



HAL
open science

Amélioration de la Modélisation et de la Simulation des Vêtements en 3D

Hatem Charfi

► **To cite this version:**

Hatem Charfi. Amélioration de la Modélisation et de la Simulation des Vêtements en 3D. Modélisation et simulation. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006. Français. NNT: . tel-00012182

HAL Id: tel-00012182

<https://theses.hal.science/tel-00012182>

Submitted on 27 Apr 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Discipline : **Informatique**

présentée par

Hatem Charfi

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6 - PIERRE ET MARIE CURIE

Amélioration de la Modélisation et de la Simulation des Vêtements en 3D

Soutenue publiquement le 20 Avril 2006 devant le jury composé de :

GAGALOWICZ	André	(INRIA)	Directeur de thèse
DURAND	Bernard	(Université de Haute-Alsace)	Rapporteur
RÉMION	Yannick	(Université de Reims)	Rapporteur
LAMOTTE	Jean-Luc	(Université Pierre et Marie Curie)	Examineur
FUCHS	Philippe	(Ecole des Mines de Paris)	Examineur

Thèse préparée au sein de l'INRIA (Projet MIRAGES, Centre de Rocquencourt)

Remerciements

C'est avec beaucoup de plaisir que j'ai passé plus de trois ans au sein du projet MIRAGES, à l'INRIA Rocquencourt, pour réaliser cette thèse. Je voudrais donc remercier le chef du projet MIRAGES et mon directeur de thèse, M. André Gagalowicz, de m'y avoir accueilli.

Je remercie également mes rapporteurs, M. Bernard Durand et M. Yannick Rémion, d'avoir accepté la tâche de rapporteur pour cette thèse. Les délais étaient très courts ; il n'empêche que leurs remarques et suggestions ont grandement contribué à améliorer ce manuscrit.

Je remercie M. Jean-Luc Lamotte et M. Philippe Fuchs d'avoir accepté le rôle de membre du jury.

Ce travail doit beaucoup à la bonne humeur quotidienne de mes amis de l'INRIA : Aïcha, Ritchy, Manel, François, Emma, Sonia... merci beaucoup.

Un énorme merci à mes parents ; tout ceci n'aurait pas été possible sans leur soutien de tous les instants.

Résumé

La modélisation et la simulation réaliste de vêtements sur ordinateur prennent de plus en plus d'importance au sein de la communauté scientifique dans l'ère du tout numérique. Cette thèse se propose d'apporter des améliorations au niveau de la modélisation mécanique du tissu et de la détermination de ses paramètres afin de rendre les animations de vêtements plus réalistes.

Nous nous plaçons dans le cadre de la représentation d'un tissu en chaîne et trame par un système "masses-ressorts" soumis aux lois de la dynamique. Nous proposons un modèle non linéaire hystérétique du cisaillement d'un tissu qui est avantageux en temps de calcul car il se base sur des ressorts linéaires et qui reproduit fidèlement le comportement mécanique mesuré par les machines de Kawabata. Les fonctions de transfert des ressorts ont été déterminés pour que le modèle de tissu numérique reproduise les courbes de Kawabata du tissu réel, quand le tissu virtuel est soumis aux mêmes contraintes que le tissu réel dans les machines de Kawabata.

Nous proposons aussi un schéma expérimental utilisant un système de capture de mouvement (MOCAP) permettant de mesurer la cinématique d'un tissu en mouvement. La dynamique du tissu est calculée à partir des données expérimentales ce qui a permis de déterminer les paramètres de la dissipation visqueuse utilisés dans la loi de la mécanique. Enfin, nous avons pu valider notre modèle mécanique du tissu muni des paramètres trouvés avec la mise en place d'une technique de reconstruction 3D de la forme d'un tissu à partir de photographies, en se basant sur l'algorithme de calibration POSIT et sur un algorithme de reconstruction 3D par stéréovision. Nous pouvons ainsi comparer le drapé réel d'un tissu avec celui obtenu grâce à notre simulateur.

Mot clés : Simulation, Modélisation, Cisaillement, Viscosité, Dissipation, Validation, Tissus, Modèles Physiques

Abstract

Physically-based cloth modelling and simulation is a problem of interest for the scientific community interested in digital worlds. This thesis deals with the improvement of the mechanical modelling of fabric and with the recovering of its parameters for more realistic cloth animations.

The general context of our work is modelling warp and weft textile materials using mass-spring systems. We propose a new non linear hysteretic model for fabric shear. Our model is based on binary springs and thus, allows saving computational time (no trigonometric computations). Our model mimics precisely the mechanical shear behavior of fabric measured from Kawabata machines. The transfert functions of springs are determined in such a way that if the numerical model of fabric is submitted to the same constraints as the real fabric in the Kawabata machines, we obtain the same curves as those produced by the real Kawabata experiment.

We present also an experimental setup using motion capture system (MOCAP) to measure fabric viscosity parameters. Fabric viscosity parameters are computed using experimental data which allows to recover its damping parameters used in the Newton's equation of movement.

Finally, we validate the whole mechanical model of fabric including its viscosity parameters through an experiment where we recover the geometry of a real piece of fabric hanging on a table using computer vision techniques, and by comparing this shape to the result obtained by our simulator running on the same piece of fabric and initialized with the same (almost) conditions as in the real experiment. Our computer vision technique is based on the POSIT calibration algorithm and a 3D stereo algorithm.

Key-words : Simulation, modelling, Shearing, Viscosity, Damping, Validation, Fabrics, Physically-based models

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Les vêtements dans la réalité virtuelle	9
1.2	Réalisme-Interactivité	10
1.3	Contexte	12
1.4	Contributions	12
1.5	Organisation du manuscrit	13
2	Etat de l'art	15
2.1	Modélisation des tissus	16
2.1.1	Modèles géométriques	16
2.1.2	De la physique dans les modèles géométriques	21
2.1.3	Modèles physiques	23
2.1.4	Conclusion	34
2.2	Méthodes d'intégration numérique	34
2.2.1	Le problème mécanique	35
2.2.2	Résolution du problème	37
2.2.3	Méthodes à un pas	41
2.2.4	Méthodes à pas multiples	51
2.2.5	Conclusion	53
2.3	Détermination des paramètres des modèles mécaniques	54
2.3.1	Kawabata Evaluation System	54
2.3.2	Autres méthodes d'estimation des paramètres d'un tissu	59

2.3.3	Conclusion	64
2.4	Synthèse	65
3	Notre modèle mécanique de tissu	67
3.1	Le système Masses-Ressorts	67
3.2	Le système visco-élastique	69
3.3	Contraintes extérieures	71
3.4	Lois de comportement des ressorts	71
3.4.1	Loi de comportement des ressorts de flexion	72
3.4.2	Loi de comportement des ressorts de traction	73
3.4.3	Loi de comportement des ressorts de cisaillement	74
3.5	Méthode d'intégration numérique	74
4	Etude du cisaillement	75
4.1	Introduction	75
4.2	Les modèles de cisaillement	76
4.3	Loi des ressorts de cisaillement	79
4.3.1	L'expérience de Kawabata en cisaillement	79
4.3.2	Fonctions de transfert	88
4.4	Correction de l'expression des forces de traction	100
4.5	Validation du modèle de cisaillement	102
4.5.1	Conditions expérimentales	103
4.5.2	Courbe obtenue	104
4.6	Conclusion	104
5	Analyse et mesure des interactions visqueuses d'un tissu	107
5.1	Introduction	107
5.2	Mise en place de l'expérience	108
5.2.1	Cadre général	108
5.2.2	L'expérience de tombé de tissu	109
5.3	Interpolation des données manquantes	116

5.4	Recalage des paramètres de dissipation	119
5.4.1	Modèle de Dissipation	120
5.4.2	Recalage des paramètres de dissipation par optimisation globale .	122
5.4.3	Recalage des paramètres de dissipation par optimisation itérative	125
5.4.4	Résultats	133
5.4.5	Simulation	136
5.4.6	Résultats avec d'autres tissus	137
5.5	Conclusion	140
6	Validation à partir d'expériences réelles	141
6.1	Introduction	141
6.2	Quelle expérience choisir pour la validation ?	142
6.3	Reconstruction 3D du tissu	143
6.3.1	Calibration des caméras	144
6.3.2	Reconstruction 3D des points caractéristiques	146
6.3.3	Déformation du modèle 3D générique	148
6.4	Simulation du drapé dans des conditions réelles	149
6.4.1	Conditions initiales	149
6.4.2	Simulation virtuelle du drapé	151
6.4.3	Interprétation des résultats de la simulation	162
6.5	Amélioration possible de la précision du recalage	164
6.6	Conclusion	165
7	Conclusion et perspectives	169
7.1	Modélisation mécanique	169
7.2	Détermination des paramètres des modèles	170
7.3	Validation globale du modèle de tissu	170
7.4	Perspectives	171
A	Annexes	173
A.1	Exemple de problème raide	173

A.2 La cochléoïde	174
A.3 Expression d'une rotation vectorielle	176
A.4 Démonstration de l'égalité 4.9	177
Bibliographie	179

Table des figures

2.1	Modèle de Peirce pour la toile	17
2.2	Deux chaînettes reliant les points d'attache	19
2.3	Méthode de Weil : subdivision des triangles afin de générer la surface du tissu	20
2.4	Drapé de Dhande et al. : surface balayée par une courbe génératrice le long d'une courbe directrice	22
2.5	Déformation d'un objet	26
2.6	Système masses-ressorts de Provot	33
2.7	Représentation géométrique de la méthode d'Euler	42
2.8	Représentation géométrique de la méthode du point milieu	43
2.9	Méthode d'Euler : Runge Kutta d'ordre 1	47
2.10	Méthode du point milieu : Runge Kutta d'ordre 2	47
2.11	Test de cisaillement (vue de dessus)	57
2.12	Courbe de cisaillement de Kawabata	58
2.13	Test de traction (vue de dessus)	59
2.14	Courbe de traction de Kawabata	60
2.15	Test de flexion (en perspective)	60
2.16	Courbe de flexion de Kawabata	61
2.17	Ombre projetée du tissu à partir du drapemeter	62
3.1	Métier à tisser : les fils de chaîne sont séparés en deux couches (les "pris" en haut et les "laissés" en bas). Les fils de trame passent entre les pris et les laissés	68

3.2	Composant élastique (ressort)	70
3.3	Composant visqueux (dissipateur)	70
3.4	Modèle visco-élastique de Kelvin-Voigt	70
3.5	Ressort de flexion	72
4.1	Cisaillement d'un tissu chaîne-trame	76
4.2	Courbe de comportement en cisaillement plan d'un tissu	77
4.3	Modèles de cisaillement de Breen (gauche) et de Provot (droite)	78
4.4	Machine de Kawabata pour le cisaillement	79
4.5	Cisaillement d'un morceau de tissu : Expérience de Kawabata	80
4.6	Courbe de Kawabata en cisaillement	81
4.7	Cisaillement isométrique	82
4.8	Cisaillement isosurfacique	86
4.9	Cisaillement d'un morceau de tissu	90
4.10	Maille d'un système masses-ressorts	91
4.11	Cisaillement dans le cas d'un maillage carré	94
4.12	Configuration du cisaillement au voisinage de $\theta = 0$	95
4.13	Comparaison entre $\frac{l_c \sin \varphi'' - l_t \sin \theta''}{\Delta}$ et $\frac{l_c \sin \varphi'' + l_t \sin \theta''}{\Delta}$	97
4.14	Comparaison des forces de Kawabata en chaîne et en trame	98
4.15	Comparaison du paramétrage $\sin(x)$ et x entre -8° et 8°	100
4.16	Influence des ressorts de cisaillement sur la traction	101
4.17	Test de cisaillement virtuel : les points rouges sont fixes et les points verts sont les masses de contrôle	103
4.18	Courbes de cisaillement (réelle et virtuelle)	104
5.1	Les 12 caméras du système de capture de mouvement (MOCAP)	110
5.2	Un morceau de tissu 50cm \times 50cm avec les pastilles réfléchissantes	111
5.3	Grille représentant la position de chaque pastille sur le tissu	111
5.4	Dispositif de lâchage à trois mètres du sol	112
5.5	Tissu avec les pastilles réfléchissantes maintenu au dispositif de lâchage	113
5.6	Interpolation à partir des voisins sur la chaîne et la trame	116

5.7	Extrapolation à partir des voisins	116
5.8	Interpolation par symétrie	116
5.9	Interpolation à partir des trames avant et après	117
5.10	Reconstruction du tombé de tissu	119
5.11	Evolution de la vitesse moyenne d'un tissu en chute libre (en m/s)	124
5.12	Paramètre de dissipation visqueuse avec l'air	126
5.13	Coefficient de dissipation visqueuse des ressorts de flexion	129
5.14	Coefficient de dissipation visqueuse des ressorts de cisaillement	131
5.15	Coefficient de dissipation visqueuse des ressorts de traction	132
5.16	Comparaison entre $(F_{\text{erreur}}^{\text{sans-dissip}})^{\text{air}}$ et $(F_{\text{erreur}}^{\text{avec-dissip}})^{\text{air}}$ (frottement de l'air)	134
5.17	Comparaison entre $(F_{\text{erreur}}^{\text{sans-dissip}})^f$ et $(F_{\text{erreur}}^{\text{avec-dissip}})^f$ (dissipation de la flexion)	135
5.18	Agrandissement : Comparaison entre $(F_{\text{erreur}}^{\text{sans-dissip}})^f$ et $(F_{\text{erreur}}^{\text{avec-dissip}})^f$ (dissipation de la flexion)	135
5.19	Comparaison entre $(F_{\text{erreur}}^{\text{sans-dissip}})^c$ et $(F_{\text{erreur}}^{\text{avec-dissip}})^c$ (dissipation du cisaillement)	136
5.20	Comparaison entre $(F_{\text{erreur}}^{\text{sans-dissip}})^t$ et $(F_{\text{erreur}}^{\text{avec-dissip}})^t$ (dissipation de la traction)	137
5.21	Comparaison entre la trajectoire réelle (jaune) et la trajectoire virtuelle (verte)	139
6.1	Photographies du drapé réel	143
6.2	Les points caractéristiques du tissu utilisés pour la calibration et la reconstruction (virtuels : cubes bleu et réels : pastilles blanches)	147
6.3	Photographies du drapé réel avec la forme 3D reconstruite	148
6.4	Discretisation adaptée du tissu : les masses arrivent sur les bords de la table hachurée	152
6.5	Les ressorts de flexion se plient au niveau du bord de la table	152
6.6	Position initiale du tissu avant le tombé	153

6.7	Comparaison entre un drapé avec hystérésis (jaune) et sans hystérésis (bleu) : discrétisation à $2cm$ (ligne du haut) et discrétisation à $1cm$ (ligne du bas)	154
6.8	Drapé réel et drapé virtuel : discrétisation $5cm$	157
6.9	Drapé réel et drapé virtuel : discrétisation $2cm$	158
6.10	Drapé réel et drapé virtuel : discrétisation $1cm$	159
6.11	Drapé réel et drapé virtuel : discrétisation $0.5cm$	160
6.12	Energie dissipée par les ressorts de flexion selon le pas de temps utilisé .	161
6.13	Energie du tissu en flexion selon la discrétisation utilisée	163
6.14	Vue de profil de la déformation d'un tissu au cours du flambage	164
6.15	Ressorts en compression (compression maximale : blanc, pas de compression : noir)	167
A.1	Cochléoïde pour t variant de 0 à 8π	175
A.2	Portion d'une cochléoïde	176
A.3	Rotation vectorielle	177

Chapitre 1

Introduction

1.1 Les vêtements dans la réalité virtuelle

La réalité virtuelle est une technologie temps réel permettant une simulation, au moyen d'un ordinateur, d'un environnement virtuel en 3D dans lequel on peut évoluer, et donnant l'impression d'une immersion dans un monde réel.

L'opposition et la complémentarité entre le virtuel et le réel donnent tout son intérêt à la réalité virtuelle.

En effet, l'environnement virtuel cherche à imiter le monde réel aussi bien au niveau de ses propriétés statiques (même apparence des objets qui le composent) qu'au niveau de ses propriétés dynamiques (même comportement de ses objets). L'environnement virtuel adopte donc les lois qui régissent le monde réel (aspect, lois physiques, lois comportementales ...) afin de paraître réaliste.

D'un autre côté, le monde réel utilise une propriété importante de l'environnement virtuel (qu'il ne possède évidemment pas) et qui est la prédictibilité. Le temps virtuel étant indépendant du temps réel, on peut évoluer plus rapidement (si l'on dispose des moyens techniques capables de le réaliser) dans un environnement virtuel. Ainsi, en prêtant ses lois à l'environnement virtuel, le monde réel peut "percevoir son futur". N'est ce pas le plus grand fantasme de l'Homme ?

Les domaines d'application de cette technologie sont nombreux; on peut citer la mé-

decine, la robotique, l'enseignement, l'architecture, l'art ou le divertissement.

La réalité virtuelle est aussi une expérience d'immersion dans un monde virtuel. Des avatars (représentation d'une personne dans un environnement virtuel) évoluent donc dans cet environnement virtuel. Or, la plus grande partie de la surface du corps d'une personne est couverte par les vêtements qu'elle porte.

On voit donc l'intérêt et l'importance de produire des vêtements virtuels réalistes pour les applications de la réalité virtuelle.

1.2 Réalisme-Interactivité

Les travaux de recherche effectués dans le domaine de la modélisation et de la simulation de textiles et de vêtements sont apparus depuis une vingtaine d'années. Ces travaux ont deux objectifs majeurs :

- La quête du réalisme
- La quête de l'interactivité

L'interactivité entre un utilisateur et l'application de simulation de vêtements est recherchée surtout par les infographistes pour des applications telles que les jeux vidéo ou bien les films de synthèse. Les graphistes considèrent un simulateur de vêtements comme une aide au design dont les résultats peuvent être modifiés et adaptés différemment par chaque graphiste. Pour ces utilisateurs, la simulation n'a pas un caractère prédictif du mouvement futur du vêtement puisque c'est l'infographiste qui décide a priori de ce qui va se passer en ajoutant les détails qui vont faire que le résultat semble "réaliste". Les graphistes cherchant à animer des vêtements dans leurs applications, tiennent donc à ce que l'outil de simulation soit interactif.

Le temps d'exécution d'une simulation est une donnée critique pour ce type d'application. Il est donc important d'avoir des résultats qui soient visuellement plausibles [BHW96], sans que le temps nécessaire à l'obtention d'une image ne devienne prohibitif. Cette contrainte d'interactivité exige l'utilisation d'une modélisation simplifiée du vêtement et le résultat obtenu est souvent approximatif quant à la justesse physique des

images obtenues.

Afin de produire des simulations de textiles, et plus particulièrement de vêtements, réalistes, il est nécessaire de définir ce que l'on entend par le terme "réaliste".

Le réalisme selon le Petit Larousse 2000 est le "caractère de ce qui est une description objective de la réalité, qui ne masque rien de ses aspects les plus crus". Une simulation réaliste de vêtements est donc une représentation des vêtements par un modèle qui permet de reproduire exactement et d'une manière objective le comportement réel du vêtement. Nous sommes bien loin de la satisfaction visuelle dont se contente les infographistes. Dans ce cas, c'est la recherche de la justesse physique (et bien évidemment visuelle) des simulations obtenues qui prime.

Le réalisme d'une simulation de vêtements est recherché essentiellement par l'industrie textile. Un outil de simulation réaliste performant, permettrait lors de la conception d'un vêtement de voir son aspect et son tombé virtuellement avant même que le moindre coup de ciseaux n'ait été donné. D'où l'intérêt économique évident d'un tel outil.

Un autre domaine qui pourrait se développer profitant d'un simulateur réaliste de vêtements, est *la vente de vêtements par Internet* avec essaiage virtuel en 3D de l'article avant de l'acheter.

Les modèles utilisés pour simuler un vêtement de manière réaliste sont, comme on l'exposera dans la suite de ce manuscrit, complexes et nécessitent des temps de calculs importants (même avec l'amélioration constante des performances des machines) qui sont loin de l'interactivité.

L'industrie des films d'animation s'intéresse aussi de plus en plus à des simulations réalistes de vêtements (et y consent les moyens) pour habiller les acteurs virtuels (Shrek2, Star Wars : L'attaque des clones). Cependant, le réalisateur d'un film n'est pas aussi rigoureux quant au réalisme des vêtements de ses acteurs que ne l'est un designer de vêtements.

Le réalisme et l'interactivité ne sont pas deux objectifs complètement antinomiques et ce manuscrit présente un certain nombre de contributions dans les deux axes de la

simulation de vêtements.

1.3 Contexte

Les travaux et contributions qui sont présentés dans ce manuscrit se placent dans la continuité des travaux réalisés depuis plus de dix ans maintenant au sein du laboratoire MIRAGES (INRIA Rocquencourt) ¹ sous la direction du Professeur André Gagalowicz dans le domaine de la simulation de vêtements.

Ces travaux ont débuté avec la thèse de Xavier Provot [Pro95], qui a mis en place le premier système masses-ressorts pour la simulation de vêtements (voir chapitre 2). Diverses personnes ont apporté des contributions non négligeables à ces premiers travaux, mais les plus importantes avancées ont été réalisées par Jérémy Denise [Den06] qui a introduit un modèle hystérétique non linéaire de tissu recalé sur les données fournies par les courbes de Kawabata [Kaw80] ainsi que plusieurs améliorations logicielles au niveau du simulateur de vêtements.

C'est donc dans le cadre de l'amélioration du simulateur de vêtements du projet MIRAGES que s'inscrit cette thèse. Il est important de signaler aussi que ce simulateur traite exclusivement la problématique de la modélisation des matériaux tissés en chaîne et trame. Pour d'autres matériaux textiles tel que le tricot (modélisation de la maille), des travaux ont déjà été menés par les équipes du Professeur Rémion [Nou99] [NNR01] et du Professeur Strasser [GRS95].

1.4 Contributions

Ce travail de recherche apporte les contributions scientifiques et techniques suivantes :

- Modélisation du cisaillement pur d'un tissu représenté par un système masses-ressorts. On utilise les données expérimentales fournies par Kawabata pour déterminer les lois des ressorts de cisaillement.

¹précédemment projet SYNTIM

- Modélisation et mesure de la viscosité d'un tissu. Une expérience utilisant un système de capture de mouvement a été mise en place afin de déterminer les paramètres qui caractérisent la dissipation d'énergie au cours du mouvement d'un tissu.
- Validation du modèle masses-ressorts pour la simulation du mouvement de tissu. On s'intéresse plus particulièrement à la comparaison d'un drapé réel et d'un drapé virtuel. Une technique de reconstruction de la forme 3D d'un tissu réel à partir de photos a été développée et utilisée. On s'est donc limité, pour le moment, à la validation de notre modèle dans le cas de tissus de formes simples.

1.5 Organisation du manuscrit

Le but de ce travail de recherche est d'apporter un certain nombre d'améliorations aux techniques actuelles de modélisation et de simulation de vêtements en 3D en adoptant une démarche d'analyse-synthèse. Chaque tâche de modélisation est précédée par une étape d'**analyse** du phénomène à partir d'expériences ou de données réelles. Les résultats produits par le modèle lors de la **synthèse** sont ensuite comparés avec les données réelles pour évaluer la performance de cette représentation.

Avant d'aborder nos travaux et contributions en détail, il est essentiel de présenter la démarche générale de la modélisation et de la simulation des vêtements à travers les travaux antérieurs. C'est l'objet du chapitre 2, où sont exposées les principales modélisations du tissu utilisées au sein des communautés des infographistes et des mécaniciens du textile, les méthodes de détermination de leurs paramètres et les schémas numériques pour la résolution du problème mécanique posé.

Le chapitre 3 présente le simulateur de vêtements existant au sein du projet Mirages et qui constitue la base pour laquelle on apporte des améliorations et des contributions aussi bien au niveau de la modélisation qu'au niveau de la détermination des paramètres et de la validation.

La principale contribution en modélisation est abordée au chapitre 4 où l'on présente un modèle pour représenter le phénomène de cisaillement d'un tissu à partir de mesures

réelles fournies par le dispositif Kawabata [Kaw80].

Le chapitre 5 expose notre contribution expérimentale pour la mesure de la viscosité d'un tissu et la détermination des paramètres d'un modèle régissant la dissipation d'énergie pour un tissu en mouvement.

La validation de nos travaux de modélisation et de détermination des paramètres de viscosité est présentée au chapitre 6 avec une mise en place minutieuse d'une technique de reconstruction précise de la forme 3D d'un objet à partir de photos.

Enfin le chapitre 7 conclut ce manuscrit de thèse par une analyse des contributions apportées par notre travail et une discussion des travaux futurs.

Chapitre 2

Etat de l'art

Les travaux de recherche pour la modélisation et la simulation d'un tissu remontent aux années 1930 avec les premiers travaux en mécanique des textiles [Pie30] et au milieu des années 1980 [Wei86] pour les premiers travaux de la communauté graphique.

Les objectifs poursuivis par les deux communautés sont très différents. La communauté textile s'est surtout intéressée aux propriétés mécaniques des tissus à partir des caractéristiques des fils qui le composent et même à partir des fibres qui composent chaque fil. Le but ultime est de déterminer le comportement du tissu à partir des propriétés mécaniques de ses constituants. Ainsi, plusieurs appareillages de mesure de ces caractéristiques ont été développés dont le plus utilisé est le système de mesure de Kawabata [Kaw80] plus communément appelé K.E.S. (Kawabata Evaluation System).

La communauté graphique est, quant à elle, intéressée par la production d'images de synthèse de tissus (drapeaux, voiles de bateaux ...) et de personnages habillés [CYMTT92]. Elle a ainsi commencé par développer des modèles simples permettant de représenter des figures géométriques approchant le vêtement. Des méthodes de rendu sont venues compléter le résultat fourni par les modèles simples afin de rendre les images plus plausibles.

On voit bien que les deux communautés s'intéressent à des aspects différents du même problème, à savoir la représentation d'un tissu dans l'espace (et dans le temps).

Des améliorations incessantes ont été apportées, depuis, par la communauté scientifique dans ce domaine et ce afin d'obtenir :

- des simulations plausibles, visuellement convaincantes qui reproduisent le mouvement réel du tissu.
- des simulations plus rapides ou moins lentes puisque la simulation de vêtements est réputée être un problème très complexe gourmand en temps de calcul.
- des simulations numériques plus stables et ce en améliorant les techniques d'intégration utilisées.

Le but de ce chapitre est de recenser les principaux travaux réalisés dans le domaine par les "textiliens" et les "infographistes" et faire un parallèle entre les deux contributions.

2.1 Modélisation des tissus

La modélisation des tissus dépend principalement de l'application visée. Les différents modèles développés n'ont pas la même capacité à reproduire fidèlement le comportement du tissu, ni la même complexité.

Deux grandes classes de modèles se dégagent aux vues de la littérature :

- **les modèles géométriques**, qui cherchent à reproduire l'aspect visuel d'une représentation fixe des tissus, sans chercher à quantifier des grandeurs caractéristiques du comportement physique du tissu.
- **les modèles physiques**, qui partent de lois de comportements mécaniques des tissus afin de prédire sa forme et simuler son comportement dynamique.

2.1.1 Modèles géométriques

Les premiers travaux apparus au sein des communautés textile et graphique utilisent une modélisation géométrique des tissus. Les travaux de Pierce [Pie30] au début des années 1930 sont considérés comme les premiers dans la modélisation des tissus. Pierce utilise des relations géométriques élémentaires pour modéliser une cellule de tissu représentant le croisement des fils de la chaîne et de la trame. La figure 2.1 montre une cellule de tissu composée de deux sections de fils de chaîne parallèles contraints par un troisième fil (de trame) perpendiculaire aux deux premiers. Ce modèle suppose quelques simplifications au niveau de la modélisation du tissu. La section des fils est supposée

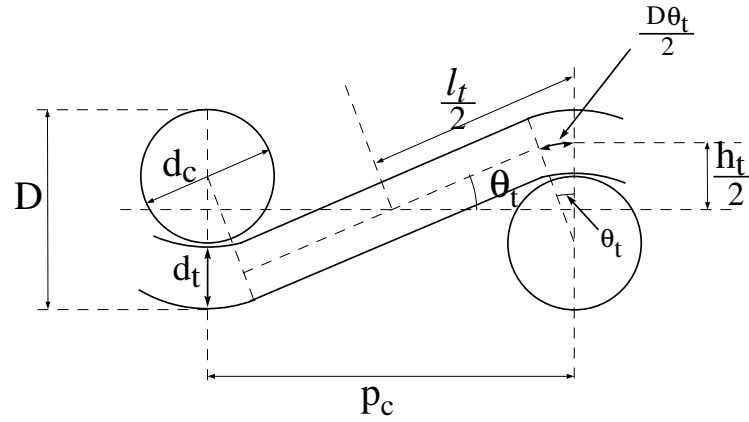


Figure 2.1 – Modèle de Peirce pour la toile

rester circulaire au niveau de l'entrecroisement, et la résistance des fils à la flexion est négligée. Les paramètres d'une cellule représentant un entrecroisement sont pour un seul fil (un fil de trame dans ce cas) :

- l_t : longueur du fil de trame entre les deux sections des fils de chaîne
- h_t : déplacement maximal du fil de trame perpendiculairement au plan du tissu
- p_c : distance entre les deux sections des fils de chaîne adjacents
- θ_t : angle maximum entre l'axe du fil de trame et le plan du tissu
- d_c : diamètre du fil de chaîne
- D : somme des diamètres des fils (chaîne et trame)

Peirce a abouti par un raisonnement géométrique au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} p_c &= (l_t - D\theta_t) \cos \theta_t + D \sin \theta_t \\ h_c &= (l_t - D\theta_t) \sin \theta_t + D(l_t - \cos \theta_t) \\ D &= d_c + d_t \end{cases} \quad (2.1)$$

En écrivant les deux premières équations du système 2.1 pour la chaîne et pour la trame, on obtient un ensemble de cinq équations reliant onze inconnues qui définissent les relations géométriques d'une cellule d'entrecroisement.

Le nombre d'inconnues peut être réduit en simplifiant davantage le modèle, ou bien en effectuant la mesure expérimentale de certains paramètres.

Basé sur des considérations géométriques, ce modèle reste d'une utilité limitée. Il peut permettre de déterminer si une certaine densité pour un tissu donné est possible géométriquement. Cependant, le modèle de Peirce est resté très peu utilisé car il nécessite la résolution du système non linéaire 2.1.

Love [Lov54] propose en 1954 une méthode graphique qui permet de surmonter cette difficulté et résoudre le système de Peirce graphiquement. Il obtient ainsi un ensemble de solutions possibles.

Outre la difficulté de résolution, le modèle de Peirce utilise des simplifications qui peuvent être aberrantes. Ainsi, Kemp [Kem58] remarque que sous l'effet d'une tension, même très légère, les fils s'aplatissent. Supposer que la section des fils est circulaire, est alors absurde. Kemp a changé les sections circulaires en sections elliptiques. Le modèle est devenu beaucoup plus complexe à résoudre que celui d'origine. Il a proposé alors des sections qui ont la forme d'un "champ de course" (centre rectangulaire avec deux demi-cercles sur les côtés). Ce modèle semble produire de meilleures prédictions de la forme géométrique du tissu que celui de Peirce selon son auteur.

Au sein de la communauté graphique, Weil [Wei86] est considéré comme le premier à avoir cherché à modéliser la géométrie des vêtements. Présentant des tissus "visuellement plaisants", Weil s'intéresse à des pièces de tissus rectangulaires suspendues à des points fixes (points contraints). Une pièce de tissu est considérée comme une grille 2D de points géométriques 3D. L'auteur part du principe qu'entre deux points contraints le tissu a un profil connu, celui d'une chaînette représentée par l'équation 2.2, et que la forme du reste du tissu peut être déterminée d'après des considérations de moindres déformations.

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a \cosh(x) \quad (2.2)$$

L'auteur commence par déterminer les courbes de la forme 2.2 joignant les points d'attache (voir la figure 2.2). Ces premières courbes permettent de déterminer les altitudes des points de la grille 2D situés sur un segment dont les extrémités sont deux points d'attache. Des segments sont ensuite successivement tracés entre tous les points déjà placés : les altitudes des points par lesquels passent ces segments sont alors calculés

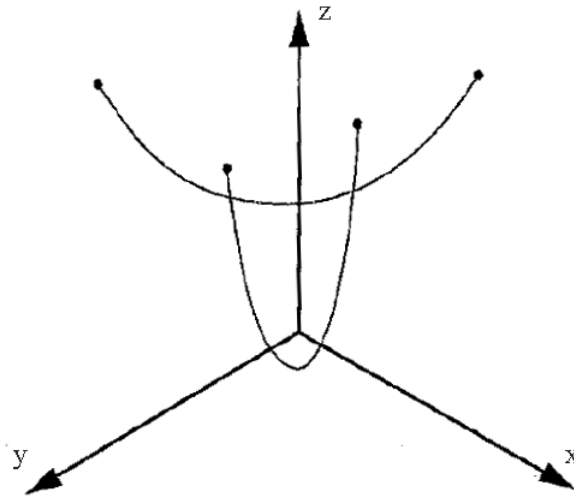


Figure 2.2 – Deux chaînettes reliant les points d'attachce

d'après l'équation 2.2. Dans le cas où plusieurs segments passent par un même point (on obtient des altitudes différents pour ce même point correspondant aux différentes chaînettes construites) l'auteur ne garde que la chaînette la plus haute. Toutes les autres chaînettes sont supprimées. L'auteur ignore les forces qui existent entre deux chaînettes qui se croisent au point de contact. Ainsi, la chaînette la plus haute qui est déjà en équilibre (forme obtenue par la chaînette) ne peut descendre plus bas et c'est elle qui est gardée alors que les autres chaînettes sont supprimées.

A ce stade, le tissu est approximé par une surface formée par les triangles obtenus en traçant les chaînettes comme indiqué à l'étape précédente (voir la figure 2.3). Lors de cette étape, l'auteur continue la détermination des altitudes des points composant la grille 2D qui représente le tissu en subdivisant les triangles obtenus précédemment. On procède de la même manière : des segments qui relient chaque sommet du triangle au milieu du côté opposé sont tracés, les chaînettes correspondante sont construites, mais on ne garde que la chaînette la plus haute. Récursivement, cette méthode permet de déterminer l'altitude de chaque point de la surface. La surface obtenue à présent représente une forme grossière du tissu. Cette forme est affinée à l'aide d'une méthode de relaxation. Chaque

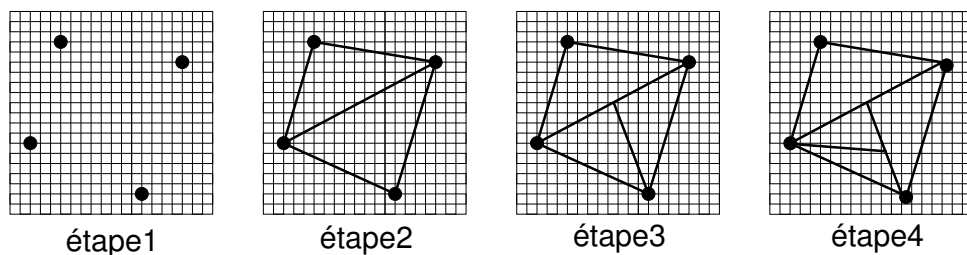


Figure 2.3 – Méthode de Weil : subdivision des triangles afin de générer la surface du tissu

point de la grille est itérativement déplacé en tendant de le rapprocher de la position du barycentre de ses quatre voisins (sur une grille 2D, chaque point a seulement 4 voisins). Aussi, et afin de tenir compte de la raideur du tissu que l'on cherche à représenter, la distance entre un point et ses deuxièmes voisins sur la même ligne et la même colonne est contrôlée afin d'être supérieure à une grandeur caractéristique du matériau. Ce processus est mené jusqu'à une tolérance donnée.

Cette méthode totalement géométrique produit des images convaincantes mais son intérêt reste limité aux tissus rectangulaires suspendus à des points d'attache.

Hinds et McCartney décrivent dans [HM90] un logiciel interactif de création de vêtements utilisant une autre approche géométrique. Les différentes pièces constituant le vêtement sont définies par un certain nombre de points caractéristiques de leur contour ; les points caractéristiques sont ensuite positionnés sur une représentation du mannequin sur l'écran, chacun se voyant doté d'une distance ("altitude") par rapport à la surface du mannequin. Les pièces de tissu sont munies d'une paramétrisation cylindrique, les altitudes des points de discrétisation d'une pièce ne se trouvant pas sur le contour étant interpolées d'après celles de points caractéristiques du patron. Une fonction cubique est employée, afin de ne pas obtenir de rendus trop anguleux, sans aucun contrôle des possibles intersections avec d'autres pièces de tissus ou avec le mannequin. Enfin, des plis sont produits à la surface des tissus en utilisant des fonctions sinusoidales.

2.1.2 De la physique dans les modèles géométriques

Les modèles géométriques sont limités à une représentation statique des tissus. Ils ne s'appliquent donc qu'à des cas particuliers limitant ainsi leur utilité. Les travaux de recherche au sein des communautés graphique et textile se sont alors orientés vers l'introduction de représentations physiques dans les modèles géométriques.

Olofsson [Olo64] s'est intéressé à la modélisation de la flexion des fibres d'un tissu. Il a repris le modèle de Peirce et le problème de la détermination des paramètres géométriques du modèle de la cellule d'entrecroisement des fils. L'approche de Olofsson est cependant totalement différente de celle de Peirce. En effet, Olofsson assume que la géométrie d'un tissu est fonction des forces qui s'exercent sur ses fils. L'auteur considère que les forces engendrées par les surfaces de contact entre les fils sont équivalentes à des forces ponctuelles et en déduit des équations qui montrent que les fils ont la forme d'une "elastica". L'elastica est une courbe géométrique étudiée par Euler [Eul44] en 1744. La propriété de l'elastica est que le moment de flexion est proportionnel à la variation de courbure engendrée par ce moment, et ce en tout point de la courbe.

D'autres auteurs spécialisés dans la mécanique des textiles ont cherché à modéliser la flexion des fils en partant du modèle géométrique de Peirce. Ainsi, Leaf et Anandjiwala [LA85] ont repris le modèle de Peirce en ajoutant que les fils dans la cellule de Peirce ont un moment bilinéaire par rapport à la courbure de la flexion.

Gosh et al. [GBB90] ont aussi modélisé la flexion du tissu en partant de la cellule de Peirce et en s'inspirant des améliorations apportées par Olofsson et par Leaf et Anandjiwala. Ainsi, le fil central de la cellule de Peirce est décrit comme une elastica. Les autres fils ont un moment bilinéaire par rapport à la courbure de la flexion.

Les chercheurs de la communauté graphique ont eux aussi très vite senti la limite des approches géométriques. Ainsi, Kunii et Gotoda [KG90] ont étudié le processus physique de formation des plis dans un vêtement et ont réussi à définir un ensemble de primitives modélisant les plis. Les auteurs ont commencé par étudier la dynamique d'une plaque déformable. Cette analyse leur a permis d'identifier un ensemble réduit de déformations caractéristiques d'un vêtement qui se plie. Cet ensemble de déformations est défini

comme étant l'ensemble des primitives modélisant les plis d'un vêtement. Les auteurs ont créé un réseau de ces primitives modélisant les plis et ont calculé la réponse du réseau à différentes contraintes géométriques pour produire des animations d'un vêtement qui se plie. La surface représentant le tissu est ensuite reconstruite d'une manière géométrique à partir des plis. La surface est obtenue par une interpolation à l'aide d'une fonction spline entre les différents plis. Cette méthode produit des résultats satisfaisants selon les auteurs sauf dans le cas où deux plis sont très proches l'un de l'autre.

Dhande et al. [DRTM93] se sont intéressés à la modélisation du drapé d'un tissu. La surface du drapé est modélisée par une surface balayée par une courbe génératrice le long d'une courbe directrice (voir la figure 2.4). La surface est définie par

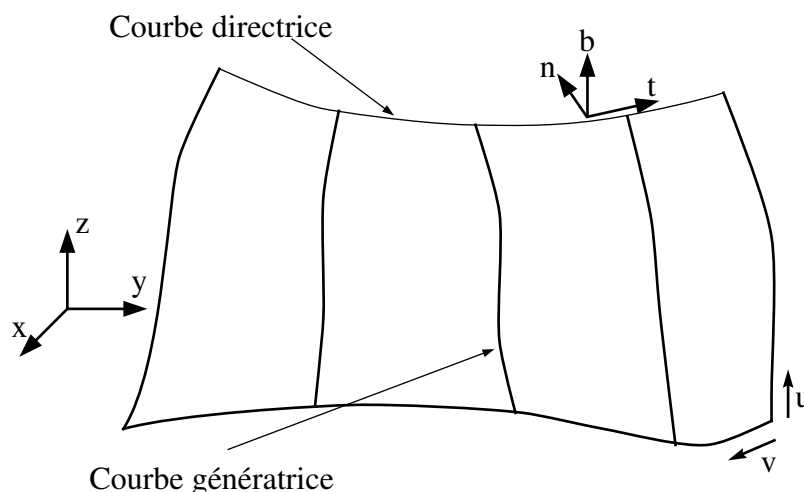


Figure 2.4 – Drapé de Dhande et al. : surface balayée par une courbe génératrice le long d'une courbe directrice

$$r(u, v) = r_2(v) + [M(v)]r_1(u, v)$$

où $r(u, v)$ est un point quelconque de la surface, $r_2(v)$ est la courbe directrice (contour de l'objet sur lequel est posé le tissu), M est la matrice de transformation de la courbe génératrice r_1 du repère local (n, b, t) au repère global (x, y, z) et $r_1(u, v)$ est la courbe génératrice qui définit la forme du tissu. La courbe génératrice est une elastica dont les paramètres sont déterminés en appliquant les principes de la mécanique.

Cette méthode produit des drapés satisfaisants, mais comme le précisent les auteurs, il sera difficile de l'utiliser pour simuler le drapé d'un tissu sur un objet complexe (qui n'est pas plat par exemple).

2.1.3 Modèles physiques

Les travaux cités précédemment montrent une modélisation géométrique du tissu qui peut comporter partiellement des représentations physiques. Ce type d'approche restreint l'étude à une représentation fixe du tissu et des considérations cinématiques sont difficiles à appliquer ce qui limite l'intérêt de ces modèles géométriques. Ainsi, simuler automatiquement le comportement des tissus lorsqu'ils sont soumis à des contraintes variables nécessite le recours à des modèles "physiques".

2.1.3.1 Les modèles continus

Les modèles continus sont basés sur la théorie de la mécanique des milieux continus. Le milieu (ici le tissu) est supposé avoir des caractéristiques mécaniques continues. Des relations lient les déformations aux contraintes subies par le milieu. Les déformations représentent l'ensemble des modifications de la géométrie du tissu, par rapport à un état donné (origine des temps, état de repos,...). Les contraintes désignent les forces élémentaires s'exerçant en un point du tissu.

Il existe essentiellement deux méthodes pour établir le modèle dynamique d'un système en mécanique des milieux continus. Le **formalisme de Newton-Euler** et le **formalisme de Lagrange**. Ces deux méthodes sont parfaitement équivalentes et fournissent bien sûr les mêmes résultats.

2.1.3.1.1 Formulation de Newton-Euler (formulation eulérienne)

Les équations de Newton-Euler proviennent directement des théorèmes généraux de la mécanique du solide. Dans le référentiel galiléen R_g , on écrit pour chaque solide i :

$$\begin{cases} m_i \mathbf{a}_{G_i} & = \mathbf{F}_i \\ I_{G_i} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{S_i} + \boldsymbol{\Omega}_{S_i} \cdot I_{G_i} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{S_i} & = \mathbf{C}_{G_i} \end{cases}$$

où m_i est la masse du solide S_i , \mathbf{a}_{G_i} l'accélération de son centre de gravité G_i , \mathbf{F}_i la résultante des forces extérieures appliquées au solide, I_{G_i} la matrice d'inertie de S_i en G_i , $\boldsymbol{\Omega}_{S_i}$ la vitesse de rotation instantanée par rapport à R_g et \mathbf{C}_{G_i} le moment en G_i des efforts appliqués à S_i .

L'obtention des équations du mouvement s'effectue par projections successives des formules obtenues sur les axes de mouvement.

L'application de ce formalisme au cas d'un tissu peut s'effectuer en remplaçant un corps par une particule de matière. L'avantage de cette approche repose sur l'inversion de systèmes de petites tailles ce qui est intéressant lorsque le nombre de corps est important.

2.1.3.1.2 Formulation de Lagrange (formulation lagrangienne)

Ce formalisme consiste à écrire tout d'abord le lagrangien du système L qui est la différence entre son énergie cinétique T et son énergie potentielle U .

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$$

où $q = [q_1 \dots q_n]$ représentent les coordonnées généralisées définissant la position de tous les points du système mécanique.

Les n équations de Lagrange sont ensuite calculées de la manière suivante

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

où Q_i sont les forces généralisées ne dérivant pas d'un potentiel.

On obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

En explicitant les expressions de l'énergie cinétique T , de l'énergie potentielle U et des forces généralisées ne dérivant pas d'un potentiel Q , cet ensemble d'équations peut se mettre sous forme matricielle dont la résolution permet d'obtenir la dynamique de l'objet [EWS96].

Ce formalisme est le plus utilisé pour la simulation des tissus dans le cas des modèles continus car il se distingue du formalisme de Newton-Euler par sa généralité. L'équation de Newton-Euler (issue de la loi fondamentale de la dynamique) se limite à décrire

l'évolution des solides rigides. Les équations de Lagrange permettent, quant à elles, de décrire le mouvement d'une grande variété de systèmes (points matériels, corps rigides) et ce, pourvu que l'on puisse exprimer leurs fonctions d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. Il permet aussi de gérer facilement les contraintes à l'aide des multiplicateurs de Lagrange, ce qui est très important pour des simulations de tissus interagissant avec d'autres objets.

Les formalismes décrits précédemment conduisent tous les deux à un système d'équations différentielles qui lient les grandeurs considérées de façon continue dans l'espace du matériau et dans le temps. La résolution analytique du système différentiel n'étant possible que dans des cas très simples, on a recours à la résolution numérique en discrétisant le problème. Les méthodes de discrétisation les plus courantes sont les différences finies et les éléments finis (voir [Bat82] [Gara]).

2.1.3.1.3 Principaux modèles

Feynman [Fey86] a modélisé le tissu comme une surface déformable élastique continue. Il définit un ensemble de fonctions d'énergie pour le tissu inspiré de la théorie des plaques élastiques. Ces fonctions d'énergie sont calculées en représentant le tissu par une grille 2D de points 3D. L'idée est de calculer la position finale du vêtement par la minimisation de l'énergie totale. L'équation de l'énergie qu'il a adoptée est

$$E(P_{i,j}) = k_s E_{elastic_{i,j}} + k_f E_{flexion_{i,j}} + k_d E_{gravitationnel_{i,j}} \quad (2.3)$$

où k_s, k_f et k_d sont les constantes respectivement, d'élasticité, de flexion et de densité. L'énergie en un point (i, j) est calculée relativement aux 8 points qui l'entourent. Comme tout corps a tendance à réduire son énergie au minimum, en calculant et minimisant ensuite l'énergie au niveau de chaque point de la grille, Feynman arrive à trouver la position d'équilibre du vêtement.

