter qu'il existe également entre microfractures, des interactions non-locales de longue portée : en effet, les microfractures interagissent entre elles via les perturbations du champ de contrainte qu'elles induisent dans les solutions du problème élastostatique. Or ces interactions élastiques sont tout-à-fait non-locales, au sens suivant : le champ de contrainte $\delta\tau$ induit par une microfracture tombe en $\frac{1}{r^D}$ à grande distance. On peut exprimer la contrainte en un point pris comme référence $r = 0$, comme la contrainte à l'infini plus la somme des perturbations dues à chaque microfracture. L'influence des microfractures éloignées d'une distance supérieure à l, suffisante pour que l'approximation ci-dessus soit valable, est $\sum_{\{\text{microcrack } i / r_i > l\}} \frac{f(\hat{r}_i, \varphi(r_i))}{r_i^D}$, où la fonction f ne dépend que de la direction relative de la fracture i par rapport au point considéré, donnée par le vecteur unitaire $\hat{r}_i$, et l'état de la fracture i, $\varphi(r_i)$. D étant la dimensionnalité de l'espace, si les microfractures sont réparties avec une densité approximativement uniforme, on voit donc qu'avec cette forme on ne peut a priori donner de distance l au-delà de laquelle cette contribution des fractures lointaines sera négligeable, puisqu'en approchant cette contribution par une intégrale on aura une mesure $d^D r$ qui a exactement la même dimensionnalité que le dénominateur r^D, ce qui semble pouvoir donner des divergences logarithmiques de ce terme dans certaines configurations[3].

[2]Par exemple, dans le cas d'un milieu bidimensionnel, en contraignant de surcroît les microfractures à être de taille fixée et situées sur les liens d'un réseau carré incliné à 45° sur la contrainte principale, on peut considérer qu'un microétat correspond à la donnée de l'état de chaque lien – brisé ou non. Les mailles du réseau représentent alors en quelque sorte des grains réguliers, et les liens des frontières de grain. En exigeant que les seuls termes d'interaction non nuls impliquent des liens joignant un même nœud, la forme générale de ces termes respectant les symétries du problème est très simple, et le modèle résultant est isomorphe à un modèle d'Ising avec interactions à deux et quatre spins (d'après Lieb et Wu [1972], Wu [1971] et Baxter[1971]). Voir la figure 3.1.

[3]La condition pour qu'une telle distance existe est plus subtile : il faut d'abord étudier les propriétés de la fonction f. Si elle est de moyenne nulle sur l'ensemble des états possibles φ, on aura un phénomène du type "écrantage de Debye" : en groupant dans cette somme, suivant une direction $\hat{r}$, les sites par segments de longueur

La portée des interactions étant précisément le type de caractéristique d'un système physique influant sur la nature d'un point critique, il est capital d'inclure cette nonlocalité des interactions élastiques dans notre modélisation. On a choisi d'incorporer ceci de la façon suivante : considérant une configuration de fractures donnée, l'énergie se scinde en une part caractérisant l'énergie irréversiblement stockée dans le milieu, consommée dans la formation des fractures, et une énergie élastique réversible. Les fractures sont supposées être petites par rapport aux cellules les contenant. On fera l'hypothèse qu'une fracture modifie le milieu par deux effets principaux :

1. Il nécessite une certaine énergie de formation modélisée comme indépendante de la présence des autres fractures (ie l'énergie résiduelle est un terme additif)
2. il modifie le comportement mécanique de la cellule en remplaçant simplement le tenseur des modules élastiques du milieu non endommagé par un tenseur effectif.

Les interactions viendront donc entièrement du deuxième effet. Les termes énergétiques correspondant à cette modification des propriétés mécaniques se scindent eux-même en deux : pour des microfractuires éloignées les unes des autres (séparées d'une distance nettement supérieure à leur taille), la perturbation de contrainte induite par une des fractures, au voisinage de l'autre, est dans le régime asymptotique de champ lointain : la taille finie de ces fractures ne joue aucun rôle dans ce cas. Ce régime asymptotique correspond aux interactions nonlocales entre fractures, essentielles pour ce problème. Pour des microfractures voisines, par contre, l'effet de taille finie des microfractures est sensible, et on a un terme additionnel représentant l'écart de la perturbation de contrainte réelle, par rapport au régime asymptotique de champ lointain.

Le principe d'obtention des interactions de longue portée est le suivant : on considère les fractures comme petites par rapport aux cellules, et il est valide de faire pour le comportement effectif d'une cellule repérée par sa position r, une approximation d'élasticité linéaire $d\tau(r) = C^{\text{efficace}}(\varphi(r))d\varepsilon(r)$: Les interactions dues à des dérivées d'ordre supérieur à un du champ de déplacement sont négligées. La modification du tenseur local C sera également faible –bien qu'on ait apparition d'une anisotropie due à la présence de la fracture–, et on pourra obtenir la solution du problème élastostatique par approximation de Born. En poussant cette approximation jusqu'à l'ordre 2 en φ, on aura les premiers termes non-locaux, que l'on retiendra pour modéliser l'énergie d'interaction entre microfractures.

On verra en section 4.4 que la seule prise en compte des interactions de longue portée permet de prédire une transition de localisation macroscopique, mais que la nature de cette transition est incompatible avec certaines observables macroscopiques. La prise en compte simultanée d'interactions de courte portée est donc également capitale dans la physique de ce problème. On les modélisera en section 3.6 comme des interactions de plus proches voisins, tout en gardant une forme assez simple par rapport au type le plus général discuté plus haut, bien que cela soit possible en principe. En effet, en étudiant les conséquences des différents modèles en section 4.4, on verra que la nature des transitions qui nous intéressent est dictée par la forme précise des interactions de longue portée, conjointement à la présence d'interactions à courte portée, mais est relativement peu sensible à la nature précise de ces dernières.

ξ (la longueur de corrélation), la somme des contributions de ces segments correspondra à cette moyenne, et des interférences destructives entre ces contributions garantiront que cette somme est négligeable à partir d'une certaine distance.

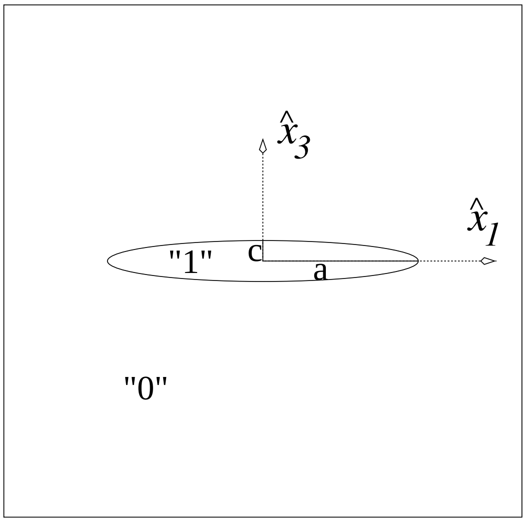


FIG. 3.2 – Idéalisation d'une microfracture ellipsoïdale :
l'inclusion est désignée par l'indice 1, la matrice par l'indice 0. L'axe $\hat{x}_2$ est perpendiculaire à la figure.

3.2 Constantes élastiques effectives pour une microfracture

Afin d'établir la forme des interactions de longue portée entre fractures, on va maintenant s'intéresser à la variation des modules effectifs de cellules contenant des microfractures supposées petites par rapport à leur taille – ce qui revient à négliger les effets de taille finie des microfractures, sensibles uniquement dans un proche voisinage.

3.2.1 Lien du problème avec le tenseur d'Eshelby

Une microfracture est ici modélisée comme une inclusion sphéroïdale oblate, de demi-grands axes a, b, c orientés respectivement suivant les directions orthogonales $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$, avec $a = b = \frac{l}{2} >> c$ – voir figure 3.2. L'intérieur de l'inclusion est supposé être beaucoup moins dur que la matrice, i.e. avoir des modules élastiques beaucoup plus faibles. On fait également l'hypothèse simplificatrice que l'on n'a pas de déformation libre (*stress-free strain* en anglais) dans l'inclusion, c.à.d. que lorsqu'aucune contrainte n'est exercée aux frontières de l'inclusion, elle a la même forme que si la matière contenue était identique à la matrice. On cherche à déterminer le tenseur des modules élastiques effectifs C pour cette cellule, qui est par définition tel que dans une variation des conditions aux frontières uniformes imposées $d\varepsilon^{\infty}$, on ait

$$d\overline{\tau}_{ij} = C_{ijkl} d\overline{\varepsilon}_{kl} \tag{3.1}$$

où les barres supérieures désignent les moyennes en volume sur la cellule. Comme on a supposé une déformation libre nulle dans l'inclusion le champ de déformation à contrainte nulle est $\varepsilon \equiv 0$. Les deux milieux étant décrits par l'élasticité linéaire, en intégrant cette loi depuis un état de contrainte nul, on obtient qu'elle est équivalente à

$$\overline{\tau}_{ij} = C_{ijkl}\overline{\varepsilon}_{kl} \tag{3.2}$$

On a par définition

$$\begin{aligned}\overline{\tau}_{ij} \hat{=} \frac{1}{V_m}\int_\Omega \tau_{ij} d^D x &= (1-v)\overline{\tau}^0_{ij} + v\overline{\tau}^1_{ij} \quad (3.3)\\ \overline{\varepsilon}_{ij} \hat{=} \frac{1}{V_m}\int_\Omega \varepsilon_{ij} d^D x &= (1-v)\overline{\varepsilon}^0_{ij} + v\overline{\varepsilon}^1_{ij} \quad (3.4)\end{aligned}$$

avec le volume relatif (porosité de la cellule) $v \hat{=} \frac{V_1}{V_m}$, son complémentaire (compacité) $1 - v = \frac{V_0}{V_m}$, $\overline{\varepsilon}^0_{ij} \hat{=} \frac{1}{V_0}\int_{\Omega_0} \varepsilon_{ij} d^D x$, etc.

Dans la matrice Ω_0 les modules élastiques sont uniformes, C^0_{ijkl}, et dans l'inclusion Ω_1 ils sont uniformément égaux à C^1_{ijkl}. (3.3) et (3.4) s'expriment donc

$$\begin{aligned}\overline{\tau}_{ij} &= (1-v)C^0_{ijkl}\overline{\varepsilon}^0_{kl} + vC^1_{ijkl}\overline{\varepsilon}^1_{kl} \quad (3.5)\\ \overline{\varepsilon}_{ij} &= (1-v)\overline{\varepsilon}^0_{ij} + v\overline{\varepsilon}^1_{ij} \quad (3.6)\end{aligned}$$

On utilise alors le résultat exact dérivé par Wu [1966] , sur la base de la théorie de Eshelby [1957] : la déformation dans l'inclusion est uniforme, et est reliée à la déformation à l'infini par un tenseur T :

$$\overline{\varepsilon}^1_{ij} = T_{ijkl}\varepsilon^\infty_{kl} \tag{3.7}$$

On fait alors l'approximation $\varepsilon^\infty \simeq \overline{\varepsilon}$, valable car on considère de petites inclusions $v \simeq 0$. Cette relation exacte devient alors

$$\overline{\varepsilon}^1_{ij} = T_{ijkl}\overline{\varepsilon}_{kl} \tag{3.8}$$

La contrainte (3.6) impose alors

$$\begin{aligned}(1-v)\overline{\varepsilon}^0_{ij} &= \overline{\varepsilon}_{ij} - v\overline{\varepsilon}^1_{ij}\\ &= (\delta_{ik}\delta_{jl} - vT_{ijkl})\,\overline{\varepsilon}_{kl}\end{aligned}$$

càd

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon}^0_{ij} &= W_{ijkl}\overline{\varepsilon}_{kl} \quad (3.9)\\ \text{avec } (1-v)W_{ijkl} &\hat{=} (\delta_{ik}\delta_{jl} - vT_{ijkl}) \quad (3.10)\end{aligned}$$

On peut donc avec (3.8), (3.9) et (3.10), écrire (3.5) sous la forme

$$\begin{aligned}\overline{\tau}_{ij} &= \left[(1-v)C^0_{ijkl}W_{klmn} + vC^1_{ijkl}T_{klmn}\right]\overline{\varepsilon}_{mn}\\ &= \left[C^0_{ijkl}\left(\delta_{km}\delta_{ln} - vT_{klmn}\right) + vC^1_{ijkl}T_{klmn}\right]\overline{\varepsilon}_{mn} \quad (3.11)\end{aligned}$$

ce qui comparé à (3.2), définit nos modules effectifs. Comme on a supposé de plus que l'inclusion est beaucoup moins dure que la matrice, le dernier terme est négligeable et on obtient en inversant les indices (kl) et (mn),

$$C_{ijkl} = C^0_{ijkl} - vC^0_{ijmn}T_{mnkl} \tag{3.12}$$

Le tenseur T, défini par Wu [1966], se relie au tenseur S défini par Eshelby [1957]. On renverra à ces travaux pour les définitions de T et S, et les relations entre eux.

3.2.2 Expression des modules effectifs dans le repère propre à la microfracture

On montrera en annexe C.1, en adaptant les résultats des deux articles cités ci-dessus à notre problème particulier, que le tenseur des modules élastiques effectifs reste symétrique sous l'inversion des deux premiers ou deux derniers indices – ce qui est une trivialité : symétrie de $\overline{\varepsilon}$ et $\overline{\tau}$ par rapport à leur indices, par définition –, ainsi que par rapport à l'inversion de la première et deuxième paire d'indice – ce qui n'est pas systématique pour des modules *effectifs.* En faisant l'identification des paires d'indices latins (ij) sur de nouveaux indices simples notés en lettres grecques α, $(11) \to 1$, $(22) \to 2$, $(33) \to 3$, $(23) \to 4$, $(31) \to 5$ et $(12) \to 6$, on établit dans cette annexe que

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} C^0_{11}(1-\chi_1) & C^0_{12}(1-\chi_2) & C^0_{13}(1-\chi_3) & 0 & 0 & 0 \\ C^0_{21}(1-\chi_2) & C^0_{22}(1-\chi_1) & C^0_{23}(1-\chi_3) & 0 & 0 & 0 \\ C^0_{31}(1-\chi_3) & C^0_{32}(1-\chi_3) & C^0_{33}(1-\chi_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^0_{44}(1-\chi_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^0_{55}(1-\chi_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^0_{66} \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

où en notant

$$\gamma \hat{=} \frac{16}{3}\frac{l^3}{V_m} = \frac{16}{3}\left|\varphi\right| \tag{3.14}$$

les termes correctifs par rapport à une cellule intacte sont donnés à partir du coefficient de Poisson σ de la matrice par

$$\chi_1 = \frac{\sigma^2}{1-2\sigma}\gamma \tag{3.15}$$

$$\chi_2 = \frac{\sigma(1-\sigma)}{1-2\sigma}\gamma \tag{3.16}$$

$$\chi_3 = \frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma}\gamma \tag{3.17}$$

$$\chi_4 = \frac{1-\sigma}{2-\sigma} \tag{3.18}$$

et où le tenseur C^0 est celui de la matrice intacte, supposée isotrope, i.e. avec λ et μ les paramètres de Lamé du matériau[4],

$$\left(C^0_{\alpha\beta}\right)_{(\alpha\beta)\in\{1,..,6\}^2} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

[4]On rappelle la définition du coefficient de Poisson à partir des paramètres de Lamé :

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{3.19}$$

On peut faire quelques remarques sur les propriétés (prévisibles) de ces modules effectifs (3.13) :

1. la présence d'une fracture modifie les propriétés effectives de la maille la contenant d'une petite correction, comme les trois coefficients χ, proportionnels à $|\varphi| = l^3/V_m$, sont petits devant 1. La présence de la fracture assouplit le matériau, puisque (3.15), (3.16) et (3.17) montrent que les coefficients χ sont positifs (pour des raisons thermodynamiques, on doit toujours avoir $-1 < \sigma < 0.5$), et qu'ils interviennent négativement dans les modules effectifs.
2. D'autre part, on peut vérifier que les modules effectifs sont inchangés en échangeant les indices des directions $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$, comme il est naturel vu qu'on a supposé $a = b$. Par contre, ils ne sont pas invariants sous l'échange d'une de ces deux directions avec $\hat{x}_3$ normal à la fracture (par exemple $C_{1111} = C_{11} = C^0_{11}(1 - \chi_1) = (\lambda + 2\mu)(1 - \chi_1) \neq (\lambda + 2\mu)(1 - \chi_3) = C^0_{33}(1 - \chi_3) = C_{33} = C_{3333}$) : ceci montre que la présence de la fracture introduit une anisotropie du comportement de la maille.
3. Enfin, une propriété non triviale est que ces modules sont tout-à-fait indépendants de l'épaisseur de la fracture c (dans la limite où $c \ll a = b$) : les corrections sont simplement proportionnelles à $|\varphi| = l^3/V_m$.

3.2.3 Modules effectifs en fonction du champ φ local

On veut exprimer le tenseur des modules élastiques effectifs C, dans un repère général non lié à la fracture elle-même – jusqu'ici les axes ont été définis relativement à l'inclusion –, en fonction du champ local φ de la maille considérée.

On va faire une restriction importante sur le modèle : vu la lourdeur des dérivations qui découlent, on a choisi de se restreindre dans un premier temps à des modèles bidimensionnels. Ceci peut notablement modifier les résultats qui suivront sur la transition vers la localisation, puisqu'il est bien connu que la dimensionnalité de l'espace joue couramment un rôle dans la nature du point critique. Expérimentalement, on a vu en section 1.1.4.3 que la compression d'un empilement de pailles cylindriques, système de nature plutôt bidimensionnelle (modèle de Schneebeli), semble appartenir à la même classe d'universalité que les expériences triaxiales ou biaxiales sur des roches tridimensionnelles : l'exposant γ déterminé dans les courbes de charge est indiscernable des autres. Ceci encourage à espérer que la nature de la transition ne sera pas affectée par le fait que l'on travaille en dimension $D = 2$ ou 3. Conceptuellement, on peut imaginer que les interactions élastiques entre deux fractures seront nettement plus fortes lorsque leurs normales et le vecteur de position relative, sont dans un même plan. Ceci permettrait peut-être, en négligeant les interactions quand ce n'est pas le cas, et en restreignant les fractures à être dans une des huit orientations déterminées par les plans bissectrices des trois directions de contrainte principale, de décrire un système tridimensionnel comme un produit de deux systèmes bidimensionnels orthogonaux indépendants, contenant chacun la direction de contrainte principale axiale et une direction radiale. En tout état de cause, la seule façon d'être fixé sur cette question serait de considérer un modèle pleinement tridimensionnel, et de comparer les résultats. Ceci n'a pas été mené à bout dans le cadre de cette thèse.

La même dérivation en dimension $D = 2$, en refaisant les calculs d'intégrales elliptiques d'Eshelby pour ce cas, est faite en annexe (C.1.3). Le tenseur C conserve naturellement une structure analogue à celui obtenu en (3.13) : on obtient

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)(1-\zeta_1|\varphi|) & \lambda(1-\zeta_2|\varphi|) & 0 \\ \lambda(1-\zeta_2|\varphi|) & (\lambda+2\mu)(1-\zeta_2|\varphi|) & 0 \\ 0 & 0 & \mu(1-\zeta_3|\varphi|) \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

où on a identifié les paires d'indices latins à des indices grecs simples avec la convention suivante : (11) $\to$ 1, (22) $\to$ 2, et (12) $\to$ 3. Les coefficients ζ sont des constantes positives reliées aux constantes de Lamé du matériau intact :

$$\zeta_1 = \frac{\pi}{6}\frac{\lambda^2}{\mu(\lambda+2\mu)} \tag{3.22}$$

$$\zeta_2 = \frac{\pi}{6}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda} \tag{3.23}$$

$$\zeta_3 = \frac{\pi}{12}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \tag{3.24}$$

Une maille ne contenant aucune fracture correspond par convention à une valeur du champ local $\varphi = 0$, et l'expression (3.21) s'identifie bien dans ce cas aux modules du matériau intact isotrope. Les trois coefficients ζ sont toujours positifs, puisque pour les matériaux connus, et bien sûr les roches, les constantes de Lamé sont positives.

On va faire une restriction supplémentaire sur le modèle : les fractures sont contraintes à être à 45° de l'axe de contrainte principale, ce qui se justifie par le fait que ces directions correspondent au cisaillement maximal de la contrainte macroscopique, et que les fractures arrivent principalement en mode II dans les cisaillements compressifs avec pression de confinement. Cette restriction rend naturellement le formalisme qui en découle beaucoup plus maniable. La différence entre un modèle de ce type, et un plus général où l'orientation des fracts est laissée entièrement libre, est de même nature que la différence entre un modèle d'Ising et de Heisenberg, qui donnent des résultats en de nombreux points semblables pour la nature de la transition ferro/paramagnétique. On pense donc que les résultats qu'on établira sont peu touchés par cette restriction, mais une fois de plus, la seule façon d'en être sûr serait de traiter le modèle où l'orientation est entièrement libre, et de comparer.

Avec ces restrictions, le paramètre d'ordre φ, qui était un directeur, peut se mettre sous la forme d'un réel : par convention, les fractures ayant leurs normales suivant une bissectrice de $(\hat{e}_{\mathrm{axial}}, \hat{e}_{\mathrm{radial}})$ seront repérées par $\varphi > 0$, celles suivant l'autre bissectrice, par $\varphi < 0$. L'amplitude du champ est donnée, elle, par $|\varphi| = \frac{l^2}{\Lambda_m^2}$, où l est la longueur de la microfracture, et Λ_m le côté d'une maille du réseau carré qui représente notre milieu discrétisé pour la définition des points de référence du champ φ.

On représente en figure 3.3 ce réseau , ainsi que des directions $\hat{e}_1$ et $\hat{e}_2$ de référence pour notre milieu. Deux fractures, correspondant à des champs φ de signes opposés, y sont également représentées pour fixer cette convention de signe. L'expression (3.21) du tenseur des modules effectifs d'une maille contenant une fracture, valable dans le repère propre de cette fracture – où la première direction est suivant son extension, la deuxième suivant son épaisseur –, se transforme aisément pour avoir son expression dans le repère de référence $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ ainsi défini : Si $\varphi > 0$, le repère propre coïncide avec celui de référence. Si $\varphi < 0$, on inverse simplement les indices 1 et 2 dans les composantes, ce qui au vu de la forme (3.21), échange simplement les deux termes $C_{11} = C_{1111}$ et $C_{22} = C_{2222}$.

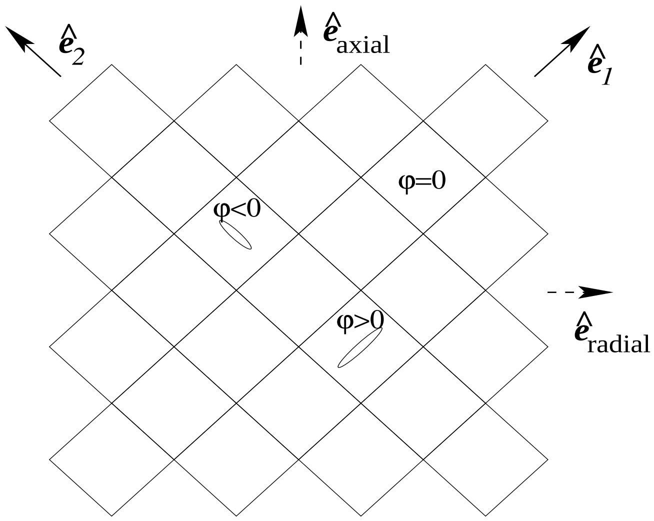


FIG. 3.3 – Définition d'un repère $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ fixé au milieu, et de la convention de signe pour le champ φ.

Décomposant ces deux formes en un terme pair et un terme impair en φ, on établit l'expression générale

$$C(r) = C^0 + \delta C \tag{3.25}$$

$$\delta C \,\hat{=}\, A\varphi(r) + B|\varphi(r)| \tag{3.26}$$

$$\text{avec} \quad (A_{\alpha\beta}) \,\hat{=}\, \begin{pmatrix} -(\lambda+2\mu)\eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda+2\mu)\eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

$$\text{et} \quad (B_{\alpha\beta}) \,\hat{=}\, \begin{pmatrix} -(\lambda+2\mu)(\eta_1+\eta_2) & -\lambda\eta_2 & 0 \\ -\eta_2 & -(\lambda+2\mu)(\eta_1+\eta_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\eta_3 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

où on a redéfini des paramètres η, équivalents aux précédents ζ, par la relation

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2}, \zeta_2, \zeta_3) \tag{3.29}$$

. On remarque que η_2 et η_3 sont positifs, ainsi que $\eta_1 + \eta_2$.

3.3 Énergie élastique pour une population de n fractures à déformation donnée

3.3.1 Énergie potentielle élastique en fonction de la perturbation des modules δc

On veut déterminer l'énergie potentielle élastique $E_j^{\mathrm{el}}(\varepsilon^{(0)})$ d'un microétat dénoté par j, qui correspond à la spécification du champ φ en tout point du mésovolume Ω, en fonction d'un déplacement linéaire $u^{(0)}$ imposé aux frontières correspondant à une déformation uniforme $\varepsilon^{(0)}$ par

$$\forall x \in \partial\Omega,\ u(x) = \varepsilon^{(0)}.x \tag{3.30}$$

Ce microétat correspond à un tenseur des modules élastiques variable dans le volume, donné par (3.25). L'équation d'équilibre élastostatique déterminant le champ de déplacement u, est

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega,\ \nabla.\tau = \nabla.[(C^0 + \delta C) : \varepsilon] &= 0 & (3.31)\\ \text{i.e. } \partial_j \tau_{ij} = C^0_{ijkl}\partial_j\partial_k u_l + \partial_j[\delta C_{ijkl}\partial_k u_l] &= 0 & (3.32)\end{aligned}$$

où par convention, ∂_i désigne la dérivée partielle d'une quantité par rapport à la coordonnée x_i, les autres coordonnées étant fixes. La deuxième égalité vient du fait que C^0, tenseur des modules du matériau intact, est uniforme.

Ce problème étant parfaitement linéaire, on utilise la fonction de Green de l'élastostatique G, associée au milieu homogène non endommagé, solution du problème

$$\begin{aligned} C^0_{ijkl}\partial_j\partial_k G_{lm}(x,x') + \delta_{im}\delta^D(x-x') &= 0 & (3.33)\\ \forall x \in \partial\Omega,\ G_{ij}(x,x') &= 0 & (3.34)\end{aligned}$$

$G_{ij}(x,x')$ est par définition la composante selon $\hat{e}_i$ du champ de déplacement créé en x par une force ponctuelle $\hat{e}_j$ appliquée au point x', sous conditions aux frontières de déplacement nul, pour le milieu intact. Notant $u^{(0)}$ le champ de déplacement qu'on aurait dans un milieu parfaitement homogène, qui est donné par l'extension homogène en déformation dans le volume des conditions aux frontières (3.30),

$$\forall x \in \Omega,\ u^{(0)}(x) = \varepsilon^{(0)}.x \tag{3.35}$$

on établit que le champ de déplacement u doit vérifier

$$\forall x \in \Omega,\ u_i(x) = u_i^{(0)}(x) + \int_{x'\in\Omega} G_{ij}(x,x')\partial_{k'}[\delta c_{jklm}\partial_{l'} u_m](x')d^D x' \tag{3.36}$$

où par convention, $\partial_{i'}$ désigne les dérivées partielles par rapport à x'_i, les autres variables (autres coordonnées x'_j, $j \neq i$ et éventuellement les coordonnées x_l si la grandeur en dépend) étant fixées.

Comme on a fait l'hypothèse que les fractures sont petites par rapport aux cellules les contenant, i.e. $|\varphi| \ll 1$, δC étant proportionnel à une combinaison linéaire de φ et $|\varphi|$ – relations (3.25) à (3.28) –, le champ de déplacement u sera proche du champ $u^{(0)}$. On va déterminer ce champ par perturbation en l'écrivant sous forme d'un développement en φ :

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)} + \ldots,\text{avec } u^{(n)} \in O(\varphi^n) \tag{3.37}$$

L'équation (3.36) se met alors sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_i^{(n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x'\in\Omega} G_{ij}(x,x')\partial_{k'}[\delta c_{jklm}\partial_{l'} u_m^{(n-1)}](x')d^D x'$$

ce qui permet en identifiant terme à terme en ordre de φ, et en rappelant que δc est $O(\varphi)$, d'établir

$$\forall n,\ u_i^{(n+1)}(x) = \int_{x'\in\Omega} G_{ij}(x,x')\partial_{k'}[\delta c_{jklm}\partial_{l'} u_m^{(n)}](x')d^D x' \tag{3.38}$$

La solution obtenue ainsi en conservant les termes de la perturbation jusqu'à l'ordre n, est l'approximation de Born au même ordre. On remarque au passage que puisque les conditions aux frontières en déplacement sont vérifiée par le champ d'ordre 0, tous les termes suivants sont identiquement nuls sur les bords :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \partial\Omega,\ u^{(n)}(x) = 0 \tag{3.39}$$

On définit de même en expansion en φ, les champs de déformation et contrainte :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{ij}^{(n)} \tag{3.40}$$

$$\tau_{ij} = (C^0_{ijkl} + \delta c_{ijkl})\varepsilon_{kl} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{ij}^{(n)} \tag{3.41}$$

Identifiant les termes du développements, on a à tout ordre n,

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^{(n)} + \partial_j u_i^{(n)}) \tag{3.42}$$

$$\tau_{ij}^{(n)} = C^0_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(n)} + \delta c_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(n-1)} \tag{3.43}$$

avec la convention $\varepsilon^{(-1)} = 0$.

La densité d'énergie élastique est donnée par

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2}\tau : \varepsilon \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_p \tau^{(p)}\right] : \left[\sum_q \varepsilon^{(q)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{a=0}^{n} \tau^{(a)} : \varepsilon^{(n-a)} \end{aligned}$$

ie en développant e en φ,

$$e = \sum_n e^{(n)} \tag{3.44}$$

$$e^{(n)} = \frac{1}{2}\sum_{a=0}^{n} \tau^{(a)} : \varepsilon^{(n-a)} \tag{3.45}$$

L'énergie potentielle élastique $E_j^{\mathrm{el}}(\varepsilon^{(0)})$ est par définition la densité moyenne d'énergie élastique sur le volume mésoscopique :

$$E^{\mathrm{el}} = \sum_n E^{(n)} \tag{3.46}$$

$$E^{(n)} = \frac{1}{V}\int_\Omega e^{(n)} \tag{3.47}$$

Pour chaque terme de ce développement, on va utiliser la condition aux bords (3.39) pour éliminer la plupart des termes :

$$\begin{aligned}
2VE^{(n)} &= \int_\Omega \sum_{a=0}^{n} \tau^{(a)} : \varepsilon^{(n-a)} d^D x \\
&= \int_\Omega \sum_{a=0}^{n} \tau^{(a)} : \left[\nabla u^{(n-a)}\right] d^D x \\
&= \int_\Omega \sum_{a=0}^{n} \left(\nabla . \left[\tau^{(a)} . u^{(n-a)}\right] - \left[\nabla . \tau^{(a)}\right] . u^{(n-a)}\right) d^D x \\
&= \int_{\partial\Omega} \sum_{a=0}^{n} \hat{n} . \tau^{(a)} . u^{(n-a)} d^{D-1} x \\
&= \int_{\partial\Omega} \hat{n} . \tau^{(n)} . u^{(0)} d^{D-1} x \\
&= \int_\Omega \tau^{(n)} : \varepsilon^{(0)} d^D x
\end{aligned}$$

où la symétrie de τ par rapport à ses indices permet de passer à la deuxième ligne ; l'équation d'équilibre (3.31) qui est naturellement vérifiée séparément par tous les ordres $\tau^{(n)}$, annule les seconds termes de la troisième ligne ; on passe à la quatrième par le théorème de divergence de Gauss, avec $\hat{n}$ la normale à la surface $\partial\Omega$; et la condition aux frontières permet d'annuler tous les termes de la somme sauf un pour passer à la cinquième. La dernière ligne s'obtient directement en utilisant à nouveau le théorème de Gauss. D'où, en notant toujours d'une barre supérieure une moyenne volumique,

$$E^{(n)} = \frac{1}{2}\overline{\tau^{(n)}} : \varepsilon^{(0)} \tag{3.48}$$

Explicitons les premiers termes de ce développement de l'énergie élastique : le premier est trivialement, puisque les champs sont homogènes et d'après les symétries de C^0,

$$E^{(0)} = \frac{1}{2}\tau^{(0)} : \varepsilon^{(0)} = \frac{1}{2}\varepsilon^{(0)} : C^{(0)} : \varepsilon^{(0)} \tag{3.49}$$

Ce terme est naturellement indépendant du champ φ, puisqu'il correspond à la référence de la perturbation, l'état vierge de toute fracture.

Le second, en utilisant (3.43), est

$$\begin{aligned}
E^{(1)} &= \frac{1}{2V}\int_\Omega \left(\varepsilon^{(1)}(x) : C^{(0)} : \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(0)} : \delta c(x) : \varepsilon^{(0)}\right) d^D x \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\partial\Omega} u^{(1)} . (C^{(0)} : \varepsilon^{(0)}) . \hat{n} d^{D-1} x + \frac{1}{2}\varepsilon^{(0)} : \frac{1}{V}\int_\Omega \delta c(x) d^D x : \varepsilon^{(0)} \\
E^{(1)} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{(0)} : \overline{\delta c} : \varepsilon^{(0)}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

où on a à nouveau utilisé le théorème de Gauss et la condition de bords pour éliminer le premier terme.

Ce terme d'ordre φ est dépendant du microétat, mais il est purement local : il correspond à une simple intégrale de δc, et est donc un terme linéaire en $(\varphi, |\varphi|)$. Pour obtenir les interactions entre fractures et leurs portées, ce qui motive ce modèle élastique, on doit pousser l'approximation de Born au deuxième ordre :

$$\begin{aligned}
E^{(2)} &= \frac{1}{2V}\int_\Omega \left(\varepsilon^{(2)}(x) : C^{(0)} : \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} : \delta c(x) : \varepsilon^{(0)}\right) d^D x \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{V}\int_\Omega \varepsilon^{(1)}(x) : \delta c(x) : \varepsilon^{(0)} d^D x \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{V}\int_\Omega \frac{1}{2}(\partial_a u_b^{(1)} + \partial_b u_a^{(1)})(x)\delta c_{abcd}(x)\varepsilon_{cd}^{(0)} d^D x \\
E^{(2)} &= \frac{1}{2}\frac{1}{V}\int_\Omega \partial_b u_a^{(1)}(x)\delta c_{abcd}(x)\varepsilon_{cd}^{(0)} d^D x \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

où le premier terme a été éliminé de même que pour $E^{(1)}$, et la dernière ligne résulte de la symétrie de δc_{abcd} par rapport à l'échange (ab). L'expression (3.38) est alors utilisée pour obtenir $u^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
u_a^{(1)}(x) &= \int_{x'\in\Omega} G_{aj}(x,x')\partial_{k'}[\delta c_{jklm}\partial_{l'} u_m^{(0)}](x') d^D x' \\
&= \int_{x'\in\Omega} G_{aj}(x,x')\partial_{k'}[\delta c_{jklm}](x')\varepsilon_{lm}^{(0)} d^D x' \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

comme le champ $u^{(0)}$ est un simple champ de gradient constant $\varepsilon^{(0)}$. Réintroduisant ceci dans (3.51), on obtient

$$E^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{V}\int_{x\in\Omega}\int_{x'\in\Omega} \varepsilon_{cd}^{(0)}\delta c_{abcd}(x)\partial_b G_{aj}(x,x')\partial_{k'}\delta c_{jklm}(x')\varepsilon_{lm}^{(0)} d^D x d^D x' \qquad (3.53)$$

Cette expression implique deux intégrales entrelacées de façon non triviale sur le volume, l'intégrant reliant $\varphi(x)$ et $\varphi(x')$: il s'agit d'un terme non-local et nonlinéaire en φ qui sera notre terme d'interaction. On peut dès lors négliger les termes supérieurs de l'approximation de Born. Comme la fonction de Green G_{aj} est nulle sur les frontières par hypothèse, on peut intégrer ceci par parties (par rapport à la dérivée partielle notée ∂_b ci-dessus), et ignorer le terme de bords pour obtenir

$$E^{(2)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{V}\int_{x\in\Omega}\int_{x'\in\Omega} \varepsilon_{cd}^{(0)}\partial_b\left[\delta c_{abcd}\right](x) G_{aj}(x,x')\partial_{k'}\left[\delta c_{jklm}\right](x')\varepsilon_{lm}^{(0)} d^D x d^D x' \qquad (3.54)$$

En faisant l'hypothèse que l'on n'a pas de fractures sur la frontière du mésovolume, on pourrait alternativement faire porter les dérivées partielles entièrement sur G. Cette expression implique une double intégrale sur le champ φ en x et x', avec un opérateur symétrique reliant les deux points, que l'on appellera un propagateur[5].

3.3.2 Énergie potentielle en fonction explicite du champ φ

On va maintenant utiliser les résultats de la section (3.2) pour réécrire cette énergie potentielle élastique en fonction d'opérateurs sur le champ φ.

[5] terminologie issue de la théorie quantique des champs.

– Introduisons tout d'abord quelques notations : on note la dilatation et l'opposé du cisaillement macroscopiques[6],

$$\Delta \;\hat{=}\; \varepsilon_{ii}^{\text{macroscopique}} = \varepsilon_{\text{radial}} + \varepsilon_{\text{axial}} \tag{3.55}$$

$$\gamma \;\hat{=}\; -(\varepsilon_{\text{radial}} - \varepsilon_{\text{axial}}) \tag{3.56}$$

Le repère que l'on a choisi étant incliné à 45° des axes de contrainte principales $(\hat{e}_{\text{radial}}, \hat{e}_{\text{axial}})$, (cf figure 3.3), la déformation macroscopique s'y exprime, avec R l'opérateur de rotation correspondant ($R_{11} = R_{22} = \cos(45°) = 1/\sqrt{2}$, $R_{21} = -R_{12} = \sin(45°) = 1/\sqrt{2}$),

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = R^T \begin{pmatrix} \varepsilon_{\text{radial}} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\text{axial}} \end{pmatrix} R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_{\text{radial}} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\text{axial}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{i.e. } \varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Delta & \gamma \\ \gamma & \Delta \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

– D'autre part, pour alléger les notations, on va à partir de maintenant adopter la grandeur $\lambda + 2\mu$ comme unité de contrainte. On introduit également le paramètre

$$\alpha \hat{=} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \tag{3.58}$$

On verra qu'il apparaît naturellement lors de l'établissement de la fonction de Green de l'élastostatique – voir annexe E.1. Remarquons simplement que comme λ et μ doivent être positifs pour des raisons de stabilité de la matière, α doit être dans l'intervalle $0.5 \leq \alpha \leq 1$. Avec cette convention d'unité, les lois (3.26)-(3.28) se reformulent :

$$\delta C = A\varphi(r) + B|\varphi(r)| \tag{3.59}$$

$$(A_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -\eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.60}$$

$$(B_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -(\eta_1 + \eta_2) & -(2\alpha - 1)\eta_2 & 0 \\ -(2\alpha - 1)\eta_2 & -(\eta_1 + \eta_2) & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \alpha)\eta_3 \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

et C^0 est donné par

$$\left(C^0_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha - 1 & 0 \\ 2\alpha - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

On peut maintenant établir explicitement nos termes de l'expansion de l'énergie, explicitement en fonction de Δ, γ et φ :

– d'après (3.49), (3.57) et (3.62), en ne conservant que les termes non nuls de la contraction,

$$\begin{aligned} 2E^{(0)} &= \varepsilon_{11}^{(0)} C^0_{1111} \varepsilon_{11}^{(0)} + \varepsilon_{11}^{(0)} C^0_{1122} \varepsilon_{22}^{(0)} + \varepsilon_{22}^{(0)} C^0_{2211} \varepsilon_{11}^{(0)} + \varepsilon_{22}^{(0)} C^0_{2222} \varepsilon_{22}^{(0)} \\ &\quad + \varepsilon_{12}^{(0)} C^0_{1212} \varepsilon_{12}^{(0)} + \varepsilon_{12}^{(0)} C^0_{1221} \varepsilon_{21}^{(0)} + \varepsilon_{21}^{(0)} C^0_{2112} \varepsilon_{12}^{(0)} + \varepsilon_{21}^{(0)} C^0_{2121} \varepsilon_{21}^{(0)} \\ &= 2.\frac{\Delta^2}{4} + 2.(2\alpha - 1)\frac{\Delta^2}{4} + 4.(1 - \alpha)\frac{\gamma^2}{4} \end{aligned}$$

[6]premier et deuxième invariants de la déformation macroscopique par rotation

d'où

$$E^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\alpha\Delta^2 + (1-\alpha)\gamma^2\right) \tag{3.63}$$

– L'ordre $O(\varphi)$ s'établit à partir de (3.50) et (3.59) :

$$\begin{aligned} 2E^{(1)} &= \varepsilon^{(0)} : \overline{A\varphi + B|\varphi|} : \varepsilon^{(0)} \\ 2E^{(1)} &= \left(\varepsilon^{(0)} : A : \varepsilon^{(0)}\right)\overline{\varphi} + \left(\varepsilon^{(0)} : B : \varepsilon^{(0)}\right)\overline{|\varphi|} \end{aligned} \tag{3.64}$$

comme A et B sont uniformes –δc est linéaire en $(\varphi; |\varphi|)$–.Le premier terme est nul :

$$\varepsilon^{(0)}_{11}A_{1111}\varepsilon^{(0)}_{11} + \varepsilon^{(0)}_{22}A_{2222}\varepsilon^{(0)}_{22} = \frac{\Delta^2}{4}(-\eta_1 + \eta_1) = 0$$

Ceci est tout à fait prévisible, attendu que la symétrie par parité (équivalent de la rotation en 3D) garantit qu'on doit avoir une énergie identique dans la transformation $\varphi \to -\varphi$, et que $\overline{\varphi}$ est impair sous cette transformation.
Les composantes non nulles de B correspondant aux mêmes indices que celles de C^0, la contraction du deuxième terme s'effectue de la même façon que pour $E^{(0)}$, et on obtient

$$\varepsilon^{(0)} : B : \varepsilon^{(0)} = 2.\frac{\Delta^2}{4}(-\eta_1 - \eta_2) + 2.(2\alpha - 1)\frac{\Delta^2}{4}(-\eta_2) + 4.(1-\alpha)\frac{\gamma^2}{4}(-\eta_3)$$

d'où

$$E^{(1)} = -\frac{1}{2}\left[(\frac{\eta_1}{2} + \alpha\eta_2)\Delta^2 + (1-\alpha)\eta_3\gamma^2\right]\overline{|\varphi|} \tag{3.65}$$

On remarque que ce terme est toujours négatif, proportionnel à $\overline{|\varphi|}$: il reflète le fait que la façon dont le matériau microfracturé est plus souple, au premier ordre (sans considérer les interactions).