En modélisant le tissu comme une membrane qui se déforme (théorie des plaques élastiques), Feynman ne peut maintenir des contraintes fortes sur les distances entre points voisins. Ceci implique l'apparition du phénomène d'hyper-élasticité. Le tissu subit des déformations importantes dans le plan ce qui n'est pas un comportement réaliste.

Terzopoulos et al. [TF88b][TF88a][TPBF87] ont conçu un modèle déformable destiné à décrire l'ensemble des objets déformables. En particulier, ce modèle a été exploité pour la visualisation de vêtements en mouvement.

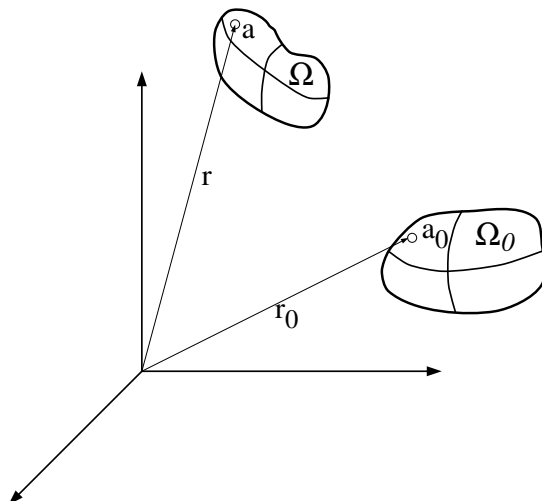


Figure 2.5 – Déformation d'un objet

Leur technique utilise l'équation de Lagrange, décrivant la dynamique d'un corps déformable. En se référant à la figure 2.5, le comportement d'un corps déformable Ω est :

$$\mu(\mathbf{a}) \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \gamma(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\delta \varepsilon(\mathbf{r})}{\delta \mathbf{r}} = f(\mathbf{r}, t) \quad (2.4)$$

où

- \mathbf{a} est le vecteur de coordonnées intrinsèques d'un point du corps Ω . Si ce corps est considéré comme un solide, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Si ce corps est considéré comme une surface, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$.
- $\mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$ est la position du point a à l'instant t .
- $\mu(\mathbf{a})$ est la densité massique du corps au point a .
- $\gamma(\mathbf{a})$ est le coefficient d'amortissement au point a .

- $f(\mathbf{r}, t)$ est la force externe appliquée au point a à l'instant t .
- $\varepsilon(\mathbf{r})$ est l'énergie potentielle de la déformation élastique du corps.
- $\frac{\delta\varepsilon(\mathbf{r})}{\delta\mathbf{r}}$, dérivée variationnelle de l'énergie potentielle, est la force élastique due à la déformation du corps par rapport à sa forme de repos (\mathbf{r}_0).

On s'intéresse à présent à la forme de la surface du corps Ω ($\mathbf{a} = [a_1, a_2]$). La théorie de l'élasticité introduit les deux tenseurs suivant :

- \mathbf{G} le tenseur métrique utilisé pour mesurer localement les distances et les angles entre des points voisins de la surface. Il est défini par

$$G_{ij}(\mathbf{r}(a_1, a_2)) = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial a_i} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial a_j} \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (2.5)$$

- \mathbf{B} le tenseur de courbure utilisé pour définir localement les propriétés de la courbure de la surface. Il est défini par

$$B_{ij}(\mathbf{r}(a_1, a_2)) = \mathbf{n} \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial a_i \partial a_j} \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (2.6)$$

avec \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à la surface au point $M(\mathbf{a})$.

L'énergie potentielle d'une surface déformable Ω se présente alors comme suit :

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} (|\mathbf{G} - \mathbf{G}^0|_{w^1}^2 + |\mathbf{B} - \mathbf{B}^0|_{w^2}^2) da_1 da_2 \quad (2.7)$$

où \mathbf{r} est l'ensemble des éléments massiques qui définissent la surface Ω , a_1 et a_2 sont les variables de paramétrisation de la surface, $|\cdot|_{w^1}$ et $|\cdot|_{w^2}$ sont des normes utilisant respectivement les fonctions de pondération $w_{ij}^1(a_1, a_2)$ et $w_{ij}^2(a_1, a_2)$ et \mathbf{G}^0 et \mathbf{B}^0 sont les valeurs des tenseurs \mathbf{G} et \mathbf{B} à la position d'équilibre obtenues en remplaçant \mathbf{r} par \mathbf{r}_0 dans les équations 2.5 et 2.6.

La force externe $f(\mathbf{r}, t)$ est la somme de différentes forces appliquées au corps. On peut citer :

- la force gravitationnelle f_g

$$f_g = \mu(\mathbf{a})\mathbf{g}$$

- une force de dissipation visqueuse f_v due à l'interaction avec l'air (dont la vitesse de mouvement est \mathbf{v})

$$f_v = k_v[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t})]\mathbf{n}$$

- une force de répulsion f_r pour simuler la réponse aux collisions. Cette force dérive d'un potentiel de la forme $k_p e^{-\Phi(\frac{r}{\epsilon})}$

$$f_r = -\left(\frac{\nabla\Phi}{\epsilon} e^{-\frac{\Phi}{\epsilon}} \cdot \mathbf{n}\right) \mathbf{n} \quad (2.8)$$

L'intégration de l'équation différentielle 2.4 nécessite la discrétisation spatiale de la surface Ω (par différences finies) et la discrétisation temporelle du mouvement. Les auteurs commencent par simplifier l'expression de la force élastique

$$\frac{\delta\epsilon(\mathbf{r})}{\delta\mathbf{r}} \simeq \sum_{i,j} -\frac{\partial}{\partial a_i} \left(\alpha_{ij} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial a_j} \right) + \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \left(\beta_{ij} \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial a_j \partial a_j} \right)$$

où α_{ij} et β_{ij} sont des caractéristiques des propriétés élastiques du matériau considéré :

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \eta_{ij} (G_{ij} - G_{ij}^0) \\ \beta_{ij} &= \xi_{ij} (B_{ij} - B_{ij}^0) \end{aligned}$$

Pour discrétiser l'équation 2.4 par différences finies, les auteurs représentent le tissu par une grille discrète régulière de $M \times N$ points. En rassemblant les équations obtenues, en appliquant pour chaque point de la grille l'équation 2.4, sous forme de vecteurs, on aboutit à la résolution d'une équation matricielle du type :

$$M \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + C \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + K \mathbf{r} = \mathbf{f} \quad (2.9)$$

où M , C et K sont les matrices respectivement des masses, d'amortissement et des raideurs.

L'approximation des dérivées temporelles dans l'équation 2.9 par les différences finies aboutit finalement à un système du type :

$$A(t) \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}(t)$$

où il faut inverser la matrice A à chaque pas de temps.

Des simulations sur différents types de matériaux ont montré l'étendue d'un tel modèle. Cependant, les résultats de la simulation d'un tapis interagissant avec d'autres objets de la scène présentent des déformations élastiques irréalistes et qui empêche l'apparition de plis prévisibles pour ce type de déformation.

Les groupes de recherche de Magnenat-Thalmann et Thalmann [CYMTT92] [VCMT95] [VMTJT96] ont repris le modèle de Terzopoulos et l'ont adapté plus spécifiquement pour modéliser les tissus.

Ils ont commencé par modifier la représentation de l'amortissement de Terzopoulos afin de modéliser plus précisément la dissipation d'énergie au sein du matériau. En effet, le terme d'amortissement $\gamma \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ dans l'équation 2.4 engendre une dissipation, même si le corps ne se déforme pas.

Ils ont aussi supprimé le terme modélisant les collisions (équation 2.8). En effet, cette modélisation peut engendrer un comportement élastique si le potentiel est élevé. Les collisions sont gérées en dehors du modèle élastique (lors d'une deuxième passe) et sont modélisées en utilisant la loi de conservation des moments. Cette démarche a permis de traiter les collisions d'une manière plus réaliste que le modèle de Terzopoulos.

D'autres modélisations continues des vêtements ont été développées notamment par Aono [Aon90]. Contrairement aux modèles de Terzopoulos et de Thalmann, la modélisation d'Aono ne se base pas sur la géométrie différentielle (équation 2.4) mais sur la théorie des plaques élastiques. L'auteur applique le principe de d'Alembert qui assume que l'équilibre des forces est toujours vérifié pour une plaque en mouvement. Il en déduit une équation qui décrit la propagation d'ondes dans un milieu continu élastique. Ce modèle est ensuite adapté au cas des vêtements en tenant compte de la nature anisotrope viscoélastique des tissus. La propagation d'ondes le long du tissu permet de simuler la propagation des plis qui se forment lors de la simulation de vêtements.

Dias et al. [DGR00] ont également présenté un modèle continu pour les matériaux tissés dont le calcul s'effectue sur un maillage triangulaire. La nouveauté de leur approche est la séparation de la modélisation des déformations qui se produisent dans le plan du tissu de celle des déformations qui se produisent en dehors du plan du tissu.

2.1.3.1.4 Conclusion

Les modèles continus de tissu sont basés sur la théorie de l'élasticité. Ces modèles considèrent que le tissu est un milieu homogène et établissent des lois qui lient les déformations du tissu aux contraintes qui lui sont appliquées de façon continue dans l'espace et dans le temps. La loi d'évolution du système au cours du temps est obtenue en passant par une étape de discrétisation du milieu, soit par différences finies, soit par éléments finis. Les modèles présentés dans cette section montrent l'amélioration chronologique des résultats fournis par une modélisation continue des tissus. Cependant, ces représentations continues ne prennent pas en compte la structure chaîne/trame du tissu et représentent globalement sa surface sans décrire sa mécanique interne.

2.1.3.2 Les modèles discrets

Dans la section précédente, on a vu que les modèles continus supposent que les caractéristiques du tissu sont continues, modélisent les interactions au sein du tissu en utilisant la mécanique des milieux continus et résolvent ensuite le système obtenu en discrétisant le tissu par la méthode des éléments finis ou bien celle des différences finies. Les modèles discrets considèrent, quant à eux, l'objet à décrire comme un ensemble fini de sous-objets plus simples. Les sous-objets sont munis de lois qui régissent leurs interactions entre eux d'une part, et leurs interactions avec le reste du monde d'autre part. Ces lois sont souvent issues de la physique et ces assemblages de sous-objets appelés systèmes de particules. L'idée sous-jacente à l'utilisation des systèmes de particules est comment modéliser un phénomène complexe et global à partir de lois comportementales simples et locales agissant sur un ensemble d'éléments (ou particules) interconnectés.

Reeves [Ree83] fut l'un des premiers à utiliser les systèmes de particules pour modéliser des phénomènes naturels difficiles à modéliser par des primitives géométriques classiques. En particulier, l'auteur a modélisé une explosion déclenchant une réaction en chaîne à la surface d'une planète. On peut remarquer que le système de particules de Reeves n'impose pas de fortes contraintes sur la cohésion interne de ses particules.

Les différents types de liaisons entre les particules d'un système de particules permettent

à ce modèle d'avoir un champ d'application très vaste. Il a ainsi été utilisé pour modéliser les écoulements de fluides, les simulations de foules (êtres humains, animaux, les anneaux de Saturne...). On peut citer par exemple les volées d'oiseaux simulées par Reynolds [Rey87].

Breen et al. [BHG92] ont proposé un modèle de particules pour le drapé d'étoffes textiles qui représente explicitement la structure micromécanique. Leur modèle est basé sur l'observation qu'un tissu est mieux décrit comme un mécanisme plutôt que comme un matériau continu. Même si cette observation est vraie pour tous les objets qui nous entourent si on descend au niveau de leur structure moléculaire, les propriétés macroscopiques globales d'un tissu proviennent des mécanismes d'interaction entre les fils qui ont en général une épaisseur de l'ordre du dixième du millimètre. Aussi, la modélisation de ces éléments discrets qui composent le tissu en utilisant une approche continue nécessite des approximations [TF88a] [CCOS91]. Ainsi, Breen et al. modélisent proposent de modéliser ces interactions entre les fils composant un tissu par un système de particules. Ces particules sont placées aux intersections des fils de chaîne et des fils de trame. Une particule interagit avec ses particules voisines et avec le monde extérieur selon des fonctions d'énergie. Ces fonctions d'énergie sont obtenues à l'aide des courbe de Kawabata [Kaw80]; ainsi, le modèle possède en entrée des valeurs physiques réelles. Enfin, une descente de gradient stochastique est utilisée comme méthode de relaxation pour calculer la position d'équilibre des particules. Le drapé de l'étoffe est ainsi obtenu. Les auteurs montrent des résultats de l'utilisation de leur modèle pour reproduire d'une manière précise le drapé de matériaux spécifiques dans [BHW94b]. Cependant, ce modèle ne permet pas de modéliser la dynamique du tissu et son implémentation est très lente¹.

Des améliorations ont été apportées au modèle de Breen-House notamment par Eberhardt et al. [EWS96]. Pour réduire le temps de calcul, les auteurs utilisent une formulation dynamique qui repose sur l'équation de Lagrange couplée à un système de résolution

¹un carré de tissu d'un mètre de côté est représenté par un maillage carré de 51×51 particules, ce qui nécessite une semaine de temps de calcul sur une RS/6000 de 1994

formel (Maple). La formulation utilisée est

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.10)$$

où \mathbf{x} et \mathbf{v} sont les positions et les vitesses des particules et L est le lagrangien du système.

$$L = E_c - V \quad (2.11)$$

E_c représente l'énergie cinétique du système, et V une fonction d'énergie potentielle calculée à partir des courbes de Kawabata.

L'énergie potentielle dépend uniquement des positions des particules et l'énergie cinétique dépend uniquement de leurs vitesses. L'équation 2.10 s'écrit alors

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$$

à rapprocher avec l'équation fondamentale de la dynamique dans laquelle le second membre représente les forces exercées sur les particules. Ces forces sont calculées en utilisant le logiciel de calcul formel Maple et le système obtenu est intégré avec les schémas de Runge-Kutta adaptatif (voir la section 2.2) et Burlisch-Stoer ce qui réduit significativement le temps de calcul.

2.1.3.2.1 Les systèmes masses-ressorts

Parmi les systèmes de particules les plus utilisés figure le système masses-ressorts. Ce modèle est très fréquemment utilisé en informatique graphique pour sa facilité d'implémentation et son efficacité à simuler des objets déformables (c.f. les travaux de Tu et Terzopoulos [TT94] sur la modélisation du mouvement des poissons, de Miller [Mil88] sur la modélisation du mouvement des animaux rampants ...etc.).

Le système masses-ressorts le plus utilisé pour la simulation dynamique de vêtements revient à Provot [Pro95]. Le modèle de Provot est constitué d'un maillage de rectangulaire de $m \times n$ points massiques. Chacun de ces points est relié à ses voisins par des ressorts sans masse. Ces liaisons sont de trois types comme le montre la figure 2.6 : les ressorts de structure lient deux masses immédiatement voisines et sont orientés comme les fils de chaîne et de trame ; les ressorts de cisaillement sont disposés en diagonale par rapport aux ressorts précédents et lient une masse à ses quatre voisins du second ordre ;

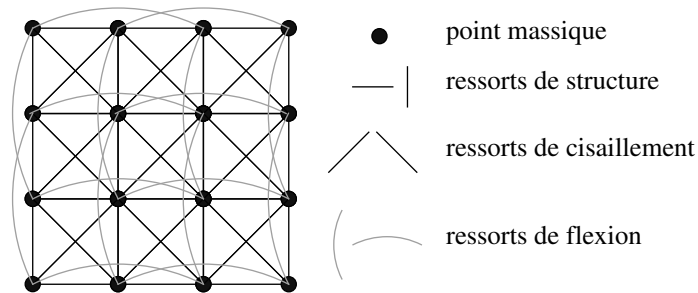


Figure 2.6 – Système masses-ressorts de Provot

les ressorts de flexion lient deux masses ayant une voisine commune selon la chaîne ou la trame.

Le maillage régulier rectangulaire de Provot permet de respecter les directions privilégiées présentes dans un tissu : les directions de chaîne et de trame. Par construction, ce maillage permet de reproduire l'anisotropie qui existe dans les matériaux tissés.

Par ailleurs, le système de Provot permet de simuler la dynamique du tissu en intégrant la loi fondamentale de la dynamique (équation de Newton). Il commence par évaluer les forces, aussi bien internes qu'externes, qui s'exercent sur les masses. La résolution de l'équation différentielle du second ordre que constitue la loi fondamentale de la dynamique est réalisée en utilisant le schéma de Verlet. En simulant un drapeau suspendu par deux coins adjacents soumis à la gravité, Provot constate qu'à l'équilibre, le drapeau présente un problème de "super-élasticité" au niveau des points d'attache. L'auteur propose alors un modèle de ressorts non linéaire avec un taux d'élongation maximal pour résoudre ce problème.

Le modèle de Provot a souvent été utilisé par la suite comme la base de travaux qui visent à améliorer d'autres aspects de la simulation de vêtements tels que la précision et le temps de calcul : Nocent (application d'un pas de temps adaptatif) [Noc97], Baraff et Witkin (schéma d'intégration implicite)[BW98], Desbrun et al. (amélioration du schéma d'intégration) [DSB99], Bridson et al. (gestion des collisions) [BFA02] et Ngo Ngoc (modélisation des non linéarités au niveau du fil)[Ngo03].

2.1.4 Conclusion

On a présenté tout au long de cette section, les principaux modèles utilisés pour représenter les matériaux tissés, afin de simuler leurs formes et leurs mouvements. Les modèles géométriques, qui sont historiquement les premiers à être apparus, ont très vite montré leurs limites quand il s'agit de simuler le mouvement d'un tissu. On se limitera donc dans ce qui suit aux modèles physiques de tissu. Un modèle physique représente le tissu soit d'une manière continue, soit d'une manière discrète.

On a vu que les modèles continus considèrent le tissu comme un milieu homogène et que les lois qui lient la déformation du système aux contraintes qui lui sont appliquées, sont décrites de façon continue, sur tout le tissu. Même si des représentations anisotropiques sont possibles dans le cas des modèles continus [Kec05], la paramétrisation du modèle reste une tâche difficile et se traduit souvent par la difficulté de déterminer les paramètres mécaniques du modèle comme le précise Keckeisen [Kec05].

Les modèles discrets, quand à eux, tiennent plus compte de la nature anisotropique du tissu. Ces modèles représentent cette anisotropie de façon plus directe en organisant les particules du modèles selon les deux directions privilégiées du tissu : la chaîne et la trame.

Aussi, les modèles discrets sont plus simples à implémenter et à paralléliser. En effet, une particule interagit seulement avec ses voisines. Les modèles continus sont aussi parallélisables mais nécessitent au préalable une discrétisation par éléments finis ou par différences finies.

Une fois discrétisé, un modèle continue nécessite, aussi bien qu'un modèle discret, d'utiliser un schéma d'intégration pour trouver la trajectoire du tissu au cours du temps.

2.2 Méthodes d'intégration numérique

Dans ce qui suit, on appellera indifféremment les termes : méthode d'intégration numérique, méthode numérique, schéma d'intégration et schéma numérique.

Un des facteurs communs des modèles de tissus explicités dans la section précédente est de reproduire ou de simuler plus ou moins fidèlement le comportement d'un tissu. Ce

travail passe par une formulation dynamique du problème où on cherche à connaître la trajectoire du tissu au cours du temps.

2.2.1 Le problème mécanique

La modélisation des tissus (quelque soit le modèle choisi, discret ou continu²) abouti généralement à l'intégration au cours du temps d'une équation différentielle du second ordre qui est l'équation fondamentale de la dynamique, appelée aussi équation de Newton

$$\ddot{X} = M^{-1}\left(-\frac{\partial E}{\partial x} + F\right) \quad (2.12)$$

où le vecteur X et la matrice diagonale M représentent l'état géométrique et la distribution de masses du tissu, E (une fonction scalaire) est l'énergie interne du tissu et F décrit les forces extérieures appliquées au tissu.

Bien que l'équation 2.12 soit du second ordre, on peut toujours se ramener à un système d'équations différentielles de premier ordre en utilisant le changement de variable suivant :

$$V = \dot{X} \quad (2.13)$$

L'équation 2.12 devient alors un système de premier ordre

$$\begin{cases} \dot{V} &= M^{-1}\left(-\frac{\partial E}{\partial x} + F\right) \\ \dot{X} &= V \end{cases} \quad (2.14)$$

Dans cette section, on étudiera un ensemble de méthodes d'intégration qu'on appliquera (sans perte de généralité) au système suivant appelé problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

On explicite tout d'abord le théorème fondamental d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy dont une démonstration peut se trouver dans le manuel d'El Jay [Jay03].

Si la fonction f du problème 2.15 est définie et continue sur le rectangle

$$V = [t_0, t_0 + T] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

²si le modèle est continu, le système est discrétisé par différences finies ou par éléments finis en vue de son intégration

et si elle est uniformément lipschitzienne par rapport à y , alors le problème de Cauchy 2.15 admet une solution unique y continûment différentiable dans $[a, a + H]$ où

$$H = \min(h, b/M) \quad \text{et} \quad M = \sup_{t, y \in V} |f(t, y)|$$

On rappelle qu'une fonction $f : (t, y) \longrightarrow f(t, y)$ est dite uniformément lipschitzienne par rapport à y si pour tout y et z

$$\exists A > 0, \forall t, |f(t, y) - f(t, z)| \leq A |y - z|$$

En toute rigueur, il suffit de vérifier pour chaque problème que f est continue et uniformément lipschitzienne pour assurer l'existence et l'unicité de la solution.

Or, dans le cas de la simulation de tissus, on s'intéresse à un type de problème dans lequel la fonction f du problème de Cauchy est définie sur un domaine borné (en espace : le morceau de tissu est fini, en temps : l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$).

Une fonction continue sur un domaine fini est uniformément lipschitzienne ; il suffit de prendre comme constante $A = \frac{\max |f(t, y) - f(t, z)|}{y - z}$. Aussi, le domaine de résolution est discrétisé : on cherche donc une solution pour chaque particule ou élément. Il nous suffit alors de vérifier que f est continue dans le temps.

La fonction f représente les forces extérieures et internes au tissu (gravité, raideur du tissu, dissipation visqueuse, ...).

Si f présente un nombre fini de discontinuité dans le temps, alors on va résoudre l'équation 2.15 sur des sous intervalles sur lesquels f est continue.³

Si f est indéfiniment discontinue

$$\forall]a, b[\subset [t_0, t_0 + T], \quad \exists c \text{ un point de discontinuité } \in]a, b[$$

alors ce type de force (si il existe) ne rentre pas dans le cadre de cette étude. On conjecture alors, que pour le type de problème de Cauchy auquel on s'intéresse, il existe toujours une seule solution.

³les forces de contact sont un exemple de forces discontinues

2.2.2 Résolution du problème

Une méthode d'intégration est un procédé permettant de calculer de façon itérative des solutions approchées du système 2.15.

Soit $[t_0, t_0 + T]$ l'intervalle de temps sur lequel on cherche à résoudre le système 2.15 de façon itérative. Pour cela on considère une subdivision croissante de cet intervalle : $t_0 < t_1 < \dots < t_n$.

On pose alors $h_n = t_{n+1} - t_n$ le pas de temps à l'instant t_n et h_{max} le pas de temps le plus grand.

On notera y_n la valeur approchée de la solution exacte $y(t_n)$ à l'instant t_n et f_n la valeur de $f(t_n, y_n)$.

Une méthode d'intégration est dite :

- **explicite** si le calcul de y_{n+1} ne dépend que des valeurs de la solution approchée calculées antérieurement $(y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p})$.
- **implicite** si le calcul de y_{n+1} dépend de $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p}$, et aussi de f_{n+1} , la dérivée de la solution en t_{n+1} . La nouvelle valeur dépend de son état actuel (et passé éventuellement), mais aussi de son état futur (f_{n+1}).

Une méthode d'intégration peut aussi être :

- **à un pas** : la connaissance de l'état actuel (y_n, f_n, t_n) est suffisante pour le calcul de la nouvelle solution approchée y_{n+1} .
- **à pas multiples** : le calcul de y_{n+1} nécessite la connaissance de $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p}$, c'est à dire l'état actuel et une partie du passé.

Afin de comparer ces méthodes d'intégration, on rappelle les notions de consistance, de stabilité et de convergence.

2.2.2.1 Consistance

On appelle erreur de troncature à l'étape n , la différence entre la solution exacte $y(t_{n+1})$ et la solution approchée calculée y_{n+1} en supposant qu'à l'instant t_n $y(t_n) = y_n$. Cette quantité est notée e_n .

$$e_n = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$$

L'erreur de troncature est donc une mesure de l'erreur locale générée par la méthode d'intégration lors d'une itération.

Une méthode d'intégration est dite **consistante** si :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \|e_{n+1} - e_n\| \rightarrow 0 \text{ quand } h_{max} \rightarrow 0$$

Autrement dit, un schéma d'intégration est consistant s'il approxime correctement l'équation exacte 2.15.

2.2.2.2 Stabilité

Il existe deux notions de stabilité dans la littérature. La première est la stabilité de la solution d'un problème de Cauchy 2.15 appelée aussi stabilité au sens de Lyapunov. Une solution est dite stable au sens de Lyapunov si les solutions associées à des valeurs voisines de la donnée initiale restent proches de la solution considérée sur l'intervalle d'étude (voir jusqu'à l'infini).

La notion de stabilité à laquelle on s'intéresse est la stabilité de la méthode d'intégration appelée aussi stabilité numérique. La notion de stabilité implique qu'une petite perturbation sur les données du schéma n'entraîne qu'une petite perturbation sur la solution. En d'autres termes, un schéma numérique est dit stable si l'erreur commise en approximant les $y(t_n)$ par les y_n n'augmente pas avec le temps.

Cette notion est absolument nécessaire pour le traitement numérique du problème, vu l'existence des erreurs d'arrondis.

La formulation la plus courante de la stabilité dans la littérature est celle citée par Crouzeix et Mignot [CM89], qui bien qu'elle soit donnée pour le cas des schémas à un pas, se généralise facilement pour les schémas à pas multiples [CM89]⁴.

Soit $\Phi(t_n, y_n, h_n)$ une fonction continue à valeurs réelles qui ne dépend que de la fonction f du problème 2.15. On dit qu'une méthode est stable s'il existe une constante M ,

⁴page 127

indépendante des pas de temps, telle que pour toutes suites y_n , z_n et ϵ_n vérifiant

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \\ z_{n+1} &= z_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) + \epsilon_n \end{aligned}$$

on ait

$$\max |z_n - y_n| \leq M[|y_0 - z_0| + \sum_n |\epsilon_n|]$$

Ce critère est difficilement vérifiable dans la pratique et on trouve dans la littérature d'analyse numérique [HW91] des définitions alternatives de la stabilité. La notion de stabilité absolue (ou λ h-stabilité) utilise un problème test afin de quantifier la stabilité d'une méthode d'intégration. Cette notion donne uniquement une indication sur le comportement d'un schéma d'intégration numérique et permet de comparer les différents schémas entre eux dans le cas du problème test correspondant à l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases} \quad \lambda, \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.16)$$

La solution analytique de 2.16 est

$$y(t) = \alpha e^{\lambda(t-t_0)} \quad \text{avec} \quad y(t) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

La région de stabilité absolue de la méthode numérique est le sous-ensemble du plan complexe

$$S = \{z = h\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, h \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } y(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty\}$$

On peut déjà remarquer que plus le pas de temps h est petit, plus les valeurs admissibles de λ dans la région de stabilité sont grandes (en module).

Une méthode d'intégration est dite absolument stable si son domaine d'absolue stabilité est le demi plan complexe $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) < 0\}$.

Les domaines d'absolue stabilité constituent un critère de comparaison des méthodes d'intégration numérique, mais ils ne sont significatifs que dans le cadre d'un problème linéaire.

2.2.2.3 Convergence

Une méthode numérique est dite **convergente** si en prenant des pas de temps suffisamment petits, la suite des solutions approchées $\{y_n\}_n$ tend vers la suite de solutions exactes $\{y(t_n)\}_n$.

$$\max \| y(t_n) - y_n \| \rightarrow 0 \text{ quand } h_{max} \rightarrow 0$$

On dira qu'une méthode d'intégration est **d'ordre** p ou bien précise à l'ordre p s'il existe une constante C indépendante de h_{max} telle que :

$$\sum_{n=0}^N \| e_n \| \leq C h_{max}^p$$

L'ordre d'une méthode permet d'évaluer la rapidité de convergence de l'erreur de troncature. Il renseigne donc sur la précision de la méthode d'intégration.

Les notions de consistance, stabilité et convergence permettent de distinguer entre les différents schémas numériques. Le choix d'une méthode par rapport à une autre reste cependant très dépendant des caractéristiques du problème à résoudre. Or la spécificité des problèmes de simulation de vêtements est que le système différentiel qu'elles produisent est **raide**.

2.2.2.4 Problèmes raides

Bien que la notion de raideur d'un système soit très intuitive, il n'existe pas de définition formelle dans la littérature. On peut citer la définition qualitative donnée par Crouzeix et Mignot [CM89]⁵. Un problème numérique est dit raide s'il est bien posé et "très" mal conditionné.

L'une des propriétés essentielles à laquelle on reconnaît un problème raide est la présence de deux (ou plus) modes (composantes, variables séparées) dont les évolutions ont des ordres de grandeurs totalement différents.

Or, un tissu subi très peu de déformation en tension (très grande raideur) mais autorise

⁵page 89

de larges déformations en flexion. On voit alors que le problème de simulation de vêtements ou de tissu est par essence raide.

Pour bien expliciter cette notion à laquelle on ne peut donner de définition formelle, on donne en annexe un exemple d'équation différentielle raide.

Comme on peut le voir sur l'exemple donné en annexe, les problèmes raides imposent d'utiliser un pas de temps beaucoup plus petit que celui requis pour satisfaire la consistance et pour garantir la stabilité du schéma numérique.

Après avoir explicité les critères de comparaison des différentes méthodes d'intégration et sachant que le problème de simulation de vêtements est raide, on se propose de donner quelques exemples de méthodes d'intégration selon la classification donnée au début de cette section. On note toutefois que des études portant sur les méthodes d'intégration des objets déformables [HES03] et plus particulièrement les vêtements [VMT01] existent déjà.

On se limitera au cas des pas de temps uniforme que l'on notera h . (Cette limitation est essentiellement faite pour alléger l'écriture des formules). On peut alors écrire la subdivision de l'intervalle de temps :

$$t_i = t_0 + ih \quad \text{avec} \quad h = T/n, \quad 1 \leq i \leq n$$

2.2.3 Méthodes à un pas

Ces méthodes permettent de trouver une solution approchée au problème de Cauchy 2.15 en raisonnant sous-intervalle par sous-intervalle. Pour chaque sous-intervalle $[t_i, t_i + 1]$, le passage de y_i à y_{i+1} peut se faire en utilisant un nombre s de points intermédiaires entre t_i et $t_i + 1$. On dira que la méthode est de rang s .

2.2.3.1 Méthodes explicites

On peut donner une formulation générale aux méthodes à un pas explicites.

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(t_n, y_n) \tag{2.17}$$

2.2.3.1.1 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est l'une des méthodes les plus simples de résolution numérique d'équations différentielles avec une interprétation géométrique et un emploi facile. L'idée

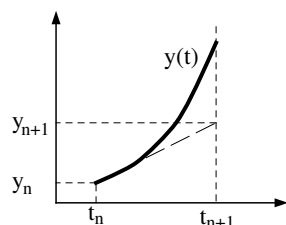


Figure 2.7 – Représentation géométrique de la méthode d'Euler

est que pour un pas de temps h suffisamment petit, la quantité $\frac{y_{i+1}-y_i}{h}$ approxime d'une manière satisfaisante la dérivée de $y(t)$ (qui est égale à $f(t, y)$). Le schéma d'intégration est donc le suivant :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), & 0 \leq i \leq n-1 \\ y_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (2.18)$$

On peut dire aussi que le schéma d'Euler est le résultat de la discrétisation du système 2.15 en lui appliquant la formule de Taylor et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1.

$$y(t_i + h) = y(t_i) + h \frac{dy}{dt} + o(h)$$

Il est donc aisé de voir que cette méthode est consistante (quand h tend vers zéro, on a la définition exacte de la dérivée). Cependant, cette méthode est faiblement convergente (pas très précise) puisqu'elle est seulement d'ordre 1 (en $o(h)$).

2.2.3.1.2 Méthode du point milieu

Cette méthode appelée aussi méthode de Runge, représente une amélioration de la méthode d'Euler : à l'instant t_i on ne va plus assimiler la fonction $y(t)$ solution du problème 2.15 avec sa dérivée en t_i , mais avec sa dérivée en $t_{i+\frac{1}{2}} = t_i + \frac{h}{2}$ (milieu de

l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$). Cela nécessite la connaissance de y au point $t_{i+\frac{1}{2}}$. Une approximation de sa valeur est obtenue en utilisant la méthode d'Euler vue précédemment sur l'intervalle $[t_i, t_{i+\frac{1}{2}}]$.

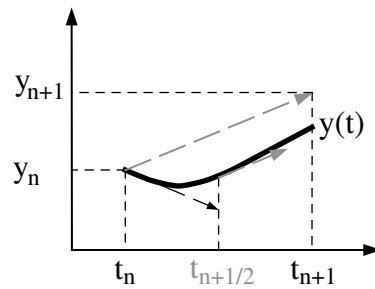


Figure 2.8 – Représentation géométrique de la méthode du point milieu

Le schéma d'intégration est donc le suivant :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) \\ y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2}f(t_i, y_i) \\ y_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (2.19)$$

Cette méthode est consistante (quand h tend vers zéro, la méthode du point milieu est la méthode d'Euler). On effectue les calculs suivants pour déterminer l'ordre de cette méthode :

La dérivée de y au point $t_{i+\frac{1}{2}}$ est estimée par :

$$\begin{aligned} y'(t_{i+\frac{1}{2}}) &= \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} + O(h^2) \\ \text{donc } y(t_{i+1}) &= y(t_i) + h y'(t_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^3) \\ \text{or } y'(t_{i+\frac{1}{2}}) &= f(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) \\ \text{donc } y(t_{i+1}) &= y(t_i) + hf(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On estime } y_{i+\frac{1}{2}} \text{ par } y_{i+\frac{1}{2}} &= y(t_i) + \frac{h}{2}y'(t_i) + O(h^2) \\ &= y(t_i) + \frac{h}{2}f(t_i, y_i) + O(h^2) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_{i+\frac{1}{2}}, y(t_i) + \frac{h}{2}f(t_i, y_i)) + o(h^2)$$

Cette méthode est donc d'ordre 2 (en $o(h^2)$) donc plus précise et plus rapidement convergente que la méthode d'Euler (voir annexe pour le développement des calculs).

La méthode du point milieu a été utilisée dans le cadre qui nous concerne par Volino, Courchesne et Magnenat-Thalmann [VCMT95]. Les auteurs concluent que même si cette méthode nécessite deux évaluations par itération des forces mécaniques du système (la fonction $f(t, y)$) et deux fois plus d'espace mémoire par itération pour stocker le vecteur d'état (vecteur y), le gain en précision et en stabilité par rapport à la méthode d'Euler explicite compense largement ce surcoût.

Cette méthode est de rang 2 car elle utilise deux points intermédiaires pour évaluer y_{i+1} . Elle peut être généralisée en utilisant s points intermédiaires dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Ce sont les méthodes de Runge-Kutta.

2.2.3.1.3 Méthode de Verlet (Leapfrog)

Cette méthode, très utilisée dans le domaine de la dynamique moléculaire [FS96], a été utilisée pour la simulation de vêtements par Provot [Pro97]. Cette méthode traite cependant l'équation différentielle du second ordre 2.12 directement sans passer par le changement de variables 2.13. L'écriture du schéma d'intégration Leapfrog est la suivante :

$$\begin{cases} V(t + \frac{h}{2}) &= V(t - \frac{h}{2}) + hM^{-1}F(t) \\ P(t + h) &= P(t) + hV(t + \frac{h}{2}) \end{cases} \quad (2.20)$$

Provot [Pro97] montre qu'en modifiant les conditions initiales du problèmes (sans conséquences car on s'intéresse à la position finale) l'écriture de l'équation 2.20 est équivalente à l'écriture d'un schéma d'Euler modifié comme suit

$$\begin{cases} V(t + h) &= V(t) + hM^{-1}F(t) \\ P(t + h) &= P(t) + hV(t + h) \end{cases} \quad (2.21)$$

Provot [Pro97] montre ensuite que ce schéma est d'ordre 3 et qu'il est intéressant en termes de temps de calcul pour son modèle.

2.2.3.1.4 Méthodes de Runge-Kutta

Cette méthode peut être présentée comme un ensemble de méthodes (selon q le rang de la méthode). A chaque pas, plusieurs pas de la méthode d'Euler sont utilisés.

La méthode de Runge-Kutta repose sur les différentes manières d'approximer l'égalité intégrale suivante

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) &= y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \\ &= y(t_i) + h \int_0^1 f(t_i + uh, y(t_i + uh)) du \end{aligned} \quad (2.22)$$

On considère q réels $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_q \leq 1$ qui constituent une subdivision croissante de l'intervalle d'intégration $[0, 1]$.

On peut alors subdiviser chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ en posant :

$$t_{i,j} = t_i + c_j h \quad \text{pour } 1 \leq j \leq q$$

On a alors pour chaque $t_{i,j}$

$$\begin{aligned} y(t_{i,j}) &= y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i,j}} f(t, y(t)) dt \\ &= y(t_i) + h \int_0^{c_j} f(t_i + \tau h, y(t_i + \tau h)) d\tau \end{aligned} \quad (2.23)$$

Pour chaque $t_{i,j}$, le terme integral de l'équation 2.23 peut être approché par une quadrature dotée des coefficients $a_{j,l}$

$$y(t_{i,j}) \simeq y(t_i) + h \sum_{l=1}^j a_{j,l} f(t_{i,l}, y_{i,l}) \quad (2.24)$$

et l'équation 2.22 est approchée en choisissant une quadrature dotée des coefficients b_l

$$y(t_{i+1}) \simeq y(t_i) + h \sum_{j=1}^q b_j f(t_{i,j}, y_{i,j}) \quad (2.25)$$

Les méthodes de Runge-Kutta consistent à remplacer les égalités approchées des équations 2.24 et 2.25 par des égalités. Le schéma général de Runge Kutta à q niveaux d'intégration est alors le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} t_{i,j} &= t_i + c_j h, & j = 1, \dots, q \\ y_{i,j} &= y_i + h \sum_{l=1}^j a_{j,l} f(t_{i,l}, y_{i,l}), & j = 1, \dots, q \\ y_{i+1} &= y_i + h \sum_{j=1}^q b_j f(t_{i,j}, y_{i,j}) \\ y_0 &\text{ donné} \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Les méthodes de Runge-Kutta sont généralement représentées par le tableau 2.1 appelé tableau de Butcher. Chaque ligne de la partie supérieure (au dessus du trait horizontal) de ce tableau représente un point intermédiaire entre t_i et t_{i+1} . Les coefficients de la partie inférieure (les b_j) sont les pondérations qui leur sont affectées dans la valeur obtenue au pas de temps suivant (y_{i+1}). Une méthode de Runge-Kutta est donc complètement

c_1					ordre (p)	1	2	3	4	5	6	7	8	
c_2	$a_{2,1}$					rang (q)	1	2	3	4	6	7	9	11
c_3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$												
\vdots	\vdots	\ddots												
c_q	$a_{q,1}$	$a_{q,2}$	\cdots	$a_{q,q-1}$										
	b_1	b_2	\cdots	b_{q-1}	b_q									

Tableau 2.1 – Méthode générale de Runge-Kutta Tableau 2.2 – Relation entre le rang et l'ordre des méthodes Runge Kutta

spécifiée par la donnée des paramètres $\{c_j\}_{l=j\dots q}$, $\{a_{j,l}\}_{1 \leq l \leq j \leq s}$ et $\{b_j\}_{j=1\dots q}$. Crouzeix et Mignot [CM89] obtiennent un ensemble de relations entre les coefficients du système en effectuant un développement de Taylor entre $y(t)$ et $y(t + 1)$. Il existe donc plusieurs schémas possibles pour un rang donné. La précision du schéma et sa stabilité croissent avec le rang puisque l'ordre du développement de Taylor augmente. Cependant, plus le rang est grand plus le nombre d'évaluations par itération des forces mécaniques du système (la fonction $f(t, y)$) est grand et plus l'espace mémoire par itération nécessaire au stockage des vecteurs d'état (vecteur y) est grand aussi. Il faut donc essayer de trouver un compromis entre ces deux critères.

Une étude de la relation entre la rang q et l'ordre p des méthodes de Runge Kutta [But87] est reportée dans le tableau 2.2. L'auteur montre que l'ordre d'une méthode Runge Kutta explicite à q étapes (de rang q) ne peut être plus grand que q . De plus, il démontre aussi qu'il n'existe pas de méthode de rang q d'ordre q si $q \geq 5$.

Le tableau 2.2 montre que que l'ordre de la méthode est égal au rang quand p est compris entre 1 et 4. Au delà, le nombre de points intermédiaires (les c_j) à rajouter dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ pour augmenter l'ordre de la méthode devient de plus en plus important.

Ceci est peut être la raison de la popularité de la méthode de Runge Kutta de rang (et d'ordre) 4 (RK4).

Exemples de méthodes explicites de Runge Kutta Dans ce sous paragraphe on donne quelques exemples de méthodes de Runge Kutta jusqu'à l'ordre 4. Il est intéressant de noter que les méthodes d'Euler et celle du point milieu vues précédemment sont des cas particuliers des méthodes Runge Kutta (voir les figures 2.9 et 2.10).

0						
		$y_{i+1}=y_i+h.1.f(t_i,y_i)$				
1						

0			$t_{i,1}=t_i+\frac{1}{2}h$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$y_{i,1}=y_i+h.\frac{1}{2}.f(t_i,y_i)$
		0	1
			$y_{i+1}=y_i+h.0.f(t_i,y_i)+h.1.f(t_{i,1},y_{i,1})$

Figure 2.9 – Méthode d'Euler : Runge Kutta d'ordre 1

Figure 2.10 – Méthode du point milieu : Runge Kutta d'ordre 2

Comme on l'a précisé plus haut, chaque ligne de la partie supérieure d'un tableau de Butcher définit un point intermédiaire entre t_i et t_{i+1} . On voit que dans la figure 2.9 qui représente la méthode d'Euler, il n'existe pas de points intermédiaires (le coefficient de la première colonne sur la ligne horizontale supérieure est nul). A chaque itération, y_{n+1} est déterminé directement à partir de y_n .

La figure 2.10 montre que la méthode du point milieu utilise un seul point intermédiaire pour passer de t_i et t_{i+1} . En effet, un seul élément de la première colonne de la partie supérieure du tableau est non nul. Pour passer de t_i à t_{i+1} , on utilise donc un point intermédiaire $t_{i,1}$. La valeur de la fonction à cet instant intermédiaire $y_{i,1}$ et de à l'instant final y_{i+1} sont déterminées à l'aide du tableau de Butcher de la méthode midpoint comme le montre la figure 2.10.

Le schéma de Runge Kutta d'ordre 4 (voir tableau 2.3) a été employé par Eberhardt et al. [EWS96]. Ce schéma a été largement étudié et utilisé, car jusqu'à l'ordre 4 les schémas de Runge Kutta obtenus ont un ordre égal au nombre d'évaluations nécessaires

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	2/6	2/6	1/6

Tableau 2.3 – Runge Kutta d'ordre 4

de la fonction f .

Les méthodes d'intégration présentées dans cette section sont quelques exemples des méthodes explicites à un pas présentes dans la littérature. Le choix de la méthode à utiliser dépend du problème à résoudre. On a constaté que plus l'ordre d'une méthode est élevé, plus cette méthode est précise. Par contre, plus l'ordre de la méthode est élevé, plus elle est coûteuse en temps de calcul (notamment pour les évaluations de $f(t, y)$). Dans le contexte de la simulation de vêtements, l'évaluation de la fonction $f(t, y)$ qui correspond aux forces mécaniques exercées sur les masses est très coûteuse. Si une grande précision de la simulation n'est pas fondamentale pour l'application visée, on préférera éviter RK4 et utiliser des méthodes d'ordre moins important.

Une autre propriété des méthodes d'intégration explicite est que le nouvel état y_{n+1} est entièrement déterminé à partir de l'état courant y_n (voir l'équation 2.17). Pour améliorer la précision des schémas explicites, on essaye d'avoir des algorithmes de prédiction plus judicieux (utilisation de points intermédiaires, diminution du pas de temps). Cependant, dans le problème de Cauchy figurent des informations sur le nouvel état qu'on pourrait exploiter, notamment la dérivée de la solution. C'est l'idée fondamentale des schémas implicites.

2.2.3.2 Méthodes implicites

On peut donner une formulation générale aux méthodes implicites à un pas.

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(t_n, y_n, f(t_{n+1}, y_{n+1})) \quad (2.27)$$

Contrairement au cas explicite précédent, l'existence et l'unicité de la solution y_{n+1} de l'équation 2.27 n'est pas évidente. Une démonstration de l'existence et de l'unicité est faite par Crouzeix et Mignot [CM89] ⁶ sous certaines conditions numériques que l'on supposera toujours satisfaites dans notre cas.

Le nouvel état du système est défini d'après des données portant sur son état actuel y_n et son état futur $\varphi(t_n, y_n, f(t_{n+1}, y_{n+1}))$. Cette particularité confère en général aux méthodes implicites une plus grande stabilité car la valeur y_{n+1} trouvée sera compatible avec l'état du système en t_{n+1} .

L'inconvénient majeur des méthodes implicites est le prix à payer pour trouver y_{n+1} à chaque itération. En effet, l'équation 2.27 est en général non linéaire. (Le système produit dans le cadre de la simulation de vêtements est non linéaire). La résolution d'un système non linéaire est très coûteuse ; diverses techniques ont été développées pour contourner ce problème.

2.2.3.2.1 Méthodes itératives

L'équation 2.27 peut être écrite sous la forme

$$\Phi_n(x) = x - y_n - h\varphi(t_n, y_n, f(t_{n+1}, x)) \quad (2.28)$$

Un ensemble d'approches géométriques itératives permet d'obtenir des valeurs approchées des racines de l'équation 2.28. On peut citer la méthode de **dichotomie** (ou bisection), la méthode de la **sécante** et la méthode de la **fausse position** - voir le manuel de Quarteroni et al. [AQS00] pour une présentation approfondie de ces méthodes.

Ces méthodes ont une convergence très lente et certaines (comme la méthode de dichotomie) ne convergent que globalement, c'est à dire qu'elles ne diminuent pas l'erreur à chaque itération d'où des difficultés pour définir proprement un critère d'arrêt de telles

⁶page 153

méthodes.

D'autres méthodes inspirées de la méthode d'Euler permettent de résoudre l'équation non linéaire 2.28. Dans le contexte de la simulation d'objets déformables, Hauth et al. [HES03] développent une méthode de "Newton simplifiée inexacte" pour la résolution de 2.28. Leur méthode repose sur la résolution à chaque itération d'un système linéaire faisant intervenir la jacobienne de Φ_n par la méthode du gradient conjugué [AB03]. La jacobienne de Φ_n est considérée comme constante pour toutes les itérations pour accélérer la convergence de la méthode. Cependant, les auteurs ne justifient cette approximation que pour des forces linéaires.

2.2.3.2 Méthode de linéarisation : Euler implicite

Afin de résoudre l'équation 2.27, Baraff et Witkin [BW98] proposent d'utiliser la méthode d'Euler implicite qui s'écrit

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

et de linéariser l'équation en remplaçant $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ par son développement de Taylor à l'ordre 1. Le système obtenu s'écrit sous la forme

$$\left[I - h \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) \right] (y_{n+1} - y_n) = hf(t_n, y_n) \quad (2.29)$$

Les auteurs utilisent la méthode du gradient conjugué pour résoudre le système linéarisé permettant ainsi d'obtenir rapidement la solution à chaque itération. La stabilité d'Euler implicite permet aussi de prendre des pas de temps h plus grand. Les résultats présentés par Baraff et Witkin sont très convaincants car ils considèrent des forces $f(t, y)$ dérivant d'un potentiel quadratique. Les forces $f(t, y)$ sont donc linéaires et ne sont pas altérées par la troncature du développement de Taylor à l'ordre 1. Aussi, la méthode d'Euler implicite qui est inconditionnellement stable, génère une dissipation artificielle de l'énergie permettant ainsi d'atténuer les oscillations caractéristiques du système masses-ressorts utilisé.

L'article de Baraff et Witkin [BW98] a été le point de départ de plusieurs travaux :

Desbrun [DSB99] présente une solution spécifique dans le contexte de la réalité virtuelle en supposant que la matrice du système linéaire 2.29 est constante au cours du temps

(les forces sont donc constantes).

Volino et Magnenat-Thalmann [VMT00] proposent d'utiliser une version implicite de la méthode du point milieu afin d'améliorer la précision du schéma Euler implicite.

Eberhardt, Etmuss et Hauth [EEH00] proposent un schéma hybride implicite-explicite afin de tirer profit des avantages des deux types de méthode en terme de précision, convergence et stabilité.

2.2.3.2.3 Méthodes Prédictrices Correctrices

Ces méthodes se présentent généralement comme un ensemble de deux équations donnant y_{n+1} . La première équation appelée prédicteur, permet de prédire (obtenir une première approximation \tilde{y}_{n+1}) de y_{n+1} à l'aide d'une méthode d'intégration explicite. La deuxième équation appelée correcteur, est utilisée ensuite pour corriger la première valeur obtenue (\tilde{y}_{n+1}) à l'aide d'une méthode d'intégration implicite.

L'étape de correction peut aussi être réalisée à l'aide d'une méthode explicite comme dans l'article de Nocent [Noc97] :

La prédiction est obtenue en estimant le prochain état par la méthode d'Euler explicite

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf_n$$

La correction est réalisée à l'aide de la formule des trapèzes

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}))$$

Ce schéma porte le nom de la méthode de Heun. Il est d'ordre 2 mais nécessite deux évaluations de la fonction f .

2.2.4 Méthodes à pas multiples

Les méthodes à un pas permettent de trouver une solution approchée y_{n+1} au problème de Cauchy 2.15 à l'instant t_{n+1} en utilisant uniquement les informations disponibles dans l'intervalle $[y_n, y_{n+1}]$. Les méthodes à pas multiples permettent au contraire d'utiliser un certain nombre de valeurs déjà calculées en un certain nombre de points antérieurs y_n, y_{n-1}, \dots . En chaque point, on tient compte, pour le calcul, de l'histoire de

la fonction y .

Ci-dessous une écriture générale de ces méthodes

$$\sum_{i=0}^{r+1} \alpha_i y_{n+1-i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+1-i}$$

Si $\beta_0 = 0$ la méthode est explicite (e.g. méthode d'Adams-Bashforth - voir 2.2.4.1). Sinon, la méthode est implicite (e.g. méthode d'Adams-Moulton, méthode BDF - voir 2.2.4.2). Des développements sur ces méthodes sont disponibles dans le manuscrit de Nocent [Noc01].

2.2.4.1 Méthodes explicites

On peut citer la méthode d'Adams Bashforth à $k+1$ pas. L'idée de cette méthode qui est très proche de celle de Runge-Kutta, est de remplacer la fonction f par son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $(t_{n-i}, f_{n-i})_{0 \leq i \leq k}$.

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^k b_i f_{n-i}$$

où les b_i sont obtenus par intégration des polynômes d'interpolation de Lagrange.

La méthode d'Adams Bashforth à $k+1$ pas est d'ordre $k+1$. Elle offre donc une bonne précision tout en ne nécessitant que des évaluations intermédiaires de la fonction f . Cependant, la stabilité absolue de la méthode diminue avec l'ordre. En effet, l'utilisation d'un certain nombre des valeurs approchées déjà calculées pour la détermination de la nouvelle valeur approchée fait qu'entre deux pas de temps consécutifs, on transmet plus d'erreur que pour une méthode à un seul pas.

2.2.4.2 Méthodes implicites

On reprend la méthode explicite précédente d'Adams Bashforth. Si on remplace cette fois la fonction f par son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points (t_{n+1-i}, f_{n+1-i}) avec $0 \leq i \leq k$, la méthode d'intégration devient implicite. Cette méthode est connue sous le nom d'Adams Moulton à $k+1$ pas et elle est d'ordre $k+2$ [Jay03]. Cette méthode nécessite d'avoir une évaluation de f_{n+1} . On utilise une méthode prédictrice

correctrice à cet effet telles que celles vues dans le paragraphe 2.2.3.2.3. Généralement, on utilise le schéma d'Adams Bashforth pour l'étape de prédiction.

On peut citer aussi la méthode implicite BDF (Formules de différences rétrogrades). L'idée de cette méthode est d'interpoler les valeurs y_{n+1-i} pour i variant de 0 à k (au lieu d'interpoler f comme dans les méthodes d'Adams). Le polynôme d'interpolation obtenu est considéré comme une solution approchée du problème. Sa dérivée est donc à peu près égale à f .

La méthode BDF à $k+1$ pas est d'ordre $k+1$. Elle est stable jusqu'à l'ordre 7 et devient instable pour des ordres supérieurs [Sch01]⁷. Cette méthode est donc bien adaptée à la résolution de problèmes raides.

D'ailleurs, dans le cadre de la simulation de vêtements, Choi et Ko [CK02] ont utilisé cette méthode BDF d'ordre 2 (formules de différentiation rétrograde) dont le schéma est le suivant

$$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = hf_{n+1} \quad (2.30)$$

Les auteurs remplacent le terme non linéaire f_{n+1} de la précédente équation par son développement de Taylor à l'ordre 1.

L'équation 2.30 devient alors

$$\left(\frac{3}{2}I - h\frac{df}{dy}\right)(y_{n+1} - y_n) = \frac{1}{2}(y_n - y_{n-1}) + hf_n$$

où I est la matrice identité. Le système linéaire de l'équation précédente est résolu en utilisant la méthode du gradient conjugué préconditionné [CK02].

Les auteurs obtiennent des résultats très convaincants mais ne précisent pas la contribution propre au schéma d'intégration dans le réalisme des résultats.

2.2.5 Conclusion

Dans cette section, une étude non exhaustive de la littérature des méthodes d'intégration numérique a été présentée, en essayant à chaque fois de citer les principaux travaux qui ont introduit ces méthodes dans la simulation de vêtements. Des critères de

⁷page 441

classification et de comparaison entre ces méthodes ont été également présentés. Cependant, il est illusoire de vouloir trouver "la" méthode d'intégration efficace à la simulation de vêtements en général. Cela dépend en effet de l'application visée. Des contraintes sur les temps de calcul [DSB99], ou sur la précision de la solution obtenue [Noc97], ou sur la formation de plis et de boucles [CK02] mènent à des choix différents pour le système d'intégration numérique.

2.3 Détermination des paramètres des modèles mécaniques

En choisissant un modèle mécanique de tissu et une méthode d'intégration numérique pour la résolution de l'équation de la dynamique 2.12, on peut commencer à simuler le comportement d'un tissu au cours du temps. L'avantage des modèles présentés est qu'ils permettent de simuler différents types de tissus et dans différents environnements. Afin de tirer profit de cet avantage, il est nécessaire de pouvoir paramétrer le modèle dans l'optique de simuler le mouvement et la forme d'un tissu réel choisi d'avance.

Le paramétrage d'un modèle pour simuler un effet donné est un problème qui n'est pas évident. Les résultats présentés en simulation de vêtements ne correspondent souvent à aucun tissu réel, ou bien les paramètres ont été ajustés par un tâtonnement laborieux. C'est pourquoi il est important d'avoir un protocole permettant d'identifier les paramètres d'un modèle qui simulent un tissu donné. Ces paramètres sont donc obtenus à partir de données réelles soit en manipulant directement un échantillon du tissu concerné, soit en essayant d'identifier ces paramètres à partir d'images ou de vidéos. On présentera dans cette section les principaux travaux connus pour la mesure des paramètres mécaniques qui entrent en jeu lors de la simulation d'un tissu et qui sont obtenus en réalisant des expériences mécaniques 2.3.1 ou bien qui sont identifiés à partir d'images ou de vidéos 2.3.2.

2.3.1 Kawabata Evaluation System

Le jugement des qualités d'un tissu est généralement basé sur les informations que nous fournissent nos sens. Notre jugement est donc qualitatif, subjectif, dépendant de

notre état d'âme du moment. Cependant, pour caractériser un tissu, nous avons besoin d'informations fiables et objectives, permettant la prédiction du comportement du tissu en réponse à différentes sollicitations.

Une solution a été apportée par les travaux de Kawabata [Kaw80] qui a défini un paramètre global : "La main" (THV : Total Hand Value). Ce concept reprend l'idée que c'est un expert textile qui juge par un examen manuel les qualités d'un tissu. Un tissu est caractérisé par un ensemble de données décrivant les propriétés mécaniques mais également thermiques et hygrométriques de ce tissu. Pour la simulation numérique, nous nous bornerons aux propriétés mécaniques.

Le concept de "main" définit donc les propriétés mécaniques d'un tissu au moyen de cinq tests physiques dont on peut dégager seize paramètres caractéristiques permettant ainsi de discriminer des tissus les uns par rapport aux autres. Cet ensemble de paramètres est connu sous le nom de KES-F (*Kawabata Evaluation System For Fabrics*) [Kaw80].

Kawabata a aussi développé et construit des machines de très grande précision permettant de réaliser les tests physiques cités plus haut. Les tests effectués par ces appareils constituent une référence pour les concepteurs de simulateurs de vêtements, et ce, dans la mesure où ils représentent la réalité du comportement des tissus en réaction aux sollicitations et permettent ainsi de caractériser de façon unique un tissu donné par un jeu de paramètres.

2.3.1.1 Les expériences de Kawabata

Les machines de Kawabata, fournissent, pour la partie mécanique, des caractéristiques précises du tissu à travers cinq expériences :

- traction
- cisaillement
- flexion
- compression
- rugosité

Ces tests sont effectués selon la chaîne et la trame (un tissu est en général anisotrope). On procède selon le schéma contrainte-déformation. Soit on contrôle la déformation du tissu

(en imposant un déplacement donné) et on mesure les forces engendrées (cisaillement, flexion), soit on impose une force donnée et on mesure la déformation du tissu (traction). Les machines de Kawabata fournissent directement les courbes contrainte-déformation correspondant à chaque expérience⁸.

Lors de ces tests, plusieurs critères doivent être vérifiés :

- Les déformations ou les efforts sont adaptables pour rester dans la limite d'élasticité des matériaux.
- Les vitesses sont assez lentes pour réduire les effets visqueux inhérents au comportement des matières.
- Les déformations sont réversibles, autrement dit, chaque test permet d'effectuer un cycle complet déformation/recouvrement.
- Les jeux mécaniques des appareils sont réduits pour rendre leur effet négligeable.
- On oriente les forces de déformation de manière à écarter l'effet de la gravité.
- Les dimensions des éprouvettes sont choisies de manière à limiter l'effet des bords.

Dans le cadre de cette thèse, seules les courbes issues des trois premières expériences sont utilisées et ce, parce que notre modèle est surfacique, alors que les propriétés obtenues en compression et en rugosité sont volumiques.

2.3.1.2 Le test de cisaillement

Un échantillon de forme rectangulaire et de dimensions 20 cm sur 5 cm est cisailé dans les 2 sens (voir la figure 2.11).

A l'instant $t = 0$, le morceau de tissu est au repos. L'un de ses bords de longueur 20 cm (AC) est maintenu tendu à l'aide de petites masses fixées sur ce bord et qui pendent. On applique une force de cisaillement à la vitesse constante de 0.417 mm/s, soit une vitesse angulaire de 0.00834/s⁹. Lorsque l'angle θ atteint 8 degrés (à $t = t_1$), on applique la même force dans le sens inverse, jusqu'à avoir θ égale à -8 degrés (à $t = t_3$). Enfin, on revient à la position initiale ($t = t_f$).

⁸sous forme analogique pour les premières machines -courbe directement tracée sur papier-, ensuite sous forme numérique pour les machines les plus récentes.

⁹c'est la vitesse en mm/s divisée par la largeur (50 mm)

Durant toute l'expérience, la distance AB est maintenue constante ce qui permet d'obtenir un cisaillement "pur" (absence de toute contrainte de traction).

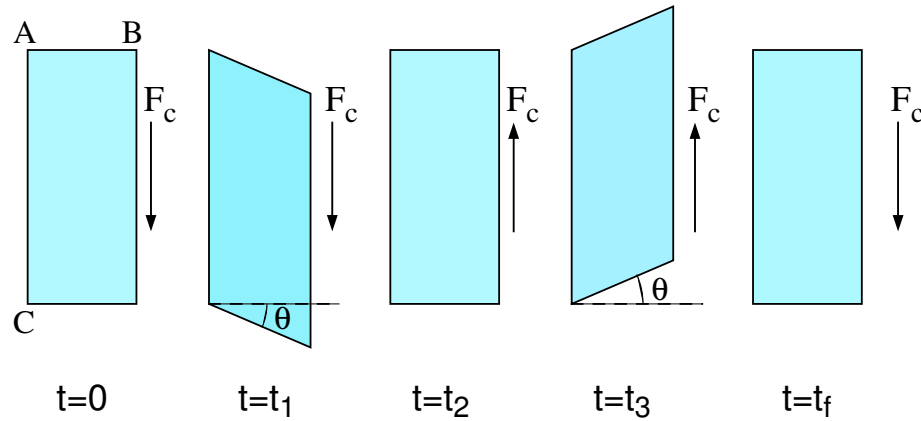


Figure 2.11 – Test de cisaillement (vue de dessus)

Un exemple de courbe produite par le test de cisaillement est donné par la figure 2.12

2.3.1.3 Le test de traction

Un échantillon de tissu de forme rectangulaire et de dimensions 20 cm sur 5 cm est étiré par une pince, puis revient à sa position initiale (figure 2.13).

A l'instant $t = t_0$, le morceau de tissu est au repos. L'un de ses bords est fixé (le bord AC). On tire l'autre bord dans la direction orthogonale au bord fixé. Le taux de déformation est maintenu à $4.10^{-3}/s$ ¹⁰. On arrête le mouvement lorsque la tension F_t du tissu atteint $500gm/cm$ ¹¹ ($t = t_1$). On inverse le sens de mouvement jusqu'à retrouver la position initiale ($t = t_f$).

Un exemple de courbe produite par le test de traction est donné par la figure 2.14

¹⁰taux de déformation = $\frac{dp}{dt}$ avec $l = \text{long}[AC]$

¹¹ $1gm = 1gram\text{force} = 9.80665m/s^2$

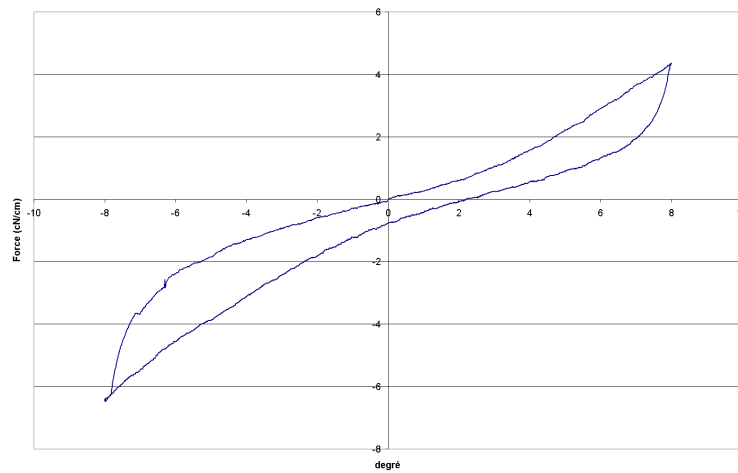


Figure 2.12 – Courbe de cisaillement de Kawabata

2.3.1.4 Le test de flexion

Une éprouvette de dimensions 2.5 cm sur 1cm est pliée, selon la largeur, avec une vitesse de flexion constante entre 2 pinces (voir figure 2.15).

Le principe de l'expérience Kawabata en flexion est de ne faire subir aucune traction/compression au tissu ; pour cela l'extrémité mobile du tissu prend, pour une courbure K donnée, la position (X, Y, Z) suivante :

$$X = \frac{\sin LK}{K} \quad (= 0, \text{ si } K = 0)$$

$$Y = \text{cste}$$

$$Z = \frac{1 - \cos LK}{K} \quad (= L, \text{ si } K = 0)$$

Cette loi (une cochléoïde - voir annexe) assure que dans le plan $Y = 0$ l'arc de cercle de longueur L joignant $(0, 0)$ et (X, Z) a une courbure constante égale à K .

L'expérience s'arrête lorsque le morceau de tissu décrit un demi-cylindre parfait.

Un exemple de courbe produite par le test de flexion est donné par la figure 2.16

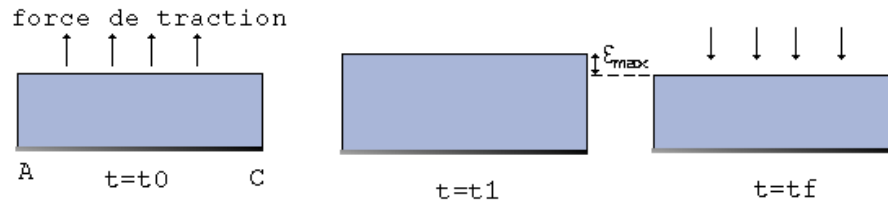


Figure 2.13 – Test de traction (vue de dessus)

Les travaux de Kawabata ont été exploités par plusieurs chercheurs afin de trouver les paramètres adéquats à leurs simulateurs. On peut citer par exemple Breen et al. [BHW94b] [BHW94a]. Les auteurs calculent des fonctions d'énergie à partir des courbes fournies par le KES. L'identification des paramètres mécaniques du tissu n'est cependant faite que sur la partie élastique des courbes (seulement l'aller).

Eberhardt et al. [EWS96] ont adopté la même démarche que Breen et al. Les auteurs identifient les paramètres mécaniques du tissu sur toute la courbe fournie par le KES (prise en compte de l'hystérésis). La courbe est dans ce cas approchée par une courbe linéaire par morceaux.

2.3.2 Autres méthodes d'estimation des paramètres d'un tissu

Les machines de Kawabata font partie des outils essentiels pour l'étude du comportement mécanique des tissus. Elles fournissent des résultats précis et très stables. Cependant, ces machines ont un coût très élevé et leur utilisation nécessite de respecter un protocole très strict. Il faut donc en général s'adresser à des laboratoires ou entreprises spécialisés disposant de ce matériel¹² pour obtenir les courbes de Kawabata pour un tissu donné.

Beaucoup de chercheurs ont voulu s'affranchir de cette contrainte, surtout dans le do-

¹²le nombre de ces laboratoires et entreprises en France ne dépasse pas une dizaine

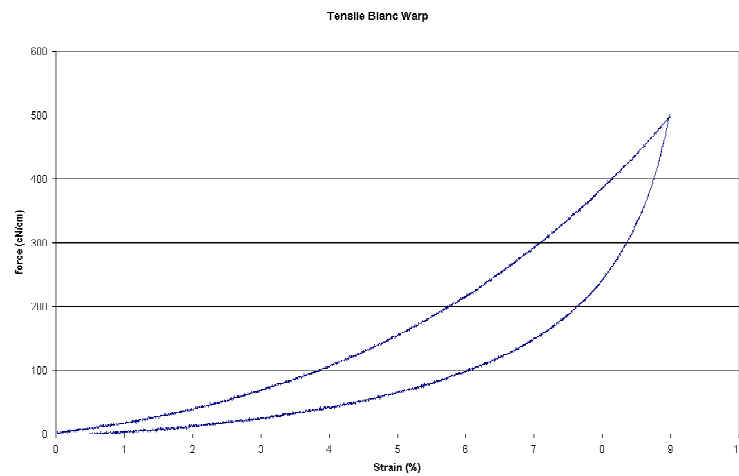


Figure 2.14 – Courbe de traction de Kawabata

maine graphique, où la plausibilité du résultat est souvent plus importante que la justesse mécanique.

On peut ajouter aussi que l'utilisation de paramètres mécaniques issues du KES ne garantit pas une simulation réaliste, puisqu'il faut encore maîtriser les paramètres de dissipation d'énergie et de gestion des contacts lors de la simulation.

Ainsi, d'autres méthodes d'estimation des paramètres d'un tissu basées en général sur des images, des vidéos ou la forme 3D des tissus ont été développées.

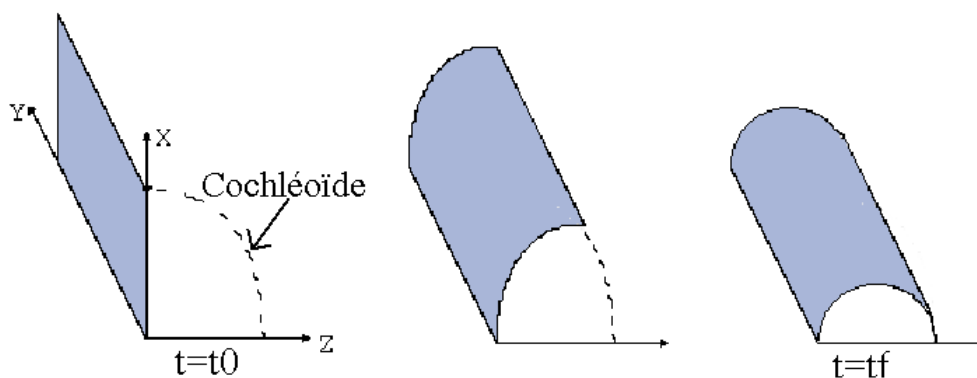


Figure 2.15 – Test de flexion (en perspective)

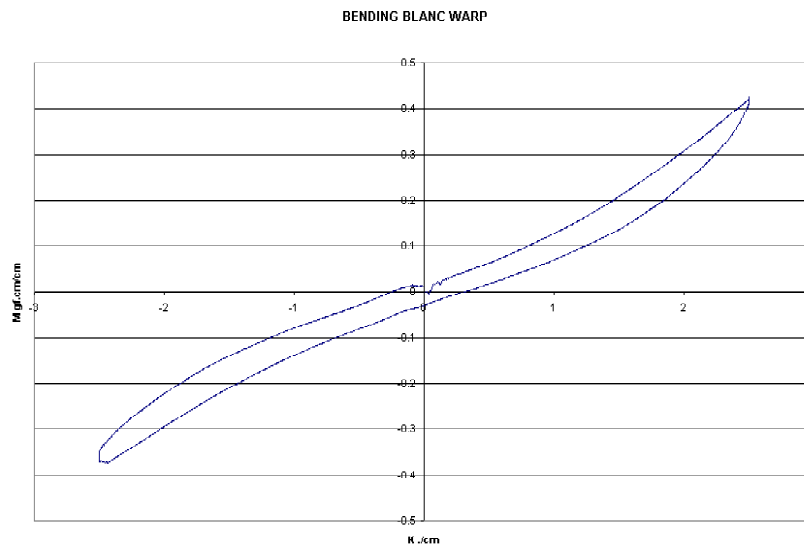


Figure 2.16 – Courbe de flexion de Kawabata

2.3.2.0.1 Drapemètre

Colier et al. [CCOS91] présentent une approche pour modéliser et mesurer le drapé des tissus en utilisant un drapemètre initialement développé par Chu et al. [CCT50]. Le drapemètre maintient un morceau de tissu circulaire entre deux disques identiques. Le tissu (plus grand) tombe sur les côtés des disques et une lumière ponctuelle placée au dessus du dispositif permet de capturer l'ombre du tissu. Un coefficient de drapé est défini [CCT50] comme le pourcentage de l'anneau (entre le rayon R du tissu et le rayon r des disques c.f. figure 2.17) couvert par l'ombre projetée. Colier et al. [CCOS91] utilisent cette mesure pour comparer le drapé d'un tissu réel et celui d'un tissu virtuel.

Même si les valeurs données par le drapemètre sont insuffisantes pour juger le réalisme des simulations produites, le drapemètre est parmi les premiers instruments permettant de mesurer l'écart entre une expérience réelle et une simulation virtuelle en ce qui concerne les tissus.

2.3.2.0.2 Algorithmes génétiques

Louchet, Provot et Crochemore [LPC95] présentent une méthode se basant sur un algorithme génétique pour identifier les paramètres mécaniques d'un système masses-

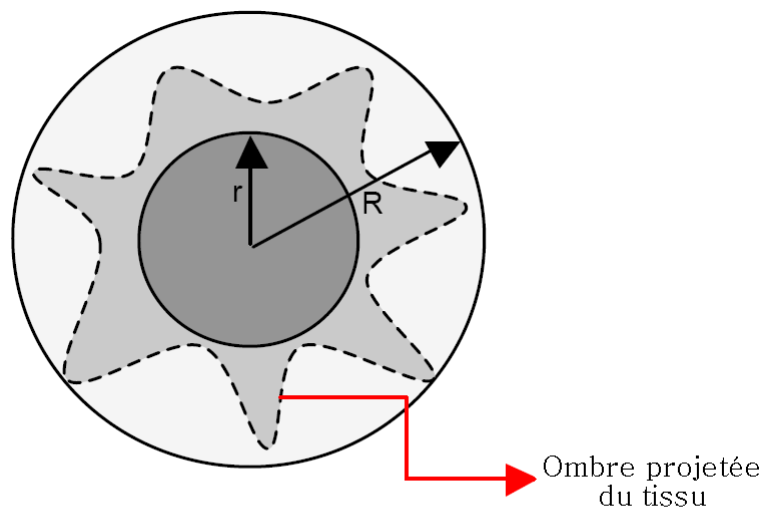


Figure 2.17 – Ombre projetée du tissu à partir du drapemeter

ressorts tel que celui proposé par Provot [Pro95]. Leur algorithme prend comme données de référence la position 3D d'un tissu fixé par deux coins. La fonction de coût de l'algorithme génétique mesure la différence entre le comportement du modèle simulé et de celui des données de référence. Le système possède 18 paramètres à identifier. Des simplifications du modèle ont été faites (tissu isotropique et tous les ressorts ont la même valeur de raideur) afin de ramener le nombre de paramètres à 5 et réduire ainsi la complexité algorithmique du problème.

Les résultats présentés sont satisfaisants pour le modèle choisi. Cependant, le tissu de référence ne provient pas de la capture d'un tissu réel mais il est le résultat de la simulation d'un tissu fixé par deux coins, produite en utilisant toujours le même modèle de Provot. La validation de ce procédé en utilisant un vrai tissu (capturé par MOCAP par exemple) est beaucoup moins évidente, surtout si le modèle est beaucoup trop simplifié. Joukhadar [Jou92] utilise également un algorithme génétique pour la détermination des paramètres mécaniques des systèmes déformables en général. Mais comme dans le cas précédent, aucune expérience réelle n'a été menée sur le terrain pour la validation.

2.3.2.0.3 Utilisation de données réelles

Certains chercheurs ont essayé de valider leurs modèles et leurs paramètres sur des données réelles. Jovic et Huang [JH97] [JH98] considèrent le drapé statique d'un tissu dont ils capturent la forme 3D à l'aide d'un scanner. La forme 3D obtenue est considérée comme la surface d'un solide et une simulation du drapé d'un tissu virtuel sur le solide obtenu est réalisée. Cette expérience est répétée en utilisant plusieurs paramètres. Un algorithme d'optimisation permet de trouver les bons paramètres qui font converger le résultat de la simulation vers la forme obtenue par le scanner. Les auteurs utilisent un modèle masses-ressorts simple pour leurs simulations et la métrique d'erreur choisie pour l'algorithme d'optimisation est la distance moyenne entre les données du scanner et les sommets de la forme simulée.

Cependant, l'expérience menée par Jovic et Huang reste limitée au cas statique (les paramètres dynamiques ne sont pas identifiés). Aussi, simuler le drapé du tissu sur sa forme réelle obtenue par le scanner réduit sensiblement les degrés de liberté du système et ne permet pas de juger totalement de la qualité du modèle choisi et la précision des paramètres identifiés.

Bhat et al. [BTH⁺03] proposent une méthode pour retrouver les paramètres mécaniques et dynamiques de divers tissus à partir de vidéos. Le modèle de tissu utilisé est celui de Baraff et Witkin [BW98] couplé avec le modèle de détection de collision de Bridson et al. [BFA02]. Le principe est de générer une animation virtuelle à partir des paramètres trouvés itérativement et de comparer à chaque itération la vidéo générée avec la vidéo initiale.

Une lumière structurée est projetée sur le tissu lors de la capture réelle de son mouvement. En appliquant une série de filtres à la vidéo obtenue, les auteurs retrouvent l'orientation locale du tissu en chaque pixel. Ils obtiennent ainsi des cartes d'orientation locales (constante quand le tissu est plan, variable sur les plis et les creux du tissu) qui sont à la base de la métrique d'erreur utilisée.

La métrique d'erreur utilisée ¹³ par Bhat et al. pour comparer la vidéo originale et la vidéo synthétique, se base sur la comparaison des cartes d'orientation locales et la comparaison des silhouettes.

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'estimer aussi les paramètres dynamiques tels que les paramètres de dissipation. Les auteurs ont d'ailleurs corrigé l'expression de la force de dissipation d'énergie de l'air qui dépendait de la discrétisation (taille des triangles) dans le modèle de Baraff et Witkin.

Cependant, l'expérience de Bhat et al. ne présente aucun moyen de retrouver une paramétrisation de la surface du tissu (coordonnées 3D du tissu) nécessaire pour mesurer localement les déformations internes du tissu tels que la tension ou bien le cisaillement (cette paramétrisation peut être retrouvée en collant des pastilles réfléchissantes sur le tissu et en utilisant un système de capture de mouvement par exemple). Les forces de tension et de cisaillement ont un effet sur la forme globale et le drapé du tissu. Donc, si les paramètres du modèle de tissu ne peuvent pas être déterminés pour la traction et le cisaillement, les résultats produits par le simulateur de Bhat et al. présente certainement des lacunes quant au réalisme des simulations produites.

2.3.3 Conclusion

La détermination des paramètres des modèles mécaniques utilisés pour la simulation de vêtements est un problème de très grande importance. Les paramètres du modèle ont une grande influence sur le résultat de la simulation.

Dans le cadre de la simulation réaliste de vêtements, et afin de reproduire fidèlement le comportement d'un tissu donné, il est essentiel de mettre en place des expérimentations pour mesurer ces paramètres. Ces mêmes expériences peuvent aussi servir pour la validation de l'ensemble modèle et paramètres, en comparant les résultats virtuels avec ceux de l'expérimentation.

¹³Cette métrique est certainement basée sur une hypothèse des neurobiologistes stipulant que la perception visuelle humaine est sensible aux lignes et bordures en mouvement

2.4 Synthèse

Ce chapitre présente les étapes clés de la modélisation et de la simulation des textiles tissés.

La première étape est la détermination d'un modèle mécanique capable de reproduire le même comportement qu'un tissu réel ou au moins un comportement plausible, selon l'application visée. A travers la littérature des deux communautés graphique et textile, la modélisation des matériaux tissés se base de plus en plus sur des modèles physiques qui sont, soit continus (se basent sur la théorie de la mécanique des milieux continus), soit discrets (système masses-ressorts, système de particules).

Le choix d'un modèle physique pour représenter le tissu, aboutit généralement à l'intégration au cours du temps de l'équation de Newton pour déterminer son mouvement. La deuxième étape clé est donc le choix d'un schéma d'intégration numérique de cette équation. Ceci conditionne la précision de la simulation qu'on va obtenir, mais également la rapidité de son obtention et sa stabilité.

La troisième étape clé est la détermination des paramètres physiques du modèle mécanique choisi. Ces paramètres sont en général déterminés en mettant en place des expérimentations et en utilisant des techniques d'optimisation.

Chapitre 3

Notre modèle mécanique de tissu

Un grand nombre de modèles mécaniques de tissus existent dans la littérature comme le montre le chapitre 2. Le choix du modèle dépend largement du type d'application visé. Notre objectif premier est d'avoir un simulateur permettant d'obtenir des résultats réalistes, utilisables pour les professionnels du prêt-à-porter et du textile, plus généralement. Ainsi, notre première contrainte est le réalisme des simulations produites. Pour autant, on ne néglige pas les professionnels du graphisme et de la réalité virtuelle (producteurs d'animation 3D, producteurs de cinéma ...). Ainsi, à chaque fois que l'on a pu simplifier le modèle (pour gagner en temps de calcul) sans que cela n'altère le réalisme des images (la précision mécanique est elle par contre diminuée) cela a été réalisé.

3.1 Le système Masses-Ressorts

On se place dans le cadre des hypothèses de Love-Kirchhoff ou de coque mince [Gar99]. Le tissu ne subit donc aucune déformation selon son épaisseur. Cette hypothèse nous permet d'employer un modèle surfacique de tissu représentant sa surface moyenne¹.

Le modèle choisi pour le simulateur de vêtements de l'équipe Mirages² est un modèle

¹des modèles prenant en compte l'épaisseur du tissu existent [Pie30] [Kem58] mais ne sont employés que pour simuler un fil et non un vêtement complet ; le coût en calcul serait exorbitant !

²INRIA Rocquencourt

masses-ressorts inspiré du modèle de Provot [Pro95]³. Plusieurs raisons permettent de favoriser ce modèle par rapport à d'autres dans un souci de précision. D'abord, un tissu est un matériau anisotrope qui présente deux directions privilégiées : la chaîne et la trame. En effet, un tissu est défini comme une étoffe formée par l'entrecroisement perpendiculaire de l'ensemble des fils : cet entrecroisement est réalisé au cours du tissage sur métier ou sur machine à tisser. Ces ensembles de fils sont :

- la **chaîne** dans le sens longitudinal
- la **trame** dans le sens transversal

Le principe du tissage est de partir d'une nappe de fils de chaîne parallèles entre eux, et de les entrecroiser avec des fils de trame comme le montre la figure 3.1. Le modèle



Figure 3.1 – Métier à tisser : les fils de chaîne sont séparés en deux couches (les "pris" en haut et les "laissés" en bas). Les fils de trame passent entre les pris et les laissés

masses-ressorts permet de retrouver immédiatement ces deux directions privilégiées puisqu'il présente deux directions principales orthogonales.

L'utilisation d'un modèle surfacique de tissu restreint l'ensemble des déformations possibles du matériau à l'élongation, au cisaillement et à la flexion selon les directions de la chaîne et de la trame. D'où l'intérêt encore une fois du modèle masses-ressorts.

Aussi, dans un système masses-ressorts, la masse du tissu n'est pas répartie d'une ma-

³avec des améliorations que l'on détaillera plus loin

nière continue sur le tissu, mais seulement d'une manière discrète en un certain nombre de points. Ainsi, chaque point (ou particule) est considéré comme un système physique ayant sa masse, sa position et sa vitesse et sur lequel agissent des forces extérieures. Sur chaque particule on peut alors appliquer les lois de la dynamique pour déterminer son mouvement. L'aspect discret des systèmes masses-ressorts peut permettre de réduire le temps de calcul. En effet, le système produit est plus facilement parallélisable que ceux produits par des formulations continues par exemple [Zar03] et [KB04]. Chaque particule n'interagit qu'avec ses voisines et donc le découpage du traitement sur plusieurs processeurs est plus aisé.

Les particules voisines sont reliées par des ressorts qui modélisent les efforts internes au tissu. Ces ressorts sont de trois types :

- Ressort de structure : relie deux masses voisines dans le sens de la chaîne ou de la trame
- Ressort de cisaillement : relie deux masses voisines dans les deux directions diagonales à la chaîne et à la trame
- Ressort de flexion : relie quatre masses formant deux facettes adjacentes afin de modéliser une flexion pure. Cette modélisation a été introduite par Denise [Den06].

Les ressorts de structure et de cisaillement agissent dans le plan du tissu alors que les ressorts de flexion agissent dans le plan orthogonal du tissu.

Tous les ressorts doivent être munis d'une loi permettant de mesurer les forces qu'ils engendrent en fonction de leur état de déformation. Ce point sera abordé en détail à la section 3.4. La résultante des forces engendrée par les ressorts en simulant virtuellement les expériences du KES doit être la même que celle mesurée réellement par le KES. Ce dernier point sera développé au chapitre 4 dans le cas spécifique du cisaillement.

3.2 Le système visco-élastique

Si le modèle masses-ressorts était limité à des masses interconnectées par des ressorts (représentés schématiquement par la figure 3.2), le simulateur ne pourrait pas

converger vers un état d'équilibre mécanique mais continuerait à osciller indéfiniment. A chaque ressort est donc associé un dissipateur (représenté schématiquement par la figure 3.3) afin de modéliser le comportement visco-élastique du tissu. Le dissipateur engendre une contrainte qui ne dépend que de la vitesse de déformation du ressort et qui tend à s'opposer au changement de déformation, donc à dissiper l'énergie du système {ressort+dissipateur}. Le comportement visco-élastique n'est pas fictif mais il provient des frictions qui existent entre les différentes composantes du tissu (la chaîne et la trame et les fibres composant un fil).

La combinaison d'un ressort et de son dissipateur associé peut s'effectuer de deux ma-



Figure 3.2 – Composant élastique (ressort)

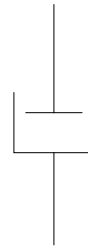


Figure 3.3 – Composant visqueux (dissipateur)

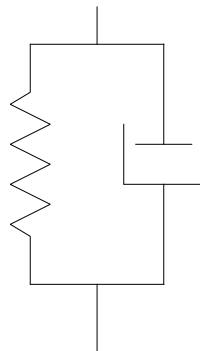


Figure 3.4 – Modèle visco-élastique de Kelvin-Voigt

nières comme explicité par Christensen [Chr71] :

- en parallèle (voir figure 3.4) appelé aussi modèle de Kelvin-Voigt : dans ce modèle, les deux composants ont la même déformation alors que la contrainte totale est la somme des contraintes dues à l'élément élastique et à l'élément visqueux.

- en série appelé aussi modèle de Maxwell : dans ce modèle, les deux composants ont la même contrainte alors que la déformation totale est la somme des déformations dues à chaque élément.

Le modèle de Maxwell est la représentation d'un fluide visco-élastique alors que le modèle de Kelvin-Voigt est la représentation d'un solide visco-élastique [Chr71]. On utilise alors une modélisation de la visco-élasticité basée sur le modèle de Kelvin-Voigt. Ce modèle, ainsi que la détermination de ses paramètres seront détaillés dans le chapitre 5.

3.3 Contraintes extérieures

Outre la modélisation masses-ressorts et la modélisation visco-élastique de Kelvin-Voigt, notre simulateur prend en compte les forces extérieures appliquées au tissu. Ces forces s'exercent sur chaque masse (ou petit groupe de masses) séparément. Parmi ces forces, on peut citer la force de résistance de l'air qui sera traitée en détail au chapitre 5 et qui modélise la dissipation de l'énergie du tissu due à cette résistance.

Notre simulateur gère aussi les forces de contact et de collision entre le tissu et les objets du décor d'une part, et entre les différentes parties du tissu (appelées auto-collisions) d'autre part. La gestion des collisions n'est pas traitée dans ce manuscrit. Le lecteur pourra cependant consulter les thèses de Provot [Pro95] et de Denise [Den06] pour une étude détaillée et complète.

Enfin, notre simulateur modélise aussi d'autres contraintes extérieures telles que la gravité ou des contraintes spécifiques sur les positions ou les vitesses de certaines parties du tissu en utilisant le modèle de gestion des contraintes de Baraff et Witkin [BW98].

3.4 Lois de comportement des ressorts

Les déformations d'un tissu sont représentées dans notre modèle par la simulation de la traction, du cisaillement et de la flexion du tissu avec des ressorts spécifiques comme cité au début de ce chapitre. La traction, le cisaillement et la flexion d'un tissu sont caractérisés par un comportement non linéaire hystérétique comme le montre les mesures obtenues par Kawabata [Kaw80]. L'hystérésis peut être définie comme une mémoire du

système. La déformation du tissu en réponse à une contrainte donnée dépend donc également de son passé.

Les ressorts de notre modèle de tissu reproduisent ce comportement non linéaire hystérotique réel [DRG03] mesuré à partir des courbes fournies par le KES. La détermination des fonctions approchant au mieux les mesures réelles de Kawabata a été initiée par Taibi et finalisée par Denise [Den06] en se basant sur le modèle de Bliman-Sorine [BS91].

3.4.1 Loi de comportement des ressorts de flexion

Un ressort de flexion relie quatre masses formant deux facettes adjacentes comme le montre la figure 3.5. Les facettes adjacentes dans cet exemple sont $(m_0m_1m_2)$ et $(m_0m_1m_3)$. L'expérience du KES en flexion mesure le moment nécessaire pour réaliser

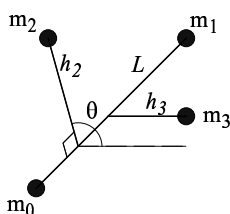


Figure 3.5 – Ressort de flexion

une flexion pure avec échantillon de tissu de forme et de taille standard (le standard du KES). La courbe fournie donne le moment de flexion par unité de longueur par rapport à la courbure κ du tissu.

$$\kappa = \frac{\theta}{h} \quad \text{où} \quad h = \frac{h_2 + h_3}{2}$$

Soit σ le moment de flexion mesuré par KES :

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_p$$

où σ_e et σ_p sont respectivement la composante élastique et la composante plastique du moment mesuré.

σ_e et σ_p sont approchées par des polynômes du second ordre :

$$\begin{aligned}\sigma_e &= a_e \kappa + b_e \kappa |\kappa| \\ \frac{d\sigma_p}{d\kappa} &= a_p \kappa + b_p \kappa |\kappa|\end{aligned}$$

Les paramètres des polynômes sont obtenus par optimisation décrite par Denise [Den06].

La force exercée par un ressort de flexion r sur une masse i est :

$$f_{r,i} = -L\sigma \frac{d\kappa}{dP_i} \quad (3.1)$$

où P_i est la position de la masse i et L la distance entre les masses m_0 et m_1 (voir la figure 3.5).

3.4.2 Loi de comportement des ressorts de traction

Un ressort de traction relie deux masses voisines selon la chaîne ou la trame. La force exercée par un ressort de traction r sur une masse i a la même expression que celle d'un ressort de flexion (voir l'équation 3.1) avec L qui représente la longueur de la quantité de matière qu'il représente, σ la force de Kawabata mesurée par unité de longueur et où κ est remplacé par ϵ qui représente la déformation relative du ressort (voir l'équation 3.2).

$$f_{r,i} = -L\sigma \frac{d\epsilon}{dP_i} \quad (3.2)$$

Afin de prendre en compte le caractère hystérétique du tissu, on écrit également que la force des ressorts de traction est la somme d'une composante élastique et une composante hystérétique.

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_p$$

où σ_e et σ_p sont respectivement la composante élastique et la composante plastique de la force de traction mesurée.

σ_e et σ_p sont approchées par des polynômes de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\sigma_e &= a_e \epsilon + b_e \epsilon |\epsilon| + c_e \epsilon^3 + d_e \epsilon^3 |\epsilon| \\ \frac{d\sigma_p}{d\epsilon} &= a_p \sigma_p + b_p \epsilon^2 + c_p \epsilon^3 + d_p \epsilon^4\end{aligned}$$

Tous les paramètres des deux polynômes sont obtenus par optimisation globale minimisant l'erreur entre les courbes du KES et les modèles donnés par les équations précédentes.

3.4.3 Loi de comportement des ressorts de cisaillement

Un ressort de cisaillement connecte deux masses voisines selon les diagonales aux directions de la chaîne et de la trame. La force exercée par un ressort de cisaillement r sur une masse i a la même expression que celle d'un ressort de flexion (voir l'équation 3.2) avec ϵ qui représente la déformation relative du ressort, L la longueur de la quantité de matière qu'il représente. Dans le cas du cisaillement, σ n'est pas pris comme étant la force de Kawabata mais une adaptation de celle-ci. Ce point est l'objet du chapitre 4.

On a toujours

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_p$$

où σ_e et σ_p sont respectivement la composante élastique et la composante plastique de la transformée de la force de cisaillement mesurée.

σ_e et σ_p sont approchées par des polynômes de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_e &= a_e \epsilon + b_e |\epsilon| \\ \frac{d\sigma_p}{d\epsilon} &= a_p \sigma_p + b_p + c_p |\epsilon| + d_p \epsilon^2 \end{aligned}$$

3.5 Méthode d'intégration numérique

Une fois le modèle mécanique choisi, la détermination de l'évolution du tissu dans son milieu passe par l'intégration au cours du temps de l'équation fondamentale de la dynamique régissant son mouvement comme précisé au chapitre 2.2.

On choisit comme modèle d'intégration le schéma d'Euler implicite, adapté pour la simulation de textile par Baraff et Witkin [BW98] et présenté à la section 2.2.3.2.2. L'avantage de la méthode d'Euler implicite est qu'elle est inconditionnellement stable et permet de prendre un pas de temps plus grand que les méthodes explicites. On obtient alors le système suivant à résoudre

$$\begin{cases} (M - h \frac{\partial f}{\partial v} - h^2 \frac{\partial f}{\partial x}) \Delta v &= h(f_0 + h \frac{\partial f}{\partial x} v_0 + \frac{\partial f}{\partial x} y) \\ \Delta x &= h(v_0 + \Delta v_0) + y \end{cases} \quad (3.3)$$

Le calcul des variations des forces selon les positions et les vitesses des masses s'effectue avec un développement de Taylor à l'ordre 1. La résolution du système est réalisée avec l'algorithme du gradient conjugué modifié de Baraff et Witkin.