– L'ordre $O(\varphi^2)$ s'établit à partir de (3.54) et (3.59) : en notant

$$\psi \hat{=} |\varphi| \tag{3.66}$$

, et en renommant $(ijkl)$ les indices $(jklm)$, on a

$$\begin{aligned} -2VE^{(2)} &= \varepsilon^{(0)}_{cd}\varepsilon^{(0)}_{kl}\int d^Dx \int d^Dx' G_{ai}(x,x')\partial_b(A_{abcd}\varphi + B_{abcd}\psi)(x)\partial_{j'}(A_{ijkl}\varphi + B_{ijkl}\psi)(x') \\ &= \varepsilon^{(0)}_{cd}\varepsilon^{(0)}_{kl}A_{abcd}A_{ijkl}\int d^Dx \int d^Dx' G_{ai}(x,x')\partial_b\varphi\partial_{j'}\varphi \\ &\quad + \varepsilon^{(0)}_{cd}\varepsilon^{(0)}_{kl}A_{abcd}B_{ijkl}\int d^Dx \int d^Dx'[G_{ai}(x,x') + G_{ia}(x,x')]\partial_b\varphi\partial_{j'}\psi \\ &\quad + \varepsilon^{(0)}_{cd}\varepsilon^{(0)}_{kl}B_{abcd}B_{ijkl}\int d^Dx \int d^Dx' G_{ai}(x,x')\partial_b\psi\partial_{j'}\psi \end{aligned} \tag{3.67}$$

où l'on a utilisé l'uniformité des tenseurs A et B, et la propriété de réciprocité de la fonction de Green de l'élastostatique,

$$G_{ai}(x,x') = G_{ai}(x',x) \tag{3.68}$$

, pour obtenir la deuxième égalité.
Pour expliciter ce terme, il faut connaître la forme précise de la fonction de Green de taille finie, définie par (3.33) et (3.34). Notre mésovolume élémentaire, qui pave l'échantillon, étant supposé carré (cubique en 3D), cette fonction de Green s'exprime en principe à partir de la fonction de Green en milieu infini par la méthode des images : on construit un réseau d'images x'' de la source en x par toutes les compositions de symétries axiales par rapport aux droites formant les liens du réseau des mésovolumes. On exerce en chacune de ces sources images x'', une force $(-1)^n \hat{e}_j$ où n est le nombre de symétries pour obtenir x'' en fonction de x. La somme des fonctions de Green de milieu infini provenant de ce réseau de sources sera alors automatiquement nulle sur les frontières. Ceci permet d'exprimer la fonction de Green en milieu fini comme une série infinie de fonctions de Green en milieu fini.
Cette forme complète rend malheureusement la forme de l'hamiltonien qui en résulte impossible à utiliser pour effectuer les intégrales fonctionnelles sur le champ φ intervenant dans la fonction de partition. Pour ce terme, on utilisera comme approximation de G, la fonction dont la transformée de Fourier est égale à celle de la fonction de Green en milieu infini, tronquée pour que le mode de plus grande longueur d'onde corresponde à la taille du mésovolume. La fonction de Green qu'on utilisera est donc la solution du problème de Green sous conditions aux frontières périodiques, au lieu d'un déplacement nul. Cette approximation étant sensible uniquement aux bords du mésovolume, on espère qu'elle touchera peu la nature de la transition vers la localisation que l'on déterminera.
Les conditions aux frontières pour la fonction de Green étant périodiques, le problème de Green est invariant par translation et on a

$$G_{ai}(x, x') = G_{ai}(x - x') \tag{3.69}$$

On va utiliser la transformation de Fourier 2D :

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(k) &= \int_\Omega d^D x\, f(x) e^{-ik.x} && (3.70) \\ f(x) &= \frac{1}{L^D} \sum_k \widetilde{f}(k) e^{ik.x} && (3.71) \end{aligned}$$

où la somme sur les vecteurs d'ondes k est sur l'ensemble

$$\{k = \frac{2\pi}{L} n_i \hat{e}_i \,/\, \forall i,\, n_i \in \mathbb{Z}\} \tag{3.72}$$

Les champs φ et ψ étant réels, leurs transformées de Fourier vérifient

$$\widetilde{\varphi}(-k) = \widetilde{\varphi}^*(k)\,;\, \widetilde{\psi}(-k) = \widetilde{\psi}^*(k) \tag{3.73}$$

Comme ils ne peuvent varier plus rapidement que d'une cellule à sa voisine, Λ_m étant la taille des mailles du réseau, on a un cut-off de petite longueur d'onde au-delà duquel leurs transformées de Fourier sont nulles :

$$\widetilde{\varphi}(k) = 0 \;\text{ si }\; \max_i(k_i) > \frac{2\pi}{\Lambda_m} \tag{3.74}$$

La fonction de Green étant paire (relation de réciprocité (3.68)) et réelle, sa transformée de Fourier est également paire et réelle

$$\widetilde{G}(-k) = \widetilde{G}(k) = \widetilde{G}^*(k) \tag{3.75}$$

Pour établir une forme simple de (3.67), on va d'abord établir la propriété suivante en utilisant l'identité $\int_\Omega d^D x e^{ik.x} = L^D \delta_k$: considérant deux champs u et v réels, on a

$$\begin{aligned}
&\int d^D x \int d^D x' G_{ai}(x-x')\partial_b u \partial_{j'} v \\
&= \int d^D x \int d^D x' \frac{1}{L^D}\sum_k ik_b \widetilde{u}(k) e^{ikx} \frac{1}{L^D}\sum_k ik_j' \widetilde{v}(k') e^{ik'x'} \frac{1}{L^D}\sum_j \widetilde{G_{ai}}(k'') e^{ik''(x-x')} \\
&= -\frac{1}{L^{3D}}\sum_k \sum_{k'} \sum_{k''} k_b k_j' \widetilde{u}(k)\widetilde{v}(k')\widetilde{G_{ai}}(k'') \int d^D x e^{i(k+k'')x} \int d^D x' e^{i(k'-k'')x'} \\
&= -\frac{1}{L^{3D}}\sum_k \sum_{k'} \sum_{k''} k_b k_j' \widetilde{u}(k)\widetilde{v}(k')\widetilde{G_{ai}}(k'') L^D \delta_{k+k''} L^D \delta_{k'-k''} \\
&= \frac{1}{L^D}\sum_k k_b k_j \widetilde{u}(k)\widetilde{v}(-k)\widetilde{G_{ai}}(-k) \\
&= \frac{1}{L^D}\sum_k k_b k_j \widetilde{u}(k)\widetilde{v}^*(k)\widetilde{G_{ai}}(k)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

On utilise de plus l'expression de G établie par (E.6), en annexe E.1 :

$$\widetilde{G_{ia}}(k) = \frac{1}{(1-\alpha)k^2}(\delta_{ia} - \alpha \hat{k}_i \hat{k}_a) \tag{3.77}$$

$$\hat{k} \hat{=} \frac{k}{\|k\|} \tag{3.78}$$

Cette fonction a notamment la propriété de symétrie par rapport à ses indices

$$G_{ai}(x) = G_{ia}(x) \tag{3.79}$$

On peut alors formuler le terme d'interaction en utilisant (3.76) pour les trois termes de (3.67), ainsi que les propriétés (3.73) et (3.79) :

$$\begin{aligned}
-2L^D(1-\alpha)E^{(2)} = {} & \varepsilon_{cd}^{(0)}\varepsilon_{kl}^{(0)} A_{abcd}A_{ijkl}\frac{1}{L^D}\sum_{k\neq 0} |\widetilde{\varphi}(k)|^2 \hat{k}_j \hat{k}_b (\delta_{ia} - \alpha \hat{k}_i \hat{k}_a) \\
& + 2\varepsilon_{cd}^{(0)}\varepsilon_{kl}^{(0)} A_{abcd}B_{ijkl}\frac{1}{L^D}\sum_{k\neq 0} Re[\widetilde{\varphi}(k)\widetilde{\psi}^*(k)] \hat{k}_j \hat{k}_b (\delta_{ia} - \alpha \hat{k}_i \hat{k}_a) \\
& + \varepsilon_{cd}^{(0)}\varepsilon_{kl}^{(0)} B_{abcd}B_{ijkl}\frac{1}{L^D}\sum_{k\neq 0} |\widetilde{\psi}(k)|^2 \hat{k}_j \hat{k}_b (\delta_{ia} - \alpha \hat{k}_i \hat{k}_a)
\end{aligned} \tag{3.80}$$

On opère en annexe C.2 la contraction sur les huit indices impliqués, pour obtenir la forme explicite (C.86). Notant par définition

$$\begin{aligned}
\theta_k &\hat{=} (\widehat{\hat{e}_1, k}) \\
u_k &\hat{=} \cos(2\theta_k) = \cos^2\theta_k - \sin^2\theta_k = \hat{k}_1^2 - \hat{k}_2^2 \\
v_k &\hat{=} \sin(2\theta_k) = 2\cos\theta_k \sin\theta_k = 2\hat{k}_1\hat{k}_2
\end{aligned}$$

cette forme s'écrit :

$$\begin{aligned}
&-2L^{2D}(1-\alpha)E^{(2)} = \\
&\quad \sum_{k\neq 0} |\widetilde{\varphi}(k)|^2 \kappa_1^2 \Delta^2 \left(1 - \alpha u_k^2\right) \\
&+ \quad 2\sum_{k\neq 0} Re[\widetilde{\varphi}(k)\widetilde{\psi}^*(k)] \left(\kappa_1\kappa_2\Delta^2(1-\alpha)u_k - \kappa_1\kappa_3\Delta\gamma.\alpha u_k v_k\right) \\
&+ \quad \sum_{k\neq 0} |\widetilde{\psi}(k)|^2 \left(\kappa_2^2\Delta^2(1-\alpha) + 2\kappa_2\kappa_3\Delta\gamma.(1-\alpha)v_k + \kappa_3^2\gamma^2\left(1-\alpha v_k^2\right)\right) \qquad (3.81)
\end{aligned}$$

où

$$\kappa_1 \hat{=} \frac{\eta_1}{2} \qquad (3.82)$$

$$\kappa_2 \hat{=} \frac{\eta_1}{2} + \alpha\eta_2 \qquad (3.83)$$

$$\kappa_3 \hat{=} (1-\alpha)\eta_3 \qquad (3.84)$$

3.4 Correspondance à contrainte donnée

Les énergies intervenant dans la fonction de partition doivent être connues en fonction de la contrainte macroscopique appliquée. Il faut donc effectuer une transformation pour exprimer $E_{el_j}(\tau)$.

La relation entre cette énergie potentielle élastique, et l'énergie définie en (2.8) comme la somme de l'énergie initiale du microétat à contrainte τ_{initial}, et de l'intégrale du travail mécanique pour porter le microétat à contrainte τ_{actuel} , est la suivante : l'énergie initiale nécessaire pour transformer le mésovolume d'un état de référence non endommagé 0, à l'état j, sous contrainte τ_{initial}, est la somme d'un terme que l'on définira comme E_{res_j}, plus une différence d'énergie potentielle élastique entre l'état non endommagé et l'état j, $E_{el_j}(\tau_{\text{initial}}) - E_{el_0}(\tau_{\text{initial}})$, du à la modification des modules élastiques entre les deux états. L'intégrale du travail mécanique pour faire passer l'état j de la contrainte τ_{initial}à la contrainte τ_{actuel}, est simplement $E_{el_j}(\tau_{\text{actuel}}) - E_{el_j}(\tau_{\text{initial}})$. Ceci est dû au fait que l'intégrale du travail mécanique pour des déformations purement élastiques est indépendant du chemin de charge. L'énergie définie en (2.8) sera alors la somme de ces trois termes, $E_{res_j} + E_{el_j}(\tau_{\text{actuel}}) - E_{el_0}(\tau_{\text{initial}})$. Le troisième terme étant une constante[7] – indépendant de l'état de contrainte actuel et de l'état j considéré –, il ne jouera aucun rôle dans nos distributions de probabilité, et on l'omettra pour le calcul de la fonction de partition. On devrait uniquement l'inclure si l'on veut calculer la moyenne de l'énergie, ce qui ne sera pas le cas.

[7]Si besoin est, on peut vérifier trivialement que cette constante vaut $-\frac{1}{2}\frac{p^2}{\alpha}$, avec p défini par 3.95.

L'énergie élastique, établie par approximation de Born au second ordre en section (3.3.2), est somme des trois premiers termes de la perturbation en φ (3.63), (3.65) et (3.81), et peut se mettre sous la forme

$$E_{el} = \frac{1}{2}(\Delta,\gamma).M.\begin{pmatrix}\Delta\\ \gamma\end{pmatrix} \tag{3.85}$$

$$M = \begin{pmatrix} a_0+a_1+a_2 & b_2 \\ b_2 & c_0+c_1+c_2 \end{pmatrix} \tag{3.86}$$

où les indices indiquent l'ordre en φ. On détermine aisément

$$a_0 = \alpha \tag{3.87}$$

$$c_0 = 1-\alpha \tag{3.88}$$

$$a_1 = -\kappa_2\overline{|\varphi|} \tag{3.89}$$

$$c_1 = -\kappa_3\overline{|\varphi|} \tag{3.90}$$

$$a_2 = \frac{-1}{1-\alpha}\frac{1}{L^{2D}}\sum_{k\neq 0}\left[\begin{array}{c}(1-\alpha u_k^2)\kappa_1^2|\widetilde{\varphi}_k|^2\\ +2(1-\alpha)u_k\kappa_1\kappa_2 Re\left(\widetilde{\varphi}_k\widetilde{\psi}_k^*\right)\\ +(1-\alpha)\kappa_2^2|\widetilde{\psi}_k|^2\end{array}\right] \tag{3.91}$$

$$b_2 = \frac{-1}{1-\alpha}\frac{1}{L^{2D}}\sum_{k\neq 0}\left[\begin{array}{c}-\alpha u_k v_k\kappa_1\kappa_3 Re\left(\widetilde{\varphi}_k\widetilde{\psi}_k^*\right)\\ +(1-\alpha)v_k\kappa_2\kappa_3|\widetilde{\psi}_k|^2\end{array}\right] \tag{3.92}$$

$$c_2 = \frac{-1}{1-\alpha}\frac{1}{L^{2D}}\sum_{k\neq 0}\left[(1-\alpha v_k^2)\kappa_3^2|\widetilde{\psi}_k|^2\right] \tag{3.93}$$

On a vu que les conditions aux frontières linéaires en déplacement utilisé impliquent la propriété (3.48), qui nous permet d'écrire avec les définitions (3.46) et (3.41) :

$$\begin{aligned} E_{el} &\hat{=} \frac{1}{2}\overline{\tau:\varepsilon} \\ &= \sum_n E^{(n)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_n \overline{\tau^{(n)}}:\varepsilon^{(0)} \\ E_{el} &= \frac{1}{2}\overline{\tau}:\overline{\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.94}$$

notant par convention le double de la pression et le déviateur de contrainte macroscopiques,

$$p \hat{=} \tau_a+\tau_r \tag{3.95}$$

$$\sigma \hat{=} \tau_a-\tau_r \tag{3.96}$$

(où τ_a et τ_r sont les scalaires désignant les contraintes axiale et radiale, positivement en compression), l'équation (3.103) nous donne la contrainte macroscopique

$$\tau = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p & \sigma \\ \sigma & p\end{pmatrix} \tag{3.97}$$

et avec la forme de la déformation macroscopique (3.57), on établit avec (3.94)

$$E_{el} = -\frac{1}{2}(\Delta, \gamma).\begin{pmatrix} p \\ \sigma \end{pmatrix} \tag{3.98}$$

qui rapporté à (3.85), nous donne trivialement

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p \\ \sigma \end{pmatrix} &= -M.\begin{pmatrix} \Delta \\ \gamma \end{pmatrix} && (3.99) \\ \text{donc } \begin{pmatrix} \Delta \\ \gamma \end{pmatrix} &= -M^{-1}\begin{pmatrix} p \\ \sigma \end{pmatrix} \\ \text{et avec (3.98), } E_{el} &= \frac{1}{2}(p,\sigma)M^{-1}\begin{pmatrix} p \\ \sigma \end{pmatrix} && (3.100) \end{aligned}$$

Développant M en φ, $M = M_0 + M_1 + M_2$, on fait de nouveau un développement limité en φ à l'ordre 2 pour obtenir son inverse :

$$\begin{aligned} (M_0 + M_1 + M_2)^{-1} &= \left(M_0\left(Id + M_0^{-1}M_1 + M_0^{-1}M_2\right)\right)^{-1} \\ &= \left(Id + M_0^{-1}M_1 + M_0^{-1}M_2\right)^{-1} M_0^{-1} \\ &= \left(Id - M_0^{-1}M_1 - M_0^{-1}M_2 + \frac{1}{2}\left(M_0^{-1}M_1\right)^2\right) M_0^{-1} \end{aligned}$$

vu les expressions de M_0, M_1 et M_2 issues de (3.86), on a

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} a_0^{-1} & 0 \\ 0 & c_0^{-1} \end{pmatrix} \qquad M_0^{-1}M_1 = \begin{pmatrix} a_0^{-1}a_1 & 0 \\ 0 & c_0^{-1}c_1 \end{pmatrix}$$

$$M_0^{-1}M_2 = \begin{pmatrix} a_0^{-1}a_2 & a_0^{-1}b_2 \\ c_0^{-1}b_2 & c_0^{-1}c_1 \end{pmatrix} \qquad \left(M_0^{-1}M_1\right)^2 = \begin{pmatrix} a_0^{-2}a_1^2 & 0 \\ 0 & c_0^{-2}c_1^2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{pmatrix} q_0 + q_1 + q_2 & r_2 \\ r_2 & s_0 + s_1 + s_2 \end{pmatrix} \\ q_0 &= a_0^{-1} = \frac{1}{\alpha} \\ q_1 &= -a_0^{-2}a_1 = \frac{\kappa_2}{\alpha^2}\overline{|\varphi|} \\ q_2 &= -a_0^{-2}a_2 + \frac{1}{2}a_0^{-3}a_1^2 = \frac{\kappa_2^2}{2\alpha^3}\overline{|\varphi|}^2 - \frac{1}{\alpha^2}a_2 \\ s_0 &= c_0^{-1} = \frac{1}{1-\alpha} \\ s_1 &= -c_0^{-2}c_1 = \frac{\kappa_3}{(1-\alpha)^2}\overline{|\varphi|} \\ s_2 &= -c_0^{-2}c_2 + \frac{1}{2}c_0^{-3}c_1^2 = \frac{\kappa_3^2}{2(1-\alpha)^2}\overline{|\varphi|}^2 - \frac{1}{(1-\alpha)^2}c_2 \\ r_2 &= -a_0^{-1}c_0^{-1}b_2 = -\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}b_2 \end{aligned}$$

où on a utilisé (3.87) à (3.93). a_2, b_2 et c_2 sont les trois termes d'interactions non locales.

En obtient alors l'énergie élastique déterminée par (3.100), en fonction des deux paramètres de contrainte macroscopique (p, σ), et du champ φ :

$$E_{el} = \frac{1}{2}[p^2(q_0 + q_1 + q_2) + 2p\sigma r_2 + \sigma^2(r_0 + r_1 + r_2)] \tag{3.101}$$

3.5 Modélisation de l'énergie résiduelle

On veut pouvoir affecter à chaque configuration de microfractures, une énergie de formation, correspondant à l'énergie résiduelle E_{res_j}, stockée dans la configuration j quand on revient à la contrainte macroscopique initiale. Remarquons que l'énergie potentielle élastique, pour le modèle défini ci-dessus, est nulle à déformation nulle, puisqu'on a supposé nos microfractures exemptes de déformation libre : on n'a pas d'énergie élastique bloquée pour ce modèle. Mais les fractures se développant dans le milieu sont en réalité nettement plus complexes que dans le modèle précédent :

- d'une part les lèvres des fractures sont en contact, et on a donc une énergie positive supplémentaire, non comptée ci-dessus, dépensée par effet Joule dans le frottement.
- d'autre part les microfractures en mode II tendent rapidement à ouvrir en tension des "wing-cracks", de direction subaxiale, à leurs extrémités, ce qui stabilise leur développement individuel.

Pour prendre en compte précisément ces deux aspects, il faudrait a priori reprendre le modèle de la section précédente, en ajoutant d'une part une déformation libre non nulle à l'intérieur des inclusions, rendant compte de la réorganisation du milieu dans la "gouge" à l'intérieur des fractures en mode II, et d'autre part en considérant des objets de base plus complexes, composés d'une fracture en mode II et de deux wingcracks. La forme de ceux-ci serait en principe donnée par la solution du problème élastostatique avec conditions aux frontières de contrainte normale nulle sur les faces des wing-cracks. On peut en principe résoudre numériquement ces problèmes pour chaque configuration par la méthode des pseudotractions[8], mais il n'existe pas à notre connaissance de solution analytique manipulable[9] au problème général, les interactions entre wingcracks issues des nombreuses différentes fractures rendant impossible la détermination de leurs formes - il s'agit d'un problème à surfaces libres. On pourrait éventuellement simplifier ce problème en considérant une famille de formes possibles, déterminées par la solution dans le cas de fractures indépendantes les uns des autres. Mais même pour ce problème simple, ceci s'exprime à l'aide de fonction déterminées numériquement, et non analytiquement (Billy and Cardew [1975], Melin and Solveig [1994]).

Pour contourner ces problèmes, on rappellera que l'hamiltonien que nous cherchons à déterminer doit simplement être dans la bonne classe d'universalité pour mettre en évidence la transition de localisation : ceci ne doit dépendre que de la forme des interactions, et de la dimensionnalité (en φ, et en champs extérieurs σ , p) du terme correspondant à chaque microfracture. Les interactions

[8] voir par exemple Fond & Berthaud[1995] pour un exposé de ces techniques tenant compte de la friction entre lèvres des fractures fermées, ou pour une application à des populations de fractures et wingcracks régulièrement alignés, on se référera à Horii et Nemat-Nasser[1985] .

[9] i.e. que l'on puisse utiliser par la suite dans une intégration fonctionnelle sur toutes les configurations concevables.

élastiques de longue portée étant a priori le terme d'interaction primordial pour cette transition, on considérera que le modèle de microfractures ellipsoïdales développés précédemment est suffisamment riche pour rendre compte entièrement de la forme de ces interactions. On pourra donc considérer l'approximation de microfractures indépendantes, plongées dans un champ moyen de contrainte, correspondant à la contrainte à l'infini, pour déterminer l'énergie propre à chaque microfracture.

On sait d'autre part qu'une transition continue (un point critique) doit être peu affectée par les détails de l'hamiltonien correspondant aux structures microscopiques précises. Dans le cas présent, on a mis en évidence en partie I un exposant critique qui ne semble pas varier entre les matériaux se fracturant de façon intra ou inter-granulaires. La géométrie macroscopique des bandes de cisaillement macroscopiques sont également peu dépendantes de la microstructure du matériau. Or les wing-cracks sont un trait caractéristique des fractures en mode II dans un milieu homogène : on n'observe pratiquement jamais de telles structures dans un grès, par exemple. L'analogue de ces wing-cracks pour un milieu granulaire est simplement l'ouverture en mode I de joints de grain, situés dans les zones où on a une contrainte locale de tension sous l'effet du glissement en mode II de joints voisins.

Ces remarques nous conduisent à adopter les simplifications suivantes pour modéliser le terme d'énergie propre à chaque microfracture : on considérera d'une part, que le terme de friction peut être représenté en considérant simplement une fracture en mode II isolé dans le champ à l'infini. D'autre part, l'effet des wingcracks, ou de tout autre processus stabilisateur de mode I, sera lui représenté simplement par le travail (négatif) nécessaire pour créer une ouverture subaxiale, de taille et déplacement sur les lèvres reliés au déplacement sur la fracture en mode II sur lequel cette ouverture se nuclée - sous conditions aux frontières à l'infini de contrainte fixée. Ces deux effets seront considérés indépendamment l'un de l'autre, et on adoptera par exemple une forme ellipsoïdale simple pour modéliser ces ouvertures en tension, puisque l'on ne cherche pas à se focaliser sur le détail complexe des interactions entre les wingcracks et la microfracture de base, mais simplement aux dimensions caractéristiques de cette ouverture.

3.5.1 Énergie de friction

On va prendre le point de vue simple suivant pour déterminer la forme de l'énergie de friction E_{frict_j} :

Comme la roche est en régime compressif, on va supposer les microfractures inclinéss à 45° qui forment notre modèle majoritairement fermés. On modélisera par exemple le contact entre les lèvres par le fait que la contrainte locale doit obéir à un critère de Coulomb, qui, vu l'orientation des microfractures considérées par rapport à notre repère de référence, s'écrit

$$\frac{\tau_{12}}{\tau_{11}} = \mu_c \tag{3.102}$$

où le coefficient de Coulomb $\mu_c < 1$ habituellement. L'énergie dissipée par effet Joule étant en général nettement supérieure à l'énergie de surface initiale nécessaire pour briser les liaisons moléculaires, on considérera que l'énergie de formation des microfractures en mode II est dominée par le frottement lors de la formation.

On fera de plus l'hypothèse que les principales interactions entre microfractures sont décrites par la théorie précédente, et qu'on peut considérer les microfractures comme indépendantes pour avoir une approximation de cette énergie de frottement. La contrainte locale peut alors être remplacée par la contrainte aux bords de l'échantillon $\tau^{(0)}$ pour ce calcul, plus l'effet dû à sa déformation propre : *stressdrop* $\delta\tau$. De même que pour $\varepsilon^{(0)}$ en (3.57), en notant $\tau = -\tau_{\text{axial}}$ et $\tau_r = -\tau_{\text{radial}}$, – tous deux positifs – on établit

$$\tau_{ij}^{(0)} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} \tau + \tau_r & \tau - \tau_r \\ \tau - \tau_r & \tau + \tau_r \end{pmatrix} \tag{3.103}$$

La microfracture se forme dès que le critère (3.102) est vérifié, i.e. comme τ_r est constant, à $\tau = \tau_d$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{\tau_d - \tau_r}{\tau_d + \tau_r} &= \mu_c \\ \tau_d &= \frac{1 + \mu_c}{1 - \mu_c} \tau_r \end{aligned} \tag{3.104}$$

À partir de ce moment, (3.102) continuera à être vérifiée, ce qui en tenant compte du stressdrop $\delta\tau$, dont les composantes diagonales sont nulles pour un glissement en mode II, donne

$$\begin{aligned} \frac{|\tau_{12}^{(0)} - \delta\tau_{12}|}{\tau_{11}^{(0)}} &= \mu_c \\ \delta\tau_{12} &= \tau(1 - \mu_c) - \tau_r(1 + \mu_c) \\ \delta\tau_{12} &= (1 - \mu_c)(\tau - \tau_d) \end{aligned} \tag{3.105}$$

en tenant compte du fait que la contrainte radiale τ_r est constante dans les chemins considérés, et avec (3.104).

Ce stressdrop est relié à l'amplitude du glissement entre les lèvres : notant δu une constante caractéristique de ce glissement, et l la longueur de la microfracture, en supposant le milieu élastique, il existe un facteur de forme t sans dimensions tel que

$$|\delta\tau_{12}| = t\mu \frac{\delta u}{l} \tag{3.106}$$

où μ est le paramètre de Lamé, à ne pas confondre avec la constante de Coulomb μ_c. Ce facteur de forme ne dépend que de la façon dont on modélise la forme f du glissement $[\![u]\!]$ le long des lèvres de la microfracture,

$$[\![u]\!](x) = \delta u.f(x);\ x \in [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}] \tag{3.107}$$

Par exemple, si $f \equiv$ constante – source de Haskell –, on établira au chapitre F que le stressdrop au centre de la microfracture est donné par (3.106), avec $t = \frac{\alpha}{\pi}$ (où α a été défini en (3.58)).

On choisira ici un glissement modélisé par l'hypothèse plus raisonnable que la condition de Coulomb (3.102) doit être vérifiée en tous points de la microfracture, ie que le stressdrop doit être constant. On obtient alors la forme du glissement de façon classique en ajoutant les champs de déplacement de deux problèmes de conditions aux frontières différentes : l'un où la contrainte est uniformément $\tau^{(0)}$ et où on n'a pas de glissement, l'autre où la contrainte à l'infini est nulle, alors que sont exercées le long de la microfracture des forces telles que le critère (3.105) soit vérifié sur la microfracture . Par la méthode du potentiel complexe, on obtient ainsi la solution – par exemple d'après Broberg [1999] p135 et 79 –

$$[\![u]\!](x) = \frac{\delta\tau_{12}}{\alpha\mu}\sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2} \tag{3.108}$$

ce qui équivaut à (3.107) et (3.106), avec

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{(l/2)^2}} \tag{3.109}$$

$$t = 2\alpha \tag{3.110}$$

Ceci nous permet d'exprimer le travail de frottement sur une microfracture lors d'une variation de charge axiale à l'infini $d\tau$:

$$\begin{aligned}
dE_f &= \int_{x=-\frac{l}{2}}^{x=\frac{l}{2}} \tau_{12}\frac{d[\![u]\!]}{d\tau}(x)dxd\tau \\
&= \left(\int_{x=-\frac{l}{2}}^{x=\frac{l}{2}} f(x)dx\right).\mu_c\tau_{11}\frac{d\delta u}{d\tau}d\tau \\
&= \frac{l}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx.\mu_c(\tau+\tau_r)\frac{l}{2\alpha\mu}\frac{d|\delta\tau_{12}|}{d\tau}d\tau \\
dE_f &= \frac{l^2\pi\mu_c}{4\alpha\mu}(1-\mu_c)(\tau+\tau_r)d\tau \qquad (3.111)
\end{aligned}$$

où on a utilisé (3.102) et (3.107) pour la deuxième ligne, puis (3.109),(3.106) et (3.110), et enfin (3.105).

Intégrant ce travail entre la formation de la microfracture à contrainte axiale τ_d et la valeur actuelle de la charge τ, on obtient

$$\begin{aligned}
E_f &= \frac{l^2\pi\mu_c}{4\alpha\mu}(1-\mu_c)\int_{\tau'=\tau_d}^{\tau'=\tau}(\tau'+\tau_r)d\tau' \\
&= \frac{l^2\pi\mu_c}{4\alpha\mu}(1-\mu_c)\left[\frac{1}{2}\left(\tau^2-\tau_d^2\right)+\tau_r\left(\tau-\tau_d\right)\right]
\end{aligned}$$

Cette formule n'est valable, bien sûr, qu'après la formation de la microfrature, i.e. pour $\tau > \tau_d$, ce qu'on représentera en la multipliant par une fonction de Heaviside $h(\tau - \tau_d)$. La densité moyenne d'énergie résiduelle pour un microétat φ sera la somme de ces énergies de formation indépendantes pour chaque microfracture, divisée par le mésovolume (ou plutôt surface) L^2. En notant que l'énergie de frottement E_i associée à une microfracture i ci-dessus est de la forme $E_i = al^2$, et comme $|\varphi| = \frac{l^2}{\Lambda_m^2}$, où Λ_m est la taille des mailles de la grille, le terme recherché sera donc $E = \frac{1}{L^2}\sum_i E_i = \frac{\Lambda_m^2}{L^2}\sum_i a|\varphi_i| = a\Lambda_m^2\overline{|\varphi|}$. Avec notre convention d'utiliser $\lambda + 2\mu$ comme unité de contrainte, ceci s'exprime finalement :

$$E_{\text{frict}_j} = \Gamma_f \left[\frac{1}{2}\left(\tau^2 - \tau_d^2\right) + \tau_r\left(\tau - \tau_d\right)\right] h(\tau - \tau_d)\overline{|\varphi|} \quad (3.112)$$

$$\Gamma_f = \frac{\pi\mu_c(1-\mu_c)}{\alpha(1-\alpha)}\Lambda_m^2 \quad (3.113)$$

3.5.2 Énergie de formation liée à l'ouverture sous les modes tensiles locaux (par exemple wingcracks)

Lorsque les microfractures inclinées sur la direction axiale de contrainte glissent en mode II, elles créent rapidement des zones de contrainte en tension à leurs extrémités. L'analyse des facteurs d'intensité de contrainte K_{II} et K_I à ces extrémités, et leur comparaison aux ténacités du matériau K_{I_c} et K_{II_c} montrent qu'en général, une telle fracture inclinée tend à se propager hors de son plan, pour ouvrir en tension des fronts s'alignant sur la direction axiale à une courte distance des extrémités, plutôt que se propager en mode II. L'effet qualitatif de ces ouvertures sur le champ de déplacement aux frontières du matériau est principalement un gonflement sur les faces radiales, ce qui correspond naturellement à une réduction de l'énergie, puisque ceci s'oppose à la contrainte de confinement.

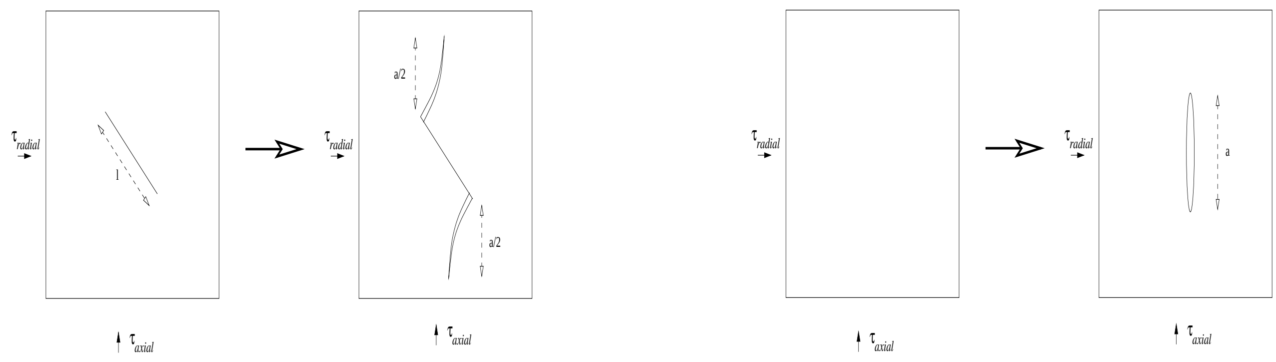
Pour obtenir la variation d'énergie dans le milieu lors de ces ouvertures en tension, on devrait en principe déterminer leur forme précise, dépendant de l'interaction entre ces fronts avec la perturbation de contrainte provenant de la fracture voisine d'origine, et des microhétérogénéités structurelles du matériau. Pour nos objectifs, seule nous intéresse la forme de la contribution énergétique résultante par rapport aux variables σ , p, donnant la contrainte à l'infini, et φ, caractérisant l'extension de la microfracture inclinée d'origine. On choisit donc de modéliser cette contribution très simplement, comme égale au travail nécessaire pour ouvrir une fracture elliptique isolée en tension. La relation avec la fracture d'origine s'obtient en considérant que l'extension de la fracture ouverte est comparable à celle des wingcracks qui se développeraient dans ces conditions de charge à l'infini sur une fracture isolée dans un milieu homogène : voir figure 3.4. Cette taille a est en première approximation, proportionnelle :

- à l'extension l de la fracture d'origine (la contrainte redevient dominée par la contribution compressive des frontières, au-delà d'une zone de taille proportionnelle à celle de la fracture d'origine)
- et à la composante de la contrainte à l'infini à l'origine du mode de tension, à savoir $\sigma = \tau_{\text{axial}} - \tau_{\text{radial}}$[10]

On sait que cette contribution énergétique est négative. Sa dimensionnalité s'obtient simplement à partir des expressions classiques pour une fracture elliptique isolée en mode I, (par exemple d'après Broberg [1999], p 137) , comme

$$\begin{aligned} E_{\text{ouverture}} &= -\alpha\tau_{\text{radial}}^2 a^2 \\ &= -\alpha' l^2 \sigma^2 \\ &= -\alpha'' \left|\varphi\right| \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.114)$$

[10] cette dépendance à la contrainte à l'infini est en fait un peu plus compliquée, comme le montrent par exemple Nemat-Nasser et Horii [1985], mais cette approximation simple suffira à nos besoins.



(a) Transition dont on cherche à évaluer la contribution énergétique

(b) Simplification sur le déplacement induit aux frontières : la contribution des wingcracks est remplacée par celle d'un simple crack elliptique suivant la direction axiale,de dimensions comparables

FIG. 3.4 – Modélisation de la contribution énergétique des ouvertures en tension

où α, α' et α'' sont de simples constantes multiplicatives, puisque τ_{radial} est constant lors de l'expérience et que $|\varphi|$ est par définition proportionnel à l^2.

Pour un état j formé d'un certain nombre de microfractures inclinées, on ajoutera donc une énergie de formation en tension de

$$E_{\text{tension}_j} = -\Gamma_t \sigma^2 \overline{|\varphi|} \tag{3.115}$$

Remarque : relation avec le principe de Griffith Les critères utilisés d'ordinaire en mécanique de la fracture, ayant pour origine les théories de Griffith [1920], ne sont pas fondés sur des probabilités de configuration de fractures, mais sur un principe de minimisation locale d'énergie : ceci est exposé simplement par exemple par Lawn [1993] . Ce critère consiste à comparer l'énergie mécanique d'une configuration de fractures, à l'énergie mécanique de toutes les configurations infinitésimalement voisines, dans lesquelles les fronts de fracture ont pu progresser d'une distance infinitésimale suivant une direction arbitraire. L'état réalisé par la suite est sélectionné par le fait qu'il doit minimiser cette énergie mécanique parmi celles possibles, qu'il s'agisse de la configuration d'origine ou d'une des nouvelles.

Ce critère est équivalent à ceux fondés sur la comparaison des facteurs d'intensité de contrainte aux extrémités des fractures présentes, aux ténacités du matériau : ceci fut mis en évidence par Rice [1968a,1968b] via le formalisme des J-intégrales.

On doit remarquer que l'énergie mécanique à minimiser pour l'application du critère de Griffith est différente de la forme $E_j(\tau)$ que nous avons recherché jusqu'ici : dans le cas d'un problème contrôlé par des conditions aux frontières en déplacement, la variation d'énergie mécanique est égale à la somme de la variation d'énergie potentielle élastique dans le milieu, et de pures énergies de surface.

Considérons le problème simple du développement d'une microfracture : l'énergie mécanique peut être exprimée à partir de l'énergie potentielle élastique obtenue en section 3.8 , spécifiée au cas d'une seule fracture, plus une énergie de surface proportionnelle à l'extension de la fracture. Ce problème est isomorphe à un problème d'extension de fracture en tension, et le critère de Griffith prévoira une extension instable au delà d'une certaine contrainte axiale, ce qui ne correspond pas aux observations expérimentales. L'erreur faite dans cette modélisation réside dans le fait que l'on a interdit à la fracture de croître hors plan. Si on inclut cette possibilité, on ajoute à l'énergie mécanique un terme de même nature que celui considéré ci-dessus. En utilisant alors le critère des facteurs d'intensité de contrainte critiques, équivalent à celui de Griffith, on obtient le fait qu'au-delà d'une certaine contrainte axiale, la fracture se développe hors-plan en mode I, sur une extension finie, i.e. de façon stable. C'est la raison pour laquelle il est capital d'inclure un terme de ce type. On verra en section 4.1.1 que ce développement au-delà d'une certaine contrainte correspond à une transition de phase dans notre formalisme.

3.6 Terme d'interaction de courte portée

On a jusqu'à présent considéré les interactions entre fractures uniquement via la modification des constantes élastiques effectives d'une cellule contenant une microfracture, supposée de dimensions négligeables par rapport à celles de la cellule (section 3.2). Autrement dit, la perturbation du champ contrainte due à la présence d'une fracture a été considérée comme égale à la limite asymptotique de champ lointain, et on a obtenu des interactions de longue portée (proportionnelles à $1/r^D$).