Chapitre 4

Etude du cisaillement

Ce chapitre a été publié, en partie, dans le journal *Textile Research Journal* [CGB06].

4.1 Introduction

Comme cela a été vu au chapitre précédent, un tissu chaîne/trame est défini comme une étoffe formée par l'entrecroisement perpendiculaire de l'ensemble des fils : cet entrecroisement est réalisé au cours du tissage sur métier ou machine à tisser.

Le principe du tissage est de partir d'une nappe de fils de chaîne parallèles entre eux, et de les entrecroiser avec des fils de trame. Cet entrecroisement se fait selon un certain dessin ou ordre (l'armure). L'armure est donc définie par le nombre de fils qui représente la période à partir de laquelle il y a répétition (en chaîne et en trame).

Les propriétés mécaniques du tissu dépendent naturellement des propriétés des fils qui le composent mais aussi de l'armure.

Les propriétés mécaniques d'un tissu transposables à notre modèle (cf chapitre précédent) sont la traction, le cisaillement et la flexion. L'utilisation des analyses fournies par le KES (voir chapitre état de l'art) permet d'avoir des mesures physiques réelles de ces propriétés. Plusieurs auteurs ont cherché à exploiter ces propriétés mécaniques dans leur modèle, par exemple Breen et al [BHW94b] [BHW94a].

Le phénomène du cisaillement d'un tissu est fondamentalement différent de la trac-

tion et de la flexion. Le cisaillement est totalement indépendant de la déformation des fibres qui constituent les fils. Il ne dépend que de la géométrie du tissu et plus particulièrement de la déformation de l'entrecroisement des fils de chaîne et de trame.

Le but de ce chapitre est d'établir un modèle de cisaillement pour notre simulateur de vêtement muni de fonctions de transfert qui permettent de calculer les lois de contrainte par rapport à la déformation du tissu en cisaillement à partir des courbes de Kawabata (KES). On s'attache plus particulièrement à modéliser un cisaillement pur (sans effets parasites sur la traction ou la flexion) que l'on validera en réalisant virtuellement les expériences du KES et en comparant les courbes obtenues avec les courbes réelles du KES.

4.2 Les modèles de cisaillement

L'étude du cisaillement d'un tissu chaîne-trame dans le plan consiste donc à étudier l'effort nécessaire pour obtenir la rotation de la chaîne par rapport à la trame (et inversement) et obtenir une distorsion du tissu.

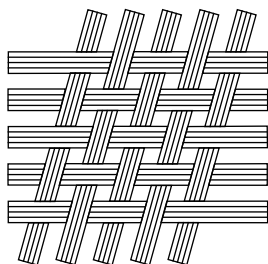


Figure 4.1 – Cisaillement d'un tissu chaîne-trame

L'étude du comportement en cisaillement dans le plan menée par Boisse et al [BZnAG04] montre que la courbe de réponse du tissu en cisaillement peut être divisée en trois zones (voir figure 4.2) :

- Pendant la phase 1, les mèches en chaîne subissent une rotation par rapport à

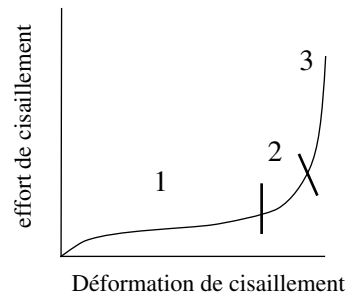


Figure 4.2 – Courbe de comportement en cisaillement plan d'un tissu

ceux de la trame. Les frottements de rotation entre les réseaux chaîne et trame sont les seuls à s'opposer à la distorsion du tissu. Donc, les efforts de cisaillement sont faibles.

- La phase 2 débute quand les mèches en chaînes arrivent en contact avec leurs voisines et commencent à devenir comprimées latéralement (encombrement des mèches). L'augmentation de l'effort de cisaillement est dès lors rapide.
- La phase 3 correspond à un blocage complet des mèches latéralement (augmentation très rapide de l'effort de cisaillement) et se traduit par l'apparition de plissements.

La modélisation du cisaillement pour la simulation de vêtements reste limitée à la première partie de la courbe 4.2. Comme le cisaillement dans le tissu d'un vêtement porté est faible en temps normal, les modèles de tissu utilisés (modèles continus et modèles discrets) sont des modèles surfaciques dont les plis sont engendrés seulement par les ressorts de flexion. Les plis qui apparaissent dans un tissu suite à un cisaillement ne sont pas dans le cadre de cette étude.

Deux modélisations du cisaillement se dégagent au sein des systèmes masses-ressorts.

- Le modèle adopté entre autres par Breen et al [BHW94b] considère le cisaillement comme une fonction de l'angle θ entre la chaîne et la trame du tissu. Les forces

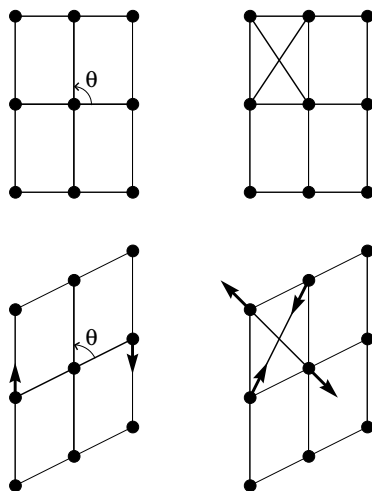


Figure 4.3 – Modèles de cisaillement de Breen (gauche) et de Provot (droite)

de cisaillement sont dans la direction de la chaîne (ou la trame) comme le montre les schémas de gauche de la figure 4.3. Dans ce cas, on considère une masse centrale ij et ses quatre plus proches voisins afin de calculer les forces de cisaillement selon la chaîne et la trame.

- Le modèle adopté par Provot [Pro95] considère le cisaillement comme une fonction des longueurs des ressorts de cisaillement. Une maille composée de quatre masses reliées par deux ressorts binaires de cisaillement permet donc de modéliser le cisaillement du tissu. Les forces de cisaillement suivent les directions diagonales du maillage (c'est-à-dire les directions des ressorts : voir la figure 4.3 à droite).

On adoptera cette deuxième modélisation pour notre cisaillement car elle a l'avantage d'être plus simple à mettre en place et les temps de calcul qu'elle engendre sont nettement moins importants que la première. En effet, un calcul d'élongation est plus rapide qu'un calcul d'angle qui utilise des fonctions trigonométriques inverses.

Cependant, ce modèle présente un défaut. Si on exerce une traction pure sur le tissu, les ressorts de cisaillement seront allongés et on aura par conséquent des forces de cisaillement qui entrent en jeu dans le bilan des forces du tissu.

Il faut donc corriger ce défaut en modifiant les forces de traction pour tenir compte du terme rajouté par les ressorts de cisaillement (voir la section 4.4).

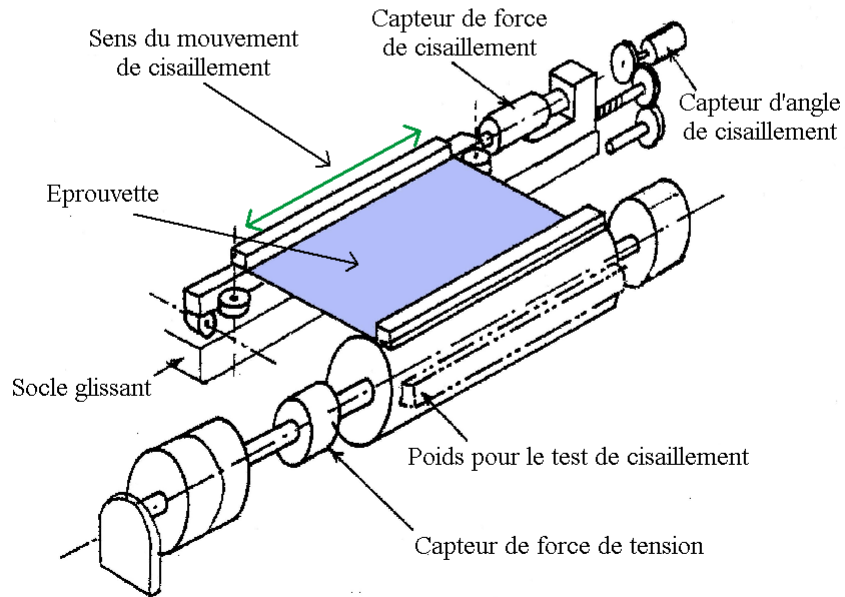


Figure 4.4 – Machine de Kawabata pour le cisaillement

4.3 Loi des ressorts de cisaillement

4.3.1 L'expérience de Kawabata en cisaillement

L'expérience de Kawabata (KES) permet de mesurer la réponse d'un tissu subissant un cisaillement. Le but de cette expérience est donc de mesurer le comportement mécanique d'un tissu en cisaillement afin de le reproduire en simulation, le but ultime étant que l'apparence de l'étoffe simulée soit la plus conforme possible à la réalité.

4.3.1.1 Déroulement de l'expérience

On considère un échantillon de dimensions 20 cm sur 5 cm cisailé dans les deux sens (voir Figure 4.4). Les vitesses de déformation sont lentes pour réduire les effets visqueux. L'éprouvette est déposée à plat entre deux pinces horizontales distantes de 5 cm l'une de l'autre.

A l'instant $t=0$ (Figure 4.5), le morceau de tissu est au repos. L'un de ses bords de longueur 20 cm (AC) est maintenu tendu à l'aide d'un poids mort. Ce poids mort exerce

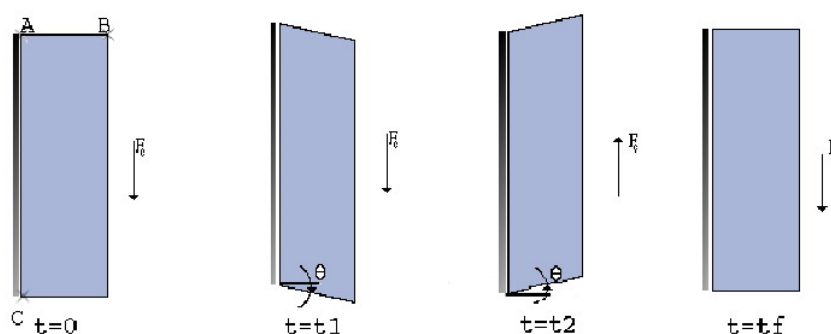


Figure 4.5 – Cisaillement d'un morceau de tissu : Expérience de Kawabata

une tension constante orthogonale à la direction de la force de cisaillement. Ainsi, la pince qui maintient le tissu du côté AC le laisse se dérouler et le poids mort permet au tissu de rester tendu tout en produisant une tension négligeable.

On applique une tension de cisaillement à la vitesse constante de 0.417 mm/s, soit une vitesse angulaire de 0.00834/s (c'est la vitesse en mm/s divisée par la largeur (50 mm)). Lorsque l'angle θ atteint 8 degrés (à $t=t1$), on applique la même force dans le sens inverse, jusqu'à avoir θ égal à (-8) degrés (à $t=t2$). Enfin, on revient à la position initiale ($t=tf$).

4.3.1.2 Résultat de l'expérience

La machine de Kawabata fournit un tracé qui représente la force de cisaillement par unité de longueur (en gf/cm) exercée par la mâchoire sur le tissu en fonction de l'angle θ de cisaillement entre la chaîne et la trame du tissu (en degré) (Figure 4.6).

Les paramètres qu'on retient pour caractériser le cisaillement selon Kawabata sont :

- G : Raideur de cisaillement (en gf/cm.degré). Elle correspond à la moyenne des pentes moyennes de la courbe de Kawabata entre $\theta = 0.5^\circ$ et 5° d'une part, et entre $\theta = -0.5^\circ$ et -5° d'autre part.
- $2HG$: Hystérésis à $\pm 0.5^\circ$ (en gf/cm)
- $2HG5$: Hystérésis à $\pm 5^\circ$ (en gf/cm)

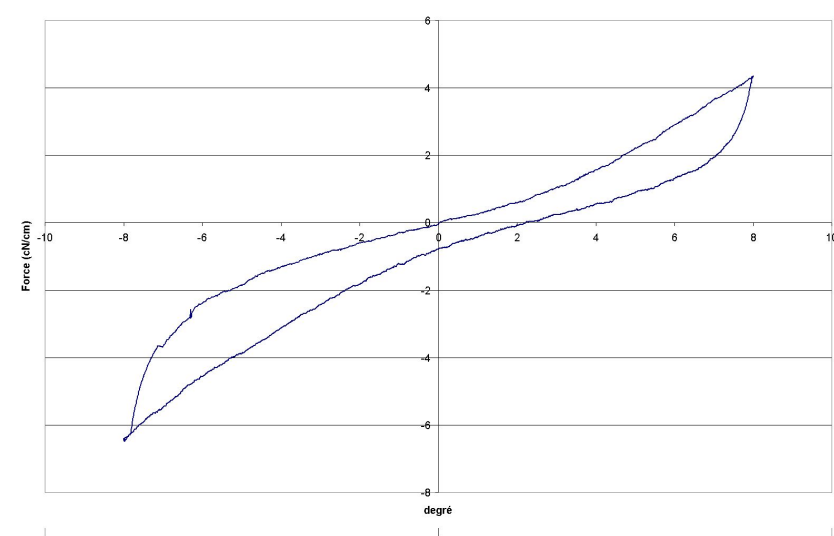


Figure 4.6 – Courbe de Kawabata en cisaillement

4.3.1.3 Quel type de cisaillement pour le KES ?

Il existe deux types de cisaillement dans la littérature [Garb] :

4.3.1.3.1 Cisaillement isométrique

L'espace étant muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on étudie le cisaillement isométrique de direction \vec{i} dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) . Si le cisaillement effectué par Kawabata est isométrique, le morceau de tissu (rectangulaire) cisailé, serait placé dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) et ses côtés parallèles aux axes \vec{i} et \vec{j} comme l'indique la figure 4.7. On rajoute la troisième dimension \vec{k} par commodité de calcul.

On s'intéresse au calcul de la dilatation linéique de ce type de cisaillement, c'est à dire au calcul du rapport entre la longueur d'un segment quelconque dans le plan et la longueur de son transformé par cisaillement isométrique. On calculera aussi la dilatation surfacique, c'est à dire le rapport entre l'aire d'un élément de surface quelconque et l'aire de son transformé par cisaillement isométrique.

Pour cela, on considère Π le plan (\vec{i}, \vec{k}) , orthogonal au plan du tissu.

Soit P une particule de position initiale \vec{m}_0 et de position finale \vec{m}_t . On note \vec{m}_π la projection orthogonale de \vec{m}_0 sur le plan Π . (Voir la figure 4.7)

On considère Φ la transformation qui, à toute particule P de position initiale \vec{m}_0 associe une position finale \vec{m}_t tournée d'un angle θ autour de \vec{m}_π dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) .

$$\Phi(\vec{m}_0) = \vec{m}_t$$

θ est strictement compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On peut alors écrire :

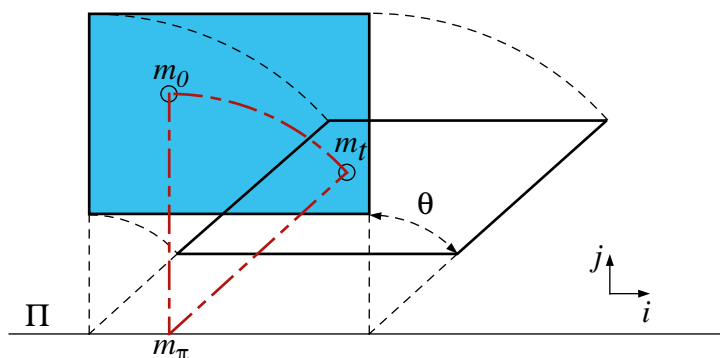


Figure 4.7 – Cisaillement isométrique

$$\vec{m}_t - \vec{m}_\pi = [(\vec{m}_0 - \vec{m}_\pi) \cdot \vec{j}](\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i}) \quad (4.1)$$

$\|(\vec{m}_0 - \vec{m}_\pi) \cdot \vec{j}\|$ représente la distance de \vec{m}_0 au plan Π .

On se propose de calculer le gradient de la transformation Φ ($\overrightarrow{\text{grad}}\Phi$). Cette grandeur est nécessaire au calcul de la dilatation linéique de Φ et de sa dilatation surfacique, comme on le verra dans la suite de ces calculs.

On note \overrightarrow{dm}_0 et \overrightarrow{dm}_t les accroissements de \vec{m}_0 et \vec{m}_t .

On représente le produit tensoriel de deux vecteurs par \otimes dans la suite de ce chapitre.

On a alors

$$\vec{j} \otimes \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_3 - \vec{j} \otimes \vec{j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où I_3 est la matrice identité de taille 3.

Soit \overrightarrow{dm}_π la projection orthogonale de \overrightarrow{dm}_0 sur le plan Π (ce plan est orthogonal à \vec{j}) :

$$\overrightarrow{dm}_\pi = (I_3 - \vec{j} \otimes \vec{j}) \cdot \overrightarrow{dm}_0 \quad (4.2)$$

On différencie l'équation 4.1 pour obtenir la description locale du cisaillement isométrique :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dm}_t - \overrightarrow{dm}_\pi &= [(\overrightarrow{dm}_0 - \overrightarrow{dm}_\pi) \cdot \vec{j}] (\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i}) \\ &= (\overrightarrow{dm}_0 \cdot \vec{j}) (\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i}) \quad \text{car } \overrightarrow{dm}_\pi \cdot \vec{j} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$= \cos \theta (\vec{j} \otimes \vec{j}) \overrightarrow{dm}_0 + \sin \theta (\vec{i} \otimes \vec{j}) \overrightarrow{dm}_0 \quad (4.4)$$

$$\overrightarrow{dm}_t = [(I_3 - \vec{j} \otimes \vec{j}) + \cos \theta (\vec{j} \otimes \vec{j}) + \sin \theta (\vec{i} \otimes \vec{j})] \overrightarrow{dm}_0$$

Les équations 4.3 et 4.4 sont équivalentes car pour tout vecteur \vec{v} , on peut vérifier les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (\vec{j} \otimes \vec{j}) \vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{j}) \vec{j} \\ (\vec{i} \otimes \vec{j}) \vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{j}) \vec{i} \end{aligned} \quad (4.5)$$

La définition du gradient d'une fonction, appliquée à Φ est :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dm}_t &= \overrightarrow{grad} \Phi(\overrightarrow{m}_0) \overrightarrow{dm}_0 \\ &= F(\overrightarrow{m}_0) \overrightarrow{dm}_0 \end{aligned}$$

on déduit F le gradient de Φ :

$$F = I_3 + (\cos \theta - 1) (\vec{j} \otimes \vec{j}) + \sin \theta (\vec{i} \otimes \vec{j}) \quad (4.6)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

On note $\vec{u}_0 = \frac{\vec{dm}_0}{\|\vec{dm}_0\|}$. On définit la dilatation linéique de K_t de \vec{dm}_0 comme le rapport de sa longueur finale sur sa longueur initiale.

$$K_t = \frac{\|\vec{dm}_t\|}{\|\vec{dm}_0\|}$$

Alors la dilatation linéique est

$$\begin{aligned} K_t &= \frac{\|F \|\vec{dm}_0\| \vec{u}_0\|}{\|\vec{dm}_0\|} \\ &= \|F \vec{u}_0\| \\ &= \|\vec{u}_0 + (\cos \theta - 1)(\vec{u}_0 \cdot \vec{j}) \vec{j} + \sin \theta (\vec{u}_0 \cdot \vec{j}) \vec{i}\| \end{aligned} \quad (4.8)$$

L'équation 4.8 est obtenue en utilisant les égalités 4.5. Elle permet de dire que la direction matérielle $\vec{u}_0 = \vec{i}$ a une dilatation linéique égale à 1. La direction matérielle \vec{j} a, elle aussi, une dilatation linéique égale à 1. Donc, dans le cas de l'expérience de cisaillement effectuée par le protocole de Kawabata, on vérifie bien que le cisaillement isométrique conserve les longueurs des quatre côtés du morceau de tissu cisailé.

Déterminons maintenant la dilatation surfacique d'un élément de surface, placé dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) (plan du tissu dans le cadre de Kawabata).

Soit P une particule du plan (\vec{i}, \vec{j}) , et soient $\vec{\delta P}$ et $\vec{\delta P}'$ deux accroissements matériels, situés dans le même plan (\vec{i}, \vec{j}) , issus de P . Les positions de $\vec{\delta P}$ et $\vec{\delta P}'$ à l'instant t_0 sont les vecteurs \vec{dm}_0 et \vec{dm}'_0 et leurs positions à l'instant t sont \vec{dm}_t et \vec{dm}'_t .

L'élément de surface engendré par les deux segments matériels à l'instant t_0 est donné par la norme du produit vectoriel :

$$\vec{dS}_0 = \vec{dm}_0 \wedge \vec{dm}'_0$$

L'élément de surface à l'instant t est :

$$\begin{aligned} \vec{dS}_t &= \vec{dm}_t \wedge \vec{dm}'_t \\ &= F \vec{dm}_0 \wedge F \vec{dm}'_0 \\ &= \det F (\vec{dm}_0 \wedge \vec{dm}'_0) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$= \det F \vec{dS}_0 \quad (4.10)$$

L'égalité 4.9 est vraie pour le cas où $\overrightarrow{dm_0}$ et $\overrightarrow{dm'_0}$ sont dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) et F de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ La justification est donnée en annexe.}$$

La dilatation surfacique du cisaillement isométrique d'un élément de surface dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) est

$$K_S = \frac{\|\overrightarrow{dS_t}\|}{\|\overrightarrow{dS_0}\|} = \det F = \cos \theta \quad (4.11)$$

Donc pour les facettes matérielles situées dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) (l'éprouvette de tissu), la dilatation surfacique est de $\cos \theta$.

Donc, si le cisaillement de Kawabata est un cisaillement isométrique dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) , la surface du tissu ne resterait pas constante au cours de l'expérience. La surface du tissu cisailé est égale à $\cos \theta$ fois la surface initiale de l'éprouvette. Par contre, le cisaillement isométrique conserverait les longueurs des côtés de cette étoffe.

4.3.1.3.2 Cisaillement isosurfacique

On étudie le cisaillement isosurfacique de direction \vec{i} dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) .

On se place dans le même cadre géométrique que pour le cisaillement isométrique.

Soit P une particule de position initiale $\overrightarrow{m_0}$ et de position finale $\overrightarrow{m_t}$. On note $\overrightarrow{m_\pi}$ la projection orthogonale de $\overrightarrow{m_0}$ sur le plan Π . (voir la figure 4.8)

On considère Ψ la transformation qui à toute particule P de position initiale $\overrightarrow{m_0}$ associe une position finale $\overrightarrow{m_t}$ translatée dans la direction \vec{i} de Π d'une quantité proportionnelle à sa distance au plan Π . La constante de proportionnalité, notée ici γ , est égale à $\tan \theta$, où θ est l'angle du cisaillement.

On peut alors écrire :

$$\overrightarrow{m_t} = \overrightarrow{m_0} + \gamma[(\overrightarrow{m_0} - \overrightarrow{m_\pi}) \cdot \vec{j}] \vec{i} \quad (4.12)$$

Le terme $[(\overrightarrow{m_0} - \overrightarrow{m_\pi}) \cdot \vec{j}]$ représente la distance de $\overrightarrow{m_0}$ au plan Π .

Comme pour le cas du cisaillement isométrique, on calcule le gradient de la transformation Ψ ($\overrightarrow{grad\Psi}$).

Soit $\overrightarrow{\delta P}$ un segment matériel issu de P , de position initiale $\overrightarrow{dm_0}$ et de position finale

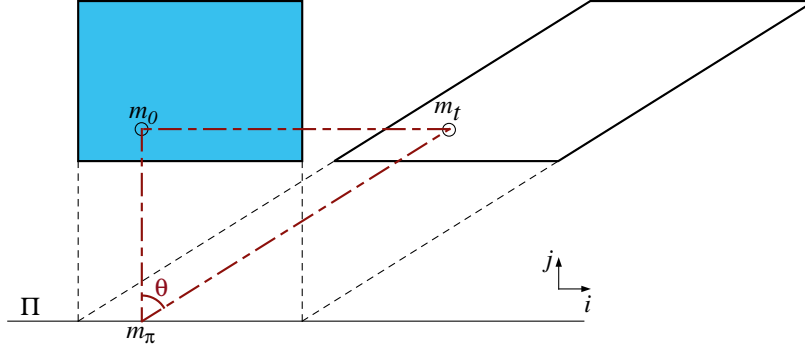


Figure 4.8 – Cisaillement isosurfacique

\overrightarrow{dm}_t . On note \overrightarrow{dm}_π la projection orthogonale de \overrightarrow{dm}_0 sur le plan Π . L'équation 4.2 reste toujours valable.

On différencie l'équation 4.12 pour obtenir la description locale du cisaillement isosurfacique :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{dm}_t &= \overrightarrow{dm}_0 + \gamma[(\overrightarrow{dm}_0 - \overrightarrow{dm}_\pi) \cdot \vec{j}] \vec{i} \\
 &= \overrightarrow{dm}_0 + \gamma[\overrightarrow{dm}_0 \cdot \vec{j}] \vec{i} \quad \text{car } \overrightarrow{dm}_\pi \cdot \vec{j} = 0 \\
 &= \overrightarrow{dm}_0 + \gamma(\vec{i} \otimes \vec{j}) \cdot \overrightarrow{dm}_0
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Par identification avec

$$\overrightarrow{dm}_t = \overrightarrow{grad} \Psi(m_0) \overrightarrow{dm}_0$$

on déduit F le gradient de Ψ :

$$F = I_3 + \gamma(\vec{i} \otimes \vec{j}) \tag{4.14}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

La dilatation linéique d'un segment matériel $\overrightarrow{\delta P}$ est le rapport de sa longueur finale sur sa longueur initiale. La dilatation linéique d'un segment \overrightarrow{dm}_0 par cisaillement isosurfacique est donc égale (l'équation 4.8 est toujours vraie) :

$$K_t = \left\| \overrightarrow{u}_0 + \gamma(\vec{j} \cdot \overrightarrow{u}_0) \vec{i} \right\| \tag{4.16}$$

L'équation 4.16 permet de dire que la direction matérielle \vec{i} a une dilatation linéique égale à 1. La direction matérielle \vec{j} , quant à elle, a une dilatation linéique égale à $\sqrt{1 + \gamma^2}$. Les fils de l'éprouvette de tissu dans la direction de \vec{j} (chaîne ou trame selon l'expérience de Kawabata réalisée) subissent donc un allongement.

La dilatation surfacique d'un élément de surface, placé dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) (plan du tissu dans le cadre de Kawabata) est égale (l'équation 4.10 reste vraie car l'équation 4.9 a été démontrée en annexe) :

$$K_S = \det F = 1$$

La transformation porte donc bien son nom : elle conserve la surface d'une étoffe dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) . Le cisaillement isosurface conserve aussi la longueur des côtés de direction \vec{i} (la direction de la pince mobile de Kawabata). Il ne conserve cependant pas les longueurs des côtés de direction orthogonale à la pince (ici, la direction \vec{j}).

Les deux types de cisaillement ont été étudiés et leurs propriétés géométriques démontrées. On cherche, dans la section suivante, à déterminer quel modèle de cisaillement est effectué par Kawabata.

4.3.1.3.3 Cisaillement de Kawabata

La pince mobile du KES effectue un mouvement de translation parallèlement à la pince arrière. On peut donc présumer que le cisaillement effectué par le KES est un cisaillement isosurfacique (ou isosurface puisqu'on est dans le plan).

Cependant la pince fixe du KES ne maintient pas le deuxième bord de l'éprouvette fixe. Le poids mort exerce une tension constante afin de maintenir le tissu tendu sans pour autant contraindre son mouvement. L'effet du poids mort est donc de limiter l'allongement du tissu selon la direction orthogonale aux pinces ce qui évoque un cisaillement isométrique (ou cisaillement pur).

En toute rigueur, la déformation obtenue dans le cadre de l'expérience de Kawabata en cisaillement est une composition de cisaillement isosurfacique (vu le mouvement de la pince mobile) et de traction (perpendiculairement aux pinces) engendrée par le poids

mort accroché à l'extrémité de l'échantillon [Kaw80].

On fera donc la supposition que le cisaillement effectué par le KES est un cisaillement isométrique. Le point négatif de ce modèle est la non conservation des surfaces dans le plan du cisaillement. Plus précisément, la dilatation surfacique est, comme on l'a vu plus haut, égale à $\cos \theta$, où θ est l'angle de cisaillement. Or, l'expérience du KES est effectuée pour un angle de cisaillement variant entre -8° et 8° . Les valeurs comprises dans cet intervalle restent très proche de zéro, donc la non conservation de la surface de l'étoffe reste très limitée (même si elle est gênante du point de vue théorique).

4.3.2 Fonctions de transfert

La force de cisaillement de Kawabata mesurée représente la force de cisaillement sur un côté du tissu (chaîne ou trame) par unité de longueur en fonction de l'angle de cisaillement.

Il faut donc établir une fonction de transfert qui permet de déduire de cette force mesurée la loi de comportement des ressorts de cisaillement (la tension du ressort en fonction de son élongation).

Soit \overrightarrow{FKc} et \overrightarrow{FKt} les forces mesurées directement par KES au niveau de la mâchoire de l'appareil (qui sont données par unité de longueur et qui sont fonction de l'angle θ de cisaillement). Traitons le cas d'un cisaillement selon la trame (un raisonnement analogue peut être conduit pour la chaîne).

Soit $longT$ la longueur totale de l'échantillon selon la trame. On multiplie alors \overrightarrow{FKt} par $longT$ pour avoir la force totale qui est appliquée au tissu.

Soit nT le nombre de points de contact entre la mâchoire et le tissu et l_t la distance entre deux points de contact successifs. Soit $\overrightarrow{FKt_i}$ la force de Kawabata au niveau de chaque point de contact i .

On suppose qu'en chaque point de contact i , la force $\overrightarrow{FKt_i}$ est la même. On a alors :

$$nT * \overrightarrow{FKt_i} = longT * \overrightarrow{FKt}$$

or

$$longT = (nT - 1) \cdot l_t$$

donc

$$\overrightarrow{FKt_i} = \frac{(nT - 1) \cdot l_t}{nT} * \overrightarrow{FKt} \approx l_t \cdot \overrightarrow{FKt} \quad (4.17)$$

Cette approximation est valable même si nT n'est pas grand. En effet, lors de simulation de l'expérience de Kawabata, on va mesurer la force totale sur la "pince" virtuelle. On sera donc amené à faire la somme de toutes les forces exercées en chaque point de contact (qui doivent toutes être égales à $\overrightarrow{FKt_i}$).

Cependant, les forces de cisaillement des points situés sur les deux coins du tissu sont plus faibles car issues d'un seul ressort de cisaillement (au lieu de deux pour les autres points).

La somme des deux forces des coins est donc "égale" à $\overrightarrow{FKt_i}$, ce qui justifie l'approximation faite plus haut.

Le raisonnement précédent qui a abouti à l'équation 4.17 peut être appliqué au cisaillement en chaîne pour définir les $\overrightarrow{FKc_i}$, forces de Kawabata de cisaillement en chaîne au niveau de chaque point de contact i .

Les forces $\overrightarrow{FKc_i(\theta)}$ et $\overrightarrow{FKt_i(\theta)}$ étant définies, il faut établir les fonctions de transfert afin de déterminer les lois de comportement des ressorts de cisaillement en fonction de leur élongation $F^+(l)$ et $F^-(l)$.

Un cisaillement en chaîne d'un angle θ et un cisaillement en trame d'un angle θ aboutissent à la même configuration géométrique. On peut alors regrouper la représentation de ces deux expériences en un seul schéma qui sera notre schéma d'étude (voir la figure 4.9).

On projette les forces $\overrightarrow{FKc_i}$ et $\overrightarrow{FKt_i}$ sur les directions des ressorts de cisaillement (voir la figure 4.9).

$$FKc_i = (\overrightarrow{F^+} + \overrightarrow{F^-}) \cdot \overrightarrow{u} \quad (4.18)$$

$$FKt_i = (\overrightarrow{F^+} - \overrightarrow{F^-}) \cdot \overrightarrow{v} \quad (4.19)$$

Par convention, on pose que la force d'un ressort de cisaillement est positive si et seulement si il est comprimé.

$$\overrightarrow{F^+} = F^+ \cdot \overrightarrow{v^+} \quad (4.20)$$

$$\overrightarrow{F^-} = F^- \cdot \overrightarrow{v^-} \quad (4.21)$$

On a alors :

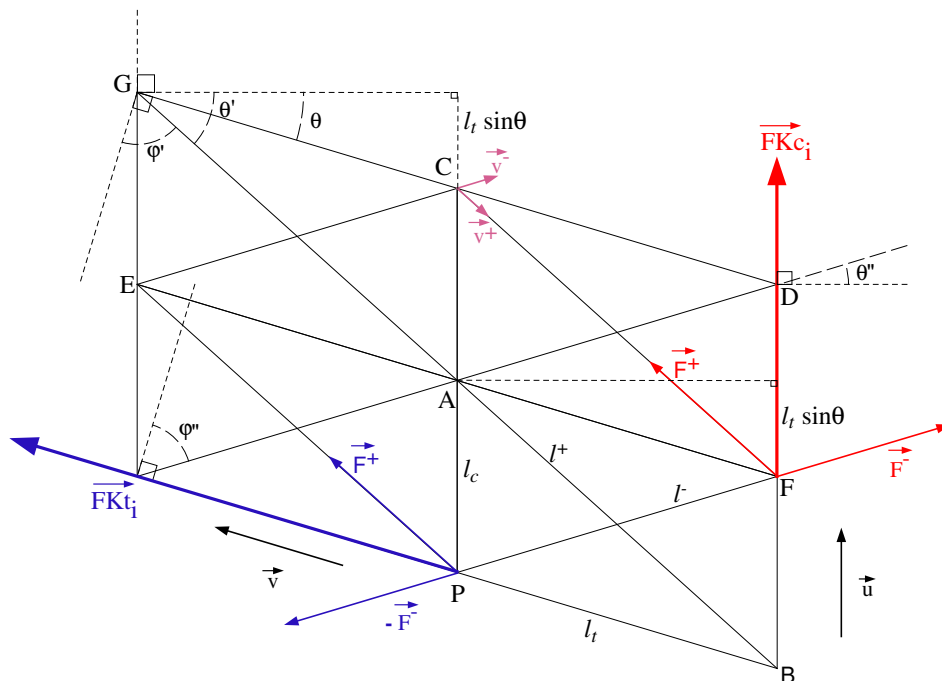


Figure 4.9 – Cisaillement d'un morceau de tissu

$$FKc_i = F^+(\vec{v}^+ \cdot \vec{u}) + F^-(\vec{v}^- \cdot \vec{u}) \tag{4.22}$$

$$FKt_i = F^+(\vec{v}^+ \cdot \vec{v}) - F^-(\vec{v}^- \cdot \vec{v}) \tag{4.23}$$

D'après la figure 4.9, on peut déduire l'expression des angles suivants :

$$\begin{aligned} \vec{v}^+ \cdot \vec{u} &= \cos(AB, AC) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta'\right) \\ &= -\sin \theta' \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}^- \cdot \vec{u} &= \cos(AD, AC) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta''\right) \\ &= \sin \theta'' \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}^+ \cdot \vec{v} &= \cos(AB, AE) \\
&= \cos((AB, AF) + \pi) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi' + \pi\right) \\
&= -\sin \varphi'
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}^- \cdot \vec{v} &= \cos(AD, AE) \\
&= \cos\left(\varphi'' + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\sin \varphi''
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Les équations 4.22 et 4.23 donnent alors le système suivant :

$$\begin{cases} FKc_i &= -F^+ \sin \theta' + F^- \sin \theta'' \\ FKt_i &= -F^+ \sin \varphi' + F^- \sin \varphi'' \end{cases} \tag{4.28}$$

Les solutions du système 4.28 sont :

$$\begin{cases} F^+ &= \frac{FKc_i \sin \varphi'' - FKt_i \sin \theta''}{\sin \theta'' \sin \varphi' - \sin \theta' \sin \varphi''} \\ F^- &= \frac{FKc_i \sin \varphi' - FKt_i \sin \theta'}{\sin \theta'' \sin \varphi' - \sin \theta' \sin \varphi''} \end{cases} \text{ si } (\sin \theta'' \sin \varphi' - \sin \theta' \sin \varphi'') \neq 0 \tag{4.29}$$

On utilise les formules trigonométriques classiques pour déterminer les sinus des angles

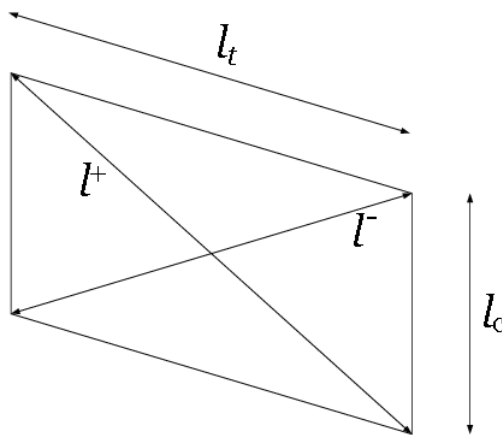


Figure 4.10 – Maille d'un système masses-ressorts

en fonction de θ :

$$\begin{aligned}\sin \theta' &= \frac{AC + l_t \sin \theta}{AG} \\ &= \frac{l_c + l_t \sin \theta}{l^+}\end{aligned}\quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}\sin \theta'' &= \frac{DF - l_t \sin \theta}{AD} \\ &= \frac{l_c - l_t \sin \theta}{l^-}\end{aligned}\quad (4.31)$$

$$\begin{aligned}\sin \varphi' &= \frac{AE + l_c \sin \theta}{AG} \\ &= \frac{l_t + l_c \sin \theta}{l^+}\end{aligned}\quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}\sin \varphi'' &= \frac{AE - l_c \sin \theta}{l^-} \\ &= \frac{l_t - l_c \sin \theta}{l^-}\end{aligned}\quad (4.33)$$

et la formule d'Al Kashi (Pythagore généralisé) pour exprimer l^+ et l^- en fonction de l_c , l_t et θ :

$$\begin{aligned}(l^+)^2 &= l_c^2 + l_t^2 - 2 \cdot l_c \cdot l_t \cos(FB, FA) \\ &= l_c^2 + l_t^2 + 2 \cdot l_c \cdot l_t \sin \theta\end{aligned}\quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}(l^-)^2 &= l_c^2 + l_t^2 - 2 \cdot l_c \cdot l_t \cos(FA, FD) \\ &= l_c^2 + l_t^2 - 2 \cdot l_c \cdot l_t \sin \theta\end{aligned}\quad (4.35)$$

Le dénominateur commun des équations 4.29 vaut alors :

$$\begin{aligned}\Delta &= \sin \theta'' \sin \varphi' - \sin \theta' \sin \varphi'' \\ &= 2 \cdot \sin \theta \frac{l_c^2 - l_t^2}{l^- \cdot l^+}\end{aligned}\quad (4.36)$$

Donc, partant des forces mesurées par Kawabata en cisaillement (\overrightarrow{FKc} et \overrightarrow{FKt}), on peut calculer les forces de cisaillement des ressorts de notre modèle à l'aide des équations 4.29. Les expressions utilisées dans les équations 4.29 peuvent être écrites en fonction de l^+ , l^- et $\sin \theta$. En effet, le dénominateur s'écrit à l'aide de l'équation 4.36, les sinus à l'aide des équations 4.30, 4.31, 4.32 et 4.33. l_c et l_t sont des constantes.

L'équation 4.34 permet d'écrire $\sin \theta$ en fonction de l^+ . Finalement, on peut écrire $F^+(l^+, l^-)$ et $F^-(l^+, l^-)$.

$$\begin{cases} F^+ &= \frac{FKc_i \frac{l_t - l_c \sin \theta}{l^-} - FKt_i \frac{l_c - l_t \sin \theta}{l^-}}{\Delta} \\ F^- &= \frac{FKc_i \frac{l_t + l_c \sin \theta}{l^+} - FKt_i \frac{l_c + l_t \sin \theta}{l^+}}{\Delta} \end{cases} \quad (4.37)$$

On rappelle que ces solutions ne sont valables que si la condition du système 4.29 est satisfaite. En la réécrivant en fonction de θ , cette condition devient :

$$\sin \theta (l_c - l_t) \neq 0 \quad (4.38)$$

Il faut donc étudier les deux cas particuliers pour lesquels cette expression devient nulle :

- $l_c = l_t$ ceci traduit que le maillage utilisé est un maillage carré.
- $\sin \theta = 0$ c'est à dire $\theta = 0$ puisque l'angle du cisaillement est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

4.3.2.1 Cas Particulier d'un maillage carré

Si on utilise un maillage carré pour modéliser le tissu, on a :

$$l_c = l_t$$

Ceci implique :

$$\sin \theta' = \sin \varphi' = \sqrt{\frac{1 + \sin \theta}{2}}$$

$$\sin \theta'' = \sin \varphi'' = \sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{2}}$$

$$1 = \sin^2 \theta' + \sin^2 \theta''$$

$$\text{donc, } \sin \theta' = \cos \theta''$$

Le système 4.28 devient alors :

$$\begin{cases} FKc_i &= -F^+ \sin \theta' + F^- \sin \theta'' \\ FKt_i &= FKc_i \end{cases} \quad (4.39)$$

Le système 4.39 impose donc une contrainte sur les données de Kawabata. En un point du maillage, les valeurs algébriques des forces de Kawabata en chaîne (FKc_i) et en trame

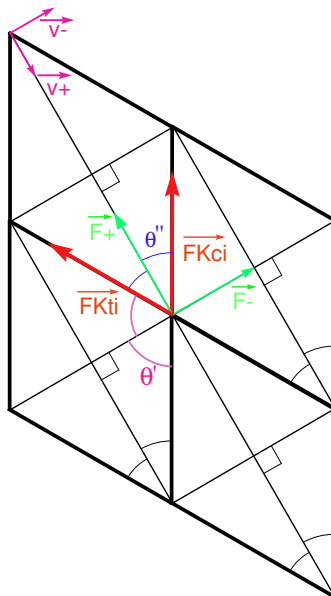


Figure 4.11 – Cisaillement dans le cas d'un maillage carré

(FKt_i) sont égales. La figure 4.11 représente le cisaillement dans le cas d'un maillage carré en respectant $FKt_i = FKc_i$.

On reprend les équations qui définissent notre problème

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FKc_i} &= (\overrightarrow{F^+} + \overrightarrow{F^-}) \\ \overrightarrow{FKt_i} &= (\overrightarrow{F^+} - \overrightarrow{F^-})\end{aligned}$$

On projette par exemple la première équation de ce système sur $\overrightarrow{v^+}$ (voir la figure 4.11).

On obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FKc_i} \cdot \overrightarrow{v^+} &= F^+ \\ -FKc_i \cos \theta'' &= F^+ \\ -FK l_c \cos \theta'' &= F^+\end{aligned}$$

où FK est la force mesurée par Kawabata, et qui est égale en chaîne et trame (d'après l'équation 4.39 et d'après $l_c = l_t$). D'où, dans le cas d'un maillage carré, on obtient

$$F^+ = -\frac{1}{2}FK l^+ \quad (4.40)$$

On obtient également la même forme d'expression pour F^-

$$F^- = \frac{1}{2}FK l^- \quad (4.41)$$

4.3.2.2 Au voisinage de $\theta = 0$

On est toujours dans le cadre d'un cisaillement pur de l'expérience de Kawabata. l_c et l_t les longueurs des mailles en chaîne en trame sont constantes (voir la figure 4.12).

Quand $\theta = 0$, on a :

$$l^+ = l^- = l^0$$

Le système 4.28 devient alors :

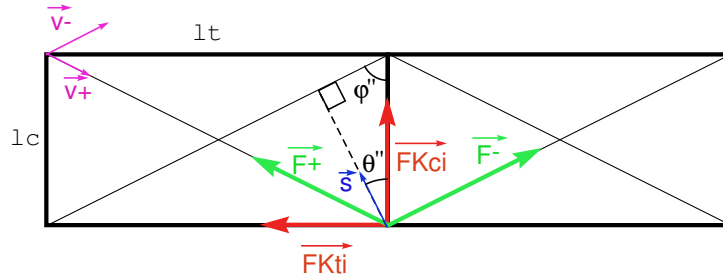


Figure 4.12 - Configuration du cisaillement au voisinage de $\theta = 0$

$$\begin{cases} FKc_i = \frac{l_c}{l^0}(F^- - F^+) \\ FKt_i = \frac{l_t}{l^0}(F^- - F^+) \end{cases} \quad (4.42)$$

On en déduit :

$$\frac{F_- - F_+}{l^0} = \frac{FKc_i(0)}{l_c} = \frac{FKt_i(0)}{l_t} \quad (4.43)$$

D'où, d'après l'équation 4.17, les forces de Kawabata sont égales en 0.

$$FKt_i(0) = FKc_i(0)$$

On reprend les équations qui définissent notre problème

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FKc_i} &= (\overrightarrow{F^+} + \overrightarrow{F^-}) \\ \overrightarrow{FKt_i} &= (\overrightarrow{F^+} - \overrightarrow{F^-}) \end{aligned}$$

On projette par exemple la première équation de ce système sur \vec{s} (voir la figure 4.12).

On obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FKc_i} \cdot \vec{s} &= \overrightarrow{F^+} \cdot \vec{s} \\ -FKc_i \cos \theta'' &= -F^+ \cos(\varphi'' - \theta'') \\ -FK l_c \cos \theta'' &= -F^+(\cos \varphi'' \cos \theta'' + \sin \varphi'' \sin \theta'') \\ -FK l_c \cos \theta'' &= -2F^+(\cos \theta'' \sin \theta'') \\ F^+ &= -\frac{1}{2}FK \frac{l_c}{\sin \theta''}\end{aligned}$$

D'où

$$F^+ = -\frac{1}{2}FK l^0 \quad (4.44)$$

On obtient également la même forme d'expression pour F^-

$$F^- = \frac{1}{2}FK l^0 \quad (4.45)$$

4.3.2.3 Forme générale

Etant données les formules obtenues par les équations 4.44 et 4.45 pour le cas $\theta = 0$, on va essayer d'établir une formule générale pour le calcul de F^+ et F^- qui assure **la continuité en zéro**.

Ceci nous semble une condition nécessaire pour éviter que la simulation ne devienne instable.