On peut ajouter à ceci un terme supplémentaire de courte portée, rendant compte du fait que l'extension finie d'une microfracture, dans une cellule, est sensible pour ses plus proches voisins : ceci correspondra à l'écart de la perturbation de contrainte par rapport au régime asymptotique de champ lointain. Utiliser la forme complète du champ proche amène une complexité inutile de l'hamiltonien pour étudier les transitions qui nous intéressent : on cherche à ne garder une fois de plus que les aspects géométriques principaux de ce champ. On calculera au chapitre F la perturbation due à une source de Haskell, à savoir une fracture sur laquelle le déplacement relatif entre les lèvres est considéré comme constant le long de son extension. Pour illustrer ceci, on a représenté en figure F.1 les différentes composantes – τ_{12}, τ_{11} et τ_{22} – d'une telle perturbation, pour une fracture en mode II orientée suivant $\hat{e}_1$. On constate que l'effet principal de cette fracture sur ses proches voisins est d'augmenter la contrainte normale, et de diminuer la contrainte tangentielle, sur des voisins horizontaux sur cette figure – c.à.d. dont la position relative est colinéaire à $\hat{e}_{radial}$. Cet effet qualitatif sera le même pour des voisins orientés suivant $\hat{e}_1$ ou suivant $\hat{e}_2$ (les deux types ressentiront cette perturbation avec une composante tangentielle de contrainte τ_{12}, la composante normale à des fractures suivant $\hat{e}_1$ ou $\hat{e}_2$ étant donnée respectivement par τ_{22} ou τ_{11}).[11]

[11] Remarque : ceci est déjà a priori en partie pris en compte par l'approximation de Born que l'on a faite en section 3.3.1, puisqu'il s'agit également d'un aspect topologique du champ lointain, mais l'extension finie de la fracture, sensible pour les proches voisins, renforce encore cet effet. On peut aisément vérifier ceci en comparant les perturbations de contrainte générées par une fracture d'extension l, de glissement relatif de magnitude $[\![u]\!]$, à celle générée par une fracture subissant un glissement de $\Lambda[\![u]\!]$ réparti sur une extension l/Λ, où Λ est un nombre réel différent de 1. Pour Λ grand, cette perturbation tend en tout point vers la limite asymptotique de champ lointain. L'écart de la perturbation par rapport à cette limite, quand Λ est de l'ordre de 1, représente les effets de champ proche que l'on recherche.

On modélisera donc les interactions de courte portée en considérant simplement que la présence d'une fracture tend à rendre moins probable ses plus proches voisins suivant $\hat{e}_{radial} = (\hat{e}_1 - \hat{e}_2)/\sqrt{2}$. En terme du champ continu φ que l'on a défini, ceci peut être traduit par un terme local proportionnel à $\psi \left.\frac{\partial^2\psi}{\partial x_{radial}^2}\right|_{x_{axial}}$ (on rappelle que $\psi = |\varphi|$) :

- Pas d'effet si on n'a pas de fracture ($\psi = 0$)
- si une fracture est présente, $\psi > 0$ et il est plus probable que ψ présente un maximum local en ne considérant que ses variations suivant $\hat{e}_{radial}$ – i.e. $\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial x_{radial}^2}\right|_{x_{axial}} < 0$.

En modes de Fourier, on obtient directement un terme

$$E_{proche} = -J\Lambda_m^2 \frac{1}{2L^{2D}} \sum_k (k_1 - k_2)^2 \widetilde{\psi}_k \widetilde{\psi}_{-k} \tag{3.116}$$

où J est une quantité positive ayant les dimensions de E (densité d'énergie), et Λ_m est le pas du réseau, distance entre plus proches voisins. J est supposé petit par rapport aux autres densités d'énergie intervenant dans les autres termes décrits jusqu'ici, puisque ce terme représente une correction par rapport à l'approximation où la distance relative entre les fractures est nettement supérieure à leur longueur.

Remarques :

- Comme on a aussi $\frac{1}{L^{2D}} \sum_k (k_1^2 - k_2^2) \widetilde{\psi}_k \widetilde{\psi}_{-k} = -\int d^D x \left(\hat{e}_{radial}.\nabla\psi\right)^2$, – ce qui provient de la simple intégration par partie $\int_\Omega d^D x \psi \left.\frac{\partial^2\psi}{\partial x_{radial}^2}\right|_{x_{axial}} = -\int_\Omega d^D x \left(\hat{e}_{radial}.\nabla\psi\right)^2 + \int_{\partial\Omega} d^{D-1} x \psi \left.\frac{\partial\psi}{\partial x_{radial}}\right|_{x_{axial}}$, le deuxième terme évalué sur la frontière $\partial\Omega$ du mésovolume Ω étant négligeable – on voit que ce terme est analogue, suivant une formulation discrète, au couplage dans un modèle d'Ising antiferromagnétique : $\frac{J}{L^D} \sum_{<i,j>} |\varphi|_i |\varphi|_j$, où la somme $< ij >$ est prise sur les plus proche voisins suivant $\hat{e}_{radial}$, ce qui fait également sens : si un site est occupé, ses plus proches voisins dans ces directions tendront à ne pas l'être.
- On aurait pu éventuellement incorporer des aspects plus compliqués à ces interactions de plus proches voisins. On verra cependant en section 4.3 que tout terme du type général $-JL_m^2 \frac{1}{2L^{2D}} \sum_k k^2 \left(f_1(\theta_k) \widetilde{\varphi}_k \widetilde{\varphi}_{-k} + f_2(\theta_k) \widetilde{\varphi}_k \widetilde{\psi}_{-k} + f_3(\theta_k) \widetilde{\psi}_k \widetilde{\psi}_{-k} \right)$, où θ_k désigne la direction du vecteur k, aura pour nos objectifs le même effet pour peu que $f_1(\theta) + f_2(\theta) + f_3(\theta)$ soit positif le long d'une certaine direction particulière. Le cas particulier que l'on a considéré ici correspond à $f_1 = f_2 = 0$; $f_3(\theta_k) = \cos(2\theta_k)$.

3.7 Prise en compte des effets de seuil

Comme en témoigne l'activité acoustique microsismique durant la compression de la roche, l'apparition et l'évolution des microfractures sont des phénomènes abrupts, i.e. la dynamique de croissance se fait par paliers (même si cette croissance est stable). Ceci peut être aisément compris en considérant par exemple une loi de contact de Coulomb entre des lèvres de fractures : une fracture donnée sera à l'équilibre tant que la contrainte locale est telle que $|\tau_{tangentiel}/\tau_{normal}| < \mu_s$, où μ_s est le seuil de Coulomb statique. Dès que ce seuil est atteint, les lèvres glissent, amenant une chute de contrainte (*stressdrop* en anglais) $\delta\tau$, de composante normale nulle pour un glissement en mode II. Ce glissement amène à un nouvel état d'équilibre où $\tau' = \tau + \delta\tau$ est tel que $\left|\tau'_{tangentiel}/\tau'_{normal}\right| = \mu_D$, où μ_D est le seuil de Coulomb dynamique. Autrement dit, $|\delta\tau| = (\mu_s - \mu_D)\,|\tau_{normal}|$. $\delta\tau$ étant proportionnel au glissement sur la microfracture, et comme pour tout matériau le seuil dynamique de Coulomb est inférieur au seuil statique (ce qui provient essentiellement des aspérités des surfaces), ce glissement est fini lorsque la contrainte locale atteint le critère de Coulomb.

On peut représenter cet effet de la façon suivante : à partir du champ à valeurs continues φ que l'on a considéré pour décrire les microétats, pouvant prendre une valeur a priori quelconque dans $[-\epsilon;\epsilon]$, on se ramène à un champ à valeurs discrètes en supposant que les seules valeurs locales réalisées de $\psi = |\varphi|$ seront $\{l\epsilon/n\,;\, l \in [\![0,n]\!]\}$ – où $[\![0,n]\!]$ représente l'ensemble des $n+1$ entiers compris entre $-n$ et n.

Dans l'intégration fonctionnelle permettant d'obtenir la fonction de partition, ceci peut se traduire en intégrant sur des valeurs continues du champ, autorisé à prendre toute valeur réelle, et en multipliant l'intégrant par une somme de diracs,

$$Z = \int \prod_{r\in\Omega}(d\varphi_r) \prod_{r\in\Omega}\left(\sum_{l\in[\![0,n]\!]} \delta(\psi_r - \frac{l}{n}\epsilon)\right) e^{-\beta H[\varphi]} \tag{3.117}$$

Suivant les idées de Wilson [1979] [12]– ou d'après Domb [1996] (page 265) –, comme il est plus pratique de manipuler des champs continus, on fera l'hypothèse que l'on ne change pas de classe d'universalité en remplaçant dans l'intégrale ci-dessus, la somme de diracs $\left(\sum_{l\in[\![0,n]\!]} \delta(\psi_r - \frac{l}{n}\epsilon)\right)$ par un poids $e^{-f[\psi_r]}$ où f est un polynôme vérifiant les propriétés suivantes[13] :

1. $\forall x,\ f(x) \geq 0$
2. l'ensemble des minimums absolus de f coïncide avec $\{l\epsilon/n\,;\, l \in [\![0,n]\!]\}$

[12]décrivant le principe de l'isomorphisme entre un modèle d'Ising, à champ discret, et un modèle de Ginzburg-Landau, à champ continu.

[13]Techniquement, de tels polynômes se construisent en posant

$$f(x) = g(x) \prod_{l\in[\![0,n]\!]} (\psi_r - \frac{l}{n}\epsilon)^2$$

où g est un autre polynôme. On montre alors que la troisième condition est équivalente à

$$\forall m \in [\![0,n]\!];\ g\left(\frac{m\epsilon}{n}\right) \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq m}}^{n} (l-m)^2 = g(0)\prod_{l=1}^{n} l^2 = g(0)\,(n!)^2$$

En considérant des polynômes g de degré suffisant, il est toujours possible de leur faire vérifier ces conditions, et d'imposer qu'ils n'aient aucune racine réelle pour satisfaire la deuxième condition. Par exemple, pour $n = 1$ (trois valeurs de φ autorisées), $g \equiv 1$ et $f(\psi_r) = \psi_r^2(\psi_r - \epsilon)^2$ satisfont ces critères. On obtient ainsi une famille de polynômes f de degré minimum $2(n+1)$, telle que $\exp -(f[\psi_r])$ puisse remplacer la somme de diracs, sans modifier la classe d'universalité du modèle. Ces considérations techniques n'ont de toute façon aucune importance, puisqu'on verra qu'il suffit pour nos besoins de tronquer ces polynômes au degré 2.

3. les dérivées secondes de f en chacun de ces minimums sont égales.

On aura alors un modèle équivalent en effectuant l'intégrale fonctionnelle dans Z sur des champs continus, et en ajoutant à l'hamiltonien un terme f/β en chaque site r :

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_{r\in\Omega} (d\varphi_r) e^{-\beta H'[\varphi]} \\ H' &= H + T \int_{r\in\Omega} dr\, f(\psi_r) \end{aligned}$$

Seuls quelques aspects du polynôme f nous importent en fait : d'après la condition (2.), f étant minimum en 0, on doit avoir $f'(0) = 0$ et $f''(0) = b > 0$, donc les termes de degré le plus bas de f seront $a + \frac{b}{2}\psi_r^2$. Comme le champ ψ est par hypothèse petit, on espère que les termes d'ordres supérieurs ne modifieront pas la nature des transitions étudiées (qu'il s'agit de champs inessentiels, ou *irrelevant* en anglais), et on les négligera par la suite. La constante a étant une simple constante multiplicative pour Z , elle ne joue aucun rôle et on la prend nulle. On parvient finalement à la conclusion que l'on peut prendre ces effets de seuil en compte en ajoutant à l'hamiltonien un simple terme

$$\begin{aligned} E_{seuil} &= \frac{bT}{2L^D} \int_{r\in\Omega} dr\, \psi_r^2 \\ &= \frac{bT}{2L^{2D}} \sum_k \widetilde{\psi}_k \widetilde{\psi}_{-k} \end{aligned} \tag{3.118}$$

(remarque : on a ajouté simplement un facteur $\frac{1}{L^D}$ car on a défini E comme une densité d'énergie, et H comme $L^D E$)

Représentation physique simple du modèle : On peut aussi obtenir les mêmes résultats que ceux développés jusqu'ici avec le modèle schématique suivant :

Les microfractures sont contraintes à être sur les liens d'un réseau carré, schématisant des joints de grains. Soit ils sont intacts, soit leur longueur correspond à l'extension du lien. Groupant alors ces liens par paires de joints voisins, on interdit à ces deux joints d'être cassés simultanément. On a alors trois valeurs possibles du champ local pour décrire un tel groupe de deux joints : $\varphi = -1, 0, 1$ suivant qu'aucun des deux liens n'est cassé, ou qu'il s'agit de l'un ou l'autre. Les interactions entre sites lointains sont données par l'approximation de Born que l'on a développée précédemment. Les interactions entre plus proches voisins devraient a priori comporter des corrections par rapport au terme développé en section précédente, dû au fait que la distance entre ces voisins est légèrement différente suivant qu'ils sont de même signe ou de signe opposé. On considérera que ces détails ne modifient pas l'aspect géométrique principal du terme (défavoriser des plus proches voisins suivant $\hat{e}_{radial}$ occupés). Lorsqu'une microfracture s'ouvre, elle s'accompagne de plus d'une variation d'énergie due à la friction, et d'une autre due à l'ouverture de wing-cracks en mode I à ses extrémités.

Dans cette image, le terme traduisant cet aspect discret du champ est d'ordre 4 en ψ, $E_{seuil} = b\frac{T}{2L^D} \int_{r\in\Omega} dr\, \psi_r^2 \left(\psi_r - 1\right)^2$, que l'on tronquera d'abord à l'ordre 2.

3.8 Forme de l'hamiltonien utilisé

Ajoutant les termes d'énergie élastique (3.101), l'énergie résiduelle correspondant à l'effet Joule (3.112) et au travail durant l'ouverture de fractures en tension locale (3.115), et les deux derniers effets pris en compte (interactions de plus proche voisins (3.116) et effets de seuil (3.118)), on obtient finalement l'énergie totale recherchée en fonction des deux paramètres de contrainte macroscopique (p, σ), et du champ φ :

$$
\begin{aligned}
E_j(p,\sigma) = & \\
& \frac{1}{2}\left[\frac{p^2}{\alpha}+\frac{\sigma^2}{1-\alpha}\right] \\
+ & \frac{1}{2}\left[\frac{\kappa_2 p^2}{\alpha^2}+\frac{\kappa_3\sigma^2}{(1-\alpha)^2}+\frac{\Gamma_f}{4}\left((p+\sigma)^2-4\tau_d^2+2(p-\sigma)(p+\sigma-2\tau_d)\right)h(p+\sigma-2\tau_d)\right]\overline{|\varphi|} \\
- & \Gamma_t\sigma^2\overline{|\varphi|} \\
+ & \frac{1}{4}\left[\frac{\kappa_2^2 p^2}{\alpha^3}+\frac{\kappa_3^2\sigma^2}{(1-\alpha)^3}+2bT\right]\overline{|\varphi|}^2 \\
+ & \frac{1}{2L^{2D}}\sum_{k\neq 0}\left[\frac{1-\alpha u_k^2}{\alpha^2(1-\alpha)}\kappa_1^2 p^2\right]|\tilde{\varphi}_k|^2 \\
+ & \frac{1}{L^{2D}}\sum_{k\neq 0}\left[\frac{u_k}{\alpha^2}\kappa_1\kappa_2 p^2-\frac{u_k v_k}{(1-\alpha)^2}\kappa_1\kappa_3 p\sigma\right]Re\left(\tilde{\varphi}_k\tilde{\psi}_k^*\right) \\
+ & \frac{1}{2L^{2D}}\sum_{k\neq 0}\left[\frac{1}{\alpha^2}\kappa_2^2p^2+\frac{2v_k}{\alpha(1-\alpha)}\kappa_2\kappa_3 p\sigma+\frac{(1-\alpha v_k^2)}{(1-\alpha)^3}\kappa_3^2\sigma^2-J\Lambda_m^2k^2(1-v_k)+bT\right]|\tilde{\psi}_k|^2
\end{aligned}
\tag{3.119}
$$

où on rappelle que l'on a défini plus tôt dans ce chapitre :

- p le double de la pression macroscopique imposée, σ la contrainte différentielle, T la température, dépendant de la contrainte maximum atteinte (ayant les dimensions d'une densité d'énergie)
- des constantes positives éventuellement dépendantes du matériau, mais indépendantes de p, σ, T, ou du nombre d'onde k : $\alpha, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, b$ qui sont sans dimensions, Γ_t, Γ_f, J qui sont des densités d'énergie, τ_d qui est une contrainte, Λ_m et L qui sont respectivement la taille typique d'une maille du réseau, et celle d'un volume mésoscopique,
- φ_r désigne la variable de microfracturation orientée, le signe donnant son orientation, l'amplitude correspondant à $(l/L_m)^2$ où est la longueur de la microfracture dans la cellule. $\psi_r = |\varphi_r|$ ne désigne que le caractère occupé ou non des cellules. $\overline{|\varphi|} = \frac{1}{L^D}\tilde{\psi}_0$ est la moyenne volumique de ψ.
- dans les termes impliquant des modes de Fourier de vecteur $(k_1; k_2)$, on a défini u_k et v_k par $(k_1; k_2) = k(\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))$; $u_k = \cos(2\theta_k)$; $v_k = \sin(2\theta_k)$.
- h désigne la fonction de Heaviside.

Chapitre 4

Identification de la transition - Établissement des exposants

Dans cette section, on va utiliser le formalisme de physique statistique développé au chapitre 2, et le modèle développé au chapitre 3, pour analyser les transitions de phase prédites et leur structure. On confrontera ceci qualitativement aux observations expérimentales, et quantitativement aux lois de puissance analysées en partie I.

Par souci de simplicité, on commencera par analyser le modèle construit au chapitre précédent sans les deux derniers aspects, à savoir les interactions de champ proche et le caractère discret du champ. On réintroduira finalement ces deux termes, pour voir comment ils modifient l'image d'ensemble.

4.1 Analyse de la fonction de partition

Toutes les grandeurs physiquement reliées au processus peuvent être obtenues à partir du potentiel F (2.25) et de ses dérivées. Ce potentiel lui-même provient de la fonction de partition Z, (2.22), qu'il faut intégrer sur tous les microétats possibles. Chaque microétat j correspondant de façon univoque à la donnée d'un champ φ, cette somme est une intégrale fonctionnelle :

$$Z = \int \prod_{r \in \Omega} (d\varphi_r) e^{-\beta H[\varphi]} \tag{4.1}$$

où les variables sur lesquelles on intègre, φ_r, sont les valeurs du champ en tous les points r de la grille, dans un mésovolume Ω. Les bornes d'intégration sur chacune de ces variables sont identiquement $[-\epsilon, \epsilon]$ et correspondent pour un modèle à des valeurs admissibles maximum du rapport de la longueur de microfracture à considérer par rapport à la taille des grains. Vu que $|\varphi_r| = \left(\frac{l_r}{\Lambda_m}\right)^2$, où Λ_m est la taille d'une maille et l_r la longueur de la microfracture dans cette maille, on doit nécessairement avoir $\epsilon < 1$. La fonction H, dépendant également des paramètres extérieurs pression et contrainte différentielle, est l'énergie totale de l'état φ, c.à.d. $H[\varphi] = VE[\varphi]$ où E est la densité d'énergie donnée par (3.119). Dans un premier temps, on ne considérera toutefois pas les termes provenant des sections 3.6 et 3.7, correspondant aux interactions de courte portée et à la discrétisation du champ. On peut l'écrire sous forme condensée

$$\begin{aligned} H_{p,\sigma}[\varphi] &= V\left[d(p,\sigma) + e(p,\sigma)\overline{|\varphi|} + f(p,\sigma)\overline{|\varphi|}^2\right] \\ &\quad + H_{\text{int}}[\varphi] \end{aligned} \tag{4.2}$$

où d, e et f sont des fonctions réelles ayant les dimensions d'une densité d'énergie :

$$d = \frac{1}{2}\left[\frac{p^2}{\alpha} + \frac{\sigma^2}{1-\alpha}\right] \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2}\left[\frac{\kappa_2 p^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa_3 \sigma^2}{(1-\alpha)^2}\right] \\ &+ \frac{\Gamma_f}{8}\left[\left((p+\sigma)^2 - 4\tau_d^2 + 2(p-\sigma)(p+\sigma-2\tau_d)\right) h(p+\sigma-2\tau_d)\right] \\ &- \Gamma_t \sigma^2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$f = \frac{1}{4}\left[\frac{\kappa_2^2 p^2}{\alpha^3} + \frac{\kappa_3^2 \sigma^2}{(1-\alpha)^3}\right] \tag{4.5}$$

Le terme $H_{\text{int}}[\varphi]$ est le terme d'interaction, n'impliquant que des couplages entre modes de Fourier non nuls des champs φ et $\psi = |\varphi|$.

4.1.1 Détermination de l'état fondamental, première transition

L'état fondamental φ_0, correspondant au minimum de l'hamiltonien H, est d'une grande importance pour effectuer ce genre d'intégration. Sa détermination permet en général d'identifier les éventuelles transitions de phase d'un système, associées à une modification de la structure de l'état fondamental.

4.1.1.1 Propriétés analytiques de l'hamiltonien en φ

Pour minimiser H, on va d'abord chercher à minimiser séparément le groupe des trois premiers termes, additifs en $|\varphi_r|$, et le terme d'interaction.

- La quantité $\overline{|\varphi|}$ étant la moyenne sur l'espace de la valeur absolue du champ, il s'agit nécessairement d'une quantité positive. Le terme $d + e\overline{|\varphi|} + f\overline{|\varphi|}^2$, simple fonction quadratique de cette quantité, où f est toujours positif, sera donc minimum :
  - soit pour $\overline{|\varphi|} = 0$ si $e > 0$
  - soit pour $\overline{|\varphi|} = -\frac{e}{2f}$ si $e < 0$.

– Le terme d'interaction est plus subtil à analyser : on le reformule en posant

$$\begin{aligned}
\omega &\hat{=} \frac{\alpha\sigma}{(1-\alpha)p} & (4.6)\\
c_1 &\hat{=} \frac{\kappa_1}{\kappa_3} & (4.7)\\
c_2 &\hat{=} \frac{\kappa_2}{\kappa_3} & (4.8)\\
L(k) &\hat{=} c_1^2(1-\alpha u_k^2) & (4.9)\\
M(k) &\hat{=} c_1 u_k[(1-\alpha)c_2 - \alpha\omega v_k] & (4.10)\\
N(k) &\hat{=} (1-\alpha)c_2^2 + 2(1-\alpha)c_2\omega v_k + (1-\alpha v_k^2)\omega^2 & (4.11)\\
P(k) &\hat{=} \begin{pmatrix} L(k) & M(k) \\ M(k) & N(k) \end{pmatrix} & (4.12)\\
R_k &\hat{=} \begin{pmatrix} Re(\tilde{\varphi}_k) \\ Re(\tilde{\psi}_k) \end{pmatrix} & (4.13)\\
I_k &\hat{=} \begin{pmatrix} Im(\tilde{\varphi}_k) \\ Im(\tilde{\psi}_k) \end{pmatrix} & (4.14)\\
\text{on montre alors } H_{\text{int}} &= \frac{1}{2L^D}\frac{\kappa_3^2 p^2}{\alpha^2(1-\alpha)}\sum_{k\neq 0}[R_k^T.P(k).R_k + I_k^T.P(k).I_k] & (4.15)
\end{aligned}$$

Pour déterminer l'état de base, il faut donc étudier les propriétés de l'opérateur orthogonal $P(k)$. Vu la valeur toujours positive de $L(k)$ (on a toujours $\alpha < 1$, et u_k est un cosinus), la forme $q \in \mathbb{R}^2 \mapsto q^T.P(k).q$ admet des valeurs positives pour les vecteurs suivant la direction $(1;0)$, donc au moins une des deux valeurs propres de $P(k)$ est positive. Pour connaître le signe de la deuxième valeur propre, on est amené à résoudre le problème $q^T.P(k).q = 0$: si ceci n'admet que la solution triviale $q = 0$, la forme ne change jamais de signe et les deux valeurs propres de $P(k)$ sont positives, sinon elles sont de signes opposés. Ce problème se formule

$$L(k)q_1^2 + 2M(k)q_1q_2 + N(k)q_2^2 = 0 \tag{4.16}$$

Il admet des solutions non nulles si et seulement si $\det(P(k)) = L(k)N(k) - M(k)^2 \leq 0$. Vu les formes ci-dessus, et en utilisant $u_k^2 + v_k^2 = 1$, de nombreuses simplifications s'opèrent et on établit avec un peu d'algèbre élémentaire que

$$\det(P(k)) = L(k)N(k) - M(k)^2 = c_1^2(1-\alpha)\left[c_2 v_k + \omega\right]^2 \tag{4.17}$$

Ceci étant toujours positif ou nul, $P(k)$ est une forme bilinéaire positive.
On en conclut que le terme d'interaction (4.15) est minimum pour

$$\forall k \neq 0,\ R_k = I_k = 0$$

i.e. quand tous les modes de Fourier non nuls de φ – et naturellement de $|\varphi|$ – sont nuls, càd quand le champ φ est uniforme.

Avec les considérations précédentes sur le terme de H propre en $|\varphi|$, reste à étudier le signe de e, fonction donnée par (4.4), pour obtenir un minimum de l'hamiltonien.

4.1.1.2 Mise en évidence de la transition d'initiation de l'activité des microfractures

Initialement, $\sigma = 0$ et $e = \frac{1}{2}\frac{\kappa_2 p^2}{\alpha^2}$ est positif. On remarque toutefois que la fonction e contient un terme négatif, $-\Gamma_t \sigma^2$. En négligeant dans un premier temps le terme de friction[1], on peut reformuler e en termes de la contrainte déviatorique σ, et de la pression de confinement τ_r, en utilisant $p = \tau_a + \tau_r = \sigma + 2\tau_r$: posant

$$c_0 = \Gamma_t - \frac{\kappa_2}{2\alpha^2} - \frac{\kappa_3}{2\left(1-\alpha\right)^2} \tag{4.18}$$

$$\delta = \frac{\kappa_2}{\alpha^2 c_0} \tag{4.19}$$

il vient :

$$\begin{aligned} e &= \frac{\kappa_2}{2\alpha^2}\left(\sigma + 2\tau_r\right)^2 - \left(\Gamma_t - \frac{\kappa_3}{2\left(1-\alpha\right)^2}\right)\sigma^2 \\ &= -c_0\left(\sigma^2 - 2\delta\tau_r\sigma - 2\delta\tau_r^2\right) \end{aligned} \tag{4.20}$$

Lorsqu'on a établi Γ_t en section 3.5.2, on ne s'est pas focalisé sur la magnitude de ce terme : on sait simplement qu'il doit être relié aux paramètres de Lamé du matériau considéré via le préfacteur multiplicatif α dans (3.114). Sans faire d'analyse plus détaillée, on peut toutefois raisonnablement supposer que $\Gamma_t > \frac{\kappa_2}{2\alpha^2} + \frac{\kappa_3}{2(1-\alpha)^2}$: comme on va l'établir ici, ceci correspond à la tendance, pour une fracture, à s'étendre hors plan au-delà d'une certaine contrainte, ce que l'on attend qualitativement.

On a donc $c_0 > 0$, et $\delta > 0$, et en étudiant le signe de e dans (4.20), on obtient que e reste positif jusqu'à une certaine contrainte différentielle,

$$\sigma_0 = \tau_r\left(\delta + \sqrt{\delta^2 + 2\delta}\right) \tag{4.21}$$

puis devient négatif au-delà. Utilisant les résultats sur l'état fondamental de la section précédente 4.1.1.1, on en conclut que :

- En-deçà de cette contrainte différentielle, $\sigma < \sigma_0$, l'état le plus probable est donc $\varphi \equiv 0$: on a peu de microfractures développées dans le matériau.
- Au-delà de cette contrainte différentielle, $\sigma > \sigma_0$, et les états les plus probables sont uniformes, tel que $|\varphi| \equiv -\frac{e}{2f}$, i.e. on a deux états fondamentaux

$$\varphi \equiv \pm\frac{c_0\left[\sigma + \tau_r\left(\sqrt{\delta^2 + 2\delta} - \delta\right)\right]}{2f}\left[\sigma - \sigma_0\right] \tag{4.22}$$

Ce changement dans la nature des états fondamentaux est une transition de phase.

Aspects qualitatifs de cette transition.

- Le fait que l'état fondamental devienne non nul au-delà de la transition doit correspondre à l'initiation de l'activité des microfractures. Expérimentalement, cette transition se situe donc au point où les courbes de charge sortent du régime affine.

[1] Sa prise en compte complique l'analyse suivante, mais ne change pas qualitativement les résultats exposés.

- Le fait que les champs les plus probables soient uniformes, se retrouve dans le fait que l'activité microsismique observée est répartie relativement uniformément dans la roche dans ce régime.
- On note dans l'expression (4.22) que le préfacteur $\frac{c_0\left[\sigma+\tau_r\left(\sqrt{\delta^2+2\delta}-\delta\right)\right]}{2f}$ de $(\sigma-\sigma_0)$ est une fonction rationnelle de σ, qui reste toujours strictement positive. En développant au premier ordre en σ, ce modèle prévoit donc un état fondamental de magnitude $|\varphi| \underset{\sigma\to\sigma_0^+}{\simeq} \text{cste}(\sigma-\sigma_0)$:
  On n'a pas de discontinuité de cette magnitude en σ, et il s'agit d'une transition continue. Rappelant les expressions des modules élastiques effectifs de la roche, (3.86), on note que la pente des courbes de charge réversibles (reliée aux modules élastiques) est pour des états uniformes, une fonction affine décroissante de $\overline{|\varphi|}$. Ce modèle prévoit donc qu'elle diminuera de façon linéaire en $(\sigma-\sigma_0)$ au voisinage de σ_0^+.
- Enfin, le terme permettant cette transition, i.e. à l'origine de la possibilité de changement de signe de e, est celui introduit en section 3.5.2, qui correspond à la variation d'énergie totale lors de l'ouverture de fractures subaxiales en tension. Qualitativement, à partir du moment où on aura dépassé σ_0, on ouvrira donc de façon significative de telles fractures, ce qui correspond au comportement dilatant observé. Si on relâche alors la contrainte axiale, la friction sur les fractures inclinées empêche ces fractures subaxiales de se refermer parfaitement, ce qui se traduit par une déformation résiduelle non nulle.
- On doit cependant relever un aspect qualitatif de cette transition en contradiction avec l'expérience : un champ uniforme, vu nos définitions, correspond d'une part à des fractures de taille similaire distribués uniformément, mais également à des orientations de fractures identiques, ce qui ne correspond pas aux observations (on n'a pas de brisure de symétrie de parité avant le voisinage de la contrainte pic). À ce sujet, on doit toutefois rappeler que dans le modèle d'Hamiltonien très simple que l'on a considéré jusqu'à présent, le champ φ est à valeurs continues, et on n'a pas encore pris en compte d'effets de seuil. On verra plus loin que cette prise en compte modifie notablement cette transition.

4.1.2 Dégénérescence de l'état fondamental, mise en évidence d'une deuxième transition

Pour analyser plus finement les transitions de phase éventuelles de notre modèle, on cherche à déterminer si les états uniformes décrits ci-dessus sont les seuls qui minimisent H, ou si on a d'autres dégénérescences.

4.1.2.1 Étude des conditions de dégénérescence, en k et ω

On remarque dans l'équation (4.17) que pour les directions particulières k telles que

$$v_k = \sin(2\theta_k) = -\frac{\omega}{c_2} \tag{4.23}$$

, $P(k)$ a un déterminant nul et est une forme bilinéaire dégénérée positive. A contrario, pour toutes les autres directions, son déterminant est strictement positif, et la forme bilinéaire est définie positive. Cette propriété de dégénérescence a de profondes implications, comme on le verra par la suite.

Pour k suivant ces directions particulières (4.23), $P(k)$ admet une valeur propre nulle. On utilise (4.17) pour établir que les vecteurs propres (q_1, q_2) correspondants, solutions de (4.16), sont tels que

$$\frac{q_1}{q_2} = -\frac{M(k)}{L(k)} = -\frac{N(k)}{M(k)} \tag{4.24}$$

On doit alors noter que les vecteurs R_k et I_k, (4.13) et (4.14), intervenant dans les produits scalaires sur $P(k)$ constituant les termes d'interactions de H, ne sont pas quelconques : la définition (3.66) du champ ψ à partir du champ φ sur lequel on fait l'intégration fonctionnelle, $\psi = |\varphi|$, impose des couplages de leurs modes de Fourier. Ces couplages peuvent s'exprimer sous la forme suivante : $\forall m \in \mathbb{N}, \varphi^{2m}(x) = \psi^{2m}(x)$, ce qui impose que l'intégrale de ces champs sur l'espace soient égales. Ces intégrales s'expriment à partir des composantes de Fourier des champs d'origine : pour un champ réel b,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega d^D x\, b^2(x) &= \frac{1}{L^D} \sum_k \widetilde{b}_k \widetilde{b}_{-k} \\
\int_\Omega d^D x\, b^4(x) &= \frac{1}{L^{3D}} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \widetilde{b}_{k_1} \widetilde{b}_{k_2} \widetilde{b}_{k_3} \widetilde{b}_{-k_1-k_2-k_3}
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. On peut donc écrire le système d'équations suivantes contraignant les valeurs des modes de Fourier de ψ par rapport à ceux de φ :

$$\sum_k \left(\tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k} - \tilde{\psi}_k \tilde{\psi}_{-k} \right) = 0 \tag{4.25}$$

$$\sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \left(\tilde{\varphi}_{k_1} \tilde{\varphi}_{k_2} \tilde{\varphi}_{k_3} \tilde{\varphi}_{-k_1-k_2-k_3} - \tilde{\psi}_{k_1} \tilde{\psi}_{k_2} \tilde{\psi}_{k_3} \tilde{\psi}_{-k_1-k_2-k_3} \right) = 0 \tag{4.26}$$

et caetera. Pour qu'un mode de Fourier $k \neq 0$ de φ et ψ n'augmente pas l'énergie par rapport à l'état fondamental, on doit avoir d'une part k vérifiant (4.23), et d'autre part R_k et I_k vérifiant (4.24), c'est à dire

$$\widetilde{\varphi}_k = -\frac{M(k)}{L(k)} \widetilde{\psi}_k \tag{4.27}$$

Ceci implique qu'un champ au niveau fondamental vérifiera pour tous les modes $k \neq 0$ suivant les directions données par (4.23),

$$\sum_k \left(\tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k} - \tilde{\psi}_k \tilde{\psi}_{-k} \right) = \left(1 - \frac{M(k)^2}{L(k)^2} \right) \sum_k \widetilde{\varphi}_k \widetilde{\varphi}_{-k}$$

Suivant les autres directions, $P(k)$ est non dégénéré et les modes de Fourier du champ sont nuls. La contrainte (4.25) pour de tels états s'écrit donc

$$\left(\tilde{\varphi}_0^2 - \tilde{\psi}_0^2 \right) + \left(1 - \frac{M(k)^2}{L(k)^2} \right) \sum_k \widetilde{\varphi}_k \widetilde{\varphi}_{-k} = 0 \tag{4.28}$$

où la somme ne porte que sur les modes $k \neq 0$ suivant la direction particulière. Le premier terme est négatif : comme $\psi = |\varphi|$, on a nécessairement $\tilde{\varphi}_0^2 - \tilde{\psi}_0^2 \leq 0$. On verra ci-après – en fin de cette sous-section – qu'en augmentant σ à partir de 0, $1 - \frac{M(k)^2}{L(k)^2}$ croît régulièrement depuis une valeur strictement négative jusqu'à 0. On a enfin quelque soit le champ considéré, $\sum_k \widetilde{\varphi}_k \widetilde{\varphi}_{-k} \geq 0$. On conclut aisément de ceci que :

- Tant que $\left(\frac{M(k)}{L(k)}\right)^2 \neq 1$, (4.28) n'admet de solution que pour $\sum_k \widetilde{\varphi}_k \widetilde{\varphi}_{-k} = 0$, i.e. pour les états uniformes décrits en section précédente (nuls ou non), et on n'a pas d'autre dégénérescence de l'état fondamental.
- Au contraire, pour

$$\frac{M(k)}{L(k)} = \frac{N(k)}{M(k)} = \pm 1 \tag{4.29}$$

  ,tout état composé de modes de Fourier non nuls uniquement pour ces directions particulières, superposés à la valeur uniforme déterminée précédemment, aura une énergie égale à cet état uniforme, et l'état fondamental sera dégénéré, composé de cet ensemble d'états.

Cette condition (4.29) équivaut au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \det(P(k)) & = & 0 \ \text{(i)} \\ L(k)^2 - M(k)^2 & = & 0 \ \text{(ii)} \end{array} \right. \tag{4.30}$$

On établit à partir des définitions (4.9) et (4.10), en utilisant (4.23) solution de (i), et la propriété $u_k^2 + v_k^2 = 1$ (comme ces grandeurs sont cosinus et sinus d'un même angle), que si (i) est vérifié alors

$$L(k)^2 - M(k)^2 = \frac{c_1^4}{c_2^2} \left[\omega^2 - (c_2^2 - c_1^2)\right] \left[(1-\alpha)c_2^2 + \alpha\omega^2)\right]^2 \tag{4.31}$$

Le troisième terme est toujours positif. En rappelant les définitions de c_1 et c_2 (4.7) et (4.8), celles de κ (3.82) à (3.84) et celles de η (3.29), on établit que

$$c_2^2 - c_1^2 = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} \frac{\zeta_2(\zeta_1 + (2\alpha - 1)\zeta_2)}{\zeta_3^2} \tag{4.32}$$

, où les coefficients ζ sont les facteurs de forme positifs intervenant dans δc, la variation des modules effectifs d'une maille contenant une fracture. On a donc toujours $c_2^2 - c_1^2 \geq 0$. Le polynôme en ω (4.31) n'admet donc que deux racines, et (4.30) équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \omega^{\pm} & = & \pm\sqrt{c_2^2 - c_1^2} \ \text{(i)} \\ \sin(2\theta_k) & = & -\frac{\omega^{\pm}}{c_2} \ \text{(ii)} \end{array} \right. \tag{4.33}$$

Notons deux remarques sur ces solutions :

- Deux directions, que l'on a noté $\hat{k}^+$ et $\hat{k}^-$ en figure 4.1, correspondent à cette valeur particulière de v_k : elles se distinguent par le signe de $u_k = \cos(2\theta_k)$. On voit clairement sur cette figure que $u_{\hat{k}^-} > 0$, et $u_{\hat{k}^+} < 0$, donc $u_{\hat{k}^+} = -u_{\hat{k}^-} = -c_1/c_2$. En réinjectant ceci dans $M(k)/L(k)$ – (4.9), (4.10) – on montre aisément que

$$\frac{M(\hat{k}^+)}{L(\hat{k}^+)} = \frac{N(\hat{k}^+)}{M(\hat{k}^+)} = -1 \tag{4.34}$$
$$\frac{M(\hat{k}^-)}{L(\hat{k}^-)} = \frac{N(\hat{k}^-)}{M(\hat{k}^-)} = 1 \tag{4.35}$$

D'après (4.27), la direction $\hat{k}^+$ correspond donc à une contribution énergétique nulle des modes de Fourier sous la condition que $\tilde{\varphi}_k = \tilde{\psi}_k$, et $\hat{k}^-$ à condition que $\tilde{\varphi}_k = -\tilde{\psi}_k$.
– Enfin, vu la définition de ω (4.6), on a initialement $\omega = 0$ et d'après (4.31), $L(k)^2 - M(k)^2 < 0$, i.e. $1 - \frac{M(k)^2}{L(k)^2} < 0$. Ceci reste le cas jusqu'à ce qu'on atteigne une racine du polynôme (4.31), ce qu'on a utilisé plus haut pour prouver qu'en-deçà de cette racine, on a pas de dégénérescences supplémentaires par rapport aux deux états uniformes donnés en section (4.1.1.2).

4.1.2.2 Description de l'ensemble des microétats de base au point critique

On conclut finalement que l'état fondamental est initialement l'état intact uniformément nul, se sépare éventuellement en deux états uniformes après la première transition, jusqu'à ce que le rapport $\frac{\sigma}{p}$ atteigne $\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\omega^+$ (σ et p, tels qu'on les a définis, sont positifs lors du chargement). À cette valeur[2], il devient infiniment dégénéré : c'est l'origine de la deuxième transition de phase observée, et ceci est la valeur critique du paramètre de contrôle macroscopique.