On réécrit les équations 4.29 pour faire apparaître la somme et la différence de $\frac{FKc_i}{l_c}$ et $\frac{FKt_i}{l_t}$:

$$F^+ = \frac{1}{2} \left(\frac{FKc_i}{l_c} + \frac{FKt_i}{l_t} \right) \frac{l_c \sin \varphi'' - l_t \sin \theta''}{\Delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{FKc_i}{l_c} - \frac{FKt_i}{l_t} \right) \frac{l_c \sin \varphi'' + l_t \sin \theta''}{\Delta} \quad (4.46)$$

$$F^- = \frac{1}{2} \left(\frac{FKc_i}{l_c} + \frac{FKt_i}{l_t} \right) \frac{l_c \sin \varphi' - l_t \sin \theta'}{\Delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{FKc_i}{l_c} - \frac{FKt_i}{l_t} \right) \frac{l_c \sin \varphi' + l_t \sin \theta'}{\Delta} \quad (4.47)$$

On peut mettre les équations 4.44 et 4.45 valables quand $\theta = 0$ sous la forme suivante :

$$F^+ = -\frac{1}{2} \left(\frac{FKc_i}{l_c} + \frac{FKt_i}{l_t} \right) \frac{l^0}{2} \quad (4.48)$$

$$F^- = \frac{1}{2} \left(\frac{FKc_i}{l_c} + \frac{FKt_i}{l_t} \right) \frac{l^0}{2} \quad (4.49)$$

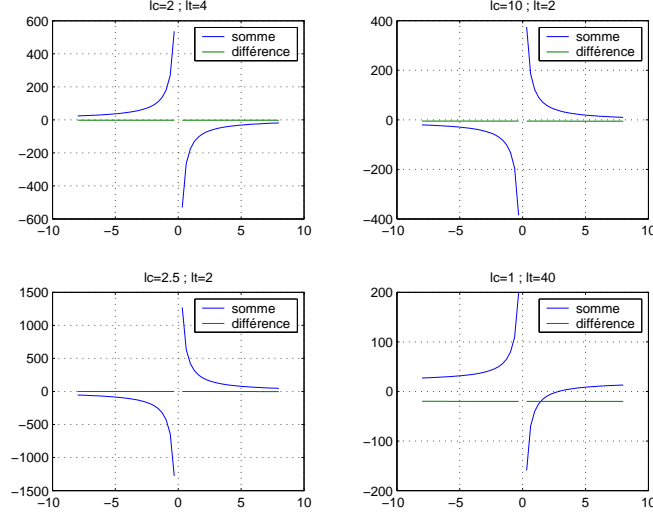


Figure 4.13 – Comparaison entre $\frac{l_c \sin \varphi'' - l_t \sin \theta''}{\Delta}$ et $\frac{l_c \sin \varphi'' + l_t \sin \theta''}{\Delta}$

En comparant la forme des équations 4.46, 4.47 d'un côté, et les équations 4.48, 4.49 de l'autre, on peut conjecturer que le second terme des expressions de F^+ et F^- dans les équations 4.46 et 4.47 devrait être identiquement nul, i.e. que $(\frac{FKc_i}{l_c} - \frac{FKt_i}{l_t}) \equiv 0$. Démontrons cette conjecture. Pour cela, on effectue l'approximation $\sin \theta \stackrel{\theta=0}{\approx} \theta$. On a alors :

$$\frac{l_c \sin \varphi'' + l_t \sin \theta''}{\Delta} \stackrel{\theta=0}{\approx} \frac{2l_c l_t l^+ - l^+ \theta (l_c^2 + l_t^2)}{2\theta (l_c^2 - l_t^2)}$$

Ce terme diverge quand θ tend vers zéro, ce qui n'est pas le cas du terme

$$\frac{l_c \sin \varphi'' - l_t \sin \theta''}{\Delta} \stackrel{\theta=0}{\approx} -\frac{l^+}{2}$$

La figure 4.13 permet de comparer $\frac{l_c \sin \varphi'' - l_t \sin \theta''}{\Delta}$ et $\frac{l_c \sin \varphi'' + l_t \sin \theta''}{\Delta}$, avec différents jeux de valeurs pour l_c et l_t .

Or, pour θ proche de 0, l'équation 4.46 ne doit pas diverger vu l'équation 4.48. Notre conjecture est alors vérifiée et le second terme de l'expression de F^+ dans l'équation 4.46 est donc identiquement nul.

On obtient des résultats similaires avec les deux termes $\frac{l_c \sin \varphi' - l_t \sin \theta'}{\Delta}$ et $\frac{l_c \sin \varphi' + l_t \sin \theta'}{\Delta}$ de l'équation 4.47. Le second terme de l'expression de F^- dans l'équation 4.47 est donc

lui aussi nul. Donc :

$$\frac{FKc_i}{l_c} = \frac{FKt_i}{l_t} \quad \forall \theta \text{ et } \forall i$$

ou encore, les forces de Kawabata mesurées en chaîne et en trame sont égales.

$$FKc = FKt \quad (4.50)$$

Finalement, les équations 4.46 et 4.47 s'écrivent :

$$F^+ = FK \frac{l_c \sin \varphi'' - l_t \sin \theta''}{\Delta} \quad (4.51)$$

$$F^- = FK \frac{l_c \sin \varphi' - l_t \sin \theta'}{\Delta} \quad (4.52)$$

avec FK la force de Kawabata en cisaillement (fonction de θ) et qui est considérée dorénavant comme étant la même en chaîne et en trame.

En comparant les courbes de Kawabata de cisaillement en chaîne et en trame (voir

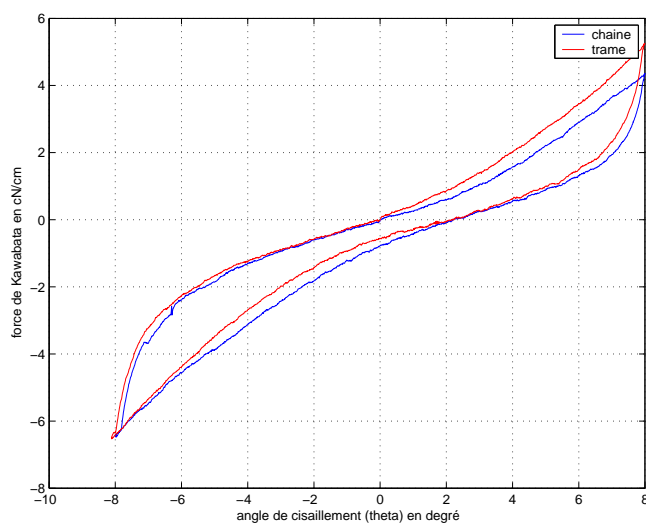


Figure 4.14 – Comparaison des forces de Kawabata en chaîne et en trame

figure 4.14), on remarque que les deux courbes sont proches (même si on ne peut pas affirmer que l'égalité est parfaite sur toute la courbe). En effet, notre modèle de tissu est un modèle surfacique qui néglige l'épaisseur du tissu. Or, c'est cet aspect volumique du tissu réel qui est responsable des différences entre les deux courbes en chaîne et en trame.

Dans la pratique, on choisit de considérer une seule courbe de Kawabata en cisaillement (celle de chaîne par exemple). Les paramètres extraits à partir de cette courbe sont appliqués à notre modèle de ressorts en chaîne et en trame afin de respecter l'équation 4.50.

4.3.2.4 Fonctions de transfert en fonction des données de simulation

Dans le cadre de la simulation, le calcul des forces des ressorts s'effectue séquentiellement. Pour chaque ressort de cisaillement, on n'a connaissance que de sa longueur l (à partir de la position des masses à ses extrémités).

D'après les équations 4.51 et 4.52 retenues pour le calcul des forces des ressorts, il semble qu'il faut distinguer les ressorts orientés selon la première diagonale de ceux orientés selon la deuxième diagonale. Or si on développe les expressions des équations 4.51 et 4.52, on trouve :

$$\begin{cases} F^+ = -\frac{1}{2}FK(\theta) l^+ \\ F^- = \frac{1}{2}FK(\theta) l^- \end{cases} \quad (4.53)$$

Les deux équations de 4.53 ont la même forme. Pour un ressort quelconque, orienté selon la première ou la deuxième diagonale, on a besoin de connaître uniquement sa longueur pour pouvoir déterminer la norme de sa force. Le signe (et donc le sens) de la force de ce ressort sera donné par le signe de la déformation du ressort (allongement ou compression).

On peut donc garder une seule formule pour le calcul des forces des ressorts de cisaillement, par exemple

$$F = \frac{1}{2}FK(\theta) l \quad (4.54)$$

où F est la force du ressort de cisaillement (un ressort quelconque) et l sa longueur.

Les données géométriques de la simulation nous donnent seulement les positions des masses et les longueurs des ressorts. Donc, le calcul de $FK(\theta)$ nécessite de déterminer l'angle de cisaillement θ à partir de son cosinus et de son sinus pour chaque ressort de cisaillement et à chaque itération. L'utilisation de fonctions trigonométriques inverses, qui sont coûteuses en temps de calcul, est alors nécessaire.

Or, on peut éviter cette contrainte. La détermination de $FK(\theta)$ dans l'équation 4.54

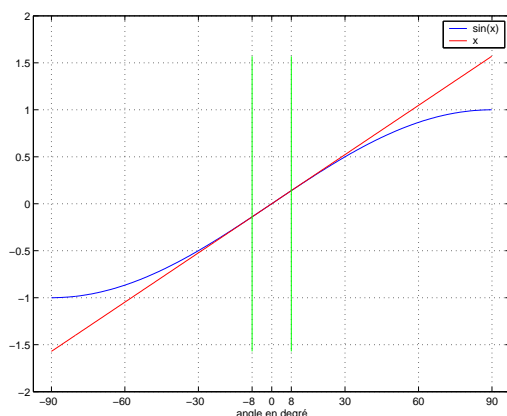


Figure 4.15 – Comparaison du paramétrage $\sin(x)$ et x entre -8° et 8°

peut se faire en utilisant le paramétrage $\sin \theta$ au lieu de θ . Les deux grandeurs sont quasiment égales dans l'intervalle $[-8^\circ, 8^\circ]$ de cisaillement du KES (voir figure 4.15) et l'utilisation du sinus évite d'utiliser des fonctions trigonométriques inverses coûteuses. Ainsi, l'équation 4.54 permet de calculer la force de cisaillement en utilisant les données de simulation pour un ressort de cisaillement quelconque. Cette équation est générale et s'applique à tous les cas traités précédemment (maillage carré et θ proche de 0).

4.4 Correction de l'expression des forces de traction

La modélisation du cisaillement présentée dans ce chapitre se base sur un calcul des allongements des ressorts et non des angles entre la chaîne et la trame du tissu. Cette modélisation a l'avantage d'être plus efficace au niveau du logiciel de simulation puisqu'elle nous affranchit d'utiliser des fonctions trigonométriques inverses très coûteuses. Cependant, si on exerce une traction pure sur le tissu dans le cadre de l'expérience de traction du KES, les ressorts de cisaillement seront allongés et on aura dès lors des forces de cisaillement qui entrent en jeu dans le bilan des forces du tissu comme le montre la figure 4.16 (le sens des forces a été inversé pour rendre le schéma plus lisible).

Le but de cette section est de déterminer la correction à appliquer aux ressorts de traction pour supprimer l'influence des ressorts de cisaillement qui se trouvent déformés lors de l'expérience de traction du KES.

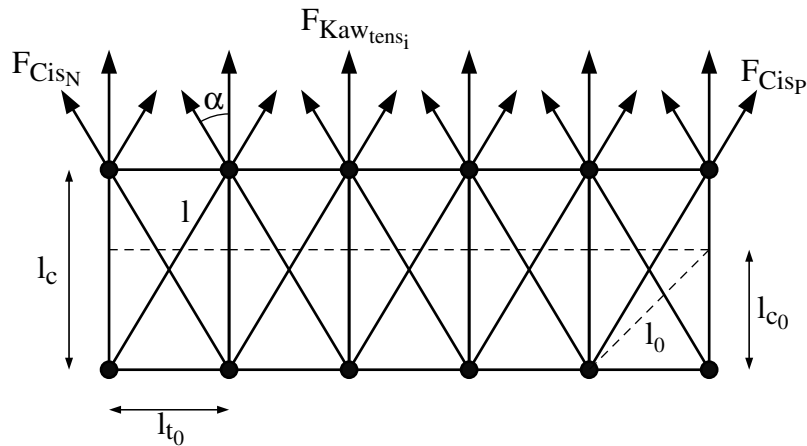


Figure 4.16 – Influence des ressorts de cisaillement sur la traction

On considère alors l'expérience de traction du KES dans le sens de la chaîne par exemple comme illustrée par la figure 4.16. On calcule à chaque instant la longueur des ressorts de structure en chaîne l_c et on en déduit ainsi la déformation des ressorts de cisaillement (la longueur des ressorts de structure en trame reste constante l_{t_0} et la chaîne reste toujours perpendiculaire à la trame).

$$l^2 = l_c^2 + l_{t_0}^2$$

$$l_0^2 = l_{c_0}^2 + l_{t_0}^2 \quad \text{au repos}$$

On calcule l'angle du cisaillement engendré par l'expérience de traction du KES d'après l'équation 4.34.

$$\begin{aligned} \sin \theta_{cis} &= \frac{l^2 - l_0^2}{2l_c l_{t_0}} \\ &= \frac{l_c^2 - l_{c_0}^2}{2l_c l_{t_0}} \end{aligned} \quad (4.55)$$

La force totale mesurée sur chaque masse i lors de cette expérience de traction du KES est égale à :

$$F_i = F_{Kaw_{tens_i}} + F_{Cis_N} + F_{Cis_P} \quad (4.56)$$

Les composantes des forces F_{Cis_N} et F_{Cis_P} selon le sens trame s'annulent, car notre modèle de cisaillement est symétrique en chaîne et en trame. L'équation 4.56 s'écrit

alors

$$\begin{aligned} F_i &= F_{Kawtens_i} + 2 | F_{Cis_N} | \cos \alpha \\ &= F_{Kawtens_i} + 2 | F_{Cis_N} | \frac{l_c}{\sqrt{l_c^2 + l_{t_0}^2}} \end{aligned} \quad (4.57)$$

On rappelle que le but est de déterminer l'expression modifiée de $F_{Kawtens_i}$ (l'équation de transfert des ressorts de structure) pour corriger la tension introduite par les ressorts de cisaillement.

Soit nT le nombre de masses dans la direction de la trame, et $longT$ la longueur de l'échantillon selon la trame. La force totale de traction mesurée par KES (et donnée par unité de longueur) peut s'écrire

$$FK_{tens} = \frac{nT F_i}{longT} = \frac{nT F_i}{(nT - 1)l_{t_0}}$$

On peut toujours effectuer l'approximation faite dans l'équation 4.17, car les masses situées sur les extrémités du tissu représentent la moitié de la quantité de matière (tissu) représentée par les autres masses.

$$FK_{tens} \approx \frac{F_i}{l_{t_0}}$$

Donc F_i peut s'écrire

$$F_i = FK_{tens} l_{t_0} \quad (4.58)$$

Les équations 4.57, 4.58 et 4.54 (pour l'expression de F^+) permettent alors de déterminer la nouvelle loi de transfert des ressorts de structure

$$F_{Kawtens_i}(l_c) = FK_{tens}(l_c) l_{t_0} - 2 | F^+ | \frac{l_c}{\sqrt{l_c^2 + l_{t_0}^2}} \quad (4.59)$$

4.5 Validation du modèle de cisaillement

L'objet de cette section est de valider expérimentalement notre modélisation du cisaillement pour notre modèle de tissu masses-ressorts. On réalise donc virtuellement l'expérience de Kawabata en cisaillement avec notre modèle et on compare la courbe liant la contrainte à la déformation du tissu obtenue à celle fournie par l'expérience réelle.

L'expérience de cisaillement réalisée est donc celle d'un cisaillement isométrique et la loi des ressorts de cisaillement de notre modèle est celle donnée par l'équation 4.54. On incorpore aussi la correction de l'expression des forces de traction donnée par l'équation 4.59.

4.5.1 Conditions expérimentales

Les expériences de Kawabata se font à une vitesse quasi nulle afin de rendre négligeables les effets visqueux liés à la vitesse et avoir ainsi un cisaillement pur. C'est pourquoi il est important de réaliser l'expérience virtuelle de cisaillement à la même vitesse que celle de l'expérience réelle.

La vitesse réelle est de 0.417mm/sec. L'expérience se fait donc à une vitesse angulaire constante très faible, et les masses de contrôle effectuent à chaque pas de temps le mouvement suivant (pour chaque masse de contrôle i) :

- $dx = d * (\cos(\theta_{courant}) - \cos(\theta_{precedent}))$
- $dy = d * (\sin(\theta_{courant}) - \sin(\theta_{precedent}))$
- $dz = 0$

La figure 4.17 illustre ce mouvement.

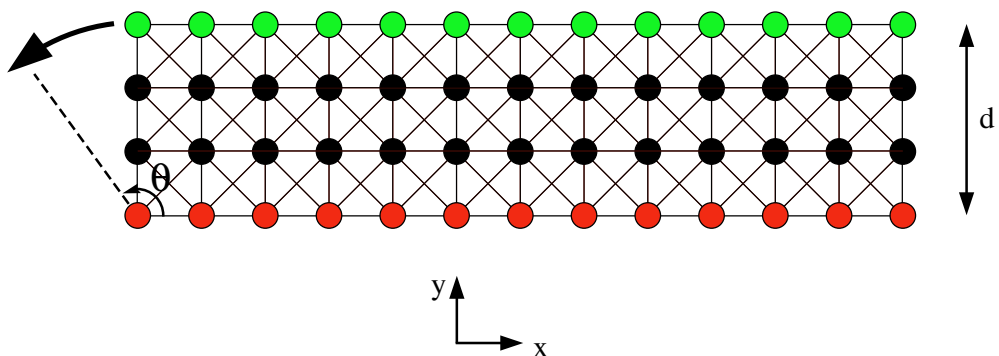


Figure 4.17 – Test de cisaillement virtuel : les points rouges sont fixes et les points verts sont les masses de contrôle

4.5.2 Courbe obtenue

On obtient la courbe de mesures virtuelles suivante (courbe bleue, figure 4.18), à comparer avec la courbe de l'expérience réelle de Kawabata : la loi de contrainte par rapport à la déformation du cisaillement virtuel est donc bien conforme au cisaillement réel.

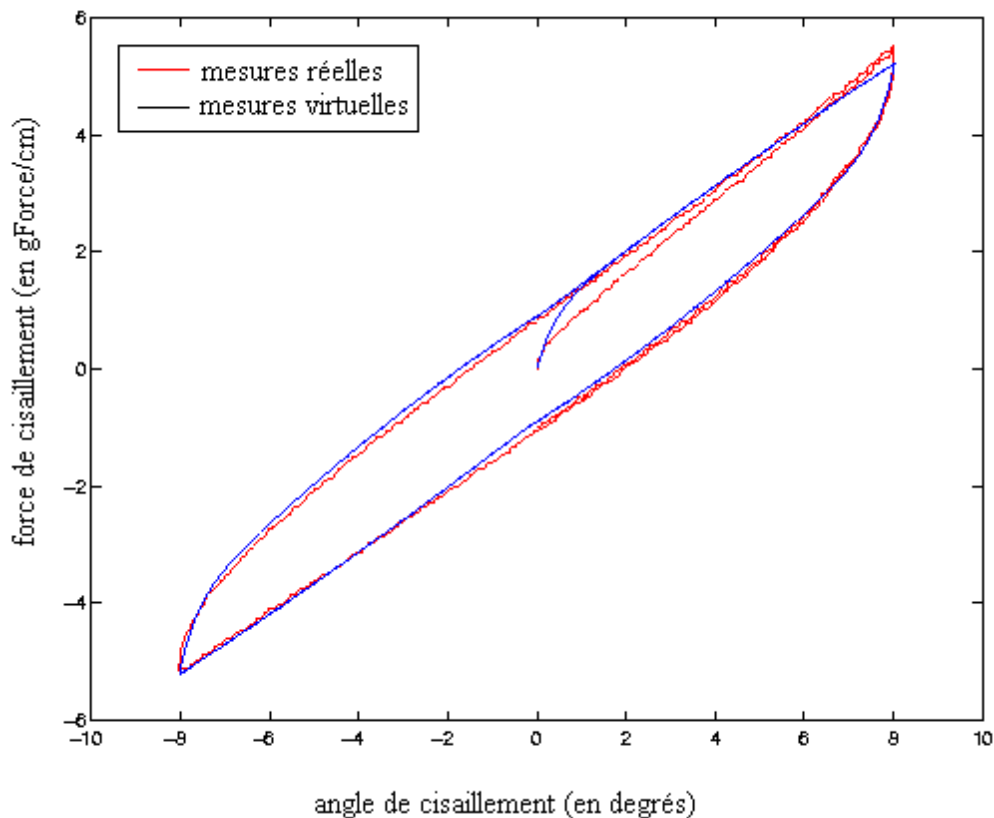


Figure 4.18 – Courbes de cisaillement (réelle et virtuelle)

4.6 Conclusion

Ce chapitre décrit le modèle de cisaillement pur que l'on a mis en place pour notre modèle masses-ressorts de tissu.

Le phénomène de cisaillement d'un tissu est différent des phénomènes de traction et de

flexion, car il est indépendant de la déformation de la longueur du fil. Il ne dépend que de la déformation de l'entrecroisement des fils de la chaîne et de la trame du tissu. La modélisation du cisaillement par des ressorts linéiques dont la loi dépend uniquement de l'élongation (et non de l'angle entre la chaîne et la trame) du ressort n'est pas très naturelle.

Cette modélisation est cependant très avantageuse en gain de temps de calcul (on s'affranchit des calculs trigonométriques inverses qui sont très coûteux) si l'on arrive à exprimer ses fonctions de transfert de la contrainte par rapport à la déformation.

Les fonctions de transfert des ressorts de cisaillement ont été développées à partir des courbes du KES, en supposant que le cisaillement de Kawabata est isométrique et qu'il est symétrique en chaîne et en trame.

On a montré que ces approximations sont justifiables et on a réalisé virtuellement les tests du KES de cisaillement. Les courbes virtuelles obtenues se recalent parfaitement sur les courbes réelles fournies par le KES ce qui valide notre modélisation.

Chapitre 5

Analyse et mesure des interactions visqueuses d'un tissu

5.1 Introduction

Ce chapitre a fait l'objet de trois publications dans des conférences scientifiques orientées vers l'informatique graphique [CBG05] [CG05] [CGB05] et une publication dans le *Textile Research Journal* [CGB06]. La partie expérimentale a été réalisée en collaboration et grâce au soutien de la société **Attitude-Studio**¹.

Les chapitres précédents ont permis d'exposer notre modèle de tissu, comment sont représentées les forces et comment est réalisée l'intégration du système obtenu au cours du temps. Le chapitre 4 introduit notre modèle de cisaillement et ses fonctions de transfert, afin de compléter la modélisation du tissu.

On s'intéresse à présent à la détermination des paramètres physiques, qui nous permettent de contrôler totalement une simulation au moins du point de vue de la justesse physique. Les paramètres mécaniques du tissu sont déterminés par le KES et on a proposé au chapitre précédent une fonction de transfert permettant de calculer les lois de contrainte par rapport à la déformation du tissu dans le cas du cisaillement (la traction et la flexion ont déjà été traitées).

Il nous reste alors à quantifier et à modéliser les phénomènes de dissipation d'énergie

¹Spécialisée dans la capture de mouvement et la production de films de synthèse

engendrés par le mouvement du tissu. Les phénomènes de dissipation d'énergie sont importants si on cherche à modéliser le mouvement des vêtements d'une façon réaliste. Certaines méthodes ont déjà été proposées par Bhat et al. [BTH⁺03] (voir la section 2.3.2.0.3). Mais l'utilisation d'une vidéo, comme donnée d'entrée de leur algorithme, fait que ces travaux sont essentiellement réalisés en deux dimensions et ne sont pas aussi précis que notre méthode qui utilise des données tridimensionnelles.

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place une expérience qui permet de mesurer la dissipation d'énergie pouvant être engendrée par le frottement entre un tissu en mouvement et l'air et par le frottement entre les différentes composantes du tissu (la chaîne et la trame, les fibres composant chaque fil). Il ne s'agit pas ici de modéliser le comportement aérodynamique du tissu, sous l'effet du vent par exemple, ce qui a déjà été investigué par Stam [Sta99] et appliqué spécifiquement pour la simulation de textile par Keickeisen et al. [KKTW04].

En effet, l'objectif premier de notre simulateur est de fournir les résultats les plus proches de la réalité dans une perspective d'aide à la conception de vêtements. On cherche donc à modéliser le comportement mécanique d'un vêtement (et donc d'un tissu) dans des conditions standard d'essayage de vêtements.

La démarche suivie peut se résumer en quatre points :

- capture de la forme 3D d'un tissu en mouvement
- mise en place d'un modèle de dissipation visqueuse
- calcul des forces de dissipation à partir de la RFD (Relation fondamentale de la dynamique)
- calcul des paramètres de dissipation

On verra que dans la pratique, d'autres problèmes s'ajoutent et doivent donc être résolus.

5.2 Mise en place de l'expérience

5.2.1 Cadre général

Ce chapitre se propose de modéliser et de mesurer les phénomènes de dissipation d'énergie dus au frottement entre l'air et le tissu d'une part, et entre les différentes

composantes du tissu d'autre part. Il est important de spécifier le cadre de cette étude et les conditions de validité des résultats que l'on présentera ultérieurement dans ce chapitre.

Une étude complète des interactions fluide/structure, développant un formalisme précis basé sur la mécanique des fluides, est hors du cadre de cette étude. Une telle étude serait judicieuse pour des problèmes tel que le comportement de la voile d'un bateau ou d'un parachute qui s'ouvre. Notre application type reste l'essayage virtuel des vêtements dans un endroit fermé tel qu'un atelier de couture. On peut donc supposer que les vitesses atteintes par un vêtement porté dans ces conditions restent faibles et n'impliquent pas l'apparition des phénomènes de turbulence de l'air.

En conclusion, on cherche à modéliser les phénomènes de dissipation visqueuse mis en jeu par le mouvement du tissu dans des conditions où l'air ne présente pas de mouvement turbulent.

On peut donc supposer que les propriétés de dissipation que l'on cherche à modéliser ne dépendent que du tissu en mouvement dans l'air.

5.2.2 L'expérience de tombé de tissu

Une fois le cadre général de notre étude spécifié, il nous faut choisir une expérience à réaliser qui soit simple à mettre en place, qui soit facile à simuler virtuellement et qui permette de mesurer les effets de dissipation.

La mesure des effets dissipatifs va se faire à partir de la RFD. Il est donc important de maîtriser toutes les forces (en dehors des forces dissipatives) qui s'exercent sur le tissu lors de l'expérience. Notre choix s'est donc porté sur la chute libre du tissu.

L'idée est de laisser tomber un morceau de tissu en chute libre et d'enregistrer son mouvement à l'aide d'un système de capture de mouvement (MOCAP) (voir la figure (5.1)).

Comme on connaît toutes les forces qui s'exercent sur le tissu et que la force totale exercée sur ce dernier peut être obtenue avec la RFD, le calcul des forces dissipatives est possible.

Pour cette expérience on a considéré quatre types différents de tissu (tissés en chaîne/trame).

On refait aussi la même expérience plusieurs fois avec des tissus différents afin de pouvoir juger de la qualité des résultats obtenus.

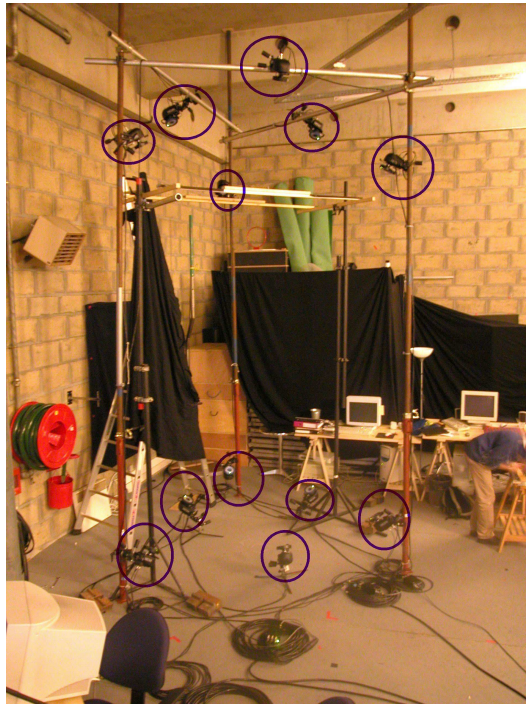


Figure 5.1 – Les 12 caméras du système de capture de mouvement (MOCAP)

Un échantillon carré dont le côté mesure 50cm a été découpé dans chaque tissu. Afin de capturer la position 3D du tissu dans l'espace, on a collé des pastilles réfléchissantes de 5mm de diamètre sur chaque tissu (et sur les deux faces de chaque tissu). Ces pastilles sont en réalité du papier réfléchissant très léger, de telle sorte que le poids total des pastilles reste très inférieur au poids du tissu et n'en perturbe pas le mouvement. On obtient donc une grille régulière dont le pas vaut 5cm (voir les figures 5.2 et 5.3) et la position du tissu sera assimilée à la position des points de la grille dans l'espace au cours du temps.

faces) de telle sorte à former une grille régulière dont le (5.2) et (5.3))

5.2.2.1 Les conditions initiales

Il est important de maîtriser les conditions initiales du lâché de tissu au cours de cette expérience et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, connaître la position initiale du tissu et sa vitesse avant le lâché permet de simuler virtuellement la même expérience



Figure 5.2 – Un morceau de tissu 50cm \times 50cm avec les pastilles réfléchissantes

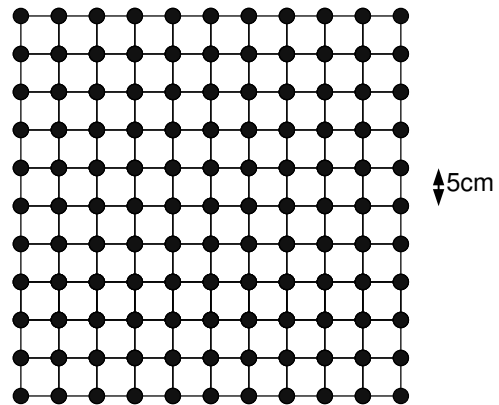


Figure 5.3 – Grille représentant la position de chaque pastille sur le tissu

avec notre simulateur de vêtements. Pour simplifier l'initialisation, on s'attache plus particulièrement à ce que la vitesse initiale du tissu soit nulle (ou la plus faible possible). Si le tissu part avec une vitesse initiale, il peut très vite sortir du champ des caméras du MOCAP (sachant que la calibration des caméras est une opération longue et fastidieuse) rendant impossible la capture de sa trajectoire.

On a donc abandonné l'idée initiale qui prévoyait que deux opérateurs tiennent le tissu par les quatre coins et le lâchent en même temps. En effet, cette opération présentait tous les défauts cités plus haut quant au non contrôle de la vitesse initiale. Si les deux opérateurs ne lâchent pas le tissu en même temps, les conditions initiales peuvent s'avérer très complexes à déterminer. Enfin, la présence d'un deuxième opérateur à 50cm en face du premier va occulter le tissu pour la plupart des caméras qui sont en contre-plongée. Pour toutes ces raisons, on a conçu et fabriqué un dispositif en bois permettant de maintenir un tissu par ses quatre coins dans une position horizontale et permettant à un seul opérateur de libérer simultanément les quatre coins maintenus (voir la figure 5.4). On appellera ce dispositif : le dispositif de lâchage.

La figure 5.5 montre comment quatre ficelles relient les quatre coins du tissu au dispositif de lâchage. Une fois que l'opérateur actionne ce dispositif, le tissu tombe et sa trajectoire est enregistrée par le système de capture de mouvement (à la fréquence de 120Hz).

Il est fondamental que les quatre coins soient libérés simultanément et sans provoquer



Figure 5.4 – Dispositif de lâchage à trois mètres du sol

d'impulsion pour un bon contrôle des conditions initiales et cela semble avoir été bien réalisé, vu les résultats obtenus par la suite.

5.2.2.2 Données recueillies

Le système de capture de mouvements a enregistré les positions des pastilles réfléchissantes au cours de la chute du tissu. Le système de capture *Vicon* utilise le logiciel *Workstation* pour le traitement des données recueillies par chaque caméra et la reconstruction en 3D des positions des pastilles. Ce logiciel permet aussi le tracking des points capturés. Ainsi, on a besoin de labelliser un nombre limité de points, ceux pour lesquels le tracking a échoué.

La reconstruction en 3D d'un point est réalisée si ce dernier a été vu au moins par trois caméras afin d'atténuer les effets du bruit. On obtient ainsi 120 trames de données de positions en 3 dimensions par seconde. Cependant, la contrainte, pour un point, d'être vu par au moins trois caméras, ainsi que la déformation du tissu au cours de la chute,



Figure 5.5 – Tissu avec les pastilles réfléchissantes maintenu au dispositif de lâchage

fait que certains points ne sont pas vus ou pas reconstruits dans certaines trames. On utilise différentes techniques d'interpolations pour combler ces "trous". Ce point sera détaillé à la section 5.3.

Les positions en 3D reconstruites des pastilles sont données dans le repère absolu des caméras. Or, dans ce repère on ne connaît pas la verticale. Il a donc fallu faire une deuxième expérience pour déterminer la transformation à faire pour avoir l'axe Z du repère des caméras parallèle à l'axe vertical. Sans cela, on ne peut pas simuler virtuellement l'effet de la gravité sur le tissu.

5.2.2.3 Détermination de la verticale

L'expérience consiste à lâcher une bille réfléchissante sans vitesse initiale en chute libre et à capturer son mouvement. Sa trajectoire étant verticale, on peut ainsi retrouver l'équation de la verticale du lieu.

Il suffit ensuite de faire un changement de repère pour avoir les positions des pastilles (fixées sur le tissu) dans un repère où l'axe Z est la verticale.

5.2.2.3.1 Détermination de la verticale dans le repère des caméras

On considère (X, Y, Z) le repère orthonormé des caméras. On sait, d'après les résultats de l'expérience, que la verticale n'est pas parallèle avec l'axe X des caméras ni avec l'axe Y . On peut alors écrire l'équation de la trajectoire de la bille en chute libre dans le repère (X, Y, Z) :

$$\begin{cases} y = \alpha * z + d \\ x = \alpha' * z + d' \end{cases} \quad (5.1)$$

Il faut alors déterminer les constantes α , α' , d et d' à partir des positions 3D recueillies de la bille. On effectue alors, *une minimisation aux moindres carrés* de l'équation (5.1).

Soit la fonction suivante à minimiser :

$$\Pi_y = \sum_{i=1}^N (y_i - (\alpha * z_i + d))^2 \quad (5.2)$$

où N représente le nombre de positions de la bille qui ont été enregistrées avec le système de MOCAP.

$$\frac{\partial \Pi_y}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^N y_i z_i - \alpha \sum_{i=1}^N z_i^2 - d \sum_{i=1}^N z_i \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi_y}{\partial d} &= \sum_{i=1}^N y_i - \alpha \sum_{i=1}^N z_i + d * N \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

On peut écrire les équations (5.3) et (5.4) sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N z_i^2 & \sum_{i=1}^N z_i \\ \sum_{i=1}^N z_i & N \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \alpha \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N y_i z_i \\ \sum_{i=1}^N y_i \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

D'où les valeurs optimales de α et d en inversant le premier élément du membre gauche de l'équation (5.5).

De la même manière, on peut également trouver les valeurs de α' et d' , en travaillant sur x .

L'équation(5.1) devient alors :

$$\begin{cases} y = 2.06489 z - 491.26974 \\ x = 0.30199 z + 58.07762 \end{cases}$$

5.2.2.3.2 Détermination du changement de repère

L'objectif est de trouver la rotation r d'angle θ autour d'un axe \vec{u} , qui transforme la droite (5.1) en une droite parallèle à l'axe vertical Z du repère.

Cherchons d'abord un vecteur directeur \vec{v} de la droite (5.1) :

$$A = \begin{pmatrix} d' \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha'}{\alpha}d + d' \\ 0 \\ \frac{-d}{\alpha} \end{pmatrix} \text{ sont deux points de la droite (5.1).}$$

On a alors $\vec{v} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$ est un vecteur unitaire directeur de la droite (5.1). On veut que

$$r(\vec{v}) = \vec{k} \text{ où } \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ On pose alors } \vec{u} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{k}}{\|\vec{v} \wedge \vec{k}\|} \text{ l'axe de la rotation } r \text{ (car } \vec{u} \text{ est un}$$

vecteur perpendiculaire au plan formé par \vec{v} et \vec{k}). L'expression d'une rotation vectorielle est (voir l'annexe A.3 pour la démonstration) :

$$\text{Pour tout vecteur } \vec{s} \quad r(\vec{s}) = \cos \theta \vec{s} + (1 - \cos \theta)(\vec{s} \cdot \vec{u}) \vec{u} + \sin \theta(\vec{u} \wedge \vec{s})$$

Or $\vec{v} \perp \vec{u}$. Donc $r(\vec{v}) = \cos \theta \vec{v} + \sin \theta(\vec{u} \wedge \vec{v})$. D'où $\cos \theta = \vec{v} \cdot r(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{k}$ et $\sin \theta = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}]$.

En posant I_3 La matrice de l'identité de dimension 3, on peut alors déduire la matrice de la rotation à partir de la formule de Rodrigues :

$$M = I_3 + \sin \theta [\tilde{u}] + (1 - \cos \theta) [\tilde{u}]^2$$

$$\text{avec } [\tilde{u}] = \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{on a alors : } M = \begin{pmatrix} 0.98811 & -0.08131 & -0.13050 \\ -0.08131 & 0.444028 & -0.89232 \\ 0.13050 & 0.892316 & 0.43214 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 58.07762 \\ -491.26974 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où le transformé \vec{Q} (dans le nouveau repère) d'un point \vec{P} capturé :

$$\vec{Q} = \vec{A} + \vec{M} \cdot (\vec{AP})$$

5.3 Interpolation des données manquantes

Les données capturées sont exprimées dans le nouveau repère. On s'intéresse à présent, à l'interpolation des données manquantes lors de la reconstruction 3D de la surface du tissu, afin d'obtenir une surface sans trous. L'identification des paramètres de dissipation, qui entrent en jeu lors de la simulation de vêtements, sera effectuée par la suite. Entre deux trames successives, la position d'une pastille donnée peut ne pas être reconstruite par le MOCAP pour l'une des raisons évoquées dans la section précédente. On a alors mis en place un ensemble de méthodes d'interpolation des données manquantes dans le but d'avoir une surface reconstruite sans trous.

L'interpolation la plus simple et la plus employée est l'interpolation à partir des positions

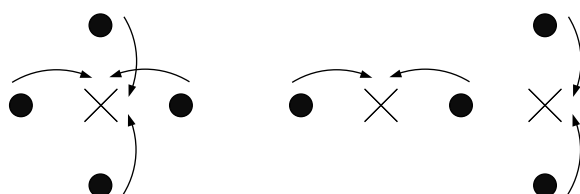


Figure 5.6 – Interpolation à partir des voisins sur la chaîne et la trame

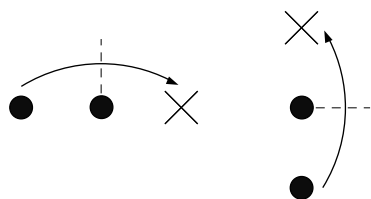


Figure 5.7 – Extrapolation à partir des voisins

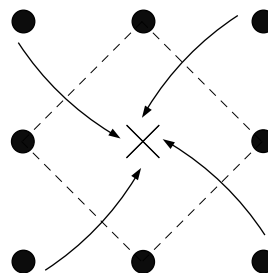


Figure 5.8 – Interpolation par symétrie

des masses voisines sur la chaîne et sur la trame (voir la figure 5.6). Le point manquant est pris comme le barycentre de ses quatre voisins sur la chaîne et sur la trame. Si un voisin sur la chaîne par exemple est lui aussi manquant, on prend seulement ses deux voisins selon la trame et inversement.

Pour les points matérialisant les coins du tissu, cette interpolation n'est pas possible. On utilise alors une extrapolation à partir de ses voisins selon la chaîne et/ou la trame

comme le montre la figure 5.7. Le coin manquant est l'image de son deuxième voisin selon la chaîne (et/ou la trame) par la symétrie centrale de centre son premier voisin selon la chaîne.

On utilise aussi une interpolation des voisins d'ordre 2 (les voisins selon les diagonales). On considère le symétrique de chaque voisin d'ordre 2 par rapport à l'axe formé par les deux voisins sur la chaîne et la trame situés du même côté. Le point manquant est pris comme le barycentre de quatre points symétriques (voir la figure 5.8).

On peut également exploiter les données disponibles pour un même point mais pour

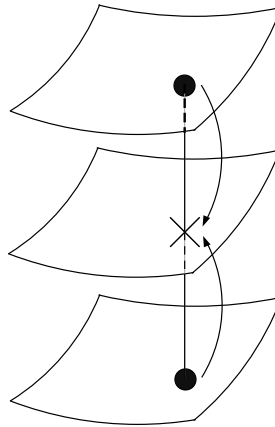


Figure 5.9 – Interpolation à partir des trames avant et après

des trames différentes. Si on a la position d'un point à la trame $n - 1$ et $n + 1$, mais pas à la trame n , on peut interpoler cette dernière position comme le barycentre entre les positions de la trame précédente et de la trame suivante.

Enfin, pour plus de stabilité, à chaque fois qu'une interpolation est possible elle a été effectuée. Le résultat final est la moyenne des résultats obtenus (voir l'algorithme 1).

```

x : entier ;
x ← nombrePointsManquants();
Tant que (x > 0) faire
  r : point3D ;
  k : entier ;
  Pour (p ∈ pointsManquants()) faire
    r ← [0,0,0];
    k ← 0;
    Si (interpolationSelonVoisinsPossible(p)) Alors
      r ← r + interpolVoisin(p);
      k ← k + 1;
    Fin Si
    Si (interpolationParSymetriePossible(p)) Alors
      r ← r + interpolSymetrie(p);
      k ← k + 1;
    Fin Si
    Si (interpolationSelonFramesPossible(p)) Alors
      r ← r + interpolFrame(p);
      k ← k + 1;
    Fin Si
    Si (extrapolationPourCoinsPossible(p)) Alors
      r ← r + extrapolation(p);
      k ← k + 1;
    Fin Si
    Si (k ≠ 0) Alors
      r ← r/k;
      position(p) ← r;
      nombrePointsManquants ← nombrePointsManquants -1;
    Fin Si
  Fin Pour
x ← nombrePointsManquants();
Fait

```

Algorithme 1: Interpolation des données manquantes

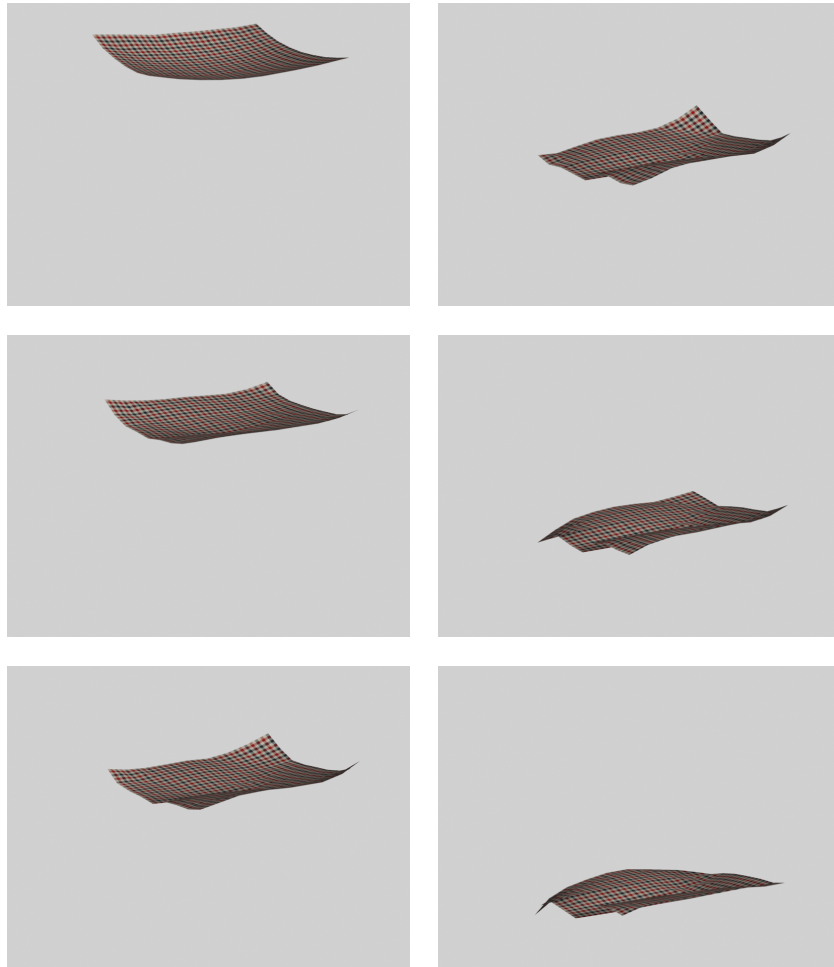


Figure 5.10 – Reconstruction du tombé de tissu

5.4 Recalage des paramètres de dissipation

Une fois que les données capturées sont exprimées dans le nouveau repère, et que les données manquantes ont été comblées par interpolation, on s'intéresse à l'identification des paramètres de dissipation qui entrent en jeu lors de la simulation de vêtements, en utilisant notre modèle mécanique de tissu détaillé au chapitre 3. Les points capturés seront confondus avec les masses du modèle.

Les données capturées nous permettent de déterminer pour chaque masse i sa vitesse et

son accélération (par différences finies).

$$\forall i, \vec{V}_i = \frac{\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_i}{dt} \quad (5.6)$$

$$\forall i, \vec{A}_i = \frac{\vec{V}_{i+1} - \vec{V}_i}{dt} \quad (5.7)$$

Puisque notre modèle d'intégration numérique est un modèle implicite et afin de rester cohérent, on choisit de calculer les vitesses et les accélérations des masses entre les instants i et $i + 1$ (plutôt qu'entre $i - 1$ et i).

On applique ensuite à chaque masse i la relation fondamentale de la dynamique (RFD) :

$$\forall i, m_i \vec{A}_i = \vec{F}_i$$

où F_i est l'ensemble des forces appliquées à la masse i .

5.4.1 Modèle de Dissipation

On utilise la modélisation visco-élastique de Kelvin-Voigt comme précisé au chapitre 3. Cette modélisation suppose que l'élément dissipatif et son ressort associé ont la même déformation. Donc pour le calcul de la contrainte de dissipation, on prend la déformation du ressort associé comme étant la déformation courante.

Le modèle de dissipation utilisé est un modèle linéaire appelé modèle de Rayleigh. Si n est le nombre total des masses du modèle, l'expression mathématique du modèle de Rayleigh est la suivante :

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (5.8)$$

où $[C]$ est la matrice de dissipation de taille $n \times n$, $[M]$ est la matrice diagonale des masses de taille $n \times n$, $[K]$ est la matrice des raideurs des ressorts de taille $n \times n$ (son calcul sera abordé plus tard), α et β sont les constantes de dissipation. Le but de cette étude est donc le recalage de ces coefficients α et β .