L'ensemble des microétats dans l'état fondamental à cette valeur particulière de la contrainte appliquée, est donné par un des deux états uniformes au niveau fondamental, auquel on peut superposer des modes de Fourier d'amplitude quelconque suivant les directions particulières $\hat{k}^+$ ou $\hat{k}^-$de (4.33ii). D'après la dernière remarque de la section précédente où l'on a défini $\hat{k}^+$ et $\hat{k}^-$, par rapport à l'état uniforme où $\varphi > 0$, on pourra ajouter indifféremment des modes suivant $\hat{k}^+$, tant que le signe de φ reste partout positif : $\tilde{\varphi}_k = \tilde{\psi}_k$. De même, par rapport à l'état uniforme $\varphi < 0$, on pourra ajouter des modes suivant $\hat{k}^-$. Ceci correspond à la possibilité d'ajouter des bandes conjuguées par rapport à l'axe de contrainte principale sans modifier l'énergie des états fondamentaux déterminés en 4.1.1.2 - voir figure 4.1. Les bandes perpendiculaires à $\hat{k}^+$sont constituées de fractures colinéaires à $\hat{e}_1$ ($\varphi > 0$), et celles perpendiculaires à $\hat{k}^-$ au contraire correspond à des fractures orientées suivant $\hat{e}_2$ ($\varphi < 0$). Il s'agit donc bien de bandes conjuguées, y compris dans leur microstructure. Ceci est simplement une conséquence naturelle de la symétrie de parité de notre problème : le signe de φ correspondant à une orientation définie par rapport à $\hat{e}_1$ et $\hat{e}_2$, les propriétés doivent être identiques sous la transformation $\hat{e}_1 \leftrightarrow \hat{e}_2$, $\varphi \leftrightarrow -\varphi$. Notons enfin que les directions globales de ces bandes ne correspondant pas à $\hat{e}_1$ ou $\hat{e}_2$, elles sont constituées de microfractures en échelon. Ceci est qualitativement proche de l'observation expérimentale de localisation macroscopique en bandes de cisaillement. On supposera qu'une fois ces bandes formées, dans la mesure où une structure macroscopique traverse l'échantillon, la modélisation physique que nous avons adoptée, basée sur des milieux infinis, cesse d'être valable, et un autre phénomène physique instable se met en place, amenant les petites fractures présentes à coalescer pour former la fracture macroscopique finale : Au-delà de cette valeur critique de $\frac{\sigma}{p}$, la physique de

[2]Voir la remarque en annexe D.1.

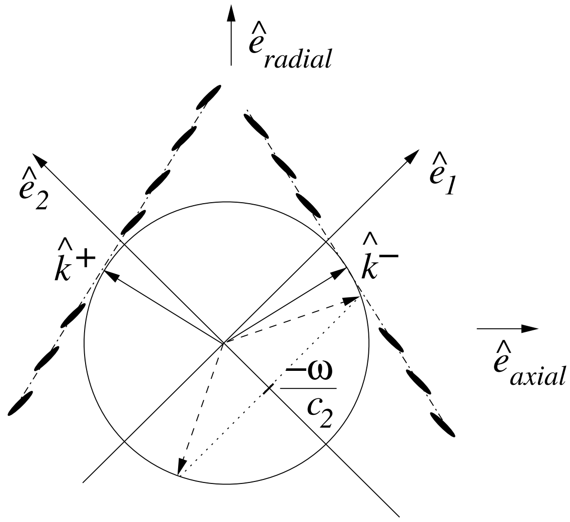


FIG. 4.1 – Bandes conjuguées possibles à la valeur critique de la contrainte. Ces bandes représentées en pointillés sont perpendiculaires aux directions $\hat{k}^-$ et $\hat{k}^+$, telles que $\sin\left[2(\widehat{\hat{e}_1;\hat{k}^\pm})\right] = \frac{-\omega^+}{c_2}$. Elles sont constituées de microfractures également conjuguées, suivant les directions $\hat{e}_1$ pour $\hat{k}^+$et $\hat{e}_2$ pour $\hat{k}^-$, schématisées ici par des ellipses pleines.

la fracturation n'est plus décrite par ce modèle[3]. L'apparition d'une bande de cisaillement parmi celles possibles brise les symétries du problème, à la suite de quoi la fracturation macroscopique se fera le long de cet objet. Cette transition correspond donc bien à une brisure spontanée de symétrie : À ce point critique, toutes les bandes sont encore possibles et on doit encore avoir le paramètre d'ordre macroscopique $\langle\varphi\rangle$ nul. Au-delà, il quittera progressivement la valeur 0 (ce qui n'est plus décrit par cette théorie : on ne décrit que la branche précédant la transition) . L'énergie stockée dans ces modes, quadratique en $(\tilde{\varphi}_k;\tilde{\psi}_k)$, a une dérivée seconde par rapport à ces variables tendant progressivement vers zéro à ce point critique : ceci correspond bien à une transition continue ("du second ordre", ou supérieur, dans la classification d'Ehrenfest).

4.2 Intégration fonctionnelle proprement dite

4.2.1 Changement de variable vers les modes de Fourier

On doit maintenant effectuer l'intégration fonctionnelle (4.1) pour établir l'expression de la fonction de partition Z. Les termes apparaissant naturellement en fonction des modes de Fourier de φ, on utilisera les variables $\tilde{\varphi}_k$ pour faire cette intégration.

On doit d'abord noter comment l'élément de volume de l'intégrale fonctionnelle $\underset{r\in\Omega}{\pi}(d\varphi_r)$, se

[3]Pour pouvoir décrire ce comportement, il faudrait inclure le fait que les conditions aux frontières à l'infini ne sont plus homogènes, et correspondent probablement à des directions principales de contrainte moyenne ne coïncidant plus avec les directions axiale et radiale : les conditions aux frontières à poser doivent être modifiées par la présence de cette bande macroscopique. Ceci n'étant pas compris dans le modèle d'hamiltonien initial, il est exclus qu'il rende compte de cette physique post-localisation.

transforme par ce changement de variables. Pour des fonctions à support infinis de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est unitaire (i.e. $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$), et le Jacobien de cette transformation est donc 1 $(Jac(\mathcal{F})^2 = det(\mathcal{F}\mathcal{F}^*) = det(Id) = 1)$. Pour des fonctions complexes à support finis, et à variation régulière en-deçà d'une longueur d'onde caractéristique Λ_m, en remplaçant de façon heuristique l'intégrale dans la définition de la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ par une somme finie sur les sites r d'un réseau carré de pas Λ_m, le même argument s'applique, et l'élément de volume $\underset{r\in\Omega}{\pi}[dRe(\varphi_r)dIm(\varphi_r)]$ se transforme en $\underset{k}{\pi}[dRe(\tilde{\varphi}_k)dIm(\tilde{\varphi}_k)]$, à une constante multiplicative près. Les champs φ_r considérés dans notre modèle étant de surcroît réels, les couplages entre leurs modes de Fourier $\widetilde{\varphi}(-k) = \widetilde{\varphi}^*(k)$, amènent à ne faire l'intégration fonctionnelle que sur les amplitudes des modes de Fourier dans un demi-espace des modes k admissibles. Ceci établit que l'élément de volume $\underset{r\in\Omega}{\pi}(d\varphi_r)$ se transforme par ce changement de variables en $dRe(\tilde{\varphi}_0)\underset{k\in\Upsilon}{\pi}(dRe(\tilde{\varphi}_k)dIm(\tilde{\varphi}_k))^4$, où Υ désigne un demi-espace des k non nuls possibles[5] .

On a vu que la fonction H dans l'intégrant s'écrit

$$\begin{aligned} H_{p,\sigma}[\varphi] &= d(p,\sigma)V + e(p,\sigma)\tilde{\psi}_0 + \frac{1}{V}f(p,\sigma)\tilde{\psi}_0^2 \\ &+\frac{1}{V}\sum_{k\in\Upsilon}\left(R_k^T.m(k,p,\sigma).R_k + I_k^T.m(k,p,\sigma).I_k\right) \end{aligned} \tag{4.36}$$

où d, e et f sont des fonctions réelles ayant les dimensions d'une densité d'énergie, $m(k,p,\sigma)$ est une fonction matricielle à coefficients réels de mêmes dimensionnalité, et R_k et I_k sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ construits à partir de $\tilde{\varphi}_k$ et $\tilde{\psi}_k$ par (4.13) et (4.14).

Le champ ψ étant une fonctionnelle de φ – sa valeur absolue – , on a vu que ses coefficients de Fourier sont définis à partir de ceux de φ par une série infinie de contraintes, dont les deux premières sont (4.25) et (4.26). Ces couplages des modes font que l'intégrale

$$Z = \int d\tilde{\varphi}_0 \prod_{k\in\Upsilon}(d\tilde{\varphi}_k^R d\tilde{\varphi}_k^I)e^{-\beta H[\tilde{\varphi}]} \tag{4.37}$$

n'est pas séparable, et on ne peut malheureusement l'évaluer directement –remarque : pour alléger les notations, on note dorénavant $\tilde{\varphi}_k^R \hat{=} Re(\tilde{\varphi}_k)$, $\tilde{\varphi}_k^I \hat{=} Im(\tilde{\varphi}_k)$, et on fera de même pour ψ.

4.2.2 Principe d'une méthode d'intégration par renormalisation

Une méthode serait appliquable en principe pour contourner ce problème : notant de façon symbolique les contraintes entre φ et ψ, $q_{2n}[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}] = 0$, où les fonctions q_i sont des polynômes de degré i sur les variables $\tilde{\varphi}_k$ et $\tilde{\psi}_k$, on peut réexprimer l'intégrale fonctionnelle qui nous intéresse en rendant les champs φ et ψ virtuellement indépendants, et en exigeant que ces contraintes soient satisfaites : formellement,

$$Z = \int d\tilde{\varphi}_0 d\tilde{\psi}_0 \prod_{k\in\Upsilon}(d\tilde{\varphi}_k^R d\tilde{\varphi}_k^I d\tilde{\psi}_k^R d\tilde{\psi}_k^I)e^{-\beta H[\tilde{\varphi};\tilde{\psi}]}.\prod_{n=1}^{+\infty}\delta\left(q_{2n}\left[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right]\right)$$

[4] Vu la définition de la transformée de Fourier que nous avons employée, on a en fait une constante multiplicative supplémentaire $(2\pi)^{-(\frac{L}{\Lambda_m})^D}$, qui ne joue aucun rôle dans les dérivées du potentiel issu de la fonction de partition, et que l'on omettra par la suite.

[5] Formellement, $\Upsilon = \left\{k/\left(\frac{L}{2\pi}k_1, \frac{L}{2\pi}k_2\right) \in \left(\left\{1,2,...,\frac{L}{\Lambda_m}\right\} \times \left\{-\frac{L}{\Lambda_m}, -\frac{L}{\Lambda_m}+1, ..., \frac{L}{\Lambda_m}\right\}\right) U \left(\{0\} \times \left\{1,2,...,\frac{L}{\Lambda_m}\right\}\right)\right\}$

En écrivant les diracs sous la forme

$$\delta(x) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} e^{-\lambda x^2}$$

, ceci peut se formaliser comme

$$Z = \lim_{\lambda \to +\infty} Z_\lambda \tag{4.38}$$

$$Z_\lambda = \int d\tilde{\varphi}_0 d\tilde{\psi}_0 \prod_{k\in\Upsilon} (d\tilde{\varphi}_k^R d\tilde{\varphi}_k^I d\tilde{\psi}_k^R d\tilde{\psi}_k^I . \frac{\lambda}{\pi^2}) e^{-\beta H[\tilde{\varphi};\tilde{\psi}] - \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \left(q_{2n}[\tilde{\varphi},\tilde{\psi}]\right)^2} \tag{4.39}$$

, où les bornes d'intégration sont telles que les champs réels φ et ψ soient à valeurs respectivement dans $[-\epsilon;\epsilon]$ et $[0;\epsilon]$. Traitant alors H comme hamiltonien de référence, on considère le termes de contraintes comme une perturbation, et développant l'exponentielle par rapport à $(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\psi}_k)$, comme le terme de contrainte d'ordre le plus bas est $q_2[\tilde{\varphi};\tilde{\psi}]^2$, d'ordre 4, alors que l'hamiltonien H est un polynôme d'ordre 2, on obtient

$$\begin{aligned} Z_\lambda &= \int d\tilde{\varphi}_0 d\tilde{\psi}_0 \prod_{k\in\Upsilon} (d\tilde{\varphi}_k^R d\tilde{\varphi}_k^I d\tilde{\psi}_k^R d\tilde{\psi}_k^I . \frac{\lambda}{\pi^2}) e^{-\beta H[\tilde{\varphi};\tilde{\psi}] - \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \left(q_{2n}[\tilde{\varphi},\tilde{\psi}]\right)^2} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int d\tilde{\varphi}_0 d\tilde{\psi}_0 \prod_{k\in\Upsilon} (d\tilde{\varphi}_k^R d\tilde{\varphi}_k^I d\tilde{\psi}_k^R d\tilde{\psi}_k^I . \frac{\lambda}{\pi^2}) e^{-\beta H[\tilde{\varphi};\tilde{\psi}]} \left(-\lambda \sum_{n=1}^{\infty} (q_{2n}[\tilde{\varphi};\tilde{\psi}])^2\right)^m \\ &= Z_0 . \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\langle \left(-\lambda \sum_{n=1}^{\infty} (q_{2n}[\tilde{\varphi};\tilde{\psi}])^2\right)^m \right\rangle_0 \end{aligned}$$

où $\langle\rangle_0$ désigne la moyenne sur la distribution correspondant au seul hamiltonien de référence $H[\tilde{\varphi};\tilde{\psi}]$.

Ce développement pourrait alors être écrit comme une série de termes représentés par des graphes de Feynman. Le premier ordre n'impliquerait que la première contrainte q_2, le deuxième q_2 et q_4, etc. Les propagateurs correspondant aux liens symboliques de ces graphes correspondraient aux termes d'ordre 2 de H, i.e. aux $P(k)$ –(4.12)– de H_{int}.

Les différents ordres de ce développement perturbatif sont certainement divergents, et il faudrait enfin procéder à une renormalisation en exigeant que le résultat soit indépendant de la taille de la maille Λ_m, ou de façon équivalente que la fonction de partition Z_λ soit invariante par transformation d'échelle au point critique.

Ce type de méthode, désormais classique, est décrit in extenso par exemple par Binney et al. [1992] . Ce développement étant malheureusement assez technique, il n'a pas été mené à bout dans le cadre de ce travail. On a préféré tout d'abord faire une approximation simple pour évaluer Z, que l'on décrit ci-après.

4.2.3 Approximation de signe constant

On a remarqué que l'hamiltonien (4.36) est un simple polynôme d'ordre 2 des $(\tilde{\varphi}_k; \tilde{\psi}_k)$ où chaque k correspond à un terme séparé, si ce n'est le couplage entre modes de φ et ψ. De plus, après la première transition (début de l'activité des microfractures), on a vu que ce modèle prédit des états fondamentaux uniformes non nuls, i.e. de signe constant. Ceci suggère l'approximation suivante : On va approcher Z dans (4.37), par une somme restreinte sur les états de signe constant. On a alors $\psi \equiv \varphi$ ou $\psi \equiv -\varphi$, et les modes de Fourier de ψ se ramènent trivialement à ceux de φ, comme égaux ou opposés. La validité de cette approximation est malheureusement relativement incontrôlable. Comme cette restriction inclut tous les états voisins des deux états fondamentaux, on s'attend à ce qu'elle décrive bien les principales contributions pour Z. On peut avec certitude affirmer qu'en faisant ainsi une somme sur un sous-ensemble de l'espace des états, on établit un minorant de Z, donc une borne supérieure du potentiel F (2.25), mais le poids dans Z des états non comptés est impossible à majorer a priori. Notons simplement que par rapport à une approximation de champ moyen, qui est aussi une approximation par sommation sur un sous-ensemble, cette démarche apporte certainement un meilleur résultat, puisqu'elle tient compte malgré tout des fluctuations spatiales des champs restreints auxquels on s'intéresse.

Dans le cadre de cette approximation, (4.37) s'exprime simplement à partir de (4.36) comme

$$\begin{aligned} Z \ \simeq \ & \int_{\varphi \text{ positifs}} d\tilde{\varphi}_0 \prod_{k \in \Upsilon} (d\tilde{\varphi}_k^R d\tilde{\varphi}_k^I) e^{-\beta V[d + e\frac{\tilde{\varphi}_0}{V} + f\left(\frac{\tilde{\varphi}_0}{V}\right)^2 + \sum_{k\in\Upsilon} w^+(k)\left|\frac{\tilde{\varphi}_k}{V}\right|^2} \\ & + \int_{\varphi \text{ negatifs}} d\tilde{\varphi}_0 \prod_{k \in \Upsilon} (d\tilde{\varphi}_k^R d\tilde{\varphi}_k^I) e^{-\beta V[d - e\frac{\tilde{\varphi}_0}{V} + f\left(\frac{\tilde{\varphi}_0}{V}\right)^2 + \sum_{k\in\Upsilon} w^-(k)\left|\frac{\tilde{\varphi}_k}{V}\right|^2} \end{aligned} \tag{4.40}$$

où les fonctions d, e, f sont données par (4.3), (4.4) et (4.5), et où $w^{\pm}(k)$ de (p, σ) est déterminée à partir de (4.15), comme

$$w^{\pm}(k) = \frac{1}{2} \frac{\kappa_3^2 p^2}{\alpha^2(1-\alpha)} \left[L(k) \pm 2M(k) + N(k)\right] \tag{4.41}$$

Les intégrales sur les modes de Fourier ne sont plus couplées que via les bornes du domaine correspondant aux conditions $\forall r$, $\varphi(r) \in [0, \epsilon]$ et $\forall r$, $\varphi(r) \in [-\epsilon, 0]$. Ces frontières ne correspondent pas à une forme simple pour les amplitudes de Fourier. On peut toutefois établir que dans la limite où le volume mésoscopique V est suffisamment grand (ce qui est possible tant qu'on n'a pas de cross-over de taille finie), les intégrales sur chaque mode $k \neq 0$ proviennent entièrement du voisinage de $\tilde{\varphi}_k = 0$[6]. On détermine qu'on peut considérer comme bornes pour cette intégrale multiple, en place des véritables conditions, des bornes séparées pour chaque mode – par exemple $\left(\frac{\tilde{\varphi}_k^R}{V}; \frac{\tilde{\varphi}_k^I}{V}\right) \in [-\epsilon/2, \epsilon/2]^2$, ou alternativement $\left(\frac{\tilde{\varphi}_k^R}{V}; \frac{\tilde{\varphi}_k^I}{V}\right) \in \mathbb{R}^2$ – sans modifier

[6]On peut encadrer par exemple l'intégrale sur les fonctions positives : par une borne supérieure où on intègre sur $\mathbb{R}$ entier pour chacune des variables $\frac{\tilde{\varphi}_0^R}{V}; \frac{\tilde{\varphi}_k^R}{V}; \frac{\tilde{\varphi}_k^I}{V}$; et par une borne inférieure où on n'intègre que sur un domaine tel que $0 \leq \frac{\tilde{\varphi}_0}{V} \leq \varepsilon$ et $\sum_{k\neq 0} \left(\left|\frac{\tilde{\varphi}_k^R}{V}\right| + \left|\frac{\tilde{\varphi}_k^I}{V}\right| \right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \min\left(\frac{\tilde{\varphi}_0}{V}; \varepsilon - \frac{\tilde{\varphi}_0}{V}\right)$, dont on peut aisément vérifier qu'il est inclus dans le domaine $\forall r$, $\varphi(r) \in [0, \epsilon]$ –il s'agit d'un polyhèdre n-dimensionnel, n étant le nombre de points du champ sur lesquels on intègre. Le résultat pour la borne supérieure s'évalue trivialement, celui pour la borne inférieure s'effectue mode après mode. Étudiant le résultat dans la limite où $V \to +\infty$, ce qui est relativement fastidieux, on peut montrer que cette borne inférieure est asymptotiquement équivalente à la borne supérieure, donc l'intégrale fonctionnelle entre les deux l'est également.

le résultat. Les intégrales multiples (4.40) se factorisent alors trivialement en

$$\begin{aligned}
Z &\simeq z_c \left\{ z_0^+ \prod_{k\in\Upsilon} \left[z_R^+(k) z_I^+(k)\right] + z_0^- \prod_{k\in\Upsilon} \left[z_R^-(k) z_I^-(k)\right] \right\} && (4.42)\\
\text{avec } z_c &= e^{-\beta V d} && (4.43)\\
z_0^+ &= \int_{\frac{\tilde{\varphi}_0}{V}=0}^{\epsilon} d\tilde{\varphi}_0 e^{-\beta V\left[e\frac{\tilde{\varphi}_0}{V} + f\left(\frac{\tilde{\varphi}_0}{V}\right)^2\right]} && (4.44)\\
z_0^- &= \int_{\frac{\tilde{\varphi}_0}{V}=-\epsilon}^{0} d\tilde{\varphi}_0 e^{-\beta V\left[-e\frac{\tilde{\varphi}_0}{V} + f\left(\frac{\tilde{\varphi}_0}{V}\right)^2\right]} && (4.45)\\
z_R^\pm(k) &= \int_{\frac{\tilde{\varphi}_k^R}{V}=-\epsilon/2}^{\epsilon/2} d\tilde{\varphi}_k^R e^{-\beta V w^\pm(k)\left(\frac{\tilde{\varphi}_k^R}{V}\right)^2} = z_I^\pm(k) && (4.46)
\end{aligned}$$

Tous les termes restant à intégrer sont de simples gaussiennes. On les évalue sans difficulté, et en notant que V est suffisamment grand :

$$\begin{aligned}
z_R^\pm(k) = z_I^\pm(k) &= \sqrt{\frac{\pi V}{\beta w^\pm(k)}} \mathrm{erf}\left(\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\beta V w^\pm(k)}\right)\\
&\sim \sqrt{\frac{\pi V}{\beta w^\pm(k)}} && (4.47)\\
z_0^+ = z_0^- &= \sqrt{\frac{\pi V}{4\beta f}} e^{\frac{\beta V e^2}{4f}} \left[\mathrm{erf}\left((\epsilon + \frac{e}{2f})\sqrt{\beta V f}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{e}{2f}\sqrt{\beta V f}\right)\right]\\
&\sim \epsilon V && (4.48)
\end{aligned}$$

Remarquons enfin que les formes $w^\pm$ présentent une symétrie évidente par rapport à la direction du vecteur k : ces fonctions ont été définies en (4.41) à partir de L, M , N – (4.9), (4.10) et (4.11)– comme proportionnelles (avec un même préfacteur) à $[L(k) \pm 2M(k) + N(k)]$. On note que la fonction M est impaire en $u_k = \cos(2\theta_k)$, alors que L et N sont paires en u_k. Par ailleurs, sous le changement de variables $\theta' = \pi/2 - \theta$, on a $v_{k'} = \sin(2(\pi/2-\theta)) = \sin(2\theta) = v_k$, et $u_{k'} = \cos(2(\pi/2-\theta)) = -\cos(2\theta) = -u_k$. On en déduit donc que sous ce changement de variables, on a $w^-(k') = w^+(k)$. Cette transformation transformant Υ en lui-même, et comme on a vu que $z_0^+ = z_0^-$, on en déduit dans (4.42) que les deux contributions entre crochets sont identiques, et que Z est donné par le double de l'une d'entre elles.[7] Cette remarque faite, on va indifféremment sélectionner z^+ pour exprimer Z. Á l'aide de ces expressions, on obtient finalement[8] le potentiel F par (2.25) :

[7]Ceci est une fois de plus conséquence directe et naturelle de la symétrie de notre problème par parité : la contribution à l'intégrale fonctionnelle des populations d'orientation donnée (signe constant) doit être indépendante de cette orientation, donc du signe en question.

[8]Pour établir ceci, on a supprimé dans Z un facteur $(2\pi)^{\mathrm{Card}(\Upsilon)}$, qui compense exactement le facteur $(2\pi)^{-(\frac{L}{\Lambda_m})^D}$ que l'on avait omis dans la transformation de la mesure fonctionnelle des amplitudes réelles aux amplitudes de Fourier, section 4.2.1. Ceci n'est de toute façon relié a aucune grandeur physique, mais montre simplement la cohérence mathématique du changement de variables. Par ailleurs, la contribution des termes z_0 à F, et du facteur 2 prenant en compte la somme sur les deux sous-espaces, $-\ln(2\epsilon V)/\beta V$, est naturellement négligeable.

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\ln Z}{\beta V} \\ F &\sim d + \frac{1}{\beta V} \sum_{k \in \Upsilon} \ln \left(\frac{2\beta}{V} w^+(k) \right) \end{aligned} \tag{4.49}$$

4.3 Dérivations du potentiel thermodynamique et établissement de la pente recherchée

On veut naturellement utiliser l'expression du potentiel thermodynamique (4.49) pour obtenir la variation de la pente de la courbe de charge au voisinage de cette transition de localisation, en utilisant notre formalisme de physique statistique, pour relier cette théorie aux observations expérimentales de la partie I .

4.3.1 Lien avec la pente observée : objectif

Au chapitre 2, on a défini D la pente de cette courbe, et C les modules élastiques de la roche, correspondant à la pente des courbes de décharge. D'après la relation (2.44), on a

$$\tau \left(D^{-1} - C^{-1} \right) = T \frac{ds}{d\tau} \tag{4.50}$$

or en utilisant la première loi (2.32), on obtient la densité d'entropie s comme

$$s = -\frac{\partial F}{\partial T} \tag{4.51}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\tau} &= \left.\frac{\partial s}{\partial \tau}\right|_T + \left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_\tau \frac{dT}{d\tau} \\ &= -\left.\frac{\partial^2 F}{\partial \tau \partial T}\right| - \left.\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right|_\tau \frac{dT}{d\tau} \end{aligned}$$

Ceci montre que la pente recherchée D vérifie la relation

$$\tau D^{-1} = \tau C^{-1} - T \left(\left.\frac{\partial^2 F}{\partial \tau \partial T}\right| + \left.\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right|_\tau \frac{dT}{d\tau} \right) \tag{4.52}$$

Les termes T et $\frac{dT}{d\tau}$ sont en principe obtenus à partir de la solution de l'équation différentielle pour $T(\tau)$, (2.50).

4.3.2 Origine des éventuelles singularités de D^{-1}

4.3.2.1 Complaisance de la roche

Intéressons-nous tout d'abord au premier terme de (4.52) : la complaisance C^{-1} de la roche, comme on l'a établi en (2.40), est la moyenne thermodynamique des complaisances des microétats, i.e. de termes de type M^{-1} où M est donné pour chaque microétat par (3.86). Ceci ayant été établi dans notre modèle par une approximation de Born à l'ordre deux à partir de l'état intact, et les microfractures étant supposées petites ($|\varphi| < \epsilon$) , ces termes restent voisins de la complaisance de la roche intacte (on peut aussi le vérifier en majorant les termes d'ordre 1 et 2 dans (3.86)), et τC^{-1} reste fini : bien qu'inférieure à la pente initiale, la pente des courbes de décharge ne présente pas de singularité à cette transition. Ceci correspond bien à l'observation expérimentale, montrant que les pentes des courbes de décharge restent non nulles à la contrainte pic.

4.3.2.2 Température

Dans le second terme, interviennent la température et sa dérivée totale par rapport à la contrainte maximum atteinte. En principe, T est obtenu comme solution de l'équation différentielle non-linéaire (2.50). On devrait en principe faire également une analyse asymptotique de cette équation, mais on se contentera de faire l'hypothèse supplémentaire que T se comporte également régulièrement aux alentours de la transition, i.e. que T et $\frac{dT}{d\tau}$ restent finis (non nuls). Faisons sur ces hypothèses les remarques suivantes : on a vu que $T = 0$ correspondrait à un système obligatoirement dans un de ses états fondamentaux. On sait que ceci n'est physiquement pas le cas : on n'observe pas un ordre parfait, i.e. uniquement des bandes, autour de la contrainte pic. Il reste énormément d'états différents, comportant de très nombreuses fractures non cohérentes avec les bandes de cisaillement, même si ces bandes semblent être probables. De même, $T = \infty$ correspondrait à des états tous équiprobables, indépendamment de la configuration de fractures. On sait également que l'on observe des tendances statistiquement majoritaires dans la géométrie des états réalisés, et ceci n'aurait pas de sens non plus. Ces arguments intuitifs montrent que T doit avoir une limite finie au point critique. Il est plus délicat de développer le même genre d'argument pour $\frac{dT}{d\tau}$, et on se contentera de le supposer fini.

4.3.2.3 dérivées partielles de l'entropie

Restent alors les deux dérivées secondes de F qui peuvent éventuellement être singulières, ce qui se retrouvera alors entièrement dans τD^{-1}, i.e. dans la façon dont la pente de la courbe de charge, proportionnelle à des composantes de D, s'annule à l'approche de cette transition.

4.3.3 Évaluation des dérivées secondes de F

4.3.3.1 Comportement de $\ln(w)$, intégrant de F

Dans l'expression de F (4.49), interviennent des logarithmes de la fonction w^+. Cette fonction (4.41) a été définie à partir de (4.15), avec $\tilde{\varphi}_k = \tilde{\psi}_k$. On a donc

$$w^+(k,p,\sigma) = \frac{1}{2}\frac{\kappa_3^2 p^2}{\alpha^2(1-\alpha)}\left[(1,1).P(k).(1,1)^T\right]$$

où les $P(k)$ sont les formes orthogonales positives données en (4.12). Vu cette forme, d'une part w^+ est toujours positif (ce qu'on a déjà exploité pour déterminer les états fondamentaux, et pour effectuer les intégrations fonctionnelles). D'autre part w^+ s'annule lorsque $P(k)$ est une forme dégénérée, et que le vecteur propre correspondant à la valeur propre 0 coïncide avec $(1,1)$. D'après (4.24), w^+ est donc nul quand la condition (4.34) est vérifiée. $w^+(\omega,k)$ est donc nul sous les conditions nécessaires et suffisantes, que $\omega=\omega^{\pm}$, et que k soit colinéaire à $\hat{k}^+$. Comme ω est toujours positif au cours de l'histoire de compression, seule la racine ω^+ est atteinte. On obtient ainsi que tant que $\omega<\omega^+$, w^+ est strictement positif pour tout k. Quand on atteint la valeur critique ω^+, w^+ reste strictement positif pour tout k, à l'exception de la direction $\hat{k}^+$où il est nul.

L'intégrant du potentiel F (4.49) présentera donc une singularité logarithmique au voisinage de $\omega\to\omega^+$, et de cette direction particulière. Il sera régulier partout ailleurs.

4.3.3.2 Origine des éventuelles singularités dans les dérivées secondes de F

Le premier terme de F, correspondant à la densité d'énergie élastique triviale du milieu non endommagé, d (4.3), ne présente pas de dépendance en température, et n'interviendra donc pas dans les dérivées qui nous intéressent (4.52).

Dans le terme suivant, dans la limite où la taille des volumes mésoscopiques V est suffisamment grande, on remplace de façon heuristique la somme discrète sur les modes de Fourier $k\in\Upsilon$ par une intégration continue sur q, θ, coordonnées radiales de k – en effet, on a vu que $w^{\pm}$ ne dépendent pas de q, mais uniquement de la direction θ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta V}\sum_{k\in\Upsilon}\ln\left(\frac{2\beta}{V}w^+(k)\right) &= T\int_{q=2\pi/L}^{q=2\pi/\Lambda_m} qdq\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\theta\ln\left(\frac{2}{TL^2}w^+(\theta)\right) && (4.53)\\ &= -2\pi^3\frac{T}{\Lambda_m^2}\ln(TL^2/2)+2\pi^2\frac{T}{\Lambda_m^2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\theta\ln\left(w^+(\theta)\right) && (4.54)\end{aligned}$$

Le premier terme ne présente pas de dépendance en τ, et sa contribution à $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial\tau\partial T}\right|$ est nulle. Sa contribution à $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right|_\tau$ est simplement $-\frac{2\pi^3}{\Lambda_m^2 T}$, qui reste finie par hypothèse.

Reste le terme relié à w^+, fonction indépendante de T :

$$-\left.\frac{\partial}{\partial T}\right|_\tau\frac{2\pi^2 T}{\Lambda_m^2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\theta\ln\left(w^+(\theta)\right)=-\frac{2\pi^2}{\Lambda_m^2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\theta\ln\left(w^+(\theta)\right) \tag{4.55}$$

Remarquons tout d'abord que w^+ ne présentant de racines que suivant les directions $\hat{k}^+$ à ω^+, on peut développer à la contrainte critique en θ au second ordre autour de cette direction θ^+ : la contribution du pôle à $-\frac{\partial F}{\partial T}=s$ sera donnée par

$$-\frac{2\pi^2}{\Lambda_m^2}\int_{\theta=\theta^+-\epsilon}^{\theta=\theta^++\epsilon}d\theta\ln\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w^+}{\partial\theta^2}(\theta^+,\omega^+)\right)(\theta-\theta^+)^2\right]$$

$\ln(x^2)$ étant intégrable en 0, ces singularités sont intégrables, et l'entropie s reste définie au point critique : ceci prouve que la transition que nous étudions est bien une **transition continue**, ne présentant pas de discontinuité de l'entropie. Ceci justifie la terminologie de "point critique" que nous employons pour la désigner.

Redérivant ce terme par rapport à T, on a une contribution nulle. Par contre, on va voir ici que les dérivées de ce terme par rapport aux composantes de τ peuvent être singulières, ce qui sera entièrement l'origine de la divergence de D^{-1}.

4.3.3.3 Expression des termes singuliers en fonction du comportement de w^+ autour de son minimum

On a vu que w^+ est proportionnel à $L+2M+N$. À partir de L, M , N – (4.9), (4.10) et (4.11)– , avec un peu d'algèbre élémentaire, en développant et refactorisant différemment $L+2M+N$ pour isoler les dépendances en θ, on réexprime

$$\begin{aligned} 2\frac{\alpha^2(1-\alpha)}{\kappa_3^2 p^2} w^{\pm}(p,\sigma,\theta) &= L(k)+2M(k)+N(k) \\ &= c_1^2\left(1-\alpha u^2\right)+2c_1 u[(1-\alpha)c_2-\alpha\omega v] \\ &+ (1-\alpha)c_2^2+2(1-\alpha)c_2\omega v+(1-\alpha v^2)\omega^2 \\ &= c_1^2+\frac{1-\alpha}{\alpha}c_2^2+\omega^2-\alpha\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}c_2-c_1u-\omega v\right]^2 \end{aligned} \tag{4.56}$$

On pose alors

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\omega}{c_1}\right)$$

On va voir que cet angle est celui qui minimise w^+, quelle que soit la valeur de ω. En effet, $\cos(2\theta_1) = -\cos(-\arctan(\omega/c_1)) = -c_1\left(\omega^2+c_1^2\right)^{-1/2}$ et $\sin(2\theta_1) = \sin(-\arctan(\omega/c_1)) = -\omega/\left(\omega^2+c_1^2\right)^{-1/2}$ donc en effectuant un changement de variable

$$\theta' = 2\left(\theta-\theta_1\right) \tag{4.57}$$

et en notant

$$\lambda\hat{=}\left(\omega^2+c_1^2\right)^{1/2} \tag{4.58}$$

, on a

$$\begin{aligned} \cos(\theta') &= \cos\left(2\theta_1\right)\cos\left(2\theta\right)+\sin\left(2\theta_1\right)\sin\left(2\theta\right) \\ &= \lambda^{-1}\left[-c_1u-\omega v\right] \end{aligned}$$

donc d'après (4.56),

$$2\frac{\alpha^2(1-\alpha)}{\kappa_3^2} w^{\pm}(p,\sigma,\theta) = p^2\left[c_1^2+\frac{1-\alpha}{\alpha}c_2^2+\omega^2-\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}c_2+\lambda\cos(\theta')\right)^2\right] \tag{4.59}$$

Ceci est minimum à p, σ donnés, pour $\theta' = 0$: θ_1 est bien la direction minimum de w^+. Avec ce changement de variable, la singularité recherchée s'exprime

$$-\left.\frac{\partial^2 F}{\partial\tau\partial T}\right|_{s.} = -\frac{2\pi^2}{\Lambda_m^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{\theta'=0}^{\theta'=2\pi} d\theta' \ln\left(w^+(\theta', p, \sigma)\right) \tag{4.60}$$

Dans ce qui suit, on notera θ sans apostrophe pour θ' pour alléger les notations. Sauf indication contraire, il s'agira de cette nouvelle variable.

On remarque que puisque la seule racine de w^+ est en $\theta = 0$, en excluant un voisinage de taille 2ϵ autour de cette valeur, la fonction $\int_{\theta=\epsilon}^{\theta=2\pi-\epsilon} d\theta \ln\left(w^+(\theta, p, \sigma)\right)$ est analytique, et toutes ses dérivées par rapport à (p, σ) sont régulières. La singularité recherchée est provient donc entièrement du voisinage

$$-\left.\frac{\partial^2 F}{\partial\tau\partial T}\right|_{s.} = -\frac{2\pi^2}{\Lambda_m^2}\frac{\partial}{\partial\tau} I \tag{4.61}$$

$$I \hat{=} \int_{\theta=-\epsilon}^{\theta=\epsilon} d\theta \ln\left(w^+(\theta, p, \sigma)\right) \tag{4.62}$$

Pour une telle singularité logarithmique, il n'est pas possible de faire un développement limité de w^+ simultanément en τ et θ , puis d'intégrer en θ chaque ordre en τ. En tentant brutalement ce genre de technique, on obtiendrait un ordre 0 en τ $\partial_\tau \ln(w^+) \underset{\theta\sim 0, \omega=\omega^+}{\sim} c/\theta^2$, qui est non intégrable en θ, et des résultats similaires pour les ordres suivants. Ceci ne signifie pas pour autant que cette dérivée est non définie, mais simplement qu'il faut être attentif à ne pas développer en τ avant l'intégration[9].

On peut par contre procéder par exemple de la façon suivante : en considérant ϵ suffisamment petit, on peut faire pour w^+ un développement limité à l'ordre 2 en θ, intégrer ceci puis dériver le résultat.

Utilisant (4.59), on établit que

$$2\frac{\alpha^2(1-\alpha)}{\kappa_3^2}w^+ = a + b\theta^2 + O\left(\theta^4\right) \tag{4.63}$$

$$a = (1-\alpha)\left[\left(c_1^2 + c_2^2\right)p^2 + c_3^2\sigma^2 - 2c_2 p\left(c_1^2 p^2 + c_3^2\sigma^2\right)^{1/2}\right] \tag{4.64}$$

$$b = \alpha\left(c_1^2 p^2 + c_3^2\sigma^2\right) + (1-\alpha)c_2 p\left(c_1^2 p^2 + c_3^2\sigma^2\right)^{1/2} \tag{4.65}$$

$$\text{on a pose } c_3 \hat{=} \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{4.66}$$

En s'intéressant aux valeurs critiques de ces paramètres, on retrouve naturellement $a \underset{\frac{\sigma}{p}\to\frac{\omega^+}{c_3}}{\longrightarrow} 0$, et on obtient une valeur finie pour b : $b \underset{\frac{\sigma}{p}\to\frac{\omega^+}{c_3}}{\longrightarrow} c_2^2 p^2$.

[9] Ce problème est analogue à l'évaluation de la dérivée seconde de $I(\lambda) = \int_{-1}^{1} dx \ln(\lambda^2 + x^2)$: la singularité est intégrable, et en dérivant la solution, on obtient $\frac{d^2 I}{d\lambda^2} = -\frac{4}{\lambda^2+1} \underset{\lambda\to 0^+}{\to} -4$, qui est le résultat correct. Si on faisait un développement limité autour de $\lambda = 0$ avant l'intégration, on aurait obtenu $\partial_{\lambda\lambda}\ln(\lambda^2 + x^2) = \frac{2(x^2-\lambda^2)}{(\lambda^2+x^2)^2} \underset{\lambda\to 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}$, qui est non intégrable.

On utilise cette forme (4.63) pour effectuer l'intégration (4.67) :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\theta=-\epsilon}^{\theta=\epsilon} d\theta \ln\left(a + b\theta^2\right) + \text{constante} && (4.67) \\ &= 2\epsilon \ln\left(a + b\epsilon^2\right) + 4\sqrt{\frac{a}{b}} \arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\epsilon\right) + \text{constante} && (4.68) \end{aligned}$$

La dérivation qui nous intéresse (4.61) se ramène à celles des deux fonctions a et b : à partir de la forme précédente, il vient

$$\partial_\tau I = 2\left(\frac{\partial_\tau a}{a} - \frac{\partial_\tau b}{b}\right)\sqrt{\frac{a}{b}} \arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\epsilon\right) + 2\epsilon \frac{\partial_\tau b}{b} \tag{4.69}$$

b ayant une limite finie, les termes $\frac{\partial_\tau b}{b}$ sont réguliers. Par contre, comme $a \underset{\frac{\sigma}{p} \to \frac{\omega^+}{c_3}}{\longrightarrow} 0^+$, on a $\arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\epsilon\right) \underset{\frac{\sigma}{p} \to \frac{\omega^+}{c_3}}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, ϵ ayant été fixé positif.

À partir de (4.65), on établit enfin les dérivées $\partial_p a$ et $\partial_\sigma a$.

4.3.3.4 Évaluation des termes potentiellement singuliers : pathologie du modèle sans les termes de plus proches voisins et ceux d'effets de seuil

Posant alors

$$c_3 \frac{\sigma}{p} = \omega = \omega^+ - l \tag{4.70}$$

, et en utilisant que ${\omega^+}^2 = c_2^2 - c_1^2$, on développe les termes qui restent en l :

Tout d'abord,

$$\begin{aligned} a &= (1-\alpha)\left[\left(c_1^2 + c_2^2\right)p^2 + c_3^2\sigma^2 - 2c_2 p\left(c_1^2 p^2 + c_3^2\sigma^2\right)^{1/2}\right] \\ &= (1-\alpha)p^2\left[c_1^2 + c_2^2 + \left(\omega^+ - l\right)^2 - 2c_2\left(c_1^2 + \left(\omega^+ - l\right)^2\right)^{1/2}\right] \\ &= (1-\alpha)p^2\left[c_1^2 + c_2^2 + {\omega^+}^2 - 2\omega^+ l + l^2 - 2c_2^2\left(1 - \frac{2\omega^+ l}{c_2^2} + \frac{l^2}{c_2^2}\right)^{1/2}\right] \\ &= (1-\alpha)p^2\left[2c_2^2 - 2\omega^+ l + l^2 - 2c_2^2 + 2\omega^+ l - l^2 + \frac{{\omega^+}^2}{c_2^2} l^2\right] \\ a &= (1-\alpha)p^2 \frac{{\omega^+}^2}{c_2^2} l^2 + O(l^3) && (4.71) \end{aligned}$$

et comme

$$l = \omega^+ - c_3 \frac{\sigma}{p} \tag{4.72}$$

on a

$$\left.\frac{\partial}{\partial\sigma}\right|_p = \frac{\partial l}{\partial\sigma}\frac{d}{dl} = -\frac{c_3}{p}\frac{d}{dl} \tag{4.73}$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial p}\right|_\sigma = \frac{\partial l}{\partial p}\frac{d}{dl} = \frac{c_3}{p}\frac{\sigma}{p}\frac{d}{dl} \tag{4.74}$$

donc au point critique (p^+, σ^+)

$$\begin{aligned}\partial_\sigma a &= (1-\alpha){p^+}^2\frac{{\omega^+}^2}{c_2^2}\left(-\frac{c_3}{p^+}\frac{d}{dl}l^2\right)\\ &= -2(1-\alpha)\frac{{\omega^+}^2}{c_2^2}c_3p^+l + O(l^2)\end{aligned} \tag{4.75}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_p a &= (1-\alpha)\frac{{\omega^+}^2}{c_2^2}\left[{p^+}^2\partial_p l^2 + l^2\partial_p p^2\right]\\ &= (1-\alpha)\frac{{\omega^+}^2}{c_2^2}\left[c_3\sigma^+ 2l + 2p^+l^2\right]\\ &= 2(1-\alpha)\frac{{\omega^+}^3}{c_2^2}p^+l\end{aligned} \tag{4.76}$$

Donc on obtient

$$\frac{\partial_\tau a}{a} \in O(\frac{1}{l}) \tag{4.77}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} \in O(l) \tag{4.78}$$

et d'après (4.69), ceci se compense exactement pour donner

$$\partial_\tau I \in O(1) \tag{4.79}$$

ce qui montre avec (4.61) que pour ce modèle, $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial\tau\partial T}\right|$ admet une limite finie au point critique. Dans la mesure où on a établi que tous les autres termes de (4.52) sont réguliers, ceci signifie que τD^{-1} doit rester fini au point critique : bien que ce modèle prédise des transitions de phase dont la structure géométrique des états fondamentaux correspond qualitativement aux observations, il prédit une pente finie des courbes de charge à la transition de localisation, ce qui semble en contradiction avec les observations expérimentales de la partie I. On va voir qu'en tenant compte à la fois des interactions de plus proches voisins, et du caractère discret des valeurs du champ, ce problème sera résolu.

4.3.3.5 Origine mathématique du comportement pathologique de ce modèle

Notons enfin l'origine mathématique de cette non singularité : a a été défini en (4.63) comme proportionnel à $\min_\theta(w^+(\theta))$. Comme on a établi que w^+ ne s'annule qu'à une valeur particulière

ω^+ du paramètre de contrôle, ω, on a nécessairement $\frac{\partial a}{\partial \omega}(\omega = \omega^+) = 0$, et dans un développement limité en ω autour de ω^+, le premier terme non nul est du second ordre : $a \in O(l^2)$. On pourrait penser que tout effet physique se traduisant par un terme négatif en facteur de $\tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k}$ dans l'hamiltonien, lèverait ce caractère pathologique : $\min_\theta (w^+(\theta))$ changerait de signe autour d'une valeur critique ω^+, et le développement limité amènerait nécessairement

$$a \in O(l)$$

, et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial_\tau a}{a} &\in O(\frac{1}{l}) \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &\in O(\sqrt{l}) \\ \partial_\tau I &\in O\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right) \end{aligned}$$

Ceci correspondrait exactement les singularités observées.

Notons toutefois qu'un effet physique se traduisant simplement par un terme de ce type amènerait une incohérence tout aussi sérieuse : on a établi en (2.32) que

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \tau C^{-1} \tag{4.80}$$

or d'après (4.55), la fonction w^+ étant indépendante de T, le terme $\partial_\tau I$ dans $\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \tau}$ correspond à un simple terme $T\partial_\tau I$ pour $\frac{\partial F}{\partial \tau}$: ceci signifie que si l'on a une singularité de τD^{-1}, l'inverse de la pente des courbes de charge, on retrouvera la même singularité dans τC^{-1}, i.e. les modules élastiques de la roche devront s'annuler à la transition de localisation : ceci n'aurait aucun sens.

On va maintenant réintroduire les deux termes que l'on avait omis jusqu'ici dans ce chapitre, et on verra comment ceci résout simultanément ces deux problèmes : D^{-1} sera singulier, et C^{-1} régulier à l'approche de la transition.

4.4 Avec interactions de courte portée et caractère discret du champ

La prise en compte de ces deux aspects n'amènent que deux modifications suivantes à l'hamiltonien H défini en (4.36) et (4.15) : il s'exprime en fonction des mêmes quantités, en remplaçant simplement

$$f = f_0 + \frac{bT}{2} \tag{4.81}$$

$$N(k) = N_0(k) + \frac{\alpha^2(1-\alpha)}{\kappa_3^2 p^2}\left(-J\Lambda_m^2 k^2(1-v_k) + bT\right) \tag{4.82}$$

où on a noté f_0 et N_0 les quantités étudiées jusqu'ici. Toutes les autres quantités définies de (4.3) à (4.14) restent inchangées.

4.4.1 Modifications des transitions

Étudions d'abord comment ces deux termes modifient l'image simple des transitions que l'on a développé jusqu'ici :

4.4.1.1 Transition d'initiation de l'activité des microfractures

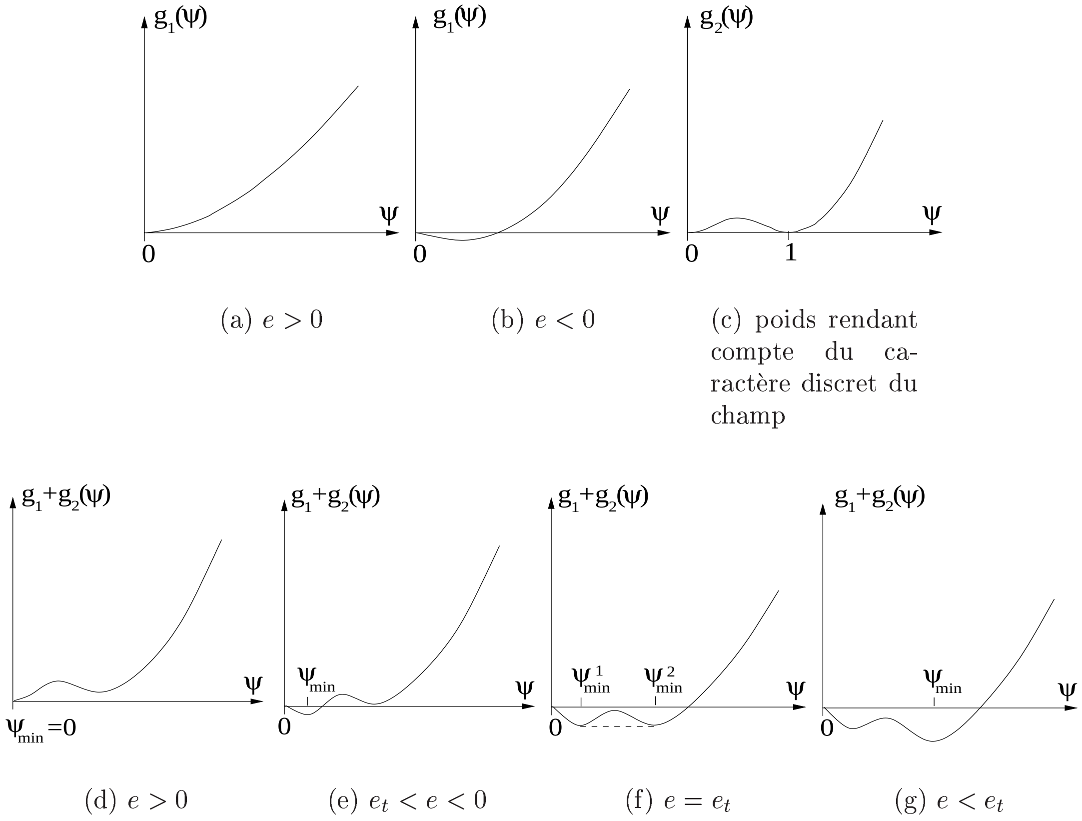
On verra à la section suivante 4.4.1.2 qu'avant une seconde transition, le terme d'interaction est toujours minimisé par des champs uniformes. En minimisant alors les termes en champ propre, dépendant uniquement de la valeur moyenne volumique de ψ, grandeur positive, on obtient de nouveau que $g_1(\overline{\psi}) = e\overline{\psi} + f\overline{\psi}^2$ est minimum en $\overline{\psi} = 0$ tant que $e > 0$, puis en $\overline{\psi} = -e/2f$ quand e devient négatif. e n'étant pas modifié par l'introduction des deux termes supplémentaires, cette transition reste inchangée.

Remarques :

- Si on forçait le champ local φ_r à ne prendre réellement que des valeurs discrètes, sans remplacer les diracs représentant ceci dans (3.117), par des exponentielles, ceci compliquerait la géométrie des états fondamentaux après cette première transition : la valeur moyenne sur le volume du champ ψ, minimisant les termes propres de l'hamiltonien, ne coïnciderait pas a priori avec une des valeurs locales possibles du champ. Il serait donc impossible d'avoir un champ uniforme ayant exactement cette valeur, et on aurait dans l'hamiltonien une balance entre la tendance du terme d'interaction à être minimum pour des champs uniformes, et la non-coïncidence entre la tendance à avoir une valeur moyenne $\overline{\psi} = -e/2f$, différente des valeurs locales autorisées du champ. Les états de base seraient alors certainement des états non-uniformes, ce qui lève partiellement le paradoxe relevé en section 4.1.2.2 : ces états correspondraient bien à une localisation diffuse dans la roche, et non exactement à des microfracures de même orientation et équiréparties.
- En remplaçant ce caractère discret du champ par un poids exponentiel, comme on l'a proposé en section 3.7, on peut également relever le fait suivant : si on s'intéressait à un modèle où le champ local n'est pas borné, i.e. que l'on ne tronque pas le terme supplémentaire $g_2 = b\frac{T}{2}\int_{r\in\Omega} dr\, \psi_r^2\, (\psi_r - 1)^2$, au second ordre en ψ, ceci aurait pour effet de faire éventuellement apparaître une transition du premier ordre supplémentaire : la figure (4.2) montre qu'on a d'abord la première transition discutée à $e = 0$, puis autour de $e = e_t < 0$, on a un saut discontinu de la valeur de $\overline{\psi}$ minimisant $g_1 + g_2$. Il faudrait toutefois pousser le développement des interactions jusqu'à l'ordre 4 en φ pour être cohérent, si l'on voulait étudier également cette transition : ceci est au-delà de nos objectifs présents. Dans le modèle que l'on s'est fixé, les champs restent petits, ce qui justifie a priori de tronquer les termes au deuxième ordre. Il n'est pas clair d'accorder une signification physique particulière à cette éventuelle possibilité de deuxième transition.

4.4.1.2 Transition de localisation

En ajoutant ces termes supplémentaires, on a modifié les formes orthogonales $P(k)$, qui étaient jusqu'ici des formes bilinéaires dégénérées positives. On a toujours le fait que $(1,0).P(k).(1,0)^T =$



(a) $e > 0$ (b) $e < 0$ (c) poids rendant compte du caractère discret du champ

(d) $e > 0$ (e) $e_t < e < 0$ (f) $e = e_t$ (g) $e < e_t$

FIG. 4.2 – Possibilité d'une transition de phase de premier ordre autour de $e = e_t < 0$

$L(k) > 0$, donc elles ont toujours au moins une valeur propre strictement positive, mais vu la modification de $N(k)$, on n'a plus de contrainte sur le signe de leur deuxième valeur propre.

À partir du moment où la deuxième valeur propre de $P(k)$ devient négative pour certains nombres d'ondes k , on aura nécessairement soit $(1,1).P(k).(1,1)^T < 0$, soit $(1,-1).P(k).(1,-1)^T < 0$: en effet, ces deux vecteurs sont perpendiculaires, et $P(k)$ étant une forme orthogonale, si ses deux valeurs propres sont de signes opposés (opérateur hyperbolique), P divise le plan en quatre quarts (zones de $\pi/2$), suivant lesquelles l'opération $u.P.u^T$ donne un résultat alternativement positif ou négatif. Cette opération donne donc un résultat négatif sur l'un des deux vecteurs $(1,1)$ ou $(1,-1)$, et positif sur l'autre. Rappelant la forme des interactions dans l'hamiltonien (4.15), ceci signifiera qu'ajouter des modes de Fourier suivant ce nombre d'onde k , tels que $\tilde{\varphi}_k = \tilde{\psi}_k$ ou $\tilde{\varphi}_k = -\tilde{\psi}_k$, diminuera l'énergie et rendra l'état plus probable[10].

A contrario, si les deux valeurs propres de $P(k)$ sont strictement positives pour tout k , les seuls états fondamentaux sont uniformes (nuls ou non suivant que l'on a dépassé la première transition).

Entre ces deux comportements, on a nécessairement une transition de phase.

Pour traduire ceci en fonction du paramètre de contrôle, on rappelle que $\det(P(k)) < 0$ est toujours une condition nécessaire et suffisante pour que les deux valeurs propres soient de signes opposés. Vu la forme (4.12) de $P(k)$, et celle de N modifié (4.82), on établit en utilisant également l'expression précédente pour $\det(P_0(k))$, (4.17) :

$$\det(P(k)) = c_1^2(1-\alpha)\left[c_2 v_k + \omega\right]^2 + \frac{\alpha^2(1-\alpha)}{\kappa_3^2 p^2} L(k)\left(-J\Lambda_m^2 k^2(1-v_k) + bT\right) \tag{4.83}$$

Le signe de ceci dépend de façon non triviale de $p, \sigma,\ k$, ainsi que de T , fonction à l'évolution régie par une équation non soluble aisément. Sans se lancer dans l'étude détaillée de cette fonction, on peut rester général en considérant que soit l'évolution de $p, \sigma, T(\tau_{axial})$ au cours de l'histoire est telle que pour tout k, $\det(P)$ reste toujours positif, soit à partir d'un certain τ_{axial}, $\det(P)$ s'annule pour certains k[11] . Si c'est le cas, ceci peut précéder la première transition, ou lui succéder. On verra que la seconde transition correspond toujours à une localisation macroscopique. Ceci permet a priori de classifier trois types de comportements :

1. soit on atteint d'abord cette seconde transition, avant que la première ait eu lieu : ceci correspondra a priori à l'apparition de bandes avant que l'on ait eu une activité importante des microfractures.
2. soit les deux transitions sont atteintes, d'abord celle correspondant à une activité diffuse, puis celle correspondant à l'apparition des bandes.
3. soit seule la première transition est atteinte, l'évolution de p, σ, T étant telle que les formes P ne deviennent jamais dégénérées.

On peut conjecturer que ceci correspond à des modes de déformation respectivement fragile – où la contrainte pic est atteinte brutalement, sans diminution notable de la pente des courbes

[10]Remarque : tant que l'amplitude de ces modes n'excède pas un certain seuil, ceci satisfait également trivialement la contrainte $\forall r,\ \psi(r) = |\varphi(r)|$ si le mode φ_0 minimisant les premiers termes de l'hamiltonien est non nul, i.e. que l'on a dépassé la première transition.

[11]la dernière possibilité logique, à savoir que $\det(P)$ soit négatif pour certains k dès le début de l'histoire, n'aurait pas de sens physique.

de charge auparavant –, quasi-fragile, ou ductile. Ceci reste naturellement une conjecture basée sur la géométrie des états de base avant et après ces deux transitions : il faudrait a priori vérifier comment ces trois types de déformation sont réalisés en fonction de la pression de confinement, ce qui nécessiterait une connaissance détaillée de l'évolution de $T(\tau)$. Si on pouvait montrer qu'en augmentant la pression de confinement, on passe successivement dans l'ordre par ces trois types de déformation – ce qui n'a pas été réalisé dans le cadre de ce travail –, on établirait ainsi que le passage du premier au deuxième correspond à la transition d'un mode fragile (expériences uniaxiales, caractérisées par un *axial splitting*) à un mode quasi-fragile, puis que le passage de la seconde à la troisième correspond à la transition fragile/ductile.

On supposera ici que la contrainte radiale soit telle que l'on est dans le cas quasi-fragile, qui nous intéresse, i.e. que cette seconde transition a lieu, et qu'elle succède la première.

Notons enfin que l'introduction des termes d'interactions de plus proches voisins affecte la géométrie des états de base quand on atteint cette deuxième transition : sans ce terme, on a vu en section 4.1.2.2 qu'à la transition, on avait la possibilité sans quitter l'état fondamental d'ajouter des amplitudes à des modes de Fourier suivant certaines directions particulières de nombre d'onde $\hat{k}$, indépendamment de la norme k de ces nombres d'ondes. En considérant le cas particulier où les amplitudes des modes en fonction de la norme k sont toutes égales, ceci traduisait le fait qu'on avait des états "parfaitement" localisés, i.e. de pures bandes, dans l'état fondamental. Avec l'introduction de ce terme, $\det(P(k))$ – (4.83) – présente maintenant une dépendance explicite à la norme k : pour une direction $\hat{k}$ donnée, ce déterminant est une fonction décroissante de k. Il en résulte que quand cette transition est atteinte, les seuls $P(k)$ dégénérés correpondront à la fois à des directions données $\hat{k}$, et à k maximum, i.e. égal au cut-off supérieur du matériau, $k = 2\pi/\Lambda_m$ (Λ_m est la taille de la cellule du réseau, i.e. la taille typique d'un grain). L'état fondamental à cette transition sera donc constitué de bandes alternées, suivant une direction particulière, séparées d'une distance de l'ordre de la taille des grains[12]. Ceci ne signifie naturellement pas qu'il s'agira du seul état observé, mais uniquement du plus probable : étudier l'espacement typiquement observé entre des bandes reviendrait à étudier la fonction de corrélation, qui est une propriété émergente des énergies de tous les états, et de la température (non nulle), et non des seuls états fondamentaux. À partir de cette dépendance de $P(k)$ sur la norme de k , on remarque simplement que la prise en compte des interactions de plus proches voisins ne prédit pas d'états fondamentaux purement localisés, i.e. que la localisation prédite à cette transition, bien que macroscopique, est "imparfaite". Ceci n'est pas contradictoire avec l'observation physique : les bandes de cisaillement macroscopiques apparaissant à la contrainte pic apparaissant ne sont ni uniques, ni d'épaisseur nulle.

4.4.2 Dérivées du potentiel F

Reprenant les arguments de la section 4.2.3, les états de base après la première transition étant uniformes et non nuls, on approche l'intégrale fonctionnelle pour la fonction de partition par une sommation sur les états de signe constant. De même, dans la limite thermodynamique, l'expression pour le potentiel F que l'on obtient sont données par (4.49), en remplaçant simple-

[12]Remarque : Vu la parité de $\det(P(k))$ en v_k, de déterminant est naturellement toujours inchangé dans une symétrie de parité, et on a toujours la propriété que l'ensemble des états fondamentaux est constitué d'états conjuguées.

ment la fonction w^+ par $w^+ - J\Lambda_m^2 k^2(1-v_k) + bT$. La modification de f, terme propre en ψ , ne joue aucun rôle dans cette limite. Remarquons que comme

$$w^+ - J\Lambda_m^2 k^2(1-v_k) + bT = \frac{\kappa_3^2 p^2}{\alpha^2(1-\alpha)}(1;1).P(k).(1;1)^T \tag{4.84}$$

, d'après les remarques de la section précédente, ce terme est positif pour tout k avant la transition, et à la valeur critique du paramètre de contrôle τ_{axial}, s'annule pour un nombre d'onde k particulier, et reste positif pour tout autre.

De même qu'en section 4.3.3.1, on obtient une intégrale analogue à (4.53) qui est la seule source possible de singularité des dérivées de F :

$$F_{s.} = T\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi/\Lambda_m} kdk \ln\left(w^+(\theta) + bT - J\Lambda_m^2 k^2(1-v(\theta))\right) \tag{4.85}$$

Effectuant l'intégration sur la norme k , on obtient :

$$\begin{aligned} F_{s.} = & \\ & -\frac{T}{2\hat{J}\Lambda_m^2}\int_0^\pi d\theta \frac{\left(w^+(\theta) + bT - \hat{J}(1-v(\theta))\right)}{1-v(\theta)} \ln\left(w^+(\theta) + bT - \hat{J}(1-v(\theta))\right) \qquad (4.86) \\ & +\frac{T}{2\hat{J}\Lambda_m^2}\int_0^\pi d\theta \left[\frac{w^+(\theta)+bT}{1-v(\theta)}\ln\left(w^+(\theta)+bT\right) - 2\right] \\ & \text{avec } \hat{J} \hat{=} 4\pi^2 J \qquad (4.87) \end{aligned}$$

Le terme $\left(w^+(\theta) + bT - \hat{J}(1-v(\theta))\right)$ correspond à la fonction (4.84), avec k égal au cut-off supérieur, $2\pi/\Lambda_m$. Par hypothèse, ceci est toujours positif avant la transition, et s'annule pour un θ_c particulier juste au moment de la transition. Comme $\hat{J}(1-v(\theta))$ est strictement positif (sauf pour les valeurs particulières $\theta = 0, \pi$, différentes de θ_c), on a $w^+(\theta) + bT > 0$ pour tout θ au moment de la transition, et les termes de la dernière ligne de l'équation ci-dessus (4.86) sont analytiques. La source de singularité de $F_{s.}$ est donc uniquement le terme de la première ligne. Faisant un développement limité en ω, θ, T autour de ω_c, θ_c, $T_c = T(\tau_{axial_c})$ du terme important, $(w^+(\theta) + bT - 4\pi^2 J(1-v(\theta)))$, on obtient nécessairement qu'il est de la forme $a + b(\theta-\theta_c)^2$. Puisqu'à la transition, cette fonction est minimum en θ_c, on a :

- b d'ordre 0 en T, ω strictement positif.
- a d'ordre 1 en $t \hat{=} |T - T_c|$ et en $l \hat{=} \omega_c - \omega$, vu d'une part la dépendance explicite en température de cette fonction, et le fait que l'on l'on peut atteindre des valeurs négatives de $w^+(\theta) + bT - \hat{J}(1-v(\theta))$ en allant au-delà de ω_c : sans se lancer dans une analyse algébrique compliquée de ce terme en fonction de T, ω, θ, il est raisonnable de supposer que son développement limité a la forme la plus simple possible.

De même qu'en la section 4.3.3.3, la singularité de F ou ses dérivées ne peut provenir, dans l'intégrale sur θ , que d'un voisinage $[\theta_c - \epsilon, \theta_c + \epsilon]$ où ϵ est un nombre strictement positif, suffisamment petit pour que l'on puisse remplacer les fonctions intervenant dans l'intégrant par un DL en θ. On obtient donc à partir de (4.86) :

$$F_{s.} = qT\int_{-\epsilon}^{\epsilon} (a + b\theta^2)\ln(a + b\theta^2)d\theta \tag{4.88}$$

où q et b sont des réels strictement positif, et d'après ce qui précède, en fonction des températures et paramètre de contrôle réduits,

$$\begin{aligned} a &\sim a_t t + a_l l && (4.89)\\ t &\hat{=} |T - T_c| && (4.90)\\ l &\hat{=} \omega_c - \omega && (4.91) \end{aligned}$$

où a_t et a_l sont non nuls.

On a rappelé en (4.80) que la dérivée partielle à T fixé, $\frac{\partial F}{\partial \tau}$, doit être égale à τC^{-1}. Pour différencier l'intégrale ci-dessus par rapport à l, à t fixé, on pourra pour toute valeur non nulle de (t, l), inverser les opérateurs de dérivation par rapport à l, et d'intégration par rapport à θ : en effet, on veut évaluer cette dérivée de $F_{s.}$ pour une valeur de $(t, l) \neq (0, 0)$. Définissant un voisinage de cette valeur dont $(0, 0)$ est exclu, l'intégrant de (4.88) est borné sur ce voisinage, et il est valide d'inverser intégration et dérivation. Comme

$$\partial_l \left[\left(a_t t + a_l l + b\theta^2 \right) \ln \left(a_t t + a_l l + b\theta^2 \right) \right] \sim a_l \ln \left(a_t t + a_l l + b\theta^2 \right) \tag{4.92}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_l F &\sim qT \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \partial_l \left[(a + b\theta^2) \ln(a + b\theta^2) \right] d\theta && (4.93)\\ &\sim a_l q T \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \ln(a_t t + a_l l + b\theta^2) d\theta && (4.94)\\ &\sim a_l q T \left[2\epsilon \ln \left(a_t t + a_l l + b\epsilon^2 \right) + 4\sqrt{\frac{a_t t + a_l l}{b}} \arctan \left(\sqrt{\frac{b}{a_t t + a_l l}} \epsilon \right) + e \right] && (4.95) \end{aligned}$$

où e est une constante (indépendante de l, t) sans importance. Comme ϵ est un nombre strictement positif fixé, ceci admet une limite finie quand $(t, l) \to (0, 0)$, i.e. $\partial_l F$ reste fini au point critique. Vu les relations (4.73) et (4.74), ceci signifie que $\frac{\partial F}{\partial \tau}\big|_T = \tau C^{-1}$ reste fini à la transition de localisation : on retrouve l'observation expérimentale, à savoir que les pentes des courbes de décharge, reliées linéairement aux modules élastiques de la roche, composantes du tenseur C, sont non nulles à cette transition.

Pour obtenir la pente des courbes de charge, on doit maintenant faire une dérivée partielle supplémentaire par rapport à T (ainsi bien sûr que par rapport à $t = T - T_c$). À partir de l'expression ci-dessus, on obtient aisément :

$$\begin{aligned} \partial_{lt} F &= \frac{\partial_l F}{T} + \frac{2 a_t a_l q T}{\sqrt{b \left(a_t t + a_l l \right)}} \arctan \left(\sqrt{\frac{b}{a_t t + a_l l}} \epsilon \right)\\ &\sim \frac{\pi a_t a_l q T_c}{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{a_t t + a_l l}} && (4.96) \end{aligned}$$

qui est singulier à l'approche du point critique, $(t, l) \to (0, 0)$.

De façon analogue à ceci, on obtient la première et la seconde dérivée partielles par rapport à T : de même que (4.95), on obtient d'abord

$$\begin{aligned}\partial_t F_{s.} \quad \sim \quad & q\int_{-\epsilon}^{\epsilon}(a+b\theta^2)\ln(a+b\theta^2)d\theta \\ & +a_t qT\left[2\epsilon\ln\left(a_t t+a_l l+b\epsilon^2\right)+4\sqrt{\frac{a_t t+a_l l}{b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a_t t+a_l l}}\epsilon\right)+e\right] \quad (4.97)\end{aligned}$$

qui reste fini dans la limite $(t,l)\to(0,0)$, puisque la singularité dans l'intégrant du premier terme est intégrable. Ceci prouve que l'entropie $s=-\partial_t F$ est définie au point critique, et qu'il s'agit d'une transition continue. On obtient ensuite de même qu'en (4.96),

$$\partial_{tt}F \sim \frac{\pi a_t^2 qT_c}{\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{a_t t+a_l l}} \tag{4.98}$$

Ceci prouve que la dérivée de l'entropie par rapport à la température, $\partial_t s=-\partial_{tt}F$, tend vers l'infini à l'approche du point critique. Cet aspect est qualitativement identique à de nombreux points critiques, comme par exemple celui d'un modèle d'Ising au voisinage de la température de Curie.

Dans (4.96) et (4.98), les préfacteurs sont des nombres non nuls. Reste à ramener l et t au seul paramètre de contrôle macroscopique τ_{axial} (puisque τ_{radial} est fixé durant l'histoire), i.e. à

$$\delta\tau=\tau_{axial_c}-\tau_{axial} \tag{4.99}$$

D'après les définitions de ω, σ, p – (4.6), (3.95) et (3.96) – ω est proportionnel à la fonction rationnelle $\left(\tau_{axial}-\tau_{radial}\right)/\left(\tau_{axial}+\tau_{radial}\right)$. Développant ceci en τ_{axial} autour de τ_{axial_c}, on obtient que l est proportionnel à $\delta\tau$. En rappelant de plus que la température dépend de τ_{axial} le long de la courbe de charge, on a le comportement trivial $t=|T-T_c|\sim\left|\frac{dT}{d\tau}\right|\delta\tau$. Les deux équations (4.96) et (4.98) se ramènent donc à

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial\tau\partial T}\right| \quad \sim \quad a_{t\tau}\left(\delta\tau\right)^{-1/2} \tag{4.100}$$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right|_{\tau} \quad \sim \quad a_{tt}\left(\delta\tau\right)^{-1/2} \tag{4.101}$$

où $a_{t\tau}$ et a_{tt} sont des constantes non nulles.

4.4.3 Conséquence sur l'observable de pente

Vérifions enfin comment ceci se traduit dans les observables que l'on a étudié en partie I : la grandeur recherchée est

$$\tau D^{-1}=\tau C^{-1}-T\left(\left.\frac{\partial^2 F}{\partial\tau\partial T}\right|+\left.\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right|_{\tau}\frac{dT}{d\tau}\right) \tag{4.102}$$

À partir des définitions de ε et τ en fonction des paramètres scalaires p, σ, Δ, γ – (3.95), (3.96), (3.55) et (3.56) – et comme $D^{-1} = \frac{d\varepsilon}{d\tau}$ le long de la courbe de charge, on exprime formellement[13] que

$$\tau D^{-1} = \begin{pmatrix} p\partial_p\Delta + \sigma\partial_\sigma\Delta & p\partial_p\gamma + \sigma\partial_\sigma\gamma \\ p\partial_p\gamma + \sigma\partial_\sigma\gamma & p\partial_p\Delta + \sigma\partial_\sigma\Delta \end{pmatrix} \tag{4.103}$$

On a établi que τC^{-1} reste fini, alors que $\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$ et $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial\tau\partial T}\right|$ sont singuliers à l'approche de la transition. $T(\tau)$ est en principe donné par l'équation différentielle non linéaire (2.50). On devrait en principe faire également une analyse asymptotique de cette équation, mais on s'est contenté de faire l'hypothèse supplémentaire que T se comporte également régulièrement aux alentours de la transition, i.e. que T et $dT/d\tau$ restent finis. Dans (4.102), les singularités des dérivées secondes de F dominent alors entièrement le membre de droite, et on obtient que les composantes de (4.103) sont toutes proportionnelles à $(\delta\tau)^{-1/2}$.

Changeant de repère pour passer de $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ à $(\hat{e}_{axial}, \hat{e}_{radial})$, on obtient les relations :

$$(\tau_a\partial_{\tau_a} + \tau_r\partial_{\tau_r})\,\varepsilon_a = (p\partial_p + \sigma\partial_\sigma)\,\frac{\Delta+\gamma}{2} \tag{4.104}$$

$$(\tau_a\partial_{\tau_a} + \tau_r\partial_{\tau_r})\,\varepsilon_r = (p\partial_p + \sigma\partial_\sigma)\,\frac{\Delta-\gamma}{2} \tag{4.105}$$

Dans les expériences triaxiales, on ne mesure en général que des dérivées par rapport à τ_a, et non à τ_r, puisque celui-ci est maintenu fixe. En supposant enfin que les termes ∂_{τ_a} et ∂_{τ_r} présentent des singularités identiques, de même nature que les membres de droite dans les équations ci-dessus, on obtient finalement le résultat recherché : les pentes observées des courbes de charge, de la déformation radiale et de la déformation axiale, présentent à l'approche de la transition de localisation un régime critique tel que

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau_a} \sim c\,(\delta\tau)^{-1/2} \tag{4.106}$$

Ceci montre d'une part que ces pentes s'annulent, donc que la transition de localisation macroscopique coïncide avec la contrainte pic. D'autre part, ces lois de puissance sont bien de la forme (1.1), avec un exposant $\gamma = \frac{1}{2}$: ceci est parfaitement en accord avec l'intervalle (1.4), déterminé à partir des observations expérimentales en partie I.

Par ailleurs, on verra en annexe D.2 que le modèle développé jusqu'ici ne se prête pas aisément à l'analyse de la fonction d'autocorrélation, et on y suggèrera des pistes pour y remédier.

4.5 Conclusions

On a établi que le modèle développé présente deux transitions de phase. La première correspond à l'initiation d'une activité microacoustique diffuse au sein du milieu, et (à la fin du régime

[13]remarque : ici, ces dérivées partielles sont à comprendre dans une acception légèrement différente de celle qu'on avait développé jusqu'ici : les grandeurs Δ, γ sont écrites comme fonctions uniquement de deux variables considérées comme indépendantes p et σ, et on absorbe la dépendance en T en exprimant en principe $T(p, \sigma)$: les dérivées partielles désignées ici par rapport à p, σ , comporteraient également une dérivée totale par rapport à T si on se ramenait aux variables précédentes.

élastique réversible. La seconde se traduit par l'apparition de bandes conjuguées de taille infinie au sein de la roche, autrement dit au seuil de localisation macroscopique.

Par l'intermédiaire du formalisme de physique statistique développé au chapitre 2, les dérivées de la fonction de partition se traduisent en pentes de la courbe de charge. On a d'abord considéré un modèle partiel où les champs sont supposés naturellement à valeurs continues, et pour lesquels on a inclus des interactions élastiques de longue portée entre les fractures, ainsi que des termes énergétiques correspondant à des effets Joule, et des ouvertures stabilisatrices de fractures subaxiales. On a constaté que ce modèle est incapable de prédire un comportement particulier de ces pentes au voisinage de la transition. On a ensuite inclus deux termes supplémentaires, représentant des interactions de courte portée entre les fractures, ainsi que l'aspect discret des valeurs du champ. Il a été mis en évidence que ce modèle prédit que la transition de localisation coïncide avec la contrainte pic. Le potentiel thermodynamique obtenu, ainsi que ses premières dérivées, sont finies à la transition, ce qui montre à la fois qu'il s'agit d'une transition continue, et que la rigidité de la roche ne s'annule pas à cette transition. Ce potentiel présente par contre des singularités de ses dérivées secondes, ce qui se traduit par un comportement quadratique des courbes de charge à l'approche du pic, conformément à la loi de puissance déterminée expérimentalement en partie I.

Il semble nécessaire de tenir compte simultanément de ces deux derniers aspects (ou bien sûr de termes physiques à l'effet mathématique équivalent) pour prédire à la transition à la fois une contrainte pic, et une rigidité non nulle.

Conclusions et perspectives

Pour des milieux granulaires , consolidés ou non, soumis à des compressions cisaillantes en régime de déformation quasifragile, le régime durcissant correspond au développement d'un processus de localisation microscopique, avec une transition vers une déformation macroscopiquement localisée et orientée précédant légèrement la contrainte pic. En analysant de nombreuses données déformation / contrainte, on a mis en évidence qu'il semble cohérent que ce processus puisse être décrit comme l'approche d'une transition de phase continue, tous les matériaux étudiés ici semblant appartenir à la même classe d'universalité. Le comportement asymptotique mis en évidence est une loi de puissance, assez bien vérifiée sur la majeure partie du régime où on a une activité non négligeable des microfractures, du type

$$\left.\frac{\partial \varepsilon_{ax}}{\partial \tau_{ax}}\right|_{\tau_{rad}} \underset{\tau_{ax} \to \tau_{ax_c}^-}{\sim} \alpha \left|\tau_{ax_c} - \tau_{ax}\right|^{-\gamma}$$

, avec $0.47 \leq \gamma \leq 0.6$, et où $\tau_{ax_c}^-$ est situé dans une fourchette d'un pourcent autour de la contrainte pic.

Considérant toutes les informations statistiques détaillées données par des observations à l'échelle microscopique des matériaux, comme des cartes de déformation incrémentale de surface, ou des enregistrements d'émissions microacoustiques détaillés, il serait important d'analyser statistiquement les corrélations dans ces types de données, de façon conjointe à une telle analyse sommaire des courbes de charge, pour tester précisément si le paramètre τ_c correspond effectivement à des singularités dans les moments de la distribution des déformations. Ceci pourrait être fait sur divers types de matériaux hétérogènes, et également pour des problèmes en tension, pour pouvoir vérifier expérimentalement la différence de nature profonde de ces transitions de localisation, suivant qu'elles ont lieu dans des matériaux plus ou moins ductiles, et suivant une charge en tension, en compression uniaxiale ou en compression cisaillante.

On a ensuite décrit les propriétés mécaniques macroscopiques d'une roche comme émergent de moyennes d'ensemble sur un système statistique composé de configurations de microdéfauts, sur lequel on a posé les bases donnant la distribution de probabilités. Le postulat fondamental de cette construction est une maximisation de l'entropie de Shannon sous contraintes. Cette hypothèse admise, on a établi que les variables mécaniques à considérer dans ces contraintes mathématiques sont nécessairement l'énergie des configurations, et la contrainte macroscopique, pour que les lois correspondant aux première et deuxième loi de thermodynamique classique fassent sens. On peut encore construire plusieurs ensembles ainsi, qui sont équivalents les uns aux autres pour prédire les observables du système. Considérant le plus simple à manipuler, on a établi que les distributions de probabilités sont des Boltzmanniennes, $P_j = e^{-\beta(\tau)E_j(\tau)}/Z$, la quantité $E_j(\tau)$ étant l'énergie totale d'une configuration de fractures j, soumise à la contrainte macroscopique τ , et β étant formellement une température non mesurable, mais dont la dépendance en τ est décrite. La pente des courbes de charges, entre autres propriétés, se dérive alors par un formalisme de physique statistique, et s'exprime comme une combinaison de dérivées d'un potentiel thermodynamique. Celui-ci peut être en principe déterminé de façon univoque à partir d'un modèle donnant pour tout état j, $E_j(\tau)$ et $\varepsilon_j(\tau)$, la moyenne volumique de la déformation associée à l'état j sous la contrainte τ.

L'enjeu futur principal de cette partie est naturellement de vérifier la validité du postulat de base, à savoir que la distribution de probabilité sur les configurations peut, au moins de façon approchée, maximiser S sous ces contraintes. Deux directions principales sont envisageables pour ceci :

- On peut considérer sur la base des théories de la fracture et du contact un modèle dynamique donné, dépendant du temps, incorporant des variables aléatoires soit fixées initialement, soit évoluant (désordre gelé ou recuit). Il serait alors intéressant de décrire l'espace des microétats j accessibles, définir le plus précisément possible les quantités $E_j(\tau)$ et $\varepsilon_j(\tau)$, et comparer les distributions résultant de simulations numériques, à celles prédites par ce postulat. On pourrait obtenir une validation de notre hypothèse soit au sens fort si ces distributions sont voisines, soit au sens faible si les premiers moments de ces distributions, correspondant aux moyennes d'ensemble reliées à des observables physiques, sont proches.
- On pourrait aussi espérer construire un modèle stochastique suffisamment simple, mais comportant malgré tout les aspects principaux de la dynamique d'un système de fractures, pour tenter d'intégrer celui-ci analytiquement : ceci se ferait nécessairement via un formalisme d'intégrales de chemin, ou la probabilité d'être dans une configuration donnée est la somme des probabilités des chemins y menant depuis des conditions initiales. Chacune de ces probabilités de chemin est un produit de probabilités de transition. Les isomorphismes entre la théorie quantique des champs, et la théorie des champs statistiques, laissent espérer qu'en construisant un système sur lequel on puisse identifier des invariants, les probabilités résultant de ces intégrales de chemin auraient effectivement une simple forme Boltzmannienne.