Or, notre système utilise 3 types de ressorts. On va donc considérer la matrice des raideurs $[K]$ comme étant la somme de 3 matrices de raideurs.

$$[K] = [K_{flexion}] + [K_{cisaillement}] + [K_{traction}]$$

On aura alors à déterminer 3 coefficients β différents. L'équation (5.8) s'écrit alors :

$$[C] = \alpha[M] + \beta_f[K_{flexion}] + \beta_c[K_{cisaillement}] + \beta_t[K_{traction}] \quad (5.9)$$

Cette écriture est possible grâce à la linéarité du modèle de Rayleigh. La détermination des 3 coefficients β permettra de connaître les forces de dissipation pour chaque type de ressort.

Quant au paramètre α , il permet de déterminer la dissipation engendrée par le mouvement des masses dans l'air, c'est à dire, le frottement visqueux du tissu avec l'air.

La force totale de dissipation s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{dissip}} = [C]\overrightarrow{V}$$

où V est le vecteur vitesse de toutes les masses de taille $n \times 1$.

5.4.1.0.3 Expression des raideurs

Avant de déterminer les paramètres du modèle de dissipation de Rayleigh, on s'intéresse au calcul des matrices de raideur $[K]$ pour chaque type de ressort. On considère un type donné de ressort que l'on appellera type a dans la suite. La matrice de raideur correspondante s'écrit sous la forme

$$K = \frac{\overrightarrow{dF}}{\overrightarrow{dP}}$$

où \overrightarrow{F} est le vecteur des forces appliquées sur les masses par les ressorts de type a et \overrightarrow{P} est le vecteur position de toutes les masses.

Soit \overrightarrow{F}_i^a le vecteur des forces produites sur la masse i par les ressorts de type a.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &= \sum_i \overrightarrow{F}_i^a \\ \overrightarrow{F}_i^a &= \sum_r \overrightarrow{f}_{r,i} \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{f}_{r,i}$ est la force produite sur la masse i par un ressort r de type a connecté à la masse (l'expression de $\overrightarrow{f}_{r,i}$ est donnée pour chaque type de ressort au chapitre 3, voir l'équation 3.1).

A ce niveau, il faut différencier le cas des ressorts de flexion d'une part et le cas des ressorts de cisaillement et de traction d'autre part.

Pour les ressorts de flexion, $[K_{flexion}]$ est une matrice $3n \times 3n$ dont le $(i, j)^{eme}$ bloc (3×3) est :

$$\frac{\overrightarrow{dF}_i^{RessFlx}}{\overrightarrow{dP}_j} = \sum_r \frac{\overrightarrow{df}_{r,i}^{RessFlx}}{\overrightarrow{dP}_j}$$

avec

$$\frac{\overrightarrow{df}_{r,i}^{RessFlx}}{\overrightarrow{dP}_j} = -\frac{L}{h} \left(\overrightarrow{\sigma} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \overrightarrow{P}_i \partial \overrightarrow{P}_j} + \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial \kappa} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \overrightarrow{P}_i} \right) \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \overrightarrow{P}_j} \right)^T \right)$$

en adoptant les notations du paragraphe 3.4.1 et notamment celles de l'équation 3.1.

Pour les ressorts de cisaillement et de traction, $[K_{cisaillement}]$ et $[K_{traction}]$ ont la même expression. $[K_{cisaillement}]$ et $[K_{traction}]$ sont des matrices $3n \times 3n$ dont le $(i, j)^{eme}$ bloc (3×3) s'écrit :

$$\frac{\overrightarrow{dF}_i}{\overrightarrow{dP}_j} = \sum_r \frac{\overrightarrow{df}_{r,i}}{\overrightarrow{dP}_j}$$

avec

$$\frac{\overrightarrow{df}_{r,i}}{\overrightarrow{dP}_j} = -L \left(\overrightarrow{\sigma} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \overrightarrow{P}_i \partial \overrightarrow{P}_j} + \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \overrightarrow{P}_i} \right) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \overrightarrow{P}_j} \right)^T \right)$$

en adoptant les définitions et les notations du paragraphe 3.4.2.

On peut ainsi calculer tous les termes qui figurent dans l'expression des forces de dissipation. Les seules inconnues sont les paramètres α et les β qu'on va identifier à partir des expériences réalisées.

5.4.2 Recalage des paramètres de dissipation par optimisation globale

Etant donné que les masses du système sont régies par la RFD et que l'on connaît les différentes forces agissant sur les masses, on peut déterminer les quatre paramètres de dissipation par une minimisation globale aux moindres carrés.

$$\text{Soit } \overrightarrow{F_{erreur}} = [M] \overrightarrow{A} - [M] \overrightarrow{g} - \overrightarrow{F_{ress}} - \overrightarrow{F_{dissip}} \quad (5.10)$$

où $\overrightarrow{F_{ress}}$ est la force totale appliquée par les ressorts sur les masses et \overrightarrow{g} la gravité du lieu. Les paramètres de dissipation sont alors obtenus par la minimisation de la norme de $\overrightarrow{F_{erreur}}$.

$$\text{On pose } \Phi(\alpha, \beta_f, \beta_c, \beta_t) = \overrightarrow{F_{erreur}}^T \cdot \overrightarrow{F_{erreur}} \quad (5.11)$$

$\Phi(\alpha, \beta_f, \beta_c, \beta_t)$ est une forme quadratique définie positive. On peut donc calculer son minimum par différenciation et en écrivant que les dérivées partielles de Φ sont égales à zéro. On obtient un système linéaire qui a la forme suivante :

$$[A] \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_f \\ \beta_c \\ \beta_t \end{pmatrix} = b \quad (5.12)$$

Les paramètres de dissipation sont alors obtenus en inversant la matrice $[A]$. Cependant notre modélisation de la dissipation est seulement valide dans la partie visqueuse du mouvement du tissu (sans turbulences). On commence donc par analyser le mouvement de chute libre d'un tissu afin de déterminer cette partie visqueuse du mouvement.

Au début du mouvement d'un tissu en chute libre, la vitesse globale de l'objet est naturellement très faible. Donc, les phénomènes visqueux qui sont relatifs à la vitesse (en général proportionnels) ne peuvent être observés. De plus, on remarque que le mouvement du tissu est pollué par les conditions initiales de lancement (les données capturées sont très bruitées dans cette zone).

A partir d'un certain instant, le mouvement du tissu devient chaotique et turbulent et le type d'interaction entre l'air et le tissu ne peut plus être modélisé par le modèle de Rayleigh.

Donc, on va mesurer les paramètres de dissipation visqueuse dans la partie visqueuse du mouvement située entre le moment où le tissu possède déjà une certaine vitesse permettant d'observer des phénomènes de friction visqueuse avec l'air, et avant le moment où le mouvement du tissu devient turbulent.

La figure 5.11 correspond à la vitesse moyenne d'un tissu d'étude. On utilisera ce même tissu par la suite pour illustrer nos propos et nos calculs et on donnera à la fin de ce chapitre les résultats obtenus pour la même expérience et les mêmes traitements réalisés avec d'autres tissus.

Pour l'exemple de la figure 5.11, on considère que la partie située entre les trames 40 et 100 est incluse dans la partie visqueuse. La vitesse moyenne y augmente de moins en moins rapidement. On voit que vers la trame 110, la vitesse moyenne atteint un maxi-

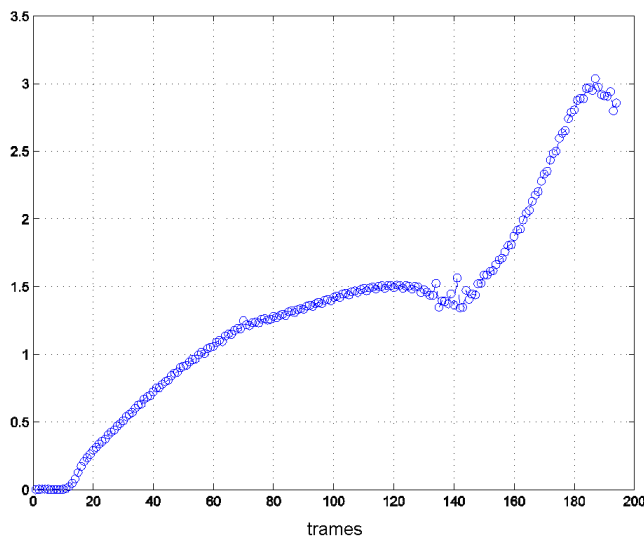


Figure 5.11 – Evolution de la vitesse moyenne d'un tissu en chute libre (en m/s)

num local ce qui correspond au début des turbulences (l'évolution de la vitesse moyenne n'est plus uniforme) confirmé par l'observation de la vidéo de la trajectoire reconstruite.

5.4.2.0.4 Stabilité du système linéaire

La partie visqueuse du mouvement du tissu étant déterminée, revenons à notre problème principal, à savoir le calcul des paramètres de dissipation visqueuse d'un tissu à partir de l'équation 5.12.

Commençons d'abord par calculer le conditionnement de la matrice $[A]$ afin d'évaluer la stabilité de la solution obtenue :

$$\kappa([A]) = \| [A] \| \cdot \| [A]^{-1} \| \quad (5.13)$$

$\kappa([A])$ peut aussi se calculer comme le rapport entre sa plus grande valeur propre et sa plus petite, car $[A]$ est symétrique définie positive.

Les termes diagonaux de $[A]$ sont "proportionnels" au carré des forces de dissipation correspondant respectivement à la viscosité de l'air, de la flexion, du cisaillement et de la traction. Dans cet ordre, ces forces de dissipation ont un ordre de grandeur pour chacune qui est beaucoup plus grand que celui de la précédente.

Donc, la matrice $[A]$ est largement diagonale dominante et son déterminant peut être

approché par le produit de ses éléments diagonaux. On a alors

$$\kappa([A]) \geq \frac{\frac{\text{trace}([A])}{4}}{\sqrt[4]{\det([A])}} \gg 1 \quad (5.14)$$

Le nombre de conditionnement de la matrice $[A]$ est très grand (pour cet exemple $\kappa([A]) = 4.2e^{13}$) donc le système 5.12 est mal conditionné et la solution trouvée sera instable.

On propose alors une méthode différente pour déterminer les paramètres de dissipation visqueuse basée sur une minimisation itérative exposée dans ce qui suit.

5.4.3 Recalage des paramètres de dissipation par optimisation itérative

Le recalage des paramètres de dissipation par optimisation itérative nécessite de donner un ordre consistant dans lequel on va déterminer ces paramètres. On utilise encore la matrice $[A]$ du paragraphe précédent. Son aspect suggère d'estimer α en premier, ensuite β_f , β_c et finalement β_t car les forces de dissipation correspondantes augmentent largement dans cet ordre.

5.4.3.1 Recalage du paramètre de frottement visqueux avec l'air

Au cours de cette identification, on va faire abstraction de l'existence des ressorts. Ceci se justifie par le fait que l'on cherche à exprimer une force de dissipation visqueuse qui ne s'applique qu'au niveau des masses (les ressorts étant considérés sans masse).

La RFD appliquée à chaque masse i s'écrit :

$$m_i A_i = m_i g + F_{dissip}^{air}$$

où F_{dissip}^{air} est la force de dissipation visqueuse de l'air. Selon le modèle de Rayleigh, F_{dissip}^{air} s'écrit sous la forme :

$$F_{dissip}^{air} = \alpha_i m_i V_i$$

Donc, si on pose $F_{erreur}^{air} = m_i A_i - m_i g$, il faut trouver α_i qui minimise

$$\Phi(\alpha_i) = \| F_{erreur}^{air} - F_{dissip}^{air} \|^2$$

$$\Phi(\alpha_i) = \| F_{erreur}^{air} - \alpha_i m_i V_i \|^2 \quad (5.15)$$

$$\frac{d\Phi}{d\alpha_i} = -2 ((F_{erreur}^{air} - \alpha_i m_i V_i) \cdot m_i V_i) \quad (5.16)$$

$$= 0$$

$$\alpha_i = \frac{(F_{erreur}^{air} | V_i)}{m_i \| V_i \|^2} \quad (5.17)$$

On a donc un α_i par masse et par trame. En examinant les valeurs de α_i trouvées pour

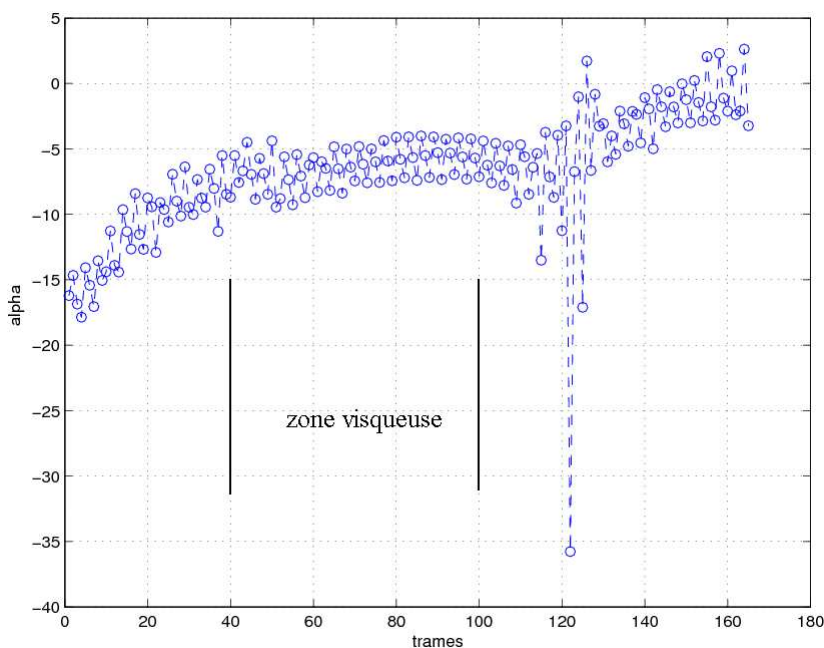


Figure 5.12 – Paramètre de dissipation visqueuse avec l'air

chaque masse et pour chaque trame, on observe que les résultats sont très bruités.

En effet, les sources de bruit sont multiples :

- Les erreurs du système de capture (MOCAP).
 - erreurs lors de la reconstruction 3D des positions.
 - données manquantes : si le MOCAP n'a pas suffisamment de données pour reconstruire la position 3D d'un point, ce point est ignoré. On retrouve sa position par interpolation entre les positions de ses voisins comme expliqué à la section 5.3.
- Les erreurs commises en plaçant les pastilles réfléchissantes à la main sur le tissu. En théorie, elles sont distantes de 5cm , mais tout travail manuel comporte des

erreurs.

- L'erreur due au modèle de dissipation de Rayleigh.
- Les erreurs numériques du calcul en double précision.

On calcule alors un α_t pour chaque trame comme étant la moyenne des α_i de cette trame (voir la figure 5.12). Cette opération atténue sensiblement le bruit et les valeurs α_t obtenues sont comprises dans un intervalle restreint pour la partie visqueuse.

Un α global est pris comme la moyenne des α_t dans la partie *visqueuse* du mouvement.

On note *std* l'écart type, et on adoptera cette notation dans toute la suite du document.

On obtient alors pour notre exemple d'étude :

$$\alpha = -7.0(\text{std} = 1.9)$$

Le fait que α décrive une plage horizontale dans la zone choisie (modulo le bruit sur les domaines ; voir la figure 5.12) prouve que le modèle de Rayleigh est correct sur cette plage. En effet, les vitesses, elles-mêmes, varient sur cette plage ce qui, en conséquence, valide notre procédure.

5.4.3.2 Recalage du paramètre de la dissipation visqueuse des ressorts de flexion

Le paramètre de frottement visqueux α entre le tissu et l'air étant déterminé, on inclut dans notre modélisation du tissu les ressorts de flexion. Notre modèle évolue et permet ainsi, de prendre en compte les forces de flexion qui existent entre 2 facettes adjacentes.

Les forces de flexion sont les seules forces orthogonales à la surface du tissu (à part la résistance de l'air déterminée précédemment). De plus, les forces de flexion sont très faibles par rapport aux forces de traction et de cisaillement (un tissu résiste beaucoup plus à la traction et au cisaillement qu'à la flexion). Ce qui explique qu'il est préférable d'évaluer la dissipation en flexion d'abord. On ajoute alors les ressorts de flexion à la modélisation (et on continue à omettre les ressorts de cisaillement et de traction). La RFD appliquée à chaque masse i s'écrit donc :

$$m_i A_i = m_i g + \alpha m_i V_i + F_i^{\text{RessFlx}} + F_{\text{dissip}}^f$$

où $F_i^{RessFlx}$ est la force engendrée par les ressorts de flexion sur la masse i et F_{dissip}^f est la force de dissipation visqueuse des ressorts de flexion. La force exercée par un ressort de flexion r sur une masse i est donnée par l'équation 3.1 et $F_i^{RessFlx}$ peut être calculée comme la somme des forces précédentes pour tous les ressorts r connectés à la masse i . La force de dissipation visqueuse engendrée par les ressorts de flexion au niveau de la masse i s'écrit d'après le modèle de Rayleigh sous la forme :

$$F_{dissip}^f = \beta_i^{flx} ([K_{flexion}]V)_i \quad (5.18)$$

où la raideur $[K_{flexion}]$ est donnée au paragraphe 5.4.1.0.3.

On voit d'après l'équation 5.18 et d'après l'expression de $[K_{flexion}]$ que le calcul de la force de dissipation engendrée par un ressort de flexion au niveau de la masse i fait intervenir d'autres masses (les voisines de i). Donc pour calculer le i ème élément du vecteur $[K_{flexion}]V$ à partir de la matrice $[K_{flexion}]$ et du vecteur V , il faut calculer d'abord le produit $[K_{flexion}]V$ (un calcul partiel par bloc est plus compliqué à faire dans ce cas).

La démarche à suivre sera donc légèrement modifiée par rapport à celle utilisée pour la détermination de α (coefficient de dissipation visqueuse de l'air), puisqu'on va déterminer directement un β_f pour chaque trame.

On pose

$$F_{erreur}^f = [M]A - [M]g - \alpha[M]V - \beta_f[K_{flexion}]V - F^{RessFlx}$$

avec $[M]$ la matrice diagonale des masses, A le vecteur des accélérations et $F^{RessFlx}$ le vecteur des forces de flexion.

Il faut alors trouver le β_f qui minimise $\Phi(\beta) = \| F_{erreur}^f - F_{dissip}^f \|^2$

$$\begin{aligned} \Phi(\beta) &= \| F_{erreur}^f - \beta_f[K_{flexion}]V \|^2 \\ \frac{d\Phi}{d\beta} &= -2 \times ((F_{erreur}^f - \beta_f[K_{flexion}]V) \cdot [K_{flexion}]V) \\ &= 0 \\ \beta_f &= \frac{(F_{erreur}^f \cdot [K_{flexion}]V)}{\| [K_{flexion}]V \|^2} \end{aligned}$$

La figure (5.13) donne les valeurs trouvées pour β_f à chaque trame. On calcule β_f

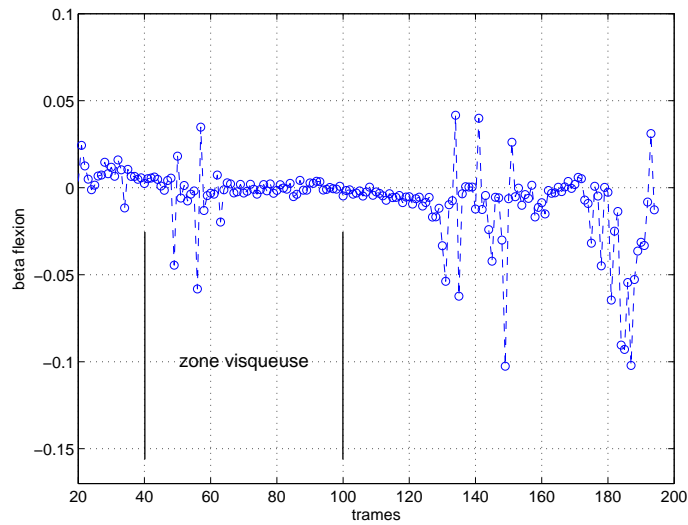


Figure 5.13 – Coefficient de dissipation visqueuse des ressorts de flexion

comme la moyenne des β^f dans la partie *visqueuse* du mouvement (voir les explications au paragraphe 5.4.2), à savoir entre les trames 40 et 100 (voir la figure 5.13). Pour notre exemple d'étude on obtient :

$$\beta_f = -6.78290e^{-03} (std = 1.95e^{-02})$$

Là aussi, on constate que la valeur de β_f est constante dans la zone visqueuse (courbe de la figure 5.13 horizontale) ce qui valide le modèle de Rayleigh et notre procédure.

5.4.3.3 Recalage du paramètre de la dissipation visqueuse des ressorts de cisaillement

Le problème de la mesure de la force de dissipation visqueuse en traction et en cisaillement est que ces deux forces s'exercent toutes les deux dans le plan du tissu et sont corrélées par nature. On peut préciser que cela sera difficile de séparer ces deux phénomènes. Notre stratégie consiste à commencer par la dissipation visqueuse du cisaillement car les forces mises en jeu en traction sont bien plus importantes et risquent de masquer celles du cisaillement.

On utilise les paramètres déjà déterminés α et β_f et on rajoute dans notre modélisation

du tissu les ressorts de cisaillement.

La RFD appliquée à chaque masse i s'écrit :

$$m_i A_i = m_i g + \alpha m_i V_i + F_i^{RessFlx} + \beta_f ([K_{flexion}]V)_i + F_i^{RessCis} + F_{dissip_i}^c$$

où $F_i^{RessCis}$ est la force engendrée par les ressorts de cisaillement sur la masse i (son calcul a été abordé à la section 3.4) et $F_{dissip_i}^c$ est la force de dissipation visqueuse engendrée par les ressorts de cisaillement au niveau de la masse i et qui s'écrit :

$$F_{dissip_i}^c = \beta_i^{cis} ([K_{cisaillement}]V)_i \quad (5.19)$$

La démarche à suivre sera la même que celle utilisée pour la détermination de β_f . On va déterminer un β_c pour chaque trame. Soit

$$F_{erreur}^c = [M]A - [M]g - \alpha[M]V - \beta_f [K_{flexion}]V - F^{RessFlx} - \beta_c [K_{cisaillement}]V - F^{RessCis}$$

Il faut alors trouver le β_c qui minimise $\Phi(\beta) = \| F_{erreur}^c - F_{dissip}^c \|^2$

$$\begin{aligned} \Phi(\beta) &= \| F_{erreur}^c - \beta_c [K_{cisaillement}]V \|^2 \\ \frac{d\Phi}{d\beta} &= -2 \times ((F_{erreur}^c - \beta_c [K_{cisaillement}]V) \cdot [K_{cisaillement}]V) \\ &= 0 \\ \beta_c &= \frac{(F_{erreur}^c \cdot [K_{cisaillement}]V)}{\| [K_{cisaillement}]V \|^2} \end{aligned}$$

La figure (5.14) donne les valeurs trouvées pour β_c à chaque trame. De même que pour les ressorts de flexion, on calcule un β_c global comme la moyenne des β^c dans la partie *visqueuse* du mouvement, à savoir entre les trames 40 et 100. Pour l'exemple d'étude, on obtient

$$\beta_c = -3.17983e^{-04} (std = 2.88e^{-04})$$

On constate sur la figure 5.14 que la courbe du coefficient β_c est loin d'être horizontale dans la partie visqueuse, et l'écart type est du même ordre que la mesure, ce qui confirme notre prédiction.

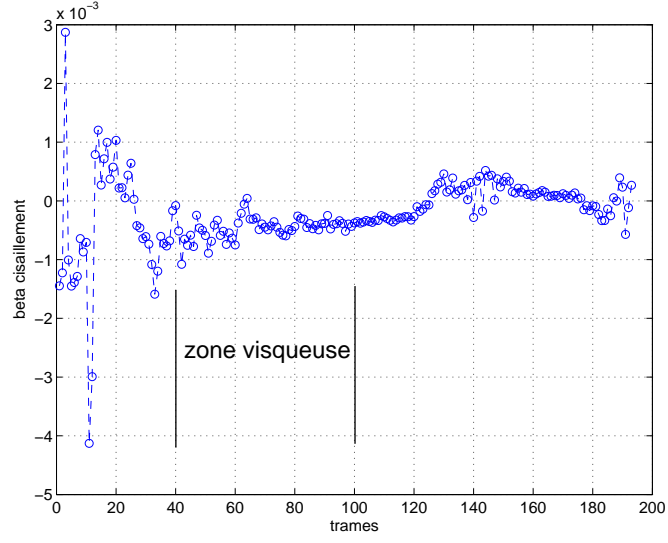


Figure 5.14 – Coefficient de dissipation visqueuse des ressorts de cisaillement

5.4.3.4 Recalage du paramètre de la dissipation visqueuse des ressorts de traction

On utilise les paramètres déjà déterminés α , β_f et β_c et on rajoute dans notre modélisation du tissu les ressorts de structure.

La RFD appliquée à chaque masse i s'écrit :

$$m_i A_i = m_i g + \alpha m_i V_i + F_i^{RessFlx} + \beta_f ([K_{flexion}]V)_i \\ + F_i^{RessCis} + \beta_c ([K_{cisaillement}]V)_i + F_i^{RessTra} + F_{dissip_i}^t$$

où $F_i^{RessTra}$ est la force engendrée par les ressorts de traction sur la masse i (son calcul a été abordé à la section 3.4) et $F_{dissip_i}^t$ est la force de dissipation visqueuse engendrée par les ressorts de traction au niveau de la masse i et qui s'écrit :

$$F_{dissip_i}^t = \beta_i^{tra} ([K_{traction}]V)_i$$

La démarche à suivre est toujours la même que celle utilisée pour les ressorts de cisaillement et de flexion. On va déterminer directement un β_t pour chaque trame.

On pose

$$F_{erreur}^t = [M]A - [M]g - \alpha[M]V - \beta_f[K_{flexion}]V - F^{RessFlx} \\ - \beta_c[K_{cisaillement}]V - F^{RessCis} - \beta_t[K_{traction}]V - F^{RessTra}$$

Il faut alors trouver le β_t qui minimise $\Phi(\beta) = \| F_{erreur}^t - F_{dissip}^t \|^2$

$$\begin{aligned}\Phi(\beta) &= \| F_{erreur}^t - \beta_t [K_{traction}]V \|^2 \\ \frac{d\Phi}{d\beta} &= -2 \times ((F_{erreur}^t - \beta_t [K_{traction}]V) \cdot [K_{traction}]V) \\ &= 0 \\ \beta_t &= \frac{(F_{erreur}^t \cdot [K_{traction}]V)}{\| [K_{traction}]V \|^2}\end{aligned}$$

La figure (5.15) donne les valeurs trouvées pour β_t à chaque trame. De même que pour

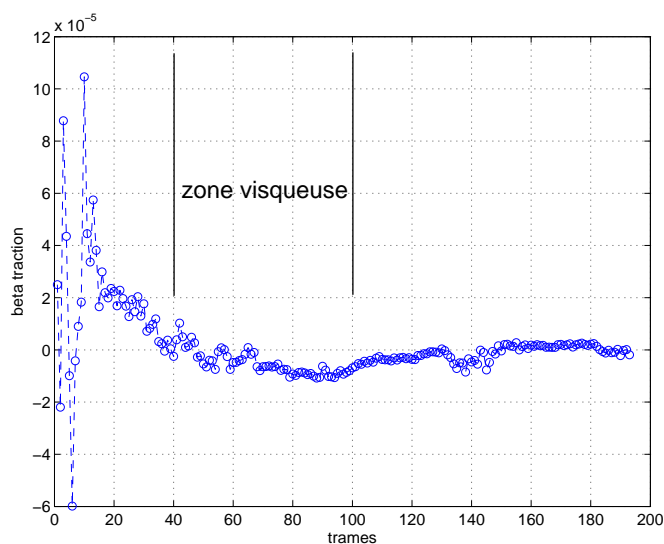


Figure 5.15 – Coefficient de dissipation visqueuse des ressorts de traction

les ressorts de flexion et de cisaillement, on calcule un β_t global comme la moyenne des β^t dans la partie *visqueuse* du mouvement, à savoir entre les trames 40 et 100. Pour l'exemple d'étude, on obtient

$$\beta_t = -3.91413e^{-06} (std = 4.2e^{-06})$$

Tout comme pour le cisaillement, on constate que cette mesure du β_t n'est pas très stable dû au fait que les ressorts de traction et de cisaillement sont corrélés, mais ils se compensent probablement !

5.4.4 Résultats

En utilisant les paramètres de dissipation optimisés calculés au paragraphe précédent, on peut évaluer l'amélioration apportée à la simulation en utilisant une dissipation visqueuse mesurée. On mesurera cette amélioration en reprenant les différentes étapes du recalage du paragraphe 5.4.3 et en calculant à chaque fois le gain moyen apporté par l'utilisation d'un paramètre de dissipation mesuré. La démarche sera alors de calculer à chaque étape la force erreur avec dissipation $F_{erreur}^{avec-dissip}$ et la comparer avec la force erreur sans dissipation $F_{erreur}^{sans-dissip}$. Ainsi, $\left(F_{erreur}^{sans-dissip}\right)^a$ représente à l'étape a l'erreur que l'on commet en supposant qu'il n'y a pas de dissipation des ressorts de type a . $\left(F_{erreur}^{avec-dissip}\right)^a$ représente l'erreur résiduelle, en intégrant dans le calcul, la dissipation des ressorts de type a .

5.4.4.1 Dissipation due à la friction entre l'air et le tissu

On se replace dans le contexte de la détermination du paramètre de dissipation visqueuse de l'air 5.4.3.1 et on calcule la force erreur avec dissipation

$$\left(F_{erreur}^{avec-dissip}\right)^{air} = m_i A_i - m_i g - \alpha m_i V_i$$

et on la compare à la force erreur sans dissipation

$$\left(F_{erreur}^{sans-dissip}\right)^{air} = m_i A_i - m_i g$$

Pour notre exemple d'étude, les deux courbes sont reportées sur la figure 5.16. On remarque que la norme de $\left(F_{erreur}^{avec-dissip}\right)^{air}$ est plus petite que celle de $\left(F_{erreur}^{sans-dissip}\right)^{air}$, ce qui valide notre démarche. D'après la figure 5.16 relative à notre exemple d'étude, on peut dire que la dissipation due au frottement visqueux de l'air permet de diminuer l'erreur de 50% en moyenne.

5.4.4.2 Dissipation des ressorts de flexion

On adopte la modélisation du paragraphe 5.4.3.2 (masses et ressorts de flexion) et on utilise le paramètre de dissipation visqueuse avec l'air α déjà déterminé. On peut alors

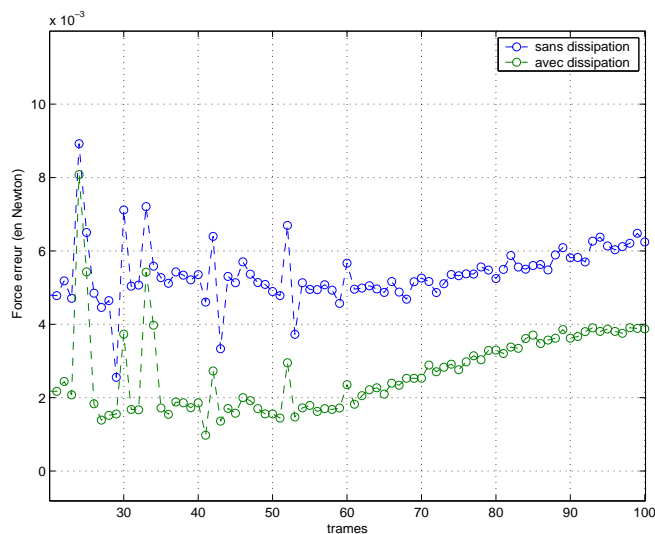


Figure 5.16 – Comparaison entre $(F_{erreur}^{sans-dissip})^{air}$ et $(F_{erreur}^{avec-dissip})^{air}$ (frottement de l'air)

calculer la force erreur avec dissipation

$$\left(F_{erreur}^{avec-dissip}\right)^f = [M]A - [M]g - \alpha[M]V - \beta_f[K_{flexion}]V - F^{RessFlx}$$

et la comparer à la force erreur sans dissipation

$$\left(F_{erreur}^{sans-dissip}\right)^f = [M]A - [M]g - \alpha[M]V - F^{RessFlx}$$

voir la figure 5.17 pour les résultats de notre cas d'étude.

L'analyse de cette figure 5.17 montre que la différence entre les deux forces erreurs est très faible. En agrandissant, par exemple, la partie située entre les trames 80 et 100 (figure 5.18), on voit qu'en moyenne la dissipation visqueuse des ressorts de flexion apporte une amélioration (diminution de l'erreur) mais qui reste très légère.

L'une des conséquences de cette analyse est que, lors de la simulation du mouvement du tissu, on peut négliger la dissipation visqueuse des ressorts de flexion dans le but de diminuer le temps de simulation. Cette conséquence doit être d'abord vérifiée sur les autres tissus.

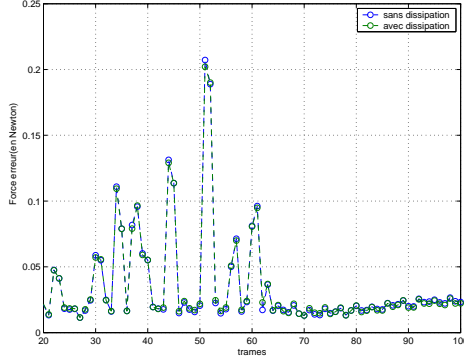


Figure 5.17 – Comparaison entre $(F_{erreur}^{sans-dissip})^f$ et $(F_{erreur}^{avec-dissip})^f$ (dissipation de la flexion)

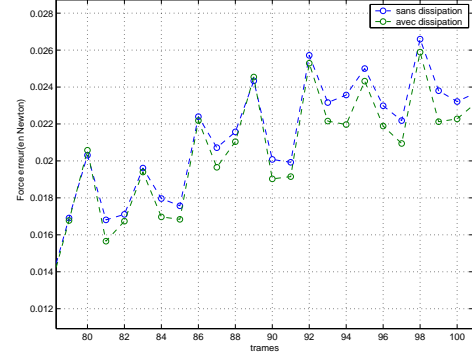


Figure 5.18 – Agrandissement : Comparaison entre $(F_{erreur}^{sans-dissip})^f$ et $(F_{erreur}^{avec-dissip})^f$ (dissipation de la flexion)

5.4.4.3 Dissipation des ressorts de cisaillement

On adopte la modélisation du paragraphe 5.4.3.3 (masses et ressorts de flexion et de cisaillement) et on utilise les paramètres de dissipation déjà déterminés. On peut alors calculer la force erreur avec dissipation des ressorts de cisaillement

$$\begin{aligned} \left(F_{erreur}^{avec-dissip}\right)^c &= [M]A - [M]g - \alpha[M]V - \beta_f[K_{flexion}]V - F^{RessFlx} \\ &\quad - \beta_c[K_{cisaillement}]V - F^{RessCis} \end{aligned}$$

et la comparer à la force erreur sans dissipation

$$\left(F_{erreur}^{sans-dissip}\right)^c = [M]A - [M]g - \alpha[M]V - \beta_f[K_{flexion}]V - F^{RessFlx} - F^{RessCis}$$

L'analyse de la figure 5.19 montre que la différence entre les deux forces erreurs est très faible entre les trames 40 et 70. Dans cette tranche, La dissipation de cisaillement n'apporte aucune amélioration en moyenne.

Entre les trames 70 et 100, on remarque que la norme de $\left(F_{erreur}^{avec-dissip}\right)^c$ est toujours inférieure à $\left(F_{erreur}^{sans-dissip}\right)^c$. En moyenne, la dissipation visqueuse des ressorts de cisaillement améliore l'erreur de 3%.

Dans ce cas, on ne peut pas conclure quant à l'utilisation de la dissipation visqueuse des ressorts de cisaillement en simulation.

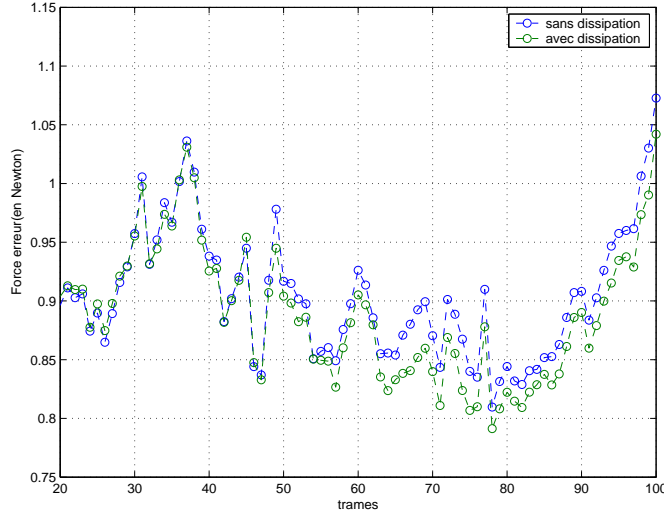


Figure 5.19 – Comparaison entre $(F_{erreur}^{sans-dissip})^c$ et $(F_{erreur}^{avec-dissip})^c$ (dissipation du cisaillement)

5.4.4.4 Dissipation des ressorts de traction

On adopte la modélisation du paragraphe 5.4.3.4 (masses et tous les ressorts) et on utilise les paramètres de dissipation déjà déterminés. On peut alors calculer la force erreur avec dissipation des ressorts de traction

$$\begin{aligned} (F_{erreur}^{avec-dissip})^t &= [M]A - [M]g - \alpha[M]V - \beta_f[K_{flexion}]V - F^{RessFlx} \\ &\quad - \beta_c[K_{cisaillement}]V - F^{RessCis} - \beta_t[K_{traction}]V - F^{RessTra} \end{aligned}$$

et la comparer à la force erreur sans dissipation

$$\begin{aligned} (F_{erreur}^{sans-dissip})^t &= [M]A - [M]g - \alpha[M]V - \beta_f[K_{flexion}]V - F^{RessFlx} \\ &\quad - \beta_c[K_{cisaillement}]V - F^{RessCis} - F^{RessTra} \end{aligned}$$

L'analyse de la figure 5.20 montre que la dissipation visqueuse permet de réduire l'erreur presque partout dans la plage allant de la trame 40 à la trame 100.

Cette amélioration de l'erreur est plus importante entre les trames 70 et 100. En moyenne la dissipation visqueuse des ressorts de structure est de 9%.

5.4.5 Simulation

On a aussi introduit les paramètres trouvés pour notre exemple d'étude dans notre simulateur afin de modéliser une dissipation réelle mesurée. On a simulé virtuellement

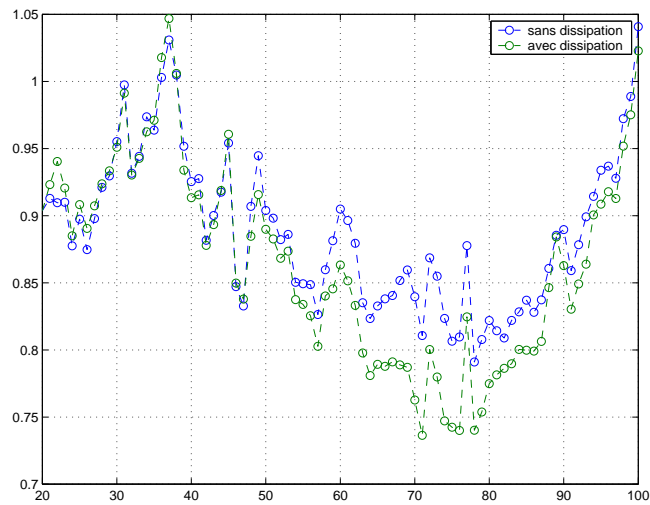


Figure 5.20 – Comparaison entre $(F_{\text{erreur}}^{\text{sans-dissip}})^t$ et $(F_{\text{erreur}}^{\text{avec-dissip}})^t$ (dissipation de la traction)

l'expérience de tombé d'un tissu (avec tous les paramètres se rapportant au cas d'étude). La comparaison de la trajectoire réelle (jaune) et de la trajectoire virtuelle (verte) montre que globalement dans la partie visqueuse du mouvement, le tissu virtuel suit de très près le tissu réel. On peut voir que la forme du tissu simulé n'est pas exactement la même que celle du tissu réel. Ceci s'explique par le fait que l'on cherche des paramètres de dissipation globaux. La forme en vague du tissu réel (surtout au niveau des bords) peut s'expliquer par la dynamique des fluides (présence de champs de turbulence au niveau des bords du tissu). Mais cet aspect est en dehors du cadre de cette thèse.

D'ailleurs, sa modélisation au niveau d'un simulateur de vêtements alourdirait considérablement les calculs sans avoir un intérêt évident pour une application telle que l'essayage virtuel.

5.4.6 Résultats avec d'autres tissus

Les mêmes expériences ont été réalisées avec d'autres types de tissus. Les résultats sont reportés dans les tableaux 5.1 et 5.2. Les trois premières lignes correspondent à la même expérience réalisée trois fois de suite avec le même tissu. La première ligne correspond à notre cas d'étude. On peut déjà dire que les résultats pour le paramètre de dissipation de l'air α sont très stables. Les moyennes trouvées pour les cinq expériences

Tableau 5.1 – Paramètres de dissipation

	α		β_f		β_c		β_t	
	mean	std	mean	std	mean	std	mean	std
tissu 1	-7.0	1.9	-6.8e-3	2.0e-2	-3.1e-4	2.9e-4	-3.9e-6	4.2e-6
tissu 1	-5.9	2.4	-5.2e-3	1.5e-2	-4.0e-4	4.0e-4	-2.7e-6	3.0e-6
tissu 1	-7.2	2.2	-3.1e-4	2.0e-3	-1.8e-4	4.6e-4	-4.0e-6	5.3e-6
tissu 2	-7.2	2.3	-2.0e-4	5.7e-4	-4.3e-4	6.7e-4	-4.6e-7	5.7e-7
tissu 3	-7.4	1.1	-8.4e-4	3.1e-3	-1.1e-3	6.1e-4	-2.2e-8	6.0e-8

Tableau 5.2 – Décroissance de l'erreur en utilisant les paramètres optimisés

	α error decrease	β_f error decrease	β_c error decrease	β_t error decrease
tissu 1	50%	0.3%	3%	9%
tissu 1	45%	0.3%	1.1%	6%
tissu 1	51%	0.1%	1.4%	3.3%
tissu 2	48%	0%	2.3%	0.5%
tissu 3	72%	0.2%	36%	0.8%

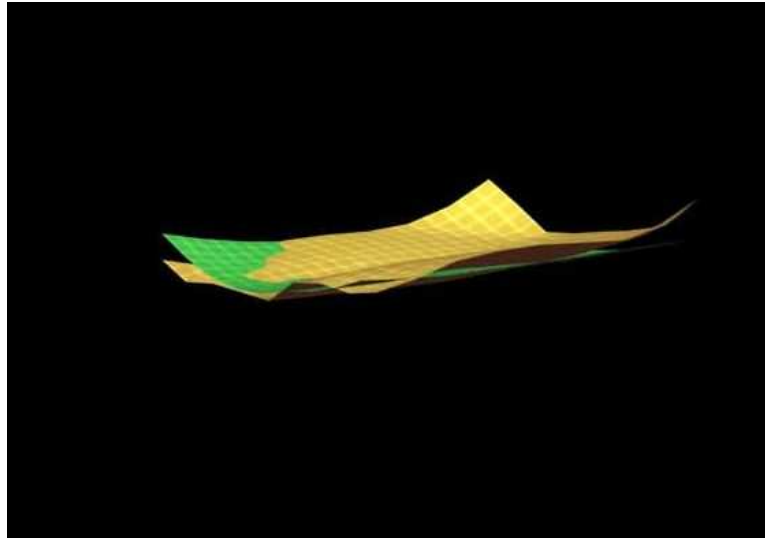


Figure 5.21 – Comparaison entre la trajectoire réelle (jaune) et la trajectoire virtuelle (verte)

sont très proches ce qui valide encore une fois notre démarche.

Les différents paramètres de dissipation des ressorts (les β) ne peuvent être comparés entre des tissus différents puisqu'ils modélisent la dissipation due au frottement des différentes composantes du tissu (essentiellement la chaîne contre la trame). On peut, par contre, voir que pour les trois expériences réalisées avec le tissu 1, les trois résultats obtenus pour chaque paramètre restent très proches.

Le tableau 5.2 permet de conclure que l'apport de la dissipation de la flexion a été quasi nulle à chaque fois. La dissipation due à la friction avec l'air est en général située autour de 50%. L'apport d'un paramètre α optimal est donc important quant au réalisme des simulations de tissus. Ce paramètre peut d'ailleurs être pris égal à la valeur -7 qui semble se dégager d'après ces expériences. L'apport de la dissipation du cisaillement et de la traction dépend du tissu utilisé mais il reste tout de même important à considérer comme le montre les expériences du tissu 3 (pour le cisaillement) ou celle du tissu 1 (pour la traction).

5.5 Conclusion

Le choix des paramètres des modèles de dissipation visqueuse utilisés dans la simulation de vêtements a toujours été fait d'une manière empirique. Un tâtonnement guidé par des considérations de stabilité numérique a toujours été utilisé dans le cadre de la simulation de vêtements pour choisir les paramètres de dissipation visqueuse. Le réalisme des simulations produites était souvent diminué par un choix inadéquat de ces paramètres.

Dans ce chapitre, on a proposé une méthode expérimentale utilisant un système de capture de mouvement pour mesurer la cinématique d'un tissu en chute libre. A partir de cette cinématique, on a proposé une méthode de recalage des paramètres de dissipation (dans la partie visqueuse du mouvement) par optimisation itérative. Cette optimisation est beaucoup plus stable qu'une optimisation globale aux moindres carrés car les forces mis en jeu au sein d'un tissu ont des ordres de grandeur totalement différents.

Nous avons aussi mesuré l'apport numérique et visuel de l'utilisation des paramètres trouvés pour la simulation et montré que les résultats obtenus sont stables (voir les tableaux 5.1 et 5.2).

L'autre résultat de cette étude, est qu'en simulation, on peut négliger la dissipation due aux ressorts de flexion. Ceci nous permettra de gagner du temps de calcul sans perdre en précision (réalisme).

Il reste cependant à juger la pertinence de ces résultats dans des expériences où les contraintes subies par le tissu sont plus fortes, notamment en interagissant avec d'autres objets, et comparer les résultats produits par le simulateur avec des données réelles.

Chapitre 6

Validation à partir d'expériences réelles

6.1 Introduction

L'objectif majeur de cette thèse, est l'amélioration du simulateur de vêtements de l'équipe Mirages. Le critère d'amélioration adopté tout au long de ce manuscrit est l'amélioration du réalisme des simulations produites. La démarche choisie est de modéliser de la manière la plus précise la mécanique d'un tissu en mouvement.

L'objet du chapitre 4 a été d'apporter un modèle de cisaillement pour le simulateur de vêtements et les fonctions de transfert qui permettent de calculer les lois de contrainte par rapport à la déformation du tissu en cisaillement à partir des courbes fournies par le KES.

L'objet du chapitre 5 a été d'apporter une mesure expérimentale de la viscosité engendrée par le déplacement du tissu dans l'air et par la friction interne du tissu lui même. Ces mesures ont permis de modéliser les phénomènes de dissipation d'énergie au niveau du système formé par le tissu en mouvement d'une manière plus fine et plus réaliste.

Afin de valider ces résultats et, d'une façon générale, valider la modélisation globale de notre simulateur ainsi que les paramètres utilisés, on se propose de confronter les résultats à la sortie du simulateur avec des données réelles représentant un vêtement ou un tissu.

Le but de ce chapitre est donc de mettre en place un protocole permettant de reconstituer en 3D la forme réelle d'un tissu et de la comparer avec la forme virtuelle donnée par le simulateur. La comparaison peut se faire visuellement et en utilisant une métrique appropriée.

6.2 Quelle expérience choisir pour la validation ?

La validation des résultats fournis par le simulateur en les comparant avec les données fournies par la même expérience réelle passe d'abord par le choix de l'expérience à réaliser. On précise tout d'abord que pour cette expérience, l'environnement de capture de mouvement (MOCAP), décrit au chapitre 5, n'a pu être utilisé, essentiellement faute de temps. Dès lors, l'acquisition de la forme 3D de notre tissu devait se faire avec un dispositif simple à mettre en place et à utiliser, mais qui néanmoins fournit des résultats précis.

Aussi, l'indisponibilité du système MOCAP nous a amené à considérer des expériences statiques, où l'on s'intéresse à la position d'équilibre du tissu plutôt qu'à sa trajectoire. Mais cela n'est pas forcément un inconvénient, car comme on le verra dans la suite de ce chapitre, notre expérience est facile à mettre en place et peut être donc répétée plusieurs fois avec des vêtements différents, alors qu'une expérience avec MOCAP nécessite une phase de préparation longue pour la mise en place du dispositif et la calibration des caméras.

Notre choix s'est donc porté sur l'utilisation d'un appareil photo numérique et de pastilles réfléchissantes (les mêmes que celles utilisées au chapitre 5) comme seul matériel nécessaire à notre expérience. Les pastilles réfléchissantes sont collées sur le tissu de telle façon à ce qu'elles forment une grille qui couvre toute la surface du tissu. L'idée est donc de prendre plusieurs photos du tissu sous des angles différents et de reconstruire sa géométrie 3D à partir des positions des pastilles. Quant à l'expérience réalisée, nous avons choisi d'analyser le drapé d'un morceau de tissu sur une table rectangulaire. La forme obtenue est suffisamment riche pour constituer un test satisfaisant quant au réalisme du simulateur (la forme du tissu au niveau des coins, présence de plis). De plus, nous avons

choisi de faire tomber le tissu sur la table de manière dissymétrique (un côté est plus long que l'autre) pour que sa forme soit encore plus riche. Les photos de la figure 6.1 qui montrent le drapé réel, ont été utilisées pour la reconstruction 3D de la géométrie du tissu.



Figure 6.1 – Photographies du drapé réel

6.3 Reconstruction 3D du tissu

¹ Nous avons à notre disposition un nombre N d'images numériques², représentant le drapé d'un morceau de tissu sur une table vu sous plusieurs angles. On peut dire que ces N images ont été prises par N caméras qu'il faudra calibrer pour pouvoir trouver la relation entre les coordonnées spatiales d'un point de l'espace avec le point associé dans l'image prise par la caméra et exploiter ainsi les données des images (dans notre cas, la caméra est la même ; seule sa position et son orientation changent).

Nous avons également à notre disposition notre modèle de tissu, dont les propriétés ont été explicitées au chapitre 3. Dans le cadre de cette expérience, on prendra comme modèle générique un tissu virtuel générique ayant la même forme que le drapé réel. Notre modèle générique est obtenu en réalisant un drapé virtuel avec notre simulateur. Le tissu virtuel a les mêmes dimensions que le tissu réel. Le pas de discrétisation est pris égal

¹Cette partie a été réalisée en collaboration avec Richard Roussel et Naima Houti

²on a utilisé exactement 10 images

à 1cm. La table virtuelle est horizontale (on verra que dans l'expérience ce n'est pas exactement le cas).

Des pastilles réfléchissantes sont collées tous les cinq centimètres sur le tissu réel. Ces pastilles représentent des points caractéristiques du tissu dont la position 3D sera assimilée à la position des pastilles. La position du tissu virtuel est, quant à elle, complètement spécifiée par la donnée des positions 3D de ses points massiques. La démarche à suivre pour reconstruire la forme (ou la position) 3D du tissu peut se résumer en trois points :

1. Mise en correspondance des points caractéristiques du modèle générique avec leurs équivalents présents sur chacune des N images. (La figure 6.2 montre le modèle générique utilisé en fil de fer vert)
2. Calibration du système de caméras
3. Reconstruction 3D des points caractéristiques
4. Déformation du modèle de tissu à partir de la position des points caractéristiques pour retrouver la forme 3D du tissu.

Le premier point est réalisé en cliquant simplement sur les points des images qui correspondent aux points caractéristiques du modèle.

Les points deux et trois peuvent être fusionnés en un seul point. En effet, la calibration des caméras et la reconstruction 3D des points caractéristiques du tissu sont imbriquées dans notre technique. Plusieurs boucles de calibration-reconstruction sont utilisées pour améliorer, simultanément et itérativement, la calibration des caméras et la reconstruction 3D des points caractéristiques.

6.3.1 Calibration des caméras

On dispose de N images numériques représentant le drapé du tissu. Ces images peuvent nous permettre de retrouver la forme tridimensionnelle du tissu. Pour cela, nous devons d'abord connaître les caractéristiques de la caméra, ainsi que sa position et son orientation par rapport au tissu pour chaque image. Ainsi, on définit complètement la relation de projection d'un point quelconque de l'espace sur le plan image (une projection pour chaque image). On spécifie aussi complètement la transformation inverse

appelée triangulation et qui consiste à associer un point de l'espace (en 3D) à un couple de points dans les images (en 2D) représentant le même point dans l'espace.

On utilise le modèle du sténopé (appelé aussi modèle pin-hole) pour représenter la relation de passage entre un point M de l'espace de coordonnées $(X, Y, Z, 1)$ et son projeté sur le plan image de coordonnées (su, sv, s) . Cette relation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} su \\ sv \\ s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_u & s_{uv} & c_u \\ 0 & k_v & c_v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & \begin{matrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Les paramètres qui figurent dans l'équation 6.1 peuvent être intrinsèques ou extrinsèques à la caméra. Les paramètres extrinsèques représentent la position de la caméra dans l'espace ((t_x, t_y, t_z) vecteur de translation) et son orientation ($R_{3 \times 3}$ matrice de rotation).

Les paramètres intrinsèques sont internes à la caméra

- f : la distance focale
- k_u et k_v : les facteurs d'agrandissement de l'image
- c_u et c_v : les coordonnées de projection du centre optique de la caméra sur le plan image
- s_{uv} : traduit la distorsion optique ou la non-orthogonalité potentielle des lignes et des colonnes des cellules photosensibles qui composent le capteur de la caméra. (en général = 0)

De très nombreuses techniques de calibration de caméra ont déjà été développées. Tsai [Tsa86] a réalisé, en particulier, une méthode de calibration lorsque la distance focale, la distorsion optique et le centre de la caméra sont inconnus. Quand ces paramètres sont connus, les techniques de Lowe [Low91] et Yuan [Yua89] peuvent être appliquées. Cependant, ces méthodes doivent avoir une initialisation, c'est à dire état "proche" de la solution.

Dans notre cas, on dispose des paramètres intrinsèques de la caméra (à partir de la documentation du constructeur), des N images prises du drapé du tissu et du modèle géométrique du tissu (modèle masses-ressorts). Notre technique de calibration permet de déterminer pour chaque caméra les paramètres extrinsèques. On peut donc voir le

modèle géométrique sous le même angle (avec la même pose de la caméra) que celui sous lequel a été prise l'image considérée. Notre méthode se base sur l'algorithme POSIT [DL95] qui calcule, pour un jeu de paramètres intrinsèques d'une caméra donnée, les paramètres extrinsèques associés à la correspondance entre un certain nombre de points dans l'image et leurs coordonnées 3D dans l'espace.

La correspondance entre les points caractéristiques du modèle et leurs projections sur l'image est réalisée d'une manière interactive par l'utilisateur. Cette mise en correspondance permet de déterminer une première pose des caméras pour chacune des N images. A la première itération de POSIT, cette pose approximative de la caméra est considérée. POSIT calcule la distance entre les projections estimées des points caractéristiques et leurs correspondants sur l'image indiqués par l'utilisateur et itérativement minimise cette distance en modifiant la pose de la caméra jusqu'à ce que cette distance soit inférieure à un seuil donné ϵ . On obtient donc les paramètres extrinsèques de la caméra à ϵ près, appelé aussi valeur résiduelle de la calibration.

La technique de calibration décrite ci-dessus suppose que les coordonnées 3D des points caractéristiques du tissu correspondent réellement aux points 2D sélectionnés par l'utilisateur sur les images. Cela n'est pas le cas ici, car ce qu'on veut obtenir est la forme 3D exacte du tissu. Les points 3D du modèle géométrique dont on dispose sont une approximation grossière des positions exactes de ces points comme le montre la figure 6.2. Notre algorithme adapte donc la position 3D des points caractéristiques du modèle (cubes bleus) itérativement, de telle sorte que leurs projections sur le plan image de la caméra converge vers les positions des pastilles blanches réelles. Cette adaptation itérative est réalisée en alternant calibration et modification (reconstruction) des N points caractéristiques jusqu'à convergence.

6.3.2 Reconstruction 3D des points caractéristiques

Comme indiqué précédemment, la calibration des caméras et la reconstruction 3D des points caractéristiques du modèle sont imbriquées dans notre méthode. La mise en correspondance entre les points caractéristiques 3D du modèle et leurs projections sur les images (pastilles blanches) fournit une première calibration approximative des caméras.



Figure 6.2 – Les points caractéristiques du tissu utilisés pour la calibration et la reconstruction (virtuels : cubes bleu et réels : pastilles blanches)

Ces N images étant calibrées, on peut alors reconstruire les points 3D caractéristiques du modèle spécifique par triangulation. Ces nouveaux points 3D sont reportés sur le modèle générique qui se trouve modifié par la nouvelle valeur de ces points et se rapproche donc du modèle spécifique (la forme 3D représentée par les N images). Cependant, comme la calibration est approximative, cette reconstruction 3D n'est pas parfaite, ce qui se manifeste par le fait que les points caractéristiques du modèle générique modifié ne se projettent pas exactement sur leurs équivalents dans les N images. On peut alors itérer la procédure en définissant une nouvelle calibration par association des nouveaux points 3D à leur projection (fixe) sur les N images, puis en reconstruisant à nouveau ces points en 3D jusqu'à ce que les projections des points du modèle spécifique se projettent correctement sur leurs projections images. Plus précisément, nous évaluons, par un critère de convergence, s'il faut continuer à itérer notre boucle calibration-adaptation. Ce critère peut prendre plusieurs formes. Nous pouvons estimer que l'adaptation est suffisante quand la valeur résiduelle de la calibration est inférieure à un certain seuil pour toutes les caméras de calibration. Nous pouvons de même utiliser comme critère de qualité le niveau de déformation du modèle 3D. En effet, si le modèle ne se déforme quasiment plus en tous ses points caractéristiques, l'adaptation a fini de converger. Le principe

que nous utilisons est que si nous re-itérons la calibration, celle-ci s'en trouve améliorée, car la projection des points 3D caractéristiques du modèle tend à se rapprocher de leur projection réelle dans les images.

6.3.3 Déformation du modèle 3D générique

On a vu au paragraphe précédent comment la boucle calibration-reconstruction permet de reconstruire la position 3D des points caractéristiques du modèle de tissu. Mais, la forme géométrique du tissu nécessite la reconstruction de la position de tous les points 3D du modèle. Les points caractéristiques sont situés tous les 5cm sur notre tissu et notre modèle de tissu est une grille dont le pas est égale à 1cm . Il faut alors interpoler la position des points du modèle à partir des positions 3D reconstruites des points caractéristiques.

On interpole la position des points du modèle de tissu à partir des positions caractéristiques qui lui sont proches en utilisant des RBF (Radial Basis Function). Cet outil d'interpolation 3D est largement utilisé pour ses qualités d'interpolation lissée [JS01].



Figure 6.3 – Photographies du drapé réel avec la forme 3D reconstruite

Le résultat obtenu de la reconstruction 3D du tissu est montré par les images 6.3. On voit que la forme globale est la même (on peut le vérifier aisément sur les bords du tissu). Aussi, on peut voir que les points caractéristiques reconstruits (cubes bleus) se projettent exactement sur les pastilles blanches.

6.4 Simulation du drapé dans des conditions réelles

A la section précédente on a montré comment il était possible avec notre technique de retrouver la forme 3D précise d'un tissu drapé sur une table à partir d'un certain nombre d'images numériques. D'ailleurs, il est important de noter que cet outil de reconstruction 3D est très générique et peut être utilisé dans plusieurs autres cas, notamment la reconstruction 3D de la forme d'un visage [RG04].

Ayant obtenu la forme 3D du tissu, on s'intéresse dans cette section à la simulation virtuelle du drapé d'une nappe sur la même table afin de juger la précision des simulations fournies par notre logiciel.

Il est simple de reconstruire la forme 3D de la table utilisée. Il s'agit d'une planche rectangulaire disposée sur une bouteille. Il suffit donc de prendre les dimensions de la planche pour pouvoir la reconstruire virtuellement.

Par contre, reproduire les autres conditions de l'expérience réelle nécessite de prendre quelques précautions, afin de reproduire exactement la même manipulation et retrouver ainsi la même forme réelle obtenue.

6.4.1 Conditions initiales

Il est important dans toute expérience de simulation de contrôler les conditions initiales, car souvent, elles ont une grande influence sur le résultat final obtenu. A la différence d'une expérience réelle utilisant un système de capture tel que le MOCAP, la reconstruction 3D du drapé d'un tissu ne permet pas de retrouver les conditions initiales du tombé. D'ailleurs, dans notre cas, le tissu a été posé délicatement sur la table puis sa position a été soigneusement arrangée pour que les pastilles soient exactement alignées avec les bords de la table. On ne peut donc pas parler d'une expérience de tombé à proprement dit.

On peut cependant supposer que le tissu a été placé horizontalement sur la table de manière à ce que les pastilles coïncident avec les bords de celle-ci, puis il a été relâché. Plusieurs précautions sont à prendre afin de coller le plus possible à la réalité expérimentale.

6.4.1.1 Orientation de la table

Il est naturel d'assumer qu'une planche posée sur une bouteille constitue une table horizontale. Cependant, vu la taille réduite des éléments utilisés, il n'était pas possible de vérifier l'horizontalité du dispositif (la planche : $30\text{cm} \times 20\text{cm} \times 0.5\text{cm}$ et le diamètre de la bouteille : 2.5cm).

On a donc calculé le plan de la table à partir des positions des points du tissu reconstruit en 3D, situés sur ce dernier et strictement à l'intérieur de son périmètre. L'équation du plan est calculée par minimisation aux moindres carrés de la même manière qu'a été calculée la verticale au paragraphe 5.2.2.3.

Le résultat montre que le direction normale au plan de la table est donnée par le vecteur suivant

$$n = \begin{pmatrix} 0.078 \\ -0.025 \\ 0.996 \end{pmatrix}$$

La planche posée sur la bouteille utilisée n'est donc pas rigoureusement horizontale. Il a fallu donc adapter l'orientation de la table virtuelle afin de reproduire les mêmes conditions expérimentales. La table virtuelle doit avoir comme vecteur normal le vecteur n .

6.4.1.2 Altitude du lancé

L'expérience de drapé de tissu sur une table que l'on cherche à reproduire est dissymétrique. Le tissu tombe plus d'un côté que de l'autre. Or, notre expérience virtuelle consiste en un lâché du tissu à plat au dessus de la table. Il faut donc choisir une altitude z_0 à partir de laquelle on laisse tomber le tissu. Si le tissu tombe de très haut, il arrive au niveau de la table avec une énergie cinétique importante ce qui a pour conséquence de faire glisser le tissu du côté le plus long et la nappe peut même finir par tomber de ce côté.

La nappe est donc lâchée juste au niveau de la table pour éviter cet effet. Il faut aussi tenir compte de la zone de contact (modélisée par une épaisseur tampon de $e = 8\text{mm}$

autour de chaque objet dans notre simulateur) et qui sert à la détection des collisions ³. L'altitude du lancé adoptée est donc

$$z_0 = 1.1 \times e$$

On s'assure ainsi que le tissu est tout juste en dehors de la zone tampon de gestion des contacts et donc suffisamment proche de la table pour éviter le glissement de la nappe sur la table.

6.4.1.3 Discrétisation du modèle de tissu

A ce stade de la préparation de l'expérience virtuelle, la table a la même orientation que la table réelle et le tissu est disposé à plat à une altitude jugée satisfaisante pour reproduire les conditions réelles de l'expérience. Il reste donc à choisir un pas de discrétisation du tissu virtuel pour modéliser le tissu réel avant de lancer la simulation. On discrétise le tissu en utilisant différents pas d'échantillonnage comme on le verra par la suite. La seule condition qu'il faut satisfaire pour reproduire la même expérience que celle du drapé réel, est de bien choisir le pas de discrétisation de telle sorte que des masses du tissu soient situées exactement sur les bords de la table virtuelle comme le montre la figure 6.4 par exemple.

En effet, le tissu doit pouvoir se plier au niveau des bords de la table (voir la figure 6.5). Il faut donc que le bord de la table coïncide avec une rangée de masses du tissu.

6.4.2 Simulation virtuelle du drapé

On s'est tenu dans la section précédente à reproduire d'une manière rigoureuse les conditions initiales du tombé de tissu. Le tissu est donc posé à plat sur la table (à une altitude z_0 plus précisément) qui a la même orientation que la table réelle (voir la figure 6.6). On choisit de réaliser l'expérience virtuelle en utilisant des pas de discrétisation différents afin d'évaluer la différence (l'amélioration) des résultats fournis par le simulateur en échantillonnant le tissu de plus en plus fin. On choisit donc des pas de discrétisation

³La zone tampon permet de s'assurer que toutes les collisions sont gérées et qu'il n'y a pas d'interpénétrations entre le tissu et les objets de la scène

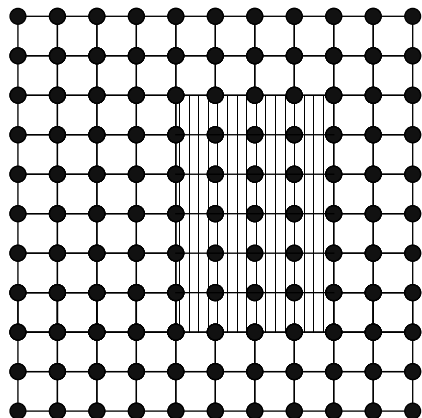


Figure 6.4 – Discrétisation adaptée du tissu : les masses arrivent sur les bords de la table hachurée

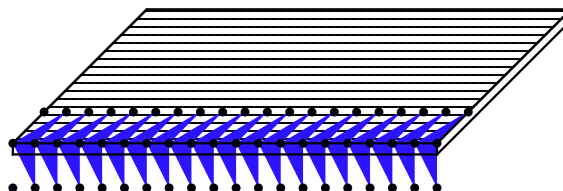


Figure 6.5 – Les ressorts de flexion se plient au niveau du bord de la table

qui satisfont la condition exposée au paragraphe 6.4.1.3.

6.4.2.1 Paramètres utilisés pour le drapé

On utilise pour toutes les expériences le même tissu que celui utilisé comme échantillon d'étude au chapitre 5. Ce tissu est en réalité de l'acrylique. On utilise aussi les paramètres de dissipation visqueuse trouvés au chapitre 5 pour ce tissu.

Ses paramètres mécaniques sont calculés à partir des mesures de Kawabata (KES) effectuées sur ce tissu⁴ et adaptées à notre modèle de ressorts en utilisant les fonctions de transfert décrites au chapitre 3. Dans le cas particulier des ressorts de cisaillement on utilise la fonction de transfert développée au chapitre 4.

Parmi les éléments de la caractérisation mécanique du tissu fournis par Kawabata (KES), on peut se poser la question de l'utilité de la représentation du comportement hystérétique du tissu dans le cas très spécifique de cette expérience de drapé. En effet, l'hystérésis est un phénomène de mémoire du tissu qui se manifeste par une différence de la contrainte appliquée sur le tissu pour une même déformation. La contrainte dépend donc de la déformation, mais également de l'historique du tissu (déformation ou

⁴Ces mesures ont été réalisées grâce au soutien de l'ENSITM sous la direction du Professeur Durand

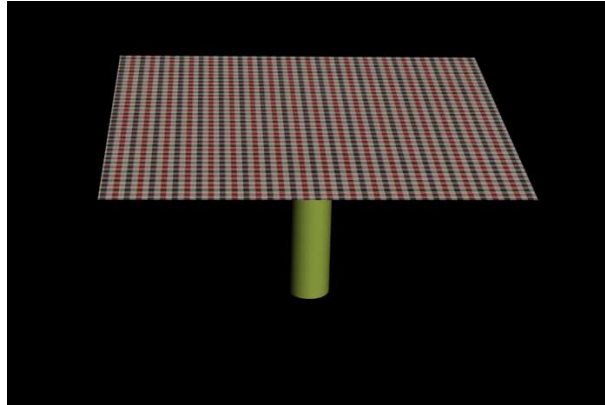


Figure 6.6 – Position initiale du tissu avant le tombé

recouvrement).

Dans le cas précis de cette expérience de validation, le mouvement de tombé du tissu est relativement rapide ($< 4s$) par rapport à l'expérience de Kawabata (environ 1 heure pour l'expérience de traction). Aussi, la contrainte extérieure la plus forte (en module) agissant sur le tissu durant cette expérience, est le poids du tissu lui-même qui est, en module, très faible par rapport à la contrainte interne de traction même pour des déformation très faibles du tissu (voir la courbe de traction à la section 2.3.1.3).

Un calcul rapide permet de comparer plus précisément les ordres de grandeur de la contrainte interne au tissu de traction et de la contrainte externe du poids.

Supposons que le tissu soit discrétisé à $1cm$ et qu'il subisse une déformation de 1% en traction. Le module de la contrainte de traction peut être relevé directement sur la courbe de la section 2.3.1.3 que l'on multiplie par le pas d'échantillonnage pour avoir la contrainte effective qui est dans ce cas $= 15cN$. La masse surfacique (grammage) du tissu est $0.0213g/cm^2$. Une masse ponctuelle représente une quantité de matière dont la surface vaut $1cm^2$. La contrainte du poids sur chaque masse vaut donc $0.0213cN$.

Donc, même pour une déformation très réduite du tissu, la contrainte extérieure la plus forte reste négligeable devant la contrainte interne de traction du tissu. On peut dire que le tissu ne se déforme que très peu durant cette expérience dans le sens de la traction.

La figure 6.7 montre une comparaison entre un drapé réalisé en tenant compte de l'hys-

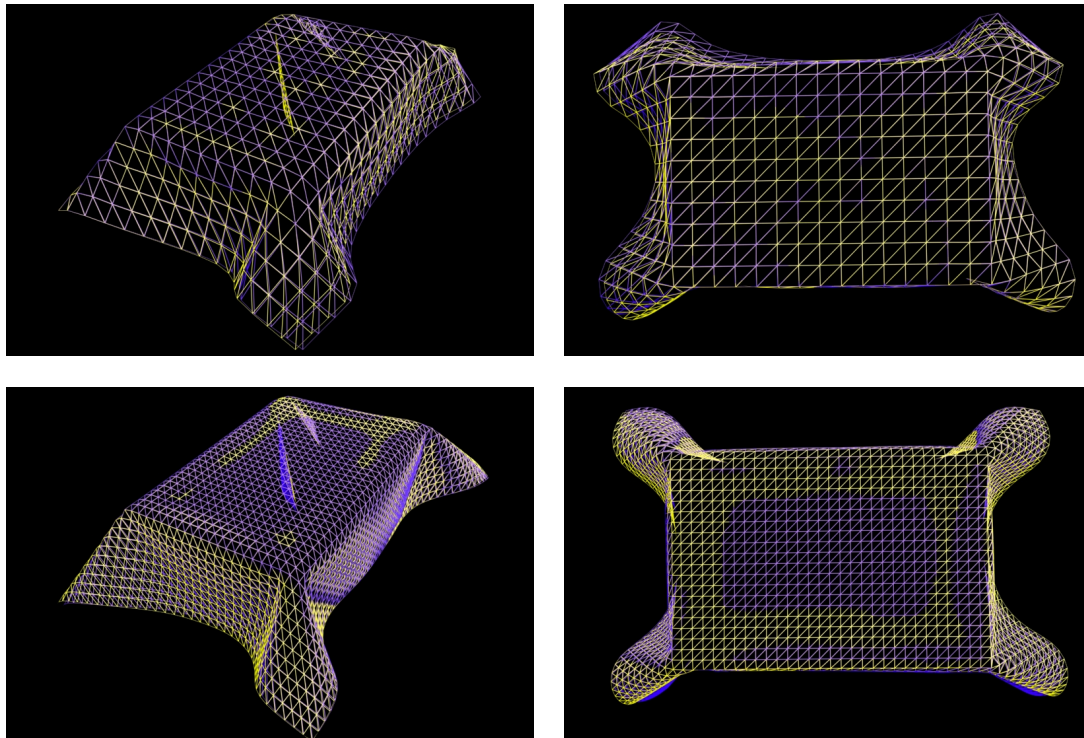


Figure 6.7 – Comparaison entre un drapé avec hystérésis (jaune) et sans hystérésis (bleu) : discrétisation à 2cm (ligne du haut) et discrétisation à 1cm (ligne du bas)

térésis (maillage jaune) et un drapé réalisé avec le même tissu dans les mêmes conditions sans tenir compte de l'hystérésis (maillage bleu) avec deux discrétisations différentes. On observe visuellement que l'écart est très faible entre les deux formes.

Aussi, un calcul de la distance moyenne entre les masses homologues pour chaque expérience montre que la différence est très faible. La distance moyenne est égale à 2mm pour les deux échantillonnages utilisés.

Donc, on réalisera les expériences virtuelles de drapé sans tenir compte du phénomène d'hystérésis qui n'a pas d'influence sur le réalisme des simulations produites dans ce cas précis.

Les collisions sont modélisées comme des chocs inélastiques dans notre simulateur. La gestion des collisions n'est pas l'objet de ce manuscrit, mais on peut cependant donner des éléments nécessaires à la compréhension des phénomènes modélisés par notre simulateur. Les collisions sont divisées en deux catégories : les collisions entre une masse et

une facette (et inversement) et les collisions entre deux arêtes [Pro95]. La réponse aux collisions est la même dans les deux cas. Si un élément a va entrer en collision avec un élément b , il est empêché de continuer dans la direction qui l'a amenée à entrer en collision. Les seuls déplacements possibles pour a sont dans le plan orthogonal à la direction de la collision. Afin d'assurer une détection robuste des collisions, chaque objet de la scène virtuelle est épaissi. Pour la table, l'épaisseur choisie est de $6mm$ et pour le tissu $2mm$. Nos expériences montrent que ces valeurs donnent des résultats satisfaisants.

Les pas d'échantillonnage utilisés pour modéliser le tissu sont :

- $5cm$
- $2cm$
- $1cm$
- $0.5cm$

Le poids des points massiques et la raideur des ressorts tiennent compte de la discrétisation comme expliqué au chapitre 3. Ainsi, plus la discrétisation est large, plus les masses sont lourdes (elles représentent une quantité de matière plus importante). Les ressorts ont la même raideur par unité de longueur quelque soit l'échantillonnage (donnée par KES). La raideur effective de chaque ressort est obtenue par multiplication par le pas d'échantillonnage.

Toutes les simulations réalisées dans cette section utilisent un pas de temps fixe pour l'intégration du système numérique, qui modélise la physique l'expérience, et qui est résolu par notre logiciel à chaque pas de temps pour donner les nouvelles positions et les nouvelles vitesses des masses du système. On verra dans la section 6.4.2.4 l'importance de cette condition sur la stabilité énergétique du système.

6.4.2.2 Critères d'évaluation

A la sortie de notre logiciel de simulation, on obtient une animation en 3D (25 images par secondes) représentant le mouvement du tombé du tissu sur la table. On s'intéresse alors à la position d'équilibre atteinte par le tissu une fois que son mouvement s'arrête et on compare la forme 3D obtenue à la forme réelle reconstruite. Le premier critère utilisé est une comparaison visuelle qui permet de dire de manière subjective si le tissu

virtuel a une forme semblable au tissu réel et de localiser les endroits où les différences sont les plus importantes. Ce critère n'étant pas très rigoureux, on utilise aussi un critère numérique qui calcule la distance entre la forme 3D virtuelle et la forme 3D réelle.

Soit n_r le nombre de points (caractéristiques) de la forme 3D réelle reconstruite et n_v le nombre de points du maillage de la forme 3D virtuelle obtenue par simulation. Selon la discrétisation choisie pour la simulation, on calcule l'erreur e avec l'équation 6.2

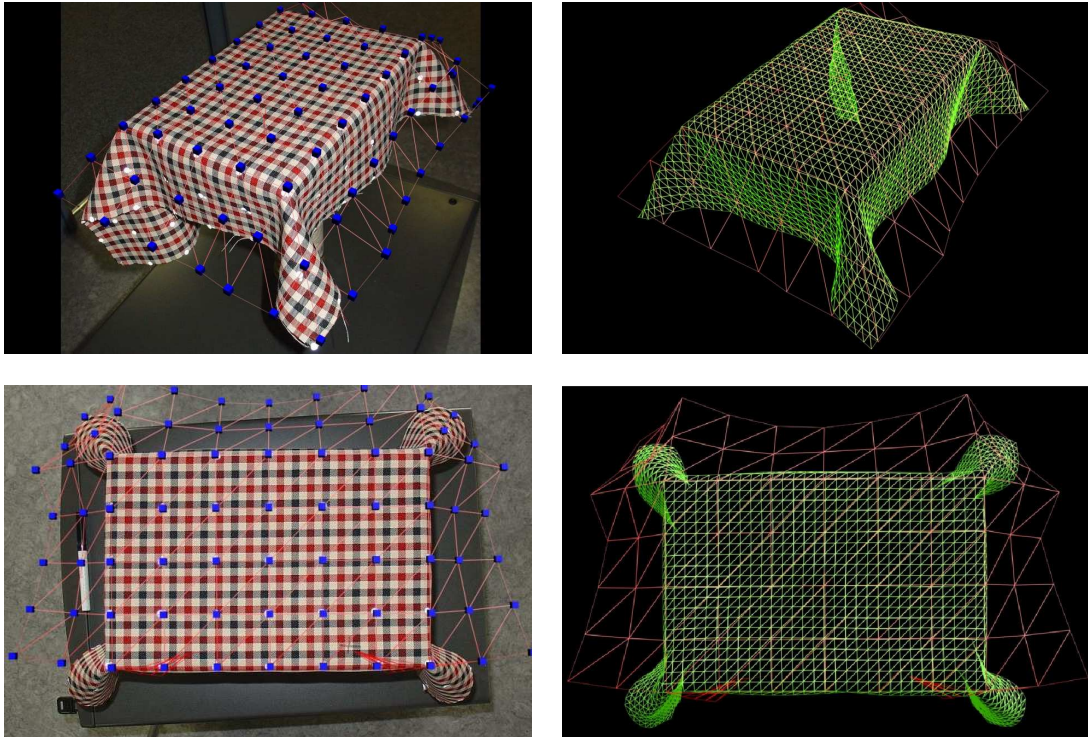
$$e = \begin{cases} \frac{1}{n_r} \sum_{i=0}^{n_r} \| P_r(i) - P_v(\varphi(i)) \| & \text{si } n_r \leq n_v \\ \frac{1}{n_v} \sum_{i=0}^{n_v} \| P_r(\psi(i)) - P_v(i) \| & \text{si } n_r > n_v \end{cases} \quad (6.2)$$

où $P_r(i)$ représente la position 3D dans le maillage réel du point d'indice i selon la numérotation du maillage réel et $P_v(i)$ la position 3D dans le maillage virtuel du point d'indice i selon la numérotation du maillage virtuel. Les fonctions φ et ψ permettent de retrouver pour un point d'indice i dans un maillage donné son homologue dans l'autre maillage.

La distance e calcule donc la distance moyenne entre chaque point du maillage dont le nombre de sommets est le plus petit et son homologue sur la forme 3D du deuxième maillage.

6.4.2.3 Résultats de la simulation

On présente dans ce paragraphe les résultats obtenus pour la simulation du drapé à des résolutions de discrétisation différentes. On donne pour chaque pas de discrétisation les images du tissu réel et du tissu virtuel avec des pastilles virtuelles (cubes bleus) afin de pouvoir comparer visuellement les positions d'un tissu par rapport à l'autre. On donne aussi les images représentant le tissu reconstruit en 3D et le tissu synthétique (tous les deux en fil de fer) afin de pouvoir comparer les deux formes 3D. Enfin, on donne à chaque fois la distance entre la forme 3D virtuelle et la forme 3D reconstruite du tissu réel en utilisant le critère défini au paragraphe précédent.

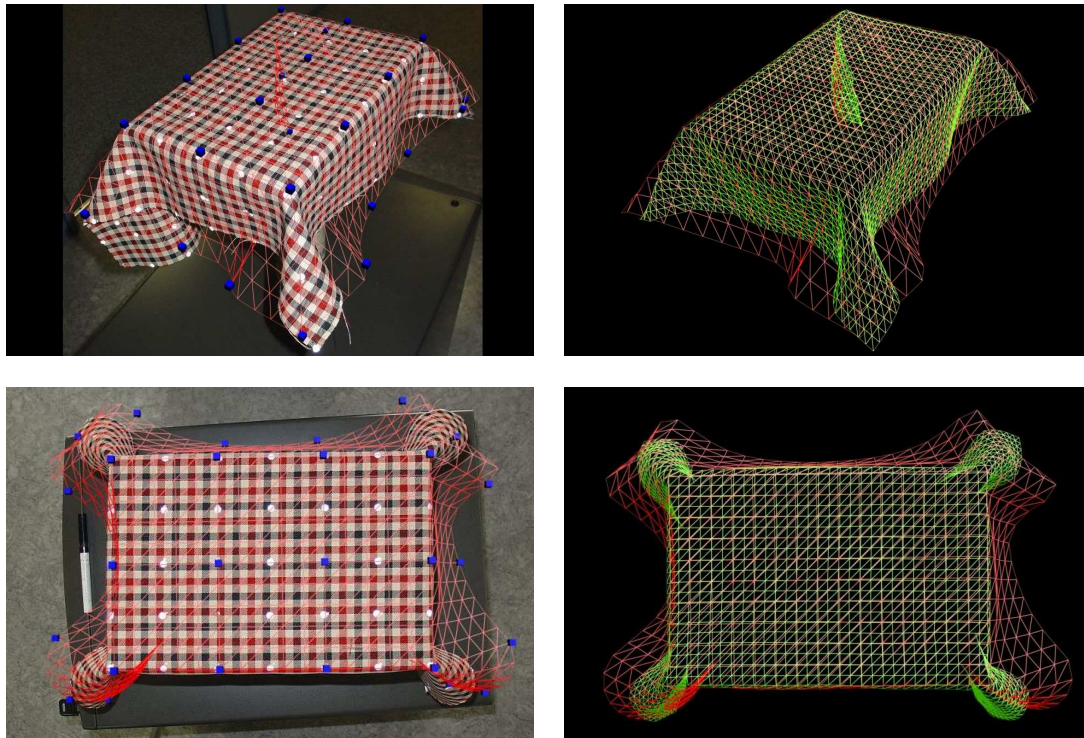
Figure 6.8 – Drapé réel et drapé virtuel : discrétisation $5cm$

6.4.2.3.1 Discrétisation $5cm$

L'erreur obtenue pour la discrétisation $5cm$ est

$$e_{5cm} = 3.01cm$$

En moyenne, chaque point massique du drapé virtuel est distant de son homologue sur le tissu réel de $3cm$. Cette erreur est numériquement importante et les images de la figure 6.8 le confirment. Sur la figure, le maillage rouge représente le tissu virtuel alors que le maillage vert représente le tissu réel reconstruit en 3D. Sur les photos réelles (la colonne de gauche), on voit qu'au niveau du plan de la table, les pastilles virtuelles (cubes bleus) arrivent exactement sur les pastilles réelles (blanches). L'erreur est donc quasi nulle sur le plan de la table, ce qui traduit une erreur très importante pour tous les points du tissu situés hors du plan de la table. Cette différence s'explique essentiellement par le pas d'échantillonnage pris. En effet, l'analyse de la forme du tissu réel, surtout au voisinage des coins de la table, montre que les "oreillettes" décrites par le tissu réel sont fines

Figure 6.9 – Drapé réel et drapé virtuel : discrétisation $2cm$

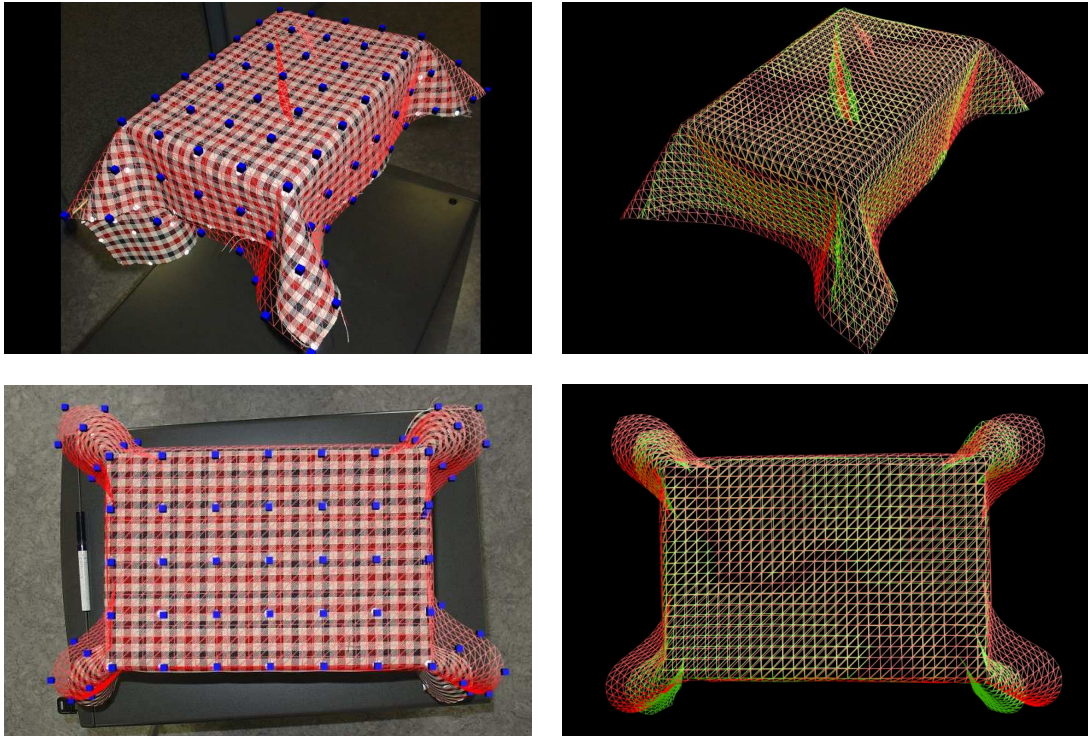
et ne peuvent être décrites par un maillage dont le pas est $5cm$. Les plis décrits par le tissu réel ne peuvent pas être reproduits par un ensemble de "tiges rigides" de longueur $5cm$. Il faut donc discrétiser le tissu virtuel plus finement pour qu'il ait plus de degrés de liberté, notamment au niveau des coins de la table.

6.4.2.3.2 Discrétisation $2cm$

L'erreur obtenue pour la discrétisation $2cm$ est

$$e_{2cm} = 1.42cm$$

En moyenne, chaque point massique du drapé virtuel est distant de son homologue sur le tissu réel de $1.42cm$. La figure 6.9 confirme cette décroissance de l'erreur par rapport à la discrétisation précédente. Le tissu a plus de liberté pour se plier au niveau des bords et des coins de la table. La forme virtuelle (maillage rouge) s'approche de la forme réelle (maillage vert). Les pastilles virtuelles (bleu) montrent que le tissu virtuel se cale

Figure 6.10 – Drapé réel et drapé virtuel : discrétisation $1cm$

exactement sur le tissu réel au niveau du plan de la table. Sur les bords, même si la forme globale du tissu virtuel est plus proche de la forme réelle que ne l'est le tissu discrétisé à $5cm$, il reste néanmoins des différences importantes notamment au niveau des voisinages des coins de la table. On refait donc la même expérience avec un tissu discrétisé plus finement, à $1cm$.

6.4.2.3.3 Discrétisation $1cm$

L'erreur obtenue pour la discrétisation $1cm$ est

$$e_{1cm} = 0.90cm$$

Pour cette discrétisation, chaque point du maillage virtuel est distant en moyenne de $0.9cm$ de son homologue sur le maillage réel. La figure 6.10 montre que le tissu virtuel est très proche du tissu réel. A l'aide des pastilles, on peut vérifier que les côtés du tissu virtuel se calent de très près sur les côtés du tissu réel. La forme globale est très proche,

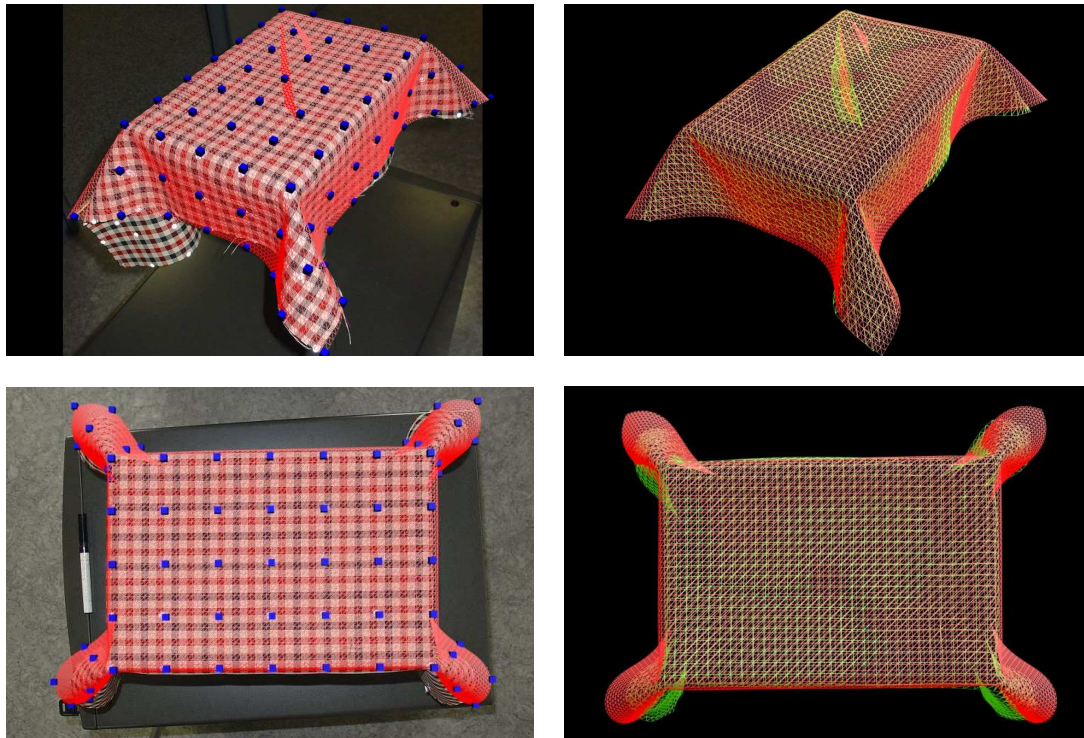


Figure 6.11 – Drapé réel et drapé virtuel : discrétisation $0.5cm$

mais il reste quelques différences au niveau des "oreillettes" et sur les bords du tissu au niveau du côté le plus petit de la table. Donc, on continue avec la même démarche en discrétisant le tissu plus finement.

6.4.2.3.4 Discrétisation $0.5cm$

L'erreur obtenue pour la discrétisation $0.5cm$ est

$$\epsilon_{0.5cm} = 0.82cm$$

L'amélioration de l'erreur est donc moins importante que dans les cas précédents. Ceci est dû au fait que la forme globale de la nappe réelle (verte) est quasiment recalée. Les différences observées au niveau des oreillettes pour la discrétisation $1cm$ sont atténuées. Il est important de noter qu'une expérience de drapé à cette discrétisation, nécessite un temps de calcul relativement important (2 jours de calcul à un pas de temps numérique fixe de $1e-04s$ pour un total de $1.92s$ d'animation réelle sur un PC Pentium IV 3.6GHz

disposant de 2Go de RAM). On a effectuée la même expérience avec une discrétisation encore plus fine ($0.4cm$), mais le résultat obtenu est sensiblement le même qu'avec une discrétisation de $0.5cm$ même si l'erreur baisse légèrement ($0.79cm$).

6.4.2.4 Importance de l'utilisation d'un pas de temps fixe

Comme on l'a spécifié précédemment, toutes les simulations réalisées avec notre logiciel dans cette section utilisent un pas de temps fixe. Néanmoins, notre simulateur possède un module qui peut adapter le pas de temps d'intégration au cours de la simulation à l'état du système afin d'accélérer la simulation ou d'éviter sa divergence : c'est le module de pas de temps adaptatif. En effet, Le système peut avoir certaines configurations dans lesquelles l'utilisation d'un pas de temps inadapté peut entraîner une divergence du système ou entraîner des calculs inutiles. Le critère employé, afin de déterminer s'il faut augmenter ou diminuer le pas de temps dans notre simulateur, est celui donné par Baraff et Witkin dans [BW98]. Il repose sur les changements de configuration du système : le pas de temps est diminué si les ressorts subissent des changements d'élongations trop importants entre deux instants successifs. D'un autre côté, le pas de temps est augmenté s'il n'est pas diminué sur une certaine période.