On a ensuite construit un modèle spécifique, dans lequel les microfractures sont contraintes à être disposés sur un réseau carré 2D, suivant deux directions possibles. Les termes énergétiques que l'on a retenus comme pertinents pour ce problème de localisation sont : des interactions élastiques fracture-fracture de longue portée, des interactions de courte portée, une contribution énergétique stabilisatrice venant de l'ouverture en mode I suivant les contraintes locales de tension, des énergies dépensées par effet Joule entre les lèvres des fractures fermés, et un artefact rendant compte de la nature abrupte de la dynamique de croissance des fractures. Ce modèle nécessite d'être amélioré en de nombreux points :

- il faudrait passer à un système tridimensionnel pour tester les changements éventuels apportés dans la nature de la transition de localisation.
- On pourrait décrire les états de fractures par une variable locale comportant un peu plus d'informations : la direction de ces fractures pourrait être à valeurs dans un continuum, et surtout l'interaction entre les fractures en mode II et les fractures en mode I très proches les uns des autres devrait être mieux prise en compte, en considérant des objets de base un peu plus complexes.
- Il faudrait pousser l'approximation de Born pour obtenir l'énergie élastique à un ou deux

ordres supérieurs, d'une part pour tester le caractère inessentiel de ces termes par rapport à la transition de localisation, d'autre part pour espérer peut-être décrire la phase post-localisation (le régime adoucissant), où nos hamiltoniens ne sont plus stables.

– On devrait tester l'effet sur la transition d'un désordre gelé géométrique, et d'un désordre gelé associé à divers types de distributions aléatoires des propriétés mécaniques des joints.
– Il serait intéressant, enfin, de tenter de généraliser ce modèle à des problèmes réellement multiéchelles en leur constituants, où les objets élémentaires eux-mêmes n'ont pas une taille typique, mais s'étalent sur plusieurs échelles possibles : on pourrait ainsi voir si ce caractère des roches réelles modifie profondément la façon dont se passe le processus.

L'analyse des transitions de phase prédites par ces modèles, finalement, a permis de retrouver une première transition correspondant à l'initiation d'une activité microacoustique diffuse, puis une seconde transition, continue, correspondant à l'apparition de fluctuations de grandes échelles, suivant des directions préférentielles conjuguées. Ceci est en assez bon accord avec les traits qualitatifs de sortie du régime élastique linéaire, puis de localisation macroscopique en bandes de cisaillement. On a enfin vu la nécessité de la prise en compte des effets de seuil, conjointement aux interactions de plus proches voisins, pour prédire à cette seconde transition un comportement régulier des modules élastiques de la roche, et en même temps une annulation de la pente des courbes de charge. Cette annulation est alors prédite selon un régime critique correspondant aux lois observées expérimentalement.

Pour aller plus loin dans ce traitement, et s'intéresser de plus près à l'évolution de la longueur de corrélation, il faudrait soit effectuer un véritable schéma de renormalisation, et analyser les différents termes d'ordre supérieur par perturbation autour de l'hamiltonien gaussien avec lequel on a travaillé, soit d'abord prendre en compte par une analyse de champ moyen l'effet de la porosité de fractures moyenne sur le terme d'interaction de longue portée fracture-fracture : il en résulterait un mécanisme de type écrantage de Debye, qui permettrait d'avoir une meilleure estimation de l'évolution de la longueur de corrélation, en sortant d'un modèle strictement gaussien.

Annexes

Annexe A

Justifications qualitatives du postulat de base de physique statistique

A.1 Considérations sur la différence fondamentale entre fracturation en tension et sous pression de confinement

Un point-clé pour justifier notre approche est la possibilité, pour les cisaillements avec pression de confinement, d'avoir création et développement stable des microfractures jusqu'à des stades avancés de la fracturation. Ceci est fondamentalement différent des sollicitations en tension, comme on va l'expliciter ici.

Le problème de développement d'une fracture macroscopique à partir d'objets microscopiques intéresse les physiciens depuis fort longtemps. Sans s'intéresser à l'hétérogénéité des propriétés du matériau, on s'est d'abord focalisé sur les critères de propagation d'une fracture dans un milieu homogène. Durant la première moitié du vingtième siècle, Inglis [1913] analysa le champ de contrainte dû à la présence d'une cavité elliptique dans un milieu plan. Pour déterminer le critère de rupture, l'approche à la base de la mécanique de la fracture qui s'est développée depuis, est due à Griffith [1920] , et est fondée sur des considérations énergétiques :

Considérant une énergie de surface nécessaire à la formation d'une discontinuité dans le déplacement, la propagation d'une fracture, modifiant la forme de la surface vers une forme voisine, sous conditions aux frontières fixées, se traduit par un changement d'énergie mécanique. Cette variation d'énergie mécanique est la somme de celle consommée dans l'ouverture de la surface, moins l'énergie élastique libérée par la modification de la contrainte dans le milieu en résultant, plus éventuellement la variation d'énergie potentielle du système de charge externe si les conditions aux frontières imposées ne le sont pas en déplacement. Le critère de Griffith postule alors simplement qu'à partir d'une configuration donnée, la propagation se fait vers l'état voisin correspondant au taux d'énergie liberée maximum. Une conséquence de cette modélisation est la suivante : dans un milieu soumis à une tension uniforme à l'infini, les fractures les plus sollicitées sont celles perpendiculaires à la contrainte principale, en mode I. Le taux de libération d'énergie est maximum pour une croissance dans le plan. Pour une variation infinitésimale de ce type, ce taux reste négatif en-deçà d'une certaine taille critique, et devient positif au-delà, croissant avec la taille de la fracture. Ceci implique l'image simplifiée suivante du processus de fracturation : alors que l'on augmente la contrainte appliquée, les fractures sont stables, jusqu'à ce que la taille critique se réduise jusqu'à la taille de la plus grande fracture (à l'influence de l'orientation près). Il commence alors à croître, et croît de plus en plus vite alors que sa taille augmente. La fracturation macroscopique résulte donc d'une croissance de la plus grande microfracture. Ceci explique le succès des théories basées sur le défaut le plus faible pour décrire la fracturation en tension. On soulignera ici que l'image résultant de la croissance des fractures, pour les sollicitations en tension, est intrinsèquement instable pour des fractures au-delà d'une certaine taille.

Pour la fracturation en compression, les défauts le plus sollicités sont les défauts inclinés sur l'axe de la contrainte principale, en mode mixte I et II. Horii et Nemat-Nasser (Nemat-Nasser et Horii [1982] , Horii et Nemat-Nasser[1985,1986]) ont démontré qu'une telle fracture, dans un milieu homogène, tendra plutôt à ouvrir des “cracks-ailes“ (*wing-cracks* en anglais) à ses extrémités, qu'à se propager dans le plan en mode II. Ces wingcracks sont des fractures se formant sous l'effet d'une contrainte de tension locale, qui débutent approximativement perpendiculairement aux lèvres de la fracture d'origine, puis s'inclinent pour devenir parallèles à la direction de contrainte principale. En l'absence de pression de confinement, ils se propagent alors jusqu'aux bords du matériau (axial splitting). Dès qu'une pression de confinement est imposée, l'effet de ce confinement inhibe la propagation au-delà d'une distance de l'ordre de la taille de la fracture initiale (la contrainte tensile résultant du déplacement en mode II sur la fracture d'origine s'estompant devant l'influence des conditions à l'infini). Ceci est naturellement un processus valable pour une entaille dans un milieu homogène, et l'hétérogénéité des roches complique considérablement le phénomène : on observe assez peu de wingcracks en milieu naturel. On retiendra toutefois le fait qu'il correspond à une image de propagation stable des microfractures, et ce quelle que soit leur taille d'origine. Contrairement au cas de la fracturation en tension, la fracturation en compression cisaillante sera donc nécessairement le résultat d'un phénomène collectif, où des microfractures croissent en de nombreux points du milieu, et non d'un défaut le plus faible contrôlant la fracturation jusqu'à l'échelle macroscopique.

Une façon simplifiée d'expliquer cette différence de fond consiste simplement à noter qu'en tension, les fractures formées ne soutiennent plus aucune contrainte, réduisant donc l'aire efficace sur laquelle est exercée la force transmise depuis les bords, alors qu'en cisaillement-compression, des déplacements en mode II entre les lèvres des fractures ne les empêche pas de continuer à soutenir une contrainte.

A.2 Influence de l'hétérogénéité microscopique

L'approche physique la plus utilisée pour étudier l'influence de l'hétérogénéité microscopique consiste à discrétiser le milieu, et traiter des modèles sur réseau, où les sites de fractures potentielles correspondent aux liens de la grille. En se donnant des modélisations microscopiques pour caractériser chaque microfracture et son évolution en fonction de la contrainte locale, ainsi que des distributions de seuils pour ces lois sur chaque microfracture, caractérisant l'hétérogénéité microscopique du milieu, il est possible de modéliser l'évolution du système au cours de l'histoire. Si les seuils sont considérés comme fixés initialement, on a formellement à traiter un système dynamique, avec un nombre de conditions initiales proportionnel au nombre de sites. On a alors en principe un désordre gelé, et on peut obtenir des informations en moyennant sur les distributions de seuil correspondant à ce désordre initial. Si les seuils évoluent suivant une variable aléatoire à chaque modification de l'état d'une microfracture, on a alors formellement un processus stochastique, dont les propriétés moyennes doivent également correspondre à des propriétés physiques macroscopiques.

Le principe de telles modélisations, réseaux de barres ou réseaux de fusibles, suivant que les liens présentent ou non une résistance à la torsion, a été présenté par Roux [1990] . Une fois les lois de base données, il est possible de simuler numériquement des systèmes de taille modeste, et de faire des statistiques en répétant les expériences numériques, en réinitialisant à chaque fois les valeurs des variables aléatoires. Des modélisations de réseaux de fusibles bidimensionnels ont permis de mettre en évidence des lois d'échelle reliant force appliquée, déformation et taille du système (De Arcangelis et al. [1989])), et d'analyser la rugosité de la fracture macroscopique finale (Hansen et al. [1991a]). L'universalité des lois obtenues a été classée en fonction du type de distribution de seuils (Hansen et al. [1991b]). Ces résultats ont été étendus à trois dimensions par Batrouni et Hansen [1998] , ou pour des réseaux de barres, étudiés par Arbabi et Sahimi [1990] .

On soulignera toutefois qu'un réseau de fusible bidimensionnel ne considère comme moment transmis qu'une grandeur scalaire, et non vectorielle : il est donc l'analogue électrique exact d'un problème de contrainte en tension, où les déformations sont contraintes à être hors plan. De tels modèles, qu'il s'agisse de réseaux de fusibles ou de réseaux de barres, ne permettent pas aux liens cassés de continuer à soutenir une force. Ils concernent donc essentiellement les propriétés de matériaux soumis à une tension. Ceci implique que l'influence de l'hétérogénéité dans de tels systèmes, par rapport à l'image de Griffith de croissance d'une fracture dans un milieu homogène, consiste en une stabilisation due à la présence de sites plus faibles répartis dans l'échantillon, qui peuvent rompre de façon préférentielle par rapport à des sites surcontraints par la présence voisine de sites brisés, mais plus résistants. Une fois que l'on a formé un amas de sites brisés suffisamment grand, l'influence de la concentration de contrainte doit dominer celle du désordre, et l'image de Griffith doit à nouveau être plus ou moins valable : on doit avoir nécessairement une croissance instable de cet amas (le chemin de fracturation n'étant simplement plus plan, mais perturbé par le désordre).

On a expliqué qualitativement l'influence de la pression de confinement sur la création de fractures, qui permet d'avoir un processus intrinsèquement stable (section A.1). Pour construire un modèle sur réseau décrivant un cisaillement avec compression, il serait donc capital d'inclure la prise en compte de la friction sur les fractures déjà créées. Ceci serait possible sur la base des modélisations de Fond et Berthaud [1995], et Fond et al.[1995] , en ajoutant un désordre initial pour la distribution des seuils de coulomb sur les microfractures, et en analysant les propriétés moyennes résultantes. L'étude numérique des propriétés statistiques d'un tel système, prenant en compte la friction, n'a pas été réalisée à notre connaissance.

Annexe B

Physique statistique de l'ensemble énergie-contrainte : Résultats additionnels

B.1 Fluctuations - obtention formelle

On se place dans l'ensemble énergie-contrainte, défini en section 2.2.2. La première loi correspondant à cet ensemble , (2.32), nous a permis d'établir que

$$\begin{aligned} \tau \left\langle C^{-1} \right\rangle &= \left.\frac{\partial F}{\partial \tau}\right|_T \\ s &= -\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_\tau \end{aligned}$$

On va maintenant établir les dérivées secondes du potentiel thermodynamique F, à toutes fins utiles.

En lemme, on établit d'abord

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right|_\tau &= \frac{1}{Z} \left.\frac{\partial}{\partial \beta}\right|_\tau \left(\sum_j e^{-\beta V E_j} \right) \\ &= \frac{1}{Z} \sum_j -V E_j e^{-\beta E_j} \\ \frac{1}{V} \left.\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right|_\tau &= -U \end{aligned} \tag{B.1}$$

d'après les expressions de Z et P_j, et comme E_j ne dépend que de τ, et non β. On établit également

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \ln Z}{\partial \tau}\right|_\beta &= \frac{1}{Z}\left.\frac{\partial}{\partial \tau}\right|_\beta \left(\sum_j e^{-\beta V E_j}\right) \\
&= \frac{1}{Z}\sum_j -\beta V \frac{dE_j}{d\tau} e^{-\beta V E_j} \\
\frac{1}{V}\left.\frac{\partial \ln Z}{\partial \tau}\right|_\beta &= -\beta \tau C^{-1} \qquad \text{(B.2)}
\end{aligned}$$

On établit enfin

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\left.\frac{\partial U}{\partial \beta}\right|_\tau &= \frac{1}{V}\left.\frac{\partial}{\partial \beta}\right|_\tau \left(\sum_j \frac{e^{-\beta V E_j}}{Z} E_j\right) \\
&= -\frac{1}{VZ^2}\left.\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right|_\tau \sum_j E_j e^{-\beta V E_j} - \sum_j E_j^2 \frac{e^{-\beta V E_j}}{Z} \\
&= -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right|_\tau \sum_j P_j E_j - \sum_j P_j E_j^2 \\
&= U^2 - \left\langle E_j^2 \right\rangle
\end{aligned}$$

or, en notant pour toute propriété microscopique x_j,

$$\delta x_j \hat{=} x_j - \langle x_j \rangle = x_j - x \qquad \text{(B.3)}$$

on a la relation usuelle

$$\begin{aligned}
\left\langle (\delta x_j)^2 \right\rangle &= \left\langle x_j^2 - 2x_j x + x^2 \right\rangle \\
&= \left\langle x_j^2 \right\rangle - 2x^2 + x^2 \\
\left\langle (\delta x_j)^2 \right\rangle &= \left\langle x_j^2 \right\rangle - x^2 \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}$$

donc en considérant $x_j = E_j$,

$$\frac{1}{V}\left.\frac{\partial U}{\partial \beta}\right|_\tau = -\left\langle (\delta E)^2 \right\rangle \qquad \text{(B.5)}$$

En utilisant les deux lemmes (B.1) et (B.5), ainsi que la définition de F (2.25) et le fait que F soit transformée de Legendre de U (2.27), on obtient directement

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right|_\tau &= -\left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_\tau \\
&= \frac{1}{T^2}\left.\frac{\partial s}{\partial \beta}\right|_\tau \\
&= \frac{1}{T^2}\left.\frac{\partial}{\partial \beta}\right|_\tau (\beta U - \beta F) \\
&= \frac{1}{T^2}(U + \beta \left.\frac{\partial U}{\partial \beta}\right|_\tau + \frac{1}{V}\left.\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right|_\tau) \\
&= \frac{1}{T^2}(U - \beta V \left\langle (\delta E)^2 \right\rangle - U)
\end{aligned}$$

d'où

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right|_\tau = -\left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_\tau = \beta^3 V \left\langle (\delta E)^2 \right\rangle \tag{B.6}$$

Pour les dérivées croisées,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \tau} &= \left.\frac{\partial \tau \left\langle C^{-1}\right\rangle}{\partial T}\right|_\tau \\
&= \tau \frac{-1}{T^2} \left.\frac{\partial}{\partial \beta}\right|_\tau \left[\sum_j C_j^{-1} \frac{e^{-\beta V E_j}}{Z}\right] \\
&= -\beta^2 \tau \left[\sum_j -\beta V C_j^{-1} E_j \frac{e^{-\beta E_j}}{Z} - \sum_j C_j^{-1} \frac{e^{-\beta E_j}}{Z^2} \left.\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right|_\tau\right] \\
&= -\beta^2 V \tau \left[\left\langle C^{-1} E\right\rangle - \left\langle C^{-1}\right\rangle \frac{1}{V} \left.\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right|_\tau\right] \\
&= \beta^2 V \tau \left[\left\langle C^{-1} E\right\rangle - \left\langle C^{-1}\right\rangle U\right]
\end{aligned}$$

où on a utilisé (B.2). En rappelant (B.4) avec $x_j = C_j^{-1} E_j$, on obtient les dérivées croisées

$$\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \tau} = \left.\frac{\partial \tau \left\langle C^{-1}\right\rangle}{\partial T}\right| = -\left.\frac{\partial s}{\partial \tau}\right|_T = \beta^2 V \tau \left\langle \left(\delta \left[C^{-1} E\right]\right)^2 \right\rangle \tag{B.7}$$

Pour les dérivées par rapport à τ enfin,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}\right|_T &= \left.\frac{\partial \tau \left\langle C^{-1}\right\rangle}{\partial \tau}\right|_\beta \\
&= \left\langle C^{-1}\right\rangle + \tau \left.\frac{\partial}{\partial \tau}\right|_\beta \left[\sum_j C_j^{-1} \frac{e^{-\beta V E_j}}{Z}\right] \\
&= \left\langle C^{-1}\right\rangle + \tau \sum_j \frac{dC_j^{-1}}{d\tau} P_j - \beta V \tau \sum_j C_j^{-1} \frac{dE_j}{d\tau} P_j + \tau \sum_j C_j^{-1} \frac{e^{-\beta E_j}}{Z^2} \left.\frac{\partial}{\partial \tau}\right|_\beta Z \\
&= \left\langle C^{-1}\right\rangle + \tau \left\langle \frac{dC^{-1}}{d\tau}\right\rangle - \beta V \left\langle \left(\tau C^{-1}\right)^2\right\rangle + \left\langle \tau C^{-1}\right\rangle \left.\frac{\partial \ln Z}{\partial \tau}\right|_\beta \\
&= \left\langle C^{-1}\right\rangle + \tau \left\langle \frac{dC^{-1}}{d\tau}\right\rangle - \beta V \left\langle \left(\tau C^{-1}\right)^2\right\rangle + \beta V \left\langle \tau C^{-1}\right\rangle^2
\end{aligned}$$

d'où avec la propriété (B.4),

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}\right|_T = \left.\frac{\partial \tau \left\langle C^{-1}\right\rangle}{\partial \tau}\right|_T = \left\langle C^{-1}\right\rangle + \tau \left\langle \frac{dC^{-1}}{d\tau}\right\rangle - \beta V \left\langle \left(\delta \left[\tau C^{-1}\right]\right)^2 \right\rangle \tag{B.8}$$

B.2 Dérivation de $\beta(\tau^*)$ à partir un principe de maximisation

On a obtenu en section 2.2.2.4 une équation différentielle gouvernant l'évolution de $\beta(\tau^*)$, à partir de l'hypothèse que l'énergie accumulée par le système est entièrement d'origine mécanique. On va voir ici que cette même équation différentielle, alternativement, peut être dérivée à partir d'un principe de maximisation.

À énergie $U(\tau,\tau^*)$ fixée, la déformation macroscopique $\langle\varepsilon\rangle(\tau,\tau^*)$ doit être extrémale pour $\tau=\tau^*$, i.e. si l'on est sur la courbe de charge, comme le montre la petite figure B.1.

On utilise les expressions (2.45) et (2.46), en notant comme on cherche à obtenir $T(\tau^*)$, $P_j(\tau^*)\hat{=}P_j(T(\tau^*),\tau^*)$.

Fixer l'énergie donne une relation entre τ et τ^* : avec (2.45),

$$[\frac{\partial}{\partial\tau^*}\Big|_\tau U(\tau,\tau^*)+\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau^*}U(\tau,\tau^*).\,\frac{\partial\tau}{\partial\tau^*}\Big|_U](\tau^*=\tau)=0 \tag{B.9}$$

or comme

$$U(\tau\,\tau^*)=\sum_j P_j(\tau^*)E_j(\tau)$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\tau^*}\Big|_\tau U(\tau,\tau^*) &= \sum_j \frac{dP_j}{d\tau^*}(\tau^*)E_j(\tau)\\
\text{et}\quad \frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau^*} U(\tau,\tau^*) &= \sum_j P_j(\tau^*)\frac{dE_j}{d\tau}(\tau)\\
&= \sum_j P_j(\tau^*)\tau C_j^{-1}(\tau)
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial\tau}{\partial\tau^*}\Big|_U=-\frac{\sum_j \frac{dP_j}{d\tau^*}(\tau^*)E_j(\tau)}{\sum_j P_j(\tau^*)\tau C_j^{-1}(\tau)} \tag{B.10}$$

La condition de maximisation de $\langle\varepsilon\rangle(\tau,\tau^*)$, à U fixé, se formule

$$[\frac{\partial}{\partial\tau^*}\Big|_\tau \langle\varepsilon\rangle(\tau,\tau^*)+\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau^*}\langle\varepsilon\rangle(\tau,\tau^*).\,\frac{\partial\tau}{\partial\tau^*}\Big|_U](\tau^*=\tau)=0 \tag{B.11}$$

or de même que pour U,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\tau^*}\Big|_\tau \langle\varepsilon\rangle(\tau,\tau^*) &= \sum_j \frac{dP_j}{d\tau^*}(\tau^*)\varepsilon_j(\tau)\\
\text{et}\quad \frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau^*} \langle\varepsilon\rangle(\tau,\tau^*) &= \sum_j P_j(\tau^*)\frac{d\varepsilon_j}{d\tau}(\tau)\\
&= \sum_j P_j(\tau^*)C_j^{-1}(\tau)
\end{aligned}$$

En introduisant ceci dans la condition de maximisation (B.11), et en utilisant (B.10), on obtient

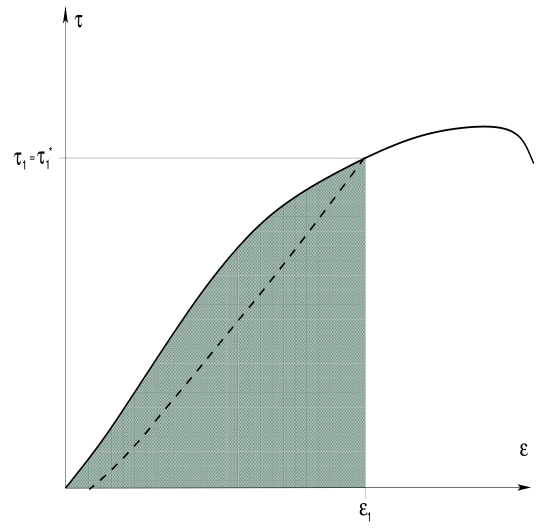
$$\left[\sum_j \frac{dp_j}{d\tau^*}(\tau^*)\varepsilon_j(\tau) - \sum_j P_j(\tau^*)C_j^{-1}(\tau).\frac{\sum_j \frac{dp_j}{d\tau^*}(\tau^*)E_j(\tau)}{\sum_j P_j(\tau^*)\tau C_j^{-1}(\tau)}\right](\tau = \tau^*) = 0$$

c'est à dire , multipliant par $-\tau$,

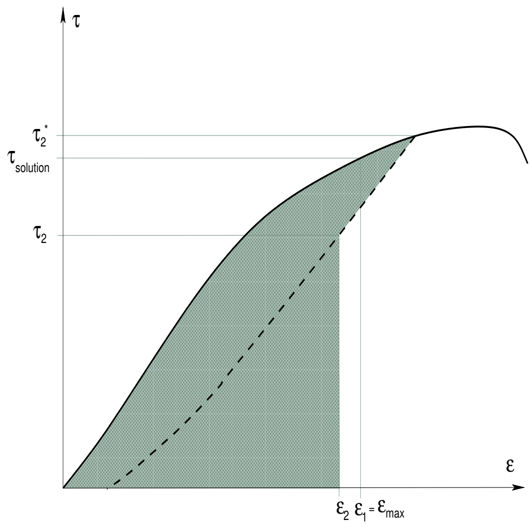
$$\sum_j \frac{dp_j}{d\tau^*}(\tau^*)[E_j(\tau^*) - \tau^*\varepsilon_j(\tau^*)] = 0 \tag{B.12}$$

qui n'est autre que notre équation de départ (2.47).

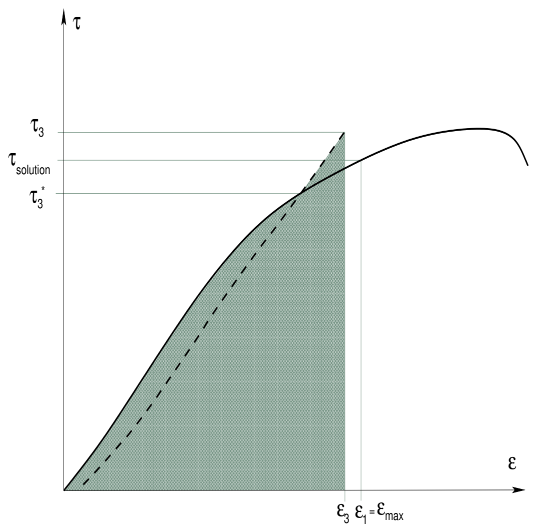
Cette façon de présenter ce résultat est un peu plus artificielle que de faire simplement l'hypothèse de la section 2.2.2.4, mais elle présente l'avantage d'en avoir une représentation visuelle assez simple via le principe de maximisation.



(a) Sur la courbe de charge.



(b) En relâchant après une surcharge



(c) En surchargeant virtuellement de façon purement élastiquement sans modifier la distribution, à partir d'un état du système correspondant à un état antérieur sur la courbe de charge

FIG. B.1 – Trois exemples de variables (τ, τ^*) correspondant à la même énergie $U(\tau, \tau^*)$ – représentée par l'aire grisée. $\langle \varepsilon \rangle (\tau, \tau^*)$ est extrémale pour le cas (a), $\tau = \tau^*$.

Annexe C

Établissement de l'Hamiltonien spécifique utilisé : aspects techniques

C.1 Modules effectifs d'une fracture

C.1.1 Expression du tenseur d'Eshelby S pour notre problème

On va ici exprimer le tenseur S pour l'inclusion définie en section 3.2.1.

Ce tenseur est défini par une situation légèrement différente de celle qui nous intéresse, de la façon suivante : pour une inclusion ellipsoïdale de déformation libre ε^T et de mêmes modules élastiques que la matrice, Eshelby [1957] a établi que la déformation à l'intérieur ε^1 est uniforme à l'intérieur, et reliée à ε^T par un tenseur S (équation (3.6) dans la référence) :

$$\varepsilon^1_{ij} = S_{ijkl}\varepsilon^\infty_{kl} \tag{C.1}$$

En notant (définitions (3.8) dans la référence)

$$Q \hat{=} \frac{3}{8\pi(1-\sigma)};\ R \hat{=} \frac{1-2\sigma}{8\pi(1-\sigma)} \tag{C.2}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
I_a &\hat{=} 2\pi abc \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)\Delta} && \text{(C.3)}\\
I_{aa} &\hat{=} 2\pi abc \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)^2\Delta} && \text{(C.4)}\\
I_{ac} &\hat{=} \frac{2}{3}\pi abc \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)(c^2+u)\Delta} && \text{(C.5)}\\
\text{avec } \Delta &\hat{=} \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)} && \text{(C.6)}
\end{aligned}$$

et I_c, I_{cc} de même en inversant a et c, on utilise le résultat (3.7) d'Eshelby, en spécifiant $a = b$, pour obtenir :

$$
\begin{aligned}
S_{1111} = S_{2222} &= Qa^2 I_{aa} + RI_a && \text{(C.7)}\\
S_{3333} &= Qc^2 I_{cc} + RI_c && \text{(C.8)}\\
S_{1122} = S_{2211} &= Qa^2 \frac{I_{aa}}{3} - RI_a && \text{(C.9)}\\
S_{1133} = S_{2233} &= Qc^2 I_{ac} - RI_a && \text{(C.10)}\\
S_{3311} = S_{3322} &= Qa^2 I_{ac} - RI_c && \text{(C.11)}\\
S_{2323} = S_{3131} &= Q\frac{a^2+c^2}{2} I_{ac} + \frac{R}{2}(I_a + I_c) && \text{(C.12)}\\
S_{1212} &= Qa^2 \frac{I_{aa}}{3} + RI_a && \text{(C.13)}
\end{aligned}
$$

Le tenseur S est symétrique par rapport à l'échange des deux premiers ou deux derniers indices. De plus, les composantes reliant une extension et un cisaillement (S_{1112}, S_{1123}, ...) ou deux cisaillements différents (S_{1223}, ...) sont nuls. Les douze composantes ci-dessus spécifient donc entièrement ce tenseur.

On utilise les résultats d'Eshelby (3.10), (3.13), (3.14) et (3.15) pour intégrer ces I, et en notant

$$\alpha \hat{=} \frac{c}{a} << 1 \tag{C.14}$$

on développe ces expressions au premier ordre en α, pour obtenir :

$$
\begin{aligned}
I_a = \frac{2\pi\alpha}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\cos^{-1}(\alpha) - \alpha(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\right] &\simeq \pi^2\alpha + O(\alpha^2) && \text{(C.15)}\\
I_c = 4\pi - 2I_a &\simeq 4\pi - 2\pi^2\alpha + O(\alpha^2) && \text{(C.16)}\\
I_{ac} = \frac{I_c - I_a}{3(a^2-c^2)} &\simeq \frac{4\pi}{3a^2} - \frac{\pi^2}{a^2}\alpha + O(\alpha^2) && \text{(C.17)}\\
I_{aa} = \frac{4\pi}{3a^2} - \frac{I_{aa}}{3} - I_{ac} &\simeq \frac{3\pi^2}{4a^2}\alpha + O(\alpha^2) && \text{(C.18)}\\
I_{cc} = \frac{4\pi}{3c^2} - 2I_{ac} &\simeq \frac{4\pi}{3c^2} - \frac{8\pi}{3a^2} + \frac{2\pi^2}{a^2}\alpha + O(\alpha^2) && \text{(C.19)}
\end{aligned}
$$

réintroduisant ceci dans les expressions (C.7) à (C.13), on obtient l'expression du tenseur S au premier ordre en α, ce qui sera suffisant pour notre objectif :

$$\begin{aligned}
S_{1111} = S_{2222} &\simeq \left(\frac{3Q}{4} + R\right)\pi^2\alpha + O(\alpha^2) && \text{(C.20)}\\
S_{3333} &\simeq 1 - 2R\pi^2\alpha + O(\alpha^2) && \text{(C.21)}\\
S_{1122} = S_{2211} &\simeq \left(\frac{Q}{4} - R\right)\pi^2\alpha + O(\alpha^2) && \text{(C.22)}\\
S_{1133} = S_{2233} &\simeq -R\pi^2\alpha + O(\alpha^2) && \text{(C.23)}\\
S_{3311} = S_{3322} &\simeq 4\pi\left(\frac{Q}{3} - R\right) - (Q-2R)\pi^2\alpha + O(\alpha^2) && \text{(C.24)}\\
S_{2323} = S_{3131} &\simeq \frac{1}{2} - \left(\frac{Q+R}{2}\right)\pi^2\alpha + O(\alpha^2) && \text{(C.25)}\\
S_{1212} &\simeq \left(\frac{Q}{4} + R\right)\pi^2\alpha + O(\alpha^2) && \text{(C.26)}
\end{aligned}$$

C.1.2 Expression du tenseur de Wu T correspondant

Pour relier ce tenseur S au problème qui nous intéresse, à savoir une inclusion de même forme, mais différent de la matrice par ses modules élastiques, et non par une déformation libre non nulle, on utilise les résultats de Wu [1966] , qui établissent un isomorphisme entre les deux problèmes. Wu montre que la déformation dans l'inclusion est alors relié à la déformation à l'infini par un tenseur T (ici, équation (3.7)). Il relie également ce tenseur T au tenseur d'Eshelby S : utilisant ses expressions (6), (7), (8) et (9), spécifiées par l'hypothèse que les modules de cisaillement et de compression de l'inclusion sont négligeables devant celles de la matrice (donc les constantes notées A et B par Wu sont fixées respectivement à -1 et 0), on a :

$$\begin{aligned}
T_{1212} &= \frac{1}{2(1-2S_{1212})} && \text{(C.27)}\\
T_{2323} &= \frac{1}{2(1-2S_{2323})} && \text{(C.28)}\\
T_{3131} &= \frac{1}{2(1-2S_{3131})} && \text{(C.29)}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} T_{1111} & T_{1122} & T_{1133} \\ T_{2211} & T_{2222} & T_{2233} \\ T_{3311} & T_{3322} & T_{3333} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-S_{1111} & -S_{1122} & -S_{1133} \\ -S_{2211} & 1-S_{2222} & -S_{2233} \\ -S_{3311} & -S_{3322} & 1-S_{3333} \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{(C.30)}$$

Le tenseur T est symétrique sous l'échange de ses deux premiers ou deux derniers indices. À part celles impliquées par ces symétries, les autres composantes sont nulles.

En introduisant les expressions (C.20) à (C.26) dans ces équations, et en rappelant la définition des paramètres Q et R à partir du coefficient de Poisson σ de la matrice (C.2), il vient avec un peu de gymnastique algébrique élémentaire laissée au soin du lecteur, à l'ordre dominant en α :

$$\begin{aligned}
T_{1212} &= \frac{1}{2} + O(\alpha) && \text{(C.31)}\\
T_{2323} = T_{3131} &= \frac{2(1-\sigma)}{2-\sigma}\frac{1}{\pi\alpha}(1+O(\alpha)) && \text{(C.32)}\\
T_{1111} = T_{2222} &= 1 + O(\alpha) && \text{(C.33)}\\
T_{3333} &= \frac{4(1-\sigma)^2}{1-2\sigma}\frac{1}{\pi\alpha}(1+O(\alpha)) && \text{(C.34)}\\
T_{1122} = T_{2211} &= -\sigma + O(\alpha) && \text{(C.35)}\\
T_{1133} = T_{2233} &= -(1-\sigma) + O(\alpha) && \text{(C.36)}\\
T_{3311} = T_{3322} &= \frac{4\sigma(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{1}{\pi\alpha}(1+O(\alpha)) && \text{(C.37)}
\end{aligned}$$

C.1.3 Expression du tenseur de modules effectifs C

On rappelle l'équation (3.12) :

$$C_{ijkl} = C^0_{ijkl} - vC^0_{ijmn}T_{mnkl} \tag{C.38}$$

Avec les expressions (C.31) à (C.37) du tenseur T, et l'expression (3.20) du tenseur des modules de la matrice intacte isotrope C^0, il reste à contracter les tenseurs T et C^0 sur les deux indices intermédiaires. Pour ce faire, on utilise de plus l'identité

$$\frac{1-\sigma}{\sigma} = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \tag{C.39}$$

qui découle de la définition (3.19) du coefficient de Poisson, et le fait que

$$v = \frac{4\pi}{3}\frac{2a.2a.2c}{V} = \frac{4\pi}{3}\frac{L^3}{V}\alpha = \frac{\pi}{4}\gamma\alpha \tag{C.40}$$

où γ a été défini en (3.14). Dans cette contraction, on ne veut garder que l'ordre dominant en α , ce qui implique comme v est d'ordre $O(\alpha)$, que seuls contribueront les termes où interviennent les composantes de T d'ordre $O(\frac{1}{\alpha})$. En se rappelant de plus que la géométrie de l'inclusion est telle que les indices 1 et 2 peuvent être librement interchangés, on obtient – on ne porte que les termes dominants en α, ce dont on peut s'assurer en vérifiant terme à terme– :

$$\begin{aligned}
C_{2222} = C_{1111} = C^0_{1111} - vC^0_{1133}T_{3311} &= \lambda + 2\mu - \lambda\frac{\pi}{4}\gamma\alpha\frac{1}{\pi\alpha}\frac{4\sigma(1-\sigma)}{1-2\sigma} \\
&= (\lambda+2\mu)(1-\frac{\sigma^2}{1-2\sigma}\gamma) \\
C_{3333} = C^0_{3333} - vC^0_{3333}T_{3311} &= \lambda + 2\mu - (\lambda+2\mu)\frac{\pi}{4}\gamma\alpha\frac{1}{\pi\alpha}\frac{4(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} \\
&= (\lambda+2\mu)(1-\frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma}\gamma) \\
C_{1122} = C_{2211} = C^0_{2211} - vC^0_{2233}T_{3311} &= \lambda - \lambda\frac{\pi}{4}\gamma\alpha\frac{1}{\pi\alpha}\frac{4\sigma(1-\sigma)}{1-2\sigma} \\
&= \lambda(1-\frac{\sigma(1-\sigma)}{1-2\sigma}\gamma) \\
C_{1133} = C_{2233} = C^0_{2233} - vC^0_{1133}T_{3333} &= \lambda - \lambda\frac{\pi}{4}\gamma\alpha\frac{1}{\pi\alpha}\frac{4(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} \\
&= \lambda(1-\frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma}\gamma) \\
C_{3311} = C_{3322} = C^0_{3322} - vC^0_{3333}T_{3322} &= \lambda - (\lambda+2\mu)\frac{\pi}{4}\gamma\alpha\frac{1}{\pi\alpha}\frac{4\sigma(1-\sigma)}{1-2\sigma} \\
&= \lambda(1-\frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma}\gamma) \\
C_{3131} = C_{2323} = C^0_{2323} - v(C^0_{2323}T_{2323} + C^0_{2332}T_{3223}) &= \mu - \mu\frac{\pi}{4}\gamma\alpha\frac{2}{\pi\alpha}\frac{2(1-\sigma)}{2-\sigma} \\
&= \mu(1-\frac{1-\sigma}{2-\sigma}\gamma) \\
C_{1212} = C^0_{1212} &= \mu
\end{aligned}$$

Tous les termes non présentés ici sont nuls, à l'exception de ceux obtenus par la symétrie d'échange des deux premiers ou derniers indices.

Ces expressions correspondent exactement au tenseur $(C_{\alpha\beta})$ défini par (3.13), utilisé en section 3.2.2.

C.1.4 Cas 2D

On veut établir le tenseur C pour une ellipse de rapport de forme $\delta << 1$, dans un milieu plan. Une possibilité pour obtenir ce résultat est de répéter la démarche ci-dessus, pour une ellipsoïde de grands axes a, b, c, dans la limite $c \to \infty$: on utilisera les résultats 3D, mais le problème sera invariant par translation suivant la direction $\hat{e}_3$. Les intégrales elliptiques apparaissant dans les expressions (3.8) d'Eshelby [1957] deviennent dans cette limite

$$I_a = 2\pi ab \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)\Delta} \tag{C.41}$$

$$I_{aa} = 2\pi ab \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)^2\Delta} \tag{C.42}$$

$$I_{ab} = \frac{2}{3}\pi ab \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)(b^2+u)\Delta} \tag{C.43}$$

$$\text{avec } \Delta \hat{=} \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)} \tag{C.44}$$

$$I_c = I_{ac} = I_{bc} = I_{cc} = 0 \tag{C.45}$$

et I_b, I_{bb} de même en inversant a et b. On effectue ces intégrales et on développe au premier ordre en $\delta = \frac{b}{a} << 1$, pour obtenir :

$$I_a = 4\pi\delta \tag{C.46}$$

$$I_b = 4\pi(1-\delta) \tag{C.47}$$

$$I_{aa} = \frac{4\pi}{3a^2}2\delta \tag{C.48}$$

$$I_{bb} = \frac{4\pi}{3b^2} \tag{C.49}$$

$$I_{ab} = \frac{4\pi}{3a^2}(1-2\delta) \tag{C.50}$$

Utilisant alors les expressions générales –(3.7) d'Eshelby – des composantes du tenseur S en fonction de ces intégrales,

$$S_{1111} = Qa^2 I_{aa} + RI_a \tag{C.51}$$

$$S_{1122} = Qb^2 I_{ab} - RI_a \tag{C.52}$$

$$S_{1212} = \frac{Q}{2}(a^2+b^2)I_{ab} + \frac{R}{2}(I_a + I_b) \tag{C.53}$$

(avec des expressions analogues en permutant a,b,c et 1,2,3), et en notant

$$q = 4\pi Q = \frac{3}{2(1-\sigma)};\ r = 4\pi R = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \tag{C.54}$$

on obtient au premier ordre en δ :

$$\begin{aligned}
S_{1111} &= (\frac{2q}{3}+r)\delta && \text{(C.55)}\\
S_{2222} &= 1-r\delta && \text{(C.56)}\\
S_{1122} &= -r\delta && \text{(C.57)}\\
S_{2211} &= (\frac{q}{3}-r)+(\frac{-2q}{3}+r)\delta && \text{(C.58)}\\
S_{1212} &= \frac{1}{2}-\frac{q}{3}\delta && \text{(C.59)}\\
S_{2233} &= -r(1-\delta) && \text{(C.60)}\\
S_{1133} &= -r\delta && \text{(C.61)}\\
S_{3311}=S_{3322} &= 0 && \text{(C.62)}\\
S_{2323} &= \frac{1}{2}(1-\delta) && \text{(C.63)}\\
S_{1313} &= \frac{\delta}{2} && \text{(C.64)}
\end{aligned}$$

Utilisant alors les expressions (C.27) à (C.30), en faisant l'inversion de la matrice obtenue et en ne gardant que l'ordre dominant en δ, on obtient

$$\begin{aligned}
T_{1212} &= \frac{3}{4q}\frac{1}{\delta} && \text{(C.65)}\\
T_{2211} &= \frac{\frac{q}{3}-r}{r(1+\frac{q}{3}-r)}\frac{1}{\delta} && \text{(C.66)}\\
T_{2222} &= \frac{1}{r(1+\frac{q}{3}-r)}\frac{1}{\delta} && \text{(C.67)}
\end{aligned}$$

Toutes les autres composantes de T sont $O(1)$, à l'exception de T_{2323} et T_{2233} qui sont aussi $O(\frac{1}{\delta})$ mais ne joueront aucun rôle pour les composantes de C qui nous intéressent.