La figure 6.12 donne une comparaison de l'énergie dissipée par les ressorts de flexion

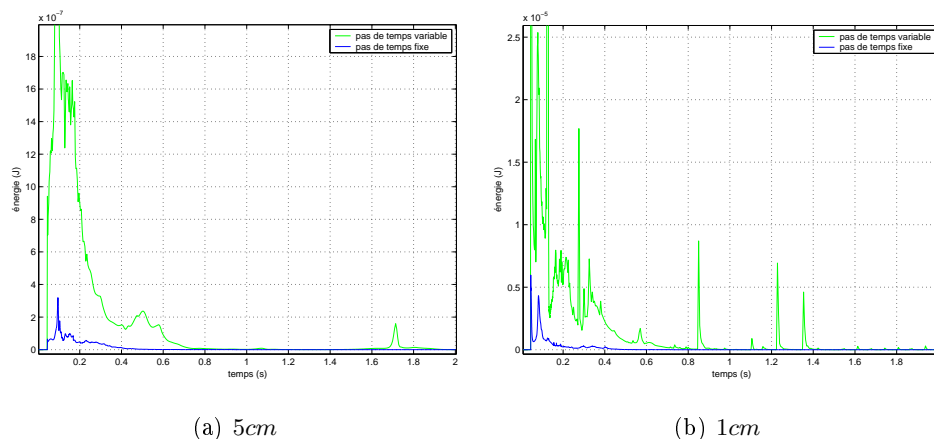


Figure 6.12 – Énergie dissipée par les ressorts de flexion selon le pas de temps utilisé

au cours du temps, pour une même simulation, en utilisant une fois un pas de temps

fixe et une fois un pas de temps adaptatif. On remarque que l'énergie est totalement différente entre les deux simulations, et surtout, que l'énergie engendrée par un pas de temps adaptatif engendre des pics énergétiques qui mettent à mal notre démarche de modélisation précise de la mécanique d'un tissu.

Cette constatation est valable aussi pour l'énergie des différents types de ressorts (flexion, cisaillement, traction) et aussi pour la dissipation visqueuse des ressorts de cisaillement et celle des ressorts de traction.

Ainsi, on a utilisé pour chaque simulation un pas de temps fixe ($10e^{-3}$ s pour les discrétisations $5cm$ et $1cm$, et $10e^{-4}$ s pour les discrétisations $1cm$ et $0.5cm$). Le pas de temps fixe assure une stabilité et une continuité énergétique et permet donc d'avoir des simulations plus précises et plus justes. Il semble, par contre déconseillé d'utiliser un pas de temps adaptatif, qui peut faire diverger le schéma d'intégration, ce qui semble pourtant absurde à priori.

6.4.3 Interprétation des résultats de la simulation

Les résultats des simulations présentées en 6.4.2.3 ont été obtenus en adoptant des paramètres mécaniques (KES) et visqueux (voir chapitre 5) mesurés pour modéliser le tissu. Ces résultats montrent que la forme du tissu simulé converge vers la forme 3D du drapé réel au fur et à mesure qu'on diminue l'échantillonnage spatial du tissu. En effet, en discrétisant le tissu de plus en plus fin, on lui donne plus de degrés de liberté. Le modèle du tissu permet donc de reproduire des formes géométriques ayant des plis très fins telle que la forme des "oreillettes" au niveau des coins de la table. Cette remarque est validée par l'analyse de l'évolution de l'énergie du tissu en flexion (l'énergie des ressorts qui contrôlent la flexion) selon l'échantillonnage du tissu (voir la figure 6.13). On observe sur cette figure que l'énergie du tissu en flexion augmente avec la finesse de l'échantillonnage. A l'équilibre, un tissu qui est discrétisé plus finement possède une énergie de flexion plus importante. Cela prouve que le tissu présente plus de déformation en flexion et donc plus de plis.

Aussi, l'utilisation de paramètres mécaniques et visqueux mesurés a permis de simuler la forme 3D du drapé d'une manière précise comme le montrent les résultats visuel et

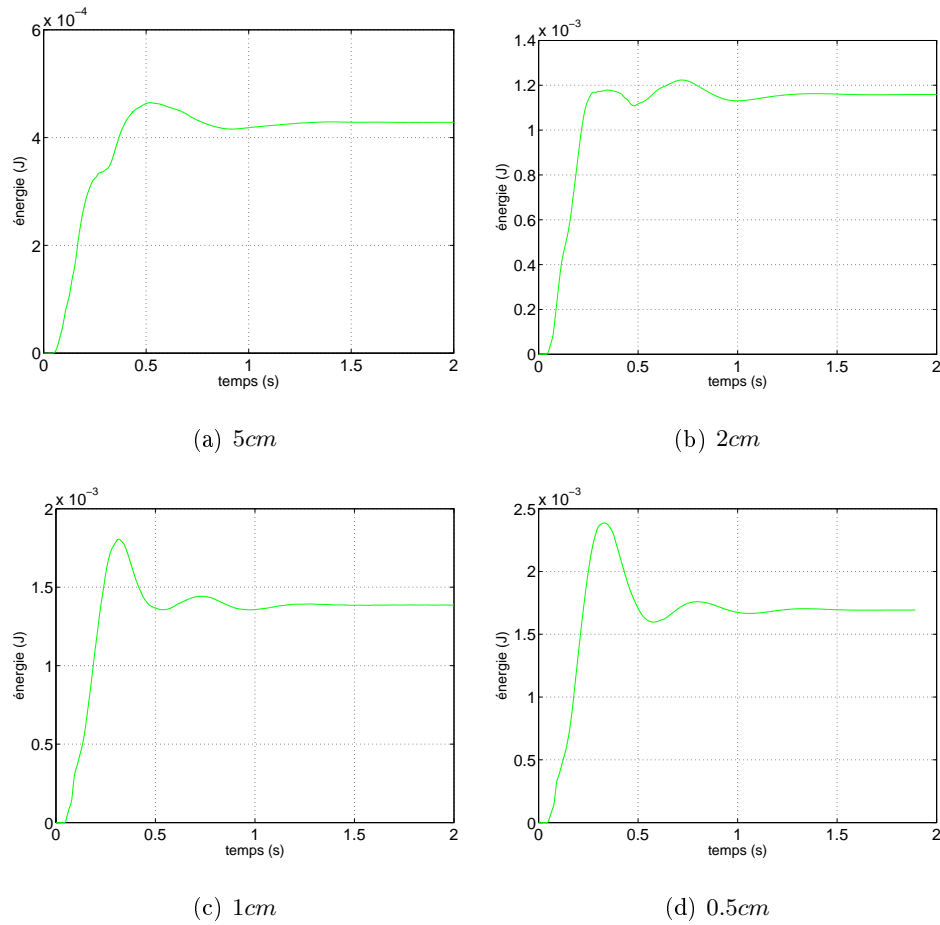


Figure 6.13 – Energie du tissu en flexion selon la discrétisation utilisée

numérique de la comparaison des deux formes pour la discrétisation à 0.5cm . L'utilisation des paramètres de viscosité mesurés modélise les phénomènes de dissipation d'énergie au sein du tissu et entre le tissu et l'air de manière réaliste. Cette hypothèse peut être vérifiée en comparant le temps total nécessaire pour que le tissu se stabilise. Ce temps peut être relevé à partir des courbes de la figure 6.13. En effet, le tissu se stabilise quand les oscillations de son mouvement s'atténuent et disparaissent. Cela se traduit par une stabilisation de son énergie de flexion. Pour toutes les discrétisations utilisées, le tissu se stabilise autour de 1.5 secondes. Cela montre aussi, que notre modélisation de la dissipation visqueuse et les paramètres utilisés sont indépendants de la discrétisation utilisée.

6.5 Amélioration possible de la précision du recalage

L'observation du résultat de la simulation produite pour la discrétisation $0.5cm$ montre que la forme obtenue du tissu n'a pas exactement la forme 3D du tissu réel. Cette différence est confirmée par le critère numérique qui donne une erreur moyenne sur chaque point caractéristique du modèle (chaque masse) de l'ordre de $8mm$. Plusieurs explications peuvent être données à cette différence.

D'abord, tous les paramètres mesurés du tissu (mécanique et viscosité) ont été obtenus pour des conditions expérimentales spécifiques (température et pression) et qui ne sont pas les mêmes pour notre expérimentation de drapé réalisée dans un simple bureau où les conditions atmosphériques ne sont pas contrôlées.

Aussi, et comme pour toute approche de modélisation et de simulation du réel, la différence entre le réel et le virtuel peut venir du modèle lui-même. Notre modélisation est réalisée en respectant le protocole analyse-synthèse. Le modèle provient de mesures réelles effectuées sur les tissus (à l'aide du KES) et ce modèle a été validé dans les cas de la traction et de la flexion par Denise [Den06] et pour le cisaillement (voir le chapitre 5). Le seul comportement d'un tissu réel qui n'est pas pris en compte par notre modèle est la réponse du tissu à une compression dans le sens de la chaîne et de la trame. Cette réponse est en général une résistance très brève à la compression, suivie d'un fléchissement et une déformation du tissu dans une direction perpendiculaire à la contrainte appliquée (en dehors du plan du tissu), et est appelée "flambage" (voir la figure 6.14). Notre

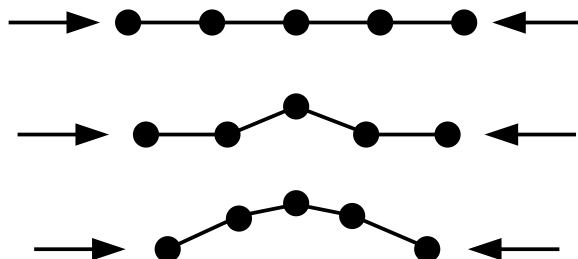


Figure 6.14 – Vue de profil de la déformation d'un tissu au cours du flambage

modèle actuel traite le flambage avec la même loi de réponse que la traction obtenue à partir du KES. Cette limitation de notre modèle est essentiellement due à l'absence d'un

système mécanique de mesure du flambage des tissus dans la littérature, même si Choi et Ko [CK02] ont proposé un modèle de flambage mais qui reste purement théorique sans aucune validation expérimentale.

La figure 6.15 montre l'état de déformation des ressorts de traction (seule la compression est représentée) du tissu simulé à l'équilibre. Les ressorts qui ne subissent aucune compression à l'équilibre sont représentés en noir, puis, plus le ressort est comprimé, plus sa couleur tend vers le blanc. On observe donc d'après la figure que la compression est essentiellement située au niveau des coins de la table.

Aussi, l'erreur résiduelle entre la forme réelle du tissu et la forme virtuelle est essentiellement située au niveau des coins de la table et plus précisément dans l'orientation des oreillettes comme le montre l'image comparative pour la discrétisation $0.5cm$ (surtout la vue de dessus).

On peut donc conjecturer que la différence entre notre modèle et la réalité est due à l'absence de flambage dans notre modèle. En effet, dans la configuration actuelle de notre modèle, le tissu ne peut pas se plier sous une contrainte de compression et adopter ainsi exactement la même orientation de l'oreillette réelle. Au contraire, il résiste très fortement à cette contrainte (la loi en compression est la même que celle en traction, par défaut). La modélisation du flambage pourrait donc achever l'amélioration de notre modèle et aboutir ainsi à des simulations ayant une très grande précision en comparaison avec la réalité.

6.6 Conclusion

La validation des résultats produits par notre simulateur, en les confrontant avec des données réelles, est un point essentiel dans notre démarche de modélisation. Elle permet de juger d'une manière précise l'apport réel de notre modèle de tissu muni de paramètres mesurés. L'acquisition de la forme 3D d'un tissu n'est cependant pas aisée puisque les matériaux tissés sont très déformables.

Dans ce chapitre, on a choisi de comparer un drapé virtuel et un drapé réel pour valider notre modélisation et notre logiciel. Un protocole d'acquisition de la forme réelle 3D du

tissu a été mis en place. La reconstruction de la forme réelle du tissu muni de marqueurs se fait à l'aide d'un certain nombre d'images du tissu et de l'algorithme de calibration-reconstruction POSIT.

L'expérience virtuelle de drapé a été réalisée en utilisant des pas de discrétisation du tissu de plus en plus petits. On a observé que la forme du drapé virtuel converge vers celle du drapé réel au fur et à mesure que l'on diminue le pas d'échantillonnage. En effet, le tissu possède plus de degrés de liberté et peut ainsi reproduire les détails les plus fins du tissu réel (les plis).

On a aussi observé que toutes les simulations de drapé (en utilisant les différents pas d'échantillonnage) se stabilisent au bout du même temps réel (le temps de calcul n'est évidemment pas le même). Ce résultat prouve que les paramètres de dissipation visqueuse mesurés sont indépendants du pas d'échantillonnage.

L'examen du résultat de la simulation de drapé produite pour la plus petite discrétisation ($0.5cm$) montre qu'une erreur résiduelle subsiste même avec ce pas d'échantillonnage très fin. Une asymptote semble être atteinte ce qui nous fait penser que la solution ne se trouve pas dans le choix d'un échantillonnage encore plus fin.

L'explication se trouve dans l'absence d'une modélisation réaliste du flambage dans notre système masses-ressorts. L'observation minutieuse des ressorts du système, montre que la compression des ressorts de traction est essentiellement située au niveau des coins de la table. Une modélisation appropriée du flambage permettrait une déformation plus réaliste du tissu au niveau des coins de la table et une orientation plus juste des oreillettes formées par le tissu à cet endroit, d'où une modélisation du tissu encore plus précise et plus exacte.

La suite de l'effort de validation de notre simulateur de vêtements semble donc claire. La première tâche à réaliser est de munir notre simulateur d'un module de modélisation du flambage. Il faut donc étudier ce phénomène (qui est une instabilité mécanique) dans le cas des tissus, et concevoir des expériences permettant d'estimer les paramètres du modèle de flambage développé pour avoir un comportement plus réaliste du simulateur. La deuxième tâche qui permettra de finaliser la validation de notre simulateur est de concevoir des expériences de validation avec des vêtements et non plus un simple tissu.

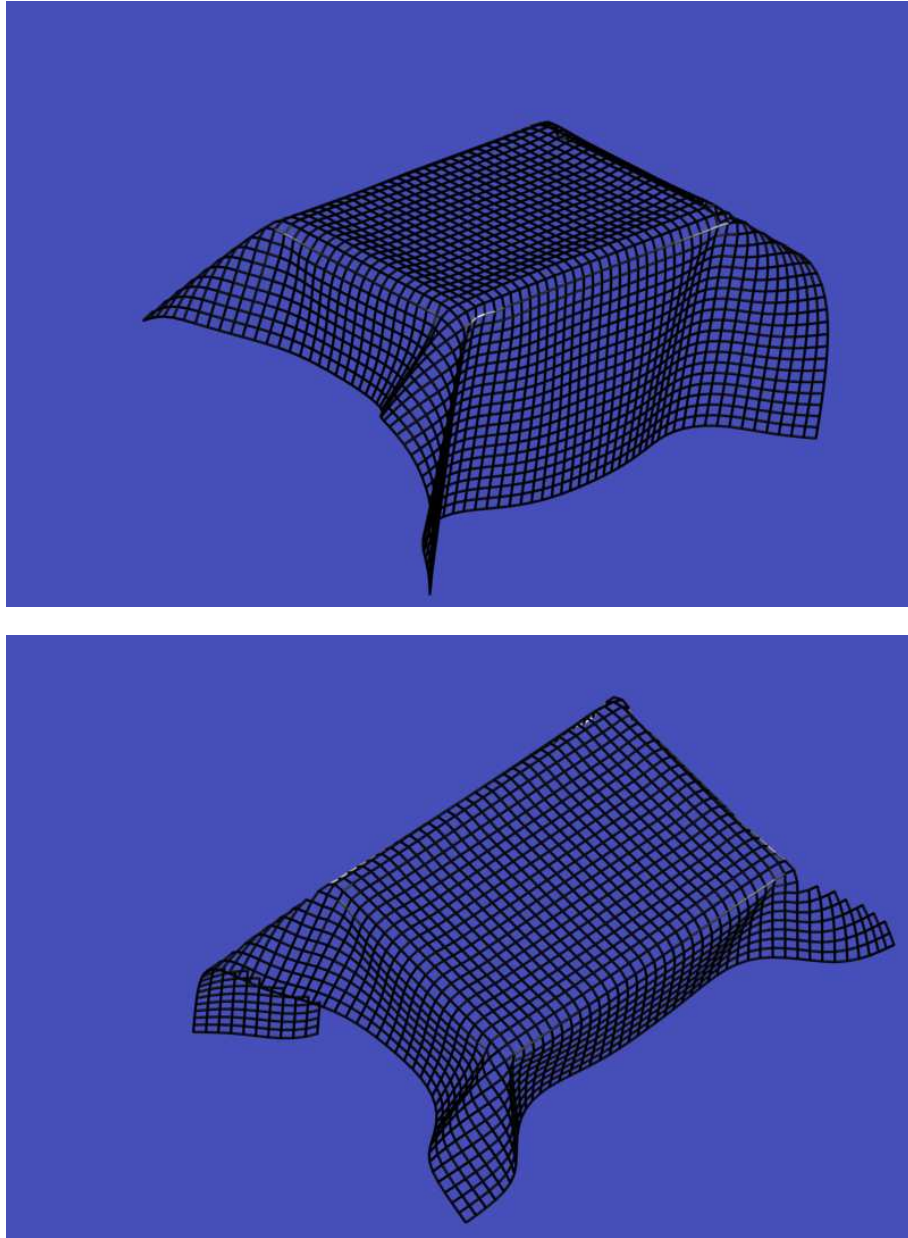


Figure 6.15 – Ressorts en compression (compression maximale : blanc, pas de compression : noir)

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

Nous avons présenté dans cette thèse un ensemble de contributions scientifiques et techniques pour la modélisation et la simulation dynamique des matériaux tissés. Nos travaux se basent sur le simulateur déjà existant au sein du projet Mirages¹ et qui modélise un tissu en chaîne et en trame par un système masses-ressorts. Nos contributions sont de trois natures différentes :

7.1 Modélisation mécanique

Notre contribution dans la modélisation de la mécanique des tissus est la présentation d'un modèle du phénomène de cisaillement dans un système masses-ressorts à partir des mesures réelles fournies par les mesures de Kawabata. On a vu que le phénomène de cisaillement est d'une nature différente en comparaison avec la traction et la flexion, car il ne dépend que de la déformation de l'entrecroisement des fils en chaîne et en trame. Nous avons modélisé le cisaillement par des ressorts linéiques très intéressants en terme de temps de calcul (nous nous affranchissons de calculs trigonométriques inverses) et nous avons développé les fonctions de transferts adéquates pour ces ressorts afin de reproduire exactement le même comportement (même lois de contrainte/déformation) lors de l'expérience de Kawabata de cisaillement. Nous avons réalisé virtuellement cette expérience et nous avons montré que la courbe du comportement global du tissu virtuel

¹INRIA Rocquencourt

(contrainte totale obtenue) se recale parfaitement sur la courbe réelle obtenue par KES.

7.2 Détermination des paramètres des modèles

Notre contribution expérimentale dans la détermination des paramètres dynamiques d'un tissu, est la mise en place d'une expérimentation de mesure des paramètres de dissipation visqueuse d'un tissu en mouvement dans l'air. Notre méthode expérimentale utilise un système de capture de mouvement pour mesurer la cinématique d'un tissu, menu de marqueurs, en chute libre. Le traitement de ces données permet de reconstruire la dynamique du tissu et de retrouver, via l'équation fondamentale de la dynamique, les forces auxquelles il est soumis. Nous avons ainsi recalé les paramètres de dissipation visqueuse représentant le frottement entre le tissu et l'air d'une part, et entre la chaîne et la trame du tissu d'autre part. Nous avons ensuite réalisé virtuellement l'expérience de tombé de tissu et comparé la trajectoire obtenue avec la trajectoire réelle du tissu fournie par le MOCAP afin de valider les paramètres obtenus.

7.3 Validation globale du modèle de tissu

La validation d'un travail de modélisation est essentielle car elle permet de mesurer le chemin parcouru et celui qui reste à faire pour une modélisation précise et réaliste. Notre contribution dans la validation du simulateur de vêtements du projet Mirages, muni des améliorations citées plus haut, a été de mettre en place un protocole d'acquisition de la forme réelle 3D d'un tissu drapé sur une table à partir de photos et d'analyser les simulations produites par notre logiciel en les comparant avec la forme réelle. Les résultats obtenus montrent que la forme obtenue par le simulateur, pour une discrétisation spatiale du tissu suffisamment fine, est très proche de la forme réelle, ce qui montre le bien fondé de notre modélisation et des paramètres utilisés.

Le travail entrepris, depuis trois ans maintenant, nous a permis de comprendre de manière plus précise la mécanique d'un corps très déformable comme un tissu et d'ajouter des briques importantes au logiciel de simulation de vêtements du projet Mirages.

D'autres améliorations sont possibles dans la perspective d'une modélisation encore plus "physique" des phénomènes ayant lieu au sein d'un tissu en mouvement et aussi dans la perspective de simuler un vêtement complet.

7.4 Perspectives

Une amélioration possible au niveau de la précision mécanique de notre modèle masses-ressorts est d'ajouter la modélisation du flambage citée au chapitre 6. Cette instabilité mécanique est responsable de l'apparition de plis et de boucles sur un vêtement et l'absence de ces détails sur les vêtements virtuels réduit fortement le réalisme des simulations produites.

Aussi, la précision mécanique d'une simulation dépend de la précision du schéma d'intégration numérique utilisé. Avec le développement constant de la puissance de calcul des machines, des schémas qui combinent résolutions implicite et explicite commencent à devenir courants dans le domaine de la simulation et ce afin de profiter des avantages des deux méthodes. Des schémas multi-pas qui nécessitent beaucoup d'espace mémoire sont aussi devenus courants dans la simulation de vêtements pour assurer plus de stabilité à la résolution numérique.

La complexification des schémas d'intégration n'aidant pas, il devient primordial de concevoir des logiciels de parallélisation de la simulation de vêtement. Des percées ont été réalisées dans ce sens notamment par Zara [Zar03] et Keckeisen et Blochinger [KB04] mais il reste à paralléliser la détection et la réponse aux collisions du tissu avec des objets et avec lui-même. Sans traitement de collisions, aucune modélisation réaliste et utile des vêtements n'est possible.

Ceci nous amène à évoquer la modélisation de vêtements entiers et non pas seulement des tissus. Un vêtement n'est pas composé d'un seul morceau de tissu mais de plusieurs patrons en général. Les méthodes actuelles de montage d'un vêtement virtuel sont essentiellement interactives et c'est l'utilisateur qui est en charge du placement des patrons autour du corps. On peut envisager des outils de placement automatiques des patrons autour du corps à partir d'informations données par le modéliste pour chaque patron.

Des travaux dans cette direction sont entrepris par Le Thanh et Gagalowicz[TG05]. D'autres éléments sont essentiels dans un vêtement : les coutures, les poches, les pinces. Des vêtements sont parfois composés de plusieurs couches de tissus. Tout ou presque est à faire dans ces domaines. Certaines coutures ou pinces donnent le style du vêtement et ne pas les simuler conduit à un résultat complètement différent de la forme réelle du vêtement.

Toutes ces améliorations sont indispensables pour plus de réalisme dans la simulation de vêtements. Nous avons grand espoir de voir naître ces améliorations pour assister enfin, au décollage de la simulation de vêtements sur ordinateur. Dans un monde dominé par les échanges immatériels, l'enjeu est devenu trop important.

Annexe A

Annexes

A.1 Exemple de problème raide

Voici un exemple de problème raide donné par Baraff [Bar01] pour bien cerner la notion de deux modes dont les évolutions ont des ordres de grandeurs totalement différents.

Soit une particule de coordonnées $(x(t), y(t))$ évoluant dans le plan. Supposons que l'on veuille contraindre cette particule à avoir son ordonnée $y(t)$ toujours égale à zéro et qu'il n'y a pas une telle contrainte sur $x(t)$.

On peut modéliser ce problème par le système différentiel suivant :

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t) \\ -ky(t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

où k est une constante positive très grande. On voit alors que la particule est fortement attirée par la ligne $y = 0$.

Supposons que la particule démarre avec $y_0 \neq 0$. Si on résout le système pour une période de temps suffisamment grande, on s'attend à ce que la particule finisse sur le point $(0, 0)$.

Si on résout le système A.1 en utilisant le schéma d'Euler avec un pas de temps h , on a :

$$X_{suiv} = X_0 + h\dot{X}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -x_0 \\ -ky_0 \end{pmatrix}$$

donc

$$X_{suiv} = \begin{pmatrix} (1-h)x_0 \\ (1-hk)y_0 \end{pmatrix}$$

On considère la composante y . Si $|1 - hk| > 1$, alors $|y_{suiv}| > |y_0|$. A chaque pas de temps, la valeur absolue de y deviendra plus grande et donc la méthode d'Euler ne convergera pas vers la solution.

La méthode d'Euler est donc instable pour $|1 - hk| > 1$. Il faut donc prendre un pas de temps h tel que $|1 - hk| < 1$, c'est à dire $h < \frac{2}{k}$. Le pas de temps le plus grand que l'on puisse prendre est donc plus petit que $\frac{2}{k}$.

On remarque que si k est très grand, il faut prendre un pas de temps très petit. La particule convergera donc très lentement vers la solution $(0, 0)$.

Et même si la condition initiale est très proche de $y_0 = 0$, il faut prendre un pas de temps très petit à un tel point que la progression de la particule sur l'axe des x vers la solution $(0, 0)$ est quasiment stoppée.

A.2 La cochléoïde

Une cochléoïde est la courbe décrite par les coordonnées cartésiennes :

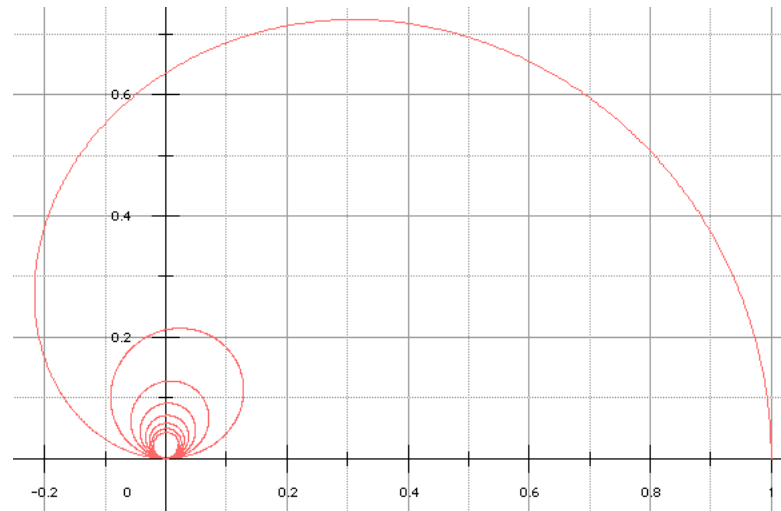
$$X = \frac{\sin L.K}{K} \quad (= 0, \text{ si } K = 0)$$

$$Y = \text{cste}$$

$$Z = \frac{1 - \cos L.K}{K} \quad (= L, \text{ si } K = 0)$$

La courbe A.1 représente une cochléoïde pour t variant de 0 à 8π .

On peut mieux visualiser la trajectoire de la pince lors de l'expérience de Kawabata à l'aide la figure A.2.

Figure A.1 – Cochleïde pour t variant de 0 à 8π

Les courbes bleues montrent les positions successives du tissu lors du test de Kawabata en flexion. On peut montrer que si la pince décrit une cochleïde, tous les arcs de cercle bleus ont la même longueur L .

Soit M le point mobile de la pince. Les coordonnées de M sont donnés par l'équation de la cochleïde.

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{x}{z} \\ &= \frac{\sin L.K}{1 - \cos L.K} \\ &= \tan \frac{L.K}{2}\end{aligned}$$

Donc

$$\theta = \frac{L.K}{2}$$

On peut alors calculer l'angle au centre 2θ qui est égal à $L.K$. Donc chaque courbe bleue de courbure K a une longueur $\frac{L.K}{K}$, c'est à dire L . (On rappelle que la courbure K est l'inverse du rayon du cercle donc la courbe bleue est un arc).

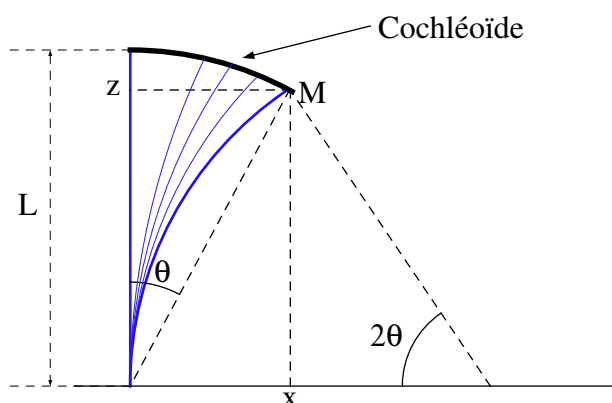


Figure A.2 – Portion d'une cochléoïde

A.3 Expression d'une rotation vectorielle

Soit r la rotation vectorielle d'angle θ d'axe D orienté par le vecteur unitaire \vec{k} .
 Pour tout vecteur \vec{u} , on a [Fer] :

$$r(\vec{u}) = (\cos \theta)\vec{u} + (1 - \cos \theta)(\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k} + (\sin \theta)\vec{k} \wedge \vec{u}$$

On peut illustrer cette proposition de la manière suivante (voir la figure A.3) :

Soit \vec{v} le vecteur projeté de \vec{u} sur P le plan orthogonal à la droite dirigée par le vecteur \vec{k} .

On a donc $\vec{v} = \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k}$, puis $\vec{k} \wedge \vec{v} = \vec{k} \wedge \vec{u}$.

Soit \vec{w} le projeté de $r(\vec{u})$ sur P .

$$r(\vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k} + \vec{w}. \text{ Or } \vec{w} = (\cos \theta)\vec{v} + (\sin \theta)\vec{k} \wedge \vec{u}.$$

On en déduit $r(\vec{u}) = (\cos \theta)\vec{u} + (1 - \cos \theta)(\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k} + (\sin \theta)\vec{k} \wedge \vec{u}$.

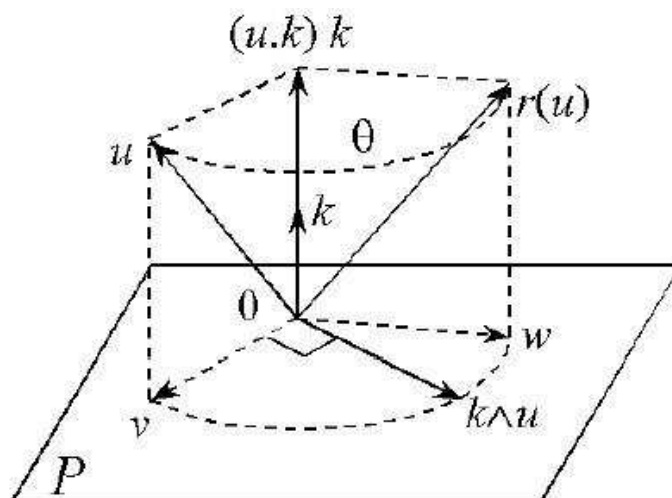


Figure A.3 – Rotation vectorielle

A.4 Démonstration de l'égalité 4.9

L'espace étant muni du repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère F une matrice de la forme :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit \overrightarrow{dm}_0 et \overrightarrow{dm}'_0 deux vecteurs dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) . On écrit :

$$\overrightarrow{dm}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{dm}'_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$F\overrightarrow{dm_0} \wedge F\overrightarrow{dm'_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t(x_1y_2 - x_2y_1) \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{dm_0} \wedge \overrightarrow{dm'_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (x_1y_2 - x_2y_1) \end{pmatrix}$$

or

$$\det(F) = t$$

donc

$$F\overrightarrow{dm_0} \wedge F\overrightarrow{dm'_0} = \det F(\overrightarrow{dm_0} \wedge \overrightarrow{dm'_0})$$

Bibliographie

- [AB03] U. Ascher and E. Boxerman, *On the modified conjugate gradient method in cloth simulation*, The Visual Computer **19** (2003), no. 7–8, 523–531.
- [Aon90] M. Aono, *A wrinkle propagation model for cloth*, Computer Graphics Around the World (Proc. CG International) (T.S. Chua and T.L. Kunii, eds.), Springer-Verlag, Tokyo, 1990, pp. 95–115.
- [AQS00] A. Sacco A. Quarteroni and F. Saleri, *Méthodes numériques pour le calcul scientifique*, Springer, 2000.
- [Bar01] D. Baraff, *Implicit methods for differential equations*, Siggraph 2001 Course notes - Physically Based Modeling, 2001.
- [Bat82] K.L. Bathe, *Finite elements procedures in engineering analysis*, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1982.
- [BFA02] R. Bridson, R. Fedkiw, and J. Anderson, *Robust treatment of collisions, contact and friction for cloth animation*, ACM Transactions on Graphics (ACM SIGGRAPH 2002) **21** (2002), no. 3, 594–603.
- [BHG92] D. Breen, D. House, and P. Getto, *A physically-based particle model of woven cloth*, The Visual Computer **8** (1992), no. 5–6, 264–277.
- [BHW94a] D. Breen, D. House, and M. Wozny, *A particle-based model for simulating the draping behavior of woven cloth*, Textile Research Journal **64** (1994), no. 11, 663–685.
- [BHW94b] ———, *Predicting the drape of woven cloth using interacting particles*, Proceedings of ACM SIGGRAPH 94, ACM Press, 1994, pp. 365–372.

- [BHW96] Ronen Barzel, John F. Hughes, and Daniel N. Wood, *Plausible motion simulation for computer graphics animation*, Computer Animation and Simulation '96, 1996, pp. 183–197.
- [BS91] P.A. Bliman and M. Sorine, *Friction modelling by hysteresis operators. application to dahl, stiction and stribeck effects*, In Proceedings of the conference Models of Hysteresis (Trento, Italy), 1991.
- [BTH⁺03] K. Bhat, C. Twigg, J. Hodgins, P. Khosla, Z. Popović, and S. Seitz, *Estimating cloth simulation parameters from video*, Proceedings of ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation (SCA 2003), ACM Press, 2003, pp. 37–51.
- [But87] J. Butcher, *The numerical analysis of ordinary differential equations : Runge kutta and general linear methods*, Wiley, Chichester, 1987.
- [BW98] D. Baraff and A. Witkin, *Large steps in cloth simulation*, Proceedings of ACM SIGGRAPH 98, ACM Press, 1998, pp. 43–54.
- [BZnAG04] P. Boisse, B. Zouari, and F. Dumont nd A. Gasser, *Assemblage de fibres par tissage : analyse et simulation du comportement mécanique*, Mécanique et Industries **6** (2004), 65–74.
- [CBG05] H. Charfi, R. Brun, and A. Gagalowicz, *Measurement of fabric viscosity*, Mirage 2005, March 2005, pp. 261–268.
- [CCOS91] J.R. Colier, B.J. Collier, G. OToole, and S.M. Sargand, *Drape prediction by means of finite-element analysis*, Journal of the Textile Institute **82** (1991), 96–107.
- [CCT50] C.C. Chu, C.L. Cummings, and N.A. Teixeira, *Mechanics of elastic performance of textile materials, part v : A study of the factors affecting the drape of fabrics—the development of a drape meter*, Textile Research Journal **20** (1950), 539–548.
- [CG05] H. Charfi and A. Gagalowicz, *A new technique to measure rayleigh's viscosity parameters of textile*, ISC 2005, Eurosis-ETI, June 2005, pp. 380–387.
- [CGB05] H. Charfi, A. Gagalowicz, and R. Brun, *Determination of fabric viscosity parameters using iterative minimization*, Computer Analysis of Images and

- Patterns : 11th International Conference, CAIP 2005, Versailles, France, September 5-8, 2005. Proceedings, Springer-Verlag GmbH, 2005, pp. 789–798.
- [CGB06] ———, *Measurement of viscosity damping parameters of fabric related to a non linear textile model*, Textile Research Journal (2006), Accepted.
- [Chr71] R.M Christensen, *Theory of viscoelasticity : An introduction*, Academic Press, New York, 1971.
- [CK02] K.-J. Choi and H.-S. Ko, *Stable but responsive cloth*, ACM Transactions on Graphics (ACM SIGGRAPH 2002) **21** (2002), no. 3, 604–611.
- [CM89] M. Crouzeix and A.L. Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*, 2e édition ed., Masson, 1989.
- [CYMTT92] M. Carignan, Y. Yang, N. Magnenat-Thalmann, and D. Thalmann, *Dressing animated synthetic actors with complex deformable clothes*, Computer Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH 92), ACM Press, 1992, pp. 99–104.
- [Den06] J. Denise, *Simulation mécanique de vêtements*, Thèse de doctorat Paris 6, 2006.
- [DGR00] J.W. Dias, M.N. Gambito, and J.M. Rebordão, *A discretized linear elastic model for cloth buckling and drape*, Textile Research Journal **70** (2000), 285.
- [DL95] D.F. Dementhon and L.S.Davis, *Model-based object pose in 25 lines of code*, International Journal of computer Vision, vol. 15, 1995, pp. 123–141.
- [DRG03] J. Denise, D. Reversat, and A. Gagalowicz, *Modeling hysteretic behaviour of fabrics*, Proceedings of Mirage 2003 (INRIA Rocquencourt-Paris), March 2003, pp. 89–95.
- [DRTM93] S. G. Dhande, P. V. M. Rao, S. Tavakkoli, and C. L. Moore, *Geometric modeling of draped fabric surfaces*, ICCG '93 : Proceedings of the IFIP TC5/WG5.2/WG5.10 CSI International Conference on Computer Graphics, North-Holland, 1993, pp. 349–356.

- [DSB99] M. Desbrun, P. Schröder, and A. Barr, *Interactive animation of structured deformable objects*, Proceedings of Graphics Interface (GI 1999), Canadian Computer-Human Communications Society, 1999, pp. 1–8.
- [EEH00] B. Eberhardt, O. Eitzmuß, and M. Hauth, *Implicit-explicit schemes for fast animation with particle systems*, Proceedings of the Eurographics Workshop on Computer Animation and Simulation (CAS 2000), Springer-Verlag, 2000.
- [Eul44] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minive proprietate gaudentes*, Aditamentum I, De curvis elasticis - Lausanne, 1744.
- [EWS96] B. Eberhardt, A. Weber, and W. Straßer, *A fast, flexible, particle-system model for cloth draping*, IEEE Computer Graphics and Applications **16** (1996), no. 5, 52–59.
- [Fer] J-M. Ferrard, *Géométrie euclidienne en dimension 3*, <http://perso.wanadoo.fr/mathprepa/cours1/geomeucl3d.pdf>.
- [Fey86] C. Feynman, *Modeling the appearance of cloth*, Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1986.
- [FS96] Frenkel and Smit, *Understanding molecular simulation*, Academic Press, 1996.
- [Gara] J. Garrigues, *La méthode des éléments finis*, <http://esm2.imt-mrs.fr/gar/gdhtml/ef.html>.
- [Garb] Jean Garrigues, *Mécanique des milieux continus en déformations finies*, <http://esm2.imt-mrs.fr/gar/gdhtml/gd.html>.
- [Gar99] ———, *Statique des coques élastiques*, <http://esm2.imt-mrs.fr/gar/coqhtml/courscoqnode17.html>, 1999.
- [GBB90] T.K. Gosh, S.K. Batra, and R.L. Barker, *The bending behaviour of plain woven fabrics*, Journal of the Textile Institute **81** (1990), 245–287.
- [GRS95] E. Groller, R.T. Rau, and W. Strasser, *Modeling and visualization of knitwear*, IEEE Trans. Vis. Comput. Graph. **1** (1995), no. 4, 302–310.

- [HES03] M. Hauth, O. Eitzmuß, and W. Straßer, *Analysis of numerical methods for the simulation of deformable models*, The Visual Computer **19** (2003), no. 7–8, 581–600.
- [HM90] B. K. Hinds and J. McCartney, *Interactive garment design.*, The Visual Computer **6** (1990), no. 2, 53–61.
- [HW91] E. Hairer and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations 2 stiff and differential algebraic problems*, second revised edition 1996 ed., Springer Series in Comput. Mathematics, vol. 14, Springer Verlag, 1991.
- [Jay03] A. El Jay, *Eléments d'analyse numérique*, Presses Universitaires de Perpignan, 2003.
- [JH97] N. Jovic and T. Huang, *Estimating cloth draping parameters from range data*, Proceedings of International Workshop on Synthetic-Natural Hybrid Coding and 3-D Imaging, 1997, pp. 73–76.
- [JH98] ———, *On analysis of cloth drape range data*, Proceedings of Asian Conference on Computer Vision, Springer-Verlag, 1998, pp. 463–470.
- [Jou92] A. Joukhadar, *Simulation dynamique et applications robotiques*, Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1992.
- [JS01] X. Ju and P. Siebert, *Conforming generic animatable models to 3d scanned data*, Conference on Human Modeling, Paris, 2001.
- [Kaw80] S. Kawabata, *The standardization and analysis of hand evaluation*, The Textile Machinery Society of Japan, 1980.
- [KB04] M. Keckeisen and W. Blochinger, *Parallel implicit integration for cloth animations on distributed memory architectures*, Proceedings of the Eurographics Symposium on Parallel Graphics and Visualization, Blackwell Publishing, 2004.
- [Kec05] Michael Keckeisen, *Physical cloth simulation and applications for the visualization, virtual try-on and interactive design of garments*, Ph.D. thesis, Tübingen University, 2005.
- [Kem58] A. Kemp, *An extension of peirce's cloth geometry to the treatment of non-circular threads*, Textile Research Journal **49** (1958), 44–48.

- [KG90] T.L. Kunii and H. Gotoda, *Singularity theoretical modeling and animation of garment wrinkle formation processes*, The Visual Computer **6** (1990), 326–336.
- [KKTW04] M. Keckeisen, S. Kimmerle, B. Thomaszewski, and M. Wacker, *Modelling effects of wind fields on cloth animations*, Proceedings of Winter School of Computer Graphics (WSCG 2004), 2004.
- [LA85] G.A.V. Leaf and R.D. Anadjiwala, *A generalized model of plain woven fabric*, Textile Research Journal **55** (1985), 92–99.
- [Lov54] L. Love, *Graphical relationships in cloth geometry for plain, twill and sateen weaves*, Textile Research Journal **24(12)** (1954), 1073–1083.
- [Low91] D.G. Lowe, *Fitting parameterized three-dimensional models to images*, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 13, 1991, pp. 441–450.
- [LPC95] J. Louchet, X. Provot, and D. Crochemore, *Evolutionary identification of cloth animation models*, Proceedings of the Eurographics Workshop on Computer Animation and Simulation (CAS 1995), Springer-Verlag, Sep 1995, pp. 44–54.
- [Mil88] G. S. P. Miller, *The motion dynamics of snakes and worms*, Computer Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH 88) **22** (1988), no. 4, 169–177.
- [Ngo03] C. Ngo Ngoc, *Modélisation non linéaire et simulation des matériaux souples textiles*, Ph.D. thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille I, Jan 2003.
- [NNR01] O. Nocent, J.M. Nourrit, and Y. Remion, *Towards mechanical level of detail for knitwear simulation*, WSCG 2001 Conference Proceedings (V. Skala, ed.), 2001.
- [Noc97] O. Nocent, *Animation réaliste de textiles*, 5èmes journées AFIG, décembre 1997, Rennes.

- [Noc01] ———, *Animation dynamique de corps déformables continus - application à la simulation de textiles tricotés*, Ph.D. thesis, Université de Reims Champagne-Ardenne, 2001.
- [Nou99] J.M. Nourrit, *Modélisation, animation et visualisation de textiles à base de mailles*, Informatique, Université de Reims Champagne-Ardenne, 1999.
- [Olo64] B. Olofsson, *A general model of fabric as a geometric-mechanical structure*, Journal of the Textile Institute **55** (1964), 541–557.
- [Pie30] F.T. Pierce, *The handle of cloth as measurable quantity*, Journal of the Textile Institute **21** (1930), 377–416.
- [Pro95] X. Provot, *Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior*, Proceedings of Graphics Interface (GI 1995), Canadian Computer-Human Communications Society, 1995, pp. 147–154.
- [Pro97] ———, *Animation réaliste de vêtements*, Ph.D. thesis, Université de Paris 5, 1997.
- [Ree83] W.T. Reeves, *Particle systems - a technique for modeling a class of fuzzy objects*, Computer Graphics **17** (1983), no. 3, 359–376.
- [Rey87] C. Reynolds, *Flocks, herds and schools : A distributed behaviour model.*, Proceedings of ACM SIGGRAPH 87, ACM Press, 1987, pp. 25–34.
- [RG04] Richard Roussel and André Gagalowicz, *Realistic face reconstruction from uncalibrated images.*, VMV, 2004, pp. 141–149.
- [Sch01] Michelle Schatzman, *Analyse numérique une approche mathématique*, DUNOD, 2001.
- [Sta99] J. Stam, *Stable fluids*, In SIGGRAPH 99 Conference Proceedings, Annual Conference Series, 1999, pp. 121–128.
- [TF88a] D. Terzopoulos and K. Fleischer, *Deformable models*, The Visual Computer **4** (1988), no. 6, 306–331.
- [TF88b] ———, *Modeling inelastic deformation : viscoelasticity, plasticity, fracture*, Computer Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH 88), ACM Press, July 1988, pp. 269–278.

- [TG05] Tung Le Thanh and André Gagalowicz, *Virtual garment pre-positioning*, CAIP 2005, 2005, pp. 837–845.
- [TPBF87] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr, and K. Fleischer, *Elastically deformable models*, Computer Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH 87), ACM Press, July 1987, pp. 205–214.
- [Tsa86] R.Y. Tsai, *An efficient and accurate camera calibration technique for 3d machine vision*, Computer Vision and Pattern Recognition, 1986, pp. 364–374.
- [TT94] X. Tu and D. Terzopoulos, *Artificial fishes : physics, locomotion, perception, behavior*, Computer Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH 94) (Orlando), ACM Press, 1994, pp. 43–50.
- [VCMT95] P. Volino, M. Courchesne, and N. Magnenat-Thalmann, *Versatile and efficient techniques for simulating cloth and other deformable objects*, Proceedings of ACM SIGGRAPH 95, ACM Press, 1995, pp. 137–144.
- [VMT00] P. Volino and N. Magnenat-Thalmann, *Implementing fast cloth simulation with collision response*, Proceedings of Computer Graphics International (CGI 2000), IEEE Computer Society, June 2000, pp. 257–268.
- [VMT01] ———, *Comparing efficiency of integration methods for cloth simulation*, Proceedings of Computer Graphics International (CGI 2001), IEEE Computer Society, 2001, pp. 265–274.
- [VMTJT96] P. Volino, N. Magnenat-Thalmann, S. Jianhua, and D. Thalmann, *An evolving system for simulating clothes on virtual actors*, IEEE Computer Graphics and Applications **16** (1996), no. 5, 42–51.
- [Wei86] Jerry Weil, *The synthesis of cloth objects*, SIGGRAPH '86 : Proceedings of the 13th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (New York, NY, USA), ACM Press, 1986, pp. 49–54.
- [Yua89] J.S.-C. Yuan, *A general photogrammetric method for determining object position and orientation*, IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 5, 1989, pp. 129–142.

- [Zar03] F. Zara, *Algorithmes parallèles de simulation physique pour la synthèse d'images : application à l'animation de textiles*, Ph.D. thesis, INPG, 2003.