On remarque que le volume relatif de la fracture v, en fonction du champ $|\varphi| = \frac{L^2_{\text{crack}}}{L^2\text{celllule}}$, s'exprime

$$v = \frac{4\pi}{3}\frac{abc}{L^3_{\text{cellule}}} = \frac{2\pi}{3}\frac{a^2}{L^2_{\text{cellule}}}\frac{b}{a} = \frac{\pi}{6}\frac{L^2_{\text{crack}}}{L^2\text{celllule}}\delta = \frac{\pi}{6}|\varphi|\delta \tag{C.68}$$

et on réécrit les constantes caractéristiques des numérateurs et dénominateurs de (C.65) à (C.67) en fonction des paramètres de Lamé, en utilisant leurs définitions (C.54) et le fait que $\sigma = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$:

$$\begin{aligned}
\frac{4q}{3} = \frac{2}{1-\sigma} &= 4\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} && \text{(C.69)}\\
\frac{q}{3}-r = \frac{\sigma}{1-\sigma} &= \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} && \text{(C.70)}\\
r(1+\frac{q}{3}-r) = \frac{1}{2}\frac{1-2\sigma}{(1-\sigma)^2} &= \frac{\mu}{\lambda+2\mu} && \text{(C.71)}
\end{aligned}$$

On obtient alors la variation des modules élastiques à l'aide de (C.38), pour les composantes dans le plan (impliquant uniquement les directions 1 et 2) qui nous intéressent :

$$\delta c_{2222} = -vC^0_{2222}T_{2222} = -\frac{\pi}{6}|\varphi|\frac{\lambda+2\mu}{\mu}(\lambda+2\mu) \tag{C.72}$$

$$\delta c_{1111} = -vC^0_{1122}T_{2211} = -\frac{\pi}{6}|\varphi|\frac{\lambda}{\mu}\lambda = -\frac{\pi}{6}|\varphi|\frac{\lambda^2}{\mu(\lambda+2\mu)}(\lambda+2\mu) \tag{C.73}$$

$$\delta c_{1122} = -vC^0_{1122}T_{2222} = -\frac{\pi}{6}|\varphi|\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\lambda \tag{C.74}$$

$$\delta c_{2211} = -vC^0_{2222}T_{2211} = -\frac{\pi}{6}|\varphi|\frac{\lambda}{\mu}(\lambda+2\mu) = \delta c_{1122} \tag{C.75}$$

$$\delta c_{1212} = -v(C^0_{1212}T_{1212} + C^0_{1221}T_{2112}) = -\frac{\pi}{6}|\varphi|\frac{1}{2}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\mu \tag{C.76}$$

tous les autres termes étant nuls.

Ces expressions correspondent au tenseur $(C_{\alpha\beta})$ défini par (3.21), en section 3.2.2.

C.2 Contractions tensorielles pour l'obtention du terme d'interaction.

Pour obtenir le terme d'interaction, on a besoin d'expliciter les termes

$$\varepsilon^{(0)}_{cd}\varepsilon^{(0)}_{kl}M_{abcd}N_{ijkl}\hat{k}_j\hat{k}_b(\delta_{ia} - \alpha\hat{k}_i\hat{k}_a) \tag{C.77}$$

où M et N sont A ou B définis en (3.60) et (3.61), et $\varepsilon^{(0)}$ est de la forme (3.57). On reporte ici ces formes pour mémoire :

$$(A_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -\eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -(\eta_1+\eta_2) & -(2\alpha-1)\eta_2 & 0 \\ -(2\alpha-1)\eta_2 & -(\eta_1+\eta_2) & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)\eta_3 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon^{(0)}_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Delta & \gamma \\ \gamma & \Delta \end{pmatrix}$$

Effectuons d'abord les contractions sur les déformations :

$$\varepsilon^{(0)}_{kl}A_{11kl} = \varepsilon^{(0)}_{11}A_{1111} = -\frac{\eta_1}{2}\Delta$$

$$\varepsilon^{(0)}_{kl}A_{22kl} = \varepsilon^{(0)}_{22}A_{2222} = \frac{\eta_1}{2}\Delta$$

$$\varepsilon^{(0)}_{kl}A_{12kl} = \varepsilon^{(0)}_{kl}A_{21kl} = 0$$

et

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{kl}^{(0)} B_{11kl} = \varepsilon_{11}^{(0)} B_{1111} + \varepsilon_{22}^{(0)} B_{1122} &= \frac{1}{2}\Delta(-\eta_1 - \eta_2 - 2\alpha\eta_2 + \eta_2) = -\left(\frac{\eta_1}{2} + \alpha\eta_2\right)\Delta \\
\varepsilon_{kl}^{(0)} B_{22kl} = \varepsilon_{11}^{(0)} B_{2211} + \varepsilon_{22}^{(0)} B_{2222} &= \frac{1}{2}\Delta(-2\alpha\eta_2 + \eta_2 - \eta_1 - \eta_2) = -\left(\frac{\eta_1}{2} + \alpha\eta_2\right)\Delta \\
\varepsilon_{kl}^{(0)} B_{12kl} = \varepsilon_{kl}^{(0)} B_{21kl} = \varepsilon_{12}^{(0)} B_{1212} + \varepsilon_{21}^{(0)} B_{1221} &= \frac{2}{2}\Delta(-(1-\alpha)\eta_3 = (\alpha - 1)\eta_3\gamma
\end{aligned}
$$

En introduisant les matrices de Pauli

$$
\sigma^1 \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.78}
$$

$$
\text{et } \sigma^3 \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{C.79}
$$

et en redéfinissant comme κ_1,κ_2 et κ_3 les trois facteurs déterminés

$$
\kappa_1 \hat{=} \frac{\eta_1}{2} \tag{C.80}
$$

$$
\kappa_2 \hat{=} \frac{\eta_1}{2} + \alpha\eta_2 \tag{C.81}
$$

$$
\kappa_3 \hat{=} (1-\alpha)\eta_3 \tag{C.82}
$$

on obtient

$$
\overline{\overline{\varepsilon^{(0)}}} : \overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} = -\kappa_1 \Delta \sigma^3 \tag{C.83}
$$

$$
\overline{\overline{\varepsilon^{(0)}}} : \overline{\overline{\overline{\overline{B}}}} = -\kappa_2 \Delta Id - \kappa_3 \gamma \sigma^1 \tag{C.84}
$$

Comme on peut écrire $E^{(2)}$ à partir de (3.80), sous la forme

$$
\begin{aligned}
-2V^2(1-\alpha)E^{(2)} = & \\
& \sum_k |\widetilde{\varphi}(k)|^2 \left(\varepsilon^{(0)} : A\right)_{ij} \left(\varepsilon^{(0)} : A\right)_{ab} \hat{k}_j \hat{k}_b (\delta_{ia} - \alpha \hat{k}_i \hat{k}_a) \\
+ & \ 2\sum_k Re[\widetilde{\varphi}(k)\widetilde{\psi}^*(k)] \left(\varepsilon^{(0)} : A\right)_{ij} \left(\varepsilon^{(0)} : B\right)_{ab} \hat{k}_j \hat{k}_b (\delta_{ia} - \alpha \hat{k}_i \hat{k}_a) \\
+ & \sum_k |\widetilde{\psi}(k)|^2 \left(\varepsilon^{(0)} : B\right)_{ij} \left(\varepsilon^{(0)} : B\right)_{ab} \hat{k}_j \hat{k}_b (\delta_{ia} - \alpha \hat{k}_i \hat{k}_a)
\end{aligned} \tag{C.85}
$$

la contraction sur les quatre derniers indices revient à chercher, pour toutes les combinaisons de matrices M , N égales à Id , σ^1 ou σ^3, et des matrices O égales à Id ou $\hat{k}\hat{k}^T$, la valeur du scalaire $\hat{k}^T.M.O.N.\hat{k}$ – puisque tous les opérateurs impliqués sont symétriques. On remarque que ces valeurs sont inchangées sous permutation de M et N. On utilisera pour ces calculs le fait que

$\hat{k}$ est unitaire. L'ensemble de ces combinaisons est le suivant : pour $O = Id$,

$$\begin{aligned}
\hat{k}^T.Id.Id.\hat{k} &= 1 \\
\hat{k}^T.\sigma^1.\sigma^1.\hat{k} &= (\hat{k}_2,\hat{k}_1).(\hat{k}_2,\hat{k}_1) = 1 \\
\hat{k}^T.\sigma^3.\sigma^3.\hat{k} &= (\hat{k}_1,-\hat{k}_2).(\hat{k}_1,-\hat{k}_2) = 1 \\
\hat{k}^T.\sigma^1.\sigma^3.\hat{k} &= (\hat{k}_2,\hat{k}_1).(\hat{k}_1,-\hat{k}_2) = 0 \\
\hat{k}^T.Id.\sigma^1.\hat{k} &= (\hat{k}_1,\hat{k}_2).(\hat{k}_2,\hat{k}_1) = 2\hat{k}_1\hat{k}_2 \\
\hat{k}^T.Id.\sigma^3.\hat{k} &= (\hat{k}_1,\hat{k}_2).(\hat{k}_1,-\hat{k}_2) = \hat{k}_1^2-\hat{k}_2^2
\end{aligned}$$

pour $O = \hat{k}\hat{k}^T$,

$$\begin{aligned}
\hat{k}^T.Id.\hat{k}\hat{k}^T.Id.\hat{k} &= 1 \\
\hat{k}^T.\sigma^1.\hat{k}\hat{k}^T.\sigma^1.\hat{k} &= \Big[(\hat{k}_1,\hat{k}_2).(\hat{k}_2,\hat{k}_1)\Big]^2 = 4\hat{k}_1^2\hat{k}_2^2 \\
\hat{k}^T.\sigma^3.\hat{k}\hat{k}^T.\sigma^3.\hat{k} &= \Big[(\hat{k}_1,\hat{k}_2).(\hat{k}_1,-\hat{k}_2)\Big]^2 = \Big[\hat{k}_1^2-\hat{k}_2^2\Big]^2 \\
\hat{k}^T.\sigma^1.\hat{k}\hat{k}^T.\sigma^3.\hat{k} &= \Big[(\hat{k}_1,\hat{k}_2).(\hat{k}_2,\hat{k}_1)\Big]\Big[(\hat{k}_1,\hat{k}_2).(\hat{k}_1,-\hat{k}_2)\Big] = 2\hat{k}_1\hat{k}_2(\hat{k}_1^2-\hat{k}_2^2) \\
\hat{k}^T.Id.\hat{k}\hat{k}^T.\sigma^1.\hat{k} &= (\hat{k}_1,\hat{k}_2).(\hat{k}_2,\hat{k}_1) = 2\hat{k}_1\hat{k}_2 \\
\hat{k}^T.Id.\hat{k}\hat{k}^T.\sigma^3.\hat{k} &= (\hat{k}_1,\hat{k}_2).(\hat{k}_1,-\hat{k}_2) = \hat{k}_1^2-\hat{k}_2^2
\end{aligned}$$

D'où en réintroduisant ceci dans (C.85), et en utilisant (C.83) et (C.84),

$$\begin{aligned}
&-2V^2(1-\alpha)E^{(2)} = \\
&\qquad \sum_k |\widetilde{\varphi}(k)|^2\kappa_1^2\Delta^2\left(1-\alpha\left(\hat{k}_1^2-\hat{k}_2^2\right)^2\right) \\
&\quad + \; 2\sum_k Re[\widetilde{\varphi}(k)\widetilde{\psi}^*(k)]\left(\kappa_1\kappa_2\Delta^2(1-\alpha)\left(\hat{k}_1^2-\hat{k}_2^2\right) - \kappa_1\kappa_3\Delta\gamma.\alpha 2\hat{k}_1\hat{k}_2\left(\hat{k}_1^2-\hat{k}_2^2\right)\right) \\
&\quad + \; \sum_k |\widetilde{\psi}(k)|^2\left(\kappa_2^2\Delta^2(1-\alpha) + 2\kappa_2\kappa_3\Delta\gamma.(1-\alpha)2\hat{k}_1\hat{k}_2 + \kappa_3^2\gamma^2\left(1-\alpha 4\hat{k}_1^2\hat{k}_2^2\right)\right) \qquad \text{(C.86)}
\end{aligned}$$

Annexe D

Intégration de la fonction de partition : remarques techniques

D.1 Remarque sur la valeur prédite du paramètre critique de transition

À partir de la valeur du paramètre critique (4.30i), en utilisant également (4.32) pour relier ceci aux paramètres ζ, et leurs expressions (3.22) à (3.24), on établit que $\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^2}\omega^{\pm^2} = \frac{2\alpha((2\alpha-1)^2+(1-\alpha)}{(2\alpha-1)(1-\alpha)}$, ce qui correspond quel que soit la valeur précise de α dans $]0.5, 1[$ à des valeurs supérieures à 1. Attendu que dans un test triaxial à τ_{radial} constant, $\frac{\sigma}{p}$ varie continûment de 0 à 1 vu les définitions de ces deux grandeurs(3.95) et (3.96) , ceci semble indiquer que cette transition à $\frac{\sigma}{p} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\omega^{+}$ -d'après (4.6) - n'est jamais atteinte. Ce modèle bidimensionnel, sursimplifié, ne rend donc pas parfaitement compte de la transition de localisation dans des compressions biaxiales. Toutefois, deux remarques sont à faire à ce propos :

- Ce modèle rendra compte de transitions dans des chemins de charge un peu différents, où la contrainte déviatorique σ augmente alors que la pression p est maintenue constante. On considérera dorénavant ce cas.
- En considérant un problème tridimensionnel, on peut avoir une estimation de la valeur de ce paramètre critique, en forçant simplement celle-ci à correspondre à (4.30i), et en remplaçant ζ_1, ζ_2 et ζ_3 par χ_1, χ_3 et χ_4 -les paramètres (3.15),(3.17) et (3.18) de la variation des modules en 3D, (3.13). Notant σ_P le module de Poisson de la matrice, on établit alors que cette transition aura lieu à $\frac{\sigma}{p} = \frac{(1-\sigma_P)(2-\sigma_P)^2\sigma_P}{(1-2\sigma_P)}$, qui est inférieur à 1 pour les valeurs ordinaires de σ_P, en-dessous de 0.2, des composants de roche. Utilisant cette indication, on conclut que cette valeur est atteinte dans un test triaxial classique. Elle ne le serait pas pour un matériau composé par exemple de grains de caoutchouc, pour lesquelles σ_P est proche du maximum 0.5 : là encore, il faudrait relâcher la contrainte radiale pendant qu'on charge axialement pour l'atteindre.

D.2 Pistes pour l'étude de la fonction d'autocorrélation

À partir du modèle développé, il est possible en principe d'évaluer la fonction d'autocorrélation à deux points,

$$G(x,y) \hat{=} \langle \varphi(x)\varphi(y) - \langle \varphi(x) \rangle \langle \varphi(y) \rangle \rangle \tag{D.1}$$

Pour ce faire, la méthode classique (par exemple d'après Le Bellac [1990]) consiste à généraliser l'hamiltonien $H[\varphi]$ en ajoutant un champ externe $J(x)$ agissant sur $\varphi(x)$:

$$H'[\varphi, J] = H[\varphi] - \int_{x\in\Omega} d^D x \, J(x)\varphi(x) \tag{D.2}$$

La fonction de partition Z est alors une fonctionnelle du champ externe (ou source) J :

$$Z[J] = \int \prod_{r\in\Omega} (d\varphi_r) e^{-\beta H'[\varphi, J]} \tag{D.3}$$

et on établit que

$$\langle \varphi(x) \rangle = \lim_{J\to 0} \frac{1}{\beta Z} \frac{\delta Z}{\delta J(x)} \tag{D.4}$$

où $\frac{\delta}{\delta J(x)}$ désigne l'opérateur de dérivation fonctionnelle (généralisation de la dérivée partielle pour des fonctionnelles). La limite $J \to 0$ signifie que le champ $J(x)$ tend vers 0 en tout point x : on n'a pas de champ extérieur brisant la symétrie du problème dans l'hamiltonien physique, et ce couplage supplémentaire – deuxième terme de (D.2) – n'est introduit que pour pouvoir effectuer formellement ces dérivations. On établit également

$$\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle = \lim_{J\to 0} \frac{1}{\beta^2 Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x)\delta J(y)} \tag{D.5}$$

[1] Pour évaluer $Z[J]$, on se place à nouveau dans l'approximation de signe constant. Comme le terme de couplage peut également s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} -\int_{x\in\Omega} d^D x \, J(x)\varphi(x) &= -\frac{1}{L^D}\left(\widetilde{J}_0 \widetilde{\varphi}_0 + 2\sum_{k\in\Upsilon} \widetilde{J}_k \widetilde{\varphi}_{-k} \right) \\ &= -\frac{1}{L^D}\left(\widetilde{J}_0 \widetilde{\varphi}_0 + 2\sum_{k\in\Upsilon} \widetilde{J}_k^R \widetilde{\varphi}_k^R + 2\sum_{k\in\Upsilon} \widetilde{J}_k^I \widetilde{\varphi}_k^I \right) \end{aligned}$$

[1] Remarque terminologique : ceci est à l'origine de la désignation de $Z[J]$ en tant que génératrice des fonctions de corrélation. À l'aide de (D.4) et (D.5), on obtient aussi que la fonction d'autocorrélation à deux points, ou fonction de corrélation connexe, peut s'obtenir directement comme une dérivée seconde : $G(x,y) = \lim_{J\to 0} \frac{1}{\beta^2} \frac{\delta^2 \ln Z}{\delta J(x)\delta J(y)}$. On désigne donc $\ln Z[J]$ comme génératrice des fonctions de corrélation connexe. Dans notre problème, on verra qu'il est plus simple de travailler directement à partir de $Z[J]$.

$Z[J]$ a de nouveau la forme (4.42), i.e.

$$Z[J] \simeq z_c \left\{ z_0^{+'} \prod_{k\in\Upsilon} \left[z_R^{+'}(k) z_I^{+'}(k) \right] + z_0^{-'} \prod_{k\in\Upsilon} \left[z_R^{-'}(k) z_I^{-'}(k) \right] \right\} \tag{D.6}$$

$$\text{avec } z_c = e^{-\beta V d} \quad \text{(identique)} \tag{D.7}$$

$$z_0^{\pm'} = \int_{\frac{\tilde{\varphi}_0}{V}=0}^{\epsilon} d\tilde{\varphi}_0 e^{-\beta V\left[\left(\pm e - \frac{\tilde{J}_0}{V}\right)\frac{\tilde{\varphi}_0}{V} + f\left(\frac{\tilde{\varphi}_0}{V}\right)^2\right]} \tag{D.8}$$

$$z_R^{\pm'}(k) = \int_{\frac{\tilde{\varphi}_k^R}{V}=-\epsilon/2}^{\epsilon/2} d\tilde{\varphi}_k^R e^{-\beta V\left[-2\frac{\tilde{J}_k^R}{V}\frac{\tilde{\varphi}_k^R}{V} + w^{\pm}(k)\left(\frac{\tilde{\varphi}_k^R}{V}\right)^2\right]} \tag{D.9}$$

et $z_I^{\pm'}(k)$ de même en remplaçant les parties réelles de $\tilde{J}_k$ et $\tilde{\varphi}_k$ par les parties imaginaires[2].

Tous ces termes sont toujours de simples gaussiennes. On les évalue comme :

$$z_0^{\pm'}(k) = \tag{D.10}$$
$$\sqrt{\frac{\pi V}{4\beta f}} e^{\frac{\beta V(e\pm\tilde{J}_0/V)^2}{4f}} \left[\operatorname{erf}\left((\epsilon + \frac{e \pm \widetilde{J}_0/V}{2f}) \sqrt{\beta V f} \right) - \operatorname{erf}\left(\frac{e \pm \widetilde{J}_0/V}{2f} \sqrt{\beta V f} \right) \right]$$

$$z_R^{\pm'}(k) = \tag{D.11}$$
$$\sqrt{\frac{\pi V}{\beta w^{\pm}(k)}} e^{\frac{\beta \tilde{J}_k^{R2}}{V w^{\pm}(k)}} \left[\operatorname{erf}\left((\frac{\epsilon}{2} - \frac{\widetilde{J}_k^R}{V w^{\pm}(k)}) \sqrt{\beta V w^{\pm}(k)} \right) - \operatorname{erf}\left((-\frac{\epsilon}{2} - \frac{\widetilde{J}_k^R}{V w^{\pm}(k)}) \sqrt{\beta V w^{\pm}(k)} \right) \right]$$

ainsi que $z_I^{\pm'}(k)$, de même forme en remplaçant $\widetilde{J}_k^R$ par $\widetilde{J}_k^I$.

Pour effectuer les dérivées fonctionnelles par rapport à $J(x)$, on fait naturellement un changement de variable vers les modes de Fourier :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(x)} &= \sum_{k\in\Upsilon U\{0\}} \left(\frac{\delta \tilde{J}_k^R}{\delta J(x)} \frac{\partial}{\partial \tilde{J}_k^R} + \frac{\delta \tilde{J}_k^I}{\delta J(x)} \frac{\partial}{\partial \tilde{J}_k^I} \right) \\ &= \sum_{k\in\Upsilon U\{0\}} \left(\cos(k.x) \frac{\partial}{\partial \tilde{J}_k^R} - \sin(k.x) \frac{\partial}{\partial \tilde{J}_k^I} \right) \end{aligned} \tag{D.12}$$

i.e. pour une fonctionnelle $F[J]$, les modes de Fourier de $\frac{\delta F}{\delta J(x)}$ sont donnés par $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{J}_k^R} + i\frac{\partial F}{\partial \tilde{J}_k^I}\right)$ pour $k \in \Upsilon$ (et par $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{J}_{-k}^R} - i\frac{\partial F}{\partial \tilde{J}_{-k}^I}\right)$ pour $-k \in \Upsilon$, comme $\frac{\delta F}{\delta J(x)}$ est réel) .

Dérivant $Z[J]$ –(D.6), avec (D.10) et (D.11)– deux fois par rapport à $\widetilde{J}_k^R$ et $\widetilde{J}_k^I$, on obtient en prenant la limite $\forall k,\ \widetilde{J}_k \to 0$:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \tilde{J}_k^R \partial \tilde{J}_{k'}^R} = \frac{\partial^2 Z}{\partial \tilde{J}_k^I \partial \tilde{J}_{k'}^I} = \delta(k;k') Z_0 \frac{\beta}{L^D} \left[\frac{1}{w^+(k)} + \frac{1}{w^-(k)} \right] \tag{D.13}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \tilde{J}_k^R \partial \tilde{J}_{k'}^I} = 0 \tag{D.14}$$

[2]Remarque : la notation $w^{\pm}$, ici, désigne les préfacteurs des termes quadratiques en $\tilde{\varphi}_k$ dans l'approximation de signe constant, incluant les interactions de plus proches voisins et effets de seuils, i.e. par rapport à la fonction $w^{\pm}$ de (4.59), il s'agit de $w^{\pm'} = w^{\pm} - J\Lambda_m^2 k^2(1-v_k) + bT$.

où on a noté Z_0 la fonction de partition d'origine, (4.42), sans les termes de couplage à une source extérieure introduits dans H'. Utilisant deux fois la propriété (D.12), on exprime la fonction de corrélation (D.5) à l'aide des expressions précédentes :

$$\begin{aligned}\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle &= \lim_{J\to 0}\frac{1}{\beta^2 Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x)\delta J(y)}\\ &= \frac{1}{\beta L^D}\left[\sum_{k\in\Upsilon}\left[\frac{1}{w^+(k)}+\frac{1}{w^-(k)}\right]\cos[k.(x-y)]\right]\end{aligned}\tag{D.15}$$

Les expressions w^+ et w^-, en fonction des coordonnées radiales (k,θ) des vecteurs d'onde, ont toutes deux la forme $f(\theta)-g(\theta)\Lambda_m^2k^2$. f et g sont des fonctions positives, de même dimension, et à la transition $f(\theta)-g(\theta)\Lambda_m^2k^2$ s'annule pour certaines directions θ , et pour k maximum ($k=\frac{2\pi}{\Lambda_m}$), correspondant au pas du réseau. Pour effectuer cette transformation de Fourier inverse, on doit remarquer que le domaine Υ est limité dans le plan des vecteurs d'onde. Les contributions principales à la fonction de corrélation viendront des racines de w^+ et w^-, qui approchent la frontière du domaine à l'approche de la transition. Ce type d'intégration sur un domaine limité est difficilement exploitable, et n'a pas été effectué dans le cadre de ce travail (bien qu'assez lourd, ce serait possible en principe). On peut cependant faire les remarques suivantes concernant de futures pistes à exploiter :

Le signe négatif en facteur de k^2, dans les fonctions w^+ et w^- , provient des interactions de plus proches voisins, pour lesquelles on a supposé que la présence d'une fracture tend à diminuer la probabilité de présence de fractures voisines dans certaines directions. Revenant à une expression sur le réseau discret d'origine, ceci correspond dans l'hamiltonien à un terme $+J\sum_{<xx'>}\psi_x\psi_{x'}$, où $<xx'>$ désigne une somme sur des sites voisins, alignés suivant la direction radiale, et J est une constante positive. Il est instructif de comparer l'approche développée jusqu'ici à la façon dont on se ramène à un champ continu pour un modèle d'Ising sur un réseau carré (par exemple d'après Binney [1992] p 13, ou Domb [1996] p 112) : $<xx'>$ désignant une somme sur des sites voisins, et J étant une constante de couplage positive, le terme d'interaction est de la forme $-J\sum_{<xx'>}\sigma_x\sigma_{x'}$ dans le cas d'un couplage ferromagnétique, ou $+J\sum_{<xx'>}\sigma_x\sigma_{x'}$ dans le cas d'un couplage antiferromagnétique. x, x' sont des sites du réseau, et σ_x est le spin au site x , à valeurs dans $\{-1;1\}$. Dans le premier cas, définissant le champ ψ comme une extension continue, à valeurs dans un continuum, du champ de spins σ –sur un réseau discret, à valeurs discrètes –, ces interactions sont à l'origine d'un terme $+J\Lambda_m^2\int d^Dk\ \|k\|^2\,\widetilde{\psi}_k\widetilde{\psi}_{-k}$. Dans le deuxième cas, la méthode classique consiste d'abord à diviser le réseau discret en deux sous-réseaux imbriqués (obtenus l'un à partir de l'autre par une translation de un lien), le passage au champ continu ψ se fait à partir du champ alterné de valeurs σ_x ou $-\sigma_x$ suivant que le site x se trouve un sous-réseau ou l'autre. Les interactions sont alors à l'origine d'un terme de même type, $+J\Lambda_m^2\int d^Dk\ \|k\|^2\,\widetilde{\psi}_k\widetilde{\psi}_{-k}$. Il a fallu pour ce faire redéfinir le paramètre d'ordre local. De même, dans notre problème, on pourrait chercher une redéfinition un peu plus compliquée du paramètre d'ordre à partir du champ sur réseau discret (un isomorphisme) , tel que les interactions de plus proches voisins se traduisent par un terme dans l'hamiltonien, $\Lambda_m^2\int d^Dk\,g(\theta_k).\ \|k\|^2\,\widetilde{\psi}_k\widetilde{\psi}_{-k}$, où g est une fonction à valeurs positives et non négatives[3].

[3]Remarque : un modèle où on considère que la présence d'un crack tend à accroître la probabilité de présence d'autres cracks pour les plus proches voisins suivant certaines directions, et non à la diminuer, aurait directement

On peut espérer se ramener ainsi à un hamiltonien où les termes en champ propre (proportionnels à $\overline{|\psi|}$) ont la même forme que jusqu'à présent, et où les termes d'interactions sont à l'origine de fonctions w de forme proportionnelle à $f(\theta)+g(\theta)\Lambda_m^2 k^2$, avec g à valeurs positives –la symétrie de parité garantissant $w^-(\theta) = w^+(\pi/2-\theta)$. Un tel modèle présenterait une transition de localisation lorsque la fonction $f(\theta)$ acquière des valeurs négatives pour certains angles θ. En fonction des paramètres réduits $t = (T_c - T)/T_c$ et $l = (\tau_{ax_c} - \tau_{ax})/\tau_{ax_c}$, on s'attend a priori à ce que $f_{\min} = \min_\theta f(\theta) = f(\theta_0) \sim a_t t + a_l l$. On peut alors vérifier que l'exposant critique γ, établi en section 4.4.2, ne serait pas modifié. Par contre, sous l'hypothèse supplémentaire qu'on n'a pas de brisure spontanée de symétrie avant la transition ($<\varphi>= 0$), l'expression (D.15) montre que $\widetilde{G}(k)$ serait de la forme

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}(k) &= \frac{1}{k^2} g(k\xi, \theta) \\
\xi &= \sqrt{\frac{g(\theta_0)}{f(\theta_0)}}\Lambda_m \sim c_1(\delta\tau)^{-1/2} \\
g(y,\theta) &= h(y,\theta) + h(y, \pi/2-\theta) \\
h(y,\theta) &= \frac{c_2 y^2}{g(\theta_0)\frac{f(\theta)}{f(\theta_0)} + g(\theta)y^2}
\end{aligned}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes. Pour un tel modèle, $h(y,\theta)$ ne présente pas de pôles réels. Si on était en dimension $D > 2$, on pourrait alors prendre la transformée de Fourier inverse de $\widetilde{G}(k)$ en intégrant sur tout l'espace des vecteurs d'ondes, pour obtenir :

$$G(r,\theta) = \frac{z(r/\xi,\theta)}{r^{D-2+\eta}}; \text{ avec } \eta = 0 \tag{D.16}$$

$$\xi \sim c_1(\delta\tau)^{-\nu}; \text{ avec } \nu = 1/2 \tag{D.17}$$

où on a noté suivant l'usage les exposants critiques ν et η. Ceci est tout à fait prévisible, vu que le modèle construit, où on a tronqué l'hamiltonien à l'ordre 2 en $(\varphi, |\varphi|)$, est gaussien : la dépendance supplémentaire en θ dans la formulation ci-dessus n'affecte pas la valeur de ces exposants, qui est identique à celles d'un modèle de Ginzburg-Landau (par exemple, d'après Le Bellac [1990], p 74). Dans le cas de la dimension $D = 2$, il faut prendre garde au fait que kdk/k^2 n'est pas intégrable en $k = 0$: on doit conserver un volume fini pour faire cette transformée de Fourier inverse. On obtient toujours le même exposant $\nu = 1/2$ pour la divergence de la longueur d'autocorrélation, et au point critique, $G(r,\theta) = -a(\theta)\ln(r) + b(\theta)$.

En notant $\delta\varepsilon = |\varepsilon_{axial_c} - \varepsilon_{axial}|$, on peut par ailleurs établir en intégrant (4.106), qu'à l'approche de la transition de localisation, $\delta\varepsilon \sim c_2(\delta\tau)^{1/2}$. Utilisant ceci en conjonction avec (D.17), on constate qu'un tel modèle gaussien, où on tronque les interactions à l'ordre 2 en φ, prédit $\xi \sim c_3(\delta\varepsilon)^{-1}$, ce qui n'est pas en accord avec les observations expérimentales de Bonnet et Davy (1.6), $\xi \sim c_3(\delta\varepsilon)^{-1/3}$. Indépendamment des modifications citées plus haut dans cette section, il semble donc nécessaire d'incorporer dans le futur des termes d'ordre supérieur en φ dans l'hamiltonien pour espérer rendre compte de ce comportement.

le même effet sur la forme de l'hamiltonien pour le champ continu, sans chercher de redéfinition du paramètre d'ordre.

Annexe E

Tenseurs de Green

E.1 Tenseur de Green de l'élastostatique 2D en domaine Fourier

On cherche les fonctions $G_j(x)$ solution du problème de Green

$$\begin{aligned}
\nabla.\tau + \hat{e}_j \delta^D(x) &= 0 && \text{(E.1)}\\
\tau &= \lambda(\nabla.G_j)Id + \mu\left(\nabla G_j + (\nabla G_j)^T\right) && \text{(E.2)}\\
G_j(x_1+L, x_2) = G_j(x_1, x_2+L) &= G_j(x) && \text{(E.3)}
\end{aligned}$$

Définissant la transformée de Fourier de G[1],

$$\tilde{G}(k) = \int_\Omega G(x) e^{-ik.x} d^D x$$

les équations (E.1) et (E.2) s'expriment

$$\begin{aligned}
-ik.\tilde{\tau} &= -\hat{e}_j\\
\tilde{\tau} &= -i\lambda(k.\tilde{G}_j(k))Id - i\mu(k\tilde{G}_j(k) + \tilde{G}_j(k)k)\\
\text{i.e. } \lambda k(k.\tilde{G}_j(k)) + \mu\left((k.k)\,\tilde{G}_j(k) + (k.\tilde{G}_j(k))k\right) &= \hat{e}_j\\
\left[\mu k^2 Id + (\lambda+\mu)kk\right]\tilde{G}_j(k) &= \hat{e}_j\\
\tilde{G}_j(k) &= \left[Id + \frac{\lambda+\mu}{\lambda}\frac{kk}{k^2}\right]^{-1}\frac{\hat{e}_j}{\mu k^2} && \text{(E.4)}
\end{aligned}$$

en remarquant que l'opérateur à inverser s'écrit $Id + \frac{\alpha}{1-\alpha}\hat{k}\hat{k}$ (avec α défini en (3.58), et $\hat{k}$ le vecteur unitaire de direction k), on a

[1] La condition aux frontières de périodicité (E.3) peut être remplacée par une condition de nullité à l'infini : en adoptant alors la définition des coefficients de Fourier de fonctions à support infini, la suite du développement est identique.

$$\begin{aligned}
\left[Id+\frac{\alpha}{1-\alpha}\hat{k}\hat{k}\right]^{-1} &= Id+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^{n}(\hat{k}\hat{k})^{n}\\
&= Id-\frac{\alpha}{1-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^{n-1}\hat{k}(\hat{k}.\hat{k})^{n-1}\hat{k}\\
&= Id-\frac{\alpha}{1-\alpha}\hat{k}\hat{k}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^{n}\right)\\
&= Id-\hat{k}\hat{k}\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\\
&= Id-\alpha\hat{k}\hat{k}
\end{aligned}$$

où on a utilisé $\hat{k}.\hat{k}=1$. (E.4) nous donne alors[2] :

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_j(k) &= \frac{\hat{e}_j-\alpha\hat{k}_j\hat{k}}{\mu k^2} && \text{(E.5)}\\
\text{soit }\ \tilde{G}_{ij}(k) &= \frac{1}{1-\alpha}\frac{\delta_{ij}-\alpha\hat{k}_i\hat{k}_j}{(\lambda+2\mu)k^2} && \text{(E.6)}
\end{aligned}$$

E.2 Tenseur de Green de l'élastostatique en domaine réel

E.2.1 Problème 3D

En trois dimensions, on peut directement faire une transformée de Fourier inverse de E.6, pour obtenir

$$G_{ik}(x)=\frac{1}{8\pi\mu r}\left[(2-\alpha)\delta_{ik}+\alpha\hat{x}_i\hat{x}_k\right] \tag{E.7}$$

où par convention, on a noté

$$\begin{aligned}
r &= \|x\|\\
\hat{x} &= \frac{x}{r}
\end{aligned}$$

E.2.2 Problème 2D

En deux dimensions, il faut prendre garde au fait que la forme (E.6) contient une singularité logarithmique en $k\sim 0$, $\frac{d^2k}{k^2}$. On peut toutefois obtenir par plusieurs techniques (parr exemple

[2]Remarque : cette expression, valable pour le problème à conditions aux frontières périodiques, est en fait pathologique pour le problème avec conditions aux frontières à l'infini : l'inverse de sa transformée n'existe pas si on laisse l'intégrant k tendre vers 0, la forme $\frac{d^2k}{k^2}$ amenant une divergence logarithmique. Ceci est à l'origine du fait connu que la fonction de Green de l'élastostatique 2D est définie à une constante près. Ce problème ne se présente pas en $3D$, où l'expression (E.6) est toujours valable, et admet une transformée inverse : $\frac{d^3k}{k^2}$ est intégrable au voisinage de 0.

en travaillant à partir de la forme 3D, intégrée sur une source correspondant à un segment de longueur fini, ou en conservant une extension finie au plan pour faire une transformée de Fourier inverse) :

$$G_{ik}(x) = \frac{-1}{4\pi\mu}\left[(2-\alpha)\delta_{ik}\ln\left(\frac{r}{L}\right) - \alpha\hat{x}_i\hat{x}_k\right] \tag{E.8}$$

La singularité évoquée ci-dessus est à l'origine de la constante d'intégration L, reliée aux dimensions du bord du milieu (par exemple l'épaisseur d'une plaque). On peut vérifier directement que (E.8) est solution du système d'origine (E.1),(E.2).

Annexe F

Hypothèse d'indépendance de l'énergie de formation par rapport à l'histoire : vérification numérique sur un modèle dynamique

F.1 Problème posé

On a introduit en section 2.1.2.1 une fonction $E_j(\varepsilon)$, censée représenter l'énergie totale nécessaire pour porter un mésovolume de l'état non endommagé, sous les conditions aux frontières de déformation initiales, à un état caractérisé par des conditions aux frontières extériaures données par ε, et des conditions aux frontières intérieures spécifiées par le microétat noté symboliquement j. Cette notion nécessite que l'énergie en question soit, au moins de façon approchée, dépendante uniquement de l'état actuel donné par (j, ε), et non de l'ordre dans lequel les microfractures sont apparues (information non contenue dans j, caractérisation géométrique du réseau de microfractures, et non de son histoire). Cette énergie est constituée d'une part, d'une énergie élastique stockée dans le milieu, et d'autre part, d'une énergie dépensée de façon irréversible lors la formation des fractures. La première partie est effectivement indépendante de l'ordre d'apparition des fractures : formellement, la résolution du problème élastostatique où les conditions aux frontières sont données par (j, ε), permet en principe d'obtenir le champ de déformation et celui de contrainte dans tout le milieu, donc en principe également l'énergie réversible. L'hypothèse d'indépendance à l'histoire de l'énergie irréversible doit par contre être vérifiée.

De plus, dans le modèle spécifique que l'on a construit en section 3, on a considéré que cette énergie provient essentiellement d'un effet Joule (frottement entre les lèvres des fractures), et à conditions aux frontières extérieures données, est additive en $|\varphi|$, i.e. si la longueur des microfractures potentielles est fixée, proportionnelle au nombre de microfractures. Ceci demande également vérification.

La distribution de probabilité d'occupation sur les microétats $\{j\}$ étant censée résulter d'un processus dynamique (bien qu'on ait tenté de l'évaluer différemment), on a donc choisi de tester ces deux hypothèses en simulant numériquement un système dynamique très simple, où l'on peut entièrement suivre l'histoire, et où on peut exactement évaluer l'énergie dépensée dans la friction entre les lèvres des fractures.

F.2 Principe du modèle dynamique

Le petit modèle dynamique développé s'inspire notamment de simulations similaires pour des problèmes d'ouverture en tension (par exemple le modèle de Blair and Cook [1998]), mais vu les conditions de fortes pressions de confinement qui nous intéressent, on a considéré que l'apparition des fractures se fait principalement en mode II, et non en mode I. Les fractures sont considérées plongées dans un milieu élastique homogène, et les conditions aux frontières utilisées garantissent que la contrainte locale sur chacune d'elles reste toujours compressive, ce qui se rapproche des conditions utilisées dans les simulations numériques utilisées classiquement en sismologie pour l'étude du déclenchement des tremblements de terre (*earthquake triggering* en anglais), i.e. les interactions entre failles dans la croûte terrestre (voir par exemple King et al. [1994]).

Le système modélisé est bidimensionnel, constitué de fractures potentielles correspondant aux liens d'un réseau carré (incliné à 45° de l'axe de contrainte principale). L'état initial du système est consiste en un milieu non endommagé, sous conditions de contrainte à l'infini homogènes et isotropes. Pour que le système reste assez simple, on a choisi de fixer les conditions aux frontières à l'infini, i.e. le système occuppe un espace restreint dans le plan, le reste du plan étant supposé constitué d'un milieu intact. On augmente de façon incrémentale la contrainte axiale à l'infini.

Après chaque incrément, on teste sur chaque site potentiel si un seuil de Coulomb est atteint : pour chaque lien i, on évalue les composantes tangente et normale de la contrainte locale au centre du lien, et on teste si

$$\tau_{\mathrm{tangent}_i}/\tau_{\mathrm{normal}_i} \geq \mu_{s_i} \tag{F.1}$$

, où μ_{s_i} est un seuil de coulomb propre à chaque site, variable aléatoire fixée initialement pour chaque site i , de façon indépendante pour chaque fracture. On a choisi arbitrairement une distribution uniforme dans $[0.3, 0.9]$. Si ce critère de Coulomb (F.1) est vérifié sur au moins une des fractures, on a alors un glissement sur la fracture j, déterminé par un écart maximal au seuil de Coulomb :

$$\tau_{\mathrm{tangent}_j} - \mu_{s_j}\tau_{\mathrm{normal}_j} = \max_i \left(\tau_{\mathrm{tangent}_i} - \mu_{s_i}\tau_{\mathrm{normal}_i}\right) \tag{F.2}$$

On redistribue alors la perturbation du champ de contrainte due à ce glissement dans tout le milieu, supposé parfaitement élastique.

Pour chaque fracture j, on définit ω_j le segment correspondant, ainsi que des vecteurs unitaires $\hat{t}_j$ et $\hat{n}_j$, respectivement tangent et normal, avec la convention d'orientation donnée par $\hat{n}_j.\hat{e}_{axial} > 0$ et $\hat{t}_j.\hat{e}_{axial} < 0$. Le glissement étant en mode II, la discontinuité du champ de déplacement u est entièrement colinéaire au lien, i.e. selon $\hat{t}_j$. Notant ω_j le segment correspondant à la fracture j, on définit la fonction de glissement comme

$$[\![u]\!](x) \hat{=} \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[u(x + \epsilon\hat{e}_{axial}) - u(x - \epsilon\hat{e}_{axial})\right].\hat{t}_j;\ x \in \omega_j$$

Pour conserver un modèle simple, on a supposé que cette fonction de glissement est une constante le long de chaque fracture, i.e. nos fractures sont des sources de Haskell (couramment utilisés par les sismologues dans les modélisations de failles, par exemple d'après Madariaga [1980]). Autrement dit, les liens considérés sont des "pixels de discontinuité". On a toutefois considéré des sources d'extension finie, pour prendre en compte un effet important dans la dynamique du modèle : dans une direction perpendiculaire à la fracture, sur une zone de taille comparable à sa longueur, on a une atténuation de la contrainte cisaillante (*shielding*). Au contraire, celle-ci augmente dans cette direction, au-delà de cette zone. Ceci est un effet sensible uniquement dans un proche voisinage : on peut montrer qu'en champ lointain, la perturbation due à une fracture ou à son conjugué – symétrique par apport à la direction axiale, centré sur le même point – est identique.

La quantité de glissement est déterminée par le fait qu'en prenant en compte la perturbation de contrainte due à ce glissement, sur la fracture elle-même (*stressdrop*), l'équilibre a lieu quand la nouvelle contrainte locale au centre de la fracture est telle que

$$\tau'_{\mathrm{tangent}_j} / \tau'_{\mathrm{normal}_j} = \mu_D \tag{F.3}$$

où μ_D est le seuil de Coulomb dynamique, considéré comme constant sur toutes les fractures (on a considéré arbitrairement $\mu_D = 0.25$)[1].

Après avoir ainsi redistribué la perturbation sur tous les autres sites, on vérifie si l'on a des avalanches : sans modifier la contrainte à l'infini, on teste de nouveau la condition de Coulomb (F.1) sur chaque fracture, et dans le cas où elle est vérifiée sur un site, on sélectionne à nouveau la fracture sur laquelle a lieu un glissement par (F.2). Cette opération est effectuée jusqu'à ce que l'on n'ait plus d'avalanche. On incrémente alors à nouveau la contrainte axiale à l'infini.

F.3 Calculs de la perturbation de contrainte due aux fractures

F.3.1 Principe

Pour connaître le champ de contrainte dans tout le milieu, l'état de chaque site $p \in \{1, ..., n\}$, n étant le nombre total de sites, étant donné par une discontinuité de déplacement $[\![u]\!]_p$, et la condition à l'infini par τ_{ij}^{∞}, on doit résoudre le problème élastostatique :

$$\begin{aligned} \partial_i \tau_{ij} &= 0 && \text{(F.4)} \\ \tau_{ij} &= (K - \mu)\partial_l u_l \delta_{ij} + \mu(\partial_i u_j + \partial_j u_i) && \text{(F.5)} \end{aligned}$$

[1]Remarque : le fait d'avoir considéré des sources de Haskell a notamment comme conséquence que le stress-drop n'est en principe pas constant le long de la fracture. Pour que cette condition soit vérifiée tout au long de la fracture, au moins de façon approximative, il faut considérer des fonctions de glissement plus compliquées. L'inhomogénéité des perturbations de contrainte due aux autres fractures doit alors également être prise en compte, et ce problème est nettement plus complexe. Il peut être résolu de façon approchée en décomposant chaque fonction de glissement sur une base de fonctions orthogonales : pour ce genre de modélisation plus avancée, on pourra se reporter aux travaux de Tsukrov et Kachanoff [1997] pour des fractures en tension, ou à ceux de Fond et al. [1995] pour un modèle prenant également en compte la friction. Pour nos modestes objectifs, on a ignoré cette structure interne du glissement sur chaque fracture.

sous conditions aux frontières

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \tau_{ij}(x) = \tau_{ij}^{\infty} \quad (F.6)$$

$$\text{pour } p \in \{1,...,n\}, \forall x \in \omega_p, \lim_{\epsilon\to 0^+} [u(x+\epsilon\hat{e}_{axial}) - u(x-\epsilon\hat{e}_{axial})] = [\![u]\!]_p \hat{t}_p \quad (F.7)$$

Les équations (F.4) et (F.5) étant linéaires en τ ou en u, les champs de contrainte et de déplacement solutions s'obtiennent par la superposition

$$\tau = \tau^{\infty} + \tau' \quad (F.8)$$

$$u = u^{\infty} + u' \quad (F.9)$$

τ^{∞} est constant, u^{∞} est linéaire en x, et s'obtient en intégrant l'inverse de (F.5), comme

$$u_i^{\infty}(x) = \left(\frac{1}{4K} - \frac{1}{4\mu}\right) \tau_{ll}^{\infty} x_i + \frac{1}{2\mu}\tau_{ik}^{\infty} x_k \quad (F.10)$$

Les perturbations dues aux fractures, τ' et u', sont également solution des équations élastostatiques (F.4), (F.5), sous conditions aux frontières

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \tau'_{ij}(x) = 0 \quad (F.11)$$

$$\text{pour } p \in \{1,...,n\}, \forall x \in \omega_p, \lim_{\epsilon\to 0^+} [u'(x+\epsilon\hat{e}_{axial}) - u'(x-\epsilon\hat{e}_{axial})] = [\![u]\!]_p \hat{t}_p \quad (F.12)$$

On les obtient en introduisant d'abord les tenseurs de Green g_{jk} pour le champ de déplacement et G_{ijk} pour le champ de contrainte, solutions de

$$\partial_i G_{ijk} \quad (x) = \delta(x)\delta_{jk} \quad (F.13)$$

$$G_{ijk} = (K-\mu)\partial_l g_{lk}\delta_{ij} + \mu(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik}) \quad (F.14)$$

$$\lim_{\|x\|\to\infty} G_{ijk}(x) = 0 \quad (F.15)$$

Formant les produits scalaires $g(x-y).\nabla.\tau'(y)$ et $u'(y).\nabla.G(x-y)$, on a

$$g_{jk}(x-y)\frac{\partial}{\partial y_i}\tau'_{ij}(y) = 0 \quad (F.16)$$

$$u'_j(y)\frac{\partial}{\partial y_i}G_{ijk}(x-y) = \delta(x-y)u'_k(y) \quad (F.17)$$

ce qui permet d'établir pour le champ auxiliaire

$$f_{ik}(x;y) = u'_j(y)G_{ijk}(x-y) - g_{jk}(x-y)\tau'_{ij}(y) \quad (F.18)$$

que

$$\frac{\partial}{\partial y_i} f_{ik}(x;y) = \delta(x-y)u'_k(y) \quad (F.19)$$

Utilisant alors le théorème de Green, on obtient alors la perturbation en déplacement à partir des fonctions de Green :

$$\begin{aligned}
u'_k(x) &= \int_\Omega d^D y \, \delta(x-y) u'_k(y) \\
&= \int_\Omega d^D y \, \frac{\partial}{\partial y_i} f_{ik}(x;y) \\
&= \int_{\partial\Omega} d^{D-1} y \, (\hat{n}(y).\hat{e}_i) f_{ik}(x;y) \\
&\quad + \sum_{p=1}^{n} \int_{\omega_p} d^{D-1} y \, (-\hat{n}(y).\hat{e}_i) \lim_{\epsilon\to 0^+} [f_{ik}(x; y+\epsilon\hat{e}_{axial}) - f_{ik}(x, y-\epsilon\hat{e}_{axial})] \\
u'_k(x) &= -\sum_{p=1}^{n} \hat{n}_{p_i} [\![u]\!]_p \hat{t}_{p_j} \int_{\omega_p} d^{D-1} y \, G_{ijk}(x-y) \qquad \text{(F.20)}
\end{aligned}$$

On a utilisé pour arriver à cette dernière expression : d'une part le fait que quand on fait tendre la frontière du domaine $\partial\Omega$ vers l'infini, l'intégrale sur ce bord disparaît – ce qu'on pourra vérifier a posteriori avec la décroissance en champ lointain des fonctions de Green, et des perturbations dues aux fractures –; d'autre part la condition aux frontières intérieures (F.12), ainsi que la continuité du champ de contrainte τ sur ces frontières – les lèvres des fractures sont en contact.

La perturbation en contrainte s'obtient à partir de celle en déplacement, via la loi de Hooke (F.5) reliant u' et τ'.

F.3.2 Perturbation de contrainte due à une source de Haskell 2D

Pour intégrer la forme (F.20), on utilise la fonction de Green donnée par (E.8) :

$$g_{ik}(x) = \frac{-1}{4\pi\mu} \left[(2-\alpha)\delta_{ik} \ln\left(\frac{r}{L}\right) - \alpha \hat{x}_i \hat{x}_k \right] \qquad \text{(F.21)}$$

Dérivant ceci, la loi de Hooke (F.5) nous donne :

$$G_{ijk}(x) = \frac{1}{2\pi r} [(1-\alpha)\delta_{ij}\hat{x}_k - (1-\alpha)(\delta_{jk}\hat{x}_i + \delta_{ik}\hat{x}_j) - 2\alpha\hat{x}_i\hat{x}_j\hat{x}_k] \qquad \text{(F.22)}$$

À partir de cette forme, on effectue enfin l'intégration le long de chaque domaine ω_p, correspondant à la fracture p, dans l'expression (F.20). Ce calcul, relativement fastidieux, est l'analogue bidimensionnel de ceux effectués par Chinnery [1963] , pour des sources de Haskell planes dans un milieu 3D. On obtient finalement explicitement, en utilisant la loi de Hooke à partir du résultat, la perturbation du champ de contrainte qui nous intéresse :

$$\tau'_{ij}(x) = -l \sum_{p=1}^{n} \hat{t}_{p_e} \hat{n}_{p_f} [\![u]\!]_p M_{ijef}(x - x_p) \qquad \text{(F.23)}$$

$$M_{ijef}(y) = \frac{\mu}{\pi r^2} \begin{bmatrix} -(1-\alpha)\left(2-\frac{K}{\mu}\right)\delta_{ij}\delta_{ef} + (1-\alpha)(\delta_{ie}\delta_{jf} + \delta_{if}\delta_{je}) \\ +2(1-\alpha)\hat{y}_i\hat{y}_j\delta_{ef} + 2(1-\alpha\frac{K}{\mu})\delta_{ij}\hat{y}_e\hat{y}_f \\ +(2\alpha-1)(\hat{y}_i\hat{y}_e\delta_{jf} + \hat{y}_i\hat{y}_f\delta_{je} + \hat{y}_j\hat{y}_e\delta_{if} + \hat{y}_j\hat{y}_f\delta_{ie}) \\ -8\alpha\hat{y}_i\hat{y}_j\hat{y}_e\hat{y}_f \end{bmatrix} \qquad \text{(F.24)}$$

où l désigne la longueur des fractures, et on a noté dans la deuxième expression $r = \|y\|$, $\hat{y} = y/r$.

On peut visualiser en figure F.1 les effets de ce tenseur du quatrième ordre, qui est le cœur du mécanisme d'interaction des fractures, où on a représenté graphiquement les composantes de la perturbation de contrainte dues à une unique fracture. Dans cette représentation, l'unité de longueur est la taille de la fracture l, celle de contrainte est μ, et on a pris arbitrairement $K = 5\mu$ et un déplacement $[\![u]\!] = 0.01l$.

F.4 Résultats des simulations

F.4.1 Visualisation de l'apparition des fractures sur un exemple

On peut utiliser ce type de modèle pour visualiser l'apparition des fractures au fur et à mesure de l'histoire. À titre d'illustration, on a représenté en figure F.2, quatre états successifs d'une simulation où les fractures étaient autorisées à se réactiver à chaque fois que leur seuil de Coulomb était de nouveau atteint. On a utilisé ici $K/\mu = 5$, et pour avoir l'échelle des glissements représentés, le maximum observé dans cette simulation est de $0.08l$. En évaluant de plus τ_{macro} comme la moyenne de la contrainte locale dans la boîte représentée, on obtient que la contrainte axiale macroscopique est d'abord croissante, puis présente un pic entre les états (c) et (d).

F.4.2 Répartition statistique de l'énergie de friction

L'objectif principal de ces simulations n'est pas d'avoir un modèle très réaliste et précis du développement des fractures, mais de tester les deux hypothèses que l'on a rappelées en début de section, à savoir l'indépendance de l'énergie de friction à l'ordre d'apparition des fractures, et la proportionnalité de cette énergie au nombre de fractures.

Pour ce faire, on a conduit une série de simulations où chaque fracture n'a été autorisée à glisser qu'une fois au plus (pour pouvoir garantir qu'avec une répartition différente des seuils de Coulomb, on puisse aboutir à un état géométriquement identique : sans cette restriction supplémentaire, il faudrait un nombre de tests bien trop important pour qu'exactement le même état soit réalisé à partir d' une distribution des seuils différentes, et on n'aurait pas un échantillonage suffisant pour une analyse statistique).

F.4.2.1 Indépendance à l'histoire

On a d'abord considéré un système de taille fixée, à savoir une grille carrée de 400 sites. Dans un premier test, on a d'abord conduit la simulation jusqu'à ce qu'une fraction de 30% des sites ait été activée. On a alors enregistré la configuration géométrique correspondante. On a ensuite répété la simulation 200 fois, réinitialisant la valeur initiale des variables aléatoires (seuils de Coulomb), en n'autorisant que les fractures de la configuration préenregistrée à être activées, pour arriver à un même état final.

Cette série de simulations a été réalisée 4 fois, i.e. pour 4 configurations géométriques finales différentes.

Notant E l'énergie de friction totale (travail effectué sur les discontinuités), $\langle E \rangle$ la moyenne sur les 200 tests correspondant à une même configuration finale, et e le rapport adimensionné $e = E/\langle E \rangle$, la figure F.3 représente $p(e)$, distribution de e sur les 200 tests, normalisée par

$\int p(e)de = 1$. Les 4 courbes correspondent aux 4 configurations. On observe que ces distributions se rapprochent d'une gaussienne de largeur fixée, indépendante de la configuration – on peut vérifier par ailleurs que l'écart au modèle gaussien se réduit lorsque le nombre de tests sur chaque configuration augmente. De plus, on vérifie par ailleurs que l'énergie de friction totale moyenne $\langle E \rangle$ est identique à 1% près pour les quatre configurations. Il semble donc que l'énergie de friction soit relativement indépendante de l'ordre d'apparition des fractures, ainsi que de la configuration précise à nombre de fractures fixé.

F.4.2.2 Extensivité de l'énergie de friction

On a également testé comment varie cette distribution de l'énergie de friction lorsqu'on considère des systèmes de plus en plus grands, les configurations finales correspondant à une même densité d'occupation. Considérant des configurations finales où 30% des sites sont fracturés, 200 tests ont été conduit pour des réseaux carrés de 25, 100, 400, 1600 et 6400 sites. La figure F.4 représente les distributions normalisées $p(e)$ correspondantes. On observe que ces distributions sont de plus en plus piquées lorsque la taille du système augmente, et donc que l'hypothèse d'indépendance de l'énergie à l'ordre d'apparition est de plus en plus valable pour des systèmes mésoscopiques de taille suffisante.

Notant

$$\Gamma = \frac{E}{N}$$

l'énergie de friction par fracture (N étant le nombre de fractures des configurations finales), on s'est intéressé au comportement de cette quantité quand la taille du système augmente : on observe que Γ tend rapidement vers une limite fixée indépendante de la taille du système (cette quantité ne dépend que de la fraction de sites occupés par des fractures). D'autre part, notant

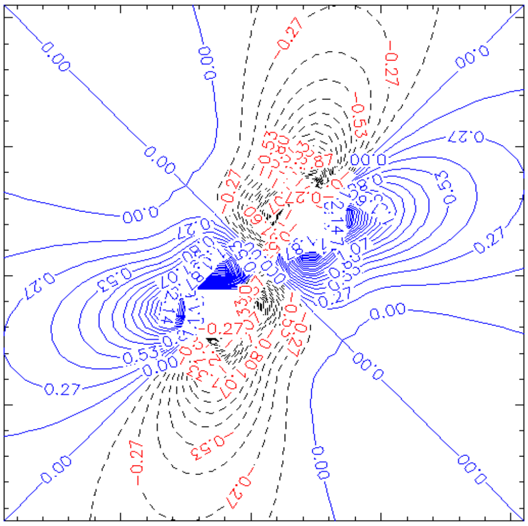
$$\sigma(\Gamma) = \sqrt{\left\langle (\Gamma - \langle\Gamma\rangle)^2 \right\rangle}$$

la déviation standard de Γ pour une taille et configuration finale donnée, on observe en figure que $\frac{\sigma(\Gamma)}{\Gamma} \sim_{N\to\infty} \frac{\alpha}{\sqrt{N}}$, où α est une constante. Cette comportement asymptotique est de plus très rapidement bien vérifié. On conclut donc que quand la taille du système diverge, le taux d'occupation étant fixé,

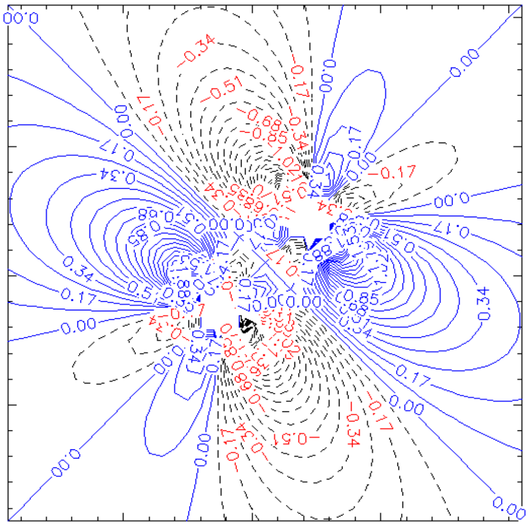
$$\begin{aligned} \Gamma &\to \Gamma^\infty \\ \sigma(\Gamma) &\sim \frac{\sigma^\infty}{\sqrt{N}} \end{aligned}$$

où Γ^∞ et σ^∞ sont des constantes. Les énergies individuelles de friction sur chaque fracture se comportent donc comme des variables aléatoires indépendantes pour des systèmes mésoscopiques suffisamment grand, et les deux hypothèses que l'on avait faites initialement sont bien vérifiées dans cette limite :

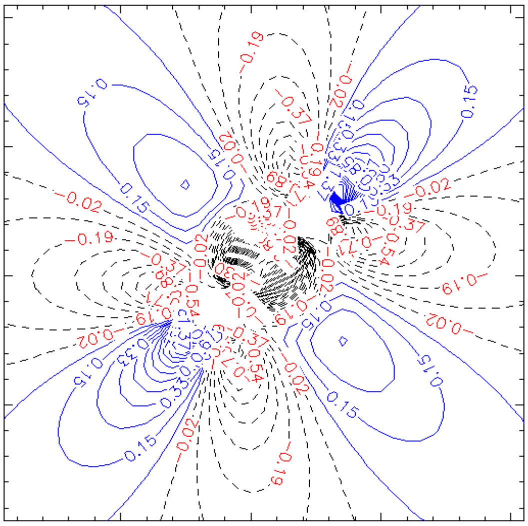
- L'énergie totale d'une configuration finale est indépendante de l'histoire d'apparition de cette configuration.
- Le terme de friction est additif par rapport au nombre de fractures.



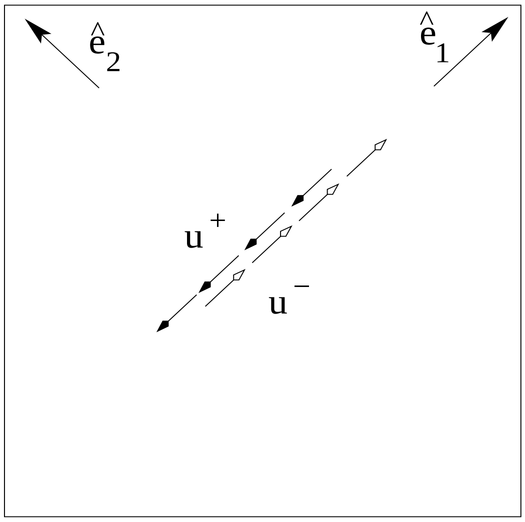
(a) composante normale aux cracks suivant $\hat{e}_1$, comptée positivement pour une compression : $-\tau_{11}$



(b) composante normale aux cracks suivant $\hat{e}_2$, comptée positivement pour une compression : $-\tau_{22}$

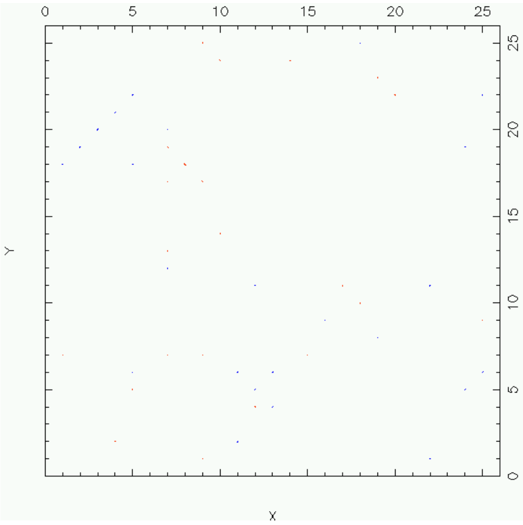


(c) composante tangentielle aux cracks suivant $\hat{e}_1$ ou $\hat{e}_2$, comptée positivement lorsqu'elle agit dans la meme direction que le cisaillement macroscopique : $-\tau_{12} = -\tau_{21}$

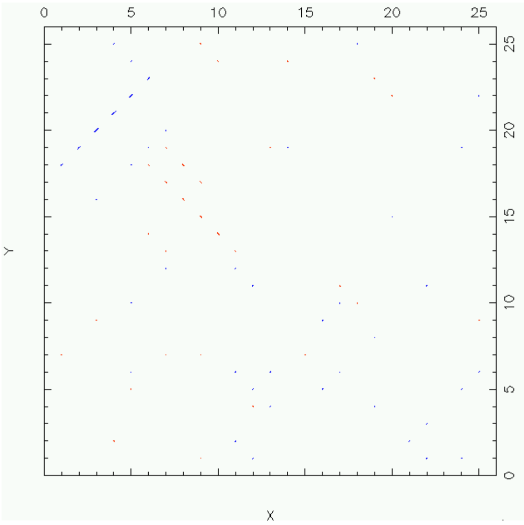


(d) Définition des directions ($\hat{e}_1$,$\hat{e}_2$). Le glissement sur la source de Haskell, $u^+ - u^-$, est constant le long de son extension

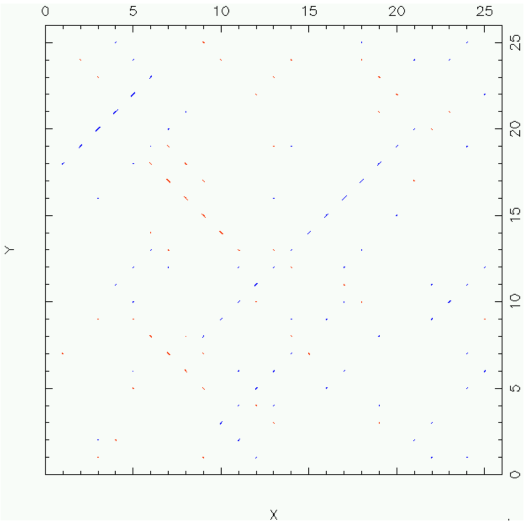
Fig. F.1 – Perturbation de contrainte due à la présence d'une source de Haskell suivant $\hat{e}_1$, au centre des figures



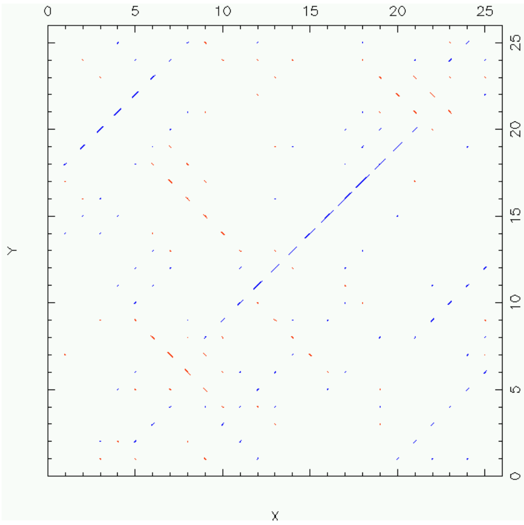
(a) après 99 glissements



(b) après 190 glissements



(c) après 375 glissements



(d) après 654 glissements

FIG. F.2 – Configuration des fractures en suivant l'histoire de déformation. La longueur des segments représentés est proportionnelle au glissement sur chaque fracture.

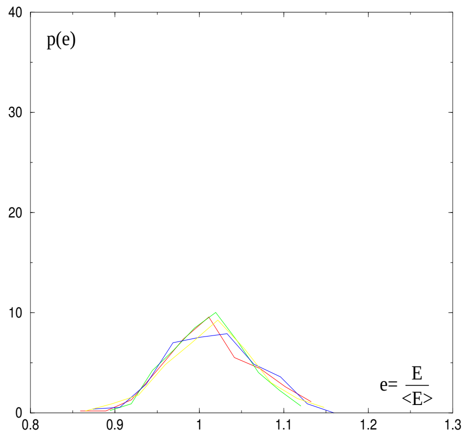


FIG. F.3 – Distribution normalisée du terme d'énergie de friction normalisé pour 4 configurations données, avec 200 histoires d'apparition différentes pour chacune de ces configurations.

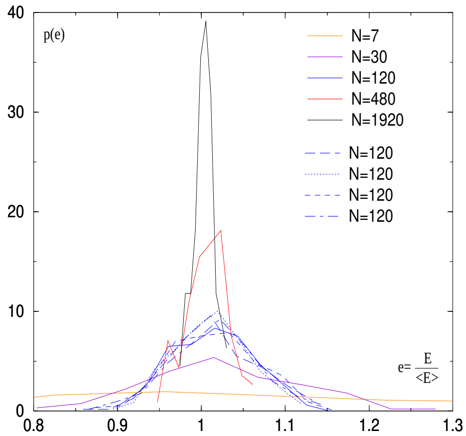


FIG. F.4 – Distribution normalisée du terme d'énergie de friction normalisé pour 5 tailles linéaires de réseau données, la densité de fractures étant identiquement de 30% dans la configuration finale.

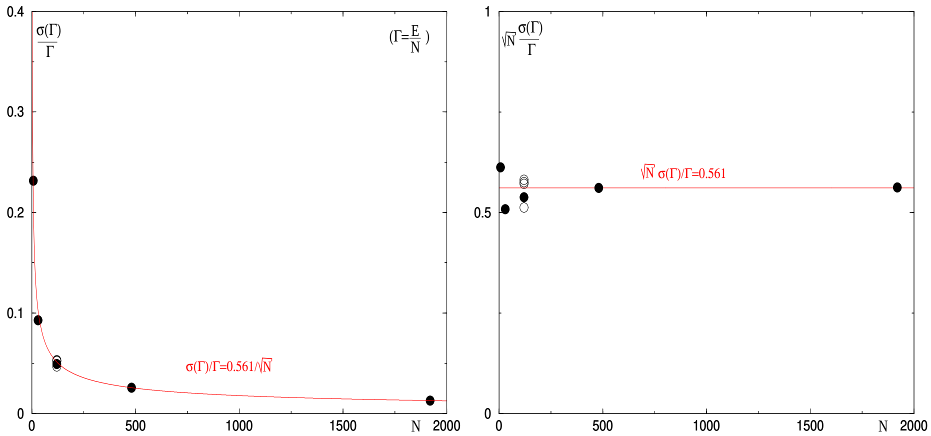


FIG. F.5 – Ecart type de $\Gamma = E/N$ en fonction de la taille du système.

Bibliographie

[1] S. Arbabi and M. Sahimi. Test of universality for three-dimensional models of mechanical breakdown in disordered solids. *Phys. Rev. B*, 41(1) :772–775, 1990.

[2] A. Bascoul, E.H. Benaija, Y. Berthaud, J.M. Torrenti, and Z. Zizi. Analysis of localization in concrete through stereophotogrammetry, speckle laser and replica. *Cement and Concrete Research,*, 23(6) :1340–1350, 1993.

[3] G.G. Batrouni and A. Hansen. Fracture in three-dimensional fuse networks. *Phys. Rev. Lett.*, 80(2) :325–328, 1998.

[4] M.L. Batzle, G. Simmons, and R.W. Siegfried. Microcrack closure in rocks under stress : direct observation. *J. Geoph. Res.*, 85(B12) :7072–7090, 1980.

[5] R.J. Baxter. Generalized ferroelectric model on a square lattice. *Studies in Applied Mathematics*, L(1) :51–69, 1971.

[6] Y. Berthaud, J. M. Torrenti, and C. Fond. Analysis of localization in brittle materials through optical techniques. *Experimental Mechanics*, 37(2) :216–220, 1997.

[7] P. Bésuelle. *Déformation et rupture dans les roches tendres et les sols indurés : comportement homogène et localisation.* PhD thesis, Université Joseph Fourier- Grenoble I, 1999.

[8] P. Bésuelle and J. Desrues. Homogeneous and localised deformation in sandstone specimens tested in a triaxial cell. In A. Evangelista and L. Picarelli, editors, *2nd Int. Symp. Hard Soils and Soft Rocks : The geotechnique of hard soils and soft rocks, Napoli, october 1998*, volume 1, pages 37–44. Balkema, 1998. (a).

[9] P. Bésuelle and J. Desrues. Internal instrumentation for strain measurements on soft rocks tested in axisymmetric triaxial cell. In A. Evangelista and L. Picarelli, editors, *2nd Int. Symp. Hard Soils and Soft Rocks : The geotechnique of hard soils and soft rocks, Napoli, october 1998*, volume 1, pages 45–48. Balkema, 1998. (b).

[10] B.A. Bilby and G.E. Cardew. The crack with a kinked tip. *Int. J. Fract.*, 11 :708–712, 1975.

[11] J.J. Binney, N.J. Dowrick, A.J. Fisher, and M.E. Newman. *The theory of critical phenomena.* Clarendon Press, Oxford, 1992.

[12] S.C. Blair and N.G.W. Cook. Analysis of compressive fracture in rock using statistical techniques : Part I. A non-linear rule-based model. *Int. J. of Rock Mech. Min. Sci.*, 35(7) :837–848, 1998.

[13] E. Bonnet. *La localisation de la déformation dans les milieux fragile-ductile : approche expérimentale et application à la lithosphere continentale.* PhD thesis, Université de Rennes I, Géosciences Rennes, 1997.

[14] E. Bonnet, P. Davy, and J. Desrues. Spatial and temporal evolution of the strain localization process in granular experiments. *J. Geoph. Res.*, 2000. in prep.

[15] K.B. Broberg. *Cracks and Fracture.* Academic Press, 1999.

[16] J.D. Byerlee. Brittle-ductile transition in rocks. *J. Geophys. Res.*, 73(14) :4741–4750, 1968.

[17] H.B. Callen. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics, 2nd edition.* John Wiley & Sons, New York, 1985.

[18] M.A. Chinnery. The stress changes that accompany strike-slip faulting. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 53(5) :921–932, 1963.

[19] C. David, B. Menéndez, and Y. Bernabé. The mechanical behaviour of synthetic sandstone with varying brittle cement content. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 35(6) :759–770, 1998.

[20] P. Davy, A. Hansen, E. Bonnet, and S. Z. Zhang. Localisation and Fault Growth in Brittle-Ductile Systems : Consequences for the Lithosphere. *J. Geophys. Research B*, 100(B4) :6281–6294, 1995.

[21] L. De Arcangelis, A. Hansen, and S. Roux. Scaling laws in fracture. *Phys. Rev. B*, 40(1) :877–880, 1989.

[22] A. Delaplace, G. Pijaudier-Cabot, and S. Roux. Progressive damage in discrete models and consequences on continuum modeling. *J. Mech. Phys. Sol.*, 44(1) :99–136, 1996.

[23] J. Desrues. Experimental strain localisation in plane strain tests on sands and weak rocks. In O.S. Tanimura and A.S. Khan, editors, *Dynamic Plasticity and Structural Behaviors, Plasticity 95*, pages 415–418. Gordon and Breach, 1995.

[24] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, and B. Roulet. *Physique Statistique.* Hermann, Paris, 1989.

[25] C. Domb. *The critical point - A historical introduction to the modern theory of critical phenomena.* Taylor & Francis, London, Bristol, 1996.

[26] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc.*, 241(A) :376–395, 1957.

[27] C. Fond and Y. Berthaud. Extensions of the pseudo tractions technique for friction in cracks, circular cavities and external boundaries ; effect of the interactions on the homogenised stiffness. *Int. J. Fract.*, 74 :1–28, 1995.

[28] C. Fond, J. L. Flejou, and Y. Berthaud. Interactions between cracks and circular holes in two-dimensional linear elastic media. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 14(1) :73–96, 1995.

[29] D. François, A. Pineau, and A. Zaoui. *Comportement mécanique des matériaux - élasticité et plasticité.* Hermès, Paris, 1991.

[30] D. François, A. Pineau, and A. Zaoui. *Comportement mécanique des matériaux - visco-plasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact.* Hermès, Paris, 1993.

[31] N. Goldenfeld. *Lectures on phase transitions and the renormalization group.* Frontiers in Physics. Perseus Books Publishing, 1992.

[32] R.A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, A221 :163–198, 1920.

[33] A. Hansen, E.L. Hinrichsen, and S. Roux. Roughness of cracks interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 66(19) :2476–2479, 1991.

[34] A. Hansen, E.L. Hinrichsen, and S. Roux. Scale-invariant disorder in fracture and related breakdown phenomena. *Phys. Rev. B*, 43(1) :665–678, 1991.

[35] T. Hoc, C. Rey, and P. Viaris de Lesengo. Mesostructure of the localization in prestrained mild steel,. *Scripta Materialia*, 42(8) :749–754, 2000.

[36] H. Horii and S. Nemat-Nasser. Compression-induced microcrack growth in brittle solids : axial splitting and shear failure. *J. Geoph. Res.*, 90(B4) :3105–3125, 1985.

[37] H. Horii and S. Nemat-Nasser. Brittle fracture in compression : splitting, faulting and brittle-ductile transition. *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, A319 :337–374, 1986.

[38] C.E. Inglis. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp notches. *Trans. Inst. Naval Architects*, 55 :219–241, 1913.

[39] G.C.P. King, R.S. Stein, and J. Lin. Static stress changes and the triggering of earthquakes. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 84 :935–953, 1994.

[40] R.L. Kranz. Microcracks in rocks : a review. *Tectonophysics*, 100 :449–480, 1983.

[41] B. Lawn. *Fracture of brittle solids - 2nd edition.* Cambridge Solid State Science Series. Cambridge University Press, 1993.

[42] M. Le Bellac. *Des phénomènes critiques aux champs de jauge, 2ème édition.* C.N.R.S., 1990.

[43] J. Lemaître. *A course on damage mechanics.* Springer, Berlin Heidelberg New-York, 1992.

[44] J. Lemaître and J.L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides.* Dunod, Paris, 1985.

[45] E.H. Lieb and F.Y. Wu. *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 1 : Exact Results, chapter Two-dimensional ferroelectric models, pages 331–490. Academic Press, London New-York, 1972. edited by C. Domb and M.S. Green.

[46] D.A. Lockner. *Rock Physics and Phase Relations. A Handbook of Physical Constants.*, chapter Rock Failure, pages 127–147. AGU, 1995. edited by Ahrens, T.J.

[47] D.A. Lockner. A generalized law for brittle deformation of Westerly granite. *J. Geoph. Res.*, 103(B3) :5107–5123, 1998.

[48] D.A. Lockner, J.D. Byerlee, V. Kuksenko, A. Ponomarev, and A. Sidorin. *Fault mechanics and transport properties of rocks*, volume 51 of *International Geophysics Series*, chapter Observations of quasistatic fault growth from acoustic emissions, pages 3–31. Academic Press, 1992. edited by Evans, B. & Wong, T.F.

[49] S.K. Ma. *Modern theory of critical phenomena.* Frontiers in Physics. Addison-Wesley, 1976.

[50] R. Madariaga. *Physics of defects*, chapter Dislocations and earthquakes, pages 569–629. Les Houches, Ecole d'été de Physique Théorique. North_Holland Publishing Company, Amsterdam, N.Y. , Oxford, 1980.

[51] K. Mair, I. Main, and S. Elphick. Sequential growth of deformation bands in the laboratory. *J. Struct. Geol.*, 22 :25–42, 2000.

[52] S. Melin and Solveig. Accurate data for stress intensity factors at infinitesimal kinks. *J. Appl. Mech.*, 61 :467–470, 1994.

[53] F. Mulargia, M. Ciccotti, S. Castellaro, and G. Gonzato. A very low strain rupture experiment. In *Abstracts of the EGS2000 : European Geophysical Society XXV General Assembly, Nice, France*, 2000.

[54] S. Nemat-Nasser and H. Horii. Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation, and rockburst. *J. Geoph. Res.*, 87(B8) :6805–6821, 1982.

[55] A. Ord, I. Vardoulakis, and R. Kajewski. Shear band formation in Gosford sandstone. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abst.*, 28(5) :397–409, 1991.

[56] E. Orowan. The fatigue of glass under stress. *Nature*, 154 :341, 1944.

[57] M.S. Paterson. *Experimental rock deformation - the brittle field.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1978.

[58] C. Poirier, M. Ammi, D. Bideau, and J.P. Troadec. Experimental study of the geometrical effects in the localization of deformation. *Phys. Rev. Lett.*, 68(2) :216–219, 1992.

[59] J.R. Rice. *Fracture*, volume 2, chapter Mathematical analysis in the mechanics of fracture. Academic Press, New York, 1968. ed. H. Liebowitz.

[60] J.R. Rice. A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.*, 35 :379, 1968.

[61] S. Roux. *Statistical models for the fracture of disordered media*, chapter Continuum and discrete description of elasticity and other rheological behaviour, pages 87–114. Elsevier, 1990. edited by Hermann, H.J. & Roux, S.

[62] S. Roux and A. Hansen. Early stages of rupture of disordered materials. *Europhys. Lett.*, 11(1) :37–42, 1990.

[63] J.W. Rudnicki and J.R. Rice. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Sol.*, 23 :371–394, 1975.

[64] O. Sano, I. Ito, and M. Terada. Influence of strain rate on dilatancy and strength of Oshima granite under uniaxial compression. *J. Geoph. Res.*, 86(B10) :9299–9311, 1981.

[65] C.E. Shannon. The mathematical theory of communication. *Bell Systems Technical Journal*, 27 :373–423 and 623–656, 1948.

[66] I. Tsukrov and M. Kachanov. Stress concentrations and microfracturing patterns in a brittle-elastic solid with interacting pores of diverse shapes. *Int. J. Sol. Struct.*, 34(22) :2887–2904, 1997.

[67] K.G. Wilson. *Sci. Am.*, 241 :158, 1979.

[68] F.Y. Wu. Ising model with four-spin interactions. *Phys. Rev.*, B4 :2312–2314, 1971.

[69] T.T. Wu. The effect of inclusion shape on the elastic moduli of a two-phase material. *Int. J. Sol. Struct.*, 2 :1–8, 1966.

[70] A. Zang, C.F. Wagner, and G. Dresen. Acoustic emission, microstructure, and damage model of dry and wet sandstone stressed to failure. *J. Geoph. Res.*, 101(B8) :17507–17521, 1996.

[71] M.D. Zoback and J. Townend. Implications of hydrostatic pore pressures abd high crustal strength for the deformation of intraplate lithosphere. *Tectonophysics*, 2000. in press.